



Quelques problèmes de mécanique statistique

Olivier Garet

► **To cite this version:**

Olivier Garet. Quelques problèmes de mécanique statistique. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2005. tel-00151612

HAL Id: tel-00151612

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00151612>

Submitted on 4 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DOCUMENT DE SYNTHÈSE

présenté à

L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

pour obtenir

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Olivier GARET

QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE STATISTIQUE

Soutenue le 12 décembre 2005 devant le jury composé de :

M	Patrick	CATTIAUX
M.	Francis	COMETS
M.	Yves	DERRIENNIC
M.	Dominique	LÉPINGLE
M.	Emmanuel	LESIGNE
M.	Didier	PIAU
Mme	Sylvie	RCELLY
M.	Gilles	ROYER

Rapporteurs : Francis Comets, Yves Derriennic, Olle Häggström

Remerciements

Mes premiers remerciements vont aux trois rapporteurs de cette habilitation, tant pour leur lecture attentive de mes travaux que pour l'influence qu'ils ont eue sur mon parcours scientifique, par leur enseignement, leur conversation ou leurs écrits.

Je dois – à son insu – un de mes plus beaux théorèmes à Francis Comets. Lors d'un séminaire, je lui avais présenté des résultats qui soulevaient naturellement une question à laquelle je n'osais m'attaquer. En quelques mots, il a su me convaincre que le résultat était à ma portée. Le chemin était encore long, mais Francis avait su me donner l'espoir. Puisque j'aspire aujourd'hui à pouvoir encadrer des thèses, je ne peux que souhaiter acquérir cette formidable capacité à susciter la confiance.

Yves Derriennic m'a appris la théorie ergodique en DEA. Quand je repense à son cours, je vois une parole portée par une langue de feu, nous annonçant les théorèmes comme autant de bonnes nouvelles. Je sais à présent que ses propres travaux frôlaient le cadre de son enseignement et que sa recherche en nourrissait la flamme. On parle souvent de manière convenue du lien indéfectible entre recherche et enseignement supérieur, mais j'ai pu constater là que ce n'est pas un vain mot.

Je suis très touché qu'Olle Häggström ait accepté d'être rapporteur de ce travail. Ému, parce que c'est la lecture de ses articles de synthèse qui m'a donné le goût de la percolation. Flatté également car il est un des principaux initiateurs des problèmes mathématiques qui me passionnent aujourd'hui. Je voudrais également le remercier pour la gentillesse et la simplicité avec lesquelles il a répondu à toutes mes questions et mes commentaires concernant ses travaux.

Je remercie évidemment tous ceux qui m'ont fait l'honneur et l'amitié de participer à ce jury : Patrick Cattiaux, dont les mots à la fois francs et chaleureux m'ont si souvent été utiles ; Dominique Lépingle et Gilles Royer qui m'ont accueilli à Orléans avec une telle simplicité que j'ai vite cru y être depuis toujours ; Emmanuel Lesigne et Didier Piau, dont les regards aquilins ont grandement contribué à la finition de ce mémoire ; et bien entendu Sylvie Roelly qui a supporté (dans tous les sens du terme) le turbulent thésard que j'étais.

Il me faut évidemment remercier Raymond Moché, qui a su, par ses cours à la fois clairs et exigeants, faire en sorte que les probabilités soient la discipline que j'aie le plus de plaisir à étudier en profondeur. Ce fut pour moi une rencontre déterminante.

Un grand merci à tous les collègues, enseignants, secrétaires et ingénieurs, qui font que labo d'Orléans est un endroit où on travaille dans une ambiance

sympathique. Je ne peux citer tous ceux qui le méritent ; mais Emmanuel Cépa et Jean-Pierre Schreiber méritent d'être distingués parce que je les empêche souvent de travailler.

Je veux aussi remercier tous ceux que j'aime et qui m'aiment ; mes parents, qui m'ont toujours soutenu ; mes amis, de Lille, de Paris, d'Orléans ou d'ailleurs, qui passent dire bonjour même si ils ont eu une route longue ou une nuit courte, apportant ainsi la chaleur de leurs sourires et de leurs plaisanteries.

Parmi ceux-là, Régine et Bruno méritent une mention particulière car le second fait la cuisine pendant que la première fait des maths au téléphone avec moi. Je ne leur conseille pas d'inverser les rôles, car je ne suis pas certain d'avoir les dispositions nécessaires dans les arts culinaires pour en apprendre autant que je n'apprends de mathématiques grâce à Régine.

Merci enfin à Murièle, François, Melody et Mathilde, que j'aime comme je respire.

Table des matières

0	Introduction	5
	Liste des travaux	8
1	Mesures de Gibbs et champs gaussiens	9
1.1	Qu'est-ce qu'une mesure de Gibbs?	10
1.2	Le hamiltonien quadratique	11
1.3	Le théorème de Dobrushin et Künsch	12
1.4	Théorèmes de structure : le cas classique et le cas quantique .	13
1.4.1	Le cas classique	13
1.4.2	Modélisation quantique des oscillateurs harmoniques .	16
1.5	Dynamiques stochastiques associées aux hamiltoniens quadra- tiques	19
1.5.1	Comportement asymptotique en temps	20
1.5.2	Étude des mesures invariantes	20
1.6	Processus gaussiens admettant une représentation intégrale . .	22
2	Percolation et mesures de Gibbs	25
2.1	Transition de percolation pour des interactions quadratiques perturbées	25
2.1.1	Le cas gaussien pur	26
2.1.2	Perturbations d'interactions quadratiques	27
2.2	Théorèmes de limite centrale dans des modèles de coloriage . .	29
2.2.1	Les théorèmes de limite centrale sur des graphes généraux	30
2.2.2	Fluctuations du cluster infini dans des boîtes	32
2.2.3	Théorèmes de limite centrale dans le modèle de Potts .	34
3	Percolation de premier passage et compétition	36
3.1	La percolation de premier passage	36
3.2	Percolation de premier passage sur le cluster infini	36
3.3	Problèmes de compétition	40
3.3.1	Coexistence	40
3.3.2	Non-coexistence	42
3.4	Quelques perspectives	44
3.4.1	Le problème des géodésiques	44
3.4.2	Compétition	44

0 Introduction

Mon domaine de recherche principal est une branche des probabilités que l'on appelle la mécanique statistique. L'idée générale est que l'on étudie des systèmes infinis de particules en essayant d'établir le lien entre les propriétés microscopiques (par exemple l'interaction entre des particules proches) et les propriétés macroscopiques (par exemple les caractéristiques à grande échelle des mesures d'équilibre). Ce mémoire se divise en trois parties :

- Mesures de Gibbs et champs gaussiens
- Percolation et mesures de Gibbs
- Percolation de premier passage et compétition

Le passage d'une thématique à une autre s'est fait de manière progressive, sous l'influence de lectures et de rencontres. De fait, la frontière entre les différentes sections est assez poreuse et bien souvent un papier classé dans une section aurait pu dériver vers une autre.

