



**HAL**  
open science

# CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA DYNAMIQUE D'AIMANTATION DANS LES MATERIAUX MAGNETIQUES DOUX : CARACTERISATION ET SIMULATION

Olivier Maloberti

► **To cite this version:**

Olivier Maloberti. CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA DYNAMIQUE D'AIMANTATION DANS LES MATERIAUX MAGNETIQUES DOUX : CARACTERISATION ET SIMULATION. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2006. Français. NNT: . tel-00156657

**HAL Id: tel-00156657**

**<https://theses.hal.science/tel-00156657>**

Submitted on 22 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*N° attribué par la bibliothèque*

□□□□□□□□□□

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INP Grenoble**

***Spécialité : « Génie Electrique »***

préparée au **Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble**

dans le cadre de l'**Ecole Doctorale**

**« Electronique Electrotechnique Automatique Télécommunications Signal »**

présentée et soutenue publiquement

par

Olivier Maloberti

Le 25 Septembre 2006

**TITRE**

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA DYNAMIQUE  
D'AIMANTATION DANS LES MATERIAUX MAGNETIQUES DOUX :  
CARACTERISATION ET SIMULATION**

---

***DIRECTEUR DE THESE***

**Gérard MEUNIER**

***CO-DIRECTEUR DE THESE***

**Afef KEDOUS-LEBOUC**

---

**JURY**

M.	André Thiaville	, Président
M.	Jacques Degauque	, Rapporteur
M.	Fransisco Alves	, Rapporteur
M <sup>r</sup> .	Gérard Meunier	, Directeur de thèse
M <sup>me</sup> .	Afef Kedous-Lebouc	, Co-encadrant
M <sup>r</sup> .	Vincent Mazauric	, Examineur







# Remerciements

Je souhaiterais avant tout remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont permis l'accomplissement de ce projet. Je pense donc en particulier à mon directeur de thèse Gérard Meunier, mon employeur Vincent Mazauric, et mes deux co-encadrants Afef Kedous-Lebouc et Olivier Geoffroy. Aucune réalisation significative n'aurait été possible sans leurs apports scientifique, intellectuel, moral, technique, expérimental et critique.

Nos travaux ont été effectués en majorité au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble: merci donc à tout le personnel de l'établissement (chercheurs, ingénieurs, techniciens, assistants, informaticiens, secrétaires, directeurs, femmes de ménage, gardiens). De manière plus personnelle et professionnelle, je tiens à faire part de ma gratitude à Gérard Meunier et Afef Kedous-Lebouc (une deuxième fois), Patrice Labie, Patrick Eustache, Olivier Chadebec, Yves Lembeye, Yvon Bésanger, Thierry Chevalier, Yves Maréchal, Jean-Cristophe Crébier, .... Certains « bons gars » et certaines « ? », dans la même « galère » que moi ont aussi consacré du temps pour m'aider à m'intégrer, à m'adapter aux outils de travail ou tout simplement à me changer les idées par une amitié simple et sincère, il s'agit de Tuan, Gilles, Huynh, Bruno, Fahrid, Thierry, Lalao, Denis, Delcho, Diana, Christian, Son, Sylvie, Olivier, Bui, Hervé, Vanya, Cédric, Natalya ... Pourvu que ceux, à qui je n'ai pas pensés, ne lisent pas cette page!

L'autre partie du temps je l'ai passée à Schneider Electric où j'ai été habilement managé : Vincent Mazauric oblige; et où j'ai appris de certaines personnes expérimentées et serviables: Vincent Mazauric oblige encore, Hugues Filliputti, Loïc Rondot, Benoît Hâge, Jean-Paul Gonnet, Vincent Leconte, Yvon Rebière, Laurent Carbone, Corinne Sauder, Dimitrios Ladas, ...

Mes pensées les plus profondes et intimes vont vers ma famille : ma mère toujours à mon écoute et parfois pour son plus grand désarroi, ennui et malheur, car c'est bien la seule personne à qui malheureusement j'ose confier mes inquiétudes et sur qui je reporte trop souvent mon stress, omniprésents durant ces cinq (que dis-je dix) dernières années; et mon père, mon frère et mes sœurs avec lesquels la communication s'est depuis alors assombrie. Pourvu que la fin de cette thèse soit aussi la fin de nos frustrations, de ces non-dits, de ces regrets et mauvais sentiments.

Toutes ces personnes m'ont donné la grande chance de pouvoir découvrir le monde ... du travail autrement. « Autrement » que je souhaite encore explorer ... ici ... ou ailleurs.



Contribution à la Modélisation des Effets  
Dynamiques dans les Matériaux Magnétiques  
Doux. Caractérisation et Simulation.

Olivier Maloberti

29 novembre 2006



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>II</b>	<b>Transformations Energétiques et Matériaux</b>	<b>25</b>
<b>1</b>	<b>Transformations</b>	<b>29</b>
1.1	Conversion et Maîtrise de l'Energie . . . . .	30
1.2	"Pertes Fer" . . . . .	32
1.2.1	Principe de séparation . . . . .	32
1.2.2	Modélisations macroscopiques . . . . .	35
1.3	Hystérésis . . . . .	38
1.3.1	Hystérésis statique . . . . .	40
1.3.2	Hystérésis dynamique . . . . .	44
1.4	Formulations électromagnétiques . . . . .	48
1.4.1	Equations de Maxwell . . . . .	49
1.4.2	Potentiels électromagnétiques . . . . .	51
1.4.3	Propriétés des matériaux . . . . .	52
1.5	Conclusion . . . . .	53
<b>2</b>	<b>Paysages</b>	<b>55</b>
2.1	l'Energie . . . . .	57
2.2	l'Economie . . . . .	63
2.3	La Technique . . . . .	64
2.4	Conclusion . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Matériaux Magnétiques</b>	<b>73</b>
3.1	Origines et descriptions du ferromagnétisme . . . . .	74
3.1.1	Echelles d'observation et terminologies . . . . .	74
3.1.2	Ferromagnétismes macroscopiques . . . . .	77
3.2	Processus d'aimantation et courants induits . . . . .	77
3.2.1	Théories croisées . . . . .	77
3.2.2	Processus principaux . . . . .	83
3.3	Conclusion . . . . .	90

<b>III</b>	<b>Modélisation à l'Échelle Mésoscopique</b>	<b>91</b>
<b>4</b>	<b>Dynamiques Microscopiques</b>	<b>99</b>
4.1	Cadre de l'étude . . . . .	100
4.2	Mécanismes microscopiques d'aimantation . . . . .	100
4.2.1	Déplacement d'une paroi magnétique . . . . .	100
4.2.2	Déplacement de plusieurs parois magnétiques . . . . .	108
4.2.3	Déformations, multiplications et fusions . . . . .	112
4.2.4	Rotation de moments magnétiques . . . . .	115
4.3	Propriétés dynamiques . . . . .	119
4.3.1	Polarisation et Induction magnétiques mésoscopiques . . .	119
4.3.2	Statistique d'objets magnétiques, homogénéisation . . . .	121
4.3.3	Non linéarités, inhomogénéités et effets de surface . . . .	125
4.3.4	Généralisation électrique-magnétique . . . . .	129
4.4	Expression des pertes induites . . . . .	130
4.4.1	Distribution et comportement magnétique . . . . .	131
4.4.2	Distribution et comportement électrique . . . . .	132
4.5	Conclusion . . . . .	132
<b>5</b>	<b>Equations de Maxwell Mésoscopiques</b>	<b>135</b>
5.1	Postulats énergétiques . . . . .	136
5.1.1	Relativité des échelles d'observation . . . . .	136
5.1.2	Fonctionnelles énergétiques et principes extrémaux . . . .	138
5.2	Du microscopique au mésoscopique . . . . .	140
5.2.1	Opération de lissage et moyenne spatiale . . . . .	140
5.2.2	Lissage des champs et courants . . . . .	146
5.2.3	Introduction de l'hystérésis statique . . . . .	149
5.2.4	Discussion et modèle de données . . . . .	149
5.3	Dérivation des équations de champ-matière . . . . .	151
5.3.1	Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange . . .	151
5.3.2	Conservation du flux et loi de l'induction . . . . .	152
5.3.3	Conservation des charges et théorème d'Ampère . . . . .	155
5.3.4	Degré de liberté structurel . . . . .	157
5.4	Relations entre deux Milieux . . . . .	159
5.4.1	Champs magnétiques et courants . . . . .	159
5.4.2	Champs électriques et inductions . . . . .	160
5.5	Prise en compte de l'hystérésis statique . . . . .	162
5.6	Calcul des observables macroscopiques . . . . .	162
5.6.1	Flux et tension . . . . .	162
5.6.2	Pertes énergétiques . . . . .	163
5.6.3	Introduction du mouvement et force . . . . .	164
5.7	Discussions et limitations . . . . .	164
5.8	Conclusion . . . . .	165

## IV Entreprises Analytiques et Métrologiques 167

### 6 Méthodes Analytiques 171

6.1	Equations de diffusion retardée . . . . .	173
6.1.1	Formulation en champ magnétique . . . . .	173
6.1.2	Formulation en champ électrique . . . . .	174
6.1.3	Equivalences Ampérienne et Coulombienne . . . . .	174
6.2	Cas unidimensionnel de la tôle magnétique . . . . .	179
6.2.1	Présentation . . . . .	179
6.2.2	Sollicitations unidirectionnelles harmoniques . . . . .	181
6.2.3	Sollicitations bidirectionnelles harmoniques . . . . .	188
6.2.4	Variation des conditions limites et discussion . . . . .	193
6.2.5	Fonctionnement transitoire . . . . .	195
6.3	Cas bidimensionnel du tore magnétique . . . . .	197
6.3.1	Présentation . . . . .	197
6.3.2	Fonctionnement harmonique . . . . .	197
6.3.3	Fonctionnement transitoire . . . . .	198
6.4	Conclusion . . . . .	198

### 7 Mesures Expérimentales 203

7.1	Principe d'homogénéisation, discussion . . . . .	204
7.2	Configuration unidirectionnelle . . . . .	208
7.2.1	Présentation . . . . .	208
7.2.2	Principes et algorithmes . . . . .	212
7.2.3	Résultats sur quelques échantillons . . . . .	216
7.3	Configuration bidirectionnelle . . . . .	221
7.3.1	Présentation . . . . .	221
7.3.2	Principes et algorithmes . . . . .	224
7.3.3	Résultats sur un échantillon . . . . .	224
7.4	Analyse d'incertitudes . . . . .	225
7.4.1	Problèmes liés au modèle . . . . .	225
7.4.2	Erreurs de mesure et d'identification . . . . .	226
7.5	Conclusion . . . . .	229

## V La Simulation Numérique 235

### 8 Formulations Dédiées 239

8.1	Formulation $\mathbf{T}_M$ - $\Phi_M$ . . . . .	242
8.1.1	Position du problème . . . . .	242
8.1.2	Discrétisation à l'aide des éléments finis . . . . .	242
8.1.3	Résidus . . . . .	243
8.1.4	Jacobiens . . . . .	245
8.1.5	Tests et vérifications . . . . .	248
8.2	Couplage $\mathbf{T}_M$ - $\Phi_M$ aux interfaces . . . . .	249
8.2.1	Position du problème . . . . .	250

8.2.2	Discrétisation à l'aide des éléments finis . . . . .	250
8.2.3	Résidus . . . . .	250
8.2.4	Jacobiens . . . . .	252
8.2.5	Tests et vérifications . . . . .	253
8.3	Formulation $\mathbf{A}_M\text{-}\Psi_M$ . . . . .	254
8.3.1	Position du problème . . . . .	254
8.3.2	Formulation 2-D surfacique . . . . .	255
8.3.3	Couplage aux interfaces linéiques . . . . .	256
8.3.4	Tests et vérifications . . . . .	257
8.4	Structures laminées quasi-périodiques . . . . .	257
8.4.1	Description physique . . . . .	257
8.4.2	Formulation 2-D . . . . .	258
8.5	Conclusion . . . . .	260
<b>9</b>	<b>Dispositifs Electrotechniques</b>	<b>261</b>
9.1	Capteur électromagnétique . . . . .	262
9.1.1	Géométrie et physique . . . . .	262
9.1.2	Résultats et interprétations . . . . .	263
9.2	Actionneur électromécanique (Mitop) . . . . .	264
9.2.1	Géométrie et physique . . . . .	264
9.2.2	Résultats et interprétations . . . . .	266
9.3	Actionneur électromécanique (relais R5) . . . . .	268
9.3.1	Géométrie et physique . . . . .	268
9.3.2	Résultats et interprétations . . . . .	269
9.4	Conclusion . . . . .	270
<b>VI</b>	<b>Conclusion</b>	<b>273</b>
<b>10</b>	<b>Dangers du Courant sur le Corps Humain</b>	<b>277</b>
<b>11</b>	<b>Définitions Mathématiques</b>	<b>281</b>
<b>12</b>	<b>Identités Usuelles</b>	<b>283</b>
<b>13</b>	<b>Constantes Physiques</b>	<b>285</b>
<b>14</b>	<b>Unités électromagnétiques</b>	<b>287</b>
<b>15</b>	<b>Parois Fines</b>	<b>289</b>
<b>16</b>	<b>Lissage Spatial</b>	<b>291</b>
<b>17</b>	<b>Filtrage Spatial</b>	<b>293</b>
<b>18</b>	<b>Principe Variationnel</b>	<b>295</b>

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	7
<b>19 Equation de Poisson</b>	<b>297</b>
<b>20 Bancs Expérimentaux</b>	<b>299</b>



# Liste des figures

1.1	Allure de l'évolution des trois contributions aux pertes totales mesurées en fonction de la fréquence sur un échantillon de FeSi (d'après le modèle de Giorgio Bertotti, 1988) à basse induction ( $B \sim 100$ mT). . . . .	33
1.2	Evolution des différentes contributions aux pertes totales en fonction du niveau d'induction moyen observable, pour deux fréquences données ( $f=50$ Hz et $f=2000$ Hz). $P_s$ sont les pertes statiques, $P_c$ les pertes classiques et $P_e$ les pertes en excès, $B = \langle B \rangle$ (calculées d'après le modèle de Bertotti). . . . .	34
1.3	Evolution des trois contributions de Giorgio Bertotti aux pertes totales, en valeurs absolues, en fonction de l'induction moyenne observable et de la fréquence. Les paramètres utilisés sont ceux du matériau FeSi NO 3% . . . . .	37
1.4	Evolutions des pertes du modèle de Bertotti, en valeurs relatives par rapport aux pertes totales, pour le FeSi NO 3%. $\circ$ : pertes quasi-statiques, $\square$ : pertes classiques macroscopiques, $\blacklozenge$ : pertes microscopiques en excès. . . . .	38
1.5	Cycle d'hystérésis typique représentant l'induction moyenne observable en fonction du champ moyen appliqué, la perméabilité apparente indiquée est aussi appelée perméabilité d'amplitude (valeurs de champ arbitraires). . . . .	39
1.6	Schéma explicatif des commutateurs et du plan de Preisach. . . . .	40
1.7	Simulation de quelques cycles statiques avec le modèle de Preisach. . . . .	41
1.8	Evolution des cycles de Jiles en fonction de la température. . . . .	43
1.9	Evolution des cycles de Jiles en fonction de la déformabilité des parois. . . . .	44
1.10	Cycles dynamiques de Preisach en fonction de la fréquence pour une excitation de forme sinusoïdale. . . . .	45
1.11	Evolution des cycles du modèle de Raulet-Masson en fonction d'un équivalent de la mobilité des parois, pour une excitation de forme sinusoïdale. . . . .	46
1.12	Visualisation des possibilités de déformation de cycle avec le modèle "Loss Surface" du L.E.G. pour une excitation de forme sinusoïdale; influence de la mobilité des parois magnétiques. . . . .	47

1.13	Visualisation des possibilités de déformation de cycle avec le modèle "Loss Surface" du L.E.G. pour une excitation de forme sinusoïdale; influence des variations de mobilité en cours de cycle . . .	48
1.14	Allure des cycles de Jiles adaptés en régime dynamique pour une excitation de forme sinusoïdale. . . . .	49
2.1	Echelles imbriquées . . . . .	57
2.2	Consommation des matériaux magnétiques doux par familles (chiffres de 1996) . . . . .	59
2.3	Utilisation des Fer-Silicium en Europe. Répartition en masse (chiffres de 1996) . . . . .	60
2.4	Surfaces des pertes totales absolues pour les trois origines physiques entre 0 et 2000 Hz et 0 et 2 T ( $\diamond$ : pertes par excès, $\circ$ : pertes par hystérésis statique, $\square$ : pertes classiques macroscopiques). . . . .	61
2.5	Histogramme résumant l'apport d'une tonne de fer suivant l'application (le taux de fonctionnement indicatif est noté en petit sur chaque colonne). . . . .	62
2.6	Visualisation du déséquilibre économique entre la valeur de la production et celle de la consommation de fer en Electrotechnique basse fréquence, exprimée en euros/habitant/an (chiffres de 1996). . . . .	64
2.7	Surface des erreurs relatives dues aux pertes microscopiques (quasi-statiques+excès) d'après le modèle de Bertotti. . . . .	65
2.8	Surface des erreurs relatives dues aux pertes dynamiques en excès uniquement (d'après le modèle de Bertotti). . . . .	66
2.9	Chaine différentielle de protection domestique (capteur à droite et actionneur à gauche). . . . .	67
2.10	Simulation de l'intensité secondaire du capteur en charge pour plusieurs densités de parois dans son circuit magnétique (d'après le modèle de Pry et Bean). . . . .	69
2.11	Simulation des cycles d'hystérésis du circuit du capteur pour plusieurs densités de parois. Mise en évidence de la rémanence dynamique. . . . .	70
3.1	Gradation dans les échelles d'observation des matériaux magnétiques doux depuis les atomes jusqu'au cycle. . . . .	75
3.2	Exemple simplifié de domaine magnétique et définition des parois. . . . .	76
3.3	Echelle des fréquences caractéristiques correspondantes aux phénomènes physiques suivant l'échelle d'espace à laquelle ils interviennent. . . . .	78
3.4	Orientation et rotation d'un moment magnétique. . . . .	79

3.5	Relation Grain-Structure avec les propriétés du Cobalt ( $l_{ex} \simeq 3.4$ nm, sources dans l'ouvrage de Bertotti). Dans les polycristaux, nous rencontrons presque exclusivement des configurations polidomaines, à l'exception de certains nanocristaux doux. La dernière courbe de la légende ne s'applique que pour le cas b. Les parois se densifient à mesure que la taille du grain diminue; mais elles sont aussi d'autant plus gênées par les joints de grain en régime statique. . . . .	80
3.6	Géométrie de la rondelle ferromagnétique étudiée. . . . .	84
3.7	Configuration idéalisée locale en parois planes et fines. . . . .	84
3.8	Module de la perméabilité apparente équivalente à la configuration type Pry et Bean. . . . .	86
3.9	Angle de la perméabilité apparente équivalente à la configuration type Pry et Bean (l'angle de référence étant égal à zéro pour le courant). . . . .	87
3.10	Architecture du capteur torique. . . . .	87
3.11	Schéma électrique équivalent du capteur en charge (formalisme du transformateur avec résistance des fils du secondaire ramenée au primaire et les effets inductifs modélisés par une impédance équivalente de magnétisation "dynamique"). . . . .	88
3.12	Réponse en courant du capteur en charge ( $n_p = n_w$ ). . . . .	89
3.13	Echelles et Observations . . . . .	97
4.1	Exemples de parois magnétiques à $180^\circ$ et $90^\circ$ . . . . .	100
4.2	Représentation tridimensionnelle locale d'une paroi surfacique. . . . .	101
4.3	Représentation locale simplifiée d'une paroi fine en mouvement. . . . .	103
4.4	Allure des courants induits autour d'une paroi. . . . .	105
4.5	Appréciation des distributions de courants. . . . .	109
4.6	Représentation schématique de l'allure des courants et du champ magnétique avec plusieurs parois en mouvement, l'induction augmentant ici positivement suivant x. . . . .	112
4.7	Paroi magnétique déformée. . . . .	113
4.8	Introduction de la rotation cohérente des moments magnétiques (DMR). Schématisation des mécanismes DWD et DMR. . . . .	116
4.9	Participation au flux d'une paroi déformée. . . . .	122
4.10	Repérage orienté des populations de parois. . . . .	124
4.11	Illustration de quelques exemples typiques de structurations surfaciques, avec domaines de fermeture de flux et/ou multiplications de domaines. . . . .	127
4.12	Structuration magnétique d'un corps macroscopique? ( <i>bulk</i> veut dire en volume et <i>surf</i> en surface) . . . . .	128
4.13	Introduction de la dualité boucles induites et boucles inductives. . . . .	129

5.1	Interprétation géométrique du principe variationnel. Le chemin suivi (ou géodésique) est le chemin minimum entre X et Y sur la surface $\Sigma$ . X et Y peuvent être et sont ici des champs et la surface peut posséder plus de deux dimensions dont le temps. . . . .	141
5.2	Schéma de principe de l'opération de lissage spatial (-: grandeur réelle à l'échelle microscopique, --: grandeur lissée à l'échelle microscopique, $\oplus$ : grandeur classique lisse à l'échelle mésoscopique, $\otimes$ : grandeur réelle lissée à l'échelle mésoscopique). . . . .	142
5.3	Représentation 1-D de la fonction nuage. . . . .	143
5.4	Représentation 1-D de la fonction de filtrage. . . . .	144
5.5	Représentation 1-D du champ magnétique dans les deux espaces duaux $(\mathbf{r}, t)$ et $(\mathbf{k}, t)$ . . . . .	145
5.6	Schématisation 1-D du lissage des champs. . . . .	148
5.7	Structure simple du sous-modèle de données pour la gestion des propriétés dynamiques (Reg_vol signifie région volumique et Reg_surf, région surfacique). . . . .	150
5.8	Principe de la formulation $\mathbf{T}_M - \Phi_M$ . . . . .	154
5.9	Principe de la formulation $\mathbf{A}_M - \Psi_M$ . . . . .	157
5.10	Schéma de principe illustrant une mesure de tension sur un échantillon test. . . . .	166
6.1	Illustration de la notion de retard sur le comportement B(H). . .	175
6.2	Equivalences Ampérienne avec courants électriques dynamiques de surface et Coulombienne avec charges magnétiques dynamiques de surface. . . . .	175
6.3	Equivalences Ampérienne avec courants magnétiques dynamiques de surface et Coulombienne avec charges électriques dynamiques surfaciques. . . . .	177
6.4	Sollicitations d'une tôle magnétique; configuration unidirectionnelle à gauche et bidirectionnelle à droite. . . . .	179
6.5	Relations de dispersion pour le vecteur d'onde de propagation (avec marqueurs) et celui de diffusion (sans marqueurs), pour plusieurs densités de parois ( $1/\Lambda$ ) avec le FeSi M400-50A. . . . .	182
6.6	Evolution du module et de la phase du flux complexe normalisé, pour différentes densités de parois, avec les données d'un Fer-Silicium classique. . . . .	184
6.7	Augmentation des pertes spécifiques avec la fréquence et la propriété dynamique (0, 75, 112, 150 puis 180 micromètres). Partie réelle ou active de la puissance totale complexe absorbée. . . . .	186
6.8	Première identification de $\Lambda$ avec les pertes (Lambda_p) et la perméabilité apparente (Lambda_mu) pour un échantillon typique de Fer Silicium M270-35A. Les deux méthodes donnent heureusement les mêmes résultats et l'erreur est estimée inférieure à 5%. La courbe constante correspond à la transformation analytique proposée lors de l'étude asymptotique en fréquence. . .	187

6.9	Allures de la perméabilité apparente et des pertes en fonction de la fréquence et de la densité équivalente de parois ( $1/\Lambda$ ). . . . .	189
6.10	Evolution de pertes 2-D en régime linéaire en fonction de la structure ( $B=1.0$ T, $f=100$ Hz, en haut) et de la fréquence ( $B=1.0$ T, en bas). . . . .	191
6.11	Influence des parois sur le diagramme de champ en surface, en régime linéaire (à gauche) et non linéaire (à droite) à $B=1.0$ T et $f=100$ Hz. . . . .	192
6.12	Module et Phase du flux réduit en fonction de la fréquence pour différents modèles et couplages surfaciques. . . . .	194
6.13	Géométrie du tore ferromagnétique: une rondelle axisymétrique (Intensité $i$ sinusoïdale circulant sur l'axe de révolution). . . . .	197
6.14	Différence d'induction complexe en module et en phase entre le cas dynamique et le cas classique. . . . .	199
6.15	Schéma de principe de l'algorithme mixte implicite-explicite et écriture des systèmes linéaires successifs résolus par FDM. . . . .	200
6.16	Profils de la différence d'induction pour deux instants particuliers en régime transitoire sinusoïdal non-linéaire. . . . .	201
6.17	Première comparaison entre les cycles $\langle B \rangle (H_a)$ mesurés et simulés pour un FeSi excité en induction imposée sinusoïdale. $\Lambda$ semble valoir environ 0.3 mm; la conductivité, la perméabilité et l'épaisseur de la tôle étant connues par ailleurs (matériau M400-50A., résistivité de $45.10^{-8} \Omega.m$ , perméabilité relative initiale de 11000, tôle d'épaisseur 0.5 mm). . . . .	202
7.1	Gauche: évolution de la perméabilité statique aux faibles valeurs d'induction (perméabilité initiale et domaine de Rayleigh). Droite: identification de $\Lambda$ . L'écart-type et les différences sont estimées autour de 8 % (dans le pire des cas, <i>i.e.</i> à très bas niveau). La prédiction des pertes énergétiques restent précises à mieux que 5 % près. . . . .	205
7.2	Cycles d'hystérésis apparents reconstruits pour le même échantillon sollicité en induction triangulaire (à gauche, $f = 50, 250$ et $500$ Hz) et sinusoïdale (à droite, $f = 50, 100, 200, 400, 600$ et $800$ Hz). L'écart-type sur la prédiction de l'induction réellement parcourue se trouve entre 2 mT (à 100 mT, $\sim 2\%$ ) et 3.6 mT (à 50mT, $\sim 7.2\%$ ) pour les cycles de gauche; et entre 3.4 mT (à 200 mT, $\sim 1.7\%$ ) et 14.8 mT (à 200 mT, $\sim 7.4\%$ ). La prévision des pertes quant à elle reste précise à mieux que 3%. . . . .	206
7.3	Schéma simplifié de la configuration type Epstein. . . . .	208
7.4	Gauche: évolution de la perméabilité statique non linéaire. Droite: identification de $\Lambda$ en approximation linéaire à l'aide des pertes. Leur prédiction restera précise à haute induction tant que les non-linéarités seront modérées. Le calcul à basse induction est ici moins précis que lors d'une mesure spécifique avec des réglages adaptés et différents. . . . .	209

- 7.5 Première reconstruction approchée des cycles à 1.0 T (à gauche) et 1.4 T (à droite) pour une induction imposée sinusoïdale à  $f = 50, 100, 200, 400, 600$  et  $800$  Hz. La propriété dynamique est gardée constante au cours de chacun des cycles, ce qui permet une ébauche fidèle mais peu précise du comportement global. Les erreurs sont importantes surtout à basse fréquence (l'écart-type sur  $B$  est maintenant entre 37 mT (à 1.4 T,  $\sim 2.6$  %) et 240 mT (à 1.0 T,  $\sim 24$  %)). Le calcul des pertes (*i.e.* l'aire des cycles) est peu altéré sauf à induction intermédiaire (toujours de l'ordre de quelques %). . . . . 210
- 7.6 Visualisation des écart-types entre l'induction réelle et celle simulée pour chacun des cycles. Cette imprécision reste correcte à induction modérée. Dès que les non-linéarités deviennent influentes, les cycles ne peuvent être reconstruits avec un  $\Lambda$  constant, surtout à basse fréquence, où l'hystérésis statique ne fait qu'amplifier les erreurs. . . . . 211
- 7.7 Identifications plus fines des propriétés de l'échantillon M400-50A, incluant son hystérésis statique (à gauche, modèle et paramètres de Jiles-Atherton) et ses dynamiques microscopiques non-linéaires (à droite, modèle et paramètres de Gauss-Lorentz). 213
- 7.8 Surface caractéristique des dynamiques microscopiques et des variations de la propriété structurelle en fonction du champ anhystérique et de sa dérivée . . . . . 214
- 7.9 Surface caractéristique des dynamiques microscopiques et des variations de la propriété structurelle en fonction de l'induction et de sa dérivée . . . . . 215
- 7.10 Reconstruction des cycles dynamiques en incluant l'hystérésis statique et la dynamique non-linéaire (écart-type sur l'induction compris entre 53 mT (à 1.4 T,  $\sim 3.8$  %) et 126 mT (à 1.0 T,  $\sim 12.6$  %)). . . . . 216
- 7.11 Simulation de cycles expérimentaux en sollicitant le matériau avec des signaux arbitraires sinusoïdes à 175 Hz déformées par une harmonique 3 à 0 et 90 degrés. Les mesures sont indiquées avec des marqueurs et les simulations avec des traits interrompus. 218
- 7.12 Simulation de cycles expérimentaux en sollicitant le matériau avec un signal arbitraire en trapèze à 175 Hz de 50 % (50 % de variations linéaires et 50% de paliers). Les mesures sont indiquées avec des marqueurs et les simulations avec des traits interrompus. 219
- 7.13 Comparaison entre l'échantillon M330-35A ( $\diamond$ : losanges) et l'échantillon M400-50A ( $\square$ : carrés) et reconstruction de quelques cycles dynamiques à 800 Hz (écart-type moyen toujours compris entre 3 % et 12 %). . . . . 220
- 7.14 Schéma simplifié de la configuration type RSST. . . . . 221

7.15	Identification du tenseur reluctivité pour le FeSi M330-35A à $B = 1.0 T$ et $f = 30 Hz$ (à gauche), $\cdot\cdot$ : $xy$ , $\bullet\bullet$ : $yx$ , —(fin): $xx$ , —(gras): $yy$ . Résultat de l'identification (à droite), $\diamond$ : module mesuré, $\circ$ : angle mesuré, $-\cdot-$ : grandeurs simulées. . . . .	222
7.16	Identification de $[\Lambda]$ diagonale avec les pertes mesurées ( $\triangleright$ : $\Lambda_x$ , $\blacktriangle$ : $\Lambda_y$ ). . . . .	223
7.17	Evolution des pertes mesurées en fonction des pertes calculées, respectivement suivant $\triangleright$ : $x$ , $\triangle$ : $y$ et $\diamond$ : $x + y$ . Marqueurs vides (sans parois), marqueurs pleins (avec parois). . . . .	224
7.18	Comparaison entre mesures (—) et simulations ( $\bullet-$ : $[\Lambda] = 0$ , $---$ : $[\Lambda]$ identifiée avec les pertes, grandeur globale) à $B = 1.0 T$ et $f = 100 Hz$ . La mesure à $30 Hz$ ( $\bullet\bullet$ ) est reportée. . . . .	225
7.19	Algorithme d'identification en configuration Epstein linéaire. . . . .	231
7.20	Algorithme d'identification en configuration Epstein non-linéaire. . . . .	232
7.21	Algorithme d'identification de l'hystérésis statique. . . . .	233
8.1	Présentation d'un problème type à résoudre, contenant des pièces ferromagnétiques douces. . . . .	240
8.2	Géométries réduites simples de quelques cas tests. Les conditions limites utilisées pour les simulations tests sont indiquées pour le cylindre. Elles sont similaires pour la tôle et le barreau. Le champ magnétique est appliqué en surface à l'aide d'un gradient de potentiel scalaire magnétique $\Phi$ . l'épaisseur caractéristique des échantillons est de l'ordre de 0.5 mm. Le matériau est du FeSi type M400-50A. . . . .	244
8.3	Simulation du flux complexe moyen traversant l'échantillon (ici la tôle d'épaisseur 1 mm), réduit par rapport à la réponse statique (données du FeSi M400-50A). Le filtre passe bas attendu est correctement décrit et en accord avec la formulation standard couplée à une perméabilité complexe équivalente. . . . .	246
8.4	Cycles d'Hystérésis en régime transitoire et pour différentes densités équivalentes de parois. La tôle en FeSi est soumise à un champ magnétique sinusoïdal en surface à la fréquence de 500 Hz. . . . .	247
8.5	Géométrie du cas test étudié, une inductance à noyau de fer doux (gauche); distribution des courants libres induits et effet de peau correspondant (droite). Le noyau de largeur 1 mm et longueur 10 mm est en FeSi (données de l'échantillon M400-50A); la bobine autour, à 0.25 mm de distance, contient 100 spires et est couplée à une résistance de 10 $\Omega$ . Le générateur fournit une tension constante aux bornes de la bobine de 220 V alternatif. . . . .	249
8.6	Densité de pertes complexes calculée. $\triangle\circ$ : parties réelle et imaginaire avec une infinité de parois ( $\Lambda = 0$ ), $\diamond\square$ : la même chose avec parois limitées ( $\Lambda = 100$ micromètres). . . . .	251
8.7	Puissance absorbée instantanée calculée. $\triangle\circ$ : $f=50 Hz$ et 500 Hz avec une infinité de parois ( $\Lambda = 0$ ), $\diamond\square$ : la même chose avec parois limitées ( $\Lambda = 100$ micromètres). . . . .	252

- 8.8 Résultats 2-D donnant le module et la phase du flux complexe en fonction de la fréquence et pour plusieurs densités de parois. La géométrie du cas test est insérée en haut à gauche. . . . . 254
- 8.9 Description de la méthode qui traite le problème des courants induits aux différentes échelles. Nous gardons l'information provenant des deux échelles microscopique et mésoscopique (courants induits autour des parois ou dans l'épaisseur de la tôle). . . . . 258
- 8.10 Schématisation du paquet de tôles et courants induits aux deux échelles microscopique et mésoscopique. Notre plan d'étude sera le plan (x,y). . . . . 259
- 9.1 Géométrie du transformateur de courant étudié. Sous forme de rubans enroulés (à gauche) ou de rondelles empilées (à droite). L'épaisseur de chaque "feuille" est de 0.3 mm, le rayon du tore de environ 1 à 2 cm. La fréquence caractéristique du signal testée est autour de 250 Hz, le courant alternatif nominal est ici par exemple de 32 A. Nous simulons la détection d'un défaut de courant de 100 mA pour la protection des équipements électroménagers. Les premiers tests ont été réalisés en circuit du secondaire ouvert. . . 262
- 9.2 Comparaison entre la formulation dédiée en potentiel vecteur magnétique et la formulation standard couplée à une perméabilité complexe équivalente ( $\Lambda = 0.1 \text{ mm}$ ). Les deux méthodes sont rigoureusement identiques en terme de réponse harmonique. . . . 263
- 9.3 "Diffusion" du champ magnétique pour les deux architectures de capteur: rubans (à gauche) et rondelles (à droite). Le courant de défaut dans un des conducteurs du primaire au centre, créé une assymétrie et un champ magnétique d'excitation dans le circuit magnétique pour l'aimanter et induire une tension au secondaire. Le processus est amorti par des courants induits aussi bien microscopiques que macroscopiques. Ici la fréquence est 250 Hz et  $\Lambda = 0.1 \text{ mm}$ . . . . . 265
- 9.4 Simulation de la tension induite au secondaire du capteur à vide. Gauche: module et angle de la tension induite pour l'architecture en rubans, et pour plusieurs densité équivalentes de parois. Les courants induits classiques sont pris en compte alors que les courants induits microscopiques ont été homogénéisés. Droite: module et angle de la tension pour l'architecture en rondelles. Tous les courants induits ont été introduits mais à l'aide d'une homogénéisation. La propriété dynamique a donc été approximée à l'aide d'une seule longueur caractéristique équivalente tenant compte à la fois de la structure magnétique et de la structure géométrique en feuilles fines. . . . . 265
- 9.5 Géométrie axisymétrique de l'actionneur Mitop (Bobine d'excitation, circuit magnétique et noyau colé avant ouverture). Quelques dégradés d'induction sont représentés, sans paroi (à gauche) et avec parois (à droite). . . . . 266

9.6	Simulation du flux déclencheur du départ du noyau et de l'ouverture de l'actionneur en fonction de la fréquence caractéristique du signal d'excitation (courant imposé dans la bobine) et de l'épaisseur de l'entrefer de glissement; pour plusieurs densités équivalentes de parois ( $1/\Lambda$ ). La partie utile au déclenchement est réelle. . . . .	267
9.7	Géométrie et maillage du relais R5 pouvant aussi intervenir dans la chaîne différentielle de protection. Les dimensions sont de l'ordre du mm pour l'épaisseur du circuit magnétique. . . . .	268
9.8	Représentation des dégradés d'induction obtenus en position fixe légèrement ouverte, au moment du déclenchement. . . . .	269
9.9	Calcul du flux déclencheur de l'ouverture du relais R5 en fonction de la fréquence caractéristique du signal de défaut et de la densité équivalente de parois magnétiques. . . . .	270
9.10	Calcul de la puissance totale absorbée par le circuit magnétique du relais R5 en fonction de la fréquence caractéristique du signal de défaut déclencheur (intensité du courant de défaut imposée) et de la densité équivalente de parois. . . . .	271
10.1	Intensité du courant fonction de la durée de passage de ce courant. Sur cet abaque, les effets du courant alternatif (de 15 à 100 Hz) ont été divisés en quatre zones (selon la norme CEI 60479-1 du Comité Electrotechnique International C.E.I.). . . . .	278
10.2	Durée maximale de maintien de la tension de contact selon la norme CEI 3654. . . . .	279
10.3	Variation du seuil relatif de fibrillation ventriculaire (selon CEI 60479-2) et des seuils des DDR réglés sur 30 mA, pour des fréquences entre 50 et 2 kHz (source Merlin Gerin). . . . .	280
10.4	Formes d'onde normalisées pour les tests des DDR. . . . .	280
20.1	Schéma de principe de la mesure en configuration Epstein unidirectionnelle, d'après les travaux de madame Kedous-Lebouc et monsieur Chevalier. L'échantillon (en haut à droite) est une tôle métallique insérée dans un circuit de transformateur rectangulaire. Des enroulements homogènes sont réalisés autour de ce circuit pour l'excitation en courant et la mesure en tension. . . . .	299
20.2	Schéma de principe du banc de mesure en configuration bidirectionnelle, d'après les travaux de madame Kedous-Lebouc et monsieur Spornic. L'échantillon (en gris clair sur le schéma en haut à droite) est un carreau métallique inséré dans deux entrefers croisés de deux culasses (en gris foncé) imbriquées suivant les deux directions x et y. Les bobines d'excitations sont réalisées autour des circuits des deux culasses et les bobines de mesure se trouvent au voisinage de la région centrale de l'échantillon. . . . .	300



# Liste des tableaux

1.1	Propriétés dynamiques dissipatives des familles de la basse fréquence pour le modèle de Bertotti . . . . .	36
2.1	Pertes en excès des familles basses fréquences calculées avec le modèle de Bertotti . . . . .	59
2.2	Chiffre d'affaire des matériaux magnétiques [année 1996] . . . . .	63
5.1	Deux options pour l'introduction de la dynamique: les deux dernières lignes correspondent à une autre proposition discutée dans notre groupe de travail . . . . .	164
6.1	Couplages surfaciques magnétique et électrique aux interfaces . .	195
6.2	Trois alternatives pour le couplage des champs à la frontière entre deux milieux. Significations correspondantes des paramètres structurels (bulk veut dire de volume et surf de surface) . . . . .	195
7.1	Synthèse des différentes configurations expérimentales, des paramètres à identifier (l'indice $c$ signifie constant en cours de cycle et $v$ variable), des observables et des méthodes utilisées ( $T_m$ : potentiel vecteur électrique statique, $A$ : potentiel vecteur magnétique, tous les deux normaux au plan d'étude). Le triangle et le cercle se rapportent aux formes triangulaire ou sinusoidale du signal imposé pour l'induction . . . . .	207
7.2	Les paramètres et les observables qui permettent de les identifier pour chaque banc de mesure. . . . .	208
7.3	Budget d'incertitudes . . . . .	229
14.1	unités électromagnétiques usuelles et équivalences entre deux systèmes d'unités. . . . .	288



**Partie I**

**Introduction**



Les matériaux magnétiques doux (Fe, Ni, Co sous forme cristalline, polycristalline ou amorphe) sont souvent utilisés en électrotechnique pour convertir l'énergie, guider les lignes de flux et transmettre des signaux. Leur principale caractéristique est de s'aimanter aisément. Ces matériaux sont aussi conducteurs et des courants sont induits en régime transitoire et périodique. Ces derniers peuvent être classiquement diffusés à une échelle macroscopique mais aussi et surtout localement induits dans une microstructure magnétique en mouvement et réarrangement incessant. Un champ magnétique d'opposition est associé à chaque boucle de courant et amortit le champ appliqué. Ces effets d'amortissement et de pertes joules microscopiques se manifestent macroscopiquement par: des pertes d'énergie, des temps de retard, de la distorsion de signal et de la rémanence. Nous nous intéressons à la recherche de modèles fidèles dans le but de comprendre les propriétés des matériaux ferromagnétiques doux en régime statique et dynamique et de simuler avec précision le comportement des dispositifs électrotechniques. Nous choisissons de nous concentrer particulièrement sur l'effet des courants induits microscopiques en plus de ceux macroscopiques, puisqu'ils sont à l'origine des pertes en excès et de l'hystérésis dynamique qui sont observées.

Notre étude sera exposée comme suit:

- Dans la seconde partie (partie II) nous proposons d'introduire le sujet à l'aide d'un bref historique sur la prise en compte des matériaux dans la conversion d'énergie (chapitre 1), d'une ébauche sur les enjeux (chapitre 2), d'une présentation des matériaux concernés et de la problématique posée (chapitre 3).
- La troisième partie de ce rapport (partie III) sera pleinement consacrée à notre contribution sur la modélisation mésoscopique des matériaux doux en régime dynamique et transitoire (chapitre 4 et 5). Le chapitre 4 étant destiné à la représentation des dynamiques microscopiques à une échelle intermédiaire par une technique d'homogénéisation et le chapitre 5 à leur intégration dans les formulations électromagnétiques.
- Ensuite, dans la partie IV, nous confronterons les travaux de la partie III aux mesures à l'aide de calculs analytiques (chapitre 6) et d'identifications expérimentales (chapitre 7).
- Enfin, la cinquième partie (partie V) fournira le détail de l'écriture et de l'implantation de formulations spécifiques dédiées au calcul des champs électromagnétiques dans les matériaux doux par la méthode des éléments finis (chapitre 8). Celles-ci seront testées puis appliquées à quelques exemples de dispositifs réels dans le chapitre 9.
- Nous concluerons sur les succès, échecs et perspectives dans la sixième et dernière partie (partie VI).



## Partie II

# Transformations Énergétiques et Matériaux



*” L’algèbre s’applique aux nuages ; l’irradiation de l’astre profite à la rose ; aucun penseur n’oserait dire que le parfum de l’aubépine est inutile aux constellations. Qui peut donc calculer le trajet d’une molécule ? Que savons-nous si des créations de mondes ne sont point déterminées par des chutes de grains de sable ? Qui donc connaît les flux et reflux réciproques de l’infiniment grand et de l’infiniment petit, le retentissement des causes dans les précipices de l’être et les avalanches de la création ? ”*

**Victor Hugo**

(dans le jardin ” livré à lui même ” de la maison de la rue Plumet où s’est réfugié Jean-Valjean et où ” rien n’est petit en effet ”)



# Chapitre 1

## Transformations

*” Métal vivant ”*

**Les Egyptiens**

(pour parler de la pierre d'aimant en l'an -1000)

## 1.1 Conversion et Maîtrise de l'Énergie

L'électricité et le magnétisme sont deux phénomènes physiques connus depuis des milliers d'années. Le terme "électricité" dérive directement du mot grec "elektron" ( $\epsilon\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\xi\nu$ ) qui désigne l'ambre jaune, une résine fossile possédant des propriétés électrostatiques. De la même manière, le terme "électromagnétisme" fait référence à la pierre de magnésie, un aimant naturel utilisé dès la Haute Antiquité par les Egyptiens, les Crétois et les Chinois. Chez les Hellènes, Thalès de Milet (~625-~547 avant J.-C.) semblait accorder "une âme aux choses qu'on croyait inanimées". Le plus ancien manuscrit mentionnant l'existence des pierres d'aimant est l'oeuvre d'un écrivain chinois, Guanzhong (mort en 645 avant J.-C.). Les propriétés magnétiques sont utilisées par les devins à partir des II<sup>ème</sup> et I<sup>ère</sup> siècles avant J.-C., pour fabriquer des tables de divinations magiques. De là dérive la première boussole, indiquant le sud et perfectionnée après le I<sup>ère</sup> siècle de notre ère. Les connaissances dans ces domaines progressent alors doucement et empiriquement entre -500 avant J.-C. et le XVII<sup>ème</sup> siècle. Il s'est agi d'observer expérimentalement la différence entre matériaux magnétiques et non-magnétiques (Liu An en -120) et entre matériaux doux et matériaux durs (Saint augustin en ~400). Les premiers textes scientifiques occidentaux traitant de l'électromagnétisme datent de 1269 (Pierre Pélerin de Maricourt, France) et 1600 (William Guilbert, Angleterre) (Internet Wikipedia et [TRE\_1]).

Les idées de transformation (électrique-électrique) et conversion d'énergie (électromécanique) sont apparues avec les expériences de Hans Christian Oersted (1777-1851), André-Marie Ampère (1775-1836), Michael Faraday (1791-1867), Franz Neumann (1798-1895) ...etc... (Internet Wikipedia, [DAR\_1] et [TRE\_1]), et les travaux théoriques parallèles de Charles de Coulomb (1736-1806), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Wilhelm Weber (1804-1891), James Clerk Maxwell (1831-1879), Heinrich Hertz (1857-1894)...etc...(Internet Wikipedia, [DAR\_1]). Ils mirent en évidence les lois de l'électromagnétisme: l'action d'un fil parcouru par un courant sur une boussole (mise en évidence par Oersted et Ampère, manifestation du théorème dit d'Ampère) et surtout le phénomène d'induction d'une force contre-électromotrice (notion introduite par Hermann Von Jacobi en 1834) par variation d'un flux magnétique à l'intérieur d'un circuit électrique (mis en évidence par Faraday, manifestation de la loi dite de Faraday); cette variation de flux pouvant être créée par un mouvement mécanique ou bien un autre circuit électrique inducteur. Il s'agit là des ancêtres de l'alternateur/moteur et du transformateur. On utilise alors des matériaux ferromagnétiques (bons conducteurs magnétiques, le Fer par exemple) pour canaliser les lignes de flux magnétique et des matériaux conducteurs non magnétiques (bons conducteurs électriques, le Cuivre par exemple) pour diriger les lignes de courant électrique. Pour cette conversion d'énergie, les travaux d'un nombre considérable de scientifiques entre 1860 et 1890 conduisirent à l'apparition de machines capables de produire de l'énergie électrique en grande quantité, ainsi qu'à la possibilité de la transporter sur de longues distances. Les premières machines à courant alternatif sont apparues grâce aux travaux de l'anglais Wilde en 1868 et du serbe Nikola Tesla en 1887. De même les premiers transformateurs

ont été développés par Lucien Gaulard en 1884 et Georges Westinghouse en 1886. On peut enfin considérer que l'invention de la machine à courant continu, brevetée par le belge Zenobe Gramme en 1869 doit beaucoup aux travaux de l'italien Antoine Pacinotti (1841-1912) et de l'allemand Ernst Werner Von Siemens à la même époque. En 1889, Michail Ossipowitsch Doliwo-Doborwolski, électricien russe, invente le premier moteur asynchrone à courant triphasé à cage d'écuréuil (Internet Wikipedia). L'enjeu principal dans ce type d'application est la connaissance des critères de dimensionnement et la réalisation d'un rendement de conversion optimal, ce qui passe nécessairement par une maîtrise des processus de conversion et une diminution des pertes d'énergie.

Parallèlement à cette génération d'énergie via des conversions, depuis les énergies naturelles (l'eau, le vent, la vapeur...); et aux transformations, pour adapter les sources aux charges; il a fallu développer des dispositifs de contrôle et de protection de ces réseaux afin de garder la main mise sur la spatialité et la temporalité de ces transferts d'énergie (en bref: où et quand, et de manière précise, l'électricité circule? ). En effet, les forces inouïes de la nature se retrouvent alors sous une forme invisible à la fois très commode mais aussi très dangereuse: l'électricité (Benjamin Franklin (1706-1790) fut le premier spécialiste des manifestations électriques sous forme d'arc ou de foudre). Nous nous orientons alors vers des applications plus spécifiques dédiées au contrôle commande et à la protection des réseaux de distribution électrique (transformateurs de courant des capteurs électromagnétiques, actionneurs électromécaniques linéaires et à levier des contacteurs et disjoncteurs). Les premiers disjoncteurs apparaissent à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle (~1890), ils sont de haute tension et la coupure du courant se fait alors dans l'huile (années 1920), puis dans le gaz ( $\text{SF}_6$  en 1938). La coupure dans l'air commence à être maîtrisée autour des années 1950, l'idée étant alors d'allonger suffisamment l'arc dans l'air afin de provoquer son refroidissement, son extinction et ensuite la tenue de la tension du réseau. L'activité "basse tension" se développe alors et les premiers disjoncteurs dans l'air apparaissent sur le marché. L'entreprise phare dans ce domaine aujourd'hui et à l'échelon mondial est l'entreprise Schneider-Electric (Merlin-Gerin, Square D, Telemecanique), spécialiste de la sécurité dans la distribution d'électricité, et partenaire principal de cette étude (une présentation plus détaillée de ce paysage industriel et applicatif sera faite au chapitre 2). Les enjeux sont ici non seulement la transformation/conversion avec un minimum d'altération et de perte de service, mais aussi la transmission fidèle et précise d'un signal électrique pour le rendre fiable et directement utilisable dans la commande d'une ouverture ou d'une fermeture du circuit sous contrôle. Ces contraintes de conception et de fabrication passent là encore par une connaissance parfaite et prédictive du résultat de l'interaction entre les énergies électromagnétiques, les matériaux et les structures.

"Aucune transmission, transformation ou conversion d'énergie de type électrique n'est possible sans une variation dans le temps des grandeurs électromagnétiques". Il faut en effet faire varier un flux dans le temps pour induire la force électromotrice à l'origine de la création d'un courant (loi de Faraday) et inversement, il faut faire circuler un courant transitoire ou alternatif pour rayonner un champ à l'origine d'un flux d'induction variable (théorème d'Ampère).

Dès lors, ces variations temporelles, nécessaires aux processus de transformation et de conversion d'énergie, sont aussi à l'origine de processus d'auto-induction et induction à l'intérieur même des divers organes utilisés dans ces dispositifs (Joseph Henry (1832), Heinrich Lenz (1833) et Foucault (1855) sont parmi les premiers scientifiques à introduire la notion d'auto-induction et de courants induits). Ces phénomènes sont justement la cause d'une altération de la forme du signal détecté et d'une perte d'énergie, les deux étant naturellement intimement liées (matériaux dispersifs). Nous nous intéressons, dans ce manuscrit, essentiellement aux matériaux ferromagnétiques (chapitre 3) chargés de canaliser les lignes de flux, pour permettre une transmission propre de signal et une conversion efficace d'énergie. Ils sont généralement à base de Fer, de Nickel et/ou de Cobalt (plus d'autres éléments additionnels, dans la réalisation d'alliages "économiques", "performants" ou "multi-fonctions" par exemple [GAQ\_1], [PER\_1], [VER\_1], [COU\_1], [PFE\_3], [WAE\_1], [AUX\_1]), qui sont les trois principaux éléments simples ferromagnétiques à l'état naturel. Ces substances ont en effet l'agréable propriété de s'aimanter sous champ et d'amplifier ce même champ, ce qui a comme intérêt d'assurer les transmissions et conversions qui nous occupent. Cependant, ce sont aussi des métaux conducteurs, lieux de phénomènes auto-induits divers et variés en régime périodique et transitoire. Nous proposons dans les deux sections qui suivent (section 1.2 et section 1.3) de préciser et d'illustrer les conséquences de tout ceci en termes de pertes énergétiques d'une part et de formes des signaux d'autre part.

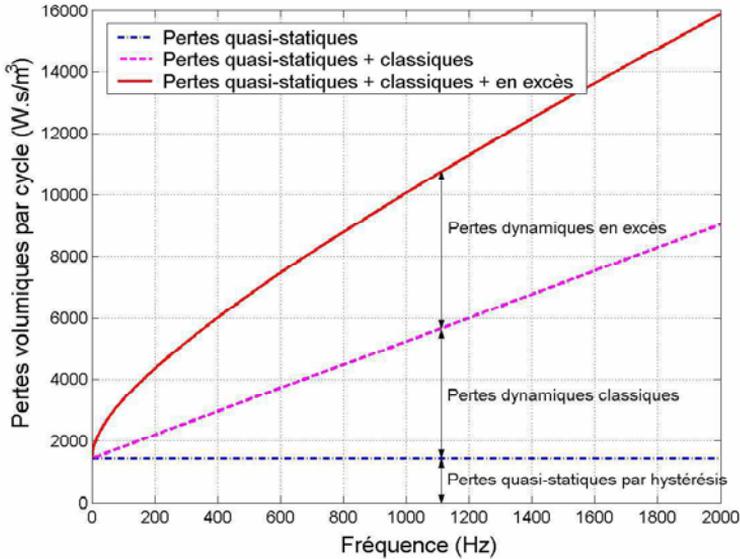
## 1.2 "Pertes Fer"

Ce terme "pertes fer" englobe généralement toutes les pertes intervenant dans les pièces ferromagnétiques des organes magnétiques des dispositifs électrotechniques. Ces pertes dépendent évidemment de la nature du matériau utilisé mais aussi de la nature des processus dynamiques qui s'y développent, et enfin des modes de diffusion spatio-temporelle dans la géométrie considérée. Il est toujours possible d'effectuer des mesures précises de ces pertes induites, et de les étudier en fonction des conditions d'induction et de fréquence. Ces études ont abouti à l'élaboration de modèles macroscopiques prédictifs (paragraphe 1.2.2) tous basés sur un principe de séparation (paragraphe 1.2.1), issu de l'analyse fine des observations expérimentales.

### 1.2.1 Principe de séparation

Pour étudier l'évolution de ces pertes et les lois physiques les régissant, les expérimentateurs ont rationalisé leurs mesures, les deux variables expérimentales d'évolution étant alors la tension de mesure (liée au niveau d'induction et à la fréquence) et le courant d'excitation (lié à l'excitation magnétique, aussi appelée champ magnétique) (cf chapitre 7). Dans un souci d'analyse comparative et intrinsèque aux matériaux, il s'avère pertinent de retenir les variables induction moyenne  $\langle B \rangle$  et fréquence  $f$  de mesure (grandeurs macroscopiques observables).

Ils ont alors observé que ces pertes mesurées peuvent s'expliquer en sommant trois contributions de provenances différentes, elles aussi variables en fonction de l'induction et de la fréquence (cf figures 1.1 et 1.2, [BER\_7], [BER\_8] et [BER\_9]). Les différences observées le sont pour une induction donnée sur la première figure et pour une fréquence donnée pour la seconde, elles évolueront naturellement en fonction des deux à la fois et nous analyserons ceci à l'aide d'un des modèles du paragraphe suivant ([BER\_7] et [BER\_11]).



Figure~1.1: Allure de l'évolution des trois contributions aux pertes totales mesurées en fonction de la fréquence sur un échantillon de FeSi (d'après le modèle de Giorgio Bertotti, 1988) à basse induction ( $B \sim 100$  mT).

### Contribution quasi-statique

La contribution dite quasi-statique, comme son nom l'indique, ne dépend pas de la fréquence, dès lors que nous nous intéressons uniquement aux pertes mesurées par cycle. En effet, cette contribution est obtenue en mesurant une seule fois l'aire du cycle parcouru à très basse fréquence (le lien entre surface du cycle et pertes sera démontré et précisé au chapitre 6).

### Contribution classique

En augmentant la fréquence d'utilisation, l'aire des cycles grossit et les pertes augmentent. En adoptant une démarche classique de calcul de pertes à l'aide

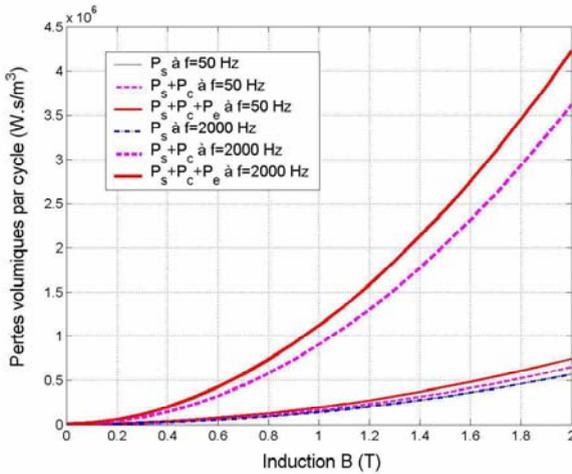


Figure 1.2: Evolution des différentes contributions aux pertes totales en fonction du niveau d'induction moyen observable, pour deux fréquences données ( $f=50$  Hz et  $f=2000$  Hz).  $P_s$  sont les pertes statiques,  $P_c$  les pertes classiques et  $P_e$  les pertes en excès,  $B = \langle B \rangle$  (calculées d'après le modèle de Bertotti).

d'un modèle de diffusion et d'induction de courants de Foucault à l'échelle macroscopique de l'échantillon, on est en mesure de calculer cette augmentation de pertes qui reste malgré tout inférieure à la croissance réelle observée. Elle s'exprime pour le cas d'une tôle semi-infinie d'épaisseur  $\xi$ , réalisée avec un matériau ferromagnétique doux de perméabilité statique  $\mu$ , de conductivité électrique  $\sigma$  et de masse volumique  $d$ , sollicitée à la pulsation  $\omega$  et à induction maximum  $B_{\max}$ , comme suit en ( $W.s.m^{-3}$ ) ([DEL\_2], [BER\_11]) ( $k^2 = \frac{\mu\sigma\omega}{2}$ )

$$\Pi_{mf} = \frac{\pi\xi k B_{\max}^2}{2\mu d} \left( \frac{\sinh(k\xi) - \sin(k\xi)}{\cosh(k\xi) - \cos(k\xi)} \right) \quad (1.1)$$

### Contribution en excès

Enfin, les pertes totales mesurées excédant en fait la somme des deux précédentes contributions, nous appelons la différence perte en excès. Elle peut-être modélisée et expliquée à l'aide de considérations sur les processus microscopiques dissipatifs réels d'aimantation dynamique. On montre que cette contribution acquiert de l'importance à basse induction ( $\sim 35\%$ , cf figure 1.1) et reste toujours supérieure à 10% à induction élevée (cf figure 1.2, [BER\_7]).

### 1.2.2 Modélisations macroscopiques

Dans le paragraphe précédent, l'induction n'est qu'une moyenne spatiale macroscopique observable de l'induction locale réelle et intérieure à l'échantillon. Une première approche a donc consisté à trouver des lois physiques prédictives des pertes en fonction de  $\langle B \rangle$  et  $f$ . Ces modélisations seront qualifiées de macroscopiques dans le sens où elles font intervenir des grandeurs moyennées dans l'espace et le temps, et où elles feront donc apparaître des paramètres dépendant non seulement de la nature du matériau mais aussi, et de part leur construction, de la géométrie macroscopique de l'échantillon.

#### C. P. Steinmetz (1892)

Des mesures précises n'ont été possibles que relativement tard par rapport à l'avènement de la théorie électromagnétique. C. P. Steinmetz propose alors à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle [REI\_1] une équation caractéristique des pertes fer en fonction de  $\langle B \rangle$  et  $f$ , séparant trois contributions analogues des trois contributions de la présentation précédente: statiques, classiques et en excès. Il s'agit alors d'une relation déterminée de manière purement empirique sans lien avec une quelconque explication physique (les processus microscopiques étaient en effet à l'époque inobservables).

$$P_m = k_h f \langle B \rangle^\beta + k_c (f \langle B \rangle)^2 + k_e (f \langle B \rangle)^{3/2} \quad (1.2)$$

La perte massique de puissance  $P_m$  est exprimée ici en  $\text{W.kg}^{-1}$ .  $k_h$ ,  $k_c$ ,  $k_e$  et  $\beta$  sont des paramètres caractérisant l'échantillon et le matériau dont il est fait. Cette équation empirique de Steinmetz a longtemps été l'outil mathématique le plus efficace et utile pour calculer les pertes par aimantation dynamique. Elle requiert uniquement quatre paramètres, publiés par les métallurgistes. Pour les signaux sinusoïdaux, elle fournit une précision acceptable et reste simple d'utilisation [REI\_1].

#### Giorgio Bertotti (1988)

Un siècle plus tard, de nombreux physiciens s'affairent de nouveau à l'étude des processus dynamiques induits dans les matériaux ferromagnétiques (doux). Parmi eux, de nombreux italiens ([WSK\_1], [NEE\_3], [GAL\_1], [BEA\_3], [BIS\_1], [SLO\_1], [CAR\_1], [DEL\_3], [BER\_1], [BER\_3], [MBM\_1], [CHE\_1]), dont Giorgio Bertotti ([BER\_2], [BER\_4], [BER\_5], [BER\_6]) qui a laissé son nom à un modèle prédictif toujours basé sur une séparation entre pertes par hystérésis statique, pertes classiques et pertes en excès ([BER\_7], [BER\_8], [BER\_9]). Ces dernières sont alors expliquées à l'aide d'une étude statistique de pertes locales par courants induits microscopiques autour des divers objets magnétiques en mouvement tels que les parois (nous préciserons ces termes dans le chapitre 3). Un lien est alors établi entre la contribution excédente purement empirique du modèle de Steinmetz et la physique microscopique des matériaux magnétiques (lien d'ailleurs déjà pressenti dans certaines travaux sur des cas

Familles	Matériau	$K_h/d$	$K_c/d$	$K_e/d$	$\alpha$	$\beta$
Fe NO	FeSi NO 3%	$1.87 \cdot 10^{-2}$	$4.98 \cdot 10^{-5}$	$6.31 \cdot 10^{-4}$	1.5	1.5
FeSi GO	FeSi GO 3%	$2.35 \cdot 10^{-3}$	$4.01 \cdot 10^{-5}$	$6.76 \cdot 10^{-4}$	1.5	1.5
Poly. B.F.	FeNi 50-50	$4.53 \cdot 10^{-3}$	$3.56 \cdot 10^{-6}$	$3.96 \cdot 10^{-4}$	1.5	1.5

Tableau 1.1: Propriétés dynamiques dissipatives des familles de la basse fréquence pour le modèle de Bertotti

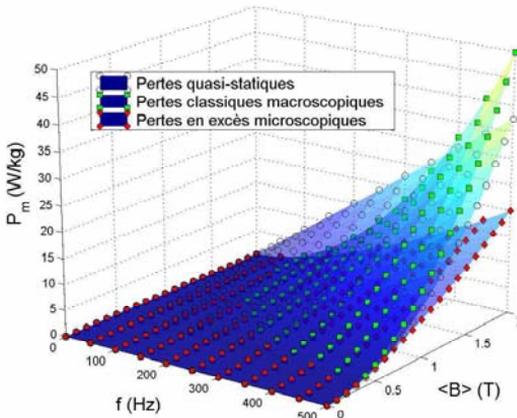
idéaux, [WSK\_1], [BEA\_3], dont nous reparlerons au chapitre 3, section 3.2). La forme et les dépendances de ces dissipations sont alors explicitées et exprimées en fonction de paramètres physiques (nombre d'objets actifs, champ caractéristique de multiplication, coefficient d'amortissement, conductivité, ...) qu'il est alors possible d'identifier par de simples corrélations, et d'utiliser dans la compréhension, la métallurgie des matériaux et dans les outils de conception et de simulation.

$$d \times P_m(\langle B \rangle, f) = K_h f \langle B \rangle^2 + K_c f^2 \langle B \rangle^2 + K_e f^\beta \langle B \rangle^\alpha \quad (1.3)$$

$P_m$  est la puissance perdue par unité de masse.  $d$  est la masse volumique du matériau. Le premier terme correspond aux pertes quasi-statiques par hystérésis, le second aux pertes par courants induits classiques macroscopiques et le troisième est un terme de pertes en excès lié aux courants induits microscopiques.  $\langle B \rangle$  est l'induction moyenne observable et  $f$  la fréquence. Les constantes multiplicatives et exposants dépendent de la nature du matériau et de l'épaisseur de l'échantillon (une tôle). Bertotti donne ces constantes pour certains types de matériaux souvent rencontrés (voir tableau 14.1) [BER\_9].

En choisissant un de ces matériaux typiques, le Fer-Silicium Non Orienté à 3% de Silicium par exemple; nous pouvons étudier l'évolution de ces trois contributions aux pertes fer totales en fonction de l'induction et de la fréquence. Cette étude se présente sous la forme de surfaces caractéristiques, en valeurs absolues (figure 1.3) ou en valeurs relatives (figure 1.4).

Il est important de remarquer que les trois contributions ont relativement la même importance sur une certaine gamme en induction et en fréquence. Les pertes en excès par courants induits microscopiques, qui nous intéressent plus particulièrement, sont même la contribution majoritaire à bas niveau en induction  $[0 - 0,5T]$  et sur une large gamme en fréquence  $[0 - 1000Hz]$ . Elles passent par un maximum à une fréquence caractéristique du mouvement des parois magnétiques (environ 350 Hz dans l'exemple qui est présenté figure 1.4). Elles peuvent intervenir aussi bien dans les transformateurs et les appareils fonctionnant en permanence à 50 Hz, mais aussi et surtout pour les machines et dispositifs où des variations d'induction périodiques ou transitoires créent justement des pertes en grande partie régies par les processus microscopiques dissipatifs (cf chapitre 2 et section 2.1 sur l'énergie et les applications). Elles diminuent lorsque la fréquence augmente au-delà de ce maximum, le processus s'homogénéisant de plus en plus. Dans le cadre d'une modélisation des phénomènes physiques à l'origine des pertes énergétiques, il faudra prendre en considération toutes ces



Figure~1.3: Evolution des trois contributions de Giorgio Bertotti aux pertes totales, en valeurs absolues, en fonction de l'induction moyenne observable et de la fréquence. Les paramètres utilisés sont ceux du matériau FeSi NO 3% .

causes probables. Cette fois, les paramètres du modèle sont reliés à des paramètres matériaux intrinsèques et significatifs. Giorgio Bertotti apporte alors au modèle de Steinmetz un sens physique. Son modèle est encore aujourd'hui utilisé par certains métallurgistes pour caractériser leurs matériaux et par certains concepteurs pour évaluer les pertes fer *a posteriori* de leurs simulations numériques [REI\_1].

### Modèle "Loss Surface" (2000, Afef Kedous-lebouc, Thierry Chevalier, Thierry Gautreau)

Parmi les modèles les plus récents, nous pouvons citer celui développé au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (récemment renommé G2ELab) par l'équipe Matériaux (M.A.D.E.A.), et qui se base là encore sur une superposition de deux champs macroscopiques permettant de retrouver par sommation quadratique les pertes totales mesurées ([BER\_3], [HEV\_2]). Il s'agit alors de construire une surface de pertes en fonction des couples  $(\langle B \rangle, \partial_t \langle B \rangle)$  pour en déduire, à l'aide des mesures, les paramètres du modèle macroscopique. Il exprime un champ total nécessaire à la dynamique, qui est la somme d'un champ dit statique, incluant l'effet de l'hystérésis statique et la mémoire, et d'un champ dit dynamique, contenant l'effet des courants induits et des processus d'aimantation dynamique. Cette modélisation, construite sur le même canevas que les deux précédentes, présente deux avantages considérables. Premièrement, elle garde le lien avec les processus microscopiques à l'origine des pertes en excès et deuxièmement, elle fournit une méthode parallèle de détermination simultanée

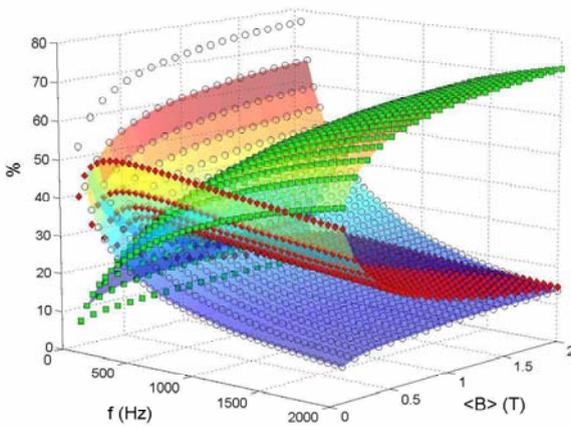


Figure 1.4: Evolutions des pertes du modèle de Bertotti, en valeurs relatives par rapport aux pertes totales, pour le FeSi NO 3%. ○: pertes quasi-statiques, □: pertes classiques macroscopiques, ◆: pertes microscopiques en excès.

des pertes et des hystérésis dynamiques locale et globale en deux dimensions pour les paquets de tôles (cf sous section 1.3.2) [HEV\_1]. Tout comme le modèle de Giorgio Bertotti, le modèle "LS" est encore aujourd'hui largement utilisé *a posteriori* des calculs numériques pour ré-évaluer l'hystérésis dynamique et les pertes fer d'un dispositif bi-dimensionnel [HEV\_1].

### 1.3 Hystérésis

Le mot féminin hystérésis trouve son origine étymologique dans la notion de retard entre un stimulus et une réaction. Son sens a été élargi au caractère non univoque de la relation liant une excitation (ici le champ magnétique) et une réponse (ici l'aimantation ou l'induction), qui ne peut alors plus être décrite à l'aide d'une fonction mathématique simple et univoque. Elle se rencontre dans de nombreux domaines en physique (ferromagnétisme, diélectricité, ferroélectricité, photoélectricité, piezoélectricité, cycles mécaniques de déformations plastiques, cycles thermodynamiques, ...), en chimie (cycles de réaction) ou en science naturelle (Cycles de photosynthèse, ou autres processus bio-physiques et bio-chimiques). Cette relation, souvent assimilée à la loi de comportement macroscopique observable du système considéré, se présente généralement sous la forme d'un cycle, appelé cycle d'hystérésis; qui se caractérise par plusieurs points et courbes remarquables (le champ coercitif, l'induction à saturation, l'induction rémanente, ... [JIL\_2], [MAY\_4], [CHI\_1], [BRI\_1]) (cf figure 1.5). On peut choisir de représenter différents cycles:  $\langle M \rangle (H_a)$  (l'aimantation  $\langle M \rangle$  en fonction du champ

$H_a$  appliqué),  $\langle P_m \rangle (H_a)$  (la polarisation magnétique  $\langle P_m \rangle = \mu_0 \langle M \rangle$ ) en fonction du champ  $H_a$  ou bien  $\langle B \rangle (H_a)$  (l'induction  $\langle B \rangle = \mu_0 (\langle H_M \rangle + \langle M \rangle)$ <sup>1</sup> en fonction du champ  $H_a$ .  $\mu_0$  est la perméabilité du vide, voir annexe 13). La dernière inclut la réponse du vide en plus de celle du matériau, c'est elle que nous observons directement [BER\_11]. La connaissance d'une de ces réponses implique la connaissance des autres et nous choisissons celle liant  $\langle B \rangle$  à  $H_a$ . Cette assertion est quasi certaine en régime statique, elle devient moins évidente en régime dynamique<sup>2</sup>. L'induction observable est liée à la tension et à la fréquence de mesure; le champ appliqué (en surface) à l'intensité du courant d'excitation et à la géométrie du circuit magnétique étudié.

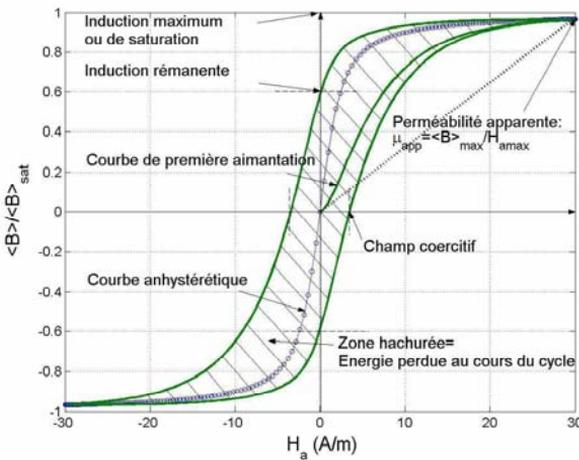


Figure 1.5: Cycle d'hystérésis typique représentant l'induction moyenne observable en fonction du champ moyen appliqué, la perméabilité apparente indiquée est aussi appelée perméabilité d'amplitude (valeurs de champ arbitraires).

Tout comme pour les pertes fer, la forme de ce cycle dépend de la nature du matériau, des processus d'aimantation et d'induction et de la géométrie de l'échantillon. Enfin, il se déforme en fonction des conditions de flux et de fréquence. L'hystérésis observée en régime quasi statique<sup>3</sup> (*i.e.* fréquence très faible tendant vers 0) est appelée hystérésis statique, elle dépend de la géométrie (en particulier la pente caractéristique de la courbe anhystérétique), mais surtout de la "qualité" et de l'histoire du matériau. Les déformations caractéristiques des cycles, observées en régime dynamique, sont regroupées dans un terme générique

<sup>1</sup> Les significations physiques de cette relation et du champ  $H_M$  seront explicitées dans le chapitre 5.

<sup>2</sup> L'induction moyenne macroscopique observable peut faire intervenir la réponse du vide vis à vis d'un champ qui n'est pas toujours celui qu'on observe en surface (cf chapitre 4).

<sup>3</sup> Le terme quasi-statique est ici celui des physiciens des matériaux, et non celui des théoriciens de l'électromagnétisme (cf section suivante)

rique: l'hystérésis dynamique; celle-ci est essentiellement due aux processus d'aimantation et de diffusion et dépend donc fortement de la géométrie et des variations de champ. La première hystérésis est à rapprocher des pertes dites quasi-statiques, quant à l'hystérésis dynamique, elle donne lieu aux autres pertes induites dynamiquement.

### 1.3.1 Hystérésis statique

De nombreux mathématiciens et physiciens se sont succédés dans la recherche de modèles prédictifs de ce phénomène complexe se caractérisant par une relation magnétique locale non-univoque en régime quasi-statique. Ceci est principalement dû à un effet mémoire du matériau qui peut être dans deux états différents pour une même valeur d'excitation, en fonction de la succession des états adoptés précédemment. Cette mémoire a une importance majeure surtout dans les matériaux magnétiques dits durs, car c'est justement grâce à elle que nous pouvons attribuer une aimantation rémanente à un aimant "permanent" [TRE\_1]. Pour les autres matériaux plus doux, elle reste relativement limitée (cf terminologies du chapitre 3 sous-section 3.1.2). Elle s'explique physiquement par l'existence de particules aimantées, de parois magnétiques (objets caractéristiques décrits plus en détail aux chapitres 3 et 4), de défauts cristallins et joints de grain. Nous proposons ci-dessous une présentation synthétique de quelques modèles clés développés issus de la littérature scientifique du XX<sup>ème</sup> siècle. Nous ne détaillerons que certaines de leurs versions scalaires.

#### Preisach-Mayergoyz (1935-1988)

L'archétype se base sur le changement d'état de commutateurs élémentaires distribués statistiquement sur un plan de coercivités ascendante et descendante suivant une loi de probabilité  $p$  caractéristique du matériau ([PRE\_1], [MAY\_1], [MAY\_2]).

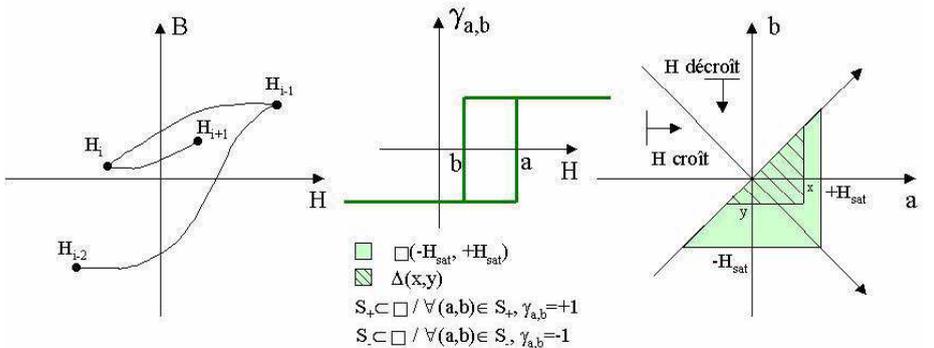


Figure 1.6: Schéma explicatif des commutateurs et du plan de Preisach.

Une fois définis les commutateurs et leur distribution dans le plan de Preisach (voir figure 1.6), la démarche mathématique à suivre peut alors se résumer ainsi:

$$\text{si } H > H_{i-1} : M(H) = M(H_{i-1}) + 2E(H, H_{i-1}) \quad (1.4a)$$

$$\text{si } H < H_{i-1} : M(H) = M(H_{i-1}) - 2E(H_{i-1}, H) \quad (1.4b)$$

$$\text{où } E(x, y) = M_{sat} \iint_{\Delta(x,y)} p(a, b) da db \quad (1.4c)$$

$$M = M_{sat} \left( \iint_{S_+} p(a, b) da db - \iint_{S_-} p(a, b) da db \right) \quad (1.4d)$$

Le modèle a été testé sur un matériau doux de distribution statistique  $p(a, b)$  type Lorentzienne [BER\_11] (voir figure 1.7). Nous faisons varier ici l'écart-type  $\sigma_c$  sur  $h_c = (a - b)/2$  de la distribution, image du champ coercitif caractéristique. En ordonnée est reportée l'aimantation réduite, avec  $M = \mu_0^{-1}B - H$  ( $H = H_M = H_a$ ).

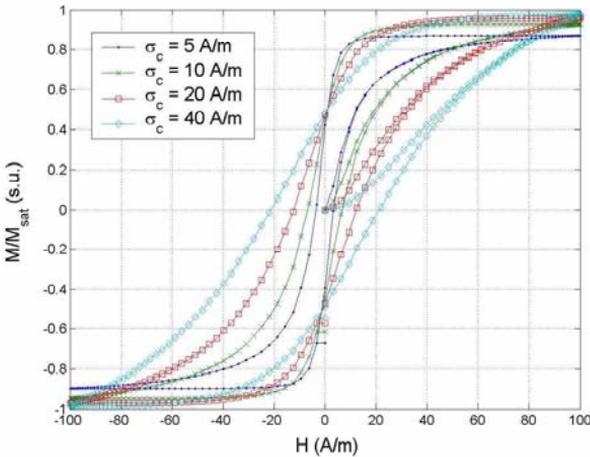


Figure 1.7: Simulation de quelques cycles statiques avec le modèle de Preisach.

Nous n'avons présenté ici que la version scalaire du modèle. Il existe une version vectorielle plus complète développée récemment par I.D. Mayergoyz ([MAY\_5], [MAY\_4]). Le principe est le même mais il faut maintenant trois lois de probabilité et les coupler convenablement. L'avantage de cette description est une représentation puissante et presque sans limite théorique de la mémoire du matériau; son inconvénient majeur est une limite malgré tout en place mémoire justement et surtout en temps de calcul, ajoutée aux difficultés d'identification des lois de probabilité dans le plan de Preisach ([MAY\_3], [BEG\_2], [HON\_1]).

Il est toutefois parfois utilisé pour évaluer les pertes par hystérésis statique ([DUP\_1], [DUP\_2]).

### Stoner-Wohlfarth (1947)

Le modèle part d'un principe de compétition entre diverses tendances énergétiques principalement régies par l'anisotropie et le couplage avec le champ magnétique [STO\_1]. L'étude des conditions d'équilibre d'un ensemble de particules élémentaires ainsi aimantées, plongées dans un champ appliqué, fournit une description intéressante des cycles d'hystérésis qui dépendront à nouveau de la succession des états en champ expérimentés. Aucune dynamique n'est encore introduite puisque l'équilibre est supposé être atteint instantanément par chacune des particules. Ce modèle est très utilisé dans la description des aimants permanents pouvant être assimilés à un ensemble de petits aimants juxtaposés quasi-isolés. Il est peu usité pour les matériaux doux dont l'hystérésis statique s'explique physiquement plus par des problématiques d'accrochages et de décrochages de parois au niveau des défauts cristallins, pour la coercivité ([GOO\_1], [BEA\_2], [PAU\_1]); et de rotations cohérentes de moments dans les domaines magnétiques, pour l'approche à saturation ([BRO\_1], [BRO\_2], [NEE\_1]). Ainsi le modèle de Preisach, proposant une distribution statistique de coercivités à mémoire (que l'on peut relier à une distribution statistique de défauts [HIT\_1]), conviendrait mieux à notre type de matériaux doux. Nous ne détaillerons donc pas les éléments constitutifs du modèle de Stoner et Wohlfarth.

### Jiles-Atherton (1986)

Les deux auteurs proposent de revenir à la physique microscopique des parois magnétiques en présence de défauts et de déformations internes pour mettre en exergue les lois mathématiques correspondantes susceptibles de permettre la reconstruction des cycles d'hystérésis effectivement parcourus expérimentalement [JIL\_1]. Ils supposent que l'aimantation totale  $M$  du matériau est la superposition d'une contribution réversible  $M_{rev}$  due aux blocages et aux déformations des parois, et d'une contribution irréversible  $M_{irr}$  provoquée par le déplacement propre des parois. Les deux obéissant à des relations différentielles construites à partir d'une aimantation anhystérétique  $M_{anh}$  de Langevin  $L_g$  ([JIL\_2], [ZIT\_1]) et d'un champ effectif  $H_{eff}$  amorti par le champ moyen de Weiss  $\alpha M$  ( $H_{eff} = H + \alpha M$ ) [JIL\_2].

$$M_{anh} = M_{sat} L_g \left( \frac{H_{eff}}{a} \right) = M_{sat} \left( \coth \left( \frac{H_{eff}}{a} \right) - \frac{a}{H_{eff}} \right) \quad (1.5a)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_{eff}} = \frac{(M_{anh} - M_{irr})}{(k * \text{signe}(dH))} \quad (1.5b)$$

$$M_{rev} = c(M_{anh} - M_{irr}) \quad (1.5c)$$

$\alpha$ ,  $a$ ,  $k$  et  $c$  sont des paramètres réglables liés respectivement à l'effet démagnétisant des voisins, l'effet désordonnant de la température  $T$  ( $a \approx k_B T / (\mu_0 M_{sat})$ ),

la mobilité des parois et la déformabilité de ces mêmes parois ([JIL\_1], [BAB\_1]). Une fois choisies ces valeurs, l'aimantation totale est reconstruite pas à pas comme suit:

$$M = M_{rev} + M_{irr} = cM_{anh} + (1 - c) M_{irr} \quad (1.6a)$$

$$\frac{dM}{dH} = \frac{\left( c \frac{dM_{anh}}{dH_{eff}} + (1 - c) \frac{dM_{irr}}{dH_{eff}} \right)}{\left( 1 - \alpha c \frac{dM_{anh}}{dH_{eff}} - \alpha (1 - c) \frac{dM_{irr}}{dH_{eff}} \right)} \quad (1.6b)$$

Le résultat est une facilité d'utilisation déconcertante et une grande liberté de réglage des formes de cycle grâce aux quatre paramètres. Nous présentons figures 1.9 et 1.8 l'évolution de ces cycles en fonction des deux paramètres  $c$  et  $a$ , grâce à la version scalaire. Le développement de la version vectorielle pouvant être trouvé dans la référence [BEG\_1].

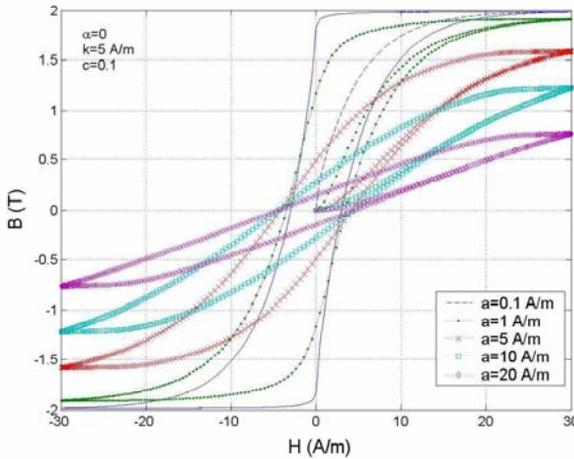


Figure 1.8: Evolution des cycles de Jiles en fonction de la température.

### Nouredine (2002)

Dans ce modèle, les processus d'aimantation statiques (en particulier le mouvement des parois magnétiques) sont décrits comme une réaction chimique dans laquelle le volume de certains domaines magnétiques diminue en faveur d'autres domaines [NOU\_1]. L'auteur propose alors un formalisme proche de celui de la thermodynamique chimique pour aboutir à des expressions mathématiques des cycles parcourus. Etant basé sur une description physico-chimique des domaines magnétiques, il convient aussi bien aux matériaux durs qu'aux matériaux doux. Il existe une version scalaire et une autre vectorielle qui couvrent un très grand nombre de formes de cycles possibles.

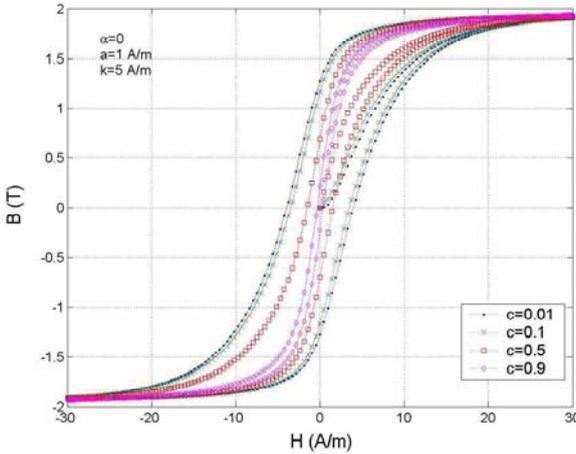


Figure 1.9: Evolution des cycles de Jiles en fonction de la déformabilité des parois.

### 1.3.2 Hystérésis dynamique

L'hystérésis précédente reste invariante par modification des constantes de temps de variation de champ. Autrement dit, ce qui importait était la succession des états et non pas les temps entre chaque passage d'un état à un autre. Nous disons que cette hystérésis est indépendante de la fréquence des sources ("rate-independent" en anglais) [BER\_11]. Cependant, nous observons expérimentalement que l'hystérésis mesurée change en fonction des dérivées temporelles (*i.e.* de la fréquence). Elle grossit, et cette hystérésis est appelée hystérésis dynamique ("rate-dependent" en anglais) [BER\_11]. Elle trouve son origine au niveau des parois magnétiques en mouvement (voir chapitre 4). Là encore, de nombreux travaux ont été entrepris pour expliquer et modéliser ce phénomène. Nous en présentons quelques uns parmi les plus significatifs, mis en oeuvre ces dernières années, sous leur forme scalaire.

#### Preisach-Bertotti (1994)

G. Bertotti, V. Basso et M. Pasquale proposent en 1994 une généralisation dynamique du calcul statistique de Preisach sur un ensemble de commutateurs ([BER\_10], [BEN\_2]). Cette dynamique peut intégrer tout type de processus d'aimantation, dont le mécanisme principal qui est le déplacement des parois magnétiques. Cette adaptation se fait en attribuant aux commutateurs  $\gamma_{a,b}$  de la figure 1.6 une loi dynamique de changement d'état qui dépend de la dérivée temporelle du flux élémentaire de chacun d'eux. Est alors introduit un nouveau paramètre  $k$  lié à la mobilité des parois magnétiques (chapitre 3).

$$\partial_t \gamma_{a,b} = k(H - a) \text{ si } H \geq a \text{ et } \gamma_{a,b} < +1 \quad (1.7a)$$

$$\partial_t \gamma_{a,b} = k(H - b) \text{ si } H \leq b \text{ et } \gamma_{a,b} > -1 \quad (1.7b)$$

$$\partial_t \gamma_{a,b} = 0 \text{ ailleurs} \quad (1.7c)$$

L'aimantation résultante est toujours fonction de l'histoire, via une mémorisation de l'état pondéré des commutateurs du plan de Preisach; mais elle s'établit de plus ici avec une certaine constante de temps définie par la mobilité des parois.

$$dM_{dH>0} = \iint_{\Delta(H, H_{i-1})} p(a, b) d\gamma_{a,b} da db \quad (1.8a)$$

$$dM_{dH<0} = \iint_{\Delta(H_{i-1}, H)} p(a, b) d\gamma_{a,b} da db \quad (1.8b)$$

De ce fait, les cycles reconstruits vont cette fois-ci dépendre de la fréquence de variation du champ magnétique appliqué (cf figure 1.10). Malgré une richesse et des possibilités quasi-infinies, ce modèle reste toujours très lourd et peu utilisé en pratique ([PAR\_1], [VAJ\_1], [BIR\_2]).

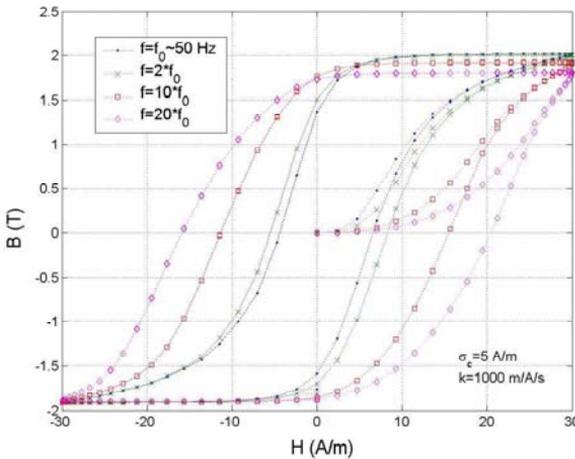


Figure 1.10: Cycles dynamiques de Preisach en fonction de la fréquence pour une excitation de forme sinusoïdale.

### Raulet-Masson (1998)

Sans rentrer dans le détail des commutateurs à mémoire de Preisach, M.A. Raulet et J.P. Masson proposent d'intégrer la dynamique des parois magnétiques

(au préalable introduite empiriquement à l'aide de problèmes macroscopiques équivalents: [FRA\_1], [MAS\_1]) directement dans une loi de comportement différentielle non univoque, dite hystérétique ( [MAS\_2], [RAU\_1], [RAU\_2]). Elle fait à nouveau intervenir une propriété  $\gamma$ , prise comme une constante caractéristique représentative de la mobilité des parois magnétiques.

$$\partial_t B = \gamma (H - H_s(B)) \quad (1.9)$$

où  $H_s(B)$  correspond à la loi de comportement statique, pouvant elle aussi être hystérétique. Elle peut être identifiée en régime quasi-statique et être modélisée par une des représentations proposées dans la section précédente. En choisissant la fonction anhystérétique de Langevin (par exemple) pour  $H_s(B)$ , nous pouvons étudier l'influence de la propriété  $\gamma$  sur les cycles simulés (voir figure 1.11); son inverse a la même action que la fréquence.

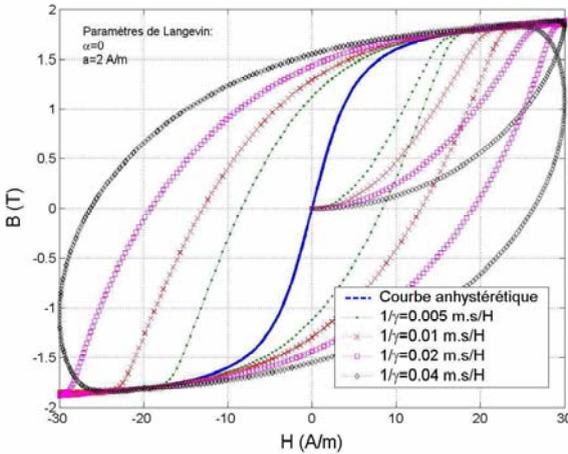


Figure 1.11: Evolution des cycles du modèle de Raulet-Masson en fonction d'un équivalent de la mobilité des parois, pour une excitation de forme sinusoïdale.

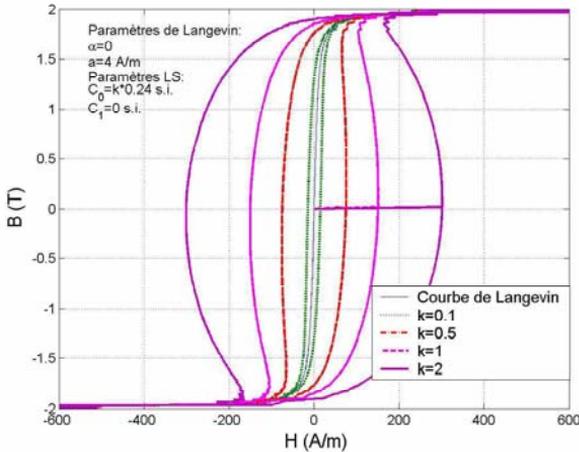
### Kedous-Chevalier (Modèle "LS", 2000)

Dans le même temps, le Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (G2ELab) développe son modèle "LS" et le rend opérationnel et fonctionnel dans le calcul de cycles dynamiques encore plus fidèles du comportement réel observé [HEV\_2]. Il s'agit alors d'écrire la loi physique un peu différemment tout en préservant la possibilité de faire varier les paramètres, dont la mobilité des parois, en cours de cycle.

$$H(B, \partial_t B) = H_s(B) + H_{dyn}(B, \partial_t B) \quad (1.10a)$$

$$H_{dyn}(B, \partial_t B) = (C_0 + C_1 * \text{signe}(\partial_t B) * B) * \partial_t B \quad (1.10b)$$

L'écriture de la contribution dynamique peut adopter une multitude de formes [HEV\_1], avec possibilité de superposer les diverses composantes dans une version vectorielle [HEV\_1]. Nous n'avons retenu ici qu'une version, la plus simple, valable à relativement basse fréquence. Toujours en choisissant un comportement quasi-statique  $H_s(B)$  anhystérétique, celui de Langevin; nous proposons d'examiner l'allure des cycles obtenus en faisant varier les deux paramètres  $C_0$  et  $C_1$ . Les résultats sont exposés figures 1.12 et 1.13. Le modèle est en mesure de décrire non seulement une augmentation des pertes avec la fréquence (grossissement des cycles), mais il est aussi capable de réguler les déformations en cours de cycle en accord avec les observations expérimentales. Ce modèle d'hystérésis dynamique semble être le meilleur compromis entre efficacité et exhaustivité en termes d'implantation numérique et de formes de réponse possibles. Nous choisisons donc de le garder comme référence dans nos travaux.



