



HAL
open science

L'anneau de cohomologie des résolutions crépantes de certaines singularités-quotient

Sébastien Garino

► **To cite this version:**

Sébastien Garino. L'anneau de cohomologie des résolutions crépantes de certaines singularités-quotient. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2007. Français. NNT: . tel-00158942

HAL Id: tel-00158942

<https://theses.hal.science/tel-00158942>

Submitted on 2 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
Sciences et Technologies de l'Information et des Matériaux

Année 2007

N° attribué par la bibliothèque:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

L'anneau de cohomologie
des résolutions crépantes
de certaines singularités-quotient

THÈSE DE DOCTORAT
Discipline: Mathématiques
Spécialité: Géométrie Algébrique

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Sébastien GARINO

Le 25 Juin 2007, devant le jury ci-dessous:

Président : Vincent FRANJOU	Professeur (Nantes)
Rapporteurs : José BERTIN	Professeur (Grenoble)
Alastair KING	Professeur (Bath)
Examineurs : Laurent EVAIN	Maître de Conférences (Angers)
Christoph SORGER	Professeur (Nantes)

Directeur de thèse:
Christoph Sorger

Laboratoire:
Jean Leray (UMR 6629)

ED 366-304

L'anneau de cohomologie des résolutions crépantes
de certaines singularités-quotient

Sébastien Garino

25 Juin 2007

Table des matières

1	G-schéma de Hilbert : construction	1
1.1	Grassmanienne d'un \mathcal{O}_S -module	1
1.2	Grassmanienne d'un $\mathcal{O}_S[G]$ -module	2
1.3	Grassmanienne d'une $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbre	2
1.4	Définition de $G\text{-Hilb}(X)$	3
1.5	Définition de $G\text{-Hilb}^d(X)$	5
1.6	Calcul de $G\text{-Hilb}^d(X)$ dans le cas affine	5
2	G-schéma de Hilbert : approches classiques revisitées	9
2.1	Construction classique	9
2.2	Théorème de Chevalley, Shephard, Todd, Luna	11
2.3	Quelques propriétés élémentaires	13
2.4	Méthode de calcul de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$, $G \subset GL_n(k)$	15
2.5	Le théorème de Nakamura revisité	19
2.6	$G\text{-Hilb}^d(k^3)$, $G \subset (k^*)^3 \cap SL_3(k)$	21
2.7	$G\text{-Hilb}^d(k^n)$, $G = Z(SL_n(k))$	27
3	Anneau de cohomologie dans le cas local	29
3.1	Action, lieu singulier et résolutions crépantes	29
3.2	Groupes d'homologie	31
3.3	Groupes de cohomologie	35
3.4	Nombre d'intersections de trois diviseurs	37
3.5	Calcul des anneaux $H^*(Y)$ et $H^*_o(Q)$	40
3.6	Exemple	41
4	Anneau de cohomologie dans le cas compact	43
4.1	Action, lieu singulier et résolutions crépantes	43
4.2	Groupes de cohomologie	48
4.3	Nombre d'intersections de trois diviseurs	56
4.4	Calcul de l'anneau $H^*(Y)$	64
4.5	Calcul de l'anneau $H^*_o(Q)$	66
4.6	Comparaison des anneaux	70
4.7	Exemple	71

A	$\mathcal{O}_S[G]$-modules et $\mathcal{O}_S[G]$-algèbres	81
A.1	La catégorie Mod_S^G	81
A.2	La catégorie Alg_S^G	83
B	Géométrie torique	85
B.1	Tores	85
B.2	Variétés toriques	85
B.3	Morphismes toriques	88
B.4	Sous-variétés toriques	89
B.5	Groupes de Picard et des classes d'équivalences rationnelles	89
B.6	Résolutions de singularités	90
B.7	Un résultat de rétraction topologique	92
C	Résolutions toriques crépantes de k^n/G, $G \subset (k^*)^n \cap SL_n(k)$	95
C.1	Le quotient comme variété torique	95
C.2	Les résolutions crépantes dans le cas spécial linéaire	96
D	Résolutions crépantes dans le cas complexe	103
D.1	Critère d'algébricité d'un morphisme	103
D.2	Relèvement d'une action de \mathbb{C}^*	104
D.3	Résolutions crépantes de \mathbb{C}^n/G , $G \subset (\mathbb{C}^*)^n \cap SL_n(\mathbb{C})$	105
E	Cohomologies classique et orbifold	107
E.1	Cohomologie classique	107
E.2	Cohomologie orbifold de V/G , $G \subset GL(V)$	111
E.3	Cohomologie orbifold de X/G , G abélien	113
F	Variétés abéliennes	117
F.1	Paires de type 0	117
F.2	Paires de type 1	118
F.3	Paires de type 2 ou 3	121

Introduction

Nous commençons ici par présenter la correspondance de McKay, la conjecture de Ruan et le G -schéma de Hilbert. Ce faisant, nous précisons le cadre général de cette thèse. Puis nous présenterons nos résultats.

Correspondance de McKay

Dans les années 80, John McKay fit l'observation suivante. Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{C})$. On considère Q , le quotient géométrique de l'action de G sur \mathbb{C}^2 . La variété Q a une singularité isolée à l'origine et admet une (unique) résolution minimale Y . Les diviseurs exceptionnels de la résolution Y sont des courbes rationnelles s'intersectant transversalement en au plus un point et d'auto-intersection -2 . À partir du lieu exceptionnel, on construit le graphe dual de Y . Les sommets de ce graphe sont les diviseurs exceptionnels. Le nombre d'arêtes joignant deux sommets est le nombre d'intersections des diviseurs correspondants. La représentation linéaire R fournie par l'action de G sur \mathbb{C}^2 est auto-duale. À partir de cette représentation auto-duale, on construit le diagramme de McKay de R . Les sommets de ce graphe sont les représentations linéaires irréductibles non-triviales de G . Le nombre d'arêtes joignant deux sommets (correspondant à deux représentations R_i et R_j) est la multiplicité de R_i dans la décomposition isotypique de la représentation $R \otimes_{\mathbb{C}} R_j$ (cette définition étant symétrique). L'observation de McKay était la suivante ([McK81]) :

Théorème (Correspondance de McKay classique). Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{C})$. On considère Q le quotient \mathbb{C}^2 par G et Y la résolution minimale de Q . On note R la représentation associée à l'action de G sur \mathbb{C}^2 . Alors le graphe dual de Y est égal au graphe de McKay de R .

Gonzalez-Sprinberg et Verdier mirent en évidence géométriquement cette observation à l'aide de fibrés tautologiques ([GSV83]). Ils nommèrent ce phénomène correspondance du McKay. Classiquement, on parle de singularité de type ADE pour désigner une singularité du quotient Q de \mathbb{C}^2 par $G \subset SL_2(\mathbb{C})$. En effet, le graphe dual de Y est un graphe de Dynkin de type ADE (voir [DV34] et [Art66]).

Ito et Reid proposèrent la généralisation ci-dessous de la correspondance de McKay Classique. Cette correspondance de McKay généralisée fut prouvée par Ito et Reid eux-mêmes en dimension trois ([IR96]) puis par Batyrev en toute dimension ([Bat99]). Soit G un sous-groupe fini de $SL_n(\mathbb{C})$. On appelle âge d'un élément g de G et on note $a(g)$ le nombre $\sum_j \lambda_j$ où les $e^{2i\pi\lambda_j}$ ($\lambda_j \in [0, 1[$) sont les valeurs propres de g , répétées si multiples. Le

nombre $a(g)$ est un entier compris entre 0 et $n - 1$ invariant par conjugaison. En considérant Q le quotient de \mathbb{C}^n par G , on dit qu'une résolution de singularités $\tau : Y \rightarrow Q$ est crépante si ω_Y est isomorphe à \mathcal{O}_Y .

Théorème (Correspondance de McKay généralisée). Soit G un sous-groupe fini de $SL_n(\mathbb{C})$. On considère Q le quotient de \mathbb{C}^n par G et on suppose donnée Y une résolution crépante de Q . La cohomologie de Y à coefficients rationnels est nulle en degrés impairs. En degrés pairs, le rang de $H^{2k}(Y)$ est égal au nombre de classes de conjugaison de G d'âge k .

La correspondance de McKay a depuis connu de nombreuses autres généralisations et est devenue un principe. Nous pouvons formuler ce principe dans le cadre suivant, qui sera le cadre de cette thèse. Soit X une variété lisse et G un sous-groupe fini d'automorphismes. On suppose que l'action préserve le volume (i.e. pour tout point x de X , $G_x \subset SL(T_x X)$). On suppose de plus que l'action de G sur X est admissible (i.e. X est recouvert par des ouverts affines G -invariants) de sorte que le quotient géométrique $\phi : X \rightarrow Q$ existe. La variété Q est normale mais singulière. Cependant, le fibré canonique ω_X descend en un fibré sur Q . Puisque ce fibré étend le fibré canonique de l'ouvert lisse de Q , on l'appelle fibré canonique de Q et on le note ω_Q . Une résolution de singularités $\tau : Y \rightarrow Q$ (i.e. un morphisme propre qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert lisse) est dite crépante si ω_Y est naturellement isomorphe à $\tau^*(\omega_Q)$ (i.e. l'isomorphisme prolonge celui au-dessus de l'ouvert lisse). Dans ce cadre, la correspondance de McKay est le principe selon lequel certaines informations géométriques de Y se lisent dans la géométrie de l'action de G sur X . Les informations géométriques de Y considérées sont souvent la catégorie dérivée bornée ou l'anneau de cohomologie. On parle alors de correspondance de McKay dérivée ou multiplicative. Dans cette thèse, on s'intéresse à la correspondance de McKay multiplicative : décrire l'anneau de cohomologie de Y à partir de la géométrie de l'action de G sur X . Les exemples originaux de travaux concernant le cup produit de la cohomologie de Y sont les suivants :

- $X = (\mathbb{C}^2)^n$, $G = \mathfrak{S}_n$, $Y = \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ ([LS01])
- $X = M^n$, $G = \mathfrak{S}_n$, $Y = \text{Hilb}^n(M)$ ([LS03] et [LQW04])
(M surface quasi-projective, ω_M numériquement trivial)
- $X = (\mathbb{C}^2)^n$, $G \subset Sp((\mathbb{C}^2)^n)$, Y quelconque ([GK04])

Sur chacun de ses exemples, l'anneau de cohomologie de Y à coefficients complexes peut être décrit par un modèle ne faisant intervenir que la géométrie de l'action de G sur X , de sorte la correspondance de McKay multiplicative obtenue valide une conjecture plus générale : la conjecture de Ruan.

Conjecture de Ruan

La conjecture de Ruan provient de la théorie des cordes en physique. Elle s'énonce dans le cadre des orbifolds complexes qui est plus général que

de cadre des quotients pour la correspondance de McKay multiplicative. Un orbifold est un espace topologique ayant pour modèle local le quotient d'une variété lisse par un groupe fini (voir [Sat56] ou [CR04]). Un orbifold est dit complexe si il est localement le quotient d'une variété algébrique complexe lisse par un groupe fini d'automorphismes. Chen et Ruan ont défini l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(O)$ pour un orbifold complexe O ([CR04]). Fantechi et Göttsche redonnent une définition de l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(Q)$ dans le cas d'un quotient Q de X par G ([FG03]). Remarquons que $H_o^*(Q)$ est un modèle d'anneau défini à partir de la géométrie de l'action de G sur X .

Un orbifold complexe O est dit Gorenstein si il est localement le quotient d'une variété complexe par un groupe fini d'automorphismes dont l'action préserve le volume. Dans ce cas, il existe un unique fibré sur O qui étend le fibré canonique sur l'ouvert lisse de O . Ce fibré est donc appelé fibré canonique de O et noté ω_O . Une résolution de singularités $\tau : Y \rightarrow O$ est dite crépante si $\tau^*(\omega_O)$ est naturellement isomorphe à ω_Y . Selon la conjecture de Ruan, il existe un isomorphisme d'espace vectoriel de $H_o^*(O)$ dans $H^*(Y)$ (à coefficients complexes) qui identifie le cup produit orbifold au cup produit déformé par certains invariants quantiques ([Rua06]). Il est à noter que cette conjecture ne précise pas l'isomorphisme d'espaces vectoriels et n'est formulée que dans le cas compact.

Remarquons que, dans le cas du quotient Q de \mathbb{C}^n par $G \subset SL_n(\mathbb{C})$, le conjecture de Ruan est compatible avec la correspondance de McKay généralisée. En effet, dans ce cas $H_o^*(Q) = Gr^F Z(\mathbb{C}[G])$ où F est la filtration de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ par (deux fois) l'âge. Donc la correspondance de McKay généralisée implique l'existence d'un isomorphisme (même gradué) entre les espaces vectoriels $H_o^*(Q)$ et $H^*(Y)$.

Pour les exemples originaux de travaux concernant le cup produit de la cohomologie de Y , cités précédemment, les anneaux $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$ sont isomorphes. Puisque sur ces exemples les invariants quantiques sont tous nuls, la conjecture de Ruan est vérifiée.

Les exemples pour lesquels la conjecture de Ruan a été vérifiée avec invariants quantiques non nuls s'inscrivent dans le cadre des orbifolds à singularités *ADE*-transversales introduit par Perroni ([Per]). Perroni considère un orbifold O dont le lieu singulier S est lisse de codimension 2 et tel que Q soit décrit analytiquement au voisinage de S comme une famille paramétrée par S d'un germe de singularité de type *ADE*. Un tel orbifold O admet une unique résolution crépante Y . Dans le cas où O est compact et la singularité est de type *A*, Perroni propose un isomorphisme d'espace vectoriels entre $H_o^*(O)$ et $H^*(Y)$. Dans le cas de singularités A_1 et A_2 -transversales, il vérifie la conjecture de Ruan. En fait, les exemples originaux de vérification de la conjecture de Ruan pour des singularités de type A_1 , A_2 et A_3 -transversales sont les suivants :

- Le quotient Q de M^2 par σ_2 , M surface projective ([LQ02])

- Le quotient Q de \mathbb{C}^2 par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ([BGP])
- L'espace projectif à poids $\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)$ ([BMP])

G -schéma de Hilbert

Soit G un sous-groupe fini d'automorphismes d'une variété lisse X . On suppose que l'action de G sur X est admissible et préserve le volume. On considère $\pi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. La correspondance de McKay fait intervenir une résolution crépante $\tau : Y \rightarrow Q$. En dimension deux, il existe une unique résolution crépante qui est la résolution minimale. Mais en dimension supérieure, il n'y a ni existence, ni unicité d'une résolution crépante en général.

Cependant, pour X quasi-projective, Ito et Nakamura ont introduit le G -schéma de Hilbert dynamique de X , noté ici $G\text{-Hilb}^d(X)$, comme candidat naturel à la résolution crépante de Q ([IN96]). Q peut être vu comme une composante irréductible de $S^n(X)^G$ où n est l'ordre de G . Il existe un morphisme naturel de $\text{Hilb}^n(X)$ dans $S^n(X)$ appelé morphisme de Hilbert-Chow. Le G -schéma de Hilbert dynamique de X est défini par Ito et Nakamura comme la composante irréductible de $\text{Hilb}^n(X)^G$ birationnelle à Q . Il existe ainsi un morphisme projectif naturel $\tau : G\text{-Hilb}^d(X) \rightarrow Q$, qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert de Q formé des G -orbites libres.

Effectivement, Nakamura démontre que dans le cas où G est un sous-groupe abélien de $SL_3(\mathbb{C})$, $G\text{-Hilb}^d(\mathbb{C}^3)$ est lisse et τ est crépante ([Nak01]). Plus généralement, Bridgeland, King et Reid démontrent qu'en dimension inférieure à trois, $G\text{-Hilb}^d(X)$ est lisse et τ est crépante ([BKR01]).

Une G -grappe est un sous-schéma fermé G -invariant de X de dimension zéro dont l'espace des fonctions globales est isomorphe à la représentation régulière (voir [IN00]). Têrouanne a construit le G -schéma de Hilbert, noté ici $G\text{-Hilb}(X)$ comme l'espace de module des G -grappes, en le plongeant dans $\text{Hilb}^n(X)^G$ ([Tér04]). Le G -schéma de Hilbert dynamique est alors une composante irréductible du G -schéma de Hilbert.

Le support d'une G -grappe est une G -orbite. Il existe donc un morphisme naturel de $G\text{-Hilb}(X)$ dans Q qui, au niveau des points fermés, associe à une G -grappe son support. Comme le remarque Mukai, la bonne manière de voir $G\text{-Hilb}(X)$ est au-dessus de Q . Blume a donné une construction fonctorielle de $G\text{-Hilb}(X)$ au-dessus de Q , sans hypothèse de quasi-projectivité sur X ([Blu]).

Étant candidat naturel à la résolution crépante de Q , le G -schéma de Hilbert dynamique a suscité de nombreux travaux portant sur sa description explicite, motivés par la correspondance de McKay. Nakamura a introduit une méthode de calcul de $G\text{-Hilb}^d(\mathbb{C}^n)$ lorsque G est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*)^n$ ([Nak01]). Il applique sa méthode au cas de la dimension $n = 3$ et prouve ainsi que $G\text{-Hilb}^d(\mathbb{C}^3)$ est lisse et τ est crépante. Craw et Reid ont repris ce travail et donné une description $G\text{-Hilb}^d(\mathbb{C}^3)$ très visuelle ([CR02]). Leng a

calculé $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ pour G groupe diédral binaire et $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$ pour G groupe triédral ([Len02]).

Résultats du chapitre 1

Le but de ce chapitre est de construire $G\text{-Hilb}(X)$ de manière à obtenir une méthode de calcul générale de $G\text{-Hilb}^d(X)$, qui unifie tous les calculs déjà effectués. On se donne X un schéma quelconque sur un corps algébriquement clos k et G un groupe fini dont l'ordre est premier à la caractéristique du corps. On suppose que G agit sur X de manière admissible et on note Q le quotient géométrique. On commence par proposer une construction de $G\text{-Hilb}(X)$ sur Q en terme de grassmannienne de $\mathcal{O}_Q[G]$ -algèbres (théorème 1.4.5). Cette construction est proche de celle de Blume, avec cependant des hypothèses, une démarche et des objectifs différents. En supposant de plus que X est un schéma intègre et que G agit fidèlement, on définit $G\text{-Hilb}^d(X)$ comme l'image schématique de l'unique morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $G\text{-Hilb}(X)$ (proposition 1.5.2).

Puis nous décrivons la méthode de calcul de $G\text{-Hilb}^d(X)$ dans le cas affine : soit A une k -algèbre intègre et $G \subset \text{Aut}(A)$. L'extension d'anneaux A/A^G correspond au quotient géométrique $\phi : X \rightarrow Q$. En passant aux corps de fraction cette extension fournit l'extension de corps L/K de groupe de Galois G . Notre méthode de calcul de $G\text{-Hilb}^d(X)$ utilise la théorie des représentation k -linéaires irréductibles du groupe fini G . En notant ρ_α les représentation irréductibles, on considère les décompositions isotypiques :

$$A = \bigoplus_\alpha (\rho_\alpha \otimes_k A^\alpha) \quad L = \bigoplus_\alpha (\rho_\alpha \otimes_k L^\alpha)$$

Remarquer que, pour chaque représentation irréductible ρ_α , nous avons $\dim_K L^\alpha = d_\alpha$ où d_α est la dimension de ρ_α , en vertu du théorème de la base normale appliqué à l'extension galoisienne L/K . Remarquer également que le K -espace vectoriel L^α est engendré par A^α car le K -espace vectoriel L est engendré par A . On considère ci-dessous des familles de bases b , avec $b = (b^\alpha)$ et $b^\alpha \in (A^\alpha)^{d_\alpha}$ base de L^α .

Soit b une famille de bases. On note O_b la sous A^G -algèbre de K engendrée par les coordonnées des éléments des A^α dans les bases b^α . Soient b et c deux familles de bases. Pour chaque α , on considère $P_{bc}^\alpha \in M_{d_\alpha}(O_b)$, la matrice de passage de b^α à c^α . On note d_{bc} le produit des déterminants des matrices P_{bc}^α . On vérifie facilement que $(O_b)_{d_{bc}}$ est la sous A^G -algèbre de K engendrée par O_b et O_c . Les données algébriques précédentes fournissent donc un Q -schéma Z muni d'un système de cartes affines $\text{Spec}(O_b)$.

Théorème (1.6.1). $G\text{-Hilb}^d(X)$ est le schéma Z décrit ci-dessus.

Résultats du chapitre 2

Le but du chapitre 2 est d'intégrer notre construction de $G\text{-Hilb}(X)$ au point de vue classique et d'appliquer notre méthode de calcul de $G\text{-Hilb}^d(X)$. On reprend la situation du chapitre précédent en supposant de plus que X est de type fini sur k .

Nous commençons par montrer que notre construction de $G\text{-Hilb}(X)$ sur Q fournit bien l'espace de module des G -grappes et que, au niveau des points fermés, le morphisme structural $\pi : G\text{-Hilb}(X) \rightarrow Q$ associe à une G -grappe son support (théorème 2.1.3). Afin de souligner que $G\text{-Hilb}^d(X)$ est un candidat naturel à la résolution crépante de Q , nous proposons le théorème ci-dessous, qui est une version géométrique de théorème de Chevalley, Shephard, Todd ([Bou68]). On en déduit en particulier que le morphisme $\tau : G\text{-Hilb}^d(X) \rightarrow Q$ est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert lisse de Q (théorème 2.3.1).

Théorème (2.2.1). On suppose que G agit sur une variété X lisse de manière fidèle et admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Soit x un point de X . On pose $o = \phi(x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $G_x \subset \text{GL}(T_x X)$ est engendré par ses pseudo-réflexions.
- ii) ϕ_o est une G -grappe
- iii) o est un point lisse de Q

Le reste du chapitre est consacré à l'application de notre méthode au calcul de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ avec $G \subset \text{GL}_n(k)$. Notre méthode fournit des cartes affines $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. En pratique le problème est de déterminer un petit nombre de ces cartes suffisant à recouvrir $G\text{-Hilb}^d(k^n)$.

Dans le cas général (G non nécessairement abélien), k^* agit naturellement sur $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. Suivant l'idée de choisir des cartes affines k^* -invariantes, on obtient alors une méthode par décomposition de la coalgèbre (propositions 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.3). Nous l'appliquons pour calculer $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ sur l'exemple le plus simple de sous-groupe non-commutatif de $SL_3(k)$. On aurait également pu calculer $G\text{-Hilb}^d(k^2)$ pour tout sous-groupe fini de $SL_2(k)$.

Dans le cas où G est abélien, on peut supposer, quitte à effectuer un changement de bases, que $G \subset (k^*)^n$. Dans ce cas, le quotient T de $(k^*)^n$ par G est un tore agissant naturellement sur $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. Suivant l'idée de choisir des cartes affines toriques, nous revisitons la méthode de Nakamura (théorèmes 2.5.2, 2.5.3 et 2.5.4). Nous appliquons la méthode de Nakamura au calcul de $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ pour tout $G \subset (k^*)^3 \cap SL_3(k)$. Ainsi, on retrouve la description combinatoire visuelle de $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ due à Craw et Reid et qui nous sera utile pour les exemples de calcul d'anneau de cohomologie dans les chapitres suivants. Nous appliquons également la méthode de Nakamura au calcul de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ avec $G = Z(SL_n(k))$. Ainsi, on obtient sur cette série

infinie d'exemples la correspondance de McKay multiplicative (proposition 2.7.3).

Résultats du chapitre 3

Dans ce chapitre, on considère G un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$. On considère Q le quotient de \mathbb{C}^3 par G et Y un résolution crépante de Y de Q . Le but est de décrire l'anneau de cohomologie de Y . Les résolutions Y sont toriques et on commence par rappeler la description du point de vue combinatoire.

Puis nous déterminons les groupes d'homologie de Y à coefficients entiers, dont on peut choisir une base par des classes d'homologie de sous-variétés toriques compactes :

Théorème (3.2.2). Les groupes d'homologie de Y de degrés impairs sont nuls. $H_0(Y)$ est isomorphe à \mathbb{Z} . $H_2(Y)$ est le groupe engendré par les courbes toriques avec leurs relations dans les surfaces toriques. De plus, il est libre et basé par des courbes toriques. $H_4(Y)$ est le groupe libre engendré par les surfaces toriques. $H_6(Y)$ est nul.

On en déduit une correspondance de McKay homologique à coefficients entiers :

Corollaire (3.2.3). Les groupes d'homologie de degrés impairs sont nuls. Pour tout entier k , $H_{2k}(Y)$ est un groupe libre de rang le nombre des éléments de G d'âge k .

Nous montrons ensuite que les groupes de cohomologie de Y à coefficients entiers sont égaux aux groupes de Chow de Y , dont on peut choisir une base formée de classes de cohomologies de sous-variétés toriques. Par dualité de Poincaré, ceci équivaut au théorème suivant :

Théorème (3.3.1). Les groupes d'homologie de Borel-Moore de degrés impairs sont nuls et le morphisme naturel de groupes gradués de $A_*(Y)$ dans $H_{2*}^{\text{BM}}(Y)$ est un isomorphisme. De plus $A_*(Y)$ est basé par des sous-variétés toriques.

Par la suite, nous donnons une méthode de calcul de l'anneau $H^*(Y)$ dans une base de la cohomologie à coefficients rationnels (théorème 3.5.1). Pour cela, nous calculons les nombres d'intersections de trois diviseurs exceptionnels (théorèmes 3.4.4 et 3.4.6). Nous rappelons également la méthode de calcul de l'anneau $H_o^*(Q)$. Enfin, nous terminons par un exemple où la résolution considérée est $Y = G\text{-Hilb}^d(X)$. Nous calculons les deux anneaux $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$ et remarquons qu'il ne sont pas isomorphes. Ainsi la déformation quantique de la conjecture de Ruan est nécessaire.

Résultats du chapitre 4

Dans ce chapitre, on considère X une variété complexe compacte lisse de dimension trois et G un sous-groupe fini abélien de $\text{Aut}(X)$. On suppose que l'action de G sur X est admissible et préserve le volume. On note Q le quotient géométrique de X par G et on considère une résolution crépante $\tau : Y \rightarrow Q$. Le but de ce chapitre est de déterminer les résolutions crépantes Y et de décrire l'anneau de cohomologie de Y .

On commence par déterminer les résolutions crépantes de Q . On décompose le lieu singulier de Q en introduisant des courbes S_i et des points P_j . On considère G_j le stabilisateur des points de l'orbite au-dessus de P_j . La variété Q^* obtenue en retirant les points P_j a des singularités A -transversales, donc admet une unique résolution crépante $\tau^* : Y^* \rightarrow Q^*$. L'action de G au-dessus d'un voisinage de P_j induit une représentation de G_j de dimension trois préservant le volume modulo isomorphisme. On fixe une inclusion $G_j \subset (\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$ et on note $\phi_j : \mathbb{C}^3 \rightarrow Q_j$ le quotient géométrique.

Proposition (4.1.4). La donnée d'une résolution crépante $\tau : Y \rightarrow Q$ est équivalente à la donnée pour chaque j d'une résolution crépante $\tau_j : Y_j \rightarrow Q_j$. De plus, D_j désignant le polydisque unité de Q_j , le point P_j admet un voisinage isomorphe à D_j tel que les diagrammes ci-dessous soient analytiquement isomorphes au-dessus de D_j :

$$\begin{array}{ccc} & G \times_{G_j} \mathbb{C}^3 & \\ & \downarrow & \\ Y_j & \longrightarrow & Q_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow & \\ Y & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Puis nous décrivons le lieu exceptionnel de Y . On note G_i le noyau de l'action de G au-dessus de S_i . L'action de G_i au-dessus d'un voisinage de S_i induit une représentation de dimension deux préservant le volume. En fixant une inclusion $G_i \subset (\mathbb{C}^*)^2 \cap SL_2(\mathbb{C})$, on obtient $G_i = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. On identifie les éléments de G_i et les entiers de l'intervalle $[0, n_i - 1]$.

Proposition (4.1.6). Soit $\tau : Y \rightarrow Q$ une résolution crépante. Les diviseurs exceptionnels sont lisses et à croisement normaux. Les diviseurs dont l'image est S_i sont en bijection avec les éléments g de G_i non nuls et sont notés E_g^i . De plus, deux diviseurs E_g^i et E_h^i distincts s'intersectent lorsque $h = g \pm 1$. Les diviseurs exceptionnels dont l'image est P_j sont en bijection avec les éléments g de G_j tels que $a(g^{-1}, P_j) = 2$ et sont notés E_g^j .

Nous allons décrire l'anneau de cohomologie de Y à coefficients rationnels. Nous commençons par décrire l'espace vectoriel gradué. Notons E le lieu de exceptionnel de la résolution et S le lieu singulier du quotient. L'application continue $\tau : Y \rightarrow Q$ induit des morphismes gradués τ_* et τ^* en cohomologie vérifiant l'égalité $\tau_* \circ \tau^* = \text{Id}$. Donc $H^*(Y) =$

$H^*(Q) \oplus H^*(Y)/H^*(Q)$. En considérant E le lieu exceptionnel de Y et S le lieu exceptionnel de Q , on a $H^*(Y)/H^*(Q) = H^*(E)/H^*(S)$. Ci-dessous, on introduit une notation puis on énonce deux théorèmes qui décrivent la cohomologie de Y en tant qu'espace vectoriel gradué :

Notation (4.2.3). Fixons un diviseur E_g^i et considérons le diagramme d'espaces topologiques ci-dessous. Considérons le morphisme gradué $H^{*-2}(S_i) \rightarrow H^*(E)/H^*(S)$ qui à un élément α associe $(j_g^i)_*((\tau_g^i)^*\alpha)$. Afin de distinguer ce morphisme, on note $H^*(S_i)E_g^i$ plutôt que $H^{*-2}(S_i)$ et αE_g^i plutôt que α .

$$\begin{array}{ccc} E_g^i & \xrightarrow{j_g^i} & Y \\ \downarrow \tau_g^i & & \downarrow \tau \\ S_i & \xrightarrow{i_i} & Q \end{array}$$

Théorème (4.2.2). Les diviseurs exceptionnels E_g^i, E_g^j forment une base de $H^2(E)/H^2(S)$. Le cup produit de Y induit une dualité entre $H^2(E)/H^2(S)$ et $H^4(E)/H^4(S)$. On notera $E_g^{i\vee}, E_g^{j\vee}$ les éléments de la base de $H^4(E)/H^4(S)$ obtenue par dualité.

Théorème (4.2.4). Avec les notations précédentes, $H^*(Y)$ est décrit en tant qu'espace vectoriel gradué par :

$$H^*(Y) = H^*(Q) \oplus (\oplus H^*(S_i)E_g^i) \oplus (\oplus \mathbb{Q}E_g^j) \oplus (\oplus \mathbb{Q}E_g^{j\vee})$$

De plus, pour i fixé, les éléments $[S_i]E_g^i$ sont combinaisons linéaires des éléments $E_g^{i\vee}$ et la matrice de passage est la matrice tridiagonale avec des -2 sur la diagonale et des 1 à côté.

Par la suite, nous donnons une méthode de calcul du cup produit de l'anneau $H^*(Y)$ (théorèmes 4.4.1, 4.4.2 et 4.4.3). Pour cela, nous calculons les nombres d'intersections de trois diviseurs exceptionnels (propositions 4.3.1, 4.3.5 et 4.3.11).

Nous donnons également une description de l'anneau $H_0^*(Q)$. On commence par décrire $H_0^*(Q)$ en tant qu'espace vectoriel gradué. Cet espace vectoriel est somme directe de $H^*(Q)$ et d'un espace provenant des secteurs tordus et dont les éléments seront dit tordus. On commence par définir des diviseurs orbifolds F_g^i, F_g^j qui sont des éléments tordus de degré deux. Les deux théorèmes suivants décrivent $H_0^*(Q)$ en tant qu'espace vectoriel gradué.

Proposition (4.5.1). Les diviseurs orbifold F_g^i, F_g^j forment une base des éléments tordus de degré 2. Le cup produit orbifold induit une dualité entre les éléments tordus de degré 2 et 4. On notera $F_g^{i\vee}, F_g^{j\vee}$ les éléments de la base des éléments tordus de degré 4 obtenue par dualité.

Proposition (4.5.2). En reprenant les notations précédentes, $H_o^*(Q)$ est donné en tant qu'espace vectoriel gradué par :

$$H_o^*(Q) = H^*(Q) \oplus (\oplus H^*(S_i)F_g^i) \oplus (\oplus \mathbb{Q}F_g^j) \oplus (\oplus \mathbb{Q}F_g^{j\vee})$$

De plus, on dispose des relations $[S_i]F_g^i = 1/n_i F_{g^{-1}}^{i\vee}$.

Par la suite, nous donnons une méthode de calcul du cup produit orbifold de l'anneau $H_o^*(Q)$ (propositions 4.5.5, 4.5.6 et 4.5.7). Pour cela nous calculons les nombres d'intersections de trois diviseurs orbifold (propositions 4.5.3 et 4.5.4).

On compare ensuite les anneaux $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$. On déduit des descriptions précédentes que $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels gradués (théorème 4.6.1). En se basant sur nos calculs du cup produit de du cup produit orbifold, nous indiquons quelle devrait être la forme de l'isomorphisme entre $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$ dans la conjecture de Ruan. Pour finir, nous calculons les anneaux $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$ sur un exemple où X est une variété abélienne et la résolution est $Y = G\text{-Hilb}^d(X)$.

Présentation des appendices

Dans l'appendice A, nous définissons les catégories de $\mathcal{O}_S[G]$ -modules et $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbres utilisées pour la construction fonctorielle de $G\text{-Hilb}(X)$ du chapitre 1. Nous expliquons également la généralisation de la décomposition isotypique d'une représentation linéaire de G à la décomposition isotypique d'un $\mathcal{O}_S[G]$ -module. Dans l'appendice B, nous rappelons les définitions et notations standards de géométrie torique. On rappelle en particulier la description combinatoire des variétés toriques. La géométrie torique sera présente dans cette thèse dès que l'on considère le quotient de X par un groupe abélien G est abélien et on utilisera la description combinatoire pour le calcul de l'anneau de cohomologie de Y . Dans cette appendice, nous prouvons également un lemme (B.5.1) et un résultat de rétraction topologique (B.7.1) qui seront utilisés pour le calcul des groupes d'homologie de Y dans le cas local du chapitre 3. Dans l'appendice C, nous rappelons la description combinatoire de la variété torique Q quotient de k^n par $G \subset (k^*)^n$. Nous rappelons également la description combinatoire des résolutions crépantes toriques Y dans le cas $G \subset (k^*)^n \cap SL_n(k)$. Cette description sera utilisée pour le calcul de l'anneau de cohomologie. Dans l'appendice D, en considérant la variété torique Q quotient de \mathbb{C}^n par $G \subset (\mathbb{C}^*)^n \cap SL_n(\mathbb{C})$, on montre que toute résolution crépante Y est automatiquement torique (théorème D.3.1). Pour prouver ce résultat, nous utilisons des méthodes analytiques standards. Dans l'appendice E, nous rappelons et prouvons des résultats concernant la cohomologie des orbifolds complexes. Ces résultats seront utilisés intensivement pour la calcul de l'anneau de cohomologie de Y dans le cas compact du chapitre 4. Puis décrivons l'anneau de cohomologie orbifold des quotients

globaux V/G ($G \subset GL(V)$) et X/G (G abélien). Dans l'appendice F, nous classifions les paires (X, G) , où X est une variété abélienne complexe de dimension 3 et G un groupe fini d'automorphismes (fixant le neutre) dont l'action préserve le volume. Cette classification fournit des exemples pour le chapitre 4.

Chapitre 1

G -schéma de Hilbert : construction

Dans ce chapitre, on fixe un corps k algébriquement clos. Tous les schémas considérés seront des k -schémas. On fixe également un groupe fini G dont l'ordre est premier à la caractéristique de k .

1.1 Grassmannienne d'un \mathcal{O}_S -module

Si S est un schéma, on considère Mod_S la catégorie de \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents. Si T est un S -schéma (c'est-à-dire un morphisme de schémas de T dans S), on dispose du foncteur tiré-en-arrière de la catégorie Mod_S dans la catégorie Mod_T . On notera \mathcal{E}_T le tiré-en-arrière d'un \mathcal{O}_S -module \mathcal{E} et m_T le tiré-en-arrière d'un morphisme de \mathcal{O}_S -modules m . La généralisation de la grassmannienne pour un \mathcal{O}_S -module a été introduite par Grothendieck. Nous reprenons ici les notations 9.7.3 et le théorème 9.7.4 du chapitre I de [GD71].

Notation 1.1.1. Soit S un schéma, \mathcal{E} un \mathcal{O}_S -module et $r \in \mathbb{N}$. On note $Gr_r(\mathcal{E})$ l'ensemble des quotients $u : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ (modulo iso à l'arrivée) avec \mathcal{F} localement libre de rang r .

Théorème 1.1.2. Soit S un schéma, \mathcal{E} un \mathcal{O}_S -module et $r \in \mathbb{N}$. Le foncteur $F_r(\mathcal{E})$ qui à un S -schéma T associe $Gr_r(\mathcal{E}_T)$ est représentable par un S -schéma noté $\mathbf{Gr}_r(\mathcal{E})$.

On se place dans le cas où S est affine. Soit $\varphi : (\mathcal{O}_S)^r \rightarrow \mathcal{E}$ un morphisme de \mathcal{O}_S -modules. On définit le sous-foncteur F_φ de $F_r(\mathcal{E})$ qui à T associe les éléments u de $Gr_r(\mathcal{E}_T)$ vérifiant que $u \circ \varphi_T$ est un isomorphisme. Un tel élément admet un unique représentant (modulo isomorphisme à l'arrivée) $u : \mathcal{E}_T \rightarrow (\mathcal{O}_T)^r$ tel que $u \circ \varphi_T = Id$. On a donc $F_\varphi(T) = \{u : \mathcal{E}_T \rightarrow (\mathcal{O}_T)^r \mid u \circ \varphi_T = Id\}$. D'après [GD71], les F_φ forment un recouvrement ouvert du

foncteur $F_r(\mathcal{E})$ et chaque F_φ est représentable par un S -schéma affine C_φ . Les C_φ forment donc un système de cartes affines de $\mathbf{Gr}_r(\mathcal{E})$.

1.2 Grassmannienne d'un $\mathcal{O}_S[G]$ -module

Si S un schéma, on considère Mod_S^G la catégorie des $\mathcal{O}_S[G]$ -modules. On note $\{\rho_1, \dots, \rho_l\}$ l'ensemble des représentations k -linéaires irréductibles de G . Tout $\mathcal{O}_S[G]$ -module \mathcal{E} admet une décomposition isotypique $\bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k \mathcal{E}^\alpha]$ où $\mathcal{E}^\alpha = (\mathcal{E} \otimes \rho_\alpha^\vee)^G$ est un \mathcal{O}_S -module. De plus tout morphisme de $\mathcal{O}_S[G]$ -modules $m : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ se décompose en des morphismes de \mathcal{O}_S -modules $m^\alpha : \mathcal{E}^\alpha \rightarrow \mathcal{F}^\alpha$. La décomposition isotypique fournit une équivalence de catégories additives entre Mod_S^G et $(\text{Mod}_S)^{\oplus l}$. Pour plus de précisions sur ce qui précède, consulter la section A.1 en appendice.

Notation 1.2.1. Soit S un schéma, \mathcal{E} un $\mathcal{O}_S[G]$ -module et $R = (r_\alpha) \in \mathbb{N}^l$. On note $\text{Gr}_R^G(\mathcal{E})$ l'ensemble des quotients de $\mathcal{O}_S[G]$ -modules $u : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ (modulo iso à l'arrivée) avec chaque \mathcal{F}^α localement libre de rang r_α .

Théorème 1.2.2. Soit S un schéma, \mathcal{E} un $\mathcal{O}_S[G]$ -module et $R = (r_\alpha) \in \mathbb{N}^l$. Le foncteur $F_R^G(\mathcal{E})$ qui à un S -schéma T associe $\text{Gr}_R^G(\mathcal{E}_T)$ est représentable par un S -schéma $\mathbf{Gr}_R^G(\mathcal{E})$ qui est le produit fibré sur S des $\mathbf{Gr}_{r_\alpha}(\mathcal{E}^\alpha)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que le foncteur $F_R^G(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit des foncteurs $F_{r_\alpha}(\mathcal{E}^\alpha)$ du fait que la décomposition isotypique est fonctorielle. \square

On se place dans le cas où S est affine. Soit $\psi : \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_S)^{r_\alpha}] \rightarrow \mathcal{E}$. On définit le sous-foncteur F_ψ de $F_R^G(\mathcal{E})$ qui à T associe les éléments u de $\text{Gr}_R^G(\mathcal{E}_T)$ vérifiant que $u \circ \psi_T$ est un isomorphisme. Un tel élément admet un unique représentant $u : \mathcal{E}_T \rightarrow \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_T)^{r_\alpha}]$ tel que $u \circ \psi_T = \text{Id}$. On a donc $F_\psi(T) = \{u : \mathcal{E}_T \rightarrow \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_T)^{r_\alpha}] \mid u \circ \psi_T = \text{Id}\}$. Par décomposition isotypique, F_ψ est le produit des F_{ψ^α} . Par produit, les foncteurs F_ψ forment un recouvrement ouvert de $F_R^G(\mathcal{E})$ et chaque F_ψ est représentable par C_ψ , le produit fibré sur S des C_{ψ^α} . Donc les C_ψ forment un système de cartes affines de $\mathbf{Gr}_R^G(\mathcal{E})$.

1.3 Grassmannienne d'une $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbre

Si S est un schéma, on considère la catégorie Alg_S^G des $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbres. Pour un rappel de la définition de cette catégorie, consulter la section A.2 en appendice.

Notation 1.3.1. Soit S un schéma, \mathcal{A} une $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbre et $R = (r_\alpha) \in \mathbb{N}^l$. On note $\text{Gr}_R^{Gm}(\mathcal{A})$ l'ensemble des quotients de $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbres $u : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ (modulo iso à l'arrivée) avec chaque \mathcal{B}^α localement libre de rang r_α .

Remarquons que $\text{Gr}_R^{Gm}(\mathcal{A}) = \{u \in \text{Gr}_R^G(\mathcal{A}) \mid \text{Ker}(u) \text{ est un idéal} \}$. En effet, étant donné un quotient de $\mathcal{O}_S[G]$ -module $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, \mathcal{B} peut être muni d'une structure de $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbres qui fasse de u un quotient d'algèbres ssi $\text{Ker}(u)$ est un idéal. Dans ce cas, cette structure est unique.

Théorème 1.3.2. Soit S un schéma, \mathcal{A} une $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbre et $R = (r_\alpha) \in \mathbb{N}^l$. Le foncteur $F_R^{Gm}(\mathcal{A})$ qui à un S -schéma T associe $\text{Gr}_R^{Gm}(\mathcal{A}_T)$ est représentable par un S -schéma $\mathbf{Gr}_R^{Gm}(\mathcal{A})$ qui est un sous-schéma fermé de $\mathbf{Gr}_R^G(\mathcal{A})$.

Démonstration. D'après la remarque ci-dessus, $F_R^{Gm}(\mathcal{A})$ est un sous-foncteur de $F_R^G(\mathcal{A})$. Il reste à montrer que la condition « $\text{Ker}(u)$ est un idéal » est une condition fermée. On peut se ramener au cas où S est affine. Dans ce cas, les F_ψ forment un recouvrement ouvert de $F_R^G(\mathcal{A})$ et il suffit de vérifier que la condition « $\text{Ker}(u)$ est un idéal » est fermée sur chacun des foncteurs F_ψ . Soit $\psi : \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_S)^{r_\alpha}] \rightarrow \mathcal{A}$. Soit $u : \mathcal{A}_T \rightarrow \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_S)^{r_\alpha}]$ tel que $u \circ \psi_T = \text{Id}$. On pose $t = \text{Id} - \psi_T \circ u$ de sorte que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(t)$. La condition « $\text{Ker}(u)$ est un idéal » est donc équivalente à la nullité du morphisme $m : (\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})_T \rightarrow \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_T)^{r_\alpha}]$ défini par $m(a \otimes_T a') = u(a \cdot t(a'))$. Par décomposition isotypique, ceci équivaut à la nullité des morphismes $m^\alpha : ((\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})^\alpha)_T \rightarrow (\mathcal{O}_T)^{r_\alpha}$. Par projections sur les composantes, ceci équivaut à la nullité des morphismes $m_j^\alpha : ((\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})^\alpha)_T \rightarrow \mathcal{O}_T$. Puisque S est affine, les \mathcal{O}_S -modules $(\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})^\alpha$ sont engendrés par leur sections globales $\Gamma(S, (\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})^\alpha)$. Par tirage-en-arrière, les \mathcal{O}_T -modules $((\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})^\alpha)_T$ sont engendrés par les sections globales $\Gamma(S, (\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})^\alpha)_T$. Ainsi la condition « $\text{Ker}(u)$ est un idéal » équivaut à la nullité des $m_j^\alpha(\Gamma(S, (\mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A})^\alpha)_T)$, qui sont des éléments de $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ dépendant fonctoriellement de u . Il s'ensuit que la condition « $\text{Ker}(u)$ est un idéal » est une condition fermée. \square

1.4 Définition de G -Hilb(X)

La définition et le théorème suivant sont classiques : ils sont tirés de la section 1 de l'exposé V de [Gro71].

Définition 1.4.1. On suppose que G agit sur un schéma X . On dit que l'action de G sur X est admissible si X peut être recouvert par des ouverts affines G -invariants.

Théorème-Définition 1.4.2. On suppose que G agit sur un schéma X de manière admissible. Alors il existe un morphisme affine G -invariant $\phi : X \rightarrow Q$ tel que $\phi_*(\mathcal{O}_X)^G = \mathcal{O}_Q$. Dans ce cas ϕ est le quotient géométrique au sens de Mumford donc est unique (modulo iso à l'arrivée). De plus, on dira que ϕ est un quotient en représentation régulière si $\phi_*(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_Q[G]$ -module localement trivial.

Remarquons qu'un quotient en représentation régulière est un quotient plat dont la représentation le long de chaque fibre est la représentation régulière.

Propriété 1.4.3. On suppose que G agit sur un schéma X de manière admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. On considère le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_S & \longrightarrow & X \\ \downarrow \phi_S & & \downarrow \phi \\ S & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Alors G agit sur X_S de manière admissible et $\phi_S : X_S \rightarrow S$ est le quotient géométrique. De plus si ϕ est un revêtement régulier, alors ϕ_S l'est.

Démonstration. D'après A.2.1 le morphisme ϕ_S est un morphisme affine G -invariant et on dispose de l'égalité $(\phi_S)_*(\mathcal{O}_{X_S}) = \phi_*(\mathcal{O}_X)_S$. D'après A.1.3, on a donc $(\phi_S)_*(\mathcal{O}_{X_S})^G = (\phi_*(\mathcal{O}_X)^G)_S$. Comme le morphisme ϕ est le quotient géométrique de X par G , $\phi_*(\mathcal{O}_X)^G = \mathcal{O}_Q$. On a donc $(\phi_S)_*(\mathcal{O}_{X_S})^G = \mathcal{O}_S$ et le morphisme ϕ_S est le quotient géométrique de X_S par G . De plus si ϕ est un quotient en représentation régulière, $\phi_*(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_Q[G]$ -module localement trivial donc $(\phi_S)_*(\mathcal{O}_{X_S})$ est un $\mathcal{O}_S[G]$ -module localement trivial et ϕ_S est un quotient en représentation régulière. \square

Notation 1.4.4. On suppose que G agit sur un schéma X de manière admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Lorsque Y est un sous-schéma fermé G -invariant de X , on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ & \searrow p & \downarrow \phi \\ & & Q \end{array}$$

On note $R(\phi)$ l'ensemble des Y , sous-schéma fermé G -invariant de X , tels que $p : Y \rightarrow Q$ est un quotient en représentation régulière.

Pour chaque représentation k -linéaire irréductible ρ_α de G , on note d_α sa dimension. On pose $D = (d_\alpha)$. Remarquons que $R(\phi) = \text{Gr}_D^{Gm}(\phi_*(\mathcal{O}_X))$. En effet, d'après A.2.1, on dispose d'une anti-équivalence de catégories entre Aff_Q^G et Alg_Q^G . Sous cette équivalence, le sous-schéma fermé G -invariant $Y \subset X$ correspond au quotient $\phi_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow p_*(\mathcal{O}_Y)$ (modulo iso à l'arrivée). D'après A.1.4, la condition que p soit un quotient en représentation régulière équivaut à ce que chaque $p_*(\mathcal{O}_Y)^\alpha$ soit localement libre de rang d_α .

Théorème 1.4.5. On suppose que G agit sur X de manière admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Le foncteur qui à un Q -schéma S associe $R(\phi_S)$ est représentable par un Q -schéma G -Hilb(X).

Démonstration. D'après la remarque ci-dessus, ce foncteur est isomorphe à $F_D^{Gm}(\phi_*(\mathcal{O}_X))$ \square

Remarquons que si ϕ est un quotient en représentation régulière, alors pour tout Q -schéma S , ϕ_S est un quotient en représentation régulière donc $R(\phi_S)$ est un singleton. Donc $G\text{-Hilb}(X) = Q$

1.5 Définition de $G\text{-Hilb}^d(X)$

On suppose que G agit sur un schéma intègre X de manière fidèle et admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique.

Lemme 1.5.1. Le quotient géométrique $\phi_{\text{Spec}(k(Q))}$ est donné par l'extension galoisienne $k(X)/k(Q)$.