La première partie, en partie issue de mon travail de thèse, traite des mesures de Gibbs gaussiennes, classiques et quantiques. On y étudie finement la structure de l'ensemble des mesures de Gibbs classiques (*resp.* quantiques) dont le support est raisonnable. Pour le cas classique, on étudie également les dynamiques stochastiques de gradient canoniquement associées : on montre que les mesures invariantes sous la dynamique sont exactement les mesures de Gibbs et on étudie la convergence en loi du système en temps infini. Dans tout cela, une attention particulière est accordée à l'influence de la transition de phase.

Dès que l'on dépasse le cadre des probabilités élémentaires, le probabiliste – en particulier le méca-statisticien – doit composer avec un espace d'état complexe, et une partie de son art consiste à trouver un équilibre entre les propriétés des objets de l'espace d'état et les propriétés de la mesure de probabilité qui détermine lesquels de ces objets vont intervenir de manière significative. Ainsi en mécanique statistique le choix de l'espace d'états peut être un paramètre important. Sans doute est-ce une évidence qui mérite que l'on s'y arrête : il est facile en effet de l'oublier, car dans les modèles discrets classiques – par exemple pour Ising ou Potts – on peut définir le modèle sans rencontrer de problème de convergence et l'espace d'états est naturellement le produit d'une infinité de copies de l'espace des spins ¹. En revanche, dans cette première partie, le choix de l'espace d'états est crucial puisqu'il permet de transformer la plupart des questions posées en problèmes d'analyse. Pour qui connaît un peu la littérature traitant de problèmes d'équations sto-

¹Cependant, le problème ressurgit naturellement dès que l'on tente de préserver quelque stabilité à la classe des mesures de Gibbs – voir les travaux sur Gibbs/non-Gibbs, par exemple chez Külske, Le Ny, Maes, Van Enter ou Redig.

chastiques analogues à ceux considérés ici, les outils utilisés dans nos travaux sont sans doute un peu surprenants : pas de calcul stochastique (les équations sont résolues ω par ω), pas de passage à la limite avec des grandes boîtes (les équations sont résolues d'emblée dans un espace infini)... Cette situation s'explique au moins en partie par l'intérêt que nous avons pour la situation de transition de phase. En effet, les potentiels pour lesquels il y a transition de phase sont en un certain sens à la frontière de l'ensemble des potentiels pour lesquels il y a existence, ce qui explique que dans les situations qui nous intéressent, il faut s'efforcer, tant que faire se peut, de faire des calculs exacts et éviter d'user d'approximations. Ceci explique que l'analyse spectrale soit plus adaptée à notre situation que des techniques plus spécifiquement probabilistes.

Cette première partie s'achève par quelques résultats sur le comportement asymptotique de certains processus gaussiens, incluant le cas des mesures de Gibbs gaussiennes, mais en réalité d'une portée plus générale.

La deuxième partie s'ouvre sur un papier un peu hybride, qui traite du problème de la transition de percolation pour des champs gaussiens et pour des champs gibbsiens dont le hamiltonien est celui d'un champ de Gibbs gaussien auquel on a fait subir une petite perturbation. Parmi les motivations de ce travail, il y a la remarque simple suivante : la plupart des auteurs qui ont travaillé sur les mesures de Gibbs gaussiennes mentionnent dans l'introduction de leurs articles une vague promesse suggérant que l'étude du cas gaussien pourrait servir de point d'appui pour une étude plus générale. Je ne fais pas exception à cette règle. Cependant, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, lorsque l'on part d'une interaction pour laquelle il y a transition de phase, on est sur le fil du rasoir puisqu'une petite perturbation peut empêcher l'existence d'une mesure de Gibbs. Les choses ne sont donc pas simples. Il nous alors semblé naturel de regarder plus précisément ce qu'on pouvait dire d'intéressant sur les mesures de Gibbs correspondant à des interactions perturbées, ce qui suppose évidemment qu'on commence par donner des conditions suffisant à assurer leur existence. Comme je commençais à m'intéresser à la percolation, le problème de la transition de percolation s'est alors imposé. Ce fut un travail de longue haleine, combinant des difficultés modérées en percolation, discipline dont je faisais l'apprentissage, et des difficultés sérieuses dans l'analyse des processus gaussiens à laquelle j'étais heureusement davantage rompu.

Dans la deuxième moitié de cette partie, nous nous intéressons à des théorèmes de limite centrale liés à la percolation. Ces problèmes concernent la proportion prise par la composante infinie d'un graphe aléatoire dans de grandes boîtes ainsi que des coloriations aléatoires de graphes aléatoires. Étonnamment, bien que la question des fluctuations de la proportion prise par la compo-

sante infinie soit un problème assez naturel, le premier résultat concernant ce problème pour la percolation Bernoulli surcritique ne remonte qu'à 2001 ; il est du à Zhang [Zha01]. Nous en avons donné une forme plus précise avec une preuve beaucoup plus simple, qui servit alors de base pour un "méta-théorème" applicable à d'autres modèles de percolation, en particulier à la FK-percolation. Nous avons ainsi montré divers théorèmes pour les coloriage aléatoires de graphes aléatoires qui n'ont pas de cluster infini ou dont les fluctuations du cluster infini satisfont au TCL. En particulier, on a obtenu des théorèmes sur la répartition des différentes couleurs dans le modèles de Potts et dans le modèle *divide and color* d'Häggström.

La dernière partie est consacrée à des problèmes de percolation de premier passage et de compétition. Sa première moitié est formée de travaux relatifs à la percolation de premier passage sur le cluster infini de la percolation Bernoulli, ce qui inclut l'étude de la longueur du plus court chemin entre deux points du cluster infini en régime surcritique – appelée aussi distance chimique. En particulier, on montre un théorème de forme asymptotique ainsi que des inégalités de grandes déviations pour la distance chimique. Les outils utilisés sont assez variés : on y utilise des techniques classiques en théorie de la percolation – comme les volumes de contrôle, la renormalisation, les modifications de chemins – mais aussi des outils de théorie ergodique.

La seconde moitié de cette partie est consacrée à des questions de coexistence et de non-coexistence dans des modèles de compétition liés à la percolation de premier passage. Ainsi, dans le premier des deux articles présentés, on considère deux espèces qui essaient chacune de coloniser l'espace à partir d'un point et progressent comme le ferait un processus de percolation de premier passage, à la nuance prêt qu'il est impossible d'occuper un point qui a déjà été occupé par l'espèce concurrente. Nous montrons que si la loi des temps de passage est la même pour les deux espèces, alors, sous des hypothèses assez larges, la probabilité que les deux espèces s'étendent chacune sur un domaine infini est strictement positive, ce qui permet de répondre par l'affirmative à une conjecture d'Häggström et Pemantle. Dans un autre modèle, on considère en revanche deux espèces se développant à vitesse constante, mais ayant des taux de mortalité distincts. Dans ce cas, on montre un résultat de non-coexistence.

Enfin, puisque ce sont les problèmes de compétition et de percolation de premier passage qui sont actuellement au centre de mes intérêts, je conclurai par quelques notes prospectives concernant spécifiquement ce sujet.