Figure~1.12: Visualisation des possibilités de déformation de cycle avec le modèle "Loss Surface" du L.E.G. pour une excitation de forme sinusoïdale; influence de la mobilité des parois magnétiques.

### Jiles-Szczyglowski (2001)

Enfin, il existe une version dynamique du modèle de Jiles-Atherton. Elle a été développée par J. Szczyglowski en 2001 ([VIN\_1], [SZC\_1]), et consiste à compléter la définition du champ interne effectif  $H_{eff}$  (cf sous-section 1.3.1,

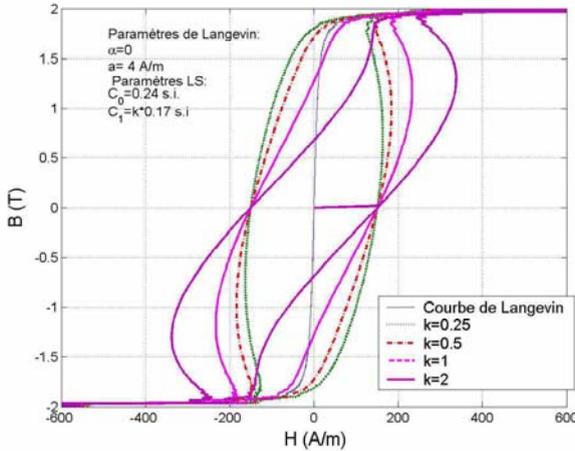


Figure 1.13: Visualisation des possibilités de déformation de cycle avec le modèle "Loss Surface" du L.E.G. pour une excitation de forme sinusoïdale; influence des variations de mobilité en cours de cycle

modèle de Jiles-Atherton) par ajout d'un champ d'amortissement dynamique, analogue des précédents (le paramètre s'appelle cette fois  $\beta$ ).

$$H_{eff} = H + \alpha M + \beta \partial_t M \quad (1.11)$$

Le résultat de la figure 1.14 est concluant mais cache une limite haute en fréquence.

## 1.4 Formulations électromagnétiques

La notion de champs électromagnétiques est introduite en premier par James MacCullagh (1809-1847) au XIX<sup>ème</sup> siècle. Ses travaux sont repris, adaptés et étoffés maintes fois (James Clerk Maxwell (1831-1879), Oliver Heaviside (1850-1925), Heinrich Hertz (1857-1894), Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Ludvig Lorenz (1829-1891)) [DAR\_1]. Sont alors définis les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{H}$ , la densité de courant libre électrique  $\mathbf{J}$  et magnétique  $\partial_t \mathbf{B}$ , et enfin le déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  (plutôt dénommée densité de flux magnétique ou encore induction magnétique, comme on pourrait appeler le déplacement  $\mathbf{D}$  induction électrique) (définitions bien introduites et rappelées dans [LAV\_1], [FEY\_1] et [FEY\_2]). La grande force de ces formulations réside dans une définition locale des champs différentiellement interdépendants, permettant ainsi la description physique des processus internes auto-induits; ceux-là même qui sont à l'origine des possibilités de conversion et aussi des pertes observées.

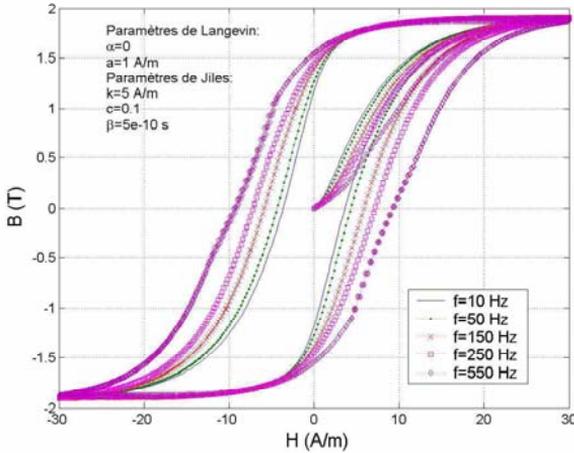


Figure 1.14: Allure des cycles de Jiles adaptés en régime dynamique pour une excitation de forme sinusoïdale.

### 1.4.1 Equations de Maxwell

Pour situer les études qui vont suivre, il convient de préciser le cadre dans lequel nous travaillerons: celui de l'Electromagnétisme dans la matière, dans l'approximation quasi-statique<sup>4</sup> sans accumulation de charges ([JAC\_1], [MAZ\_2], [ARI\_1]). Cette physique est alors régie quelques relations fondamentales appelées équations de Maxwell. Elles permettent à elles seules d'expliquer la plupart des observations faites sur les phénomènes électromagnétiques, hors phénomènes de propagation d'ondes. Elles sont en quelque sorte un condensé irréductible de la théorie électromagnétique, et elles ont aussi bien sûr une signification physique réelle (Les opérateurs dans l'espace  $\nabla$  et le temps  $\partial_t$  sont expliqués dans l'annexe 11).

#### Relations de conservation pour les courants

La première loi exprime le fait que les charges électriques se conservent. Autrement dit, la quantité de charges électriques dans un volume fermé donné, ne varie pas dans le temps; et donc le flux de  $\mathbf{J}$  qui entre doit compenser exactement la quantité de charges qui sort.

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{J} \cdot d^2\mathbf{x} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.12)$$

<sup>4</sup>le terme quasi-statique est ici celui des théoriciens, signifiant l'absence de variations temporelles conséquentes du déplacement électronique et de la densité de charges électriques libres, donnant lieu à la propagation d'ondes.

La deuxième loi exprime le fait que les charges magnétiques se conservent. Autrement dit, la quantité de charges magnétiques dans un volume fermé donné, ne varie pas dans le temps; et donc le flux de  $\partial_t \mathbf{B}$  qui entre doit compenser exactement la quantité de charges qui sort.

$$\iint_{\partial} \partial_t \mathbf{B} \cdot d^2 \mathbf{x} = 0 \iff \nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (1.13)$$

### Relations de Maxwell-Gauss

Ces lois définissent l'Electrostatique et la Magnétostatique et permettent de résoudre de nombreux problèmes.

La première porte sur le déplacement électrique de divergence égale à la densité volumique de charges électriques libres  $\rho$ . elle est directement issue du théorème de Gauss pour  $\mathbf{D}$ , qui relie le flux sortant d'un volume fermé à la charge électrique totale contenue dans ce volume.

$$\iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{D} \cdot d^2 \mathbf{x} = \iiint_{\mathcal{D}} \rho d^3 x \iff \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.14)$$

La deuxième porte sur le déplacement magnétique (ou l'induction) de divergence nulle (en effet aucun monopôle magnétique n'a pu être mis en évidence jusqu'à aujourd'hui et nous pensons encore qu'il est impossible). Elle est, elle aussi, directement issue du théorème de Gauss pour  $\mathbf{B}$ , qui impose au flux total sortant d'un volume fermé d'être nul (les lignes d'induction ne peuvent ni se croiser, ni converger en un seul point).

$$\iint_{\partial} \mathbf{B} \cdot d^2 \mathbf{x} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.15)$$

### Relation de Maxwell-Ampère

Cette expression relie le champ magnétique  $\mathbf{H}$  rayonné à la densité de courants  $\mathbf{J}$  rayonnante par une équation aux dérivées partielles bien connue, et aussi directement issue du théorème d'Ampère. Ce dernier affirme que la circulation du champ  $\mathbf{H}$  sur un contour quelconque doit être égale au courant électrique total qui traverse la surface ayant pour support le contour précédent. C'est d'ailleurs cette version intégrale qui fut en premier énoncée par André-Marie Ampère [FEY\_1]; mais on sait aujourd'hui que les deux versions, locale ou intégrale, sont rigoureusement équivalentes.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = \iint \mathbf{J} \cdot d^2 \mathbf{x} \iff \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.16)$$

### Relation de Maxwell-Faraday

Cette expression relie le champ électrique  $\mathbf{E}$  induit à la densité de courants  $\partial_t \mathbf{B}$  inductrice par une équation aux dérivées partielles bien connue, et aussi

directement issue de la loi de l'induction. Cette dernière affirme que la circulation du champ  $\mathbf{E}$  sur un contour quelconque doit être égale à l'inverse du courant magnétique total qui traverse la surface ayant pour support le contour précédent, ce courant n'est ici rien d'autre que la dérivée du flux magnétique. C'est d'ailleurs cette version intégrale qui fut en premier énoncée par Michael Faraday [FEY\_1]; mais on sait aujourd'hui que les deux versions, locale ou intégrale, sont rigoureusement équivalentes.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = - \iint \partial_t \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} \iff \nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (1.17)$$

A savoir qu'en dehors du cadre quasi-statique, ces relations ne sont formellement que faiblement modifiées. La densité de courant électrique total devient la somme de la densité de courants libres  $\mathbf{J}$  et de la densité de courants liés, cette dernière s'exprimant à l'aide de la dérivée temporelle du déplacement électrique  $\partial_t \mathbf{D}$ , supposée ici négligeable devant les autres contributions (on montre en effet que les phénomènes de déplacements électroniques dans les matériaux métalliques, *a fortiori* ferromagnétiques, aux basses fréquences usuelles de l'Electrotechnique ( $\ll 1\text{GHz}$ ), sont négligeables devant les phénomènes de conduction des électrons et charges libres). On remplace alors  $\mathbf{J}$  par  $(\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D})^5$ .

### 1.4.2 Potentiels électromagnétiques

Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont aussi appelés forces électromotrice et magnétomotrice. Elles s'expriment en fonction de potentiels électromagnétiques dont il est commode et avantageux, dans un problème donné, de déterminer la carte. En effet cette cartographie fournit alors toutes les informations nécessaires pour en déduire ensuite tous les champs. On définit deux familles de potentiels  $(\mathbf{A}, \Psi)$  et  $(\mathbf{T}, \Phi)$  suivant que l'on préfère donner plus d'importance à certaines équations plutôt qu'à d'autres ([MAZ\_2], [ARI\_1]):

- Maxwell-Faraday et non-divergence de l'induction pour  $(\mathbf{A}, \Psi)$ ,
- Maxwell-Ampère et non divergence des courants électriques pour le couple  $(\mathbf{T}, \Phi)$ .

#### Potentiels vecteur magnétique $\mathbf{A}$ et scalaire électrique $\Psi$

L'existence et la définition des potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\Psi$  sont déduites de l'utilisation des équations (1.13) et (1.17):

$$-\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \wedge \partial_t \mathbf{A} \quad (1.18)$$

---

<sup>5</sup> Il s'agit de comparer un terme de propagation en  $\mu\varepsilon\omega^2$  et un terme de diffusion en  $\mu\sigma\omega$  ( $\mu$  est la perméabilité magnétique,  $\varepsilon$  la permittivité diélectrique,  $\sigma$  la conductivité électrique et  $\omega$  la pulsation). Les deux ne commencent à être du même ordre de grandeur qu'à partir des fréquences optiques ( $f \geq 10^{14}$  Hz). Aux fréquences usuelles (0-100 kHz), le terme de diffusion est plus de  $10^9$  fois plus important.

$$\mathbf{E} = -(\partial_t \mathbf{A} + \nabla \Psi) \quad (1.19)$$

On peut voir les différences de potentiel scalaire  $\Psi$  comme étant la source du champ  $\mathbf{E}$  et le rotationnel du potentiel  $\mathbf{A}$  rendant compte des boucles d'induction qui amortissent ce champ.

### Potentiels vecteur électrique $\mathbf{T}$ et scalaire magnétique $\Phi$

L'existence et la définition des potentiels  $\mathbf{T}$  et  $\Phi$  sont déduites de l'utilisation des équations (1.12) et (1.16):

$$\mathbf{J} = \nabla \wedge \mathbf{T} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \Phi \quad (1.21)$$

On peut voir les différences de potentiel scalaire  $\Phi$  comme étant la source du champ  $\mathbf{H}$  et le rotationnel du potentiel  $\mathbf{T}$  rendant compte des boucles de courants qui amortissent ce champ.

### 1.4.3 Propriétés des matériaux

Nous voyons bien qu'avec les formulations précédemment introduites (Equations de Maxwell et résolution en potentiels), il reste nécessaire de connaître les relations physiques liant certains champs entre eux ( $\mathbf{J}$  avec  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  avec  $\mathbf{H}$ ). Ce sont des relations qui expriment les propriétés électriques ( $\mathbf{J}(\mathbf{E})$  ou  $\mathbf{E}(\mathbf{J})$ ) et magnétiques ( $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  ou  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ ) intrinsèques aux matériaux (incluant ici la propriété  $\mu_0$  du vide) ([ASH\_1], [BER\_11], [OSS\_3]) (bien que les équations de Maxwell soient généralement chargées de décrire les autres relations entre champs, on pourrait aussi imaginer certains processus atomiques et microscopiques impliquant des liens croisés électrique-magnétique); elles sont alors définies d'un point de vue local. Les modèles macroscopiques ne sont pratiquement utilisés qu'*a posteriori* des calculs de champs utilisant les équations locales de Maxwell. Les propriétés matériaux réellement introduites *a priori* ne sont alors que des approximations quasi-statiques<sup>6</sup> souvent univoques des comportements réels. Cela se comprend bien puisque nous ne pouvons pas directement observer ces propriétés mais leur version intégrale macroscopique. Un des enjeux scientifiques de notre travail consiste à définir ces propriétés locales (à l'aide de raisonnements physiques) et à trouver le moyen de les identifier à partir des mêmes observations expérimentales. Nous attacherons un peu plus d'importance à leur caractère dynamique puisqu'il est à l'origine de la construction de ce projet. L'objectif en outre sera de trouver une représentation, dans la limite de nos moyens et sous certaines conditions, indépendante de la géométrie macroscopique des échantillons [RAU\_1] et de la forme d'onde des sources [HEV\_2].

---

<sup>6</sup>nous réutilisons ici le "quasi-statique" des physiciens des matériaux

## 1.5 Conclusion

Après un bref historique sur le magnétisme et certaines de ses applications, nous avons présenté le thème de recherche de ce travail: compréhension et modélisation des pertes fer et de l'hystérésis dynamique. Ces pertes induites ont été introduites via des modèles macroscopiques récents (Steinmetz, Bertotti, LS, ...). La notion d'hystérésis a été explicitée en séparant celle qui est statique de celle qui est dynamique, et en proposant des descriptions théoriques trouvées dans la littérature. Ces modèles ont été étudiés et exploités pour illustrer ce premier chapitre de cycles représentatifs. Pour conclure cette entrée en matière, nous avons enfin exposé les équations de Maxwell et les formulations électromagnétiques classiques à l'aide des potentiels scalaires et vecteurs et des propriétés des matériaux.



# Chapitre 2

## Paysages

*” Et si l'espace, après tout, n'était que le champ d'application des opérateurs hermitiens? ”*

*” Absurde! L'espace est bleu et il y a des oiseaux qui volent dedans ”*

**H. Weyl et W. Heisenberg**

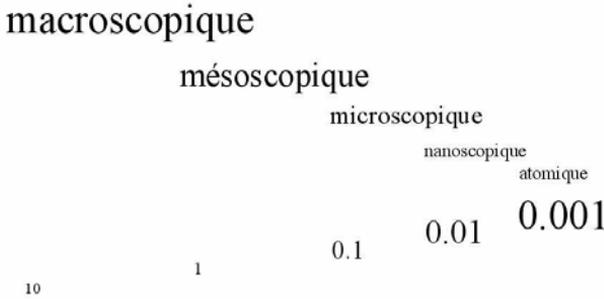
(dialogue dans Raum, Zeit, Materie de H. Weyl, 1918)

Ce travail a été effectué en collaboration avec le Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble et l'entreprise Schneider-Electric. Le premier est spécialisé dans l'étude, la conception et le développement d'outils, de matériaux et d'applications en Electrotechnique au sens large (le laboratoire est constitué de six équipes de recherche: Electronique de Puissance, Systèmes et Réseaux, Modélisation et Conception, Conception et Dimensionnement Intégré, Machines et Matériaux, Microsystèmes). La seconde est un groupe industriel qui se définit aujourd'hui comme un constructeur spécialiste de produits et services pour la distribution et la sécurité électrique, le contrôle industriel et l'automatisation, avec trois grandes marques: Merlin Gerin, Square D, Télémécanique.

Les domaines d'activité du groupe Schneider sont:

- **La distribution et la sécurité électrique:** rendre l'énergie électrique disponible en toute sécurité, depuis la centrale de production jusqu'à l'habitat individuel, depuis la haute tension jusqu'à la basse tension, en passant par la moyenne tension.
- **Les automatismes industriels:** commander, contrôler, protéger, superviser les machines et les installations dans les procédés industriels, les infrastructures et les bâtiments.

Deux métiers qui permettent à Schneider de répondre aux attentes dans les quatre grands marchés que sont l'Energie (transporter, répartir, distribuer l'électricité en sécurité, 17% du C.A.), l'Industrie (sécurité et compétitivité de la production, 28% du C.A.), les Infrastructures et le Bâtiment (garantir les performances et la sécurité, 55% du C.A.) [GAU\_1]. La compétitivité et les performances feront surtout l'objet des sections 2.1 et 2.2, et nous réserverons l'aspect sécurité récurrent et non moins important pour la section 2.3. Il s'agira de faire une étude statistique sur la production, la consommation et l'utilisation au niveau mondial des matériaux doux; et sous différents points de vue: le point de vue énergétique, économique et enfin technique.



Figure~2.1: Echelles imbriquées

## 2.1 l'Énergie

L'énergie d'aimantation des matériaux ferromagnétiques doux est nécessaire au bon fonctionnement des dispositifs électromagnétiques et électromécaniques. La part d'énergie dissipée soit par des processus classiques macroscopiques, soit par des processus microscopiques en excès, est autant d'énergie perdue, qu'il peut être fructifiant de minimiser d'une part, et judicieux de maîtriser d'autre part [BER\_7]. En effet, ce déficit d'énergie utilisable doit être compensé, idéalement exactement, par la source principale du dispositif. Pour évaluer l'impact des pertes d'énergie à l'échelle mondiale, on peut s'intéresser soit à la masse totale de matériau utilisée à l'instant  $t$  (Bilan énergétique à l'échelon mondial), soit au cycle de vie d'une quantité de matière donnée (Analyse du cycle de vie) [ATL\_1].

### Bilan énergétique

La consommation annuelle des ferromagnétiques doux est d'environ 6 millions de tonnes. N'ayant pas la possibilité d'évaluer correctement la masse totale réellement utilisée, y compris celle produite les années précédentes et exclue celle arrivant en fin de vie; nous raisonnerons sur cette consommation annuelle qui reflétera relativement fidèlement les ordres de grandeur et la moyenne statistique des énergies mises en jeu au minimum. Sachant que la durée de vie d'une tôle de transformateur est entre 15 et 30 ans, il peut-être représentatif de multiplier toutes les données statistiques qui suivront par un certain nombre compris entre 1 et 30, qu'il n'est pas simple de connaître avec précision. La majorité de cette utilisation concerne la famille des FeSi. Ce sont aujourd'hui les moins dissipatifs aux basses fréquences de l'Electrotechnique lourde. Les matériaux utilisés et leurs pertes spécifiques dépendent du type d'application et de la fréquence nominale d'utilisation. Nous pouvons tout de même grossièrement les classer grâce à cinq familles principales ( [PER\_1], [VER\_1], [COU\_1] ) (figure 2.2, [PER\_1]), et deux grands domaines d'application (les applications basses fréquences (B.F.: 1-2000 Hz) et les applications hautes fréquences (H.F.: 2-500 kHz)).

- Fe NO: La famille des Fer ou des Fer-Silicium à grains non orientés (moteurs)
- FeSi GO: La famille des Fer-Silicium à grains orientés (transformateurs)
- Spéciaux: La famille des alliages spéciaux Fe-Ni-Co (actionneurs, moteurs, petits appareillages)
- Ferrites: La famille des Ferrites doux ... (Applications H.F.)
- Am-nano.: Les amorphes et nanocristallins Fe-Ni-Co et autres ... (Applications hautes fréquences ou bas champs)

Il s'agit de convertir les quantités en masse de chacune des familles en quantités d'énergie. Il suffit pour cela d'en connaître les pertes spécifiques massiques ( $P_m$ ) pour un point de fonctionnement nominal ( $f/B$ ) dans un premier temps (applications au nominal stable et régulier), puis pour différents points de fonctionnement dans un deuxième (pour certaines applications au nominal variable et irrégulier). On peut alors estimer la consommation minimale mondiale des matériaux magnétiques doux à environ 1.2 MJ (Méga-Joules) sur un an, soit une consommation continue de environ 38 GW. Cela représente plus de la moitié de l'énergie électrique générée et délivrée en France (entre 7 et 70 GW pour EDF en France, soit un maximum de 77 RNSE (Réacteurs Nucléaires de 800 MW)). En évaluant la production électrique mondiale à 2200 RNSE (soit 1.8 TW), la part des matériaux étudiés en terme de dissipation devient alors 2 à 3%. Ce pourcentage est ici minoré quand on sait que la masse réellement utilisée sur un an pour fournir les 1.8 TW est probablement plus grande que la masse produite annuellement.

Cette énergie dissipée peut-être exprimée à l'aide des modèles de pertes fer (section 1.2) [BER\_8], [REI\_1] qui présentent l'avantage de séparer les différentes contributions provenant des différents phénomènes et des différentes échelles (caractéristique que nous exploiterons en premier pour examiner l'impact des pertes en excès dues aux phénomènes microscopiques); et de prédire son évolution en fonction des paramètres que sont l'induction et la fréquence (prédiction que nous utiliserons ensuite pour montrer l'importance croissante de ces pertes avec l'induction et la fréquence). L'expression que nous manipulerons est celle de G. Bertotti (1.3). Nous évaluons la part en excès sur les pertes totales pour les familles des basses fréquences introduites au début et pour leur point de fonctionnement nominal (Tableau 2.1). L'étude n'est réalisée que pour un matériau représentatif de chaque famille, qui possède des propriétés moyennes significatives et disponibles dans la littérature [BER\_9]. Cette brève analyse approximative permet de conclure sur les pertes dynamiques par excès dues aux courants induits microscopiques et de l'évaluer à environ 2.62 GW de consommation minimum mondiale. Cela représente 17.6% des pertes totales dans les matériaux basses fréquences et 6.8 % de la consommation totale des matériaux, toutes familles, applications et origines confondues.

### Consommation des matériaux doux

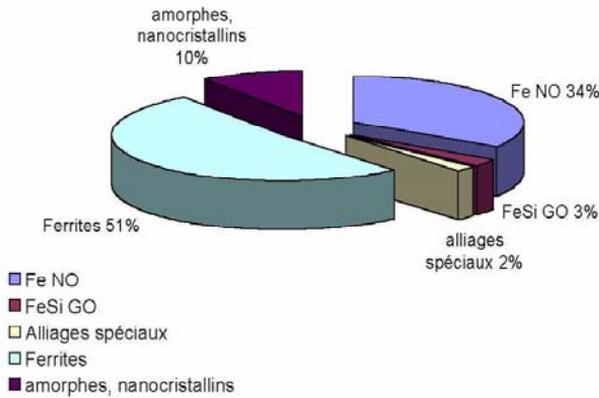


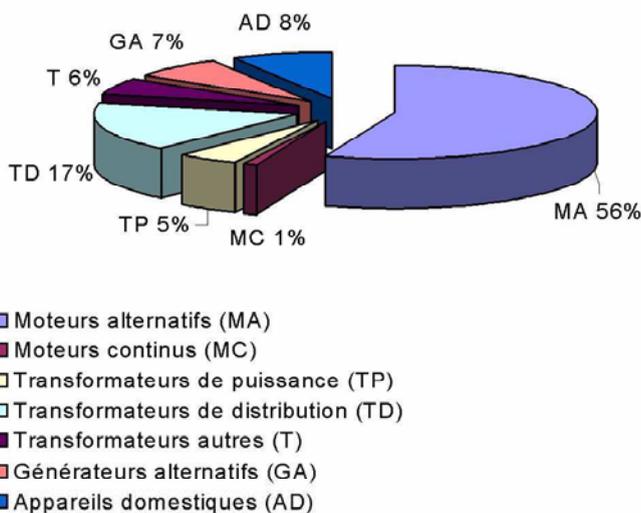
Figure 2.2: Consommation des matériaux magnétiques doux par familles (chiffres de 1996)

Famille	Matériaux	$f / < B >$	%e	$P_m$ (GW)	$P_e$ (GW)	%
Fe NO	FeSi NO 3%	50/1.5	14.7	13.25	1.95	74.4
FeSi GO	FeSi GO 3%	50/1.7	45.7	0.95	0.43	16.4
Spéciaux	FeNi 50-50	50/1.5	36.9	0.66	0.24	9.2
Bilan			17.6	14.86	2.62	100

Tableau 2.1: Pertes en excès des familles basses fréquences calculées avec le modèle de Bertotti

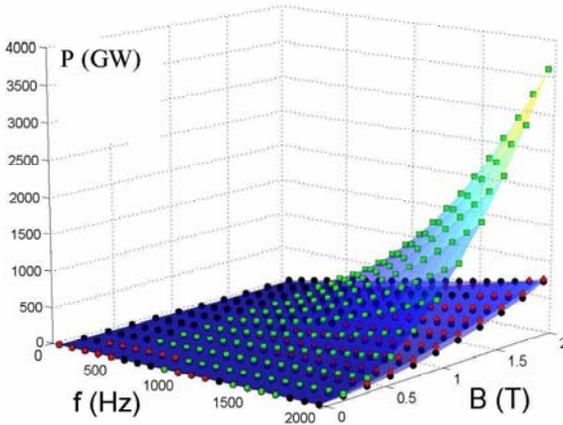
Pour les appareils alimentés en permanence au point de fonctionnement nominal indiqué, la visualisation des surfaces (figures 1.3 et 1.4) présente peu d'intérêt. En revanche, elle acquiert une importance fondamentale lorsque l'on s'intéresse à des dispositifs dont les harmoniques d'espace pour l'induction et les harmoniques en fréquence ont un rôle à jouer. C'est le cas par exemple de la plupart des moteurs électriques (Pompes d'extraction de pétrole, compresseurs, propulseurs, ...), des transformateurs de puissance (Alimentations à découpage, convertisseurs de puissance) et des actionneurs, capteurs et transformateurs impulsionsnels (applications dont nous parlerons surtout dans la partie enjeux techniques 2.3). Afin d'analyser ces applications au nominal variable et irrégulier (du moins pour ce qui concerne ce qui est localement imposé au matériau), nous pouvons regarder la répartition de l'utilisation des Fer-Silicium en fonction des applications en Europe et sur un an (figure 2.3, chiffres de 1996), sachant que la masse consommée annuellement est sur ce continent de environ 1.25 millions de tonnes.

### Utilisation des FeSi en Europe



Figure~2.3: Utilisation des Fer-Silicium en Europe. Répartition en masse (chiffres de 1996)

On se propose enfin dans ce paragraphe de regarder figure 2.4 ce que deviennent les différentes contributions aux pertes en valeurs absolues en fonction des conditions de fonctionnement  $(B, f)$ . Il s'agit tout simplement de la surface de la figure 1.3 extrapolée à l'échelon mondial et représentée sur une plus large gamme en fréquence. Les pertes microscopiques peuvent atteindre plus de 500 GW, soit plus de 10 fois plus que les pertes totales observées au point de fonctionnement classique (50Hz/1.5T). Evidemment, rares sont les dispositifs qui fonctionnent en permanence à 2T et 2000Hz; cependant, il arrive qu'à certains instants, les machines dites alternatives (à commande M.L.I.) ou inductives (à commande transitoire) fonctionnent dans cette zone. On peut dans ce cas encadrer la valeur des pertes entre les pertes minimales obtenues en quasi-statique et les pertes maximales obtenues aux points de fonctionnements extrêmes. Les pertes réelles se trouveront être une moyenne statistique de toutes les valeurs de pertes possibles, étant donnée la densité de probabilité de fonctionnement en chaque point  $(B, f)$  de la surface. En élargissant la répartition de l'utilisation des Fer non orientés de la figure 2.3 au monde entier; tout calcul fait, la consommation en excès de la famille des Fer non orientés dans les machines, moteurs et générateurs alternatifs dans le monde est probablement située entre 0 W (à l'arrêt) et 460 GW (en pleine puissance). Cette consommation maximum



Figure~2.4: Surfaces des pertes totales absolues pour les trois origines physiques entre 0 et 2000 Hz et 0 et 2 T ( $\diamond$ : pertes par excès,  $\circ$ : pertes par hystérésis statique,  $\square$ : pertes classiques macroscopiques).

toutes contributions confondues pourrait atteindre d'après cette étude 3.1 TW, soit près de 2 fois la production mondiale d'énergie électrique, et 45 fois celle de la France.

### Cycle de vie

Suivons maintenant une tonne de Fer tout au long de son « existence »: depuis le minerai dont il est issu jusqu'à la décharge où il est rejeté (et s'il a de la chance, ou malchance? , recyclé). Une recherche sur internet permet d'estimer le coût en énergie de la transformation sidérurgique du minerai de fer en une tonne de fer industriel à 22 GJ (l'étape la plus coûteuse étant celle des hauts fourneaux). Cette même tonne consommera environ 84 GJ sur un an (2650 Ws) si elle est utilisée continuellement à 1,5 T et 50Hz. Au bout de quelques mois (4 mois environ, en continu), le fer a déjà consommé autant d'énergie que celle qui a été nécessaire à sa mise sur le marché depuis le minerai dont il est issu. Cette tonne peut être utilisée pour réaliser environ [CAT\_1]:

- 9 gros transformateurs triphasés de 31.5 kVA,
- 44 petits transformateurs de 2.5 kVA,
- un moteur générant 15 kVA,
- ou bien 1803 actionneurs de contacteurs utilisant une puissance de 7W.

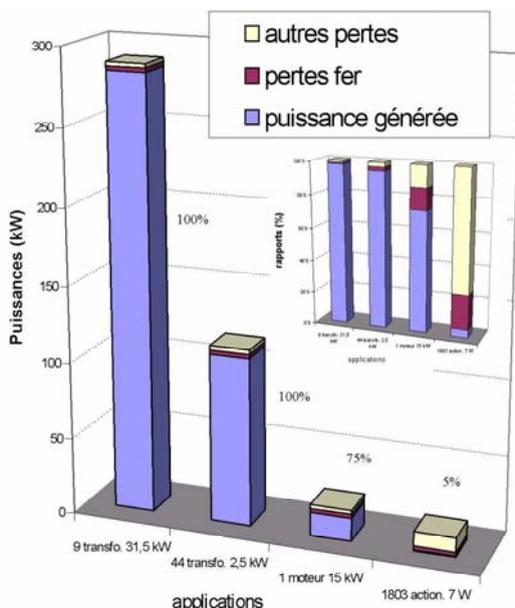


Figure 2.5: Histogramme résumant l'apport d'une tonne de fer suivant l'application (le taux de fonctionnement indicatif est noté en petit sur chaque colonne).

Dans tous les cas, la tonne de fer consomme plus qu'elle n'utilise d'énergie lors de son traitement sidérurgique. Ensuite et heureusement elle véhicule généralement plus d'énergie qu'elle n'en consomme, mais avec une part de pertes parfois non négligeable (1 à 15%). Dans le pire des cas, sa production est réduite à un quart de ce qu'elle consomme, pour l'exemple de l'actionneur. Les différences sont frappantes si on représente ceci sur un histogramme (figure 2.5). Nous reparlerons de ces cas sensibles surtout lorsque nous aborderons les enjeux techniques très importants pour les moteurs alternatifs, les transformateurs impulsionsnels et les actionneurs inductifs. Pour un type d'application donné, la diminution de la taille ou du rendement diminuera d'autant le gain en énergie fourni par la tonne de fer. Par ailleurs, certaines applications rentabilisent plus son utilisation que d'autres. Ceci est aussi lié au rendement, au régime et à la taille du dispositif; en plus de la configuration de fonctionnement du matériau; et donc du choix de conception.

## 2.2 l'Économie

### Bilan financier

La production de matériaux magnétiques réalise un chiffre d'affaire annuel d'environ 25 milliards d'euros (toutes entreprises mondiales confondues) [PER\_1]

	% C.A.	C.A. (Méga euros)
Matériaux durs	25%	6,25
Matériaux spéciaux H.F.	46%	11,5
Matériaux doux	29%	7,25
Total	100%	25

Tableau 2.2: Chiffre d'affaire des matériaux magnétiques [année 1996]

Les matériaux magnétiques doux basse fréquence sont parmi les moins chers du marché car à la fois les plus importants en masse et les moins importants en chiffre d'affaire (Tableau 2.2). En convertissant les consommations énergétiques du premier chapitre en euros à l'aide du tarif en vigueur de la vente du kilowatt-heure appliqué par les entreprises françaises (environ 0,11 euros le kWh); on arrive à 4,25 kilo-euros par heure de fonctionnement de l'ensemble des matériaux doux produits annuellement dans le monde. En 1700 heures, *i.e.* 71 jours ou 2 mois et 2 semaines, la consommation commence déjà à dépasser le chiffre d'affaire réalisé lors de la vente de la production de fer. Heureusement, dans le même temps, une somme beaucoup plus considérable est gagnée dans la distribution d'énergie. Tout cela pour finalement dire que ces matériaux sont très peu chers par rapport à ce qu'ils peuvent faire gagner; et qu'un seul % de puissance gagnée sur les pertes Joules (soit une augmentation du rendement  $r$  de seulement  $1\% * (100 - r)\%$ ) permettrait d'économiser au minimum 42,5 kilo-euros par heure sur un an, et probablement plus étant donnés la minoration des estimations effectuée dès le départ et le fait que le kWh de certains matériaux doux vaille beaucoup plus que celui des Fer-Silicium chargés de nous distribuer l'électricité via les transformateurs et générateurs. Dit autrement; cette somme, gagnée sur la production d'une année, correspond aux frais en électricité de 25800 foyers abonnés pour 15kW de puissance à souscrire. En éliminant la totalité des pertes en excès dues au courants induits microscopiques, cela donne 6,78 % de gain, soit 288 kilo-euros par heure et 175000 foyers. En imaginant que nous soyons capables de réduire à néant toutes les pertes, nous arriverions à 2,6 millions de foyers (avec 4 membres dans chaque famille, cela fait la population d'un petit pays).

### Balance économique

Il s'agit dans cette partie de synthétiser les informations statistiques et économiques sur la production et la consommation de fer dans le monde, afin de révéler les déséquilibres économiques et de développement (figure 2.6, d'après

l'Internet). Nous utiliserons un indice en euros par habitant pour chaque continent, défini par la différence entre la valeur de la production moins celle de la consommation de fer divisée par la population. On suppose que le fer, traité ou non, destiné aux applications électrotechniques basse fréquence représente 1,31 % en masse de la masse totale de fer, traitée par l'ensemble des métallurgistes, provenant des établissements de recyclage ou extraite des sols par les mineurs.

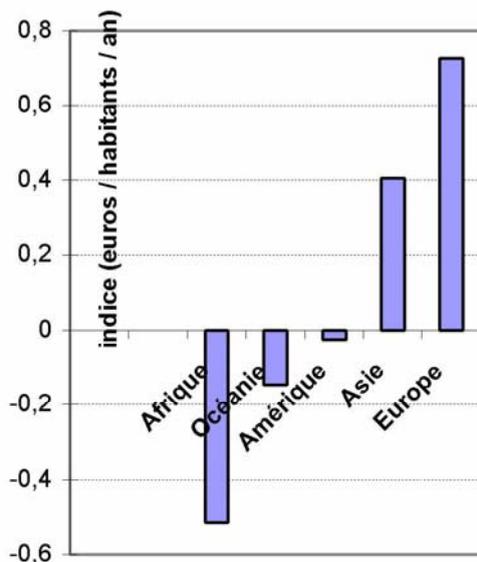


Figure 2.6: Visualisation du déséquilibre économique entre la valeur de la production et celle de la consommation de fer en Electrotechnique basse fréquence, exprimée en euros/habitant/an (chiffres de 1996).

Les pays dits sous développés ou émergents interviennent surtout dans la production de minerais et les pays dits développés dans la production de fer traité (à l'exception de quelques pays possédant des mines, tels que l'Australie). Cependant, l'indice de développement ne suffit pas à évaluer la différence entre la production et la consommation par habitant; d'où l'indice qui a été choisi sur la figure 2.6. Le monde produit en moyenne plus qu'il ne consomme. Des réserves sont donc nécessairement faites sous la forme de stocks de tôles magnétiques probablement.

## 2.3 La Technique

Parmi les applications susceptibles d'être intéressées par cette étude, on trouve les dispositifs de sécurité et de contrôle électrique (disjoncteurs et interrupteurs

différentiels, disjoncteurs de court-circuit) d'une part et les dispositifs de distribution d'électricité (transformateurs de tension, de courant, les contacteurs, les moteurs et divers actionneurs) d'autre part.

### Enjeu de précision

Etre capable de prédire avec précision les pertes en énergie, les temps et formes de réponse d'un matériau quelle que soit sa géométrie; c'est maîtriser la conception et permettre l'adaptation parfaite entre les divers éléments constitutifs d'un dispositif pour en améliorer la fiabilité et la qualité. Outre ce gain en compétitivité envers les concurrents et en crédibilité envers les clients, cette progression peut aussi permettre de faire des économies qui nous l'espérons amortiront au moins les frais dans la course à la concurrence. Il s'agit de répercuter cette connaissance maîtrisée des pertes au sein des pièces magnétiques des organes électromécaniques sur un meilleur dimensionnement des sources pour en assurer le bon fonctionnement. Tous les raisonnements énergétiques et économiques effectués précédemment sur le fer peuvent alors aussi être faits pour d'autres matériaux complémentaires tel que le cuivre par exemple [JPG\_1]. Nous sommes en présence d'un enjeu technique qui en appelle d'autres énergétiques et économiques favorables à la fois à l'entreprise et à l'environnement.

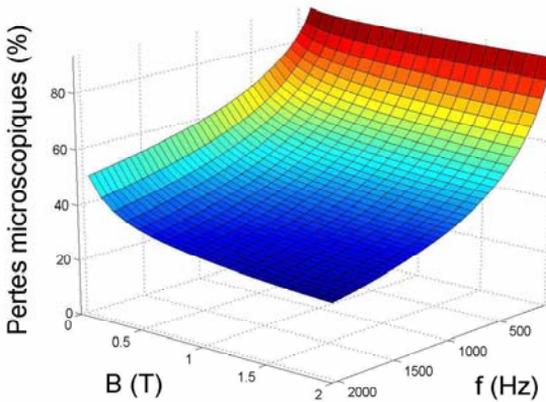


Figure 2.7: Surface des erreurs relatives dues aux pertes microscopiques (quasi-statiques+excès) d'après le modèle de Bertotti.

Nous avons vu dans les enjeux énergétiques que les pertes dues aux processus microscopiques étaient des pertes souvent négligées dans les diverses étapes de conception. Cette négligence peut donc être la cause d'une erreur d'imprécision relative (ou parfois de défaillance) que nous souhaitons estimer. Nous avons aussi vu que ces pertes peuvent atteindre une part quantifiable des pertes totales (de 30 à 90 % en moyenne suivant le point de fonctionnement, en rangeant les

perles quasi-statiques dans les perles microscopiques). Enfin le taux de perles fer peut lui aussi être significatif et varier entre 1% et 25% suivant l'application envisagée (comme nous l'avons vu dans l'analyse du cycle de vie, section 2.1). Nous pouvons donc évaluer l'erreur relative commise en multipliant le pourcentage de perles microscopiques avec le pourcentage de perles fer intervenant dans le dispositif. Il suffit pour cela de reprendre les surfaces de la figure 1.4 en ne retenant que la somme des contributions statiques et en excès (figure 2.7, [[BER\_7], [BER\_8]]). Suivant le point de fonctionnement du produit considéré, l'imprécision relative se trouve entre  $30\% \times 1 = 0.3\%$  et  $90\% \times 25 = 22.5\%$ .

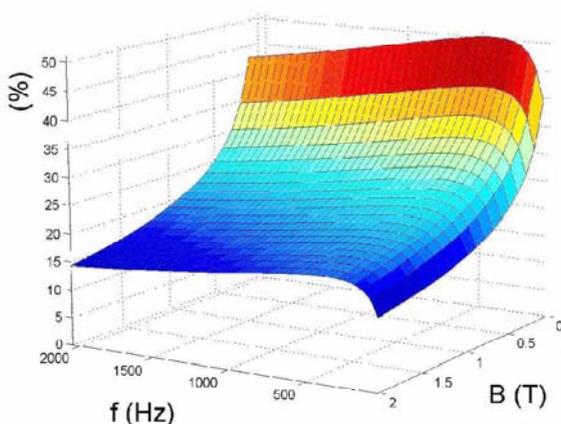


Figure 2.8: Surface des erreurs relatives dues aux perles dynamiques en excès uniquement (d'après le modèle de Bertotti).

Estimons cette erreur relative en ne considérant que les perles en excès dynamiques (figure 2.8, [[BER\_7], [BER\_8]]). Suivant le point de fonctionnement du produit considéré, le pourcentage de perles microscopiques dynamiques est compris entre 10 et 50%. Nous pouvons alors dire, en encadrant le taux de perles fer entre 1% et 25%, que l'erreur relative commise se trouve entre 0.1% et 12.5%. Sachant qu'en général le rendement et le taux de perles fer sont eux aussi fonctions du point de fonctionnement, cet encadrement des perles fer peut parfois être revu à la hausse.

## Enjeu de sensibilité

L'enjeu de précision devient primordial dans la conception et le calcul de structures électromagnétiques et électromécaniques destinées aux dispositifs de sécurité, où la haute sensibilité et la précision ne sont pas des luxes ou des bonus, mais bien des nécessités. Pour illustrer ce paragraphe, nous raisonnerons sur un exemple concret, le disjoncteur différentiel (figure 2.9, [CAL\_2], [LEC\_1]).

Le disjoncteur différentiel classique de la figure 2.9 est constitué d'un capteur de courant et d'un actionneur, tous deux constitués d'un circuit magnétique ca-

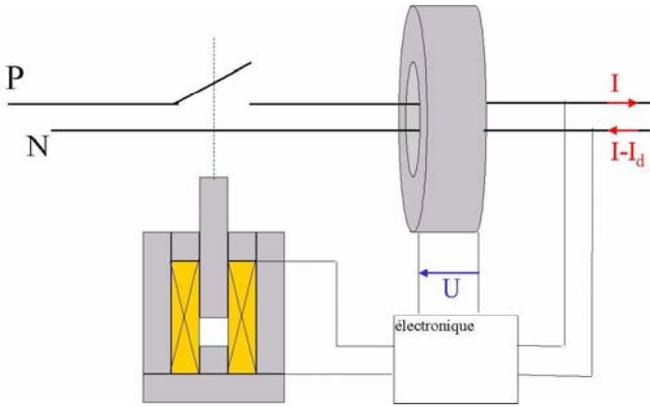


Figure 2.9: Chaîne différentielle de protection domestique (capteur à droite et actionneur à gauche).

nalisant les lignes de flux ( $[FON\_1]$ ,  $[CAL\_1]$ ,  $[LEC\_1]$ ). L'Actionneur s'ouvre à partir d'une certaine tension de seuil  $U_s$ , le capteur quant à lui délivre une tension (notée  $U$ ) en relation avec l'intensité résiduelle du courant de défaut (noté  $I_d$ ). Lorsque la tension de sortie est supérieure au seuil le circuit est ouvert par l'actionneur, sinon rien ne se passe. La sensibilité  $\xi$  de ce capteur est définie comme étant le rapport entre la tension de sortie  $U$  et l'intensité d'entrée  $I_d$  (les deux en modules) (équation (2.1a)).

$$U = \xi I_d \quad (2.1a)$$

$$\xi = 2\pi f n_2 \frac{\mu_{app} S}{l} \quad (2.1b)$$

où:

- $f$  est la fréquence,
- $n_2$  est le nombre de spires au secondaire du circuit du capteur,
- $S/l$  est le rapport entre la section  $S$  et la longueur moyenne  $l$  (fibre neutre) de ce même circuit,
- $\mu_{app}$  est la perméabilité apparente du circuit magnétique.

L'intensité maximale du courant de défaut à 50Hz, fixée par les normes, est de 30mA (il s'agit du seuil de fibrillation ventriculaire à 50Hz,  $[CAL\_1]$ ). Au-delà, le courant de défaut traversant le corps humain peut être dangereux, voir mortel si le contact est suffisamment long (voir annexe 10)  $[CAL\_1]$ . Ainsi, le

capteur de courant doit posséder une sensibilité suffisante pour permettre de signaler à l'actionneur que l'intensité maximale est atteinte en lui envoyant une tension supérieure ou égale à sa tension de seuil<sup>1</sup> [FON\_2]. Il pourrait suffire de choisir un matériau magnétique doux qui possède une perméabilité magnétique suffisante (les matériaux magnétiques doux ont les propriétés d'avoir une très forte perméabilité magnétique et de guider les lignes de flux dans le circuit torique, c'est d'ailleurs pour ces deux raisons que ces matériaux sont choisis dans cette application) ([PER\_1], [VER\_1], [COU\_1]). Malheureusement, écrite comme ceci, la perméabilité semble constante; or la réponse du système dépend bien évidemment de la dynamique du signal d'entrée. Et dans ce cas où le régime est dynamique et non statique, il faut compter avec une variation de la perméabilité avec la fréquence d'utilisation ou même la vitesse d'apparition du défaut (la fréquence caractéristique de l'harmonique qui lui correspond). On montre en effet que la perméabilité se dégrade avec la fréquence, ou plutôt avec la dérivée temporelle de l'induction. Cet effet est directement lié avec les pertes fer dynamiques. Il est possible de modéliser cette dégradation de perméabilité avec un modèle classique de pertes, mais on commet alors, le courant de défaut  $I_d$  étant fixé au seuil admissible, la même erreur relative que celle proposée dans les paragraphes précédents ( $P = U \times I$ ,  $\Delta P/P = \Delta U/U + \Delta I/I = \Delta \xi/\xi + 2\Delta I/I = \Delta \xi/\xi = \Delta \mu_{app}/\mu_{app}$ , cf équation (2.2)). Il y a naturellement d'autres sources d'erreur ( $f$ ,  $n_2$ ,  $S$ ,  $l$ ), mais nous nous focalisons ici sur celle due aux processus dynamiques d'aimantation du matériau, qui ont *a priori* autant de poids en valeur relative ([FON\_1], [FON\_2]).

$$U = \xi \left( 1 - \frac{\Delta \xi}{\xi} \right) I_d \quad (2.2)$$

Ainsi un courant d'intensité comprise entre  $I_d$  et  $(I_d + (\Delta \xi/\xi)I_d)$  peut s'échapper entre l'aller de la phase et le retour du neutre, sans que la tension seuil de déclenchement soit atteinte. L'erreur relative sur l'intensité du courant de défaut détectée est bien égale à l'erreur relative de la surface des figure 2.7 et 2.8. Elle dépend de la dynamique imposée au matériau. Une parade consisterait à diminuer d'autant la tension de seuil de l'actionneur, mais cela a pour conséquence de réduire ses dimensions et donc de réduire son rendement et de complexifier sa conception. Voici donc un enjeu technique de taille ([FON\_1], [FON\_2]).

Enfin, lorsque les processus non-linéaires, la saturation et la dépendance avec la forme de l'onde d'excitation s'en mêlent, il devient alors nécessaire de travailler en régime transitoire et dans le domaine temporel. Les estimations des erreurs via les surfaces introduites ci-dessus ne sont rigoureusement vraies qu'en régime linéaire et harmonique où il est possible de travailler dans le domaine fréquentiel. Elles permettent tout de même de se faire une idée de la précision qu'il est possible d'obtenir et qui n'est pas trop loin de la réalité. Ces estimations

---

<sup>1</sup>La prise en compte de l'impédance de sortie compliquerait cette première étude (cette prise en compte sera envisagée plus tard dans le rapport de thèse) et n'est pas nécessaire pour mettre en évidence l'importance des erreurs relatives commises et introduites au paragraphe précédent.

peuvent-être corrigées en régime transitoire non-linéaire grâce à une représentation indépendante de la forme d'onde et prenant en compte les non-linéarités des propriétés du matériau. Grâce à cette nouvelle démarche il sera possible d'évaluer correctement à la fois les pertes d'énergie mais aussi la réponse dissipative et retardée des dispositifs (chapitre 7).

### Enjeu de fiabilité

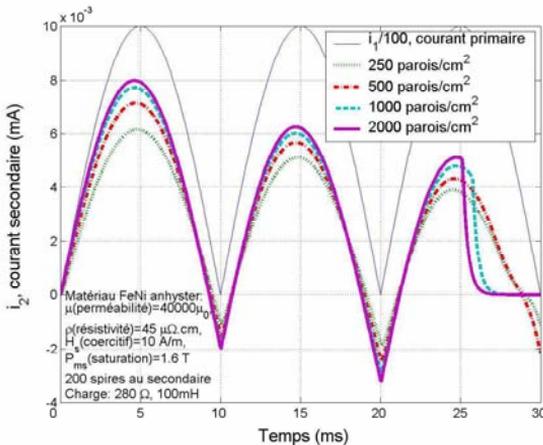


Figure 2.10: Simulation de l'intensité secondaire du capteur en charge pour plusieurs densités de parois dans son circuit magnétique (d'après le modèle de Pry et Bean).

Nous allons ici illustrer figure 2.10 et figure 2.11 l'impact de l'hystérésis et de la saturation des matériaux sur la fiabilité en terme de reproductibilité des fonctionnalités attendues d'un appareil (de protection différentielle par exemple, figure 2.9). Nous reprenons l'exemple du capteur ci-dessus que nous chargeons cette fois ci avec une résistance de 280  $\Omega$  et une inductance de 100 mH (charge correspondant à l'impédance d'un petit actionneur reluctante augmentée d'une résistance importante pour la mise en évidence de la saturation). Nous munissons le matériau du circuit du capteur (33 rondelles empilées d'épaisseur 0.3 mm) d'un modèle d'hystérésis dynamique basé sur la réalité des parois magnétiques ([BEA\_3], [GAU\_1], chapitre 3 section 3.2; le matériau choisi ici est un FeNi type anhyster [COU\_1]). Enfin nous simulons la réponse en intensité au secondaire (figure 2.10), ainsi que le comportement apparent du matériau (figure 2.11), sous l'application d'un courant de défaut particulier à 50 Hz au primaire (Courant de défaut de signe constant qui se présente sous la forme d'arches de sinusoïdes). Il s'agit de mettre en évidence l'influence conjuguée néfaste de la rémanence dynamique (souvenir d'un état aimanté d'une excitation à une autre) et de la saturation du matériau. Pas assez de parois augmente le temps

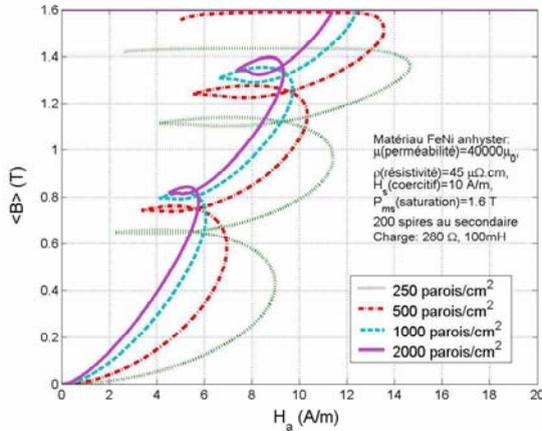


Figure 2.11: Simulation des cycles d'hystérésis du circuit du capteur pour plusieurs densités de parois. Mise en évidence de la rémanence dynamique.

de réponse mais trop provoquent la saturation au bout de quelques périodes. En diminuant la résistance de la charge, cette saturation est retardée et apparaît après plus de périodes. Il semble exister un jeu de paramètres circuit qui permet de rester sur un cycle limite hors saturation (ou centre attracteur, [CHE\_2]). L'introduction d'un modèle prenant en compte les processus microscopiques liés aux divers objets magnétiques (ici les parois) peut donc être fondamentale dans la prédiction de la vitesse de coupure des D.D.R. ( [CAL\_1], annexe 10) d'une part ; et dans la prédiction de la reproductibilité des fonctionnalités d'un appareil et par suite de sa fiabilité d'autre part ( [FON\_1], [FON\_2]).

## Discussion

Les tendances actuelles visent à améliorer encore la fiabilité et la sélectivité [CAL\_1] des disjoncteurs différentiels en préservant et optimisant la transmission de signal et le transfert d'énergie depuis le capteur jusqu'à l'actionneur ( [OLI\_5], [OLI\_6]). Les solutions possibles passent par une diminution de la taille de l'actionneur, une détection dès la première période de défaut, une technologie à propre courant ou à propre tension [CAL\_2] (*i.e.* sans alimentation de l'actionnement via le réseau) ou encore l'hybridation [LEF\_1] (jumelage entre un capteur amagnétique pour le signal et un capteur magnétique pour l'énergie). Une connaissance précise des temps de réponse caractéristiques et des pertes d'énergie de l'ensemble {matériau+architecture} devient alors primordiale. En ce qui concerne les appareils de distribution d'énergie; ces considérations peuvent aussi avoir leur importance soit pour l'évaluation précise des pertes accumulées sur un nombre considérable d'appareils (contacteurs) ou sur des dispositifs au rendement très sensible (moteurs); soit pour la détermination, là encore, des

temps de réponse lors de la conception (seuil bas de déclenchement ou d'ouverture). Nous pensons en particulier aux contacteurs destinés à la coupure, répétée ou non, au zéro de courant ou de tension (en effet cette coupure au zéro permettrait de limiter le développement de l'arc électrique lors de l'ouverture des contacts, ce qui préserverait les disjoncteurs et diminuerait les risques d'incendie, ou bien encore augmenterait d'autant leur durée de vie et celle des contacteurs à fonctionnement répété). Enfin, outre les applications de sécurité électrique; on trouve aussi divers capteurs sensibles utilisant des circuits reluctants magnétiques (capteurs de courants, de position, d'efforts ou de couple, tous basés sur une détection différentielle). Nous tenterons de répondre à ces enjeux en travaillant sur la modélisation et la formulation des phénomènes physiques intégrables dans des outils logiciel de simulation numérique aidant à la conception, au dimensionnement et au prototypage en communication avec les métallurgistes et les métrologues. Nous n'avons pas mentionné un nombre important d'autres causes possibles à la dégradation des performances (agitation thermique, contraintes mécaniques, perturbations électromagnétiques, vieillissement physico-chimique, ...). Certaines d'entre elles (la température [UNG\_1], les contraintes ou les perturbations électromagnétiques...etc...) pourraient être abordées par un ajout des couplages magnétothermiques et magnétostrictifs dans la description des propriétés statique et dynamique du matériau. De plus, ces autres facteurs que sont la température et les contraintes, couplés avec le magnétisme (magnétothermique, magnétostriction, ...) sont des phénomènes physiques aussi utilisés dans d'autres types de disjoncteurs, ceux interrompant les court-circuits. En effet ces dispositifs sont constitués entre autres d'un actionneur électromécanique contenant un noyau ferromagnétique et un bilame thermique avec une lame en Fer-Nickel [INV\_1].

## 2.4 Conclusion

Après un rapide rappel du cadre universitaire et industriel de ce projet, nous avons examiné de près les enjeux globaux énergétiques, économiques mais surtout techniques de ces effets dynamiques dans le calcul et la prédiction de la réponse d'un dispositif électrotechnique. Un accent a été mis sur les applications de sécurité et de surveillance électrique, au coeur des problématiques de sensibilité et de fiabilité dans les étapes de conception et de prototypage.



## Chapitre 3

# Matériaux Magnétiques

*” Le magnétisme de la matière pourrait bien être créé par de petites boucles de courant électrique à l'échelle moléculaire ”*

**André-Marie Ampère**

## 3.1 Origines et descriptions du ferromagnétisme

On observe à notre échelle humaine différentes manifestations se caractérisant par des comportements parfois antagonistes et qui pourtant s'expliquent à l'aide de considérations d'atomistique communes définissant le magnétisme. Il existe en effet de nombreuses manifestations extérieures rencontrées sous champ (ferromagnétisme, ferrimagnétisme, paramagnétisme, antiferromagnétisme, ellimagnétisme, diamagnétisme, ...) ( [ASH\_1], [KIT\_1], [BRI\_1]). Le paramagnétisme, le ferrimagnétisme et le ferromagnétisme par exemple peuvent se définir comme une amplification de champ, plus importante pour le ferromagnétisme grâce à l'existence d'un ordre magnétique naturel. Les entités élémentaires (atomes, électrons, ...) sont porteuses d'un moment magnétique permanent qui se conserve et se couple positivement par adjonction d'autres atomes depuis l'échelle atomique jusqu'à l'échelle macroscopique. Parmi tous les éléments simples, seuls certains présentent des caractéristiques ferromagnétiques significatives et facilement observables. Il s'agit de métaux de transition: le Fer, le Nickel et le Cobalt ... [TRE\_1], [CHI\_1]... La manière dont le matériau va gérer son ordonnancement est régie par des considérations énergétiques qui conduisent à une structuration magnétique microscopique propre plus ou moins encline à aider à l'amplification statique ou dynamique du champ; et c'est ce que nous proposons d'introduire dans cette section.

### 3.1.1 Echelles d'observation et terminologies

La description physique et les outils mathématiques utilisés pour étudier ce type de matériaux dépendent de l'échelle à laquelle on se place. On distingue plusieurs échelles d'observation: atomique, nanoscopique, microscopique, mésoscopique et enfin macroscopique; leur signification peut se résumer à l'aide du schéma de la figure 3.1 (d'après [HUB\_1]).

#### Echelle atomique

Au niveau atomique, nous décrivons l'origine et les interactions mutuelles entre moments magnétiques élémentaires au sein d'un groupe d'atomes d'une maille élémentaire cristalline ou d'une molécule. Les propriétés telles que l'aimantation à saturation, la constante d'échange entre moments ou encore la constante d'anisotropie sont alors définies ( [ASH\_1], [BER\_11]). Ces moments sont portés par les électrons (liés ou libres suivant le modèle [BRA\_1], [CHI\_1]) et sont dus à leurs moments orbital et spinoriel et à leurs interactions (plus exactement aux couplages d'interaction entre orbitales de spin) [TRE\_1].

#### Echelle nanoscopique

A cette échelle, les éléments de matière sont vus comme des éléments de volume, de l'ordre de quelques nanomètres, contenant un nombre conséquent de moments magnétiques pouvant adopter plusieurs configurations possibles [FRU\_1]. De

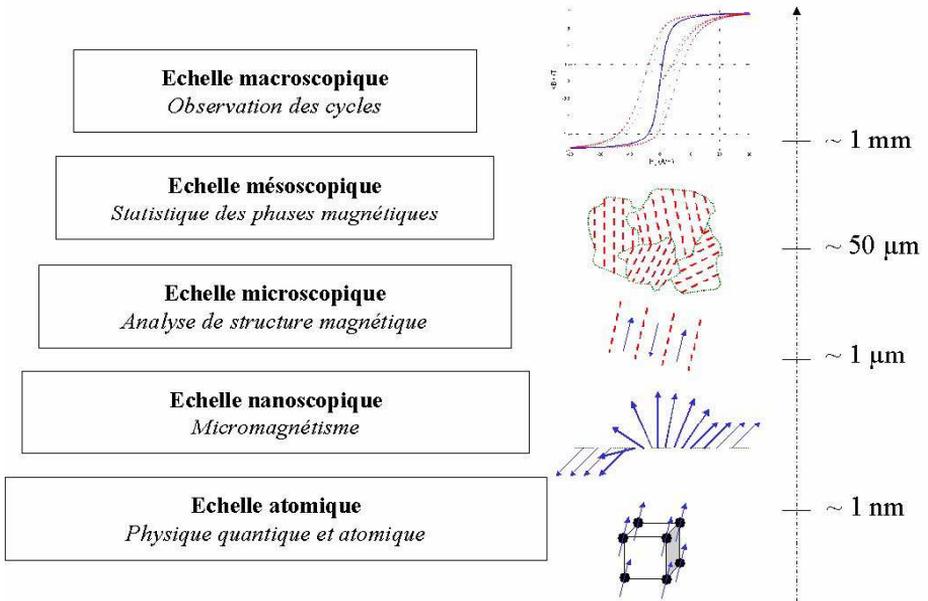


Figure 3.1: Gradation dans les échelles d'observation des matériaux magnétiques doux depuis les atomes jusqu'au cycle.

manière simple et la moins réductrice possible, la distribution spatiale des moments est soit uniforme, nous sommes dans un domaine magnétique (figure 3.2); soit rotationnelle et nous sommes alors dans une paroi magnétique (figure 3.2) (le mot paroi indique ici un lieu de rotation de moments, comme une frontière entre domaines, un vortex, ou d'autres objets divers ... [HUB\_1]). Ces deux zones distinguées constituent deux objets microscopiques caractéristiques presque toujours rencontrés dans les matériaux doux.

### Echelle microscopique

Il s'agit maintenant de s'éloigner un peu pour observer ce que l'on appelle la structure magnétique caractéristique du matériau. Elle dépendra de plusieurs propriétés physiques microscopiques (métallographie, anisotropie, échanges, ...), mais peu de la géométrie macroscopique tant que nous avons affaire à une pièce suffisamment grande (sauf peut-être au niveau des interfaces air-fer (cf sous-section 4.3.3)). Celle-ci se présente très souvent sous la forme de domaines (domaines de Weiss, [KIT\_2], [KIT\_3]) et parois magnétiques (parois de Bloch, [NEE\_2]), et autres objet magnétiques caractéristiques (domaines et parois de formes diverses et variées, vortex d'aimantation, ...). Il est possible de mettre en évidence cette structure interne à l'aide de plusieurs outils expérimentaux, dont les techniques magnéto-optiques ([HUB\_1], [ARG\_1]) exploitant les ef-

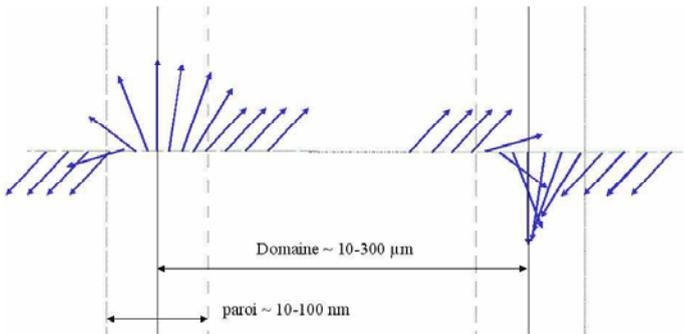


Figure 3.2: Exemple simplifié de domaine magnétique et définition des parois.

fets Kerr, Faraday, Voigt et Cotton-Mouton d'interaction entre la lumière et la matière aimantée (rotation de polarisation lumineuse sous l'action de l'aimantation, [TRE\_1]). Cette structure s'explique par des considérations énergétiques qui définissent la théorie micromagnétique (sous-section 3.2.1). En effet, la structure magnétique résulte d'un compromis trouvé dans la minimisation des énergies d'anisotropie magnétocristalline, d'échange entre moments et de champ démagnétisant (l'énergie magnéto-élastique intervient aussi parfois) [BER\_11], [TRE\_1]. La solution trouvée est une structuration en domaines (à cause de l'anisotropie) et parois fines (à cause de l'échange), d'autant plus densifiés que les grains seront petits (à cause du champ démagnétisant) [BER\_11]. Tout ceci peut être expliqué à l'aide de considérations énergétiques plus quantitatives (voir sous-section 3.2.1).

### Echelles mésoscopique

Il s'agit de s'éloigner encore un peu pour traiter un élément de volume, à la fois assez grand pour contenir un échantillon statistique significatif des configurations microscopiques possibles et assez petit par rapport à la taille réelle de la pièce. A cette échelle, les domaines et les parois ne sont plus traités que de manière ensembliste (Théorie des phases, [HUB\_1]); le détail de la structure magnétique n'ayant alors plus de relevance sinon par ses conséquences observables à l'échelle macroscopique.

### Echelle macroscopique

La dernière échelle d'observation correspond à la pièce ou à l'échantillon considéré dans sa totalité. Nous n'avons plus accès expérimentalement qu'à son comportement moyenné: le cycle d'hystérésis ou la dissipation (cf chapitre 1).

### 3.1.2 Ferromagnétismes macroscopiques

L'existence de la structure magnétique à l'échelle microscopique peut entraîner différents types de comportements à l'échelle macroscopique. En effet, bien que chacun des éléments de matière (ensemble d'atomes) possède une aimantation propre et ordonnée, le couplage entre ces éléments peut varier d'un matériau à un autre. L'aimantation résultante moyennée sur un ensemble d'éléments (un ensemble de domaines) adopte alors différents comportements suivant que nous utilisons un matériau dur ou à un matériau doux.

#### Matériaux ferromagnétiques durs

Les matériaux durs possèdent une aimantation permanente importante, et ce même en l'absence d'excitation magnétique. La structure magnétique est figée dans une configuration telle que certains domaines orientés dans un sens soient fortement majoritaires. Les quelques parois magnétiques existantes sont bloquées principalement par des défauts, souvent injectés de manière contrôlée ([TRE\_1], [TRE\_2]). Sur le cycle d'hystérésis (cf figure 1.5), cela se manifeste par une aimantation rémanente et un champ coercitif très important.

#### Matériaux ferromagnétiques doux

Lorsqu'au repos, le matériau perd de son aimantation de façon considérable, et lorsqu'il permet le retournement facile de sa polarisation; il s'agit de matériaux doux. Les domaines s'orientent statistiquement de manière équilibrée et les parois sont libres de se déplacer ([GEO\_2], [TRE\_2], [BRA\_1], [BER\_11]). Sur le cycle d'hystérésis (cf figure 1.5), cela se caractérise par un champ coercitif faible.

La séparation entre ces deux types de ferromagnétisme n'est pas toujours si nette et reste à l'appréciation des utilisateurs en accord avec certaines limites de zones arbitraires. Une définition plus précise de cette limite est proposée dans la sous-section 3.2.1 [BER\_11]. L'objet de cette étude concerne principalement les matériaux ferromagnétiques doux auxquels nous ne demandons pas de fournir de l'énergie ou du champ (via une aimantation permanente) mais juste de canaliser et de transmettre efficacement ce champ à l'aide d'une amplification statique et dynamique performante et peu dissipative. D'où l'intérêt d'aller voir de plus près ces mécanismes d'amplification, *i.e.* d'aimantation (section 3.2).

## 3.2 Processus d'aimantation et courants induits

### 3.2.1 Théories croisées

En examinant les phénomènes intervenant pour les différentes échelles, certains temps caractéristiques peuvent être mis en évidence (voir figure 3.3, [ref. 1]=[ [BRO\_3], [BRO\_4], [LAN\_1], [GIL\_1], [GIL\_2]], [ref. 2]=[ [WSK\_1], [BEA\_3], [NEE\_1], [BIS\_1], [CHE\_1]], [ref. 3]=[ [BER\_11], [LAN\_2]]).

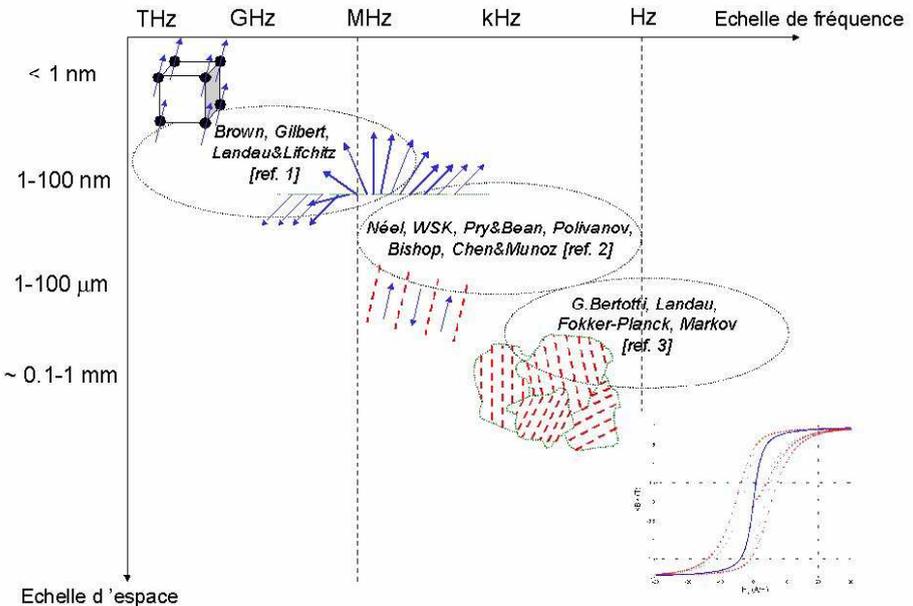


Figure 3.3: Echelle des fréquences caractéristiques correspondantes aux phénomènes physiques suivant l'échelle d'espace à laquelle ils interviennent.

Il existe deux théories complémentaires qui permettent de décrire quantitativement les mécanismes d'aimantation à l'échelle microscopique dans les intervalles de temps, de fréquence et d'énergie qui nous intéressent. La première est construite sur un principe de minimisation de l'énergie micromagnétique du matériau: c'est le micromagnétisme ([BER\_11], [SIM\_1]), qui permet de décrire l'évolution statique et dynamique de l'aimantation et d'expliquer sa structuration à l'échelle microscopique. La seconde fournit les variations spatio-temporelles des champs électromagnétiques et des courants au sein de cette structure en mouvement: c'est l'électromagnétisme [LAV\_1].

### Micromagnétisme

Les équations du micromagnétisme sont issues d'un principe de moindre action, ou variationnel (cf. annexe 18), appliqué à une fonctionnelle énergétique décrivant les interactions cristal-cristal, champ-cristal (nous sommes alors à l'intérieur d'un domaine ou d'une paroi) [BER\_11]. Les différentes énergies mises en jeu et constituant la densité volumique d'énergie libre de Landau [BER\_11] expliquent la structuration en domaines magnétiques par un jeu de compétition entre différentes tendances opposées qui s'équilibrent et par suite les équations d'évolution dynamique des moments magnétiques  $\mathbf{m}$  de module  $M_s$  et d'orientation quelconque noté  $\theta$  (figure 3.4).

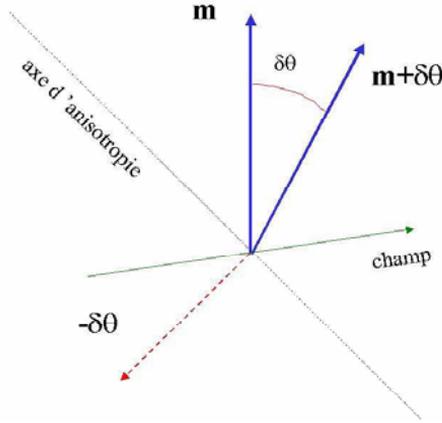


Figure 3.4: Orientation et rotation d'un moment magnétique.

$$\text{Echange: } g_{ex} = \frac{A_{ex}}{M_s^2} (\nabla(\mathbf{m}))^2 \quad (3.1a)$$

$$\text{Anisotropie: } g_{an} = f_{an}(\mathbf{m}) \quad (3.1b)$$

$$\text{Démagnétisation: } g_{dm} = -\frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{h}_d \cdot \mathbf{m} \quad (3.1c)$$

$$\text{Couplage: } g_{ze} = -\mu_0 \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} \quad (3.1d)$$

où:

- $M_s$  est l'aimantation à saturation,
- $A_{ex}$  est le coefficient d'échange entre moments (exprimé en  $J.m^{-1}$ ),
- $f_{an}$  est une fonction de l'anisotropie macroscopique (dans le cas d'une anisotropie uniaxiale, on a  $\delta f_{an} = -2K_{an}\delta \cos(\theta)$ ,  $K_{an}$  étant une constante d'anisotropie exprimé en  $J.m^{-3}$ ),
- $\mathbf{h}_d$  est le champ démagnétisant créé par les charges magnétiques non éliminées ( $\mathbf{h}_d = -\nabla\phi$  avec  $\Delta\phi = -\nabla \cdot \mathbf{m}$ ),
- $\mathbf{h}$  est le champ magnétique appliqué.

Certaines constantes matérielles caractéristiques peuvent être définies:

$$\text{Champ d'anisotropie: } \kappa = \frac{2K_{an}}{\mu_0 M_s^2} = \frac{H_{an}}{M_s} \quad (3.2)$$

$$\text{Longueur d'échange: } l_{ex} = \sqrt{\frac{2A_{ex}}{\mu_0 M_s^2}} \quad (3.3)$$

Elles permettent d'exprimer les différentes contributions de manière addimensionnelle. Nous proposons d'exploiter cette description pour expliquer les corrélations possibles et ici simplifiées entre structure métallographique (taille de grains) et structure magnétique (domaines, parois, vortex). On distingue trois configurations possibles (a: grain monodomaine, b: grain polidomaine, c: vortex, voir figure 3.5; [BER\_11], [ZAV\_1]. L'état super paramagnétique a été ici passé sous silence.) prédominantes alternativement suivant la taille des grains et la valeur des propriétés d'anisotropie (équation (3.2)) et d'échange (équation (3.3)) caractéristiques du matériau. A savoir que cette analyse oublie le caractère continu de la matière en terme de juxtaposition de grains; elle permet cependant d'en avoir une idée représentative. La contribution adoptée est celle minimisant l'énergie volumique addimensionnée  $g/(\mu_0 M_s^2 V)$  (avec  $g = g_L = g_{ex} + g_{an} + g_{dm} + g_{ze}$ ). Remarquons enfin que les matériaux dit durs peuvent être obtenus par assemblage mécanique compact de grains très anisotropes et isolés dans la configuration a (la taille caractéristique des grains est plus petite qu'une taille critique définissant l'intersection entre les configurations a et c; et pour  $\kappa > 4/9$  cette intersection est ramenée à l'infini).

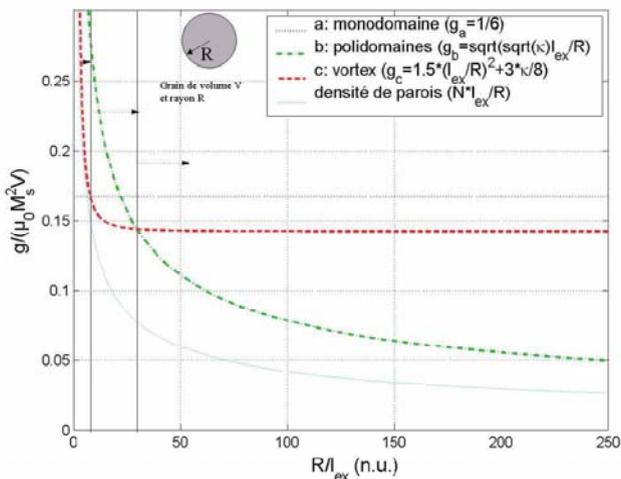


Figure 3.5: Relation Grain-Structure avec les propriétés du Cobalt ( $l_{ex} \simeq 3.4$  nm, sources dans l'ouvrage de Bertotti). Dans les polycristaux, nous rencontrons presque exclusivement des configurations polidomaines, à l'exception de certains nanocristaux doux. La dernière courbe de la légende ne s'applique que pour le cas b. Les parois se densifient à mesure que la taille du grain diminue; mais elles sont aussi d'autant plus gênées par les joints de grain en régime statique.

Avec la somme de toutes ces contributions et considérations (équations (3.1a) et suivantes), nous avons une énergie ne faisant pas intervenir la dynamique, que nous qualifierons de quasi-statique. Dans ces conditions, le système de moments

devrait évoluer de manière à maintenir cette énergie constante. Il se trouve que ce n'est pas exactement le cas et que l'énergie totale diminue en accord avec deux autres énergies, dites gyroscopiques et dissipatives (équations (3.4) [THI\_2] et (3.5) [GIL\_2]). De sorte que l'énergie dynamique qui reste effectivement constante doit être augmentée de ces deux variations:

$$\text{Gyroscopie: } \delta g_g = \frac{1}{\gamma M_s^2} (\mathbf{m} \wedge \partial_t \mathbf{m}) \cdot \delta \mathbf{m} \quad (3.4)$$

$$\text{Dissipation: } \delta g_\alpha = \frac{\alpha}{\gamma M_s} \partial_t \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{m} \quad (3.5)$$

avec:

- $\gamma$  est un coefficient gyroscopique, en  $A.m^2.J^{-1}.s^{-1}$ , qui d'après la mécanique quantique atomistique est de l'ordre de  $(q_L \mu_B \hbar^{-1})$  ( $q_L$  est le coefficient de Landé,  $\mu_B$  et  $\hbar$  sont des constantes physiques définies dans l'annexe 13 [BRA\_1]),
- $\alpha$  est le coefficient d'amortissement sans dimension de Gilbert [GIL\_2].

Ainsi, la variation d'énergie totale sous une modification infinitésimale d'aimantation réduite ( $m/M_s$ ), doit être nulle. Nous pouvons alors définir un champ effectif total  $\mathbf{h}_{eff}$  (équation (3.6)),

$$\mathbf{h}_{eff} = \mathbf{h} + \mathbf{h}_d - \frac{A_{ex}}{\mu_0 M_s^2} \nabla_{\mathbf{m}} \left( (\nabla(\mathbf{m}))^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla_m f_{an} - \frac{1}{\gamma \mu_0 M_s^2} (\mathbf{m} \wedge \partial_t \mathbf{m}) - \frac{\alpha}{\gamma \mu_0 M_s} \partial_t \mathbf{m} \quad (3.6)$$

qui vérifie la condition d'équilibre suivante:

$$\forall \delta \boldsymbol{\theta}: \quad \delta G = \iiint \delta g_L d^3x = - \iiint (\mu_0 \mathbf{m} \wedge \mathbf{h}_{eff}) \delta \boldsymbol{\theta} d^3x = 0 \quad (3.7)$$

Cette équation d'équilibre traduit l'annulation de la somme des couples appliqués à chaque moment, c'est l'équation de Landau-Lifchitz-Gilbert (3.8a) [GIL\_1]:

$$\partial_t \mathbf{m} = \gamma \mathbf{m} \wedge (\nabla_m g_L) + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{m} \wedge \partial_t \mathbf{m} \quad (3.8a)$$

$$\text{avec } g_L = g_{ex} + g_{an} + g_{dm} + g_{ze} \quad (3.8b)$$

L'inconvénient de ce formalisme est l'introduction semi-phénoménologique d'un terme de dissipation en  $\alpha$ , dont la provenance physique n'est pas explicitée. L'échelle de temps caractéristique  $\gamma$  est de plus très inférieure à celle qui nous intéresse dans les applications:

$$\omega_L \approx \gamma B \approx 10^{20} \text{ rad.s}^{-1} \gg (3.9)$$

$\omega_L$  est la pulsation de Larmor [BRA\_1] très supérieure aux fréquences usuelles en Electrotechnique (relaxation instantannée, cf. figure 3.3). Ceci est principalement du au fait que la rotation des moments dans leur ensemble (au sein d'une paroi ou même d'un domaine) peut créer des courants induits de charges électriques libres, décrits par un autre formalisme: les équations de Maxwell. Nous doutons de pouvoir expliquer un quelconque amortissement conséquent et relevant à moins d'un coefficient  $\alpha$  de Gilbert très important, provenant de l'environnement immédiat de la paroi, baigné de courants induits. Ces considérations énergétiques peuvent toutefois être utilisées, et d'un point de vue mésoscopique statistique, pour dériver les lois d'évolution du comportement quasi-statique observable.

### Electromagnétisme

Il s'agit donc d'admettre en complément les équations de Maxwell et propriétés suivantes (équations (3.10a)) à l'échelle microscopique:

$$\mathbf{j} = \nabla \wedge \mathbf{h} \quad (3.10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.10b)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (3.10c)$$

$\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{e}$  sont respectivement la densité de courants libres, le champ magnétique et le champ électrique.  $\sigma$  est la conductivité électrique intervenant dans la loi d'Ohm [ASH\_1] (variations de  $\sigma$  négligeables aux fréquences usuelles de l'Electrotechnique classique, cf modèle de Drude pour les métaux [ASH\_1]. Cette conductivité est la conductivité statique). Dans les matériaux magnétiques, que nous étudierons ici, les courants de déplacement (dus aux séparations et accumulations de charges électriques liées) restent négligeables devant les courants de conduction (circulations de charges libres) tant que la fréquence reste inférieure à la limite autour des GHz (cf sous section 1.4.1). Les deux autres équations de Maxwell peuvent être dérivées par application d'une condition de stationnarité sur une fonctionnelle thermodynamique  $\pi_f$  [MAZ\_3] incluant les pertes Joule dues aux courants libres et la variation temporelle d'énergie de couplage magnétique ou puissance d'aimantation ( $-\partial_t g_{ze}$ ). Cette condition fournit deux informations: l'une est une condition de continuité du champ  $\mathbf{e}$  aux interfaces  $\partial\Omega$  et l'autre l'équation de Maxwell -Faraday microscopique:

$$\nabla \wedge \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ avec } \mathbf{e} = \sigma^{-1} \nabla \wedge \mathbf{h} \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{e} \wedge \mathbf{n} \text{ continue à l'interface} \quad (3.11b)$$

On a alors nécessairement la condition de non-divergence de la densité de courant magnétique  $\partial_t \mathbf{b}$  qui est vérifiée (cf. 1.13). La variation d'aimantation

et l'induction des courants pouvant être créées par et dans différents objets (parois, domaines, ...). Tous les champs écrits et utilisés ici sont observés à l'échelle microscopique (lettres minuscules) et peuvent être associés à tout objet magnétique (paroi, domaine, ...; nous en verrons des exemples dans la suite et dans le chapitre 4).

## Discussion

L'électromagnétisme microscopique a besoin du micromagnétisme pour la connaissance et l'explication de la structure magnétique (densité et orientation des parois, géométrie des domaines) et le micromagnétisme a besoin de l'électromagnétisme pour expliquer et rendre compte des courants induits microscopiques ( $\alpha$ ) et de la diffusion du champ ( $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{h}_d$ ). Cependant, l'utilisation pratique de ces deux formalismes à cette échelle n'est envisageable que pour des échantillons ultra-réduits et idéaux [BEA\_3] (sous section 3.2.2). En revanche, ils fournissent un outil physique et mathématique intéressant dans la mise en oeuvre d'une modélisation moyenne intermédiaire (partie III) prenant malgré tout en compte les conséquences mésoscopiques des mécanismes de structure microscopique, qui seront observables à l'échelle macroscopique.

### 3.2.2 Processus principaux

La topographie de la structure magnétique réelle n'est pas prévisible avec exactitude (défauts, perturbations, inhomogénéité, non-reproductibilité ...). De même, les mouvements internes sont multiples et variés. Nous pouvons cependant envisager d'en décrire simplement certains à l'aide de l'électromagnétisme pour comprendre leurs effets et en extraire les informations essentielles. Nous les traiterons d'un point de vue statistique plus général dans la partie III.

#### Déplacement des parois magnétiques (D.W.D.)

Nous proposons dans cette sous-section de traiter un cas idéal de distribution de parois dans une géométrie simple et adéquate. Nous prendrons pour cela l'exemple d'une tôle ou d'une rondelle ferromagnétique fine (un élément possible du capteur de courant utilisé dans le disjoncteur différentiel) soumis à un champ magnétique unidirectionnel ou orthoradial (figure 3.6).

Les domaines sont supposés être orientés parallèlement au champ et les parois planes traverseraient toute l'épaisseur  $\zeta$  de la tôle ou de la rondelle (Il s'agit d'une structure idéalisée proche de la réalité pour des couches minces. Pour des échantillons plus importants nous utiliserons d'autres arguments statistiques sans nécessairement figer cette structure ni en volume, ni en surface; chapitre 4). Le rayon du tore est supposé suffisamment grand et les parois suffisamment nombreuses pour que l'on puisse, de manière analytique, considérer un seul élément significatif de la structure en domaines (figure 3.7 d'après [BEA\_3], correspondances  $(r, z, \theta) \Leftrightarrow (x, y, z)$ ). Enfin, nous supposerons le champ suffisamment faible pour maintenir les parois planes avec une excursion très infé-

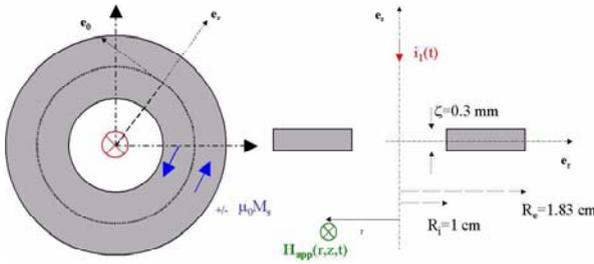


Figure 3.6: Géométrie de la rondelle ferromagnétique étudiée.

rière à leur espacement (régime linéaire). Cette première étude simple nous permettra de mettre en évidence les courants induits microscopiques autour des parois et d'évaluer les pertes et la réponse amortie du capteur.

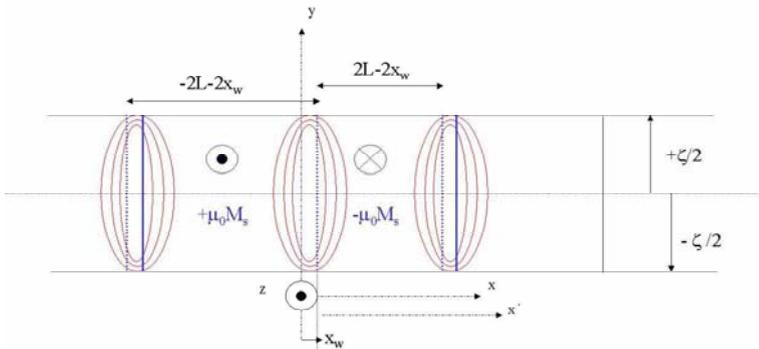


Figure 3.7: Configuration idéalisée locale en parois planes et fines.

**courants induits microscopiques** Nous laissons les parois se déplacer librement sous l'action du champ appliqué et nous calculons l'induction des courants  $\mathbf{j}$  et la diffusion du champ dans la structure en domaines, *i.e.* ici autour des parois en mouvement [GAU\_1]. Pour ce faire, nous utilisons les équations de Maxwell microscopiques (sous-section 3.2.1 et équations (3.10a) et (3.11a)). Pour une paroi donnée isolée, nous admettrons les dépendances et symétries [SIV\_1] suivantes:

$$\mathbf{j}_{eddy} = j_x(x', y, t) \mathbf{e}_x + j_y(x', y, t) \mathbf{e}_y \quad (3.12a)$$

$$j_y(x', y, t) = +j_y(x', -y, t) \quad (3.12b)$$

$$j_x(x', y, t) = -j_x(x', -y, t) \quad (3.12c)$$

Combinant les équations de Maxwell microscopiques, on en déduit l'équation de diffusion portant sur  $\mathbf{j}$  (équation (3.13)).

$$\Delta \mathbf{j}_{eddy} = \mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{j}_{eddy} \quad (3.13)$$

Nous nous plaçons dans un repère local cartésien  $(x', y)$ . Les parois sont considérées ultra-fines de largeur nettement inférieure à la largeur des domaines, de sorte que l'on ait à calculer la densité de courants dans les domaines voisins, et hors des parois uniquement. Les conditions aux limites utilisées sur la frontière entre deux domaines sont:

$$j_x(0^+, y, t) = j_x(0^-, y, t) \quad (3.14a)$$

$$j_x((-2L - 2x_w)^+, y, t) = j_x((+2L - 2x_w)^-, y, t) \quad (3.14b)$$

$$j_y(0^+, y, t) - j_y(0^-, y, t) = -2\sigma v_w \mu_0 M_s \quad (3.14c)$$

$v_w$  et  $x_w$  sont respectivement la vitesse et la position de la paroi. La solution du problème est:

$$j_y(x', y, t) = \sum_{q \text{ impair}} v_w(t) \frac{B_q \sinh\left(\frac{q\pi(L-x_w(t)-x')}{\zeta}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{\zeta}\right)}{\cosh\left(\frac{q\pi(L-x_w(t))}{\zeta}\right)} \quad (3.15a)$$

$$j_x(x', y, t) = \sum_{q \text{ impair}} v_w(t) \frac{B_q \cosh\left(\frac{q\pi(L-x_w(t)-x')}{\zeta}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{\zeta}\right)}{\cosh\left(\frac{q\pi(L-x_w(t))}{\zeta}\right)} \quad (3.15b)$$

$$j_y(x', y, t) = \sum_{q \text{ impair}} v_w(t) \frac{B_q \sinh\left(\frac{q\pi(L+x_w(t)+x')}{\zeta}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{\zeta}\right)}{\cosh\left(\frac{q\pi(L+x_w(t))}{\zeta}\right)} \quad (3.15c)$$

$$j_x(x', y, t) = \sum_{q \text{ impair}} v_w(t) \frac{B_q \cosh\left(\frac{q\pi(L+x_w(t)+x')}{\zeta}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{\zeta}\right)}{\cosh\left(\frac{q\pi(L+x_w(t))}{\zeta}\right)} \quad (3.15d)$$

$$B_q = \frac{8(-1)^{\frac{q-1}{2}} \sigma \mu_0 M_s}{q\pi} \left[ \tanh\left(\frac{q\pi(L-x_w(t))}{\zeta}\right) + \tanh\left(\frac{q\pi(L+x_w(t))}{\zeta}\right) \right]^{-1} \quad (3.15e)$$

Un bilan d'énergie égalisant les pertes Joules et l'énergie fournie par le champ appliqué  $H_a$  permet de définir la mobilité  $\eta_w$  des parois (exprimée en  $m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}$ ) reliant la vitesse au champ ( $H_a = H_{app}$ ).

$$\iint (\sigma^{-1} j^2) dx' dy = \iint H_a \partial_t B dx' dy = 2\zeta \mu_0 M_s v_w H_a \quad (3.16)$$

$$v_w = \eta_w H_a \text{ avec } \eta_w \approx \frac{\pi^3}{16\zeta\sigma\mu_0 M_s} \left\{ \sum_{q \text{ impair}} \left(\frac{1}{q}\right)^2 \right\}^{-1} \approx \frac{\pi^3}{1.05 * 16\zeta\sigma\mu_0 M_s} \quad (3.17)$$

**régime harmonique** Utilisant les résultats précédents et introduisant un paramètre matériau supplémentaire  $H_s$ , image du champ coercitif statique ([BEA\_2], [WIN\_1]), permettant de rendre compte des blocages de parois; nous pouvons relier la vitesse  $v_w$  des parois au champ appliqué  $H_a$  et à l'induction moyenne  $B$  observable (équation 3.18), et par suite la perméabilité complexe apparente (équation 3.19).

$$v_w = \eta_w \left( H_a - H_s \frac{B - \mu_0 H_a}{\mu_0 M_s} \right) = \frac{\partial_t (B - \mu_0 H_a)}{2\mu_0 M_s n_w} \quad (3.18)$$

$$\mu_{app} = \frac{B}{H_a} = \frac{2\mu_0 M_s n_w \eta_w \left( 1 - \frac{H_s}{M_s} \right) + j\mu_0 \omega}{2n_w \eta_w H_s + j\omega} \quad (3.19)$$

$n_w$  est la densité linéique de parois. Nous avons représenté cette perméabilité en module (figure 3.8, [BEA\_3]) et en phase (figure 3.9, [BEA\_3]) pour plusieurs densités linéiques de parois (Données du Fe-Ni anhyster  $\mu_0 M_s = 1.6$  T,  $H_s = 10$  A/m,  $\sigma^{-1} = 45 \mu\Omega.cm$ ; voir [COU\_1]).

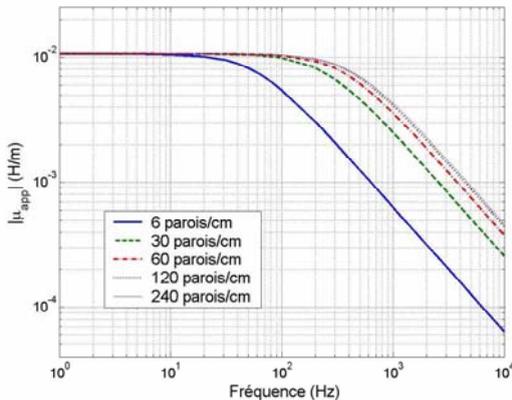


Figure 3.8: Module de la perméabilité apparente équivalente à la configuration type Pry et Bean.