Démonstration. On peut se ramener au cas affine où $X = \text{Spec}(A)$. On pose $K = \text{Frac}(A^G)$ et $L = \text{Frac}(A)$. Il s'agit de montrer que $L = A \otimes_{A^G} K$. $A \otimes_{A^G} K$ est la localisation de A par rapport à la partie multiplicative $A^G \setminus \{0\}$. Donc $K \subset A \otimes_{A^G} K \subset L$. $A \otimes_{A^G} K$ est une algèbre intermédiaire de l'extension algébrique L/K donc est un corps. $A \otimes_{A^G} K$ est un sous-corps de $L = \text{Frac}(A)$ contenant A donc $A \otimes_{A^G} K = L$. \square

En appliquant le théorème de la base normale, on conclut que $\phi_{\text{Spec}(k(Q))}$ est un quotient en représentation régulière. Il existe donc un unique morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $G\text{-Hilb}(X)$.

Définition 1.5.2. On définit $G\text{-Hilb}^d(X)$ comme l'image schématique de l'unique morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $G\text{-Hilb}(X)$.

Remarquons qu'il existe également un unique morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $\mathbf{Gr}_D^G(p_*(\mathcal{O}_X))$. Ce morphisme factorise à l'arrivée par le sous-schéma fermé $G\text{-Hilb}(X)$ en un unique morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $G\text{-Hilb}(X)$. Le schéma $G\text{-Hilb}^d(X)$ est donc également l'image schématique du morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $\mathbf{Gr}_D^G(p_*(\mathcal{O}_X))$.

1.6 Calcul de $G\text{-Hilb}^d(X)$ dans le cas affine

Soit A une k -algèbre intègre et $G \subset \text{Aut}(A)$. On pose $L = \text{Frac}(A)$ et $K = \text{Frac}(A^G)$. Géométriquement, G agit fidèlement sur le schéma affine intègre $X = \text{Spec}(A)$, l'inclusion $A^G \subset A$ correspond au quotient géométrique $\phi : X \rightarrow Q$ et l'extension galoisienne L/K de groupe de galois G correspond à $k(X)/k(Q)$. Le but de cette section est de donner une description explicite de $G\text{-Hilb}^d(X)$.

Nous allons construire explicitement un schéma Z que nous montrerons ensuite être $G\text{-Hilb}^d(X)$. Soit $b = (b^1, \dots, b^l)$ où chaque $b^\alpha \in (A^\alpha)^{d_\alpha}$ est une base du K -espace vectoriel L^α . On note O_b la sous A^G -algèbre de K engendrée par les coordonnées des éléments des A^α dans les bases b^α . Soient b et c comme ci-dessus. Pour chaque α , on considère $P_{bc}^\alpha \in M_{d_\alpha}(O_b)$, la matrice

de passage de b^α à c^α . On note d_{bc} le produit des déterminants des matrices P_{bc}^α . On vérifie facilement que $(O_b)_{d_{bc}}$ est la sous A^G -algèbre de K engendrée par O_b et O_c , que nous noterons O_{bc} . En particulier, $(O_b)_{d_{bc}} = (O_c)_{d_{cb}}$. Ainsi les données algébriques précédentes fournissent un Q -schéma Z muni d'un système de cartes affines $Z_b = \text{Spec}(O_b)$. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.6.1. $G\text{-Hilb}^d(X)$ est le schéma Z décrit ci-dessus.

Dans la suite de cette section, on adoptera les notations suivantes lorsque C est une B -algèbre : pour tout B -module M , on notera M_C le C -module $C \otimes_B M$ et pour tout morphisme de B -modules m , on notera m_C le morphisme de C -modules $Id_C \otimes_B m$.

On va construire des quotients tautologiques sur Z . Pour chaque b , on définit l'épimorphisme $\mathbf{b}^\alpha : (A^\alpha)_{O_b} \rightarrow (O_b)^{d_\alpha}$ qui à $1 \otimes e$ associe les coordonnées de e dans la base b^α . Pour tout couple (b,c) , on a la condition de compatibilité $(\mathbf{b}^\alpha)_{O_{bc}} = (P_{bc}^\alpha)_{O_{bc}} \circ (\mathbf{c}^\alpha)_{O_{bc}}$. Les données algébriques précédentes fournissent des quotients tautologiques $u^\alpha \in Gr_{d_\alpha}(p_*(\mathcal{O}_X)_Z^\alpha)$.

D'une part, on dispose d'un morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans Z (évident par construction de Z). D'autre part, on dispose d'un morphisme de Z dans $\mathbf{Gr}_D^G(p_*(\mathcal{O}_X))$ (par les quotients tautologiques). La preuve de 1.6.1 revient par définition à montrer que Z est l'image schématique de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $\mathbf{Gr}_D^G(p_*(\mathcal{O}_X))$.

Démonstration de 1.6.1. Montrons que le schéma Z est l'image schématique de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $\mathbf{Gr}_D^G(p_*(\mathcal{O}_X))$. Au-dessus de $\mathbf{Gr}_D^G(p_*(\mathcal{O}_X))$, la question est locale. Pour chaque $\psi : \oplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_Q)^{d_\alpha}] \rightarrow p_*(\mathcal{O}_X)$, on note Z_ψ l'image réciproque de C_ψ . Il s'agit de montrer que si le point $\text{Spec}(k(Q))$ n'est pas envoyé dans C_ψ alors Z_ψ est vide et sinon Z_ψ est l'image schématique du morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans C_ψ . Si le point $\text{Spec}(k(Q))$ n'est pas envoyé dans C_ψ , alors $\text{Spec}(k(Q))$ n'est pas envoyé dans l'ouvert Z_ψ de Z , donc Z_ψ est vide puisque le morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans Z est dominant. On suppose désormais que $\text{Spec}(k(Q))$ est envoyé dans C_ψ . Il reste à montrer que Z_ψ est l'image schématique.

Remarquons que la donnée de ψ est équivalente à la donnée des $\psi^\alpha : (\mathcal{O}_Q)^{d_\alpha} \rightarrow p_*(\mathcal{O}_X)^\alpha$, elle-même équivalente à la donnée de morphismes $B^\alpha : (A^G)^{d_\alpha} \rightarrow A^\alpha$, elle-même équivalente à la donnée de $b = (b^1, \dots, b^l)$ où chaque $b^\alpha \in (A^\alpha)^{d_\alpha}$. Observons que la condition que $\text{Spec}(k(Q))$ soit envoyé dans C_ψ est équivalente à la condition que chaque b^α soit une base du K -espace vectoriel L^α . En effet, puisque le morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans $\mathbf{Gr}_D^G(p_*(\mathcal{O}_X))$ est déterminé par le quotient $k(X) = k(X)$, cette condition équivaut à $Id_{L^\alpha} \circ (B^\alpha)_K$ est un isomorphisme.

Remarquons que $Z_\psi = Z_b$. En effet, Z_ψ est l'ouvert de Z sur lequel les $u^\alpha \circ (\psi^\alpha)_Z$ sont des isomorphismes. $Z_\psi \cap Z_c$ est donc l'ouvert de Z_c sur

lequel les déterminants des morphismes $\mathbf{c}^\alpha \circ (B^\alpha)_{O_c} = P_{bc}^\alpha$ sont non nuls, c'est-à-dire $Z_b \cap Z_c$.

La carte C_ψ est affine donc le morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans C_ψ est donné par un morphisme de A^G -algèbres $m : \Gamma(C_\psi, \mathcal{O}_{C_\psi}) \rightarrow K$, de sorte que l'image schématique soit $\text{Spec}(\text{Im}(m))$. m se factorise à l'arrivée par $O_b \subset K$ (car le morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans C_ψ se factorise au départ par le morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans Z_b). On a donc $\text{Im}(m) \subset O_b$. Il nous reste à montrer que $O_b \subset \text{Im}(m)$. Le morphisme de $\text{Spec}(k(Q))$ dans C_ψ est donné par les inverses des $(B^\alpha)_K$ notés $\mathbf{B}^\alpha : L^\alpha \rightarrow K^{d_\alpha}$ et qui à un élément de L^α associent ses coordonnées dans la base b^α . La factorisation de ce morphisme par le morphisme de $\text{Spec}(\text{Im}(m))$ dans C_ψ est donnée par des $M^\alpha : (A^\alpha)_{\text{Im}(m)} \rightarrow (\text{Im}(m))^{d_\alpha}$ tels que $(M^\alpha)_K = \mathbf{B}^\alpha$. Pour $e \in A^\alpha$, $M^\alpha(1 \otimes e) = \mathbf{B}^\alpha(e)$ donc $\text{Im}(m)$ contient les coordonnées de e dans la base b^α . D'où $O_b \subset \text{Im}(m)$. \square

Chapitre 2

G -schéma de Hilbert : approches classiques revisitées

Dans ce chapitre, on fixe un corps algébriquement clos k . Tous les schémas considérés seront des k -schémas de type fini. On fixe également un groupe fini G dont l'ordre est premier à la caractéristique de k .

2.1 Construction classique

Dans cette section on suppose que G agit sur un schéma X de manière admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Classiquement, le G -schéma de Hilbert est défini comme l'espace des modules des G -grappes. On appelle G -grappe un sous-schéma G -invariant Y de X de dimension zéro et tel que $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ est isomorphe à la représentation régulière. On appelle famille sur S de G -grappes un sous-schéma fermé G -invariant Y de $S \times_k X$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$(C) : \begin{cases} p : Y \rightarrow S \text{ est plat et propre.} \\ \forall s \in S, Y_s \text{ est une } G\text{-grappe} \end{cases}$$

On définit le foncteur contravariant F qui à un schéma S associe l'ensemble des familles de G -grappes sur S . Dans [Tér04], le G -schéma de Hilbert est construit comme représentant le foncteur F .

Le support d'une G -grappe est une G -orbite (voir le lemme 1.4.2 de [Tér04]). Comme Mukai le remarque, $G\text{-Hilb}(X)$ devrait être vu comme une variante du quotient géométrique Q . On cherche donc à construire un morphisme du G -schéma de Hilbert dans Q qui, au niveau des points, associe à une G -grappe son support. Au niveau des foncteurs, ce morphisme correspond à une transformation naturelle de F dans h_Q que nous allons construire.

Proposition 2.1.1. Soit Y , un sous-schéma fermé G -invariant de $S \times_k X$. La condition (C) est équivalente à « $p : Y \rightarrow S$ est un quotient en représentation régulière ».

Démonstration. Remarquons qu'une G -grappe est un sous-schéma fermé G -invariant Y de X tel que Y est affine et $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ est isomorphe à la représentation régulière. En effet $\dim(Y) = 0$ implique que Y est affine et réciproquement Y affine et $\dim_k(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) < \infty$ implique que $\dim(Y) = 0$. Sachant de plus que p est affine, il est clair que les deux conditions de la proposition sont équivalentes. On doit donc montrer que la condition (C) entraîne que $p : Y \rightarrow S$ est affine. Comme Y est un sous-schéma G -invariant de $S \times_k X$ et l'action de G sur X est admissible, on déduit que l'action de G sur Y est admissible. Notons $q : Y \rightarrow T$ le quotient géométrique. Le morphisme G -invariant $p : Y \rightarrow S$ se factorise par q au départ en un unique morphisme $m : T \rightarrow S$. Il reste à montrer que m est affine. m est bijectif car pour tout point $s \in S$, la fibre de m au-dessus de s est le quotient géométrique de Y_s , c'est-à-dire s . m est fermé car $p = m \circ q$, p est fermé et q est continue surjective. m est fermé et injectif donc affine d'après le corollaire 9.1.24 du chapitre I de [GD71]. \square

Proposition 2.1.2. On dispose d'une transformation naturelle $t : F \rightarrow h_Q$.

Démonstration. Soit $Y \in F(S)$. Le morphisme G -invariant $Y \rightarrow X \rightarrow Q$ se factorise de manière unique par $p : Y \rightarrow S$ en un morphisme $S \rightarrow Q$. Ce morphisme définit l'image de Y par $t(S) : F(S) \rightarrow h_Q(S)$. \square

On considère le Q -schéma G -Hilb(X) construit dans le chapitre 1 et on note $\pi : G\text{-Hilb}(X) \rightarrow Q$ le morphisme structural. La proposition suivante montre que le point de vue classique du G -schéma de Hilbert coïncide avec notre construction de G -Hilb(X).

Proposition 2.1.3. Le schéma G -Hilb(X) est de type fini sur k et il représente le foncteur F . Le morphisme $\pi : G\text{-Hilb}(X) \rightarrow Q$ représente $t : F \rightarrow h_Q$.

Démonstration. Le morphisme $\phi : X \rightarrow Q$ est fini (car c'est un morphisme entier entre schémas de type fini sur k). Ainsi $\phi_*(\mathcal{O}_X)$ est un faisceau cohérent sur Q et pour chaque α , $\phi_*(\mathcal{O}_X)^\alpha$ est également cohérent (cf appendice A). $G_{d_\alpha}(\phi_*(\mathcal{O}_X)^\alpha)$ est donc de type fini sur Q . Par produit puis passage au sous-schéma fermé, on en déduit que $G\text{-Hilb}(X)$ est de type fini sur Q . Puisque Q est de type fini sur k , on conclut que $G\text{-Hilb}(X)$ est de type fini sur k .

La démonstration du reste de la proposition résulte d'arguments fonctoriels. Soit un morphisme $m : S \rightarrow Q$. Soit $Y \in F(S)$ tel que $t(S)(Y) = m$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow p & & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{m} & Q \end{array}$$

Donc le G -sous-schéma fermé $Y \subset S \times_k X$ se factorise à l'arrivée par le G -sous-schéma fermé $X_S \subset S \times_k X$ pour donner un G -sous-schéma fermé $Y \subset X_S$. Puisque la projection $p : Y \rightarrow S$ est un quotient en représentation régulière, on obtient un morphisme de Q -schémas de S dans $G\text{-Hilb}(X)$. \square

2.2 Théorème de Chevalley, Shephard, Todd, Luna

Dans cette section, nous proposons une forme géométrique du théorème de Chevalley, Shephard, Todd. Ce théorème se trouve sous sa forme algébrique classique au théorème 4, paragraphe 5, chapitre V de [Bou68]. Voici la forme géométrique que nous proposons et qui se démontre à partir de l'énoncé classique en utilisant le lemme fondamental de Luna en caractéristique quelconque :

Théorème 2.2.1. On suppose que G agit sur une variété X lisse de manière fidèle et admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Soit x un point de X . On pose $o = \phi(x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $G_x \subset \text{GL}(T_x X)$ est engendré par ses pseudo-réflexions
- ii) ϕ_o est une G -grappe
- iii) o est un point lisse de Q

Dans le théorème ci-dessus, ϕ_o désigne la fibre schématique du point o et une pseudo-réflexion est une transformation linéaire qui fixe un hyperplan tout en agissant par homothétie sur une droite supplémentaire. Pour une pseudo-réflexion d'ordre fini, le rapport de cette homothétie est une racine de l'unité. Voici un corollaire de 2.2.1 illustrant la notion de quotient en représentation régulière introduite en 1.4.2 :

Corollaire 2.2.2. On suppose que G agit sur une variété X lisse de manière fidèle et admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

- i) $\forall x \in X$, $G_x \subset \text{GL}(T_x X)$ est engendré par ses pseudo-réflexions
- ii) $\phi : X \rightarrow Q$ est un quotient en représentation régulière
- iii) Q est lisse

Démonstration. Puisque Q est réduit, $\phi : X \rightarrow Q$ est un quotient en représentation régulière ssi pour chaque point o de Q , ϕ_o est une G -grappe. Il suffit d'appliquer le théorème 2.2.1 en tout point de x . \square

En appliquant le lemme fondamental de Luna en caractéristique quelconque (théorème 6.2 de [BR85]), la preuve du théorème se ramènera au cas local où le groupe agit linéairement sur un espace vectoriel et le point considéré est l'origine.

Théorème 2.2.3. Soit V un espace vectoriel et G un sous-groupe fini de $GL(V)$. On note $\phi : V \rightarrow Q$ le quotient géométrique. On pose $o = \phi(0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) G est engendré par ses pseudo-réflexions
- ii) ϕ_o est une G -grappe
- iii) o est un point lisse de Q

Afin de démontrer le cas local, qui est une adaptation du théorème de Chevalley, Shephard et Todd, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.4. On suppose que G agit sur une variété Y de manière fidèle et admissible et on note $\phi : Y \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Notons Y^l l'ouvert de Y sur lequel G agit librement. On suppose que Y et Q sont lisses et que $\text{codim}(Y \setminus Y^l) \geq 2$. Alors l'action est libre.

Démonstration. On dispose d'un morphisme de fibrés G -linéarisés $TY \rightarrow \phi^*TQ$. Au niveau de l'ouvert Y^l , le quotient est un G -fibré principal en topologie étale, donc ce morphisme est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert Y^l . Puisque $\text{codim}(Y \setminus Y^l) \geq 2$ et Y est normale, ce morphisme est un isomorphisme sur Y entier. Soit un point y de Y . Notons G_y le stabilisateur de y . G_y agit sur T_yY de manière triviale. Donc G_y agit trivialement sur Y et G_y est trivial. \square

Démonstration de 2.2.3. On va adapter la version du théorème de Chevalley, Shephard et Todd donnée en théorème 4, paragraphe 5, chapitre V de [Bou68].

Montrons que i) implique ii). On suppose que G est engendré par ses pseudo-réflexions. En appliquant le théorème 4 page 115 de [Bou68], on en déduit que ϕ est plat. Au-dessus de l'ouvert où l'action est libre, ϕ est un quotient en représentation régulière. Puisque que Q est connexe, on en déduit que ϕ est un quotient en représentation régulière. En particulier, ϕ_o est une G -grappe.

Montrons que ii) implique iii). Posons $A = S^*V^*$. G agit naturellement sur l'algèbre graduée A . Notons A_G la coalgèbre, c'est-à-dire l'algèbre quotient de A par l'idéal engendré par A_+^G . ϕ_o est une G -grappe signifie que A_G est isomorphe à la représentation régulière. Posons V un supplémentaire gradué et G -invariant de l'idéal engendré par A_+^G dans A , de sorte que V est isomorphe à la représentation régulière. On peut fixer une base β formée d'éléments homogènes de A et comprenant autant d'éléments que l'ordre du groupe G . β est alors une base du A^G module A (voir la remarque 1 page

115 de [Bou68]). En appliquant le théorème 4 page 115 de [Bou68], on déduit que Q est lisse en o .

Montrons que iii) implique i). Supposons que Q soit lisse en o . k^* agit sur V par homothéties. Cette action passe au quotient. L'image réciproque du lieu lisse de Q est donc un ouvert de V stable par homothéties et qui contient l'origine, donc V tout entier. Ainsi Q est lisse. Notons N le sous-groupe de G engendré par les pseudo-réflexions de G . N est un sous-groupe distingué de G puisque l'ensemble des pseudo-réflexions est stable par conjugaison. Considérons H le groupe quotient de G par N . Il reste à montrer que H est trivial. Notons Y le quotient de V par N . En appliquant le théorème 4 page 115 de [Bou68], on déduit que Y est lisse. Le groupe H agit de manière fidèle et admissible sur Y . Notons $p : Y \rightarrow Q$ le quotient géométrique et Y^l l'ouvert où l'action est libre. $\text{codim}(Y \setminus Y^l) \geq 2$. En effet, un élément de G non dans N n'est pas une pseudo-réflexion donc son lieu fixe est un sous-espace vectoriel de V de codimension supérieure à deux. On conclut que le lieu fixe des éléments de H est de codimension supérieure à deux dans Y . Y et Q sont lisses et $\text{codim}(Y \setminus Y^l) \geq 2$, donc d'après 2.2.4, l'action de H sur Y est libre. Or H est le stabilisateur de l'origine. Donc H est trivial. \square

Démonstration de 2.2.1. On peut supposer que X est affine, quitte à se restreindre à un ouvert affine G -invariant contenant x . Posons $H = G_x$. On considère l'action de H sur X et on note $\phi' : X \rightarrow Q'$ le quotient géométrique. On pose $o' = \phi'(x)$. On considère le G -morphisme $G \times_H X \rightarrow X$. On peut appliquer le lemme fondamental de Luna en caractéristique quelconque (théorème 6.2 de [BR85]). D'une part, on en déduit que Q est lisse en o ssi Q' est lisse en o' . D'autre part, on en déduit que $\phi_o = G \times_H \phi'_{o'}$ et donc que ϕ_o est une G -grappe ssi $\phi'_{o'}$ est une H -grappe.

Posons $V = T_x X$. On considère l'action de H sur V et on note $\phi'' : V \rightarrow Q''$ le quotient géométrique. On pose $o'' = \phi''(0)$. On considère le H -morphisme $X \rightarrow V$ étale en x qui envoie x sur 0 . On peut appliquer le lemme fondamental de Luna en caractéristique quelconque (théorème 6.2 de [BR85]). D'une part, on en déduit que Q' est lisse en o' ssi Q'' est lisse en o'' . D'autre part on en déduit que $\phi'_{o'} = \phi''_{o''}$, et donc que $\phi_{o'}$ est une H -grappe ssi $\phi''_{o''}$ est une H -grappe. Ainsi, on achève la démonstration du théorème en appliquant le cas local 2.2.2 à l'action de H sur V . \square

2.3 Quelques propriétés élémentaires

Proposition 2.3.1. On suppose que G agit sur une variété lisse X de manière fidèle et admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. La variété Q est normale mais non lisse en général. Le morphisme $\pi : G\text{-Hilb}(X) \rightarrow Q$ est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert lisse U de Q . $G\text{-Hilb}^d(X)$ est l'adhérence de $\pi^{-1}(U)$ muni de la structure induite réduite.

Démonstration. On considère le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_U & \longrightarrow & X \\ \downarrow \phi_U & & \downarrow \phi \\ U & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Ceci se prouve par fonctorialité ou en utilisant la proposition 1.4.3 de [Tér04]. On en déduit que le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} G\text{-Hilb}(X_U) & \longrightarrow & G\text{-Hilb}(X) \\ \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi \\ U & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Le groupe G agit de manière fidèle et admissible sur la variété lisse X_U . Puisque U est lisse, on déduit de 2.2.1 que ϕ_U est un quotient en représentation régulière. Mais alors $G\text{-Hilb}(X_U) = U$, i.e. π_U est un isomorphisme, i.e. π est un isomorphisme au-dessus de U . \square

Rappelons que la dimension de chaque représentation linéaire irréductible ρ_α de G est notée d_α .

Proposition 2.3.2. On suppose que G agit sur une algèbre A de type fini sur k . Géométriquement, G agit sur $X = \text{Spec}(A)$ et l'inclusion $A^G \subset A$ correspond au quotient géométrique $\phi : X \rightarrow Q$. Les points de $G\text{-Hilb}(X)$ sont les G -grappes. Une G -grappe est vue comme un idéal G -invariant I de A tel que $A/I \simeq k[G]$.

Pour tout b , avec $b = (b^\alpha)$ et $b^\alpha \in (A^\alpha)^{d_\alpha}$, on note R_b le sous-espace vectoriel G -invariant de A engendré par b . Alors $G\text{-Hilb}(X)$ est recouvert par les cartes affines U_b , dont les points sont les G -grappes I supplémentaires à R_b dans A .

Démonstration. Une G -grappe est un sous-schéma fermé G -invariant Y de X tel que Y est affine et $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ est isomorphe à la représentation régulière. Ici la condition Y affine est superflue puisque Y est un sous-schéma fermé de X qui est affine. Un sous-schéma fermé de Y de X correspond à un idéal I de A . Sous cette équivalence, une G -grappe correspond à idéal G -invariant I de A tel que $A/I \simeq k[G]$.

Remarquons que la donnée de b est équivalente à la donnée de morphismes $B^\alpha : (A^G)^{d_\alpha} \rightarrow A^\alpha$, équivalente à la donnée de morphismes $\psi^\alpha : (\mathcal{O}_Q)^{d_\alpha} \rightarrow p_*(\mathcal{O}_X)^\alpha$ elle-même équivalente à la donnée de $\psi : \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k (\mathcal{O}_Q)^{d_\alpha}] \rightarrow p_*(\mathcal{O}_X)$. On définit U_b comme la trace de la carte affine \mathcal{C}_ψ de $\mathbf{Gr}_D^{Gm}(p_*(\mathcal{O}_X))$ sur $G\text{-Hilb}(X)$. Soit une G -grappe I . Montrons que la G -grappe I est dans la carte U_b ssi I est un supplémentaire de R_b dans A . Notons o le support de la G -grappe. On peut ainsi voir la G -grappe comme

un sous-schéma fermé Y de X_o . On considère $m : (\pi_o)_*(\mathcal{O}_{X_o}) \rightarrow p_*(\mathcal{O}_Y)$. Par définition, la G -grappe est dans la carte affine U_b ssi $m \circ \psi_o$ est un isomorphisme. On vérifie que ceci équivaut au fait que I soit supplémentaire de R_b dans A . \square

2.4 Méthode de calcul de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$, $G \subset GL_n(k)$

Dans cette section, on suppose que G est un sous-groupe de $GL_n(k)$ et on propose une méthode de calcul de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. Puis nous appliquons cette méthode sur l'exemple du groupe non abélien le plus simple possible en dimension trois.

Notons A l'anneau de coordonnées de k^n , qui est l'algèbre symétrique de $(k^n)^\vee$. En reprenant la proposition 2.3.2, le schéma $G\text{-Hilb}(k^n)$ est recouvert par les cartes affines U_b , avec $b = (b^\alpha)$ et $b^\alpha \in (A^\alpha)^{d_\alpha}$. En reprenant le théorème 1.6.1, le schéma $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ est recouvert par les cartes affines Z_b . En pratique, il s'agit de déterminer quelles cartes affines Z_b suffisent à recouvrir $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ et de calculer les anneaux de coordonnées O_b de ces cartes. Pour cela, on utilise la méthode de décomposition de la coalgèbre A_G , qui est l'algèbre graduée quotient de A par l'idéal $\langle A_+^G \rangle$ engendré par les éléments de A^G n'ayant pas de composante en degré nul.

Proposition 2.4.1. Pour chaque représentation ρ_α , on fixe f^α une famille d'éléments homogènes de A^α induisant une k -base de A_G^α . Alors f^α forme une famille génératrice du A^G -module gradué A^α .

Démonstration. Par définition, un élément gradué de A^α s'écrit de manière unique comme la somme d'une combinaison linéaire d'éléments de f^α et d'un élément gradué de $\langle A_+^G \rangle^\alpha$. En considérant l'épimorphisme gradué naturel $A_+^G \otimes_k A \rightarrow \langle A_+^G \rangle^\alpha$, on obtient un épimorphisme naturel gradué $A_+^G \otimes_k A^\alpha \rightarrow \langle A_+^G \rangle^\alpha$. Ainsi l'élément gradué de $\langle A_+^G \rangle^\alpha$ est combinaison linéaire d'éléments de plus petits degrés de A^α avec pour coefficients des éléments homogènes de A^G de degré non nul. On conclut par récurrence sur les degrés. \square

Proposition 2.4.2. En reprenant les notations de la proposition 2.3.2, on peut fixer un ensemble de b , avec $b = (b^\alpha)$ et $b^\alpha \in (f^\alpha)^{d_\alpha}$, tel que chaque G -grappe I graduée soit supplémentaire à un des R_b . Alors les cartes Z_b recouvrent le schéma $G\text{-Hilb}^d(k^n)$.

Démonstration. On va utiliser l'action de k^* sur $G\text{-Hilb}(k^n)$ décrite ci-après. Le groupe k^* agit sur k^n par homothéties. Les actions de k^* et G sur V commutent. Le transformé d'une G -grappe (resp. une G -orbite) par l'action d'un élément de k^* sur k^n est donc encore une G -grappe (resp. une G -orbite). Plus précisément, k^* agit de manière naturelle sur $G\text{-Hilb}(k^n)$ et Q et le morphisme $\pi : G\text{-Hilb}(k^n) \rightarrow Q$ est k^* -équivariant. Remarquons qu'une G -grappe I est fixe sous l'action de k^* lorsque I est gradué. Dans ce cas,

I contient $\langle A_+^G \rangle$ (car I est gradué, I ne contient pas 1 et le quotient de A par I ne contient qu'une copie de la représentation triviale). Ainsi on peut fixer un ensemble de b comme dans l'énoncé de la proposition. Il nous reste à montrer que les cartes Z_b recouvrent le schéma $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. Pour cela, on va montrer que les cartes U_b recouvrent le schéma $G\text{-Hilb}(k^n)$.

Soit une G -grappe I . Le morphisme de m de k^* dans $G\text{-Hilb}(k^n)$ qui à λ associe $\lambda \cdot I$ se prolonge au départ à k en un morphisme m' . En effet, le morphisme $\pi \circ m$ (qui à λ associe $\lambda \cdot \pi(I)$) se prolonge au départ à k et le morphisme π est propre, donc on conclut en utilisant le critère valuatif. Notons I_0 l'image de 0 par m' . La G -grappe I_0 est un point fixe sous l'action de k^* donc est graduée. Par hypothèse, il existe donc un b tel que I_0 appartienne U_b . Nous allons voir que I également appartient à U_b . Remarquons tout d'abord que U_b est invariant sous l'action de k^* . En effet R_b est invariant sous l'action de k^* (car engendré par des éléments homogènes) donc le transformé par un élément de k^* d'un idéal supplémentaire à R_b est encore supplémentaire à R_b . Ainsi U_b est un ouvert contenant I_0 dont l'image réciproque par m est un ouvert non vide de k^* stable par l'action de k^* , donc k^* entier. Donc I appartient à U_b . \square

Proposition 2.4.3. Reprenons la situation des propositions 2.4.1 et 2.4.1 et choisissons un b . Pour chaque α et chaque élément de f^α , on calcule ses coordonnées dans la base b^α . Alors O_b est la A^G -algèbre engendrée par toutes ces coordonnées.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.6.1 en remarquant de plus que f^α forme une famille génératrice du A^G module A^α d'après 2.4.1. \square

Nous allons appliquer notre méthode de calcul sur l'exemple le plus simple de groupe non abélien en dimension trois. Considérons le groupe $G = \mathfrak{S}_3$. G possède trois représentations irréductibles : la représentation triviale t , la représentation alternée a et une représentation de dimension deux appelée représentation standard s . Comme G est engendré par la transposition (12) et le 3-cycle (123), le tableau ci-après décrit les représentations a et s .

Représentation	Dimension	(12)	(123)
a	1	$\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$
s	2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{bmatrix}$

On considère G comme un sous-groupe de $GL_3(k)$ de manière à ce que la représentation de G sur les coordonnées linéaires canoniques soit $\text{Vect}(x, y, z) = a \oplus s$. Nous allons commencer par décrire l'action de G sur l'anneau de coordonnées $A = k[x, y, z]$. Les monômes x^2 et yz sont des monômes invariants. Quitte à factoriser par x^2 et yz , ce qui suit permet de décrire entièrement l'action de G sur A . Le groupe G agit par la

représentation triviale sur les monômes $y^{3k} + z^{3k}$ et $x(y^{3k} - z^{3k})$. Le groupe G agit par la représentation alternée sur les monômes $y^{3k} - z^{3k}$ et $x(y^{3k} + z^{3k})$. Le groupe G agit par la représentation standart sur les couples de monômes (y^{3k+1}, z^{3k+1}) , $(xy^{3k+1}, -xz^{3k+1})$, (z^{3k+2}, y^{3k+2}) et $(xz^{3k+2}, -xy^{3k+2})$.

En particulier, on déduit de la description ci-dessus que A^G admet le système de générateurs $x^2, yz, y^3 + z^3$ et $x(y^3 - z^3)$. On dispose d'une relation $x^2 \cdot [(z^3 + y^3)^2 - 4(xy)^3] - [x(z^3 - y^3)]^2 = 0$. Puisque A^G est un anneau intègre de dimension trois, on conclut qu'il n'y a pas d'autres relations. L'idéal $\langle A^G \rangle$ est donc engendré par les quatre éléments $x^2, yz, y^3 + z^3$ et $x(y^3 - z^3)$. On détermine un supplémentaire G -invariant que l'on décompose en représentations irréductibles comme suit :

Degré	t	a	s
0	1		
1		x	(y, z)
2			$(z^2, y^2)(xy, -xz)$
3		$y^3 - z^3$	$(xz^2, -xy^2)$

Soit I un idéal gradué tel que le quotient de A par I soit isomorphe à la représentation régulière. (y, z) n'appartient pas à I^s , sinon (z^2, y^2) , $(xy, -xz)$ et $(xz^2, -xy^2)$ appartiendraient à I^s qui serait de codimension un dans A^s . Puisque la codimension de I^s dans A^s est deux, il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $a(z^2, y^2) + b(xy, -xz)$ appartienne à I^s . Si b est non nul, en multipliant par $x + y$, on conclut que $(xz^2, -xy^2)$ appartient à I^s . Sinon, en multipliant par x , on conclut que $(xz^2, -xy^2)$ appartient à I^s . Dans tous les cas, $(xz^2, -xy^2)$ appartient à I^s . On conclut que $(y, z), (z^2, y^2)$ ou $(y, z), (xy, -xz)$ est un supplémentaire de I^s . On voit également que x ou $y^3 - z^3$ est un supplémentaire de I^a . Remarquons que si $y^3 - z^3$ est un supplémentaire de I^a , alors $x \in I$, donc $(xy, -xz) \in I^s$ et $(y, z), (z^2, y^2)$ est un supplémentaire de I^s .

On définit b, c, d comme ci-dessous. D'après ce qui précède, toute G -grappe I graduée est supplémentaire à R_b, R_c ou R_d . Donc $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ est recouvert par les cartes affines Z_b, Z_c et Z_d .

$$b = (1, x, ((y, z), (z^2, y^2)))$$

$$c = (1, x, ((y, z), (xy, -xz)))$$

$$d = (1, y^3 - z^3, ((y, z), (z^2, y^2)))$$

Calculons les coordonnées de la carte Z_b . La A^G algèbre O_b est engendrée par les éléments :

$$\begin{aligned} & x^2/[x(z^3 - y^3)] \\ & x^2(y^3 + z^3)/[x(z^3 - y^3)] \\ & x^2yz/[x(z^3 - y^3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2(yz)^2/[x(z^3 - y^3)] \\ & x^2(y^3 + z^3)/[x(z^3 - y^3)] \end{aligned}$$

On conclut que la k -algèbre O_b est engendrée par les éléments $x^2/[x(z^3 - y^3)]$, $x(z^3 - y^3)$, yz et $(y^3 + z^3)$. Or, on dispose de la relation $x(z^3 - y^3) = x^2/[x(z^3 - y^3)] \cdot [(y^3 + z^3)^2 - 4(yz)^3]$. Finalement, la k -algèbre O_b est engendrée par les trois éléments algébriquement indépendants $x^2/[x(z^3 - y^3)]$, $x(z^3 - y^3)$ et $(y^3 + z^3)$ et donc, la carte C_b est isomorphe à k^3 .

Calculons les coordonnées de la carte Z_c . La A^G algèbre O_c est engendrée par les éléments :

$$\begin{aligned} & x(z^3 - y^3)/x^2 \\ & (y^3 + z^3)/yz \\ & x(z^3 - y^3)/[x^2yz] \\ & x(z^3 - y^3)/yz \\ & (y^3 + z^3)/yz \end{aligned}$$

On conclut que la k -algèbre O_c est engendrée par les éléments x^2 , yz , $(y^3 + z^3)/yz$ et $x(z^3 - y^3)/[x^2yz]$. Or, on dispose de la relation $4yz = [(y^3 + z^3)/yz]^2 - x^2[x(z^3 - y^3)/[x^2yz]]^2$. Finalement, la k -algèbre O_c est engendrée par les trois éléments algébriquement indépendants x^2 , $(y^3 + z^3)/yz$ et $x(z^3 - y^3)/[x^2yz]$ et donc, la carte C_c est isomorphe à k^3 .

Calculons les coordonnées de la carte Z_d . La A^G algèbre O_d est engendrée par les éléments :

$$\begin{aligned} & x(z^3 - y^3)/x^2 \\ & x^2(y^3 + z^3)/[x(z^3 - y^3)] \\ & x^2yz/[x(z^3 - y^3)] \\ & x^2(yz)^2/[x(z^3 - y^3)] \\ & x^2(y^3 + z^3)/[x(z^3 - y^3)] \end{aligned}$$

On conclut que la k -algèbre O_c est engendrée par les éléments $x(z^3 - y^3)/x^2$, $x^2(y^3 + z^3)/[x(z^3 - y^3)]$, $x^2yz/[x(z^3 - y^3)]$ et x^2 . Or, on dispose de la relation $x^2 = [x^2(y^3 + z^3)/[x(z^3 - y^3)]]^2 - 4x(z^3 - y^3)/x^2[x^2yz/[x(z^3 - y^3)]]^3$. Finalement, la k -algèbre O_d est engendrée par les trois éléments algébriquement indépendants $x(z^3 - y^3)/x^2$, $x^2(y^3 + z^3)/[x(z^3 - y^3)]$ et $x^2yz/[x(z^3 - y^3)]$ et donc, la carte C_d est isomorphe à k^3 .

2.5 Le théorème de Nakamura revisité

Dans cette section, G est un sous-groupe de $(k^*)^n$. Par passage au quotient sous l'action sur G , la variété torique affine $(k^*)^n \subset k^n$ fait de $T \subset Q$ une variété torique affine. Dans la proposition suivante, on considère les schémas $G\text{-Hilb}(X)$, $G\text{-Hilb}^d(X)$ et aussi la normalisation $N(G\text{-Hilb}^d(X))$.

Proposition 2.5.1. T agit naturellement sur $G\text{-Hilb}(k^n)$, $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ et $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$. De plus, il existe des immersions ouvertes équivariantes de T dans $G\text{-Hilb}(k^n)$, $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ et $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$.

Démonstration. Les actions de G et $(k^*)^n$ sur k^n commutent. Le transformé d'une G -grappe (resp. d'une G -orbite) sous l'action d'un élément de $(k^*)^n$ est donc une G -grappe (resp. une G -orbite). En fait, on constate que le morphisme $\pi : G\text{-Hilb}(k^n) \rightarrow Q$ est $(k^*)^n$ équivariant et puisque l'action de $G \subset (k^*)^n$ est triviale, le morphisme π est même T équivariant. On peut montrer tout cela fonctoriellement. Puisque T est un ouvert lisse de Q , π est un isomorphisme au-dessus de T qui est un ouvert de $G\text{-Hilb}(k^n)$ et même de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ d'après la proposition 2.3.1. Le reste de la démonstration est formel. \square

Ainsi, $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ une variété torique au sens large (car elle n'est pas normale) et $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$ est une variété torique au sens de [Ful93]. En particulier, $N(G\text{-Hilb}^d(X))$ est décrite combinatoirement par un éventail. En utilisant la définition de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ du chapitre 1, nous allons revisiter le théorème de Nakamura (théorème 2.11 de [Nak01]), qui consiste à calculer ces variétés toriques à partir de la notion de « G -graphe ». Pour les notations combinatoires concernant la variété torique $T \subset Q$, on renvoie le lecteur à la section C.1 en appendice. En particulier, \mathbb{Z}^n désigne l'ensemble des monômes et \mathbb{N}^n désigne l'ensemble des monômes de Laurent.

Définition-Propriété 2.5.2. On appelle G -graphe une partie de \mathbb{N}^n stable par divisibilité et formant un système de représentants de G^\vee (vu comme groupe quotient de \mathbb{Z}^n par M). On dispose d'une bijection entre les graphes et les G -grappes fixes sous l'action de T qui à un graphe Γ associe l'idéal I_Γ de $k[\mathbb{N}^n]$ basé par les monômes non dans Γ . À chaque graphe Γ , on peut associer une carte affine U_Γ de $G\text{-Hilb}(k^n)$ invariante sous l'action de T . De plus, I_Γ est le seul point fixe sous l'action de T contenu dans U_Γ .

Démonstration. L'action de T sur $G\text{-Hilb}(k^n)$ se déduit de l'action de $(k^*)^n$ sur $G\text{-Hilb}(k^n)$ par passage au quotient. Il est équivalent de prouver la proposition en considérant $(k^*)^n$ à la place de T . Les points de $G\text{-Hilb}(k^n)$ sont les G -grappes. Nous voyons ici une G -grappe comme un idéal I de $k[\mathbb{N}^n]$ G -invariant tel que le quotient de $k[\mathbb{N}^n]$ par I soit isomorphe à la représentation régulière. L'action de $(k^*)^n$ sur $k[\mathbb{N}^n]$ induit l'action sur les idéaux I correspondant à des points de $G\text{-Hilb}(k^n)$.

Une G -grappe fixe sous l'action de $(k^*)^n$ est un idéal I de $k[\mathbb{N}^n]$ $(k^*)^n$ -invariant et tel que le quotient de $k[\mathbb{N}^n]$ par I soit la représentation régulière. I est $(k^*)^n$ -invariant donc admet pour k -base l'ensemble de ses monômes que nous notons $\mathbb{N}^n(I)$. Notons Γ le complémentaire de $\mathbb{N}^n(I)$ dans \mathbb{N}^n . Puisque I est un idéal, Γ est stable par divisibilité. Puisque le quotient de $k[\mathbb{N}^n]$ par I est isomorphe à la représentation régulière, Γ forme un système de représentants de G^\vee ($k \cdot \Gamma$ est un supplémentaire de I dans $k[\mathbb{N}^n]$ G -invariant donc isomorphe à la représentation régulière). Réciproquement, soit Γ un graphe. On pose $I_\Gamma = k \cdot (\mathbb{N}^n \setminus \Gamma)$. On vérifie directement que I est une G -grappe fixe sous l'action de $(k^*)^n$. Ce qui précède montre que l'application, de l'ensemble des graphes dans l'ensemble des G -grappes fixes sous l'action de $(k^*)^n$, qui à Γ associe I_Γ , est une bijection.

Soit Γ un graphe. Pour chaque $\alpha \in G^\vee$, on note Γ_α le représentant de G^\vee dans Γ . Considérons α comme une représentation irréductible de G de dimension un et Γ_α comme un élément de $k[\mathbb{N}^n]^\alpha$. D'après 2.3.2, on dispose d'une carte affine U_Γ de $G\text{-Hilb}(k^n)$ paramétrant les G -grappes I qui sont supplémentaires à $k \cdot \Gamma$ dans $k[\mathbb{N}^n]$. Puisque $k \cdot \Gamma$ est invariant sous l'action de $(k^*)^n$, le transformé d'un idéal supplémentaire à $k \cdot \Gamma$ sous l'action d'un élément de $(k^*)^n$ est encore un idéal supplémentaire à $k \cdot \Gamma$. Donc U_Γ est invariant sous l'action de $(k^*)^n$. Il est clair que I_Γ est le seul point fixe contenu dans U_Γ . \square

Notons Z_Γ la carte torique affine induite par U_Γ sur $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ et notons $N(Z_\Gamma)$ la carte torique affine induite sur $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$. Z_Γ est la carte affine de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ introduite dans 1.6 et on a noté O_Γ son anneau de coordonnées. Puisque Z_Γ est un carte torique affine, $O_\Gamma = k[S_\Gamma]$ où S_Γ est un sous-monoïde de $\mathbb{N}^n \cap M$ de type fini. Posons $\sigma_\Gamma = S_\Gamma^\vee$.

Propriété 2.5.3. On appelle G -graphe dynamique tout graphe Γ tel que I_Γ appartienne à $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. Lorsque Γ décrit l'ensemble des graphes dynamiques, les Z_Γ (resp. $N(Z_\Gamma)$) forment un système de cartes affines toriques minimal de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ (resp. $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$). Donc, lorsque Γ décrit l'ensemble des graphes dynamiques, les σ_Γ forment la subdivision de σ par des cônes de dimension n qui décrit combinatoirement la variété torique $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$.

Démonstration. Les Z_Γ comprennent tous les points fixes de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ sous l'action de T , donc les $N(Z_\Gamma)$ comprennent tous les points fixes de $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$ (par image réciproque et car la normalisation envoie points fixes sur points fixes). Les $N(Z_\Gamma)$ forment donc un système de cartes toriques affines comprenant tous les points fixes de $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$. Les σ_Γ recouvrent donc σ et les $N(Z_\Gamma)$ recouvrent $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$. Par surjectivité de la normalisation, les Z_Γ recouvrent $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. Puisque les Z_Γ comprennent chacun un unique point fixe sous l'action de T , les Z_Γ forment un système de carte affine minimal de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. On en déduit que les $N(Z_\Gamma)$

forment un système de cartes toriques affine minimal de $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$ (par image réciproque et car la normalisation est surjective). $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$ est propre sur Q , donc le support de son éventail est σ . Ainsi, les σ_Γ forment la subdivision de σ par des cônes de dimension n qui décrit combinatoirement $N(G\text{-Hilb}^d(k^n))$. \square

Propriété 2.5.4. Soit Γ un graphe. Pour chaque monôme m , on note $wt_\Gamma(m)$ l'unique monôme de Γ congruant à m modulo M . Alors le monoïde S_Γ est engendré par les $m/wt_\Gamma(m)$ lorsque m décrit \mathbb{N}^n .

Démonstration. Soit $\alpha \in G^\vee$. L'élément α est vu comme une représentation irréductible de dimension un. On note Γ_α le monôme de Γ représentant α . $k[\mathbb{N}^n]^\alpha$ est engendré par les monômes $m \in \mathbb{N}^n$ congruant à Γ_α modulo M . Pour chaque monôme $m \in \mathbb{N}^n$ congruant à Γ_α modulo M , la coordonnée de m dans la base Γ_α de $k[\mathbb{N}^n]^\alpha$ est m/Γ_α . D'après 1.6, O_Γ est engendré par les m/Γ_α lorsque α décrit G^\vee et m décrit l'ensemble des $m \in \mathbb{N}^n$ congrus à Γ_α modulo M . Autrement dit, l'algèbre O_Γ est engendrée par les $m/wt_\Gamma(m)$ lorsque m décrit \mathbb{N}^n . Donc le monoïde S_Γ est engendré par les $m/wt_\Gamma(m)$ lorsque m décrit \mathbb{N}^n . \square

Nous avons ainsi revisité le théorème de Nakamura (théorème 2.11 de [Nak01]) à partir de la définition de $G\text{-Hilb}(X)$ donnée dans le chapitre 1. Pour la commodité du lecteur, nous redonnons un lemme de Nakamura (lemme 1.8 de [Nak01]) qui permet de calculer efficacement les semi-groupes S_Γ , et que nous utiliserons.

Propriété 2.5.5. Soit Γ un G -graphe dynamique. Pour chaque monôme de m , on note $wt_\Gamma(m)$ l'unique monôme de Γ congruant à m modulo M . On suppose donnée une partie P de $\mathbb{N}^n \setminus \Gamma$ telle que $\mathbb{N}^n \setminus \Gamma = P \cdot \mathbb{N}^n$. Alors le monoïde S_Γ est engendré par les $m/wt_\Gamma(m)$ lorsque m décrit P .

Démonstration. Notons S'_Γ le monoïde engendré par les éléments du type $p/wt_\Gamma(p)$ avec $p \in P$. Le but est de montrer que tous les $m/wt_\Gamma(m)$ sont dans S'_Γ . Fixons un élément l de L situé dans l'intérieur de σ_Γ . Définissons la fonction h de S_Γ dans \mathbb{N} qui à un élément m associe $\langle l, m \rangle$. Remarquons que h est additive et $h(m) = 0$ ssi $m = 1$. Nous allons procéder par récurrence forte sur $h(m/wt_\Gamma(m))$. L'initialisation est triviale. Lorsque $h(m/wt_\Gamma(m)) \neq 0$, m n'appartient pas à Γ donc $m = p \cdot n$ avec $p \in P$ et $n \in \mathbb{N}^n$. On a $m/wt_\Gamma(m) = p/wt_\Gamma(p) \cdot nwt_\Gamma(p)/wt_\Gamma(m)$. D'après l'hypothèse de récurrence forte $nwt_\Gamma(p)/wt_\Gamma(m) \in S'_\Gamma$. On conclut que $m/wt_\Gamma(m) \in \Gamma$. \square

2.6 $G\text{-Hilb}^d(k^3)$, $G \subset (k^*)^3 \cap SL_3(k)$

Dans cette section, G est un sous-groupe fini de $(k^*)^3 \cap SL_3(k)$. Nakamura a appliqué son théorème (théorème 2.11 de [Nak01]) pour calculer

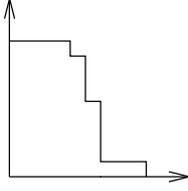


FIG. 2.1 –

$G\text{-Hilb}^d(k^3)$ et montrer que c'est une résolution crépante de Q (théorème 0.1 de [Nak01]). Puis Craw et Reid ont donné une description combinatoire élégante de $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ montrant à nouveau que c'est une résolution crépante de Q (théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 de [CR02]). Leur preuve s'éloigne légèrement du théorème de Nakamura. Dans cette section, nous déterminons de manière directe l'ensemble des graphes dynamiques de Nakamura. Puis nous en déduisons la description combinatoire de $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ due à Craw et Reid.