Liste des travaux

- [1] Olivier Garet. Gibbsian fields associated to exponentially decreasing quadratic potentials. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 35(3) :387–415, 1999.
- [2] Olivier Garet. Asymptotic behaviour of Gaussian processes with integral representation. *Stochastic Process. Appl.*, 89(2) :287–303, 2000.
- [3] Olivier Garet. Infinite dimensional dynamics associated to quadratic Hamiltonians. *Markov Process. Related Fields*, 6(2) :205–237, 2000.
- [4] Olivier Garet. Limit theorems for the painting of graphs by clusters. *ESAIM Probab. Statist.*, 5 :105–118 (electronic), 2001.
- [5] Olivier Garet. Harmonic oscillators on an Hilbert space : a Gibbsian approach. *Potential Anal.*, 17(1) :65–88, 2002.
- [6] Olivier Garet. Percolation transition for some excursion sets. *Electron. J. Probab.*, 9 :no. 10, 255–292 (electronic), 2004.
- [7] Olivier Garet. Central limit theorems for the Potts model. *Math. Physics Electronic Journal*, 11(4), 2005.
- [8] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite Bernoulli cluster. *ESAIM Probab. Stat.*, 8 :169–199 (electronic), 2004.
- [9] Olivier Garet and Régine Marchand. Large deviations for the chemical distance in supercritical bernoulli percolation. *Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/math.PR/0409317>*, 2004.
- [10] Olivier Garet and Régine Marchand. Coexistence in two-type first-passage percolation models. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1A) :298–330, 2005.
- [11] Olivier Garet and Régine Marchand. Competition between growths governed by Bernoulli percolation. *Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/math.PR/0507133>*, 2005.

1 Mesures de Gibbs et champs gaussiens

Les travaux présentés dans cette section correspondent à mon travail de thèse et à quelques articles connexes qui ont suivi.

L'étude des champs aléatoires sur un réseau possédant des distributions conditionnelles gaussiennes fut suggérée pour la première fois par Dobrushin en 1966 [Dob80], alors que ce dernier était en train de jeter les bases de la théorie des mesures de Gibbs. Les champs gaussiens sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ ont une place particulière dans l'étude des mesures de Gibbs à valeurs de spins non bornés pour plusieurs raisons : en premier lieu, il est bien connu que les variables gaussiennes permettent des calculs exacts, prometteurs de résultats fins, même dans des cas de forte dépendance. En second lieu, les interactions quadratiques semblent être un premier pas naturel dans l'étude de systèmes interactifs à espace d'états continu. En effet, si de nombreux résultats ont d'ores et déjà pu être démontrés pour des systèmes de spins discrets (voir par exemple [Lig85]), l'état des connaissances pour des modèles continus est loin d'être aussi avancé. Ainsi, il est important de remarquer que les hamiltoniens quadratiques fournissent le seul exemple pour lequel l'ensemble des mesures de Gibbs associées est décrit avec une telle précision. Ce travail pionnier a été mené de manière indépendante par Dobrushin et Künsch en 1980, utilisant les résultats de Rozanov [Roz67]. Pour un historique détaillé, se reporter à Georgii [Geo88].

Dès lors que j'ai cru comprendre ce qu'était un travail de thèse et ce qu'était une mesure de Gibbs gaussienne, il m'a semblé que les mesures de Gibbs gaussiennes avaient vocation à devenir pour les mesures de Gibbs à valeurs continues ce que le modèle d'Ising est aux modèles discrets, c'est à dire le parangon, l'objet modèle pour lequel ce qu'on pense être vrai est démontré.

Mes tentatives pour accroître la popularité de ce modèle concernent essentiellement les manifestations de la transition de phase : quelle est la structure de l'ensemble des phases pures, comment le phénomène de phase influe-t-il sur la décroissance de la covariance, comment se comportent alors les dynamiques stochastiques de gradient associées.

Ces travaux laissent totalement dans l'ombre des questions pourtant essentielles en mécanique statistique, à savoir l'étude des fonctions thermodynamiques et les propriétés de grandes déviations. Par un heureux hasard, Pietro Caputo et Jean-Dominique Deuschel s'attaquent avec succès à ces problèmes-là à peu près au même moment – voir [CD00, CD01], ce qui fait qu'on peut estimer disposer aujourd'hui d'un panorama assez complet sur le sujet.

1.1 Qu'est-ce qu'une mesure de Gibbs ?

Nous appelons *champ aléatoire* sur le réseau \mathbb{Z}^d une mesure de probabilité sur $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, i.e. un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. Comme d'habitude, pour $i \in \mathbb{Z}^d$, on note X_i la variable aléatoire projection canonique sur la i -ème composante.

Introduisons le concept de *mesure de Gibbs*. Chaque $\omega \in \Omega$ peut être considéré comme une application de \mathbb{Z}^d dans \mathbb{R} . On notera ω_Λ sa restriction à Λ . Ainsi, si A et B sont deux parties disjointes de \mathbb{Z}^d et $(\omega, \eta) \in \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^B$, $\omega\eta$ représente la concaténation de ω et η , c'est à dire l'élément $z \in \mathbb{R}^{A \cup B}$ vérifiant

$$z_i = \begin{cases} \omega_i & \text{si } i \in A \\ \eta_i & \text{si } i \in B \end{cases}$$

Pour toute partie finie Λ de \mathbb{Z}^d , on définit $\sigma(\Lambda)$ comme étant la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires $\{X_i, i \in \Lambda\}$.

Pour toute partie finie Λ de \mathbb{Z}^d , soit Φ_Λ une fonction $\sigma(\Lambda)$ -mesurable à valeurs réelles. La famille $(\Phi_\Lambda)_\Lambda$, où Λ décrit l'ensemble des parties finies de \mathbb{Z}^d , est appelé un *potentiel d'interaction*, ou simplement un potentiel. Pour une partie finie Λ de \mathbb{Z}^d , la quantité

$$H_\Lambda = \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B$$

est appelée le *hamiltonien* sur le volume Λ . Souvent, H_Λ ne peut être défini que sur une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Nous supposons qu'il existe une partie $\tilde{\Omega}$ de Ω telle que

$$\forall \Lambda, \forall \omega \in \tilde{\Omega} \quad \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} |\Phi_B(\omega)| < +\infty$$

La famille $(H_\Lambda)_\Lambda$ est appelé le Hamiltonien.

On définit la *portée de l'interaction* comme étant la borne supérieure des diamètres des ensembles Λ pour lesquels Φ_Λ n'est pas identiquement nulle. On a également besoin d'une mesure de référence λ sur l'espace des états. On prend classiquement la mesure de Lebesgue comme mesure de référence lorsque l'espace d'états est \mathbb{R} , et la mesure de comptage comme mesure de référence lorsque l'espace d'états est un ensemble fini. Nous définissons à présent la *fonction de partition* Z_Λ : on pose

$$Z_\Lambda(\omega) = \int_{\mathbb{R}^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c})) d\lambda^{\otimes \Lambda}(\eta_\Lambda)$$

Par convention, on pose $\exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c})) = 0$ quand le Hamiltonien n'est pas défini.