La matériau constitué de parois se comporte comme un passe-bas; et ceci est confirmé par l'expérience et les mesures effectuées sur un grand nombre de substances douces, qui adoptent très souvent la même forme générale de

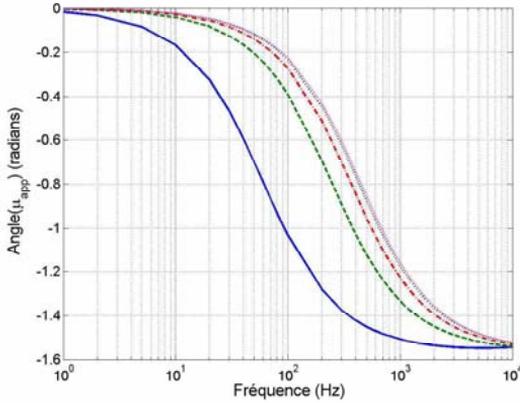


Figure 3.9: Angle de la perméabilité apparente équivalente à la configuration type Pry et Bean (l'angle de référence étant égal à zéro pour le courant).

réponse en fréquence [TRE\_2]. La fréquence de coupure est en relation intime avec la densité de parois et d'autres propriétés intrinsèques au matériau. La connaissance de cette perméabilité apparente permet de calculer la fonction de transfert du capteur en boucle ouverte et régime harmonique linéaire, supposant l'ensemble des parois sollicité par le champ appliqué au niveau de la fibre neutre (équation 3.20 et figure 3.11).

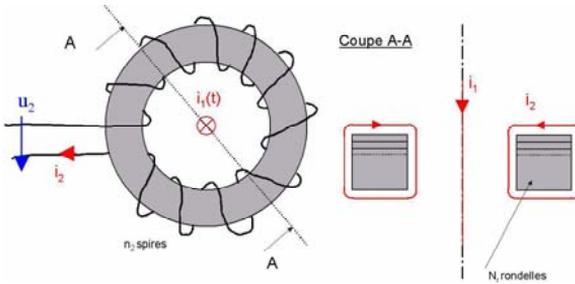


Figure 3.10: Architecture du capteur torique.

$$Z = \frac{U_2}{i_1} \approx j\omega n_2 \frac{N_r(R_e - R_i)\zeta\mu_{app}}{L} \tag{3.20}$$

$$L = \frac{2\pi(R_e - R_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \tag{3.21}$$

Malheureusement, cette étude harmonique ne convient plus lorsque les variations sont non-linéaires; avec annihilation et création de composantes harmoniques.

**régime transitoire** On peut aller plus loin avec ce modèle simple en simulant ce même capteur en boucle fermée et régime transitoire (signaux de formes diverses) (figure 3.11).

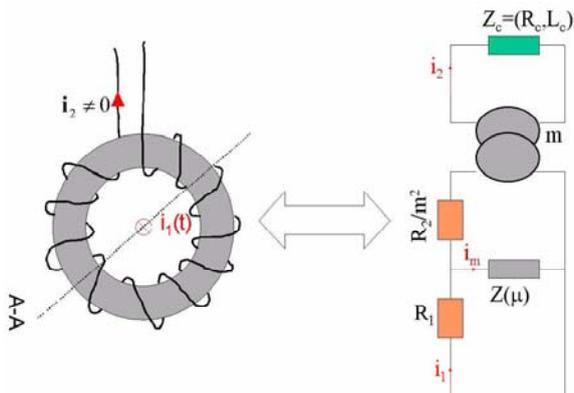


Figure 3.11: Schéma électrique équivalent du capteur en charge (formalisme du transformateur avec résistance des fils du secondaire ramenée au primaire et les effets inductifs modélisés par une impédance équivalente de magnétisation "dynamique").

La configuration en parois étudiée est inchangée (figure 3.7). L'évolution du courant au secondaire est régie par l'équation différentielle (3.22). Le comportement transitoire est représentée à l'aide d'une seule paroi équivalente tenant compte de la densité linéique réelle de parois (la prise en compte de la géométrie réelle torique pour les parois étant intractable analytiquement mais seulement numériquement après homogénéisation, chapitre 6).

$$(r_2 + r_c) i_2 + L_c \frac{di_2}{dt} + 2n_2 N_r \mu_0 M_s n_w \eta_w (H_a - 2H_s n_w x_w) = 0 \quad (3.22)$$

$$H_a = (i_1 + n_2 i_2) \frac{\ln \left( \frac{R_e}{R_i} \right)}{2\pi (R_e - R_i)} \quad (3.23)$$

Le résultat d'une simulation pas à pas avec un signal triangulaire est représenté sur la figure 3.12 ( $n_2 = 200$  spires au secondaire,  $N_r = 33$  rondelles, la charge est un relais de résistance  $1 \Omega$  et d'inductance  $40 \text{ mH}$ , le matériau est toujours le Fer-Nickel anhyster de polarisation à saturation  $1.6 \text{ T}$ , de champ

coercitif  $H_s = 10 \text{ A.m}^{-1}$  et de résistivité  $\sigma^{-1} = 45 \mu\Omega.cm$ , [COU\_1]). Si l'actionneur est en fonctionnement, son inductance varie et nous ne pouvons malheureusement pas traiter ce cas de manière simple analytiquement (cf autres outils numériques d'analyse rapide de chaînes de ce type [LOU\_1]).

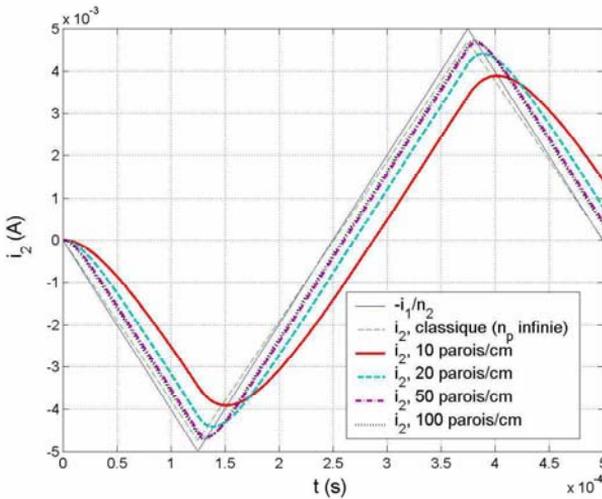


Figure 3.12: Réponse en courant du capteur en charge ( $n_p = n_w$ ).

Il apparaît que l'action négative des paillis ne s'observe de façon significative que pour des fréquences relativement élevée (ici environ 2000 Hz; signaux transitoires rapides parfois rencontrés dans les batteries de tests des différentiels. Voir annexe 10), et d'autant plus que la densité de paillis sera faible. Le retard (amortissement et déphasage) mis en évidence s'observerait de la même façon pour tout type de signal avec une distorsion importante en présence de plusieurs harmoniques à diverses fréquences (cf diagrammes de Bode 3.8 et 3.9). En effet, l'amortissement et le déphasage sont différents pour chacune des harmoniques. Enfin, à ces fréquences sensibles ( $>50\text{Hz}$ ), la densité de paillis étant suffisamment grande pour permettre un temps de réponse initial égal au temps de réponse obtenu par un calcul classique (*i.e.* avec uniquement des courants induits classiques macroscopiques, cf figure 3.12), il existe une différence nette de réponse au zéro de courant à la fin de la première demi-période (cette étude peut être intéressante au vu des normes sur les temps de réponse des disjoncteurs, annexe 10). Cette géométrie simple axisymétrique sera étudiée plus précisément à l'aide d'un modèle local et d'une méthode numérique dans le chapitre 6.

### Rotation des moments magnétiques (D.M.R.)

Lorsque la structure magnétique naturelle ne contient pas de domaines orientés parallèlement au champ d'excitation, mais perpendiculaires; ou lorsque le maté-

riau est au bord de la saturation parallèle; il ne reste plus que la rotation cohérente des moments au sein des domaines non-parallèles ([CHE\_1], [OSH\_1]). On peut reconstruire cette réponse sur le même esprit que précédemment et imaginer superposer les deux mécanismes DWD et DMR. Nous ferons ce travail de manière plus générale dans le chapitre 4.

### Processus additionnels

Bien que le déplacement des parois magnétiques, ainsi que la rotation cohérente au sein des domaines (autour de la saturation), soient les processus principaux ayant lieu dans les matériaux doux, ils ne suffisent pas à décrire toutes les situations, en particulier les phénomènes liés à la non-linéarité du déplacement de parois en cours de cycle (variation de mobilité entre autres), l'hystérésis statique, l'effet mémoire et les non-reproductibilités. Il faut alors faire appel à d'autres mécanismes d'aimantation tels que:

- la déformation et multiplication des parois (DWB, DWM), [CAR\_1], [CAR\_2], [DEL\_3], [BIS\_2], [BIS\_3].
- les effets de proximité et la fusion des parois (DWF), [CLE\_1], [FRT\_2].
- la nucléation des parois sur défaut (DWN), [AHA\_1], [GOO\_1], [LAE\_1], [LEL\_1].
- le blocage et déblocage des parois sur défauts (DWP), [BRO\_2], [PAU\_1].

Nous en aborderons certains dans le chapitre 4.

## 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les matériaux qui nous intéressent particulièrement en proposant tout d'abord une description simplifiée du ferromagnétisme, puis ensuite une première analyse théorique et calculatoire des processus dynamiques d'aimantation avec dissipation due aux courants induits. L'impact de ces phénomènes est mis en évidence sur la réponse en fréquence (caractère passe-bas de la matière) et en temps (réponse retardée du matériau) d'un capteur de courant (tore de détection ou transformateur de courant).

## Partie III

# Modélisation à l'Echelle Mésoscopique



*” La matière, comme la lumière, suivent des géodésiques de l'espace de Riemann créées par le champ... ”*

**George Lochak**

(en citant Einstein dans la géométrisation de la physique, ed. Flammarion)

## Postulats

Nous postulerons trois assertions pour construire nos développements (ce sont bien évidemment des postulats et donc indémontrés, ou indémontrables; et sans doute faux ou incomplets):

**Postulat a** Les théories du micromagnétisme et de l'électromagnétisme sont fondées à l'échelle microscopique et pertinentes pour notre étude.

**Postulat b** La dynamique des différents objets magnétiques (parois, domaines, ...etc...) est statistiquement régie par des grandeurs physiques indirectement observables à l'échelle macroscopique (par exemple l'induction  $\mathbf{B}$ ).

**Postulat c** Notre système évolue de manière à rendre extrême ou stationnaire son action (minimum, maximum ou point d'inflexion) et/ou à minimiser sa création d'entropie irréversible.

## Préambule

Nous nous intéressons dans cette partie à une représentation énergétique de l'interaction entre les matériaux magnétiques (essentiellement doux) et les champs électromagnétiques variables. La spécificité de l'approche réside dans une tentative de description la plus globale et exhaustive possible reliant les modèles de comportement aux équations de Maxwell.

Nous savons grâce aux observations expérimentales ([BIT\_1], [BLO\_1], [COL\_1], [ARG\_1]) et aux investigations théoriques en micromagnétisme ([BRO\_5], [WIL\_1], [BRY\_1]), que de tels matériaux adoptent une structure magnétique spécifique avec des domaines et des parois ([KIT\_2], [NEE\_2]) (chapitre 3) (nous devons alors rester conscient que bien que la définition de domaines et de parois dans les ferromagnétiques classiques (alliages polycristallins composés de Fer, de Nickel et/ou de Cobalt) soit claire, elle l'est parfois beaucoup moins pour d'autres matériaux plus exotiques ou certaines phases transitoires structurelles. Ces cas consisteront donc une des limites aux développements qui suivront. Cependant, ils pourront toujours faire l'objet d'un élargissement de nos définitions). Les structures en question donc, peuvent être complètement différentes, en arrangement et complexité; d'un matériau à un autre, d'une forme à une autre et aussi depuis le coeur jusqu'à la surface d'un seul et même échantillon. Par le mot forme, nous entendons ici la forme de l'échantillon, si sa taille est du même ordre de grandeur que la taille caractéristique des domaines, et la forme des grains métalliques et de leur arrangement mutuel si la taille de l'échantillon est humaine et beaucoup plus grande

que la taille caractéristique des objets magnétiques. Nous travaillerons essentiellement dans cette hypothèse d'échantillons dits gros ( $L \gg G, D$ ;  $L$  étant la taille caractéristique de l'échantillon,  $G$  celle des grains et  $D$  celle des domaines. Notons que pour  $G > D$ , nous aurons affaire aux polycristaux gros grains habituels ([COU\_1], [VER\_1]) et pour  $G < D$ , il s'agira de nanocristaux ([GAQ\_1], [PER\_1]) pour pouvoir adopter raisonnablement certains outils de physique statistique ([ZIT\_1], [JAC\_1], [RUS\_1]). Autrement, la structure magnétique et le phénomène que nous étudions dépendront essentiellement de la géométrie macroscopique, ce raisonnement statistique "local" n'est plus possible. De plus, la manière dont cette structure va évoluer en régime statique et dynamique est tout aussi difficile à calculer précisément et à observer expérimentalement. Ces travaux et corrélations ne sont possibles, et ont été réalisées, uniquement sur des cas idéaux (du même type que celui étudié chapitre 3 section 3.2) ([WSK\_1], [BEA\_3]). En conséquence, nous n'essaierons pas ici de prédire ni la structure magnétique exacte, ni son réarrangement précis sous champ; nous tenterons juste d'établir un lien entre les phénomènes physiques microscopiques moyennés spatialement et statistiquement et les grandeurs macroscopiques observables que nous pouvons mesurer sur un composant ou un dispositif réel.

Nous savons effectivement aussi que ces mécanismes microscopiques d'aimantation sont à l'origine de l'hystérésis et des pertes anormales dynamiques observées pour ce genre de matériaux. Ceci se comprend bien à l'aide des deux remarques suivantes:

- premièrement, chaque variation d'aimantation crée une variation d'induction locale qui donne donc naissance à des courants induits microscopiques (loi de l'induction de Faraday). Ceci demande donc une certaine quantité d'énergie.
- Deuxièmement, la surface interne aux cycles d'hystérésis mesurés correspond exactement à l'énergie perdue durant la transformation cyclique. Il y a donc nécessairement un lien avec les pertes Joule des courants induits microscopiques.

Encore une fois, la topologie de la structure magnétique elle-même est difficilement calculable et prévisible. En effet, l'action véritable d'un système d'éléments de matière aimantés se structurant en domaines présente des extrêmes relatifs [BER\_11]. La condition de stationnarité de cette action "micromagnétique" permet certes de prédire (pour des systèmes de taille raisonnable, *i.e.* quelques micromètres) la structure magnétique; mais pour des systèmes de taille réelle, ce calcul est astronomique et inenvisageable, et même sans doute stérile car sujet à plusieurs solutions possibles sans discrimination apparente. Notre approche consisterait à ne retenir de cette action que les tendances macroscopiques pertinentes et absolues; en privilégiant une solution extrême équivalente, en terme de pertes d'énergie et de forme de réponse observable, à la solution

réelle [RIS\_1]. Celle-ci étant inconnue quoiqu'il arrive. La stratégie employée consiste en une définition complétée de fonctionnelles d'énergie ou de puissance (analogues de l'action en mécanique ou du chemin en optique) susceptibles de fournir toute l'information nécessaire à la prédiction des pertes et de la réponse amortie. Ces fonctionnelles devront inclure certains termes additionnels provenant de l'échelle microscopique (l'échelle des atomes ou atomique étant pour nous en dehors du sujet dans l'immédiat) puisqu'une certaine quantité d'énergie est mise en jeu à cette échelle. Une énergie propre ou mutuelle entre les deux échelles (microscopique et macroscopique). Une discussion sera faite sur la pertinence ainsi que la consistance d'introduire des termes dissipatifs dans une fonctionnelle énergétique, qui après stationnarité fournira la description de l'évolution dynamique du système (principe de création minimum d'entropie, postulat c). Nous travaillerons dans ce qui suit à l'échelle microscopique et à l'intermédiaire entre cette échelle et l'échelle macroscopique, *i.e.* mésoscopique. Il convient donc de définir précisément ces deux termes (définitions en partie relatives au sujet d'étude) et d'introduire clairement les notations qui seront utilisées abondamment.

**Définitions et notations** L'échelle microscopique est donc associée ici à l'échelle des domaines et parois magnétiques (*i.e.* entre 1 et 500  $\mu\text{m}$ , selon les matériaux). L'échelle mésoscopique se situe entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique correspondant à l'objet d'étude dans sa totalité (voir figures 3.1 et 3.3). A cette échelle, les divers objets magnétiques que sont les domaines et parois ne sont plus étudiés isolément mais de manière ensembliste et statistique ayant des propriétés moyennées associées à un point localisé dans l'objet (sachant très bien qu'alors ce que nous y calculerons ne seront que des événements moyens probables en terme de valeurs de champs, de densités et de propriétés; mais en aucune façon des événements exacts et certains. Ceux-là étant imprédictibles sinon leurs occurrences les plus probables). Un des objectifs de la science et de la physique-chimie en particulier est de fournir les informations et les outils qui permettent de passer d'une échelle inférieure à une autre supérieure, et ce jusqu'à l'échelle macroscopique, pour éventuellement proposer une explication rationnelle des observations faites à cette échelle (la seule facilement accessible: objets de taille de l'ordre du centimètre et plus). Afin de décrire le champ électromagnétique et la matière, différemment en fonction des deux échelles d'observation (microscopique et mésoscopique) et des traitements mathématiques (lissage spatial, moyenne spatiale, moyenne statistique, ...), nous utiliserons les notations particulières suivantes:

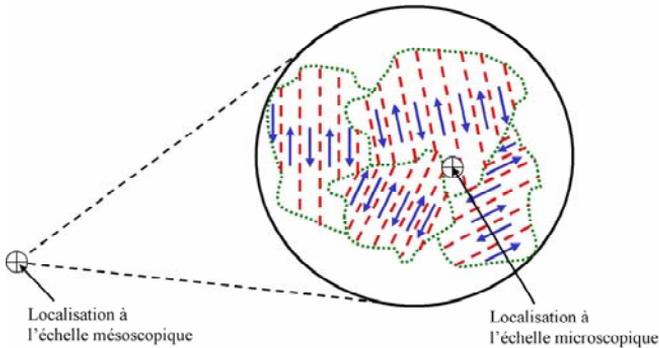
**Pour les champs et densités de courants:**

- $\mathbf{a}_M$  : champ microscopique retardé,

- $\mathbf{a}_{\mu w}$  : champ microscopique associé à l'objet microscopique  $w$ ,
- $\mathbf{a}_{\mu}$  : champ microscopique associé à un ensemble d'objets microscopiques,
- $\mathbf{a}$  : champ microscopique,
- $\mathbf{A}_M$  : champ mésoscopique retardé,
- $\mathbf{A}_{\mu}$  : champ mésoscopique associé à un ensemble d'objets microscopiques,
- $\mathbf{A}$  : champ mésoscopique.

La lettre  $\mathbf{a}$  ou  $\mathbf{A}$  peut être remplacée par n'importe laquelle des grandeurs électromagnétiques suivantes:

- $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{H}$  : champ magnétique,
- $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{E}$  : champ électrique,
- $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{B}$  : induction,
- $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{M}$  : aimantation,
- $\mathbf{p}_m$  et  $\mathbf{P}_m$  : polarisation magnétique,
- $\partial_t \mathbf{b}$  et  $\partial_t \mathbf{B}$  : densité de courants magnétiques,
- $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{J}$  : densité de courants électriques.



Figure~3.13: Echelles et Observations

### Pour le matériau et sa structure:

- $M_s$ : aimantation à saturation,
- $P_{ms}$ : polarisation magnétique à saturation ( $P_{ms} = \mu_0 M_s$ ),
- $\rho$ : résistivité électrique,
- $\sigma$ : conductivité électrique ( $\sigma = \rho^{-1}$ ),
- $\mu_s$ : perméabilité magnétique statique,
- $\mu_d$ : perméabilité magnétique statique différentielle,
- $K_{an}$ : constante d'anisotropie mésoscopique.

D'autres définitions concernant les divers éléments constitutifs de la structure magnétique apparaîtront au fur et à mesure suivant le type d'objet manipulé. Pour les parois par exemple:

- $S_w$ : surface de la paroi  $w$ .
- $v_w$ : vitesse de la paroi  $w$ .
- $\eta_w$ : mobilité de la paroi  $w$ .
- $n_{w_i}$ : densité volumique des parois de type  $w_i$ .
- $\gamma_w$ : énergie surfacique de la paroi  $w$ .

Maintenant familier avec le sujet d'étude, la problématique et les terminologies principales employées; le lecteur est invité à découvrir, dans le chapitre suivant (chapitre 4), une représentation des matériaux magnétiques doux en régime dynamique introduisant et intégrant les pertes d'énergie induites par les différents processus microscopiques d'aimantation, à partir des lois fondamentales de la physique utilisées à l'échelle microscopique. L'autre chapitre de cette partie (chapitre 5) est consacré au lissage spatial de toutes les contributions énergétiques depuis l'échelle microscopique jusqu'à l'échelle mésoscopique. Les équations d'évolution des champs dans la matière y seront alors dérivées, interprétées, extrapolées et discutées.

## Chapitre 4

# Dynamiques Microscopiques

*” Physical laws should have mathematical beauty ”*

P.A.M. Dirac

## 4.1 Cadre de l'étude

Nous resterons pour le moment à l'échelle microscopique. Nous proposons donc d'adopter une représentation simplifiée des dynamiques microscopiques incluant un maximum d'informations sur les processus amortis et dissipatifs de la structure et naturellement toujours fondée sur la pertinence physique supposée du micromagnétisme ([WIL\_1], [BER\_11]) et des équations de Maxwell microscopiques [BEA\_3] (postulat a). Nous verrons en effet que ces deux théories permettent d'exprimer simplement et d'expliquer rationnellement la plupart des processus étudiés. Nous en discuterons quoiqu'il en soit.

## 4.2 Mécanismes microscopiques d'aimantation

Nous allons étudier quelques mécanismes principaux à l'aide des deux formalismes précédents de manière à en extraire une expression concise des pertes dynamiques induites.

### 4.2.1 Déplacement d'une paroi magnétique

Le matériau est d'abord étudié à basse induction et fréquence raisonnable (parois éloignées et indéformables). L'excitation magnétique qui nous intéresse ici est celle qui induit effectivement le déplacement des parois magnétiques (plus que la rotation des moments internes aux domaines de Weiss plus coûteuse énergétiquement, et étudiée ultérieurement en dynamique au chapitre 4). Considérons donc par exemple une paroi à  $180^\circ$  (ou  $90^\circ$ ) représentée sur la figure 4.1 (lieu, de largeur limitée, d'une rotation rapide d'aimantation microscopique  $\mathbf{m}$ ; permettant de minimiser l'énergie libre quasi-statique du micromagnétisme, équation (3.1a) et suivantes).

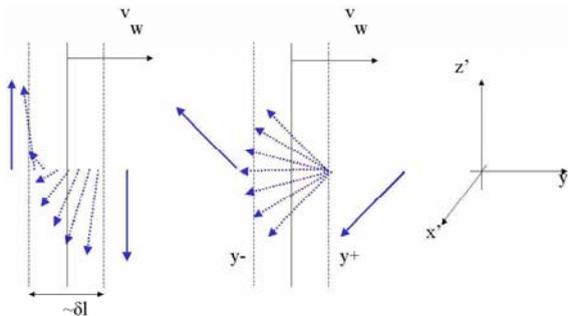


Figure 4.1: Exemples de parois magnétiques à  $180^\circ$  et  $90^\circ$ .

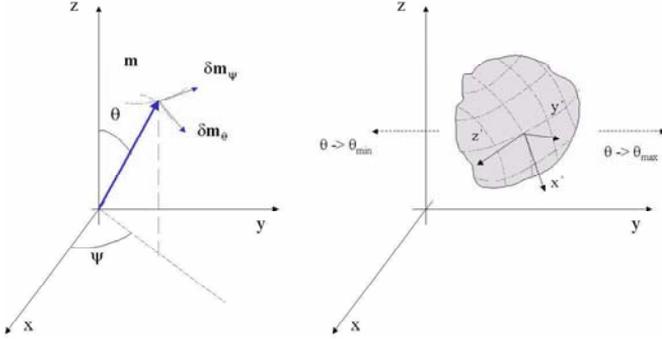


Figure 4.2: Représentation tridimensionnelle locale d'une paroi surfacique.

### via les équations du Micromagnétisme

L'équation de Landau-Lifchitz-Gilbert (3.8a), appliquée à une paroi surfacique (figure 4.2, [SLO\_1]), donne en coordonnées sphériques [SLO\_1] ( $s\theta = \sin\theta$  et  $c\theta = \cos\theta$ , cf annexe 11):

$$\partial_t \theta = -\frac{\gamma}{M_s} (\partial_\psi g_L) s^{-1} \theta - \alpha \partial_t \psi s \theta \quad (4.1a)$$

$$\partial_t \psi s \theta = \frac{\gamma}{M_s} (\partial_\theta g_L) + \alpha \partial_t \theta \quad (4.1b)$$

Une première étape consiste à fournir de l'information sur  $\theta$  et  $\psi$  en l'absence de dissipation ( $\delta g_L = 0$ ) et pour une forme particulière de l'énergie volumique de paroi ( $g_L = \frac{A_{ex}}{M_s^2} (\nabla(\mathbf{m}))^2 + K_{an} s^2 \theta$ ) en l'absence de champ magnétique (paroi immobile). La variation d'énergie surfacique  $\gamma_w$  est obtenue en intégrant dans l'épaisseur en  $y'$  ( $\delta \gamma_w = \int_{y_-}^{y_+} \delta g_L dy'$ ). Une intégration par partie imposant à  $\partial_{y'} \theta$  et  $\partial_{y'} \psi$  d'être nuls en dehors de la paroi permet d'écrire  $\forall \delta \theta, \delta \psi$ :

$$\delta \gamma_w = 0 \quad (4.2a)$$

$$\int \left[ \left( \left( K_{an} + A_{ex} (\partial_{y'} \psi)^2 \right) s 2\theta - 2A_{ex} \partial_{y'}^2 \theta \right) \delta \theta - 2A_{ex} \partial_{y'} (s^2 \theta \partial_{y'} \psi) \delta \psi \right] dy' = 0 \quad (4.2b)$$

Ainsi,  $\theta$  et  $\psi$  vérifient en statique:

$$\partial_{y'} (s^2 \theta \partial_{y'} \psi) = 0 \quad (4.3a)$$

$$\left( K_{an} + A_{ex} (\partial_{y'} \psi)^2 \right) s 2\theta - 2A_{ex} \partial_{y'}^2 \theta = 0 \quad (4.3b)$$

Une solution ( $\partial_{y'}\psi = 0$ ) du système est:

$$\psi = cte = \psi_0 \left( x', y', z' \right) \text{ et } \theta = \theta_0 \left( y' - q \left( x', z', t \right) \right) \quad (4.4a)$$

$$\text{où } \partial_{y'}\theta_0 = \delta l^{-1} s \theta_0 \text{ et } \delta l = \sqrt{\frac{A_{ex}}{K_{an}}} \quad (4.4b)$$

$q \left( x', y', t \right)$  représente la position du centre de la paroi dans son épaisseur qui est de l'ordre de  $\delta l$  (entre 5 nm pour le Cobalt et 50 nm pour le Nickel). Cette épaisseur caractéristique, lieu d'échange entre moments, reste du même ordre de grandeur même pour des configurations plus complexes ( $\partial_{y'}\psi \neq 0$ ). Ce qui nous intéresse maintenant est l'énergie dissipée lors du déplacement de la paroi. Elle doit égaler la variation d'énergie surfacique précédente:

$$\delta\gamma_w = \partial_q\gamma_w\delta q + \partial_\psi\gamma_w\delta\psi \quad (4.5a)$$

$$\partial_\psi\gamma_w = \int_{y_-}^{y_+} \partial_\psi g_L dy' = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} (\partial_\psi g_L) \left( \partial_{y'}\theta \right)^{-1} d\theta \quad (4.5b)$$

$$\partial_q\gamma_w = \int_{y_-}^{y_+} \partial_q g_L dy' = - \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} (\partial_\theta g_L) d\theta \quad (4.5c)$$

A l'aide du système (4.1a) et de l'approximation au premier ordre (4.4a) pour  $\partial_{y'}\theta$ , nous aboutissons à [SLO\_1]:

$$\partial_t\gamma_w = -\alpha M_s \gamma^{-1} \left( \delta l^{-1} (\partial_t q)^2 + \delta l (\partial_t \psi)^2 \right) \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} s \theta d\theta \quad (4.6)$$

Connaissant cette variation d'énergie surfacique, nous pouvons en déduire une expression de l'énergie totale dissipée par la paroi entière. Elle s'exprime simplement dans le cas d'un mouvement uniforme sans déformation ni modification de structure interne (*i.e.*  $\partial_t\psi = 0$  et  $\partial_t q = v_w$  constant sur la surface  $S_w$  de la paroi, la dérivation peut passer sous l'intégrale de surface). En notant  $\Pi_w$  cette puissance dissipée, elle s'exprime en fonction d'une quantité  $\eta_w$  en  $m^2 A^{-1} s^{-1}$  (première définition possible de la mobilité de la paroi, étroitement liée au coefficient d'amortissement  $\alpha$ )

$$\Pi_w = \frac{2P_{ms}S_w}{\eta_w} v_w^2 \quad (4.7a)$$

$$\eta_w = 2\mu_0\gamma\delta l \left( \alpha \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} s\theta d\theta \right)^{-1} \quad (4.7b)$$

Il est donc apparent et probable que  $\alpha$ , et donc  $\eta_w$ , contienne toutes les autres informations concernant l'environnement immédiat de la paroi, qui doit

vraisemblablement être une des causes de son "freinage". Nous pouvons y accéder en utilisant les équations de Maxwell microscopiques<sup>1</sup>.

### via les équations de Maxwell microscopiques

La configuration ressemble beaucoup à la précédente, nous travaillerons à basse induction et à faible fréquence d'excitation (parois éloignées et peu déformées), de sorte que l'étude puisse se réduire au déplacement d'une paroi sous l'action d'une composante en champ parallèle à elle (Cette étude sera relevante et utile pour plus tard si on présuppose naturellement l'existence d'une population de parois dans un espace probabilisable).

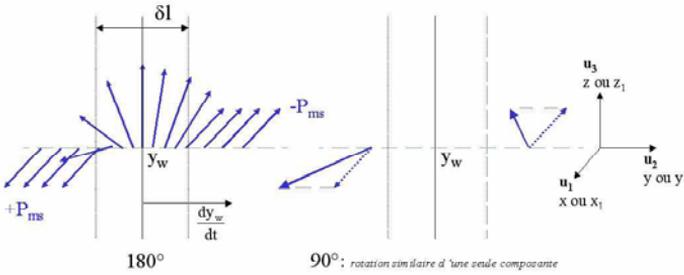


Figure 4.3: Représentation locale simplifiée d'une paroi fine en mouvement.

Nous utiliserons les équations de Maxwell ((3.10a) et (3.11a)). On s'intéresse tout particulièrement aux équations de "diffusion" vérifiées par les courants induits et le champ magnétique d'opposition associés à cette paroi; les deux étant "induits" par la variation locale d'aimantation. Celle-ci a lieu essentiellement dans la paroi lors de son déplacement<sup>2</sup>. En notant  $\mathbf{r}$  la position dans l'espace,  $i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow x, y, z \Leftrightarrow x_1, x_2, x_3$  une des trois directions, et  $r'_i = r_i - r_{wi}$ , où  $r_{wi}$  est la composante  $i$  de la position  $\mathbf{r}_w$  repérant la paroi suivant sa direction normale; on a par différenciations successives:

$$\partial_t \mathbf{m} = (\partial_t r_{w_i} \partial_{r_{w_i}} (\cdot)) m_j u_j = -(\mathbf{v}_w \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} (\cdot)) \mathbf{m} \quad (4.8)$$

La notation est celle des indices répétés (cf annexe 11).  $v_{w_i} = \partial_t r_{w_i}$  est justement la vitesse de la paroi suivant la direction  $i$ ,  $\mathbf{m}$  est un vecteur de norme constante égale à l'aimantation à saturation  $M_s$  caractéristique du matériau

<sup>1</sup>Les expressions des pertes et de la mobilité ont été obtenues en supposant une paroi fine à 180° ou 90°, mais il est probable que l'on puisse faire de même en imaginant d'autres types de parois possibles et en modifiant l'expression de la mobilité.

<sup>2</sup>La paroi n'est pas à proprement parler un objet matériel en soit, mais seulement une zone, délimitée dans l'espace et plus ou moins réduite, de rotation des moments magnétiques portés par les entités de la matière qui elles restent fixes. Nous considérons à bon escient que l'intensité de ces vecteurs aimantation reste constante, seule sa direction varie, et ce dans la plupart des conditions usuelles de fonctionnement; i.e. la nature ferromagnétique du matériau n'est pas altérée par d'autres processus physico-chimiques et thermiques.

considéré. Si nous nous intéressons qu'à la paroi seule, pour l'instant, on peut raisonnablement négliger les variations d'induction dans le vide devant les variations d'induction dues à l'aimantation<sup>3</sup>. Ce terme source est non nul uniquement aux endroits où l'aimantation tourne, ici uniquement dans les parois. Nous choisissons donc de l'écrire sous forme de distribution, tout comme les pertes induites par lui<sup>4</sup>. La connaissance de ce terme source localisé va nous permettre, après formulation de la diffusion des courants et du champ, de déterminer la forme de ces inconnues vectorielles et de quantifier les pertes d'énergie induites.

En utilisant la loi d'Ohm locale (3.10a) (la conductivité électrique est supposée ici isotrope et statique, définie par un scalaire constant<sup>5</sup>) et la loi de l'induction (3.11a), on obtient:

$$\Delta \mathbf{j} = \sigma \nabla \wedge (\partial_t \mathbf{b}) \quad (4.9)$$

La densité de courant, bien que microscopique, reste une densité de courants libres; sa divergence est nulle ( $\nabla \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}$ ). En toute rigueur, il peut y avoir trois origines, au moins, à cette induction de courants:

- un courant source  $\mathbf{j}_0$  imposé irrotationnel, donc de laplacien nul ( $\Delta \mathbf{j}_0 = \mathbf{0}$ ),
- un courant induit, dit "classique", provenant de termes sources autres que la paroi en question,
- des courants induits  $\mathbf{j}_{\mu w}$  uniquement dus à la variation d'aimantation étudiée précédemment.

$$\Delta_r \mathbf{j}_{\mu w} = -\mu_0 \sigma \nabla_r \wedge ((\mathbf{v}_w \cdot \nabla_r) (\cdot)) \mathbf{m} \quad (4.10)$$

En supposant le terme source, proportionnel à la vitesse de la paroi et au rotationnel de l'aimantation, connu; il s'agit de résoudre l'équation de Poisson (cf. annexe 19 pour la justification de la forme de la solution à l'aide du théorème de Green) dont on sait exprimer une solution (en dehors des sources):

<sup>3</sup>  $\|\mu_0 \partial_t \mathbf{m}\| \sim 2P_{ms} v_w \sim 0.160 T.s^{-1} \gg 0.004 T.s^{-1} \sim 2\pi f \mu_0 h \sim \|\mu_0 \partial_t \mathbf{h}\|$  avec  $h \sim 10 A.m^{-1}$  et à  $f = 50 Hz$ . La vitesse d'une paroi est alors de l'ordre de  $3 cm.s^{-1}$ . Cependant, nous pourrions revenir sur l'intervention de la contribution "classique" en  $\mu_0 \partial_t \mathbf{h}$ , surtout en présence de plusieurs parois.

<sup>4</sup> Cette variation d'induction locale s'exprime simplement dans le cas d'une paroi fine de surface  $S_w$ , séparant deux domaines polarisés suivant  $x$ , et se déplaçant dans la direction  $y$  à la vitesse  $v_w$  (cf annexe 15):  $\partial_t \mathbf{b} = 2P_{msx} v_w \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) \mathbf{u}_x$ ;  $\Gamma$  étant une distribution surfacique définie par:

$$\iint \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) d^3 r = S_w \text{ et } \\ \iint \mathbf{g}(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) d^3 r = \iint_{S_w} \mathbf{g}(\mathbf{r}_w) d^2 r_w$$

<sup>5</sup> D'après le modèle de Drude [ASH\_1] pour les métaux, les variations de la conductivité interviennent pour des fréquences nettement supérieures aux fréquences usuelles de l'électrotechnique. Quant à l'anisotropie, elle provient généralement de la propriété magnétique, les courants pouvant circuler librement, *a fortiori*, dans le plan perpendiculaire à l'axe facile; supposer une conductivité anisotrope apporterait plus de complication que d'information si ce n'est dans la recherche de matériaux faible perte.

$$\mathbf{j}_{\mu w}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\nabla_{r'} \wedge ((\mathbf{v}_w \cdot \nabla_{r'}(\cdot)) \mathbf{m})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (4.11)$$

Cette dernière expression est potentiellement capable de contenir les cas exotiques et transitionnels exclus en introduction, pour lesquels la rotation des moments et la vitesse ne sont pas uniformes sur toute la surface de la paroi (nucléation, déformations internes en cours, vortex ... [THI\_2], [SLO\_2]). Nous commencerons par la simplifier, en n'excluant pas une paroi déformée, mais en l'étudiant déjà déformée avec une vitesse de propagation uniforme sur toute sa surface<sup>6</sup>:

$$\mathbf{j}_{\mu w}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \mathbf{v}_w \cdot \iiint \frac{\nabla_{r'} (\nabla_{r'} \wedge \mathbf{m})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (4.12)$$

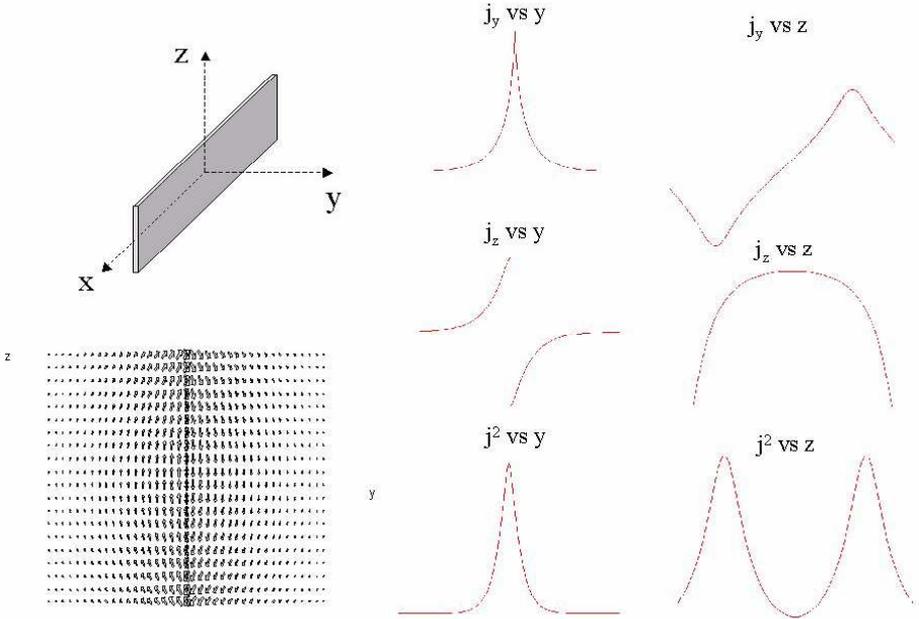


Figure 4.4: Allure des courants induits autour d'une paroi.

<sup>6</sup>Nous pouvons préciser cette densité de courants pour l'exemple de la paroi infiniment fine se déplaçant suivant  $y$  ( $\mathbf{v}_w = v_w \mathbf{u}_y$ ), une intégration par parties donne:

$$\mathbf{j}_{\mu w 2} = \frac{\sigma P_{m,ss} v_w}{2\pi} \iint_w \frac{(z - z_w)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|^3} d^2 r_w$$

$$\mathbf{j}_{\mu w 2} = -\frac{\sigma P_{m,ss} v_w}{2\pi} \iint_w \frac{(y - y_w)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|^3} d^2 r_w$$

La variation d'induction dans la paroi sera perturbée sur ses bords par une troisième composante, mais l'épaisseur étant très petite devant les autres dimensions en surface, nous négligerons ces effets de bords sur la hauteur et la composante suivant  $x$  des courants qui en résultent.

Nous retiendrons surtout quatre propriétés intéressantes de cette densité de courants induits (voir figure 4.4, [GAU\_1], [WSK\_1]):

- elle est issue d'un terme source qui correspond au rotationnel de la variation brusque locale de la polarisation magnétique au sein de la paroi,
- son intensité est proportionnelle à la vitesse de la paroi,
- elle décroît comme  $R^{-2}$  où  $R$  est la distance entre le point considéré et la position moyenne de la paroi,
- son rotationnel est non nul et est localisé dans la paroi. L'étude des parités en fonction des coordonnées et pour chacune des composantes, montre que ces courants tournent autour et à proximité de la paroi (il s'agit de vortex de courants microscopiques induits par la paroi en mouvement).

Avec l'existence de la loi de Maxwell-Ampere (3.10a), cette densité de courants s'accompagne naturellement d'un champ magnétique d'opposition  $\mathbf{h}_{e_{\mu w}}$  nommé "anti-eddy field" en anglais. C'est un champ d'amortissement ou de contre réponse qui s'opposera au champ appliqué pour faire bouger la paroi. Une intégration par parties et une condition de décroissance à l'infini de  $\mathbf{h}_{e_{\mu w}}$  permet d'en déterminer l'expression<sup>7</sup>:

$$\mathbf{h}_{e_{\mu w}}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{(\mathbf{v}_w \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}(\cdot)) \mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (4.13)$$

On peut d'ailleurs retrouver ce champ par l'intermédiaire d'une équation de diffusion analogue à (4.10). La condition de conservation du flux et le comportement microscopique du matériau ( $\mathbf{b} = \mu_0(\mathbf{h}_M + \mathbf{m})$ ) donne  $\nabla \cdot \mathbf{h}_M = -\nabla \cdot \mathbf{m}$ . De manière générale, le champ magnétique  $\mathbf{h}_M$  est la somme du champ  $\mathbf{h}_0$  qui serait appliqué sans paroi ( $\nabla \cdot \mathbf{h}_0 = 0$ ) du champ de dureté démagnétisante ( $\mathbf{h}_d$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{h}_d = -\nabla \cdot \mathbf{m}$ ) et de celui du aux courants induits ( $\mathbf{h}_{e_{\mu w}}$ ). On en déduit  $\nabla \cdot \mathbf{h}_{e_{\mu w}} = 0$  et l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ d'opposition microscopique

$$\Delta \mathbf{h}_{e_{\mu w}} = -\mu_0 \sigma (\mathbf{v}_w \cdot \nabla(\cdot)) \mathbf{m} \quad (4.14)$$

Les trois premières propriétés, que nous avons énumérées pour les courants induits, sont aussi valables pour ce champ.

On s'intéresse maintenant aux pertes induites par ce déplacement de paroi. Pour ce, faisons un bilan de puissance électromagnétique autour de la paroi:

$$\sigma^{-1} \mathbf{j}_{\mu w}^2 = -\mathbf{h}_{e_{\mu w}} \partial_t \mathbf{b} - \sigma^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{j}_{\mu w} \wedge \mathbf{h}_{e_{\mu w}}) \quad (4.15)$$

<sup>7</sup>Le cas de la paroi infiniment fine se déplaçant suivant  $y$  donne:

$$\mathbf{h}_{e_{\mu w}}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\sigma P_{m,ss} v_w}{4\pi} \iint_w \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|} d^2r_w\right) \mathbf{u}_x$$

Précisons que les parois étudiées ont une étendue surfacique très grande devant leur épaisseur et forment une distribution de surfaces en réseaux et au maximum contigues (afin de minimiser  $\nabla \cdot \mathbf{m}$ ). C'est pourquoi nous négligerons encore une fois les effets de bord.

En calculant la puissance totale perdue par effet Joule dans l'environnement de la paroi, le flux rentrant du vecteur de Poynting [JAC\_1] étant négligé en dehors du vortex (décroissance rapide des courants et champ microscopiques), nous obtenons la puissance magnétique utilisée pour le déplacement:

$$\iiint \sigma^{-1} \mathbf{J}_{\mu w}^2 d^3 r = \iiint -\mathbf{h}_{e_{\mu w}} \partial_t \mathbf{b} d^3 r \quad (4.16)$$

Connaissant tous les champs et courants, nous pouvons donc exprimer plus précisément la dissipation par effet Joule, et de manière quantitative<sup>8</sup>:

$$\Pi_w = \frac{2P_{ms} S_w v_w^2}{\eta_w} \quad (4.17)$$

$$\eta_w = \frac{32\pi^2 S_w}{\sigma P_{ms}} \left[ \iiint \left( \iiint \frac{\partial \mathbf{n}' // \mathbf{v}_w \left( \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \frac{\mu_0 \mathbf{m}_w}{P_{ms}} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right)^2 d^3 r \right]^{-1} \quad (4.18)$$

Lorsque la vitesse n'est plus uniforme sur la surface de la paroi, il est toujours possible d'exprimer les pertes en fonction d'une vitesse moyenne, rendant compte de la variation de flux élémentaire induite, en faisant dépendre la mobilité  $\eta_w$  de la non-uniformité du mouvement. On vient donc, comme convenu, d'expliciter la mobilité d'une paroi, homogène à des  $m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}$ , et qui traduit cette facilité ou non à déplacer une surface par unité de temps sous l'action d'un champ. Elle provient d'un calcul de rayonnement dans l'environnement immédiat de celle-ci. La double intégrale représente l'extension de la paroi en surface et en épaisseur, puisque la moyenne intégrée de l'espacement entre deux points de la paroi est pondérée par le taux de variation de l'aimantation dans l'épaisseur. Plus la paroi sera étendue, et moins il y aura de pertes; mais plus elle sera fine avec variation rapide de l'aimantation et plus elle sera dissipative. En même temps, nous verrons qu'il en faut un grand nombre pour optimiser le rendement, ce qui n'est *a priori* possible qu'en réduisant leur taille (donc leur mobilité), d'où probablement encore un compromis à trouver ([TRE\_1], [TRE\_2], [GEO\_1]). L'expression (4.18) doit pouvoir rester valable pour une paroi déformée d'épaisseur non nulle, dès lors que sa vitesse, pour l'ensemble de la distribution de variation de moments, reste uniforme. Enfin, en récupérant la formule (4.7a) déterminée avec les équations du micromagnétisme, on peut évaluer la valeur

<sup>8</sup>L'expression de cette mobilité semble plus parlante dans le cas simple d'une paroi "infinitement" fine, toujours obtenue par intégration par parties:

$$\eta_w = \frac{8\pi^2 S_w P_{ms} \sigma}{\sigma P_{ms}^2} \left[ \iiint \left( \iint_{S_w} \frac{(z-z_w)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_w|^3} d^2 r_w \right)^2 d^3 r \right]^{-1}$$

on vérifie que les intégrales convergent et que la mobilité varie dans le même sens que l'étendue spatiale de la paroi. Elle est classiquement de l'ordre de  $0.004 m^2 A^{-1} s^{-1}$  (données du Fer).

et le lien entre le coefficient d'amortissement de Gilbert et cette intégrale de rayonnement

$$\alpha \sim \frac{2\mu_0\gamma\delta l}{\eta_w \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} s\theta d\theta} \quad (4.19)$$

### 4.2.2 Déplacement de plusieurs parois magnétiques

Nous nous plaçons maintenant en présence de plusieurs parois du même type (ou différentes) que celles étudiées dans le § précédent. Celles-ci pourront donc être planes ou bien courbées; en revanche, nous supposerons dans un premier temps que les parois sont suffisamment éloignées les unes des autres pour que les recouvrements entre vortex de courants soient "faibles". Cela revient à étudier le matériau à basse induction, ou encore à faible excursion de paroi. En effet, le ratio entre cette excursion et la distance inter-parois est directement proportionnel au rapport de la polarisation sur la polarisation à saturation. Les parois peuvent être très rapprochées; tant que leur excursion est faible devant la largeur caractéristique des domaines, il y aura peu de recouvrements des vortex de courants (jusqu'à une certaine limite dite "classique"). Il y a maintenant autant de sources que de parois, les équations aux dérivées partielles vérifiées par les courants  $\mathbf{j}_\mu$  et le champ  $\mathbf{h}_{e_\mu}$  deviennent:

$$\Delta \mathbf{j}_\mu = \sum_w -\sigma\mu_0 (\mathbf{v}_w \cdot \nabla) \nabla \wedge \mathbf{m}_w \quad (4.20a)$$

$$\Delta \mathbf{h}_{e_\mu} = \sum_w -\sigma\mu_0 (\mathbf{v}_w \cdot \nabla) \mathbf{m}_w \quad (4.20b)$$

$\mathbf{v}_w$  et  $\mu_0\mathbf{m}_w$  sont respectivement la vitesse et la polarisation magnétique au niveau de la paroi  $w$ .

### Intégrales de rayonnement

Les sources étant ici localisées exclusivement en chacune des frontières  $w$ , généralement relativement minces, les intégrales de rayonnement ne s'effectuent en réalité que dans chacune de ces parois  $w$ . En isolant chacune des contributions dans les sommes solutions, on a avec (4.11) et (4.13):

$$\mathbf{j}_\mu(\mathbf{r}) = \sum_w \mathbf{j}_{\mu w}(\mathbf{r}) \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{h}_{e_\mu}(\mathbf{r}) = \sum_w \mathbf{h}_{e_{\mu w}}(\mathbf{r}) \quad (4.21b)$$

Nous proposerons de traduire ce qui se passe à l'intermédiaire entre deux situations extrêmes (parois très éloignées ou parois très proches) en décomposant les courants induits ou le champ en deux contributions (Figure 4.5):

- la première qui correspondrait aux courants  $\mathbf{j}_{\mu w}$  formant exactement un vortex autour de chacune des parois,
- et la seconde qui résulterait de la superposition des composantes des différentes sources en un point intermédiaire et dont la topologie se rapprocherait plus d'une circulation "continue et lisse" de courants induits "classique" à grande échelle, que de vortex pour lesquels la circulation se limite dans un espace restreint autour de la paroi. Nous noterons  $\mathbf{j}_M$  cette somme des contributions à la densité totale de courants; elle contiendra les éventuels courants sources irrotationnels et la sus-discutée densité lisse (densité dont la description sera d'ailleurs complétée, tout comme la première, par un terme de rotation des moments magnétiques au sein même des domaines, cf. § 4.2.4).

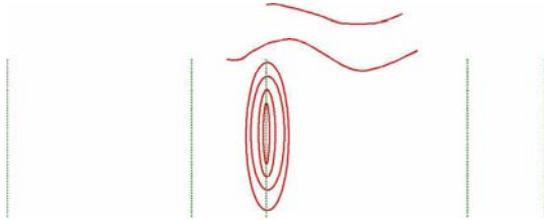


Figure 4.5: Appréciation des distributions de courants.

### Vorticité des courants induits

On définit la vorticité des courants induits à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday classique microscopique (3.11a) et de la définition de la variation d'induction résultante  $\mathbf{b} = \mu_0 (\mathbf{h}_M + \mathbf{m})$ , superposition de l'induction dans le vide et de la polarisation du matériau:

$$\boldsymbol{\omega}_\mu = \nabla \wedge \mathbf{j}_\mu = -\sigma \partial_t \mathbf{b} \quad (4.22)$$

Suivant la distance entre parois, et entre le point considéré et la paroi la plus proche; certaines contributions, fortement ou peu rotationnelles, prédomineront. Notons  $\Omega_{w_k}$  le volume connexe de l'espace le plus petit contenant le vortex de courants associé à la paroi  $w_k$ . Examinons tous les cas:

- $\mathbf{r} \in w_k$ : le point d'observation appartient à la paroi  $w_k$ . On néglige toutes les contributions autres que celle due à la variation locale de polarisation. Les courants induits internes à la paroi sont fortement rotationnels.

- $0 \neq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{w_k}| < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{w_i}| \forall i \neq k$ : nous sommes plus près de la paroi  $w_k$  que des autres, mais nous sommes à l'extérieur de toute zone de rotation d'aimantation. La densité de courants "libres"  $\mathbf{j}$ , réduite du vortex  $\mathbf{j}_{\mu w_k}$ , se décompose comme suit:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \sum_{i \neq k} \mathbf{j}_{\mu w_i} = \mathbf{j}_M - \mathbf{j}_{\mu w_k} \text{ si } \mathbf{r} \in \Omega_{w_k} \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \sum_i \mathbf{j}_{\mu w_i} = \mathbf{j}_M \text{ sinon} \quad (4.23b)$$

De même pour la vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega}_M - \boldsymbol{\omega}_{\mu w_k} \text{ si } \mathbf{r} \in \Omega_{w_k} \quad (4.24a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega}_M \text{ sinon} \quad (4.24b)$$

La notion de vortex de courants microscopiques ou de courants mésoscopiques classiques est ici associée à la notion d'écoulement de charges qui est soit fortement ( $\boldsymbol{\omega}_{\mu w_k} = \nabla \wedge \mathbf{j}_{\mu w_k}$  dans  $\Omega_{w_k}$ ), soit faiblement ( $\boldsymbol{\omega}_M = \nabla \wedge \mathbf{j}_M$  en dehors des vortex  $\Omega_{w_k}$ ) rotationnel; les courants libres étant la différence entre les deux, donc de vorticité réduite ( $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{j}$  partout).

### Terme de puissance et perte électriques

Nous sommes toujours en  $\Omega_{\mu w}$  ou en son voisinage. Les pertes électriques des courants libres (ou pertes Joule) sont donc:

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sigma^{-1} j^2 = \pi_{j_M} + \pi_{j_{Mw}} + \pi_{j_w} \\ &= \sigma^{-1} j_M^2 - 2\sigma^{-1} \mathbf{j}_M \cdot \mathbf{j}_{\mu w} + \sigma^{-1} j_{\mu w}^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

la somme entre une densité de pertes classiques ( $\pi_{j_M} = \sigma^{-1} j_M^2$ ), un terme de pertes de proximité (ou de couplage entre les deux échelles,  $\pi_{j_{Mw}} = -2\sigma^{-1} \mathbf{j}_M \cdot \mathbf{j}_{\mu w}$ ) et une densité de pertes en excès uniquement due au vortex  $w$  ( $\pi_{j_w} = \sigma^{-1} j_{\mu w}^2$ ), dont on sait qu'elles sont localisées dans l'espace et dont on connait l'intégrale (4.18) dans leur volume d'épanouissement respectif:

$$\Pi_{j_w} = \iiint_{\Omega_w} \sigma^{-1} j_{\mu w}^2 d^3 r = \frac{2P_{ms} S_w v_w^2}{\eta_w} \quad (4.26)$$

### Termes de puissance et perte magnétiques

Le champ magnétique peut se décomposer de manière analogue à 4.23a:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_d + \sum_{i \neq k} \mathbf{h}_{e_{\mu w_i}} = \mathbf{h}_M - \mathbf{h}_{e_{\mu w_k}} \text{ si } \mathbf{r} \in \Omega_{w_k} \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_d + \sum_i \mathbf{h}_{e_{\mu w_i}} = \mathbf{h}_M \text{ sinon} \quad (4.27b)$$

La notion de champ magnétique d'opposition microscopique dynamique ( $\mathbf{h}_{e_{\mu w_k}}$ ) ou mésoscopique classique ( $\sum_i \mathbf{h}_{e_{\mu w_i}}$ ) est ici associée à la notion de contre-réaction individuelle ou bien collective. Le champ d'opposition d'une paroi n'existe que et varie fortement en son voisinage  $\Omega_{w_k}$ , il s'évanouit rapidement lorsqu'on s'en éloigne. Le champ classique, au contraire est localement plus modeste mais existe sur de longues distances et varie de façon beaucoup plus lente. On peut donc différencier ces deux réactions à l'aide de la notion de rayonnement à courte distance par un individu ou à longue distance par plusieurs. On peut enfin exprimer le terme de puissance et pertes magnétiques

$$\begin{aligned} \pi_\mu = \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} &= \pi_{\mu_M} + \pi_{\mu_w} \\ &= \mathbf{h}_M \cdot \partial_t \mathbf{b} - \mathbf{h}_{e_{\mu w}} \cdot \partial_t \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Elles sont la somme entre une densité de puissance classique ( $\pi_{\mu_M} = \mathbf{h}_M \cdot \partial_t \mathbf{b}$ ) et une densité de puissance en excès uniquement due au vortex  $w$  ( $\pi_{\mu_w} = -\mathbf{h}_{e_{\mu w}} \cdot \partial_t \mathbf{b}$ ), dont on sait qu'elles sont localisées dans l'espace et dont on connaît l'intégrale (4.18) dans leur volume d'épanouissement respectif:

$$\Pi_{\mu_w} = \iiint_{\Omega_w} -\mathbf{h}_{e_{\mu w}} \cdot \partial_t \mathbf{b} d^3r = \Pi_{j_w} = \Pi_w = \frac{2P_{ms} S_w}{\eta_w} v_w^2 \quad (4.29)$$

## Bilan et synthèse

Les deux contributions, électrique et magnétique, aux pertes induites par le mouvement d'une seule paroi prise séparément, sont égales ( $\pi_{j_w} = \pi_{\mu_w} = \pi_w$ ). De sorte que la densité de puissance totale absorbée est

$$\pi = \pi_j + \pi_\mu = \pi_{j_M} + \pi_{\mu_M} + \pi_{j_{Mw}} + 2\pi_w \quad (4.30)$$

Pour conclure ce paragraphe, voici les expressions des différents champs électromagnétiques microscopiques (4.31a) et leur allure (figure 4.6)<sup>9</sup>

$$\text{Induction magnétique} : \quad \mathbf{b} = \mu_0 (\mathbf{h}_M + \mathbf{m}) \quad (4.31a)$$

$$\text{Champ magnétique} : \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_M - \mathbf{h}_{e_{\mu w}} \quad (4.31b)$$

$$\text{Densité de courants} : \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_M - \mathbf{j}_{\mu w} \quad (4.31c)$$

$$\text{Champ électrique} : \quad \mathbf{e} = \sigma^{-1} \mathbf{j} \quad (4.31d)$$

<sup>9</sup>Pour une paroi très fine se déplaçant dans la direction  $y$ , la distribution des pics de champ d'opposition dynamique dans la direction  $x$  est proportionnelle à:

$$-\frac{P_{ms} v_w}{P_{msx} \eta_w} \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w)$$

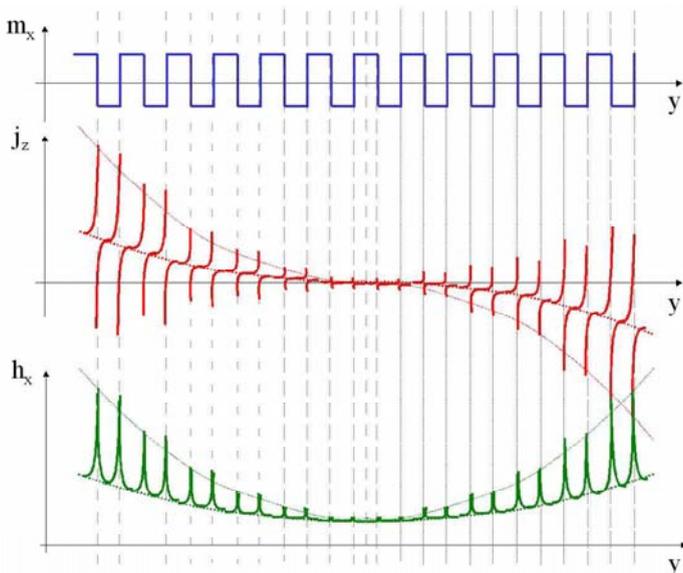


Figure 4.6: Représentation schématique de l'allure des courants et du champ magnétique avec plusieurs parois en mouvement, l'induction augmentant ici positivement suivant  $x$ .

### 4.2.3 Déformations, multiplications et fusions

Nous proposons ici d'étudier plus en détail des parois déformées pour voir ce que cela implique sur des propriétés telles que la mobilité. Nous verrons qu'il existe une limite en champ au delà de laquelle la paroi se multiplie. Nous verrons comment cette multiplication, augmentant la densité de parois, peut agir à son tour sur la vitesse de celles-ci. Nous tenterons d'exprimer ces deux mécanismes en termes de pertes induites et nous en déduirons, via un principe de création minimum d'entropie, le sens d'évolution probable de différentes propriétés physiques (mobilité et densité volumique de parois).

#### Mobilité variable

La paroi fine, toujours supposée très longue suivant  $x'$  (figure 4.7), est décrite par une fonction à deux dimensions  $y_w(z, t)$ . Une telle fonction peut être obtenue par un principe variationnel appliqué au travail total réalisé et fourni pour déplacer et déformer la paroi ([CAR\_1], [CAR\_2], [DEL\_3]). Les forces en présence sont la pression exercée par le champ appliqué  $\mathbf{h}$  ( $\mathbf{P}_a = (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{P}_m) \mathbf{n}$ ), la pression exercée par le champ d'opposition des courants induits  $\mathbf{h}_{e_{\mu w}}$  ( $\mathbf{P}_{e_{\mu w}} = (\mathbf{h}_{e_{\mu w}} \cdot \delta \mathbf{P}_m) \mathbf{n}$ , qui a tendance à déformer la paroi) et la tension superficielle due à la courbure de la paroi. Etudions un élément de paroi courbe

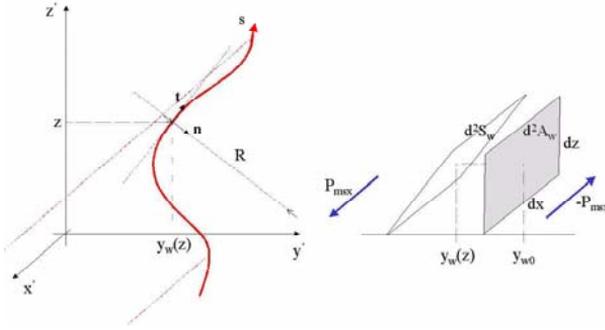


Figure 4.7: Paroi magnétique déformée.

$$d^2S_w = \sqrt{1 + (\partial_z y_w)^2} dx dz, \text{ et sa surface projetée } d^2A_w = dx dz.$$

Le travail réalisé par les forces de pression sur l'élément  $d^2A_w$  pendant le déplacement de celui-ci de  $y_{w0}$  à  $y_w(z)$  est:

$$d^2W_1(y_w, \partial_z y_w, z, t) = (P_a + P_{e_{\mu w}})(y_w(z, t) - y_{w0}) dx dz \quad (4.32)$$

L'énergie de déformation de la paroi, qui est aussi le travail de la tension superficielle, s'écrit:

$$d^2W_2(y_w, \partial_z y_w, z, t) = \gamma_w \sqrt{1 + (\partial_z y_w)^2} dx dz \quad (4.33)$$

Alors que la pression appliquée a tendance à déplacer la paroi d'un bloc, la pression des courants induits a plutôt tendance à s'y opposer en déformant cette même paroi, puisque le champ d'opposition créé par le vortex sera plus fort au centre qu'aux extrémités. Sachant qu'il existe aussi une tension superficielle au niveau de la paroi, qui tend quant à elle à maintenir la frontière plane; la condition d'équilibre sera un compromis entre ces trois précédentes actions. Le profil  $y_w(z, t)$  adopté par ce "mur" magnétique sera celui qui rend stationnaire (ici minimum) la fonctionnelle énergétique  $W = \iint (d^2W_1 + d^2W_2)$ , sous une variation  $\delta y_w$  du profil /  $\delta y_w(\pm \delta z/2, t) = 0$ . Ce principe variationnel nous amène classiquement à une équation d'Euler-Lagrange (cf. annexe 18)

$$P_a + P_{e_{\mu w}} - \gamma_w C(\partial_z y_w) = 0 \quad (4.34a)$$

$$C(\partial_z y_w) = \partial_z \left( \partial_z y_w \left( 1 + (\partial_z y_w)^2 \right)^{-1/2} \right) \quad (4.34b)$$

Un fois l'extrémum, et donc l'équilibre, réalisé; l'énergie utilisée lors du mouvement avec déformation vaut alors

$$W = \iint_{S_w} \gamma_w \left( C(\partial_z y_w) y_w + \left( 1 + (\partial_z y_w)^2 \right)^{-1/2} \right) dx dz \quad (4.35)$$

La dérivée temporelle de  $W$ , fournit la puissance  $\Pi_w = \partial_t W$  dissipée pour effectuer ce mouvement avec déformation. Ce calcul doit permettre de déterminer la forme et les dépendances de la mobilité d'une paroi déformée, vérifiant l'expression (4.18) généralisable. Faisons ce calcul en régime "stationnaire" (profil fixe dans le temps, *i.e.*  $\partial_t \partial_z y_w = 0$ ). Dans ce cas, la vitesse de la paroi dans la direction  $y$ , ne dépend ni de  $x$ , ni de  $z$ , et finalement

$$\Pi_w = 2P_{ms} S_w \eta_w^{-1} v_w^2 \quad (4.36a)$$

$$\eta_w = \frac{2P_{ms} S_w v_w}{\iint \gamma_w C dx dz} \quad (4.36b)$$

Cette étude simplifiée nous fournit des informations supplémentaires sur la mobilité d'une paroi courbe et sur sa dépendance non-linéaire avec la vitesse de la frontière (*i.e.* avec la dérivée du flux ou de l'induction, cf. § 4.3.1). Une paroi étendue sera plus mobile qu'une paroi restreinte. En revanche, sa courbure doit rester relativement faible. Enfin, plus la vitesse augmente et plus la mobilité de la paroi augmente aussi grâce à sa déformation; effet non mis en évidence sur l'étude d'une paroi indéformable (cette dépendance n'apparaît pas clairement dans (4.18) mais doit pouvoir s'en déduire). Ceci peut permettre entre autres d'expliquer une croissance de moins en moins rapide des pertes observées à l'échelle macroscopique en fonction de la fréquence. Pour conclure, nous dirons que la formulation des pertes; induites par le déplacement des parois, permettant d'exprimer le comportement dynamique du matériau (4.31a), et en particulier le champ dynamique  $\mathbf{h}_{e_{\mu w}}$  associé à chaque paroi; n'est pas modifiée si ces parois se déforment, pour peu qu'elles restent fines. Il suffit pour cela d'admettre que leur mobilité et leur surface sont des grandeurs variables avec les conditions de champ et de variation de ce champ.

### Champ de rupture et multiplication

L'expression de la courbure  $C = R^{-1}$  (4.34a) permet d'écrire:

$$y_w(z) = \int_0^z f(z') \left(1 - f^2(z')\right)^{-1/2} dz' \quad (4.37a)$$

$$f(z') = \int_0^{z'} C(u) du = \int_0^{z'} \gamma_w^{-1} (P_a + P_{e_{\mu w}}) du \quad (4.37b)$$

On montre qu'aucune solution  $y_w(z)$  existe lorsque  $f^2(z') \geq 1$ ; ce qui peut arriver pour des champs  $h_{cr}$  relativement élevés. Dans ce cas, la tension de surface n'est pas suffisamment forte pour compenser la courbure imposée par les forces de pression, la paroi se casse et se scinde en deux ou plusieurs ([CAR\_1], [CAR\_2], [CLE\_1], [FRT\_2]). On parle de seuil à la cassure ou multiplication, qui croît avec la fréquence seuil d'observation du phénomène (environ 10  $A.m^{-1}$  à 1  $kHz$ ). Sachant que le champ  $h$  est aussi une fonction

croissante de la vitesse de la paroi, cette multiplication interviendra; hors phénomènes de saturation/nucléation, pour des fréquences relativement élevées. La densité volumique de parois, qui apparaîtra dans la définition des propriétés dynamiques du matériau (4.3), devient une grandeur non-linéaire elle aussi (cf. mobilité avec déformation). Nous pouvons proposer une première explication simple à ce phénomène en minimisant l'énergie perdue (la création d'entropie) par la double dissipation (déplacement + multiplication), supposant la mobilité de chacune des parois peu variable. Considérons un volume élémentaire  $\Delta V$  (au sens mésoscopique du terme), contenant des parois fines contribuant seules à l'établissement du flux. La dérivée temporelle de la polarisation est alors exprimée à l'aide de la vitesse  $\overline{v_w}$  moyenne des parois

$$\partial_t P_{mx} = 2P_{msx} \Delta V^{-1} \sum_w v_w S_w = 2P_{msx} n_w \overline{S_w \overline{v_w}} \quad (4.38)$$

$n_w$  est la densité volumique moyenne des parois  $w$ . Les quantités moyennées  $\overline{v_w}$  et  $\overline{S_w}$  sont définies par  $n_w \overline{v_w} \overline{S_w} = \Delta V^{-1} \sum_w v_w S_w$  (nous traiterons ce problème de moyenne statistique dans la section 4.3). La densité volumique de pertes induites par le déplacement des parois à la vitesse moyenne  $\overline{v_w}$  est donc d'après (4.18), (4.38) et ([HAL\_1], [HAL\_2]), tenant compte de leur éventuelle multiplication / fusion faisant varier la densité  $n_w$  de  $n_{w_0}$  à  $n_w \lesseqgtr n_{w_0}$ :

$$e_w = \frac{P_{ms} \int_0^t (\partial_{t'} P_{mx})^2 dt'}{2P_{msx}^2 n_w \eta_w \overline{S_w}} + \gamma_w S_w (n_w - n_{w_0}) \quad (4.39)$$

Le principe de création minimum d'entropie (postulat c) nous dit que la densité volumique de parois est celle qui rend stationnaire  $e_w$ . On en déduit une première loi d'évolution grossière de  $n_w$ :

$$n_w = \left( \frac{P_{ms} \int_0^t (\partial_{t'} P_{mx})^2 dt'}{2P_{msx}^2 \gamma_w \eta_w \overline{S_w}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

La densité de parois apparaît augmenter comme la racine carrée de la fréquence et la puissance 1 du niveau de polarisation ([HAL\_1], [HAL\_2]). Les phénomènes de multiplication / fusion, tout comme celui de déformation, auront donc une action sur l'évolution des pertes fer avec la fréquence, par rapport à une situation à nombre de parois constant. Toutes choses égales par ailleurs, une augmentation du nombre de parois améliorerait le bilan de puissance (mais en augmentant leur nombre, on modifie aussi certaines autres de leurs propriétés:  $S_w, \eta_w$ ).

#### 4.2.4 Rotation de moments magnétiques

Dans un matériau ferromagnétique doux, le déplacement des parois se fait préférentiellement à la rotation d'ensemble des moments magnétiques dans les domaines. C'est le mécanisme prépondérant pour l'aimantation, la désaimantation, et même le retournement de polarisation. Ceci reste le cas tant que les

obstacles (défauts involontaires ou volontaires (aimants)) au mouvement des frontières restent minoritaires; c'est à dire justement pour les matériaux dits doux. Cependant, il peut exister des situations, où la direction ou l'intensité du champ imposé et de l'induction d'expérimentation rendent le mécanisme de rotation inévitable (exemple: induction perpendiculaire à l'axe de facile aimantation ou d'intensité élevée ne laissant plus que la rotation possible jusqu'à saturation), ou complémentaire du processus plus accessible du déplacement de parois [CHE\_1].

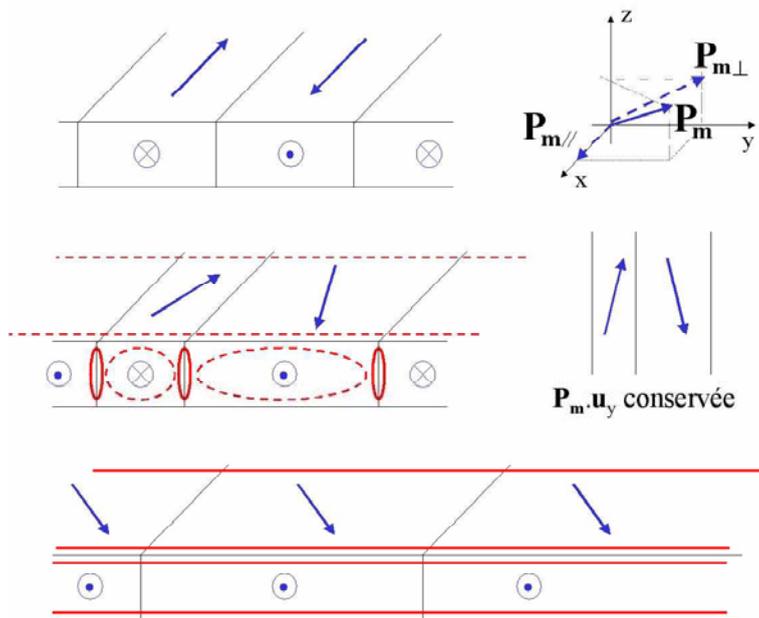


Figure 4.8: Introduction de la rotation cohérente des moments magnétiques (DMR). Schématisation des mécanismes DWD et DMR.

Nous raisonnerons sur la cellule élémentaire constituée de deux domaines frontaliers (figure 4.8), non pas qu'elle se répète périodiquement (sauf situation exceptionnelle de champ homogène et uniforme), mais qu'elle représente un échantillon typique, variable à souhait pour une étude statistique. Hors saturation (i), en présence de parois, avec possible superposition imaginée entre les deux processus: déplacement de frontières (DWD) et rotation de moments (DMR); la variation de polarisation dans le plan perpendiculaire  $\mathbf{P}_{m\perp}$  est la même quelque soit le domaine considéré. Elle ne crée que des courants étendus, sans boucles localisées à l'échelle des domaines, qui ne contribueront ni aux vortex, ni aux pics de champ d'opposition dynamique. Ils seront "classés" dans la densité "classique" de courants. Seule la variation de polarisation suivant l'axe parallèle aux parois  $\mathbf{P}_{m\parallel}$  (souvent l'axe facile...) peut induire des

vortex pseudo-classiques différents d'un domaine à l'autre et localisés à l'échelle microscopique. Nous tenterons de traiter ces boucles (s'ajoutant aux vortex des parois, ou existantes seules si les parois sont immobiles) à la même manière qu'au § 4.2.2. Pendant la saturation (ii), les "murs" magnétiques ayant tous fusionnés, toutes les causes évidentes et probables à la création de vortex microscopiques de courants ont disparu. Le matériau ne s'aimante, ou ne se désaimante, que par rotation cohérente de ses moments magnétiques et l'induction de courants peut y être décrite, comme dans tout matériau homogène conducteur classique, à l'aide des équations de Maxwell microscopiques directement extrapolées à l'échelle supérieure.

En présence de sources de rotations cohérentes donc, les équations de Poisson vérifiées par les courants et le champ deviennent:

$$\Delta \mathbf{j}_\mu = \sum_w -\sigma (\mathbf{v}_w \cdot \nabla) \nabla \wedge \mathbf{P}_{mw} \quad (4.41a)$$

$$\Delta \mathbf{h}_{e_\mu} = \sum_w -\sigma (\mathbf{v}_w \cdot \nabla) \mathbf{P}_{mw} + \sum_d \sigma \partial_t \mathbf{P}_{md_{//}} + \sigma \partial_t \mathbf{P}_{m\perp} \quad (4.41b)$$

### Champs et pertes magnétiques

Aucune source, due à la rotation cohérente, n'apparaît explicitement dans la première équation de diffusion sur les courants. Ceci ne veut pas dire qu'aucun courant ne sera induit par ce mécanisme, mais que ces courants sont à laplacien nul ( $\Delta$ ) dans chacun des domaines et partout sauf aux lieux de rotation non-cohérente ( $\nabla \wedge \partial_t \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) de l'aimantation (les parois en particulier). Pour exprimer ces courants, une alternative consiste à calculer d'abord les champs magnétiques d'opposition qui leurs correspondent avec la deuxième équation de (4.41a) puis à prendre leur rotationnel d'après (3.10a), l'équation de Maxwell-Ampere microscopique.

Les sources liées aux parois ne modifient pas les expressions (4.21a) (et suivantes) donnant les courants et le champ induits par le processus DWD ("Domain Walls Displacement" en anglais). La source liée par la rotation DMR ("Domain Magnetic Rotation" en anglais) dans le plan perpendiculaire donne lieu, comme discuté dans le § précédent, à des courants "classiques" et donc à un champ diffus ( $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ) est la fonction de Green, cf. annexe 19)

$$\mathbf{h}_{e_{\mu_{DMR\perp}}}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi} \iiint \partial_t \mathbf{P}_{m\perp}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' \quad (4.42)$$

La rotation restante quant à elle provoque un champ microscopique dynamique qui s'écrit sous la forme d'une somme de couples de champs faite sur l'ensemble des cellules élémentaires rayonnantes

$$\mathbf{h}_{e_{\mu DMR//}} = \sum_d (\mathbf{h}_{e_{\mu d\leftarrow}} + \mathbf{h}_{e_{\mu d\rightarrow}}) = \sum_d \mathbf{h}_{e_{\mu d}} \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{h}_{e_{\mu d=}}(\mathbf{r}) = \pm \frac{\sigma}{4\pi} \iiint_{d^{\rightleftharpoons}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' \frac{P_{md\perp} \partial_t P_{md\perp}}{\sqrt{P_{ms}^2 - P_{md\perp}^2}} \mathbf{u}_{//} \quad (4.43b)$$

Ce champ d'opposition rayonné par les vortex de rotation parallèle varie proportionnellement à  $\partial_t \left( \sqrt{P_{ms}^2 - P_{md\perp}^2} \right)$  avec un coefficient homogène à un temps, caractéristique d'amortissement. Il rend compte de la facilité / difficulté qu'ont les moments pour tourner dans le domaine en régime dynamique. une analogie est possible avec la mobilité des parois. On voit ici que ce coefficient est non-linéaire dans tous les cas, et qu'il est d'autant plus grand que la polarisation perpendiculaire est importante et que les parois sont peu nombreuses (près de la fusion/saturation). Nous compléterons sa définition après avoir déterminer et calculer les pertes magnétiques induites "classiques" et en excès.

A l'instar du § 4.2.2, nous nous plaçons au voisinage  $\Omega_{d_k}$  d'une cellule élémentaire  $d_k$ , contenant deux domaines et la paroi  $w_k$ . Nous rassemblons certains champs entre eux, et nous retrouvons la loi magnétique du matériau en présence des deux mécanismes DWD et DMR (4.44a).

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_M - \mathbf{h}_{e_{\mu d_k}} - \mathbf{h}_{e_{\mu w_k}} \text{ si } \mathbf{r} \in \Omega_{d_k} \cap \Omega_{w_k} \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_M - \mathbf{h}_{e_{\mu d_k}} \text{ si } \mathbf{r} \in \Omega_{d_k} \quad (4.44b)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_M \text{ sinon} \quad (4.44c)$$

Quant au calcul de la densité volumique de puissance magnétique, il inclue trois contributions dont deux en excès

$$\begin{aligned} \pi_\mu = \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} &= \pi_{\mu_M} + \pi_{\mu_d} + \pi_{\mu_w} \\ &= \mathbf{h}_M \cdot \partial_t \mathbf{b} - \mathbf{h}_{e_{\mu d}} \cdot \partial_t \mathbf{b} - \mathbf{h}_{e_{\mu w}} \cdot \partial_t \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.45)$$

On sait que ces termes additionnels ( $\pi_{\mu_w} = -\mathbf{h}_{e_{\mu w}} \cdot \partial_t \mathbf{b}$  et  $\pi_{\mu_d} = -\mathbf{h}_{e_{\mu d}} \cdot \partial_t \mathbf{b}$ ) sont localisés dans l'espace, dans les domaines  $d$  et autour de la paroi  $w$ , et on peut calculer les intégrales dans leur volume d'épanouissement respectif (cf (4.18) pour le terme DWD)<sup>10</sup>

$$\Pi_{\mu_d} = \iiint_d -\mathbf{h}_{e_{\mu d}} \cdot \partial_t \mathbf{b} d^3 r = \frac{\sigma S_{DMRd}}{n_w} \left( \partial_t \sqrt{P_{ms}^2 - P_{md\perp}^2} \right)^2 \quad (4.46a)$$

$$S_{DMRd} = \frac{n_w}{4\pi} \iiint_d \iiint_d G(r, r') d^3 r' d^3 r \quad (4.46b)$$

<sup>10</sup>Une comparaison entre les deux temps caractéristiques d'amortissement DWD et DMR ( $\tau_{DWD} = \frac{\mu}{2P_{ms} n_w S_w \eta_w}$  et  $\tau_{DMR} = \sigma S_{DMR} \mu$ ) montre que le déplacement des parois limite en premier la diffusion du champ (sauf près de la saturation):

$\tau_{DWD} \sim 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ s} \gg 2,13 \cdot 10^{-5} \text{ s} \sim \tau_{DMR}$  avec  $\mu \sim 10000 \mu_0$

### Courants et pertes électriques

L'expression des courants libres (4.23a) est peu modifiée et de manière analogue à l'expression du champ (4.44a). Quant à la densité de pertes joules, elle fera intervenir six termes dont un classique, trois de couplage de proximité et deux en excès; dont on sait qu'ils sont localisés et dont on connaît l'intégrale. Il suffit pour cela de réinvoquer un bilan de puissance effectué dans  $\Omega_{d_d}$  pour le couple de domaines  $d$ .

$$\Pi_{j_d} = \iiint_d \sigma^{-1} \mathbf{j}_{\mu_d}^2 d^3r = \iiint_d -\mathbf{h}_{e_{\mu_d}} \cdot \partial_t \mathbf{b} d^3r = \Pi_{\mu_d} \quad (4.47)$$

## 4.3 Propriétés dynamiques

L'étude des courants microscopiques, induits par les processus dynamiques d'aimantation, nous a permis de quantifier les pertes associées en les reliant aux variations locales de polarisation, via la vitesse des parois ou la rotation cohérente dans les domaines. Ces expressions font intervenir des caractéristiques structurelles et physiques intrinsèques au matériau et à sa structure magnétique ( $P_{ms}$ ,  $\sigma$ ,  $S_w$ ,  $n_w$ ,  $\eta_w$ ,  $S_{DMR}$ ). Il va sans dire que ces paramètres, en particulier  $S_w$ ,  $n_w$ ,  $\eta_w$ ,  $S_{DMR}$  ... seront la plupart du temps discriminables uniquement à l'échelle microscopique, mais inhomogène et non-uniformes d'un point de vue mésoscopique où on traite plusieurs objets simultanément. En revanche, la vitesse des parois et la rotation cohérente dans les domaines sont indirectement observables à l'échelle macroscopique (moyennant une correction avec les paramètres précédents), par une simple mesure de tension, donc de dérivée du flux à travers la section de l'échantillon. Cette section permettra de faire le pont entre les variations mésoscopiques de polarisation ou d'induction et les variations locales microscopiques créées par les parois et les domaines à l'aide d'une statistique d'objets magnétiques (Nous noterons  $\mathbf{P}_m$  la polarisation et  $\mathbf{B}$  la densité de flux (ou induction) toutes les deux mésoscopiques et nous utiliserons le postulat b). Ceci aboutira à une définition d'une propriété matériau caractéristique de sa dynamique, utilisable à l'échelle mésoscopique; et à une représentation sous forme de distributions de la densité de pertes et du champ (4.4).

### 4.3.1 Polarisation et Induction magnétiques mésoscopiques

Quelque soient la structure magnétique et les processus d'aimantation mis en jeu, aussi complexes soient-ils, la polarisation et l'induction magnétiques mésoscopiques sont toujours définis à un instant donné par une moyenne spatiale effectuée sur un volume élémentaire statistiquement significatif, *i.e.* contenant une population conséquente d'objets magnétiques. Nous appliquerons cette procédure sur  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}_m$  et  $\mathbf{B}$  (cf § 5.2.1). En effet, ces trois vecteurs ne sont pas des invariants d'échelle puisque l'aimantation d'un domaine n'est pas l'aimantation de l'échantillon. Il en va de même pour leur dérivée temporelle qui n'est pas

égale à la dérivée temporelle locale mais une combinaison complexe des variations microscopiques. Ainsi pour l'aimantation  $\mathbf{M}$ , nous avons<sup>11</sup>

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \overline{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \sum_d \iiint_{V_d \in \Delta V} \mathbf{m}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (4.48)$$

$\mathbf{M}$  résulte d'une moyenne de  $\mathbf{m}$  dans chaque domaine  $d$  de volume  $V_d$ . La polarisation magnétique est alors définie par  $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$ . Enfin pour l'induction  $\mathbf{B}$ , nous utilisons sa version générale microscopique

$$\overline{\mathbf{b}} = \mu_0 (\overline{\mathbf{h}_M} + \overline{\mathbf{m}}) \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H}_M + \mathbf{M}) \quad (4.49b)$$

Bien que les vecteurs physiques impliqués ne soient pas des invariants d'échelle, l'expression de la loi quasi-statique du matériau semble l'être. Au champ  $\mathbf{H}_M$  lissé (il s'agit bien d'un champ classique retardé, par opposition au champ magnétique  $\mathbf{h}$  moteur) s'ajoute la polarisation permanente ou induite des éléments de matière pour donner l'induction  $\mathbf{B}$  et ce quelque soit l'échelle d'observation. Dans la suite nous nommerons  $\mathbf{H}_M$ , champ classique statique ou anhystérique ou bien encore retardé, pour indiquer qu'il s'agit d'un champ égal au champ magnétique appliqué uniquement en régime statique ou anhystérique (*i.e.* sans vortex dynamique) et amorti par rapport à lui sinon. Si nous connaissons la loi d'évolution quasi-statique de  $\mathbf{M}$  en fonction du champ  $\mathbf{H}_M$  régnant dans le matériau, alors nous pouvons en déduire une approximation de la loi de comportement  $\mathbf{B}(\mathbf{H}_M)$ . On définit alors la susceptibilité magnétique statique ( $\chi_s$ ), la susceptibilité magnétique statique différentielle ( $\chi_d$ ), la perméabilité relative statique ( $\mu_{rs}$ ), la perméabilité magnétique statique ( $\mu_s$ ) et la perméabilité magnétique statique différentielle ( $\mu_d$ ) par

$$\mathbf{M} = \chi_s \mathbf{H}_M \quad (4.50a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_s) \mathbf{H}_M = \mu_0 \mu_{rs} \mathbf{H}_M = \mu_s \mathbf{H}_M \quad (4.50b)$$

$$\partial_t \mathbf{M} = \chi_d \partial_t \mathbf{H}_M = (\chi_s \partial_t \mathbf{H}_M + (\partial_{\mathbf{H}_M} \chi_s \partial_t \mathbf{H}_M) \mathbf{H}_M) \quad (4.50c)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \mu_d \partial_t \mathbf{H}_M = (\mu_s \partial_t \mathbf{H}_M + (\partial_{\mathbf{H}_M} \mu_s \partial_t \mathbf{H}_M) \mathbf{H}_M) \quad (4.50d)$$

Ces définitions sont toutes clairement définies pour des comportements statiques approximativement univoques (anhystériques), sinon seules les propriétés différentielles gardent encore un sens (une alternative pour introduire l'hystérésis statique est proposée à la fin de ce chapitre. Elle ressemble à la méthode dynamique et permet aux définitions précédentes de garder un sens en

<sup>11</sup>Définition mathématique de la moyenne utilisée (cf. annexe 16):

$$A(\mathbf{r}) = \overline{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \iiint_{\Delta V} a(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

Nous utiliserons la même notation  $\overline{a}$  pour la moyenne spatiale et la moyenne statistique, car les deux devraient donner dans notre cas des résultats identiques (hypothèse d'ergodicité à l'échelle mésoscopique).

toute circonstance. Nous parlerons pour  $\mathbf{B}(\mathbf{H}_M)$  de loi de comportement an-hystérétique). On a bien  $\mathbf{M} = \overline{\mathbf{m}}$  et  $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{b}}$ ; mais on a pas ces équivalences pour les dérivées:

$$\partial_t \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \sum_d \left[ \iiint_{V_d \in \Delta V} \partial_t \mathbf{m}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' + \iiint_{\delta V_d} \mathbf{m}(\mathbf{r}') \frac{d^3 \mathbf{r}'}{dt} \right] \quad (4.51)$$

Le terme correspondant à la moyenne spatiale de la dérivée microscopique est justement un terme DMR mais il est augmenté d'un autre terme dû au déplacement des parois magnétiques.

### 4.3.2 Statistique d'objets magnétiques, homogénéisation

#### Mécanisme D.W.D. dans une direction sans rotation

On considère un échantillon de matière (un bout de tôle, de tore, de noyau, ...) soumis à une excitation magnétique unidirectionnelle. On imagine dans un premier temps une structure magnétique constituée de parois assez éloignées et orientées préférentiellement dans une direction privilégiée //. La composante du champ appliqué, parallèle à cette direction, va faire bouger les parois qui participent majoritairement à la variation d'induction mésoscopique locale; la rotation étant supposée intervenir plus tard vers la fusion / saturation. Nous couplerons statistiquement les deux au dernier § de cette sous-section.

Avec (4.51), expression générale, on peut retrouver (4.38) donnant la variation de polarisation // en fonction de la vitesse des parois. Seul le deuxième terme DWD intervient ici. On montre qu'en l'absence de rotation ( $\partial_t \mathbf{P}_{m\perp} = \mathbf{0}$ ), et en régime stationnaire pour la déformation des parois ( $\mathbf{v}_w = v_w \mathbf{u}_y$  constant sur  $S_w$ ), on a:

$$\partial_t P_{m//} = 2\Delta V^{-1} \sqrt{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2} \sum_w A_w v_w \quad (4.52)$$

Ce sont donc la surface  $A_w$  de la paroi plane, projection sur  $(x, z)$  de la paroi courbe (figure 4.9), et sa vitesse moyenne suivant  $y$  qui vont déterminer la variation mésoscopique de polarisation. En revanche, toutes les parois ne participent pas identiquement au flux, d'une part parce que certaines parois peuvent se déplacer sans créer de variation mésoscopique (parois voisines bougeant toutes dans le même sens [BIS\_4]) et d'autre part parce qu'elles n'ont pas toutes la même surface et la même vitesse. Dans le premier cas, nous emprunterons à Giorgio Bertotti la notion de parois actives de nombre  $n = n_{wa} \Delta V$  participant effectivement à l'établissement du flux ( $n_{wa}$ : densité volumique de parois actives<sup>12</sup>,  $n_w$ : densité volumique de parois dissipatives) ([BER\_7], [BER\_8]).

<sup>12</sup>L'évaluation de cette densité pour des matériaux polycristallins classiques donne un ordre de grandeur de environ  $10^{12}$  parois.m<sup>-3</sup>.

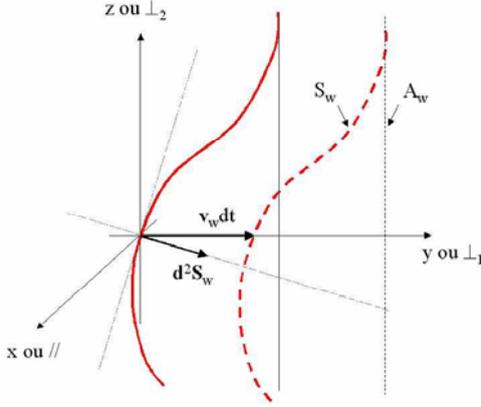


Figure 4.9: Participation au flux d'une paroi déformée.

Ainsi, la sommation ne se fait que sur l'ensemble des parois actives pour déterminer  $\partial_t P_{m//}$  (4.52), alors que toutes induisent des pertes de par leur déplacement à la vitesse  $v_w$  (4.18). Dans le deuxième cas, nous utiliserons la notion de moyenne statistique pour la surface projetée  $A_w$  et la vitesse  $v_w$ . (4.17) donne:

$$\partial_t P_{m//} = 2\sqrt{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2} n_w a \overline{A_w v_w} \quad (4.53)$$

On en déduit l'expression des pertes induites par le déplacement de chacune des parois  $w$  (active ou non) en fonction de la polarisation

$$\overline{\Pi_w} = \frac{\sigma \Lambda_{h,DWD}^2}{\overline{n_w}} (\partial_t \mathbf{B}_{//})^2 \quad (4.54a)$$

$$\Lambda_{h,DWD} = \sqrt{\left( \frac{n_w S_w P_{ms}}{2\sigma \eta_w n_w a A_w^2 (P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2)} \right)} \left( \frac{\partial_t P_{m//}}{\partial_t B_{//}} \right) \quad (4.54b)$$

Ainsi est définie une propriété  $\Lambda_{h,DWD}$  locale mésoscopique statistique, homogène à une longueur caractéristique<sup>13</sup>. Tout se passe comme si les  $n$  parois du volume  $\Delta V$ , ayant en réalité des propriétés différentes, avaient la même propriété  $\Lambda_{h,DWD}$  sans modifier le calcul des pertes. Nous la nommerons propriété magnétique dynamique structurale. Il convient de discuter le choix de cette définition.