Nous appliquons ici la section précédente (avec $n = 3$). Le but est de déterminer l'ensemble des G -graphes dynamiques. Pour cela, nous allons commencer par voir quelle est la forme des G -graphes dynamiques. Remarquons qu'un G -graphe dynamique Γ se décompose en trois graphes planaires. En effet, le monôme $x_1x_2x_3$ n'appartient pas au graphe puisque le monôme 1 représente déjà le caractère trivial. Ainsi, le graphe ne contient aucun monôme divisible par le monôme $m_0 = x_1x_2x_3$. Donc Γ se décompose en la réunion des trois sous-graphes planaires Γ_i , où Γ_i est l'ensemble des monômes de Γ ne contenant pas l'indéterminée x_i . Remarquons que l'allure générale d'un graphe en dimension deux est donnée par la figure 2.1. Les trois lemmes suivants servent à montrer que les graphes Γ_i ont une allure particulière. Ils sont dus à Nakamura (lemmes 3.2 et 3.3 de [Nak01]).

Lemme 2.6.1. Notons p_i la plus grande puissance positive telle que le monôme $x_i^{p_i}$ appartienne à Γ . L'unique monôme de Γ représentant le même caractère que $x_i^{p_i+1}$ est de la forme $x_{i+1}^{a_{i+1}}x_{i-1}^{b_{i-1}}$.

Démonstration. En effet, notons m ce monôme. Le monôme m n'est pas divisible par x_i sinon m/x_i et $x_i^{p_i}$ seraient des monômes de Γ représentant le même caractère. \square

Lemme 2.6.2. Le monôme $x_{i+1}^{a_{i+1}+1}x_{i-1}^{b_{i-1}+1}$ n'appartient pas à Γ .

Démonstration. En effet, sinon $x_{i+1}^{a_{i+1}+1}x_{i-1}^{b_{i-1}+1}$ et $x_i^{p_i}$ seraient des monômes de Γ représentant le même caractère. \square

Lemme 2.6.3. Supposons qu'il existe deux entiers positifs a et b tel que $x_{i+1}^ax_{i-1}^b$, $x_{i+1}^{a+1}x_{i-1}^b$ et $x_{i+1}^ax_{i-1}^{b+1}$ soient des monômes de Γ mais pas $x_{i+1}^{a+1}x_{i-1}^{b+1}$. Alors $a = a_{i+1}$ et $b = b_{i-1}$.

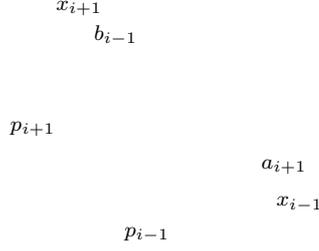


FIG. 2.2 –

Démonstration. Considérons m l'unique monôme de Γ représentant le même caractère que $x_{i+1}^{a+1}x_{i-1}^{b+1}$. m n'est pas divisible par x_{i+1} sinon m/x_{i+1} et $x_{i+1}^a x_{i-1}^{b+1}$ seraient des monômes de Γ représentant le même caractère. m n'est pas divisible par x_{i-1} sinon m/x_{i-1} et $x_{i+1}^{a+1}x_{i-1}^b$ seraient des monômes de Γ représentant le même caractère. Donc $m = x_i^p \cdot x_i^{p+1}$ n'appartient pas à Γ puisqu'il représente le même caractère que $x_{i+1}^a x_{i-1}^b$. Donc $p = p_i$. Mais alors $a = a_{i+1}$ et $b = b_{i-1}$. \square

D'après les trois lemmes précédents, l'allure générale du graphe Γ_i est celui de la figure 2.2. En particulier on a les inégalités $0 \leq a_{i+1} \leq p_{i+1}$ et $0 \leq b_{i-1} \leq p_{i-1}$. Remarquons que les cas d'égalités donnent lieu à une figure dégénérée. L'ensemble des monômes de notre graphe est entièrement déterminé par la description que nous venons de faire. Les deux lemmes suivant montrent que le G -graphe dynamique Γ vérifie des propriétés encore plus restrictives.

Lemme 2.6.4. Posons $k_i = p_i - a_i - b_i$. Les k_i sont tous égaux.

Démonstration. Faisons un i . En combinant le contenu de 2.6.1 pour $i - 1$ et $i + 1$, on obtient que le monôme $x_i^{p_i+1-k_i}$ et le monôme $x_{i+1}^{a_{i+1}+k_{i+1}}x_{i-1}^{b_{i-1}+k_{i-1}}$ représentent le même caractère. D'une part, on dispose de l'inégalité $p_i + 1 - k_i \geq 0$ et donc, le monôme $x_i^{p_i+1-k_i}$ appartient à Γ dès que k_i est strictement positif. D'autre part, on dispose des inégalités $0 \leq a_{i+1} + k_{i+1} \leq p_{i+1}$ et $0 \leq b_{i-1} + k_{i-1} \leq p_{i-1}$, donc le monôme $x_{i+1}^{a_{i+1}+k_{i+1}}x_{i-1}^{b_{i-1}+k_{i-1}}$ appartient à Γ dès que k_{i-1} ou k_{i+1} est négatif. Ainsi k_i est strictement positif implique que k_{i-1} et k_{i+1} sont strictement positifs. En utilisant cette implication pour chaque i , on déduit qu'il y a deux situations possibles : soit les k_i sont tous strictement positifs, soit ils sont tous négatifs.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où les k_i sont tous strictement positifs. Fixons un i tel que k_i soit maximum. Notons l le minimum de k_{i-1} et k_{i+1} . On a vu plus haut que le monôme $x_i^{p_i+1-k_i}$ et le monôme $x_{i+1}^{a_{i+1}+k_{i+1}}x_{i-1}^{b_{i-1}+k_{i-1}}$ représentent le même caractère. De plus, le monôme $x_1 x_2 x_3$ représente le caractère trivial. Par combinaison, le monôme $x_i^{p_i+1+l-k_i}$

et le monôme $x_{i+1}^{a_{i+1}+k_{i+1}-l} x_{i-1}^{b_{i-1}+k_{i-1}-l}$ représentent le même caractère. Or, ce dernier monôme appartient au graphe Γ , donc l'avant dernier monôme ne lui appartient pas. Ceci implique que l est supérieur à k_i . Mais alors $k_{i-1} = k_i = k_{i+1}$.

Plaçons-nous désormais dans le cas où tous les k_i sont négatifs. Fixons un i tel que k_i soit minimum. On a vu plus haut que le monôme $x_i^{p_i+1-k_i}$ et le monôme $x_{i+1}^{a_{i+1}+k_{i+1}} x_{i-1}^{b_{i-1}+k_{i-1}}$ représentent le même caractère. De plus, le monôme $x_1 x_2 x_3$ représente le caractère trivial. Par combinaison, le monôme $x_i^{p_i+1}$ et le monôme $x_{i+1}^{a_{i+1}+k_{i+1}-k_i} x_{i-1}^{b_{i-1}+k_{i-1}-k_i}$ représentent le même caractère. Puisque ce dernier monôme appartient à Γ , il est égal à $x_{i+1}^{a_{i+1}} x_{i-1}^{b_{i-1}}$ par définition (cf 2.6.1). Ainsi $k_{i-1} = k_i = k_{i+1}$. \square

Lemme 2.6.5. Notons k la valeur commune des k_i . k est égal à 0 ou à 1. Dans le cas où $k = 0$, le semi-groupe S_Γ associé au graphe est basé par les monômes $x_i^{a_i+b_i+1}/(x_{i+1}^{a_{i+1}} x_{i-1}^{b_{i-1}})$ qui forment a fortiori une base de M . Dans le cas où $k = 1$, le semi-groupe S_Γ associé au graphe est basé par les monômes $(x_{i+1}^{a_{i+1}+1} x_{i-1}^{b_{i-1}+1})/x_i^{a_i+b_i+1}$ qui forment a fortiori une base de M .

Démonstration. En appliquant la proposition 2.5.5 avec la partie P formée des monômes $x_i^{p_i+1}$ des monômes $x_{i+1}^{a_{i+1}+1} x_{i-1}^{b_{i-1}+1}$ et du monôme m_0 , on montre que le semi-groupe S_Γ associé au graphe est engendré par les monômes $\lambda_i = x_i^{p_i+1}/(x_{i+1}^{a_{i+1}} x_{i-1}^{b_{i-1}})$, les monômes $\mu_i = (x_{i+1}^{a_{i+1}+1} x_{i-1}^{b_{i-1}+1})/x_i^{p_i}$ et le monôme m_0 . A fortiori, les monômes ci-dessus engendrent le groupe M des monômes de Laurent G invariants. Remarquons qu'on a les relations suivantes : $\lambda_i \mu_i = m_0$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = m_0^{k+1}$. On en déduit que le groupe M a pour base la famille $(m_0, \lambda_2, \lambda_3)$. L'ordre du groupe des caractères de G est donc égal au déterminant de cette famille dans la base (x_1, x_2, x_3) du groupe des monômes de Laurent. Par calcul de ce déterminant, on obtient que l'ordre de G^\vee est égal à $(k+1)^2 + \alpha(k+1) + \beta$ où α et β sont des entiers dépendant des a_i et des b_i . D'autre part, l'ordre de groupe des caractères de G est égal au nombre de monômes du graphe Γ . Puisque l'ensemble des monômes du graphe est entièrement déterminé par les a_i , les b_i et k , on peut calculer l'ordre en fonction de ces données. Après calcul, on obtient que l'ordre de G^\vee est égal à $(3k+1) + \alpha(k+1) + \beta$. En comparant les deux expressions obtenues pour l'ordre de G^\vee , on conclut que k est égal à 0 ou 1. Dans le cas où $k = 0$, on a les relations $m_0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ et $\mu_i = \lambda_{i-1} \lambda_{i+1}$, donc S_Γ est engendré par les λ_i . Dans le cas où $k = 1$, on a les relations $m_0 = \mu_1 \mu_2 \mu_3$ et $\lambda_i = \mu_{i-1} \mu_{i+1}$, donc S_Γ est engendré par les μ_i . \square

Le théorème suivant détermine l'ensemble des G -graphes dynamiques :

Théorème 2.6.6. Supposons donnés des entiers positifs a_i, b_i tels que les trois monômes $x_i^{a_i+b_i+1}/(x_{i+1}^{a_{i+1}} x_{i-1}^{b_{i-1}})$ forment une base de M . Posons $p_i = a_i + b_i$. Notons Γ la réunion des Γ_i où chaque Γ_i est l'ensemble de monômes de la figure 2.2. Alors Γ est un G -graphe dynamique . On qualifiera un tel

graphe de graphe de type « up ». De plus, le semi-groupe S_Γ est engendré par les trois monômes ci-dessus.

Supposons donnés des entiers positifs a_i, b_i tels que les trois monômes $(x_{i+1}^{a_i+1} x_{i-1}^{b_i+1})/x_i^{a_i+b_i+1}$ forment une base de M . Posons $p_i = a_i + b_i + 1$. Notons Γ la réunion des Γ_i où chaque Γ_i est l'ensemble de monômes de la figure 2.2. Alors Γ est un G -graphe dynamique. On qualifiera un tel graphe de graphe de type « down ». De plus, le semi-groupe S_Γ est engendré par les trois monômes ci-dessus.

Tout G -graphe dynamique est soit de type « up », soit de type « down ».

Démonstration. D'après 2.6.5, tout G -graphe dynamique est soit de type « up » soit « down ». Nous allons prouver la partie de théorème concernant les graphes de type « up », la partie concernant les graphes de type « down » étant analogue.

Supposons donnés des entiers positifs a_i, b_i tels que les trois monômes $x_i^{a_i+b_i+1}/(x_{i+1}^{a_i+1} x_{i-1}^{b_i+1})$ forment une base de M . Posons $p_i = a_i + b_i$. Notons Γ la réunion des Γ_i où chaque Γ_i est l'ensemble de monômes de la figure 2.2. Il reste à montrer que Γ est un G -graphe (ensuite, le fait que les trois monômes basent S_Γ provient de 2.5.5 et le fait que Γ est dynamique provient du fait que σ_γ est de dimension trois).

Il est visible que Γ est stable par divisibilité. Il nous reste donc à montrer que Γ forme un système de représentants de G^\vee (vu comme quotient de \mathcal{M} par M). D'une part, à partir de la base de M , on peut calculer l'ordre de G^\vee en fonction de a_i, b_i . D'autre part, à partir de la forme de Γ , on peut calculer son cardinal en fonction de a_i, b_i . On constate que le cardinal de Γ est égal à l'ordre de G^\vee . Il suffit donc de prouver que pour tout monôme de Laurent, il existe un monôme de Γ représentant le même caractère, c'est à dire congruant modulo M . Il suffit de le prouver pour un monôme du type $m \cdot x_i$ où m appartient à Γ . Traitons d'abord le cas où m n'appartient ni à Γ_{i-1} , ni à Γ_{i+1} , c'est à dire est divisible par $x_{i-1}x_{i+1}$. Dans ce cas $m x_i$ congrue à $m/(x_{i-1}x_{i+1})$ modulo M car $x_1 x_2 x_3$ appartient à M . De plus, $m/(x_{i-1}x_{i+1})$ appartient à Γ . Il reste à traiter le cas où m appartient à Γ_{i-1} , le cas où m appartient à Γ_{i+1} étant analogue. Écartons le sous-cas évident dans lequel $m \cdot x_i$ appartient encore à Γ_{i-1} . Dans l'autre sous-cas, soit $m = x_i^{a_i+b_i} x_{i+1}^k$ avec $0 \leq k \leq b_{i+1}$, soit $m = x_i^{a_i} x_{i+1}^{b_{i+1}+1+k}$ avec $0 \leq k \leq a_{i+1} - 1$. Si $m = x_i^{a_i+b_i} x_{i+1}^k$, alors m congrue à $x_{i+1}^{a_i+1+k} x_{i-1}^{b_i-1}$ modulo M car $x_i^{a_i+b_i+1}/(x_{i+1}^{a_i+1} x_{i-1}^{b_i-1})$ appartient à M . De plus, $m/(x_{i-1}x_{i+1})$ appartient à Γ . Si $m = x_i^{a_i} x_{i+1}^{b_{i+1}+1+k}$, alors m congrue à $x_{i-1}^{a_{i-1}+b_{i-1}-1} x_{i+1}^k$ modulo M car $x_{i-1}^{a_{i-1}+b_{i-1}+1}/(x_i^{a_i} x_{i+1}^{b_{i+1}+1})$ et $x_1 x_2 x_3$ appartiennent à M . De plus, $x_{i-1}^{a_{i-1}+b_{i-1}-1} x_{i+1}^k$ appartient à Γ . \square

A partir du théorème 2.6.6, on peut retrouver la description combinatoire de $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ due à Craw et Reid. Rappelons que nous suivons les notations

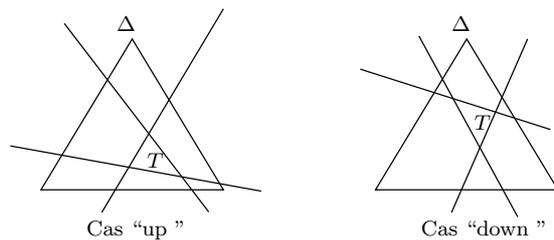


FIG. 2.3 –

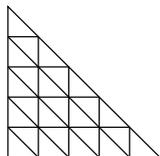


FIG. 2.4 –

de la section C.1 en appendice. On note \mathcal{H} l'hyperplan affine engendré par les éléments e_1, e_2, e_3 de la base canonique de \mathbb{R}^3 . Dans la suite, on ne considère que des triangles de \mathcal{H} dont les sommets sont des points de L . On note Δ le triangle dont les sommets sont e_1, e_2, e_3 . On appelle triangle basique un triangle dont les sommets sont exactement des points de L . Un triangle basique T est dit de type « up » si sa position par rapport au triangle Δ est celle donnée par la figure 2.3, au sens large (on admet que le support d'un côté du triangle T passent par un sommet du triangle Δ). Un triangle basique est dit de type « down » si sa position par rapport au triangle Δ est celle donnée dans la figure 2.3, au sens strict (c'est à dire qu'on n'admet pas que le support d'un côté du triangle T passe par un sommet de Δ).

Il est prouvé dans l'appendice C qu'à toute triangulation de Δ par des triangles basiques, on peut associer un éventail qui correspond à une résolution crépante de Q .

Théorème 2.6.7. Les triangles basiques de types « up » et « down » triangulent Δ et l'éventail obtenu à partir de cette triangulation décrit $G\text{-Hilb}^d(k^3)$, qui est donc une résolution crépante de Q .

Démonstration. Puisque les S_Γ sont saturés, $G\text{-Hilb}^d(k^3)$ est normal et les σ_Γ sont les cônes de dimension trois de l'éventail (d'après 2.5.3). Par traduction visuelle directe du théorème 2.6.6, cet éventail provient de la triangulation de Δ par les triangles basiques de type « up » et de type « down ». \square

Craw et Reid ont donné un algorithme très efficace qui permet de calculer la triangulation qui décrit combinatoirement $G\text{-Hilb}^d(k^3)$. Nous rapellons ici cet algorithme pour les commodités du lecteur. Un triangle est dit régulier si

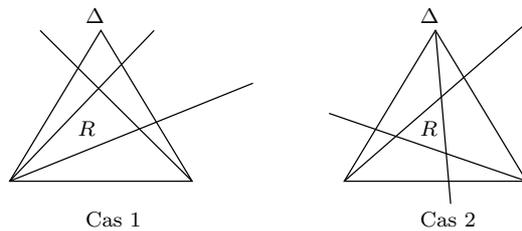


FIG. 2.5 –

il admet une décomposition une subdivision en triangles basiques comme sur la figure 2.4. Dans ce cas, cette subdivision est unique et appelée subdivision régulière du triangle basique. Un triangle régulier R est dit adapté si sa position relative par rapport au triangle Δ est donnée par l'un des cas de la figure 2.5.

On vérifie visuellement que l'union disjointe des subdivisions régulières des triangles réguliers adaptés forme l'ensemble des triangles basiques de type « up » et de type « down ». Ainsi, pour obtenir la subdivision du triangle Δ décrivant $G\text{-Hilb}^d(k^3)$, il suffit de déterminer la subdivision de Δ par les triangles réguliers adaptés puis de prendre leur subdivision régulière. Dans la section 2 de [CR02], il est donné un algorithme qui permet de déterminer les triangles réguliers adaptés. Cet algorithme efficace utilise des fractions continues.

2.7 $G\text{-Hilb}^d(k^n)$, $G = Z(SL_n(k))$

Dans cette section, on considère G le centre du groupe $SL_n(k)$. G est le groupe fini formé des homothéties dont le rapport est une racine n -ième de l'unité. Le groupe G est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par passage au quotient sous l'action de G , la variété torique affine $(k^*)^n \subset k^n$ induit une variété torique affine $T \subset Q$. Dans cette section, on prouve que $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ est l'unique résolution torique crépante de Q . Pour les définitions et notations combinatoires, on renvoie le lecteur à l'appendice C. Dans le cas complexe, on montre que l'anneau de cohomologie de la résolution crépante est isomorphe à l'anneau de cohomologie orbifold du quotient.

Proposition 2.7.1. Le quotient Q admet une unique résolution torique crépante Y . La résolution Y admet un unique diviseur exceptionnel isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.

Démonstration. D'après le théorème C.2.5, les résolutions crépantes toriques ont une description entièrement combinatoire. Les points du réseau L dans le simplexe Δ sont ses sommets ainsi que le point $V = 1/n(1, \dots, 1)$. Il n'existe évidemment qu'une unique subdivision simpliciale de Δ qui fasse

intervenir exactement ces points comme sommets : c'est la « subdivision barycentrique ». De plus, cette subdivision est évidemment basique. Ceci prouve que Q admet une unique résolution torique crépante. Le point V est le seul point de L dans Δ qui ne soit pas un sommet. D'après C.2.6, V_V est l'unique diviseur exceptionnel de la résolution. En considérant l'éventail associé à V_V (cf B.4), il est évident que V_V est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(k)$. \square

Proposition 2.7.2. L'unique résolution crépante de Q est $G\text{-Hilb}^d(k^n)$.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de Nakamura (cf section 2.5) afin de décrire combinatoirement la variété torique $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. Rappelons que nous adaptons les notations combinatoires de la section C.1 de l'appendice C. Les graphes sont dans cette situation simples à déterminer. Pour chaque x_i , l'ensemble des monômes $1, x_i, \dots, x_i^{n-1}$ forme un graphe Γ_i . Il n'y a pas d'autres graphes. En appliquant 2.5.5, on voit que le semi-groupe S_i associé au graphe Γ_i est engendré par les x_j/x_i (pour $j \neq i$) et x_i^n . Le cône associé au graphe Γ_i est le cône σ_i dont le système minimal de générateurs est composé de la base canonique (sauf le i -ième vecteur) et du vecteur $1/n(1, \dots, 1)$. Puisque les S_i sont saturés, $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ est normal. Puisque les σ_i sont tous de dimension n , tous les graphes sont dynamiques (cf 2.5.3). Ainsi les σ_i forment l'ensemble des cônes maximaux de l'éventail associé à la variété torique normale $G\text{-Hilb}^d(k^n)$. On vérifie que cette description combinatoire de $G\text{-Hilb}^d(k^n)$ correspond à celle de l'unique résolution torique crépante de Q (voir la preuve de 2.7.1). \square

Dans la proposition suivante concernant l'anneau de cohomologie de Y et l'anneau de cohomologie orbifold de Q , le corps de base est le corps des nombres complexes.

Proposition 2.7.3. Les anneaux gradués $H^*(Y)$ et $H^*_o(Q)$ sont tous deux isomorphes à l'anneau $\mathbb{Z}[u]/u^n$ muni de la graduation telle que u soit de degré deux.

Démonstration. Commençons par déterminer l'anneau de cohomologie de Y . D'après B.7.1, la résolution Y (qui est égale à W_V) se rétracte topologiquement sur son diviseur exceptionnel $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ (qui est égal à V_V). L'anneau de cohomologie de Y est donc isomorphe à celui de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ c'est-à-dire $\mathbb{Z}[u]/u^n$.

Calculons l'anneau de cohomologie orbifold de Q . Puisque le groupe G est abélien, l'anneau de cohomologie orbifold n'est autre que l'algèbre du groupe G filtrée par (deux fois) l'âge d'après E.2.3. Posons $\zeta = \exp(2i\pi/n)$. $H^*_o(Q)$ admet pour base les ζ^j pour $j = 0 \dots n-1$. L'âge de ζ^j est j . Ainsi le produit orbifold est donné par $\zeta^j \cup_o \zeta^k = \zeta^{j+k}$ si $j+k < n$ et $\zeta^j \cup_o \zeta^k = 0$ sinon. L'anneau de cohomologie orbifold du quotient est donc isomorphe à $\mathbb{Z}[u]/u^n$. \square

Chapitre 3

Anneau de cohomologie dans le cas local

Soit G un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$. On considère Q le quotient géométrique de \mathbb{C}^3 par G et une résolution crépante Y (dont le fibré canonique est trivial) du quotient. D'après le théorème de Bridgeland, King et Reid ([BKR01]), $G\text{-Hilb}^d(\mathbb{C}^3)$ est une résolution crépante. Nous allons commencer par décrire le lieu singulier de Q , l'action de G sur $(\mathbb{C}^*)^3$, ainsi que les résolutions crépantes Y . Ensuite nous déterminerons les groupes d'homologie de Y à coefficients entiers. Nous montrerons que les groupes de cohomologie de Y sont égaux aux groupes de Chow de Y à coefficients entiers. En vue du calcul de l'anneau de cohomologie, nous calculerons les nombres d'intersections de diviseurs exceptionnels. Puis nous calculerons l'anneau de cohomologie de Y ainsi que l'anneau de cohomologie orbifold de Q , à coefficients rationnels. Nous terminerons par un exemple.

Y est une variété torique lisse. Pour une variété torique lisse compacte, l'anneau de cohomologie admet une présentation standard due à Danilov (théorème 10.8 de [Dan78]). Pour une variété torique lisse projective, Fulton a exhibé une base de l'homologie de Borel-Moore puis redémontré le théorème de Danilov, en utilisant l'existence d'ordres particuliers sur les cônes maximaux de l'éventail (section 5.2 de [Ful93]). Pour Y , il existe de tels ordres mais les preuves de Fulton ne sont plus valables à cause de la non-compactité. Cependant, les théorèmes 3.2.1 et 3.3.1 ci-après résultent d'une dissection naturelle du théorème p108 de [Ful93] dans ce cas non-compact.

3.1 Action, lieu singulier et résolutions crépantes

La situation que nous étudions a une description entièrement combinatoire car le quotient est une variété torique et une résolution crépante est automatiquement torique. Nous décrivons ici sans justification l'action, le lieu singulier et les résolutions crépantes en relation avec la description to-

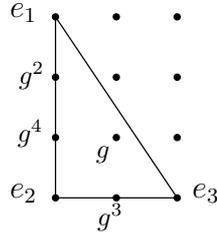


FIG. 3.1 –

rique combinatoire. Pour des détails de géométrie torique ou une preuve qu'une résolution crépante est automatiquement torique, on pourra consulter les appendices C ou D.

Chaque élément g du groupe est un triplet de racines de l'unité dont le produit est 1 et s'écrit donc de manière unique $(e^{2i\pi r_1}, e^{2i\pi r_2}, e^{2i\pi r_3})$ avec r_1, r_2, r_3 des rationnels compris dans l'intervalle $[0, 1[$ et tels que le nombre $r_1 + r_2 + r_3$ soit un entier. On appelle âge de g et on note $a(g)$ ce nombre. On considère le sur-réseau L de \mathbb{Z}^3 engendré par les triplets (r_1, r_2, r_3) lorsque g décrit G . En particulier le groupe G est identifié à L/\mathbb{Z}^3 . On note Δ le triangle de sommets la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 . Le seul élément de G d'âge 0 est le neutre. Les éléments d'âge 1 sont les points de L dans le triangle Δ excepté les sommets e_1, e_2, e_3 . Les éléments d'âge 2 sont les éléments ayant pour inverse un élément d'âge 1 qui est à l'intérieur du triangle Δ .

On appellera origine l'image de 0 dans Q . L'origine est un point singulier dès que le groupe G n'est pas trivial. On considère les trois droites canoniques C_1, C_2, C_3 de \mathbb{C}^3 ainsi que leurs images S_1, S_2 et S_3 dans le quotient. On notera G_1 et G_2 et G_3 les noyaux des actions de G sur C_1, C_2 et C_3 . Ce sont des groupes cycliques. Leurs éléments non nuls sont les éléments d'âge 1 de G situés sur chacun des cotés de Δ . Les courbes S_1, S_2 ou S_3 sont singulières dès que les groupes G_1, G_2 ou G_3 sont non triviaux.

Par exemple, considérons le groupe G cyclique d'ordre 6 engendré par l'élément g identifié à $1/6(1, 2, 3)$. Le triangle Δ ainsi que les éléments d'âge 1 sont représentés sur la figure 3.1. Le groupe G a quatre éléments d'âge 1 et un élément d'âge 2 (qui est g^5 , l'inverse de g). G_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, G_2 est trivial et G_3 est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En particulier le lieu singulier du quotient est $S_1 \cup S_3$.

Les résolutions crépantes Y du quotient Q sont en bijection avec les triangulations de Δ par des triangles basiques (c'est-à-dire des triangles dont les sommets sont exactement les points de $\Delta \cap L$). En effet, à une triangulation de Δ on peut associer un éventail comme sur la figure 3.2. À cet éventail correspond la variété torique Y .

Un élément g de G d'âge 1 peut être vu comme un point de L dans Δ privé de ses sommets. Ce point peut être vu comme un cône de dimension

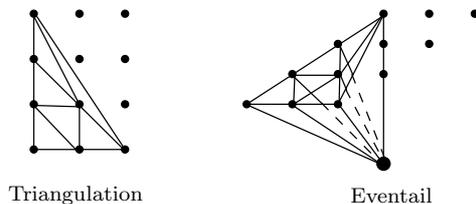


FIG. 3.2 –

un de l'éventail. On peut donc lui associer une sous-variété torique V_g de dimension deux dans Y . L'éventail qui décrit la variété torique V_g est obtenu en considérant que g est l'origine, en prolongeant les arêtes ayant g pour extrémité en des demi-droites issues de g , et en prolongeant les triangles de sommet g en des cônes de dimension deux. Voir la figure 3.3 pour illustrer ceci sur notre exemple.

Les diviseurs exceptionnels de la résolution sont les V_g lorsque g décrit les éléments d'âge 1. En particulier, on constate que les diviseurs exceptionnels sont lisses et à croisement normaux. Lorsque g est un élément de G_1 , G_2 ou G_3 le diviseur exceptionnel V_g n'est pas compact et son image par la résolution est S_1 , S_2 ou S_3 . Lorsque g est à l'intérieur de Δ le diviseur exceptionnel V_g est compact et son image par la résolution est l'origine. En particulier, les diviseurs exceptionnels sont en bijection avec les éléments d'âge 1 et les diviseurs exceptionnels compacts sont en bijection avec les éléments d'âge 2.

On peut également lire la configuration des diviseurs sur la triangulation. Deux diviseurs exceptionnels distincts V_g et V_h s'intersectent lorsque $[gh]$ est une arête de la triangulation. L'arête peut être vue comme un cône de dimension deux de l'éventail. On peut ainsi lui associer une sous-variété torique $V_{[gh]}$ de dimension un. Dans ce cas $V_g \cap V_h = V_{[gh]}$. Remarquons que $V_{[gh]}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ lorsque l'arête est intérieure au triangle Δ et isomorphe à \mathbb{C} lorsque l'arête borde Δ . Trois diviseurs exceptionnels deux à deux distincts V_g , V_h et V_k s'intersectent lorsque $[ghk]$ est un triangle de la triangulation. Le triangle peut être vu comme un cône de dimension trois de l'éventail. On peut donc lui associer une sous-variété torique $V_{[ghk]}$ de dimension zéro. Dans ce cas $V_g \cap V_h \cap V_k = V_{[ghk]}$. Remarquons que $V_{[ghk]}$ est un point.

3.2 Groupes d'homologie

Dans cette section, on détermine une présentation par générateurs et relations des groupes d'homologie de Y à coefficients entiers. De plus, on montre qu'ils sont libres et qu'on peut en choisir une base par des points, courbes et surfaces. Vu leur rang, on en déduit également une correspondance

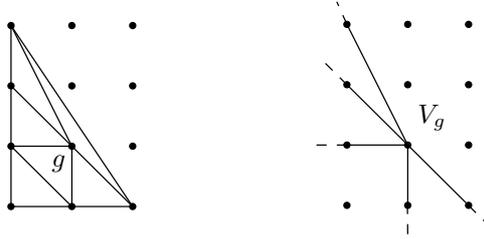


FIG. 3.3 –

de McKay homologique à coefficients entiers. Dans les propositions suivantes, les termes courbe ou surface désignent des variétés de dimensions un ou deux compactes dont on considère les classes fondamentales en homologie.

Lemme 3.2.1. Soit S une surface torique. Soit P un point torique de S . Les relations entre les courbes toriques dans $H_2(S)$ expriment exactement les deux courbes passant par P en fonction des autres.

Démonstration. Dans [Ful93] en section 5.2, il est prouvé que les groupes d'homologie de degré impair sont nuls et que le morphisme naturel de groupes gradués de $A_*(S)$ dans $H_*(S)$ est un isomorphisme. On conclut en utilisant la proposition B.5.1 en appendice et l'isomorphisme naturel entre $A_1(S)$ et $H_2(S)$. \square

Théorème 3.2.2. Les groupes d'homologie de Y de degré impair sont nuls. $H_0(Y)$ est isomorphe à \mathbb{Z} . $H_2(Y)$ est le groupe engendré par les courbes toriques avec leurs relations dans les surfaces toriques. De plus il est libre et basé par des courbes toriques. $H_4(Y)$ est le groupe libre engendré par les surfaces toriques. $H_6(Y)$ est nul.

Démonstration. Nous allons calculer les groupes d'homologie pour une classe d'espace topologique un peu plus générale. En appliquant ce calcul à Y on en déduira la proposition. Soit \mathcal{D} un complexe simplicial basique dont le support est homéomorphe à un disque fermé. Il s'agit d'une triangulation par des triangles basiques d'une partie homéomorphe à un disque fermé dans l'espace affine engendré par e_1, e_2 et e_3 (voir l'appendice C et B pour des détails). On note X la variété torique associée. On note X_0 l'union des sous-variétés toriques compactes de X . X_0 est simplement visualisée par l'intérieur du support. Notons H_2 le groupe engendré par les courbes toriques avec leur relations dans les surfaces. Soit $X_0 \subset R \subset X$ stable par l'action du tore. Nous allons prouver par récurrence sur le nombre de triangles que l'homologie de R satisfait les propriétés suivantes :

- i) $H_0(R) = \mathbb{Z}$
- ii) $H_2(R) = H_2$ et est basé par certaines courbes toriques
- iii) $H_4(R)$ est basé par les surfaces toriques

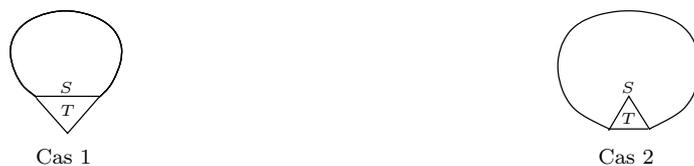


FIG. 3.4 –

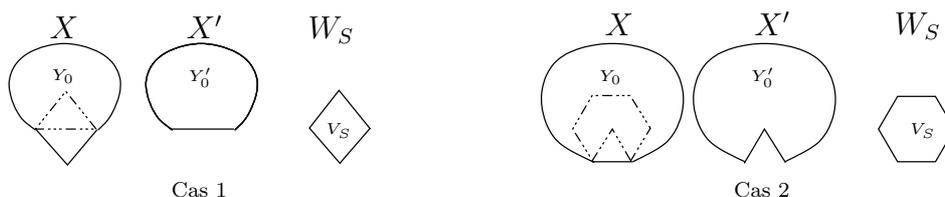


FIG. 3.5 –

iv) Les autres groupes d'homologie sont nuls.

Nous initialisons la récurrence en supposant que le complexe ne possède qu'un triangle T . Dans ce cas, X est égal à W_T et X_0 à V_T . Ainsi $V_T \subset R \subset W_T$ est invariant sous l'action du tore. D'après B.7.1, V_T est une partie rétracte par déformation forte de R , de sorte que leurs groupes d'homologie sont égaux. D'un coté, puisque V_T est un point, les groupes d'homologie de R sont nuls sauf en degré 0 où le groupe est \mathbb{Z} . D'un autre coté, il n'y a pas de courbe ni de surface torique. Donc l'homologie de R satisfait les propriétés i) à iv).

Supposons maintenant que le complexe possède au moins deux triangles. On peut alors choisir un triangle T comme dans un des deux cas de la figure 3.4. Considérons le complexe basique \mathcal{D}' obtenu en retirant le triangle T au complexe \mathcal{D} . Remarquons que le support de ce nouveau complexe est encore homéomorphe à un disque. Nous introduisons X' , X'_0 et H'_2 pour le complexe \mathcal{D}' comme nous avons introduit X, X_0 et H_2 pour le complexe \mathcal{D} . Nous définissons R' comme l'intersection de R et X . Ainsi $X'_0 \subset R' \subset X'$ est stable par l'action du tore. D'après l'hypothèse de récurrence, l'homologie de R' satisfait les propriétés i) à iv).

Selon le cas, nous considérons le simplexe S comme dans la figure 3.4. Nous allons considérer V'_S (resp. V_S) la sous-variété torique de X' (resp. X) associée à S . Nous allons aussi considérer les ouverts toriques W'_S (resp. W_S) de X' (resp. X) associés à S . Remarquons que V'_S est l'intersection de V_S avec X' tandis que W'_S est l'intersection de W_S avec X' . Observons que X' et W_S sont deux ouverts recouvrant X (voir la figure 3.5). En intersectant avec R , on obtient deux ouverts recouvrant R . On considère la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en homologie associée à ce recouvrement ouvert de

R . Observons que par définition $R \cap X'$ est égal à R' . Remarquons que $V_S \subset R \cap W_S \subset W_S$ est invariant sous l'action du tore. D'après B.7.1, V_S est une partie rétracte par déformation forte de $R \cap W_S$ de sorte que leurs groupes d'homologie sont isomorphes. Remarquons que $V'_S \subset R \cap W_S \cap X' \subset W'_S$ est invariant sous l'action du tore. D'après B.7.1, V'_S est une partie rétracte par déformation forte de $R \cap W_S \cap X'$ de sorte que leurs groupes d'homologie sont isomorphes. Nous utilisons ces deux isomorphismes en homologie pour modifier la suite de Mayer-Vietoris en la suivante :

$$\dots H_{k+1}(R) \rightarrow H_k(V'_S) \rightarrow H_k(V_S) \oplus H_k(R') \rightarrow H_k(R) \rightarrow H_{k-1}(V'_S) \dots$$

Puisque S est un simplexe intérieur du complexe \mathcal{D} , V_S est compact d'après B.4. De plus, X est lisse donc V_S est lisse (cf B.4). Notons d_S la dimension de V_S . V_S est une variété topologique compacte orientée de dimension $2d_S$. V'_S est obtenu à partir de V_S en enlevant le point V_T . Donc l'inclusion de V'_S dans V_S induit un isomorphisme des groupes d'homologie sauf en degré $2d_S$. En degré $2d_S$, le groupe d'homologie de V'_S est nul alors que celui de V_S est basé par la classe de V_S . En particulier l'inclusion de V'_S dans V_S induit en chaque degré une injection en homologie. Donc, pour tout entier k , l'application de $H_k(V'_S)$ dans $H_k(V_S) \oplus H_k(R)$ est injective. Donc nous pouvons découper notre suite exacte longue en les suites exactes courtes suivantes :

$$0 \rightarrow H_k(V'_S) \rightarrow H_k(V_S) \oplus H_k(R') \rightarrow H_k(R) \rightarrow 0$$

En degrés distincts de $2d_S$, il y a un isomorphisme entre le groupe d'homologie de V'_S et celui de V_S , donc la suite exacte courte donne un isomorphisme entre le groupe d'homologie de R et celui de R' . En degré $2d_S$, le groupe d'homologie de V'_S est nul tandis que celui de V_S est basé par la classe de V_S de sorte que la suite exacte courte donne un isomorphisme entre $H_{2d_S}(R)$ et $H_{2d_S}(R') \oplus \mathbb{Z}V_S$. En utilisant ceci, nous allons maintenant vérifier que l'homologie de R vérifie les propriétés i) à iv).

- i) $H_0(R) = \mathbb{Z}$ puisque R est connexe par arcs.
- ii) Supposons que nous soyons dans le premier cas de la figure. D'un coté, il y a une nouvelle courbe torique V_S et pas de nouvelle surface torique de sorte que $H_2 = H'_2 \oplus \mathbb{Z}V_S$. D'un autre coté $H_2(R) = H_2(R') \oplus \mathbb{Z}V_S$. Puisque $H_2(R')$ est isomorphe à H'_2 , $H_2(R)$ est isomorphe à H_2 . Puisque $H_2(R')$ est basé par certaines courbes toriques et $H_2(R) = H_2(R') \oplus \mathbb{Z}V_S$, $H_2(R)$ est basé par certaines courbes toriques. Supposons que nous soyons dans le second cas de la figure. D'un coté, il y a deux nouvelles courbes toriques V_E et V_F (cf figure 2.3) et il y a une nouvelle surface torique V_S . Les courbes V_E et V_F sont les deux courbes toriques de la surface V_S qui passent par le point V_T . En appliquant le lemme 3.2.1, les relations entre les courbes toriques de V_S expriment exactement V_E et V_F en fonction des autres. Donc $H_2 = H'_2$.



FIG. 3.6 –

D'un autre coté $H_2(R) = H_2(R')$. Puisque $H_2(R')$ est isomorphe à H'_2 , $H_2(R)$ est isomorphe à H_2 . Puisque $H_2(R')$ est basé par certaines courbes toriques et $H_2(R) = H_2(R')$, $H_2(R)$ est basé par certaines courbes toriques.

- iii) Supposons que nous soyons dans le premier cas de la figure. D'un coté il n'y a pas de nouvelle surface torique. D'un autre coté $H_4(R) = H_4(R')$. Puisque $H_4(R')$ est basé par les surfaces toriques, $H_4(R)$ est basé par les surfaces toriques. Supposons que nous soyons dans le second cas de la figure. D'un coté il y a une nouvelle surface torique V_S . De l'autre coté $H_4(R) = H_4(R') \oplus \mathbb{Z}V_S$. Puisque $H_4(R')$ est basé par les surfaces toriques, $H_4(R)$ est basé par les surfaces toriques.
- iv) Les autres groupes d'homologie de R sont isomorphes à ceux de R' . Puisque les uns sont nuls, les autres sont nuls.

□

Théorème 3.2.3. Les groupes d'homologie de degrés impairs sont nuls. Pour tout entier k , $H_{2k}(Y)$ est un groupe libre de rang égal au nombre d'éléments de G d'âge k .

Démonstration. On utilise la description de l'homologie de Y donnée par 3.2.2. Les groupes d'homologie de degrés impairs sont nuls et ceux de degré pair sont libres. Les groupes de cohomologie sont nuls sauf en degré 0,2 ou 4 tandis que l'âge des éléments est 0,1 ou 2. Le rang de $H_0(Y)$ est 1 tandis que l'unique élément de G d'âge 0 est l'identité. D'après 3.3.1 et C.2.6, le rang de $H_2(Y)$ est égal au nombre de diviseurs exceptionnels. Or les diviseurs exceptionnels sont en bijection avec les éléments d'âge 1 d'après 3.1 D'après 3.2.2, le rang de $H_4(Y)$ est égal au nombre de diviseurs exceptionnels compacts. Or les diviseurs exceptionnels compacts sont en bijection avec les éléments d'âge 2 d'après 3.1. □

3.3 Groupes de cohomologie

Dans cette section, nous prouvons que les groupes de cohomologie et de Chow à coefficients entiers sont égaux. Plus précisément, nous allons montrer que les groupes de cohomologie de degré impair sont nuls et que le morphisme naturel de groupes gradués de $A^*(Y)$ dans $H^{2*}(Y)$ est un isomorphisme. Par dualité de Poincaré, ceci revient à montrer que les groupes d'homologie de Borel-Moore de degré impair sont nuls et le morphisme naturel de groupes



FIG. 3.7 –

gradués de $A_*(Y)$ dans $H_{2*}^{\text{BM}}(Y)$ est un isomorphisme. Dans ce qui suit, les sous-variétés sont non nécessairement compactes et on considère leur classe en homologie de Borel-Moore.

Théorème 3.3.1. Les groupes d'homologie de Borel-Moore de degré impair sont nuls et le morphisme naturel de groupes gradués de $A_*(Y)$ dans $H_{2*}^{\text{BM}}(Y)$ est un isomorphisme. De plus $A_*(Y)$ est basé par des sous-variétés toriques.

Démonstration. Pour prouver le théorème, le principe est de choisir une décomposition cellulaire de Y (voir les exemples 19.1.11 et 1.9.1 de [Ful84]), en utilisant la triangulation. Nous allons prouver le résultat, plus généralement, pour une variété torique X provenant d'un complexe simplicial basique \mathcal{D} dont le support est homéomorphe à un disque fermé (voir l'appendice C). Nous allons procéder par récurrence sur le nombre de triangles du complexe. Pour initialiser la récurrence, supposons que le complexe consiste en un seul triangle T . Dans ce cas X est égal à la variété torique affine U_T qui est isomorphe à \mathbb{C}^3 (cf B.3). Donc le résultat est clair.

Supposons désormais que le complexe ait au moins deux triangles. On peut choisir un triangle T comme dans l'un des deux cas de la figure 3.7. Selon le cas, on considère le simplexe S comme sur la figure 3.7. On choisit la cellule V_S et on considère X' la variété obtenue en retirant V_S à X . Premièrement, remarquons que X' est la variété torique provenant du complexe simplicial \mathcal{D}' obtenu en retirant le triangle T à \mathcal{D} . Par récurrence le résultat est vrai pour X' . Deuxièmement, observons que V_S est isomorphe à \mathbb{C} ou \mathbb{C}^2 selon le cas (on peut voir cela sur l'éventail associé à $\sigma(S)$, par exemple). Donc, les groupes d'homologie de Borel-Moore de degré impair de V_S sont nuls, le morphisme naturel de groupes gradués de $A_*(V_S)$ dans $H_{2*}^{\text{BM}}(V_S)$ est un isomorphisme et V_S est une base de $A_*(V_S)$.

Considérons la suite exacte longue en homologie de Borel-Moore :

$$\dots \rightarrow H_{k+1}^{\text{BM}}(X') \rightarrow H_k^{\text{BM}}(V_S) \rightarrow H_k^{\text{BM}}(X) \rightarrow H_k^{\text{BM}}(X') \rightarrow H_{k-1}^{\text{BM}}(V_S) \rightarrow \dots$$

Les groupes d'homologie de Borel-Moore de degré impair de V_S et X' sont nuls. On déduit de la suite ci-dessus que les groupes d'homologie de Borel-Moore de degré impair de X sont nuls. Nous disposons du diagramme com-

mutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
A_k(V_S) & \longrightarrow & A_k(X) & \longrightarrow & A_k(X') & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \longrightarrow & H_{2k}^{\text{BM}}(V_S) & \longrightarrow & H_{2k}^{\text{BM}}(X) & \longrightarrow & H_{2k}^{\text{BM}}(X') & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Les flèches de gauche et de droite sont des isomorphismes. On en déduit par une chasse aux diagrammes que les flèches du milieu sont également des isomorphismes. En sommant sur tous les degrés, on obtient un isomorphisme gradué entre $A_*(X)$ et $H_{2*}^{\text{BM}}(X)$ ainsi que la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow A_*(V_S) \rightarrow A_*(X) \rightarrow A_*(X') \rightarrow 0$$

$A_*(V_S)$ est basé V_S . L'image de V_S dans $A_*(X)$ est évidemment V_S . $A_*(X')$ est basé par certaines sous-variétés toriques de X' . Une sous-variété torique V'_s de X' a pour image inverse la sous-variété torique V_s de Y puisque $V_s \cap X' = V'_s$. On déduit de ce qui précède que $A_*(X)$ est basé par certaines sous-variétés toriques. \square

3.4 Nombre d'intersections de trois diviseurs

Nous verrons que l'anneau de cohomologie est décrit essentiellement par la manière dont s'intersectent les diviseurs exceptionnels. D'ailleurs, la configuration de ces diviseurs dépend entièrement de la triangulation de Δ qui en général varie presque arbitrairement d'une résolution à l'autre. Dans cette section, nous définissons puis calculons le nombre d'intersections de trois diviseurs exceptionnels dont l'intersection des images est l'origine.

Nous utilisons ici les termes courbes ou surfaces pour désigner des variétés de dimension un ou deux compactes et dont on considère les classes fondamentales en homologie. Pour des variétés de dimension un ou deux non nécessairement compactes, on considère les classes de cohomologie (obtenues par dualité de Poincaré à partir des classes fondamentales en homologie de Borel-Moore).

Proposition 3.4.1. Pour trois diviseurs exceptionnels V_g , V_h et V_k dont l'intersection des images est l'origine, on peut définir le nombre d'intersections $V_g \cdot V_h \cdot V_k$ (indépendant de l'ordre des diviseurs) par les formules suivantes :

$$V_g \cdot V_h \cdot V_k = \begin{cases} V_g \cup V_h(V_k) & \text{si } V_k \text{ est une surface} \\ V_g(V_h \cap V_k) & \text{si } V_h \cap V_k \text{ est une courbe} \end{cases}$$

(Dans ces formules, \cap désigne l'intersection et \cup le cup produit)

Démonstration. Soient trois diviseurs dont l'intersection des images est l'origine. Si l'un des diviseurs est une surface, on peut utiliser la première formule de la proposition pour déterminer le nombre d'intersections. Sinon il existe deux des trois diviseurs dont les images sont distinctes parmi S_1 , S_2 et S_3 . Dans ce cas, l'intersection de ces deux diviseurs est une courbe et on peut utiliser la seconde formule de la proposition pour déterminer le nombre d'intersections. Il reste à montrer que le nombre d'intersections est indépendant de la formule choisie.

Dans le cas où les diviseurs sont deux à deux distincts, vu qu'ils sont à croisements normaux, quelle que soit la formule choisie le nombre d'intersections est le cardinal de leur intersection soit 0 ou 1. Dans le cas où il y a trois fois le même diviseur, seule la première formule s'applique et le nombre d'intersections est évidemment indépendant de l'ordre. Il reste à traiter le cas d'un nombre d'intersections faisant intervenir deux fois un diviseur V_g et une fois V_h où V_g et V_h sont deux diviseurs distincts mais s'intersectant. Remarquons que dans ce cas $V_g \cap V_h$ est une courbe. Il reste à montrer que si V_g est compact alors $V_g \cup V_h(V_g) = V_g(V_g \cap V_h)$ et que si V_h est compact alors $V_g^2(V_h) = V_g(V_g \cap V_h)$. Si V_g est compact, puisque V_h et V_g s'intersectent transversalement, le cap produit de V_h vu en cohomologie avec V_g en homologie est l'intersection $V_h \cap V_g$ en homologie. Donc $V_g \cup V_h(V_g)$ qui est l'évaluation de V_g sur ce cap produit est égal à $V_g(V_g \cap V_h)$. Si V_h est compact, puisque V_h et V_g s'intersectent transversalement, le cap produit de V_g vu en cohomologie avec V_h en homologie est l'intersection $V_h \cap V_g$ en homologie. Donc $V_g^2(V_h)$, qui est l'évaluation de V_g sur ce cap produit, est égal à $V_g(V_g \cap V_h)$. \square

Soient trois diviseurs dont l'intersection des images est l'origine. Si les diviseurs sont deux à deux distincts, le nombre d'intersections est alors le cardinal de leur intersection, soit 0 ou 1. Il nous reste donc à calculer le nombre d'intersections V_g^3 pour un diviseur exceptionnel compact V_g et le nombre d'intersections $V_g^2 \cdot V_h$ pour deux diviseurs exceptionnels distincts mais s'intersectant en une courbe. Commençons par calculer V_g^3 . Ce nombre s'exprime en fonction de la donnée combinatoire que nous introduisons dans la proposition suivante :

Définition 3.4.2. Soit V_g un diviseur exceptionnel compact. Le point g est un point intérieur de Δ . On définit n_g comme le nombre d'arêtes de la triangulation dont un sommet est g .