On suppose que pour chaque ω de $\tilde{\Omega}$, on a $0 < Z_\Lambda(\omega) < +\infty$. Dès lors, on peut définir pour toute fonction mesurable bornée f et pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$,

$$T_\Lambda f(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c})) f(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) d\lambda^{\otimes \Lambda}(\eta_\Lambda)}{Z_\Lambda(\omega)}.$$

On remarque que $T_\Lambda f(\omega)$ ne dépend que de ω_{Λ^c} . L'opérateur T_Λ peut être considéré comme un noyau de transition au sens large, \mathbb{Z}^d jouant le rôle que joue le temps dans les processus markoviens classiques.

Si une mesure μ sur Ω est telle que $\mu(\tilde{\Omega}) = 1$, on dit que μ est une mesure de Gibbs si pour chaque fonction mesurable bornée f et pour chaque volume fini Λ de \mathbb{Z}^d , on a

$$E_\mu(f | (X_i)_{i \in \Lambda^c}) = T_\Lambda f(X) \quad \mu \text{ p.s.}$$

1.2 Le hamiltonien quadratique

Nous introduisons maintenant les paramètres qui caractérisent un *potentiel quadratique*.

Il s'agit de $J : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une suite paire vérifiant $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |J(i)| < +\infty$ et $h \in \mathbb{R}$. Ces paramètres étant fixés, notre objet est l'étude des champs aléatoires gibbsiens μ associés au potentiel $\Phi^{J,h}$ défini sur Ω par

$$\Phi_\Lambda^{J,h}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} J(0) \omega_i^2 + h \omega_i & \text{si } \Lambda = \{i\} \\ J(i-j) \omega_i \omega_j & \text{if } \Lambda = \{i, j\}, i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Ainsi, le hamiltonien correspondant est égal à

$$H_\Lambda(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i [h + \sum_{j \in \Lambda} J(i-j) \omega_j] + \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c} J(i-j) \omega_i \omega_j. \quad (2)$$

Ici, la mesure de référence λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , On peut définir

$$\tilde{\Omega} = \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |J(i-j) \omega_j| < +\infty\}.$$

Sur $\tilde{\Omega}$, H_Λ est bien défini. Comme il est manifeste qu'il ne serait pas possible de choisir un $\tilde{\Omega}$ plus grand, ce choix semble canonique.

À (J, h) fixé, on note $\mathfrak{G}_{J,h}^{\text{cl}}$ l'ensemble des mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ associées au hamiltonien défini en (2). Si $\mathfrak{G}_{J,h}^{\text{cl}}$ contient plus d'un point, on dit qu'il y a transition de phase. $\mathfrak{G}_{J,h}^{\text{cl}}$ est un ensemble convexe. On appelle phases pures ses points extrémaux. (Pour des résultats généraux sur les mesures de Gibbs, on pourra se rapporter à Georgii [Geo88].)

Remarque Le paramètre h doit être considéré comme un champ – par exemple magnétique – ambiant qui détermine le comportement moyen du système. Dans le modèle d’Ising, ainsi que, comme nous le verrons, dans le cas présent, la compréhension du cas $h = 0$ est la plus essentielle et la plus délicate ; il est parfois possible d’en déduire des résultats pour h non nul. Ainsi, c’est J qui est réellement le paramètre déterminant et qui nous indique de quelle manière les différents sites interagissent, nonobstant la valeur des paramètres extérieurs. Nous serons donc souvent appelé, par commodité de langage, à employer le mot de potentiel pour désigner le seul élément J .

1.3 Le théorème de Dobrushin et Künsh

Quelques notations supplémentaires sont nécessaires pour introduire les propositions 1 et 2 simultanément obtenues par Dobrushin[Dob80] et Künsh[Kün80], et qui sont les bases de notre travail .

Pour $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$ et $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$z^n = \prod_{i=1}^n z_i^{n_i} \text{ et } |n| = \sum_{i=1}^d |n_i|$$

On définit le tore \mathbb{U} par

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}^d, \forall i \in [1..d] |z_i| = 1\}$$

Il convient d’introduire \hat{J} , la transformée de Fourier de J , définie sur une partie de \mathbb{C}^d par

$$\hat{J}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) z^n \quad (3)$$

chaque fois que la série considérée est absolument convergente. Comme J est sommable, il est clair que \hat{J} définit toujours une fonction continue sur \mathbb{U} .

Proposition 1. *Les paramètres (J, h) étant fixés, l’ensemble $\mathfrak{G}_{J,h}^{cl}$ des mesures de Gibbs est non vide si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+$
2. $\int_{\mathbb{U}} \frac{1}{\hat{J}(z)} dz < \infty$, où dz est la mesure de Haar normalisée sur le tore \mathbb{U} .
3. $M_h^J = \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} : \forall k \in \mathbb{Z}^d, \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) u_{k+n} = h\} \neq \emptyset$.

Proposition 2. *Sous les hypothèses de la proposition 1, les phases pures sont les mesures gaussiennes μ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ de covariance $(i, j) \mapsto \int_{\mathbb{U}} \frac{z^{i-j}}{\hat{J}(z)} dz$ et dont le vecteur espérance $(E_\mu(X_n))_{n \in \mathbb{Z}^d}$ appartient à M_h^J .*

(On dit alors que $\frac{1}{\hat{J}}$ est la densité spectrale de la phase pure.)

Remarque La théorie générale des champs gibbsiens nous enseigne que $\mathfrak{G}_{J,h}^{\text{cl}}$ est un simplexe de Choquet, ce qui veut dire que chaque $\mu \in \mathfrak{G}_{J,h}^{\text{cl}}$ peut être représenté comme un mélange de phases pures. La proposition 2 implique alors qu'en cas d'existence, les mesures de Gibbs associées à cette interaction sont exactement les mesures qui peuvent s'écrire comme la convolution de la mesure gaussienne centrée dont la covariance est donnée dans la proposition 2 avec n'importe quelle mesure dont le support est inclus dans M_h^J . Ainsi, l'absence de transition de phase est équivalent au fait que M_h^J soit un singleton, ou par linéarité, que M_0^J soit réduit à $\{0\}$ – comme M_0^J est un espace vectoriel, on note 0 la suite nulle.

1.4 Théorèmes de structure : le cas classique et le cas quantique

1.4.1 Le cas classique

Les résultats commentés ici correspondent à l'article [1].

Mis à part le cas d'une interaction à portée finie élucidé par Künisch (voir [Kün80]) quand le réseau est \mathbb{Z} , il est très difficile de donner une description complète de M_0^J . Ainsi, il est naturel de considérer – et cela a un sens physique – uniquement les suites de M_0^J qui ne croissent pas trop vite. Par exemple, Dobrushin considère dans [Dob80] la classe des suites à croissance lente. On considère ici plusieurs classes de potentiels, chaque classe de potentiel étant associée à un espace vectoriel normé qui est inclus dans les M_0^J correspondant à la classe. Précisément, nous établissons des résultats pour des classes générales de potentiels à croissance « sous-exponentielle », appelées classes de type \mathcal{E} . Voyons de quoi il s'agit. On dit qu'une suite $a =: (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ est de type \mathcal{E} si elle vérifie :

- $a_0 = 1$
- $(a_n)_n$ est croissante au sens large
- (a_n) est sous-multiplicative, *i.e.* $\forall n, p \in \mathbb{N} \ a_{n+p} \leq a_n a_p$.