- Premièrement elle apparaît assez naturellement, et malgré des facteurs correctifs moins significatifs directement, elle donne une idée approchée de

<sup>13</sup>Un calcul théorique approximatif d'ordre de grandeur permet d'estimer l'intervalle de variation de cette propriété pour les matériaux polycristallin usuels. Elle varie classiquement entre 0 et 500  $\mu\text{m}$ . Ces valeurs seront confirmées par les mesures au chapitre (7).

la structure magnétique ( $S_w, n_w$ ) et de ses propriétés internes intrinsèques ( $\eta_w$ ), formellement indépendantes des variations de champ (même si celles-ci influenceront en valeur absolue sur sa valeur, surtout aux hautes inductions et fréquences). En effet, le coefficient  $((\partial_t P_{m//}) (\partial_t B_{//})^{-1})$  est quasiment toujours constant et égal à 1, sauf à saturation (ce choix d'écriture permet de simplifier l'écriture (4.54a) des pertes),

- ensuite,  $\eta_w$  étant inversement proportionnel à la conductivité  $\sigma$ ,  $\Lambda_{h,DWD}$  n'en dépendra pas non plus explicitement. Cette conductivité est en général une constante mais peut être introduite sous sa forme différentielle (cf (4.9)) dans le cas général (équations (5.19) et (5.20)). Il n'est pas certain qu'elle soit toujours la même que celle intervenant dans le comportement électrique mésoscopique (circulation des courants intra ou inter grains [GUY\_1]; voir tableau 5.1 et (6.2)),
- de plus, la formule (4.54a) ne s'applique pas si  $P_{m\perp} = P_{ms}$ ; auquel cas il n'y a plus de déplacement DWD, mais uniquement des rotations DMR dans le plan perpendiculaire. La continuité physique doit être assurée par une singularité analogue du facteur  $((n_w S_w P_{ms}) (2\sigma \eta_w n_{wa}^2 A_w^2)^{-1})$ , permettant de maintenir  $\Lambda_{h,DWD}$  finie, jusqu'à la valeur nulle en cas de disparition du processus DWD,
- enfin, les propriétés locales microscopiques des objets magnétiques ne sont pas forcément régies seulement par la topologie géométrique de la subdivision mais aussi par la topologie géométrique des boucles de courants qu'elle engendre.

### Mécanisme D.W.D. dans trois directions sans rotation

L'échantillon de matière est toujours soumis à une excitation magnétique unidirectionnelle, mais cette fois-ci, on imagine une structure magnétique constituée de parois orientées aléatoirement ou suivant une distribution angulaire définie. Celles-ci restent toutefois suffisamment éloignées pour qu'on puisse s'affranchir des phénomènes d'approche à saturation dans un premier temps, *i.e.* sans fusion ni rotation.

On suppose que l'on peut étudier chacune des populations orientées par  $\theta_w$  (figure 4.10,  $\theta_w$  : direction // de la population  $w$ ) indépendamment les unes des autres (Les dépendances de proximité seront introduites plus tard dans les équations de champ). Cette étude statistique a déjà été réalisée au § précédent. Le résultat dans chaque direction est (4.54a). Cela s'écrit maintenant comme suit (4.55a)

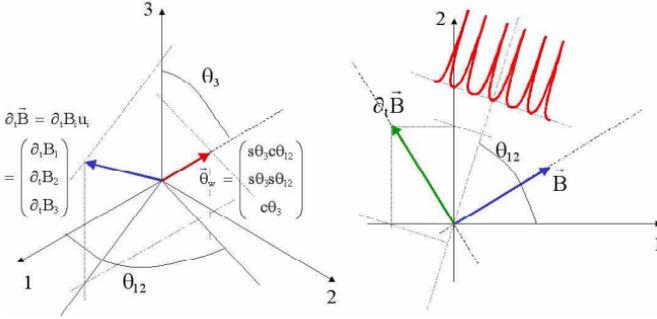


Figure 4.10: Repérage orienté des populations de parois.

$$\overline{\Pi_w} = \frac{\sigma \Lambda_{h,DWD}^2(\boldsymbol{\theta}_w)}{n_w(\boldsymbol{\theta}_w)} [\varpi(\boldsymbol{\theta}_w)] \partial_t \mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{B} \quad (4.55a)$$

$$[\varpi(\boldsymbol{\theta}_w)] = \begin{bmatrix} (s\theta_3 c\theta_{12})^2 & s^2\theta_3 c\theta_{12} s\theta_{12} & c\theta_3 s\theta_3 c\theta_{12} \\ s^2\theta_3 c\theta_{12} s\theta_{12} & (s\theta_3 s\theta_{12})^2 & c\theta_3 s\theta_3 s\theta_{12} \\ c\theta_3 s\theta_3 c\theta_{12} & c\theta_3 s\theta_3 s\theta_{12} & c^2\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.55b)$$

On choisira de définir une propriété tensorielle  $[\Lambda_{h,DWD}^2]$  homogénéisée et moyennée sur toutes les directions possibles prises par les parois. Elle traduit le fait que la vitesse de chaque frontière (qui provoque une perte induite) est régie par la composante de  $\partial_t \mathbf{B}$  suivant la direction de ce "mur", mais que toutes les parois dans toutes les directions possibles participent à cette variation et aux pertes totales DWD. La puissance moyenne perdue par une paroi  $w$ , et ce quelque soit sa direction, s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Pi_w}} &= \frac{\sigma [\Lambda_{h,DWD}^2] \partial_t \mathbf{B}}{\overline{n_w}} \cdot \partial_t \mathbf{B}, \text{ avec: } [\Lambda_{h,DWD}^2] = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \iint \frac{\Lambda_{h,DWD}^2(\boldsymbol{\theta}_w)}{n_w(\boldsymbol{\theta}_w)} [\varpi(\boldsymbol{\theta}_w)] d\theta_3 d\theta_{12} \cdot \iint n_w(\boldsymbol{\theta}_w) d\theta_3 d\theta_{12} \\ &\text{ et } \overline{n_w} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \iint n_w(\boldsymbol{\theta}_w) d\theta_3 d\theta_{12} \quad (4.56) \end{aligned}$$

### Mécanismes D.W.D. et D.M.R. dans trois directions

La configuration est identique à la précédente mais, cette fois la rotation cohérente dans les domaines peut s'ajouter au déplacement des parois magnétiques. L'existence supposée des deux mécanismes simultanés impose une relation complexe non linéaire entre la vitesse des parois et les variations de polarisation.

Cette relation lie intimement les propriétés dynamiques DWD et DMR maintenant inter-dépendantes et toutes deux non linéaires.

$$\partial_t P_{m//} = 2\sqrt{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2} n_w \overline{A_w v_w} + \frac{2P_{m//} \partial_t \left( \sqrt{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2} \right)}{\sqrt{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2}} \quad (4.57)$$

Il est fréquent que l'anisotropie soit suffisamment forte dans la direction des domaines pour que  $P_{m\perp}$  soit nul tant que les parois ne sont pas proche de la fusion, auquel cas on retrouve (4.38). Ce qui nous intéresse plus spécialement, ce sont les pertes induites par le mécanisme DWD d'une part ( $\Pi_w = \Pi_{j_w} = \Pi_{\mu_w}$ ) et par le processus DMR d'autre part ( $\Pi_d = \Pi_{j_d} = \Pi_{\mu_d}$ ). Nous sommes alors amenés à redéfinir des propriétés suivant chacune des directions accessibles données

$$\Lambda_{h,DWD} = \sqrt{\left( \frac{n_w S_w P_{ms} (P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2)^{-1}}{2\sigma \eta_w n_w^2 A_w^2} \right)} \left( \frac{\partial_t P_{m//} - \frac{P_{m//} \partial_t \left( \sqrt{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2} \right)}{\sqrt{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2}}}{\partial_t B_{//}} \right) \quad (4.58)$$

$$\Lambda_{h,DMR} = \sqrt{\frac{1}{2} S_{DMR}} \sqrt{\frac{P_{m\perp}^2}{P_{ms}^2 - P_{m\perp}^2}} \left( \frac{\partial_t P_{m\perp}}{\partial_t B_{\perp}} \right) \quad (4.59)$$

Les tenseurs  $[\Lambda_{h,DWD}^2]$  et  $[\Lambda_{h,DMR}^2]$ , qui sont maintenant des propriétés homogénéisées mésoscopiques associées aux mécanismes DWD et DMR, résultent de deux moyennes statistiques sur des ensembles d'objets orientés puis sur les diverses orientations possibles. (4.56) est inchangée, et  $[\Lambda_{h,DMR}^2]$  est donnée par:

$$[\Lambda_{h,DMR}^2] = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \iint \frac{\Lambda_{h,DMR}^2(\boldsymbol{\theta}_w)}{n_w(\boldsymbol{\theta}_w)} ([1] - [\varpi(\boldsymbol{\theta}_w)]) d\theta_3 d\theta_{12} \cdot \iint n_w(\boldsymbol{\theta}_w) d\theta_3 d\theta_{12} \quad (4.60)$$

De sorte que la somme des pertes par excès devient

$$\overline{\overline{\Pi_{ew}}} = \overline{\overline{\Pi_w}} + \overline{\overline{\Pi_d}} = \frac{\sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}}{n_w} \cdot \partial_t \mathbf{B} \quad (4.61)$$

En général, le déplacement des parois est prépondérant sur la rotation cohérente (environ 100 fois plus importante en terme de pertes), sauf à l'approche à saturation. Nous joindrons les pertes DMR dans les pics de pertes dynamiques DWD avec une propriété  $[\Lambda_h^2]$  non linéaire globale.

### 4.3.3 Non linéarités, inhomogénéités et effets de surface

#### Hétérogénéité

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, notre représentation des pertes à l'aide d'une propriété magnétique dynamique structurelle  $[\Lambda_h^2]$  ignore les hétérogénéités locales microscopiques. Cette propriété homogénéisée rend compte de ces autres propriétés microscopiques d'un point de vue mésoscopique statistique. Elle n'aura donc de sens que pour des échantillons possédant au moins une dimension très grande devant la taille caractéristique des domaines et des parois. Alors seulement il est envisageable de l'attribuer au matériau et ce indépendamment de sa géométrie et de sa taille macroscopiques (les effets géométriques microscopiques dus à la granulométrie devant être inclus dans les calculs statistiques de la perméabilité  $\mu$  et de  $\Lambda_h$ ). Des hétérogénéités sur  $\Lambda_h$  pourront exister, mais elles seront alors dues aux variations spatiales des conditions de champ et non plus des propriétés (en tant que fonction qui aux champs associe  $\Lambda_h$ ) intrinsèques au matériau. Cependant, malgré toutes les précautions prises, des hétérogénéités naturelles subsisteront; soit parce que l'échantillon est de taille trop réduite pour que l'homogénéisation puisse se faire (cette limite est estimée à environ quatre fois la taille des domaines ou des grains pour les dimensions caractéristiques de l'objet à homogénéiser [GUY\_1]), soit à cause d'effets de bords, de formes superficielles, de surface ou encore des défauts localisés (toutes causes rendant le phénomène non exprimable localement et/ou de manière déterministe). Il s'agira alors de considérer ces non-homogénéités soit à l'aide d'une séparation physique des deux zones aux propriétés différentes, soit par la recherche d'une formulation permettant de prédire cette hétérogénéité relative sur  $[\Lambda_h^2]$ .

#### Propriétés de surface

Les trois principales causes des effets de surface, aux propriétés différentes de celle du volume, sont:

- La création de domaines de fermeture ou le raffinement de structure pour éviter l'apparition de charges magnétiques surfaciques augmentant l'énergie démagnétisante ( [MAR\_1], [SHU\_1]).
- Les modifications de structures induites par des contraintes dues à la fabrication ou bien au fonctionnement même de l'organe ferromagnétique (exemple du poinçonnage).
- L'intervention d'autres processus physico-chimiques ou thermiques altérant la nature magnétique du matériau en surface (exemple de l'oxydation ou de l'échauffement de surface) ( [UNG\_1], [QUO\_1], [AMO\_1]).

Il devient alors intéressant de matérialiser cette propriété de surface par la création d'une région surfacique possédant une propriété structurelle dynamique différente de celle du volume (outre des procédures de réduction d'échelle

devenant moins pertinentes à la frontière du matériau). Une autre alternative consiste à identifier et prédire les processus physiques qui amènent à cette hétérogénéité relative dans l'espace. Pour expliquer cette problématique, nous restons sur la première cause et nous nous baserons sur quelques exemples illustrés figure 4.11.

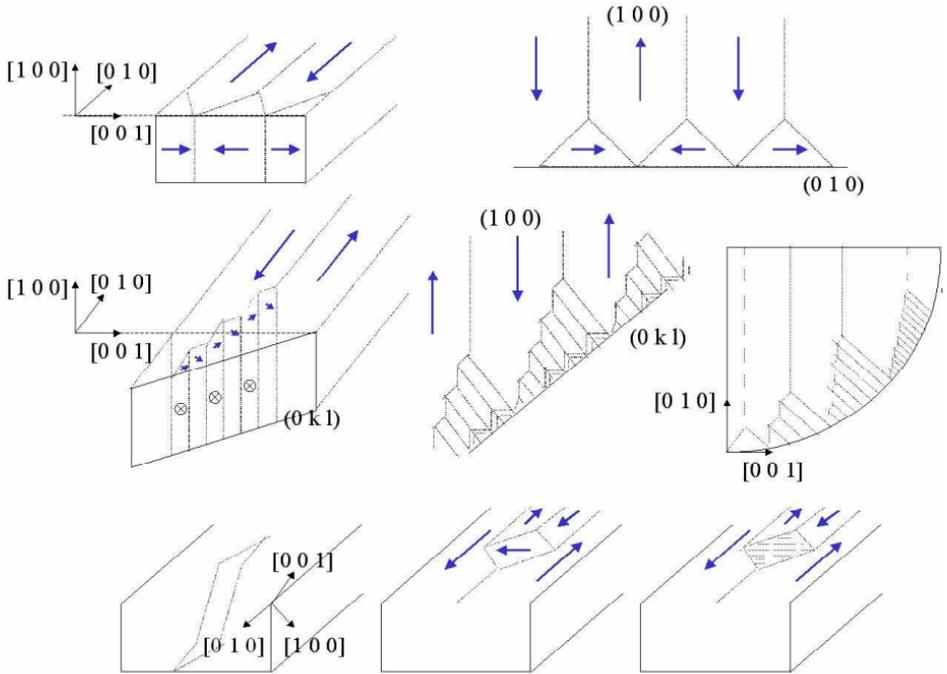


Figure 4.11: Illustration de quelques exemples typiques de structurations surfaciques, avec domaines de fermeture de flux et/ou multiplications de domaines.

Ces schémas (figure 4.11) sont issus de la littérature ([HUB\_1], [MAR\_1], [SHU\_1]) et n'ont été possibles qu'à l'aide d'observations expérimentales poussées (méthodes optiques [HUB\_1]) et de raisonnements énergétiques micromagnétiques (compétition entre énergie magnétostatique démagnétisante de surface et énergie magnétocristalline). Il est difficile d'imaginer pouvoir identifier cette hétérogénéité naturelle (différentiation entre une propriété de volume et une propriété de surface) à l'aide d'une seule mesure macroscopique globale de la réponse en induction de l'échantillon, à moins de connaître au préalable la manière dont la structuration magnétique se fera (ou de faire plusieurs mesures avec plusieurs géométries). La problématique est la même que celle qui viserait à discriminer deux subdivisions différentes, indiscernables en terme de réponse macroscopique observable. Malheureusement, nous sentons bien que si nous figeons la propriété homogénéisée d'un matériau indépendamment de sa géométrie, et surtout de la forme de sa surface; nous serons alors effectivement

capable de prédire la réponse observable d'un échantillon particulier mais sans pouvoir connaître sa structuration en détail, et pire nous risquons de ne plus pouvoir le faire pour une autre géométrie. Cette limitation sera d'autant plus critique que l'échantillon sera petit ([VAN\_1], [VAN\_2]). Nous proposons dans le paragraphe suivant une voie vers une alternative possible permettant de pré-calculer cette hétérogénéité mésoscopique de propriété en surface et en volume, par la connaissance préalable d'une des deux et de la fonction caractéristique associant les conditions de champ à la valeur de  $\Lambda = \Lambda_h$ .

### Influence de la géométrie

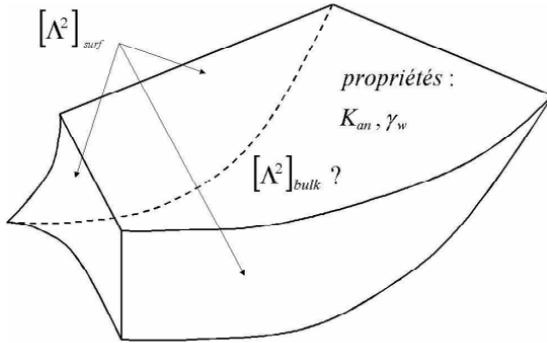


Figure 4.12: Structuration magnétique d'un corps macroscopique? (*bulk* veut dire en volume et *surf* en surface)

L'hétérogénéité naturelle de structuration et son évolution spatiale depuis le coeur jusqu'à la surface provient d'une compétition entre l'anisotropie notée  $\mathbf{K}_{an}$ , qui tend à orienter les moments de la structure dans des directions privilégiées; et le champ magnétostatique démagnétisant, qui tend à orienter les moments ou à multiplier les domaines, de manière à créer le moins de charges possibles en surface. L'existence de ce deuxième champ entraîne la création de domaines de fermeture, d'autant plus importants que l'anisotropie est faible, qui constituent une structure et donc une propriété  $[\Lambda^2]_{surf}$  propre à la surface. Ensuite, l'anisotropie reprend ses droits à mesure que l'on entre à l'intérieur du volume. L'idée est de décrire cette évolution spatiale à l'aide d'une équation type diffusion tensorielle incluant les tendances anisotrope, d'échange et démagnétisantes (voir § 5.3.4)

$$[\nabla \wedge] \left( [\nabla \wedge] [\Lambda^2]^{-1} \right) \propto - \left( \frac{K_{an}}{\gamma_w} \right)^2 \left( [\Lambda^2]^{-1} - \left[ \frac{\mathbf{K}_{an} \left( [\Lambda^2]^{-1} \mathbf{K}_{an} \right)^T}{K_{an}^2} \right]^T \right) \quad (4.62)$$

$\gamma_w$  est l'énergie surfacique moyenne de paroi

$\mathbf{K}_{an} = K_{an} \mathbf{u}$  est le vecteur de direction définie par la direction d'énergie magnétocristalline mésoscopique minimum  $K$  [BER\_11].

$[\nabla \wedge]$  est un opérateur tensoriel qui s'applique sur un tenseur et qui retourne un tenseur de même rang (cf. annexe 11).

Ainsi, connaissant les conditions limites sur le tenseur  $[\Lambda^2]$  nous serions capables de calculer sa "diffusion" dans tout le volume et ce, compte tenu de la géométrie de l'échantillon tout comme de sa nature physique ( $\mathbf{K}_{an}, \gamma_w$ ). Il est probable que cette formulation, de par sa nature tensorielle, soit ardue à mettre en oeuvre. Si celle-ci reste malgré tout envisageable, et sous réserve de sa pertinence et validité physique, elle permet d'accéder à la propriété du volume relativement à celle de surface. Une fois réalisé ce précalcul d'hétérogénéité relative, et supposées connues les dépendances en champs du tenseur; le calcul en régime dynamique (5.3) de la diffusion "hétérogène" du champ devient possible (Il est probable que cette hétérogénéité agisse aussi sur les propriétés statiques, il s'agit alors de la prendre en compte par une adaptation des distributions en phases, différentes suivant la localisation dans l'objet). En revanche, cette formulation ne peut s'appliquer que pour des échantillons macroscopiques pour lesquels une propriété locale mésoscopique homogénéisée a un sens. Pour des objets plus petits, de la taille des distances de corrélations micromagnétiques, des parois et des domaines; il faudrait alors utiliser les équations du micromagnétisme [VIA\_1] couplées aux équations de Maxwell microscopiques.

#### 4.3.4 Généralisation électrique-magnétique

Par analogie avec (4.31a) et l'existence de boucles de courants induits microscopiques  $w$ , on imagine l'apparition simultanée de vortex de magnétisation  $v$  et de pics de champ électrique d'opposition microscopiques, qui vont intervenir, parallèlement à  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{h}$  pour les premiers, dans les lois de comportement électrique et inductive de  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{e}$  (figure 4.13).

De nombreuses autres considérations; issues d'études sur d'éventuelles structurations microscopiques électriques et le formations transitoires de vortex inductifs (nucléations, annihilations, multiplications, formation de bulles magnétiques ou même de domaines fermés de type sphères ou cylindres [THI\_2], [SLO\_2]); et analogues à celles utilisées pour déduire l'écriture généralisée des pertes en excès (4.61), permettraient à nouveau d'inférer l'expression générale suivante pour les termes de puissance en excès dus aux mécanismes supplémentaires de formation de boucles de magnétisation (4.63)

$$\overline{\overline{\Pi}}_v = -\frac{\mu_d [\Lambda_e^2] \partial_t \mathbf{J}}{\overline{n}_v} \mathbf{J} \quad (4.63)$$

$\overline{n}_v$  est la densité volumique moyenne de vortex inductifs et  $\mathbf{J}$  la densité de courants libres de conduction. Voici introduite une propriété électrique dynamique structurelle  $[\Lambda_e^2]$ , traduisant à l'échelle mésoscopique et toujours d'un point de vue statistique, l'évolution dynamique de ces objets microscopiques

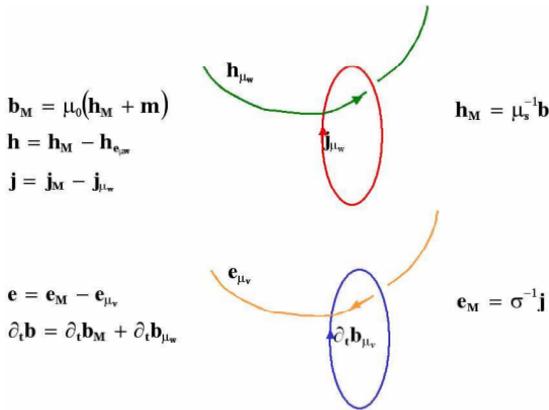


Figure 4.13: Introduction de la dualité boucles induites et boucles inductives.

que sont les boucles de magnétisation. C'est l'analogie de  $[\Lambda_h^2]$ . Un parallélisme et une dualité fréquents en électromagnétisme semblent donc exister dans l'écriture des contributions dynamiques structurelles.

## 4.4 Expression des pertes induites

Les études précédentes nous ont apporté quelques informations essentielles sur la topologie de la densité de pertes, en particulier en excès dues aux mécanismes microscopiques dynamiques DWD+DMR; et sur les dépendances quantitatives de ces pertes avec les variations mésoscopiques d'induction. Nous avons alors été amenés à faire intervenir de nouvelles propriétés locales magnétique (et électrique), informant sur la dynamique structurelle, et définies d'un point de vue mésoscopique statistique.

- Ces pertes induites en excès sont localisées dans l'espace autour des divers objets microscopiques considérés (parois, domaines, ... etc...)
- Les intégrales dans leur volume d'épanouissement respectifs s'expriment en fonction de grandeurs mésoscopiques statistiquement homogénéisées que sont les conditions d'induction  $(\mathbf{B}, \partial_t \mathbf{B})$  et de courant  $(\mathbf{J}, \partial_t \mathbf{J})$ , et les propriétés dynamiques  $\Lambda_h$  et  $\Lambda_e$ .

L'idée est donc d'adopter une écriture sous forme de distributions surfaciques  $\Gamma$  (localisant les pertes en excès sur des surfaces, voir annexe 15) représentatives des structures magnétiques (parois magnétiques et vortex de courants) et électriques (vortex inductifs) contenant toujours l'information statistique des dynamiques microscopiques. Avant de commencer cette partie, nous désirons préciser

que ce qui suit n'est qu'une représentation simple et naïve de la réalité, basée sur des considérations physiques (processus dynamiques d'aimantation étudiés au § 4.2) et statistiques mésoscopiques (homogénéisation des propriétés et pertes en excès du § 4.3). Cependant, elle présente l'avantage d'exprimer et de modéliser cette réalité justement et de fournir de l'information qui pourra être concrétisée et complétée par le biais de mesures et de caractérisations expérimentales (chapitre 7). Au delà de ces objectifs de compréhension et de modélisation des phénomènes, l'approche sera en mesure de fournir des formulations utilisables *a priori* dans les outils de simulation et de conception numérique (chapitre 8), compte-tenu des pertes et de l'hystérésis dynamiques.

### 4.4.1 Distribution et comportement magnétique

#### Densité de pertes en excès

Le principe de conservation d'énergie invoqué en (4.16) maintient toujours l'égalité entre la densité de pertes électriques ( $\pi_{j_w}$ ) et magnétique ( $\pi_{\mu_w}$ ). D'après (4.61) et les propriétés de la distribution  $\Gamma$  (cf. annexe 15), nous avons donc :

$$\pi_{j_w} = \pi_{\mu_w} = \sum_w \frac{\sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}}{n_w S_w} \cdot \partial_t \mathbf{B} \cdot \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) \quad (4.64)$$

Il convient cependant de remarquer que le terme couplé de (4.25) a été ici ignoré ou passé sous silence. Ceci a naturellement une incidence sur la définition et signification physique de ces distributions. Cependant, le passage de grandeurs quadratiques énergétiques à des grandeurs qui ne le sont pas (cf § suivant) permettra, en réutilisant ces dernières, dans le calcul mésoscopique des pertes induites, de retrouver les pertes de proximité (termes couplés) dans le bilan final (§ 5.6).

#### Champ magnétique dynamique

Nous sommes à la recherche d'une distribution  $\mathbf{h}_{e_\mu}$  vectorielle, qui lors d'un calcul mésoscopique de pertes magnétiques redonnerait (4.64)

$$\pi_{\mu_w} = -\mathbf{h}_{e_\mu} \cdot \partial_t \mathbf{b} \quad (4.65)$$

Cette identité ne nous permet d'identifier que les projections suivant la direction de  $\partial_t \mathbf{B}$ . Cependant, on connaît la direction de ce champ pour une paroi (4.13) ou un domaine (4.43a), certaines composantes perpendiculaires étant physiquement contenues dans la contribution lisse classique  $\mathbf{h}_M$  du champ. Ensuite, un raisonnement de moyennage suivant toutes les directions possibles, analogue à (4.56), permet de conclure sur la distribution recherchée et celle du champ "total"  $\mathbf{h}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}_M - \mathbf{h}_{e_\mu} \\ &= \mathbf{h}_M + \sum_w \frac{\sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}}{\bar{n}_w S_w} \cdot \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Il s'agit d'une première version de la relation comportementale du matériau en régime dynamique. Son allure spatiale est représentée figure 4.6; où la hauteur des pics permet de retrouver toutes les pertes. Elle sera soumise à un lissage spatial dans le chapitre suivant (5.2).

#### 4.4.2 Distribution et comportement électrique

En adoptant un raisonnement et une représentation identiques de ceux utilisés précédemment, nous proposons les distributions de pertes et de champs électriques suivantes

$$\pi_{\mu_v} = \pi_{j_v} = - \sum_v \frac{\mu_d [\Lambda_e^2] \partial_t \mathbf{J}}{\bar{n}_v S_v} \cdot \mathbf{J} \cdot \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \in S_v) \quad (4.67)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_M + \sum_v \frac{\mu_d [\Lambda_e^2] \partial_t \mathbf{J}}{\bar{n}_v S_v} \cdot \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \in S_v) \quad (4.68)$$

Ce comportement ou cette propriété pourrait intervenir lors du passage d'un courant dans le ferromagnétique utilisé alors comme conducteur (à l'image du cuivre mais avec des boucles microscopiques de champ d'amortissement).

Il convient de préciser ici qu'il existe encore une controverse sur l'origine exacte de l'une ou de l'autre des propriétés proposées. Bien qu'il soit apparemment "logique" et "admis" d'affirmer que l'effet des boucles de courant soit principalement l'amortissement du champ magnétique et que celui des vortex d'aimantation soit l'amortissement du champ électrique; nous n'avons encore aucune certitude quant à la non intervention des boucles de courant sur le comportement électrique et inversement des boucles de magnétisation sur le comportement magnétique. Des conclusions plus claires ne peuvent être énoncées qu'à l'aide de mesures exhaustives. En effet les propriétés mises en jeu dépendront entre autre de la configuration d'utilisation du matériau (circuit magnétique ou circuit électrique). Dans la suite, nous passerons plus de temps sur l'étude de la sollicitation en champ en tant que circuit magnétique, celle la plus rencontrée en électrotechnique actuellement.

### 4.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'étudier et de formaliser les mécanismes microscopiques principaux d'aimantation (déplacement d'une ou plusieurs parois; déformations, multiplications et fusions; rotation de moments magnétiques, ...)

à l'aide des théories micromagnétique et électromagnétique à l'échelle microscopique. Les pertes induites ont été expliquées et explicitées. Nous les avons ensuite reliées aux variations mésoscopiques de polarisation à l'aide d'une statistique d'objets magnétiques avec un maximum de mécanismes et de directions possibles. Une propriété structurelle a alors été proposée. L'influence de la géométrie macroscopique de l'échantillon sur l'hétérogénéité des propriétés a été mentionnée et une alternative présentée. Nous avons enfin abouti à une écriture synthétique des pertes et des champs magnétique et électrique sous la forme de distributions surfaciques avec prise en compte d'un champ statique ou anhystérétique et des contributions dynamiques liées aux courants induits microscopiques.

Remarquons pour conclure que l'on peut imaginer raisonner de manière identique ou presque pour prendre en compte l'effet des propriétés statiques créant une hystérésis même à basse fréquence. Nous devrions alors aboutir à un champ contenant le champ anhystérétique plus une distribution liée à des pics de champ pour les sauts de parois sur défauts, plus enfin la distribution des pics de champ dynamique liée aux courants induits microscopiques.



## Chapitre 5

# Equations de Maxwell Mésoscopiques

*” La nature agit selon les voies les plus aisées et les plus accessibles ”*

**Pierre de Fermat**  
(oeuvres, Paris 1891)

## 5.1 Postulats énergétiques

Nous allons utiliser les résultats obtenus dans le chapitre précédent, en particulier les lois de comportement dynamique (4.66) et (4.68) sous forme de distributions, pour expliciter une formulation énergétique de l'évolution des champs électromagnétiques dans les matériaux doux. Les variations spatiales microscopiques seront effacées à l'aide d'une procédure de lissage qui préservera l'information sur la dynamique. Ensuite, les équations de champ-matière aux dérivées partielles seront déduites d'un principe variationnel traduisant la stationnarité d'une fonctionnelle énergétique. Nous fournirons enfin une méthode générale pour le calcul de grandeurs observables à l'échelle macroscopique avant de terminer sur une discussion des limitations imposées aux formulations proposées.

### 5.1.1 Relativité des échelles d'observation

#### Problématique

Le formalisme des équations de champs électromagnétiques de Maxwell a été utilisé pour décrire les mécanismes d'aimantation et d'induction de courants à l'échelle microscopique (cf. chapitre 4 précédent). Ce même formalisme est communément et généralement utilisé pour calculer la diffusion des champs dans les organes magnétiques et conducteurs macroscopiques des dispositifs électrotechniques (cf. méthode de calcul par les éléments finis, chapitre 8). Les équations de Maxwell sont alors dans ce cas couplées à des lois de comportement des matériaux reliant certains champs entre eux. Ces propriétés locales mésoscopiques sont justement obtenues à l'aide de procédures d'homogénéisation statistique du type de celle utilisée à la section 4.3. Ce "couplage" est bien maîtrisé et implanté dans les outils de simulation numérique si les propriétés en question ne dépendent pas elles-mêmes des variations de champ. On parle des lois de comportement quasi-statiques, les variations de champ et les courants induits associés étant introduits et calculés par les équations de Maxwell ([BOS\_1], [BOS\_2], [BIR\_1], [MEU\_1]). Nous savons maintenant, grâce aux recherches qui se sont succédées et à la présentation du chapitre précédent (chapitre 4), que cette distribution de courants réels ne peut-être décrite par ce biais, comme elle l'est un peu plus pour d'autres matériaux homogènes (cuivre, aluminium, ...etc...). Pourtant, ces courants sont bien la cause de pertes d'énergie en excès et de l'hystérésis dynamique. Certains auteurs proposent des solutions à la fois différentes et complémentaires pour prendre malgré tout ces pertes en compte. Les premiers (Bertotti, Kedous-Lebouc, Chevalier et Gautreau [BER\_7], [BER\_8], [HEV\_1]) ont envisagé de le faire *a posteriori* des calculs quasi-statiques (cf. modèle de Bertotti ou LS du chapitre 1, section 1.2). Les seconds (Masson, Raulet, Ducharne, Bayada, ...etc... [RAU\_2]) ont introduit un modèle dynamique homogénéisé du comportement dans l'équation de diffusion du champ magnétique. L'inconvénient de la première méthode est une séparation "artificielle" mais efficace des pertes statiques et dynamiques à l'échelle macroscopique, l'inconvénient de la seconde est une complexification et

une diminution de robustesse et de rapidité des calculs non mis en oeuvre en l'état avec la Méthode des Eléments Finis (F.E.M. ou M.E.F.). Nous pourrions difficilement améliorer de beaucoup les problèmes de robustesse et de rapidité (plus on veut être précis, moins on peut être robuste); en revanche, nous pouvons envisager d'introduire ces pertes et l'hystérésis associée *a priori* dans les calculs de champ en ne "superposant" les contributions quasi-statiques et dynamiques (§ 4.4) qu'à l'échelle microscopique et en restant compatibles avec les formulations électromagnétiques mésoscopiques classiques.

### Invariants d'échelle, postulats et notations

Cette ambition nous amène donc à une réflexion des réels invariants d'échelle et sur la dérivation des équations de champs en présence des dynamiques microscopiques. Nous nous persuaderons que l'utilisation des équations de Maxwell portant sur des champs mésoscopiques lissés à définir (§ 5.2.2) restent pertinentes pour les matériaux doux étudiés. En effet, ces champs et courants ne sont pas invariants. En revanche certains principes physiques fondamentaux et certaines écritures fonctionnelles peuvent être considérés comme tels. Le troisième et dernier postulat (postulat c) est justement un de ces principes extrémaux. Naturellement, cette vision fige d'une certaine manière la formulation des évolutions physiques qui lui correspondent; et surtout elle ne peut s'envisager que sous réserve d'être dans les hypothèses énoncées au chapitre 4 précédent, *i.e.* le transfert statistique entre les deux échelles reste pertinent.

Supposons que notre système évolue de manière à rendre stationnaire son action  $\mathfrak{S}$  (minimum, maximum ou point d'inflexion). L'action sera ici l'intégrale dans l'espace de la densité de Lagrangien  $\ell$  (donc homogène à une énergie, [LAV\_1], [ARI\_1]). Ce Lagrangien est classiquement la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Il se trouve qu'en étudiant le système constitué par les électrons libres de conduction et les entités élémentaires porteuses de moment magnétique, toutes les énergies mises en jeu (cinétiques dissipatives et potentielles provenant de forces dérivant d'un gradient) sont comprises dans deux termes.  $\ell$  devient alors la somme de ces deux termes électrique et magnétique correspondant aux intégrales dans le temps des puissances des forces électromotrice (créée par  $\mathbf{E}$ ) et magnétomotrice (créée par  $\mathbf{H}$ ). Cette énergie est absorbée par le système puis en partie dissipée. En divisant par la température  $T$  on obtient justement l'entropie  $\delta S_i$  créée lors de la transformation irréversible (notion d'équilibre thermodynamique local appliqué à un système pseudo-isolé [BER\_11]:  $\Delta U = \mathfrak{S} - T\Delta S_i = 0$ ,  $U$  étant l'énergie interne). D'où une autre formulation possible du postulat: "le système évolue de manière à minimiser sa création d'entropie"; il s'agit alors d'une "évolution la plus adiabatique et réversible possible" [MAZ\_3].

## 5.1.2 Fonctionnelles énergétiques et principes extrémaux

### Formulation Lagrangienne

**Puissance de la force électromotrice et pertes électriques** La densité de courant de conduction  $\mathbf{J}$  fournit une information sur la vitesse des charges électriques mobiles (électrons libres,  $\mathbf{J} \propto \overline{n_e q_e \mathbf{v}_e}$ ), le champ électrique  $\mathbf{E}$  quant à lui fournit la force électromotrice à l'origine de ce déplacement de charges. Le terme croisé  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  intégré dans le temps doit donc représenter l'effet Joule et le travail  $e_j$  volumique de ces électrons libres

$$e_j = \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dt \quad (5.1)$$

**Puissance de la force magnétomotrice et pertes magnétiques** La densité de courant magnétique  $\partial_t \mathbf{B}$  fournit une information sur la vitesse angulaire (ou de translation) des couples de charges magnétiques (moments,  $\partial_t \mathbf{B} \propto \mu_0 \partial_t (\mathbf{h}_M + \mathbf{m})$ ), le champ magnétique  $\mathbf{H}$  quant à lui fournit la force magnétomotrice à l'origine de cette variation d'aimantation. Le terme croisé  $\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}$  intégré dans le temps doit donc représenter l'énergie perdue et le travail  $e_\mu$  volumique de ces moments magnétiques

$$e_\mu = \int (\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}) dt \quad (5.2)$$

**Action électromagnétique** La densité de lagrangien  $\ell$  serait donc donnée par (5.3)

$$\ell = e_j + e_\mu = \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}) dt \quad (5.3)$$

L'évolution dynamique du système sera déterminée par un principe de stationnarité appliqué à l'action  $\mathfrak{S} = \iiint \ell d^3r$  ([ARI\_1], [LAV\_1])

$$\mathfrak{S} = \int \iiint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}) d^3r dt \quad (5.4)$$

Cette fonctionnelle associée à l'ensemble champ, matière est différente de celle faisant intervenir le classique lagrangien de champ ajouté de celui des charges en mouvement. Remarquons que nous avons choisi ici de l'écrire à l'échelle mésoscopique, mais son expression aurait été inchangée si nous l'avions écrite à l'échelle microscopique, simplement les champs et courants impliqués auraient été différents. Dans tous les cas, le choix d'écriture de ces champs dépend de l'échelle à laquelle on se place et surtout des phénomènes (degrés de liberté) que l'on souhaite ou non prendre en compte.

### Structuration mésomagnétique

La fonctionnelle précédente va certes permettre de prédire l'évolution dynamique du système, mais nous verrons aussi qu'elle présuppose la connaissance de la structure magnétique, ou du moins sa moyenne spatiale et statistique mésoscopique (autrement dit, la propriété  $[\Lambda]$ ). Cette contrainte nous limite grandement dans le sens où cette structure est justement une inconnue du problème, que nous aimerions aussi déterminer. Heureusement, une alternative consiste malgré tout à supposer l'existence de la propriété  $[\Lambda]$  ( $[\Lambda_h]$  ou  $[\Lambda_e]$ , § 4.3), attribuée à tout le volume du matériau, et ne dépendant que de l'état électromagnétique défini par les conditions de champ et leurs dérivées ( $(\mathbf{B}, \partial_t \mathbf{B})$  ou  $(\mathbf{J}, \partial_t \mathbf{J})$ ). Ensuite, nous pouvons alors entreprendre son identification expérimentale par un procédé d'inversion de modèle appliqué à un échantillon test. Lorsque cette hypothèse, d'attribution d'une propriété indépendante de la géométrie et de l'espace, n'est plus acceptable; nous aimerions pouvoir fournir malgré tout de l'information sur l'hétérogénéité relative discutée au § 4.3.3. L'idée est de le faire en réalisant un compromis entre différentes tendances énergétiques dites mésomagnétiques, analogues des termes micromagnétiques du § 3.2.1. Lorsque seule  $[\Lambda] = [\Lambda_h]$  suffit à décrire l'évolution du matériau, nous proposons donc les contributions en compétition suivantes (les opérateurs  $[\nabla \wedge]$  et  $\overleftrightarrow{\odot}$  sont expliqués dans l'annexe 11):

- Vecteur d'énergie "échange magnétostatique mésoscopique" entre parois et domaines voisins:

$$\mathbf{e}_{ex} = C_{ex} \frac{\gamma_w^6}{K_{an}^5} \left( [\nabla \wedge] [\Lambda^2]^{-1} \right) \overleftrightarrow{\odot} \left( [\nabla \wedge] [\Lambda^2]^{-1} \right) \quad (5.5)$$

Ce vecteur exprime le fait, suivant toujours un principe de minimisation d'énergie, qu'il existe une tendance naturelle du matériau (appelée énergie d'échange) à homogénéiser sa structuration magnétique. Homogénéisation qui sera d'autant plus forte que les parois seront énergétiquement coûteuses ( $\gamma_w \gg$ ) et que l'anisotropie sera faible ( $K_{an} \ll$ ).

- Vecteur d'énergie "anisotropie mésoscopique":

$$\mathbf{e}_{an} = C_{an} \frac{\gamma_w^4}{K_{an}^3} \left( [\Lambda^2]^{-1} - \left( \frac{\mathbf{K}_{an} \left( [\Lambda^2]^{-1} \mathbf{K}_{an} \right)^T}{K_{an}^2} \right)^T \right) \overleftrightarrow{\odot}^2 \quad (5.6)$$

Ce vecteur exprime le fait qu'il existe aussi une autre tendance naturelle du matériau (appelée énergie d'anisotropie) à orienter ses domaines et parois suivant une ou plusieurs directions d'anisotropie mésoscopiques les plus favorables. Cette direction dépend à la fois de la texture cristallographique et de la métallographie des grains.

- Vecteur d’’énergie démagnétisante’’ principalement du aux charges magnétostatiques de surface

$$\mathbf{e}_{dm} = C_{dm} \frac{K_{an}^4}{\gamma_w^3} \left( \mathbf{n} ([\Lambda^2] \mathbf{n})^T \right) \vec{\odot} \left( \mathbf{n} ([\Lambda^2] \mathbf{n})^T \right) \quad (5.7)$$

$\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface extérieure de l’objet. Ce vecteur  $\mathbf{e}_{dm}$  est non nul uniquement en surface (en effet, il est supposé que le matériau s’arrange toujours pour ne pas créer de charges magnétostatiques en volume, même s’il ne peut pas toujours l’éviter en surface). Il traduit le fait qu’il existe une troisième tendance à orienter et/ou à multiplier ses parois et domaines en surface de manière à créer le moins possible de charges magnétostatiques.

Pour conclure, le matériau adoptera une hétérogénéité de propriété  $[\Lambda^2]$  depuis le coeur jusqu’à la surface, de manière à rendre minimum la somme des trois tendances énergétiques vectorisées:

$$\mathfrak{S}_m = \iiint (\mathbf{e}_{ex} + \mathbf{e}_{an}) d^3r + \iint_{\mathcal{D}} (\mathbf{e}_{dm}) d^2r \quad (5.8)$$

On peut très bien imaginer enrichir cette description par l’ajout d’autres contributions (Température  $T$ , contraintes  $\sigma$ , ...) et par son adaptation en régime diffusif dynamique en présence des mécanismes internes. Il peut de plus être discuté l’emploi des constantes  $\gamma_w$  et  $K_{an}$  pour les pré-facteurs des différents vecteurs en les remplaçant par de nouvelles constantes scalaires, vectorielles ou tensorielles à redéfinir. A savoir enfin que ce type de formulation tensorielle, visant à prédire une structuration hétérogène, pourrait peut-être s’appliquer dans d’autres domaines que celui du ferromagnétisme (ferroélectricité, piezoélectricité, piezomagnétisme, ..etc...).

### Interprétations géométriques

(voir figure 5.1)

## 5.2 Du microscopique au mésoscopique

L’objet de cette section est de passer de l’échelle microscopique à l’échelle mésoscopique par une procédure de lissage et moyennage spatial des champs électrique (4.68) et magnétique (4.66), pour à la fois manipuler des grandeurs lisses et régulières dans la fonctionnelle (5.4) et à la fois tenir compte des pics de champ dynamique. Nous ne procéderons à ces techniques que pour le champ magnétique, les deux calculs déroulés étant identiques.

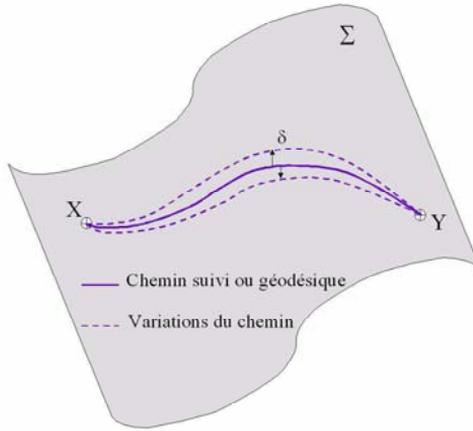


Figure 5.1: Interprétation géométrique du principe variationnel. Le chemin suivi (ou géodésique) est le chemin minimum entre X et Y sur la surface  $\Sigma$ . X et Y peuvent être et sont ici des champs et la surface peut posséder plus de deux dimensions dont le temps.

### 5.2.1 Opération de lissage et moyenne spatiale

La hauteur des pics dynamiques de (4.66) étant une fonction de l'état  $(\mathbf{B}, \partial_t \mathbf{B})$  variable lui aussi dans l'espace et le temps, la moyenne spatiale ne peut se faire simplement que dans des volumes élémentaires pour lesquels l'induction et sa dérivée lissées varient peu, de sorte qu'elles puissent être considérées comme uniformes dans cet espace. Ainsi toutes les parois s'y comportent de manière statistiquement équivalente. Pour optimiser la notion de moyenne, nous choisissons les volumes élémentaires  $\Delta V$  de lissage tels que:

$$\frac{1}{\bar{n}_w} < \Delta V < \min \left\{ \left\| \frac{\nabla(\partial_t \mathbf{B})}{|\partial_t \mathbf{B}|} \right\|, \left\| \frac{\nabla(\mathbf{B})}{|\mathbf{B}|} \right\| \right\} \quad (5.9)$$

En chaque point d'intégration (de "Gauss" [JLC\_1]) correspond un volume élémentaire. Après lissage spatiale, toutes les positions de  $\Delta V$  deviennent équivalentes; ce n'est plus qu'un seul point. Pour garder l'information des objets microscopiques dans  $\Delta V$ , on les comptabilise tous et les accumule à la position considérée (principe du nivellement local) (voir figure 5.2). Nous définissons donc deux échelles; une microscopique ( $\mathbf{r}_\mu$ ) et l'autre mésoscopique ( $\mathbf{r}$ ). il s'agit ensuite d'appliquer un lissage spatial (noté avec l'opérateur  $\langle \bullet \rangle$ , § suivant) sur les signaux dans l'échelle microscopique, puis une moyenne spatiale (noté  $\bar{\bullet}$ , § encore suivant) pour passer à l'échelle mésoscopique.

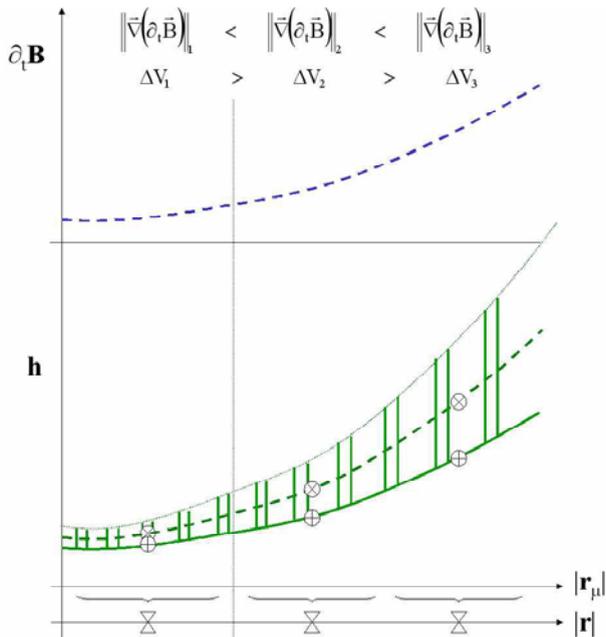


Figure 5.2: Schéma de principe de l'opération de lissage spatial (—: grandeur réelle à l'échelle microscopique, - -: grandeur lissée à l'échelle microscopique,  $\oplus$ : grandeur classique lisse à l'échelle mésoscopique,  $\otimes$ : grandeur réelle lissée à l'échelle mésoscopique).

### Lissage

On réalise un lissage spatial à l'aide d'une fonction  $W(\mathbf{r}_\mu)$  nuage qui présente les propriétés particulières et intéressantes suivantes (voir figure 5.3 et annexe 16) [RUS\_1]:

- $W$  est définie et non triviale uniquement dans  $\Delta V$ .
- $W$  varie lentement, son développement limité à bas ordres est possible.
- $W$  est normée.

Une fois réalisées ces trois conditions, l'opération de lissage spatial est obtenue par un produit de convolution entre la fonction nuage  $W$  et la distribution à lisser  $\mathbf{a}_\mu$ :

$$\langle \mathbf{a}_\mu(\mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}) \rangle = W * \mathbf{a}_\mu(\mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}) = \iiint_{\Delta V(\mathbf{r}, t)} W(\mathbf{s}) \mathbf{a}_\mu(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{s}) d^3s \quad (5.10)$$

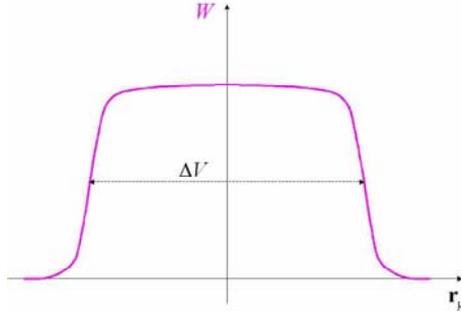


Figure 5.3: Représentation 1-D de la fonction nuage.

### Moyenne

Nous appliquons ensuite une opération de moyenne spatiale pour passer les quantités lissées à l'échelle mésoscopique (voir annexe 16)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \overline{\langle \mathbf{a}_\mu(\mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}) \rangle} = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r}, t)} \iiint_{\Delta V(\mathbf{r}, t)} \langle \mathbf{a}_\mu(\mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}) \rangle d^3x_\mu \quad (5.11)$$

Nous suggérons d'appliquer ces deux opérateurs successivement aux distributions de champs  $\mathbf{h}(\mathbf{r}_\mu, t)$  et  $\mathbf{e}(\mathbf{r}_\mu, t)$ .

### Commutations?

Les opérateurs différentiels dans l'espace  $\partial_{x_i}(\bullet)$  et le temps  $\partial_t(\bullet)$  ne commutent pas trivialement avec  $\overline{\langle \bullet \rangle}$ . En effet, si  $\mathbf{B}$  et  $\partial_t \mathbf{B}$  varient dans le temps et l'espace, comme  $\Delta V$  a été choisi en fonction du couple  $(\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$ ; alors  $\Delta V(\mathbf{r}, t)$  dépend aussi de l'espace et du temps. On ne peut intervertir les opérations mathématiques sans précaution. De ce fait, Les champs électriques et magnétiques  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  de l'échelle mésoscopique seront définis à l'aide de l'opérateur  $\overline{\langle \bullet \rangle}$  appliqué aux champs microscopiques  $\mathbf{h}(\mathbf{r}_\mu, t)$  et  $\mathbf{e}(\mathbf{r}_\mu, t)$ ; il en sera de même pour  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{B}$  en fonction de  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{b}$ . Cependant, la connaissance des équations aux dérivées partielles reliant  $\mathbf{h}$  à  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{e}$  à  $\mathbf{b}$  n'impliquent pas directement les mêmes entre  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$  d'une part et  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  d'autre part [RUS\_1].

### Equivalence avec le filtrage spatial

Etant donnée l'allure accidentée pseudo-périodique des différentes distributions (4.6), il peut être intéressant d'en faire une analyse spectrale dans l'espace en introduisant la notion de fréquence spatiale (voir annexe 17 pour les définitions et propriétés de la transformation de Fourier). Nous noterons

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = TF(\mathbf{A}(\mathbf{r}_\mu, t))(\mathbf{k}, t) \text{ la transformée de Fourier de } \mathbf{A}(\mathbf{r}_\mu, t) \text{ et}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_\mu, t) = TF^{-1}(\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t))(\mathbf{r}_\mu, t) \text{ la transformée inverse.}$$

Nous exploiterons deux propriétés intéressantes de cette transformation (voir annexe 17), dont la première n'est autre que le théorème de Parseval-Plancherel ([AUL\_1], [ATT\_1]), exprimant la conservation de l'énergie quelsoit la variable de représentation  $\mathbf{r}$  ou  $\mathbf{k}$ .

$$\partial_t \mathfrak{S} = \iiint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b}) d^3 r_\mu = \iiint (\tilde{\mathbf{j}} \cdot \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{h}} \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{b}}) d^3 k \quad (5.12)$$

Ainsi, rendre stationnaire la fonctionnelle dans l'espace réel  $(\mathbf{r}_\mu, t)$  est équivalent à le faire dans l'espace dual  $(\mathbf{k}, t)$ . Cette constatation peut, sous certaines conditions (séparation des pics), fournir une preuve de l'invariance d'échelle du postulat c, puisque les champs de l'échelle mésoscopique  $(\mathbf{r}, t)$  ne sont que la superposition continue de certaines composantes basses fréquences ( $k \ll$ ) des champs microscopiques transformés [MAZ\_4].

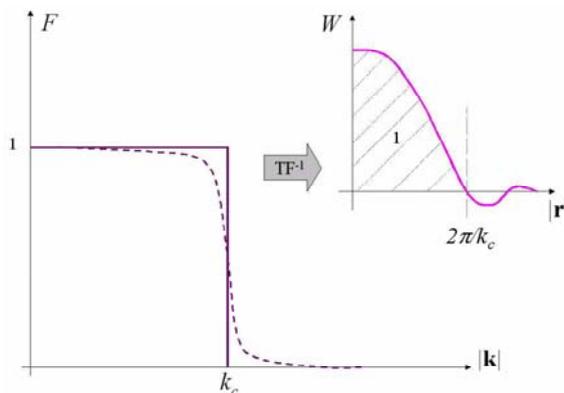


Figure 5.4: Représentation 1-D de la fonction de filtrage.

En effet, l'opération de filtrage spatial consiste à ne sélectionner dans la transformée de Fourier d'un signal que les composantes de fréquence spatiale  $k$  relativement faible (à l'appréciation du "filtreur"). Les grandes fréquences spatiales correspondent à des oscillations rapides dans l'espace réel; elles correspondent aux détails fins de la distribution. En revanche, l'allure d'ensemble qui nous intéresse sera donnée par les basses fréquences spatiales. On peut montrer, moyennant un accord entre la fréquence de coupure  $k_c$  du filtre et le volume élémentaire  $\Delta V$  du nuage, que les deux résultats des deux opérations sont dans une certaine mesure équivalents. Soit  $F$  la fonction de filtrage (prenons par exemple celle dessinée sur la figure 5.4). Le filtrage de  $\mathbf{a}_\mu$  s'exprime par:

$$\text{Filtrage}(\mathbf{a}_\mu)(\mathbf{r}, t) = TF^{-1}(F(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{a}}_\mu(\mathbf{k}, t)) \quad (5.13)$$

En utilisant une deuxième propriété intéressante de la  $TF$ , celle affirmant que la  $TF$  (ou  $TF^{-1}$ ) d'un produit est égale au produit de convolution des  $TF$

(ou  $TF^{-1}$ ) (voir annexe 17), on montre que le filtrage peut s'exprimer autrement et justement à l'aide d'un équivalent de l'opération de lissage.

$$\text{Filtrage}(\mathbf{a}_\mu)(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{s}) * \mathbf{a}_\mu(\mathbf{r} - \mathbf{s}, t) \quad (5.14a)$$

$$\text{où } W(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} TF^{-1}(F(\mathbf{k}))(\mathbf{s}) \quad (5.14b)$$

Pour une fonction de filtrage en créneau (figure 5.4), la transformée inverse est un sinus-cardinal normé de largeur caractéristique  $(\Delta V)^{1/3} = (2\pi/k_c)$ .

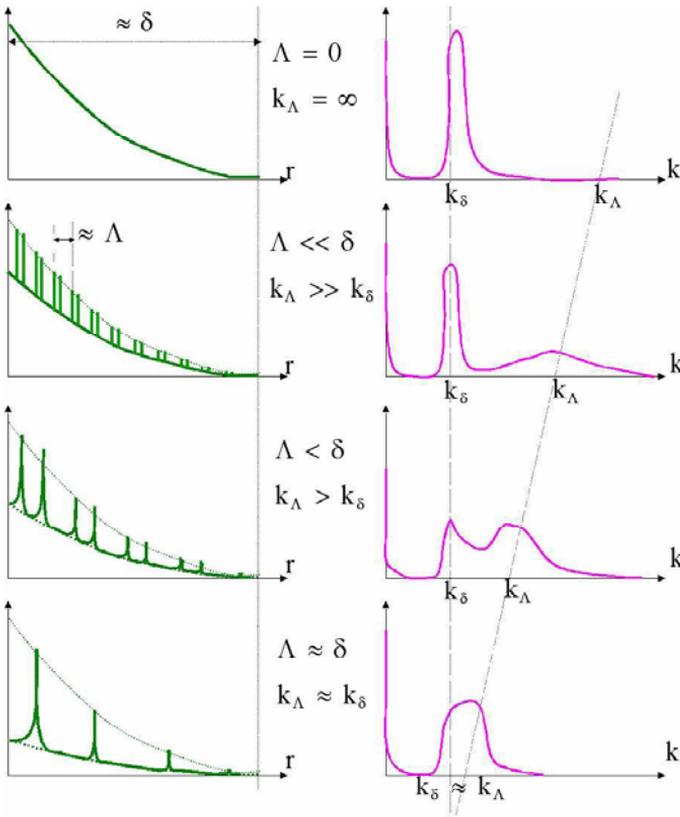


Figure 5.5: Représentation 1-D du champ magnétique dans les deux espaces duaux  $(\mathbf{r}, t)$  et  $(\mathbf{k}, t)$ .

Sur la figure 5.5 sont représentés quelques cas typiques de distributions pour illustrer la dualité entre  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{k}$ . On distingue alors deux dimensions caractéristiques:

- $\delta$ , qui est la taille caractéristique de l'échantillon, ou plutôt de la variation des courants induits macroscopiques classiques, ou bien encore l'épaisseur de peau classique;
- $\Lambda$ , qui est la taille caractéristique des domaines, ou encore la période spatiale des pics de champ microscopique.

Remarque: Il convient tout de même de préciser que  $\Lambda$  n'est pas directement l'espacement moyen entre parois, mais il est corrigé par d'autres propriétés ( $S_w$ ,  $n_w$ ,  $\eta_w$ , ...), et est en général plus grand. Autrement dit, si  $\Lambda > \delta_{class}$ , cela ne signifie pas forcément qu'il n'y a pas de parois dans  $\delta_{class}$ . De plus, le calcul de  $\delta$  dépend lui-même de  $\Lambda$  (cf. chapitre 6).

On introduit alors deux fréquences spatiales caractéristiques:

- $k_\delta = 2\pi/\delta$ , la fréquence spatiale mésoscopique;
- $k_\Lambda = 2\pi/\Lambda$ , la fréquence spatiale microscopique.

La représentation de la figure 5.5 est intéressante puisqu'elle permet d'avoir une idée des contributions relatives, en terme d'énergie, aux différentes échelles. Les composantes de fréquences spatiales autour de  $k_\delta$ , par exemple, doivent reconstituer le champ lissé; y compris la moyenne spatiale des pics microscopiques. Malheureusement,  $\delta$  dépend de la fréquence temporelle d'utilisation et  $\Lambda$  de la fréquence et de l'induction. D'ailleurs  $\Lambda$  peut varier fortement d'un point à un autre de l'échantillon puisque dépendant de la densité  $\overline{n_w}$  de parois. Dès lors, la période spatiale variant avec la variable d'observation, l'outil transformée de Fourier classique ne peut être utilisé sans un raffinement qui consiste à n'effectuer cette opération que dans une fenêtre de largeur limitée (cf.  $\Delta V$ ) et à régler la fréquence de coupure  $k_c$  du filtrage en fonction de  $\overline{n_w}$  et  $\Delta V$ :  $k_c \approx 2\pi/(\Delta V)^{1/3}$  (principe de la fenêtre glissante [ATT\_1]).

## 5.2.2 Lissage des champs et courants

Nous appliquerons ici le lissage  $\langle \bullet \rangle$  et la moyenne  $\overline{\bullet}$  sur les distributions de champs et de courants microscopiques.

### Champs

Nous ne présenterons la démarche que pour  $\mathbf{h}$  (4.66)

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}_\mu, t) = \mathbf{h}_M(\mathbf{r}_\mu, t) + \sum_w \frac{\sigma[\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}_\mu, t)}{\overline{n_w} S_w} \cdot \Gamma(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_{\mu_w}, \mathbf{r}_{\mu_w} \in S_w) \quad (5.15)$$

La première étape consiste à lisser ce champ. Le résultat des deux opérations successives sur  $\mathbf{h}_M$  coïncide avec le champ mésoscopique classique  $\mathbf{H}_M = \overline{\langle \mathbf{h}_M \rangle}$ . Le traitement de la contribution dynamique demande un peu plus de précaution.

La propriété de  $\Gamma$  (cf. annexe 15) permet de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface et finalement au vecteur  $\mathbf{L}_{h2}$

$$\mathbf{L}_{h2}(\mathbf{r}_\mu, t) = \sum_{w \in \Delta V(\mathbf{r}_\mu, t)} \iint_{S_w} \frac{\sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\mu_w}, t)}{\bar{n}_w S_w} W(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_{\mu_w}) d^2 r_{\mu_w} \quad (5.16)$$

On peut écrire  $(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_{\mu_w}) = (\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mu_w}) = (\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}) - \delta \mathbf{r}_{\mu_w}$  et  $\mathbf{r}_{\mu_w} = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}_{\mu_w}$ .  $\mathbf{r}$  représente le point central de  $\Delta V$ ,  $\forall w \in \Delta V(\mathbf{r})$  on a  $|\delta \mathbf{r}_{\mu_w}| = |\mathbf{r}_{\mu_w} - \mathbf{r}| < \Delta V(\mathbf{r})$ .  $\partial_t \mathbf{B}$  et  $W$  variant lentement dans  $\Delta V(\mathbf{r})$ , on décide de les développer en séries de Taylor [AUL\_1]

$$W(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_{\mu_w}) = W(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (\delta \mathbf{r}_{\mu_w} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_\mu})^i W(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}) \quad (5.17a)$$

$$\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\mu_w}, t) = \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^{\infty} (\delta \mathbf{r}_{\mu_w} \cdot \nabla_{\mathbf{r}})^i \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (5.17b)$$

Nous pouvons étudier plusieurs termes de l'ordre 0 jusqu'à l'ordre 1 ou 2 de ces séries, qui constituent un parent des développements multipolaires de distributions de charges électriques et moments magnétiques ([JAC\_1], [RUS\_1]). Il s'agit ici d'un développement multipolaire d'une distribution de parois en mouvement. Nous proposons, pour commencer, d'insister sur le développement à l'ordre 0 (monopôle dynamique). La troncature des développements précédents (5.17a) plus la condition de normalisation sur  $W$  fournit finalement le champ magnétique dynamique à l'ordre 0:

$$\mathbf{H}_{dyn}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (5.18)$$

La validité de cette approximation d'ordre 0 implique certaines conditions sur  $\partial_t \mathbf{B}$  et  $\nabla(\partial_t \mathbf{B})$ . L'intervention des termes d'ordre supérieur s'interprète à l'aide de phases transitionnelles au sein même des dynamiques dites instationnaires (preuve avec  $v_w$  variable dans  $S_w$  comme  $\partial_t \mathbf{B}$  variable dans  $\Delta V$ , [RUS\_1])

Pour conclure, nous utiliserons beaucoup en pratique le développement à l'ordre 0 des champs ((5.19) et (5.20)) en omettant les multipôles dynamiques d'ordre supérieur. Ceci nous permet de simplifier au maximum leur écriture tout en gardant l'information minimum sur les processus microscopiques d'aimantation. A savoir qu'ainsi, toute tentative d'identification de la propriété  $[\Lambda]$  impliquée sera entâchée d'une erreur provenant, d'une part de son hétérogénéité, et d'autre part des variations abruptes de l'induction dans l'espace.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \stackrel{(0)}{=} \mathbf{H}_M(\mathbf{r}, t) + \sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (5.19)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \stackrel{(0)}{=} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) + \mu [\Lambda_c^2] \partial_t \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (5.20)$$

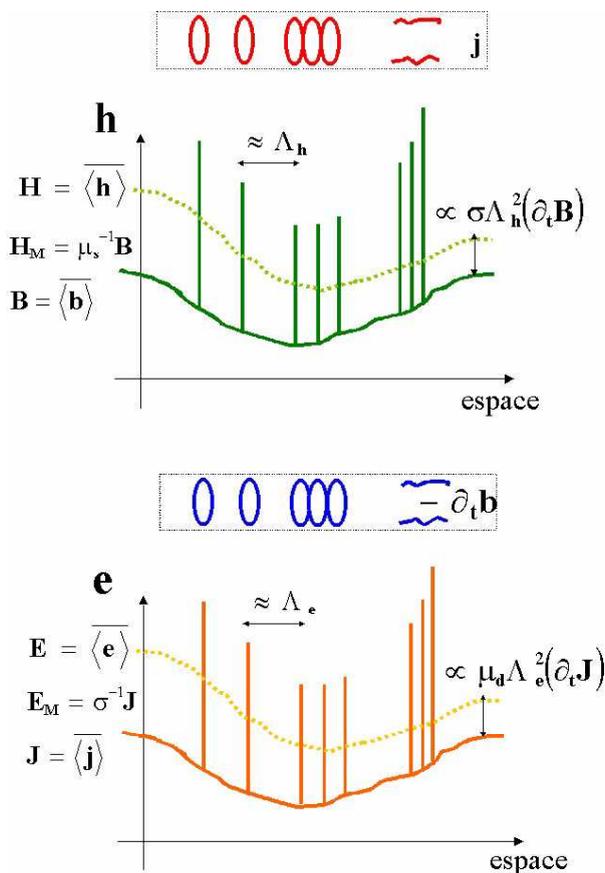


Figure 5.6: Schématisation 1-D du lissage des champs.

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique statique différentielle ( $\mu = \mu_d$ ).

En se limitant à l'ordre 0, les propriétés dynamiques s'expriment ici localement. Étant donnée la nature souvent non locale des comportements hystériques des ferromagnétiques, cette description apparaît donc discutable. Il suffirait alors d'invoquer les ordres supérieurs avec des gradients d'induction et de courant, dont l'intervention devient de plus en plus pertinente que la non localité s'exprime: petits échantillons ou variations locales rapides. Enfin, en remplaçant  $\partial_t \mathbf{B}$  et  $\partial_t \mathbf{J}$  respectivement par  $(-\nabla \wedge \mathbf{E})$  et  $(\partial_t \nabla \wedge \mathbf{H})$ , on retrouve une certaine non-localité croisée cachée derrière ces simples relations.

## Courants

On montre que le résultat du lissage de  $\mathbf{b} = \mu_0 (\mathbf{h}_M + \mathbf{m})$  est identique à la moyenne spatiale effectuée dans (4.49a). En effet, on vient de voir que  $\mathbf{H}_M = \overline{\langle \mathbf{h}_M \rangle}$  et la convolution dans chaque domaine est sans effet  $\mathbf{M} = \overline{\langle \mathbf{m} \rangle}$ , donc

$$\partial_t \mathbf{B} = \partial_t \overline{\langle \mathbf{b} \rangle} = \partial_t \overline{\langle \mu_0 (\mathbf{h}_M + \mathbf{m}) \rangle} = \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}_M + \mathbf{M}) \quad (5.21)$$

Concernant la densité de courants  $\mathbf{j}_M$ , nous avons proposé au § 4.2 de la décomposer en une contribution  $\mathbf{j}$ , issue des courants irrotationnels, DMR et des recombinaisons microscopiques de parois "éloignées", et une contribution isolée  $\mathbf{j}_{\mu_w}$  sur la paroi  $w$  due à son mouvement (4.23a). Nous devons maintenant définir la densité de courants libres de conduction mésoscopique, i.e. celle qui apparaîtra lisse et régulière à cette échelle et qui contribuera au déplacement global de charges, avec conservation de sa composante normale à travers une surface (depuis le fer jusqu'au cuivre ou depuis le fer jusqu'au fer ...). Rappelons que  $\mathbf{j}_M$  est la résultante en tout point de tous les courants induits,  $\mathbf{j}$  quant à elle résulte de la même superposition réduite de la boucle de courants  $\mathbf{j}_{\mu_w}$  de la paroi  $w$  la plus proche. Nous avons la même chose avec le champ magnétique:  $\mathbf{h}_M$  est la résultante en tout point de tous les champs,  $\mathbf{h}$  quant à lui résulte de la même superposition réduite du pic de champ dynamique d'opposition  $\mathbf{h}_{e_{\mu_w}}$  de la paroi  $w$  la plus proche (donc en fait augmenté de cet excédent de champ à fournir). Si nous considérons que ces pics et vortex sont "liés" aux objets intérieurs au volume de matériau étudié (parois et domaines), alors la définition de la densité de courants libres  $\mathbf{J}$  que nous proposons d'adopter est la suivante:

$$\mathbf{J} = \overline{\langle \mathbf{j} \rangle} \quad (5.22)$$

### 5.2.3 Introduction de l'hystérésis statique

Écrites comme précédemment, les champs dit quasi-statiques (indités M) expriment soit le comportement anhystérétique (si pas d'hystérésis statique) soit l'hystérésis statique dans sa totalité. Nous pouvons choisir de séparer le champ anhystérétique du champ statique en excès créant l'hystérésis comme suit

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \stackrel{(0)}{=} \mathbf{H}_M(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, t) + \sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (5.23)$$

Les champs indités M sont alors les champs anhystérétiques et les champs indités s les champs statiques en excès de l'hystérésis statique.

### 5.2.4 Discussion et modèle de données

Nous proposons maintenant d'introduire la notion de matériaux magnétiques et conducteurs (ferromagnétiques doux), leurs propriétés aussi bien quasi-statiques que dynamiques, et une structure de données spécifique (figure 5.7) pour la gestion informatique de ces matériaux en relation avec les formulations qui leur seront dédiées (8).

Par définition, un matériau magnétique et conducteur possède des entités (atomes, électrons, ...) porteuses de moments magnétiques et des électrons libres mobiles. Ceci se manifeste en régime quasi-statique à l'échelle mésoscopique et macroscopique par des propriétés électromagnétiques ( $\mu$ : perméabilité magnétique et  $\sigma$ : conductivité électrique) différentes de celles du vide. Libre à l'utilisateur d'apprécier cette différence pour le classer ou non dans cette famille. Un tel matériau possède alors quatre propriétés intrinsèques, deux propriétés quasi-statiques classiques ( $\mu$  et  $\sigma$ ) et deux nouvelles propriétés dynamiques ( $\Lambda_h$  et  $\Lambda_e$ ). Encore une fois, libre à l'utilisateur d'apprécier l'importance de ces phénomènes dynamiques sur ceux statiques, pour oui ou non les introduire dans son calcul. C'est pourquoi les menus associés devront être optionnels avec des propriétés  $\Lambda_h$  et  $\Lambda_e$  nulles par défaut. Enfin, le matériau peut posséder une hystérésis statique; ce qui implique alors le besoin de connaître une donnée supplémentaire: le modèle décrivant le champ statique en excès de l'hystérésis statique.

Récapitulons:

- **B** ( $\mathbf{H}_M$ ): Comportement magnétique anhystérétique (l'utilisateur fournit la reluctivité ou la perméabilité  $\mu$  anhystérétique différentielle)
- **H<sub>s</sub>** (**B**): Champ magnétique quasi-statique en excès (l'utilisateur fournit le modèle d'hystérésis statique)
- **J** ( $\mathbf{E}_M$ ): Comportement électrique quasi-statique (l'utilisateur fournit la conductivité  $\sigma$ )
- **H<sub>dyn</sub>** (**B**,  $\partial_t \mathbf{B}$ ): Comportement magnétique dynamique (l'utilisateur fournit  $[\Lambda_h]$ , le calculateur retourne  $\sigma [\Lambda_h^2] \partial_t \mathbf{B}$ )
- **E<sub>dyn</sub>** (**J**,  $\partial_t \mathbf{J}$ ): Comportement électrique dynamique (l'utilisateur fournit  $[\Lambda_e]$ , le calculateur retourne  $\mu [\Lambda_e^2] \partial_t \mathbf{J}$ )

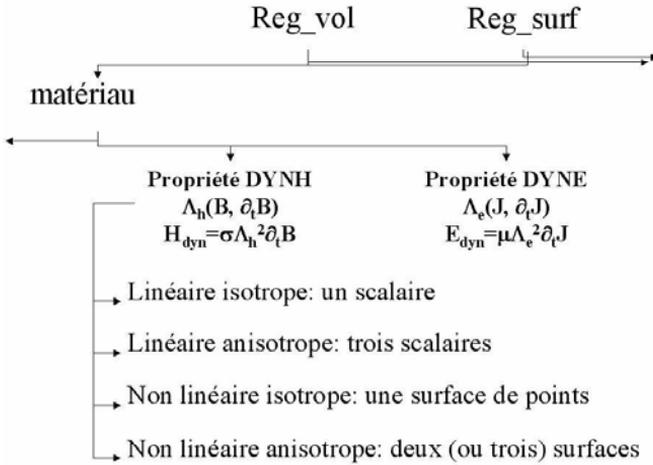


Figure 5.7: Structure simple du sous-modèle de données pour la gestion des propriétés dynamiques (Reg\_vol signifie région volumique et Reg\_surf, région surfacique).

### 5.3 Dérivation des équations de champ-matière

” Tous les phénomènes réversibles ont encore ceci de commun qu'ils obéissent intégralement, comme Helmholtz l'a montré, au principe de moindre action.[...] Or dans le domaine des phénomènes irréversibles, le principe de la moindre action ne suffit plus. ”

#### Max Planck

(Initiation à la Physique. Chapitre premier, partie II, l'unité de la conception de l'univers en Physique, page 21)

Nous envisagerons dans cette section d'appliquer le postulat c pour (5.4) compte tenu des lois de comportement mésoscopiques dynamiques (5.19) et (5.20).

#### 5.3.1 Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange

Nous considérons l'action  $\mathfrak{S}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$  suivante ( $C^n(\Omega)$ : ensemble des fonctions continues et (n+1) fois dérivables sur  $\Omega$ ;  $\ell$  a ici la dimension d'une puissance)

$$\mathfrak{S}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \int \iiint_{\Omega} \ell(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}, \partial_{x_i} \mathbf{u}, i = 1..3) d^3x dt \quad (5.24a)$$

$$\text{avec (i) } \ell \in C^0(\Omega) \quad (5.24b)$$

$$\text{et (ii) } \mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(\Omega), \mathbf{u}(\partial\Omega, t) = \mathbf{u}_0(\partial\Omega, t) \quad (5.24c)$$

On cherche  $\mathbf{u}$  vérifiant (ii), qui réalise un extrémum de  $\mathfrak{S}$ .  $\mathbf{u}$  répond à nos attentes si et seulement si  $\delta\mathfrak{S} = 0$  sous une variation de  $\mathbf{u}$ . Ce qui implique l'équation vectorielle de Euler-Lagrange [GIG\_1] suivante, avec sommation sur les indices répétés  $i$  (la démonstration se trouve dans l'annexe 18)

$$\partial_{\mathbf{u}}\ell - \partial_{x_i}(\partial_{\partial_{x_i}\mathbf{u}}\ell) = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

Si nous nous intéressons maintenant à une dépendance scalaire de l'action  $\mathfrak{S}(\varphi(\mathbf{x}, t))$ , un raisonnement et un calcul rigoureusement équivalents aux précédents permettent d'en déduire l'équation de Euler-Lagrange scalaire suivante

$$\partial_{\varphi}\ell - \partial_{x_i}(\partial_{\partial_{x_i}\varphi}\ell) = 0 \quad (5.26)$$

Etant données les propriétés dynamiques  $\mathbf{E}$  (5.20) et  $\mathbf{H}$  (5.19), faisant intervenir aussi les structures  $[\Lambda_e]$  et  $[\Lambda_h]$  et supposées connues les lois quasi-statiques  $\mathbf{J}(\mathbf{E}_M)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{H}_M)$ ; nos degrés de liberté semblent être  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \partial_t\mathbf{J}, \partial_t\mathbf{B}, [\Lambda_e], [\Lambda_h])$  ou  $(\mathbf{E}_M, \mathbf{H}_M, \partial_t\mathbf{J}, \partial_t\mathbf{B}, [\Lambda_e], [\Lambda_h])$  ou bien encore  $(\mathbf{J}, \mathbf{B}, \partial_t\mathbf{J}, \partial_t\mathbf{B}, [\Lambda_e], [\Lambda_h])$ . Nous verrons que nous pouvons procéder en deux étapes pour réduire ce nombre de degrés de liberté.

- Une première étape consistera à partir du principe de conservation de la charge et du théorème d'Ampère (justifiés à l'aide de raisonnements physiques simples) pour en déduire les deux autres équations de Maxwell. Le degré de liberté étant alors  $\mathbf{H}$  ou  $\mathbf{H}_M$ , les autres maintenus stationnaires (§ 5.3.2) [OLI\_3].
- Une deuxième étape, et façon de voir le problème, est de partir du principe de conservation du flux et de la loi de l'induction, pour en déduire les deux autres équations complémentaires. Le degré de liberté étant alors  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{E}_M$ , les autres maintenus stationnaires (§ 5.3.3).

### 5.3.2 Conservation du flux et loi de l'induction

Nos hypothèses dans cette étape sont la connaissance du comportement magnétique dynamique sur le champ  $\mathbf{H}$  (5.19), de l'action électromagnétique  $\mathfrak{S}$  à minimiser (5.4) et de deux équations de Maxwell justifiées. Considérons une surface  $\partial\Omega$  fermée entourant un volume  $\Omega$ . Un bilan de charges libres de conduction dans  $\Omega$  permet d'affirmer que l'intégrale du flot de charges (donc de la densité de courants  $\mathbf{J}$ ) à travers  $\partial\Omega$  est nulle

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d^2\mathbf{x} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x = 0 \quad (5.27)$$

Ce bilan ne peut être vérifié  $\forall (\Omega, \partial\Omega)$  que si la condition de non-divergence de  $\mathbf{J}$  (appelée conservation des charges libres) est aussi vérifiée

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.28)$$

Dès lors, il existe un vecteur  $\mathbf{H}$  tel que

$$\mathbf{J} = \nabla \wedge \mathbf{H} \quad (5.29)$$

Ce champ  $\mathbf{H}$ , rayonné par la densité de courants  $\mathbf{J}$  est unique et doit coïncider avec le champ magnétique mésoscopique lissé de (5.19). En revanche, il peut s'écrire d'une infinité de façons, chacune n'étant définie qu'à un gradient près dans (5.29). Il existe en effet deux potentiels  $\mathbf{T}$  et  $\Phi$  (l'un vectoriel et l'autre scalaire), qui ne sont pas uniques, tels que

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla\Phi \quad (5.30)$$

$\mathbf{T}$  est le potentiel vecteur électrique,

$\Phi$  est le potentiel scalaire magnétique.

$\forall f(x, t), f \in C^1, \mathbf{T}' = \mathbf{T} + \nabla f$  et  $\Phi' = \Phi + f$  conviennent aussi. L'usage d'une jauge adéquate, conditionnant judicieusement ce couple est alors nécessaire (cf. Jauge de Coulomb [LEF\_1] et chapitre 8 § 8.1). Il existe deux autres potentiels  $\mathbf{T}_M$  et  $\Phi_M$  tels que

$$\mathbf{H}_M = \mathbf{T}_M - \nabla\Phi_M \quad (5.31)$$

$\mathbf{T}_M$  est le potentiel vecteur électrique retardé,

$\Phi_M$  est le potentiel scalaire magnétique retardé.

Tout comme  $\mathbf{T}$  et  $\Phi$ , ces deux potentiels ne sont pas uniques et nécessitent une jauge sur  $\mathbf{T}_M$  (cf. § 8.1). Ce seront nos deux degrés de liberté. La dynamique donnée par (5.19) nous engage à relier  $(\mathbf{T}, \Phi)$  à  $(\mathbf{T}_M, \Phi_M)$  par les deux connections suivantes

$$\mathbf{T} = (1 + \sigma\Lambda_h^2\mu\partial_t(\cdot)) \mathbf{T}_M \quad (5.32a)$$

$$\nabla\Phi = (1 + \sigma\Lambda_h^2\mu\partial_t(\cdot)) \nabla\Phi_M \quad (5.32b)$$

### Maxwell-Gauss

Le principe de conservation du flux et l'équation de Maxwell-Gauss qui lui correspond peuvent être dérivés d'une condition de stationnarité appliquée à  $\mathfrak{S}$  (5.4) vis à vis du potentiel  $\Phi$  à  $\mathbf{T}$  constant

$$\ell = \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} + \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (5.33)$$

Considérant  $\partial_t \mathbf{B}$  stationnaire dans cette étude, l'utilisation de (5.26) pour  $\varphi = \Phi$  donne

$$-\partial_{x_i} (\partial_{\partial_{x_i}} \Phi (-\partial_t B_j \partial_{x_j} \Phi)) = 0 \quad (5.34a)$$

$$\Leftrightarrow \partial_{x_i} \partial_t B_i = 0 \quad (5.34b)$$

Cette condition, duale de (5.28), assure la conservation du flux. Nous pouvons détailler autrement ce principe variationnel, détails qui nous permettent

d'ailleurs de dégager une condition supplémentaire de continuité aux interfaces où la fonction test  $\delta\Phi$  ne respecterait pas un critère fort de nullité (cf. § 8.1). L'utilisation d'une identité vectorielle sur les gradients (voir annexe 12) entraîne

$$\delta\mathfrak{S} = \int \iiint_{\Omega} \delta\Phi \nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} d^3x dt - \int \iint_{\partial\Omega} \delta\Phi (\partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d^2x dt = 0 \quad (5.35)$$

$\Omega$  contient toutes les régions.  $\partial\Omega$  contient la frontière infinie où  $\delta\Phi = 0$ , mais aussi les interfaces en double (orientées dans les deux sens). Le principe de moindre action implique donc à nouveau l'équation de Maxwell-Gauss (5.34a) et la conservation de la composante normale de  $\partial_t \mathbf{B}$  à chaque interface.

### Maxwell-Faraday

La loi de l'induction et l'équation de Maxwell-Faraday qui lui correspond semblent pouvoir être dérivées d'une condition de stationnarité de  $\mathfrak{S}$  vis à vis du potentiel  $\mathbf{T}$  à  $\Phi$  constant ( $\ell$  toujours donné par (5.33)).

$$\delta\ell = \delta(E_k \varepsilon_{kij} \partial_{x_i} T_j + T_j \partial_t B_j) \quad (5.36)$$

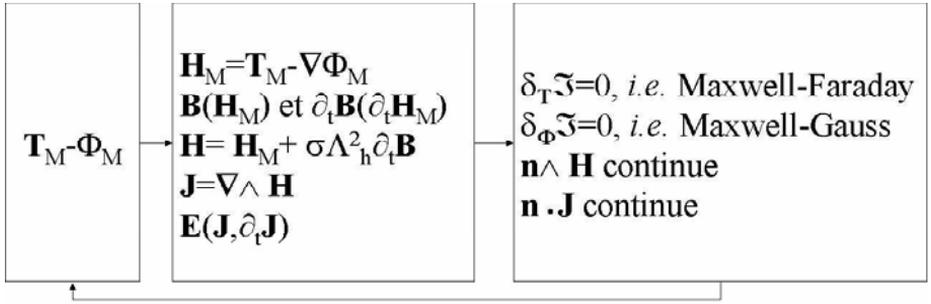
Considérant  $\mathbf{E}$  et  $\partial_t \mathbf{B}$  stationnaires dans cette étude, l'utilisation de (5.25) pour  $\mathbf{u} = \mathbf{T}$  donne

$$\forall j = 1..3, \partial_t B_j + \varepsilon_{jik} \partial_{x_i} E_k = 0 \quad (5.37)$$

C'est l'équation de Maxwell-Faraday qui décrit les phénomènes d'induction dynamique. Le détail du principe variationnel peut nous fournir une information supplémentaire sur la continuité de la composante tangentielle du champ  $\mathbf{E}$  aux interfaces où la fonction test  $\delta\mathbf{T}$  ne respecterait pas un critère contraignant de nullité (cf annexe 12 et § 8.1)

$$\delta\mathfrak{S} = \int \iiint_{\Omega} (\nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}) \delta\mathbf{T} d^3x dt - \int \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) \delta\mathbf{T} d^2x dt = 0 \quad (5.38a)$$

Le principe de moindre action semble donc impliquer l'équation de Maxwell-Faraday (5.37) et la conservation de la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  à chaque interface ( $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$  continue, avec  $\mathbf{n}$  vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$ ). Il peut être discuté le fait d'avoir considéré  $\mathbf{E}$  et  $\partial_t \mathbf{B}$  stationnaires. Il se trouve que les variations possibles correspondantes  $\int \iiint (\nabla \wedge \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \delta\partial_t \mathbf{B}) d^3x dt$  s'annulent *a posteriori* avec l'équation de Maxwell-Ampère (§ 5.3.3).

Figure 5.8: Principe de la formulation  $\mathbf{T}_M - \Phi_M$ .

### Formulation $\mathbf{T}_M - \Phi_M$

Une première formulation électromagnétique, dite  $\mathbf{T}_M - \Phi_M$ , consiste à résoudre les quatre équations de Maxwell en présence des contributions dynamiques et des courants induits. Elle se base sur la résolution "forte" de Maxwell-Ampère et de la non-divergence des courants en écrivant  $\mathbf{H}_M = \mathbf{T}_M - \nabla \Phi_M$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \Phi$ , puis sur la résolution "faible" de Maxwell-Faraday et Maxwell-Gauss par minimisation de la fonctionnelle (cf projection de Galerkin [ARI\_1], § 8.1 et figure 5.8).

### 5.3.3 Conservation des charges et théorème d'Ampère

Nos hypothèses dans cette étape sont la connaissance du comportement dynamique électrique (5.20), de l'action électromagnétique (5.4) et de deux équations de Maxwell justifiées. Considérons une surface  $\partial\Omega$  fermée entourant un volume  $\Omega$ . Un principe de conservation du flux dans  $\Omega$  permet d'affirmer que l'intégrale du flot de charges magnétiques (donc de la densité de courants  $\partial_t \mathbf{B}$ ) à travers  $\partial\Omega$  est nulle

$$\iint_{\partial\Omega} \partial_t \mathbf{B} \cdot d^2 \mathbf{x} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} d^3 x = 0 \quad (5.39)$$

Ce bilan ne peut être vérifié  $\forall (\Omega, \partial\Omega)$  que si la condition de non-divergence de  $\partial_t \mathbf{B}$  (aussi appelée conservation du flux ou équation de Maxwell-Gauss sur  $\partial_t \mathbf{B}$ ) est aussi vérifiée

$$\nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (5.40)$$

Dès lors, il existe un vecteur  $\mathbf{E}$  tel que

$$\partial_t \mathbf{B} = - \nabla \wedge \mathbf{E} \quad (5.41)$$

Ce champ  $\mathbf{E}$ , induit par les variations d'induction  $\partial_t \mathbf{B}$ , est unique et doit coïncider avec le champ électrique mésoscopique lissé de (5.20). En revanche, il

peut s'écrire d'une infinité de façons, chacune n'étant définie qu'à un gradient près dans (5.41). Il existe en effet deux potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\Psi$  (l'un vectoriel et l'autre scalaire), qui ne sont pas uniques, tels que

$$\mathbf{E} = -(\partial_t \mathbf{A} + \nabla \Psi) \quad (5.42)$$

$\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur magnétique,

$\Psi$  est le potentiel scalaire électrique.

$\forall g(x, t), g \in C^1, \partial_t \mathbf{A}' = \partial_t \mathbf{A} - \nabla g$  et  $\Psi' = \Psi + g$  conviennent aussi. L'usage d'une jauge adéquate, conditionnant judicieusement ce couple est alors nécessaire (cf. Jauge de Coulomb [LEF\_1] et chapitre 8 § 8.3). Il existe deux autres potentiels  $\mathbf{A}_M$  et  $\Psi_M$  tels que

$$\mathbf{E}_M = -(\partial_t \mathbf{A}_M + \nabla \Psi_M) \quad (5.43)$$

$\mathbf{A}_M$  est le potentiel vecteur magnétique retardé,

$\Psi_M$  est le potentiel scalaire électrique retardé.

Tout comme  $\mathbf{A}$  et  $\Psi$ , ces deux potentiels ne sont pas uniques et nécessitent une jauge sur  $\mathbf{A}_M$  (cf. § 8.3). Ce seront nos deux degrés de liberté. La dynamique donnée par (5.20) nous engage à relier  $(\mathbf{A}, \Psi)$  à  $(\mathbf{A}_M, \Psi_M)$  par les deux connections suivantes

$$\partial_t \mathbf{A} = (1 + \mu \Lambda_e^2 \sigma \partial_t (\cdot)) \partial_t \mathbf{A}_M \quad (5.44)$$

$$\nabla \Psi = (1 + \mu \Lambda_e^2 \sigma \partial_t (\cdot)) \nabla \Psi_M \quad (5.45)$$

### Conservation de la charge

Le principe de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Ampère qui lui correspond semblent pouvoir être dérivés d'une condition de stationnarité de (5.4) vis à vis du potentiel  $\Psi$  à  $\mathbf{A}$  constant

$$\ell = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} \quad (5.46)$$

Considérant  $\mathbf{J}$  stationnaire dans cette étude, l'application de (5.26) pour  $\varphi = \Psi$  donne

$$-\partial_{x_i} (\partial_{\partial_{x_i}} \Psi (-J_j \partial_{x_j} \Psi)) = 0 \quad (5.47a)$$

$$\Leftrightarrow \partial_{x_i} J_i = 0 \quad (5.47b)$$

Cette condition, identique à (5.28), assure la conservation des charges. Elle semble pouvoir être déduite de deux principes physiques complémentaires: Bilan de charges ou principe de moindre action. Le détail du principe variationnel peut nous fournir une information supplémentaire sur la continuité de la composante normale de la densité de courants libres aux interfaces (cf § 8.3)

$$\delta\mathfrak{S} = \int \iiint_{\Omega} \delta\Psi \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x dt - \int \iint_{\partial\Omega} \delta\Psi (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) d^2x dt = 0 \quad (5.48)$$

Le principe de moindre action semble donc impliquer la conservation des charges et aussi naturellement de la composante normale de  $\mathbf{J}$  à chaque interface. Remarquons que tout comme pour  $\partial_t \mathbf{B}$ , cette conservation peut-être retrouvée à l'aide d'un calcul de limite sur les conditions de non-divergence appliquées à un volume élémentaire contenant un élément de surface de la frontière.

### Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère et l'équation de Maxwell-Ampère qui lui correspond peuvent-être dérivés d'une condition de stationnarité de (5.4) vis à vis du potentiel  $\partial_t \mathbf{A}$  à  $\Psi$  constant ( $\ell$  toujours donnée par (5.46))

$$\delta\ell = \delta(-J_j \partial_t A_j + H_k \varepsilon_{kij} \partial_{x_i} \partial_t A_j) \quad (5.49)$$

Considérant  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$  stationnaires dans cette étude, l'application de (5.25) pour  $\mathbf{u} = \partial_t \mathbf{A}$  donne

$$\forall j = 1..3, J_j - \varepsilon_{jik} \partial_{x_i} H_k = 0 \quad (5.50)$$

C'est l'équation de Maxwell-Ampère qui exprime le rayonnement d'un champ  $\mathbf{H}$  par la densité de courants  $\mathbf{J}$ . Le détail du principe variationnel fournit une information supplémentaire sur la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique  $\mathbf{H}$  aux interfaces

$$\delta\mathfrak{S} = \int \iiint_{\Omega} (\nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{J}) \delta\partial_t \mathbf{A} d^3x dt - \int \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) \delta\partial_t \mathbf{A} d^2x dt = 0 \quad (5.51)$$

Le principe variationnel implique donc à nouveau l'équation de Maxwell-Ampère (5.29) et la conservation de la composante tangentielle du champ magnétique  $\mathbf{H}$  à chaque interface ( $\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}$  continue, avec  $\mathbf{n}$  vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$ ). Il peut-être discuté le fait d'avoir considéré  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$  stationnaires. Il se trouve que les variations possibles correspondantes  $\int \iiint (\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{J} - \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{H}) d^3x dt$  s'annulent *a posteriori* avec l'équation de Maxwell-Faraday (§ 5.3.2).