Lemme 3.4.3. Soit S une surface torique. Le nombre $c_1(\omega_s)^2$ est 12 moins le nombre de cônes de dimension un de l'éventail associé à S .

Démonstration. Nous suivons ici les notations et les exercices de la section 2.5 de [Ful93]. Notons n le nombre de cônes de dimension un de l'éventail associé à S . Ces cônes contiennent chacun un vecteur primitif. On numérote ces

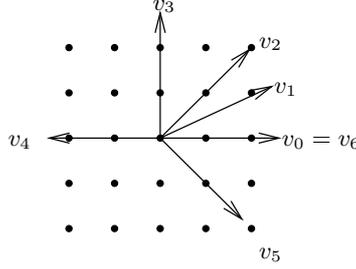


FIG. 3.8 –

vecteurs v_i en tournant autour de l'origine comme sur la figure 3.8. Puisque la situation est cyclique, on voit i comme un entier modulo n . Puisque (v_{i-1}, v_i) et (v_i, v_{i+1}) sont des bases du réseau ayant la même orientation, il existe un entier a_i tel que $v_{i-1} + v_{i+1} = a_i v_i$. Notons D_i la sous-variété torique de codimension un de V_g associée au cône de dimension un associé à v_i . D'après la section 4.3 de [Ful93], un diviseur canonique de V_g est $-\sum_i D_i$. Remarquons que le nombre d'intersections de deux diviseurs distincts $D_i \cdot D_j$ est le cardinal de leur intersection, qui est soit 0, soit 1 lorsque les vecteurs v_i et v_j sont consécutifs. De plus $D_i^2 = -a_i$ d'après la section 2.5. de [Ful93]. On en déduit que $c_1(\omega_s)^2 = 2n - \sum_i a_i$. Or, suivant la section 2.5. de [Ful93], on dispose de l'égalité $\sum_i a_i = 3n - 12$. \square

Proposition 3.4.4. Soit V_g un diviseur exceptionnel compact. En reprenant les notations précédentes, le nombre d'intersections V_g^3 est donné par la formule suivante :

$$V_g^3 = 12 - n_g$$

Démonstration. On utilise l'égalité $V_g^3 = c_1(N_{V_g \subset Y})^2$. Par adjonction et car la résolution est crépante, le fibré normal de V_g dans Y est $N_{V_g \subset Y} = \omega_{V_g}$. On conclut en utilisant les propositions 3.4.2 et 3.4.3. \square

Il reste à calculer le nombre d'intersections $V_g^2 \cdot V_h$ où V_g et V_h sont deux diviseurs distincts s'intersectant en une courbe. Ce nombre s'exprime en fonction de la donnée combinatoire que nous introduisons dans la proposition suivante :

Définition 3.4.5. Soient V_g et V_h deux diviseurs exceptionnels distincts s'intersectant en une courbe. L'arête $[gh]$ est une arête intérieure du triangle Δ . Il existe donc deux triangles $[ghi]$ et $[ghj]$ dans la triangulation. On peut définir l'entier n_{gh} par la relation vectorielle suivante (voir la figure 3.9) :

$$\vec{gi} + \vec{gj} = n_{gh} \vec{gh}$$

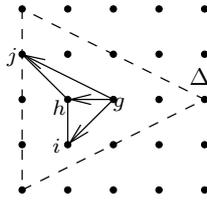


FIG. 3.9 –

Proposition 3.4.6. Soit V_g et V_h deux diviseurs exceptionnels distincts s'intersectant en une courbe. En reprenant les notations précédentes, le nombre d'intersections $V_g^2 \cdot V_h$ est donné par la formule suivante :

$$V_g^2 \cdot V_h = n_{gh} - 2$$

Démonstration. On utilise l'égalité $V_g^2 \cdot V_h = c_1(N_{V_g \subset Y})(V_g \cap V_h)$. Par adjonction et car la résolution est crépante, le fibré normal de V_g dans Y est $N_{V_g \subset Y} = \omega_{V_g}$. On considère les cônes de dimension un de l'éventail associé à V_g . Chacun de ses cônes contient un unique vecteur primitif. On numérote ces vecteurs v_k en tournant autour de l'origine de manière à ce que les vecteurs v_{-1}, v_0, v_1 correspondent à $\vec{gi}, \vec{gh}, \vec{gj}$. Notons D_k la sous-variété torique de codimension un de V_k associée au cône de dimension un associé à v_k . D'après la section 4.3 de [Ful93], un diviseur canonique de V_g est $-\sum_i D_i$. On remarque que $V_g \cap V_h = D_0$. De plus on peut calculer $D_i \cdot D_0 = -n_{gh}$ si $i = 0$ et $D_i \cdot D_0 = 1$ si $i = \pm 1$ et $D_i \cdot D_0 = 0$ sinon. On obtient finalement $c_1(N_{V_g \subset Y})(V_g \cap V_h) = n_{gh} - 2$. \square

3.5 Calcul des anneaux $H^*(Y)$ et $H^*(Q)$

Décrivons l'anneau de cohomologie $H^*(Y)$ d'une résolution crépante. Nous exprimerons ici le cup produit dans une base de la cohomologie à coefficients rationnels. C'est pourquoi nous considérerons à partir de maintenant la cohomologie à coefficients rationnels, bien que le calcul de l'anneau de cohomologie à coefficients entiers ne soit pas plus compliqué. La base que nous considérons est la suivante. Le 1 forme une base de $H^0(Y)$. On notera e_0 cet élément. Les diviseurs exceptionnels V_g (g étant d'âge 1) forment une base de $H^2(Y)$ d'après 3.3.1 et C.2.6. On notera e_g les éléments de cette base. Les diviseurs exceptionnels compacts V_{g-1} (g étant d'âge 2) forment une base de $H_4(Y)$. On en déduit une base duale de $H^4(Y)$. On notera e_g les éléments de cette base. Ainsi, les éléments e_g , indexés par les éléments g du groupe G , forment une base de $H^*(Y)$ à coefficients rationnels. De plus, chaque élément e_g est de degré $2a(g)$ de sorte que l'anneau $H^*(Y)$ est gradué. Les produits non évidents sont ceux d'éléments de degrés deux. Le cup produit de deux éléments de degrés deux est donné par la proposition suivante :

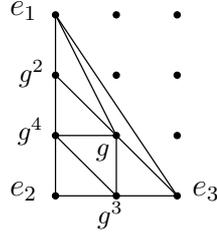


FIG. 3.10 –

Proposition 3.5.1. En reprenant les notations précédentes, le produit de deux éléments e_g et e_h de degrés deux est donné par la formule suivante :

$$e_g \cup e_h = \sum_{k|a(k)=2} (V_g \cdot V_h \cdot V_{k-1})e_k$$

Démonstration. L'élément $e_g \cup e_h$ appartient à $H^4(Y)$ qui a pour base les e_k lorsque k décrit les éléments d'âge 2. Par définition, la coordonnée de $e_g \cup e_h$ correspondant à e_k est $V_g \cup V_h(V_{k-1})$, i.e. le nombre d'intersections $V_g \cdot V_h \cdot V_{k-1}$. \square

Décrivons l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(Q)$ du quotient. L'algèbre $H_o^*(Q)$ est l'algèbre du groupe G filtrée par deux fois l'âge (d'après E.2.3 et car le groupe est abélien). Précisons ce que cela signifie. On dispose d'éléments f_g , indexés par les éléments g du groupe G , formant une base de $H_o^*(Q)$. De plus chaque élément f_g est de degré $2a(g)$, de sorte que l'anneau $H_o^*(Q)$ est gradué. Les produits non évidents sont ceux d'éléments de degrés deux. Le cup produit orbifold de deux éléments f_g et f_h de degrés deux est $f_g \cup_o f_h = f_{gh}$ si $a(gh) = 2$ et $f_g \cup_o f_h = 0$ sinon.

3.6 Exemple

Dans cette section, on considère l'exemple du groupe G cyclique d'ordre 6 engendré par l'élément g identifié au triplet $1/6(2, 3, 1)$ et de la résolution crépante $Y = G\text{-Hilb}^d(\mathbb{C}^3)$ du quotient Q . La figure 3.10 donne la description combinatoire. Les produits des éléments de la base $e_g, e_{g^2}, e_{g^3}, e_{g^4}$ de $H^2(Y)$ vus dans la base e_{g^5} de $H^4(Y)$ fournissent la matrice de gauche ci-dessous. Les produits des éléments de la base $f_g, f_{g^2}, f_{g^3}, f_{g^4}$ de $H_o^2(Q)$ vus dans la base f_{g^5} de $H_o^4(Q)$ fournissent la matrice de droite ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En particulier il n'existe pas d'isomorphisme entre ces deux anneaux, même après avoir tensorisé avec le corps des nombres complexes. En effet, dans chacun des cas, si on note R l'anneau tensorisé avec \mathbb{C} , l'idéal annulateur du R -module $R/(\mathbb{C}\cdot 1)$ est somme directe du noyau de la matrice et des éléments de degré 4. Donc si les anneaux tensorisés avec \mathbb{C} étaient isomorphes, les matrices ci-dessus seraient de même rang. Or, la matrice de droite est inversible tandis que celle de gauche ne l'est pas.

Chapitre 4

Anneau de cohomologie dans le cas compact

Dans ce chapitre, on considère X une 3-variété complexe lisse compacte et G un sous-groupe abélien de $\text{Aut}(X)$ d'ordre n . On suppose de plus que l'action de G sur X préserve le volume (i.e. pour tout point x de X , $G_x \subset SL(T_x X)$) et est admissible (i.e. X est recouvert par des ouverts affines G -invariants). On note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique de X par G . Le but de ce chapitre est l'étude de l'anneau de cohomologie des résolutions crépantes Y du quotient. Remarquons que $G\text{-Hilb}(X)$ est une résolution crépante d'après le théorème de Bridgeland, King et Reid ([BKR01]). Nous allons commencer par quelques remarques sur l'action de X sur G , les singularités de Q et les résolutions crépantes Y . Puis nous donnerons une méthode de calcul de l'anneau de cohomologie applicable à n'importe quelle résolution crépante. Pour cela, on commencera par décrire les groupes de cohomologie et calculer les nombres d'intersections des diviseurs. Nous donnerons également une méthode de calcul de l'anneau de cohomologie orbifold du quotient global Q . Nous observerons une analogie entre les deux anneaux, conformément à la conjecture de Ruan. Nous terminerons par un exemple sur un quotient de variété abélienne.

4.1 Action, lieu singulier et résolutions crépantes

Le quotient étant une variété normale de dimension trois, le lieu singulier est de dimension un au plus. Il s'écrit donc de manière unique comme réunion de courbes compactes irréductibles et de points isolés. Désignons par S_i les courbes compactes irréductibles du lieu singulier. On considère C_i l'image réciproque de S_i par ϕ ainsi que G_i le noyau de l'action de G sur C_i . On note n_i l'ordre de G_i . Désignons par P_j les points singuliers isolés et les points de branchement des morphismes $C_i \rightarrow S_i$ (ces points de branchement comprennent en particulier les points d'intersection des courbes compactes

irréductibles du lieu singulier). On considère O_j l'image réciproque de P_j par ϕ ainsi de G_j le stabilisateur commun des points de l'orbite O_j . On note n_j l'ordre de G_j . Remarquons que chaque C_i est une réunion de composantes connexes de X^{G_i} donc est lisse (voir [Fog73] Théorème 5.2). On notera c_i le nombre de composantes connexes de C_i . S_i est le quotient de C_i sous l'action de G/G_i donc est également lisse.

Les points P_j et les points des orbites O_j sont des points particuliers. On utilise donc la notation $*$ pour les retirer d'un ensemble. Par exemple, on notera $S_i^* = S_i \setminus \{P_j, j\}$, $C_i^* = C_i \setminus (\cup_j O_j)$, $Q^* = Q \setminus \{P_j, j\}$, $X^* = X \setminus (\cup_j O_j)$. Perroni a introduit la notion de singularités ADE -transversales et montré qu'un orbifold ayant de telles singularités admet une unique résolution crépante (voir [Per] Proposition 4.2). Nous allons voir que Q^* a des singularités A -transversales (au voisinage de S_i^* les singularités sont A_{n_i-1} -transversales).

Notation 4.1.1. L'action de G_i sur le fibré normal de C_i dans Y induit une représentation fidèle de dimension deux préservant le volume. On choisit une inclusion $G_i \subset (\mathbb{C}^*)^2 \cap SL_2(\mathbb{C})$. Ainsi $G_i = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} = \langle (e^{2i\pi/n}, e^{-2i\pi/n}) \rangle$ et nous confondons les éléments de G_i avec les entiers de l'intervalle $[0, n_i - 1]$.

Démonstration. G_i agissant trivialement sur C_i , il agit sur chaque fibre du fibré normal de C_i dans Y qui est de rang 2. Puisque G agit transitivement sur les composantes connexes de C_i , les actions de G_i sur les fibres sont isomorphes et définissent donc une représentation de dimension deux (modulo isomorphisme). L'action de G_i sur l'espace tangent en un point de C_i est somme directe de cette représentation et de la représentation triviale. Puisque l'action sur l'espace tangent préserve le volume, cette représentation préserve le volume. Puisque le groupe G_i est abélien, cette représentation est donnée par une inclusion $G_i \subset (\mathbb{C}^*)^2 \cap SL_2(\mathbb{C})$. Donc $G_i = \mathbb{U}_{n_i}$ car un élément de G_i s'écrit (ξ, ξ^{-1}) où ξ est une racine n_i -ième de l'unité. D'autre part $\mathbb{U}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par le choix de la racine primitive n -ième $e^{2i\pi/n}$. \square

On note $\phi_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow Q_i$ le quotient géométrique de l'action de G_i sur \mathbb{C}^2 . Le quotient Q_i a une singularité de type A_{n_i-1} à l'origine. Il existe une unique résolution crépante $\tau_i : Y_i \rightarrow Q_i$. Les diviseurs exceptionnels forment un chaîne de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ naturellement indexés par les éléments non nuls de G_i . Voir la fin de la section C.2 et la proposition D.3.1 pour des détails.

Proposition 4.1.2. Q^* a des singularités A -transversales. On note $\tau^* : Y^* \rightarrow Q^*$ l'unique résolution crépante. Au-dessus de chaque courbe singulière S_i^* , les diviseurs exceptionnels forment une chaîne de fibrés en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ naturellement indexés par les éléments non nuls de G_i . De plus, D_i désignant le polydisque unité de $Q_i \times \mathbb{C}$, tout point de S_i^* admet un voisinage isomorphe à D_i tel que les diagrammes suivant soient isomorphes au-dessus de D_i :

$$\begin{array}{ccc}
& G \times_{G_i} (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}) & X^* \\
& \downarrow & \downarrow \\
Y_i \times \mathbb{C} & \longrightarrow & Q_i \times \mathbb{C} & Y^* \longrightarrow & Q^*
\end{array}$$

Démonstration. Soit s un point de S_i^* . On considère un point c de C_i^* au-dessus de s . G_i agit sur l'espace tangent en ce point. Le représentation de dimension trois correspondante est somme directe de la représentation de dimension deux de 4.1.1 et de la représentation de dimension un triviale. En appliquant les résultats de Luna ([Lun73] II.2 et III.1), on dispose des changements de base étales suivants, où U désigne un ouvert affine G -invariant de X contenant c et V désigne un ouvert affine G_i -invariant de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ contenant l'origine :

$$\begin{array}{ccc}
G \times_{G_i} U & \longrightarrow & U & U & \longrightarrow & V \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
U/G_i & \longrightarrow & U/G & U/G_i & \longrightarrow & V/G_i
\end{array}$$

Les changements de base étales étant des isomorphismes analytiques locaux, on en déduit aisément que les singularités au voisinage de s sont de type A_{n_i-1} -transversales. Ainsi Q^* a des singularités A -transversales donc admet une unique résolution crépante $\tau^* : Y^* \rightarrow Q^*$ ([Per] Proposition 4.2).

Utilisant les changements de base étales, qui sont des isomorphismes analytiques locaux, on peut décrire analytiquement la situation au-dessus d'un voisinage de s . Les variétés $U/G_j, U/G, V/G_j$ ci-dessus ont des singularités A_{n_i-1} -transversales dont admettent une unique résolution crépante. Ces résolutions crépantes sont stables par les changements de base étales ci-dessus. De plus la résolution crépante de U/G n'est que la restriction de celle de Y^* . On en déduit la description analytique de la situation au-dessus d'un voisinage de s . Remarquons que D_i est par définition l'image du polydisque unité de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ dans $Q_i \times \mathbb{C}$.

La description des diviseurs exceptionnels au-dessus de S_i^* provient de la description analytique locale au-dessus d'un voisinage des points de S_i^* ainsi que de la description de Y_i . \square

On s'intéresse dans la suite aux points particuliers P_j . Au voisinage de chaque point P_j , nous avons une « vraie » singularité de dimension trois. Nous allons voir que la résolution $\tau : Y^* \rightarrow Q^*$ se complète au-dessus de chaque point P_j de manière locale afin d'obtenir les résolutions crépantes $\tau : Y \rightarrow Q$.

Notation 4.1.3. L'action de G_j sur le fibré normal de O_j dans X induit une représentation linéaire de G_j de dimension trois préservant le volume. On choisit une inclusion $G_j \subset (\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$.

Démonstration. Puisque G agit transitivement sur l'orbite O_j , les actions de G_j sur les espaces tangents des points de O_j sont isomorphes. \square

On note $\phi_j : \mathbb{C}^3 \rightarrow Q_j$ le quotient géométrique de \mathbb{C}^3 par l'action de G_j . G_j est représenté par un sur-réseau de \mathbb{Z}^3 . On note Δ_j le triangle dont les sommets sont la base canonique. La donnée d'une résolution crépante $\tau_j : Y_j \rightarrow Q_j$ est équivalente à la donnée d'une triangulation de Δ_j par des triangles basiques. Voir la section C.2 et la proposition D.3.1 pour des détails.

Proposition 4.1.4. La donnée d'une résolution crépante $\tau : Y \rightarrow Q$ est équivalente à la donnée pour chaque j d'une résolution crépante $\tau_j : Y_j \rightarrow Q_j$. De plus, D_j désignant le polydisque unité de Q_j , le point P_j admet un voisinage isomorphe à D_j tel que les diagrammes ci-dessous soient analytiquement isomorphes au-dessus de D_j :

$$\begin{array}{ccc} & G \times_{G_j} \mathbb{C}^3 & X \\ & \downarrow & \downarrow \\ Y_j & \longrightarrow & Q_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Le lemme suivant est un fait très simple que nous utiliserons de manière répétée dans la preuve de 4.1.4.

Lemme 4.1.5. Soit Z_k un recouvrement ouvert de Zariski d'une variété singulière Z . La donnée d'une résolution R de Z est équivalente à la donnée de résolutions R_k de Z_k telle que pour tout couple (k, l) , R_k et R_l soient isomorphes au-dessus de $Z_l \cap Z_k$.

Démonstration. La donnée de R entraîne la donnée des R_k . Réciproquement supposons donnés les R_k tels que pour tout couple (k, l) , R_k et R_l soient isomorphes au-dessus de $Z_l \cap Z_k$. Remarquons que cet isomorphisme est unique (car le seul automorphisme d'une résolution de $Z_k \cap Z_l$ est l'identité). Remarquons de plus que les conditions de cocycle sont vérifiées (car le seul automorphisme d'une résolution de $Z_k \cap Z_l \cap Z_m$ est l'identité). Ceci permet d'obtenir la résolution R par recollement. \square

Démonstration de 4.1.4. En appliquant le lemme 4.1.5 et en observant que tout ouvert de Q^* a des singularités A -transversales donc admet une unique résolution crépante, on remarque que la donnée d'une résolution crépante de Q est équivalente à la donnée de résolutions crépantes au voisinage de chaque point P_j . On fixe donc un point P_j . En appliquant les résultats de Luna ([Lun73] II.2 et III.1), on dispose des changements de base étales suivants, où U désigne un ouvert affine G -invariant de X contenant l'orbite O_j et V désigne un ouvert affine G_j -invariant de \mathbb{C}^3 contenant l'origine :

$$\begin{array}{ccc}
G \times_{G_i} U & \longrightarrow & U \\
\downarrow & & \downarrow \\
U/G_j & \longrightarrow & U/G
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
U & \longrightarrow & V \\
\downarrow & & \downarrow \\
U/G_j & \longrightarrow & V/G_j
\end{array}$$

En considérant le diagramme de gauche, on constate que la donnée d'une résolution crépante de U/G est équivalente par changement de base à la donnée d'une résolution crépante de U/G_j G/G_j -équivariante. En effet, si l'on dispose d'une résolution crépante de U/G_j , on obtient, par changement de base étale G/G_i -invariant, une résolution crépante de U/G_j G/G_j -équivariante. Réciproquement, une résolution de U/G_j G/G_j -équivariante induit par passage au quotient une résolution de U/G (puisque G/G_j agit librement sur U/G_j , donc sur sa résolution). On vérifie que cette dernière résolution de U/G redonne bien la résolution de U/G_j par changement de base et est crépante.

Pour tout point O de O_j , on considère l'ouvert U_O obtenu en retirant à U tous les points de l'orbite O_j sauf O . En appliquant le lemme 4.1.5 et en observant que tout ouvert de U/G_j privé de O_j/G_j a des singularités A -transversales donc admet une unique résolution crépante, on conclut que toute résolution crépante de U/G_j est équivalente à la donnée de résolutions crépantes des U_O/G_j . Ainsi toute résolution crépante G/G_j -équivariante est équivalente à la donnée d'une résolution crépante de U_O/G_j où O est un point de O_j fixé.

$$\begin{array}{ccc}
U_O & \longrightarrow & V \\
\downarrow & & \downarrow \\
U_O/G_j & \longrightarrow & V/G_j
\end{array}$$

On dispose du changement de base étale ci-dessus. La donnée d'une résolution crépante de V/G_j est équivalente par changement de base à la donnée d'une résolution crépante de U_O/G_j . En effet, si l'on dispose d'une résolution crépante de V/G_j , on obtient par changement de base étale une résolution crépante de U_O/G_j . Réciproquement, supposons donnée une résolution crépante de U_O/G_j . Remarquons que O est l'unique point de U_O/G_j envoyé sur l'origine dans V/G_j . Donc la résolution au-dessus de U_O/G_j privé de O provient par changement de base de l'unique résolution crépante de V/G_j privé de l'origine. De plus, par isomorphisme analytique local, la résolution crépante de V/G_j privé de l'origine s'étend en une unique résolution analytique de V/G_j qui redonne la résolution de U_O/G_j par changement de base. On vérifie que cette résolution est en fait algébrique et crépante.

D'après le lemme 4.1.5 et en observant que tout ouvert de Q_j privé de l'origine a des singularités A -transversales donc admet une unique résolution crépante, on remarque que toute résolution crépante de V/G_j est la restriction d'une résolution crépante de \mathbb{C}^3/G_j .

Ainsi, nous avons montré que la donnée d'une résolution crépante $\tau : Y \rightarrow Q$ est équivalente à la donnée de résolution crépante $\tau_j : Y_j \rightarrow Q_j$. La description analytique découle des changements de base étales successifs que nous avons suivis, et qui sont des isomorphismes analytiques locaux. \square

Ainsi la donnée d'une résolution crépante équivaut à la donnée combinatoire de triangulations des triangles Δ_j . De plus, les propositions 4.1.2 et 4.1.4 nous donnent une description analytique de Y au-dessus de voisinages des points singuliers. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 4.1.6. Soit $\tau : Y \rightarrow Q$ une résolution crépante. Les diviseurs exceptionnels sont lisses et à croisement normaux. Les diviseurs dont l'image est S_i sont en bijection avec les éléments g de G_i non nuls et sont notés E_g^i . De plus, deux diviseurs E_g^i et E_h^i distincts s'intersectent lorsque $h = g \pm 1$. Les diviseurs exceptionnels dont l'image est P_j sont en bijection avec les éléments g de G_j tels que $a(g^{-1}, P_j) = 2$ et sont notés E_g^j .

Démonstration. On utilise les descriptions locales données par 4.1.2 et 4.1.4 ainsi que la section 3.1. \square

4.2 Groupes de cohomologie

Dans cette section, on décrit les groupes de cohomologie à coefficients rationnels d'une résolution crépante Y . Nous utiliserons des outils généraux de cohomologie qui sont exposés dans la section E.1 en appendice. Puisque le morphisme propre τ est de degré 1, nous disposons de l'égalité $\tau_* \circ \tau^* = \text{Id}$ qui permet de considérer que $\text{Im}(\tau^*) = H^*(Q)$, $\text{Ker}(\tau_*) = H^*(Y)/H^*(Q)$ et $H^*(Y) = H^*(Q) \oplus H^*(Y)/H^*(Q)$. Il reste à calculer $H^*(Y)/H^*(Q)$. On rappelle que S désigne le lieu singulier de Q et on note E le lieu exceptionnel de Y . Nous reproduisons ici un résultat de Perroni ([Per] Lemme 4.10) :

Proposition 4.2.1. Considérons le diagramme d'espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \tau \\ S & \longrightarrow & Q \end{array}$$

On a $H^*(Q) \subset H^*(Y)$, $H^*(S) \subset H^*(E)$ et j^* induit une identification $H^*(Y)/H^*(Q) = H^*(E)/H^*(S)$.

Démonstration. On considère le morphisme de paires $(Y, E) \rightarrow (Q, S)$. Ce dernier fournit un morphisme de suites exactes longues en cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^k(Q, S) & \longrightarrow & H^k(Q) & \longrightarrow & H^k(S) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^k(Y, E) & \longrightarrow & H^k(Y) & \longrightarrow & H^k(E) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Montrons que le morphisme de paires $(Y, E) \rightarrow (Q, S)$ induit un isomorphisme en cohomologie. Puisque E est un diviseur à croisement normaux dans Y , il existe un voisinage ouvert N de Y qui se rétracte par déformation forte sur Y . Ceci implique que le morphisme de paires $(Y, E) \rightarrow (Y/E, *)$ induit un isomorphisme en cohomologie (cf [Bre97]). On considère M l'image de N par τ . M est un voisinage ouvert de S qui se rétracte par déformation forte sur S (en effet la première rétraction descend en bas). Ceci implique de même que le morphisme de paires $(Q, S) \rightarrow (Q/S, *)$ induit un isomorphisme en cohomologie. D'autre part, l'isomorphisme de paires $(Y/E, *) \rightarrow (Q/S, *)$ induit un isomorphisme en cohomologie. Par composition, le morphisme de paires $(Y, E) \rightarrow (Q, S)$ induit un isomorphisme en cohomologie. En utilisant le lemme des quatre dans le morphisme de complexes, on conclut que le morphisme de E dans S induit une inclusion en cohomologie. Ainsi, le complexe du dessus est un sous-complexe de celui du dessous, de sorte que le complexe quotient fournit une suite exacte. Mais puisque les quotients $H^k(Y, E)/H^k(Q, S)$ sont nuls, on en déduit des isomorphismes $H^k(Y)/H^k(Q) \rightarrow H^k(E)/H^k(S)$. \square

On obtient donc $H^*(Y) = H^*(Q) \oplus H^*(E)/H^*(S)$ d'après ce qui précède. Pour décrire les groupes de cohomologie de la résolution Y , il reste donc à calculer $H^*(E)/H^*(S)$. Nous allons maintenant énoncer les théorèmes décrivant $H^*(Y)$. Nous les prouverons en fin de section.

Théorème 4.2.2. Les diviseurs exceptionnels E_g^i, E_g^j forment une base de $H^2(E)/H^2(S)$. Le cup produit de Y induit une dualité entre $H^2(E)/H^2(S)$ et $H^4(E)/H^4(S)$. On notera $E_g^{i\vee}, E_g^{j\vee}$ les éléments de la base de $H^4(E)/H^4(S)$ obtenue par dualité.

Notation 4.2.3. Fixons un diviseur E_g^i et considérons le diagramme d'espaces topologiques ci-dessous. Considérons le morphisme gradué $H^{*-2}(S_i) \rightarrow H^*(E)/H^*(S)$ qui à un élément α associe $(j_g^i)_*((\tau_g^i)^*\alpha)$. Afin de distinguer ce morphisme, on note $H^*(S_i)E_g^i$ plutôt que $H^{*-2}(S_i)$ et αE_g^i plutôt que α .

$$\begin{array}{ccc} E_g^i & \xrightarrow{j_g^i} & Y \\ \downarrow \tau_g^i & & \downarrow \tau \\ S_i & \xrightarrow{i_i} & Q \end{array}$$

Théorème 4.2.4. Avec les notations précédentes, $H^*(Y)$ est décrit en tant qu'espace vectoriel gradué par :

$$H^*(Y) = H^*(Q) \oplus (\oplus H^*(S_i)E_g^i) \oplus (\oplus \mathbb{Q}E_g^j) \oplus (\oplus \mathbb{Q}E_g^{j\vee})$$

De plus, pour i fixé, les éléments $[S_i]E_g^i$ sont combinaisons linéaires des éléments $E_g^{i\vee}$ et la matrice de passage est la matrice tridiagonale avec des -2 sur la diagonale et des 1 à côté.

Jusqu'à la fin de cette section, on prouve les théorèmes 4.2.2 et 4.2.4 par une série de lemmes. On adoptera la notation suivante : lorsque Z est une partie de Q , on posera $H_\tau^*(Z) = H^*(\tau^{-1}(Z))/H^*(Z)$.

Lemme 4.2.5. Soit $f : F \rightarrow C$ un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur une variété lisse de dimension un. On dispose de la suite exacte courte graduée suivante :

$$0 \longrightarrow H^*(C) \xrightarrow{f^*} H^*(F) \xrightarrow{f_*} H^{*-2}(C) \longrightarrow 0$$

De plus, nous avons l'égalité $f_*(c_1(\omega_f)) = -2$.

Démonstration. En effectuant l'exercice 7.10 du chapitre II de [Har77], on montre que $F = \text{Proj}(\text{Sym}(G))$ où G est un fibré de rang 2 sur C . De manière plus géométrique, F est le projectivisé du fibré G^\vee , noté usuellement $\mathbb{P}(G^\vee)$. Considérons $x = c_1(\mathcal{O}(1))$ la première classe de Chern du fibré tautologique. La restriction de x sur chaque fibre est la classe fondamentale de cette fibre. Les classes de cohomologie x et 1 se restreignent donc en une base de la cohomologie sur chaque fibre. D'après le théorème de Leray-Hirsch ([BT82] 5.11), on obtient la description de la cohomologie du fibré $H^*(F) = H^*(C)x \oplus H^*(C)$. En appliquant la formule de projection, on calcule $p_*(p^*(\alpha) \cup x + p^*(\beta)) = \alpha \cup p_*(x) + \beta \cup p_*(1)$. Or, puisque x se restreint sur chaque fibre en la classe fondamentale, $p_*(x) = 1$ (cf E.1.5). De plus $p_*(1) = 0$ pour des raisons de degré. Ainsi $p_*(p^*(\alpha) \cup x + p^*(\beta)) = \alpha$. On en déduit la suite exacte courte graduée de l'énoncé. En effectuant l'exercice 8.4 du chapitre III de [Har77], on montre que $\omega_f = f^*(\wedge^2 G)(-2)$. En passant à la première classe de Chern, on obtient $c_1(\omega_f) = -2x + c_1(\wedge^2 G)$. D'après un calcul que nous venons juste d'effectuer, $p_*(c_1(\omega_f)) = -2$. \square

Nous reproduisons ici un lemme de Perroni ([Per] Lemme 4.11) :

Lemme 4.2.6. Soit O un ouvert de S_i^* . On note $(E_g^i)_O$ la restriction du diviseur E_g^i au-dessus de O . Alors $H^*(O) \subset H^*(\tau^{-1}(O))$ et le quotient est :

$$H_\tau^*(O) = \bigoplus_g H^*((E_g^i)_O)/H^*(O)$$

Démonstration. Pour tout entier l compris entre 1 et $n_i - 1$, on considère $W_l = \cup_{g \leq l} (E_g^i)_O$. Remarquons que $H^*(O) \subset (E_1^i)_O$ d'après 4.2.5. Ainsi en considérant l'inclusion de $(E_1^i)_O$ dans W_l , on déduit $H^*(O) \subset H^*(W_l)$. Remarquons que $\tau^{-1}(O) = W_{n_i-1}$. Nous allons achever la preuve de la proposition en démontrant que $H^*(W_l)/H^*(O) = \bigoplus_{g \leq l} H^*((E_g^i)_O)/H^*(O)$ par récurrence sur l . Supposons le résultat prouvé au rang l . Les diviseurs E_l^i et E_{l+1}^i s'intersectent transversalement. Il existe donc un voisinage ouvert V_l de leur intersection dans E_l^i et qui se rétracte par déformation forte sur cette intersection. De même, on peut trouver un voisinage ouvert V_{l+1} de leur intersection dans E_{l+1}^i et qui se rétracte par déformation forte sur cette intersection. Considérons $U = W_l \cup V_{l+1}$ et $V = E_{l+1}^i \cup V_l$ qui forment un

recouvrement ouvert de W_{l+1} . Remarquons que W_{l+1} est au-dessus de O , et que le recouvrement de W_{l+1} par U et V est évidemment compatible avec le recouvrement trivial de O par O et O . On en déduit ainsi un morphisme de suites exactes longues de Mayer-Vietoris.

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H^k(O) & \longrightarrow & H^k(O) \oplus H^k(O) & \longrightarrow & H^k(O) & \longrightarrow & H^{k+1}(O) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow & H^k(W_{l+1}) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) & \longrightarrow & H^{k+1}(W_{l+1})
\end{array}$$

Remarquons que U et V se rétractent par déformation forte sur W_l et E_{l+1}^i . $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur l'intersection de $(E_k^i)_O$ et $(E_{k+1}^i)_O$, qui est homéomorphe à O . On en déduit d'une part que la première suite de Mayer-Vietoris est une sous-suite de la seconde de sorte qu'en passant aux quotients on obtient une nouvelle suite exacte longue. On en déduit d'autre part que cette nouvelle suite fournit des isomorphismes entre $H^k(W_{l+1})/H^k(O)$ et $H^k(W_l)/H^k(O) \oplus H^k((E_{l+1}^i)_O)/H^k(O)$. On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence. \square

Lemme 4.2.7. Soit O un ouvert de S_i^* . On considère le diagramme ci-dessous. Dans ce diagramme, la flèche horizontale supérieure est donnée par la définition 4.2.3 puis la restriction en cohomologie. La flèche horizontale inférieure est donnée par restriction en cohomologie. La flèche verticale de droite est l'isomorphisme $\text{Id} \times P$ où P est la matrice tridiagonale avec des -2 sur la diagonale et des 1 à côté. La flèche verticale de gauche est l'isomorphisme formel donné par les lemmes 4.2.5 et 4.2.6. Alors ce diagramme est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
H^*(S_i) \otimes (\oplus \mathbb{Q}E_g^i) & \longrightarrow & H^*((S_i^*)_O) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^*(S_i) \otimes (\oplus \mathbb{Q}F_g^i) & \longrightarrow & H^*((S_i^*)_O) \otimes (\oplus \mathbb{Q}F_g^i)
\end{array}$$

Démonstration. On se donne une classe αE_h^i . On considère le fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ $f : (E_g^i)_O \rightarrow O$. On note w la restriction de αE_h^i à $(E_g^i)_O$. Il s'agit de montrer que $f_*(w)$ est égal à 0 si les diviseurs E_g^i et E_h^i ne s'intersectent pas, est égal à $-2\alpha|_O$ si les diviseurs E_h^i et E_g^i sont égaux, et est égal à $\alpha|_O$ si E_g^i et E_h^i sont distincts mais s'intersectent. Le cas où les diviseurs E_g^i et E_h^i ne s'intersectent pas est évident. Traitons le cas où les diviseurs E_h^i et E_g^i sont égaux. La restriction de αE_g^i à E_i^g est égale à $\alpha c_1(N)$ où N est le fibré normal de E_g^i (d'après E.1.9). En restreignant cette dernière classe à $(E_g^i)_O$ on obtient $w = \alpha|_O c_1(M)$ où M est le fibré normal de $(E_g^i)_O$. Ainsi, par application de la formule de projection, $f_*(w) = \alpha|_O f_*(c_1(M))$. Or, par adjonction et car la résolution est crépante, le fibré normal de $(E_g^i)_O$ est

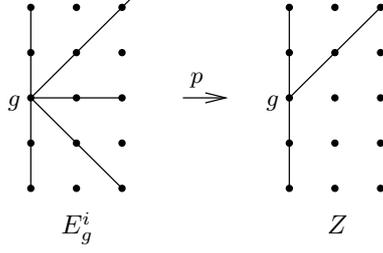


FIG. 4.1 –

$M = \omega_{(E_g^i)_O} \otimes f^*((\omega_Q)_O^{-1})$. De plus, par lissité de f , le fibré canonique de $(E_g^i)_O$ est $\omega_{(E_g^i)_O} = \omega_f \otimes f^*(\omega_O)$. On obtient donc en appliquant la formule de projection $f_*(c_1(M)) = f_*(\omega_f)$. En appliquant le lemme 4.2.5, on obtient $f_*(w) = -2\alpha|_O$.

Traisons le cas où E_h^i et E_g^i sont distincts mais s'intersectent. Dans ce cas, la restriction de αE_k^i à E_g^i est $k_*(\alpha)$ où k est l'inclusion de l'intersection de E_h^i et E_g^i dans E_g^i (d'après E.1.10). Le problème technique est que E_g^i n'est pas un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de S_i mais seulement au-dessus de S_i^* . Cependant, il existe un morphisme $p : E_g^i \rightarrow Z$ au-dessus de S_i et qui vérifie les propriétés suivantes. Le morphisme p est un isomorphisme sauf au dessus d'un nombre fini de points de Z , chacun étant au dessus d'un point P_j de S_i . Le morphisme $e : Z \rightarrow S_i$ est un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'intersection de E_h^i et E_g^i dans E_g^i est au-dessus de l'ouvert d'isomorphisme de p et cette intersection, vue dans Z , est une section de fibré e . La figure 4.1 décrit p au dessus d'un point P_j de S_i . Notons l l'inclusion de l'intersection de E_g^i et E_h^i dans Z . Puisque p^* est un isomorphisme au dessus d'un voisinage de l'intersection, $p^*(l_*(\alpha)) = k_*(\alpha)$. Puisque p^* est un isomorphisme sur $(E_g^i)_O$, w est juste la restriction de $l_*(\alpha)$ à $(E_g^i)_O$. Comme l peut être vu comme une section du fibré e , on a $e_*(l_*(\alpha)) = \alpha$. Puisque le fibré f est la restriction de fibré e au-dessus de O , on conclut que $f_*(w) = \alpha|_O$ en appliquant E.1.8. \square

Lemme 4.2.8. On considère la résolution crépante $\tau_j : Y_j \rightarrow Q_j$. L'inclusion de $\tau_j^{-1}(D_j \cap S)$ dans Y_j induit un isomorphisme en cohomologie.

Démonstration. Notons S_j le lieu singulier de Q_j et C_j son image réciproque dans \mathbb{C}^3 . Puisque $\tau_j^{-1}(S_j)$ est stable sous l'action du tore, son inclusion dans Y_j induit un isomorphisme en homologie (d'après la preuve de 3.2.2) et donc en cohomologie. Nous avons donc à montrer que l'inclusion de $\tau_j^{-1}(D_j \cap S_j)$ dans $\tau_j^{-1}(S_j)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

On va essentiellement utiliser l'action de \mathbb{C}^* et le module produit $|\cdot|$. Considérons B le polydisque unité (de centre 0 et de rayon 1) dans \mathbb{C}^3 . Pour montrer que l'inclusion de $C_j \cap B$ dans C_j induit un isomorphisme en homologie, on peut procéder ainsi. On considère H le polydisque fermé

centré 0 de rayon $1/2$. On considère l'application $\alpha : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}^*$ définie en prenant la valeur $\alpha(t, m)$ égale à $(1-t)m + t/2$ lorsque $m \geq 1/2$ et égale à 1 lorsque $m \leq 1/2$. L'application qui à un couple (t, z) associe $\alpha(t, |z|) \cdot z$ permet de définir des rétractions par déformation forte, d'une part de C_j sur $C_j \cap H$ et d'autre part de $C_j \cap B$ sur $C_j \cap H$. Ceci prouve que l'inclusion de $C_j \cap B$ dans C_j induit un isomorphisme en homologie.

Remarquons que l'on peut utiliser le même principe après passage au quotient : on note D_j et F_j les images de B et H dans Q_j . Remarquons que l'action de \mathbb{C}^* et $|\cdot|$ descendent au quotient par G_j . Ainsi l'application qui à un couple (t, z) associe $\alpha(t, |z|) \cdot z$ permet de définir des rétractions par déformation forte, d'une part de S_j sur $S_j \cap F_j$ et d'autre part de $S_j \cap D_j$ sur $S_j \cap F_j$. Ceci prouve que l'inclusion de $S_j \cap D_j$ dans S_j induit un isomorphisme en homologie. On peut relever ces rétractions en utilisant le fait que l'action de \mathbb{C}^* se relève par τ_j . Ainsi, l'application qui à un couple (t, w) associe $\alpha(t, |\tau_j(w)|) \cdot w$ définit des rétractions par déformation forte, d'une part de $\tau_j^{-1}(S_j)$ sur $\tau_j^{-1}(S_j \cap F_j)$ et d'autre part de $\tau_j^{-1}(S_j \cap D_j)$ sur $\tau_j^{-1}(S_j \cap F_j)$. Ceci prouve le lemme. \square

Lemme 4.2.9. On dispose de la suite exacte courte suivante :

$$1 \rightarrow (\oplus \mathbb{Q}E_g^j) \oplus (\oplus \mathbb{Q}E_g^i) \rightarrow (\oplus H_\tau^2(D_j \cap S)) \oplus (H_\tau^2(S_i^*)) \rightarrow (\oplus H_\tau^2(D_j \cap S_i^*)) \rightarrow 1$$

Démonstration. D'après le lemme 4.2.8, l'inclusion de $D_j \cap S$ dans R_j induit un isomorphisme en homologie. Puisque les diviseurs exceptionnels de R_j forment une base de $H^2(R_j)$ (d'après C.2.6), on obtient la formule ci-dessous pour $H_\tau^2(D_j \cap S)$. Dans cette formule, les éléments E_g^j, E_g^i désignent les classes de cohomologie restreintes à $D_j \cap S$. De plus, les classes de cohomologie des autres diviseurs exceptionnels restreintes à $D_j \cap S$ sont nulles.

$$H_\tau^2(D_j \cap S) = (\oplus \mathbb{Q}E_g^j) \oplus (\oplus_{i|P_j \in S_i} (\oplus \mathbb{Q}E_g^i))$$

En appliquant le lemme 4.2.7 en degré 0 avec $O = S_i^*$, on obtient la formule ci-dessous pour $H_\tau^2(S_i^*)$. Dans cette formule, les éléments E_g^i désignent les classes de cohomologie restreintes à S_i^* . De plus, les classes de cohomologie des autres diviseurs exceptionnels restreintes à S_i^* sont nulles.

$$H_\tau^2(S_i^*) = \oplus \mathbb{Q}E_g^i$$

En appliquant le lemme 4.2.7 en degré 0 avec $O = S_i^* \cap D_j$, on obtient la formule ci-dessous pour $H_\tau^2(S_i^* \cap D_j)$. Dans cette formule, les éléments E_g^i désignent les classes de cohomologie restreintes à $S_i^* \cap D_j$. De plus, les classes de cohomologie des autres diviseurs exceptionnels restreintes à $S_i^* \cap D_j$ sont nulles.

$$H_\tau^2(S_i^* \cap D_j) = \begin{cases} \oplus \mathbb{Q}E_g^i & \text{si } P_j \in S_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vu les descriptions données ci-dessus, on peut vérifier de manière très formelle que la suite courte donnée dans l'énoncé du lemme est exacte. \square

Lemme 4.2.10. Pour tout i , on dispose de la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow H^1(S_i) \rightarrow H^1(S_i^*) \rightarrow \oplus H^1(S_i^* \cap D_j)$$

Démonstration. On considère les parties $U = \cup_j (S_i \cap D_j)$ et $V = S_i^*$ qui forment un recouvrement ouvert de S_i . On obtient la suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée en cohomologie. En remarquant que le morphisme $H^0(S_i^*) \oplus (\oplus H^0(S_i \cap D_j)) \rightarrow \oplus H^0(S_i^* \cap D_j)$ est surjectif et que le groupe $\oplus H^1(S_i \cap D_j)$ est nul, on en déduit la suite exacte du lemme. \square

Lemme 4.2.11. On dispose de la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \oplus H^1(S_i) E_g^i \rightarrow \oplus H_\tau^3(S_i^*) \rightarrow \oplus H_\tau^3(D_j \cap S_i^*)$$

Démonstration. Remarquons que dans la suite de l'énoncé i et j varient. Cependant, cette suite est somme directe sur i des suites où i est fixé et j seul varie. Il nous suffit donc de montrer que la suite à i fixé est exacte. On dispose alors du diagramme commutatif suivant où le carré de gauche est donné par le lemme 4.2.7 et le carré de droite est donné par des restrictions en cohomologie pour les flèches horizontales et par les lemmes 4.2.5 et 4.2.6 pour les flèches verticales.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(S_i) \otimes (\oplus E_g^i) & \longrightarrow & \oplus H_\tau^3(S_i^*) & \longrightarrow & \oplus H_\tau^3(D_j \cap S_i^*) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(S_i) \otimes (\oplus F_g^i) & \longrightarrow & H^1(S_i^*) \otimes (\oplus F_g^i) & \longrightarrow & (\oplus H^1(S_i^* \cap D_j)) \otimes (\oplus F_g^i) \end{array}$$

Les flèches verticales étant des isomorphismes, il reste à montrer que la suite du bas est exacte. Puisque cette suite est la suite exacte du lemme 4.2.10 tensorisée avec $(\oplus F_g^i)$, elle est exacte. \square

Lemme 4.2.12. Le groupe gradué $H^*(E)/H^*(S)$ est non nul en degrés 2,3,4. En degrés 2 et 3, on dispose des descriptions suivantes :

$$H^2(E)/H^2(S) = (\oplus \mathbb{Q} E_g^j) \oplus (\oplus \mathbb{Q} E_g^i) \quad H^3(E)/H^3(S) = \oplus H^1(S_i) E_g^i$$

Démonstration. Considérons les deux parties $U = \cup_j D_j \cap S$ et $V = \cup_i S_i^*$. On remarque que U et V forment un recouvrement ouvert de S . L'application continue τ fournit un morphisme de suites exactes longues de Mayer-Vietoris.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^k(S) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^k(E) & \longrightarrow & H^k(\tau^{-1}(U)) \oplus H^k(\tau^{-1}(V)) & \longrightarrow & H^k(\tau^{-1}(U \cap V)) & \longrightarrow \end{array}$$

On vérifie que la suite du dessus est une sous-suite de celle du dessous (en utilisant en particulier 4.2.1, 4.2.6). On considère alors la suite exacte quotient. Cette suite exacte montre que $H^*(E)/H^*(S) = 0$ est nul sauf en degré 2, 3, 4 et il en reste le morceau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(E)/H^2(S) & \longrightarrow & (\oplus H_\tau^2(D_j \cap S)) \oplus (\oplus H_\tau^2(S_i^*)) & \longrightarrow & \oplus H_\tau^2(D_j \cap S_i^*) \\
\\
& & \longrightarrow & H^3(E)/H^3(S) & \longrightarrow & \oplus H_\tau^3(S_i^*) & \longrightarrow & \oplus H_\tau^3(D_j \cap S_i^*) \\
\\
& & \longrightarrow & H^4(E)/H^4(S) & \longrightarrow & \oplus H_\tau^4(D_j) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On conclut en utilisant les lemmes 4.2.1 et 4.2.6. \square

Lemme 4.2.13. Le cup produit d'un élément de $H^*(E)/H^*(S)$ et d'un élément de $H^*(Q)$ est un élément de $H^*(E)/H^*(S)$.

Démonstration. $H^*(E)/H^*(S) = \text{Ker}(p_*)$ et $H^*(Q) = \text{Im}(p^*)$, par définition de la décomposition de $H^*(Y)$. Soit α un élément de $H^*(E)/H^*(S)$ et $p^*(\beta)$ un élément de $H^*(Q)$. En appliquant la formule de projection, on calcule $p_*(\alpha \cup p^*(\beta)) = p_*(\alpha) \cup \beta$. Ainsi, $\alpha \cup p^*(\beta)$ est un élément de $\text{Ker}(p_*)$ donc par définition un élément de $H^*(E)/H^*(S)$. \square

Lemme 4.2.14. Le cup produit dans Y induit une dualité entre $H^2(E)/H^2(S)$ et $H^4(E)/H^4(S)$. On notera $E_g^{i\vee}, E_g^{j\vee}$ les éléments de la base de $H^4(S)/H^4(E)$ obtenue par dualité.