Définissons maintenant l'exposant caractéristique r_a d'une suite a de type \mathcal{E} par

$$r_a = \inf_{n \geq 1} a_n^{1/n}.$$

On a toujours $1 \leq r_a < +\infty$.

Concrètement, on utilisera fréquemment un $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui s'écrit

- $a_n = \alpha^n$, avec $\alpha > 1$ – on parle alors de poids exponentiel et on a $r_a = \alpha$

- ou $a_n = (1+n)^p$, avec $p > 0$ – on parle alors de poids polynomial et on a alors $r_a = 1$.

On pose, pour a de type \mathcal{E}

$$A_a = \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}, \|u\|_{A_a} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u_n| a_{|n|} < +\infty\} \quad (4)$$

A_a sera l'espace où vit le potentiel. Pour $\alpha > 1$, on note également \mathcal{A}_α l'espace A_a correspondant à la suite $a_n = \alpha^n$, tandis que pour $p > 0$, on notera simplement A_p l'espace A_a correspondant à la suite $a_n = (1+n)^p$

$$B_a = \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}, \|u\|_{B_a} = \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{|u_n|}{a_{|n|}} < +\infty\} \quad (5)$$

On va considérer l'intersection de M_0^J et B_a .

- Étant donnée une suite $(a_n)_n$ de type \mathcal{E} , on définit

$$\mathcal{P}_a(\Omega) = \{\mu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mu(B_a) = 1\}.$$

- On a besoin d'introduire la couronne

$$\mathbb{U}_r = \{z \in \mathbb{C}^d, \forall i \in [1..d], \frac{1}{r} \leq |z_i| \leq r\} \text{ avec } r \geq 1.$$

(Remarquons que $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}$.)

On remarque alors que

- A_a opère sur B_a par convolution.
- Muni de la convolution, A_a est une algèbre de Banach.

La détermination de l'ensemble $G(A_a)$ des éléments inversibles de cette algèbre est alors une étape naturelle, réalisée à l'aide de la théorie de Gelfand. En réalité, A_a est une algèbre semi-simple dont les caractères s'identifient avec les fonctions $\chi_z : J \mapsto \hat{J}(z)$, où z décrit \mathbb{U}_{r_a} . On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $J \in A_a$ où a est une suite de type \mathcal{E} vérifiant*

$$\exists K > 0, \forall n \geq 2 \quad a_n \geq K\sqrt{\ln n} \quad (6)$$

On suppose que $\hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+$.

Alors, on a équivalence entre

1. $M_0^J \cap B_a = \{0\}$
2. $J \in G(A_a)$
3. \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}_{r_a} .

$$4. |\mathfrak{G}_{J,h}^{cl} \cap \mathcal{P}_\alpha(\Omega)| = 1.$$

Ainsi, pour savoir si il y a existence et unicité d'une mesure de Gibbs à support dans B_a , il suffit de regarder si \hat{J} s'annule sur la couronne \mathbb{U}_{r_a} – rappelons que pour des poids polynomiaux, cette couronne est réduite à un tore.

Comme les interactions telles qu'il y a unicité de la mesure de Gibbs s'identifient à un ensemble d'éléments inversibles d'une algèbre de Banach, il est assez naturel de se demander si on peut passer continûment de l'une de ces interactions à l'autre – on a par exemple en mémoire que $\text{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe. En fait, nous prouvons que, sous des hypothèses convenables de symétrie, un potentiel J pour lequel il y a unicité peut être continûment perturbé jusqu'à ce qu'il y ait disparition de toute interaction par paire (*i.e* jusqu'à ce que $J(k) = 0$ pour tout $k \neq 0$) et de manière telle que durant cette perturbation l'unicité de la mesure de Gibbs correspondante soit préservée.

Soit Γ le groupe engendré par les symétries orthogonales d'axes les vecteurs de base e_i , $1 \leq i \leq d$. Ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$. On dit qu'un potentiel J est Γ -invariant s'il vérifie

$$\forall \Theta \in \Gamma \quad J \circ \Theta = J \tag{7}$$

Rappelons qu'un potentiel est nécessairement pair. Ainsi, il est aisé de constater que pour $d = 1$, tout potentiel est Γ -invariant. Dans la plupart des cas, le potentiel a une symétrie naturelle qui le rend Γ -invariant. (Par exemple, si $J(n)$ dépend uniquement d'une norme ℓ^p de n .)

Soit $\alpha > 1$. On note \mathcal{S}_α l'ensemble des potentiels J qui appartiennent à \mathcal{A}_α et sont Γ -invariants, soit

$$\mathcal{S}_\alpha = \{J \in \mathcal{A}_\alpha, \forall \Theta \in \Gamma \quad J \circ \Theta = J\}.$$

On pose

$$\mathcal{S}_\alpha^+ = \{J \in \mathcal{S}_\alpha \quad , \quad \hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } 0 \notin \hat{J}(\mathbb{U}_\alpha)\}.$$

D'après le théorème 1, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{S}_\alpha^+ = \{J \in \mathcal{S}_\alpha \quad | \quad |\mathfrak{G}_{J,h}^{cl} \cap \mathcal{P}_\alpha(\Omega)| = 1\}.$$

On munit cet ensemble de la topologie induite par celle de \mathcal{A}_α .

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 2. \mathcal{S}_α^+ est un ouvert connexe de \mathcal{S}_α .

Donnons une petite idée de la preuve. Si l'on montre que tout élément de \mathcal{S}_α^+ est l'exponentielle d'un élément de \mathcal{A}_α , on aura terminé car l'application

$t \mapsto \exp(tA)$ relie continûment I à $t \mapsto \exp(A)$ en restant dans \mathcal{S}_α^+ . Il faut donc construire un logarithme à tout élément J de \mathcal{S}_α^+ . L'idée naturelle est de construire $\ln \hat{J}$, puis de montrer que cette fonction correspond à un élément de \mathcal{A}_α . Ici on se heurte à un écueil sérieux, car la couronne \mathbb{U}_α sur laquelle est définie \hat{J} n'est pas simplement connexe. C'est ici qu'intervient l'hypothèse de symétrie, qui permettra de factoriser l'application \hat{J} en envoyant \mathbb{U}_α sur un ensemble simplement connexe (en fait un produit d'ellipses) où la prise de logarithme est licite.