### Formulation $\mathbf{A}_M - \Psi_M$

Une deuxième formulation électromagnétique, dite  $\mathbf{A}_M - \Psi_M$ , consiste finalement à résoudre les quatre équations de Maxwell en présence des contributions

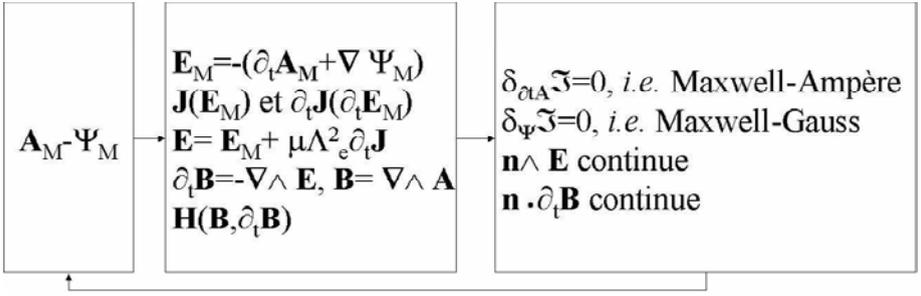


Figure 5.9: Principe de la formulation  $\mathbf{A}_M - \Psi_M$ .

dynamiques et des courants induits. Elle se base sur la résolution "forte" de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Gauss en écrivant  $\mathbf{E}_M = -(\partial_t \mathbf{A}_M + \nabla \Psi_M)$  et  $\mathbf{E} = -(\partial_t \mathbf{A} + \nabla \Psi)$ , puis sur la résolution "faible" de Maxwell-Ampère et de la non-divergence des courants libres par minimisation de la fonctionnelle  $\mathfrak{S}$  (cf projection de Galerkin [ARI\_1], § 8.3 et figure 5.9).

### 5.3.4 Degré de liberté structurel

Il s'agit de ré-étudier dans ce paragraphe l'application du postulat c sur la formulation énergétique de structuration magnétostatique (5.8). Nous précisons et interpréterons plus en avant l'action des différentes tendances et nous proposerons un mode d'application et une exploitation possible. Enfin, nous critiquerons vivement cette description audacieuse et incertaine. On se propose donc ici d'étudier l'ensemble énergie d'échange et énergie d'anisotropie mésoscopiques sous une variation du tenseur  $[\frac{1}{\Lambda^2}] = [\Lambda^2]^{-1}$ . Avec certaines notations tensorielles particulières (pour  $[\mathbf{n}]$ ,  $\boxtimes$ ,  $[\nabla \wedge]$ ,  $\nabla \cdot [\bullet]$  et  $[\Delta]$ , voir l'annexe 11) et les identités usuelles (annexe 12), on peut montrer l'égalité suivante

$$\delta \mathfrak{S}_m = \iiint_{\Omega} 2 \left( C_{ex} \frac{\gamma_w^6}{K_{an}^5} [\nabla \wedge] [\nabla \wedge] \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] + C_{an} \frac{\gamma_w^4}{K_{an}^3} \left( \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] - \left( \frac{\mathbf{K}_{an} \left( \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right]^{-1} \mathbf{K}_{an} \right)^T}{K_{an}^2} \right)^T \right) \right) \overleftrightarrow{\odot} \delta \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] d^3x - \iint_{\partial \Omega} 2 C_{ex} \frac{\gamma_w^6}{K_{an}^5} \left( [\mathbf{n}] \boxtimes [\nabla \wedge] \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] \right) \overleftrightarrow{\odot} \delta \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] d^2\mathbf{x} \quad (5.52)$$

Le principe de moindre action sur  $\mathfrak{S}_m$  semble donc indiquer deux informations intéressantes:

- La propriété tensorielle structurelle "diffuse" ou se "développe" dans  $\Omega$  suivant l'équation aux dérivées partielles (4.62), où les constantes dépendent de la nature du matériau (diverses provenances cristallographiques et

métallographiques). Son interprétation a été donnée au § 4.3.3 (cf équation (4.62) et texte joint).

- La matrice  $\left( C_{ex} \frac{\gamma_w^6}{K_{an}^3} [\mathbf{n}] \boxtimes [\nabla \wedge] \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] \right)$  se conserve aux interfaces de  $\partial\Omega$ . Elle est inexistente dans tout matériau dépourvu de domaines et parois, elle s'annulera donc aussi à la frontière entre un tel matériau classique et un matériau structuré. Cette condition indique que les variations "rotationnelles" de la structure s'annulent tangentiellement à la surface extérieure.

L'ennui de cette équation déterministe, mis à part son déterminisme discutable justement, est sa nature tensorielle avec beaucoup d'inconnues (au maximum 9). Heureusement, d'autres études (§ 4.3.2 et équations (4.55a) et suivantes) montrent que  $[\Lambda^2]$  sera probablement symétrique; ce qui réduit à 6 le nombre d'inconnues. Cependant, son application ou implémentation n'est pas beaucoup différente d'une équation de diffusion classique, il s'agit en fait d'en résoudre trois simultanément. Enfin, un seul calcul d'hétérogénéité relative pourrait peut-être suffir dans certains cas.

En supposant que le matériau ait réussi à minimiser sa création surfacique de charges magnéostatiques, en orientant ses domaines et ses parois tangentiellement à cette surface, ou en les multipliant, nous avons aussi

$$\iint_{\partial\Omega} [\Lambda^2] \vec{\odot} [\mathbf{n}] d^2\mathbf{x} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot [\Lambda^2] d^3x = \mathbf{0} \quad (5.53a)$$

$$\nabla \cdot [\Lambda^2] = \mathbf{0} \quad (5.53b)$$

A l'aide d'identités tensorielles et vectorielles (voir annexe 12) remarquables, l'équation de structuration magnéostatique mésoscopique (4.62) devient

$$[\Delta] \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] - \frac{C_{an}}{C_{ex}} \left( \frac{K_{an}}{\gamma_w} \right)^2 \left( \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] - \left( \frac{\mathbf{K}_{an} \left( \left[ \frac{1}{\Lambda^2} \right] \mathbf{K}_{an} \right)^T}{K_{an}^2} \right)^T \right) = [0] \quad (5.54)$$

Pour ce qui est du déterminisme, nous dirons que ce formalisme ne se destine qu'aux objets macroscopiques pour lesquels la notion de propriété homogénéisée a un sens (taille de l'objet  $\gg$  taille des domaines, sauf à saturation). Nous ne calculons alors pas la structure exacte mais sa moyenne spatiale et statistique et surtout ses propriétés mélangées concernant sa "mobilité", ses "dimensions caractéristiques", ses "orientations privilégiées", ... Cette description peut-être intéressante dans la prospection théorique de la structuration magnétique des matériaux et des conséquences en termes de pertes et de comportements macroscopiques (Ingénierie Matériaux).

## 5.4 Relations entre deux Milieux

Nous avons vu à la section précédente (§ 5.3.2 et 5.3.3) que la résolution des équations de Maxwell s'accompagne généralement toujours de conditions limites

imposées, soit sur les limites du domaine d'étude (frontière "infinie"), soit sur les frontières et interfaces entre deux régions différentes. Il s'agit en effet de vérifier certaines conditions de continuité sur les différents champs au niveau de ces interfaces; celles-ci étant issues du principe de moindre action, et ayant une signification précise.

### 5.4.1 Champs magnétiques et courants

#### Champs magnétiques

La résolution en  $\mathbf{T}_M - \Phi_M$  assure fortement le théorème d'Ampère en volume, mais elle doit tout de même s'assurer des conditions de continuité correspondantes aux interfaces. L'une d'entre-elles est la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique  $\mathbf{H}$  (§ 5.3.3). Cette équation doit être exprimée à l'aide des inconnues du problème, en l'occurrence  $\mathbf{T}_M$  et  $\Phi_M$  ici

$$\{\mathbf{n} \wedge ((1 + \sigma \Lambda_h^2 \mu \partial_t (\cdot)) (\mathbf{T}_M - \nabla \Phi_M))\} \text{ continue} \quad (5.55)$$

On aura souvent  $\Lambda_h = 0$  dans l'une des deux régions frontalières (air ou région non magnétique); et dans ce cas  $\mathbf{T}_M$  et  $\Phi_M$  coïncident dans cette région avec les potentiels totaux  $\mathbf{T}$  et  $\Phi$  vérifiant  $\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \Phi$ . Remarquons pour terminer que cette continuité sur  $\mathbf{H}$  et non sur  $\mathbf{H}_M$  n'est pas anodine lorsqu'on sait que  $\mathbf{H}$  résulte du lissage de  $\mathbf{h}$ , superposition des champs rayonnés réduite du pic de champ d'opposition lié à la paroi la plus proche.

#### Courants de conduction

L'autre condition porte sur la composante normale des densités de courants électriques aux interfaces. Rappelons que cette densité de courants libres  $\mathbf{J}$  doit rester conservative à la traversée normale d'une surface (§ 5.3.3). Cette condition s'exprime en fonction de  $\mathbf{T}_M$

$$\{\mathbf{n} \cdot (\nabla \wedge ((1 + \sigma \Lambda_h^2 \mu \partial_t (\cdot)) \mathbf{T}_M))\} \text{ continue} \quad (5.56)$$

Nous pouvons utiliser une identité vectorielle (cf annexe 12); et on montre qu'en imposant  $\mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{T} = \mathbf{0}$  à l'interface, on assure la continuité désirée. Nous avons alors en effet  $(\nabla \wedge \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{T} = 0$  et  $\nabla \cdot (\mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{T}) = 0$  qui sont automatiquement vérifiées. La relation qui convient bien est alors

$$\{\mathbf{n} \wedge ((1 + \sigma \Lambda_h^2 \mu \partial_t (\cdot)) \mathbf{T}_M)\} \text{ continue} \quad (5.57)$$

Cette nouvelle condition étant assurée, elle simplifit du coup celle à imposer (5.55) sur le champ  $\mathbf{H}$

$$\{-\mathbf{n} \wedge ((1 + \sigma \Lambda_h^2 \mu \partial_t (\cdot)) \nabla \Phi_M)\} \text{ continue} \quad (5.58)$$

(5.57) et (5.58) seront nos deux équations de couplage à l'interface entre deux milieux pour assurer les bonnes continuités des champs et courants avec la formulation  $\mathbf{T}_M - \Phi_M$ .

Dans le cas où l'un des deux matériaux n'est pas magnétique mais conducteur, les conditions sont

$$\mathbf{n} \wedge \{ \mathbf{T} - (1 + \sigma \Lambda_h^2 \mu \partial_t (\cdot)) \mathbf{T}_M \} = \mathbf{0} \quad (5.59a)$$

$$-\mathbf{n} \wedge \{ \nabla \Phi - (1 + \sigma \Lambda_h^2 \mu \partial_t (\cdot)) \nabla \Phi_M \} = \mathbf{0} \quad (5.59b)$$

Dans le cas où l'un des deux n'est pas conducteur on a alors  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{0}$ . C'est le cas par exemple entre le fer et l'air. On force  $\mathbf{T}$  à être normal à la surface, et on montre que ça force alors  $\mathbf{T}_M$  ( $\mathbf{n} \wedge \mathbf{T}_M = \mathbf{0}$ ) à l'être aussi rapidement (hors mouvement et anisotropie superficielle, sinon il faut *a priori* garder  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{0}$ ).

## 5.4.2 Champs électriques et inductions

### Champs électriques

La résolution en  $\mathbf{A}_M - \Psi_M$  impose "fortement" l'équation de Maxwell-Faraday en volume, mais elle doit tout de même s'assurer des conditions de continuité correspondantes aux interfaces. L'une d'entre elles est la continuité de la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  (§ 5.3.2). Cette condition doit être exprimée en fonction des inconnues du problème, en l'occurrence  $\mathbf{A}_M$  et  $\Psi_M$  ici

$$\{ -\mathbf{n} \wedge ((1 + \mu \Lambda_e^2 \sigma \partial_t (\cdot)) (\partial_t \mathbf{A}_M + \nabla \Psi_M)) \} \text{ continue} \quad (5.60)$$

On aura souvent  $\Lambda_e = 0$  dans l'une des deux régions frontalières (air ou région non porteuse de cette propriété, parfois magnétique aussi); et dans ce cas  $\mathbf{A}_M$  et  $\Psi_M$  coïncident avec  $\mathbf{A}$  et  $\Psi$ . Si les deux régions ne portent pas de propriété dynamique électrique  $\Lambda_e$ , alors  $\{ -\mathbf{n} \wedge (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \Psi) \}$  est simplement continue. Remarquons enfin que cette continuité sur  $\mathbf{E}$  et non sur  $\mathbf{E}_M$  (qui ne l'est que si  $\Lambda_e = 0$ ) n'est pas anodine, lorsqu'on sait que  $\mathbf{E}$  résulte du lissage de  $\mathbf{e}$ , superposition des champs induits réduite du pic de champ dynamique électrique lié au vortex inductif le plus proche.

### Inductions

L'autre condition porte sur la composante normale de l'induction aux interfaces (§ 5.3.2). La densité de flux dérivée  $\partial_t \mathbf{B}$  doit être conservative à la traversée normale d'une surface. Cette condition s'exprime en fonction de  $\mathbf{A}_M$

$$\{ \mathbf{n} \cdot (\nabla \wedge ((1 + \mu \Lambda_e^2 \sigma \partial_t (\cdot)) \partial_t \mathbf{A}_M)) \} \text{ continue} \quad (5.61)$$

Nous pouvons utiliser une identité vectorielle (cf annexe 12); et on montre qu'en imposant  $\mathbf{n} \wedge \delta \partial_t \mathbf{A} = \mathbf{0}$  à l'interface, on assure la continuité désirée. Nous avons alors en effet  $(\nabla \wedge \mathbf{n}) \cdot \delta \partial_t \mathbf{A} = 0$  et  $\nabla \cdot (\mathbf{n} \wedge \delta \partial_t \mathbf{A}) = 0$  qui sont automatiquement vérifiées. La relation qui convient bien est alors

$$\{ \mathbf{n} \wedge ((1 + \mu \Lambda_e^2 \sigma \partial_t (\cdot)) \partial_t \mathbf{A}_M) \} \text{ continue} \quad (5.62)$$

Cette nouvelle condition étant assurée, elle simplifit du coup celle à imposer (5.60) sur le champ  $\mathbf{E}$

$$\{-\mathbf{n} \wedge ((1 + \mu\Lambda_e^2\sigma\partial_t(\cdot)) \nabla\Psi_M)\} \text{ continue} \quad (5.63)$$

(5.62) et (5.63) seront nos deux équations de couplage à l'interface entre deux milieux pour assurer les bonnes continuités des champs et courants avec la formulation  $\mathbf{A}_M - \Psi_M$ .

Dans le cas où l'un des deux matériaux n'est pas magnétique-électrique mais conducteur, les conditions sont

$$\mathbf{n} \wedge \{\partial_t\mathbf{A} - (1 + \mu\Lambda_e^2\sigma\partial_t(\cdot)) \partial_t\mathbf{A}_M\} = \mathbf{0} \quad (5.64a)$$

$$\mathbf{n} \wedge \{\nabla\Psi - (1 + \mu\Lambda_e^2\sigma\partial_t(\cdot)) \nabla\Psi_M\} = \mathbf{0} \quad (5.64b)$$

Dans le cas où l'un des deux n'est pas conducteur ( $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow -\mathbf{n} \cdot \sigma\{\partial_t\mathbf{A} + \nabla\Psi\} = 0$ ), on a alors aussi

$$\mathbf{n} \cdot \{\partial_t\mathbf{A}_M + \nabla\Psi_M\} = 0 \quad (5.65)$$

## 5.5 Prise en compte de l'hystérésis statique

Toutes les études et formulations ont été proposées en se focalisant sur les propriétés dynamiques et en supposant toutes les informations anhystérétiques et quasi-statiques contenues dans les champs et potentiels indicés M. Il est parfaitement envisageable d'adapter simplement toutes les écritures de ce chapitre, en particulier les relations aux interfaces, en y intégrant un modèle d'hystérésis statique

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_M(\mathbf{B}) + \mathbf{H}_s(\mathbf{B}) + \mathbf{H}_{dyn}(\mathbf{B}, \partial_t\mathbf{B}) \quad (5.66)$$

Les potentiels indicés M utilisés seront cette fois définis à partir du champ anhystérétique lui aussi indicé M.

## 5.6 Calcul des observables macroscopiques

L'objectif premier, avec l'une ou l'autre des deux formulations, est de pouvoir, à l'aide des cartes spatio-temporelles des potentiels, calculer tous les champs électromagnétiques en tout point et à tout instant, compte tenu à la fois de la physique imposée par les équations de Maxwell, de celle imposée par l'interaction avec la matière "dynamique", et enfin de la géométrie macroscopique du système étudié. Ces formulations seront en général dédiées aux matériaux magnétiques et conducteurs plus spécialement (ou aux matériaux doux adoptant des structurations magnétiques et/ou électriques analogues), et couplées à d'autres formulations pour les autres régions ( $\mathbf{T} - \Phi$ ,  $\mathbf{T}_0 - \mathbf{T} - \Phi$ ,  $\mathbf{T}_0 - \Phi$ ,  $\Phi$ , ... [LEF\_2], [MEU\_3], [REN\_1], [BIR\_1]). L'intérêt de cette démarche réside



Le théorème du rotationnel (ou de Stokes, cf annexe 12) permet d'écrire finalement

$$U = - \iint_{\Sigma} \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}^2 \mathbf{x} = - \iint_{\Sigma} \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d^2 \Sigma \quad (5.69)$$

On retrouve que la tension mesurée est proportionnelle à l'opposée du flux à travers  $\Sigma$  (surface encerclée par la boucle  $L$  de mesure,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$ ) de la dérivée de l'induction (Rq: cette dérivation ne peut s'exprimer aussi simplement que si le circuit est fixe), où  $\partial_t \mathbf{B} = \nabla \wedge \partial_t \mathbf{A}$ .

### 5.6.2 Pertes énergétiques

Une tension ne peut-être mesurée au "secondaire" que si elle a été induite, donc que si l'opérateur décide de faire varier l'excitation du "primaire". En imposant cette variation plus ou moins rapide, des courants de Foucault (et donc des pertes) et de l'aimantation (et donc de l'énergie magnétisante perdue ou utile) seront induits dans l'échantillon de matière qui est conducteur. Nous connaissons déjà l'expression de cette énergie totale absorbée en fonction des champs, puisqu'elle fut le point de départ et la matière de l'action et de la création d'entropie que nous souhaitons minimiser (5.4). La puissance absorbée instantanée s'écrit donc comme la somme d'une puissance électrique  $\Pi_{eddy} = \iiint_{\Omega} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3 x$  (fournit la puissance électrisante et les pertes Joule des courants induits) et d'une puissance magnétique  $\Pi_{eddy} = \iiint_{\Omega} (\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}) d^3 x$  (fournit la puissance magnétisante et les pertes par hystérésis dynamique)

$$\Pi(t) = \iiint_{\Omega} (\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) d^3 x \quad (5.70)$$

On peut préciser l'interprétation de cette expression à l'aide des équations de Maxwell,  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$ . On note  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$  le vecteur de Poynting [JAC\_1] qui informe justement à la fois sur la direction de propagation et la valeur de la puissance électromagnétique. Alors (5.70) devient

$$\Pi(t) = - \iint_{\partial \Omega} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}^2 \mathbf{x} \quad (5.71)$$

La puissance instantanée absorbée dans  $\Omega$  ajoutée de la puissance sortante à travers  $\partial \Omega$  doit s'annuler par simple conservation de l'énergie.

### 5.6.3 Introduction du mouvement et force

Outre les mesures de tension ou de puissance absorbée, on peut aussi mesurer des déplacements de pièces dus à des forces électromagnétiques. En présence de ce mouvement du référentiel  $R'$  lié à l'objet mobile considéré, à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans  $R$  (référentiel du laboratoire), l'expression de la puissance absorbée dans  $R'$  puis  $R$  après transformation de Galilée (laissant invariantes les équations de Maxwell [LAV\_1] et les relations de comportement entre champs) devient (à l'aide des

Propriétés	Champs
$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= \boldsymbol{\mu} \partial_t (\mathbf{H} - \sigma \Lambda_b^2 \partial_t \mathbf{B}) \\ \partial_t \mathbf{J} &= \boldsymbol{\sigma} \partial_t (\mathbf{E} - \mu \Lambda_e^2 \partial_t \mathbf{J}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} &= 0 \text{ et } \nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \text{ et } \nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{J} = \mathbf{0} \end{aligned}$
$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= \boldsymbol{\mu} \partial_t (\mathbf{H} - \sigma \Lambda^2 \partial_t \mathbf{B}) \\ \mathbf{E} &= \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{J} + \nabla \wedge (\sigma \Lambda^2 \partial_t \mathbf{B})) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} &= 0 \text{ et } \nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \text{ et } \nabla \wedge (\mathbf{H} - \sigma \Lambda^2 \partial_t \mathbf{B}) - \mathbf{J} = \mathbf{0} \end{aligned}$

Tableau 5.1: Deux options pour l'introduction de la dynamique: les deux dernières lignes correspondent à une autre proposition discutée dans notre groupe de travail

transformations vectorielles de l'annexe 12, et sans déformation. L'intégration peut s'effectuer dans tout ensemble (air+mobile), (air+mobile+bobine), ...)

$$\begin{aligned} \Pi' (t)_{R'} &= \iiint_{\Omega'} (\mathbf{J} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{H} \cdot (\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B})) d^3x \\ \Leftrightarrow \Pi (t)_R &= \Pi' (t)_{R'} - \iiint_{\Omega} (\mathbf{H} \cdot ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B})) d^3x \quad (5.72) \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à la puissance effectivement perdue et cédée à la matière pour réaliser la dynamique d'aimantation. L'invariance Galiléenne impose à la deuxième intégrale de s'annuler. Chacun des deux derniers termes exprime la puissance de la force électromagnétique qui a permis le déplacement  $d\mathbf{x}$  à la vitesse  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  pendant  $dt$ . D'ailleurs, dans le cas où toute l'énergie se concentre dans la zone d'air parcourue lors du déplacement  $d\mathbf{x}$ , on retrouve l'expression classique de la force en  $\frac{1}{2}BHS$  ( $S$  étant la surface intersectée).

## 5.7 Discussions et limitations

Il subsiste encore aujourd'hui quelques controverses sur le sens, la provenance physique et le choix d'écriture et d'intégration dans les équations de champ de ces propriétés dynamiques. Certains auteurs les introduisent différemment [MAZ\_4]. Le tableau 5.1 permet de récapituler les différentes propositions ou options avec leurs hypothèses, définitions et différences.

Les désaccords se situent essentiellement au niveau de l'expression des lois de comportement et de leur intégration dans les équations de champs électromagnétiques d'une part; et de la signification donnée aux courants libres ou "liés" et aux champs macroscopique ou local d'autre part [MAZ\_4]. Les signes peuvent se justifier à l'aide d'un principe de causalité [JAC\_1].

*" Un principe extrémal n'est pas une loi causale, sinon le processus serait défini à partir de son seul état initial, il ne permet pas de reconnaître le passé de l'avenir: on dit qu'il ne définit pas de flèche du temps "*

**Georges Lochak**

(Géométrisation de la Physique)

Toutes les descriptions et formulations précédentes ne s'appliquent qu'aux objets macroscopiques ferromagnétiques doux, en représentant d'une manière *a priori* simple leur comportement dynamique et leurs pertes induites. C'est le concept de champ qui rend compte de l'action causale (phrase de Georges Lochak également). Les effets mémoire dûs à l'hystérésis statique n'ont été qu'évités (chapitre 1), mais pourraient s'intégrer, via un modèle existant (Jiles-Atherton, Stoner-Wohlfarth, Preisach, Nouredine, ...etc.... § 1.3.1) dans les formulations. On peut finalement imaginer utiliser ces modèles pour les matériaux où l'hystérésis statique acquiert plus d'importance (comme c'est le cas pour les matériaux dits doux à très basse fréquence). Cette hystérésis peut être identifiée sous un régime de fonctionnement quasi-statique ( $\partial_t \rightarrow 0$ ). Enfin, les expressions ainsi réduites à leur plus simple forme, resteront dédiées à un domaine en fréquence restreint aux "basses" fréquences usuelles de l'Electrotechnique pour lesquelles l'épaisseur de peau est du même ordre de grandeur que la taille caractéristique de l'objet, et surtout pour lesquelles la notion de diffusion reste plus pertinente que la notion de propagation.

## 5.8 Conclusion

Après avoir introduit des fonctionnelles énergétiques représentatives de l'action d'un champ dans la matière d'une part, et des tendances naturelles d'organisation plus ou moins hétérogènes des domaines et des parois d'autre part; nous avons entrepris de moyenniser et de lisser les distributions irrégulières de champs depuis l'échelle microscopique jusqu'à l'échelle mésoscopique. Un modèle de données intégrant les propriétés structurelles dynamiques a été proposé. Ensuite nous avons tenté de dériver les équations d'évolution des champs dans la matière à l'aide d'un principe variationnel. Certains potentiels réduits ou retardés ont été définis et les relations entre deux milieux différents précisées. Enfin, nous avons proposé des expressions générales utilisables dans le calcul des observables macroscopiques.

## Partie IV

# Entreprises Analytiques et Métrologiques



*” C’est dans cette vie propre des structures et des formules que résident à la fois la force des mathématiques et leur danger. La force est évidente, le danger l’est moins ; il consiste à prendre la proie pour l’ombre. La proie, c’est la nature ; la théorie n’en est que l’ombre, fragile, changeante, sujette à révision, toujours sous la menace d’une idée ou d’une expérience nouvelle, elle n’est, comme disait Einstein, ” qu’une question posée à l’expérience ”. Les mathématiques sont le squelette de l’ombre ”*

**Georges Lochak**

(La géométrisation de la Physique, Flammarion, 1994)



## Chapitre 6

# Méthodes Analytiques

*” Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines ; et pour autant qu’elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité ”*

**Albert Einstein**

(L’Ether et la théorie de la relativité : la géométrie et l’expérience,  
Gauthier-Villars, Paris, 1953)

Dans ce chapitre, nous introduirons des équations dites de "diffusion retardée", dédiées à l'interaction entre les champs électromagnétiques et les matériaux doux de l'Electrotechnique. Ces équations seront la base de premiers calculs analytiques illustrant les notions d'hystérésis dynamique et de pertes induites. Nous insisterons alors sur le caractère passe-bas de ces matériaux. Avant le développement de ces calculs en une puis deux dimensions, dans le cas où la fréquence reste suffisamment faible pour que l'épaisseur de peau soit du même ordre de grandeur que la taille de l'objet, nous proposerons la résolution de cas simples dans l'autre cas, où cette épaisseur de peau est très faible devant la taille de l'objet, grâce à des équivalences Ampérienne et Coulombienne, mettant en jeu des courants et charges magnétiques ou électriques surfaciques [TRE\_1].

## 6.1 Equations de diffusion retardée

### 6.1.1 Formulation en champ magnétique

A l'aide des équations de Maxwell mésoscopiques et des lois de comportement dynamique et statique ((5.29) et (5.41) pour les équations de Maxwell, (5.19) et (5.20) pour les propriétés, et dans l'ordre (5.19), (5.29), (5.20) puis (5.41)); nous pouvons en déduire une équation de type diffusion portant sur le champ magnétique  $\mathbf{H}_M$  et susceptible de rendre possible sa détermination dans l'espace et le temps, moyennant la connaissance des conditions aux limites du domaine d'étude.

$$\nabla \wedge ((1 + \mu\Lambda_e^2\sigma\partial_t) \sigma_s^{-1} \nabla \wedge ((1 + \sigma\Lambda_h^2\mu\partial_t) \mathbf{H}_M)) + \mu\partial_t \mathbf{H}_M = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

$\mu$  est la perméabilité magnétique statique différentielle,  $\sigma$  est la conductivité électrique statique différentielle,  $\mu_s$  est la perméabilité magnétique statique,  $\sigma_s$  est la conductivité électrique statique,  $\Lambda_h$  est la propriété dynamique de structure magnétique,  $\Lambda_e$  est la propriété dynamique de structure électrique. Pour les calculs analytiques, nous supposons un fonctionnement linéaire où propriétés statiques et statiques différentielles sont égales (propriétés constantes).

L'adjectif "retardée" provient de l'implication des contributions dynamiques en  $\partial_t \mathbf{J}$  ou  $\partial_t \mathbf{B}$  qui amortissent (ou retardent) l'établissement de la densité de courants  $\mathbf{J}$  (6.2), respectivement de l'induction  $\mathbf{B}$  (6.3). Ceci peut s'illustrer à l'aide de la figure 6.1.

$$\mathbf{J} = \sigma_s (\mathbf{E} - \mu\Lambda_e^2\partial_t \mathbf{J}) \quad (6.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu_s (\mathbf{H} - \sigma\Lambda_h^2\partial_t \mathbf{B}) \quad (6.3)$$

Remarquons enfin que ces termes dynamiques font intervenir des produits mixtes d'opérateurs différentiels dans l'espace et le temps:  $\nabla \wedge$  et  $\partial_t$ . Les deux variables d'évolution ne sont plus séparées, comme dans les équations de diffusion classique; et ce "couplage" est du aux structures magnétiques  $\Lambda_h$  et  $\Lambda_e$ . Cette non séparation est à opposer au principe introduit au § 1.2.1 partie II. Nous proposons ici une description couplée directe ne séparant ni les propriétés statiques ( $\mu$ ,  $\sigma$ ) et dynamiques ( $\Lambda_h$ ,  $\Lambda_e$ ); ni l'espace ( $\nabla \wedge$ ) et le temps ( $\partial_t$ ). Malheureusement, ceci nous apportera des difficultés supplémentaires de résolution analytique (les variables d'espace-temps ne sont plus séparables) et numérique (certains potentiels réduits utilisés ne sont plus continus et les matrices non diagonales et hermitiques). En pratique, nous résoudrons (6.1) sur des géométries simples à une dimension (§ 6.2) ou à deux dimensions (§ 6.3). De plus, nous nous contentons d'une seule propriété ( $\Lambda_h$ ) dans un premier temps; celle qui correspond plus vraisemblablement au réel comportement observé sur des matériaux magnétiques doux classiques à base de Fer, de Nickel ou de Cobalt. Une prise en compte de l'autre propriété ( $\Lambda_e$ ), et de possibles variations structurelles de surface, sera malgré tout envisagée au § 6.2.4.

### 6.1.2 Formulation en champ électrique

De manière rigoureusement équivalente, nous pouvons déduire, des mêmes équations de Maxwell et des mêmes comportements dynamiques ((5.20), (5.41), (5.19) puis (5.29)), l'équation de type diffusion portant sur le champ électrique classique  $\mathbf{E}_M$

$$\nabla \wedge ((\mu^{-1} + \partial_t (\sigma \Lambda_h^2 \cdot)) \nabla \wedge ((1 + \mu \Lambda_e^2 \sigma \partial_t \cdot) \mathbf{E}_M)) + \sigma \partial_t \mathbf{E}_M = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

### 6.1.3 Equivalences Ampérienne et Coulombienne

Les descriptions précédentes et les équations de "diffusion retardée" seront utilisables et pertinentes pour des objets et des fréquences tels que l'épaisseur de peau  $\delta$ , ou de pénétration du champ, est comparable à la taille  $D$  de l'objet (une discussion supplémentaire sera engagée en 6.2 pour spécifier plus loin le domaine de validité en fréquence et en  $\delta$  avec les évolutions spatiales des propriétés  $\Lambda_e$  et  $\Lambda_h$ ). Lorsque la fréquence est si élevée que l'épaisseur de peau est très faible et négligeable devant les dimensions caractéristiques de l'objet; un calcul de diffusion devient obsolète et nous proposons alors d'étudier ce cas en faisant intervenir des courants et charges, magnétiques ou électriques de surface, liés aux propriétés dynamiques et aux variations de  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{B}$  en surface.

#### Courants électriques dynamiques de surface

L'objet de ce paragraphe est d'étudier un objet massif soumis à une variation de flux si rapide que son champ dynamique en volume est uniforme. Tout phénomène dynamique de conduction se réduit alors à la couche superficielle de l'objet, appelée épaisseur de peau  $\delta \ll D$ . Nous illustrerons notre propos sur le cas classique et simple du cylindre excité suivant son axe de révolution (figure 6.2, volume  $\Omega$  entouré par la surface  $\Sigma = \partial\Omega$ ). On peut se demander comment la contribution dynamique peut-elle être uniforme, ou plus exactement ici irrotationnelle. Il suffit pour cela d'imaginer une variation spatiale de la propriété  $\Lambda_h$  inverse de celle de la variation d'induction  $\partial_t B$  (en général  $\partial_t B$  augmente vers la surface, alors ici  $\Lambda_h$  diminue, *i.e.* les domaines se multiplient vers la surface). Cette uniformité du champ dynamique dans le volume entraîne la nullité de la densité volumique de courants correspondante ( $\mathbf{J}_{dh} = \nabla \wedge (\mathbf{H}_{dyn}) = \nabla \wedge (\sigma \Lambda_h^2 \partial_t \mathbf{B}) = \mathbf{0}$ ). Elle ne sera plus décrite que par une densité de courants électriques dynamiques surfaciques équivalente, définie par:

$$\mathbf{J}_{dhs} = (\mathbf{H}_{dyn})_{surf} \wedge \mathbf{n} \quad (6.5)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire sortant normal à la surface extérieure du volume de l'objet considéré. L'équivalence Ampérienne consiste en un calcul de rayonnement de l'induction  $\mathbf{B}$  à partir des densités de courants sources, dont les densités surfaciques. Elle devient très intéressante lorsque la variation d'induction se fait essentiellement en surface, et est nulle dans le volume; alors les

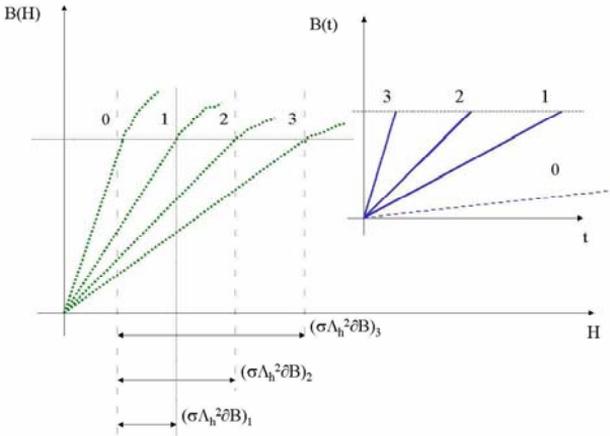


Figure 6.1: Illustration de la notion de retard sur le comportement  $B(H)$ .

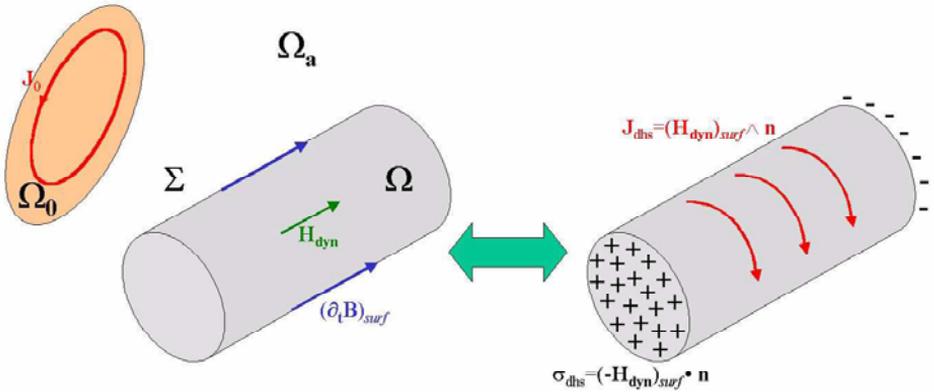


Figure 6.2: Equivalences Ampérienne avec courants électriques dynamiques de surface et Coulombienne avec charges magnétiques dynamiques de surface.

courants sont exclusivement surfaciques. Par voie de conséquence, le champ dynamique n'existe qu'en surface et dépend de la propriété  $\Lambda_{h,surf}$  et de la dérivée de l'induction en surface ( $(\mathbf{H}_{dyn})_{surf} = (\sigma\Lambda_h^2\partial_t\mathbf{B})_{surf}$ ). L'algorithme peut se résumer ainsi (démonstration avec l'équation de diffusion type Poisson sur le potentiel vecteur magnétique et avec le théorème de Green, cf annexe 19)

1. Calculer l'induction source;  $\forall \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_a \cup \Omega_0$

$$\partial_t\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu(\mathbf{r})}{4\pi}\partial_t\left(\iiint_{\Omega_0}\frac{\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\wedge(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3r'\right) \quad (6.6)$$

2. Calculer les courants surfaciques tels que  $\forall \mathbf{r} \in \Omega$

$$\frac{\mu}{4\pi}\partial_t\left(\iint_{\Sigma=\partial\Omega}\frac{\mathbf{J}_{dhs}(\mathbf{r}')\wedge(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^2r'\right) = \partial_t\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \quad (6.7)$$

3. Calculer l'induction dans tout l'espace,  $\forall \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_a \cup \Omega_0$

$$\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \partial_t\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) - \frac{\mu(\mathbf{r})}{4\pi}\partial_t\left(\iint_{\Sigma=\partial\Omega}\frac{\mathbf{J}_{dhs}(\mathbf{r}')\wedge(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^2r'\right) \quad (6.8)$$

### Charges magnétiques dynamiques de surface

Nous étudions le même objet massif qu'au paragraphe précédent, et soumis aux mêmes conditions de champ (figure 6.2). On définit une densité de charges magnétiques dynamiques volumique  $\rho_{dh} = \nabla \cdot (\mathbf{H}_{dyn}) = \nabla \cdot (\sigma\Lambda_h^2\partial_t\mathbf{B})$ . L'échantillon ne voyant des variations qu'à sa surface, cette densité de charges est nulle. Toutes les charges se concentrent dans la couche superficielle, et sont décrites à l'aide d'une densité surfacique équivalente:

$$\sigma_{dhs} = (-\mathbf{H}_{dyn})_{surf} \cdot \mathbf{n} \quad (6.9)$$

L'équivalence Coulombienne consiste ici en un calcul de rayonnement du champ magnétique  $\mathbf{H}$  à partir des densités de courants sources d'une part et de la densité surfacique de charges magnétiques d'autre part.

1. Calculer le champ source;  $\forall \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_a \cup \Omega_0$

$$\partial_t\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\partial_t\left(\iiint_{\Omega_0}\frac{\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\wedge(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3r'\right) \quad (6.10)$$

2. Calculer les charges surfaciques tels que  $\forall \mathbf{r} \in \Omega$

$$\frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \iint_{\Sigma=\partial\Omega} \frac{\sigma_{dhs}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r' \right) = -\partial_t \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \quad (6.11)$$

3. Calculer le champ dans tout l'espace,  $\forall \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_a \cup \Omega_0$

$$\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \partial_t \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \iint_{\Sigma=\partial\Omega} \frac{\sigma_{dhs}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r' \right) \quad (6.12)$$

### Courants magnétiques dynamiques de surface

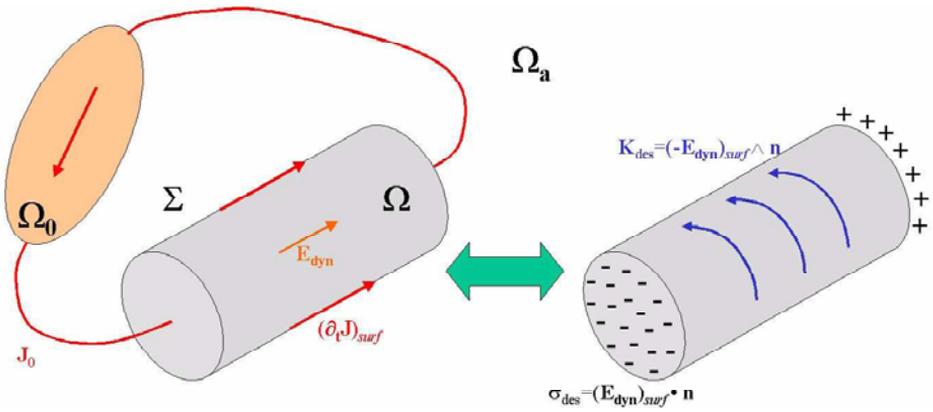


Figure 6.3: Equivalences Ampérienne avec courants magnétiques dynamiques de surface et Coulombienne avec charges électriques dynamiques surfaciques.

Comme depuis le début de nos écrits, il semble exister une dualité électrique-magnétique entre toutes les équations proposées. Dans ce paragraphe, nous étudions un objet similaire aux précédents à ceci près que nous nous intéressons plutôt à la diffusion de son champ électrique (conducteur magnétique massif par exemple, voir figure 6.3). Imaginons alors que cet objet puisse être soumis à une variation de flux si rapide (ou de rapidité judicieuse) que son champ électrique dynamique en volume reste uniforme. La densité volumique de courants magnétiques  $\mathbf{K}_{de} = \nabla \wedge (\mathbf{E}_{dyn}) = \nabla \wedge (\mu \Lambda_e^2 \partial_t \mathbf{J}) = \mathbf{0}$  est donc nulle, elle sera décrite avec une densité surfacique  $\mathbf{K}_{des}$  équivalente

$$\mathbf{K}_{des} = (-\mathbf{E}_{dyn})_{surf} \wedge \mathbf{n} \quad (6.13)$$

L'équivalence Ampérienne consiste ici en un calcul de "rayonnement" de la densité de courants électriques  $\mathbf{J}$  dans tous les conducteurs à partir des courants sources et des densités surfaciques de courants magnétiques.

1. Calculer le courant source  $\mathbf{J}_0(\mathbf{r})$  électrocinétique;  $\forall \mathbf{r}$
2. Calculer les courants surfaciques tels que  $\forall \mathbf{r} \in \Omega$

$$\frac{\sigma}{4\pi} \partial_t \left( \iint_{\Sigma=\partial\Omega} \frac{\mathbf{K}_{des}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r' \right) = -\partial_t \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) \quad (6.14)$$

3. Calculer la densité volumique de courants dans tous les conducteurs,  $\forall \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_a \cup \Omega_0$

$$\partial_t \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \partial_t \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \partial_t \left( \iint_{\Sigma=\partial\Omega} \frac{\mathbf{K}_{des}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r' \right) \quad (6.15)$$

### Charges électriques dynamiques de surface

On imagine toujours un champ électrique dynamique tel que la densité volumique de charges électriques correspondante ( $\rho_{de} = \nabla \cdot (\mathbf{E}_{dyn}) = \nabla \cdot (\mu\Lambda_e^2 \partial_t \mathbf{J})$ ) soit nulle. Nous définissons la densité surfacique équivalente par

$$\sigma_{des} = (\mathbf{E}_{dyn})_{surf} \cdot \mathbf{n} \quad (6.16)$$

L'équivalence Coulombienne consiste ici en un calcul de "rayonnement" du champ électrique  $\mathbf{E}$  à partir des sources volumiques (ou champ source) et surfaciques (charges équivalentes)

1. Calculer le champ source;  $\forall \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_a \cup \Omega_0$

$$\partial_t \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \sigma^{-1} \partial_t \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) \quad (6.17)$$

2. Calculer les charges surfaciques tels que  $\forall \mathbf{r} \in \Omega$

$$\frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \iint_{\Sigma=\partial\Omega} \frac{\sigma_{des}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r' \right) = \sigma^{-1} \partial_t \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) \quad (6.18)$$

3. Calculer le champ dans tout l'espace,  $\forall \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_a \cup \Omega_0$

$$\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \partial_t \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \iint_{\Sigma=\partial\Omega} \frac{\sigma_{des}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r' \right) \quad (6.19)$$

Ces propositions ne sont que des équivalences "artificielles" et ne peuvent s'appliquer que pour des régimes de fonctionnement tels que l'épaisseur de peau  $\delta$  soit très faible devant la taille  $D$  caractéristique de l'objet ( $\delta \ll D$ ); et lorsque les sources sont parfaitement connues et insensibles aux réactions d'induits. Sinon, on utilise d'autres méthodes, analytiques (§ 6.2 et 6.3) ou numériques (chapitre 8).

## 6.2 Cas unidimensionnel de la tôle magnétique

### 6.2.1 Présentation

La tôle d'épaisseur  $\xi$  étudiée dans la direction  $z$  sera considérée comme quasi-infinie dans les deux autres directions  $x$  et  $y$ , elle sera sollicitée dans ce plan ( $xOy$ ), voir figure 6.4.

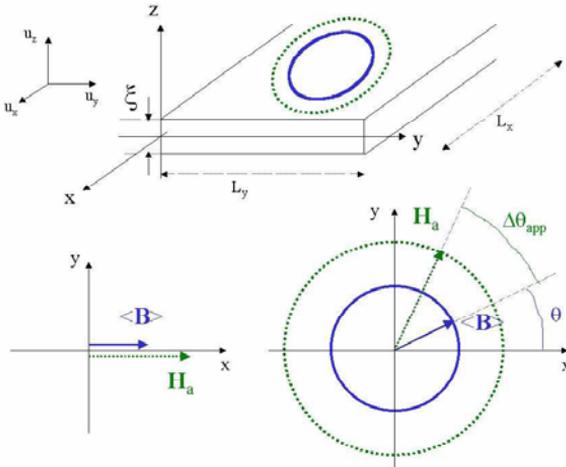


Figure 6.4: Sollicitations d'une tôle magnétique; configuration unidirectionnelle à gauche et bidirectionnelle à droite.

Nous pouvons alors utiliser quelques symétries et invariances mésoscopiques sur les champs et courants. Il y a invariance suivant  $x$  et  $y$  pour toutes les grandeurs physiques et il existe un plan de symétrie  $\pi^- = (xOy)$  [SIV\_1] (symétrie miroir pour  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_M$  et  $\mathbf{B}$ ; symétrie miroir inversé pour  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_M$  et  $\mathbf{J}$ ). Nous travaillerons dans cette partie surtout avec l'inconnue  $\mathbf{H}_M$  et l'équation (6.1) qui lui correspond. Notre ambition est de rendre compte, par un calcul de diffusion retardée, des grandeurs macroscopiques observables [OLI\_4]:

- La densité de flux ou l'induction moyenne  $\langle \mathbf{B}(t) \rangle$  traversant la tôle (en  $T$ )

$$\langle \mathbf{B}(t) \rangle = \xi^{-1} \int_{-\xi/2}^{+\xi/2} \mathbf{B}(z, t) dz \text{ en réels} \quad (6.20)$$

$$\langle \widetilde{\mathbf{B}} \rangle = \xi^{-1} \int_{-\xi/2}^{+\xi/2} \widetilde{\mathbf{B}}(z) dz \text{ en complexes} \quad (6.21)$$

- Le champ magnétique appliqué en surface  $\mathbf{H}_a(t)$  (en  $A.m^{-1}$ )

$$\mathbf{H}_a(t) = \mathbf{H}(\pm\xi/2, t) \text{ en réels} \quad (6.22)$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_a = \widetilde{\mathbf{H}}(\pm\xi/2) \text{ en complexes} \quad (6.23)$$

- Le module (en  $H.m^{-1}$ ) et l'angle (en  $rad$ ) de la perméabilité apparente

$$\mu_{app}(t) = \frac{|\langle \mathbf{B}(t) \rangle|}{|\mathbf{H}_a(t)|} \text{ (noté } N_{app} \text{ en 2D) et} \quad (6.24)$$

$$\Delta\theta_{app}(t) = \arctan\left(\frac{\mathbf{H}_a(t) \wedge \langle \mathbf{B}(t) \rangle}{\mathbf{H}_a(t) \cdot \langle \mathbf{B}(t) \rangle}\right) \text{ en réels} \quad (6.25)$$

$$\mu_{app_{qp}} = \left| \widetilde{\mu_{app_{qp}}} \right| = \frac{\left| \langle \widetilde{B}_q \rangle \right|}{\left| \widetilde{H}_{ap} \right|} \text{ et} \quad (6.26)$$

$$\varphi_{app_{qp}} = \arg\left(\widetilde{\mu_{app_{qp}}}\right) \text{ en complexes} \quad (6.27)$$

- Les pertes spécifiques massiques (en  $W.kg^{-1}$ )

$$\Pi_m = \frac{\omega}{2\pi d} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \mathbf{H}_a(t) \cdot \partial_t \langle \mathbf{B}(t) \rangle dt \text{ en réels} \quad (6.28)$$

$$\Pi_m = \frac{1}{d} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{H}}_a \cdot j\omega \langle \widetilde{\mathbf{B}} \rangle \right) \text{ en complexes} \quad (6.29)$$

Les données du problème sont la géométrie (tôle d'épaisseur  $\xi$ ), les propriétés matériaux (la conductivité  $\sigma$ , la perméabilité  $\mu$ , la propriété  $\Lambda = \Lambda_h$  et la masse volumique  $d$  ( $kg.m^{-3}$ ) (données d'un FeSi M400-50A classique:  $\sigma^{-1} = 47 \mu\Omega.cm$ ,  $\mu = 20000\mu_0$ ,  $\xi = 0.5 mm$ ,  $d = 7650 kg.m^{-3}$ ); toutes constantes en régime linéaire) et les sources de champ (intensité  $H_a$ , déphasage 0, pulsation  $\omega = 2\pi f$ , fréquence  $f$ ). Les deux dernières parties de cette section seront consacrées à la variation des conditions limites (§ 6.2.4) et à la résolution transitoire et non-linéaire (§ 6.2.5).

## 6.2.2 Sollicitations unidirectionnelles harmoniques

### Relations de dispersion

Il s'agit de résoudre l'équation de diffusion retardée (6.1) avec  $\Lambda = \Lambda_h$  ( $\Lambda_e = 0$ ) dans la configuration unidimensionnelle et unidirectionnelle proposée. La méthode utilisée ici pour les régions linéaires, est celle de la double transformation de Fourier depuis l'espace  $(\mathbf{r}, t)$  jusqu'à l'espace  $(\mathbf{k}, \omega)$  (cf annexe 17,  $\mathbf{k}$  est le vecteur de diffusion (une seule composante suivant  $z$  ici) et  $\omega$  la pulsation). Tout calcul fait, on obtient la relation de dispersion suivante

$$k^2 + j\sigma\Lambda^2\mu\omega k^2 + j\sigma\mu\omega = 0 \quad (6.30)$$

En posant  $k = k' - jk''$ , on déduit de (6.30) les deux vecteurs de diffusion  $k'(\omega)$  et  $k''(\omega)$  [OLI\_2]

$$k'(\Lambda, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\sigma\mu\omega}{1 + (\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2} \left( -\sigma\Lambda^2\mu\omega + \sqrt{1 + (\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2} \right)} \quad (6.31)$$

$$k''(\Lambda, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\sigma\mu\omega}{1 + (\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2} \left( +\sigma\Lambda^2\mu\omega + \sqrt{1 + (\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2} \right)} \quad (6.32)$$

Ces deux quantités représentent les fréquences spatiales caractéristiques de variation des composantes de propagation  $k'$  (respectivement de diffusion  $k''$ ) du champ (voir figure 6.5). L'inverse de la contribution de diffusion  $k''$  correspond à l'épaisseur de peau influencée par la structure en domaines ( $\Lambda$ ). Celle-ci provoque une séparation du vecteur d'onde de propagation ( $k'(\omega)$ ) et de celui de diffusion ( $k''(\omega)$ ). Les deux phénomènes étant confondus dans un matériau parfaitement homogène ( $\Lambda = 0$ ). Cette différenciation s'accroît à mesure que  $\Lambda$  augmente, ou que la fréquence s'accroît. Il peut être intéressant de faire une étude asymptotique des comportements de  $k'$  et  $k''$  en fonction de la fréquence  $f$  d'une part et de la propriété  $\Lambda$  d'autre part.

- Etude en fréquence:

$$k' \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} k'' \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} k'_0 = k''_0 = \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}} \quad (6.33)$$

$$k' \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} (2\sigma\Lambda^2\mu\omega) \frac{1}{\Lambda} \text{ et } k'' \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2(2\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2} \right) \frac{1}{\Lambda} \quad (6.34)$$

La structure magnétique se comporte comme le modèle classique dans la limite quasi-statique. A "haute" fréquence, la propagation perd de son importance (longueur d'onde infinie, constance de la contribution dans l'espace) devant le vecteur de diffusion qui tend vers  $1/\Lambda$ . C'est cette dernière qui déterminera alors les variations spatiales caractéristiques du

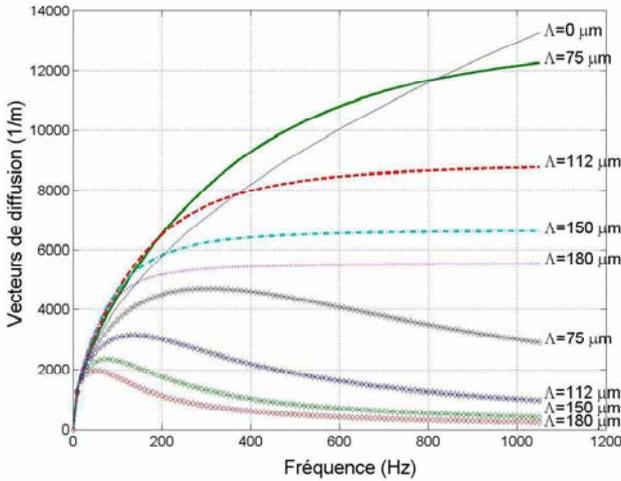


Figure 6.5: Relations de dispersion pour le vecteur d'onde de propagation (avec marqueurs) et celui de diffusion (sans marqueurs), pour plusieurs densités de parois ( $1/\Lambda$ ) avec le FeSi M400-50A.

champ et donc de l'épaisseur de peau  $\delta = \delta'' = 1/k'' \rightarrow \Lambda$  quand  $\omega \rightarrow \infty$ . Le champ ne peut "diffuser" que dans les premiers domaines rencontrés en surface; sachant de plus que  $\Lambda$  diminue généralement avec  $\omega$ . Il va de soi que ceci reste cohérent pour une plage en fréquence, certes large, mais malgré tout limitée par, d'une part la validité de l'homogénéisation à bas ordre (cf § 5.2.2, sachant qu'on peut imaginer repousser un peu cette limitation à l'aide de propriétés non-linéaires), et d'autre part l'apparition probable d'autres phénomènes en augmentant la fréquence (résonance due à la masse de la paroi dite de Döring [TRE\_2], courants de déplacement, ...).

- Etude en fonction de  $\Lambda$ :

Les deux vecteurs de propagation et de diffusion se comportent de manière équivalente à l'étude en fréquence, vis à vis du paramètre de structure. La limite homogène ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) correspond à une disparition de structure, le champ diffuse classiquement comme dans un matériau homogène. La limite hétérogène correspond à des domaines infiniment longs ou des parois très peu mobiles: le flux pénètre très difficilement (amortissement "infini") et uniquement dans les premiers domaines de surface rencontrés, les autres étant inaccessibles.

### Profil des champs

Exprimons et étudions les profils en champs  $H_M$  et  $H$  solutions de ce problème unidimensionnel, tenant compte de la symétrie par rapport à  $(xOy)$  et de la condition limite en  $z = \pm\xi/2$  sur  $H$

$$H_M(z, t) = \frac{H_a}{(1 + j\sigma\Lambda^2\mu\omega)} \frac{\cosh\left(j(k' - jk'')z\right)}{\cosh\left(j(k' - jk'')\xi/2\right)} \exp(j\omega t) \quad (6.35)$$

La connaissance de ce champ  $H_M$  en  $(z, t)$  nous permet d'en déduire les profils d'induction  $B = \mu H_M$  et de champ magnétique total  $H = (1 + j\sigma\Lambda^2\mu\omega) H_M$ . On s'intéresse particulièrement aux amplitudes complexes en  $(z, \omega)$  qui donnent une information sur les amplitudes des variations et les déphasages relatifs ( $k = k' - jk''$ )

$$\tilde{B}(z, \omega) = \mu \widetilde{H_M}(z, \omega) = \frac{\mu H_a}{(1 + j\sigma\Lambda^2\mu\omega)} \frac{\cosh\left(j(k' - jk'')z\right)}{\cosh\left(j(k' - jk'')\xi/2\right)} \quad (6.36)$$

$$\tilde{H}(z, \omega) = H_a \frac{\cosh\left(j(k' - jk'')z\right)}{\cosh\left(j(k' - jk'')\xi/2\right)} \quad (6.37)$$

En analysant les évolutions de ces divers profils en fonction de  $\Lambda$  d'une part et de la pulsation  $\omega$  d'autre part; on montre qu'ils vibrent à la manière d'une membrane. Cela s'interprète bien en disant que les modes propres de mouvement collectif des parois sont sensibles à la densité ( $1/\Lambda$ ) des parois et à la fréquence ( $f = \omega/(2\pi)$ ). Le profil en induction possède des profils vibrants déphasés non forcément tangentiellement continus à l'interface, tandis que le champ  $H$  vibre aussi avec des composantes en phase et en quadrature mais en restant continu à l'interface. La prise en compte de la structure magnétique via  $\Lambda$  dans les calculs de champs en  $(z, t)$  permet l'ajout d'un degré de liberté supplémentaire pour expliquer des pertes d'énergie en excès (comme nous le verrons dans le paragraphe suivant), ce qui se traduit ici par un réglage de l'amortissement de l'induction et de son déphasage par rapport au champ et au champ appliqué. Les profils restent lisses car représentent des grandeurs moyennées (cf chapitre 5).

### Observables macroscopiques

Nous proposons dans ce paragraphe de re-calculer des grandeurs macroscopiques observables à partir des solutions locales mésoscopiques obtenues précédemment. Ces observables seront le flux de l'induction  $\phi$  [ $Wb$ ] (relié à la tension mesurable), la perméabilité apparente  $\mu_{app}$  [ $H.m^{-1}$ ], et les pertes  $\Pi_m$  [ $W.kg^{-1}$ ] de puissance par unité de masse. Une vérification de la consistance du calcul global macroscopique des pertes avec le théorème de Poynting et le calcul intégral local, proposé au § 5.6.2, sera faite en fin de section.

1. Expression du flux  $\phi$  réduit par rapport au flux  $\phi_0 = \mu\xi L_y H_a$  obtenu en régime statique

$$\frac{\tilde{\phi}}{\phi_0} = \frac{2 \tanh\left(\left(k'' + jk'\right) \xi/2\right)}{\xi(1 + j\sigma\Lambda^2\mu\omega)(k'' + jk')} \quad (6.38)$$

On peut représenter cette observable et ses évolutions avec  $\Lambda$  et/ou la fréquence en séparant sa partie réelle de sa partie imaginaire ou bien son module et sa phase (figure 6.6).

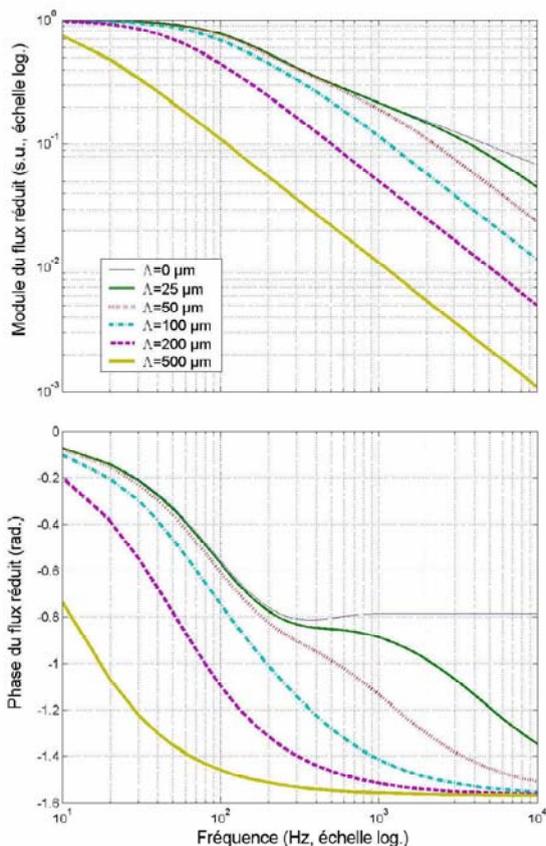


Figure 6.6: Evolution du module et de la phase du flux complexe normalisé, pour différentes densités de parois, avec les données d'un Fer-Silicium classique.

Sur la figure 6.6 sont représentés le module et la phase du flux réduit en fonction de la pulsation en échelle logarithmique et pour plusieurs valeurs de la propriété  $\Lambda$ . Ces deux graphes mettent en évidence le caractère passe-bas des matériaux doux magnétiquement structurés. Plus  $\Lambda$  sera grand

(moins il y aura de parois, ou moins elles seront mobiles et étendues) et plus ce caractère passe-bas sera prononcé. Ceci est en parfait accord avec les observations expérimentales ([BER\_8], [BER\_9]).

2. Expression de la perméabilité et de la phase apparente:

$$\widetilde{\mu}_{app} = \mu \frac{\widetilde{\phi}}{\phi_0} = \mu_{app} \exp(j\varphi_{app}) \quad (6.39)$$

Les évolutions de son module et de sa phase sont identiques à celles données sur la figure 6.6. On dit que la perméabilité se dégrade de plus en plus à mesure que la fréquence d'utilisation augmente. Ce phénomène s'accroît avec l'accroissement de la propriété  $\Lambda$ .

3. Expression de la puissance perdue par unité de masse [OLI\_2] ( $B_{max} = \mu_{app} H_a$ ):

$$\Pi_m = \frac{\omega \xi B_{max}^2}{4\mu d} \times \left( \frac{\cosh(k'' \xi) + \cos(k' \xi)}{\sinh^2(k'' \xi) + \sin^2(k' \xi)} \right) \times \left( (\sigma \Lambda^2 \mu \omega k'' + k') \sinh(k'' \xi) + (\sigma \Lambda^2 \mu \omega k' - k'') \sin(k' \xi) \right) \quad (6.40)$$

On peut tracer l'évolution de ces pertes en fonction de la pulsation et pour plusieurs valeurs de la propriété  $\Lambda$ , voir figure 6.7. On y met alors en évidence son rôle dans la détermination des pertes dynamiques dites en excès ou "pertes fer anormales".  $\Pi_m$  représente l'ensemble des pertes dynamiques par courants induits et puissance magnétisante.  $\Pi_m(\Lambda = 0)$  sont les pertes classiques. Nous réutiliserons ces calculs linéaires harmoniques dans la reconstruction de cycles d'hystérésis dynamiques à bas niveau (voir chapitre 7).

Nous visualisons figure 6.7 les pertes en excès. En les égalisant aux pertes macroscopiques observées et modélisées par ailleurs pour ce même type d'échantillon (Modèle de Bertotti (1.3) ou Steinmetz (1.2), chapitre 1), il est possible d'en déduire figure 6.8 une première forme d'évolution de la propriété  $\Lambda$  avec les différents couples ( $f, B$ ). Ces variations redonnent l'évolution incurvée des pertes réellement mesurées (voir figure 1.1 et figure 6.9).

Nous proposons pour terminer ce paragraphe, de vérifier le calcul des pertes, en le comparant au calcul via le théorème de Poynting ([JAC\_1], [LAV\_1], [DAR\_1]). Les pertes totales doivent pouvoir s'exprimer comme la somme des pertes par hystérésis dynamique  $\Pi_{hyst}$  et des pertes Joules  $\Pi_{eddy}$

$$\Pi_{hyst} = \frac{1}{2\xi d} \operatorname{Re} \left( \int_{-\xi/2}^{+\xi/2} \widetilde{\mathbf{H}}^*(z) j\omega \widetilde{\mathbf{B}}(z) dz \right) \quad (6.41)$$

$$\Pi_{eddy} = \frac{1}{2\xi d} \operatorname{Re} \left( \int_{-\xi/2}^{+\xi/2} \widetilde{\mathbf{J}}^*(z) \widetilde{\mathbf{E}}(z) dz \right) \quad (6.42)$$

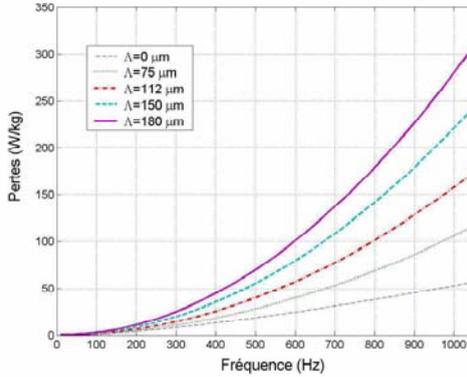


Figure 6.7: Augmentation des pertes spécifiques avec la fréquence et la propriété dynamique (0, 75, 112, 150 puis 180 micromètres). Partie réelle ou active de la puissance totale complexe absorbée.

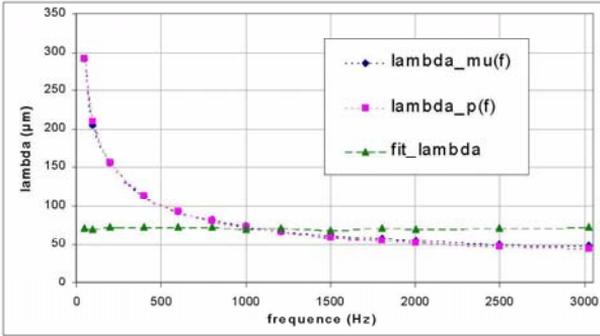
L'utilisation de (6.31), (6.35), (6.36) et des équations de Maxwell pour recalculer ces pertes permet d'aboutir à nouveau à (6.40). On vérifie donc à l'aide de cet exemple simple, que ce qu'exprime le théorème de Poynting (5.70) est bien la puissance effectivement absorbée et ici perdue dans la matière (pas de mouvement), que l'on peut donc écrire avec un bilan de puissance global ((6.28)  $\Leftrightarrow U * I$ ) d'un point de vue extérieur.

### Etude asymptotique des pertes et de la perméabilité apparente

On pose  $\beta = \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega \xi}{2}}$ , variable sans dimension, et on étudie le comportement de  $\Pi_{mf} = \frac{\Pi_m}{f}$ , les pertes d'énergie par cycle et par unité de masse; et de  $\mu_{app}$ , la perméabilité apparente en fonction de  $\beta$ , ou  $\beta^2$ , cette dernière quantité étant proportionnelle à  $f$ . Une première écriture des vecteurs d'onde (6.31) en fonction de  $\beta$  permet de montrer que le rapport  $\left(\frac{2\Lambda^2}{\xi^2}\right)$  va avoir un rôle important à jouer par rapport au cas classique [DEL\_2].

#### 1. Perméabilité apparente ( $H.m^{-1}$ )

$$\mu_{app} \stackrel{\beta \ll 1}{\sim} \mu \quad (6.43)$$



Figure~6.8: Première identification de  $\Lambda$  avec les pertes ( $\Lambda_p$ ) et la perméabilité apparente ( $\Lambda_\mu$ ) pour un échantillon typique de Fer Silicium M270-35A. Les deux méthodes donnent heureusement les mêmes résultats et l'erreur est estimée inférieure à 5%. La courbe constante correspond à la transformation analytique proposée lors de l'étude asymptotique en fréquence.

La perméabilité à très basse fréquence est tout simplement la perméabilité magnétique, appelée statique à juste titre.

$$\mu_{app} \stackrel{\beta \gg 1}{\approx} \mu \left( \frac{\xi}{\Lambda} \right) \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) + 1}} \frac{1}{\beta^2} \quad (6.44a)$$

$$\left( \frac{\mu_{app}}{\mu_{app, classique}} \right) \stackrel{\beta \gg 1}{\approx} \left( \frac{\xi}{\Lambda} \right) \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) + 1}} \frac{1}{\beta} \quad (6.44b)$$

La perméabilité apparente décroît comme  $\frac{1}{\beta^2} \propto \frac{1}{f}$ . Là encore, le coefficient de proportionnalité prend en compte la structure en domaines ( $\Lambda \neq 0$ ) et donc la dégradation accrue de la perméabilité due aux mouvements internes à cette structure (ici D.W.D.).

2. Pertes massiques par cycle ( $W.s.kg^{-1} = J.kg^{-1}$ )

$$\Pi_{mf} \stackrel{\beta \ll 1}{\approx} \frac{\pi B_{max}^2}{\mu d} \left( \frac{1}{6} + 2 \left( \frac{\Lambda}{\xi} \right)^2 \right) \beta^2 \quad (6.45)$$

A basse fréquence, on a  $\Pi_{mf} \propto f B_{max}^2$  (avec  $B_{max} = \mu_{app} H_a \stackrel{\beta \ll 1}{\approx} \mu H_a$ ). Le coefficient de proportionnalité tenant compte de la propriété  $\Lambda$  et donc

des pertes en excès.

$$\Pi_{mf} \stackrel{\beta \gg 1}{\approx} \frac{\pi \mu H_a^2}{d} \left( \frac{\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) \sinh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) + 1} \right) \frac{1}{\beta^2} \quad (6.46)$$

Ainsi, à champ  $H_a$  imposé, les pertes diminuent comme  $(\frac{1}{f})$ . Il faut savoir qu'alors l'induction apparente maximum diminue elle aussi comme  $(\frac{1}{f})$ . De sorte qu'à  $B_{\max} = \mu_{app} H_a$  imposée, on retrouve des pertes massiques par cycle qui augmentent comme  $f B_{\max}^2$ . Il y a ici deux différences fondamentales avec le cas classique (augmentant en  $\sqrt{f} B_{\max}^2$ ). La deuxième étant un coefficient de proportionnalité qui dépend du rapport  $(\Lambda/\xi)$ . C'est d'ailleurs une variation de cette quantité avec  $f$  qui pourra expliquer l'allure en  $\sqrt{f}$  tout en étant au dessus des pertes classiques.

$$\Pi_{mf} \stackrel{\beta \gg 1}{\approx} \frac{\pi B_{\max}^2}{\mu d} \left( \frac{\left(\frac{\Lambda}{\xi}\right) \sinh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) - 1} \right) \beta^2 \quad (6.47a)$$

$$\left( \frac{\Pi_{mf}}{\Pi_{mf, classique}} \right) \stackrel{\beta \gg 1}{\approx} \left( \frac{\Lambda}{\xi} \right) \left( \frac{\sinh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) - 1} \right) \beta \quad (6.47b)$$

L'expérience montrerait que  $\left( \frac{\Pi_{mf}}{\Pi_{mf, classique}} \right) \stackrel{\beta \gg 1}{\approx} \frac{cste}{\beta^\alpha}$ . Ainsi, la propriété  $\Lambda$  varierait avec  $\beta$  telle que (Figure 6.8,  $\alpha = 0.42$ )

$$\frac{\Lambda}{\xi} \frac{\sinh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) - 1} \beta^{1+\alpha} \sim cste \geq 1 \quad (6.48)$$

Pour conclure, le mouvement des parois magnétiques, dans la structure en domaines, explique bien les pertes en excès et la dégradation de la perméabilité. Ce phénomène augmente d'un ordre  $\sqrt{f}$  l'évolution de la dégradation avec la fréquence et change les pertes d'un coefficient dépendant du rapport  $(\Lambda/\xi)$  (cf figure 6.9), variable avec la fréquence et l'induction (6.48).

### 6.2.3 Sollicitations bidirectionnelles harmoniques

#### Limite quasi-statique et tenseur reluctivité

Le champ effectif (6.49) responsable de l'induction en régime statique n'est pas nécessairement ni en phase ni parallèle avec le champ appliqué réel du fait du champ d'anisotropie et du champ démagnétisant (chapitre 3).

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_D + \mathbf{H}_{an} \propto \mathbf{B} \quad (6.49)$$

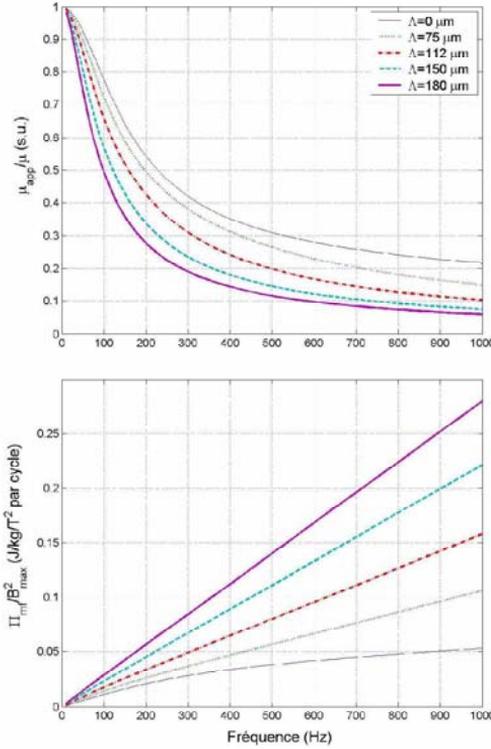


Figure 6.9: Allures de la perméabilité apparente et des pertes en fonction de la fréquence et de la densité équivalente de parois ( $1/\Lambda$ ).

Le champ d'anisotropie doit être parallèle à l'induction lorsque celle-ci adopte une direction de facile ou difficile aimantation puisque l'énergie y est extrême. En dehors des axes d'anisotropie, ce parallélisme n'est plus. Nous imaginons alors un tenseur diagonal reliant l'induction  $\mathbf{B}$  au champ d'anisotropie  $\mathbf{H}_{an}$ ; où les termes diagonaux varient avec  $B = |\mathbf{B}|$  et  $\theta$ . Le champ démagnétisant quant à lui résulte d'une intégrale de rayonnement de l'ensemble des charges magnétiques ([HUB\_1], [HUY\_1]). Il dépend de la géométrie des domaines et des grains, des défauts, et de l'histoire du matériau ([GEO\_1], [NOU\_1]). Nous ne décrivons pas précisément ce champ ni les mouvements irréversibles joints de parois créant une hystérésis statique mais seulement le déphasage angulaire. Nous utiliserons pour cela un tenseur plein démagnétisant, qui permet de passer de  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{H}_D$ , et dont les coefficients dépendent principalement de la structure métallographique. Pour résumer, la description de la propriété statique  $[\nu] = [\mu]^{-1}$  entre  $\mathbf{H}_M = [\nu]\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}$  se fait ici à l'aide d'une relation tensorielle non nécessairement symétrique et diagonale [OLI\_4]

$$[\nu] = \begin{bmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{xx} & \nu_{yy} \tan(\theta_{R_2}) \\ -\nu_{xx} \tan(\theta_{R_1}) & \nu_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Les angles  $\theta_{R_i}$  sont définis par  $H_{M_x} \tan(\theta_{R_1}) = -H_{M_y}$  (pour  $\theta = 0[\pi]$ ) et  $H_{M_y} \tan(\theta_{R_2}) = +H_{M_x}$  (pour  $\theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ). Ils sont obtenus pour des valeurs particulières de  $\theta$ ;  $\theta_{R_1} = \Delta\theta_{app}(\theta = 0)$  et  $\theta_{R_2} = \Delta\theta_{app}(\theta = \frac{\pi}{2})$  (où  $\theta(t) = \widehat{\text{mes}}(\mathbf{u}_x, \langle \mathbf{B}(t) \rangle)$  est l'angle mesuré entre  $\mathbf{u}_x$  et  $\langle \mathbf{B}(t) \rangle$  (cf figure 6.4)). En régime quasi-statique, le champ appliqué  $\mathbf{H}_a$  est égal au champ  $\mathbf{H}_M$  et son profil est constant dans l'épaisseur de la tôle. Pour calculer la réponse en module et en phase de l'échantillon, on utilise directement les définitions (6.24) et suivantes [OLI\_4].

$$N_{app}(t) = \mu_{app}(t) = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta(t)}}{\sqrt{(\nu_{xx} + \nu_{xy} \tan \theta(t))^2 + (\nu_{yy} \tan \theta(t) + \nu_{yx})^2}} \quad (6.51a)$$

$$\Delta\theta_{app}(t) = \arctan \left\{ \frac{\nu_{xx} + \nu_{xy} \tan \theta(t) - \nu_{yx} \tan^{-1} \theta(t) - \nu_{yy}}{\nu_{xx} \tan^{-1} \theta(t) + \nu_{xy} + \nu_{yx} + \nu_{yy} \tan \theta(t)} \right\} \quad (6.51b)$$

### Profil d'induction

Le régime de fonctionnement est harmonique avec des propriétés supposées varier très lentement, soit quasi-constantes. Etant données les invariances suivant  $x$  et  $y$  et la symétrie macroscopique par rapport au plan  $(xOy)$ , le vecteur champ statique  $\mathbf{H}_M$  sera recherché sous la forme

$$\widetilde{\mathbf{H}}_M(z, t) = \begin{pmatrix} H'_{M_x} + jH''_{M_x} \\ H'_{M_y} + jH''_{M_y} \end{pmatrix} \cosh(jkz) \exp(j\omega t) \quad (6.52)$$

Le vecteur de diffusion n'a toujours ici qu'une seule composante suivant  $z$  ( $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$ ) mais le vecteur  $\mathbf{H}_M$  en a deux suivant  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  (ce problème représente un cas particulier de la résolution générale 3D et tri-directionnelle que nous aborderons à la fin de cette sous-section).

### Diagrammes vectoriels des champs en surface

(voir figure 6.11)

### Relation de dispersion tensorielle

Nous effectuons une transformation de Fourier de l'équation de diffusion retardée (6.1) avec  $\Lambda^2 = \Lambda_h^2$  ( $\Lambda_e = 0$ ) et  $\mu$  des tenseurs de rang 2. On pose  $[\tau] = \sigma[\Lambda^2][\mu]$ , nommée temporisation structurelle dynamique magnétique; c'est aussi un tenseur de rang 2. La résolution complexe de (6.1), sur le problème 1-D bi-directionnel considéré, fournit la relation de dispersion donnant  $k(\omega, \tau_{qp}, \mu_{qp})$  [OLI\_4]

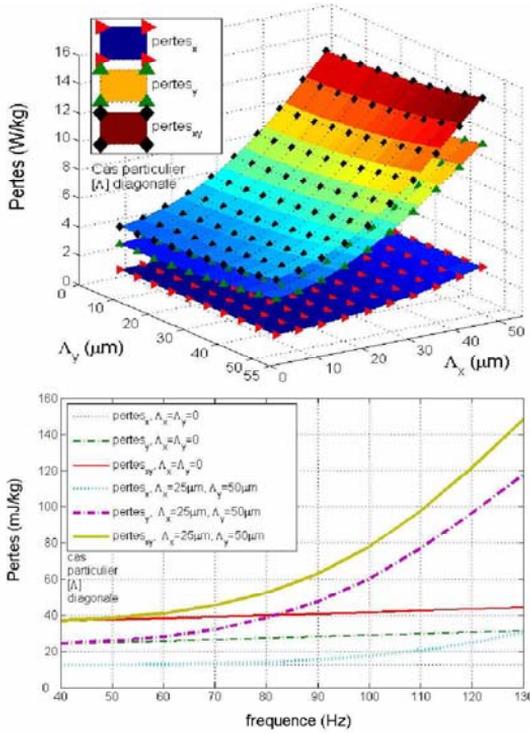


Figure 6.10: Evolution de pertes 2-D en régime linéaire en fonction de la structure ( $B=1.0$  T,  $f=100$  Hz, en haut) et de la fréquence ( $B=1.0$  T, en bas).

$$\det(k^2(\delta_{qp} + j\omega\tau_{qp}) + j\omega\sigma\mu_{qp}) = 0 \quad (6.53)$$

Tout comme dans le cas unidirectionnel précédent, les parois en mouvement auront une action sur la pénétration du flux dans l'épaisseur, ce qui se traduira par un effet de peau particulier, dépendant à la fois de la pulsation  $\omega$ , de la perméabilité  $[\mu]$  et de la propriété  $[\tau]$ . Le détail du calcul de (6.53) est long et fastidieux et ne sera pas exposé ici. L'intérêt de son utilisation sera toutefois mis en lumière au chapitre 7 lors de l'identification expérimentale bi-directionnelle.

### Calcul d'observables

1. Induction moyenne observable et profil de champ (unité= $[T]$ )

$$\langle \mathbf{B}(t) \rangle = [\mu] \begin{pmatrix} H'_{M_x} + jH''_{M_x} \\ H'_{M_y} + jH''_{M_y} \end{pmatrix} \frac{\sinh\left(\frac{jk\xi}{2}\right)}{\frac{jk\xi}{2}} \exp(j\omega t) \quad (6.54)$$

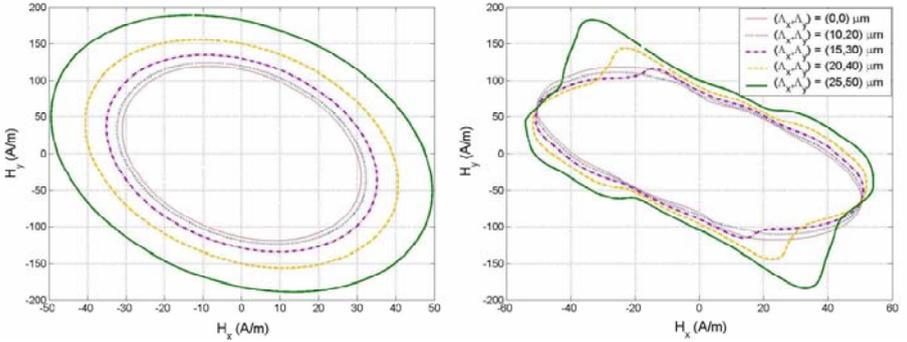


Figure 6.11: Influence des parois sur le diagramme de champ en surface, en régime linéaire (à gauche) et non linéaire (à droite) à  $B=1.0$  T et  $f=100$  Hz.

Nous pouvons alors imposer à cette induction moyenne de suivre une trajectoire prédéfinie en concordance avec l'expérience réelle (trajectoire circulaire par exemple, figure 6.4). En notant  $(\zeta + j\kappa) = \sinh\left(\frac{jk\xi}{2}\right) / \left(\frac{jk\xi}{2}\right)$ , cette dernière condition fournit le système d'équations vérifiées par les préfacteurs inconnus définissant le champ de (6.52)

$$\begin{pmatrix} +\zeta\mu_{xx} & -\kappa\mu_{xx} & +\zeta\mu_{xy} & -\kappa\mu_{xy} \\ -\kappa\mu_{xx} & -\zeta\mu_{xx} & -\kappa\mu_{xy} & -\zeta\mu_{xy} \\ +\zeta\mu_{yx} & -\kappa\mu_{yx} & +\zeta\mu_{yy} & -\kappa\mu_{yy} \\ -\kappa\mu_{yx} & -\zeta\mu_{yx} & -\kappa\mu_{yy} & -\zeta\mu_{yy} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H'_{M_x} \\ H_{M_x} \\ H'_{M_y} \\ H''_{M_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{B}| \\ 0 \\ 0 \\ |\mathbf{B}| \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

Nous réalisons alors un couplage simultané entre les effets d'anisotropie, de courants induits et d'hystérésis dynamique. Une fois résolu ce système (6.55), nous avons accès à toutes les grandeurs observables, le flux (6.54), le champ en surface (6.56), le module et l'angle apparents et les pertes.

## 2. Champ magnétique en surface [ $A.m^{-1}$ ]

$$\mathbf{H}_a(t) = \mathbf{H}\left(\pm\frac{\xi}{2}, t\right) = \text{Re}\left(\left(1 + j\omega[\tau]\right)\widetilde{\mathbf{H}}_M\left(\pm\frac{\xi}{2}, t\right)\right) \quad (6.56)$$

Si l'expérience est faite de manière à imposer ce champ en surface et non plus l'induction (6.54), alors le système (6.55) est à remplacer par (6.56).

## 3. Le module [ $H.m^{-1}$ ] et l'angle [ $rad$ ] apparents

Ces deux observables sont obtenues en introduisant les résultats (6.54) et (6.56) dans les définitions (6.24).

4. Les pertes  $[W.kg^{-1}]$ 

De même, les pertes sont calculées à l'aide de (6.54) et (6.56) à réintroduire dans (6.28). Une illustration de ce type de calcul, en fonction de la fréquence et de la propriété est proposée figure 6.10.

**Généralisation tridimensionnelle et multi-directionnelle**

Imaginons des variations dans toutes les directions ( $\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n}$  avec  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{u}_i$  vecteur indice de diffusion de norme 1) et proposons une méthode générale de résolution de (6.1) en régime harmonique linéaire. Les tenseurs  $[\mu]$  et  $[\Lambda^2]$  sont maintenant de rang 3, la conductivité électrique est toujours supposée isotrope, toute anisotropie étant essentiellement due à la perméabilité et à la structure magnétique. On définit toujours la temporisation structurelle magnétique  $[\tau]$  par  $[\tau] = \sigma [\Lambda^2] [\mu]$ . Une quadruple transformation de Fourier (dans l'espace  $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{k}$  et dans le temps  $t \leftrightarrow \omega$ ) de (6.1) donne les relations de dispersion vérifiées par les composantes  $\{n_p\}$

$$\det \left\{ n^2 (\delta_{qp} + j\omega\tau_{qp}) - n_q n_m (\delta_{mp} + j\omega\tau_{mp}) + j \frac{\sigma \mu_{qp} v^2}{\omega} \right\} = 0 \quad (6.57)$$

On peut sans perte de généralité, se placer dans un repère  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  tel que la direction de diffusion soit contenue dans le plan  $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  et la direction de polarisation du champ dans un plan perpendiculaire à cette direction et donc parallèle à la direction  $\mathbf{u}_1$ . Dans ce cas, avec  $n_1 = 0$  et  $n_2^2 + n_3^2 = 1$ , la résolution de (6.57) est possible et permet d'obtenir les relations de dispersion  $n_p(\omega, \tau_{mn}, \mu_{mn})$  et  $v(\omega, \tau_{mn}, \mu_{mn})$ . La connaissance de ces vecteurs de diffusion permet d'exprimer le champ  $\mathbf{H}_M$  solution sous la forme d'une série de composantes de Fourier dont les coefficients seront complètement déterminés par les dernières relations connues que sont les conditions de continuité sur les divers champs ( $\mathbf{H}$  tangentiel,  $\mathbf{E}$  tangentiel,  $\mathbf{B}$  normal et  $\mathbf{J}$  normal continu).

**6.2.4 Variation des conditions limites et discussion**

Comme nous l'avons déjà souvent mentionné; le principal inconvénient d'une telle représentation est qu'il est très difficile, voir impossible, de prévoir à l'avance la structure magnétique (respectivement électrique) avec précision. Celle-ci sera de plus vraisemblablement hétérogène, à cause de la géométrie, des effets de surface et des non-linéarités. Une alternative consiste à considérer deux propriétés: une de volume et l'autre de surface. Ainsi, deux types de condition limite peuvent être testés (Tableaux 6.1 et 6.2, **a** et **b**), selon que la diffusion du champ est aidée ou gênée par la structuration de surface (raffinement, domaines de fermeture, ...etc...). Une autre possibilité est la superposition des deux dynamiques: magnétique et électrique (Tableaux 6.1 et 6.2, **c**), sous différents points de vue (voir tableau 5.1). Le flux réduit ((6.58a), formule proche de (6.38))

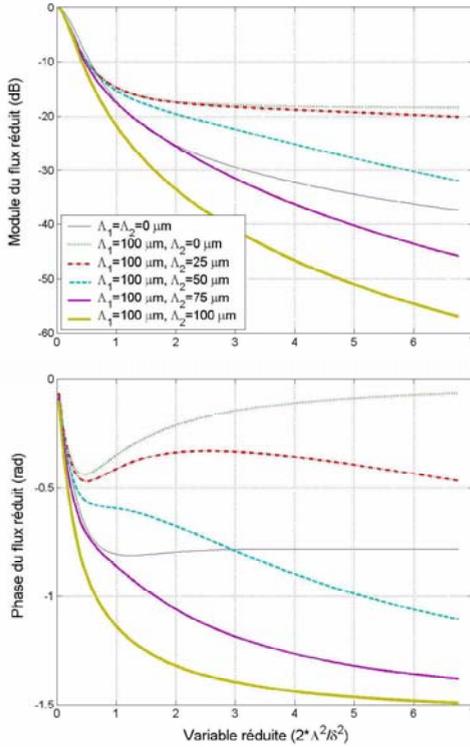


Figure 6.12: Module et Phase du flux réduit en fonction de la fréquence pour différents modèles et couplages surfaciques.

peut-être calculé et tracé en fonction de la fréquence pour plusieurs valeurs des paramètres  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  (cas de la tôle, figure 6.12)

$$\frac{\phi(\Lambda_1, \Lambda_2, \omega)}{\phi(\omega = 0)} = \frac{\tanh((k_+(\Lambda_1, \omega) + jk_-(\Lambda_1, \omega))\xi/2)}{(1 + j\sigma\Lambda_2^2\mu\omega)(k_+(\Lambda_1, \omega) + jk_-(\Lambda_1, \omega))\xi/2} \quad (6.58a)$$

$$k_{\pm}(\Lambda_1, \omega) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma\mu\omega}{1 + (\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2} \right) \times}{\left( \pm\sigma\Lambda^2\mu\omega + \sqrt{1 + (\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2} \right)}} \quad (6.58b)$$

Cela nous donne des informations intéressantes sur la manière dont la structure microscopique agit sur les processus d’amortissement et d’amplification, en module et en phase, de la réponse macroscopique. L’analyse des résultats de la figure 6.12 montre que la même observation peut être due à différentes causes. Le raffinement des domaines en surface aide-t-il ou gêne-t-il la pénétration du flux?

	Condition de continuité sur
Champ magnétique	$(1 + \sigma \Lambda_2^2 \mu \partial_t \cdot) \mathbf{H}_M \wedge \mathbf{n}$
Densité de flux	$\partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$
Champ électrique	$(1 + \sigma (\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2) \mu \partial_t \cdot) \mathbf{E}_M \wedge \mathbf{n}$
Densité de courants	$\partial_t \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$

Tableau 6.1: Couplages surfaciques magnétique et électrique aux interfaces

	$\mathbf{a} (\Lambda_e = 0)$	$\mathbf{b} (\Lambda_e = 0)$	$\mathbf{c}$
$\Lambda_1$	$\Lambda_{h,bulk}$	$\Lambda_{h,bulk}$	$\sqrt{\Lambda_h^2 + \Lambda_e^2}$
$\Lambda_2$	$\sqrt{abs (\Lambda_{h,bulk}^2 - \Lambda_{h,surf}^2)}$	$\Lambda_{h,surf}$	$\Lambda_h$

Tableau 6.2: Trois alternatives pour le couplage des champs à la frontière entre deux milieux. Significations correspondantes des paramètres structurels (bulk veut dire de volume et surf de surface)

Il est difficile de conclure quant à la plus pertinente sans d'autres arguments provenant d'informations complémentaires [HUB\_1].

## 6.2.5 Fonctionnement transitoire

### Superposition d'harmoniques

Tant que les propriétés restent constantes, *i.e.* régime de fonctionnement linéaire, il est toujours possible de développer le signal en une série de Fourier. Cette série sera plus maniable, car discrète, dans le cas de signaux périodiques. Nous proposons dans ce paragraphe d'exploiter cette méthode pour un signal triangulaire d'induction moyenne unidirectionnelle imposée

$$\langle B(t) \rangle = \text{Re} \left\{ \sum_q \left( -j \frac{8B_{\max} |\sin(q\frac{\pi}{2})|}{q^2 \pi^2} \exp(jq\omega t) \right) \right\} \quad (6.59)$$

$\omega$  est la pulsation du fondamental. On a alors pour chacun des modes  $q$  (de vecteurs de diffusion  $k'_q = k'(q, \omega)$  et  $k''_q = k''(q, \omega)$ ) la perméabilité  $\mu_{app}(q, \omega)$  et la phase  $\varphi_{app}(q, \omega)$  apparentes qui sont données par (6.39). On montre enfin que les pertes par cycle et par unité de masse sont

$$\Pi_{mf} = \frac{64B_{\max}^2}{d\pi^3} \sum_q \left( \frac{\sin^2(q\frac{\pi}{2})}{q^3} \frac{\sin(\varphi_{app}(q, \omega))}{\mu_{app}(q, \omega)} \right) \quad (6.60)$$

### Résolution analytique linéaire 1-D

L'idée ici est de fournir une méthode transitoire pour la résolution simple analytique de problèmes linéaires (1-D dans cet exemple) avec l'équation de diffusion retardée (6.1). Celle-ci contient des termes d'espace-temps croisés; il s'agit de

trouver une forme canonique (6.61) forçant une séparation possible, malgré tout, de variables (Problème 1-D et toujours  $\Lambda = \Lambda_h, \Lambda_e = 0$ ).

$$(-\Lambda^2 \partial_z^2 (\cdot) + 1) (\tau \partial_t (\cdot) + 1) H_M = \mathbb{F}(H_M) = H_M \quad (6.61)$$

Le matériau n'est alors plus décrit que par

$\tau$ : un temps caractéristique d'amortissement,

$\Lambda$ : une longueur microscopique caractéristique.

On se propose de résoudre  $\mathbb{F}(h) = h$  en trois temps. (i) on pose  $g = \tau \partial_t h + h$ , (ii) on résoud  $\Lambda^2 \partial_z^2 g - g = -h$ , (iii) on reconstruit la solution générale pour  $h$  à partir des solutions propres  $h_n$

$$h_n(z, t) = \frac{1}{\tau} g_{z_n}(z) \left( \int_0^t g_{t_n}(t') \exp\left(+\frac{t'}{\tau}\right) dt' \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (6.62)$$

$$g_{z_n}(z) = G_{z_n}^+ \exp\left(+\sqrt{\frac{K_n}{\Lambda^2}} z\right) + G_{z_n}^- \exp\left(-\sqrt{\frac{K_n}{\Lambda^2}} z\right) \quad (6.63)$$

$$g_{t_n}(t') = \exp\left(+\frac{K_n t'}{(1 - K_n) \tau}\right) \quad (6.64)$$

Les constantes  $K_n, G_{z_n}^+, G_{z_n}^-$  seront déterminées par les conditions limites, initiales et les sources.