Démonstration. Le cup produit de Y induit une dualité entre $H^2(Y)$ et $H^4(Y)$. On considère la décomposition $H^*(Y) = H^*(E)/H^*(S) \oplus H^*(Q)$ en degrés 2 et 4. Le produit d'un élément de $H^2(E)/H^2(S)$ et d'un élément de $H^4(Q)$ est nul puisque c'est un élément de $H^6(E)/H^6(S)$ (d'après 4.2.13) de degré six. De même le produit d'un élément de $H^4(E)/H^4(S)$ et d'un élément de $H^2(Q)$ est nul. La dualité se décompose en deux dualités : l'une entre $H^2(E)/H^2(S)$ et $H^4(E)/H^4(S)$ et l'autre entre $H^2(Q)$ et $H^4(Q)$. \square

Lemme 4.2.15. Notons N_g^i le fibré normal de E_g^i dans Y .

$$(\tau_g^i)_*(c_1(N_g^i)) = -2$$

Démonstration. Notons ω_g^i le fibré canonique de E_g^i . Par adjonction et car la résolution est crépante, le fibré normal de E_g^i est $N_g^i = \omega_g^i \otimes (\tau_g^i)^*((\omega_Q)^{-1}_{|S_i})$. En utilisant la formule de projection, on obtient l'égalité $(\tau_g^i)_*(c_1(N_g^i)) = (\tau_g^i)_*(c_1(\omega_g^i))$. Le problème technique est que E_g^i n'est pas un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de S_i mais seulement au-dessus de S_i^* . Cependant, il existe un morphisme $p : E_g^i \rightarrow Z$ au-dessus de S_i et qui vérifie les propriétés suivantes.

Le morphisme p est un isomorphisme sauf au dessus d'un nombre fini de points de Z , chacun étant au dessus d'un point P_j de S_i . Le morphisme $e : Z \rightarrow S_i$ est un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La figure 4.1 décrit p au dessus d'un point P_j de S_i .

Il existe un unique diviseur D (combinaison linéaire des diviseurs exceptionnels, les coefficients étant leur discrédance) tel que $p^*(\omega_Z)$ soit naturellement isomorphe à $\omega_g^i \otimes \mathcal{O}(D)$. Remarquons que $p_*(c_1(\mathcal{O}(D))) = 0$. Ainsi, puisque p est un morphisme propre de degré 1, $p_*(c_1(\omega_g^i)) = c_1(\omega_Z)$ (voir E.1.5). En appliquant e_* , on en déduit l'égalité $(\tau_g^i)_*(c_1(\omega_g^i)) = e_*(c_1(\omega_Z))$. Par lissité de e , le fibré canonique de Z est $\omega_Z = \omega_e \otimes e^*(\omega_{S_i})$. En utilisant la formule de projection, on obtient $e_*(c_1(\omega_Z)) = e_*(c_1(\omega_e))$. On conclut par application du lemme 4.2.5. \square

Lemme 4.2.16. Fixons i . Les éléments $[S_i]E_g^i$ sont combinaisons linéaires des éléments $E_g^{i\vee}$ et la matrice de passage est la matrice tridiagonale avec des -2 sur la diagonale et des 1 à côté.

Démonstration. Il s'agit de déterminer les coordonnées de $[S_i]E_g^i$ dans la base duale des diviseurs exceptionnels. Soit E un diviseur exceptionnel. La coordonnée correspondant à E^\vee est par définition $[S_i]E_g^i \cup E$. Commençons par traiter le cas où E est égal à E_g^i . Par application de la formule de projection, on obtient l'égalité $[S_i]E_g^i \cup E_g^i = (j_g^i)_*([S_i]j^*(E_g^i))$. Or, d'après E.1.2 et E.1.9, on a $j^*(E_g^i) = N_g^i$. Nous avons donc à calculer le nombre $[S_i]N_g^i$. Ce nombre est le même que $(\tau_g^i)_*([S_i]N_g^i)$. D'après la formule de projection et le lemme 4.2.15, ce nombre est -2 .

Il reste à traiter le cas où E est distinct de E_g^i . Notons k l'intersection de E et E_g^i dans Y . D'après E.1.11, on a l'égalité $[S_i]E_g^i \cup E = k_*([S_i]_{|_{E \cap E_g^i}})$. Nous avons donc à calculer le nombre correspondant à la classe de cohomologie $[S_i]_{|_{E \cap E_g^i}}$. Celui-ci ne peut être non nul que si l'image de l'intersection de E et E_g^i est la courbe S_i . Dans ce cas, E est un diviseur du type E_h^i intersectant E_g^i et l'intersection de E_g^i et E_h^i est isomorphe à S_i . Dans ce cas, ce nombre est donc 1 . \square

4.3 Nombre d'intersections de trois diviseurs

Nous verrons que, tout comme dans le cas local, l'anneau de cohomologie est essentiellement déterminé par la manière dont s'intersectent les diviseurs exceptionnels. La combinatoire des diviseurs peut varier fortement d'une résolution à l'autre. Nous calculons dans cette section le nombre d'intersections de trois diviseurs exceptionnels. Puisque Y est compact, on définit ici ce nombre d'intersections comme le cup produit des trois diviseurs (vus dans $H^2(Y)$) qui est un élément de $H^6(Y) = \mathbb{Q}$.

Étant donné trois diviseurs exceptionnels, l'intersection de leur image par τ est soit vide, soit quelques points, soit une courbe. Nous allons cal-

culer le nombre d'intersections suivant ces trois cas. Dans le cas où l'intersection des images est vide, le nombre d'intersections est nul. Dans le cas où l'intersection des images est quelques points, on peut calculer le nombre d'intersections en se ramenant au cas local comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. Soit E_1, E_2, E_3 trois diviseurs exceptionnels dont l'intersection des images est de dimension 0. Avec les notations précédentes, le nombre d'intersections est :

$$E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 = \sum_{j|P_j \in \tau(E_1) \cap \tau(E_2) \cap \tau(E_3)} (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_j$$

(Dans la formule ci-dessus, $(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_j$ est le nombre d'intersections local calculé dans les propositions 3.4.4 et 3.4.6 en considérant E_1, E_2, E_3 comme des diviseurs de la résolution Y_j .)

Démonstration. Quitte à permuter les diviseurs, on peut supposer que l'image du diviseur E_3 est un point ou bien que l'image des diviseurs E_2 et E_3 sont deux courbes distinctes. Dans le premier cas, puisque $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 = E_1 \cup E_2(E_3)$ et puisque E_3 est une surface au dessus d'un point, disons P_j , on conclut par définition (cf 3.4.1) que $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_j$. Dans le second cas, puisque $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 = E_1(E_2 \cap E_3)$ et que $E_2 \cap E_3$ est réunion disjointe de courbes, chacune au dessus d'un point, on conclut par définition (cf 3.4.1) la formule de l'énoncé. \square

Il reste à déterminer le cas où l'intersection des images des diviseurs exceptionnels est une courbe S_i . Il s'agit donc de trois diviseurs de type E_g^i . Dans le cas où l'intersection de deux d'entre-eux est vide, le nombre d'intersections est nul. Il nous reste donc à calculer $(E_g^i)^3$ et $(E_g^i)^2 \cdot E_h^i$ (où E_g^i et E_h^i sont distincts mais s'intersectent). Ceci est plus délicat car ces nombres font à la fois intervenir des données géométriques globales au-dessus de la courbe S_i (comme dans le cas des singularités A -transversales de [Per]) ainsi que des données locales au-dessus des points P_j . Commençons par calculer $(E_g^i)^3$.

Lemme 4.3.2. Soit $f : F \rightarrow C$ un fibré en $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur une courbe lisse. On se donne \mathcal{L} un fibré en droite sur la courbe et λ un nombre rationnel.

$$(\lambda c_1(\omega_f) + c_1(f^*(\mathcal{L})))^2 = -4\lambda c_1(\mathcal{L})$$

Démonstration. En effectuant l'exercice 7.10 du chapitre II de [Har77], on montre que $F = \text{Proj}(\text{Sym}(G))$ où G est un fibré de rang deux sur C . F est le projectivisé du fibré G^\vee , noté $\mathbb{P}(G^\vee)$. D'après l'exercice 8.4 du chapitre III de [Har77], le fibré canonique relatif est $\omega_f = \wedge^2 G(-2)$. Notons $x = c_1(\mathcal{O}(1))$ la première classe de Chern du fibré tautologique. On dispose de la

relation $c_1(\omega_f) = -2x + c^1(G)$. Les classes de Chern de G vérifient la relation $x^2 - c_1(G)x + c_2(G) = 0$ (cette relation sert parfois même à les définir). C est une courbe donc a cohomologie nulle en degré 4. On obtient donc à partir des deux dernières relations la formule $(\lambda c_1(\omega_f) + c^1(f^*(\mathcal{L})))^2 = -4\lambda x f^*(c_1(\mathcal{L}))$. On conclut en appliquant le foncteur f_* ainsi que E.1.7. \square

Lemme 4.3.3. On note N_{C_i} le fibré normal de la courbe C_i dans X . On définit M_{S_i} , un fibré en droite sur S_i , par la formule d'adjonction ci-dessous. La première classe de Chern de M_{S_i} donnée par la seconde formule.

$$M_{S_i} = \omega_{S_i} \otimes (\omega_Q)|_{S_i}^{-1}$$

$$c_1(M_{S_i}) = (c_i n_i / n) c_1(N_{C_i}) + c_i \sum_{j|P_j \in S_i} (1 - n_i / n_j)$$

Démonstration. On considère $q : C_i \rightarrow S_i$ la restriction de τ au-dessus de S_i . q exhibe S_i comme le quotient de C_i sous l'action de G/G_i . Les points de ramifications de q sont les points des orbites O_j pour j tel que $P_j \in S_i$. Le stabilisateur en un point de O_j est G_j/G_i . $q^*(\omega_{S_i})$ est donc naturellement isomorphe à $\omega_{C_i} \otimes \mathcal{O}(G)$ où G est le diviseur suivant :

$$G = \sum_{j|P_j \in S_i} \sum_{O \in O_j} ([G_j : G_i] - 1)O$$

Considérons le fibré en droite $M_{C_i} = \wedge^2 N_{C_i}$. Par adjonction et car la résolution est crépante, $q^*(M_{S_i})$ est naturellement isomorphe à $M_{C_i} \otimes \mathcal{O}(G)$. Puisque q est de degré $[G : G_i]$, on obtient en passant aux premières classes de Chern $c_1(M_{S_i}) = c_i / [G : G_i] (c_1(M_{C_i}) + \deg(G))$. D'une part, la première classe de Chern est $c_1(M_{C_i}) = c_1(N_{C_i})$. D'autre part, le degré est $\deg(G) = [G : G_i] \sum_{j|P_j \in S_i} (1 - 1/[G_j : G_i])$. On en déduit la formule du lemme. \square

Définition 4.3.4. On considère un diviseur exceptionnel E_g^i . Fixons j tel que $P_j \in S_i$, de sorte que g est un élément de G_j . Le point g est un point du bord de Δ_j . On note n_g^{ij} le nombre d'arêtes de la triangulation de Δ_j ayant g pour sommet.

Proposition 4.3.5. Avec les notations précédentes, le nombre d'intersections du diviseur E_g^i est :

$$(E_g^i)^3 = -4c_1(M_{S_i}) + \sum (3 - n_g^{ij})$$

Démonstration. On utilise l'égalité $(E_g^i)^3 = c_1(N_g^i)^2$. La difficulté technique est que E_g^i n'est pas un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de S_i mais seulement au-dessus de S_i^* . Cependant, il existe un morphisme $p : E_g^i \rightarrow Z$ au-dessus de S_i et qui vérifie les propriétés suivantes. Le morphisme p est un isomorphisme sauf au dessus d'un nombre fini de points de Z , chacun étant au dessus d'un

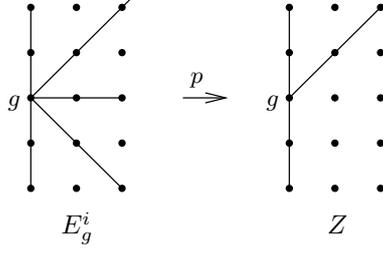


FIG. 4.2 –

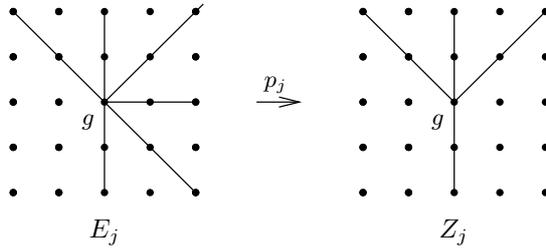


FIG. 4.3 –

point P_j de S_i . Le morphisme $e : Z \rightarrow S_i$ est un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La figure 4.2 décrit p au dessus d'un point P_j de S_i .

Notons w_g^i le fibré canonique de E_g^i . Il existe un unique diviseur D (combinaison linéaire des diviseurs exceptionnels, les coefficients étant leur discrédance) tel que $p^*(\omega_Z)$ soit naturellement isomorphe à $\omega_g^i \otimes \mathcal{O}(D)$. Par lissité du fibré e , le fibré canonique de Z est $\omega_Z = \omega_e \otimes e^*(\omega_{S_i})$. Par adjonction et car la résolution est crépante, le fibré normal de E_g^i est donc $N_g^i = p^*(\omega_e \otimes e^*(M_{S_i})) \otimes \mathcal{O}(-D)$. Remarquons que pour tout élément de x de $H^2(Z)$, on dispose de l'égalité $(p^*(x) + c_1(\mathcal{O}(-D)))^2 = x^2 + D^2$. En effet, $p^*(x) \cup c_1(\mathcal{O}(-D)) = p^*(x)(-D) = x(p_*(-D)) = x(0) = 0$ car D est contracté par p . De plus, $p^*(x)^2 = x^2$ car p est propre de degré 1. En combinant ce qui précède, on obtient $c_1(N_g^i)^2 = (c_1(\omega_e) + c_1(e^*(M_{S_i})))^2 + D^2$. En appliquant le lemme 4.3.2, on conclut que $c_1(N_g^i)^2 = -4c_1(M_{S_i}) + D^2$.

Remarquons également que D se décompose en des diviseurs D_j au-dessus de P_j et qu'on a $D^2 = \sum_j D_j^2$. Remarquons que le calcul de D_j^2 ne dépend que de la restriction de p au dessus d'un voisinage de P_j et donnée par la figure 4.2. Pour le calcul, nous allons recompactifier cette restriction en un morphisme $p_j : E_j \rightarrow Z_j$ (cf figure 4.3). Le fibré normal de E_j est $\omega_{E_j} = p_j^*(\omega_{Z_j}) \otimes \mathcal{O}(-D_j)$, donc le carré de la première classe de Chern est $c_1(\omega_{E_j})^2 = c_1(\omega_{Z_j})^2 + D_j^2$. Puisque E_j et Z_j sont des surfaces toriques lisses, on déduit du lemme 3.4.3 que $D_j^2 = 3 - n_g^{ij}$. \square

Il reste à calculer $(E_g^i)^2 \cdot E_h^i$ (où E_g^i et E_h^i sont distincts mais s'inter-

sectent). C'est le calcul le plus délicat. Les quatre lemmes suivants montrent essentiellement le calcul dans le cas A -transversal.

Lemme 4.3.6. Soit $f : F \rightarrow C$ un fibré en $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur une courbe lisse. On suppose donnée une section $s : C \rightarrow F$ du fibré. s définit un plongement de C dans F et on note N_s son fibré normal. On note également s la classe fondamentale de C dans F en homologie. Alors $c_1(\omega_f)(s) = -c_1(N_s)$.

Démonstration. Par adjonction, le fibré normal de s est $N_s = \omega_C \otimes s^*(\omega_F)^{-1}$. Or par lissité du fibré f , le fibré canonique de F est $\omega_F = \omega_f \otimes f^*(\omega_C)$. Donc le fibré normal de s est $N_s = s^*(\omega_f)^{-1}$. \square

Lemme 4.3.7. Fixons un i tel que $n_i \geq 3$. Le fibré normal N_{C_i} est somme directe de deux fibrés en droite $N_{C_i}^x$ et $N_{C_i}^y$.

Démonstration. G_i agit sur le fibré N_{C_i} . Sur chaque fibre, l'action est donnée par l'inclusion $G_i \subset (\mathbb{C}^*)^2 \cap SL_2(\mathbb{C})$ de 4.1.1. On considère x et y les coordonnées canoniques de \mathbb{C}^2 . Les coordonnées x et y peuvent être vues comme deux caractères de G_i , inverses l'un de l'autre. Le point est que les caractères x et y sont distincts car $x(1) = e^{2i\pi/n_i}$ et $y(1) = e^{-2i\pi/n_i}$. Donc la décomposition isotypique de chaque fibre donne deux droites correspondant aux représentations x et y . En fait, ces décompositions fibre à fibre induisent même une décomposition du fibré normal N_{C_i} (cf A.1.2). \square

Lemme 4.3.8. Fixons un i tel que $n_i \geq 3$. En twistant la résolution crépante $Y_i \rightarrow \mathbb{C}^2/G_i$, qui est $(\mathbb{C}^*)^2$ -équivariante, avec les fibrés en droite $N_{C_i}^x$ et $N_{C_i}^y$, on obtient la résolution crépante $\mathcal{Y}_i \rightarrow N_{C_i}/G_i$. Les diviseurs exceptionnels F_g^i forment une chaîne de fibrés en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur C_i . Considérons deux diviseurs F_g^i et F_h^i distincts mais s'intersectant. Alors leur intersection vue dans F_g^i (fibré sur C_i) est une section t de ce fibré. Le fibré normal de cette section est :

$$N_t = (N_{C_i}^x)^{\epsilon(g-n_i)} \otimes (N_{C_i}^y)^{\epsilon g}$$

(Dans la formule ci-dessus $\epsilon = g - h \in \{\pm 1\}$)

Démonstration. Le preuve du lemme se ramène entièrement aux propriétés de la résolution crépante Y_i . Cette résolution est torique et a une description combinatoire donnée à la fin de la section C.2. Les diviseurs exceptionnels sont une chaîne de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Les diviseurs exceptionnels sont naturellement indexés par les éléments g de G_i non nuls et on note ces diviseurs G_g^i . Soient deux diviseurs G_g^i et G_h^i distincts mais s'intersectant. L'intersection de G_g^i et G_h^i vue dans G_g^i est un point vu dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il existe une coordonnée torique z de $G_g^i \simeq \mathbb{C}_\infty$ telle que le point $G_g^i \cap G_h^i$ soit le point de coordonnée $z = 0$. Cette coordonnée torique z est $z = x^{\epsilon(g-n_i)}y^{\epsilon g}$ avec $\epsilon = g - h \in \{\pm 1\}$. \square

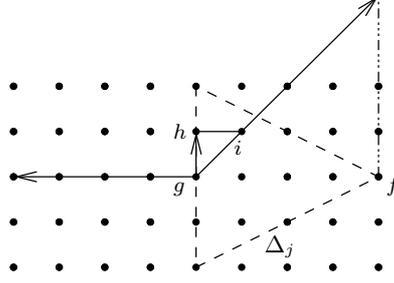


FIG. 4.4 –

Lemme 4.3.9. On reprend la situation du lemme précédent. Les diviseurs exceptionnels F_g^i et F_h^i s'intersectent. Leur intersection, vue dans F_g^i (fibré sur C_i), est une section t de ce fibré. Les diviseurs exceptionnels E_g^i et E_h^i s'intersectent. Leur intersection au-dessus de S_i^* vue dans $(E_g^i)_{S_i^*}$ (fibré sur S_i^*), est une section s de ce fibré. En considérant le changement de base $C_i^* \rightarrow S_i^*$, le tiré-en-arrière de $((E_g^i)_{S_i^*}, s)$ est naturellement la restriction de (F_g^i, t) au-dessus de C_i^* .

Démonstration. Notons Z le tiré-en-arrière de Y par le changement de base $X/G_i \rightarrow Q$. Ainsi le tiré-en-arrière du lieu exceptionnel de Y au-dessus de S_i^* est le lieu exceptionnel de Z au-dessus de C_i^* par le changement de base $C_i^* \rightarrow S_i^*$. Remarquons que Z est la résolution crépante au dessus d'un voisinage de C_i^* dans X/G_i . G_i agit dans X comme dans N_{C_i} au voisinage de C_i^* . Donc le lieu exceptionnel de Z est naturellement isomorphe au lieu exceptionnel de \mathcal{Y}_i au-dessus de C_i^* . \square

Définition 4.3.10. Soient E_g^i et E_h^i deux diviseurs exceptionnels distincts mais s'intersectant. Fixons un point j tel que $P_j \in S_i$ de sorte que g et h sont des éléments de G_j . L'arête $[gh]$ est une arête de la triangulation de Δ_j située sur un côté de Δ_j dont on note f le sommet opposé. Il existe un triangle $[ghi]$ d'arête $[gh]$. On peut définir l'entier n_{gh}^{ij} par la relation vectorielle suivante (voir la figure 4.4) :

$$n_j/n_i \cdot \vec{gi} + \vec{fg} = n_{gh}^{ij} \vec{gh}$$

Proposition 4.3.11. Soient deux diviseurs E_g^i et E_h^i distincts mais s'intersectant. En reprenant les notations précédentes, le nombre d'intersections $(E_g^i)^2 \cdot E_h^i$ est donné par la formule suivante :

$$(E_g^i)^2 \cdot E_h^i = c_1(M_{S_i}) - (c_i n_i/n) c_1(N_t) + c_i n_i \sum n_{gh}^{ij}/n_j$$

(Dans la formule ci-dessus $c_1(N_t)$ est calculé dans 4.3.8)

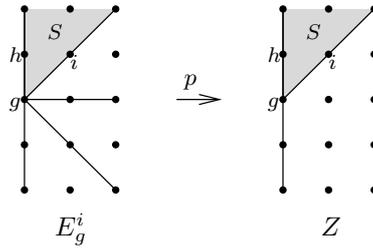


FIG. 4.5 –

Démonstration. Posons $S = E_g^i \cap E_h^i$ de sorte que le nombre d'intersections est donné par la formule $(E_g^i)^2 \cdot E_h^i = c_1(N_g^i)(S)$. La difficulté technique est que E_g^i n'est pas un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de S_i mais seulement au-dessus de S_i^* . Cependant, il existe un morphisme $p : E_g^i \rightarrow Z$ au-dessus de S_i et qui vérifie les propriétés suivantes. Le morphisme p est un isomorphisme sauf au dessus d'un nombre fini de points de Z , chacun étant au dessus d'un point P_j de S_i . Le morphisme $e : Z \rightarrow S_i$ est un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'intersection S des deux diviseurs est au-dessus de l'ouvert d'isomorphisme de p et cette intersection, vue dans Z , est une section du fibré e . La figure 4.5 décrit p au dessus d'un point P_j de S_i .

Notons ω_g^i le fibré canonique de E_g^i . Il existe un unique diviseur D (combinaison linéaire des diviseurs exceptionnels, les coefficients étant leur discrédance) tel que $p^*(\omega_Z)$ soit naturellement isomorphe à $\omega_g^i \otimes \mathcal{O}(D)$. Par lissité du fibré e , le fibré canonique de Z est $\omega_Z = \omega_e \otimes e^*(\omega_{S_i})$. Par adjonction et car la résolution est crépante, le fibré normal de E_g^i est donc $N_g^i = p^*(\omega_e \otimes e^*(M_{S_i})) \otimes \mathcal{O}(-D)$. Puisque le support de D ne rencontre pas S , on constate que $c_1(\mathcal{O}(-D))(S) = 0$. On obtient donc l'égalité $c_1(N_g^i)(S) = (c_1(\omega_e) + e^*(c_1(M_{S_i}))) (S)$ en considérant S comme partie de Z . L'intersection S des deux diviseurs, vue dans Z (fibré sur S_i), est une section s de ce fibré. En appliquant le lemme 4.3.6, on obtient l'égalité $c_1(N_g^i)(S) = -c_1(N_s) + c_1(M_{S_i})$. Il nous reste donc à calculer $c_1(N_s)$.

On considère le changement de base $C_i \rightarrow S_i$, et on tire en arrière le couple (Z, s) en un couple (W, u) . La figure 4.6 décrit ce changement de base au dessus d'un voisinage de $P_j \in S_i$. Le fibré normal N_u est le tiré-en-arrière du fibré normal N_s . Puisque le morphisme $C_i \rightarrow S_i$ est de degré $[G : G_i]$, on dispose de l'égalité $c_1(N_s) = c_i/[G : G_i]c_1(N_u)$. Il nous reste donc à calculer $c_1(N_u)$.

On reprend la situation du lemme 4.3.8. Les diviseurs exceptionnels F_g^i et F_h^i s'intersectent. Leur intersection, vue dans F_g^i (fibré sur C_i), est une section t de ce fibré. D'après le lemme 4.3.9, les restrictions de (F_g^i, t) et (W, u) sont naturellement isomorphes au-dessus de S_i^* . Il existe donc un diviseur R (combinaison linéaire de points des orbites O_j) tel que N_u soit naturellement isomorphe à $N_t \otimes \mathcal{O}(R)$. Ainsi, en passant aux premières classes de

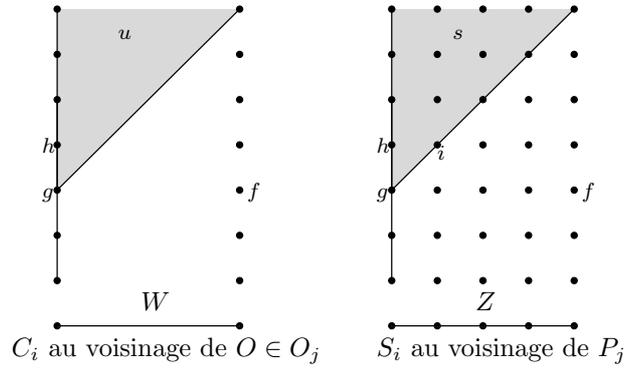


FIG. 4.6 –

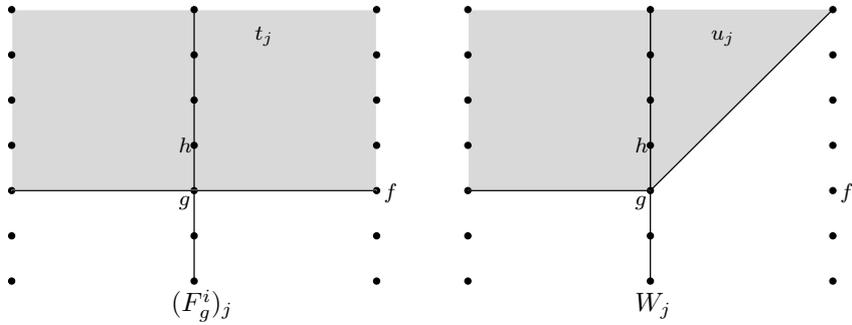


FIG. 4.7 –

Chern, nous avons l'égalité $c_1(N_u) = c_1(N_t) + \deg(R)$. Nous pouvons exprimer $c_1(N_t)$ en fonction de $c_1(N_i^x)$ et $c_1(N_i^y)$ en utilisant le lemme 4.3.8. Il ne reste plus qu'à calculer $\deg(R)$.

La multiplicité du diviseur R en un point O de O_j ne dépend que des restrictions de (F_g^i, t) et (W, u) au dessus d'un voisinage de ce point. Ces restrictions peuvent se recompactifier en des couples $((F_g^i)_j, t_j)$ et (W_j, u_j) comme sur la figure 4.7. La multiplicité du diviseur R en O est calculée par différence $c_1(N_{u_j}) - c_1(N_{t_j}) = u_j^2 - t_j^2$. Remarquons d'une part que W_j est la surface de Hirzebruch correspondant à l'entier n_{gh}^{ij} et d'autre part que $(F_g^i)_j$ est la surface $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^2$. En utilisant la section 2.5 de [Ful93], on peut calculer les carrés $u_j^2 = -n_{gh}^{ij}$ et $t_j^2 = 0$. Ainsi, la multiplicité du diviseur R au point O est simplement le nombre $-n_{gh}^{ij}$. On en déduit la formule suivante pour le degré de R :

$$\deg(R) = - \sum_{j|P_j \in S_i} [G : G_j] n_{gh}^{ji}$$

Le degré de R permet d'achever le calcul du nombre d'intersections. \square

4.4 Calcul de l'anneau $H^*(Y)$

Dans cette section, nous donnons une méthode de calcul de l'anneau de cohomologie $H^*(Y)$ d'une résolution crépante. L'anneau de cohomologie $H^*(Y)$ est une algèbre sur l'anneau de cohomologie classique du quotient $H^*(Q)$. De plus, le produit d'un élément de $H^*(Q)$ avec un élément de $H^*(E)/H^*(S)$ se calcule simplement par restriction. De manière explicite, on a la proposition suivante :

Proposition 4.4.1. En reprenant les notations précédentes, le cup produit d'un élément q de $H^*(Q)$ et d'un élément de $H^*(E)/H^*(S)$ est donné par l'une des trois formules suivantes :

$$\begin{aligned} q \cup (\alpha E_g^i) &= (q|_{S_i} \cup \alpha) E_g^i \\ q \cup E_g^j &= q|_{P_j} E_g^j \\ q \cup E_g^{j\vee} &= q|_{P_j} E_g^{j\vee} \end{aligned}$$

Remarquons que dans la première formule, le résultat est non nul lorsque $\deg(q) + \deg(\alpha) \leq 2$. Dans les deux autres formules, le résultat est non nul lorsque q est de degré nul.

Démonstration. Commençons par prouver la première formule. En reprenant la définition de 4.2.3, le cup produit $q \cup (\alpha E_g^j)$ est $\tau^*(q) \cup (j_g^i)_*((\tau_g^i)^* \alpha)$. Par application de la formule de projection, on dispose de l'égalité $q \cup (\alpha E_g^j) = (j_g^i)_*((\tau_g^i)^*(q|_{S_i} \cup \alpha))$. On obtient donc par définition la première formule. Pour prouver la seconde formule, on considère i l'inclusion du diviseur E_g^j dans X et t la projection du diviseur E_g^j sur P_j . D'après E.1.2, le cup produit $q \cup E_g^j$ est $\tau^*(q) \cup i_*(1)$. Par application de la formule de projection, on dispose de l'égalité $q \cup E_g^j = i_*(t^*(q|_{P_j}))$. On prouve la troisième formule en utilisant le lemme 4.2.13 et en observant que $H^*(S)/H^*(E)$ est nul en degré supérieur à 5. \square

Pour le calcul de l'anneau de cohomologie, nous avons à déterminer le cup produit de deux éléments de $H^*(E)/H^*(S)$. Vu la graduation, nous avons à calculer les produits d'éléments de degrés (2, 2), (2, 3), (2, 4) et (3, 3). Le cup produit d'éléments de degrés (2, 4) est déterminé par le produit d'éléments des bases duales, qui est évident. Le cup produit d'éléments de degrés (2, 2) est le calcul du cup produit de deux diviseurs exceptionnels, qui est effectué dans la proposition suivante :

Proposition 4.4.2. En reprenant les notations précédentes,

$$(E_g^i)^2 = -2(i_i)_*(1) + \sum_E ((E_g^i)^2 \cdot E) E^*$$

$$E_g^i \cup E_h^i = (i_i)_*(1) + \sum_E ((E_g^i \cdot E_h^i \cdot E)E^* \quad \text{pour } h = g \pm 1$$

Les autres cup produits de diviseurs exceptionnels sont donnés comme suit :

$$E_1 \cup E_2 = \sum_E (E_1 \cdot E_2 \cdot E)E^*$$

Démonstration. Le produit de deux diviseurs est un élément de $H^4(Y)$ somme d'un élément de $H^4(Q)$ et d'un élément de $H^4(E)/H^4(S)$. L'élément de $H^4(E)/H^4(S)$ est combinaison linéaire des $E_g^{i\vee}$ et $E_g^{j\vee}$. Les coefficients de cette combinaison se calculent à l'aide des nombres d'intersections par définition (voir 4.2.4) et car le produit d'un élément de $H^4(Q)$ et d'un élément de $H^2(E)/H^2(S)$ est nul. Ainsi, il nous reste à prouver que l'élément de $H^4(Q)$ est égal à $-2(i_i)_*(1)$ pour $(E_g^i)^2$, égal à $(i_i)_*(1)$ pour $E_g^i \cup E_h^i$ avec $h = g \pm 1$, et nul sinon.

Commençons par traiter le cas où les diviseurs sont distincts. Notons k et l leurs inclusions dans Y de sorte que l'élément de $H^4(Y)$ est $\tau_*(k_*(1) \cup l_*(1))$. En notant s l'inclusion de leur intersection dans Y , on dispose de l'égalité $k_*(1) \cup l_*(1) = s_*(1)$ d'après E.1.11. En notant t la projection de leur intersection sur son image dans Q et en notant u l'inclusion de cette image dans Q , on obtient donc $\tau_*(k_*(1) \cup l_*(1)) = u_*(t_*(1))$. L'intersection des deux diviseurs est soit vide, soit une courbe. Pour que $t_*(1)$ soit non nul, il faut que cette intersection soit une courbe, ainsi que son image. Dans ce cas, les deux diviseurs sont E_g^i et E_h^i avec $h = g \pm 1$. Alors t est un isomorphisme et $u = i_i$. L'élément de $H^4(Q)$ vaut alors $(i_i)_*(1)$.

Traisons le cas du carré d'un diviseur. Notons k son inclusion dans Y de sorte que l'élément de $H^4(Q)$ est $\tau_*(k_*(1)^2)$. En notant N le fibré normal du diviseur, on dispose de l'égalité $k_*(1)^2 = k_*(c_1(N))$ en utilisant la formule de projection et d'après E.1.9. En notant t la projection du diviseur sur son image et en notant u l'inclusion de cette image dans Q , on obtient donc $\tau_*(k_*(1)^2) = u_*(t_*(c_1(N)))$. Or pour des raisons de degré, $t_*(c_1(N))$ est non nul lorsque l'image du diviseur est une courbe et vaut dans ce cas -2 d'après 4.2.15. Ainsi, l'élément de $H^4(Q)$ est non nul lorsque le diviseur est du type E_g^i et vaut alors $-2(i_i)_*(1)$. \square

Pour achever le calcul de l'anneau de cohomologie, il nous reste à calculer le cup produit de deux éléments de $H^*(E)/H^*(S)$ de degrés $(2, 3)$ ou $(3, 3)$. Ceci est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.4.3. En reprenant les notations précédentes, pour tout couple (α, β) d'éléments de $H^*(S_i)$ de degrés $(0, 1)$ ou $(1, 1)$, on a la formule :

$$\begin{aligned} (\alpha E_g^i) \cup (\beta E_g^i) &= -2(i_i)_*(\alpha \cup \beta) \\ (\alpha E_g^i) \cup (\beta E_h^i) &= (i_i)_*(\alpha \cup \beta) \quad \text{pour } h = g \pm 1 \end{aligned}$$

De plus, les autres cup produits d'éléments de $H^*(E)/H^*(S)$ de degrés $(2, 2)$ ou $(2, 3)$ sont tous nuls.

Démonstration. Remarquons que pour des raisons de degré, le produit de deux éléments de $H^*(E)/H^*(S)$ de degré $(2, 3)$ ou $(3, 3)$ est un élément $H^*(Q)$. Les deux éléments de $H^*(E)/H^*(S)$ correspondent en particulier à deux diviseurs exceptionnels du point de vue de la description de $H^*(Y)$ en tant qu'espace vectoriel gradué donnée par 4.2.4.

Commençons par traiter le cas où les diviseurs exceptionnels sont distincts. Notons k et l leurs inclusions dans Y de sorte que le cup produit est $\tau_*(k_*(x) \cup l_*(y))$, où x et y sont des classes de cohomologie provenant de l'image des diviseurs. En notant s l'inclusion de leur intersection dans Y , d'après E.1.11, on dispose de l'égalité $k_*(x) \cup l_*(k) = s_*(z)$ où z désigne une classe de cohomologie provenant de l'image de l'intersection. En notant t la projection de l'intersection sur son image dans Q et en notant u l'inclusion de cette image dans Q , on obtient donc $\tau_*(k_*(x) \cup l_*(y)) = u_*(t_*(z))$. Or d'après la formule de projection, $t_*(z) = z t_*(1)$ (car la classe de cohomologie z provient de l'image). L'intersection des deux diviseurs est soit vide, soit une courbe. Pour que $t_*(1)$ soit non nul, il faut que cette intersection soit une courbe, ainsi que son image. Dans ce cas, les deux diviseurs sont E_g^i et E_h^i avec $h = g \pm 1$. Alors t est un isomorphisme, $u = i_i$ et $z = x \cup y$. Le cup produit vaut alors $(i_i)_*(x \cup y)$.

Traitons le cas où il s'agit du même diviseur exceptionnel. Notons k son inclusion dans Y de sorte que le cup produit est $\tau_*(k_*(x) \cup k_*(y))$ où x et y sont des classes de cohomologie provenant de l'image du diviseur. En notant N le fibré normal du diviseur, on dispose de l'égalité $k_*(x) \cup k_*(y) = k_*(x \cup y \cup c_1(N))$ en utilisant la formule de projection et d'après E.1.9. En notant t la projection du diviseur sur son image et u l'inclusion de cette image dans Q , on obtient donc $\tau_*(k_*(x) \cup k_*(y)) = u_*(t_*(x \cup y \cup c_1(N)))$. Or d'après la formule de projection $t_*(x \cup y \cup c_1(N)) = x \cup y \cup t_*(c_1(N))$ (car les classes de cohomologie x et y proviennent de l'image) et, pour des raisons de degré, $t_*(c_1(N))$ est non nul lorsque l'image du diviseur est une courbe et vaut dans ce cas -2 d'après 4.2.15. Ainsi, le cup produit est non nul lorsque le diviseur est du type E_g^i et vaut alors $-2(i_i)_*(x \cup y)$. \square

4.5 Calcul de l'anneau $H_o^*(Q)$

Dans cette section, nous donnons une méthode de calcul de l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(Q)$ du quotient global Q . On utilise la description de l'anneau de cohomologie orbifold du quotient d'une variété lisse par un groupe abélien effectuée dans la section E.3 en appendice. Nous commençons par donner une description de l'espace vectoriel gradué $H_o^*(Q)$. En général, cet espace vectoriel est naturellement somme directe de $H^*(Q)$ et d'un espace vectoriel provenant des secteurs tordus. Nous appellerons éléments tordus

les éléments de ce dernier espace vectoriel . Soit g un élément non nul de G_i . Alors S_i est une composante connexe de X^g/G et $a(g, S_i) = 1$ donc on dispose de F_g^i , un élément tordu de degré 2. Soit g un élément de G_j tel que $a(g^{-1}, P_j) = 2$. Alors P_j est une composante connexe de X^g/G et $a(g, P_j) = 1$, donc on dispose de F_g^j , un élément tordu de degré 2. On appellera diviseurs orbifold les éléments F_g^i et F_g^j définis ci-dessus. Les deux propositions suivantes décrivent $H_o^*(Q)$ en tant qu'espace vectoriel gradué.

Proposition 4.5.1. Les diviseurs orbifold F_g^i, F_g^j forment une base des éléments tordus de degré 2. Le cup produit orbifold induit une dualité entre les éléments tordus de degré 2 et 4. On notera $F_g^{i\vee}, F_g^{j\vee}$ les éléments de la base des éléments tordus de degré 4 obtenue par dualité.

Proposition 4.5.2. En reprenant les notations précédentes, $H_o^*(Q)$ est donné en tant qu'espace vectoriel gradué par :

$$H_o^*(Q) = H^*(Q) \oplus (\oplus H^*(S_i)F_g^i) \oplus (\oplus \mathbb{Q}F_g^j) \oplus (\oplus \mathbb{Q}F_g^{j\vee})$$

De plus, on dispose des relations $[S_i]F_g^i = 1/n_i F_{g^{-1}}^{i\vee}$.

Démonstration de 4.5.1 et 4.5.2. Commençons par appliquer la proposition E.3.1 en appendice afin de déterminer $H_o^*(Q)$ en tant qu'espace vectoriel gradué. Soit g un élément non nul de G . S_i est une composante connexe de X^g/G lorsque g est un élément de G_i . Dans ce cas $a(g, S_i) = 1$ et on a défini un élément formel F_g^i de degré 2. P_j est une composante connexe de X^g/G lorsque g est un élément de G_j tel que $a(g^{-1}, P_j) = 2$ ou $a(g, P_j) = 2$. Dans le premier cas, $a(g, P_j) = 1$ et on a défini un élément formel F_g^j de degré 2. Dans le second cas, $a(g, P_j) = 2$ et on définit un élément formel G_g^j de degré 4. D'après la proposition E.3.1 en appendice, on dispose de la description suivante de $H_o^*(Q)$ en tant qu'espace vectoriel gradué :

$$H_o^*(Q) = H^*(Q) \oplus (\oplus H^*(S_i)F_g^i) \oplus (\oplus \mathbb{Q}F_g^j) \oplus (\oplus \mathbb{Q}G_g^j)$$

En particulier les diviseurs orbifold forment une base des éléments tordus de degré 2. Puisque X est compact, le cup produit orbifold induit une dualité orbifold $(,)_o$ entre $H_o^2(Q)$ et $H_o^4(Q)$. Or l'espace vectoriel $H_o^2(Q)$ (resp. $H_o^4(Q)$) est somme directe de $H^2(Q)$ (resp. $H^4(Q)$) avec les éléments tordus de degré 2 (resp. 4). De plus, pour des raisons de secteur, l'espace vectoriel $H^2(Q)$ (resp. $H^4(Q)$) est orthogonal (relativement à la dualité orbifold) aux éléments tordus de degré 4 (resp. 2). Ainsi la dualité orbifold induit d'une part une dualité entre les éléments tordus de degrés 2 et 4 et d'autre part une dualité entre $H^2(Q)$ et $H^4(Q)$.

En appliquant la formule particulière de la proposition E.4.1, on obtient que les seules paires orbifold non nulles entre des éléments tordus de degré 2 ou 4 sont $([S_i]F_g^i, F_{g^{-1}}^i)_o = 1/n_i$ et $(G_g^j, F_{g^{-1}}^j)_o = 1/n_j$. On en déduit les relations $[S_i]F_g^i = 1/n_i F_{g^{-1}}^{i\vee}$ et $G_g^j = 1/n_j F_{g^{-1}}^{j\vee}$. Les propositions 4.5.1 et 4.5.2 correspondent exactement à ce que nous venons de prouver. \square

Nous allons voir que le cup produit orbifold dépend essentiellement de la manière dont s'intersectent les diviseurs orbifold. On commence donc par calculer leurs nombres d'intersections. Le nombre d'intersections $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$ est le cup produit orbifold des trois diviseurs orbifold, qui est un élément de $H_0^6(Q) = \mathbb{Q}$. De manière à formuler simplement le calcul du nombre d'intersections, nous introduisons ici dans notations inverses des précédentes. Pour un diviseur orbifold F , on définit l'image de F que l'on note $\tau(F)$ comme étant la courbe S_i si $F = F_g^i$ et le point P_j si $F = F_g^j$. À chaque diviseur orbifold F , on associe $g(F)$ l'élément du groupe G défini par $g(F) = g$ lorsque $F = F_g^i$ ou $F = F_g^j$. Le nombre d'intersections de trois diviseurs F_1, F_2 et F_3 n'est pas nul lorsque $g(F_1) \cdot g(F_2) \cdot g(F_3) = 1$. L'intersection des images des diviseurs orbifold est soit vide, soit quelques points, soit une courbe. Nous allons déterminer le nombre d'intersections de trois diviseurs orbifold selon l'intersection de leurs images. Si l'intersection des images est vide, le nombre d'intersections est nul. La proposition suivante calcule le nombre d'intersections dans le cas où l'intersection des images est quelques points :

Proposition 4.5.3. En reprenant les notations précédentes, on considère F_1, F_2, F_3 trois diviseurs orbifold tels que $g(F_1) \cdot g(F_2) \cdot g(F_3) = 1$ et dont l'intersection des images est quelques points. Alors le nombre d'intersections de ces diviseurs est donnée par la formule suivante :

$$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = \sum_{j|P_j \in \tau(F_1) \cap \tau(F_2) \cap \tau(F_3)} 1/n_j$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer E.4.2 en remarquant que les fibrés obstruction sont de rang 0, pour des raisons de degré. \square

Il reste à calculer le nombre d'intersections de diviseurs orbifold dont l'intersection des images est une courbe, disons S_i . Dans ce cas, les trois diviseurs sont F_g^i, F_h^i et F_k^i . Ceci est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.5.4. En reprenant les notations précédentes, on considère trois diviseurs orbifold F_g^i, F_h^i et F_k^i avec $ghk = 1$. Alors le nombre d'intersections de ces diviseurs est donné par la formule suivante :

$$F_g^i \cdot F_h^i \cdot F_k^i = \begin{cases} (c_i/n)c_1(N_{C_i}^y) & \text{si } g + h + k = n_i \\ (c_i/n)c_1(N_{C_i}^x) & \text{si } g + h + k = 2n_i \end{cases}$$

(Dans la formule ci-dessus, C_i est l'image réciproque de S_i par le quotient, c_i est le nombre de composantes connexes de C_i et les fibrés $N_{C_i}^x, N_{C_i}^y$ sont définis dans 4.3.7)

Démonstration. D'après E.4.2, nous avons à déterminer le fibré d'obstruction au-dessus de C_i . Ce fibré d'obstruction, que nous notons F , a déjà été

calculé par Perroni ([Per] 3.15). Nous reprenons ici son calcul en l'adaptant à notre cadre. Notons H le sous-groupe de G_i engendré par g et h . On peut alors définir un revêtement Σ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de groupe de galois H et ramifié en $0, 1, \infty$ en suivant la construction 1.9 de [FG03]. Le fibré d'obstruction est alors $F = (H^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma) \otimes N_{C_i})^H$ d'après la proposition 1.11 de [FG03]. De manière très formelle Σ s'étend en un revêtement C sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de groupe de galois G_i . Le fibré d'obstruction est alors $F = (H^1(C, \mathcal{O}_C) \otimes N_{C_i})^{G_i}$. En appliquant la proposition 4.3.7, on obtient l'expression suivante :

$$F = H^1(C, \mathcal{O}_C)^x \otimes N_{C_i}^y \oplus H^1(C, \mathcal{O}_C)^y \otimes N_{C_i}^x$$

Le revêtement C est un quotient en représentation régulière de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ d'après 2.2.2. Il est donc donné par un faisceau d'algèbres \mathcal{C} sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont la décomposition isotypique fournit des fibrés en droites \mathcal{C}^χ indexés par les caractères χ de G_i . On en déduit la formule

$$F = H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{C}^x) \otimes N_{C_i}^y \oplus H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{C}^y) \otimes N_{C_i}^x$$

En utilisant la formule 2.18 de [Par91], on peut montrer que \mathcal{C}^x et \mathcal{C}^y sont isomorphes à $\mathcal{O}(-(3n_i - g - h - k)/n_i)$ et $\mathcal{O}(-(g + h + k)/n_i)$. Or la cohomologie des fibrés sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est bien connue : on dispose des égalités $H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}(-1)) = 0$ et $H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}(-2)) = \mathbb{C}$. Donc le fibré d'obstruction est $F = N_{C_i}^y$ lorsque $g+h+k = n_i$ et $F = N_{C_i}^x$ lorsque $g+h+k = 2n_i$. \square

Nous allons maintenant calculer le produit orbifold \cup_o . En général, l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(Q)$ est une algèbre sur l'anneau de cohomologie classique $H^*(Q)$. De plus, le produit d'un élément de $H^*(Q)$ avec un élément tordu se calcule simplement par restriction. De manière explicite, on a la proposition suivante :

Proposition 4.5.5. En reprenant les notations précédentes, le cup produit orbifold d'un élément q de $H^*(Q)$ avec un élément tordu est donné par l'une des trois formules suivantes :

$$q \cup_o (\alpha F_g^i) = (q|_{S_i} \cup \alpha) F_g^i$$

$$q \cup_o F_g^j = q|_{P_j} F_g^j$$

$$q \cup_o F_g^{j\vee} = q|_{P_j} F_g^{j\vee}$$

Remarquons que dans la première formule, le résultat est non nul lorsque $\deg(q) + \deg(\alpha) \leq 2$. Dans les deux autres formules, le résultat est non nul lorsque q est de degré nul.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 4.5.3 en remarquant que le fibré d'obstruction est de rang 0 pour des raisons de degré. \square

Nous avons en fait à calculer le produit orbifold d'éléments tordus. Vu la graduation, nous avons à calculer les produits d'éléments tordus de degrés $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ et $(3, 3)$. Le cup produit orbifold d'éléments tordus de degrés $(2, 4)$ est déterminé par le produit d'éléments des bases duales, qui est évident. Le produit d'éléments tordus de degrés $(2, 2)$ est le produit de deux diviseurs orbifold. La proposition suivante calcule le produit de deux diviseurs orbifold :

Proposition 4.5.6. En reprenant les notations précédentes, le cup produit orbifold de F_g^i et F_{g-1}^i est donné par la formule :

$$(F_g^i) \cup_o (F_{g-1}^i) = 1/n_i(i_i)_*(1)$$

Les autres cup produit de diviseurs orbifold sont donnés par la formule :

$$F_1 \cup_o F_2 = \sum_F (F_1 \cdot F_2 \cdot F) F^*$$

Démonstration. La première formule se déduit en appliquant la formule particulière de E.4.1. Pour la seconde formule, on remarque que pour des raisons de secteur, $F_1 \cup_o F_2$ est combinaison linéaire des éléments de la base duale des diviseurs orbifold. Les coefficients de cette combinaison sont par définition des nombres d'intersections. \square

Pour calculer l'anneau de cohomologie orbifold, il reste à déterminer le cup produit orbifold de deux éléments tordus de degrés $(2, 3)$ ou $(3, 3)$. Ceci est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.5.7. En reprenant les notations précédentes, pour tout couple (α, β) d'éléments de $H^*(S_i)$ de degrés $(0, 1)$ ou $(1, 1)$ on a la formule :

$$(\alpha F_g^i) \cup_o (\beta F_{g-1}^i) = 1/n_i(i_i)_*(\alpha \cup \beta)$$

Les autres produits d'éléments tordus de degrés $(2, 3)$ ou $(3, 3)$ sont nuls.