Une fois que l'on a constaté qu'il y avait transition de phase lorsque \hat{J} s'annulait sur \mathbb{U}_α , il est assez naturel de souhaiter savoir quelles informations peuvent donner les zéros de \hat{J} sur la structure de l'ensemble des mesures de Gibbs, ainsi nous souhaitons déterminer la taille de l'ensemble des mesures de Gibbs vérifiant les conditions de support que nous nous sommes imposées. Dans un contexte discret, il peut être intéressant de dénombrer les phases pures : on sait par exemple que le modèle d'Ising en dimension $d = 2$ possède exactement 2 phases pures. Ici, un tel dénombrement n'est pas pertinent : les phases pures étant en bijection avec l'espace affine M_h^J , l'ensemble des phases pures est vide ou a la puissance du continu. Un paramètre raisonnable peut être la dimension de cet espace.

Cependant, il est bien connu que l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe de plusieurs variables n'est pas formé de points isolés, contrairement à ce qui se passe en dimension 1 : cela fait beaucoup trop de zéros pour qu'une manière pertinente de les quantifier apparaisse naturellement. En revanche, en dimension un, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit J une interaction non dégénérée sur \mathbb{Z} i.e. $\exists k \neq 0 J(k) \neq 0$. On suppose que $J \in \mathcal{A}_\alpha$, pour $\alpha > 1$. Si de plus, \hat{J} ne s'annule pas sur le cercle $|z| = \alpha$, ou, ce qui est équivalent, sur le cercle $|z| = \frac{1}{\alpha}$, alors $M_0^J \cap B_\alpha$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont la dimension est exactement le nombre de racines de \hat{J} dans Ω_α comptées avec leur ordre de multiplicité.*

1.4.2 Modélisation quantique des oscillateurs harmoniques

Les résultats commentés ici correspondent à l'article [5].

Les mesures de Gibbs sur le réseau \mathbb{Z}^d associées à des interactions quadratiques modélisent des systèmes infinis d'oscillateurs couplés attachés aux points du réseau dans un cadre de mécanique statistique classique. Ayant étudié lors de la thèse le cas classique, il nous a paru naturel de nous intéresser à l'étude approfondie des mesures gaussiennes en mécanique statistique quantique. Une première difficulté est de définir les états de Gibbs. Usuellement,

on définit les états de Gibbs sur un réseau comme limites de fonctionnelles sur l'algèbre des observables, *i.e.* des formes quadratiques d'un espace de Hilbert – voir par exemple Kondratiev et Sokol [KS94]. Malheureusement, cette approche diffère de l'approche D.L.R. faite dans le cas classique. En 1975 [AHK75], Albeverio et Hoegh-Krohn ont introduit une approche *euclidienne* des états quantiques permettant de définir les mesures de Gibbs quantiques à température β^{-1} comme les mesures sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}$ vérifiant l'équation D.L.R. pour un certain hamiltonien déterminé par l'interaction. L'avantage majeur de l'approche euclidienne pour la construction des états quantiques est que cela permet de bénéficier de toute une série d'outils issus de la mécanique statistique classique : les développements en amas, le contrôle des corrélations, des critères d'unicité à la Dobrushin, les méthodes de borne infrarouge...

Dans le cas que nous étudions, le hamiltonien s'écrit formellement comme suit :

$$H(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} -\frac{1}{2} \Delta \omega_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle h, \omega_k \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^d} U(k-l) \langle \omega_k, \omega_l \rangle. \quad (8)$$

où $\omega \in L^2(\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z}, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}$, h est un élément fixé de $L^2(\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z}, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Comme dans le cas classique, le potentiel U est défini par une suite réelle paire indexée par \mathbb{Z}^d .

De manière rigoureuse, on considère les mesures de Gibbs correspondant aux hamiltoniens à volume fini Λ

$$H_\Lambda(\omega) = \sum_{i \in \Lambda} \langle h, \omega_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \Lambda, i \neq j} U(i-j) \langle \omega_i, \omega_j \rangle + \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c} U(i-j) \langle \omega_i, \omega_j \rangle. \quad (9)$$

La mesure de référence est alors la mesure gaussienne centrée sur $L^2(\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z})$ admettant $(-\Delta_\beta + U(0)\text{Id})^{-1}$ comme covariance, où Δ_β désigne le laplacien sur $L^2(\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z})$.

L'analogie classique de ce hamiltonien quantique est le hamiltonien sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ formellement représenté par

$$H^{\text{cl}}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h x_k + \frac{1}{2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^d} U(k-l) x_k x_l, \quad (10)$$

où $h \in \mathbb{R}$ et U est une suite paire réelle sommable.

En réalité, on se place dans un premier temps sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} abstrait et c'est sur cet espace qu'on donne une description

explicite de l'ensemble des mesures de Gibbs associées à une interaction quadratique donnée par (9), la mesure de référence étant une mesure gaussienne sur \mathcal{H} dont la covariance est donnée par un opérateur à trace S . Cela permet de mettre en lumière lesquels de nos résultats proviennent de la structure hilbertienne sous-jacente. Ensuite, on déduit aisément la description des états de Gibbs quantiques dans l'approche euclidienne évoquée plus haut en prenant $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}/\beta\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ et $S = (-\Delta_\beta + U(0)\text{Id})^{-1}$. Toutefois, cette description théorique peut être considérée comme incomplète dans une optique de physique mathématique, où il est raisonnable de se restreindre à des mesures ne chargeant que des suites à croissance spatiale plus ou moins modérée. Ainsi, pour $p > 0$, on définit

$$B_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \quad \|x\|_{B_p} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{|x_k|}{(1 + |k|)^p} < +\infty\},$$

$$\mathbb{B}_p = \{\omega \in \mathcal{H}^{\mathbb{Z}^d}, \quad \|\omega\|_{\mathbb{B}_p} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\|\omega_k\|}{(1 + |k|)^p} < +\infty\}$$

et

$$A_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}; \|x\|_{A_p} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 + |k|)^p |x_k| < +\infty\}.$$

Nous décrivons ainsi les états de Gibbs quantiques dont le support est dans \mathbb{B}_p . En particulier, on est alors en mesure d'exhiber une bijection entre les états de Gibbs du modèle quantique et les mesures de Gibbs pour le modèle classique.

Précisément, supposons que $U \in A_p$. On définit J par $J(0) = 0$ et $J(k) = U(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Soit

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_0 : \mathcal{H}^{\mathbb{Z}^d} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \\ \omega &\mapsto (\langle \omega_i, e_0 \rangle)_{i \in \mathbb{Z}^d} = \left(\frac{1}{\beta} \int_{[0, \beta)} \omega_i(t) dt \right)_{i \in \mathbb{Z}^d}, \end{aligned}$$

qui associe à chaque état du système quantique sa position moyenne dans le temps.

Alors l'application

$$\mu \mapsto \tilde{\pi}_0 \mu$$

réalise une correspondance bijective entre l'ensemble des états de Gibbs quantiques pour le modèle quantique

$$\{\mu \in \mathfrak{G}_{J,h}^S; \mu(\mathbb{B}_p) = 1\}$$

et l'ensemble des mesures de Gibbs pour le modèle classique

$$\{\nu \in \mathfrak{G}_{U, \langle h, e_0 \rangle}^{\text{cl}}; \nu(B_p) = 1\}.$$

Ainsi, la cardinalité de la transition de phase dans le modèle quantique est complètement déterminée par la cardinalité de la transition de phase dans le modèle classique associé décrivant la position moyenne en temps. Il n'y a donc aucune pathologie supplémentaire induite par la description quantique.