## Analyse numérique non linéaire

Lorsque les propriétés ne sont plus des constantes, mais varient avec les conditions de champs et de fréquence, il devient très difficile de résoudre les équations de diffusion retardée analytiquement. Nous pouvons cependant proposer des formulations en potentiels  $T_M = H_M$  et  $\mathbf{A}_M$ , solubles avec une méthode type Différence Finie (F.D.M.), et dédiées aux problèmes 1-D unidirectionnels et bi-directionnels.

### 1. Formulation F.D.M. unidirectionnelle en potentiel vecteur électrique

Il s'agit de projeter les opérateurs différentiels sur un maillage régulier discret, ici à une dimension, à l'aide des développements de Taylor-young [AUL\_1]. La méthode et l'algorithme seront détaillés plus loin (§ 6.3.3).

### 2. Formulation F.D.M. bi-directionnelle en potentiel vecteur magnétique

L'équation (6.4) exprimée pour un problème 1-D bidirectionnel ( $\mathbf{B} = B_x(z) \mathbf{u}_x + B_y(z) \mathbf{u}_y, \Lambda = \Lambda_h$  et  $\Lambda_e = 0$ ) en fonction du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}_M$  ( $\mathbf{A}_M = A_{M_x}(z) \mathbf{u}_x + A_{M_y}(z) \mathbf{u}_y$ ) devient

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \left( ([\nu] + \sigma [\Lambda^2] \partial_t \cdot) \begin{pmatrix} -\partial_z A_{M_y} \\ +\partial_z A_{M_x} \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \sigma \partial_t \begin{pmatrix} A_{M_x} \\ A_{M_y} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.65)$$

Les inconnues étant des couples  $(A_{M_x}, A_{M_y})$  en chaque noeud, il s'agit de les déterminer à chaque pas de temps par une résolution semi-implicite analogue à la précédente, faisant intervenir des projections d'opérateurs similaires dépendant des propriétés tensorielles. En travaillant à induction moyenne (ou flux) imposée; les conditions limites sur  $A_{M_x}$  et  $A_{M_y}$  sont alors simplement

$$-A_{M_x} \left( -\frac{\xi}{2} \right) = +A_{M_x} \left( +\frac{\xi}{2} \right) = \frac{\phi_y}{2L_x} \quad (6.66)$$

$$+A_{M_y} \left( -\frac{\xi}{2} \right) = -A_{M_y} \left( +\frac{\xi}{2} \right) = \frac{\phi_x}{2L_y} \quad (6.67)$$

Cette résolution 1-D bi-directionnelle peut aussi s'envisager à l'aide d'une formulation en champs  $\mathbf{H}_M$  directe [OLI\_4].

## 6.3 Cas bidimensionnel du tore magnétique

### 6.3.1 Présentation

Nous abordons le problème axisymétrique d'une rondelle ferromagnétique soumise à un courant d'excitation circulant sur l'axe central (Figure 6.13). Il crée un champ magnétique appliqué  $H_a$  orthoradial perpendiculaire au plan d'étude (donc à une seule composante). Les courants quant à eux sont induits dans le plan  $(r, z)$ . Le problème est alors de déterminer la diffusion retardée du champ et l'induction des courants dans la section de la rondelle [OLI\_1].

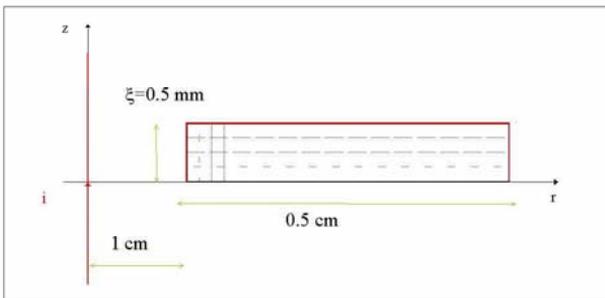


Figure 6.13: Géométrie du tore ferromagnétique: une rondelle axisymétrique (Intensité  $i$  sinusoïdale circulant sur l'axe de révolution).

### 6.3.2 Fonctionnement harmonique

La résolution analytique de ce problème (Figure 6.13) en régime linéaire harmonique est possible avec la méthode de séparation des variables [AUL\_1]. La solution en champ est une série infinie de fonctions trigonométriques suivant  $z$  et de Bessel de troisième espèce (ou fonctions de Hankel [JAC\_1]) d'ordre 0 suivant la direction  $r$ . Il est parfois plus simple d'utiliser une méthode de résolution numérique qui évite de "trimbaler" des séries infinies peu commodes; même si celle-ci contient aussi des imprécisions dues au maillage plus ou moins fin. Nous avons implémenté la méthode des Différences Finies (F.D.M.) sur cet exemple particulier. Nous présentons les résultats pour la distribution d'induction lissée en module et en phase sur la figure 6.14. Nous insistons sur la différence relative entre le calcul sans parois et le calcul avec parois qui peut atteindre entre 1 et 20 % suivant le cas (ici pour  $f = 50 \text{ Hz}$  et  $\Lambda = 100 \mu\text{m}$  nous avons 1 à 6% de différence pour le module et un déphasage de 0.125 à 0.15 radians pour l'angle). En augmentant  $\Lambda$  ou la fréquence, cette différence relative s'accroît.

### 6.3.3 Fonctionnement transitoire

En régime non-linéaire transitoire, une méthode numérique est souvent incontournable. En effet, la présence de propriétés variables interdit toute interversion dans les équations de diffusion (6.1) ou (6.4) que nous proposons de résoudre par Différence Finie en fonction du champ d'opposition lié aux courants induits réduit par rapport aux courants microscopiques  $H_{M_e}$  (la signification du champ  $H_{M_a}$  est expliquée dans la figure 6.15).

$$\left( \partial_z^2 (\cdot) + \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r (\cdot)) \right) (1 + \tau \partial_t (\cdot)) H_{M_e} - \sigma \mu \partial_t H_{M_e} = \sigma \mu \partial_t H_{M_a} \quad (6.68)$$

Dans la suite nous appliquons l'algorithme de la figure 6.15 pour simuler la distribution des champs dans la rondelle. Nous avons représenté (Figure 6.16) la différence relative entre les profils d'induction pour le cas dynamique ( $\Lambda = 100 \mu\text{m}$ ) et le cas classique ( $\Lambda = 0 \mu\text{m}$ ) à deux instants ( $\omega t = \frac{\pi}{2}$  (maximum de courant) et  $\omega t = \pi$  (zéro de courant)). Le déplacement des parois peut changer considérablement la valeur de l'induction au zéro de courant. Enfin sont représentés figure 6.17 les cycles apparents mesuré et simulé.

## 6.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'appréhender, d'un point de vue analytique et semi-analytique, la représentation et la modélisation des matériaux ferromagnétiques doux proposées dans les parties précédentes. Des équations de diffusion retardée ont d'abord été introduites puis résolues dans des cas d'école simples en hautes fréquences (épaisseur de peau très faible devant la taille de l'échantillon) puis moyennes fréquences (épaisseur de peau comparable à la taille de l'échantillon). Nous avons traité les cas à une dimension en champ unidirectionnel et bidirectionnel et en deux dimensions en champ unidirectionnel, en régime harmonique

puis transitoire. Nous avons mis en évidence l'influence de la structure magnétique microscopique et confirmé le lien avec les pertes d'énergie, le caractère passe-bas de la matière et l'hystérésis dynamique.

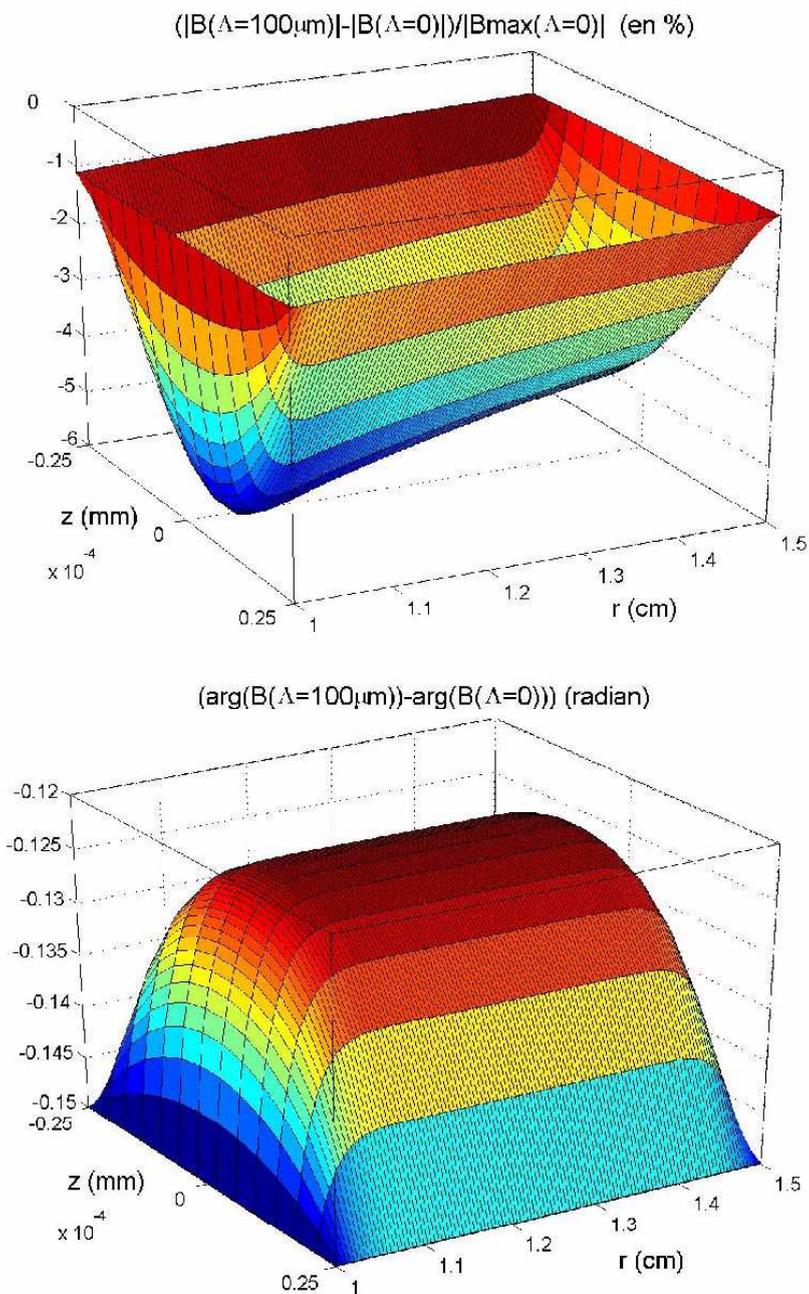


Figure 6.14: Différence d'induction complexe en module et en phase entre le cas dynamique et le cas classique.

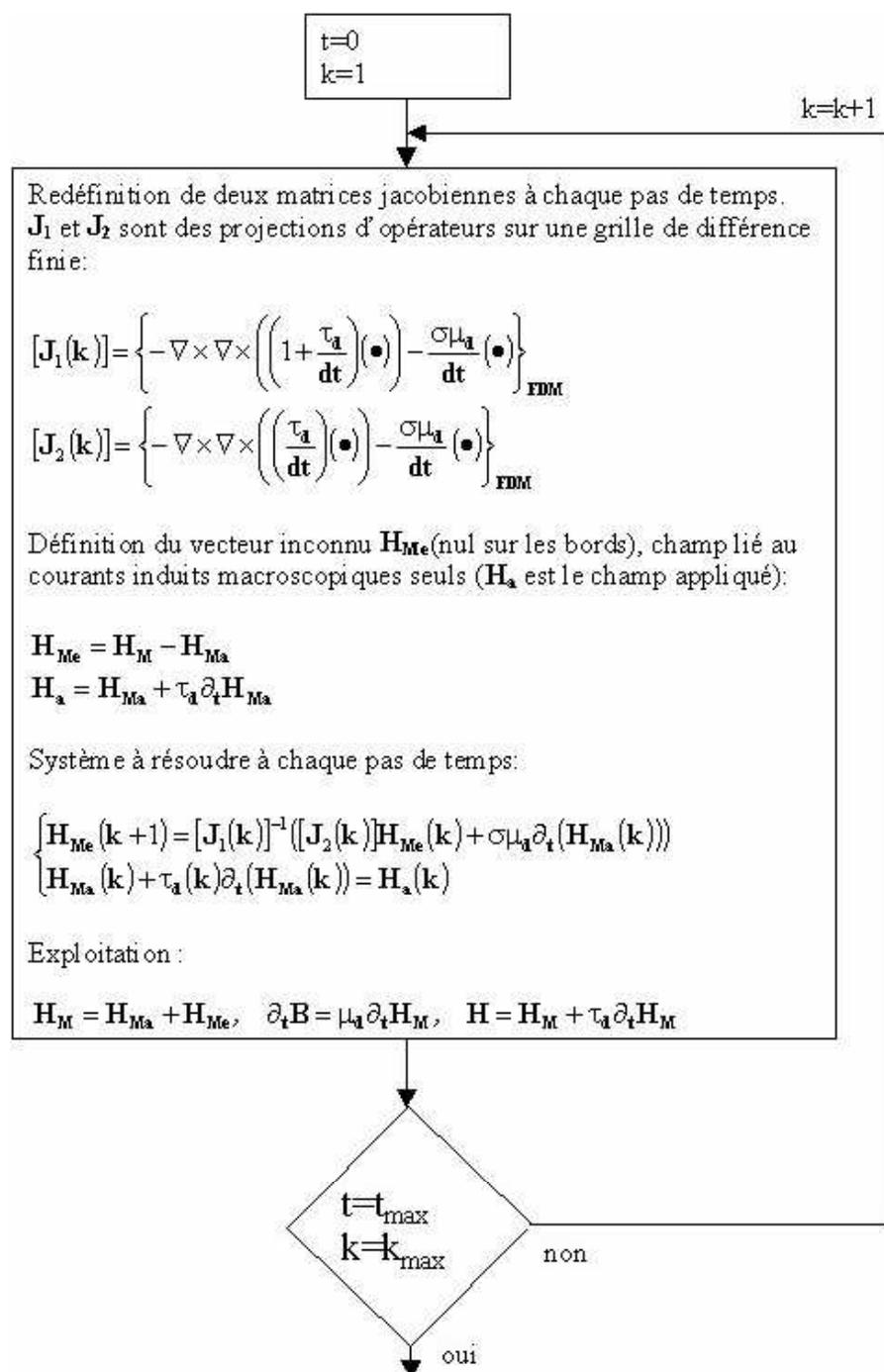


Figure 6.15: Schéma de principe de l'algorithme mixte implicite-explicite et écriture des systèmes linéaires successifs résolus par FDM.

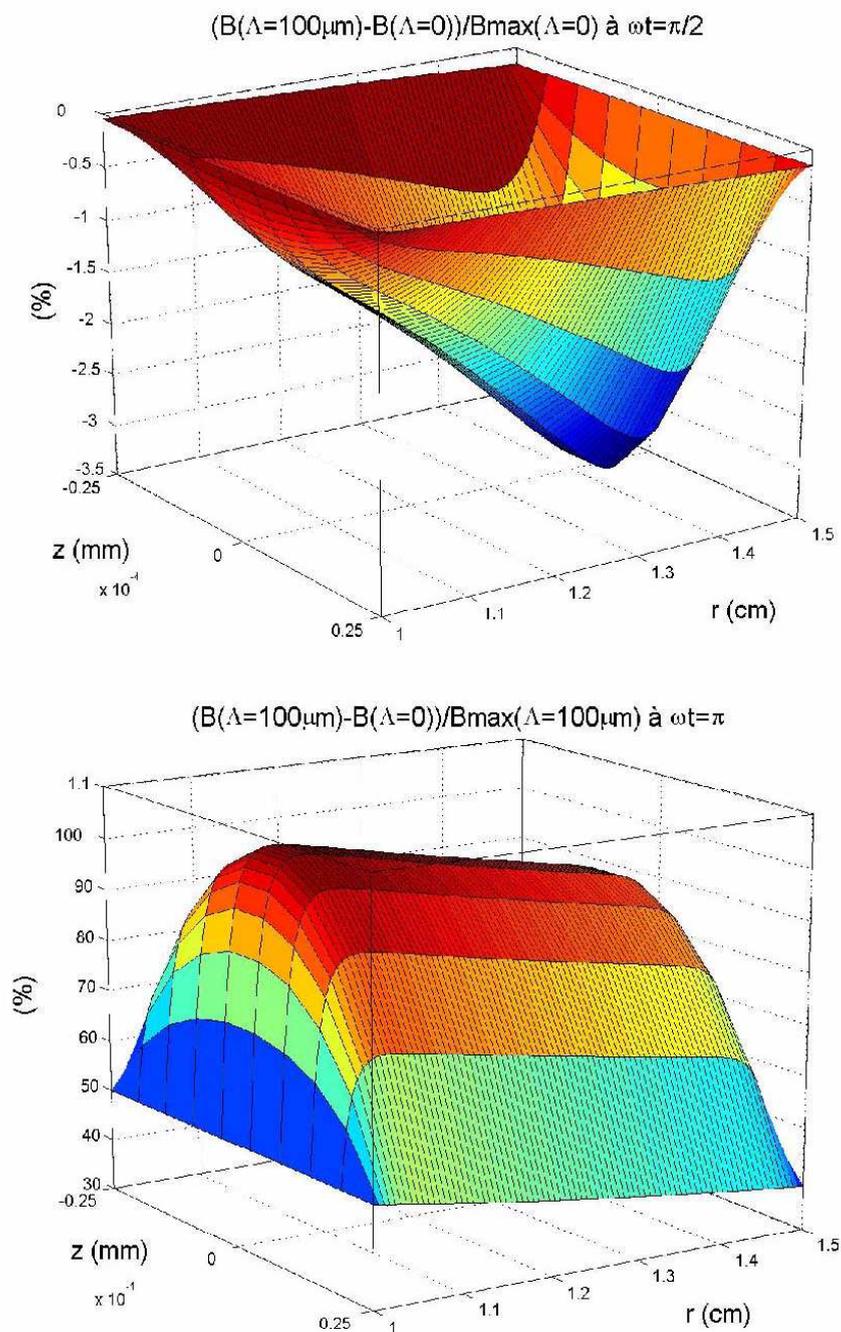


Figure 6.16: Profils de la différence d'induction pour deux instants particuliers en régime transitoire sinusoïdal non-linéaire.

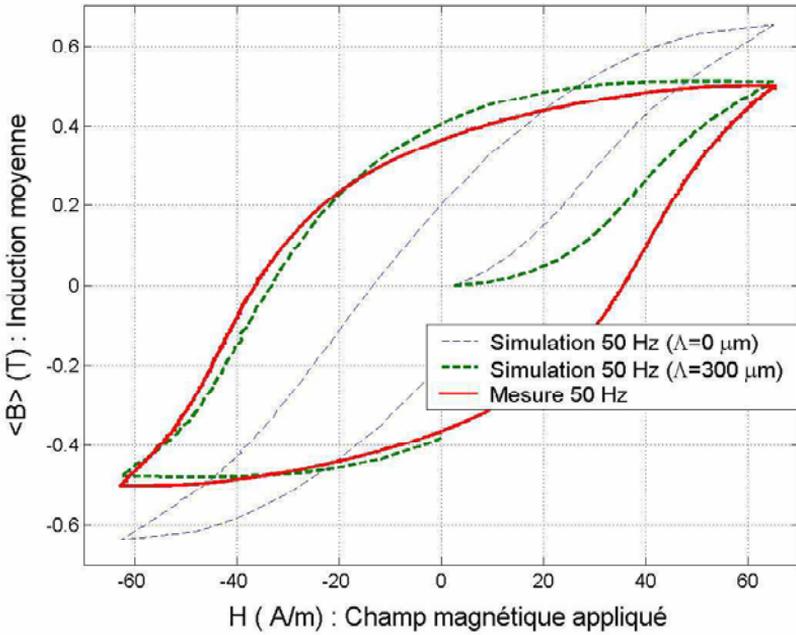


Figure 6.17: Première comparaison entre les cycles  $\langle B \rangle (H_a)$  mesurés et simulés pour un FeSi excité en induction imposée sinusoïdale.  $\lambda$  semble valoir environ 0.3 mm; la conductivité, la perméabilité et l'épaisseur de la tôle étant connues par ailleurs (matériau M400-50A., résistivité de  $45 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ , perméabilité relative initiale de 11000, tôle d'épaisseur 0.5 mm).



## Chapitre 7

# Mesures Expérimentales

*” Ne cherchez rien derrière les faits, ils sont eux mêmes la doctrine ”*

**Goëthe**

*” On ne doit pas chercher des modèles pour les phénomènes physiques mais des formes mathématiques dans lesquelles ils s’inscrivent ”*

**Platon**

## 7.1 Principe d'homogénéisation, discussion

Suite à des travaux parallèles sur l'interaction entre les champs électromagnétiques et la matière, nous sommes en mesure de proposer un modèle de représentation des matériaux magnétiques doux et une formulation dédiée à leur fonctionnement en régime dynamique. Comme tout modèle, celui-ci repose sur la définition de paramètres qu'il faut donc identifier. La spécificité de ces paramètres est qu'ils sont caractéristiques du matériau et non de la géométrie du dispositif (c'est en tout cas la motivation qui a été le moteur de nos recherches). Cette affirmation peut être critiquée et remise en question lorsque l'on sait que la structuration des matériaux magnétiques dépend de la géométrie considérée. Comme ces paramètres, bien que locaux, contiennent l'information relative à la structure magnétique pour les besoins d'une représentation macroscopique des dispositifs réels, on peut s'attendre à ce qu'ils dépendent eux aussi de la géométrie de l'échantillon. Nous répondons à cette critique en mettant en avant le fait que cette dépendance avec la géométrie n'intervient fondamentalement qu'en présence d'échantillons de taille microscopique (typiquement une cinquantaine de micromètre) de l'ordre de la taille des domaines magnétiques, et inférieure à la taille caractéristique des grains du polycristal. Or nous manipulons ici des échantillons polycristallins de taille macroscopique nettement supérieure (longueur et largeur de la tôle de plusieurs centimètres, voir dizaine de centimètres). La structure adoptée par le matériau dont est fait la tôle ne dépendra donc quasiment pas de ses dimensions ni de sa géométrie mais plutôt de la géométrie et de la taille caractéristique des grains du polycristal; et ceci est donc bien une caractéristique propre au matériau et non de la géométrie de l'échantillon. Ce sera donc pris en compte dans les paramètres que nous identifierons. Une autre objection peut encore être émise quant au fait que l'épaisseur des tôles est relativement faible. Elle peut effectivement influencer la structure magnétique du matériau, mais surtout si elle est très faible et inférieure à la taille des grains. C'est le cas pour quelques échantillons bien particuliers tels que les FeSi GO (à grains orientés), ou d'autres utilisés dans des applications spécifiques (sciences de l'information et des télécommunications, couches minces, mémoires magnétiques ...etc. [GAN\_1], [EKS\_1], [BEA\_1], [PEC\_1]). La géométrie influence alors aussi la perméabilité; nous suggérons alors d'intégrer l'architecture en tôles minces et leur épaisseur dans un matériau "massif" homogénéisé, équivalent pour l'hystérésis et les pertes observables (cf § 8.4.2). Enfin, chacun de ces paramètres a une signification physique: l'un correspond à la perméabilité statique du matériau (orientation et organisation structurelle spontanées de l'aimantation en présence d'un champ appliqué) et l'autre est relié à des propriétés dimensionnelles et dynamiques de la structure magnétique (taille des domaines, mobilité des parois magnétiques, ...etc...).

Bien que dans les expériences normalisées du laboratoire, les échantillons mesurés aient une géométrie simple, ils en ont tout de même une qui va donc malgré tout influencer le comportement observé, et ce surtout en régime dynamique à cause des courants induits qui modifient le profil du champ magnétique à l'intérieur de la tôle. Heureusement, cette géométrie reste simple, de nombreuses

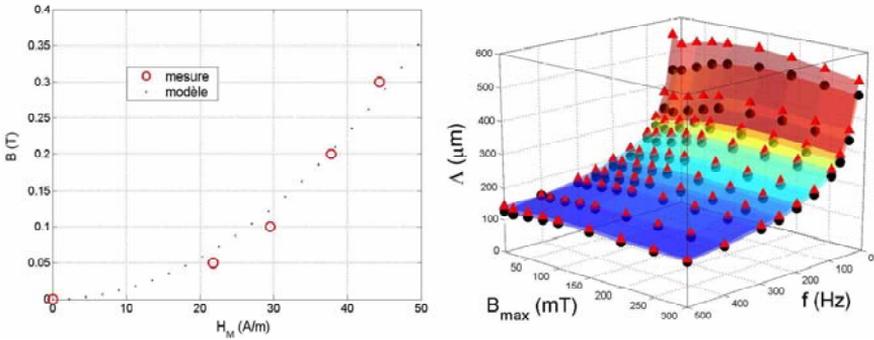


Figure 7.1: Gauche: évolution de la perméabilité statique aux faibles valeurs d'induction (perméabilité initiale et domaine de Rayleigh). Droite: identification de  $\Lambda$ . L'écart-type et les différences sont estimées autour de 8 % (dans le pire des cas, *i.e.* à très bas niveau). La prédiction des pertes énergétiques restent précises à mieux que 5 % près.

symétries et quelques invariances peuvent être utilisées (toujours dans l'hypothèse d'un matériau homogène et d'une géométrie de taille macroscopique). Notre travail consistera donc à faire le lien entre les grandeurs observées et les paramètres désirés. Nous devons donc utiliser notre modèle de représentation pour calculer et simuler la réponse des échantillons. Il s'agit ensuite de caler les bons paramètres qui font se superposer la réponse calculée et la réponse simulée. Une fois le lien établi, cette identification n'est qu'une inversion de modèle. Nous proposons de construire une procédure automatique qui, à l'aide des réponses mesurées données en entrée, fournira la valeur des paramètres matériaux en sortie, pour différents niveaux d'induction et de fréquence. La plupart des mesures expérimentales des propriétés des matériaux magnétiques doux se fait sur des échantillons plats qui se présentent sous la forme de tôles. Il s'agit, pour chacun de ces échantillons, de déterminer les caractéristiques propres au comportement statique (fréquence d'utilisation tendant vers zéro ou suffisamment faible pour que les phénomènes dynamiques soient négligeables) ou dynamique (fréquence d'utilisation quelconque comprise dans le domaine classique de l'électrotechnique, et pour laquelle les courants induits acquièrent de l'importance) du matériau. Outre cette première différenciation entre comportement statique et comportement dynamique que nous retrouvons dans l'existence de deux paramètres matériaux (la perméabilité locale statique  $\mu$  et un paramètre dynamique caractéristique de la structure magnétique  $\Lambda$ ). La figure 7.1 donne un exemple d'identification de ces deux propriétés en régime linéaire et la figure 7.2 un exemple de reconstruction de cycles), l'échantillon peut être sollicité suivant des directions diverses constantes ou bien variables. Ce choix est d'ailleurs déterminé par l'utilisation qui sera faite de la tôle magnétique dans les applications (transformateurs: sollicitation unidirectionnelle constante, moteur: sollicitation

bidirectionnelle). Ainsi deux bancs expérimentaux ont été conçus à cet effet. Le premier est le cadre EPSTEIN (Figure 7.3 et annexe 20) pour étudier le comportement statique et dynamique des tôles en excitation unidirectionnelle dans le plan et suivant la longueur de la tôle. Le deuxième est le cadre RSST300 (Figure 7.14 et annexe 20) pour étudier le comportement statique et dynamique des tôles magnétiques excitées par une source qui tourne dans le plan de la tôle. Nous proposons dans ce qui suit de présenter brièvement le principe de fonctionnement de ces deux bancs expérimentaux. L'objectif n'est pas de rentrer dans la technicité d'élaboration des bancs et des mesures (ces travaux ont déjà été réalisés par d'autres thésards qui m'ont précédé [HEV\_1], [SPO\_2]) mais de préciser les conditions d'expérience et les observables auxquelles nous avons accès par mesure des diverses grandeurs électriques disponibles. Notre travail consiste à choisir les observables pertinentes ainsi que les méthodes de calcul adaptées pour en déduire les propriétés locales internes au matériau, qui sont intéressantes pour les modélisateurs et les simulateurs.

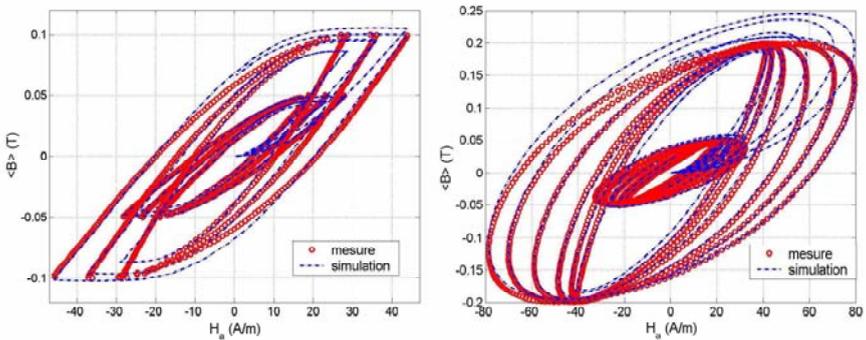


Figure 7.2: Cycles d'hystérésis apparents reconstruits pour le même échantillon sollicité en induction triangulaire (à gauche,  $f = 50, 250$  et  $500$  Hz) et sinusoïdale (à droite,  $f = 50, 100, 200, 400, 600$  et  $800$  Hz). L'écart-type sur la prédiction de l'induction réellement parcourue se trouve entre 2 mT (à 100 mT,  $\sim 2\%$ ) et 3.6 mT (à 50mT,  $\sim 7.2\%$ ) pour les cycles de gauche; et entre 3.4 mT (à 200 mT,  $\sim 1.7\%$ ) et 14.8 mT (à 200 mT,  $\sim 7.4\%$ ). La prévision des pertes quant à elle reste précise à mieux que 3%.

Dans les deux configurations qui sont présentées, le cas d'excitation polaire (*i.e.* lorsque le vecteur induction  $B$  est perpendiculaire au plan de la tôle) n'est jamais étudié. En effet, rares sont les applications qui utilisent les tôles dans cette configuration car elle est trop pénalisante. Il arrive cependant qu'elle soit inévitable en bords de structures (coins et extrémités par exemple). De deux choses l'une:

1. Soit le matériau peut être considéré comme isotrope, le problème est alors résolu en une seule étape. La propriété scalaire identifiée dans une direc-

	<i>Linéaire</i>	<i>Non-Linéaire</i>	<i>Non-Linéaire</i>	<i>Non-Linéaire</i>
<b>EPSTEIN</b>	$\mu_c, \Lambda_c$	$\mu_v, \Lambda_c$	$\mu_v, \Lambda_v$	hystérésis, $\Lambda_v$
directions	1	1	1	1
forme (B)	$\Delta$ ou $\bigcirc$	$\Delta$ ou $\bigcirc$	$\Delta$ ou $\bigcirc$	$\Delta$ ou $\bigcirc$
domaine	$f$	$f$	$t$	$t$
observables	$\mu_{app}, \Pi_{mf}$	$\mu_{app}, \Pi_{mf}$	$\mu_{app}, \text{cycles}$	cycles
méthode	analytique	analytique	numérique	numérique
inconnue	$T_M$	$T_M$	$T_M$	$T_M$
<b>RSST300</b>	$\mu_c, \Lambda_c$	$\mu_v, \Lambda_c$	$\mu_v, \Lambda_v$	hystérésis, $\Lambda_v$
directions	2	2	2	2
forme (B)	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
domaine	$f$	$f$ et $t$	$t$	$t$
observables	-	$\mu_{app}, \Delta\theta_{app}, \Pi_{mf}$	$\mu_{app}, \Delta\theta_{app}, \Pi_{mf}$	-
méthode	-	analytique	numérique	-
inconnue	-	$\mathbf{H}_M$ ou $A$	$A$	-

Tableau 7.1: Synthèse des différentes configurations expérimentales, des paramètres à identifier (l'indice c signifie constant en cours de cycle et v variable), des observables et des méthodes utilisées (Tm: potentiel vecteur électrique statique, A: potentiel vecteur magnétique, tous les deux normaux au plan d'étude). Le triangle et le cercle se rapportent aux formes triangulaire ou sinusoïdale du signal imposé pour l'induction

tion avec le cadre **EPSTEIN** est aussi utilisable pour les deux autres directions. Quant à l'effet de géométrie macroscopique lié à l'épaisseur en excitation polaire, ce seront les équations de champ qui s'en chargeront.

2. Soit le matériau est anisotrope, on peut alors expérimenter celui-ci en plusieurs étapes avec le banc **RSST300** (*i.e.* avec au moins deux échantillons texturés différemment mais avec le même matériau). Un premier échantillon avec deux axes cristallographiques dans le plan de la tôle puis un autre avec le troisième et dernier axe accompagné d'un des deux autres précédents, dans le plan de la tôle, seront ainsi mesurés et fourniront un maximum d'informations (suffisantes?).

Nous proposons dans les tableaux 7.1 et 7.2 de récapituler les différentes configurations possibles et le mode d'identification des paramètres définissant les propriétés matériaux recherchées.

	Paramètres	Observables
<b>EPSTEIN</b>	$\mu_s (H_M)_c$	$\mu_{app}, \forall$ cycle statique à $\langle B \rangle_{\max} = \mu_s H_{M_{\max}}$
	$\mu_s (H_M)_v$	$\mu_{app}, \forall$ cycle statique à $\langle B \rangle_{\max}$
	$\Lambda (H_M, \partial_t H_M)_c$	$\Pi_{mf}, \forall$ cycle dynamique à $\partial_t H_{M_{\max}}$
	$\Lambda (H_M, \partial_t H_M)_v$	cycles $(H_a, \langle B \rangle)$ dynamiques à $(H_M, \partial_t H_M)$
	hystérésis	cycles statiques à $\langle B \rangle_{\max} = \mu_s H_{M_{\max}}$
<b>RSST300</b>	$[\mu]_v$	$\mu_{app}$ et $\Delta\theta_{app}, \forall \mathbf{H}_M$
	$[\Lambda]_c$	$\Pi_{mf}, \forall$ cycle dynamique
	$[\Lambda]_v$	$\mu_{app}$ et $\Delta\theta_{app}, \forall (\mathbf{H}_M, \partial_t \mathbf{H}_M)$

Tableau 7.2: Les paramètres et les observables qui permettent de les identifier pour chaque banc de mesure.

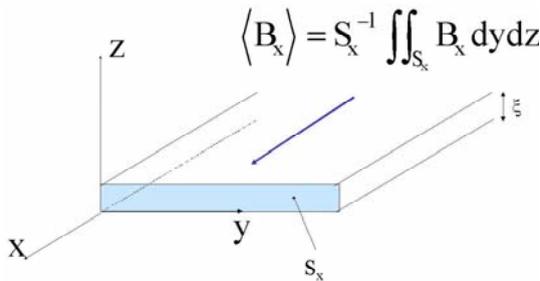


Figure 7.3: Schéma simplifié de la configuration type Epstein.

## 7.2 Configuration unidirectionnelle

### 7.2.1 Présentation

#### Principe de la mesure

Le principe est celui, bien connu, du transformateur. Un courant circulant dans les spires du primaire crée un champ magnétique dans tout le circuit magnétique. Ce champ induit une densité de flux magnétique fonction du champ et des propriétés plus ou moins perméables du matériau dont est constitué le circuit. On mesure ainsi une tension induite entre les deux bornes du secondaire qui est directement reliée à la première dérivée temporelle du flux traversant la section de l'échantillon (cf § 5.6.1, équation (5.69) et annexe 20).

#### Formes d'onde

On observe expérimentalement et on montre théoriquement qu'il est plus judicieux d'imposer la tension au secondaire (*i.e.* le flux et la fréquence) et de mesurer l'intensité au primaire (donc le champ magnétique) nécessaire à l'induction de ce flux. Ceci est techniquement réalisé à l'aide d'une boucle d'asser-

vissement installée sur le banc expérimental (cf annexe 20). De plus, on montre aussi qu'il est plus simple et rapide de caractériser le comportement dynamique du matériau en imposant une tension au secondaire qui crée un flux d'induction de forme triangulaire ( $\partial_t B = \text{constante}$ ) à travers la section de l'échantillon. Ceci s'explique par le fait que l'on impose ainsi, en moyenne, aux parois d'avoir une vitesse constante. Il en résulte un comportement dynamique indépendant de cette vitesse. Une dépendance non linéaire en cours de cycle de la propriété dynamique avec la fréquence est ainsi évitée en régime linéaire et estompée en régime non linéaire (cette non linéarité ne provenant alors que de la perméabilité). En revanche, dès que l'on change le niveau de  $\partial_t B$ , on change tout de même la vitesse caractéristique des parois et la propriété bien que constante en cours de cycle aura alors changé d'un cycle à l'autre [HEV\_2]. La dépendance vis à vis du niveau de  $B$  quant à elle ne peut être évitée. Nous reviendrons sur ces variations dans deux paragraphes.

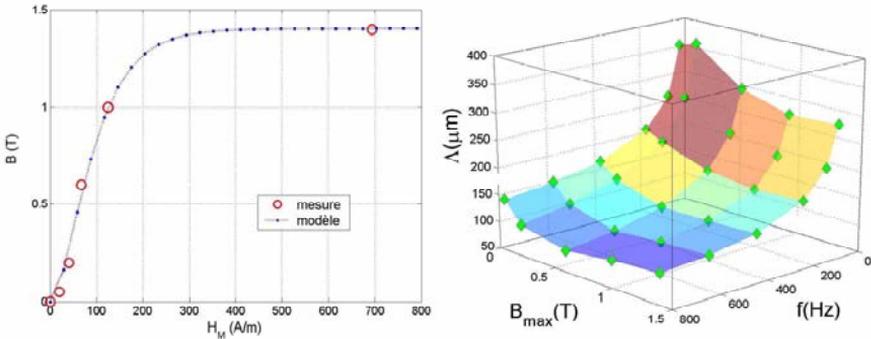


Figure 7.4: Gauche: évolution de la perméabilité statique non linéaire. Droite: identification de  $\Lambda$  en approximation linéaire à l'aide des pertes. Leur prédiction restera précise à haute induction tant que les non-linéarités seront modérées. Le calcul à basse induction est ici moins précis que lors d'une mesure spécifique avec des réglages adaptés et différents.

## Observables

Les grandeurs auxquelles nous avons directement accès sont donc l'intensité au primaire et la tension au secondaire. Il est de plus simple de relier l'intensité à un champ magnétique moyen  $H_a$  appliqué à la surface du circuit et la tension à une densité moyenne de flux  $\langle B \rangle$  traversant la section de l'échantillon. Le passage de l'un à l'autre est déjà réalisé sur le banc expérimental de façon automatique et le logiciel d'exploitation des données (Epstein\_frame, [HEV\_1]) nous fournit directement les cycles apparents ( $H_a, \langle B \rangle$ ) pour chaque niveau d'induction et de fréquence. Ces deux grandeurs ne sont que des grandeurs apparentes. Les profils de champ et d'induction ne sont en réalité pas constants dans l'épaisseur

de la tôle; et ceci est d'autant plus vrai que la fréquence est grande. Un calcul précis des profils de champ et d'induction statistiquement adoptés est possible à l'aide d'un modèle de diffusion dynamique des champs lissés et des propriétés locales homogénéisées du matériau. Modèle dont nous disposons (Chapitres 4 et 5). La connaissance de ce profil suffit au calcul du cycle apparent. En changeant les propriétés, on change les profils et les cycles apparents. Il est possible de déterminer la valeur des paramètres qui permet de faire s'accorder l'expérience et la simulation, et ce pour chaque niveau d'induction et de fréquence (Les figures 7.4 et 7.5 montrent un exemple d'identification des propriétés et des reconstructions de cycles obtenus). Outre ce cycle apparent, il suffira parfois (régime linéaire) de connaître des grandeurs plus globales, définies à partir du cycle parcouru sans avoir besoin d'en connaître la totalité:

- La perméabilité apparente (en  $H.m^{-1}$ ), définie par (6.24) (voir § 6.2.1).
- Les pertes spécifiques massiques par cycle (en  $J.kg^{-1}$  ou  $W.s.kg^{-1}$ ), définies par (6.28) (voir § 6.2.1).

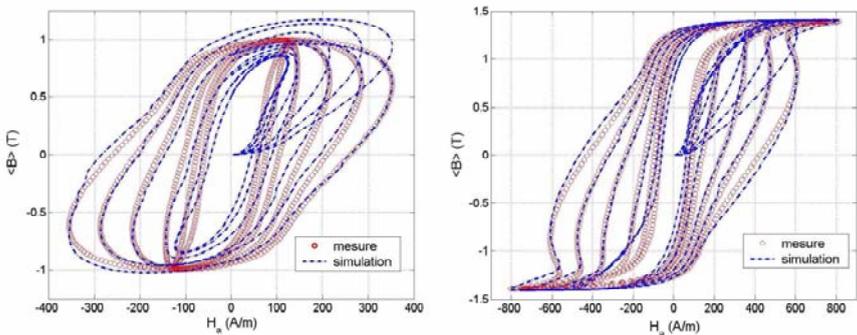
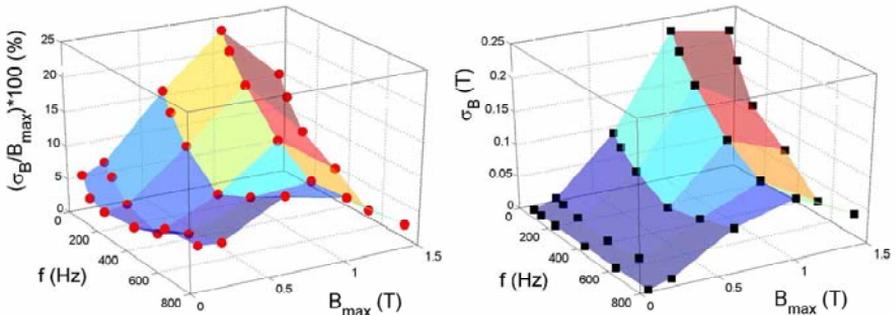


Figure 7.5: Première reconstruction approchée des cycles à 1.0 T (à gauche) et 1.4 T (à droite) pour une induction imposée sinusoïdale à  $f = 50, 100, 200, 400, 600$  et  $800\text{ Hz}$ . La propriété dynamique est gardée constante au cours de chacun des cycles, ce qui permet une ébauche fidèle mais peu précise du comportement global. Les erreurs sont importantes surtout à basse fréquence (l'écart-type sur  $B$  est maintenant entre 37 mT (à 1.4 T,  $\sim 2.6\%$ ) et 240 mT (à 1.0 T,  $\sim 24\%$ )). Le calcul des pertes (*i.e.* l'aire des cycles) est peu altéré sauf à induction intermédiaire (toujours de l'ordre de quelques %).

### Paramètres à identifier

Nous devons identifier deux propriétés matériaux, la perméabilité statique  $\mu$  et le paramètre structural dynamique  $\Lambda$ . Dans la configuration du cadre Epstein, il s'agit de scalaires définis par un seul réel.

- La première propriété est dite statique, elle ne dépend que du niveau d'induction  $B$ . Nous préférons, pour des raisons de modélisation, de simulation mais aussi de physique, parler en terme de champ magnétique statique  $H_M$  (cf. modèle § 6.1.1). Ainsi, nous dirons que  $\mu$  ne dépend que du niveau de  $H_M$ . La relation liant  $B$  à  $H_M$  peut être linéaire ou non linéaire. Dans le premier cas nous parlerons de perméabilité statique  $\mu_s$  constante, telle que  $B = \mu_s H_M$ . Dans le deuxième il faut définir, en plus de la perméabilité statique variable  $\mu_s(H_M)$ , une perméabilité statique différentielle  $\mu_d(H_M)$ , définie par  $\delta B = \mu_d(H_M) \delta H_M$ . C'est elle dont nous aurons besoin pour les simulations (En régime linéaire, les perméabilités statique et différentielle sont confondues). Nous simplifierons donc la notation en écrivant  $\mu_d(H_M) = \mu(H_M)$ . Si la loi de comportement statique est univoque, nous devons donc simplement identifier  $\mu(H_M)$ , et s'il y a une hystérésis statique alors il y aura au moins un autre paramètre à déterminer en plus de  $\mu(H_M)$ , qui est alors dans ce cas associée à la loi de comportement anhystérétique qui elle reste univoque.
- La deuxième propriété est dite dynamique, elle dépend du niveau de  $B$  et de celui de  $\partial_t B$ . Nous pouvons aussi parler en terme de champ magnétique retardé  $H_M$  et de dérivée temporelle de ce champ  $\partial_t H_M$  (cf. modèle § 6.1.1). Ainsi nous dirons que  $\Lambda$  ne dépend que du couple  $(B, \partial_t B)$  ou  $(H_M, \partial_t H_M)$ . Il s'agira ici toujours d'une fonction linéaire ou non linéaire mais univoque (sens de parcours du cycle pris en compte dans le signe de  $\partial_t H_M$ ). C'est directement elle dont nous aurons besoin dans les calculs et les simulations numériques.



Figure~7.6: Visualisation des écart-types entre l'induction réelle et celle simulée pour chacun des cycles. Cette imprécision reste correcte à induction modérée. Dès que les non-linéarités deviennent influentes, les cycles ne peuvent être reconstruits avec un  $\Lambda$  constant, surtout à basse fréquence, où l'hystérésis statique ne fait qu'amplifier les erreurs.

La première fonction ( $\mu_s(B)$  et  $\mu_d(B)$  ou  $\mu_s(H_M)$  et  $\mu_d(H_M)$ ) sera déterminée à l'aide de la mesure des cycles statiques apparents (*i.e.* à fréquence très faible,  $f = 10$  Hz typiquement par exemple) pour plusieurs niveaux de  $B$  ou de  $H_M$ . La deuxième ( $\Lambda(B, \partial_t B)$  ou  $\Lambda(H_M, \partial_t H_M)$ ) sera déterminée à l'aide de la mesure des cycles dynamiques en faisant varier la fréquence ainsi que l'induction. Les autres paramètres, en cas d'hystérésis statique, seront déterminés à l'aide du parcours pas à pas des cycles statiques.

## Méthodes de calcul

La simulation passe par un calcul de diffusion du champ magnétique dans l'épaisseur de la tôle. Le problème est unidimensionnel et ne nécessite la détermination que d'une seule inconnue qui ne dépend que d'une seule dimension (la position dans l'épaisseur). Cette inconnue sera le champ magnétique classique  $H_M$  normal à la section de chaque tôle, ou bien la composante normale du potentiel vecteur électrique  $T_M$ ; les deux étant égaux dans ce cas particulier. L'équation de diffusion utilisée est donnée par (6.1) avec  $\Lambda = \Lambda_h$  et  $\Lambda_e = 0$ . En régime unidirectionnel linéaire (*i.e.* lorsque tous les coefficients sont constants en cours de cycle); nous ferons un simple calcul de diffusion analytique dans le domaine fréquentielle à l'aide d'une transformation de Fourier (cf chapitre 6 § 6.2.2). Une résolution analytique sera aussi envisagée lorsque seule la perméabilité est non linéaire. En régime unidirectionnel non linéaire pour les deux paramètres statique et dynamique, nous passerons par un calcul numérique de la diffusion dans l'épaisseur de la tôle. La méthode utilisée est celle des différences finies [ARI\_1] (Chapitre 6 § 6.2.5). Certaines mesures seront effectuées par nous même pour tester ces procédures, mais nous nous plaçons dans une perspective de fourniture d'un outil automatique aux expérimentateurs qui désirent communiquer les propriétés matériaux aux ingénieurs matériaux, concepteurs, modélisateurs et simulateurs. De nombreuses mesures sur divers échantillons ont déjà été réalisées au L.E.G. (Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, maintenant G2ELab). La figure 7.6 fournit une évaluation des erreurs commises sur le calcul de l'induction. Des améliorations sont possibles grâce à une deuxième identification plus précise en statique et en dynamique (figures 7.7, 7.8 et 7.9).

### 7.2.2 Principes et algorithmes

Nous présentons dans cette partie les principes des calculs analytiques et numériques et les algorithmes de détermination des propriétés matériaux statique et dynamique. Cette identification doit naturellement se faire aussi pour un maximum de niveaux d'induction et de fréquence. Plus grand sera le nombre de mesures et plus précises seront les prédictions. Et ce jusqu'à ce que nous trouvions des lois *ab initio* pertinentes associées aux propriétés statiques et surtout dynamiques. Auquel cas, un minimum de mesures seraient nécessaires sans que la précision des prédictions et des simulations n'en pâtisse. Ces recherches se poursuivent encore grâce à une bibliographie abondante traitant des processus linéaires et non linéaires d'aimantation.

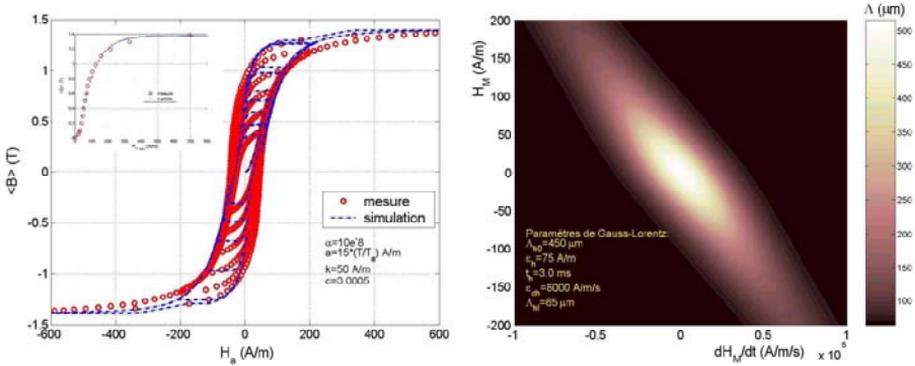


Figure 7.7: Identifications plus fines des propriétés de l'échantillon M400-50A, incluant son hystérésis statique (à gauche, modèle et paramètres de Jiles-Atherton) et ses dynamiques microscopiques non-linéaires (à droite, modèle et paramètres de Gauss-Lorentz).

### Régime linéaire

Un seul cas intervient ici : la perméabilité statique ( $\mu_s$ ) et la temporisation structurelle magnétique ( $\sigma\Lambda^2\mu$ ) restent constantes en cours de cycle. Nous pouvons utiliser la méthode de la transformation de Fourier applicable pour quasiment tous les régimes linéaires.

- La perméabilité linéaire est déterminée en régime statique (la fréquence est très faible, de l'ordre de quelques dizaines de Hertz maximum, et idéalement tendant vers 0) pour lequel le profil en champ dans la section de la tôle est constant. On suppose de plus que pour chaque cycle d'amplitude  $\langle B \rangle_{\max} = \mu_s H_{M,\max} = B_{\max}$ , la perméabilité reste constante en cours de cycle (ceci n'est vrai que pour des champs suffisamment faibles). Il s'agit en fait de la perméabilité statique qui est égal à la perméabilité statique différentielle en régime effectivement linéaire et qui lui est différente en régime quelconque. Nous pouvons cependant utiliser ce traitement approximatif même pour les cas non linéaires, qui seront affinés dans la suite. Cette étape peut être utile pour une première approche rapide de la solution de l'identification (Figure 7.19).
- Le paramètre structurel magnétique  $\Lambda$  est déterminé en régime dynamique, *i.e.* grâce à plusieurs mesures effectuées pour plusieurs niveaux d'induction mais aussi de fréquence [OLI\_2]. L'idée est toute simple, il suffit de calculer la diffusion du champ dans la tôle grâce au modèle proposé, d'en déduire l'intégrale des pertes massiques spécifiques par cycle et de caler le paramètre  $\Lambda$  pour égaliser les pertes calculées aux pertes mesurées. Cette procédure visant à utiliser une grandeur globale, moyennée à la fois dans

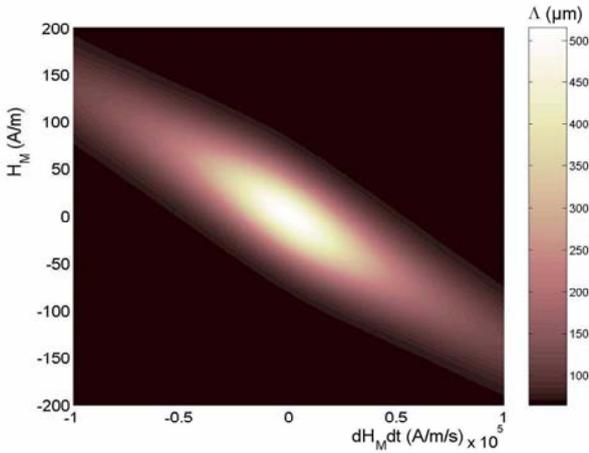


Figure 7.8: Surface caractéristique des dynamiques microscopiques et des variations de la propriété structurale en fonction du champ anhystérique et de sa dérivée.

l'espace et dans le temps, est pertinente si les outils fréquentiels sont applicables, *i.e.* si nous sommes dans un régime quasi-linéaire. La recherche et le calage se fait à l'aide d'un algorithme adaptatif utilisant une méthode dichotomique de recherche de zéro de fonction (Figure 7.19). Un critère de précision est choisi de telle sorte que les pertes calculées soient égales aux pertes mesurées à un pourcentage près. Il s'agit en fait d'une erreur relative admissible  $\varepsilon$  qui peut être librement choisie par l'utilisateur. Les applications laissent aussi la liberté de choisir sa forme d'onde. Tant que le régime est supposé linéaire, il suffit de décomposer ce signal en un fondamental et plusieurs harmoniques. Il reste que le signal le plus approprié pour interpréter facilement les résultats est le triangle pour les raisons dont nous avons déjà discutées en 7.2.1.

### Régime non linéaire

Plusieurs modes de résolution sont possibles ici:

1. La perméabilité reste univoque mais varie en cours de cycle. Le paramètre  $\Lambda$  quant à lui reste dans un premier temps constant sur un cycle mais varie naturellement d'un cycle à l'autre, tout comme dans le paragraphe précédent.
2. Les deux propriétés restent univoques mais varient en cours de cycle et sont non linéaires.

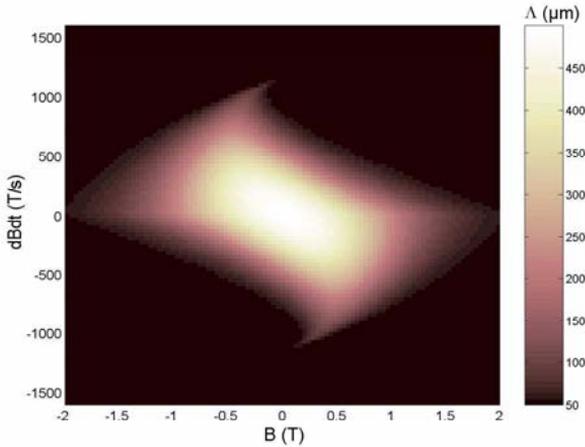


Figure 7.9: Surface caractéristique des dynamiques microscopiques et des variations de la propriété structurale en fonction de l'induction et de sa dérivée.

3. La propriété statique n'est plus univoque mais correspond à une hystérésis dite statique (plusieurs modèles peuvent être proposés et les différents paramètres identifiés. Cette contribution sera ensuite ajoutée à l'hystérésis dite dynamique associée à la propriété étudiée) et  $\Lambda$  reste soit constant soit non linéaire et variable en cours de cycle.

La perméabilité magnétique non linéaire est toujours déterminée en régime statique (la fréquence est très faible, de l'ordre de quelques dizaines de Hertz maximum, et idéalement tendant vers 0) avec la même observable que précédemment. Il s'agit bien de la perméabilité statique qui est différente de la perméabilité statique différentielle. L'identification fournit une liste discrète de valeurs en nombre égal au nombre de niveaux d'induction de mesure. Nous pouvons ensuite à l'aide de cette liste calculer une courbe continue correspondant à la propriété statique via une méthode d'interpolation ou bien l'utilisation d'un modèle de propriété statique univoque (modèle double-exponentielle [CRO\_1] ou arctangente [ZIT\_1], ...). Nous ferons de même pour la perméabilité statique différentielle qui s'exprime génériquement en fonction de la perméabilité statique (voir figure 7.20). Si la propriété statique est hystérétique, nous aurons besoin d'adapter en conséquence la procédure d'identification qui devra très probablement chercher non plus un paramètre  $\mu$  mais au moins deux et voir plusieurs suivant le modèle utilisé. Une banque de modèles déjà testés (§ 1.3) peut-être proposée et l'algorithme d'identification (figure 7.21) et d'introduction de l'hystérésis statique dans les calculs dynamiques devrait-être construit indépendamment du modèle choisi (Jiles-Atherton, Preisach, Nouredine, LS, Stoner-Wohlfarth, § 1.3). Le paramètre structurel magnétique  $\Lambda$  est toujours déterminé en régime dynamique. Le principe d'identification est toujours basé

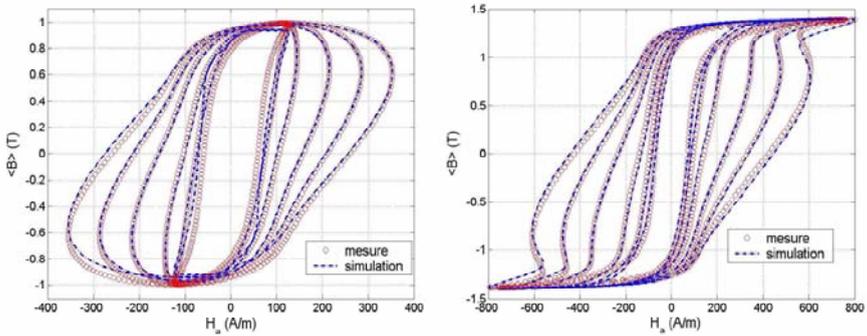


Figure 7.10: Reconstruction des cycles dynamiques en incluant l’hystérésis statique et la dynamique non-linéaire (écart-type sur l’induction compris entre 53 mT (à 1.4 T,  $\sim 3.8\%$ ) et 126 mT (à 1.0 T,  $\sim 12.6\%$ )).

sur un algorithme d’adaptation des calculs aux mesures, mais cette fois il s’agit de l’appliquer pas à pas dans le temps pour décrire à nouveau les cycles expérimentés (cf figure 7.20). Une première identification avec les pertes identique à la précédente est d’abord réalisée pour obtenir une première valeur approximative de  $\Lambda$ , puis cette valeur est affinée et ajustée par l’identification pas à pas directement à partir des cycles. Les options de résolution concernant la précision désirée et la forme d’onde restent accessibles. A l’aide d’un échantillon plus ou moins riche de valeurs de  $\Lambda$  en fonction du champ  $H_M$  et de sa dérivée, nous serions en mesure de pouvoir prédire avec précision un autre cycle quelconque. Ensuite tout l’enjeu sera de pouvoir réduire le nombre de mesures en maintenant la précision des prédictions.

### 7.2.3 Résultats sur quelques échantillons

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus par traitement des données expérimentales avec les programmes présentés précédemment. Ceci a été fait pour quelques échantillons typiques massivement utilisés en Electrotechnique et peut normalement se faire pour tout type d’échantillon normalisé. Nous proposons aussi de discuter de la signification et de la précision, ou intervalle de confiance, de ces mesures (§ présent et 7.4); avec une interprétation de l’évolution des différentes propriétés suivant les conditions de champs et de fréquence. Si nous avons de la chance, nous pourrions peut-être même déduire de ces analyses des lois de comportement caractéristiques d’un ou plusieurs phénomènes physiques microscopiques intéressants. Celles-ci seront dans le meilleur des cas génériques pour certaines familles de matériaux. La construction sous jacente de modèles de description *ab initio* de ces processus non linéaires pourrait ainsi faciliter les mesures et l’identification des paramètres. Enfin, nous pourrions aussi observer que certains points de l’identification sont retracés plusieurs fois pour

des cycles différents mais pour des conditions ( $H_M, \partial_t H_M$ ) identiques ou très proches. Un enjeu intéressant serait de déterminer quelles mesures réaliser pour en diminuer le nombre sans en dégrader leur apport en terme d'information et de prédiction pour les simulations.

### FeSi M400-50A (0.5 mm, 4 W.kg<sup>-1</sup> à 1.5 T et 50 Hz)

**Régime linéaire** La figure 7.1 montre l'identification des propriétés statique et dynamique de l'échantillon M400-50A. L'évolution de l'induction  $B$  en fonction du champ statique  $H_M$  est identifiée à  $f = 10$  Hz. A bas niveau en induction (domaine de Rayleigh [CHI\_1]), on observe un phénomène de décrochage progressif des parois permettant l'aimantation; c'est pourquoi la perméabilité initiale est plus faible qu'en cours d'excitation intermédiaire en champ [CUT\_1] (cf figure 7.4), où la perméabilité différentielle atteint son maximum. Le modèle utilisé pour l'interpolation des résultats est une fonction double exponentielle (détaillée dans la référence [CRO\_1]). La figure donne aussi les résultats dynamiques obtenus en induction sinusoïdale et triangulaire pour le même échantillon (l'identification vise à égaliser les pertes calculées par (6.40) et les pertes mesurées). Même en régime de fonctionnement linéaire, le matériau ne peut être décrit uniquement avec une perméabilité et une conductivité à cause des variations d'aimantation et des courants induits. Les évolutions de  $\Lambda$  avec l'induction et la fréquence sont expliquées à l'aide des processus de déformation [DEL\_3], multiplication et fusion ([FRT\_1], [HAL\_1]) de parois. Un accord acceptable est obtenu à bas niveau et pour les deux formes d'onde. Les différences observées peuvent être attribuées aux erreurs de mesure (le signal qu'il faut mesurer à basses induction et fréquence est très faible) et à la représentation/procédure simplifiée (mouvement seul de parois en régime linéaire; en effet, en régime sinusoïdal la dérivée d'induction change et provoque certainement des variations en cours de cycle). Cependant, une erreur de 10% sur  $\Lambda$  implique seulement 5% d'écart sur la prédiction des pertes, ce qui est probablement autour des imprécisions de mesure et de calcul ici. Pour des niveaux d'induction plus élevés, une évaluation plus pertinente de  $\Lambda$  devrait être entreprise en utilisant les cycles d'hystérésis et en faisant varier  $\mu$  avec  $B$  et  $\Lambda$  avec  $B$  et  $\partial_t B$ . La figure 7.1 donne quelques cycles simulés pour le même échantillon. Il reproduisent correctement le comportement expérimental. En montant le niveau d'induction nous observons des différences encore plus importantes dues aux variations des propriétés en cours de cycle et à la mémoire statique (hystérésis statique, cf figure 7.5).

Des hystérésis plus précises devraient être obtenues en incluant ces phénomènes dans nos simulations à plus haute induction (cf § suivant). Cependant, les valeurs de la propriété ont été obtenues en incluant le mouvement des parois à l'intérieur du calcul de diffusion dans la masse de l'échantillon. Ainsi, toutes les pertes (exceptées statiques, négligées à basse induction et fréquence élevée) classiques (courants induits macroscopiques) et en excès (courants induits microscopiques) sont prises en compte. Cela semble suffire à correctement modéliser le comportement fréquentiel et transitoire du matériau (cf figure 7.2); et peut-être utile dans la simulation de dispositifs incluant des pièces ferromagnétiques

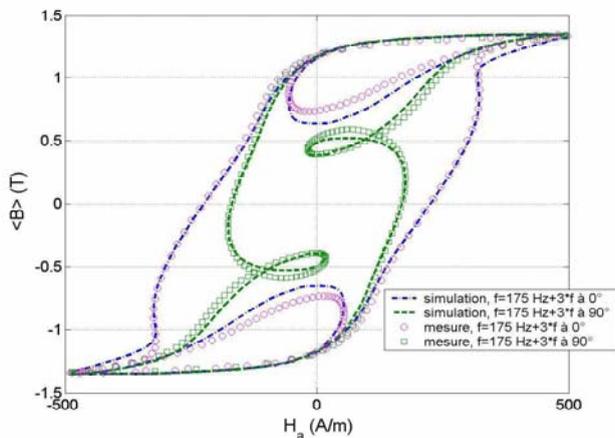


Figure 7.11: Simulation de cycles expérimentaux en sollicitant le matériau avec des signaux arbitraires sinusoïdes à 175 Hz déformées par une harmonique 3 à 0 et 90 degrés. Les mesures sont indiquées avec des marqueurs et les simulations avec des traits interrompus.

sous forme massive (actionneurs de type relais R5 ou capteurs de mesure, cf chapitre 9). Lorsque nous avons affaire avec des paquets de tôle, il est illusoire de vouloir calculer cette diffusion jusque dans les moindres détails de l'architecture; mais il est toujours possible de procéder de la sorte pour identifier les propriétés dynamiques (incluant  $\Lambda$  et  $\xi$ ) en homogénéisant aussi les courants induits macroscopiques dans cette structure pseudo-périodique (chapitre 8, section 8.4).

**régime non-linéaire** La figure 7.4 montre une identification plus vaste des propriétés statique et dynamique de l'échantillon M400-50A. L'évolution de l'induction  $B$  en fonction du champ statique  $H_M$  est toujours identifiée à  $f = 10$  Hz, on retrouve une loi d'évolution classique avec coude de saturation. La figure donne aussi des premiers résultats dynamiques obtenus en induction sinusoïdale en calant les pertes calculées (6.40) aux pertes mesurées. La figure 7.5 donne quelques cycles reconstruits en régime non linéaire mais avec une propriété dynamique toujours constante en cours de cycle et identifiée par approximation linéaire (Figure 7.4, droite). Ils reproduisent un peu moins bien le comportement expérimental et doivent être retravaillés à l'aide de variations adaptatives. En effet, les erreurs obtenues pour certains niveaux élevés en induction (voir figure 7.6) sont trop importantes. Une première amélioration consiste à introduire une hystérésis statique à haute induction (Figure 7.7, gauche). L'identification de  $\Lambda$  se fait alors en retranchant d'abord les pertes mesurées en statique avant de lancer la procédure (6.40). Nous envisageons aussi dans la suite d'affiner

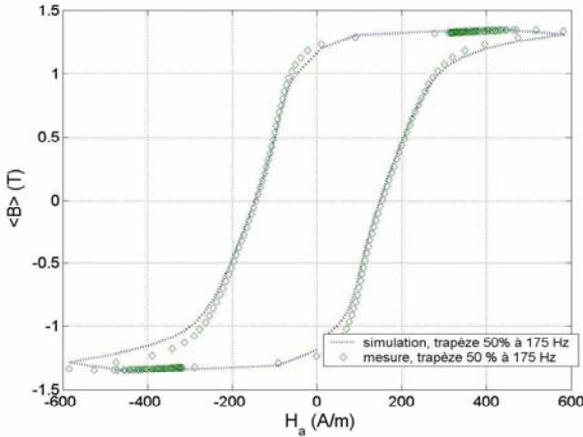


Figure 7.12: Simulation de cycles expérimentaux en sollicitant le matériau avec un signal arbitraire en trapèze à 175 Hz de 50 % (50 % de variations linéaires et 50% de paliers). Les mesures sont indiquées avec des marqueurs et les simulations avec des traits interrompus.

l'identification dynamique par une procédure auto-adaptative pour la propriété homogénéisée mais variable. A l'aide de premières simulations à plusieurs niveaux d'induction et fréquence, il est possible d'identifier une loi d'évolution caractéristique en fonction des variables d'état  $B$  et  $\partial_t B$  (ou  $(H_M, \partial_t H_M)$ ). Les données expérimentales peuvent être interpolées avec une surface fonction de deux variables. Voici par exemple un modèle Gauss-Lorentz (7.1), décrivant l'évolution de la population et de la mobilité des parois et/ou de la déformabilité des domaines.

$$\Lambda = \Lambda_{h0} \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{H_M}{\varepsilon_h} \right)^2} \right) \exp \left( - \frac{\left( \partial_t H_M + \frac{H_M}{\tau_h} \right)}{2\pi \varepsilon_{dh}^2} \right) + \Lambda_{hl} \quad (7.1)$$

On voit sur la figure 7.7 (droite) que des variations microstructurales internes peuvent avoir lieu au sein d'un seul et même cycle, dès lors que les variables  $((H_M, \partial_t H_M)$  ou bien  $(B, \partial_t B)$ ) changent. Il n'est pas simple de conclure sur la cause exacte de ces variations puisque l'on sait que plusieurs processus peuvent avoir le même effet observable (processus de déformation [DEL\_3], multiplication et fusion [FRT\_1], nucléation [AHA\_1] de parois; sans parler des mécanismes quasi-statiques). Tout ce que l'on peut affirmer c'est que ces modifications de propriétés dynamiques intrinsèques se manifestent globalement par les variations identifiées de  $\Lambda$ , qui englobent plusieurs phénomènes couplés (cf chapitre 4). La mixité hystérésis statique et dynamique convient bien à la simulation des cycles à haute induction (voir figure 7.10, les erreurs précédentes sont

ramenées inférieures à 10 %) mais un peu moins à basse induction où la quasi-linéarité dynamique prime (figure 7.2). Pour terminer sur les différents tests imaginés, nous proposons d'exposer cette description au "live", en reconstruisant un ou plusieurs cycles quelconques (Figures 7.11 et 7.12). La description des cycles mineurs devient problématique (et pourtant les pertes ne dépendent pas de la forme des boucles internes, seulement la puissance instantanée) mais peuvent-être correctement reconstruites grâce à la conjugaison hystérésis statique, diffusion dynamique et mouvements non-linéaires de parois.

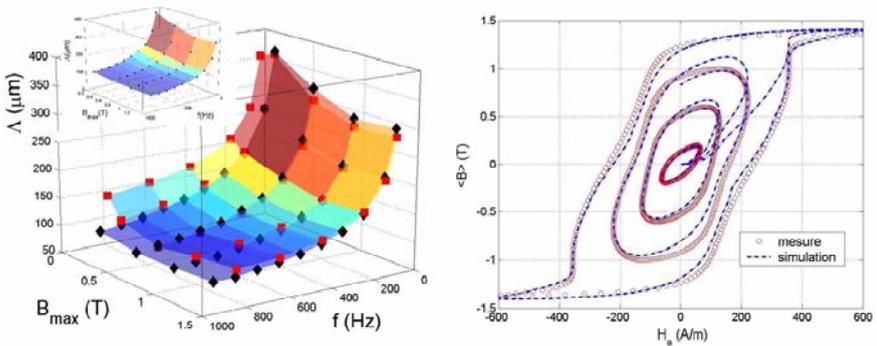


Figure 7.13: Comparaison entre l'échantillon M330-35A ( $\diamond$ : losanges) et l'échantillon M400-50A ( $\square$ : carrés) et reconstruction de quelques cycles dynamiques à 800 Hz (écart-type moyen toujours compris entre 3 % et 12 %).

### FeSi M330-35A (0.35 mm, 3.3 W.kg<sup>-1</sup> à 1.5 T et 50 Hz)

Cet échantillon, outre l'épaisseur de la tôle, est intrinsèquement un peu moins dissipatif que le précédent et cela se manifeste par une propriété légèrement inférieure (cf figure 7.13) et des cycles moins volumineux. Remarquons en effet que ces tôles d'épaisseur 0.35 mm ont été caractérisées en tenant compte de la diffusion classique dans l'épaisseur, ce qui a pour conséquence de pouvoir *a priori* comparer les deux propriétés identifiées indépendamment de cette géométrie macroscopique. Le fait qu'à 50 Hz, les deux matériaux aient sensiblement les mêmes propriétés alors qu'ils dissipent différemment provient alors essentiellement, à mon avis, de l'épaisseur moindre (puisqu'identiques du point de vue des parois). Ce ne sera pas le cas aux fréquences supérieures. Mentionnons tout de même que ces affirmations ne sont pas encore prouvées et qu'elles demandent de nombreuses autres mesures et tests pour en vérifier la validité. Nous prenons malgré tout le risque de les communiquer puisque l'objectif de nos travaux.

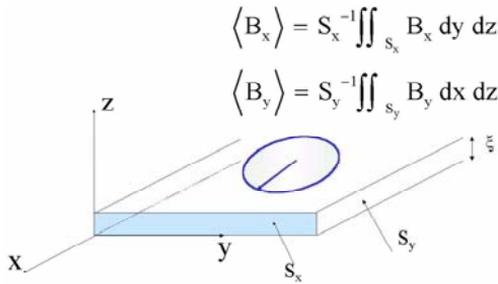


Figure 7.14: Schéma simplifié de la configuration type RSST.

## 7.3 Configuration bidirectionnelle

### 7.3.1 Présentation

#### Principe de la mesure

Cette fois, la source de courant au primaire est conçue de manière à pouvoir créer un champ magnétique tournant dans le plan et à la surface de l'échantillon. Ce champ induit une densité de flux magnétique, tournante elle aussi, fonction du champ et des propriétés plus ou moins perméables du matériau dont est constitué le circuit. On mesure ainsi deux tensions induites entre les deux bornes de deux secondaires qui sont directement reliées aux premières dérivées temporelles des flux traversant les deux sections  $S_x$  et  $S_y$  perpendiculaires de l'échantillon (voir annexe 20).

#### Formes d'onde

Tout comme pour le cadre Epstein, il est intéressant d'imposer de préférence la forme de la tension (et donc du flux moyen traversant chacune des sections) et de mesurer les intensités nécessaires (donc le champ magnétique tournant qu'il faut imposer en surface) à l'obtention de cette réponse en tension. Il a été choisi alors d'imposer un flux (*i.e.* une densité de flux moyenne) tournant de forme circulaire. Ceci correspond à deux densités de flux moyennes dans les deux directions ( $\langle B_x \rangle$  et  $\langle B_y \rangle$ ) perpendiculaires de formes sinusoïdales mais en quadrature de phase. Ce choix permet d'analyser correctement les propriétés d'anisotropies aussi bien statiques que dynamiques du matériau. De plus, le vecteur densité de flux apparent étant constant en module et tournant à vitesse constante, ceci permettra à nouveau d'éliminer ou de simplifier une dépendance en cours de cycle de la propriété dynamique structurelle.

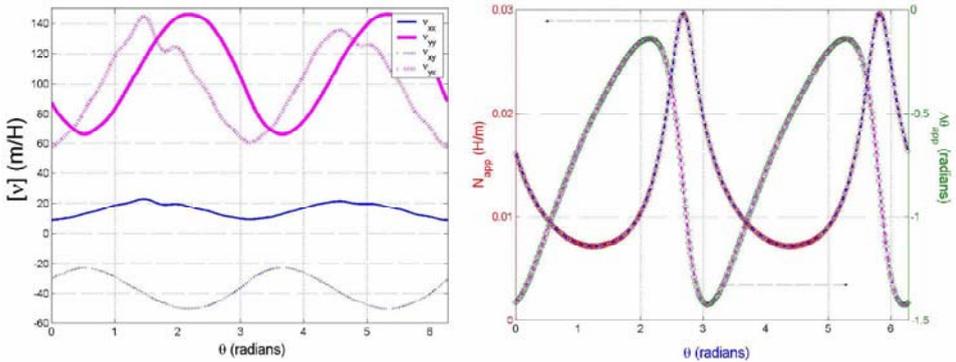


Figure 7.15: Identification du tenseur reluctivité pour le FeSi M330-35A à  $B = 1.0 T$  et  $f = 30 Hz$  (à gauche),  $\cdot\cdot$ :  $xy$ ,  $\bullet\bullet$ :  $yx$ ,  $—$ (fin):  $xx$ ,  $—$ (**gras**):  $yy$ . Résultat de l'identification (à droite),  $\diamond$ : module mesuré,  $\circ$ : angle mesuré,  $-$ : grandeurs simulées.

## Observables

Par analogie avec le cadre Epstein, et en ajoutant tout simplement une direction (i.e. une information), nous disposons maintenant de quatre observables: le champ appliqué apparent suivant  $x$  ( $H_{a_x}$ ), le champ appliqué apparent suivant la direction  $y$  ( $H_{a_y}$ ), la densité de flux apparente suivant la direction  $x$  ( $\langle B_x \rangle$ ) et la densité de flux apparente suivant la direction  $y$  ( $\langle B_y \rangle$ ). En pratique nous exploiterons ces observables de trois manières (Module et phase seront utilisés ensembles et de même pour les pertes suivant  $x$  et suivant  $y$ ):

- Module  $\mu_{app}$  apparent de la fonction de transfert entre  $\mathbf{H}_a$  et  $\langle \mathbf{B} \rangle$  (en  $H.m^{-1}$ ) (cf équations (6.24)).
- Angle  $\Delta\theta_{app}$  apparent de la fonction de transfert entre  $\mathbf{H}_a$  et  $\langle \mathbf{B} \rangle$  (en  $radians$ ) (cf équations (6.24)).
- Pertes spécifiques massiques par cycle  $\Pi_{mf} = \Pi_m/f$  (en  $J.kg^{-1}$ ) suivant les deux directions (Les pertes totales étant égales à la somme des deux) (cf équations (6.28)).

## Paramètres à identifier

Nous devons identifier deux propriétés, la perméabilité statique différentielle  $[\mu]$  et le paramètre structurel dynamique  $[\Lambda]$ . Dans la configuration du cadre RSST300, il s'agit de deux matrices. Elles sont définies par deux réels sur la diagonale si elles sont écrites dans les axes principaux cristallographiques du matériau (i.e. les axes facile et difficile d'aimantation). Les dépendances sont

identiques à la configuration Epstein à ceci près que  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{H}_M$  sont maintenant des vecteurs à deux dimensions et qu'il faudra prendre en compte la variation de son module et de l'angle qu'il font avec une direction donnée (un axe particulier d'anisotropie par exemple). La figure 7.15 donne l'identification statique de la reluctivité et la figure 7.16 propose une identification du tenseur  $[\Lambda]$ .

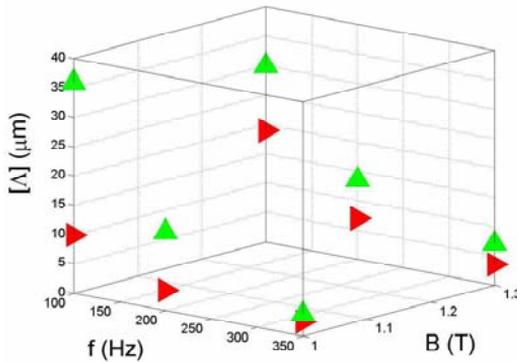


Figure 7.16: Identification de  $[\Lambda]$  diagonale avec les pertes mesurées ( $\triangleright$  :  $\Lambda_x$ ,  $\blacktriangle$  :  $\Lambda_y$ ).

### Méthodes de calcul

La simulation passe par un calcul de diffusion du champ magnétique dans l'épaisseur de la tôle. Le problème est à une dimension et ne nécessite la détermination que d'une seule inconnue qui ne dépend que de cette dimension (la position dans l'épaisseur). Cette inconnue sera la composante normale du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  tel que  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ . L'équation de diffusion utilisée est dans ce cas donnée par (6.4) avec toujours  $\Lambda = \Lambda_h$  et  $\Lambda_e = 0$  (une autre possibilité est une formulation directe en champs [OLI\_4]). En régime unidirectionnel linéaire (*i.e.* lorsque tous les coefficients sont constants en cours de cycle); nous ferons un simple calcul de diffusion analytique dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformation de Fourier (cf chapitre 6 § 6.2.3). Une résolution analytique sera aussi envisagée lorsque seule la perméabilité est non linéaire. En régime unidirectionnel non linéaire pour les deux paramètres statique et dynamique, nous passerons par un calcul numérique de la diffusion dans l'épaisseur de la tôle. La méthode utilisée est celle des différences finies (Chapitre 6 § 6.2.5). Aucune mesure ne sera effectuée par nous même pour tester ces procédures, mais nous nous plaçons dans une perspective de fourniture d'un outil automatique aux expérimentateurs qui désirent communiquer les propriétés matériaux aux ingénieurs matériaux, concepteurs, modélisateurs et simulateurs.



à cause des non-linéarités). Tout ceci rend nos interprétations réservées même si le fait de trouver des tailles caractéristiques inférieures aux dimensions habituelles en sollicitation unidirectionnelle (voir figure 7.16) n'est pas absurde au regard des couplages entre directions et des moyennes apparaissant dans (4.54a) (les sollicitations éveillent les parois dans toutes les directions, qui ne participent pas toutes équitablement dans une direction donnée). Cette description confirme le lien entre phénomènes dynamiques locaux de structure magnétique et observations macroscopiques. Elle ne garantit en rien une mesure exacte de la subdivision en domaines; seulement sa moyenne spatiale corrigée par d'autres comportements: mobilité de parois...(cf équation (4.54a)) difficilement identifiables séparément (sinon à l'aide de stratégies de mesures particulières). De plus, outre sa limite quant à la négligence de l'hystérésis statique et un domaine de validité en fréquence restreint à celui de l'Electrotechnique classique; ce modèle ne sera utile et performant (plus que ce que montre la figure 7.18) qu'avec une identification précise des propriétés tensorielles variables avec le module et l'angle de l'induction, en relation avec l'anisotropie, la métallographie, la structure magnétiques et la conductivité électrique des matériaux.

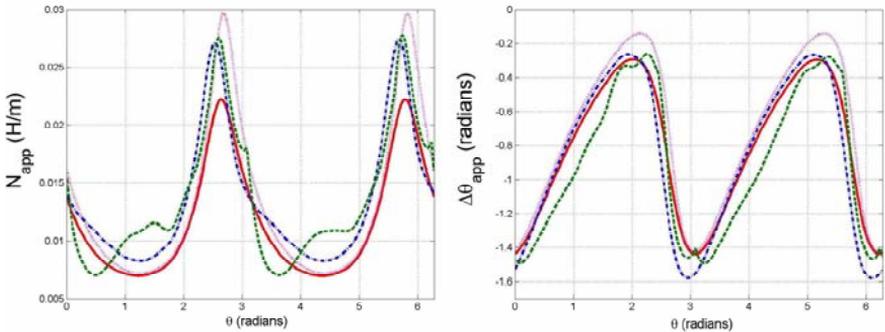


Figure 7.18: Comparaison entre mesures (—) et simulations (•— :  $[\Lambda] = 0$ , — — :  $[\Lambda]$  identifiée avec les pertes, grandeur globale) à  $B = 1.0 T$  et  $f = 100 Hz$ . La mesure à  $30 Hz$  (●●) est reportée.

## 7.4 Analyse d'incertitudes

### 7.4.1 Problèmes liés au modèle

Le modèle utilise une description moyenne statistique des champs et des propriétés (cf chapitre 4) intégrant les processus microscopiques liés au déplacement des parois magnétiques. Cependant, et de part les outils lissage spatial et moyenne statistique, les détails de la structure magnétique ont topologiquement disparu. Cette représentation simplifiée pourra donc choquer certaines sensibilités mais nous gardons tout de même l'information de ces dynamiques micro-

scopiques dans l'énergie, l'intensité et la phase du champ lissé. As-t-on le droit d'adopter ce raisonnement? Nous n'avons pas la réponse et nous pouvons juste prétendre proposer une modélisation physique et une méthode mathématique susceptibles de rendre la description et la méthode *a priori* déterministes et, sous certaines conditions (introduction de la partie III et du chapitre 7 présent), indépendantes de la géométrie et de la forme d'onde. Ce déterminisme formel ne peut naturellement se passer des mesures expérimentales qui permettront d'une part de fournir la carte d'identité du matériau compatible avec cette représentation et d'autre part, soit de confirmer, soit d'infirmer nos différentes assertions. Il est clair par exemple que nous oublions ainsi tous les processus pseudo-chaotiques provoquant des bifurcations par modifications structurales brusques, singularité et changement d'évolution des propriétés et pire de la description physique même. Là encore, on peut imaginer rationaliser l'irrationnel (étude des transitions ordre-désordre et de l'ordre dans le désordre, [GIG\_1], [CHE\_2]).

## 7.4.2 Erreurs de mesure et d'identification

### Erreurs de mesure

La chaîne de mesure est schématisée dans l'annexe 20. On distingue trois types d'incertitudes [TAY\_1]:

1. Les erreurs systématiques ( $\Delta_s$ ) (inexactitudes ou erreur de justesse par rapport à la cible ou aux références et étalons internationaux):

Elles peuvent être typiquement liées à un problème d'étalonnage ou de calibration des appareils de mesure pour que l'information communiquée à l'utilisateur soit fiable et internationalement comparable avec d'autres mesures. Je ne me suis pas assuré de la qualité de mes mesures suivant cet aspect fin (mais le banc a déjà été utilisé et validé par le passé); nous nous contenterons d'imaginer que les valeurs manipulées se trouvent toutes autour d'un point ciblé qu'il suffirait ensuite de translater pour retrouver les valeurs absolues. Les procédures de vérifications normatives en terme de mesure étant longues et fastidieuses, et l'objectif de ce travail étant dans un premier temps de mettre en évidence et de modéliser un phénomène physique; nous remettons à plus tard la maîtrise des erreurs systématiques. Celles-ci peuvent aussi être dues à des perturbations extérieures de dérive (Température de dérive, pollution électromagnétique, contraintes mécaniques, ...). Les mesures ont heureusement été réalisées dans une atmosphère et un environnement relativement stables en température, contraintes sur l'échantillon et pollutions électromagnétiques. L'exactitude des mesures ne peut donc pas être assurée mais nous sommes un peu plus fixés sur la constance dans le temps de l'inexactitude, même si non encore évaluée (*i.e.* peu de dérive excepté à cause du champ terrestre, voir tableau 7.3). Voici les principales causes potentielles d'erreur systématique et de dérive:

- champ magnétique terrestre,
- offsets,
- imperfections et décalages géométriques du montage expérimental,
- échauffement interne dû à l'effet Joule des courants induits<sup>1</sup>. L'énergie perdue sert d'ailleurs essentiellement à cette élévation de température.

## 2. L'imprécision des mesures ( $\Delta_i$ ):

Elle résulte en partie de la résolution limitée intrinsèque aux appareils utilisés (de par leur conception technologique):

- la chaîne d'acquisition en tension,
- la chaîne de mesure en courant.

## 3. La dispersion statistique (erreur aléatoire ou reproductibilité) ( $\Delta_d$ ):

Il s'agit de l'écart-type ou quadratique moyen à la valeur moyenne mesurée. Elle est causée par des fluctuations ambiantes (problème d'immunité face aux perturbations extérieures: agitation thermique, contraintes périodiques induites, champs variables extérieurs perturbateurs, harmoniques et bruits) ou intrinsèque au phénomène physique étudié (intervention d'autres phénomènes non pensés, bifurcations chaotiques, ...). Des estimations de ces erreurs sont données dans le tableau 7.3. Nous avons la chance d'avoir des appareils de mesure et une boucle d'acquisition relativement précis et stables. Il reste en revanche des perturbations difficilement contournables:

- bruit blanc d'agitation thermique,
- bruit et harmoniques des appareils et du montage,
- magnétostriction induite par le champ variable à haute induction.

Ces erreurs peuvent être exprimées soit de manière absolue (quantité d'erreur fixe quelquesoit la valeur mesurée), soit de manière relative (un certain pourcentage de la valeur mesurée).

---

<sup>1</sup>Un calcul approximatif de l'augmentation de température induite par l'effet Joule des courants induits ( $\sigma^{-1}j^2$ ), tenant compte de la capacité calorifique volumique ( $C_{pv} \simeq 2.12e^{+5} J.K^{-1}m^{-3}$ ) et de la conductivité thermique ( $k_T \simeq 20 W.K^{-1}.m^{-1}$ ) du Fer permet d'évaluer les échauffements maximums temporaires locaux à environ  $0.03^\circ C.Hz^{-1}.T^{-1}$  et de montrer que l'élévation globale de température se stabilise à un maximum de  $0.01^\circ C.Hz^{-1}.T^{-1}$  ( $\xi \simeq 0.5 mm$  est l'épaisseur de la tôle)

$$\frac{\Delta T_{\max}}{fB} \simeq \frac{2\pi H}{C_{pv}f\xi^2 + k_T} \xi^2$$

avec une constante de temps de l'ordre de

$$\tau_{th} \simeq \frac{C_{pv}\xi^2}{k_T} \simeq 3 ms$$

Ce qui n'est pas suffisant pour avoir un effet observable sur la dégradation de la perméabilité et l'abaissement de l'induction jusqu'à plusieurs  $kHz$ .

### Erreurs du calcul d'identification

L'identification des propriétés matériaux a été effectuée à l'aide d'une comparaison entre grandeurs observables calculées et grandeurs mesurées. Le calcul d'une part se base sur le choix d'un modèle (§ 7.4.1) et d'autre part sur une méthode mathématique analytique ou numérique (voir chapitre 6). Il est donc certain que quelques erreurs d'imprécision relative (surtout numériques) soient à prendre en considération ( $\Delta_c$ ). Certaines précautions ont été prises de manière à ce que ces incertitudes, liées aux méthodes et aux outils de calcul, restent malgré tout maîtrisées et comparables (nous espérons inférieures) aux imprécisions de mesure. Nous distinguons deux sources principales d'erreur numérique (cf. tableau 7.3):

- erreur d'approximation des dérivées d'espace et de temps (discrétisation et développements limités) évaluée à 1 %,
- erreur dans le calcul d'inversion (conditionnement de matrice) du même ordre (2 %).

### Erreur totale

En listant quelques causes d'incertitudes possibles et en évaluant leur impact en terme d'erreur absolue ou relative (Tableau 7.3); nous pouvons estimer l'erreur totale  $\Delta_H$  sur le champ appliqué  $H_a$  ( $H_{a,vrai} = H_{a,mes} \pm \Delta_H$ ) et  $\Delta_{Bf}$  sur le produit  $\langle B \rangle f$  ( $\langle B \rangle f_{vrai} = \langle B \rangle f_{mes} \pm \Delta_{Bf}$ ) de nos mesures ( $\Delta_{mes} = \Delta_s + \Delta_i + \Delta_d$ ) et identifications ( $\Delta_{sim} = \Delta_s + \Delta_i + \Delta_d + \Delta_c$ )

$$\Delta_{H,mes} \simeq (10 + 0.03 * |H_a|) A.m^{-1} \quad (7.2)$$

$$\Delta_{Bf,mes} \simeq (270 + 0.04 * |\langle B \rangle f|) mT.Hz \quad (7.3)$$

$$\Delta_{Bf,sim} \simeq (270 + 0.07 * |\langle B \rangle f|) mT.Hz \quad (7.4)$$

Pour conclure ce chapitre, nous dirons que ces incertitudes décelées rendent nos résultats certes non exacts mais comparables entre eux, relativement reproductibles et surtout perfectibles. Compte tenu des incertitudes expérimentales et théoriques citées précédemment (créant des écart-types acceptables sur l'induction simulée), notre représentation permet une reproduction fidèle du comportement dynamique réel du matériau. Cependant, nous observons des erreurs plus importantes sous certaines conditions extrêmes (écart-types importants sur l'induction simulée, voir figure 7.6). Certaines différences en régime non-linéaire (haute induction) sortent même de nos barres d'erreur, ceci semble indiquer que la modélisation est sans doute incomplète ou que des paramètres sont probablement encore mal calés, ou bien encore que les phénomènes microscopiques sont peu ou pas reproductibles avec exactitude. Le calcul et la mesure des pertes

	absolue	relative	grandeur
<b>Erreurs Systématiques (<math>\Delta_s</math>)</b>			
Champ terrestre	$8 A.m^{-1}$	-	$H_a$
Imperfections géométriques	-	1 %	$H_a$
Imperfections géométriques	-	1 %	$\langle B \rangle f$
<b>Imprécisions (<math>\Delta_i</math>)</b>			
Résolution ampèremètre	$0.05 A.m^{-1}$	-	$H_a$
Résolution voltmètre	$13 mT.Hz$	-	$\langle B \rangle f$
Acquisition intensité	-	2 %	$H_a$
Acquisition tension et fréquence	-	3 %	$\langle B \rangle f$
<b>Fluctuations (<math>\Delta_d</math>)</b>			
Bruit Intensité	$1 A.m^{-1}$	-	$H_a$
Bruit tension	$250 mT.Hz$	-	$\langle B \rangle f$
<b>Erreurs numériques (<math>\Delta_c</math>)</b>			
Discrétisations	-	1 %	$\langle B \rangle f$
Inversion numérique	-	2 %	$\langle B \rangle f$
<b>Bilan <math>H_a</math></b>	$10 A.m^{-1}$	3 %	$H_a$
<b>Bilan <math>\langle B \rangle</math></b>	$270 mT.Hz$	7 %	$\langle B \rangle f$

Tableau 7.3: Budget d'incertitudes

quant à eux restent toujours relativement précis (erreur relative probablement inférieure à 5 %,  $P_m = P_m \pm (1 + 0.01 * P_m) mW.kg^{-1}$ , cf surface des cycles simulés et mesurés). Enfin, n'oublions pas qu'il ne s'agit en aucune manière d'un sondage précis du coeur de la matière, *i.e.* de sa structure magnétique. D'une part parce qu'à l'aide de grandeurs globales moyennées nous ne pouvons *a priori* identifier que des propriétés moyennes homogénéisées, qui plus est corrigées par plusieurs autres comportements (voir équations (4.54a) et suivantes); et d'autre part parce que cette identification correspond à un choix particulier de modèle et de condition limite ( $\Lambda_e = 0$ ,  $\Lambda = \Lambda_h$  homogénéisé,  $\Lambda_{h,surf} \simeq \Lambda_{h,bulk}$ , cf. § 6.2.4). En revanche cette propriété homogénéisée rendue locale, si elle garde une pertinence indépendante de la géométrie adoptée par ce matériau particulier, peut avoir un intérêt important dans la re-simulation d'autres géométries (pourvu qu'elles restent macroscopiques) contenant le même matériau; dans un but de prédiction des pertes, de conception fine; de comparaison d'architectures ou même d'optimisation.