Démonstration. Remarquons qu'il n'y a pas d'éléments tordus en degré 5. Donc, pour des raisons de secteur, les seuls produits non nuls d'éléments tordus de degrés $(2, 3)$ ou $(2, 3)$ sont du type $(\alpha F_g^i) \cup_o (\beta F_{g-1}^i)$. On calcule ces produits en utilisant la formule particulière de la proposition E.4.1. \square

4.6 Comparaison des anneaux

Dans cette section, nous donnons quelques indications concernant la comparaison des anneaux $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$. Les théorèmes 4.2.4 et 4.5.2 fournissent des descriptions formellement identiques des espaces vectoriels gradués $H_o^*(Q)$ et $H^*(Y)$, d'où le théorème suivant :

Théorème 4.6.1. Les espaces vectoriels gradués $H_o^*(Q)$ et $H^*(Y)$ sont isomorphes.

Nous pouvons également remarquer, à partir des calculs explicites des deux sections précédentes, que le cup produit et le cup produit orbifold se ressemblent. Selon la conjecture de Ruan, il existe un isomorphisme entre $H^*(Y)$ et $H_o^*(Q)$ tel que le cup produit orbifold s'identifie au cup produit modifié par une déformation quantique. Des considérations de degré sur les invariants de la déformation quantique nous indiquent que cet isomorphisme devrait être gradué. De plus, la propriété de classe fondamentale vérifiée par ces invariants montre que cet isomorphisme devrait respecter les dualités de Poincaré orbifold et classique.

En identifiant les descriptions formelles de $H_o^*(Q)$ et $H^*(Y)$ (voir 4.2.4 et 4.5.2), on obtient un isomorphisme d'espace vectoriel gradué. Cependant cet isomorphisme ne respecte pas les dualités de Poincaré orbifold et classique (encore d'après 4.2.4 et 4.5.2). Cet isomorphisme ne peut donc être l'isomorphisme de la conjecture de Ruan.

Vu la description des espaces vectoriels et des structures produit, nous pensons que l'isomorphisme de la conjecture de Ruan est donné de la forme suivante. Pour chaque i , on considère un changement de variable linéaire entre les F_g^i et les E_g^i donné par Perroni (voir [Per] 1.9). Ceci induit un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\oplus_g H^*(S_i)F_g^i$ et $\oplus_g H^*(S_i)E_g^i$. Pour chaque j , on considère un changement de variable linéaire entre les F_g^j et les E_g^j . Ceci induit un isomorphisme entre les espaces vectoriels $(\oplus_g \mathbb{Q}F_g^j) \oplus (\oplus_g \mathbb{Q}F_g^{j^\vee})$ et $(\oplus_g \mathbb{Q}E_g^j) \oplus (\oplus_g \mathbb{Q}E_g^{j^\vee})$. On obtient alors un isomorphisme entre $H_o^*(Q)$ et $H^*(Y)$ qui est gradué et respecte les dualités de Poincaré orbifold et classique. Ainsi, l'isomorphisme de la conjecture de Ruan devrait être de cette forme.

4.7 Exemple

Dans cette section, nous calculons les anneaux de cohomologie $H_o^*(Q)$ et $H^*(Y)$ sur un exemple de quotient d'une variété abélienne et avec la résolution donnée par le schéma de Hilbert. La liste d'exemples de quotients d'une variété abélienne est donnée en appendice F. L'exemple que nous considérons ici est celui du premier tableau de la proposition F.3.2. On considère le sous-groupe G de $(\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$ cyclique d'ordre 6 engendré par l'élément $g = (j, -1, -j^2)$ de $(\mathbb{C}^*)^3$ ($j = e^{2i\pi/3}$). On considère la variété abélienne de dimension trois $X = E_j \times E_\tau \times E_j$, où E_τ est une courbe elliptique quelconque. X est le quotient de \mathbb{C}^3 par le réseau $(\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z})$ qui est stable sous l'action de G . Ainsi G peut être vu comme un sous-groupe de $\text{Aut}_0(X)$ (automorphismes fixant le neutre) dont l'action préserve le volume. On note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique et on considère la résolution crépante $Y = G\text{-Hilb}^d(X)$.

Remarquons que G est cyclique d'ordre 6 donc ses sous-groupes propres sont le sous-groupe d'ordre 2 engendré par g^3 et le sous-groupe d'ordre 3 engendré par g^2 . Les éléments g^3 et g^2 vus comme éléments de $(\mathbb{C}^*)^3$ sont égaux à $(1, -1, -1)$ et $(j^2, 1, j)$. Le lieu fixe de X sous l'action de g^3 est le produit $E_j \times (E_\tau)^{-1} \times (E_j)^{-1}$. Or, les lieux fixes de E_τ et E_j sous l'action de -1 sont $(E_\tau)^{-1} = \{0, 1/2, \tau/2, (1 + \tau)/2\}$ et $(E_j)^{-1} = \{0, 1/2, j/2, (1 + j)/2\}$. Remarquons que g^2 agit trivialement sur $(E_\tau)^{-1}$ tandis qu'il agit sur $(E_j)^{-1}$ en fixant 0 et en permutant les trois autres éléments. Pour chaque élément α de $(E_\tau)^{-1}$, on considère donc les courbes $C_{\alpha,1} = E_j \times \{\alpha\} \times \{0\}$ et $C_{\alpha,2} = E_j \times \{\alpha\} \times \{1/2, j/2, (1+j)/2\}$. On considère également la courbe $S_{\alpha,\star}$ quotient de $C_{\alpha,\star}$ sous l'action de G ($\star = 1, 2$). Le lieu fixe de X sous l'action de g^2 est le produit $(E_j)^j \times E_\tau \times (E_j)^j$. Or, le lieu fixe de E_j sous l'action de j est $(E_j)^j = \{0, (1+2j)/3, (2+j)/3\}$. Remarquons que g^3 agit trivialement sur $(E_j)^j$ dans le premier facteur tandis qu'il agit sur $(E_j)^j$ dans le troisième facteur en fixant 0 et en permutant les deux autres éléments. Pour chaque élément β de $(E_j)^j$, on considère donc les courbes $C_{\beta,1} = \{\beta\} \times E_\tau \times \{0\}$ et $C_{\beta,2} = \{\beta\} \times E_\tau \times \{(1+2j)/3, (j+2)/3\}$. On considère également la courbe $S_{\beta,\star}$ quotient de $C_{\beta,\star}$ sous l'action de G ($\star = 1, 2$). Le lieu fixe de X sous l'action de g est l'intersection des lieux fixes des actions de g^2 et g^3 , i.e. $(E_j)^j \times (E_\tau)^{-1} \times \{0\}$. On note $O_{\alpha,\beta}$ les points de ce lieu fixe. On note également $P_{\alpha,\beta}$ les points correspondants dans le quotient.

Dans le quotient Q , le lieu singulier est donc réunion de 14 courbes. Les 4 courbes $S_{\alpha,2}$ sont des composantes connexes du lieu singulier. g^2 agit au-dessus de $S_{\alpha,2}$ en permutant trois copies de E_j . En particulier $S_{\alpha,2}$ est isomorphe à E_j . Les 3 courbes $S_{\beta,2}$ sont des composantes connexes du lieu singulier. g^3 agit au-dessus de $S_{\beta,2}$ en permutant deux copies de E_τ . En particulier, $S_{\beta,2}$ est isomorphe à E_τ . Les courbes restantes du lieu singulier forment une composante connexe. Les 4 courbes $S_{\alpha,1}$ ne se rencontrent pas entre-elles, les 3 courbes $S_{\beta,1}$ ne se rencontrent pas entre-elles, et chaque courbe $S_{\alpha,1}$ rencontre chaque courbe $S_{\beta,1}$ en le point $P_{\alpha,\beta}$. g^2 agit au-dessus de $S_{\alpha,1}$ comme j^2 agit sur E_j . En particulier, $S_{\alpha,1}$ est isomorphe à $(E_j)/\langle j \rangle$. g^3 agit au-dessus de $S_{\beta,1}$ comme -1 agit sur E_τ . En particulier, $S_{\beta,1}$ est isomorphe à $(E_\tau)/\langle -1 \rangle$.

Au voisinage des $S_{\alpha,1} \setminus \{P_{\alpha,\beta}\}$ et des $S_{\alpha,2}$, nous avons des singularités A_1 -transversales. Au voisinage des $S_{\beta,1} \setminus \{P_{\alpha,\beta}\}$ et des $S_{\beta,2}$, nous avons des singularités A_2 -transversales. Y est donc déterminée par sa description au dessus d'un voisinage de chaque point $P_{\alpha,\beta}$, qui est donnée par la figure 4.8. La résolution Y comprend 32 diviseurs exceptionnels. Le diviseur exceptionnel d'image $S_{\alpha,\star}$ est noté $E_{\alpha,\star}^3$ (le 3 correspond à g^3). Les deux diviseurs exceptionnels d'images $S_{\beta,\star}$ sont notés $E_{\beta,\star}^2$, $E_{\beta,\star}^4$ (les 2 et 4 correspondent à g^2 et g^4). Le diviseur exceptionnel d'image $P_{\alpha,\beta}$ est noté $E_{\alpha,\beta}^1$ (le 1 correspond à g).

Nous allons commencer par calculer l'anneau de cohomologie $H^*(Y)$ de

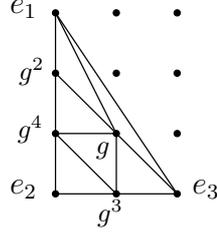


FIG. 4.8 –

la résolution. Par application du théorème 4.2.4, $H^*(Y)$ est décrit en tant qu'espace vectoriel gradué par la somme directe suivante :

$$H^*(Q) \oplus (\oplus H^*(S_{\alpha,*})E_{\alpha,*}^3) \oplus (\oplus H^*(S_{\beta,*})(E_{\beta,*}^2 \oplus E_{\beta,*}^4)) \oplus (\oplus (\mathbb{Q}E_{\alpha,\beta}^1 \oplus E_{\alpha,\beta}^{1\vee}))$$

Explicitons les groupes de cohomologie apparaissant dans cette somme directe. Commençons par expliciter $H^*(Q)$. La cohomologie de X , produit des trois courbes elliptiques E_j, E_τ, E_j , est bien connue :

$$H^*(X) = \wedge^*(\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z})^\vee \otimes \wedge^*(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})^\vee \otimes \wedge^*(\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z})^\vee$$

D'après la proposition E.1.12, on dispose de l'égalité $H^*(Q) = H^*(X)^G$. On peut donc expliciter $H^*(Q)$. On considère les trois éléments suivant de la cohomologie de Q en degré 2 :

$$f_1 = d1 \wedge dj \otimes 1 \otimes 1$$

$$f_2 = 1 \otimes d1 \wedge d\tau \otimes 1$$

$$f_3 = 1 \otimes 1 \otimes d1 \wedge dj$$

On considère les deux éléments suivant de la cohomologie de Q en degré 3 :

$$s = d1 \otimes d1 \otimes d1 - d1 \otimes d1 \otimes dj - dj \otimes d1 \otimes d1$$

$$t = dj \otimes d1 \otimes dj - d1 \otimes d1 \otimes dj - dj \otimes d1 \otimes d1$$

$$u = d1 \otimes d\tau \otimes d1 - d1 \otimes d\tau \otimes dj - dj \otimes d\tau \otimes d1$$

$$v = dj \otimes d\tau \otimes dj - d1 \otimes d\tau \otimes dj - dj \otimes d\tau \otimes d1$$

L'espace vectoriel $H^*(Q)$ est de dimension 12 et les éléments suivant en forment une base : $1, f_1, f_2, f_3, s, t, u, v, f_2 \cup f_3, f_1 \cup f_2, f_1 \cup f_3$ et $[Q]$. Rappelons que la courbe $S_{\alpha,1}$ est isomorphe à $(E_j)/\langle j \rangle$. En appliquant le proposition E.1.12, on montre que $1, [S_{\alpha,1}]$ est une base de $H^*(S_{\alpha,1})$. En particulier, la courbe $S_{\alpha,1}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Rappelons de même que $S_{\beta,1}$ est isomorphe à $(E_\tau)/\langle -1 \rangle$. En appliquant le proposition E.1.12, on montre que $1, [S_{\beta,1}]$ est une base de $H^*(S_{\beta,1})$. En particulier, la courbe $S_{\beta,1}$

est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La courbe $S_{\alpha,2}$ est isomorphe à E_j . Donc les éléments $1, d1, dj, [S_{\alpha,2}]$ forment une base de $H^*(S_{\alpha,2})$. La courbe $S_{\beta,2}$ est isomorphe à E_τ . Donc les éléments $1, d1, d\tau, [S_{\beta,2}]$ forment une base de $H^*(S_{\beta,2})$. D'après ce qui précède, l'espace vectoriel $H^*(Y)$ a pour dimension 96 et on dispose d'une base de cet espace vectoriel.

Il nous reste à déterminer le cup produit. Nous allons commencer par déterminer les nombres d'intersections des diviseurs exceptionnels en suivant la section 4.3. Rappelons que l'intersection des images des trois diviseurs est soit vide, soit quelques points, soit une courbe. Dans le cas où l'intersection des images est vide, le nombre d'intersections est nul. Dans le cas où l'intersection des images est quelques points, on applique la proposition 4.3.1. Les nombres d'intersections non triviaux sont alors les suivants :

$$\begin{aligned}
E_{\beta,1}^2 \cdot E_{\beta,1}^4 \cdot E_{\alpha,\beta}^1 &= 1 \\
E_{\beta,1}^4 \cdot E_{\alpha,1}^3 \cdot E_{\alpha,\beta}^1 &= 1 \\
(E_{\beta,1}^4)^2 \cdot E_{\alpha,1}^3 &= 1 - 2 = -1 \\
(E_{\alpha,1}^3)^2 \cdot E_{\beta,1}^4 &= 1 - 2 = -1 \\
(E_{\alpha,\beta}^1)^2 \cdot E_{\beta,1}^2 &= 2 - 2 = 0 \\
(E_{\beta,1}^2)^2 \cdot E_{\alpha,\beta}^1 &= 0 - 2 = -2 \\
(E_{\alpha,\beta}^1)^2 \cdot E_{\beta,1}^4 &= 1 - 2 = -1 \\
(E_{\beta,1}^4)^2 \cdot E_{\alpha,\beta}^1 &= 1 - 2 = -1 \\
(E_{\alpha,\beta}^1)^2 \cdot E_{\alpha,1}^3 &= 1 - 2 = -1 \\
(E_{\alpha,1}^3)^2 \cdot E_{\alpha,\beta}^1 &= 1 - 2 = -1 \\
(E_{\alpha,\beta}^1)^3 &= 12 - 5 = 7
\end{aligned}$$

Dans le cas où l'intersection des images des trois diviseurs est une courbe, on conclut à l'aide de la proposition $H^*(Y)$ 4.3.5 et 4.3.11. Commençons par appliquer la proposition 4.3.5. Pour cela, nous devons calculer la première classe de Chern des fibrés normaux $M_{\alpha,\star}$ et $M_{\beta,\star}$ définis dans 4.3.3 par la formule d'adjonction. Le fibré canonique de Q est $\omega_Q = \mathcal{O}_Q$ puisque celui de X est $\omega_X = \mathcal{O}_X$. Puisque $S_{\alpha,1}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, son fibré canonique est $\omega_{S_{\alpha,1}} = \mathcal{O}(-2)$ et donc $c_1(M_{\alpha,1}) = -2$. Puisque $S_{\beta,1}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, son fibré canonique est $\omega_{S_{\beta,1}} = \mathcal{O}(-2)$ et donc $c_1(M_{\beta,1}) = -2$. Puisque $S_{\alpha,2}$ est isomorphe à E_j , son fibré canonique est $\omega_{S_{\alpha,2}} = \mathcal{O}_{S_{\alpha,2}}$ et donc $c_1(M_{\alpha,2}) = 0$. Puisque $S_{\beta,2}$ est isomorphe à E_τ , son fibré canonique est $\omega_{S_{\beta,2}} = \mathcal{O}_{S_{\beta,2}}$ et donc $c_1(M_{\beta,2}) = 0$. On déduit alors de la proposition 4.3.5 les nombres d'intersections suivants :

$$(E_{\alpha,1}^3)^3 = (-4) \times (-2) + 3 \times (-1) = 5$$

$$\begin{aligned}
(E_{\beta,1}^2)^3 &= (-4) \times (-2) + 4 \times 0 = 8 \\
(E_{\beta,1}^4)^3 &= (-4) \times (-2) + 4 \times (-1) = 4 \\
(E_{\alpha,2}^3)^3 &= (-4) \times 0 = 0 \\
(E_{\beta,2}^2)^3 &= (-4) \times 0 = 0 \\
(E_{\beta,2}^4)^3 &= (-4) \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Appliquons la proposition 4.3.11. Pour cela, nous devons déterminer les classes de Chern des fibrés obtenus par décomposition isotypique des fibrés normaux des courbes $C_{\alpha,\star}$ et $C_{\beta,\star}$ dans X . Or, puisque nous travaillons sur un produit de courbes elliptiques, ces fibrés sont triviaux. On déduit de la proposition 4.3.11 les nombres d'intersections suivantes :

$$\begin{aligned}
(E_{\beta,1}^2)^2 \times (E_{\beta,1}^4) &= -2 - 0 + 3 \times 4 \times (0/6) = -2 \\
(E_{\beta,1}^4)^2 \times (E_{\beta,1}^2) &= -2 - 0 + 3 \times 4 \times (1/6) = 0 \\
(E_{\beta,2}^2)^2 \times (E_{\beta,2}^4) &= 0 - 0 = 0 \\
(E_{\beta,2}^4)^2 \times (E_{\beta,2}^2) &= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

Revenons au calcul du cup produit de $H^*(Y)$. Nous suivons la section 4.4. Vu la base de $H^*(Q)$, le cup produit de $H^*(Q)$ est déterminé par les relations suivantes $[Q] = 6f_1 \cup f_2 \cup f_3$, $s^2 = t^2 = s \cup t = u^2 = v^2 = u \cup v = 0$, $s \cup u = t \cup v = -2f_1 \cup f_2 \cup f_3$ et $s \cup v = t \cup u = -f_1 \cup f_2 \cup f_3$. Nous allons maintenant déterminer les produits entre les éléments de $H^*(Q)$ et $H^*(E)/H^*(S)$ en appliquant 4.4.1. Pour cela, on commence par démontrer que, parmi les restrictions des éléments de cohomologie f_1, f_2, f_3 aux courbes $S_{\alpha,\star}$ et $S_{\beta,\star}$, les non triviales sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
(f_1)|_{S_{\alpha,1}} &= 1/3[S_{\alpha,1}] \\
(f_1)|_{S_{\alpha,2}} &= [S_{\alpha,2}] \\
(f_2)|_{S_{\beta,1}} &= 1/2[S_{\beta,1}] \\
(f_2)|_{S_{\beta,2}} &= [S_{\beta,2}]
\end{aligned}$$

On démontre ceci en repassant par les courbes $C_{\alpha,\star}$ et $C_{\beta,\star}$ dans X . On déduit alors de la proposition 4.4.1 que les produits non triviaux d'un élément de la base de $H^*(Q)$ distincts de 1 avec un élément de la base de $H^*(E)/H^*(S)$ sont les suivants :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,1}^3 \cup f_1 &= 1/3[S_{\alpha,1}]E_{\alpha,1}^3 \\
E_{\alpha,2}^3 \cup f_1 &= [S_{\alpha,2}]E_{\alpha,2}^3 \\
E_{\beta,1}^2 \cup f_2 &= 1/2[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\beta,1}^2 \cup f_2 &= [S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 \\
E_{\beta,1}^4 \cup f_2 &= 1/2[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 \\
E_{\beta,2}^4 \cup f_2 &= [S_{\beta,2}]E_{\beta,2}^4
\end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer le produit d'éléments de $H^*(E)/H^*(S)$. Pour le produit d'éléments de degrés (2, 4), il suffit d'appliquer la dualité ainsi que les relations données dans 4.2.4. On obtient que les produits non triviaux entre éléments de degré (2, 4) de la base sont les suivants :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}^1 \cup E_{\alpha,\beta}^{1\vee} &= 1 \\
([S_{\alpha,\star}]E_{\alpha,\star}^3) \cup E_{\alpha,\star}^3 &= -2 \\
([S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^2) \cup E_{\beta,\star}^2 &= -2 \\
([S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^4) \cup E_{\beta,\star}^4 &= -2 \\
([S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^2) \cup E_{\beta,\star}^4 &= 1 \\
([S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^4) \cup E_{\beta,\star}^2 &= 1
\end{aligned}$$

Pour les produits d'éléments de degrés (2, 2), on applique 4.4.2 afin d'obtenir les produits des diviseurs exceptionnels exprimé dans la base duale des diviseurs exceptionnels. Pour cela, en notant $i_{\alpha,\star}$ et $i_{\beta,\star}$ les inclusions de $S_{\alpha,\star}$ et $S_{\beta,\star}$ dans Q , on commence par calculer :

$$\begin{aligned}
(i_{\alpha,1})_*(1) &= 2f_2 \cup f_3 \\
(i_{\alpha,2})_*(1) &= 6f_2 \cup f_3 \\
(i_{\beta,1})_*(1) &= 3f_1 \cup f_3 \\
(i_{\beta,2})_*(1) &= 6f_1 \cup f_3
\end{aligned}$$

On effectue ce calcul en repassant par les courbes $C_{\alpha,\star}$ et $C_{\beta,\star}$ dans X . On déduit de 4.4.2 que les seuls produits de diviseurs exceptionnels non triviaux sont les suivants :

$$\begin{aligned}
(E_{\alpha,1}^3)^2 &= -4f_2 \cup f_3 + 5E_{\alpha,1}^{3\vee} + \sum_{\beta} (-E_{\beta,1}^{4\vee} - E_{\alpha,\beta}^{1\vee}) \\
(E_{\beta,1}^2)^2 &= -6f_1 \cup f_3 + 8E_{\beta,1}^{2\vee} - 2E_{\beta,1}^{4\vee} + \sum_{\alpha} (-2E_{\alpha,\beta}^{1\vee}) \\
(E_{\beta,1}^4)^2 &= -6f_1 \cup f_3 + 4E_{\beta,1}^{4\vee} + \sum_{\alpha} (-E_{\alpha,1}^{3\vee} - E_{\alpha,\beta}^{1\vee}) \\
E_{\beta,1}^2 \cup E_{\beta,1}^4 &= 3f_1 \cup f_3 - 2E_{\beta,1}^{2\vee} + \sum_{\alpha} E_{\alpha,\beta}^{1\vee}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_{\alpha,2}^3)^2 &= -12f_2 \cup f_3 \\
(E_{\beta,2}^2)^2 &= -12f_1 \cup f_3 \\
(E_{\beta,2}^4)^2 &= -12f_1 \cup f_3 \\
(E_{\beta,2}^2) \cup (E_{\beta,2}^4) &= 6f_1 \cup f_3 \\
(E_{\alpha,\beta}^1)^2 &= 7E_{\alpha,\beta}^{1V} - E_{\alpha,1}^{3V} - E_{\beta,1}^{4V} \\
E_{\alpha,\beta}^1 \cup E_{\alpha,1}^3 &= -E_{\alpha,1}^{3V} + E_{\beta,1}^{4V} - E_{\alpha,\beta}^{1V} \\
E_{\alpha,\beta}^1 \cup E_{\beta,1}^2 &= -2E_{\beta,1}^{2V} + E_{\beta,1}^{4V} \\
E_{\alpha,\beta}^1 \cup E_{\beta,1}^4 &= E_{\alpha,1}^{3V} + E_{\beta,1}^{2V} - E_{\beta,1}^{4V} - E_{\alpha,\beta}^{1V} \\
E_{\beta,1}^4 \cup E_{\alpha,1}^3 &= -E_{\alpha,1}^{3V} - E_{\beta,1}^{4V} + E_{\alpha,\beta}^{1V}
\end{aligned}$$

Il nous faut exprimer le produit de deux diviseurs exceptionnels dans notre base. Pour cela, on inverse les relations de 4.2.4 pour obtenir

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\star}^{3V} &= -1/2[S_{\alpha,\star}]E_{\alpha,\star}^3 \\
E_{\beta,\star}^{2V} &= -2/3[S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^2 - 1/3[S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^4 \\
E_{\beta,\star}^{4V} &= -1/3[S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^2 - 2/3[S_{\beta,\star}]E_{\beta,\star}^4
\end{aligned}$$

On en déduit l'expression des produits non triviaux de diviseurs exceptionnels dans notre base :

$$\begin{aligned}
(E_{\alpha,1}^3)^2 &= -4f_2 \cup f_3 - 5/2[S_{\alpha,1}]E_{\alpha,1}^3 + \sum_{\beta} (1/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 + 2/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 - E_{\alpha,\beta}^{1V}) \\
(E_{\beta,1}^2)^2 &= -6f_1 \cup f_3 + -14/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^{2V} - 4/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 + \sum_{\alpha} (-2E_{\alpha,\beta}^{1V}) \\
(E_{\beta,1}^4)^2 &= -6f_1 \cup f_3 - 4/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 - 8/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 + \sum_{\alpha} (1/2[S_{\alpha,1}]E_{\alpha,1}^3 - E_{\alpha,\beta}^{1V}) \\
E_{\beta,1}^2 \cup E_{\beta,1}^4 &= 3f_1 \cup f_3 + 4/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 + 2/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 + \sum_{\alpha} E_{\alpha,\beta}^{1V} \\
(E_{\alpha,2}^3)^2 &= -12f_2 \cup f_3 \\
(E_{\beta,2}^2)^2 &= -12f_1 \cup f_3 \\
(E_{\beta,2}^4)^2 &= -12f_1 \cup f_3 \\
(E_{\beta,2}^2) \cup (E_{\beta,2}^4) &= 6f_1 \cup f_3 \\
(E_{\alpha,\beta}^1)^2 &= 1/2[S_{\alpha,1}]E_{\alpha,1}^3 + 1/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 + 2/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 + 7E_{\alpha,\beta}^{1V} \\
E_{\alpha,\beta}^1 \cup E_{\alpha,1}^3 &= 1/2[S_{\alpha,1}]E_{\alpha,1}^3 - 1/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 - 2/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 - E_{\alpha,\beta}^{1V}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}^1 \cup E_{\beta,1}^2 &= [S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 \\
E_{\alpha,\beta}^1 \cup E_{\beta,1}^4 &= -1/2E_{\alpha,1}^{3\vee} - 1/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 + 1/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 - E_{\alpha,\beta}^{1\vee} \\
E_{\beta,1}^4 \cup E_{\alpha,1}^3 &= 1/2E_{\alpha,1}^{3\vee} + 1/3[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^2 + 1/2[S_{\beta,1}]E_{\beta,1}^4 + E_{\alpha,\beta}^{1\vee}
\end{aligned}$$

Il reste à calculer le produit d'éléments de degrés (2, 3) ou (3, 3). Puisque la cohomologie est nulle en degré 5, les seuls produits non nuls sont en degrés (3, 3). On déduit de la proposition 4.4.3 que les produits non triviaux d'éléments de la base en degré (3, 3) sont les suivants :

$$\begin{aligned}
(d1E_{\alpha,\star}^3) \cup (djE_{\alpha,\star}^3) &= -2 \\
(d1E_{\beta,\star}^2) \cup (d\tau E_{\beta,\star}^2) &= -2 \\
(d1E_{\beta,\star}^4) \cup (d\tau E_{\beta,\star}^4) &= -2 \\
(d1E_{\beta,\star}^2) \cup (d\tau E_{\beta,\star}^4) &= 1 \\
(d1E_{\beta,\star}^4) \cup (d\tau E_{\beta,\star}^2) &= 1
\end{aligned}$$

Nous avons calculé l'anneau de cohomologie $H^*(Y)$ de la résolution. Nous allons maintenant calculer l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(Q)$ du quotient. Nous suivons la section 4.5. En appliquant le théorème 4.5.2, $H_o^*(Q)$ est décrit en tant qu'espace vectoriel gradué par la somme directe suivante :

$$H^*(Q) \oplus (\oplus H^*(S_{\alpha,\star})F_{\alpha,\star}^3) \oplus (\oplus H^*(S_{\beta,\star})(F_{\beta,\star}^2 \oplus F_{\beta,\star}^4)) \oplus (\oplus (\mathbb{Q}F_{\alpha,\beta}^1 \oplus F_{\alpha,\beta}^{1\vee}))$$

Tout comme pour la cohomologie classique, l'espace vectoriel $H_o^*(Q)$ est donc de dimension 96 et on dispose d'une base de cet espace vectoriel.

Rappelons que les éléments $F_{\alpha,\star}^3$, $F_{\beta,\star}^2$, $F_{\beta,\star}^4$ et $F_{\alpha,\beta}^1$ sont appelés diviseurs orbifold. Nous commençons par déterminer le nombre d'intersections de trois diviseurs orbifold. L'intersection des images des diviseurs orbifold est soit vide, soit quelques points, soit une courbe. Si cette intersection est vide, le nombre d'intersections est nul. Si cette intersection est quelques points, on applique la proposition 4.5.3. On en déduit que, dans ce cas, les nombres d'intersections non triviaux sont les suivants :

$$\begin{aligned}
(F_{\alpha,\beta}^1)^2 \cdot F_{\beta,1}^4 &= 1/6 \\
F_{\alpha,1}^3 \cdot F_{\beta,1}^2 \cdot F_{\alpha,\beta}^1 &= 1/6
\end{aligned}$$

Dans le cas où l'intersection des images est une courbe, on applique 4.5.4 et on en déduit que le nombre d'intersections est nul.

Revenons au calcul du cup produit orbifold dans $H_o^*(Q)$. Le cup produit de $H^*(Q)$ a déjà été déterminé. On déduit de la proposition 4.5.5 que les

produits non triviaux d'un élément de la base $H^*(Q)$, distincts de 1, et d'un élément de la base tordu sont les suivants :

$$F_{\alpha,1}^3 \cup_o f_1 = 1/3[S_{\alpha,1}]F_{\alpha,1}^3$$

$$F_{\alpha,2}^3 \cup_o f_1 = [S_{\alpha,2}]F_{\alpha,2}^3$$

$$F_{\beta,1}^2 \cup_o f_2 = 1/2[S_{\beta,1}]F_{\beta,1}^2$$

$$F_{\beta,2}^2 \cup_o f_2 = [S_{\beta,2}]F_{\beta,2}^2$$

$$F_{\beta,1}^4 \cup_o f_2 = 1/2[S_{\beta,1}]F_{\beta,1}^4$$

$$F_{\beta,2}^4 \cup_o f_2 = [S_{\beta,2}]F_{\beta,2}^4$$

Il reste à calculer le cup produit orbifold des éléments tordus. En utilisant la dualité ainsi que les relations données en 4.5.2, on déduit que les produits non triviaux d'éléments tordus de degrés (2, 4) sont les suivants :

$$F_{\alpha,\beta}^1 \cup_o F_{\alpha,\beta}^{1\vee} = 1$$

$$F_{\alpha,\star}^3 \cup_o ([S_{\alpha,\star}]F_{\alpha,\star}^3) = 1/2$$

$$F_{\beta,\star}^4 \cup_o ([S_{\beta,\star}]F_{\beta,\star}^2) = 1/3$$

$$F_{\beta,\star}^2 \cup_o ([S_{\beta,\star}]F_{\beta,\star}^4) = 1/3$$

Par application de la proposition 4.5.6, les produits non triviaux de diviseurs orbifold sont les suivants :

$$(F_{\alpha,1}^3)^2 = 1/2 \times 2f_2 \cup f_3 = f_2 \cup f_3$$

$$(F_{\alpha,2}^3)^2 = 1/2 \times 6f_2 \cup f_3 = 3f_2 \cup f_3$$

$$F_{\beta,1}^2 \cup_o F_{\beta,1}^4 = 1/3 \times 3f_2 \cup f_3 = f_1 \cup f_3$$

$$F_{\beta,2}^2 \cup_o F_{\beta,2}^4 = 1/3 \times 6f_2 \cup f_3 = 2f_1 \cup f_3$$

$$(F_{\alpha,\beta}^1)^2 = 1/6F_{\beta,1}^{4\vee}$$

$$(F_{\alpha,\beta}^1) \cup_o F_{\beta,1}^4 = 1/6F_{\alpha,\beta}^{1\vee}$$

$$F_{\alpha,1}^3 \cup_o F_{\beta,1}^2 = 1/6F_{\alpha,\beta}^{1\vee}$$

$$F_{\alpha,1}^3 \cup_o F_{\alpha,\beta}^1 = 1/6F_{\beta,1}^{2\vee}$$

$$F_{\alpha,\beta}^1 \cup_o F_{\beta,1}^2 = 1/6F_{\alpha,1}^{3\vee}$$

Il nous faut exprimer le produit de deux diviseurs orbifold dans notre base. Pour cela, on inverse les relations de 4.5.2 pour obtenir

$$F_{\alpha,\star}^{3\vee} = 2[S_{\alpha,\star}]F_{\alpha,\star}^3$$

$$F_{\beta,\star}^{2\vee} = 3[S_{\beta,\star}]F_{\beta,\star}^4$$

$$E_{\beta,\star}^{4\vee} = 3[S_{\beta,\star}]F_{\beta,\star}^2$$

On en déduit l'expression des produits non triviaux de diviseurs exceptionnels dans notre base :

$$(F_{\alpha,1}^3)^2 = f_2 \cup f_3$$

$$(F_{\alpha,2}^3)^2 = 3f_2 \cup f_3$$

$$F_{\beta,1}^2 \cup_o F_{\beta,1}^4 = f_1 \cup f_3$$

$$F_{\beta,2}^2 \cup_o F_{\beta,2}^4 = 2f_1 \cup f_3$$

$$(F_{\alpha,\beta}^1)^2 = 1/2[S_{\beta,1}]F_{\beta,1}^4$$

$$(F_{\alpha,\beta}^1) \cup_o F_{\beta,1}^4 = 1/6F_{\alpha,\beta}^{1\vee}$$

$$F_{\alpha,1}^3 \cup_o F_{\beta,1}^2 = 1/6F_{\alpha,\beta}^{1\vee}$$

$$F_{\alpha,1}^3 \cup_o F_{\alpha,\beta}^1 = 1/2[S_{\beta,1}]F_{\beta,1}^2$$

$$F_{\alpha,\beta}^1 \cup_o F_{\beta,1}^2 = 1/3[S_{\alpha,1}]F_{\alpha,1}^{3\vee}$$

Il reste à calculer le cup produit orbifold d'éléments tordus de degrés (2, 3) ou (3, 3). Comme la cohomologie est nulle en degré 5, les produits sont nuls sauf en degrés (3, 3). On déduit de la proposition 4.5.7 que les produits non triviaux d'éléments de la base tordus de degrés (3, 3) sont les suivants :

$$(d1F_{\alpha,\star}^3) \cup_o (djF_{\alpha,\star}^3) = 1/2$$

$$(d1F_{\beta,\star}^2) \cup_o (d\tau F_{\beta,\star}^4) = 1/3$$

$$(d1F_{\beta,\star}^4) \cup_o (d\tau F_{\beta,\star}^2) = 1/3$$

Annexe A

$\mathcal{O}_S[G]$ -modules et $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbres

Dans cette appendice, on fixe un corps k algébriquement clos. Tous les schémas considérés seront des k -schémas. On fixe également un groupe fini G dont l'ordre est premier à la caractéristique de k .

Soit \mathcal{C} une catégorie. Un objet O de la catégorie \mathcal{C} est muni d'une action de G par la donnée d'un morphisme de groupes de G dans $\text{Aut}(O)$. Un G -morphisme entre deux objets O et O' munis d'une action est un morphisme de O dans O' qui commute avec les opérations de G . On notera \mathcal{C}^G la catégorie dont les objets sont les objets de \mathcal{C} munis d'une action de G et les morphismes sont les G -morphismes. De manière formelle, tout foncteur entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} induit un foncteur entre les catégories \mathcal{C}^G et \mathcal{D}^G .

A.1 La catégorie Mod_S^G

Si S est un schéma, la catégorie Mod_S^G est la catégorie des \mathcal{O}_S -modules (quasi-cohérents) munis d'une action de G . Un \mathcal{O}_S -module muni d'une action de G est équivalent à un $\mathcal{O}_S[G]$ -module. En effet, si \mathcal{E} est faisceau de groupes abéliens, la donnée d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_S \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$ et d'un morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Mod}_S}(\mathcal{E})$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_S[G] \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$.

Propriété A.1.1. Soit S un schéma. Pour tout $\mathcal{O}_S[G]$ -module \mathcal{E} , on note \mathcal{E}^G le sous-faisceau de \mathcal{E} des sections G -invariantes. On obtient ainsi un foncteur additif de la catégorie Mod_S^G dans la catégorie Mod_S qui à \mathcal{E} associe \mathcal{E}^G .

Démonstration. Soit \mathcal{E} un $\mathcal{O}_S[G]$ -module. On définit l'opérateur de Reynolds $R_{\mathcal{E}} = 1/g \sum_{g \in G} g \in \text{End}_{\text{Mod}_S}(\mathcal{E})$. On pose $\mathcal{E}^G = \text{Im}(R_{\mathcal{E}})$ de sorte que \mathcal{E}^G est un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent. Si m est un morphisme de $\mathcal{O}_S[G]$ -modules de

\mathcal{E} dans \mathcal{F} , alors $m \circ R_{\mathcal{E}} = R_{\mathcal{F}} \circ m$ de sorte que m se restreint en un morphisme m^G de \mathcal{E}^G dans \mathcal{F}^G . \square

Propriété A.1.2. Nous noterons $\{\rho_1, \dots, \rho_l\}$ l'ensemble des représentations k -linéaires irréductibles de G . Tout $\mathcal{O}_S[G]$ -module \mathcal{E} a une décomposition isotypique $\bigoplus_{\alpha} [\rho_{\alpha} \otimes_k \mathcal{E}^{\alpha}]$ où chaque $\mathcal{E}^{\alpha} = (\mathcal{E} \otimes \rho_{\alpha}^{\vee})^G$. Tout morphisme de $\mathcal{O}_S[G]$ -modules $m : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ se décompose en des morphismes $m^{\alpha} : \mathcal{E}^{\alpha} \rightarrow \mathcal{F}^{\alpha}$. Plus précisément, les catégories additives Mod_S^G et $(\text{Mod}_S)^{\oplus l}$ sont équivalentes.

Démonstration. On définit le foncteur additif F de la catégorie Mod_S^G dans la catégorie $(\text{Mod}_S)^{\oplus l}$ qui à un $\mathcal{O}_S[G]$ -module \mathcal{E} associe les \mathcal{O}_S -modules $(\rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k \mathcal{E})^G$, $\alpha = 1 \dots l$. On considère le foncteur G de la catégorie $(\text{Mod}_S)^{\oplus l}$ dans la catégorie Mod_S^G qui à (\mathcal{E}^{α}) associe $\bigoplus_{\alpha} (\rho_{\alpha} \otimes \mathcal{E}^{\alpha})$. Nous allons voir que $F \circ G$ est naturellement isomorphe à l'identité. Soit (\mathcal{E}^{α}) une famille de \mathcal{O}_S -modules. Pour chaque β , $(\rho_{\beta}^{\vee} \otimes_k \bigoplus_{\alpha} [\rho_{\alpha} \otimes \mathcal{E}^{\alpha}])^G = \bigoplus_{\alpha} (\rho_{\beta}^{\vee} \otimes_k \rho_{\alpha})^G \otimes \mathcal{E}^{\alpha}$. D'après le lemme de Schur, $\rho_{\beta}^{\vee} \otimes_k \rho_{\alpha} = k$ si $\beta = \alpha$ et 0 sinon. Donc pour chaque β , $(\rho_{\beta}^{\vee} \otimes_k [\bigoplus_{\alpha} \rho_{\alpha} \otimes \mathcal{E}^{\alpha}])^G = \mathcal{E}^{\beta}$. Nous allons montrer que $F \circ G$ est naturellement isomorphe à l'identité. Soit \mathcal{E} un $\mathcal{O}_S[G]$ -module. Pour chaque α , la dualité $\rho_{\alpha} \otimes_k \rho_{\alpha}^{\vee} \rightarrow k$ induit un morphisme $\rho_{\alpha} \otimes_k (\rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k \mathcal{E})^G \rightarrow \rho_{\alpha} \otimes_k \rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. On obtient ainsi un morphisme naturel de $\mathcal{O}_S[G]$ -modules $\bigoplus_{\alpha} (\rho_{\alpha} \otimes_k (\rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k \mathcal{E})^G) \rightarrow \mathcal{E}$. Il reste à montrer que ce morphisme est un isomorphisme. Comme la question est locale sur S , on peut se ramener au cas affine. On suppose donc que S est le spectre d'un anneau A . Dans ce cas, la catégorie des $\mathcal{O}_S[G]$ -modules est équivalente à la catégorie des $A[G]$ -modules. Sous cette équivalence, le $\mathcal{O}_S[G]$ -module \mathcal{E} correspond à un $A[G]$ -module M et le morphisme ci-dessus correspond au morphisme $\bigoplus_{\alpha} [\rho_{\alpha} \otimes_k (\rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k M)^G] \rightarrow M$. Pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme, on ne considère plus que la structure de $k[G]$ -module. Quitte à décomposer M en somme de représentations irréductibles, on peut supposer que $M = \rho_{\beta}$. Il reste à montrer que $\bigoplus_{\alpha} [\rho_{\alpha} \otimes_k (\rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k \rho_{\beta})^G] \rightarrow \rho_{\beta}$ est un isomorphisme. D'après le lemme de Schur $\rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k \rho_{\beta} = k$ si $\alpha = \beta$ et 0 sinon, ce qui permet de conclure. \square

Propriété A.1.3. Soit T un S -schéma. Soit \mathcal{E} un $\mathcal{O}_S[G]$ -module. On dispose d'un isomorphisme naturel $(\mathcal{E}^G)_T = (\mathcal{E}_T)^G$ et, pour chaque α , d'un isomorphisme naturel $(\mathcal{E}^{\alpha})_T = (\mathcal{E}_T)^{\alpha}$.

Démonstration. On constate que l'opérateur de Reynold introduit dans la preuve de A.1 vérifie $R_{\mathcal{E}_T} = (R_{\mathcal{E}})_T$. Or, le foncteur tiré-en-arrière est exact à droite dont $\text{Im}(R_{\mathcal{E}_T}) = \text{Im}(R_{\mathcal{E}})_T$, i.e. $(\mathcal{E}^G)_T = (\mathcal{E}_T)^G$. La fin de la proposition résulte de la définition explicite de \mathcal{E}^{α} donnée dans la preuve de A.1.2 et du fait que les foncteurs $\rho_{\alpha}^{\vee} \otimes_k (\cdot)$ et $(\cdot)^G$ commutent avec le tiré-en-arrière. \square

Remarquons que si S est de type fini sur k et \mathcal{E} est un $\mathcal{O}_S[G]$ -module cohérent, alors \mathcal{E}^G et chacun des \mathcal{E}^{α} sont cohérents. Ceci provient de leur définition explicite donnée dans les preuves de A.1.1 et A.1.2.

Définition-Propriété A.1.4. Un $\mathcal{O}_S[G]$ -module \mathcal{E} est dit localement trivial si il existe un recouvrement ouvert de S tel que pour chaque ouvert U de ce recouvrement, $\mathcal{E}|_U$ soit isomorphe $\mathcal{O}_U[G]$. Pour chaque représentation k -linéaire irréductible ρ_α de G , on note d_α sa dimension. Un $\mathcal{O}_S[G]$ -module \mathcal{E} est localement trivial ssi chaque \mathcal{E}^α est localement libre de dimension d_α .

Démonstration. Dire qu'un $\mathcal{O}_S[G]$ module est localement trivial revient à dire qu'il existe un recouvrement ouvert tel que pour chaque ouvert U de ce recouvrement, $\mathcal{E}|_U = \mathcal{O}_U[G]$. Or $\mathcal{O}_U[G] = k[G] \otimes_k \mathcal{O}_U$ et $k[G] = \bigoplus_\alpha \rho_\alpha^{d_\alpha}$. Donc $\mathcal{E}|_U = \bigoplus_\alpha [\rho_\alpha \otimes_k \mathcal{O}_U^{d_\alpha}]$ et chaque $(\mathcal{E}^\alpha)|_U = \mathcal{O}_U^{d_\alpha}$. Ceci revient donc à dire que chaque \mathcal{E}^α est localement libre de rang d_α . \square

A.2 La catégorie Alg_S^G

La catégorie Alg_S^G est la catégorie des \mathcal{O}_S -algèbres (quasi-cohérentes) munies d'une action de G . Une \mathcal{O}_S -algèbre munie d'une action de G est équivalente à une $\mathcal{O}_S[G]$ -algèbre. En effet, si \mathcal{E} est faisceau d'anneaux, la donnée d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_S \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$ et d'un morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Alg}_S}(\mathcal{E})$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_S[G] \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$. La catégorie Aff_S^G est la catégorie des morphismes affines G -invariants $m : Z \rightarrow S$ où G agit sur Z .

Propriété A.2.1. On dispose d'une équivalence de catégorie entre Aff_S^G et Alg_S^G qui envoie le morphisme affine G invariant $m : Z \rightarrow S$ sur $m_*(\mathcal{O}_Z)$. Supposons donné le changement de base suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z_T & \longrightarrow & Z \\ \downarrow m_T & & \downarrow m \\ T & \longrightarrow & S \end{array}$$

Alors m_T est un morphisme affine G -invariant et $(m_T)_*(\mathcal{O}_{Z_T}) = m_*(\mathcal{O}_Z)_T$.

Démonstration. Notons Aff_S la catégorie des schémas affines sur S . D'après le théorème 9.1.4 du chapitre I de [GD71], on dispose d'une anti-équivalence de catégories entre Aff_S et Alg_S qui envoie l'objet $m : Z \rightarrow T$ sur l'objet $m_*(\mathcal{O}_Z)$. De manière purement formelle, on obtient une anti-équivalence de catégories entre Aff_S^G et Alg_S^G . La dernière partie de la proposition résulte du corrolaire 9.1.9 du chapitre I de [GD71]. \square

Annexe B

Géométrie torique

Dans cette appendice, nous rappelons quelques définitions, notations et propriétés sur les variétés toriques. Pour plus de détails, on pourra consulter [Ful93] ou [Oda78]. Nous démontrons également un résultat de rétraction topologique pour les variétés toriques complexes.

B.1 Tores

Par définition un tore est une groupe isomorphe à un produit de copies de k^* . La catégorie des tores est anti-équivalente à la catégorie des groupes abéliens libres de rang fini. Plus précisément, les foncteurs $\text{Hom}(\cdot, k^*)$ et $\text{Spec}(k[\cdot])$ restreints à ces catégories sont quasi-inverses l'un de l'autre. Remarquons de plus que, restreints au départ à la catégorie des tores, les foncteurs $\text{Hom}(\cdot, k^*)$ et $\text{Hom}(k^*, \cdot)$ sont duaux l'un de l'autre. Étant donné un n -tore T , si on fixe (x_j) une base de son groupe de caractères ou, dualement, (e_j) une base de ses sous-groupes à un paramètre, alors T est identifié à $(k^*)^n$.

B.2 Variétés toriques

Soit T un n -tore. Une variété T -torique est une variété séparée normale X munie d'une immersion ouverte $T \subset X$ telle que l'action de T sur lui-même (par translation) s'étende à X (notons que cette extension est alors unique). Dans cette section, nous expliquons que les variétés toriques sont décrites par des objets combinatoires appelés éventails. Notons L et M le groupe de caractères et le groupe de sous-groupes à un paramètre de T . Les groupes L et M sont des groupes abéliens libres de rang n duaux. On peut voir L et M comme des réseaux duaux dans des espaces vectoriels duaux E et F . Le crochet de dualité sera noté $\langle e, f \rangle$.

Un point non nul de L est dit primitif s'il n'est pas multiple (avec un facteur plus grand que deux) d'un autre point de L . Considérons des points

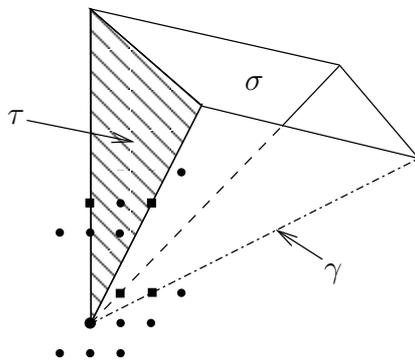


FIG. B.1 –

primitifs de L qui vérifient les deux conditions suivantes. Premièrement, aucun d'eux n'est combinaison entière positive des autres. Deuxièmement, zéro n'est pas combinaison linéaire positive nontriviale de ces points. Alors on peut définir le cône σ de L comme étant le sous-ensemble de E formé des combinaisons linéaires réelles positives de ces points. On dit alors que ces points sont le système de générateurs minimal de σ . Pour un exemple de cône σ , voir la figure B.1 où les points « carrés » forment le système minimal de générateurs.