En particulier, il y a simultanément unicité de la mesure de Gibbs dans les deux modèles, *i.e.* on a équivalence entre

1. $|\{\mu \in \mathfrak{G}_{J,h}^S; \mu(\mathbb{B}_p) = 1\}| = 1$
2. $|\{\nu \in \mathfrak{G}_{U,(h,e_0)}^{\text{cl}}; \nu(B_p) = 1\}| = 1$
3. $\hat{J} > 0$ on \mathbb{U} .

Par ailleurs, on peut remarquer qu'en chaque site et pour chaque état de Gibbs, les trajectoires ont presque sûrement la même régularité qu'une trajectoire du mouvement brownien.

1.5 Dynamiques stochastiques associées aux hamiltoniens quadratiques

Les résultats commentés ici correspondent à l'article [3].

On peut souvent associer à l'étude de mesures de Gibbs dont le support est \mathbb{R} l'étude de systèmes infinis d'équations différentielles stochastiques de type gradient dont elles sont les mesures stationnaires. Pour des interactions par paires, la forme générique de tels systèmes est la suivante :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \forall t \geq 0 \quad X_t^i = \zeta^i + W_t^i - \frac{1}{2} \int_0^t [\phi'_i(X_s^i) + \sum_{j \neq i} \phi'_{i,j}(X_s^i, X_s^j)] ds \quad (11)$$

Ici, comme les interactions sont quadratiques, la dérive est linéaire, ce qui fait que le système différentiel stochastique peut s'écrire

$$X_t^i = \zeta^i + W_t^i - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} J(i,k) X_s^k ds \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{R}^+ \quad (12)$$

où ζ est un vecteur aléatoire indépendant du brownien W_t , représentant la position à l'instant 0. Notons

$$B_{p,0} = \{x \in B_p, \lim_{|k| \rightarrow +\infty} \frac{|x_k|}{(1+|k|)^p} = 0\}.$$

Lorsque ζ est dans $B_{p,0}$ et J dans A_p , l'équation peut se réécrire sous la forme

$$X_t = \zeta + W_t - \frac{1}{2} \int_0^t J X_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (13)$$

En fait cette équation intégrale peut être résolue ω par ω dans l'espace de Banach $B_{p,0}$, on peut même obtenir une expression explicite de la solution : on a

$$X_t = e^{-t\frac{J}{2}}X_0 + W_t - \frac{J}{2} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s ds \quad (14)$$

Notons que le premier terme est la solution de l'équation déterministe

$$X_t = \zeta - \frac{1}{2} \int_0^t JX_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (15)$$

et qu'il lui est ajouté la solution de l'équation stochastique

$$X_t = W_t - \frac{1}{2} \int_0^t JX_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (16)$$

L'apparition du flot $t \mapsto \exp(-tJ/2)\zeta$ laisse entrevoir à nouveau l'intérêt que l'on a à étudier les propriétés de l'opérateur J , en particulier son spectre lorsqu'on le considère comme un élément de l'algèbre de Banach A_p .

1.5.1 Comportement asymptotique en temps

Lorsque le potentiel J est dans A_p , on montre que l'unicité d'une mesure de Gibbs à support dans $B_{p,0}$ – ou de manière équivalente l'hypothèse $\hat{J} > 0$ sur \mathbb{U} – entraîne l'ergodicité du système, *i.e.* la convergence vers l'unique mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{\hat{J}}$ quelle que soit la condition initiale dans $B_{p,0}$. La convergence se fait alors à vitesse exponentielle.

En revanche, en cas de transition de phase, on exhibe pour chaque phase pure un ensemble de conditions initiales pour lesquelles le système converge vers la phase : il s'agit de suites dont le support spectral ne rencontre pas les éventuels zéros de \hat{J} – à cet effet, on identifie les suites prises comme conditions initiales avec des éléments du dual de l'algèbre de Banach commutative régulière et semi-simple A_p .

Lorsque \hat{J} a un unique zéro d'ordre $d_0 < d$ sur \mathbb{U} , on montre que, partant d'une condition initiale nulle, le système converge vers la mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{\hat{J}}$ avec une vitesse de convergence qui est exactement de l'ordre de $\frac{1}{t^{d/d_0}}$.

1.5.2 Étude des mesures invariantes

Depuis les travaux pionniers de Doss et Royer ([Roy79],[DR79]), l'identité entre mesures de Gibbs et mesures réversibles de la diffusion gradient associée

est connue dans un cadre très général. Une conjecture célèbre de la mécanique statistique est l'identité entre mesures de Gibbs et mesures invariantes de la diffusion gradient associée. Pour l'heure, seuls quelques résultats sporadiques ont pu être démontrés : Holley et Stroock [HS81] ont étudié une certaine classe de processus de diffusion symétriques sur un produit dénombrable de tores et Fritz [Fri82] a obtenu des résultats en dimension $d = 1$ ou $d = 2$ pour des mesures invariantes par translation ou associées à des interactions superstables, sans intersection avec le cas gaussien. Les méthodes employées dans ces articles sont inspirées des techniques entropiques utilisées par Holley et Stroock dans les modèles discrets de type Ising.

Les techniques employées ici sont différentes. Tirant parti de la linéarité de l'équation, on se ramène à l'étude des mesures invariantes sous le flot exponentiel (déterministe) $\mu \mapsto (e^{tJ}\mu)_{t \geq 0}$: on doit montrer que le support d'une mesure invariante sous ce flot est inclus dans le noyau de J . Une clef de la preuve est le théorème du retour de Poincaré : si x est dans le support d'une mesure invariante, alors le théorème du retour permet de montrer simplement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$ avec

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\exp(nJ)x_\varepsilon - x_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon. \quad (17)$$

Intuitivement, l'idée est alors la suivante : si l'on montre qu'il existe une suite $(O_t)_{t \geq 0}$ avec $J = O_t \cdot (\exp(tJ) - I)$ et $M = \sup_{t \geq 1} \|O_t\| < +\infty$, Alors on aura

$$\|Jx\|_{B_p} \leq (2M + \|J\|_{A_p})\varepsilon,$$

d'où $Jx = 0$. En fait, on ne parvient pas à montrer que la suite d'opérateurs O_t est bornée, mais, sous des hypothèses de décroissance sur J , on parvient² à montrer que pour un certain entier naturel k non nul, la suite $(J^{2k-1}O_t)_{t \geq 1}$ est bornée, ce qui nous conduit à $J^{2k}x = 0$. Ainsi le support de μ est inclus dans $\ker J^{2k}$, soit $\mu(\ker J^{2k}) = 1$. Maintenant, pour tout $N \geq 1$, on peut grâce au théorème du retour de Poincaré, construire un ensemble $C_N \subset \ker J^{2k} \cap B(0, N)$ avec $\mu(C_N) = \mu(\ker J^{2k} \cap B(0, N))$ et tel que l'orbite de chaque point de C_N revienne une infinité de fois dans C_N . Si l'on pose $C = \cup_{N \geq 1} C_N$, il est aisé de voir que $\mu(C) = 1$. Mais en tout point x de C , $\exp(nJ)x$ est un polynôme en n qui ne peut admettre de sous-suite bornée que si $Jx = 0$, donc $C \subset \ker J$, ce qui achève la preuve.