## 7.5 Conclusion

En adoptant un principe d'homogénéisation volumique et en attribuant une nouvelle propriété, dite structurelle dynamique, à nos matériaux ferromagnétiques doux; nous avons entrepris quelques caractérisations expérimentales sur deux échantillons classiques de Fer-Silicium dans deux configurations. Une sollicitation sur tôle mince en champ unidirectionnel, puis une sollicitation sur plaque en champ bidirectionnel. Il en est ressorti des modèles de carte d'iden-

tité pour ces matériaux, constitués de deux ou trois informations utiles à la reconstruction de leur comportement pour toutes formes d'ondes. Ces informations, scalaires ou tensorielles, sont la perméabilité statique anhystérétique, les paramètres d'un modèle d'hystérésis statique et la propriété structurelle dynamique (liée au mouvement des objets de la structure magnétique). L'accord intéressant entre la mesure et la simulation avec des signaux quelconques, *a posteriori* de l'identification, renforce l'intérêt et la pertinence de la représentation proposée.

Identification  
de la  
perméabilité  
statique  
 $\mu(H_M)_c$

Entrée des fichiers des mesures: **mesures\_stat**( $\langle B \rangle_{\max}, H_{M_{\max}}$ ) et **mesures\_dyn**( $f, \langle B \rangle_{\max}, H_{M_{\max}}, P_{mf}$ ),  
et des informations supplémentaires:  $d, \rho = \sigma^{-1}, \xi, \varepsilon$

Lecture de mesures\_stat

$\forall B_{\max}$

$$\mu_s(H_{M_{\max}}) = \frac{B_{\max}}{H_{M_{\max}}}$$

liste discrète  $\{\mu_s\}$

fin

n

o

Identification  
de  
 $\Lambda(H_M, \partial_t H_M)_c$

Lecture de mesures\_dyn

$\forall (B_{\max}, f)$

$$\Delta a < \Delta b \Leftrightarrow (\Delta a + \Delta b) / 2 < \Delta b$$

$$\text{Erreur} = \frac{P_{\text{act\_cal}} - P_{\text{act\_mes}}}{P_{\text{act\_mes}}}$$

Erreur  
<  $\varepsilon$

fin

n

o

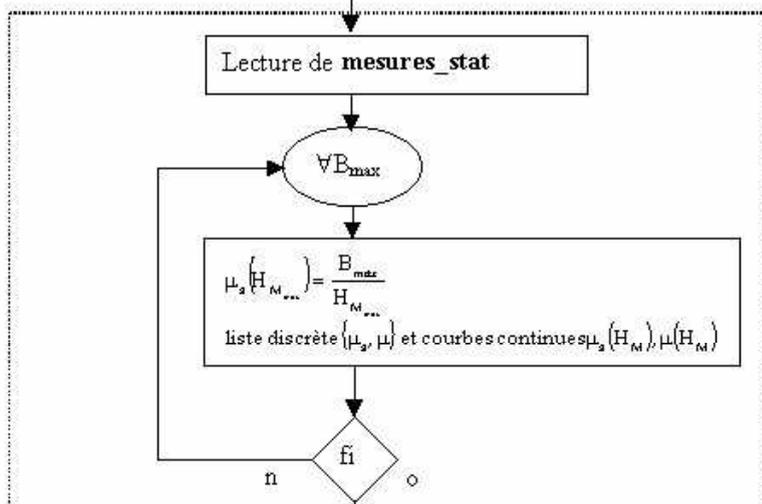
Réduction de  
l'intervalle et  
redéfinition de  
 $\Delta a$  et  $\Delta b$  en  
fonction du signe  
de erreur = erreur.

Sortie, trace, interpolation et utilisation des n-uplets intéressants et exploitables:

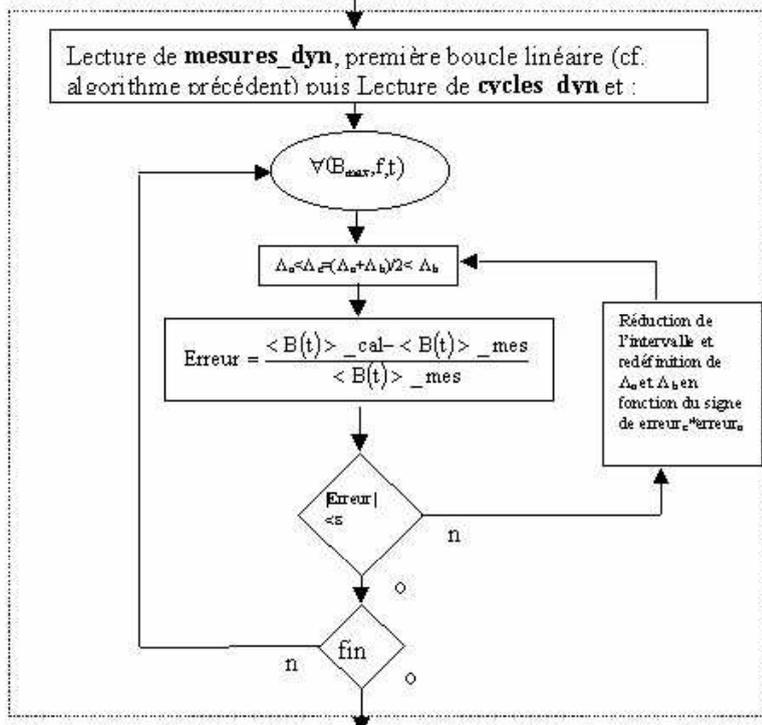
**$(H_M, B, \mu)$**  et  **$(t, H_M, B, dH_M/dt, dB/dt, \Lambda)$**

Entrées: **mesures\_stat** ( $\langle B \rangle_{\max}$ ,  $H_{\max}$ ), **mesures\_dyn** ( $f$ ,  $\langle B \rangle_{\max}$ ,  $H_{\max}$ ,  $P_{mf}$ ) et **cycles\_dyn** ( $\langle B \rangle_{\max}$ ,  $f$ ,  $H_a(t)$ ,  $B(t)$ );  
et des informations supplémentaires:  $d$ ,  $\rho = \sigma^{-1}$ ,  $\xi$ ,  $\varepsilon$

Identification  
de la  
perméabilité  
statique  
 $\mu_2(H_M)$



Identification  
de  
 $\Delta(H_M, \partial H_M)$



Sortie, trace, interpolation et utilisation des n-uplets intéressants et exploitables:

$(H_M, B, \mu)$  et  $(t, H_M, B, dH_M/dt, dB/dt, A)$

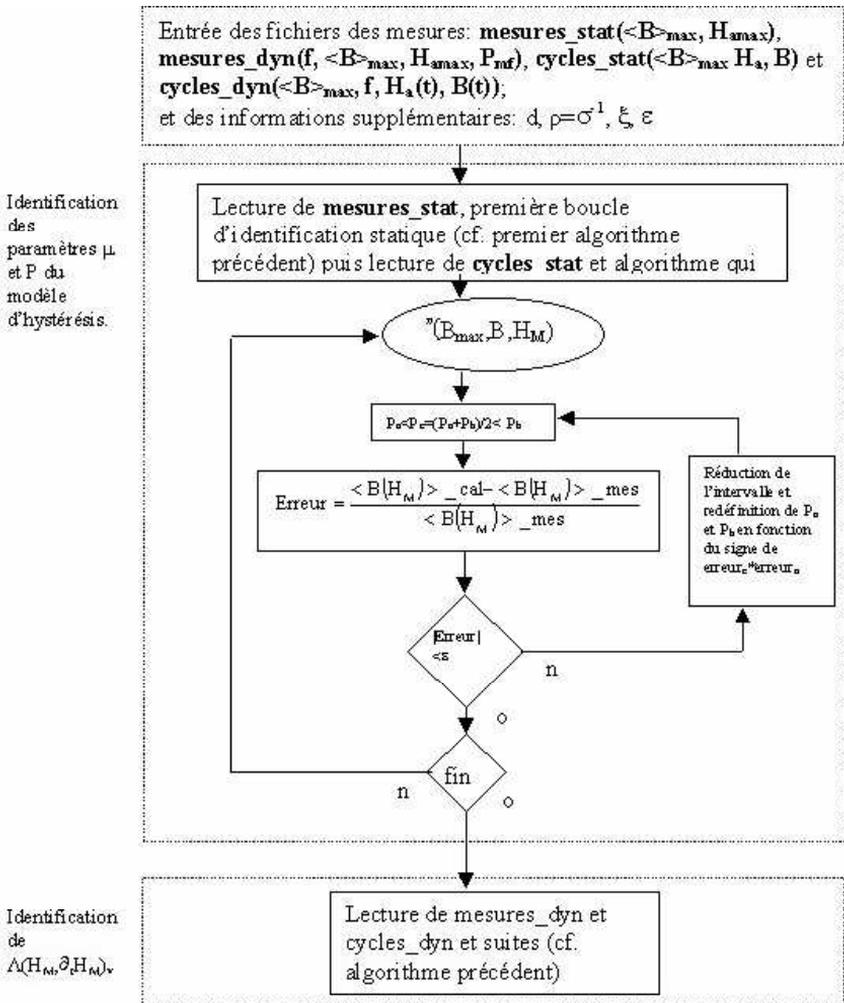


Figure 7.21: Algorithme d'identification de l'hystérésis statique.



## Partie V

# La Simulation Numérique



*” Le rôle des mathématiques est double en Physique. D’une part, elles servent à traduire en un formalisme adéquat les hypothèses et les modèles de la réalité sur lesquels la physique se fonde, ce qui rend possibles des enchaînements logiques in formulables en langage ordinaire, grâce auxquels on tire, des principes initiaux, les conclusions numériques qui permettent des les confronter à l’expérience. Mais c’est là presque un rôle subalterne, bien qu’il soit nécessaire. Le rôle principal des mathématiques est structural et consiste à donner à la théorie un squelette, une armature ”*

**Georges Lochak**

(La géométrisation de la physique)

La conception assistée par ordinateur, via des méthodes numériques (type éléments finis), s'appuie actuellement toujours sur un comportement empirique du matériau, hérité des méthodes d'estimation *a posteriori* des pertes; *i.e.* n'intégrant pas la réalité physique des objets magnétiques microscopiques (parois et domaines), et donc les mécanismes d'aimantation [MAZ\_1]. En effet, il existe aujourd'hui deux méthodes pour prendre en compte ces phénomènes:

- La première consiste en une définition d'une loi de comportement hystérique du matériau, gourmande en temps de calcul et problématique en convergence ([OSS\_3], [RAU\_2], [OSS\_1]).
- La deuxième est une réadaptation des résultats *a posteriori* des simulations grâce à des modèles de perte et d'hystérésis rapides et performants [HEV\_1].

Nous proposons ici une alternative qui consiste en l'introduction *a priori* de la physique des mécanismes d'aimantation dynamiques dans les calculs numériques avec un coût de calcul minimum, via des formulations dédiées aux matériaux doux en régime transitoire et périodique.

# Chapitre 8

# Formulations Dédiées

*” Le livre de la nature est écrit en langage mathématique ”*

**Galileo Galilei**

Nous représentons figure 8.1 le type de problème à résoudre. Nous nous intéressons ici à ce qui se passe dans  $\Omega_{M_i}$  et sur ses frontières.

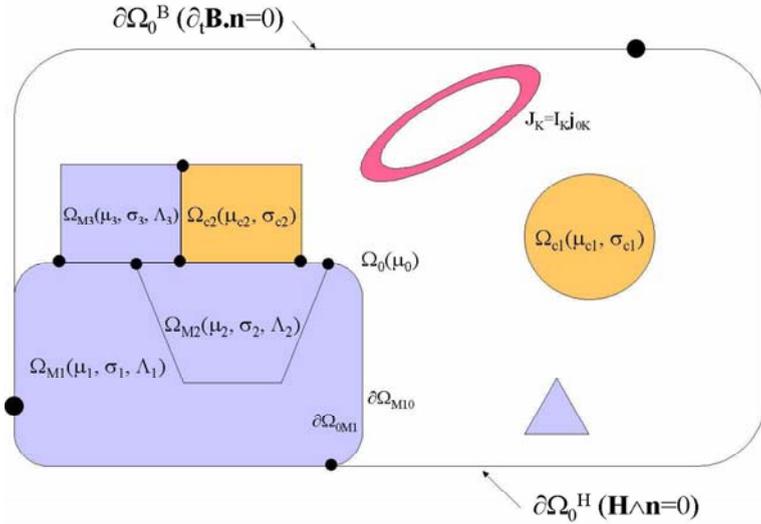


Figure 8.1: Présentation d'un problème type à résoudre, contenant des pièces ferromagnétiques douces.

L'interaction champ-matière dans ces régions magnétiques et conductrices est régie par les équations de Maxwell suivantes

$$\nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (8.1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (8.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (8.4)$$

Il est nécessaire d'y adjoindre les équations constitutives statiques et dynamiques du matériau:

- Propriété magnétique statique  $\mathbf{B}(\mathbf{H}_M)$

$$\partial_t \mathbf{B} = \mu \partial_t \mathbf{H}_M \quad (8.5)$$

$$\mu = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}_M^T} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{H}_M} \right]^T \quad (8.6)$$

$\mu$  est la perméabilité magnétique statique différentielle.

- Propriété électrique statique  $\mathbf{J}(\mathbf{E}_M)$

$$\partial_t \mathbf{J} = \sigma \partial_t \mathbf{E}_M \quad (8.7)$$

$$\sigma = \left[ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{E}_M^T} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{E}_M} \right]^T \quad (8.8)$$

$\sigma$  est la conductivité électrique statique différentielle (elle sera souvent égale à la conductivité statique et constante).

- Propriété magnétique dynamique  $\mathbf{H}_{dyn}(\mathbf{H}_M, \partial_t \mathbf{H}_M)$

$$\mathbf{H}_{dyn} = \tau_h \partial_t \mathbf{H}_M \quad (8.9)$$

$$\tau_h = \sigma \Lambda_h^2 \mu \quad (8.10)$$

$\tau_h$  est appelée la temporisation structurelle magnétique.

- Propriété électrique dynamique  $\mathbf{E}_{dyn}(\mathbf{E}_M, \partial_t \mathbf{E}_M)$

$$\mathbf{E}_{dyn} = \tau_e \partial_t \mathbf{E}_M \quad (8.11)$$

$$\tau_e = \mu \Lambda_e^2 \sigma \quad (8.12)$$

$\tau_e$  est appelée la temporisation structurelle électrique. L'ajout de cette propriété sera juste envisagé et étudié mais non testé numériquement dans ce chapitre.

## 8.1 Formulation $\mathbf{T}_M$ - $\Phi_M$

### 8.1.1 Position du problème

Dans la présente formulation, nous projetons numériquement les deux premières équations de (8.1); les deux dernières étant assurées implicitement par le jeu d'inconnues choisi. En effet, nous écrivons

$$\mathbf{H}_M = \mathbf{T}_M - \nabla(\Phi_M) \quad (8.13)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla(\Phi) \quad (8.14)$$

Ainsi la conservation des courants libres et l'équation de Maxwell-Ampère sont automatiquement résolues. Les développements qui vont suivre consistent à résoudre, ou trouver les inconnues  $(\mathbf{T}_M, \Phi_M)$  vérifiant, la conservation du flux et l'équation de Maxwell-Faraday ([OLI\_1], [OLI\_3], § 8.2). Sur les plans de symétrie et aux bords du domaine d'étude, l'une des deux conditions suivantes s'applique

$$\partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \mu \partial_t \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0^B \quad (8.15)$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = (1 + \tau_h \partial_t) \mathbf{H}_M \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_0^H \quad (8.16)$$

Il peut être intéressant de regarder ce que cela implique sur un choix possible des potentiels (sachant que  $\mathbf{T}_M = \mathbf{T}_0$  et  $\Phi_M = \Phi_R$  si on est dans l'air et sans mouvement de "l'infini")

$$\mathbf{T}_M \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ et } \nabla(\Phi_M) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0^B \quad (8.17)$$

$$\mathbf{T}_M \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ et } \Phi_M = \text{cste} \text{ sur } \partial\Omega_0^H \quad (8.18)$$

A l'interface entre deux milieux aux propriétés physiques différentes et où il n'y a pas de courants ni de charges surfaciques, nous avons conservation habituelle des composantes normale de  $\mathbf{B}$ , tangentielle de  $\mathbf{E}$ , normale de  $\mathbf{J}$  et tangentielle de  $\mathbf{H}$ . Les deux premières sont vérifiées grâce à la projection  $(\mathbf{T}_M, \Phi_M)$  ici présente. En revanche, il faut s'assurer des deux dernières à l'aide d'une formulation de couplage (§ 8.2). Leurs expressions à l'aide des inconnues sont données au chapitre 5 (§ 5.4.1).

### 8.1.2 Discrétisation à l'aide des éléments finis

La méthode des éléments finis propose d'interpoler les inconnues à l'aide de fonctions tests élémentaires  $\{\alpha_{\varphi_p}\}$  et  $\{\alpha_{t_q}\}$  (pour  $\Phi_M$  et  $\mathbf{T}_M$  respectivement), définies en chaque noeud du maillage (ou milieu d'arrête suivant le type d'interpolation). Chacun des espaces ainsi formé est un espace vectoriel orthonormé

sur lequel peuvent-être projetées nos inconnues, et où les coordonnées sont justement les valeurs aux noeuds<sup>1</sup>

$$\Phi_M(\mathbf{x}, t) = \sum_{\text{noeud } p} \Phi_{M_p}(t) \alpha_{\varphi_p}(\mathbf{x}) \quad (8.19)$$

$$\mathbf{T}_M(\mathbf{x}, t) = \sum_{\text{noeud } q} \mathbf{T}_{M_q}(t) \alpha_{t_q}(\mathbf{x}) \quad (8.20)$$

$$= \sum_{\text{noeud } q} \sum_{\text{composante } j} T_{M_{qj}}(t) \gamma_{t_{qj}}(\mathbf{x}) \quad (8.21)$$

Ces fonctions tests (ou de forme) sont de plus choisies dans des espaces de fonctions spécifiques pour respecter une énergie qui est bornée et sommable, et certaines conditions limites naturelles, assurant la minimisation de la fonctionnelle<sup>2</sup> [LEF\_1]

$$\alpha_{\varphi_p} \in \mathbb{P}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \nabla(v) \in L^2(\Omega) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0^H\} \quad (8.22)$$

$$\alpha_{t_q} \in \mathbb{T}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \nabla(v) \in L^2(\Omega) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0^B\} \quad (8.23)$$

$$\gamma_{t_{qj}} \in \vec{\mathbb{T}}(\Omega) = \{\mathbf{w} \text{ et } \nabla \wedge \mathbf{w} \in L^2(\Omega); \mathbf{w} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_0^B\} \quad (8.24)$$

### 8.1.3 Résidus

Nous allons maintenant procéder à la projection des équations aux dérivées partielles à résoudre par la méthode de galerkin [ARI\_1] équivalente au principe variationnel. Ces projections se présentent sous la forme de quantités intégrées dans des volumes et/ou surfaces, qu'il faut ensuite annuler par une méthode numérique matricielle.

- Le premier résidu  $R_1$  scalaire permet la résolution de la conservation du Flux. En utilisant certaines transformations vectorielles et intégrales usuelles (cf annexe 12) et en imposant par ailleurs une condition de continuité de la composante normale de  $\partial_t \mathbf{B}$  à chaque interface (cette composante étant nulle sur la frontière  $\partial\Omega_0^B$ ) et de nullité des  $\alpha_{\varphi_p}$  sur les

---

<sup>1</sup>Dans un repère  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ , on a la définition et la propriété suivantes:

$$\gamma_{t_{qp}} = \alpha_{t_q} \mathbf{u}_p$$

$$(-\nabla \alpha_{t_q} \wedge \mathbf{E})_p = (\nabla \wedge \gamma_{t_{qp}})_p \mathbf{E}$$

Remarquons enfin que l'espace et le temps réapparaissent ici séparés même si ce n'est pas le cas pour les équations résolues. Cette séparation permet d'exprimer plus simplement toutes les différentiations spatiales (rotationnel, divergence, gradient). On pourrait imaginer d'autres modes d'interpolation avec des fonctions de forme particulières variables dans le temps (comme lorsque le maillage change en cours de déformation ou de mouvement).

<sup>2</sup> $L^2(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de carré Lebesgues intégrables.

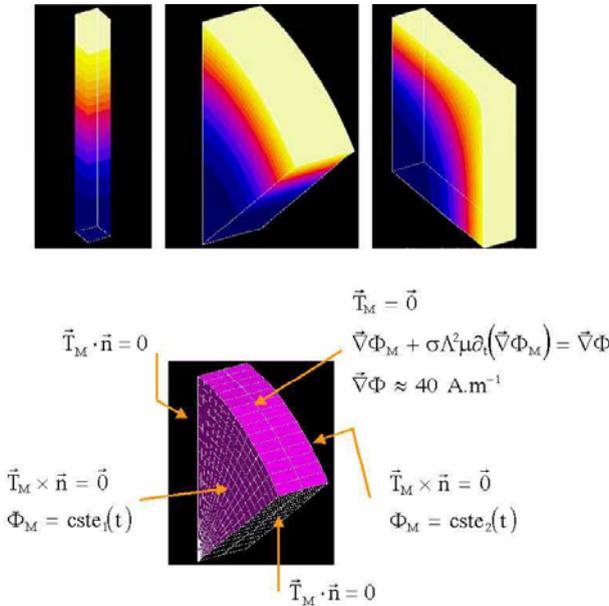


Figure 8.2: Géométries réduites simples de quelques cas tests. Les conditions limites utilisées pour les simulations tests sont indiquées pour le cylindre. Elles sont similaires pour la tôle et le barreau. Le champ magnétique est appliqué en surface à l'aide d'un gradient de potentiel scalaire magnétique  $\Phi$ . l'épaisseur caractéristique des échantillons est de l'ordre de 0.5 mm. Le matériau est du FeSi type M400-50A.

frontières  $\partial\Omega_0^H$ , le résidu à annuler devient

$$\begin{aligned} \forall p : R_{1p} &= \iiint_{\Omega_{M_i}} \alpha_{\varphi_p} (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{B}) d^3x = 0 \\ \Leftrightarrow R_{1p} &= \iiint_{\Omega_{M_i}} -\nabla (\alpha_{\varphi_p}) \cdot \partial_t \mathbf{B} d^3x + \iint_{\partial\Omega} \alpha_{\varphi_p} \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}^2\mathbf{x} = 0 \quad (8.25) \end{aligned}$$

Dans l'écriture de la formulation volumique pour la région  $\Omega_{M_i}$ , seule l'intégrale volumique nous concerne directement. L'intégrale de surface est, soit normalement déjà résolue par ailleurs dans une formulation de couplage (avec couplage circuit [MEU\_1], [LEF\_2]), soit automatiquement nulle pour un résidu écrit uniquement en volume (en effet en chaque noeud de ce volume les  $\alpha_{\varphi_p}$  sont nulles en surface).

- Le deuxième résidu  $\mathbf{R}_2$  vectoriel permet la résolution de l'équation de Maxwell-Faraday ajoutée d'une jauge sur le potentiel  $\mathbf{T}_M$  (Jauge de Coulomb:  $\nabla (\sigma^{-1} \nabla \cdot \mathbf{T}_M) = 0$ ). En utilisant certaines transformations vec-

torielles et intégrales usuelles (cf annexe 12) et en imposant par ailleurs une condition de continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  à chaque interface (cette composante étant nulle sur la frontière  $\partial\Omega_0^B$ ) et de nullité des  $\alpha_{t_q}$  sur les frontières  $\partial\Omega_0^H$ , le résidu à annuler devient

$$\begin{aligned} \forall (q, j) : R_{2_{qj}} &= \mathbf{R}_{2_q} \cdot \mathbf{u}_j \\ &= \iiint_{\Omega_{M_i}} \left( (\nabla \wedge \gamma_{t_{qj}}) \mathbf{E} + (\nabla \cdot \gamma_{t_{qj}}) (\sigma^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{T}_M)) + \gamma_{t_{qj}} \cdot \partial_t \mathbf{B} \right) d^3x \\ &\quad + \iint_{\partial\Omega_{M_i}} \alpha_{t_q} (-\mathbf{E} \wedge \mathbf{d}^2\mathbf{x} + \sigma^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{T}_M) \mathbf{d}^2\mathbf{x}) = 0 \quad (8.26) \end{aligned}$$

Dans l'écriture de la formulation volumique pour la région  $\Omega_{M_i}$ , seule l'intégrale volumique nous concerne directement. L'intégrale de surface est, soit normalement déjà résolue par ailleurs dans une formulation de couplage (avec couplage circuit [MEU\_1]), soit automatiquement nulle pour un résidu écrit uniquement en volume (en effet en chaque noeud de ce volume les  $\alpha_{t_q}$  sont nulles en surface, en s'assurant que ceci reste vrai pour une surface courbe).

Pour calculer correctement ces résidus, nous devons aussi exprimer les champs et courants impliqués en fonction des inconnues degrés de liberté, et mieux les interpoler sur les espaces de fonctions de forme (Exemple:  $\mathbf{H}_M = \sum_q \sum_j T_{M_{qj}} \gamma_{t_{qj}} - \sum_p \Phi_{M_p} \alpha_{\varphi_p}$ ). Cette interpolation devient particulière lorsqu'il s'agit de calculer les courants libres impliquant le rotationnel du champ magnétique, car il faut alors récupérer la propriété dynamique aux noeuds. Ces expressions permettront d'autre part d'en déduire plus facilement la forme des matrices Jacobiennes (§ 8.1.4 suivant). Récapitulons l'ensemble des résidus volumiques sous la forme d'un seul vecteur de dimension quatre fois (une fois pour le résidu scalaire et trois fois pour le résidu vectoriel) le nombre de noeuds.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{1_p} \\ R_{2_{qj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega_{M_i}} -\nabla (\alpha_{\varphi_p}) \cdot \partial_t \mathbf{B} d^3x \\ \iiint_{\Omega_{M_i}} \begin{pmatrix} (\nabla \wedge \gamma_{t_{qj}}) \mathbf{E} + \\ (\nabla \cdot \gamma_{t_{qj}}) (\sigma^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{T}_M)) + \gamma_{t_{qj}} \cdot \partial_t \mathbf{B} \end{pmatrix} d^3x \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

### 8.1.4 Jacobiens

Ces tenseurs  $M_{mn}$  sont définis par ( $V$ : variable inconnue, *i.e.*  $\mathbf{T}_M$  ou  $\Phi_M$ )

$$\begin{aligned} R_m(t + \theta dt)_{k+1} &= R_m(t + \theta dt)_k + M_{mn}(t + \theta dt)_k \Delta (V_n(t + dt))_{k \rightarrow k+1} \\ M_{mn}(q, j, p, i; t + \theta dt) &= + \left( \frac{\partial R_m(q, j; t + \theta dt)}{\partial V_n(p, i; t + dt)} \right) \quad (8.28) \end{aligned}$$

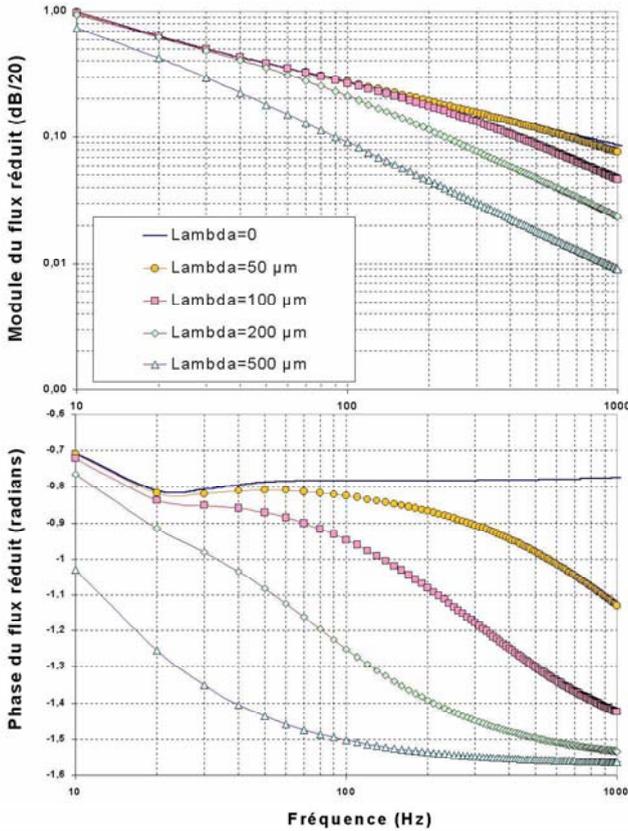


Figure 8.3: Simulation du flux complexe moyen traversant l'échantillon (ici la tôle d'épaisseur 1 mm), réduit par rapport à la réponse statique (données du FeSi M400-50A). Le filtre passe bas attendu est correctement décrit et en accord avec la formulation standard couplée à une perméabilité complexe équivalente.

Ils permettent de résoudre les équations de Maxwell sur un espace discrétisé à l'aide d'une simple résolution matricielle à chaque pas de temps et itération  $k$  à l'instant intermédiaire ( $t + \theta dt$ ) (Méthode non-linéaire type Newton-Raphson [OSS\_1] avec relaxation et procédé d'inversion de matrice [ARI\_1]). Pour toute grandeur  $A$  calculée en ( $t + \theta dt$ ), nous avons  $A(t + \theta dt) = (1 - \theta) A(t) + \theta A(t + dt)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ). Alors que les résidus précédents (§ 8.1.3) sont identiques aux résidus classiquement rencontrés sans processus microscopiques et pour des matériaux homogènes tels que le cuivre, nos matrices Jacobiennes incluront quant à elles des termes dynamiques additionnels ([OLI\_1], [OLI\_3]). A savoir que les résidus doivent être exacts et écrits rigoureusement tandis que les Jacobiens, ne permettant que de donner une direction de recherche, peuvent être plus approximatifs. Nous simplifierons donc les différentiations tout en gardant un maximum d'information sur la bonne direction (des expressions encore plus fines pourraient de plus permettre d'améliorer la convergence et d'accélérer la recherche de la solution).

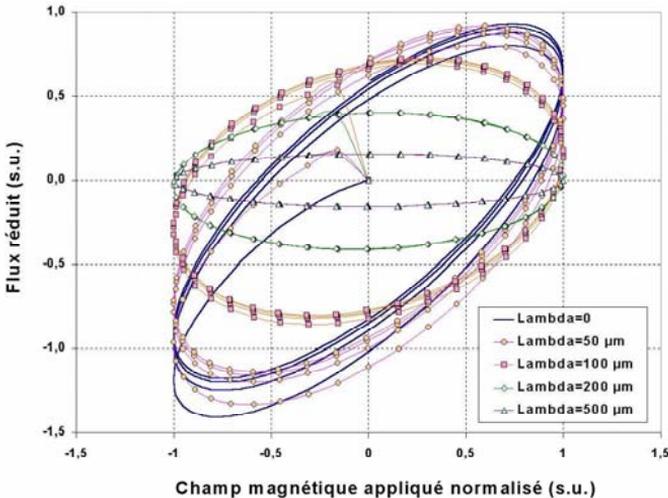


Figure 8.4: Cycles d'hystérésis en régime transitoire et pour différentes densités équivalentes de parois. La tôle en FeSi est soumise à un champ magnétique sinusoïdal en surface à la fréquence de 500 Hz.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} M_{11}(t + \theta dt) & M_{12}(t + \theta dt) \\ M_{21}(t + \theta dt) & M_{22}(t + \theta dt) \end{pmatrix}_k \cdot \Delta \begin{pmatrix} \Phi_{Mp}(t + dt) \\ \mathbf{T}_{Mqj}(t + dt) \end{pmatrix}_{k \rightarrow k+1} = -\mathbf{R}(t + \theta dt)_k \\
M_{11}(p, q; t + \theta dt) &= \iiint_{\Omega_{M_i}} \left( \nabla(\alpha_{\varphi_p}) \cdot \frac{\mu(t + \theta dt)}{dt} \cdot \nabla(\alpha_{\varphi_p}) \right) d^3x \\
M_{12}(p, q, j; t + \theta dt) &= \iiint_{\Omega_{M_i}} \left( -\nabla(\alpha_{\varphi_p}) \cdot \frac{\mu(t + \theta dt)}{dt} \cdot \gamma_{t_{qj}} \right) d^3x \\
M_{21}(q, j, p; t + \theta dt) &= \iiint_{\Omega_{M_i}} \left( -\gamma_{t_{qj}} \cdot \frac{\mu(t + \theta dt)}{dt} \cdot \nabla(\alpha_{\varphi_p}) \right) d^3x \\
M_{22}(q, j, p, i; t + \theta dt) &= \\
& \iiint_{\Omega_{M_i}} \left( \begin{aligned} & \left( \nabla \wedge \gamma_{t_{qj}} \right) \cdot \sigma^{-1} \left( \frac{\theta + \frac{\tau_h(t + \theta dt)}{dt} + \frac{\tau_e(t + \theta dt)}{dt} + \frac{\tau_h(t + \theta dt) \tau_e(t + \theta dt)}{dt^2} \right) \cdot \left( \nabla \wedge \gamma_{t_{pi}} \right) \\ & + \left( \nabla \cdot \gamma_{t_{qj}} \right) \cdot \theta \sigma^{-1} \cdot \left( \nabla \cdot \gamma_{t_{pi}} \right) + \gamma_{t_{qj}} \cdot \frac{\mu(t + \theta dt)}{dt} \cdot \gamma_{t_{pi}} \end{aligned} \right) d^3x \quad (8.29)
\end{aligned}$$

Nous avons pris l'option ici pour le premier résidu de résoudre ( $\nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} = 0$ ), mais si on veut plutôt résoudre ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) alors il suffit de remplacer  $\frac{1}{dt}$  par  $j\omega$  dans  $R_1$ ,  $M_{11}$  et  $M_{12}$ . Enfin, la formulation détaillée ci-dessus correspond à celle utilisable en transitoire. Pour son homologue en harmonique; il suffit de remplacer toutes les dérivées temporelles, *i.e.*  $\frac{1}{dt}$  par  $j\omega$ ; et les propriétés par leur constantes respectives.

### 8.1.5 Tests et vérifications

Nous proposons de tester cette formulation 3-D sur un cas ou plusieurs cas tests très simples, qui présentent l'avantage de pouvoir rapidement vérifier la cohérence des résultats. Nous nous limiterons dans un premier temps au cas réduit où l'existence d'une seule propriété dynamique  $\tau = \tau_h$  (avec  $\tau_e = 0$ ) suffit à rendre compte du phénomène étudié (caractère passe-bas de la matière, hystérésis dynamique et pertes fer). Une première étape consistera à faire ces calculs en régime harmonique pour vérifier que les résultats sont identiques aux calculs standards munis d'une perméabilité complexe équivalente; la deuxième étape est de passer à un signal transitoire sinusoïdal pour vérifier encore une fois la validité des résultats par rapport aux résultats harmoniques. L'objectif étant de prétendre pouvoir ensuite simuler et prévoir la réponse à un signal transitoire quelconque et ce compte tenu d'éventuelles non-linéarités, pour lesquelles la résolution harmonique devient obsolète. Ces cas tests seront ici des géométries réduites d'objets présentant de nombreuses symétries et invariances: une tôle, un cylindre et un barreau "infinis" (Figure 8.2). La procédure de couplage aux interfaces air-fer, pour assurer certaines continuités des champs et courants, n'étant pas encore implémentée, nous la réaliserons ici grâce à des contraintes extérieures convenables appliquées directement sur l'échantillon test (voir figure

8.2). Si nous regardons par exemple la diffusion magnétoharmonique du champ dans la tôle et que nous traçons l'évolution du flux traversant l'échantillon, à champ en surface imposé ( $\nabla\Phi$  imposé en surface), en fonction de la fréquence  $f$  et de la propriété  $\Lambda$ ; nous retrouvons le caractère passe-bas escompté (cf. figure 8.3, [OLI\_1], [OLI\_3]). De plus, ces résultats sont rigoureusement identiques aux résultats obtenus avec la formulation standard utilisant une perméabilité complexe équivalente en terme de pertes et de réponse linéaire harmonique ( $\underline{\mu}_{eq} = \mu \frac{1-j\sigma\Lambda^2\mu\omega}{1+(\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2}$ ). Enfin, nous pouvons aussi vérifier que les calculs transitoires obtenus avec un signal parfaitement sinusoïdal en régime linéaire sont en accord avec la solution harmonique équivalente, ce qui nous encourage à croire en la validité possible de cette implémentation. La figure 8.4 montre quelques cycles transitoires reconstruits, toujours à champ imposé; on observe nettement la dégradation de la perméabilité et de l'induction comme c'est aussi le cas dans les expériences ([BER\_8], [BER\_9]).

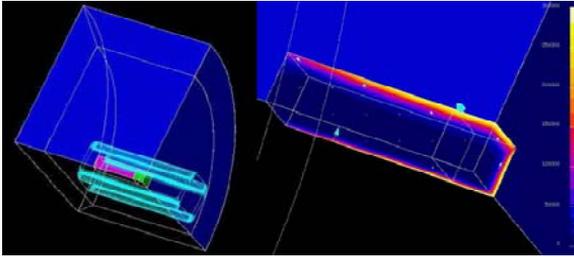


Figure 8.5: Géométrie du cas test étudié, une inductance à noyau de fer-doux (gauche); distribution des courants libres induits et effet de peau correspondant (droite). Le noyau de largeur 1 mm et longueur 10 mm est en FeSi (données de l'échantillon M400-50A); la bobine autour, à 0.25 mm de distance, contient 100 spires et est couplée à une résistance de 10  $\Omega$ . Le générateur fournit une tension constante aux bornes de la bobine de 220 V alternatif.

## 8.2 Couplage $\mathbf{T}_M$ - $\Phi_M$ aux interfaces

A l'interface entre deux milieux aux propriétés physiques différentes et où il n'y a pas de courants ni de charges surfaciques, nous avons conservation des composantes normale de  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}_n$ ), tangentielle de  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}_t$ ), normale de  $\mathbf{J}$  ( $\mathbf{J}_n$ ) et tangentielle de  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H}_t$ ). Les équations de Maxwell-Gauss pour  $\mathbf{B}$  et de Maxwell-Faraday étant par ailleurs "faiblement" résolues en volume (§ 8.1), les conditions de continuité sur  $\mathbf{B}_n$  et  $\mathbf{E}_t$  seront normalement vérifiées en surface. En revanche, bien que la conservation des courants et l'équation de Maxwell-Ampère soient "fortement" résolues en volume (8.13), la formulation  $\mathbf{T}_M - \Phi_M$  n'assure pas pour autant les conditions surfaciques à imposer sur  $\mathbf{J}_n$  et  $\mathbf{H}_t$ .

### 8.2.1 Position du problème

L'objet de cette section est justement de proposer une formulation de couplage aux interfaces  $\partial\Omega_{rs}$  pour imposer ces conditions de continuité physiques et nécessaires; sachant que les potentiels inconnus pour exprimer les champs et/ou courants peuvent être différents suivant la région  $r$  ou  $s$  dans laquelle on se trouve. On rappelle leurs expressions en fonction des champs  $\mathbf{H}^{(r)}$  et  $\mathbf{H}^{(s)}$  des deux régions voisines ( $\mathbf{n}_{rs}$  est le vecteur unitaire normal à l'interface orienté de  $r$  vers  $s$ ) [OLI\_6]

$$\left(\mathbf{H}^{(r)} - \mathbf{H}^{(s)}\right) \wedge \mathbf{n}_{rs} = \mathbf{0} \quad (8.30)$$

$$\left(\mathbf{J}^{(r)} - \mathbf{J}^{(s)}\right) \cdot \mathbf{n}_{rs} = 0 \quad (8.31)$$

Nous proposerons ici de regarder ce couplage particulier entre le fer ( $\mathbf{T}_M, \Phi_M$ ) et l'air ( $\mathbf{T}_0, \Phi_R$ ) (interface  $\partial\Omega = \partial\Omega_{Mi0}$  ou  $\partial\Omega_{0Mi}$ , voir figure 8.1) et en fonction des potentiels inconnus

$$\mathbf{n}_{0i} \wedge \{\mathbf{T}_0 - (1 + \tau_h \partial_t(\cdot)) \mathbf{T}_M\} = \mathbf{0} \quad (8.32a)$$

$$-\mathbf{n}_{0i} \wedge \{\nabla\Phi_R - (1 + \tau_h \partial_t(\cdot)) \nabla\Phi_M\} = \mathbf{0} \quad (8.32b)$$

Nous avons déjà vu au chapitre 5 (§ 5.4.1) qu'en imposant par ailleurs  $\mathbf{n}_{0i} \wedge \mathbf{T}_M = \mathbf{n}_{0i} \wedge \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$  (par programme), il ne reste alors plus qu'à écrire une seule relation entre les gradients des potentiels à l'interface:

$$-\mathbf{n}_{0i} \wedge \{\nabla\Phi_R - (1 + \tau_h \partial_t(\cdot)) \nabla\Phi_M\} = \mathbf{0} \quad (8.33a)$$

### 8.2.2 Discrétisation à l'aide des éléments finis

Les potentiels sont interpolés classiquement à l'aide de fonctions de forme et des valeurs inconnues aux noeuds (nos degrés de liberté)

$$\Phi_R(\mathbf{x}, t) = \sum_{\text{noeud } p} \Phi_{R_p}(t) \alpha_{\varphi_p}(\mathbf{x}) \quad (8.34)$$

$$\Phi_M(\mathbf{x}, t) = \sum_{\text{noeud } p} \Phi_{M_p}(t) \alpha_{\varphi_p}(\mathbf{x}) \quad (8.35)$$

avec les mêmes fonctions  $\alpha_{\varphi_p}$  introduites en 8.1.2. La séparation espace et temps permet là encore d'exprimer plus simplement toutes les différenciations spatiales (gradient principalement ici).

### 8.2.3 Résidus

On cherche à minimiser l'intégrale surfacique suivante (il s'agit d'un terme de pénalité ajouté à la résolution des autres équations, pour pouvoir prendre en

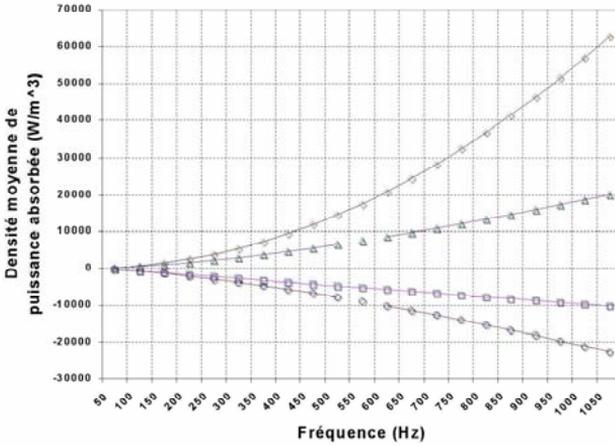


Figure 8.6: Densité de pertes complexes calculée.  $\triangle\circ$ : parties réelle et imaginaire avec une infinité de parois ( $\Lambda = 0$ ),  $\diamond\square$ : la même chose avec parois limitées ( $\Lambda = 100$  micromètres).

compte simultanément les bonnes continuités sur les champs et courants en surface) [OLI\_6]

$$\iint_{\partial\Omega_{M_i}} \left( \frac{1}{2} C \|\mu\| \left[ \left[ \nabla\Phi_R - (1 + \tau_h \partial_t(\cdot)) \nabla\Phi_M \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right)^2 d^2x \quad (8.36)$$

sous une variation stationnaire de  $\Phi_R$  à  $\Phi_M$  constant (ce qui fournit le premier résidu surfacique  $R_3$ ),

$$R_{3_q} = \iint_{\partial\Omega_{M_i}} \left( \begin{array}{c} C \|\mu\| \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_q}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \left[ \left[ \nabla\Phi_R - (1 + \tau_h \partial_t(\cdot)) \nabla\Phi_M \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \end{array} \right) d^2x \quad (8.37)$$

puis sous une variation stationnaire de  $\Phi_M$  à  $\Phi_R$  constant (ce qui fournit le deuxième résidu surfacique  $R_4$ ).

$$R_{4_p} = -R_{3_p} \quad (8.38)$$

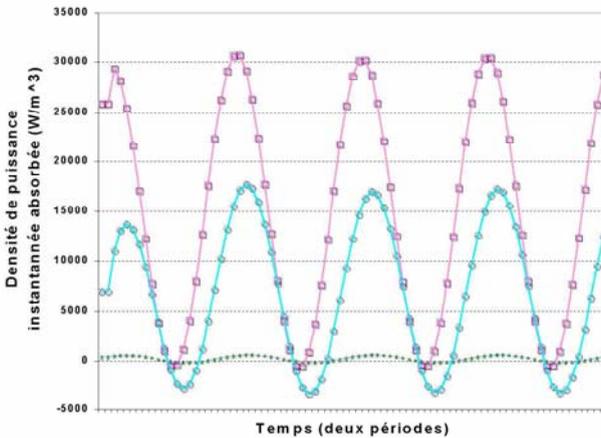
L'ajout du facteur multiplicatif  $\|\mu\|$  (norme du tenseur perméabilité) permet d'améliorer le conditionnement de la matrice globale par comparaison aux termes volumiques. Le paramètre  $C$  réglable est une constante de normalisation pour encore améliorer la convergence et la qualité du couplage (l'idéal serait de pouvoir rendre cette constante réglable et adaptative en fonction des valeurs de champ en surface).

### 8.2.4 Jacobiens

Il s'agit alors d'intégrer des termes matriciels supplémentaires dans la matrice globale du système à résoudre. Les Jacobiens correspondant aux résidus de couplage sont les suivants

$$\begin{aligned}
 M_{31}(p, q; t + \theta dt) &= \iint_{\partial\Omega_{M_i}} \begin{pmatrix} C \|\mu\| \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_p}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \theta \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_q}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{pmatrix} d^2x \\
 M_{32}(p, q; t + \theta dt) &= \iint_{\partial\Omega_{M_i}} \begin{pmatrix} -C \|\mu\| \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_p}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \left( \theta + \frac{\tau_h(t+\theta dt)}{dt} \right) \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_q}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{pmatrix} d^2x \\
 M_{41}(q, p; t + \theta dt) &= \iint_{\partial\Omega_{M_i}} \begin{pmatrix} -C \|\mu\| \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_q}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \theta \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_p}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{pmatrix} d^2x \\
 M_{42}(q, p; t + \theta dt) &= \iint_{\partial\Omega_{M_i}} \begin{pmatrix} C \|\mu\| \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_q}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \left( \theta + \frac{\tau_h(t+\theta dt)}{dt} \right) \left[ \left[ \nabla(\alpha_{\varphi_p}) \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{pmatrix} d^2x
 \end{aligned} \tag{8.39}$$

Cette formulation de couplage peut-être implantée soit directement (mais alors la propriété dynamique est celle du volume), ou bien par l'intermédiaire d'une intégration dans une région surfacique de propriété contrôlée.



Figure~8.7: Puissance absorbée instantanée calculée.  $\triangle\circ$ :  $f=50$  Hz et 500 Hz avec une infinité de parois ( $\Lambda = 0$ ),  $\diamond\square$ : la même chose avec parois limitées ( $\Lambda = 100$  micromètres).

### 8.2.5 Tests et vérifications

Nous pouvons maintenant tester cette proposition sur un problème réduit impliquant une relation interne entre deux régions différentes (le fer et l'air pour commencer). Le problème choisi est une inductance à noyau de fer-doux (voir figure 8.5) se présentant sous la forme d'un simple barreau de section rectangulaire (Ce cas test constitue une partie souvent rencontrée dans de nombreuses autres applications: transformateurs, actionneur type relai R5, ...etc... chapitre 9). Nous prenons en compte les relations de continuité à l'aide de la formulation de couplage automatique proposée, et nous simulons la diffusion du champ à l'intérieur du noyau, pour une tension imposée aux bornes de la bobine inductrice (cf. figure 8.5) [OLI\_6]. La figure 8.6 donne la densité de pertes moyenne calculées par intégration (8.40) dans tout le volume de fer en fonction de la fréquence  $f$  et de la propriété dynamique  $\Lambda$  en régime magnéto-harmonique. La partie imaginaire est la puissance réactive. Les pertes Fer correspondent à la partie réelle. Comme attendu, elles augmentent avec la fréquence  $f$  et la longueur caractéristique  $\Lambda$  ( $\sim$  diminution du nombre de parois).

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}(\omega) &= - \iint_{\partial\Omega_M} \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) \wedge \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{x}, \omega)) \mathbf{d}^2\mathbf{x} \\ &= \iiint_{\Omega_M} \frac{1}{2} \left( \sigma |\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega)|^2 + \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) (j\omega \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \omega))^* \right) d^3x \quad (8.40) \end{aligned}$$

La figure 8.7 permet de vérifier que les calculs transitoires (8.41) et harmoniques s'accordent (8.42) une fois de plus ( $\underline{\Theta}(\omega)$  est définie comme  $\underline{\Pi}(\omega)$  sans conjugaison complexe des quantités duales). On observe toujours une puissance instantanée absorbée plus importante à mesure que la fréquence  $f$  augmente ou que le nombre de parois diminue (i.e.  $\Lambda$  augmente). En revanche, nous observons aussi que la puissance est de plus en plus en avance de phase. Ceci est normal car nous travaillons ici à tension fixée donc à flux (ou induction moyenne) imposé. Le champ magnétique nécessaire à la dynamique, y compris des parois, doit donc être de plus en plus en avance par rapport à cette induction pour que le déphasage entre les deux puisse naturellement augmenter comme observé expérimentalement et donc comme escompté.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= - \iint_{\partial\Omega_M} (\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) \wedge \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{d}^2\mathbf{x} \\ &= \iiint_{\Omega_M} \left( \sigma |\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)|^2 + \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \partial_t \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) \right) d^3x \quad (8.41) \end{aligned}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Pi(t) dt = \text{Re}(\underline{\Pi}(\omega)) \quad (8.42)$$

$$\Pi_{\max} - \Pi_{\min} = 2 * |\underline{\Pi}(\omega)| \quad (8.43)$$

$$\Pi\left(t = 0 \left[ \frac{\pi}{\omega} \right]\right) = \text{Re}(\underline{\Pi}(\omega) - \underline{\Theta}(\omega)) \quad (8.44)$$

Sous réserve d'une vérification et optimisation des implémentations; et d'une fourniture des propriétés intrinsèques identifiées (chapitre 7); on peut donc désormais imaginer simuler de manière automatique le comportement des organes magnétiques doux au sein de diverses applications électrotechniques (transformateurs, capteurs, actionneurs, moteurs, ...etc...), en prenant en compte *a priori* leur hystérésis dynamique et leur pertes fer totales.

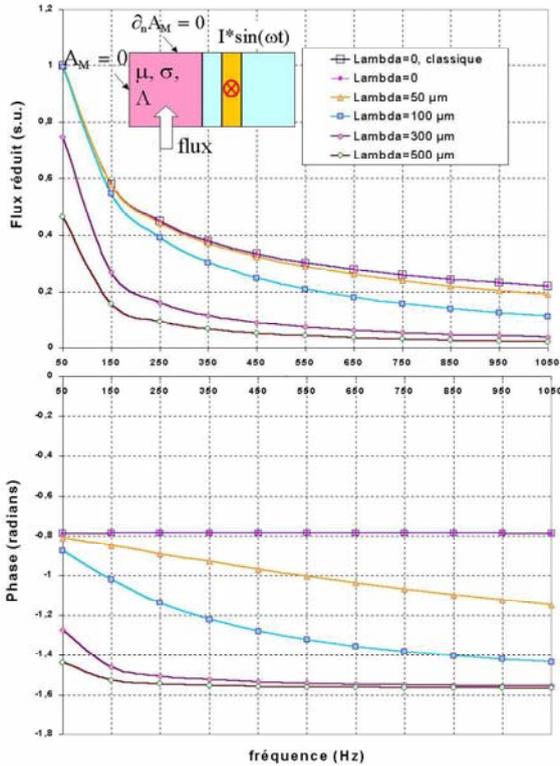


Figure 8.8: Résultats 2-D donnant le module et la phase du flux complexe en fonction de la fréquence et pour plusieurs densités de parois. La géométrie du cas test est insérée en haut à gauche.

## 8.3 Formulation $A_M$ - $\Psi_M$

### 8.3.1 Position du problème

Dans la présente formulation, nous projetons numériquement les deux dernières équations de (8.1); les deux premières étant assurées implicitement par le jeu d'inconnues choisi. En effet, nous écrivons [OLI\_5]

$$\mathbf{E}_M = -(\partial_t \mathbf{A}_M + \nabla(\Psi_M)) \quad (8.45)$$

$$\mathbf{E} = -(\partial_t \mathbf{A} + \nabla(\Psi)) \quad (8.46)$$

Ainsi la conservation du flux et l'équation de Maxwell-Faraday sont automatiquement résolues. Les développements qui vont suivre consistent à résoudre, ou trouver les inconnues  $(\mathbf{A}_M, \Psi_M)$  vérifiant, la conservation des courants libres et l'équation de Maxwell-Ampère [OLI\_5]. Sur les plans de symétrie et aux bords du domaine d'étude, l'une des deux conditions suivantes s'applique

$$\partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0^B \quad (8.47)$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = (1 + \tau_h \partial_t) \mu_s^{-1} \mathbf{B} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_0^H \quad (8.48)$$

Regardons ce que cela implique sur un choix possible des potentiels (hors mouvement de "l'infini")

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_0^B \quad (8.49)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \text{cste} \text{ sur } \partial\Omega_0^H \quad (8.50)$$

A l'interface entre deux milieux aux propriétés physiques différentes et où il n'y a pas de courants ni de charges surfaciques, nous avons conservation habituelle des composantes normale de  $\mathbf{B}$ , tangentielle de  $\mathbf{E}$ , normale de  $\mathbf{J}$  et tangentielle de  $\mathbf{H}$ . Les deux dernières sont vérifiées grâce à la projection  $(\mathbf{A}_M, \Psi_M)$  ici présente. En revanche, il faut s'assurer des deux premières à l'aide d'une formulation de couplage (§ 8.3.3). Leurs expressions à l'aide des inconnues sont données au chapitre 5 (§ 5.4.2).

### 8.3.2 Formulation 2-D surfacique

Bien que les équations à résoudre et les inconnues manipulées soient différentes, les raisonnements et le déroulement des calculs discrétisés sont très proches de la formulation précédente. En conséquence, nous ne détaillerons pas l'obtention de cette formulation et nous donnerons ici directement les résidu et Jacobien correspondant à ce système physique pour les problèmes particuliers bi-dimensionnels avec les courants perpendiculaires au plan d'étude (*i.e.* colinéaires au vecteur  $\mathbf{N}$ , tout comme  $\mathbf{A}_M$  et  $\mathbf{A}$ ) et les champs dans ce même plan [OLI\_5] (en effet, les formulations en potentiel vecteur magnétique sont généralement utilisées surtout pour des problèmes 2-D, car beaucoup trop chères en 3-D en terme de nombre d'inconnues).

- Résidu 2-D en  $\mathbf{A}_M$  ( $\Psi_M = \Psi = 0$ )

$$\forall q : \mathbf{R}_q \cdot \mathbf{N} = \iint_{\partial\Omega} ((\nabla(\alpha_{a_q}) \wedge \mathbf{N}) \mathbf{H} - \alpha_{a_q} \mathbf{N} \cdot \mathbf{J}) d^2x \quad (8.51)$$

- Jacobien 2-D en  $\mathbf{A}_M$  ( $\Psi_M = \Psi = 0$ )

$$M(q, p; t + \theta dt) = \iint_{\partial\Omega} \left( \begin{array}{c} (\nabla(\alpha_{a_q}) \wedge \mathbf{N}) \left( \frac{\theta + \frac{\tau_e(t+\theta dt)}{dt} + \frac{\tau_h(t+\theta dt)}{dt} + \frac{\tau_e(t+\theta dt)\tau_h(t+\theta dt)}{dt^2} \right) \\ \mu^{-1}(t + \theta dt) (\nabla(\alpha_{a_p}) \wedge \mathbf{N}) \\ + \alpha_{a_q} \mathbf{N} \frac{\sigma(t+\theta dt)}{dt} \alpha_{a_p} \mathbf{N} \end{array} \right) \cdot d^2x \quad (8.52)$$

### 8.3.3 Couplage aux interfaces linéiques

On cherche à minimiser l'intégrale linéique suivante pour assurer  $-(\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}_{0i}) \wedge \mathbf{n}_{0i}$  continu ( $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  est automatiquement continu en 2-D car  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{r_s} \propto \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0$  dans toutes les régions  $r$  et  $s$ )

$$\int_{\partial^2\Omega} \left( \frac{1}{2} C \|\sigma\| \left[ [ [\partial_t \mathbf{A} - (1 + \tau_e \partial_t(\cdot)) \partial_t \mathbf{A}_M] \wedge \mathbf{n}_{0i} ] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right]^2 \right) dx \quad (8.53)$$

sous une variation stationnaire de  $\mathbf{A}$  à  $\mathbf{A}_M$  constant (ce qui fournit le premier résidu surfacique  $R_1$ ),

$$R_{1_q} = \int_{\partial^2\Omega} \left( \begin{array}{c} C \|\sigma\| [ [\alpha_{a_q} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i} ] \wedge \mathbf{n}_{0i} ] \cdot \\ [ [\partial_t \mathbf{A} - (1 + \tau_e \partial_t(\cdot)) \partial_t \mathbf{A}_M] \wedge \mathbf{n}_{0i} ] \wedge \mathbf{n}_{0i} ] \end{array} \right) dx \quad (8.54)$$

puis sous une variation stationnaire de  $\mathbf{A}_M$  à  $\mathbf{A}$  constant (ce qui fournit le deuxième résidu surfacique  $R_2$ ).

$$R_{2_p} = -R_{1_p} \quad (8.55)$$

L'ajout du facteur multiplicatif  $\|\sigma\|$  (norme du tenseur conductivité) permet d'améliorer le conditionnement de la matrice globale par comparaison aux termes surfaciques. Le paramètre  $C$  réglable est une constante de normalisation pour encore améliorer la convergence et la qualité du couplage. Il s'agit maintenant d'intégrer des termes matriciels supplémentaires dans la matrice globale du système à résoudre. Les Jacobiens correspondant aux résidus de couplage

sont les suivants

$$\begin{aligned}
 M_{11}(p, q; t + \theta dt) &= \int_{\partial^2 \Omega} \left( \begin{array}{c} C \|\sigma\| \left[ [\alpha_{a_p} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \frac{1}{dt} \left[ [\alpha_{a_q} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{array} \right) dx \\
 M_{12}(p, q; t + \theta dt) &= \int_{\partial^2 \Omega} \left( \begin{array}{c} -C \|\sigma\| \left[ [\alpha_{a_p} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \left( 1 + \frac{\tau_e(t+\theta dt)}{dt} \right) \frac{1}{dt} \left[ [\alpha_{a_q} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{array} \right) dx \\
 M_{21}(q, p; t + \theta dt) &= \int_{\partial^2 \Omega} \left( \begin{array}{c} -C \|\sigma\| \left[ [\alpha_{a_q} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \frac{1}{dt} \left[ [\alpha_{a_p} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{array} \right) dx \\
 M_{22}(q, p; t + \theta dt) &= \int_{\partial^2 \Omega} \left( \begin{array}{c} C \|\sigma\| \left[ [\alpha_{a_q} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \cdot \\ \left( 1 + \frac{\tau_e(t+\theta dt)}{dt} \right) \frac{1}{dt} \left[ [\alpha_{a_p} \mathbf{N} \wedge \mathbf{n}_{0i}] \wedge \mathbf{n}_{0i} \right] \end{array} \right) dx
 \end{aligned} \tag{8.56}$$

Cette formulation de couplage peut-être implantée soit directement (mais alors la propriété dynamique est celle de la région surfacique), ou bien par l'intermédiaire d'une intégration dans une région linéique de propriété contrôlée.

### 8.3.4 Tests et vérifications

Nous n'avons testé que la formulation interne au matériau (avec  $\tau = \tau_h$  et  $\tau_e = 0$ ) sans couplage particulier aux interfaces. Le cas test proposé est tout simplement un échantillon de tôle magnétique [OLI\_5] (voir figure 8.8). Nous insistons sur la différence de profil en potentiel entre le cas classique et le cas dynamique (non représentée ici) car ceci est caractéristique d'une modification de l'effet de peau par la présence des parois. La figure montre l'évolution du flux traversant l'échantillon suivant la direction  $y$  dans le plan d'étude (l'intensité du courant d'excitation est imposée dans un conducteur bobiné au primaire). Le caractère passe-bas de la matière est encore et heureusement correctement décrit.

## 8.4 Structures laminées quasi-périodiques

### 8.4.1 Description physique

Le calcul exact de tous les courants induits prendrait beaucoup trop de temps et serait non relevant. En revanche, nous souhaitons savoir à l'avance leur influence en termes de réponse macroscopique amortie et de pertes d'énergie. Nous proposons donc, tout comme nous l'avons fait avec les boucles de courants microscopiques, d'introduire ces dynamiques induites dans des formulations dédiées homogénéisées. Grâce à des techniques d'approches rigoureuses ([DUL\_1], [DUL\_2], [DUL\_3], [GYS\_1]) (cf. figure 8.9, a) + b)), nous pouvons simplifier la description physique et mathématique de la diffusion retardée du champ dans chacune des feuilles métalliques en définissant une approximation du premier ordre du champ magnétique moyen  $\mathbf{H}$  exprimé en fonction de

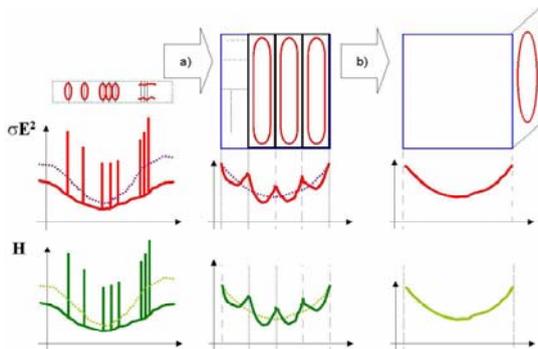


Figure 8.9: Description de la méthode qui traite le problème des courants induits aux différentes échelles. Nous gardons l'information provenant des deux échelles microscopique et mésoscopique (courants induits autour des parois ou dans l'épaisseur de la tôle).

l'induction moyenne  $\mathbf{B}$  dans un repère particulier lié et orienté suivant la direction des tôles du paquet [OLI\_5] (voir figure 8.10).

$$\partial_t \mathbf{B}_\perp \simeq \mu_\perp \partial_t (\mathbf{H}_\perp - \sigma_\perp \Lambda^2 \partial_t \mathbf{B}_\perp) \quad (8.57)$$

$$\partial_t \mathbf{B}_\parallel \simeq \mu_\parallel \partial_t \left( \mathbf{H}_\parallel - \sigma_\parallel \left( \Lambda^2 + \frac{\xi^2}{12} \right) \partial_t \mathbf{B}_\parallel \right) \quad (8.58)$$

$\sigma$  et  $\mu$  sont maintenant des tenseurs de rang 3 qui correspondent à la structure laminée clairement anisotrope (Figure 8.10, b)), en plus de l'anisotropie du matériau dans le plan de chacune des tôles (*i.e.*  $\sigma_\parallel$  et  $\mu_\parallel$  sont aussi des tenseurs, de rang 2, non nécessairement diagonaux ou colinéaires à l'identité);  $\xi$  est l'épaisseur de chaque feuille.

### 8.4.2 Formulation 2-D

La formulation de ce problème en 3-D  $\mathbf{T}_M - \Phi_M$  est possible, mais nous nous concentrerons ici sur la formulation 2-D en  $\mathbf{A}$  ( $\tau_e = 0$ ), *i.e.* perpendiculairement au plan des tôles [OLI\_5] (direction  $\perp$ , voir figure 8.10). Il va sans dire que cette approche ne peut s'envisager que si le paquet contient suffisamment de tôles afin que l'hypothèse 2-D soit valide. Lorsque la fréquence reste relativement faible (fréquences inférieures à quelques centaines de Hertz pour les matériaux doux classiques<sup>3</sup>) pour que les approximations des lois de comportement dynamique homogénéisées (8.57) restent valables, elle est très proche de

<sup>3</sup>La limite de cette approximation d'ordre 1 peut s'exprimer ainsi:

$$\frac{\sigma \mu \xi^4 \omega}{720 \left( \Lambda^2 + \frac{\xi^2}{12} \right)} \ll 1$$

on obtient une fréquence limite (à 1% près) de environ 150 Hz pour une tôle FeSi d'épaisseur 0.5 mm, de perméabilité relative 5000 et de propriété dynamique  $\Lambda = 0.3$  mm.

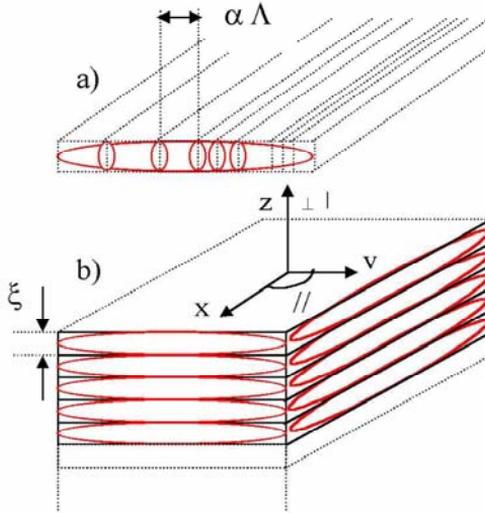


Figure 8.10: Schématisation du paquet de tôles et courants induits aux deux échelles microscopique et mésoscopique. Notre plan d'étude sera le plan  $(x,y)$ .

la formulation déjà proposée au § 8.3.2 (avec  $\tau_h \simeq \sigma_{//} \left( \Lambda_h^2 + \frac{\xi^2}{12} \right) \mu_{//}$  et aucun courants perpendiculaires). Sinon celle-ci se complique nettement avec ajout d'inconnues supplémentaires d'ordres supérieurs [DUL\_3], ou récupération des valeurs d'induction aux divers instants antérieurs. Nous ne ferons pas de tests supplémentaires dans ce cas et nous utiliserons directement ce formalisme en adaptant la loi de comportement dynamique homogénéisée sur une application particulière au chapitre 9 suivant: un transformateur de courant sous forme de rondelles empilées (§ 9.1).

Si on l'ordre 2 est

$$\partial_t \mathbf{B}_{//} \simeq \mu_{//} \partial_t \left( \mathbf{H}_{//} - \sigma_{//} \left( \Lambda^2 + \frac{\xi^2}{12} \right) \partial_t \mathbf{B}_{//} + \frac{\sigma_{//}^2 \xi^4 \mu_{//}}{720} \partial_t^2 \mathbf{B}_{//} \right)$$

et sa limite en fréquence est calculée par

$$\frac{(\sigma \xi^2 \mu \omega)^2 \left( \frac{1}{60} + \left( \frac{\Lambda}{\xi} \right)^2 \right) \left( \Lambda^2 - \xi^2 \left( \frac{1}{42} + \frac{1}{16} \left( \frac{\Lambda}{\xi} \right)^2 \right) \right)}{12 \left( \Lambda^2 + \frac{\xi^2}{12} \right)} \ll 1$$

soit une fréquence limite d'utilisation de 320 Hz (pour 1 % d'erreur). Ensuite, il faut passer à l'ordre 3 et ça se complique. Mais il existe une expression exacte sous forme de série infinie, naturellement difficile à manipuler en l'état. On peut plutôt imaginer regrouper tous ces termes en un seul terme variable en fonction de l'état  $(\mathbf{B}, \partial_t \mathbf{B})$ , dont on identifierait les lois caractéristiques d'évolution (un peu à l'image de la propriété  $\Lambda$  seule pour un matériau massif ou tout simplement du modèle LS adapté ici pour son introduction *a priori*).

## 8.5 Conclusion

Il s'agissait ici d'écrire complètement les deux formulations en potentiels retardés proposées. Nous avons récapitulé les équations à résoudre et les résidus à annuler en fonction des potentiels. Nous avons donné les matrices jacobiennes correspondantes. Nous avons aussi précisé les conditions de couplage aux interfaces (air-fer essentiellement). L'avantage premier de ces formulations réside dans une prise en compte *a priori* simple de l'hystérésis dynamique avec un coût de calcul minimum et une convergence numérique préservée. Son inconvénient majeur provient de matrices plus lourdes avec termes non diagonaux et de couplage. De plus les temps de calcul resteront long comme c'est habituellement le cas en Eléments Finis. Des cas tests simples en 3-D (pour la formulation  $\mathbf{T}_M$ - $\Phi_M$  en potentiel scalaire magnétique et vecteur électrique) et en 2-D (pour la formulation  $\mathbf{A}_M$ - $\Psi_M$  en potentiels scalaire électrique et vecteur magnétique) ont permis de valider les formulations et de vérifier les méthodes implantées numériquement. Une généralisation au cas de paquets de tôles homogénéisées a enfin été proposée à la fin du chapitre.

# Chapitre 9

## Dispositifs Electrotechniques

*” On ne peut s’empêcher de penser que ces formules mathématiques ont une existence indépendante et une intelligence propre, qu’elles en savent plus que nous, plus même que ceux qui les ont découvertes, et que nous en tirons plus de choses que l’on en avait mises à l’origine ”*

### **Hertz**

(On the relations between Light and Electricity (1889),  
miscellaneous papers, Mc Gmillan, Londres, 1896.)

Nous proposons dans ce chapitre de commencer l’étude fine de certaines applications de protection électrique en y intégrant le comportement dynamique des matériaux doux utilisés dans la réalisation de leur circuit magnétique. Ces premières simulations, réalisées à l’aide de la Méthode des Eléments Finis (F.E.M.), se feront dans des configurations très simples pour pouvoir appréhender plus facilement l’interprétation des résultats grâce à des considérations physiques, en présence des parois, sur le fonctionnement de tels dispositifs. Sous réserve d’une optimisation et d’une vérification poussées des implémentations numériques, des calculs plus généraux et précis dans des configurations réelles de fonctionnement sont envisageables ([BLE\_1], [DLI\_1]). Les composants choisis sont un transformateur de courant (capteur électromagnétique), un actionneur électromécanique linéaire (Mitop) et un actionneur ultra-sensible à levier (relais R5) ([WOO\_1], [ULT\_1], [ROU\_1]). Ceux-ci peuvent tous intervenir dans la chaîne de protection différentielle domestique ou industrielle (protection des personnes ou des équipements, voir figure 2.9).

## 9.1 Capteur électromagnétique

### 9.1.1 Géométrie et physique

Le capteur électromagnétique peut être réalisé à l'aide d'un simple transformateur de courant torique (Figure 9.1). Le différentiel de courant primaire entre la phase et le neutre (biphasé) créé une dissymétrie et un champ magnétique d'excitation. Ce champ provoque l'aimantation du circuit torique en ferromagnétique doux (rubans ou rondelles de la figure 9.1) et induit une tension mesurable aux bornes des bobines du circuit secondaire (couronnes de la figure 9.1). Le matériau choisi ici ne correspond pas aux matériaux généralement utilisés pour ce type d'application mais il permet tout de même de comprendre l'intervention de la physique des parois (qui sera analogue avec un autre matériau) dans le fonctionnement du capteur (Matériau FeSi type M400-50A) [OLI\_5].

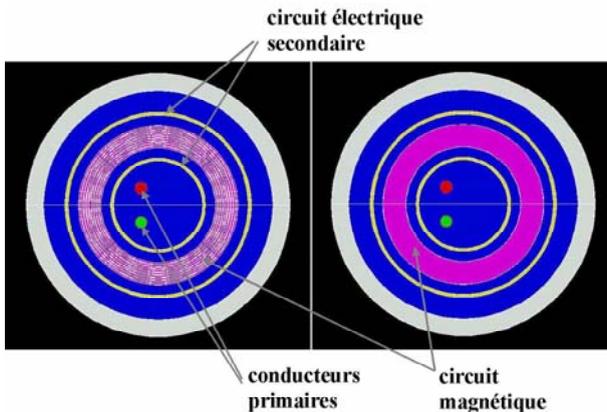


Figure 9.1: Géométrie du transformateur de courant étudié. Sous forme de rubans enroulés (à gauche) ou de rondelles empilées (à droite). L'épaisseur de chaque "feuille" est de 0.3 mm, le rayon du tore de environ 1 à 2 cm. La fréquence caractéristique du signal testée est autour de 250 Hz, le courant alternatif nominal est ici par exemple de 32 A. Nous simulons la détection d'un défaut de courant de 100 mA pour la protection des équipements électroménagers. Les premiers tests ont été réalisés en circuit du secondaire ouvert.

Nous pouvons commencer par une comparaison de notre formulation (chapitre 8) avec la méthode standard du logiciel (Flux2D&3D, Logiciel Eléments Finis en Electromagnétisme) sur une des deux configurations (l'architecture en rondelles par exemple, cf. figure 9.1, gauche). Il s'agit de vérifier que les tensions induites calculées sont les mêmes dans les deux cas (voir figure 9.2). Il reste que cette vérification ne peut se faire en l'état qu'en régime harmonique, mais nous savons aussi qu'en transitoire sinusoïdal, les résultats sont aussi cohérents entre eux. L'intérêt d'un tel développement réside naturellement dans la simulation

transitoire en présence d'un signal de défaut quelconque; simulation que nous n'avons malheureusement pas eu le temps de mettre en oeuvre mais qui est parfaitement envisageable. Il est bien entendu que sur l'exemple du capteur de courant, celui-ci fonctionnant généralement à très bas régime, une simulation harmonique linéaire pourrait peut-être suffir (induction très faible dans le circuit et comportement du matériau quasi-linéaire). Ce ne sera plus le cas pour d'autres applications pour lesquelles certaines régions sont en régime saturé ou clairement non-linéaire.

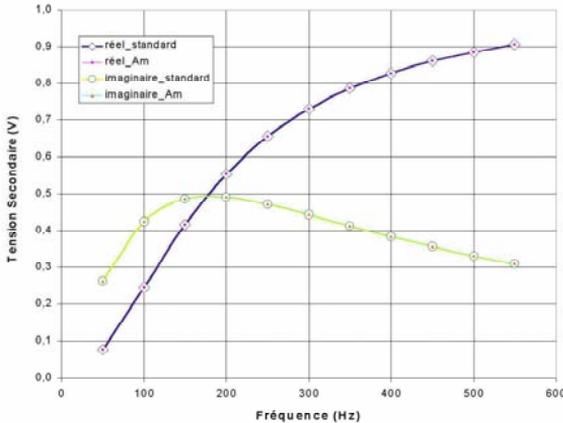


Figure 9.2: Comparaison entre la formulation dédiée en potentiel vecteur magnétique et la formulation standard couplée à une perméabilité complexe équivalente ( $\Lambda = 0.1 \text{ mm}$ ). Les deux méthodes sont rigoureusement identiques en terme de réponse harmonique.

### 9.1.2 Résultats et interprétations

Maintenant plus rassurés quant à la pertinence et la justesse (relative) de nos calculs, nous projetons maintenant de simuler le comportement des deux architectures en circuit du secondaire ouvert (Figure 9.3). Les formulations utilisées sont les mêmes pour les deux cas, mais les termes dynamiques liés aux courants induits, soit microscopiques seuls dans un cas, soit microscopiques et macroscopiques dans l'autre, sont légèrement différents. De plus dans l'architecture en rubans, nous calculons l'effet de peau alors que dans l'architecture en rondelles, aucun courant ne pouvant traverser celles-ci, nous ne prenons en compte cet effet que par l'intermédiaire d'un terme dynamique homogénéisé. Il est donc normal d'observer un calcul de diffusion beaucoup plus homogène dans le second cas que dans le premier (voir figure 9.3). Pourtant les phénomènes d'amortissement et de pertes induites sont malgré tout pris en compte dans le calcul de l'intensité (module de la réponse en induction ou en tension) et du retard (angle du

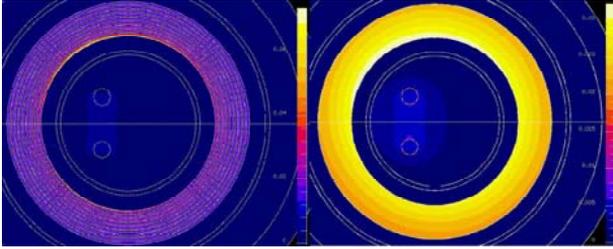
déphasage de l'induction ou de la tension) de cette "diffusion" dans les deux configurations [OLI\_5] (Figure 9.4).

La figure 9.4 montre en effet le calcul de la réponse en tension des deux architectures en module et en phase (la phase de l'intensité du courant de défaut étant prise égale à zéro, c'est la référence). Nous observons bien que les propriétés dynamiques ont des actions similaires sur cette forme de réponse et son évolution avec la fréquence (dégradation de la perméabilité et augmentation des pertes). Dans le cas idéal sans pertes ni amortissement, nous devrions avoir une tension linéairement croissante en module et en quadrature de phase par rapport au courant. Une première analyse grossière peu précautionneuse indiquerait (à masse de fer utilisée rigoureusement identique) que la structure en rondelles amortirait moins vite le signal que la structure en rubans (équivalence à 250 Hz:  $\Lambda = 100 \mu\text{m}$  pour les rubans équivalent à  $(\Lambda, \xi) = 130 \mu\text{m}$  pour les rondelles). Il y a effectivement une différence d'architecture avec la présence d'alternances fer-air "boucliers" avec les rubans, qu'il n'y a pas avec les rondelles; mais nous devons tout de même vérifier que l'approximation de l'homogénéisation des rondelles reste valable (la limite se situerait autour des 300 Hz). Voici donc une première porte ouverte aux possibilités qu'offrent ces considérations et méthodes dans la comparaison d'architectures de sécurité en régime harmonique ou transitoire.

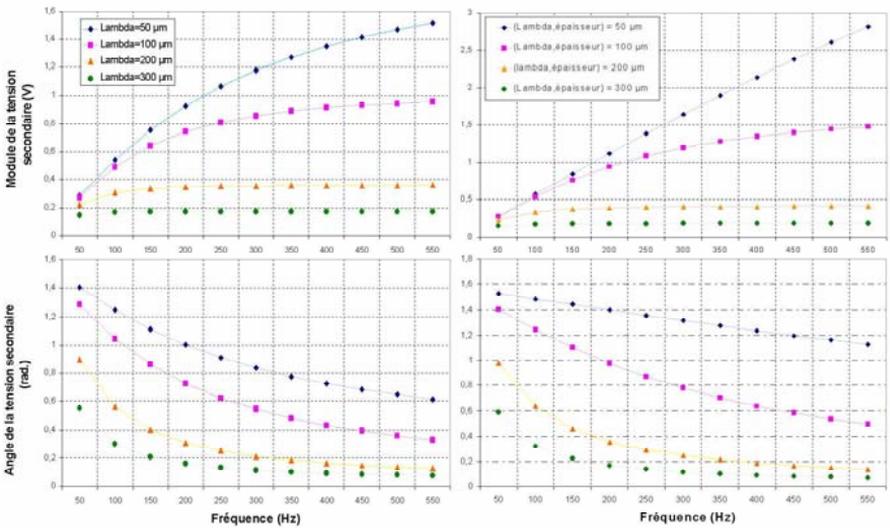
## 9.2 Actionneur électromécanique (Mitop)

### 9.2.1 Géométrie et physique

L'actionneur électromécanique peut être réalisé à l'aide d'une technologie d'actionnement linéaire, ce que montre le Mitop (Figure 9.5). Il est généralement utilisé pour les plus gros calibres que le relais R5 plus sensible et étudié ultérieurement (section 9.3.1 et figure 9.7). Nous ne détaillerons pas la description géométrique et technique de ce composant qui dépend naturellement du calibre; ce détail peut-être trouvé dans d'autres travaux [ULT\_1]. Nous travaillerons ici avec un petit calibre. Son circuit et son noyau sont ici toujours en FeSi (simple test), la bobine contient 250 spires et peut-être alimentée en courant (1 à 100 mA) ou bien en tension (1 à 20 V). Les dimensions caractéristiques de cette application sont toujours de l'ordre de 1 à 2 cm (hauteur totale de 14.55 mm et rayon total de 7.5 mm). La figure 9.5 donne aussi quelques dégradés d'induction obtenus sans parois (à gauche) et avec parois (à droite); on y met en évidence un léger effet de peau, moins marqué à 50 Hz et avec parois que sans (l'explication se trouve dans l'existence d'une mini-résonance principalement due à la présence simultanée des parois et d'un entrefer, et dont la fréquence caractéristique dépend naturellement des deux, voir figure 9.6).



Figure~9.3: "Diffusion" du champ magnétique pour les deux architectures de capteur: rubans (à gauche) et rondelles (à droite). Le courant de défaut dans un des conducteurs du primaire au centre, crée une assymétrie et un champ magnétique d'excitation dans le circuit magnétique pour l'aimanter et induire une tension au secondaire. Le processus est amorti par des courants induits aussi bien microscopiques que macroscopiques. Ici la fréquence est 250 Hz et  $\Lambda = 0.1$  mm.



Figure~9.4: Simulation de la tension induite au secondaire du capteur à vide. Gauche: module et angle de la tension induite pour l'architecture en rubans, et pour plusieurs densité équivalentes de parois. Les courants induits classiques sont pris en compte alors que les courants induits microscopiques ont été homogénéisés. Droite: module et angle de la tension pour l'architecture en rondelles. Tous les courants induits ont été introduits mais à l'aide d'une homogénéisation. La propriété dynamique a donc été approximée à l'aide d'une seule longueur caractéristique équivalente tenant compte à la fois de la structure magnétique et de la structure géométrique en feuilles fines.

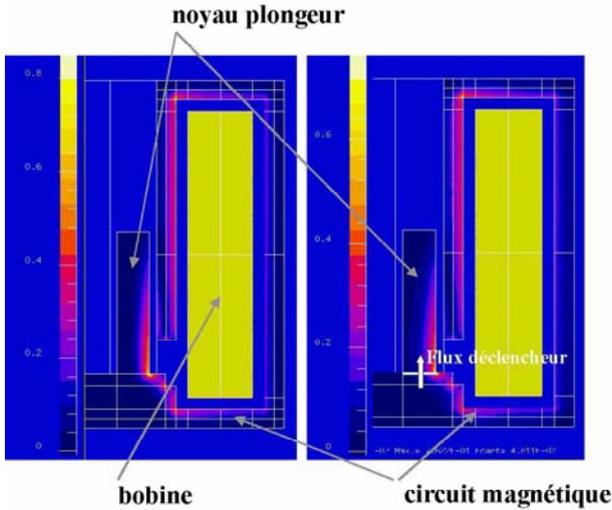


Figure 9.5: Géométrie axisymétrique de l'actionneur Mitop (Bobine d'excitation, circuit magnétique et noyau colé avant ouverture). Quelques dégradés d'induction sont représentés, avec une infinité de parois (à gauche) et avec un nombre limité de parois (à droite).

## 9.2.2 Résultats et interprétations

Nous n'avons malheureusement pas eu la possibilité d'effectuer des simulations transitoires réalistes avec mouvement du noyau pour l'instant. Nous pouvons cependant regarder l'évolution du flux en partie responsable de son départ (flux de l'induction à l'intersection entre le noyau et le circuit ferromagnétiques, voir figure 9.5) en fonction de la fréquence caractéristique du signal de défaut (intensité du courant imposée dans la bobine) et en l'absence d'aimant permanent. L'idée étant de regarder le comportement du circuit magnétique avec entrefer et géométrie complexe dans un premier temps. La figure 9.6 donne les résultats et il apparaît un phénomène intéressant: l'existence d'une résonance dont la position dépend du jeu des trois paramètres que sont la fréquence, l'entrefer et la propriété dynamique. En dessous de cette résonance le flux utile disponible n'est pas forcément ni dégradé ni déphasé par la présence des parois; au delà, on retrouve le comportement habituellement observé (*i.e.* amortissement et déphasage d'autant plus important que la fréquence ou que  $\Lambda$  est grand). Il est possible de rendre compte analytiquement et de manière approchée de ce phénomène en calculant le flux de déclenchement par une méthode de schéma reluctant dynamique [ROT\_1]. En effet, comme la perméabilité équivalente du fer est complexe et se dégrade en fonction de la fréquence ( $\underline{\mu}_{eq} = \mu \frac{1 - j\sigma\Lambda^2\mu\omega}{1 + (\sigma\Lambda^2\mu\omega)^2}$ ), une partie de l'énergie qui était au préalable entièrement localisée dans l'entrefer se retrouve dans le fer dont le comportement acquiert plus d'importance.

Pour les entrefers  $l_e$  suffisamment faibles (d'autant moins que la fréquence  $f$  ou que la propriété  $\Lambda$  est grande); la dégradation de la perméabilité apparente du dispositif n'est plus et le flux utile augmente avec la fréquence contrairement au cas habituel avant de diminuer à nouveau (il passe donc par un maximum). Pour chaque fréquence  $f$  et propriété  $\Lambda$ , il existe un entrefer optimal pour lequel la partie réelle du flux  $\underline{\Phi}$  (9.1) est maximale.

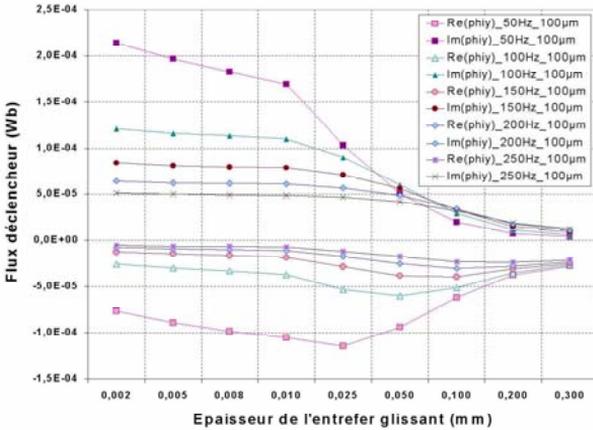


Figure 9.6: Simulation du flux déclencheur du départ du noyau et de l'ouverture de l'actionneur en fonction de la fréquence caractéristique du signal d'excitation (courant imposé dans la bobine) et de l'épaisseur de l'entrefer de glissement; pour plusieurs densités équivalentes de parois ( $1/\Lambda$ ). La partie utile au déclenchement est réelle.

$$\underline{\Phi} \simeq \frac{\mu_0 \underline{\mu}_{eq} S_F N I}{\mu_0 l_F + \underline{\mu}_{eq} l_e} \quad (9.1)$$

$NI$  sont les ampères tours imposés dans la bobine,  $S_F$  est la section moyenne du circuit magnétique,  $l_F$  sa longueur moyenne,  $l_e$  est la longueur de l'entrefer. On montre ainsi qu'il semble exister des possibilités exploitables d'optimisation d'architectures et surtout de mariages plus ou moins astucieux entre les architectures et les matériaux en fonction du régime dynamique de fonctionnement. Une deuxième simulation consisterait à inclure l'aimant permanent et à imposer non plus le courant mais la tension aux bornes de la bobine. Ces considérations pourraient aussi très bien s'exploiter dans d'autres applications telles que les moteurs à reluctance variable, les moteurs asynchrones ou bien encore les moteurs synchrones à aimants.

## 9.3 Actionneur électromécanique (relais R5)

### 9.3.1 Géométrie et physique

L'actionneur électromécanique peut aussi être réalisé à l'aide d'une technologie d'actionnement à levier, ce que montre le relais R5 (Figure 9.7). Il est généralement utilisé pour les plus petits calibres que le Mitop étudié précédemment (section 9.2). Nous ne détaillerons pas la description géométrique et technique de ce composant qui dépend naturellement du calibre; ce détail peut-être trouvé dans d'autres travaux [ROU\_1]. Nous travaillerons ici avec un très petit calibre aux dimensions géométriques caractéristiques de l'ordre de 1 à 2 cm ( $\sim 15*15*7.5$  mm). Son circuit et son noyau sont ici toujours en FeSi (simple test), la bobine contient 65 spires et est alimentée en courant (1 à 100 mA). Le principe de fonctionnement est basé sur le principe du levier; un aimant permanent maintient la palette fermée grâce à l'établissement d'un flux permanent polarisant tout le circuit magnétique. Lorsqu'un courant de défaut apparaît dans la bobine; il crée, lors de l'une des deux premières demi-périodes du signal, un flux opposé à celui de l'aimant. Si ce flux créé est au dessus d'un certain seuil, il libère la palette qui s'ouvre par action des ressorts fixés à son autre extrémité. Il devient alors très important de pouvoir prévoir avec précision l'intensité et la vitesse d'induction de ce flux et ce quelquesoient l'intensité, la rapidité et la forme du signal de défaut. Nous commencerons par une étude paramétrique en fréquence de ce signal (pris de forme sinusoïdale dans un premier temps) pour une position donnée de la palette, mais en prenant en compte le mouvement des parois magnétiques dans le circuit [OLI\_6].

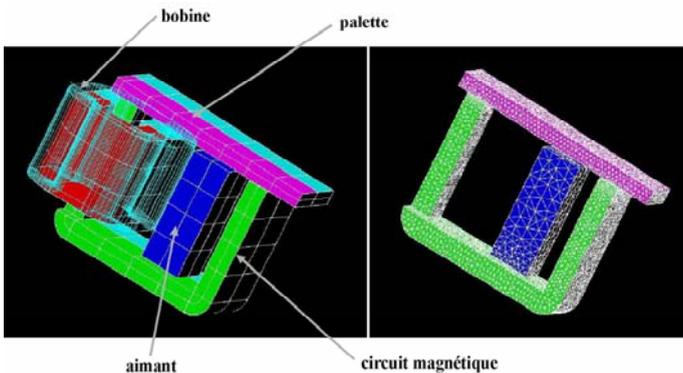


Figure 9.7: Géométrie et maillage du relais R5 pouvant aussi intervenir dans la chaîne différentielle de protection. Les dimensions sont de l'ordre du mm pour l'épaisseur du circuit magnétique.

La figure 9.8 donne quelques dégradés d'induction obtenus avec parois, pour une position donnée fixée de la palette (très légère ouverture). On y observe un effet de peau (qui dépend encore une fois de la présence ou non des parois)

caractéristique de l'amortissement de la diffusion dynamique du champ par les courants induits, ce qui aura une influence sur l'évolution du flux déclencheur [OLI\_6] (Figure 9.9).

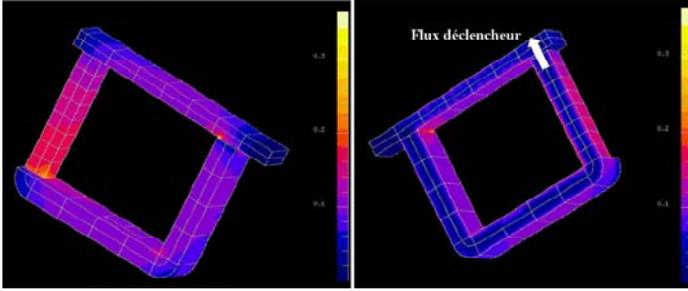


Figure 9.8: Représentation des dégradés d'induction obtenus en position fixe légèrement ouverte, au moment du déclenchement.

### 9.3.2 Résultats et interprétations

A l'aide des simulations précédentes (Figure 9.8), nous pouvons exploiter certaines grandeurs globales significatives et intéressantes. La figure 9.9 par exemple propose d'analyser l'évolution du flux à l'origine du décollement de la palette en fonction de la rapidité d'apparition du courant de défaut et de la densité équivalente de parois ( $1/\Lambda$ ). S'il s'avère pertinent que l'actionneur puisse être sollicité aussi rapidement ( $> \sim 50$  Hz, voir ondes de courant normalisées de l'annexe 10), et pour peu que son circuit reste à des niveaux d'induction raisonnables ( $\Lambda$  effectivement de l'ordre de  $100 - 300 \mu m$ , cf chapitre 7), alors la prise en compte des parois magnétiques devient fondamental; car celles-ci amortissent et déphasent le flux de déclenchement. Le seuil peut encore se régler à l'aide d'autres pièces telles que le ressort (sa position initiale), mais toute ms de retard dans chacun des éléments de la chaîne de protection est autant de ms de perdus dans le temps d'ouverture du circuit en défaut (voir annexe 10). Si par malheur cet amortissement et ce déphasage sont suffisants pour reporter l'ouverture à la demi-période d'après, alors il est déjà trop tard; car l'aimant et la bobine agissent alors dans le même sens (utilisation d'une diode de redressement). Il va sans dire de plus que nous n'avons testé ici qu'une seule configuration ultra simple. Aucune conclusion définitive n'est donc encore possible sans d'autres simulations complémentaires en situation réelle de fonctionnement (ce qui demande de développer encore plus loin les possibilités actuelles du logiciel de simulation: mouvement en 3-D, entrefers résiduels et variables).