Un cône est dit simplicial (resp. basique) si son système minimal de générateurs est une famille libre de E (resp. une partie d'une base de réseau L). Remarquons que la notion de cône basique est plus forte que le notion de cône simplicial. Dans la figure B.2, la cône de droite est basique tandis que celui de gauche est seulement simplicial. La dimension d'un cône est la dimension du sous-espace vectoriel qu'il engendre. Bien entendu, $\{0\}$ est le seul cône de dimension zéro. Les cônes de dimension un sont les demi-droites engendrées par un point primitif. L'intérieur relatif d'un cône est son intérieur topologique vu dans l'espace vectoriel qu'il engendre.

Les variétés T -toriques affines sont en bijection avec les cônes de L . Pour chaque cône σ , on notera U_σ la variété torique qu'il représente. Pour ce qui nous concerne, nous aurons seulement besoin de savoir à quoi ressemble U_σ lorsque σ est un cône basique. Lorsque σ est un cône basique, il y existe une base (e_j) du réseau L tel que e_1, \dots, e_d soit un système de générateurs minimal de σ . Notons (x_j) la base duale de M . Alors l'immersion ouverte $T \subset U_\sigma$ est donnée par $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^d \times (\mathbb{C}^*)^{n-d}$ avec les coordonnées x_j .

Un hyperplan d'appui d'un cône σ est un hyperplan tel que σ soit contenu dans un des deux demi-plans définis par cet hyperplan. L'intersection d'un cône σ avec un hyperplan d'appui est un cône dont le système de générateurs minimal est l'intersection du système de générateurs minimal de σ avec cet hyperplan d'appui. Nous appellerons face de σ un cône qui est l'intersection de σ avec un hyperplan d'appui (de plus nous considérerons que σ lui-même

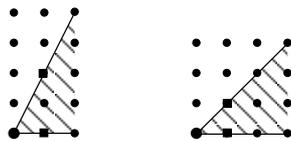


FIG. B.2 –

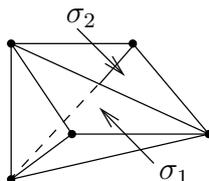


FIG. B.3 –

est une de ses faces). Par exemple, dans la figure B.1, τ et γ sont des faces de σ . L'intersection de deux faces d'un cône est encore une face. Remarquer que $\{0\}$ est toujours la plus petite face. Il est possible de récupérer le système minimal de générateurs d'un cône σ en prenant les points primitifs de chaque face de dimension un de σ . Pour un exemple, voir la figure B.1.

Un éventail de L est un ensemble fini non vide de cônes de L tel que les faces d'un cône de l'éventail soient encore des cônes de l'éventail et que l'intersection de deux cônes de l'éventail soit une face commune à ces deux cônes. Remarquons qu'un éventail contient toujours le cône $\{0\}$. Le support d'un éventail est la réunion de ses cônes. Un cône maximal de l'éventail est un cône maximal pour l'inclusion. Un cône intérieur est un cône de l'éventail dont l'intérieur relatif est contenu dans l'intérieur du support. La figure B.3 montre un éventail avec deux cônes maximaux σ_1 et σ_2 . Un éventail est dit simplicial (resp. basique) si tous ces cônes sont simpliciaux (respectivement basiques).

Les variétés T -toriques sont en bijection avec les éventails de L . Plus précisément, à chaque éventail σ , on peut associer une variété torique X comme suit : X est recouverte par les cartes affines U_σ lorsque σ décrit les cônes de l'éventail. Si σ et γ sont deux cônes de l'éventail, l'intersection de U_σ et U_γ dans X est $U_{\sigma \cap \gamma}$. Remarquons que pour un cône σ , l'éventail formé des faces de σ correspond en fait à la variété torique affine U_σ associée à σ . Remarquons que l'on peut lire certaines propriétés géométriques de la variété X directement sur l'éventail. Par exemple X est propre lorsque le support de l'éventail est l'espace entier. X est lisse lorsque l'éventail est basique.

Les orbites de l'action de T sur X sont en bijection avec les cônes de l'éventail. À chaque cône σ , on peut associer une orbite O_σ . Les points d'une

orbites O_σ sont lisses lorsque σ est un cône basique. De plus, pour chaque cône σ , on dispose de l'égalité $U_\sigma = \cup_{\tau \subset \sigma} O_\tau$.

L'éventail fournit également une visualisation des orbites. La variété entière X est visualisée par le support de l'éventail. L'orbite O_σ est visualisée par l'intérieur relatif de σ . Observons que ceci est consistant puisque les intérieurs relatifs des cônes de l'éventail partitionnent son support. Ainsi l'ouvert U_σ , qui est l'union des orbites O_τ où τ décrit les faces de σ , est simplement visualisé par σ , qui est la réunion des intérieurs relatifs de ses faces. Remarquons que ceci est consistant car, étant donné deux cônes σ et γ de l'éventail, l'intersection de U_σ avec U_γ est $U_{\sigma \cap \gamma}$.

Nous terminons cette section sur une remarque concernant le produit de variétés toriques. Soient $T_1 \subset X_1$ et $T_2 \subset X_2$ des variétés toriques. Évidemment $T_1 \times T_2 \subset X_1 \times X_2$ est une variété torique. L'éventail de $X_1 \times X_2$ est le produit des éventails de X_1 et X_2 : les cônes de cet éventail sont les produits $\sigma_1 \times \sigma_2$ où σ_1 est un cône de l'éventail de X_1 et σ_2 est un cône de l'éventail de X_2 .

B.3 Morphismes toriques

Soit un morphisme de groupes algébriques entre deux tores T_1 et T_2 . On se donne $T_1 \subset X_1$ et $T_2 \subset X_2$ deux variétés toriques. Si le morphisme de tores s'étend à un morphisme de X_1 à X_2 , alors cette extension est unique et T_1 -équivariante dans le sens évident. Dans cette sous-section, nous allons voir que l'existence d'une telle extension et sa visualisation sont données combinatoirement au niveau des éventails.

Le morphisme de tores induit un morphisme de groupe de L_1 dans L_2 au niveau des groupes de sous-groupes à un paramètre. On peut voir L_1 et L_2 comme réseaux d'espaces vectoriels E_1 et E_2 . Le morphisme entre les groupes de sous-groupes à un paramètre s'étend linéairement et de manière unique en une application linéaire φ de E_1 dans E_2 . Alors le morphisme de tores s'étend de X_1 à X_2 ssi pour tout cône σ_1 de l'éventail de X_1 , il existe un cône σ_2 de l'éventail de X_2 tel que φ envoie σ_1 dans σ_2 .

Dans la suite, on suppose que cette condition est remplie de sorte que l'extension existe. Nous pouvons visualiser cette extension de manière combinatoire. Pour tout cône σ_2 de l'éventail de X_2 , l'image réciproque de U_{σ_2} est l'union des U_{σ_1} où σ_1 décrit les cônes de l'éventail de X_1 envoyés dans σ_2 par φ . L'intérieur relatif d'un cône σ_1 de l'éventail de X_1 est envoyé dans celui d'un cône σ_2 de l'éventail de X_2 . Notre extension est T_1 équivariante et elle envoie l'orbite O_{σ_1} dans l'orbite O_{σ_2} . Remarquons qu'on peut également lire sur l'éventail si l'extension est propre : elle l'est lorsque l'image réciproque du support de l'éventail de X_1 par φ est le support de l'éventail de X_2 .

B.4 Sous-variétés toriques

Soit X une variété T -torique. Pour chaque orbite O_σ , on note V_σ l'adhérence de Zariski de O_σ . La variété V_σ est une sous-variété torique (c'est à dire invariante sous l'action de T) de X . Réciproquement, toute sous-variété torique de X est de la forme V_σ .

Nous énonçons ici quelques propriétés tirées de [Ful93] et qui nous seront utiles : $V_\sigma = \cup_{\sigma \subset \tau} O_\tau$, ce qui permet de visualiser V_σ dans X . Notons T_σ le stabilisateur commun des points de O_σ . Notons L_σ l'intersection de L et σ . On dispose d'une suite exacte de tores $1 \rightarrow T_\sigma \rightarrow T \rightarrow T/T_\sigma \rightarrow 1$ qui induit au niveau de groupes de sous-groupes à un paramètre la suite exacte : $1 \rightarrow L_\sigma \rightarrow L \rightarrow L/L_\sigma \rightarrow 1$. Pour tout cône τ de l'éventail contenant σ , on considère son image dans L/L_σ . Ces cônes forment un éventail du réseau-quotient noté $\text{Star}(\sigma)$. En fait, V_σ est une T/T_σ -variété torique provenant de l'éventail $\text{Star}(\sigma)$.

Remarquons que la variété V_σ est de codimension la dimension du cône σ . La description de V_σ à partir de son éventail permet de constater les deux faits suivants. Premièrement, si X est lisse alors V_σ est lisse. Deuxièmement, la variété V_σ est complète ssi σ est un cône intérieur de l'éventail.

B.5 Groupes de Picard et des classes d'équivalences rationnelles

Dans cette section, on suppose que le support de l'éventail engendre l'espace vectoriel E . Alors le groupe $A_*(X)$ des classes d'équivalences rationnelles de X est engendré par les classes des sous-variétés toriques.

Le groupe de Picard de X peut être décrit de manière complètement torique. La variété X est recouverte par les cartes toriques affine U_σ lorsque σ décrit les cônes maximaux de l'éventail. Un diviseur de Cartier torique est la donnée, pour tout cône maximal σ de l'éventail, d'une fonction torique rationnelle $h_\sigma \in M$ telle que pour toute paire de cônes σ, τ le quotient h_σ/h_τ est une fonction régulière ne s'annulant pas sur $U_\sigma \cap U_\tau$. Nous noterons Ca_T le groupe des diviseurs de Cartiers toriques. À chaque fonction torique rationnelle m , on peut associer le diviseur de Cartier torique tel que $h_\sigma = m$. À chaque diviseur de Cartier torique, on peut associer un fibré en droite dont les fonctions de transition de U_σ à U_τ sont h_σ/h_τ . On dispose de la suite exacte courte suivante :

$$1 \rightarrow M \rightarrow \text{Ca}_T \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 1$$

Le groupe $A_{n-1}(X)$ est décrit de manière complètement torique. Un diviseur de Weil torique est une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de sous-variétés toriques de codimension un. Nous noterons We_T le groupe de diviseurs de Weil toriques. Soit m une fonction rationnelle

torique. Le diviseur de Weil $\text{Div}(m)$ associé à m est alors torique. Toute sous-variété torique de codimension un est de la forme V_σ avec σ un cône de dimension un de l'éventail. Nous noterons $V(\sigma)$ l'unique point primitif de L dans la demi-droite σ . La valuation de m le long de V_σ est $\langle m, V(\sigma) \rangle$. Donc $\text{Div}(m) = \sum_\sigma \langle V(\sigma), m \rangle \cdot V_\sigma$. A chaque diviseur de Weil torique, on peut associer sa classe dans $A_{n-1}(X)$. On dispose de la suite exacte courte suivante :

$$1 \rightarrow M \rightarrow \text{We}_T \rightarrow A_{n-1}(X) \rightarrow 1$$

Proposition B.5.1. Supposons que X soit lisse et admette un point torique P . Alors les relations entre les diviseurs de Weil toriques de $A_{n-1}(X)$ expriment exactement les sous-variétés toriques de codimension un passant par P en fonction des autres. En particulier, $A_{n-1}(X)$ est libre et basé par les diviseurs toriques ne passant pas par P .

Démonstration. Le point torique P est égal à V_σ où σ est un cône de dimension n (cf B.4). Puisque X est lisse, le cône σ est un cône basique. Donc le système minimal de générateurs de σ forme une base (e_i) de L . On notera (x_j) la base duale de M . Les relations entre les diviseurs de Weil toriques dans $A_{n-1}(X)$ sont les $\text{Div}(x_j)$. Les sous-variétés toriques de codimension un passant par P correspondent aux faces de σ de dimension un (cf B.4). Les faces de dimension un de σ sont les demi-droites engendrée par les e_j (cf B.2). Ainsi, $\text{Div}(x_j)$ exprime les sous-variétés de codimension un passant par P en fonction des autres puisque $\langle e_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$. \square

B.6 Résolutions de singularités

Soit X une variété. En général, une résolution de X est un morphisme propre $\tau : Y \rightarrow X$ d'une variété lisse Y dans la variété X qui est un isomorphisme au dessus du lieu lisse de X . On appelle lieu exceptionnel de la résolution τ l'image réciproque du lieu singulier. Lorsque X est localement \mathbb{Q} -factoriel, les composantes irréductibles du lieu exceptionnel sont de codimension un dans Y et appelés diviseurs exceptionnels (voir le paragraphe 1.40 de [Deb01]).

On suppose de plus que τ est une résolution torique, c'est-à-dire que Y et X sont des variétés T -toriques et le morphisme τ est T -équivariant. Nous allons donner une description combinatoire des propriétés de la résolution τ . Notons \mathcal{G} et \mathcal{F} les éventails correspondant à Y et X . La lissité de Y correspond au fait que l'éventail \mathcal{G} est basique. L'existence du morphisme τ correspond au fait que tout cône de \mathcal{G} est inclus dans un cône de \mathcal{F} . La propriété de τ correspond au fait que les supports de \mathcal{G} et \mathcal{F} sont les mêmes. Le fait que τ soit un isomorphisme au dessus du lieu lisse de X correspond au fait que \mathcal{G} possède les cônes basiques de \mathcal{F} . Dans [Ful93], il est montré qu'une résolution torique existe toujours. Dans la figure B.4, on peut voir deux résolutions différentes pour une même variété torique.

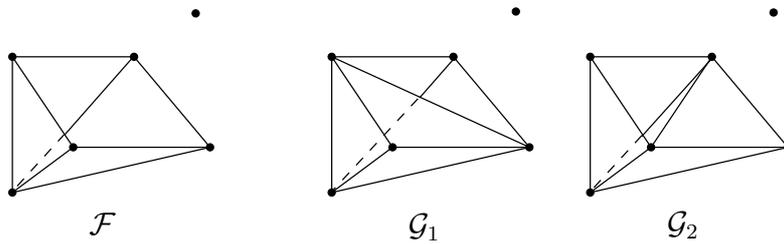


FIG. B.4 –

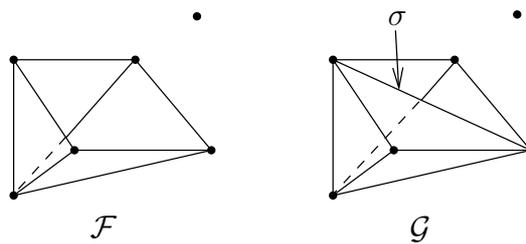


FIG. B.5 –

Le lieu exceptionnel est invariant sous l'action du tore, donc ses composantes irréductibles le sont également. Donnons-en une description combinatoire. L'image réciproque du lieu lisse de X est la réunion des U_σ dans Y lorsque σ décrit les cônes basiques de \mathcal{F} , c'est à dire les cônes de \mathcal{G} appartenant à \mathcal{F} . Complémentairement, le lieu exceptionnel de la résolution est l'union des orbites O_σ dans Y lorsque σ décrit les cônes de \mathcal{G} non dans \mathcal{F} . Donc les composantes irréductibles du lieu exceptionnel sont les V_σ lorsque σ décrit les cônes minimaux de \mathcal{G} non dans \mathcal{F} . Par exemple dans la figure B.5, le lieu exceptionnel a une unique composante irréductible V_σ .

Supposons de plus que \mathcal{F} est simplicial, de sorte que X est localement \mathbb{Q} -factoriel. Les diviseurs exceptionnels sont alors les V_σ lorsque σ décrit les cônes de dimension un de \mathcal{G} n'appartenant pas à \mathcal{F} . Dans la figure B.6, les deux diviseurs exceptionnels sont V_σ et V_γ .

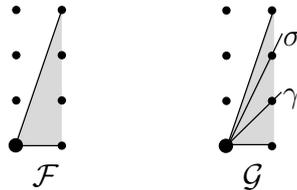


FIG. B.6 –

B.7 Un résultat de rétraction topologique

Dans cette section, on se place sur le corps des nombres complexes afin de prouver un résultat topologique. Soit X une variété T -torique. On choisit un cône σ de l'éventail. On considère la sous-variété torique $V_\sigma = \cup_{\sigma \subset \tau} O_\tau$ ainsi que l'ouvert torique $W_\sigma = \cup_{\sigma \subset \tau} U_\tau$. Le résultat de rétraction est le suivant :

Proposition B.7.1. Soit $V_\sigma \subset R \subset W_\sigma$ stable par l'action du tore. Alors V_σ est une partie rétracte par déformation forte de R .

Lemme B.7.2. Fixons λ un point de L dans l'intérieur relatif de σ . Fixons τ une face contenant σ . λ est un sous-groupe à un paramètre de T qui agit sur U_τ , donc on dispose d'un morphisme de $\mathbb{C}^* \times U_\tau$ dans U_τ . Ce morphisme s'étend au départ à $\mathbb{C} \times U_\tau$.

Démonstration. Considérons le morphisme de tores de $\mathbb{C}^* \times T$ dans T qui envoie le couple (z, t) sur $\lambda(z) \cdot t$. Le morphisme s'étend déjà en un morphisme de $\mathbb{C}^* \times U_\tau$ dans U_τ . Pour prouver le lemme, nous devons en fait l'étendre de $\mathbb{C} \times U_\tau$ dans U_τ . En utilisant la propriété des morphismes toriques (cf B.3), on traduit ce problème de manière totalement combinatoire. Le morphisme de tores ci-dessus est donné au niveau des sous-groupes à un paramètre par le morphisme de réseaux de $\mathbb{Z} \times N$ dans N qui au couple (k, n) associe $k\lambda + n$. Considérons le morphisme φ de $\mathbb{R} \times E$ dans E obtenu par extension de scalaires. Le cône maximal de l'éventail de $\mathbb{C} \times U_\tau$ est $\mathbb{R}_+ \times \sigma$. Il est bien envoyé par φ dans τ puisque $\lambda \in \tau$. \square

Lemme B.7.3. Fixons λ un point de L dans l'intérieur relatif de σ . Le morphisme de $\mathbb{C}^* \times W_\sigma$ dans W_σ s'étend au départ à $\mathbb{C} \times W_\sigma$ en un morphisme H satisfaisant les propriétés :

- i) $\forall x \in W_\sigma \quad H(1, x) = x$
- ii) $\forall (z, y) \in \mathbb{C} \times V_\sigma \quad H(z, y) = y$
- iii) $\forall x \in W_\sigma \quad H(0, x) \in V_\sigma$

Démonstration. Pour l'extension en un morphisme H , il suffit de recoller les extensions données par le lemme B.7.2. La propriété i) est satisfaite puisque $H(1, x) = \lambda(1) \cdot x = x$. Par densité, il suffit de prouver la propriété ii) pour z distinct de 0. T_τ agit trivialement sur O_σ donc sur V_σ . Puisque y appartient à V_σ et $\lambda(z)$ appartient à T_τ , on a $\lambda(z) \cdot y = y$. Donc $H(z, y) = y$. Il reste à prouver la propriété iii). $H(x, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z) \cdot x$. Donc x est invariant sous l'action induite par λ . Notons O_γ l'orbite de x sous l'action de T , de sorte que λ induit une action triviale sur O_γ . On en déduit par B.4 que $\lambda \in L_\gamma$. Puisque λ est un point dans l'intérieur relatif de σ , ceci prouve que $\sigma \subset \gamma$. Donc $x \in V_\sigma$. \square

Preuve de la proposition B.7.1. Considérons la situation du lemme B.7.3. Soit t un élément de l'intervalle $[0, 1]$ et r un élément de R . Si t est non nul,

$H(t, r) = \lambda(t) \cdot r$ appartient à R puisque R est stable par l'action du tore. Si t est nul, $H(t, r)$ appartient à V_σ inclus dans R . Donc H se restreint en une fonction continue $h : [0, 1] \times R \rightarrow R$ qui est la rétraction désirée. \square

Annexe C

Résolutions toriques crépantes de k^n/G , $G \subset (k^*)^n \cap SL_n(k)$

Dans cette annexe, on considère k un corps algébriquement clos et G un sous-groupe fini de $(k^*)^n$ dont l'ordre est premier à la caractéristique de k . On note $\phi : k^n \rightarrow Q$ le quotient géométrique de k^n par G . Nous rappelons ici quelques résultats et notations standards (voir [IR96] ou [Ful93]).

C.1 Le quotient comme variété torique

On dispose de la variété torique affine $(k^*)^n \subset k^n$. En passant au quotient sous l'action de G , on obtient la variété torique affine $T \subset Q$. En effet, nous allons voir dans la proposition suivante que T est un n -tore. On considère x_j , les projections de $(k^*)^n$ sur k^* . Les x_j forment une base du groupe des caractères de $(k^*)^n$ ou encore des monômes de Laurent. Le groupe des monômes de Laurent sera ainsi identifié à \mathbb{Z}^n .

Proposition C.1.1. T est un n -tore. On dispose de deux suites exactes courtes ci-dessous. En appliquant le foncteur $\text{Hom}(\cdot, k^*)$ à la première, on obtient la seconde et en appliquant le foncteur $\text{Spec}(k[\cdot])$ à la seconde, on récupère la première.

$$1 \rightarrow G \rightarrow (k^*)^n \rightarrow T \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow G^\vee \rightarrow 1$$

Démonstration. En appliquant le foncteur $\text{Hom}(\cdot, k^*)$ au sous-schéma fermé $i : G \rightarrow (k^*)^n$, on obtient un morphisme $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow G^\vee$. En appliquant le foncteur $\text{Spec}(k[\cdot])$ à α , on récupère i . Ce qui prouve que α est surjective. Le groupe G agit sur $(k^*)^n$ donc sur son algèbre de fonctions $k[\mathbb{Z}^n]$. Étant donné

des éléments g de G et m de \mathbb{Z}^n , on a $m \cdot g = m \circ \mu_{i(g)}$. Or m est morphisme de groupes donc on dispose de l'égalité $m \circ \mu_i(g) = \mu_{m(i(g))} \circ m$. On obtient ainsi $m \cdot g = \alpha(m)(g) \cdot m$. Donc la sous-algèbre invariante est $k[\mathbb{Z}^n]^G = k[M]$ avec $M = \text{Ker}(\alpha)$. Remarquons que M est libre de rang n , donc T est un n -tore. Ainsi la première suite s'obtient à partir de la seconde en appliquant le foncteur $\text{Spec}(k[\cdot])$. On conclut en utilisant le fait que $\text{Spec}(k[\cdot])$ suivi de $\text{Hom}(\cdot, k^*)$ est naturellement isomorphe à l'identité. \square

On considère (e_j) les injections de k^* dans $(k^*)^n$. Les e_j forment une base du groupe de sous-groupes à un paramètre $\text{Hom}(k^*, (k^*)^n)$. Le groupe des sous-groupes à un paramètre sera ainsi identifié à \mathbb{Z}^n . En appliquant le foncteur $\text{Hom}(k^*, \cdot)$ au quotient $(k^*)^n \rightarrow T$, on obtient une inclusion $\mathbb{Z}^n \subset L$ (duale de l'inclusion $\mathbb{Z}^n \subset M$). On a $\mathbb{Z}^n \subset L \subset \mathbb{R}^n$. Considérons le cône σ engendré par les vecteurs e_j . Remarquons que σ est basique si on considère le réseau \mathbb{Z}^n mais n'est plus basique si on considère le réseau L .

Proposition C.1.2. La variété torique affine $(k^*)^n \subset k^n$ est donnée par le réseau \mathbb{Z}^n et le cône σ , tandis que la variété torique $T \subset Q$ est donnée par le réseau L et le cône σ .

Démonstration. En utilisant la propriété de quotient géométrique, on voit que tout autre morphisme torique de $(k^*)^n \subset k^n$ dans $T \subset V$ factorise par le morphisme $(k^*)^n \subset k^n$ dans $T \subset Q$. On conclut en utilisant la description combinatoire des morphismes toriques. \square

Jusqu'à la fin de cette section, nous allons nous placer sur le corps des complexes. Chaque élément g de G s'écrit de manière unique $(e^{i2\pi r_j})$ avec (r_j) une famille de rationnels compris dans l'intervalle $[0, 1[$. On appelle âge de g et on note $a(g)$ la somme des r_j .

Proposition C.1.3. On dispose de la suite exacte courte ci-dessous. De plus, le réseau L peut être défini comme le sur-réseau de \mathbb{Z}^n engendré par les (r_j) , lorsque g décrit G .

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow L \rightarrow G \rightarrow 1$$

Démonstration. L'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui envoie un couple (x, f) sur $e^{i2\pi \langle x, f \rangle}$ fournit une dualité $L/\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n/M \rightarrow \mathbb{C}^*$. Puisque G^\vee est identifié à \mathbb{Z}^n/M par définition, on obtient une identification de G à L/\mathbb{Z}^n . On vérifie alors qu'un élément g de G correspond bien au n -uplet (r_j) vu dans L/\mathbb{Z}^n . \square

C.2 Les résolutions crépantes dans le cas spécial linéaire

Dans cette section, on suppose de plus que G est un sous-groupe de $(k^*)^n \cap SL_n(k)$. Rappelons que $\phi : X \rightarrow Q$ désigne le quotient géométrique.

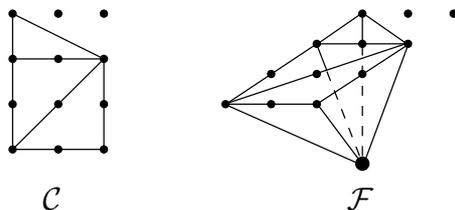


FIG. C.1 –

Le fibré canonique G -linéarisé de k^n est $\omega_{k^n} = \mathcal{O}_{k^n}$, donc le fibré canonique de Q est $\omega_Q = \mathcal{O}_Q$. Ainsi, une résolution de singularités $\tau : Y \rightarrow Q$ est crépante lorsque ω_Y est naturellement trivial. Dans cette section, nous décrivons les résolutions toriques crépantes de Q du point de vue combinatoire. Ces résultats sont bien connus et nous les présentons ici pour les commodités du lecteur. Avec les notations précédentes, le fait que G soit un sous-groupe de $SL_n(k)$ est équivalent au fait que le monôme $m_0 = \prod_j x_j$ soit invariant sous l'action de G , c'est-à-dire appartienne à M .

Notons \mathcal{H} l'hyperplan affine de E d'équation $\langle e, m_o \rangle = 1$. Par simplexe, on désignera un simplexe dans \mathcal{H} dont les sommets sont des points de L (on considérera que l'ensemble vide est un simplexe). On notera Δ le simplexe dont les sommets sont les e_j . La dimension d'un simplexe est la dimension de l'espace affine qu'il engendre (la dimension de l'ensemble vide est moins un). On appellera sommet (resp. arête, triangle) un simplexe de dimension zéro (resp. un, deux). On utilisera habituellement la notation V (resp. E , resp. T) pour un sommet (resp. arête, resp. triangle). L'intérieur relatif d'un simplexe est son intérieur topologique dans l'espace affine qu'il engendre.

On appellera complexe simplicial un ensemble \mathcal{C} de simplexes tel que les faces d'un simplexe de \mathcal{C} soient encore dans \mathcal{C} et que l'intersection de deux simplexes de \mathcal{C} est une face commune. Le support d'un complexe simplicial est la réunion de ses simplexes. Un simplexe maximal est un simplexe de \mathcal{C} maximal pour l'inclusion. Un simplexe intérieur est un simplexe dont l'intérieur relatif est inclus dans l'intérieur du support. Pour chaque simplexe s , on note σ_s le cône simplicial de E engendré par L . Le cône σ_s est simplement la réunion des demi-droites passant par s (sauf dans le cas où s est le simplexe vide, et alors $\sigma(s)$ est $\{0\}$). Un simplexe est basique si le cône $\sigma(s)$ est basique.

A chaque complexe simplicial \mathcal{C} , on peut associer un éventail \mathcal{F} de L consistant en les cônes σ_s lorsque s décrit les simplexes de \mathcal{C} . Voir la figure C.1 pour un exemple. Un complexe simplicial est dit basique si l'éventail associé est basique. Bien entendu, à chaque complexe simplicial \mathcal{C} , on associe un éventail \mathcal{F} de L puis une variété T -torique X . Dans ce cas, dans toutes les notations faisant intervenir σ_s , on écrira s à la place (on obtiendra donc par exemple les notations U_s, O_s, V_s, W_s). Par traduction directe de B.4, on

obtient une bijection, entre les simplexes de \mathcal{C} et les sous-variété toriques de X , qui envoie s sur V_s . Sous cette correspondance, les simplexes intérieurs correspondent aux sous-variétés compactes.

Lemme C.2.1. Soit V un point de L . Si V appartient à \mathcal{H} alors V est primitif.

Démonstration. Écrivons $V = \lambda \cdot W$ avec λ un entier supérieur à un et W un vecteur primitif de L . $\lambda \langle W, m_0 \rangle = 1$ d'où $\lambda = 1$ et $V = W$. \square

Lemme C.2.2. Pour tout simplexe s , le système de générateur minimal de σ_s est l'ensemble des sommets de s . Un éventail simplicial provient d'un complexe simplicial ssi les points des systèmes minimaux de générateurs de ses cônes sont dans \mathcal{H} .

Démonstration. Soit s un simplexe. Les faces de dimension un de σ_s sont les σ_V où V décrit les sommets de s . Puisque les sommets V sont dans \mathcal{H} , ils sont primitifs d'après C.2.1. Donc chaque sommet V est le vecteur primitif de σ_V . Nous concluons que le système minimal de générateurs de σ_s est l'ensemble des sommets de s (cf B.2). Si un cône simplicial σ a son système minimal de générateurs dans \mathcal{H} , on note s l'intersection de σ avec \mathcal{H} . On vérifie aisément que s est un simplexe et $\sigma = \sigma_s$.

On vient de voir qu'un cône provient d'un simplexe ssi son système minimal de générateurs est dans \mathcal{H} . On en déduit formellement qu'un éventail simplicial provient d'un complexe simplicial ssi les systèmes de générateurs minimaux de ses cônes sont dans \mathcal{H} . \square

Lemme C.2.3. Soit s un simplexe. Si s est basique, alors les points de L dans s sont les sommets de s . La réciproque est vraie lorsque la dimension de s est inférieure à deux.

Démonstration. Notons d la dimension du simplexe s . Numérotions les sommets de s : V_i pour i compris entre 0 et d . Par C.2.2, les sommets de s forment le système minimal de générateur de $\sigma(s)$. Par définition, s est basique lorsque (V_i) est une partie de base de L . Notons C le cube des combinaisons des (V_i) avec des scalaires dans $[0, 1[$. s est basique lorsque l'origine est le seul point de L dans C . Le sens direct est évident puisque l'intersection de C avec \mathcal{H} est s privé de ses sommets. Il reste à prouver la réciproque. Pour tout point n de L appartenant à C privé de l'origine, $\langle n, m_0 \rangle \geq 2$. En effet, c'est un entier appartenant à $]0, d[$ et distinct de 1 (car n n'est pas dans \mathcal{H} sinon ce serait un point de s privé de ses sommets). Maintenant supposons qu'il existe un point n_1 de C privé de l'origine. Alors il existe des nombres $\alpha_i \in \{0, 1\}$ tels que $n_2 = \sum_i \alpha_i \cdot V_i - n_1$ appartienne encore à C privé de l'origine. Mais alors $d + 1 \geq \langle n_1 + n_2, m_0 \rangle \geq 4$ d'où $d \geq 3$. \square

Lemme C.2.4. Soit \mathcal{C} un complexe simplicial. Si \mathcal{C} est un complexe basique alors les points de L du support sont les sommets de \mathcal{C} . La réciproque est vraie si $n \leq 3$.

Démonstration. Prouvons le sens direct. Soit V un point du réseau dans le support de \mathcal{C} . Fixons un simplexe s de \mathcal{C} tel que V appartienne à S . Alors en appliquant C.2.3, on conclut que V est un sommet de s de sorte que V est un sommet dans \mathcal{C} . Prouvons maintenant la réciproque. Supposons que $n \leq 3$ est que les points de L dans le support sont les sommets de \mathcal{C} . Soit s un simplexe de \mathcal{C} . Remarquons que la dimension de s est inférieure à 2. Soit V un point de L dans s . V est un point de \mathcal{C} de sorte que V doit être un sommet de s . Donc les points de L dans s sont les sommets de s . D'après C.2.3, s est basique. \square

Proposition C.2.5. Les résolutions toriques crépantes de Q sont en bijection avec les complexes simpliciaux basiques de support Δ

Démonstration. L'éventail de Q est l'ensemble des faces de σ . Soit une résolution torique $\tau : Y \rightarrow Q$. Y provient d'un éventail \mathcal{G} de support σ tel que \mathcal{G} contienne toutes les faces basiques de σ (cf B.6). La résolution est crépante lorsque $\omega_Y = \mathcal{O}_Y$.

Par [Ful93] p60-64), un diviseur canonique de Y est $-\sum_{\sigma} V_{\sigma}$ lorsque σ décrit les faces de dimension un de \mathcal{G} . Donc la résolution est crépante lorsqu'il existe une fonction torique m dont le diviseur est $-\sum_{\sigma} V_{\sigma}$ (cf B.5). Pour chaque cône σ de dimension un dans l'éventail \mathcal{G} , on notera $V(\sigma)$ l'unique point primitif de L dans la demi-droite σ . Le diviseur de m est égal à notre diviseur canonique lorsque pour chaque σ , $\langle V(\sigma), m \rangle = -1$ (cf B.5). Parmi les cônes de dimension un de \mathcal{G} , il y a les demi-droites dont les vecteurs primitifs sont les e_j . Donc pour chaque j , $\langle e_j, m \rangle = -1$, ce qui implique $m = 1/m_0$. Ainsi, la résolution est crépante ssi pour tout les cônes σ de dimension un de \mathcal{G} , on a $\langle V(\sigma), 1/m_0 \rangle = -1$, c'est à dire $V(\sigma)$ appartient à \mathcal{H} . Puisque pour tout cône de \mathcal{G} , son système minimal de générateurs est formé des $V(\sigma)$ où σ décrit l'ensemble de ses faces de dimension un (cf B.2), cela revient à dire que les systèmes minimaux de générateurs des cônes de \mathcal{G} sont dans \mathcal{H} .

En appliquant C.2.2, on déduit que la résolution est crépante ssi \mathcal{G} provient d'un complexe simplicial \mathcal{C} . Cependant, \mathcal{C} doit être un complexe simplicial basique de support Δ tel que toute face basique de Δ soit un simplexe de \mathcal{C} . Il reste à prouver que cette dernière condition est automatique. Fixons s une face basique de Δ . D'après C.2.3, les points de L dans s sont ses sommets. Donc les seuls simplexes inclus dans s sont ses faces. Puisque s est l'union des simplexes de \mathcal{C} qu'il contient, s est un simplexe de \mathcal{C} . \square

Proposition C.2.6. Soit $\tau : Y \rightarrow Q$ une résolution torique. Les sous-variétés toriques de codimension un de Y correspondent aux points de L dans

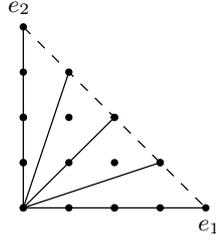


FIG. C.2 –

Δ . Les points distincts des e_i correspondent aux diviseurs exceptionnels. Les diviseurs exceptionnels forment une base de $A_{n-1}(X)_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Les résolutions toriques crépantes Y proviennent d'un complexe simplicial basique \mathcal{C} de support Δ (cf C.2.5). Soit $\tau : Y \rightarrow Q$ une résolution torique. Les sous-variétés toriques de codimension un de Y correspondent aux points de L dans Δ . (cf B.4). La variété torique Q provient de l'éventail des faces de σ . Les faces de dimension un de σ sont les demi-droites \mathbb{R}_+e_j dont les points primitifs sont les e_j . Nous déduisons de B.6 que les diviseurs exceptionnels correspondent aux points e_j .

En tensorisant avec \mathbb{Q} , la suite exacte courte de B.5 reste exacte. Puisque (x_j) est une base de $M_{\mathbb{Q}}$, les relations dans $A_{n-1}(X)_{\mathbb{Q}}$ entre les diviseurs toriques sont les $Div(x_j)$. $Div(x_j)$ exprime e_j en fonction des diviseurs exceptionnels puisque $\langle x_j, e_i \rangle = \delta_{ij}$ (cf B.5). \square

Jusqu'à la fin de cette section, nous faisons quelques remarques concernant les résolutions toriques crépantes en basse dimension. En dimension un, rien ne se produit puisque le groupe est trivial. En dimension deux, pour chaque entier n , il existe un sous-groupe G de $(k^*)^2 \cap SL_2(k)$ d'ordre n . Ce groupe est cyclique et le sur-réseau L de \mathbb{Z}^2 correspondant est engendré par $1/n(1, n-1)$. Dans ce cas, il existe une unique résolution crépante qui est la résolution minimale et qui coïncide avec le G schéma de Hilbert. La description combinatoire est donnée par la figure C.2. Remarquons que dans ce cas, tous les éléments non nuls de G sont d'âge 1, donc les diviseurs exceptionnels sont en correspondance avec les éléments non nuls de G .

En dimension trois, le G -schéma de Hilbert fournit une résolution torique crépante. On pourra consulter [Nak01] et [CR02] pour une description du complexe simplicial basique \mathcal{C} de support Δ décrivant le G -schéma de Hilbert. Cependant en dimension trois, il n'y a plus unicité de la résolution crépante : voir la figure C.3 pour un exemple avec deux résolutions crépantes distinctes, dont le G -schéma de Hilbert à gauche. En dimension supérieure à quatre, il n'existe pas de résolution crépante en général. Par exemple, prenons le groupe $G = \pm Id_{k^4}$ dont le sur-réseau L correspondant est engendré par le point $1/2(1, 1, 1, 1)$. On remarque dans ce cas que les seuls points de

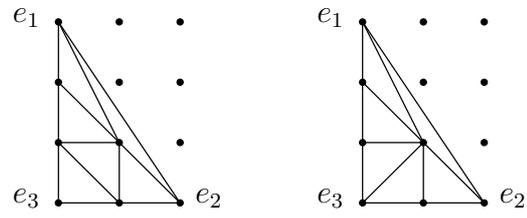


FIG. C.3 –

L dans Δ sont ses sommets. Donc le seul complexe simplicial de support Δ est le complexe simplicial constitué des faces de Δ . Mais Δ n'est pas basique puisque (e_1, e_2, e_3, e_4) n'est pas une base de L .

Annexe D

Résolutions crépantes dans le cas complexe

Dans l'appendice précédente, nous avons étudié les résolutions toriques crépantes du quotient de k^n par un sous-groupe fini G de $(k^*)^n \cap SL_n(k)$. Nous conjecturons que toutes les résolutions crépantes sont en fait automatiquement toriques. Dans cette appendice, on se place sur le corps des nombres complexes et on prouve la conjecture dans ce cadre. Pour atteindre notre but, nous utiliserons des méthodes analytiques bien connues.

D.1 Critère d'algébricité d'un morphisme

Proposition D.1.1. Soit $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme analytique entre deux variétés algébriques complexes. On suppose qu'il existe O , un ouvert de Zariski non vide de X tel que $\phi|_O$ soit un morphisme algébrique. Alors ϕ est un morphisme algébrique.

Démonstration. On considère le graphe Γ de ϕ dans $X \times Y$ et le graphe $\Gamma|_O$ de $\phi|_O$ dans $O \times Y$. Γ est un fermé en topologie usuelle de $X \times Y$. De plus, l'application naturelle de X dans Γ est un homéomorphisme. Puisque O est un ouvert dans X , il est dense en topologie usuelle dans X (voir [Mum99] I.10 théorème 1). Par homéomorphisme, $\Gamma|_O$ est dense en topologie usuelle dans Γ . Donc Γ est l'adhérence de $\Gamma|_O$ dans $X \times Y$ en topologie usuelle. Puisque $\Gamma|_O$ est constructible, on en déduit que Γ est l'adhérence de Zariski de $\Gamma|_O$ dans $X \times Y$ (voir [Mum99] I.10 corollaire 1). Ainsi Γ est un fermé de Zariski. Le morphisme naturel de Γ dans X est un morphisme algébrique et un isomorphisme analytique donc un isomorphisme algébrique (d'après la proposition 9 de [Ser56]). Ceci prouve que le morphisme naturel de X dans Γ est algébrique puis que ϕ est algébrique. \square

D.2 Relèvement d'une action de \mathbb{C}^*

Pour relever une action de \mathbb{C}^* , nous utiliserons des méthodes analytiques et en particulier le lemme suivant :

Lemme D.2.1. Soit W une variété analytique lisse. Il existe une bijection entre les actions de \mathbb{C}^* sur W et l'ensemble des champs de vecteurs χ sur W tels que le système de Cauchy suivant soit intégrable sur \mathbb{C}^* pour tout paramètre w :

$$\partial\psi/\partial z(z, w) = \chi(\psi(z, w))/z \quad \psi(1, w) = w$$

Démonstration. Fixons une action de \mathbb{C}^* sur W donnée par $\psi : \mathbb{C}^* \times W \rightarrow W$. Définissons le champ de vecteurs $\chi(w) = \partial\psi/\partial z(1, w)$. Nous allons utiliser l'égalité $\psi(sz, w) = \psi(s, \psi(z, w))$. En dérivant selon s au point 1, on obtient $\partial\psi/\partial z(z, w) = \chi(\psi(z, w))/z$. Donc ψ est déterminé par l'équation différentielle de l'énoncé. Réciproquement, supposons donné un champ de vecteurs χ tel que l'équation différentielle de l'énoncé soit intégrable sur \mathbb{C}^* pour tout paramètre w . La solution ψ est unique et analytique d'après les résultats classiques sur les systèmes de Cauchy avec paramètres. Pour montrer que ψ définit une action, il reste à vérifier que $\psi(sz, w) = \psi(s, \psi(z, w))$. Or, z et w étant fixés, les deux membres sont égaux car solutions du système de Cauchy :

$$u'(s) = \chi(u(s))/s \quad u(1) = \psi(z, w)$$

□

Théorème D.2.2. Soit G un sous-groupe fini de $SL_n(\mathbb{C})$. On note $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Soit $\tau : Y \rightarrow Q$ une résolution crépante. On suppose donnée une action de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^n commutant avec celle de G de sorte de l'action descend sur Q . Alors l'action se relève sur Y .

Démonstration. Considérons le champ de vecteurs α de \mathbb{C}^n associé à l'action de \mathbb{C}^* . Puisque les actions de G et \mathbb{C}^* commutent, ce champ de vecteurs est G invariant. D'après [Kal] corollaire 3.6, il existe un champ de vecteurs β sur Y qui remplit la condition suivante : le poussé-en-avant par ϕ de la restriction de α au-dessus de Q_{reg} est égal au poussé-en-avant par τ de la restriction de β au-dessus de Q_{reg} . On prouve par isomorphisme et en utilisant le lemme D.2.1, que le système de Cauchy

$$\partial\psi/\partial z(z, y) = \beta(\psi(z, y))/z \quad \psi(1, y) = y$$

est intégrable sur \mathbb{C}^* pour les paramètres $y \in \tau^{-1}(Q_{\text{reg}})$ et définit ainsi l'action sur $\tau^{-1}(Q_{\text{reg}})$ relevant par isomorphisme celle sur Q_{reg} . En fait, le système de Cauchy est intégrable sur \mathbb{C}^* pour tout paramètre $y \in Y$. En effet, un tel système de Cauchy est toujours localement intégrable et les obstructions à son intégration sur \mathbb{C}^* sont l'explosion en temps fini de

la solution et la monodromie. Premièrement, on prouve par prolongement analytique que, là où la solution est définie, son image par τ coïncide avec l'orbite de $\tau(y)$ sous l'action de \mathbb{C}^* dans Q . Puisque l'image par τ n'explose pas en temps fini et que τ est propre, la solution n'explose pas en temps fini. Deuxièmement, puisque la monodromie est triviale pour les paramètres dans $\tau^{-1}(Q_{\text{reg}})$, elle reste par densité triviale pour tout paramètre.

En utilisant le lemme D.2.2, on conclut que l'action algébrique de \mathbb{C}^* sur $\tau^{-1}(Q_{\text{reg}})$ se prolonge analytiquement en une action sur Y entier. En appliquant la proposition D.1, on conclut que cette action est algébrique. Cette action relève l'action de \mathbb{C}^* sur Q . \square

D.3 Résolutions crépantes de \mathbb{C}^n/G , $G \subset (\mathbb{C}^*)^n \cap SL_n(\mathbb{C})$

Théorème D.3.1. Soit G un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*)^n \cap SL_n(\mathbb{C})$. La variété torique affine $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ quotientée par G induit une variété torique affine $T \subset Q$. Toute résolution crépante $\tau : Y \rightarrow Q$ est automatiquement torique.

Démonstration. Remarquons que puisque T est un ouvert lisse et que τ est isomorphisme au-dessus de l'ouvert lisse, Y contient T . Remarquons également que Y est une variété normale car lisse. Il reste donc à prouver que l'action de T se relève sur Y . Puisque T est le quotient de $(\mathbb{C}^*)^n$ par G , cela revient à montrer que l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$ se relève sur Y . Or l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur Q peut être vue comme des actions de \mathbb{C}^* commutant entre-elles. Ces actions se relèvent sur Y d'après D.2.1. Les actions ainsi relevées commutent entre elles (car elles commutent au-dessus de l'ouvert lisse). Ces actions peuvent donc être vues comme une action de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur Y relevant l'action sur Q . \square

Annexe E

Cohomologies classique et orbifold

Dans la première section de cette appendice, on considère des orbifolds complexes en général. On introduit quelques notions et résultats sur la cohomologie classique à coefficients rationnels. Dans les seconde et troisième section, on décrit l'anneau de cohomologie orbifold de V/G ($G \subset GL(V)$) et X/G (X lisse et G abélien) suivant la définition de [FG03].

E.1 Cohomologie classique

Dans cette section, les variétés ambiantes considérées seront des orbifolds complexes (on s'autorisera même à considérer des espaces non connexes dont les composantes connexes sont équidimensionnelles). On travaille avec la cohomologie à coefficients rationnels. Dans les cas lisses, on plongera la cohomologie à coefficients rationnels dans la cohomologie à coefficients réels, qui est la cohomologie du complexe de De Rham des formes différentielles lisses.

Remarquons qu'on peut toujours trianguler une variété algébrique complexe (puisqu'elle lisse orientée sauf sur un fermé de codimension réelle supérieure à deux) et obtenir sa classe fondamentale en homologie de Borel-Moore. La dualité de Poincaré se généralise aux orbifolds :

Théorème E.1.1. Soit X un orbifold de dimension n . En capping avec la classe fondamentale de X en homologie de Borel-Moore, on obtient un isomorphisme $H^*(X) \rightarrow H_{n-*}^{\text{BM}}(X)$ appelé dualité de Poincaré. On appelle classe de X en cohomologie et on note $[X]$ le dual de Poincaré de points pris dans chaque composante connexe.

Démonstration. Ce théorème utilise l'homologie d'intersection de X introduite par Goresky et MacPherson et notée $IH^*(X)$. Pour des détails, on

renvoie le lecteur à [GM83], et en particulier la partie 5. Il existe des morphismes naturels $H^*(X) \rightarrow IH^*(X)$ et $IH^*(X) \rightarrow H_{n-*}^{\text{BM}}(X)$ qui factorisent le cap produit avec la classe fondamentale. Puisque X est un orbifold, ces morphismes sont des isomorphismes. \square

Théorème E.1.2. On se place dans une variété lisse X . Pour tout diviseur D , le dual de Poincaré de la classe fondamentale de D en homologie de Borel-Moore est la première classe de Chern du fibré en droites $\mathcal{O}(D)$.

Démonstration. Ce fait est classique dont on trouve une preuve par exemple dans [Ful84] à partir des Théorème 3.2 et Corollaire 17.4. \square

Définition E.1.3. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Le morphisme f induit un morphisme gradué en homologie de Borel-Moore. Par dualité de Poincaré, ce morphisme fournit un morphisme en cohomologie noté comme suit (c désigne la codimension X relativement à Y) :

$$f_* : H^*(X) \rightarrow H^{*+2c}(Y)$$

Proposition E.1.4. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Pour tout éléments x de $H^*(X)$ et y de $H^*(Y)$, on a la formule de projection :

$$f_*(f^*(y) \cup x) = y \cup f_*(x)$$

Démonstration. Notons f_* le poussé-en-avant en homologie de Borel-Moore. Par dualité de Poincaré et par définition de f_* , on se ramène à prouver que $f_*((f^*(y) \cup x) \cap X) = y \cup f_*(x \cap X)$. On conclut en appliquant la formule de projection classique (voir [Bre67] V.10). \square

Proposition E.1.5. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre dominant entre orbifolds de même dimension. L'image de la classe fondamentale de X est un multiple de la classe fondamentale de Y . On appelle degré de f et on note $\deg(f)$ ce multiple. En notant c_X et c_Y le nombre de composantes connexes de X et Y , on dispose des relations suivantes :

$$\begin{aligned} f^*(1) &= 1 & f_*(1) &= \deg(f) \\ f^*([Y]) &= (\deg(f)c_Y/c_X)[X] & f_*([X]) &= (c_X/c_Y)[Y] \\ f_* \circ f^* &= \deg(f)\text{Id} \end{aligned}$$

Démonstration. Les quatre premières relations se montrent en utilisant les définitions, la dualité de Poincaré et la formule de projection entre homologie et cohomologie. La cinquième formule se montre en utilisant $f_*(1) = \deg(f)$ et en appliquant la formule de projection E.1.4. \square

Proposition E.1.6. Soit $f : X \rightarrow Y$ un fibré sur une variété lisse Y dont la fibre est une variété compacte lisse de dimension d . Alors $f_* : H^*(X) \rightarrow H^{*-d}(Y)$ s'interprète en l'intégration des formes différentielles de X sur les fibres.