La figure 9.10 quant à elle propose d'examiner l'évolution de la puissance absorbée par le circuit magnétique de l'actionneur, en fonction de la fréquence caractéristique du signal de défaut et ce pour plusieurs densités équivalentes de parois. On y retrouve des courbes d'évolution analogues aux tendances obtenues

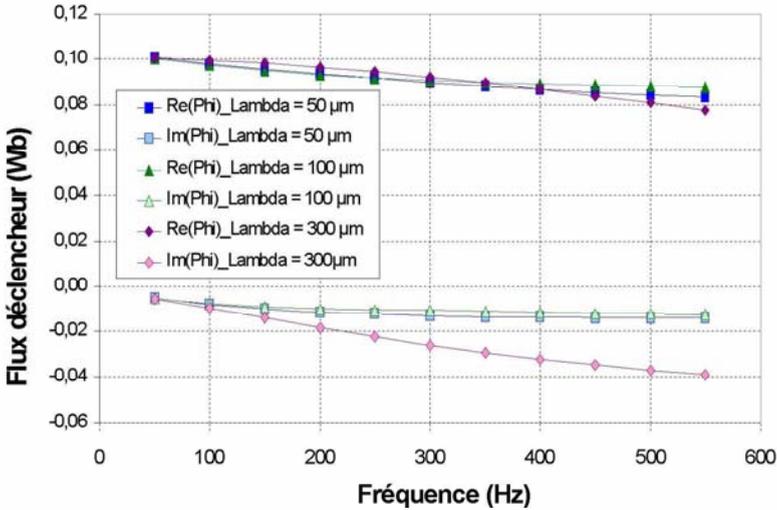


Figure 9.9: Calcul du flux déclencheur de l'ouverture du relais R5 en fonction de la fréquence caractéristique du signal de défaut et de la densité équivalente de parois magnétiques.

avec l'inductance du § 8.2.5. Plus l'apparition du courant de défaut est rapide et plus la puissance perdue dans le circuit magnétique (partie réelle sur la figure 9.10) est importante. La puissance réactive (partie imaginaire sur la figure 9.10), quant à elle diminue. Ceci a pour conséquence apparente de dégrader les possibilités de conversion électromécaniques du relais, ce que nous retrouvons bien sur les courbes de la figure 9.9. Encore une fois, aucune conclusion définitive n'est possible sans une étude plus approfondie non menée jusqu'ici; mais accessible et envisageable moyennant quelques développements supplémentaires.

## 9.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de mettre en application les formulations dédiées proposées pour simuler le comportement des composants des dispositifs de sécurité électrique (disjoncteurs différentiels). Nous avons regardé des configurations simples d'utilisation d'un capteur torique de courant, d'un actionneur électromécanique axisymétrique linéaire et d'un actionneur électromécanique 3-D à levier. L'influence néfaste des parois sur le temps de réponse de chacune de ses applications a été mis en exergue et le besoin de les prendre en compte lors de la conception pour le respect des normes de sécurité démontré.

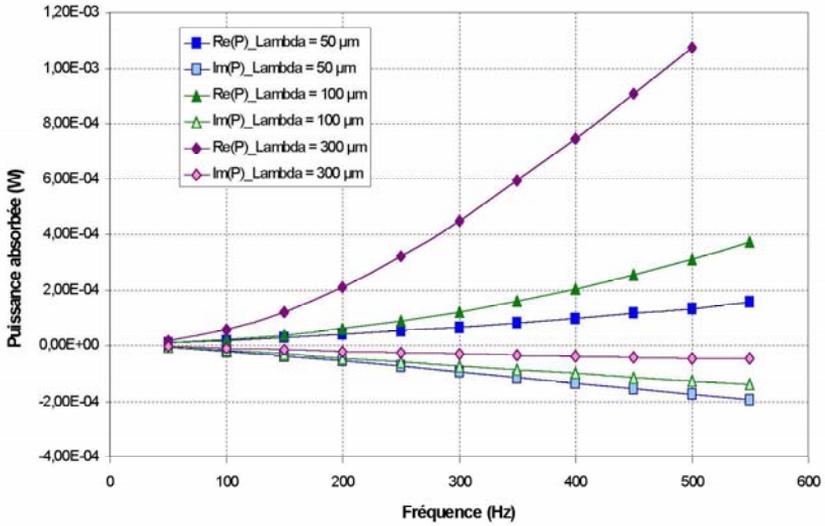


Figure 9.10: Calcul de la puissance totale absorbée par le circuit magnétique du relais R5 en fonction de la fréquence caractéristique du signal de défaut déclencheur (intensité du courant de défaut imposée) et de la densité équivalente de parois.



**Partie VI**

**Conclusion**



*” La science ne peut pas résoudre l’ultime mystère de la nature. Et cela parcequ’en dernière analyse, nous faisons nous-mêmes partie du mystère que nous essayons de résoudre ”*

**Max Planck**

*” Les seules lois de la matière sont celles que nos esprits doivent fabriquer, et les seules lois de l’esprit sont fabriquées pour lui par la matière ”*

**James Clerk Maxwell**

La représentation des matériaux doux proposée nous aide à comprendre leur comportement dynamique et permet la reconstruction de leur hystérésis et le calcul *a priori* de leurs pertes induites. Il est clair cependant, d'une part qu'elle ne se destine qu'aux corps ferromagnétiques doux macroscopiques, et d'autre part qu'elle s'affranchit de multitudes de processus, parfois chaotiques, divers et complexes et qu'elle reste donc incomplète et limitée dans ces prédictions vis à vis des expériences, que nous n'avons pas eu le temps de toutes mener. En revanche, elle reste ouverte à des enrichissements concernant justement la richesse des phénomènes microscopiques internes aux matériaux. Enfin, même si elles ne permettent en aucune façon une mesure exacte de la structure magnétique, les propriétés proposées en donnent une idée intéressante, moyennée statistiquement.

Les formulations électromagnétiques dédiées proposées sont susceptibles de pouvoir intégrer ces propriétés dynamiques des matériaux et donc leur hystérésis et les pertes induites en régime linéaire ou non linéaire. Elles peuvent être utilisées pour simuler le comportement magnétoharmonique ou bien transitoire apparents des dispositifs électrotechniques classiques contenant des organes en matériaux ferromagnétiques doux (sous formes de pièces massives ou de paquets de tôles) et fonctionnant en présence de signaux relativement "basses" fréquences (Hz- kHz, suivant les propriétés des matériaux et les géométries).

Voici donc les deux réussites de ce travail. Les échecs qui vont avec sont les limites non encore surpassées quant à la précision relative qu'il est possible d'atteindre, des points d'interrogation persistants quant à la distinction électrique-magnétique et la non-dépendance avec la géométrie, et enfin et surtout une procédure d'identification incomplète et approchée qui se base sur des principes d'homogénéisation.

Nous pouvons envisager dans un futur plus ou moins proche de donner une suite aux techniques de mesure et de caractérisation des matériaux, en validant plus en avant les représentations proposées et en créant une banque de matériaux. Pour les méthodes numériques, de même, l'implémentation de codes demande à être développée, vérifiée, testée et appliquée. La structure de données doit aussi être adaptée en conséquence. Enfin, nous devons penser à mettre ces travaux en parallèle d'autres travaux pour la prise en compte du mouvement et des entrefers minces en trois dimensions (actionneurs fonctionnant en transitoire essentiellement). Pour terminer, il sera alors possible de concevoir de nouveaux dispositifs de sécurité électrique et de protection de réseaux ultra-sensibles avec une haute précision.

# Chapitre 10

## Dangers du Courant sur le Corps Humain

Le courant électrique traversant le corps humain provoque une tétanisation des muscles, des brûlures externes et internes et des dérégulations d'organes. Une différence de potentiel peut entraîner cette circulation de courant entre deux points de contact (la pièce nue sous tension et le sol généralement). Les effets physiopathologiques de ce courant électrique sur l'Homme dépendent de différents facteurs: des caractéristiques physiologiques de l'être humain concerné, de l'environnement (humide ou sec par exemple), du temps de contact (Figure 10.1) et aussi des caractéristiques du courant (intensité figure 10.1, fréquence figure 10.3, ...etc...) [CAL\_2].

Les risques de non-lacher, de brûlures graves, d'arrêt respiratoire ou de fibrillation cardiaque irréversible, augmentent avec l'intensité et le temps d'exposition du corps humain au courant électrique (cf. figure 10.1). Sur l'abaque de la figure 10.1, il faut surtout distinguer les zones 3 et 4 dans lesquelles le danger est réel (léger picotement dans la zone 1, la courbe a est le seuil de perception douloureuse, choc pénible mais contrôle musculaire dans la zone 2, la courbe b est le seuil de non-lacher).

- Zone 3 (située entre les courbes b et c1):

Pour des personnes placées dans cette situation, il n'y a généralement aucun dommage organique. Mais il y a une probabilité de contractions musculaires et de difficultés respiratoires, de perturbations réversibles de la formation des impulsions dans le coeur et de leur propagation. Tous ces phénomènes augmentent avec l'intensité du courant et le temps.

- Zone 4 (située en haut de la courbe c1):

En plus des effets de la zone 3, la probabilité de la fibrillation ventriculaire est:

- d'environ 5 %, entre les courbes c1 et c2,

- inférieure à 50 % entre les courbes c2 et c3,
- de plus de 50 % au delà de la courbe c3.

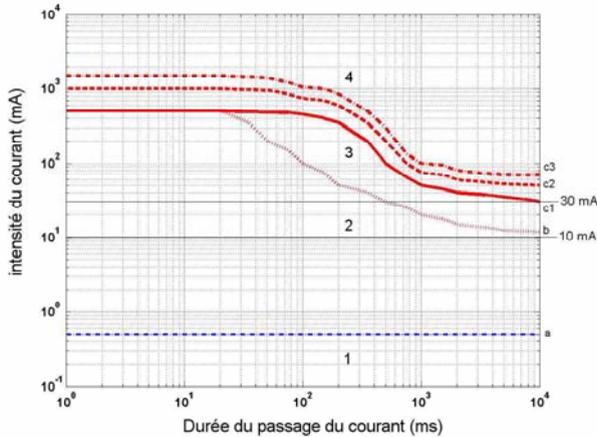


Figure 10.1: Intensité du courant fonction de la durée de passage de ce courant. Sur cet abaque, les effets du courant alternatif (de 15 à 100 Hz) ont été divisés en quatre zones (selon la norme CEI 60479-1 du Comité Electrotechnique International C.E.I.).

D'une approche plus générale, la norme CEI 60364 (C.E.I.: Comité Electrotechnique International) (NF C 15-100 en France) préconise les temps de fonctionnement pour les Dispositifs Différentiels Résiduels (D.D.R.) en fonction de la tension de contact (lien avec l'impédance équivalente du corps humain). Ils sont rappelés dans sur la figure 10.2. Selon les conditions d'environnement, particulièrement en présence ou non d'eau, la tension limite de sécurité UL (tension en dessous de laquelle il n'y a pas de risque pour l'Homme, d'après la norme NF C 15-100) est, en alternatif, de:

- 50 V pour les locaux secs,
- 25 V pour les locaux humides,
- 12 V pour les locaux mouillés (par exemple pour les chantiers en extérieur) ou exigü.

La norme CEI 60479-2 traite des effets du courant alternatif de fréquence supérieure à 100 Hz. L'impédance de la peau décroît de façon inverse de la fréquence. La norme indique que le facteur de fréquence, qui est le rapport du courant à la fréquence  $f$  au courant à 50 / 60 Hz pour un même effet physiologique considéré, augmente avec la fréquence. D'autre part, il a été constaté que de 10 à 100 kHz le seuil de perception augmente approximativement de 10

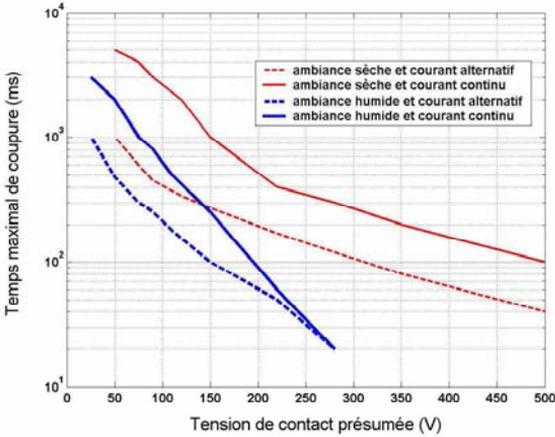


Figure 10.2: Durée maximale de maintien de la tension de contact selon la norme CEI 3654.

mA à 100 mA en valeur efficace. Les grands constructeurs conscients des risques potentiels que représentent de tels courants veillent à ce que les seuils des appareils de protection qu'ils proposent soient en deçà de la courbe de fibrillation ventriculaire définie par la norme CEI 60479-2 (cf. figure 10.3).

Voici enfin figure 10.4 quelques formes d'onde typiques des tests normalisés des DDR. On y observe des signaux contenant de "hautes" harmoniques (jusqu'à plus de 1 kHz) et des montées "rapides" de courant pouvant provenir de certaines applications d'Electronique de Puissance (convertisseurs, onduleurs, hacheurs, redresseurs, départs moteurs, ...etc...).

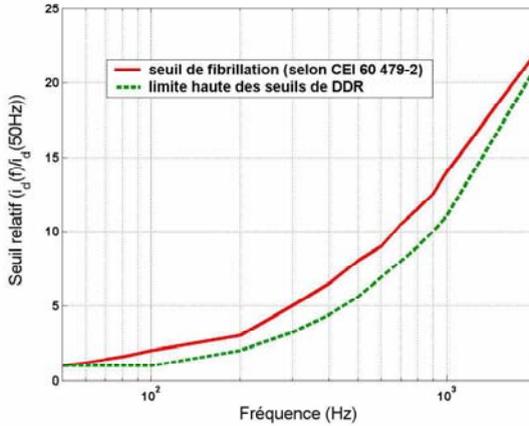


Figure 10.3: Variation du seuil relatif de fibrillation ventriculaire (selon CEI 60479-2) et des seuils des DDR réglés sur 30 mA, pour des fréquences entre 50 et 2 kHz (source Merlin Gerin).

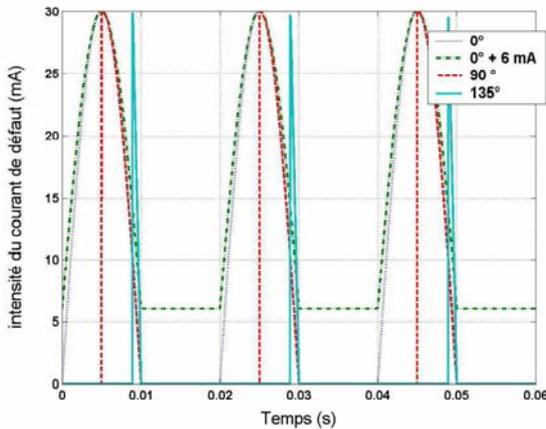


Figure 10.4: Formes d'onde normalisées pour les tests des DDR.

# Chapitre 11

## Définitions Mathématiques

- Notations scalaires et vectorielles

dans une base  $B_a = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$

$c\theta = \cos(\theta)$ ,  $s\theta = \sin(\theta)$  et  $t\theta = \tan(\theta)$ ,

$ch\theta = \cosh(\theta)$ ,  $sh\theta = \sinh(\theta)$  et  $th\theta = \tanh(\theta)$ ,

$\partial_\alpha$  : dérivée par rapport à  $\alpha$ ,

$\partial_\alpha^n$  : dérivée n<sup>ième</sup> par rapport à  $\alpha$ ,

$\partial_\alpha \partial_\beta$  : dérivée croisée par rapport à  $\beta$  puis à  $\alpha$ ,

$\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$  :

vecteur quelconque de composantes  $(A_1, A_2, A_3) = (A_x, A_y, A_z)$  dans  $B_a$ ,

$\mathbf{x}(A_1, A_2, A_3)$  :

vecteur position de composantes  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  dans  $B_a$ ,

$\nabla \cdot$  : opérateur nabla sans indice, dérivées spatiales  $\nabla \cdot = (\partial_1 \cdot, \partial_2 \cdot, \partial_3 \cdot)$ ,

$\nabla(a) = \mathbf{grad}(a)$ ,  $\nabla(a) = \sum_i \partial_i a \mathbf{u}_i = \partial_i a \mathbf{u}_i$  :

gradient vectoriel du scalaire  $a$ ,

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathit{div}(\mathbf{A})$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \partial_i A_i = \partial_i A_i$  :

divergence scalaire du vecteur  $\mathbf{A}$ ,

$\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$ ,  $\nabla \wedge \mathbf{A} = \sum_i \left( \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \right) \mathbf{u}_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \mathbf{u}_i$  :

rotationnel vectoriel du vecteur  $\mathbf{A}$ ,

$\nabla(\mathbf{A}) = \mathbf{JACOBIEN}(\mathbf{A})$ ,  $[\nabla(\mathbf{A})]_{ij} = \left[ \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right]_{ij} = \partial_i A_j$  :

Jacobien matriciel du vecteur  $\mathbf{A}$ ,

$\nabla^2 a = \Delta a = \mathit{Laplacien}(a)$ ,  $\Delta a = \partial_i^2 a$  :

Laplacien scalaire du scalaire  $a$ ,

$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} = \mathbf{Laplacien}(\mathbf{A})$ ,  $\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)$  :

Laplacien vectoriel du vecteur  $\mathbf{A}$ ,

$\delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon : indice de Kronecker,

$\delta(x)$ ,  $\delta(x) = 0$  si  $x \neq 0$ ,  $\delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$ ,  $\int \delta(x) dx = 1$  et  
 $\forall f(x)$ ,  $\int f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$ ,

$\varepsilon_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ,  $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$ , 0 sinon:  
 tenseur de Levi-Civita,

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$  : produit scalaire de  $\mathbf{A}$  avec  $\mathbf{B}$ ,

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \mathbf{u}_i$  : produit vectoriel de  $\mathbf{A}$  avec  $\mathbf{B}$ ,

$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ,  $[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]_{ij} = A_i B_j$  : produit tensoriel de  $\mathbf{A}$  avec  $\mathbf{B}$ ,

• **Notations matricielles dans la base  $B_a = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$**

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}$$

tenseur 3\*3 quelconque de composantes  $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, Y_{i3})^T$  dans  $B_a$ ,

$[\mathbf{Y}]^T$ ,  $Y_{ij}^T = Y_{ji}$  : transposition d'un tenseur  $[\mathbf{Y}]$

(marche aussi pour un vecteur: tenseur 3\*1),

$[\nabla](\mathbf{A}) = [\nabla \otimes \mathbf{A}] = [\text{GRAD}](\mathbf{A})$ ,  $[[\nabla](\mathbf{A})]_{ij} = [\nabla \otimes \mathbf{A}]_{ij}$  :

Gradient tensoriel du vecteur  $\mathbf{A}$ ,

$\nabla \cdot [\mathbf{Y}] = \text{DIV}[\mathbf{Y}]$ ,  $\nabla \cdot [\mathbf{Y}] = (\nabla \cdot \mathbf{Y}_1, \nabla \cdot \mathbf{Y}_2, \nabla \cdot \mathbf{Y}_3)^T$  :

Divergence vectorielle du tenseur  $[\mathbf{Y}]$ ,

$[\nabla \wedge][\mathbf{Y}] = [\text{ROT}][\mathbf{Y}]$ ,  $[\nabla \wedge][\mathbf{Y}] = [\nabla \wedge \mathbf{Y}_1, \nabla \wedge \mathbf{Y}_2, \nabla \wedge \mathbf{Y}_3]^T$  :

Rotationnel tensoriel du tenseur  $[\mathbf{Y}]$ ,

$[\Delta][\mathbf{Y}] = [\text{LAPLACIEN}][\mathbf{Y}]$ ,  $[\Delta][\mathbf{Y}] = [\Delta \mathbf{Y}_1, \Delta \mathbf{Y}_2, \Delta \mathbf{Y}_3]^T$  :

Laplacien tensoriel du tenseur  $[\mathbf{Y}]$ ,

$[\mathbf{Y}] \vec{\odot} [\mathbf{Z}] = (\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{Z}_1, \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{Z}_2, \mathbf{Y}_3 \cdot \mathbf{Z}_3)^T$  : Produit vectoriel de  $[\mathbf{Y}]$  avec  $[\mathbf{Z}]$ ,

$[\mathbf{Y}] \odot [\mathbf{Z}] = \left| [\mathbf{Y}] \vec{\odot} [\mathbf{Z}] \right| = \sqrt{(\mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{Z}_i)^2}$  : Produit scalaire de  $[\mathbf{Y}]$  avec  $[\mathbf{Z}]$ ,

$[\mathbf{Y}] \boxtimes [\mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}_1 \wedge \mathbf{Z}_1, \mathbf{Y}_2 \wedge \mathbf{Z}_2, \mathbf{Y}_3 \wedge \mathbf{Z}_3]^T$  : Produit tensoriel de  $[\mathbf{Y}]$  avec  $[\mathbf{Z}]$ ,

# Chapitre 12

## Identités Usuelles

### • Relations dérivées

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) = ]\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}[$  produit mixte,

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C},$$

$$\nabla (\Phi \Psi) = \Phi \nabla \Psi + \Psi \nabla \Phi,$$

$$\nabla (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi,$$

$$\nabla \wedge (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \wedge \mathbf{A} - \mathbf{A} \wedge \nabla \Phi,$$

$$\nabla (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}),$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0,$$

$$\nabla \wedge (\nabla \Phi) = \mathbf{0},$$

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}),$$

$$[\nabla \wedge] [\nabla \wedge] [\mathbf{Y}] = [\nabla] \nabla \cdot [\mathbf{Y}] - [\Delta] [\mathbf{Y}],$$

$$[\mathbf{X}] \overleftrightarrow{\odot} ([\mathbf{Y}] \boxtimes [\mathbf{Z}]) = [\mathbf{Z}] \overleftrightarrow{\odot} ([\mathbf{X}] \boxtimes [\mathbf{Y}]) = [\mathbf{Y}] \overleftrightarrow{\odot} ([\mathbf{Z}] \boxtimes [\mathbf{X}]),$$

### • Relations intégrales

soient:

$\Omega$  un volume entouré par sa surface extérieure  $\partial\Omega$ ,

$\Sigma$  une surface encerclée par son contour extérieur  $\partial\Sigma$ ,

$w$  un scalaire,

$\mathbf{W}$  un vecteur,

$[\mathbf{W}]$  une matrice,

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{W}) d^3x = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{d}^2\mathbf{x},$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \nabla(w) d^3x &= \iint_{\partial\Omega} w d^2\mathbf{x}, \\
\iiint_{\Omega} (\nabla \wedge \mathbf{W}) d^3x &= \iint_{\partial\Omega} -\mathbf{W} \wedge d^2\mathbf{x}, \\
\iint_{\Sigma} -\nabla(w) \wedge d^2\mathbf{x} &= \int_{\partial\Sigma} w d\mathbf{x}, \\
\iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{W}) \cdot d^2\mathbf{x} &= \int_{\partial\Sigma} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{x}, \\
\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot [\mathbf{W}]) d^3x &= \iint_{\partial\Omega} [\mathbf{W}] \overrightarrow{\odot} [d^2\mathbf{x}], \\
[d^2\mathbf{x}] &= [d^2\mathbf{x}, d^2\mathbf{x}, d^2\mathbf{x}]
\end{aligned}$$

# Chapitre 13

## Constantes Physiques

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N.A^{-2}(H.m^{-1})$  : perméabilité magnétique du vide,

$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} = 8,854 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$  : permittivité électrique du vide,

$c = 2,9979 \cdot 10^8 m.s^{-1}$  : vitesse de la lumière,

$h = 6,62608 \cdot 10^{-34} J.s$  : constante de Planck,

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34} J.s$ ,

$e = 1,6022 \cdot 10^{-19} C$  : charge électrique de l'électron,

$k_B = 1,38065 \cdot 10^{-23} J.K^{-1}$  : constante de Boltzmann,

$m_e = 9,10939 \cdot 10^{-31} kg$  : masse de l'électron,

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27402 \cdot 10^{-24} J.T^{-1}$  : magnéton de Bohr.



## Chapitre 14

# Unités électromagnétiques

Nom	Abrév.	SI	CGS (uem)	CGS→SI
Longueur	$L$	$m$ (mètres)	$cm$	$10^{-2} m$
Masse	$m$	$kg$ (kilogramme)	$g$	$10^{-3} kg$
Temps	$t$	$s$ (seconde)	$s$	1
Force	$F$	$N$ (Newton)	$dyne$	$10^{-5} N$
Travail	$W$	$J$ (Joules)	$erg$	$10^{-7} J$
Puissance	$\Pi$	$W$ (Watt)	$erg.s^{-1}$	$10^{-7} W$
Intensité	$I$	$A$ (Ampères)	$biot$	10 A
Courant $\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$A.m^{-2}$	$biot.cm^{-2}$	$10^5 A.m^{-2}$
Courant $\mathbf{j}_s$	$\mathbf{j}_s$	$A.m^{-1}$	$biot.cm^{-1}$	$10^3 A.m^{-1}$
Induction	$\mathbf{B}$	$\mu_0 (\mathbf{H}_M + \mathbf{M})$	$\mathbf{H}_M + 4\pi\mathbf{M}$	
	$\mathbf{B}$	$T$ (Tesla)	$G$ (Gauss)	$10^{-4} T$
Champ	$\mathbf{H}_M$	$A.m^{-1}$	$Oe$ (Oersted)	$10^3 / (4\pi) A.m^{-1}$
Aimantation	$\mathbf{M}$	$A.m^{-1}$	$G$	
Flux	$\phi$	$Wb$ (Weber)	$Mx$ (Maxwell)	$10^{-8} Wb$
Inductance	$\mathcal{L}$	$H$ (Henry)	$u.e.m.$	$10^{-9} H$
Reluctance	$\mathcal{R}$	$H^{-1}$	$cm^{-1}$	$10^9 / (4\pi) H^{-1}$
Perméance	$\mathcal{P}$	$H$	$cm$	$(4\pi) / 10^9 H$
Perméabilité	$\mu$	$H.m^{-1}$	-	$4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$
Résistivité	$\rho$	$\Omega.m$	$u.e.m.cm$	$10^{-11} \Omega.m$
Potentiel $\Phi_M$	$\Phi_M$	$A$	$biot$	10 A
Potentiel $\mathbf{T}_M$	$\mathbf{T}_M$	$A.m^{-1}$	$biot.cm^{-1}$	$10^3 A.m^{-1}$
Potentiel $\Psi_M$	$\Psi_M$	$V$ (Volts)	$u.e.m.$	$10^{-8} V$
Potentiel $\mathbf{A}_M$	$\mathbf{A}_M$	$T.m^{-1}$	$G.cm^{-1}$	$10^{-2} T.m^{-1}$

Tableau 14.1: unités électromagnétiques usuelles et équivalences entre deux systèmes d'unités.

# Chapitre 15

## Parois Fines

Il s'agit de détailler la représentation mathématique d'une paroi fine (se déplaçant suivant  $y$  à la vitesse  $v_w$ )

$$y < y_w - \frac{\delta l}{2} : J_x = J_{sx}; J_z = 0; J_y = +J_{sy}$$

$$y_w - \frac{\delta l}{2} \leq y < y_w + \frac{\delta l}{2} : J_x = -J_{sx}\xi_x \left( \frac{2y'}{\delta l} \right); J_z = +J_{sx}\xi_z \left( \frac{2y'}{\delta l} \right); J_y = +J_{sy}$$

$$y \geq y_w + \frac{\delta l}{2} : J_x = -J_{sx}; J_z = 0; J_y = +J_{sy}$$

avec  $y' = y - y_w$ ,  $J_{sx}^2 + J_{sy}^2 = J_s^2$  la polarisation à saturation

$$\xi_x(\pm 1) = \pm 1 \text{ (i) et } \xi_z(\pm 1) = 0 \text{ (ii)}$$

(Rq: les fonctions de rotation peuvent-être quelconques tant qu'elles vérifient (i) et (ii))

La variation d'induction devient dans cet exemple:

$$y < y_w - \frac{\delta l}{2} : \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$y_w - \frac{\delta l}{2} \leq y < y_w + \frac{\delta l}{2} : \partial_t \mathbf{b} = 2J_{sx}\delta l^{-1}v_w\xi_x' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_x - 2J_{sz}\delta l^{-1}v_w\xi_z' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_z$$

$$y \geq y_w + \frac{\delta l}{2} : \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

On montre que la fonction ainsi définie, non nulle dans une région surfacique limitée d'épaisseur très faible, est une distribution  $\Gamma$  de type Dirac, définie par ( $S_w$  étant la surface de la paroi):

$$\iiint \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) d^3r = S_w$$

$$\forall g, \iiint g(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) d^3r = \iint_{S_w} g(\mathbf{r}_w) d^2r_w$$

On monte en effet que

$$\int \delta l^{-1} \left( \xi_x' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_x - \xi_z' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_z \right) dy = +1$$

et

$$\lim_{\delta l \rightarrow 0} \left( \delta l^{-1} \left( \xi_x' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_x - \xi_z' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_z \right) \right) = +\infty$$

donc

$$\iiint \delta l^{-1} \left( \xi_x' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_x - \xi_z' \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_z \right) dx dy dz$$

$$= \int \delta l^{-1} \left( \xi'_x \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_x - \xi'_z \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_z \right) dy \iint dx dz = S_w \mathbf{u}_x$$

et

$$\forall g(x, y, z),$$

$$\iiint g(x, y, z) \delta l^{-1} \left( \xi'_x \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_x - \xi'_z \left( \frac{2y'}{\delta l} \right) \mathbf{u}_z \right) dx dy dz \xrightarrow{\delta l \rightarrow 0} \left( \iint g(x, y = y_w, z) dx \right)$$

En conclusion, la variation d'induction locale dans le cas d'une paroi "infinitiment" fine est:

$$\partial_t \mathbf{b} = 2J_{sx} v_w \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_w \in S_w) \mathbf{u}_x$$

# Chapitre 16

## Lissage Spatial

Le lissage spatial s'effectue à l'aide d'une fonction nuage  $W$  qui possède les propriétés suivantes:

( $\alpha$ )  $W$  est à support borné:

$$\forall \mathbf{x}_\mu \notin \Delta V(\mathbf{x}, t) : W(\mathbf{x}_\mu) = 0$$

( $\beta$ )  $W$  est lentement variable,  $\forall \mathbf{x}_\mu$  tq  $|\delta \mathbf{x}| \leq (\Delta V)^{3/2}$  on a le développement de Taylor suivant

$$W(\mathbf{x}_\mu + \delta \mathbf{x}) \simeq W(\mathbf{x}_\mu) + \sum_p \frac{1}{p!} (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_\mu})^p W(\mathbf{x}_\mu)$$

En pratique, on se limitera souvent à l'ordre 0 ou 1.

$$W(\mathbf{x}_\mu + \delta \mathbf{x}) \simeq W(\mathbf{x}_\mu) + (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_\mu}) W(\mathbf{x}_\mu) + \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_\mu})^2 W(\mathbf{x}_\mu) + \theta (\delta \mathbf{x}^2)$$

( $\gamma$ ) Enfin,  $W$  est normée:

$$\iiint_{\Delta V(\mathbf{x}, t)} W(\mathbf{s}) d^3 s = 1$$

Le produit de convolution entre deux fonctions d'espace  $g$  et  $h$  étant défini par

$$(g * h)_{\Delta V}(\mathbf{x}) = \iiint_{\Delta V} g(\mathbf{s}) h(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d^3 s = \iiint_{\Delta V} g(\mathbf{x} - \mathbf{s}) h(\mathbf{s}) d^3 s$$

nous avons par définition du lissage spatial

$$\langle a_\mu(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{x}) \rangle = (W * a_\mu)_{\Delta V(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{x}_\mu) = \iiint_{\Delta V(\mathbf{x}, t)} W(\mathbf{s}) a_\mu(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{s}) d^3 s$$

et de la moyenne spatiale

$$A(x) = \overline{\langle a_\mu(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{x}) \rangle} = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{x}, t)} \iiint_{\Delta V(\mathbf{x}, t)} \langle a_\mu(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{x}) \rangle d^3 x_\mu$$



# Chapitre 17

## Filtrage Spatial

Les transformées de Fourier directe et inverse sont définies par:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) &= TF(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3r \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= TF^{-1}(\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t))(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \iiint \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k\end{aligned}$$

On effectue alors le filtrage de  $a_\mu$  par la fonction de filtrage  $F$  comme suit:

$$\begin{aligned}\text{filtrage}(a_\mu)(\mathbf{r}, t) &= TF^{-1}(F(\mathbf{k})\tilde{\mathbf{a}}_\mu(\mathbf{k}, t))(\mathbf{r}, t) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \iiint F(\mathbf{k})\tilde{\mathbf{a}}_\mu(\mathbf{k}, t) \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k\end{aligned}$$

On a de plus les propriétés suivantes

- (i)  $\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \exp(-j(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}) d^3r = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$
- (ii)  $\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \exp(+j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) d^3k = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$
- (iii)  $\iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) d^3r = \iiint \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) \tilde{\mathbf{B}}^*(\mathbf{k}, t) d^3k$   
(théorème de Parseval-Plancherel)
- (iv)  $\widetilde{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{A} * \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

preuve de (iii)

$$\begin{aligned}\iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) d^3r &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \iiint \left( \iiint \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}', t) \exp(j(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}) d^3k' \right) d^3r d^3k \\ \text{l'utilisation de (i) termine la démonstration.}\end{aligned}$$

preuve de (iv)

$$\begin{aligned}\iiint \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k' &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \iiint \iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}'') \exp(j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}'')) d^3k d^3r' d^3r'' \\ &= \iiint \iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}'') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}'') d^3r' d^3r'' \\ &= \iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' \\ &= \mathbf{A} * \mathbf{B}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

On peut effectuer cette transformation aussi dans le temps

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{k}, \omega) = TF(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))(\mathbf{k}, \omega) =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \exp(+j\omega t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3r dt$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = TF^{-1}\left(\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{k}, \omega)\right)(\mathbf{r}, t) =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \iiint \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{k}, \omega) \exp(-j\omega t + j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k d\omega$$

et on a les dernières propriétés immédiates suivantes

$\forall \mathbf{A}$  bornée, nulle aux limites du domaine d'étude,

$$\widetilde{\widetilde{(\nabla \wedge \mathbf{A})}}(\mathbf{k}, \omega) = j\mathbf{k} \wedge \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\widetilde{\widetilde{(\partial_t \mathbf{A})}}(\mathbf{k}, \omega) = -j\omega \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{k}, \omega)$$

(démonstration par intégration par parties)

# Chapitre 18

## Principe Variationnel

Nous considérons l'action  $\mathfrak{S}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$  suivante ( $C^n(\Omega)$ ): ensemble des fonctions continues et  $(n + 1)$  fois dérivables sur  $\Omega$

$$\mathfrak{S}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \int \iiint \ell(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t), \partial_t u(\mathbf{x}, t), \partial_{x_i} u(\mathbf{x}, t)) d^3 x dt$$

avec

(i)  $\ell$  continue et dérivable ( $\ell \in C^0(\Omega)$ )

(ii)  $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{u}(\partial\Omega) = \mathbf{u}_0(\partial\Omega, t)$

$\forall \varepsilon > 0$ , on cherche  $u_\alpha(\mathbf{x}, t)$  tq  $|\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}| \leq \varepsilon$  et vérifiant (ii), qui réalise un extrémum de  $\mathfrak{S}$ .

Soit  $\forall \mathbf{x}, |\alpha \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon$  ( $\alpha$  étant un scalaire réel paramètre,  $\boldsymbol{\eta}$  une fonction vectorielle de  $C^1(\Omega)$  vérifiant  $\boldsymbol{\eta}(\partial\Omega) = \mathbf{0}$ );

la fonction  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$  vérifie  $|\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}| \leq \varepsilon$  et (ii).

Le point stationnaire, ou extrémum, de  $\mathfrak{S}$  est réalisé pour  $d_\alpha \mathfrak{S}(\mathbf{u}_\alpha) = 0$ .

$$\begin{aligned} d_\alpha \mathfrak{S}(\mathbf{u}_\alpha) &= \int \iiint (d_\alpha \mathbf{x} \partial_{\mathbf{x}} \ell + d_\alpha \mathbf{u}_\alpha \partial_{\mathbf{u}_\alpha} \ell + d_\alpha \partial_t \mathbf{u}_\alpha \partial_{\partial_t \mathbf{u}_\alpha} \ell + d_\alpha \partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha \partial_{\partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha} \ell) d^3 x dt \\ &= \int \iiint (d_\alpha \mathbf{u}_\alpha \partial_{\mathbf{u}_\alpha} \ell + d_\alpha \partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha \partial_{\partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha} \ell) d^3 x dt \\ &= \int \iiint (\boldsymbol{\eta} \partial_{\mathbf{u}_\alpha} \ell + \partial_{x_i} \boldsymbol{\eta} \partial_{\partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha} \ell) d^3 x dt \\ &= \int \iiint \boldsymbol{\eta} (\partial_{\mathbf{u}_\alpha} \ell - \partial_{x_i} (\partial_{\partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha} \ell)) d^3 x dt + \int \sum_i \iint [\boldsymbol{\eta} \partial_{\partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha} \ell]_{\partial\Omega_i} dx_j dx_k dt \end{aligned}$$

ce qui ne peut se faire  $\forall \boldsymbol{\eta}$  fonction vectorielle de  $C^1(\Omega)$  vérifiant  $\boldsymbol{\eta}(\partial\Omega) = \mathbf{0}$  que si

$$\partial_{\mathbf{u}_\alpha} \ell - \partial_{x_i} (\partial_{\partial_{x_i} \mathbf{u}_\alpha} \ell) = 0$$



# Chapitre 19

## Equation de Poisson

On cherche à résoudre l'équation de Poisson, d'inconnue  $\mathbf{I}$  et de second membre  $\mathbf{S}$ , suivante

$$\Delta \mathbf{I} = \nabla^2 \mathbf{I} = -\mathbf{S}$$

L'application de l'opérateur Laplacien sur

$$\mathbf{I}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \mathbf{S}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r'$$

avec  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,

$$(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \text{ par exemple, avec } \Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0)$$

fonction de Green vérifiant

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donne

$$\Delta \mathbf{I}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \mathbf{S}(\mathbf{r}') \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' = -\mathbf{S}(\mathbf{r})$$

$\mathbf{I}_p$  est donc une solution particulière.

La solution générale est démontrée grâce au théorème de Green:

$$\forall \Phi, \Psi : \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) = \Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \nabla \Psi$$

Première identité de Green:

$$\forall \Omega : \iiint_{\Omega} (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \nabla \Psi) d^3 r = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) d^3 r = \iint_{\partial \Omega} \Phi \nabla \Psi \cdot \mathbf{d}^2 \mathbf{r}$$

$$\text{de même: } \forall \Omega : \iiint_{\Omega} (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \nabla \Phi) d^3 r = \iint_{\partial \Omega} \Psi \nabla \Phi \cdot \mathbf{d}^2 \mathbf{r}$$

donc par différence, on a:

$$\iiint_{\Omega} (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d^3 r = \iint_{\partial \Omega} (\Phi \partial_n \Psi - \Psi \partial_n \Phi) \cdot d^2 r$$

Si on pose  $\Phi = I_j$  ( $j^{\text{ième}}$  composante de  $\mathbf{I}$ ) et  $\Psi = G$ , cela devient:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left( -4\pi I_j(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + S_j(\mathbf{r}') \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' \\ &= \iint_{\partial \Omega} \left( I_j(\mathbf{r}') \partial_{n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_{n'} I_j(\mathbf{r}') \right) d^2 r' \\ & (\nabla \Phi \cdot \mathbf{d}^2 \mathbf{r} = \partial_n \Phi d^2 r \text{ dérivée de } \Phi \text{ normale à } \partial \Omega, \mathbf{d}^2 \mathbf{r} = d^2 r \cdot \mathbf{n}) \end{aligned}$$

En choisissant  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ ,  $\Omega$  contenant  $\mathbf{S}$  (les sources), de surface  $\partial \Omega$  suffisamment loin de ces sources pour que l'intégrale surfacique tendent rapidement vers zéro, on a finalement:

$$\mathbf{I}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} S_j(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r'$$

l'intégrale ne s'effectuant en fait que là où il y a des sources.



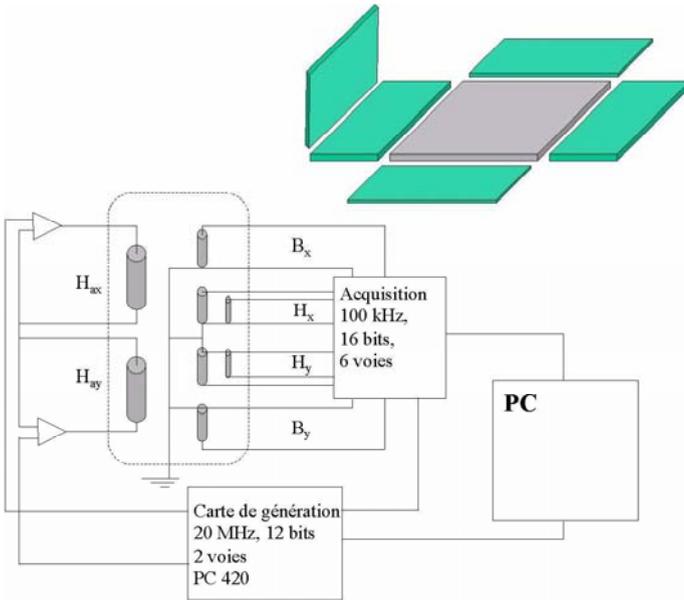


Figure 20.2: Schéma de principe du banc de mesure en configuration bidirectionnelle, d'après les travaux de madame Kedous-Lebouc et monsieur Spornic. L'échantillon (en gris clair sur le schéma en haut à droite) est un carreau métallique inséré dans deux entrefers croisés de deux culasses (en gris foncé) imbriquées suivant les deux directions  $x$  et  $y$ . Les bobines d'excitations sont réalisées autour des circuits des deux culasses et les bobines de mesure se trouvent au voisinage de la région centrale de l'échantillon.

# Bibliographie

- [AHA\_1] A. Aharoni, "Theoretical search for domain nucleation", *Reviews of Modern Physics*, 1962, vol. 34(2): p. 227-238.
- [ALP\_1] B. Alpert, et al., "Adaptative solution of partial differential equations in multiwavelet bases", 2004.
- [AMO\_1] Y.O. Amor, M. Féliachi. "Finite Element Computation of iron losses in hysteresis ferromagnetic materials taking into account frequency and thermal effects", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [ARG\_1] B.E. Argyle, B. Petek, D.A. Herman, "Optical imaging of magnetic domains in motion", *Journal of Applied Physics*, 1987, vol. 61(8): p. 4303-4306.
- [ARI\_1] M.V.K. Chari, S.J. Salon, "Numerical methods in Electromagnetism", 2000: Academic Press.
- [ASH\_1] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, "Physique des solides", 2002: E.D.P. Sciences.
- [ATH\_1] Atherton, et al., "Magnetic Barkhausen noise study of domain wall dynamics in 3% SiFe", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1996, vol. 32: p. 527-534.
- [ATL\_1] AtlasEco 2005, Le Nouvel Observateur.
- [ATT\_1] M. Attéia, J. Gaches, "Approximation hilbertienne: Splines-Ondelettes-fractales", 2002: E.D.P. Sciences.
- [AUL\_1] G. Auliac, J. Avignant, E. Azoulay, "Techniques mathématiques pour la physique", 2000: Ellipses.
- [AUX\_1] C. Henaux, et al., "Enjeu des matériaux magnétiques composites pour les machines électriques du futur", dans R.E.E. (Dossier les Matériaux en Génie Electrique) 2003: p. 29-33.

- [BAB\_1] A. Benabou, "Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques", 2002, INP Lille, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [BAR\_1] B. Barbara, "Magnetization processes in high anisotropy systems", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1994, vol. 129: p. 79-86.
- [BEA\_1] C.P.Bean, S. Rodbell, "Kinetics of magnetization in some square loop magnetic tapes", *Journal of Applied Physics*, 1955, vol. 26(1): p. 124-125.
- [BEA\_2] D.S. Rodbell, C.P. Bean, "Some properties of the coercive force in soft magnetic materials", *Physical Review*, 1956, vol. 103(4): p. 886-891.
- [BEA\_3] R.H. Pry, C.P.Bean, "Calculation of the Energy Loss in Magnetic Sheet Materials Using a Domain Model", *Journal of Applied Physics*, 1958, vol. 29(3): p. 532-533.
- [BEC\_1] J.J. Becker, "Domain boundary configurations during magnetization reversals", *Journal of Applied Physics*, 1959, vol. 30(3): p. 387-390.
- [BEG\_1] A.J. Bergqvist, "A simple vector generalization of the Jiles-Atherton model of hysteresis", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1996, vol. 32(5): p. 4213-4215.
- [BEG\_2] A. Bergqvist, A. Lundgren, G. Engdahl, "Experimental testing of an anisotropic vector hysteresis model", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1997, vol. 33(5): p. 4152-4154.
- [BEN\_1] Y. Bernard, "Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques en tenant compte du phénomène d'hystérésis", 2000, Université de paris XI, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [BEN\_2] Y. Bernard, E. Mendes, F. Bouillault. "Dynamic hysteresis modeling based on Preisach's model", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [BER\_1] G. Bertotti, et al., "Dynamics of microscopic magnetization processes and magnetic losses (invited)", *Journal of Applied Physics*, 1982, vol. 53(11): p. 8287-8292.
- [BER\_2] G. Bertotti, "Space-time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses: Theory", *Journal of Applied Physics*, 1983, vol. 54(9): p. 5293-5305.
- [BER\_3] G. Bertotti, F. Fiorillo, "Power losses and domain structure dynamics in 3% SiFe single crystals", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1984, vol. MAG20(5): p. 1475-1477.

- [BER\_4] G. Bertotti, "Space time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses: Application I, fine wall spacing", *Journal of Applied Physics*, 1984, vol. 55(12): p. 4339-4347.
- [BER\_5] G. Bertotti, "Space time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses: Application II, large wall spacing", *Journal of Applied Physics*, 1984, vol. 55(12): p. 4348-4355.
- [BER\_6] G. Bertotti, "A general statistical approach to eddy current losses", *Journal of magnetism and Magnetic Materials*, 1984, vol. 41: p. 253-260.
- [BER\_7] G. Bertotti, "Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials I: theoretical considerations", *Journal of Applied Physics*, 1985, vol. 57(6): p. 2110-2117.
- [BER\_8] G. Bertotti, "Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials II: Analysis of experimental results", *Journal of Applied Physics*, 1985, vol. 57(6): p. 2118-2126.
- [BER\_9] G. Bertotti, "General properties of Power losses in soft ferromagnetic materials", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1988, vol. 24(1): p. 621-630.
- [BER\_10] G. Bertotti, V. Basso, M. Pasquale, "Application of the Preisach Model to the calculation of magnetization curves and power losses in ferromagnetic materials", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1993.
- [BER\_11] G. Bertotti, "Hysteresis in magnetism", 1998: Academic Press.
- [BET\_1] P. Bertrand, "Les protections directionnelles", 1996, Schneider-Electric, *Cahier Technique* n°181. p. 1-20.
- [BIR\_1] O. Biro, et al., "Computation of 3D current driven skin effect problems using a current vector potential", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1993, vol. 29(2): p. 1325-1332.
- [BIR\_2] K. Hollaus, O. Birò, "Derivation of a complex permeability from the Preisach model", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2002, vol. 38(2): p. 905-908.
- [BIS\_1] J.E.L. Bishop, "Magnetic domain structure, eddy currents and permeability spectra", *British Journal of Applied Physics*, 1966, vol. 17: p. 1451-1459.
- [BIS\_2] J.E.L. Bishop, "Understanding magnetization losses in terms of eddy currents dominated domain wall dynamics", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1980, vol. 19: p. 336-344.

- [BIS\_3] J.E.L. Bishop, "Modelling domain wall motion in soft magnetic alloys", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1984, vol. 41: p. 261-271.
- [BIS\_4] J.E.L. Bishop, "Enhanced eddy current loss due to domain displacement", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1985, vol. 49: p. 241-249.
- [BIT\_1] F. Bitter, "On inhomogeneities in the magnetization of ferromagnetic materials", *Physical Review*, 1931, vol. 38: p. 1903-1905.
- [BLA\_1] F. Blache, "Modélisation électronique et électromagnétique d'un transformateur Haute Fréquence à circuit magnétique en fonte", 1995, INPGrenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [BLE\_1] O. Doblecker, "Contribution à la modélisation des champs magnétiques dans les systèmes comportant des milieux non-linéaires et hystériques", 2001, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, Thèse de Doctorat.
- [BLO\_1] R.W. De Blois, C.D. Graham, "Domain observations on whiskers", *Journal of Applied Physics*, 1958, vol. 29(3): p. 528-529.
- [BOS\_1] A. Bossavit, "Le calcul des courants de Foucault en 3D en présence de corps à haute perméabilité magnétique", *Revue de Physique Appliquée*, 1988, vol. 23: p. 1147-1159.
- [BOS\_2] A. Bossavit, "Le calcul des courants de Foucault en 3D, avec le champ électrique E comme inconnue I: Principes", *Revue de Physique Appliquée*, 1990, vol. 25: p. 189-197.
- [BOU\_1] G. Boudaud, "Mathématiques pour la Physique", 1996: Diderot Editeur, Art et Sciences.
- [BRA\_1] Brailsford, "Physical principles of magnetism", 1966, London, D. Von Nostrand Company LTD.
- [BRI\_1] P. Brissonneau, "Magnétisme et matériaux magnétiques", 1997: Hermès.
- [BRO\_1] W. F. Brown, "Theory of the approach to magnetic saturation", *Physical Review*, 1940, vol. 58: p. 736-743.
- [BRO\_2] W.F. Brown, "The effect of dislocations on magnetization near saturation", *Physical Review*, 1941, vol. 60: p. 139-147.
- [BRO\_3] W.F. Brown, "Criteria for uniform micromagnetization", *Physical Review*, 1957, vol. 105(5): p. 1479-1482.

- [BRO\_4] W.F. Brown, "Micromagnetics: Domain walls / Micromagnetics, Domains and resonance", *Journal of Applied Physics*, 1959, vol. 30(4): p. 625-695.
- [BRO\_5] W.F. Brown, "Domains, micromagnetics and beyond: reminiscences and assessments", *Journal of Applied Physics*, 1978, vol. 49(3): p. 1937-1942.
- [BRY\_1] P. Bryant, H. Suhl, "Micromagnetics below saturation", *Journal of Applied Physics*, 1989, vol. 66(9): p. 4329-4337.
- [CAL\_1] R. Calvas, "Les dispositifs Différentiels résiduels en Basse Tension", 2001, Schneider Electric, *Cahier Technique n°114*.
- [CAL\_2] R. Calvas, "La Protection Différentielle", Schneider Electric, *Cahier Technique*.
- [CAL\_3] R. Calvas, "Perturbations électriques en basse tension", 2001, Schneider-Electric, *Cahier Technique n°141*. p. 1-27.
- [CAR\_1] W.J. Carr, "Magnetic domain wall bowing in a perfect metallic crystal", *Journal of Applied Physics*, 1976, vol. 47(9): p. 4176-4181.
- [CAR\_2] W.J. Carr, "Magnetic domain wall bowing in a perfect metallic crystal", *Journal of Applied Physics*, 1977, vol. 48(12): p. 5379.
- [CAT\_1] Catalogue Merlin-Gerin 2004-2005 sur la distribution électrique.
- [CHA\_1] M. Chiampi, D. Chiarabaglio, M. Repetto, "A Jiles-Atherton and fixed point combined technique for time periodic magnetic field problems with hysteresis", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1995, vol. 31(6): p. 4306-4311.
- [CHE\_1] D.X. Chen, J.L. Muñoz, "Theoretical eddy current permeability spectra of slabs with bar domains", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1997, vol. 33(3): p. 2229-2244.
- [CHE\_2] G. Chen, "Controlling Chaos and Bifurcations in engineering Systems", 2000: CRC Press.
- [CHI\_1] S. Chikasumi, "Physics of Ferromagnetism", 1997: Oxford university Press.
- [CLE\_1] J. Cledière, "Simulation de processus d'aimantation dans les matériaux à anisotropie aléatoire et propriétés dynamiques d'aimantation dans des rubans nanocristallins doux", 1999, UJF / Grenoble 1, Thèse de Doctorat / Physique - Science des matériaux.
- [COH\_1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "Mécanique quantique (tome 2)", Vol. 2, 2000: Hermann, éditeur des sciences et des arts.

- [COH\_2] C .Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "Mécanique quantique (tome 1)", Vol. 1, 2000: Hermann, éditeurs des sciences et des arts.
- [COL\_1] R.V. Coleman, G.G. Scott, "Domain patterns and theory / Magnetic domain patterns on iron whiskers", *Journal of Applied Physics*, 1958, vol. 29(3): p. 526-527.
- [COU\_1] G. Couderchon, "Alliages FeNi et FeCo: propriétés magnétiques", *Techniques de l'Ingénieur D2 130*, 2003, p. 1-24.
- [CRO\_1] W.J. Croissant, C.A. Feickert, M.K. McInerney, "A differential magnetic permeability model for pulsed magnetic field calculations", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1996, vol. 32(5): p. 4326-4328.
- [CUT\_1] C.P. Cutler, H.C. Angus, "A theoretical analysis of initial permeability in 36-50% Ni-Fe alloys", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1980, vol. 19: p. 211-214.
- [DAR\_1] O. Darrigol, "Les équations de Maxwell - de MacCullagh à Lorentz". 2005: Belin.
- [DEB\_1] L. De Broglie, "Application des équations non-linéaires à la physique théorique", 1962, *Ed de la revue d'optique théorique et instrumentale*.
- [DEL\_1] R.M. Del-Vecchio, "An efficient procedure for modeling complex hysteresis processes in ferromagnetic materials", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1980, vol. MAG-16(5): p. 809-811.
- [DEL\_2] R.M. Del-Vecchio, "Computation of losses in non-oriented electrical steels from a classical viewpoint (invited)", *Journal of Applied Physics*, 1982, vol. 53(11): p. 8281-8286.
- [DEL\_3] R.M. Del-Vecchio, "Calculation of magnetic domain wall bowing and eddy currents losses in an infinite sheet of bar-like domains", *Journal of Applied Physics*, 1982, vol. 53(3): p. 2777-2779.
- [DEL\_4] R.M. Del-Vecchio, "The inclusion of hysteresis processes in a special class of Electromagnetic Finite Element calculation", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1982, vol. MAG-18(1): p. 275-284.
- [DIO\_1] G.F. Dionne, "Magnetic relaxation and anisotropy effects on high frequency permeability", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2003, vol. 39(5): p. 3121-3126.
- [DLI\_1] F. Delincé, "Modélisation de régimes transitoires dans les systèmes comportant des matériaux magnétiques non-linéaires et hystérétiques", 1994, Faculté des sciences appliquées de Liège, thèse de Doctorat / Génie Electrique.

- [DOB\_1] V.V. Dobrovitski, M.I. Katsnelson, B.N. Harman, "Statistical coarse graining as an approach to multiscale problems in magnetism", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2000, vol. 221: p. L235-L242.
- [DUC\_1] B. Ducharne, "Caractérisation et modélisation de circuits magnétiques", 2003, Université Claude bernard / Lyon 1, Thèse de Doctorat / Génie Electrique..
- [DUL\_1] P. Dular, et al., "A 3D magnetic vector potential formulation taking eddy currents in laminations stacks into account", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2001, vol. 39(3): p. 1424-1427.
- [DUL\_2] P. Dular, C. Geuzaine, "Modeling of thin insulating layers with dual magnetodynamic formulations", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2003, vol. 39(3): p. 1139-1142.
- [DUL\_3] J. Gyselinck, P. Dular, "A time domain homogenization technique for laminated Iron Cores in 3D-Finite Element Method", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, vol. 40(2): p. 856-859.
- [DUP\_1] L.R. Dupré, R. Van Keer, J. Melkebeek, "An iron loss model for electrical machines using the Preisach Theory", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1997, vol. 33(5): p. 4158-4160.
- [DUP\_2] L.R. Dupré, J.J. Gyselinck, J.A. Melkebeek, "Complementary Finite Element Method in 2D magnetics taking into account a vector Preisach Model", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998, vol. 34(5): p. 3048-3051.
- [EKS\_1] H. Ekstein, "Theory of remagnetization of thin tapes", *Journal of Applied Physics*, 1955, vol. 26(11): p. 1342-1343.
- [ENO\_1] M. Enokizono, K. Okamoto. "Designing a low-loss induction motor considering the vector magnetic properties", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [ENO\_2] M. Enokizono, Y. Fujita. "Improvement of E&S modeling for eddy current magnetic field analysis", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [FAN\_1] J.P. Fanton, "Electrotechnique", 2002: Ellipses.
- [FEY\_1] R. Feynman, "Electromagnetism I", Vol. I, 1999: Dunod.
- [FEY\_2] R. Feynman, "Electromagnetism II", Vol. II, 1999: Dunod.
- [FON\_1] P. Fonti, "Transformateurs de courant: comment les spécifier? ", 2001, Schneider-Electric, *Cahier Technique* n°194.

- [FON\_2] P. Fonti, "Transformateurs de courant: erreurs de spécification et solutions", 2001, Schneider-Electric, *Cahier Technique* n°195. p. 1-18.
- [FOU\_1] P. Fouassier, "Modélisation électrique des composants magnétiques Haute Fréquence: Prise en compte de la température et caractérisation des ferrites", 1998, INPGrenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique. .
- [FRA\_1] H. Fraisse, et al., "Modeling of a non-linear conductive magnetic circuit. Part 2: bond graph formulation", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1995, vol. 31(6): p. 4068-4070.
- [FRI\_1] G. Friedman, "New formulation of the Stoner-Wohlfarth hysteresis model and the identification problem", *Journal of Applied Physics*, 1990, vol. 67(9): p. 5361-5363.
- [FRT\_1] L. Fratila, O. Geoffroy, J.L. Porteseil. "Propriétés dynamiques de l'aimantation dans les FeSi Goss", conférence MGE 2000.
- [FRT\_2] L. Fratila, "Etude de la multiplication des parois et estimation de l'anisotropie effective des nanocristallins", 2002, UJF / Grenoble 1, Thèse de Doctorat / Physique - Science des matériaux.
- [FRU\_1] O. Fruchart, et al., "Nanomagnétisme: des domaines confinés au magnétisme moléculaire", *Bulletin de la SFP*, 2003, vol. 139: p. 11-17.
- [FUJ\_1] K. Fujiwara, T. Adachi, N. Takahashi. "A proposal of Finite Element Analysis considering 2D magnetic properties", conférence Compu-mag 13ème, 2001, Evian France.
- [GAL\_1] J.K. Galt, J. Andrus, H.G. Hopper, "Motion of domain walls in Ferrite crystals", *Reviews of Modern Physics*, 1953, vol. 25(1): p. 93-97.
- [GAN\_1] A.G. Ganz, "Applications of thin permalloy tape in wide-band telephone and pulse transformers", *AIEEE Transactions on Electrical Engineering*, 1946, vol. 46-27: p. 177-183.
- [GAQ\_1] T. Degauque, "Materiaux magnétiques amorphes, micro et nanocristallins", *Techniques de l'Ingénieur* E1 770, 2003, p. 1-15.
- [GAU\_1] T. Gautreau, "Modélisation d'un Capteur de courant basé sur un modèle de paroi", 2001, schneider-Electric, rapport DESS.
- [GEO\_1] O. Geoffroy, "Contribution à l'étude de l'irréversibilité dans les matériaux doux", 1991, UJF / Laboratoire Louis Néel, Grenoble 1, Thèse de Doctorat / Physique - Sciences des matériaux.

- [GEO\_2] O. Geoffroy, "Matériaux magnétiques doux de l'Electrotechnique et applications", 2003, Laboratoire Louis Néel, cours DESS magnétisme: Grenoble.
- [GIA\_1] D.D. Giannacopoulos, "Optimal Discretization-based load balancing for parallel adaptative Finite Element Electromagnetic analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004. 40(2): p. 977-980.
- [GIG\_1] C. Gignoux, B. Silvestre-Brac, "Mécanique: de la formulation Lagrangienne au Chaos Hamiltonien", 2002: E.D.P. Sciences.
- [GIL\_1] T.L. Gilbert, "A Lagrangian of the gyromagnetic equation of the magnetization field", *Physical Review*, 1955, vol. 100: p. 1243.
- [GIL\_2] T.L. Gilbert, "A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, vol. 40(6): p. 3443-3449.
- [GOO\_1] J.B. Goodenough, "A Theory of domain creation and coercive force in polycrystalline ferromagnetics", *Physical Review*, 1954, vol. 95(4): p. 917-932.
- [GUY\_1] E. Guyon, J.P. Troadec, "Du sac de billes au tas de sable", 1997: Editions Odile Jacob Sciences.
- [GYS\_1] J. Gyselinck, L. Vandeveld, J. Melkebeek, "Calculation of eddy currents and associated losses in electrical steel laminations", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1999, vol. 35(3): p. 1191-1194.
- [HAL\_1] T.R. Haller, J.J. Kramer, "Observation of dynamic domain size variations in Si-Fe alloys", *Journal of Applied Physics*, 1970, 41(3): p. 1034-1035.
- [HAL\_2] T.R. Haller, J.J. Kramer, "Model for reverse-domain nucleation in ferromagnetic conductors", *Journal of Applied Physics*, 1970, vol. 41(3): p. 1036-1037.
- [HAR\_1] S. Haratani, A. Kaizu, I. Sato, "Micromagnetic modeling of discrete patterned perpendicular media", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2003, vol. 39(5): p. 2326-2328.
- [HEN\_1] O. Henze, W.M. Rucker. "Identification procedure of Preisach Model", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [HEV\_1] T. Chevalier, "modélisation des pertes fer dans les machines électriques/ Application à la machine asynchrone", 1999, INPG/ENSIEG/LEG, Grenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [HEV\_2] T. Chevalier, et al., "A new dynamic hysteresis model for electrical steel sheet", *Physica B*, 2000, vol. 275: p. 197-201.

- [HIL\_1] V.Hill, O. Farle, R.D. Edlinger, "Finite Element basis functions for nested meshes of non-uniform refinement level", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, vol. 40(2): p. 981-984.
- [HIN\_1] M. Hintermüller, L.N. Vicente, "Space mapping for optimal control of partial differential equations", 2004.
- [HIR\_1] L. Hirsinger, C. LExcellent, "Alliages à mémoire de forme ferromagnétiques du type Ni-Mn-Ga - nouveaux matériaux actifs", dans R.E.E. (Dossier les Matériaux en Génie Electrique) 2003: p. 51-54.
- [HIT\_1] H.R. Hitzinger, H. Kronmüller, "Statistical theory of the pinning of Bloch walls by randomly distributed defects", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1976. 2: p. 11-17.
- [HLA\_1] J. Hladik, P.E. Hladik, "Le calcul tensoriel en physique", 1999: Dunod.
- [HON\_1] S.K. Hong, H.K. Kim, H.K. Jung, "Formulation of the Everett function using least square method", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998, vol. 34(5): p. 3052-3055.
- [HUB\_1] A. Hubert, R. Schafer, "Magnetic domains", 2000: Springer.
- [HUY\_1] N. Huyashi, K. Saito, Y. Nakatani, "Calculation of demagnetizing field distribution based on FFT of convolution", *Journal of Applied Physics*, 1996, vol. 35: p. 6065-6073.
- [INV\_1] Imphy S.A. 1996, "Les alliages de Fer et de Nickel", Lavoisier TEC&DOC, INVAR 1896-1996, Ed. Sc. G. Beranger, F. Duffaut, J. Morlet, J.F. Tiers.
- [JAC\_1] J.D. Jackson, "Electrodynamique Classique", 2002: Dunod.
- [JIL\_1] D.C. Jiles, D.L. Atherton, "Theory of Ferromagnetic Hysteresis", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1986, vol. 61: p. 48-60.
- [JIL\_2] D. Jiles, "Introduction to Magnetism and Magnetic Materials", 1991: Chapman et Hall.
- [JIL\_3] D.C. Jiles, L.B. Sipahi, G. Williams, "Modeling of micromagnetic barkhausen activity using a stochastic process extension to the theory of hysteresis", *Journal of Applied Physics*, 1993, vol. 73(10): p. 5830-5832.
- [JLC\_1] Jean-Louis Coulomb, "Le langage HE", Note interne au LEG, version 2.2 de novembre 2000.

- [JPG\_1] Jean-Paul Gonnet, "Optimisation des canalisations électriques et des armoires de distribution", 2005, INPG/ENSIEG/LEG, Grenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [KAL\_1] M. Kaltenbacher, S. Reitzingen, "Algebraic multigrid methods for nodal and edge based discretization of Maxwell Equations", *ICS Newsletter*, 2003: p. 15-23.
- [KAN\_1] N.V. Kantartzis, T.d. Tsiboukis, "Higher order non-standard FDTD schemes in generalized curvilinear coordinates\_A systematic strategy for advanced numerical modeling and consistent topological perspectives", *ICS Newsletter*, 2003: p. 5-14.
- [KED\_1] A. Kedous-Lebouc, et al., "A new hysteresis loop for rotational losses", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1996, vol. 160: p. 45-46.
- [KIT\_1] C. Kittel, "Physique des Solides".
- [KIT\_2] C. Kittel, "Physical theory of ferromagnetic domains", *Reviews of Modern Physics*, 1949, vol. 21(4): p. 541-583.
- [KIT\_3] C. Kittel, "Ferromagnetic domain Theory", *Solid State Physics*, 1956, vol. 3: p. 437-565.
- [KOE\_1] T.R. Koehler, D.R. Fredkin, "Finite Element Method for micromagnetics", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1992, vol. 28(2): p. 1239-1244.
- [KOL\_1] P.I. Koltermann, et al. "Non-linear magnetic field model by Finite Element Method taking into account hysteresis characteristics with MB variables", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [KRA\_1] L. Krähenbühl, et al., "Homogeneization of lamination stacks in linear magnetodynamics", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, vol. 40(2): p. 912-915.
- [KUR\_1] S. Kurz, et al., "A novel formulation for 3D eddy currents problems with moving bodies using a lagrangian description and BEM-FEM coupling", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998.
- [LAE\_1] F.J. Friedlaender, "Flux reversal in magnetic amplifier cores", *AIEEE Trans. Pt. (Com. Ind. Electronics)*, 1956, vol. 75: p. 268-278.
- [LAN\_1] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies". *Phys. Zeits. Sowjetunion*, 1935, vol. 8: p. 153-169.
- [LAN\_2] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "Electrodynamique des milieux continus", 1984: Edition de moscou.

- [LAN\_3] L.D. Landau, E.M. Lifchitz, "Physique statistique", 1984: Edition de Moscou.
- [LAV\_1] R. Laverrière, "Electrodynamique Classique II / Electromagnétisme", Vol. 2, 1992: Bréal.
- [LEB\_1] R. Lebourgeois, "Ferrites faibles pertes pour applications fréquentielles", *Techniques de l'Ingénieur* E1 760, 2003, p. 1-20.
- [LEC\_1] V. Leconte, "Le mouvement dans la modélisation des phénomènes électromagnétiques (Chap. 2)", dans "Electromagnétisme et Eléments Finis III", 2002: Hermès.
- [LED\_1] D. Lederer, A. Kost, "Modelling of non-linear magnetic materials using a complex effective reluctivity", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998, vol. 34(5): p. 3061-3063.
- [LEF\_1] Y. Lefloch, "Développement de formulations 3D FEM T-Phi pour la prise en compte de conducteurs massifs et bobinés avec couplage circuit", 2002, INPG/ENSIEG/LEG, Grenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [LEF\_2] Y. Lefloch, et al., "Coupled problems computation of 3D multiply connected magnetic circuits and electric circuits", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2003, vol. 39(3): p. 1725-1728.
- [LEL\_1] I. Leliakov, F.J. Friedlaender, "An improved model for flux reversal in Ni-Fe cores", *AIEEE Trans. Pt. (Com. Ind. Electronics)*, 1961, vol. 80: p. 23-26.
- [LER\_1] M. Leroy, "Contribution à la conception et l'optimisation d'architectures d'actionneurs", 2003, Schneider-Electric, rapport de stage DESS: Grenoble.
- [LIG\_1] P. Lignelet, "Fortran 77, Langage fortran V", ed. 3. 1985: Masson.
- [LIN\_1] D. Lin, et al., "A dynamic core loss model for soft ferromagnetic and power ferrite materials in transient finite element analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, vol. 40(2): p. 1318-1321.
- [LOC\_1] G. Lochak, "La géométrisation de la Physique", 1994: Flammarion.
- [LOU\_1] B. DuPeloux, "Modélisation des actionneurs électromagnétiques par réseaux de reluctances. Création d'un outil métier dédié au prédimensionnement par optimisation", 2006, INPG/ENSIEG/LEG, Grenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [MAR\_1] D.H. Martin, "Surface Structures and Ferromagnetic Domain Sizes", *Proc. Phys. Soc.*, 1956, vol. 70: p. 77-84.

- [MAS\_1] F. Marthouret, J.P. Masson, H. Fraisse, "Modeling of a non-linear conductive magnetic circuit. Part 1: Definition and experimental validation of an equivalent problem", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1995, vol. 31(6): p. 4065-4067.
- [MAS\_2] M.A. Raulet, J.P. Masson, D. Gaude, "Introduction d'une représentation dynamique de matériau dans l'équation de diffusion du champ magnétique", *European Physical Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 1: p. 73-76.
- [MAY\_1] I.D. Mayergoyz, G. Friedman, "Isotropic vector Preisach model of hysteresis", *Journal of Applied Physics*, 1987, vol. 61(8): p. 4022-4024.
- [MAY\_2] I.D. Mayergoyz, G. Friedman, "Generalized Preisach Model of Hysteresis", *IEEE transactions on Magnetics*, 1988, vol. 24(1): p. 212-217.
- [MAY\_3] I.D. Mayergoyz, A.A. Adly, G. Friedman, "New Preisach type models of hysteresis and their experimental testing", *Journal of Applied Physics*, 1990, vol. 67(9): p. 5373-5375.
- [MAY\_4] I.D. Mayergoyz, "Mathematical Models of hysteresis", 1991: Springer-Verlag.
- [MAY\_5] A.A. Adly, I.D. Mayergoyz, "Accurate modeling of vector hysteresis using a superposition of Preisach type models", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1997, vol. 33(5): p. 4155-4157.
- [MAY\_6] I.D. Mayergoyz, "Non-linear diffusion of electromagnetic fields", 1998: Academic press.
- [MAZ\_1] V. Mazauric, et al., "Numerical modeling of electrical machines: Requirements, state of the art, lacks.", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2001, vol. 242-245: p. 137-142.
- [MAZ\_2] V. Mazauric, "Champs et équations en électromagnétisme (chap. 2)", dans "Electromagnétisme et Eléments Finis I: Formulations en Electromagnétisme", 2002: Hermès.
- [MAZ\_3] V. Mazauric, "From Thermostatistics to Maxwell's Equations: A Variational Approach of Electromagnetism", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, vol. 40(2): p. 945-948.
- [MAZ\_4] V. Mazauric, et al., "An energy based model for dynamic hysteresis", *IEEE Transactions on Magnetics*, conférence Intermag 2005.
- [MBM\_1] A. Maraner, C. Beatrice, P. Mazzetti, "Single Bloch wall dynamics in amorphous ribbons: A comparison between experimental and theoretical results", *Journal of Applied Physics*, 1994, vol. 75(8): p. 4117-4125.

- [MEU\_1] G. Meunier, H.T. Luong, Y. Marechal, "Computation of coupled problems of 3D eddy currents and electrical circuits by using T0-T-Phi formulations", *IEEE Transactions on Magnetism*, 1998, vol. 34(5): p. 3074-3077.
- [MEU\_2] G. Meunier, "Couplage avec les équations de circuit (Chap. 1)", dans "Electromagnétisme et Méthode des Eléments Finis III", 2002: Hermès.
- [MEU\_3] G. Meunier, Y. Le Floch, C. Guérin, "A non-linear circuit coupled T-T0-Phi formulation for solid conductors", *IEEE Transactions on Magnetism*, 2003, vol. 39(3): p. 1729-1732.
- [MIR\_1] C. Mira, "Systèmes asservis non-linéaires". 1990: Hermès.
- [NEE\_1] L. Néel, "Les lois de l'aimantation et de la subdivision en domaines élémentaires d'un monocristal de Fer", *Journal de Physique et le Radium*, 1944, Tome 5, série 8(11): p. 241-251.
- [NEE\_2] L. Néel, "Quelques propriétés des parois magnétiques des domaines élémentaires ferromagnétiques", *Cahier de Physique*, 1944, vol. 25: p. 5-44.
- [NEE\_3] L. Néel, "Influence de la subdivision en domaines élémentaires sur la perméabilité en haute fréquence des corps ferromagnétiques conducteurs", *Annales de l'Institut Fourier*, 1951, Tome 3(6): p. 301-319.
- [NEE\_4] L. Néel, "Théorie du traînage magnétique", *Journal de Physique et le Radium*, 1952, Tome 13(5): p. 249-264.
- [NOU\_1] A. Nouredine, "Modélisation de l'hystérésis dans les matériaux magnétiques et introduction de modèles dans Flux", 2002, INPG/ENSIEG/LEG Grenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [NOY\_1] C. Delannoy, "Programmer en Fortran 90, guide complet", 2004: Eyrolles.
- [OLI\_1] O. Maloberti, V. Mazauric, G. Meunier, A. Kedous-Lebouc, O. Geoffroy, "An energy based formulation for dynamic hysteresis and extra-losses", *IEEE Transactions on Magnetism*, conférence Compumag, Shenyang, 2005.
- [OLI\_2] O. Maloberti, A. Kedous-Lebouc, O. Geoffroy, G. Meunier, V. Mazauric, "Field diffusion-like representation and experimental identification of a dynamic magnetisation property", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, conférence SMM 17ème, Bratislava, 2005.

- [OLI\_3] O. Maloberti, V. Mazauric, G. Meunier, A. Kedous-Lebouc, O. Geoffroy, Y. Rebière, P. Labie, Y. Maréchal, "A derivation of macroscopic Maxwell matter-field equations including dynamic magnetic hysteresis and extra-losses", *IOS Press*, conférence ISEF, Vigo-Bayona, 2005.
- [OLI\_4] O. Maloberti, G. Meunier, A. Kedous-Lebouc, V. Mazauric, O. Geoffroy, "Vers une formulation de l'hystérésis magnétique dynamique vectorielle: modélisation et identifications expérimentales", la *RIGE*, conférence MGE, Lyon, 2005.
- [OLI\_5] O. Maloberti, V. Mazauric, G. Meunier, A. Kedous-Lebouc, P. Wendling, B. Colin, "A magnetic vector potential formulation to deal with dynamic hysteresis and induced losses within 2-D models", *IEEE Transactions on Magnetics*, conférence CEFC, Miami, 2006.
- [OLI\_6] O. Maloberti, V. Mazauric, G. Meunier, A. Kedous-Lebouc, "A 3-D electric vector potential formulation for dynamic hysteresis and losses", *IEEE Transactions on Magnetics*, conférence EMF, Aussois, 2006.
- [OSH\_1] P.R. Gillette, K. Oshima, "Magnetization by rotation", *Journal of Applied Physics*, 1958, vol. 29(3): p. 529-531.
- [OSS\_1] F. Ossart, V. Ionita, "Convergence de la méthode du point fixe modifié pour le calcul du champ magnétique avec hystérésis", *European Physical Journal of Applied Physics*, 1999, vol. 5: p. 63-69.
- [OSS\_2] F. Ossart, O. Hubert, R. Billardon. "A new internal variables scalar hysteresis model exhibiting closed minor loops: Application to the prediction of the dynamic behaviour of electrical laminations", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [OSS\_3] F. Ossart, et al., "Lois de comportement des matériaux (Chap. 2)", dans "Electromagnétisme et Méthode des Eléments Finis II", 2002: Hermès.
- [PAR\_1] G.S. Park, S.Y. Kahn, "Implementation of hysteresis characteristics using the Preisach model with M-B variables", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1993, vol. 29(2): p. 1542-1545.
- [PAS\_1] J.B. Passioura, "Simulation models: Science, snake oil, education or engineering", *Agronomy Journal*, 1996, vol. 88: p. 690-694.
- [PAT\_1] U.D. Patel, E. Della-Torre. "Fast computation of the CMH model", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [PAU\_1] R. Friedberg, D.I. Paul, "New Theory of coercive force of ferromagnetic materials", *Physical Review Letters*, 1975, vol. 34(19): p. 1234-1237.

- [PEC\_1] M.A. Peccolo, et al., "Frequency limit of a large signal dynamic model of magnetic circuits", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1996, vol. 160: p. 47-48.
- [PER\_1] J.C. Perron, "Matériaux ferromagnétiques amorphes et nanocristallins", *Techniques de l'Ingénieur D2 150*, 2003, p. 1-26.
- [PFE\_1] F. Pfeifer, R. Deller, "Neue Werkstoffe für Impulsübertrager", *ETZ Elektrotechnische Zeitschrift*, 1968, Bd. 89(Ausgabe-A, Heft 22): p. 601-603.
- [PFE\_2] F. Pfeifer, W. Behnke, "Hohe Impulspermeabilität und hoher Induktionshub bei weichmagnetischen Ni-Fe-Werkstoffen mit kristallographischer Textur und magnetisch induzierter Vorzugsrichtung", *Z. Metallkunde*, 1979, Bd. 70(Heft 3): p. 142-145.
- [PFE\_3] F. Pfeifer, C. Radloff, "Soft magnetic Ni-Fe and Co-Fe alloys\_Some physical and metallurgical aspects", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1980, vol. 19: p. 190-207.
- [PLA\_1] M. Planck, "Initiation à la Physique", 1941, Flammarion.
- [POR\_1] R. Vergne, J.L. Porteseil, J.C. Cotillard, "From the motion of a Bloch wall to the magnetization of polycrystals: cooperative effects and scaling aspects", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1980, vol. 15-18: p. 1470-1472.
- [PRE\_1] F. Preisach, "Über die magnetische Nachwirkung", *Zeitschrift für Physik*, 1935, Bd. 94.
- [QUO\_1] P. Nakmahachalasint, K.D.T. Ngo, L. Vu-Quoc, "Thermal behavior of a dynamic domain wall motion model for hysteresis in power ferrites", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005: p. 1-4.
- [RAN\_1] D. Brander, A. Carey, "The inverse scattering transformation method and the non-linear Schrödinger equation", 1996: p. 1-54.
- [RAU\_1] M.A. Raullet, et al., "Test of the sample geometry independence of a dynamic hysteresis behavioral model of magnetic materials", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2000, vol. 215-216: p. 620-622.
- [RAU\_2] M.A. Raullet, et al., "The Magnetic Field Diffusion equation Including Dynamic Hysteresis", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, vol. 42(2): p. 872-875.
- [REI\_1] J. Reinert, A. Brockmeyer, W.A.A.D. Donker, "Calculation of losses in Ferro- and Ferrimagnetic materials based on the modified Steinmetz equation", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2001, vol. 37(4): p. 1055-1060.

- [REM\_1] A. Reimers, E. Della-Torre. "New Algorithm for implementing the specified vector Preisach model", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [REN\_1] Z. Ren, " $\mathbf{T} - \Omega$  formulation for eddy current problems in multiply connected regions", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2002, vol. 38(2): p. 557-560.
- [RIB\_1] A. Lopes Ribeiro. "Teaching micromagnetism using computer demonstrations", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [RIS\_1] C. Le Bris, "Systèmes multi-échelles - Modélisation et Simulation", *Mathématiques et Applications* n°47, 2005: Springer-Verlag.
- [ROT\_1] H.C. Roters, "Electromagnetic devices", ed. 1. 1941, New York: John Wiley&Sons, inc, London Chapman&Hall.
- [ROU\_1] B. Roussin, "Modélisation et optimisation d'un relais haute sensibilité - Mise en évidence des courants de Foucault", 1999, Schneider-Electric, rapport de DEA: Grenoble.
- [RUS\_1] G. Russakoff, "A derivation of the macroscopic Maxwell equations", *American Journal of Physics*, 1970, 38(10): p. 1188-1995.
- [SAL\_1] H.H. Saliah, D.A. Lowther, B. Forghani, "A neural network model of magnetic hysteresis for computational magnetics", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1997, vol. 33(5): p. 3146-4148.
- [SAN\_1] Santi, et al, "Dynamic hysteresis in finemet thin films", *IEEE Transactions on Magnetics*, 2003, vol. 39(5): p. 2667-2668.
- [SAV\_1] D. De Savigny, "Electroaimants de commande", Centrale Lyon, *Techniques de l'Ingénieur* D835, 1983.
- [SCH\_1] J. Schneider, B. Springmann, K. Zaveta, "Magnetization reversal and domain boundary configurations in amorphous alloys", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1980, vol. 19: p. 187-189.
- [SHI\_1] J.W. Shilling, G.L. Houze, "Magnetic properties and domain structures of GO 3% SiFe", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1974, vol. MAG-10(2): p. 195-222.
- [SHJ\_1] H. Shimoji, et al. "A new modeling of the vector magnetic property". in Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [SHU\_1] YA.S. Shur, YU.N. Dragoshanskiy, "The shape of closure domains inside silicon-iron crystals", *Fiz. Metal. Metalloved.*, 1966, vol. 22(5), 702-710: p. 57-63.
- [SIM\_1] Antonio De Simone, "Energy Minimizers for large Ferromagnetic bodies", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1993, vol. 125: p. 99-143.

- [SIV\_1] J. Sivardière, "La symétrie en Mathématique, Physique et Chimie", 1995: E.D.P. Sciences.
- [SLA\_1] A. Slama, "Modélisation 3D des effets d'induction", 2000, Schneider-electric, stage DESS.
- [SLO\_1] J.C. Slonczewski, "Dynamics of Magnetic domain walls", *Intern. J. Magnetism*, 1972, vol. 2: p. 85-97.
- [SLO\_2] J.C. Slonczewski, "Theory of Bloch-line and Bloch-wall motion", *Journal of Applied Physics*, 1974, vol. 45(6): p. 2705-2715.
- [SPO\_1] S. Spornic, et al., "Frequency magnetic behaviour of SiFe sheets in a rotational field", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1996, vol. 160: p. 147-148.
- [SPO\_2] S.A. Spornic, "Automatisation de bancs de caractérisation 2D des tôles magnétiques - Influence des formes d'onde sur les mécanismes d'aimantation", 1998, INPG/ENSIEG/LEG Grenoble, Thèse de Doctorat / Génie Electrique.
- [SPR\_1] M. Brokate, J. Sprekels, "Hysteresis and phase transitions", 1996: Springer-Verlag.
- [STO\_1] E.C. Stoner, E.P. Wohlfarth, "A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys", *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1947, vol. A240: p. 599-642.
- [SZC\_1] J. Szczyglowski, "Influence of eddy currents on magnetic hysteresis loops in soft magnetic materials", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2001, vol. 223: p. 97-102.
- [TAY\_1] J. Taylor, "Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques", 2000: Dunod.
- [THI\_1] A.A. Thiele, "Steady-state motion of magnetic domains", *Physical Review Letters*, 1973, vol. 30(6): p. 230-233.
- [THI\_2] A.A. Thiele, "Applications of the gyrocoupling vector and dissipation dyadic in the dynamics of magnetic domains", *Journal of Applied Physics*, 1974, vol. 45(1): p. 377-393.
- [TON\_1] E. Tonti, "On the mathematical structure of a large class of physical theories", *Accademia Nazionale Dei Lincei*, 1972, Serie VIII, vol. LII, fasc. 1: p. 48-56.
- [TON\_2] E. Tonti, "A mathematical model for physical theories", *Accademia Nazionale Dei Lincei*, 1972, Serie VIII, vol. LII, fasc. 2-3: p. 133-250.
- [TON\_3] E. Tonti, "The reason for analogies between physical theories", *Applied Mathematical Modeling*, 1976, vol. 1: p.36-50.

- [TON\_4] E. Tonti, "On the geometrical structure of electromagnetism", 26 avril 1999.
- [TOU\_1] G. Toulouse, M. Kléman, "Principles of a classification of defects in ordered media", *Le Journal de Physique*, 1976, Tome 37: p. L149-L151.
- [TRE\_1] Du Tremolet de Lacheisserie, "Magnétisme I: Fondements", Vol. I, 1999, Grenoble: E.D.P. Sciences.
- [TRE\_2] Du Tremolet de Lacheisserie, "Magnétisme II: Matériaux et Applications", Vol. II, 1999, Grenoble: E.D.P. Sciences.
- [TUA\_1] Phung Anh Tuan, "Formulations Eléments Finis pour les fréquences intermédiaires", 2006, INPG/ENSIEG/LEG, Grenoble, Thèse de Doctorat, Génie Electrique.
- [ULT\_1] Mickaël Perrault, "Optimisation d'un déclencheur à noyau plongeur", 1998, Projet de fin d'étude de l'ENSIEG en collaboration avec Schneider-Electric.
- [UNG\_1] U. Ungemach, "Temperature and field dependance of SiFe and CoPd single crystals", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1980, vol. 15-18: p. 1503-1504.
- [VAJ\_1] F. Vajda, E. Dellatorre, "Characteristics of the complete moving hysteresis model", *Journal of Applied Physics*, 1993, vol. 73(10): p. 5833-5835.
- [VAN\_1] H.A.M. Van Den Berg, A.H.J.V.D. Brandt, "Self consistent domain Theory in soft ferromagnetic media II: Basic domain structures in thin film objects", *Journal of Applied Physics*, 1986, vol. 60(3): p. 1105-1113.
- [VAN\_2] H.A.M. Van Den Berg, A.H.J.V.D. Brandt, "Self consistent domain Theory in soft ferromagnetic media III: Composite domain structures in thin film objects", *Journal of Applied Physics*, 1987, vol. 62(5): p. 1952-1959.
- [VER\_1] J.C. bavay, J. Verdun, "Alliages Fer-Silicium", *Techniques de l'Ingénieur* D2 110-113, 2003.
- [VIA\_1] A. Viallix, et al., "A new method for Finite Element calculation of micromagnetic problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1988. 24(6): p. 2371-2373.
- [VIN\_1] A. Salvini, F.R. Fulginei. "Genetic algorithm and neural network generalizing the Jiles-Atherton model of static hysteresis for dynamic loops", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.

- [VOM\_1] E. Vom De Riet, F. Roozeboom, "Ferromagnetic resonance and eddy currents in high permeable thin films", *Journal of Applied Physics*, 1997, vol. 81(1): p. 350-354.
- [WAE\_1] T. Waeckerlé, P. Cremer, D. Gautard, "Alliages magnétiques nanocristallins industriels - Etat de l'art", dans R.E.E. (Dossier les Matériaux en Génie Electrique) 2003: p. 22-28.
- [WIB\_1] H. Wibbeler, G. Rassmann, and W. Schatt, "Nickel-Eisen-Kobalt-Magnetlegierungen mit stufenförmiger Hystereseschleife", *Z. Metallkunde*, 1979. Bd. 70(Heft 1): p. 21-25.
- [WIL\_1] W. Williams, D.J. Dunlop, "3D micromagnetic modelling of ferromagnetic domain structure", *Letters to Nature*, 1989, vol. 337: p. 634-637.
- [WIN\_1] S.D. Winter, R.W. Kuenning, G.G. Berg, "Pulse Properties of large 50-50 NiFe tape cores", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1970, vol. MAG-6(1): p. 41-45.
- [WOL\_1] W. Wolf, "Ein neuer weichmagnetischer Ni-Fe-Werkstoff für impulsübertrager und drosseln in der leistungselektronik", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1978, vol. 9: p. 170-172.
- [WOO\_1] H. Woodson, J.R. Melcher, "Electromechanical dynamic", Vol. I, 1968, Wiley.
- [WSK\_1] H. Williams, W. Shockley, C. Kittel, "Studies of the propagation velocity of a ferromagnetic domain boundary", *Physical Review*, 1950, vol. 80(6): p. 1090-1094.
- [YAM\_1] K. Yamaguchi, K. Yamada, T. Takagi. "Monte-Carlo simulations for magnetic materials including dislocations", conférence Compumag 13ème, 2001, Evian France.
- [ZAK\_1] V. Zakharov, "Application of inverse scatterin method to problems of differential geometry", 2004: p. 1-25.
- [ZAK\_2] V. Zakharov, "How classical physics helps mathematics", 2004: p. 1-24.
- [ZAV\_1] K. Závèta, Z. Kalva, R. Schäfer, "Permeability and domain structure of nanocristalline alloys", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1995, vol. 148: p. 390-396.
- [ZEG\_1] I. Zegadi, J.J. Rousseau, B. Allard, "Model of power soft MnZn ferrites including temperature effects", *IEEE Transactions on Magnetics*, 1995 vol. 36(4): p. 2022-2032.
- [ZIT\_1] L. Couture, R. Zitoun, "Physique Statistique", 1992: Ellipses.

---

## RESUME

Les matériaux magnétiques doux (Fe, Ni, Co, ... sous forme cristalline, polycristalline ou amorphe) sont utilisés en électrotechnique pour convertir l'énergie, guider les lignes de flux et transmettre des signaux. Leur principale caractéristique est de s'aimanter aisément. Ces matériaux sont aussi conducteurs et des courants sont induits en régime transitoire et périodique. Ces derniers peuvent être classiquement diffusés à une échelle macroscopique mais aussi et surtout localement induits dans une microstructure magnétique en mouvement et réarrangement incessant. Ces effets d'amortissement et de pertes dynamiques ont plusieurs conséquences parfois difficilement prévisibles: des pertes d'énergie, des temps de retard, de la distorsion de signal et de la rémanence. Nous nous intéressons à la recherche de modèles fidèles dans le but de comprendre les propriétés des matériaux ferromagnétiques doux en régime statique et dynamique et de simuler avec précision le comportement des dispositifs électrotechniques. Nous choisissons de nous concentrer particulièrement sur l'effet des courants induits microscopiques en plus de ceux macroscopiques, puisqu'ils sont à l'origine des pertes en excès et de l'hystérésis dynamique qui sont observées expérimentalement.

Après avoir longuement étudié la problématique, les enjeux et les modèles existants; nous avons entrepris la construction d'une représentation des matériaux à l'échelle mésoscopique, intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique, utilisable aussi bien en Ingénierie des Matériaux qu'en simulation numérique type Eléments Finis. Pour ce, les équations de champs dans la matière ont été redérivées en présence des processus physiques dynamiques mis en jeu.

Ensuite nous nous sommes attachés à résoudre analytiquement certains problèmes simples pour appréhender les apports et limites de notre modélisation. Il s'est agit de comparer la théorie à l'expérience et de caractériser des échantillons sur bancs de mesure normalisés.

Enfin, nous avons mis en œuvre, à l'aide d'une méthode numérique (la Méthode des Eléments Finis), des formulations électromagnétiques 3-D et 2-D dédiées. Nous les avons testées sur des cas tests simples en les comparant systématiquement aux résultats standards et antérieurs, aux calculs analytiques et aux observations. Des premières configurations simples d'applications de sécurité électrique ont aussi été simulées et étudiées : un transformateur de courant et un actionneur électromécanique.

---

## MOTS-CLEFS

Electromagnétisme dans la Matière, Modélisation, Matériaux Magnétiques Doux, Pertes Fer, Hystérésis Dynamique, Caractérisations Expérimentales, Formulations Electromagnétiques, Simulations Numériques par la Méthode des Eléments Finis, Capteurs, Transformateurs de Courant, Actionneurs Electromécaniques.

---

## TITLE

CONTRIBUTION TO THE MODELING OF DYNAMIC MAGNETISATION AND EDDY CURRENTS IN SOFT MAGNETIC MATERIALS: MEASUREMENTS AND SIMULATIONS.

---

## ABSTRACT

Soft magnetic materials (Fe, Ni, Co, ... amorphous, crystal or poly-crystal) are used in power electrical engineering to convert energy, to guide flux lines and to transmit information. Their main characteristic is to be easily magnetised. They are also conducting and free currents are induced with time harmonics and transient signals. These last can be classically diffused at the macroscopic scale but also and mainly locally induced in a moving microscopic magnetic structure. These damping effects and dynamic losses have got several consequences: power losses, time delay, signal distortion, remanence. We are interested in faithful models in order to understand soft materials static and dynamic properties and to compute power electrical devices with accuracy. We have chosen to focus on microscopic eddy currents in addition to macroscopic ones, because they are at the origin of the dynamic hysteresis which is observed and measured.

After introducing the set of problems, stakes and state of the art; we began to build a theoretical material representation at the mesoscopic scale, between the microscopic and macroscopic ones, usable in material science and numerical simulation tools. So Matter-Field Equations have been derived again with the physics of dynamic magnetisation reversal processes.

Then we tried to analyse the relevance and limits of our representation thanks to analytical calculations on simple and academic problems. We also carried out some calculations, measurements and experimental characterisations to confront theory and reality.

Finally, we have written, with the Finite Element Method, some dedicated electromagnetic formulations in 3-D and 2-D. We have confirmed them with simple test cases always comparing with standard and previous results, analytical calculations and experimental observations. First simple configurations of circuit breaking applications have also been investigated, studied and computed.

---

## KEYWORDS

Electromagnetism in Matter, Modeling, Soft Magnetic Materials, Iron Losses, Dynamic Hysteresis, Experimental Identification, Electromagnetic Formulations, Numerical Simulations, Finite Element Method, Electromagnetic Sensors, Current transformers, Electromechanical Actuators.