Démonstration. Nous sommes dans le cas lisse. On considère la cohomologie des formes différentielles lisses. L'homologie de Borel-Moore s'identifie au dual de la cohomologie des formes différentielles lisses à support compact. Le poussé-en-avant en homologie de Borel-Moore s'identifie alors au dual du tiré-en-arrière des formes différentielles lisses à support compactes.

Soit α une forme fermée sur X . Considérons $I_f(\alpha)$ la forme fermée de Y obtenue en intégrant α sur les fibres. Soit β une forme fermée de Y à support compact. Considérons $T_f(\beta)$ la forme fermée de X obtenue par tirage-en-arrière. Le théorème de Fubini ainsi qu'une partition de l'unité sur Y nous permettent de montrer la formule suivante, qui est équivalente à la proposition :

$$\int_Y I_f(\alpha) \wedge \beta = \int_X \alpha \wedge T_f(\beta)$$

□

Corollaire E.1.7. Soit $f : X \rightarrow Y$ un fibré sur une variété lisse Y dont la fibre est une variété compacte lisse de dimension d . Soit $x \in H^d(X)$ une classe de cohomologie dont la restriction sur les fibres est la classe fondamentale. Alors $f_*(x) = 1$.

Démonstration. Puisque X se réduit sur chaque fibre à la classe fondamentale en cohomologie, l'intégration de X sur les fibres donne la fonction 1 sur Y . On applique la proposition E.1.6. □

Corollaire E.1.8. Soit $f : X \rightarrow Y$ est un fibré sur une variété lisse Y dont la fibre est une variété compacte lisse de dimension d . On considère le changement de base $g : Y' \rightarrow Y$ avec Y' lisse, donné par le diagramme de gauche. Alors le diagramme de droite est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^*(X') & \xleftarrow{g'^*} & H^*(X) \\ \downarrow f'_* & & \downarrow f_* \\ H^{*-d}(Y') & \xleftarrow{g_*} & H^{*-d}(Y) \end{array}$$

Démonstration. La preuve est évidente en utilisant l'intégration sur les fibres, qui est compatible aux changements de base. □

Proposition E.1.9. Soit X une variété lisse et Y une sous-variété lisse. On note j l'inclusion de Y dans X et N le fibré normal de Y dans X . Alors pour toute classe de cohomologie $y \in H^*(Y)$, on a :

$$j^*(j_*(y)) = y \cup c_{\text{top}}(N)$$

Démonstration. On considère un voisinage tubulaire U de Y dans X . Par définition, on dispose d'une projection $p : U \rightarrow Y$ qui identifie U au fibré normal (pour la structure réelle lisse) de Y dans X . On choisit t une classe de cohomologie de U à support compact dont l'intégrale sur chaque fibre est 1. Soit x une forme différentielle de X à support compact. En utilisant Fubini et une partition de l'unité de Y , on vérifie aisément que :

$$\int_X (p^*(y) \wedge t) \wedge x = \int_Y y \wedge x|_Y$$

Ceci prouve que $j_*(y) = p^*(y) \wedge t$ et donc $j^*(j_*(y)) = y \wedge t|_Y$. D'après la proposition 12.4 de [BT82], $t|_Y$ représente la classe d'euler du fibré normal. Puisque le fibré normal est complexe, sa classe d'euler est égale à sa classe de Chern de plus haut degré d'après le paragraphe 20 de [BT82]. \square

Proposition E.1.10. Soit X une variété lisse. Soient Y et Z des sous-variétés lisses s'intersectant transversalement. On note j l'inclusion de Y dans X et l l'inclusion de $Y \cap Z$ dans Z . Alors pour toute classe de cohomologie y de $H^*(Y)$, on dispose de l'égalité :

$$j_*(y)|_Z = l_*(y|_{Y \cap Z})$$

Démonstration. Soit U un voisinage tubulaire de Y dans X et $p : U \rightarrow Y$ la projection qui identifie U au fibré normal. Comme Y et Z s'intersectent transversalement, on peut supposer que $p^{-1}(Y \cap Z) = U \cap Z$. Alors $U \cap Z$ est un voisinage tubulaire de $Y \cap Z$ dans Z et δ , la restriction de p au-dessus de $Y \cap Z$, identifie $U \cap Z$ au fibré normal. Soit t une forme différentielle fermée à support compact inclus dans U dont l'intégrale sur chaque fibre est 1. D'une part, $j_*(y) = p^*(y) \wedge t$. D'autre part, $l_*(y|_{Y \cap Z}) = \delta^*(y|_{X \cap Z}) \wedge t|_Z$. On en déduit la formule de l'énoncé. \square

Proposition E.1.11. Soit X une variété lisse. Soient Y et Z des sous-variétés lisses s'intersectant transversalement. On note j et k les inclusions de Y et Z dans X . On note i l'inclusion de $Y \cap Z$ dans X . Pour toute classe de cohomologie y de $H^*(Y)$ et z de $H^*(Z)$, on dispose de l'égalité :

$$j_*(y) \cup k_*(z) = i_*(y|_{Y \cap Z} \cup z|_{Y \cap Z})$$

Démonstration. Soit U un voisinage tubulaire de Y dans X et $p : U \rightarrow Y$ la projection qui identifie U au fibré normal. Soit V un voisinage tubulaire de Z dans X et $q : V \rightarrow Z$ la projection qui identifie V au fibré normal. Par transversalité, le fibré normal $N_{(Y \cap Z, X)}$ est somme directe des fibrés normaux $N_{(Y \cap Z, Y)}$ et $N_{(Y \cap Z, Z)}$. Ci-dessus, on peut même avoir choisi les voisinages tubulaires U et V de sorte que les diagrammes suivants soient identifiés :

$$\begin{array}{ccc}
N_{(Y \cap Z, X)} & \longrightarrow & N_{(Y \cap Z, Z)} & & U \cap V & \xrightarrow{\beta} & U \cap Z \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\
N_{(Y \cap Z, Y)} & \longrightarrow & Y \cap Z & & Y \cap V & \xrightarrow{\delta} & Y \cap Z
\end{array}$$

où α et γ sont les restrictions de p au-dessus de $Y \cap V$ et $Y \cap Z$ et β et δ sont les restrictions de q au-dessus de $U \cap Z$ et $Y \cap Z$.

On fixe s une forme différentielle fermée à support compact inclus dans U dont l'intégrale sur chaque fibre est 1. On fixe t une forme différentielle fermée à support compact inclus dans V et dont l'intégrale sur chaque fibre est 1. Alors $s \wedge t$ est une forme différentielle fermée à support compact inclus dans $U \cap V$ dont l'intégrale sur chaque fibre est 1 (d'après Fubini).

La classe de cohomologie $j_*(y)$ est représentée par $p^*(y) \wedge s$. La classe de cohomologie $k_*(z)$ est représentée par $q^*(z) \wedge t$. Donc, vu les supports, la classe de cohomologie $j_*(y) \cup k_*(z)$ est représentée par $\alpha^*(y|_{Y \cap V}) \wedge \beta^*(z|_{Z \cap U}) \wedge (s \wedge t)$. Or, modulo une forme exacte, $y|_{Y \cap V} = \delta^*(y|_{Y \cap Z})$ et $z|_{Z \cap U} = \gamma^*(z|_{Y \cap Z})$. Donc, en posant $r = \delta \circ \alpha = \gamma \circ \beta$, la classe de cohomologie $j_*(y) \cup k_*(z)$ est représentée par $r^*(y|_{Y \cap Y} \wedge z|_{Y \cap V}) \wedge (s \wedge t)$ qui représente également la classe de cohomologie $i_*(y|_{Y \cap Y} \cup z|_{Y \cap V})$. \square

Proposition E.1.12. Soit X une variété lisse et G un sous-groupe fini de $\text{Aut}(X)$ d'ordre n . On suppose que l'action est admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Le degré de ϕ est n . Le morphisme ϕ^* induit une identification $H^*(Q) = H^*(X)^G$. Modulo cette identification, $\phi_*(x) = \sum_g x \cdot g$.

Démonstration. Le degré de ϕ est n . On peut le voir par définition et en utilisant une bonne triangulation de X . Le morphisme ϕ^* induit une identification $H^*(Q) = H^*(X)^G$ (voir les théorèmes 5.3.1 et 2.5.3 de [Gro57]). La description de ϕ_* découle formellement du fait que ϕ_* est G -invariant et $\phi_* \circ \phi^* = n \cdot \text{Id}$. \square

E.2 Cohomologie orbifold de V/G , $G \subset GL(V)$

Dans cette section, on considère un sous-groupe G de $GL(V)$. On note quotient Q de l'action de V par G . Le but de cette section est de décrire $H_o^*(Q)$, l'anneau de cohomologie orbifold du quotient global Q . On suit la démarche de Fantchi et Göttsche qui introduisent un anneau gradué $H^*(V, G)$, muni d'une action de G . L'anneau $H_o^*(Q)$ est alors le sous-anneau G -invariant $H^*(V, G)^G$.

Proposition E.2.1. En tant qu'espace vectoriel, $H^*(V, G) = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}g$.

Démonstration. Il suffit juste de reprendre la définition 1.1 de [FG03] en remarquant que pour tout élément g , V^g est un espace vectoriel, donc $H^*(V^g) = \mathbb{Z}$. Ainsi on a $H^*(V, G) = \bigoplus_{g \in G} H^*(V^g) = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}g$. \square

L'anneau $\mathbb{Q}[G]$ est défini comme étant le groupe $\bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}g$ muni du produit défini par $g \cdot h = gh$. Le groupe G , en tant que sous-groupe des unités, agit naturellement sur $\mathbb{Q}[G]$ à droite par conjugaison. Étant donné un élément g de $GL(V)$, on définit l'âge de g et on note $a(g)$ le nombre $\sum_j r_j$ où les r_j sont des nombres dans l'intervalle $[0, 1[$ tels que les $e^{i2\pi r_j}$ soient les valeurs propres de g (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité). D'après le lemme 1.12 de [FG03], étant donné deux éléments f et g de G , on dispose de l'inégalité $a(gh) \leq a(g) + a(h)$. Donc si l'on pose $F^k \mathbb{Q}[G] = \bigoplus_{g \in G | 2a(g) \leq k} \mathbb{Q}g$, on obtient une filtration F de l'anneau $\mathbb{Q}[G]$ avec action de G . Ainsi on peut considérer l'anneau gradué $Gr^F \mathbb{Q}[G]$ avec action de G . Explicitement, en tant qu'espace vectoriel, $Gr^F \mathbb{Q}[G]$ est isomorphe à $\bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}g$. Le degré d'un élément g dans l'anneau est $2a(g)$. Le produit est donné par $g \cdot h = gh$ si $a(gh) = a(g) + a(h)$ et $g \cdot h = 0$ sinon. Le transformé d'un élément h vu dans l'anneau sous l'action d'un élément g du groupe est $g^{-1}hg$.

Proposition E.2.2. En tant qu'anneau gradué avec action de G , $H^*(V, G)$ est isomorphe à $Gr^F \mathbb{Q}[G]$.

Démonstration. $H^*(V, G)$ et $Gr^F \mathbb{Q}[G]$ sont identifiés en tant qu'espaces vectoriels car égaux à $\bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}g$. Le fait que cette identification soit compatible avec la graduation et l'action de G provient directement des définitions 1.2 et 1.7 données dans [FG03]. Il reste à voir que les produits coïncident. Remarquons que g et h sont de degrés respectifs $a(h)$ et $a(h)$. Vu la définition 1.12 de [FG03], le produit de g et h dans l'anneau $H^*(V, G)$ est un élément de $\mathbb{Q}gh$. S'il est non nul, il est donc de degré $a(gh)$. On a alors $a(gh) = a(g) + a(h)$. Mais dans ce cas d'égalité, le fibré d'obstruction est de rang 0 et l'inclusion de secteurs tordus est une égalité et donc le produit est simplement gh (voir [FG03] lemme 1.12 et définition 1.14). \square

L'action de G sur $\mathbb{Q}[G]$ est donnée par conjugaison. On remarque donc que le sous-anneau G invariant de $\mathbb{Q}[G]$ n'est autre que son centre $Z(\mathbb{Q}[G])$ qui admet une base indexée par les classes de conjugaison de G .

Proposition E.2.3. En tant qu'anneau gradué avec action de G , $H_o^*(Q)$ est isomorphe à $Gr^F Z(\mathbb{Q}[G])$.

Démonstration. D'après la définition 1.28 de [FG03], l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(Q)$ est isomorphe au sous-anneau G invariant de $H^*(V, G) = Gr^F \mathbb{Q}[G]$. Puisque le G -morphisme (donné par la filtration) de $\mathbb{Q}[G]$ dans $Gr^F \mathbb{Q}[G]$ est un isomorphisme de groupes, il est évident que $(Gr^F \mathbb{Q}[G])^G$ s'identifie à $Gr^F(\mathbb{Q}[G]^G)$. De plus, d'après la remarque ci-dessus, le sous-anneau G -invariant $\mathbb{Q}[G]^G$ n'est autre que le centre $Z(\mathbb{Q}[G])$. \square

E.3 Cohomologie orbifold de X/G , G abélien

Dans cette partie, on suppose que X est une variété complexe lisse et G un sous-groupe abélien de $\text{Aut}(X)$ d'ordre n . On suppose de plus que l'action de G sur X est admissible et on note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. Le but de cette section est de décrire dans ce cas abélien l'anneau de cohomologie orbifold $H_o^*(Q)$ du quotient global Q .

Commençons par rappeler la notion d'âge dans ce cadre. Prenons un élément g de G . Soit x un point de X^g . On définit l'âge de g au point x et on note $a(g, x)$ comme le nombre $\sum_j r_j$ où les r_j sont des rationnels dans l'intervalle $[0, 1[$ tels que les $e^{i2\pi r_j}$ soient les valeurs propres de $g \in GL(T_x X)$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité). Remarquons que le groupe est abélien donc X^g est globalement invariant sous l'action de G et on peut considérer le quotient X^g/G . Pour chaque composante connexe U de X^g/G , on peut définir $a(g, U)$ comme l'âge de g en un point quelconque au-dessus de U .

Proposition E.3.1. Pour chaque élément g de G et chaque composante connexe U de X^g/G , on définit un élément formel F_g^U de degré $2a(g, U)$. Alors $H_o^*(Q)$ est décrit en tant qu'espace vectoriel gradué comme suit :

$$H_o^*(Q) = \bigoplus H^*(U) F_g^U$$

Démonstration. Suivant les définitions 1.1 et 1.2 de [FG03], on considère l'anneau $H^*(X, G) = \bigoplus_g H^*(X^g)$ muni de l'action de G . D'après la définition 1.28 de [FG03], l'anneau $H_o^*(Q)$ est alors le sous-anneau $H^*(X, G)^G$. Puisque le groupe est abélien, on obtient directement l'égalité $H_o^*(Q) = \bigoplus_g H^*(X^g)^G$. D'après la proposition E.1.12, on dispose de l'égalité $H^*(X^g)^G = H^*(X^g/G)$. En décomposant $H^*(X^g/G)$ suivant les composantes connexes de X^g/G et en utilisant la définition 1.7 de [FG03] pour la graduation de $H_o^*(Q)$ par l'âge, on en déduit directement l'énoncé ci-dessus. \square

Pour toute partie fermée O de Q , on considère ϕ_O la restriction de ϕ au-dessus de O . On considère également d_O le degré de ϕ_O . d_O n'est autre que l'indice du noyau de l'action de G sur $\phi^{-1}(O)$.

Notation E.4. Considérons F_g^U, F_h^V, F_k^W avec $ghk = 1$. Soit O une composante connexe de $U \cap V \cap W$. On considère F_O le fibré d'obstruction sur $\phi^{-1}(O)$ (1.9 [FG03]). On considère alors la classe de cohomologie suivante :

$$f_O = (\phi_O)_*(c_{\text{top}}(F_O)) \in H^*(O)$$

Proposition E.4.1. Le cup produit orbifold des deux éléments αF_g^U et βF_h^V est donné par la formule suivante :

$$(\alpha F_g^U) \cup_o (\beta F_h^V) = \sum_O (i_{O \subset W})_*(\alpha|_O \cup \beta|_O \cup f_O) / d_W F_{gh}^W$$

(Dans la formule ci-dessus, O décrit les composantes connexes de $U \cap V$ et W désigne la composante connexe de X^{gh}/G contenant O). En particulier, le produit de deux éléments αF_g^U et $\beta F_{g^{-1}}^U$ est donné par la formule suivante :

$$(\alpha F_g^U) \cup_o (\beta F_{g^{-1}}^U) = d_U/n(i_{U \subset X})_*(\alpha \cup \beta)$$

Démonstration. Commençons par prouver la première formule. Pour chaque composante O de $U \cap V$, nous allons considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(O) & \xrightarrow{j_O} & \phi^{-1}(W) \\ \downarrow \phi_O & & \downarrow \phi_W \\ O & \xrightarrow{i_O} & W \end{array}$$

D'après la définition du produit orbifold (1.14 [FG03]), on a l'égalité :

$$(\alpha F_g^U) \cup_o (\beta F_h^V) = \sum_O \gamma(O) F_{gh}^W$$

où $\gamma(O)$ est l'élément de cohomologie caractérisé par l'expression suivante :

$$\phi_W^*(\gamma(O)) = (j_O)_*(\phi_O^*(\alpha|_O \cup \beta|_O) \cup c_{\text{top}}(F_O))$$

On prouve alors la première formule en appliquant $(\phi_W)_*$ à cette dernière expression et en appliquant E.1.5 ainsi que la formule de projection. La seconde formule se déduit de la première en remarquant que $d_X = n$ et que, pour des raisons de degré, le fibré d'obstruction F_U au-dessus de $\phi^{-1}(U)$ est de rang 0 donc $f_U = (\phi_U)_*(1) = d_U$. \square

Jusqu'à la fin de cette section, on suppose de plus que X est compacte. La variété Q est alors également compacte et possède donc une classe fondamentale en homologie. On dispose de la dualité de Poincaré orbifold définie par $(x, y)_o = \int_Q x \cup_o y$. Le nombre d'intersections orbifold de trois éléments de l'anneau est définie par $x \cdot y \cdot z = \int_Q x \cup_o y \cup_o z$. La proposition suivante calcule les nombres d'intersections orbifold :

Proposition E.4.2. On considère des éléments $\alpha F_g^U, \beta F_h^V, \gamma F_k^W$. Le nombre d'intersections est non nul lorsque $ghk = 1$. Dans ce cas, il est donné par la formule suivante :

$$\alpha F_g^U \cdot \beta F_h^V \cdot \gamma F_k^W = 1/n \sum_O \int_O \alpha|_O \cup \beta|_O \cup \gamma|_O \cup f_O$$

(Dans la formule ci-dessus, O décrit les composantes connexes de $U \cap V \cap W$)

Démonstration. Le cup produit orbifold des trois éléments est inclus dans des secteurs correspondant à ghk . Le triplet est non nul lorsque ce produit est dans Q i.e. $ghk = 1$. Dans ce cas, on applique la première formule de la proposition E.4.1 pour calculer $\beta F_h^V \cup_o \gamma F_k^W$ puis la deuxième formule pour calculer $\alpha F_g^U \cup_o \beta F_h^V \cup_o \gamma F_k^W$. On obtient le résultat suivant :

$$\sum_O d_U/n(i_{U \subset X})_*(\alpha \cup (i_{O \subset U})_*(\beta|_O \cup \gamma|_O \cup f_O)/d_U)$$

où O décrit l'ensemble des composantes connexes de $V \cap W$ incluses dans U . D'après la formule de projection, chaque terme de cette somme se simplifie :

$$1/n(i_{O \subset X})_*(\alpha|_O \cup \beta|_O \cup \gamma|_O \cup f_O)$$

On prouve la formule de la proposition en utilisant que pour tout élément ω de $H^*(O)$, on a $\int_X (i_{O \subset X})_*(\omega) = \int_O \omega$. \square

Annexe F

Variétés abéliennes

Dans cette appendice, on considère X une variété complexe abélienne de dimension trois et G un sous-groupe fini abélien de $\text{Aut}_0(X)$ (automorphismes fixant le neutre). On suppose de plus que l'action de G sur X préserve le volume. Remarquons que, puisque X est projective, l'action de G sur X est admissible. On note $\phi : X \rightarrow Q$ le quotient géométrique. On appellera origine l'image du neutre dans Q .

Dans cette appendice, on cherche à classifier les paires (G, X) (modulo isomorphisme). On commencera par déterminer explicitement une classe de paires. De plus à chacune de ces paires, on pourra associer un nombre fini de nouvelles paires (via une G -isogénie). Toute paire est ainsi obtenue. Pour cette classification, nous utiliserons les résultats sur les automorphismes de variétés abéliennes obtenus dans [Fuj88], [BGAL99] et [BL04]. D'après 4.1, le lieu singulier de Q se décompose en courbes et points isolés. De plus, au plus trois courbes du lieu singulier passent par l'origine. Nous appellerons type de la paire le nombre de courbes du lieu singulier passant par l'origine.

F.1 Paires de type 0

Proposition F.1.1. En reprenant les notations standards de [BL04], les paires (G, X) de type 0 sont décrites dans le tableau suivant :

G	X	Générateur
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$E_j \times E_j \times E_j$	$j\text{Id}$
$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$	$X(\mathbb{Q}(\xi_7), \phi_2^7)$	ξ_7

Démonstration. En général, la situation d'un tore complexe et d'un sous-groupe G d'automorphismes (fixant le neutre) est décrite de manière combinatoire par un espace vectoriel V muni d'un sous-groupe G de $GL(V)$ et d'un réseau réel N de V stable sous l'action de G , tout cela modulo isomorphisme. Ici la paire (X, G) peut être décrite combinatoirement par un sous-groupe $G \subset \mathbb{C}^* \cap SL_3(\mathbb{C})$ et un réseau N stable sous l'action de G . Remarquons que

le neutre est fixé par tous les éléments de G donc l'image locale du quotient au-dessus de l'origine est $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3/G$. D'après la description de la section 3.1, la paire (X, G) est de type 0 lorsque les noyaux des trois caractères x_1 , x_2 et x_3 sont triviaux. Ceci équivaut également au fait que les éléments non nuls g de G n'ont pas de valeur propre égale à 1, ou de manière équivalente, vérifient que X^g est fini (d'après [BL04] 13.1.2). Ceci implique également que G est cyclique (car le caractère x_1 induit un isomorphisme entre G et un groupe de racines de l'unité). Remarquons que G ne peut être d'ordre deux. Nous sommes exactement dans le cadre de la classification de [BGAL99], section 4 avec l'hypothèse supplémentaire $G \subset SL_3(\mathbb{C})$. En utilisant le lemme 4.1, on conclut que l'ensemble des valeurs propres d'un générateur de G est soit $\{j\}$, soit $\{\xi_7, \xi_7^2, \xi_7^4\}$. On conclut en utilisant le théorème 4.2. \square

F.2 Paires de type 1

On considère G un sous-groupe cyclique d'automorphismes (préservant le neutre) d'une surface abélienne S tel que S^g est fini pour tout $g \in G \setminus \{0\}$ et tel que le caractère $\det(G)$ ($G \subset GL(T_0(X))$) soit de noyau non nul et d'image d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6. On considère une courbe elliptique E . On suppose de plus que $E = E_i$ si l'image de $\det(G)$ est d'ordre 4 et $E = E_j$ si l'image de $\det(g)$ est d'ordre 3 ou 6. Ainsi on fait agir G sur la courbe elliptique E via le caractère $\det(G)^{-1}$.

Proposition F.2.1. En reprenant les notations précédentes, les $(G, S \times E)$ sont des paires de type 1. Pour $(G, S \times E)$ fixé, il existe un nombre fini de nouvelles paires (G, X) telles qu'il existe une G -isogénie de $S \times E$ dans X dont les restrictions à S et E sont injectives. En faisant varier $(G, S \times E)$, on obtient toutes les paires de type 1

Démonstration. La paire (X, G) peut être décrite combinatoirement par un sous-groupe fini G de $(\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$ et un réseau réel N stable sous l'action de G . Remarquons que le neutre est fixé par tous les éléments de G , donc l'image locale du quotient au-dessus de l'origine est donnée par $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3/G$. D'après la description de la section 3.1, la paire (X, G) est de type 1 lorsque le noyau d'exactly un des caractères est non trivial. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que le noyau de x_3 est non trivial.

Notons o l'ordre du noyau de x_3 , de sorte que les éléments du noyau soient de la forme $(\xi, \xi^{-1}, 1)$ où ξ est une racine o -ième de l'unité. Soit (a, b, c) un élément de \mathbb{C}^3 appartenant au réseau N . Puisque N est stable sous l'action de G , $\sum_{\xi \in \mathbb{U}_o} (\xi a, \xi^{-1} b, 1c)$ est encore un élément de N . Ainsi $o(0, 0, c)$ est un élément de N . Puisque N est un réseau, il contient également $o(a, b, 0)$. Posons $P = (\mathbb{C}^2 \times 0) \cap N$ et $R = (0^2 \times \mathbb{C}) \cap N$. Posons $K = P \times R$. D'après ce qui précède $K \subset N \subset oK$.

Posons $S = \mathbb{C}^2/P$ et $E = \mathbb{C}/R$. De sorte que l'inclusion $K \subset N$ induit une isogénie de $S \times E$ dans X (car $K \subset N \subset oK$). Cette isogénie est G -équivariante car K et N sont stables sous l'action de G . Ses restrictions à S et E sont injectives car $P = (\mathbb{C}^2 \times 0) \cap N$ et $R = (0^2 \times \mathbb{C}) \cap N$. De plus, par isogénie, $S \times E$ est une variété abélienne donc S est une surface abélienne.

Les noyaux des caractères x_1 et x_2 sont triviaux. Ceci implique que G est cyclique (car le noyau de x_1 induit une identification de G avec un groupe de racines de l'unité). Ceci implique également que G peut être vu comme un sous-groupe d'automorphismes de S (car G s'injecte dans $(\mathbb{C}^*)^2$ via les caractères x_1 et x_2). Ceci équivaut également au fait que pour tout élément g de G non nul, S^g est fini (d'après [BL04] 13.1.2). Remarquons que le caractère $\det(G)$ ($G \subset GL(T_0(S))$) n'est autre que l'inverse du caractère x_3 . Rappelons que le noyau du caractère du noyau x_3 est non nul. De plus, G agit sur la courbe elliptique E par le caractère x_3 . Donc l'image de ce caractère est d'ordre 1,2,3,4 ou 6 (d'après [BL04] 13.2.6). De plus si cet ordre est 3 ou 6 alors $E = E_j$ et si cet ordre est 4, alors $E = E_i$ (d'après [BL04] 13.3.4)

Ainsi, nous avons prouvé que toute paire (G, X) de type 1 s'obtient à partir d'une paire $(G, S \times E)$ et d'une G -isogénie de $S \times E$ dans X dont les restrictions à S et E sont injectives. Il nous reste à prouver que chaque paire $(G, S \times E)$ est de type 1 et que, cette paire étant fixée, il existe un nombre fini de paires (X, G) telles qu'il existe une G -isogénie de $S \times E$ dans X dont les restrictions à S et E sont injectives. Ceci est une sorte de réciproque de ce que nous venons de démontrer. La démonstration est donc très analogue à ce qui précède mais dans le sens inverse et on peut même reprendre les notations. En particulier, le nombre fini d'isogénies vient du fait qu'il existe un nombre fini de réseaux intermédiaires $K \subset N \subset oK$. \square

Proposition F.2.2. En reprenant les notations précédentes, les paires $(G, S \times E)$ sont décrites dans le tableau suivant :

G	S	Générateur	E
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	S	$-\text{Id}$	E
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$E_i \times E_i$	$i\text{Id}$	E_i
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$E_j \times E_j$	$-j\text{Id}$	E_j
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & -y & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	E
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & -y & x+y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	E
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & -y & x+y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	E
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	$E_{i\sqrt{2}} \times E_{i\sqrt{2}}$	$\begin{bmatrix} i\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	E
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	$E_i \times E_i$	$\begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	E_i
$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	$E_i \times E_i$	$\begin{bmatrix} i & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$	E
$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	$E_j \times E_j$	$\begin{bmatrix} 0 & j^2 \\ -j^2 & 0 \end{bmatrix}$	E_j

(Dans ce tableau, les matrices dans la colonne S sont des matrices de périodes d'un 2-tore complexe. On ne retiendra que les matrices de période induisant une surface abélienne)

Démonstration. Il s'agit de déterminer S et G , la description de la paire $(G, S \times E)$ en découlant. La donnée de S et G est décrite combinatoirement par $G \subset (\mathbb{C}^*)^2$ et N un réseau de \mathbb{C}^2 stable sous l'action de G . L'ordre o de G est 2,3,4,5,6,8,10 ou 12 (d'après [BL04] 13.2.7). Les valeurs propres des générateurs de G sont d'ordre o (d'après [BL04] 13.2.1). Traitons le cas $o = 2$. G engendré par $-\text{Id}$ et S est quelconque. Traitons les cas $o = 3$. j et j^2 sont les complexes d'ordre multiplicatif 3. Les valeurs propres des générateurs g de G ne peuvent être égales sinon $\det(G)$ serait de noyau trivial. Elles sont donc j et j^2 . On cherche donc un automorphisme de S d'ordre 3 dont l'action préserve le volume. Cette classification a été effectuée pour les 2-tores dans [Fuj88] page 33. Traitons les cas $o = 3$. i et $-i$ sont les complexes d'ordre multiplicatif 4. Si les valeurs propres des générateurs de G sont égales, G est engendré par $-i\text{Id}$ et $S = E_i \times E_i$ (d'après [BL04] 13.3.5). Si les valeurs propres des générateurs sont distinctes, on cherche un automorphisme de S d'ordre 4 dont l'action préserve le volume. Cette classification a été effectuée pour les 2-tores dans [Fuj88] page 33. Traitons le cas $o = 6$. $-j$ et $-j^2$ sont les complexes d'ordre 6. Si les valeurs propres des générateurs de G sont égales,

G est engendré par $-j\text{Id}$ et $S = E_j \times E_j$ (d'après [BL04] 13.3.5). Si les valeurs propres des générateurs sont distinctes, on cherche un automorphisme de S d'ordre 6 dont l'action préserve le volume. Cette classification a été effectuée pour les 2-tores dans [Fuj88] page 33. Traitons les cas où o est 5,8,10 ou 12. Alors, nous sommes exactement dans le cadre du théorème 13.3.6 de [BL04] avec l'hypothèse supplémentaire que $\det(G)$ soit d'image d'ordre 1,2,3,4 ou 6. Il existe alors deux possibilités pour l'ordre 8 et deux possibilité pour l'ordre 12. \square

F.3 Paires de type 2 ou 3

Soit G un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$. On suppose que l'image de chacun des caractères x_k est d'ordre 2,3,4 ou 6. On suppose que le noyau de deux des trois caractères au moins est non trivial. On considère trois courbes elliptiques E_k . Pour chaque $k \in \{1, 2, 3\}$, on suppose que la courbe elliptique E_k est égale à E_j si l'image de x_k est d'ordre 3 ou 6 et qu'elle est égale à E_i si l'image de x_k est d'ordre 4. Ainsi on fait agir G sur les courbes elliptiques E_k via les caractères x_k .

Proposition F.3.1. En reprenant les notations précédentes, les $(G, E_1 \times E_2 \times E_3)$ sont des paires de type 1 ou 2. Pour $(G, E_1 \times E_2 \times E_3)$ fixé, il existe un nombre fini de nouvelles paires (X, G) telles qu'il existe une G -isogénie de $E_1 \times E_2 \times E_3$ dans X dont les restrictions aux courbes E_k sont injectives. En faisant varier $(G, E_1 \times E_2 \times E_3)$, on obtient toutes les paires de type 2 ou 3.

Démonstration. La paire (X, G) peut être décrite combinatoirement par un sous-groupe fini G de $(\mathbb{C}^*)^3 \cap SL_3(\mathbb{C})$ et un réseau réel N stable sous l'action de G . Remarquons que le neutre est fixé par tous les éléments de G , donc l'image locale du quotient au-dessus de l'origine est donnée par $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3/G$. D'après la description de la section 3.1, la paire (X, G) est de type 2 lorsque le noyau d'au moins deux des caractères est non trivial. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que les noyaux de x_1 et x_2 sont non triviaux.

Notons p l'ordre du noyau de x_1 , de sorte que les éléments du noyau soient de la forme $(1, \xi, \xi^{-1})$ où ξ est une racine p -ième de l'unité. Soit (a, b, c) un élément de \mathbb{C}^3 appartenant au réseau N . Puisque N est stable sous l'action de G , $\sum_{\xi \in \mathbb{U}_p} (1a, \xi b, \xi^{-1}c)$ est encore un élément de N . Ainsi $p(a, 0, 0)$ est un élément de N . Notons q l'ordre du noyau de x_2 . Soit (a, b, c) un élément de \mathbb{C}^3 appartenant au réseau N . De la même façon, $q(0, b, 0)$ est un élément de N . Notons o le plus petit commun multiple de p et q . Alors pour tout élément (a, b, c) de N , $o(a, 0, 0)$, $o(0, b, 0)$ et $o(0, 0, c)$ sont des éléments de N . On note K_k l'intersection de N avec la k -ième droite canonique de \mathbb{C}^3 . On pose $K = K_1 \times K_2 \times K_3$. D'après ce qui précède, $K \subset N \subset oK$.

Posons $E_k = \mathbb{C}/K_k$. De sorte que l'inclusion $K \subset N$ induit une isogénie de $E_1 \times E_2 \times E_3$ dans X (car $K \subset N \subset oK$). Cette isogénie est G -équivariante

car K et N sont stables sous l'action de G . Ses restrictions aux E_k sont injectives car l'intersection de N avec la k -ième droite canonique de \mathbb{C}^3 est K_k .

G agit sur la courbe elliptique E_k par le caractère x_k . Donc l'image de ce caractère, non nul, est d'ordre 2,3,4 ou 6 (d'après [BL04] 13.2.6). De plus si cet ordre est 3 ou 6, alors $E_k = E_j$ et si cet ordre est 4, alors $E_k = E_i$ (d'après [BL04] 13.3.4).

Ainsi nous avons prouvé que toute paire (G, X) de type 1 s'obtient à partir d'une paire $(G, E_1 \times E_2 \times E_3)$ et d'une G -isogénie de $E_1 \times E_2 \times E_3$ dans X dont les restrictions aux E_k sont injectives. Il nous reste à prouver que chaque paire $(G, E_1 \times E_2 \times E_3)$ est de type 1 et que, cette paire étant fixée, il existe un nombre fini de paires (X, G) telles qu'il existe une G -isogénie de $E_1 \times E_2 \times E_3$ dans X dont les restrictions aux E_k sont injectives. Ceci est une sorte de réciproque de ce que nous venons de démontrer. La démonstration est donc très analogue à ce qui précède mais dans le sens inverse, et on peut même reprendre les notations. En particulier, le nombre fini d'isogénies vient du fait qu'il existe un nombre fini de réseaux intermédiaires $K \subset N \subset oK$. \square

Proposition F.3.2. En reprenant les notations précédentes, à permutation près des facteurs, les paires $(G, E_1 \times E_2 \times E_3)$ sont décrites dans les tableaux suivants :

G	Générateur	$E_1 \times E_2 \times E_3$
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$1/6(2, 3, 1)$	$E_j \times E \times E_j$

G	Générateur 1	Générateur 2	$E_1 \times E_2 \times E_3$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$1/2(0, 1, 1)$	$1/2(1, 0, 1)$	$E \times E' \times E''$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$1/2(0, 1, 1)$	$1/4(1, 0, 3)$	$E_i \times E \times E_i$
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$1/4(0, 1, 3)$	$1/4(1, 0, 3)$	$E_i \times E_i \times E_i$
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$1/3(0, 1, 2)$	$1/3(1, 0, 2)$	$E_j \times E_j \times E_j$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$1/2(0, 1, 1)$	$1/6(1, 1, 4)$	$E_j \times E_j \times E_j$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$1/2(0, 1, 1)$	$1/6(1, 0, 5)$	$E_j \times E \times E_j$
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$1/3(0, 1, 2)$	$1/6(1, 0, 5)$	$E_j \times E_j \times E_j$
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$1/6(0, 1, 5)$	$1/6(1, 0, 5)$	$E_j \times E_j \times E_j$

(Dans ces tableaux, les générateurs de G sont représentés par des triplets (r_1, r_2, r_3) de rationnels comme dans 3.1)

Démonstration. Il s'agit de déterminer G , la description de la paire $(G, E_1 \times E_2 \times E_3)$ en découlant. Nous allons commencer par montrer que $G \subset (\mathbb{U}_4)^3$ ou $G \subset (\mathbb{U}_6)^3$. Supposons que G possède deux éléments (a, b, c) et (a', b', c') avec a une racine de l'unité d'ordre 3 ou 6 et b' une racine de l'unité d'ordre 4. Dans ce cas, b n'est pas d'ordre 4 (sinon c serait d'ordre 12), donc b est d'ordre 2,3 ou 6. De même a' n'est pas d'ordre 3 ou 6 (sinon c' serait d'ordre

12), donc a' est d'ordre 2 ou 4. Considérons l'élément (aa', bb', cc') . Vu les ordres de a et a' , aa' est d'ordre 3, 6 ou 12. Puisque aa' n'est pas d'ordre 12, aa' est d'ordre 3 ou 6. Vu les ordres de b et b' , bb' est d'ordre 4 ou 12. Puisque bb' n'est pas d'ordre 12, bb' est d'ordre 4. Mais alors cc' est d'ordre 12, ce qui est exclu. Ainsi on a $G \subset (\mathbb{U}_4)^3$ ou $G \subset (\mathbb{U}_6)^3$.

Chaque élément g du groupe s'écrit $(e^{2i\pi r_1}, e^{2i\pi r_2}, e^{2i\pi r_3})$ avec r_1, r_2, r_3 des rationnels compris dans l'intervalle $[0, 1[$ et tels que le nombre $r_1 + r_2 + r_3$ soit un entier. On considère le sur-réseau L de \mathbb{Z}^n engendré par les triplets (r_1, r_2, r_3) lorsque g décrit G . G est alors le quotient de L par \mathbb{Z}^3 . Remarquons qu'en fait, $L = \mathbb{Z}e_3 \oplus N$ où N est l'intersection du réseau L avec l'hyperplan d'équation $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Ainsi G est quotient de N par le réseau \mathbb{Z}^2 de base $(\overrightarrow{e_3e_1}, \overrightarrow{e_3e_2})$. Notons p l'ordre du noyau de x_1 et q l'ordre du noyau de x_2 . Alors N est un sur-réseau de $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ dont les intersections avec $\mathbb{R} \times 0$ et $0 \times \mathbb{R}$ sont $\mathbb{Z}/p \times 0$ et $0 \times \mathbb{Z}/q$. Notons H le sous-groupe de G engendré par ces noyaux. G/H est le quotient de N par $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$.

Traitons le cas où G est un sous-groupe de $(\mathbb{U}_4)^3$. Alors N est un sous-réseau de $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$. Donc G/H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/(4/p\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(4/q\mathbb{Z})$ qui ne contient pas d'élément $(x, 0)$ avec $x \neq 0$ ou d'élément $(0, y)$ avec $y \neq 0$. Supposons qu'un des trois caractères x_k a un noyau d'ordre 4. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $p = 4$ et $q \in \{2, 4\}$. G/H , vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}/(1\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(4/o\mathbb{Z})$, est donc nul. Le réseau N est engendré par $(1/6, 0)$ et $(0, 1/q)$.

On se place dans les cas restants. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $p = q = 2$. G/H , vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, est donc nul ou le groupe engendré par $(1, 1)$. Lorsque G/H est nul, N est engendré par $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$. Lorsque G/H est engendré par $(1, 1)$, N est engendré par $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ et $(1/4, 1/4)$ et l'on constate que le noyau de x_1 est d'ordre 4, ce qui est exclu.

Traitons le cas où G est un sous-groupe de $(\mathbb{U}_6)^3$ mais pas de $(\mathbb{U}_4)^3$. Alors N est un sous-réseau de $\mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/6$. Donc G/H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/(6/p\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(6/q\mathbb{Z})$ qui ne contient pas d'élément $(x, 0)$ avec $x \neq 0$ ou d'élément $(0, y)$ avec $y \neq 0$. Supposons qu'un des trois caractères x_k a un noyau d'ordre 6. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $p = 6$ et $q \in \{2, 3, 6\}$. G/H , vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}/(1\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(6/q\mathbb{Z})$, est donc nul. Le réseau N est alors engendré par les vecteurs $(1/6, 0)$ et $(0, 1/q)$.

On se place dans les cas restants. Supposons que deux des caractères x_k aient un noyau d'ordre 3. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer $p = q = 3$. G/H , vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, est donc nul ou le groupe engendré par $(1, 1)$. Lorsque le groupe G/H est nul, N est engendré par $(1/3, 0)$ et $(0, 1/3)$. Lorsque G/H est engendré par $(1, 1)$, le réseau N est engendré par $(1/3, 0)$, $(0, 1/3)$ et $(1/6, 1/6)$, donc le noyau de x_1 est d'ordre 6 ce qui est exclu.

On se place dans les cas restant. Supposons qu'un des noyaux soit d'ordre 3. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer $p = 3$ et $q = 2$. G/H , vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$, est donc nul. Dans ce cas le réseau N est engendré par $(1/3, 0)$ et $(0, 1/2)$ ou encore seulement par $(1/3, 1/2)$.

On se place dans les cas restants. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer $p = q = 2$. G/H , vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$ est donc nul ou le groupe engendré par $(1, 2)$ ou le groupe engendré par $(1, 1)$. Lorsque G/H est nul, le réseau N est engendré par $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$, donc G est inclus dans $(\mathbb{U}_4)^3$ ce qui est exclu. Lorsque G/H est engendré par $(1, 2)$, le réseau N est engendré par $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ et $(1/6, 1/3)$, donc le noyau de x_1 est d'ordre 6, ce qui est exclu. Lorsque G/H est engendré par $(1, 1)$, le réseau N est engendré par $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ et $(1/6, 1/6)$ ou encore seulement par $(0, 1/2)$ et $(1/6, 1/6)$. \square

Bibliographie

- [Art66] Michaël ARTIN : On isolated rational singularities of surfaces. *Amer. J. Math.*, 88(1):129–136, 1966.
- [Bat99] Victor V. BATYREV : Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs. *J. Eur. Math. Soc.*, 1(1):5–33, 1999.
- [BGAL99] Christina BIRKENHAKE, Victor GONZÁLEZ-AGUILERA et Herbert LANGE : Automorphisms of 3-dimensional abelian varieties. *Contemp. Math.*, 240:25–47, 1999.
- [BGP] Jim BRYAN, Tom GRABER et Rahul PANDHARIPANDE : The orbifold quantum cohomology of C^2/Z_3 and Hurwitz-Hodge integrals. arXiv :math.AG/0510335.
- [BKR01] Tom BRIDGELAND, Alastair KING et Miles REID : The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):535–554, 2001.
- [BL04] Christina BIRKENHAKE et Herbert LANGE : *Complex abelian varieties*, volume 302 de *Die Grundlehren*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Blu] Mark BLUME : Construction of G -Hilbert schemes. arXiv :math.AG/0607577.
- [BMP] Samuel BOISSIERE, Etienne MANN et Fabio PERRONI : On the Cohomological Crepant Resolution Conjecture for weighted projective spaces. arXiv :math.AG/0610617.
- [Bou68] Nicolas BOURBAKI : *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, volume 1337 de *Actualités Scientifiques et Industrielles*. Hermann, Paris, 1968.
- [BR85] Peter BARDSLEY et Roger W. RICHARDSON : Étale slices for algebraic transformation groups in characteristic p . *Proc. Lond. Math. Soc. (Serie 3)*, 51(2):295–317, 1985.
- [Bre67] Glen E. BREDON : *Sheaf theory*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [Bre97] Glen E. BREDON : *Topology and geometry*, volume 139 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

- [BT82] Raoul BOTT et Loring W. TU : *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [CR02] Alastair CRAW et Miles REID : How to calculate $A\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$. In *Geometry of toric varieties*, pages 129–154. Soc. Math. France, Paris, 2002.
- [CR04] Weimin CHEN et Yongbin RUAN : A new cohomology theory of orbifold. *Comm. Math. Phys.*, 248(1):1–31, 2004.
- [Dan78] Vladimir I. DANILOV : The geometry of toric varieties. *Russian Math. Surveys*, 33(2):85–134, 1978.
- [Deb01] Olivier DEBARRE : *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [DV34] Patrick DU VAL : On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 30:453–465, 1934.
- [FG03] Barbara FANTECHI et Lothar GÖTTSCHE : Orbifold cohomology for global quotients. *Duke Math. J.*, 117(2):197–227, 2003.
- [Fog73] John FOGARTY : Fixed point schemes. *Amer. J. Math.*, 95(1):35–51, 1973.
- [Fuj88] Akira FUJIKI : Finite automorphism groups of complex tori of dimension two. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 24(1):1–97, 1988.
- [Ful84] William FULTON : *Intersection theory*, volume 2 de *Ergebnisse*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Ful93] William FULTON : *Introduction to toric varieties*, volume 131 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1993.
- [GD71] Alexander GROTHENDIECK et Jean A. DIEUDONNÉ : *Éléments de géométrie algébrique I*, volume 166 de *Die Grundlehren*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [GK04] Victor GINZBURG et Dimitry KALEDIN : Poisson deformations of symplectic quotient singularities. *Adv. Math.*, 186(1):1–57, 2004.
- [GM83] Mark GORESKEY et Robert MACPHERSON : Intersection homology II. *Invent. Math.*, 72(1):77–129, 1983.
- [Gro57] Alexander GROTHENDIECK : Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. (Série 2)*, 9:119–221, 1957.
- [Gro71] Alexander GROTHENDIECK : *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, volume 224 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [GSV83] Gerard GONZALEZ-SPRINBERG et Jean-Louis VERDIER : Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (Série 4)*, 16(3):409–449, 1983.

- [Har77] Robin HARTSHORNE : *Algebraic geometry*, volume 52 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [IN96] Yukari ITO et Iku NAKAMURA : McKay correspondence and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad. (Série A)*, 72(7):135–138, 1996.
- [IN00] Yukari ITO et Hiraku NAKAJIMA : McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three. *Topology*, 39(6):1155–1191, 2000.
- [IR96] Yukari ITO et Miles REID : The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3, \mathbb{C})$. In *Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)*, pages 221–240. De Gruyter, Berlin, 1996.
- [Kal] Dimitry KALEDIN : Dynkin diagrams and crepant resolutions of quotient singularities. arXiv :math.AG/9903157.
- [Len02] Rebecca LENG : *The Mckay correspondence and orbifold Riemann-Roch*. Thèse de doctorat, Institut de Mathématiques de l’université de Warwick, 2002.
- [LQ02] Wei-Ping LI et Zhenbo QIN : On 1-point gromov-witten invariants of the hilbert schemes of points on surfaces. *Turkish J. Math.*, 26(1):53–68, 2002.
- [LQW04] Wei-Ping LI, Zhenbo QIN et Weiqiang WANG : Ideals of the cohomology rings of Hilbert schemes and their applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(1):245–265, 2004.
- [LS01] Manfred LEHN et Christoph SORGER : Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes. *Duke Math. J.*, 110(2):345–357, 2001.
- [LS03] Manfred LEHN et Christoph SORGER : The cup product of Hilbert schemes for $K3$ surfaces. *Invent. Math.*, 152(2):305–329, 2003.
- [Lun73] Domingo LUNA : Slices étales. *Bulletin de la Soc. Math. France*, Mémoire 33:81–105, 1973.
- [McK81] John MCKAY : Cartan matrices, finite groups of quaternions, and Kleinian singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81(1):153–154, 1981.
- [Mum99] David MUMFORD : *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Nak01] Iku NAKAMURA : Hilbert schemes of abelian group orbits. *J. Algebraic Geom.*, 10(4):757–779, 2001.
- [Oda78] Tadao ODA : *Torus embeddings and applications*, volume 57 de *Tata Institute of Fundamental Research*. Springer Verlag, Heidelberg, 1978.

- [Par91] Rita PARDINI : Abelian covers of algebraic varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 417:191–213, 1991.
- [Per] Fabio PERRONI : Chen-Ruan cohomology of ADE singularities. arXiv :math.AG/0605207.
- [Rua06] Yongbin RUAN : The cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds. *Contemp. Math.*, 403:117–126, 2006.
- [Sat56] Ichiro SATAKE : On a generalization of the notion of manifold. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42:359–363, 1956.
- [Ser56] Jean-Pierre SERRE : Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6:1–42, 1955–1956.
- [Tér04] Sophie TÉROUANNE : *Correspondance de McKay : variations en dimension trois*. Thèse de doctorat, Institut Fourier de l’université de Grenoble, 2004.