²au terme de calculs laborieux...

1.6 Processus gaussiens admettant une représentation intégrale

L'élaboration des travaux précédents nous a amené à nous poser des questions sur le comportement asymptotique des processus gaussiens que nous considérons. En effet, on a vu qu'il était important de déterminer des espaces vectoriels normés raisonnables pour y faire vivre les processus. Comme on l'a vu précédemment, les mesures de Gibbs gaussiennes admettent une densité spectrale, ce qui implique, grâce à un résultat de base de la théorie des processus stationnaires, qu'ils admettent une représentation sous forme de moyenne mobile. De fil en aiguille, cela nous a amené à démontrer quelques résultats généraux sur les processus gaussiens admettant une représentation intégrale. Nous allons ici évoquer assez brièvement ces résultats [2] qui sont un peu en marge de l'orientation "mécanique statistique" que nous avons voulu donner à ce mémoire.

Le but du travail présenté ici est donc l'étude asymptotique de processus gaussiens stationnaires à trajectoires continues et admettant une représentation intégrale. Plus précisément, on s'intéresse au comportement de $a(t)X_t$, où a est une fonction de limite nulle et X un tel processus.

Le centre de l'article est constitué par le théorème abstrait suivant :

Théorème 4. *Soit (E, \mathbf{d}) un espace métrique, ζ un bruit blanc associé à la mesure ν sur E et T une partie dénombrable de E . On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. T n'est pas borné pour la distance \mathbf{d} .
- 2.

$$\forall s \in [0, +\infty) \quad \mathcal{C}(s) = \sup_{x \in T} \text{Card}(B(x, s) \cap T) < +\infty, \quad (18)$$

où

$$B(x, r) = \{y \in G; \mathbf{d}(x, y) \leq r\}.$$

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien s'écrivant sous la forme :

$$X_t = \int_E m_t(u) d\zeta(u), \quad m_t \in L^2(E, \mathcal{A}, \nu). \quad (19)$$

On suppose que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{t \in T} \frac{\int_{E \setminus B(t, r)} m_t^2(u) d\nu(u)}{\int_E m_t^2(u) d\nu(u)} = 0 \quad (20)$$

Alors, si l'on note $\sigma_k^2 = \mathbb{E}X_k^2 = \int_E m_k^2(u) d\nu(u)$ la variance du processus, la formule suivante est vérifiée pour toute suite (a_k) à termes positifs telle que

$a_k \sigma_k$ ait une limite nulle à l'infini :

$$\overline{\lim}_{k \in T; \mathbf{d}(x_0, k) \rightarrow +\infty} a_k X_k = \inf \left\{ \beta \geq 0, \sum_{k \in T} \sigma_k a_k \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma_k^2 a_k^2}\right) < +\infty \right\}. \quad p.s. \quad (21)$$

Voyons comment s'énonce le théorème dans le cas simple d'un processus gaussien stationnaire sur \mathbb{Z}^d .

Théorème 5. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un processus gaussien stationnaire centré admettant une densité spectrale. Alors, si $\sigma^2 > 0$ désigne la variance du processus, on a pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ à termes strictement positifs de limite nulle*

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n = \inf \left\{ \beta \geq 0, \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2 a_n^2}\right) < +\infty \right\}. \quad p.s. \quad (22)$$

En particulier

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{\ln |n|}} = \sqrt{2d}\sigma \quad p.s. \quad (23)$$

L'hypothèse de la représentation sous forme de moyenne mobile faite ici diffère franchement des hypothèses faites usuellement dans la littérature, qui portent plutôt sur la vitesse de décroissance de la covariance – voir par exemple Pathak et Qualls [PQ73] ou Albin [Alb94]. On trouve ainsi dans [2] des exemples montrant que nos hypothèses s'appliquent dans des cas où la décroissance de la covariance à l'infini est trop lente pour pouvoir appliquer les résultats déjà existants.

On donne ensuite quelques applications du théorème 4 à des champs classiques, par exemple le mouvement brownien fractionnaire et le drap brownien. Enfin, on étudie des processus stationnaires $(X_t)_t$ à valeurs dans \mathbb{R}^n admettant une densité spectrale et l'on détermine l'ensemble des valeurs d'adhérence de $a(t)X_t$: sous des hypothèses convenables, on trouve un ellipsoïde dont on donne l'équation. On va se contenter ici d'en donner une application amusante.

Corollaire 1. *Soit σ et B deux matrices $n \times n$ symétriques de type positif qui commutent entre elles. Soit X_t le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé à σ et B , c'est à dire l'unique solution de l'équation différentielle stochastique :*

$$\begin{cases} dX_t = -BX_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 = S_0 \end{cases}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un brownien n -dimensionnel et S_0 une variable aléatoire indépendante de W . Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction de limite nulle en l'infini telle que

$$\sup\{(a(k+t) - a(k))^+; t \in [0, 1]\} = o(a(k)).$$

On suppose que

$$M = \inf\{\beta \geq 0, \sum_{k=1}^{+\infty} a(k) \exp(-\frac{\beta^2}{2a(k)^2}) < +\infty\} < +\infty \quad (24)$$

Alors, pour presque tout ω , on a

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\{a(t)X_t(\omega) : t \in X \text{ and } \|t\| \geq n\}} = \{\sigma B^{-1/2}x; \|x\|_2 \leq M\}.$$

En particulier, en prenant

$$a(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2 \ln t}},$$

on retrouve le résultat d'Antonini [Ant91] : l'ensemble des valeurs d'adhérence de

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2 \ln t}} X_t$$

est un ellipsoïde de \mathbb{R}^n d'équation

$$\langle Bx, x \rangle \leq 1.$$

2 Percolation et mesures de Gibbs

2.1 Transition de percolation pour des interactions quadratiques perturbées

Les résultats commentés ici correspondent à l'article [6].

Expliquons d'abord ce que l'on appelle la transition de percolation : on considère un champ aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ et on se demande si l'ensemble

$$A_h = \{k \in \mathbb{Z}^d; X_k \geq h\}$$

(ou encore l'ensemble $A_h = \{k \in \mathbb{Z}^d; X_k \leq h\}$) a au moins une composante connexe infinie. En fait, notre but principal est de démontrer l'existence d'un niveau critique non trivial : on veut que

$$h_c = \sup\{h \in \mathbb{R}; P(A_h \text{ a un cluster infini}) > 0\}$$

soit à l'intérieur du support commun des variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$. On dit alors qu'il y a transition de percolation – on dit parfois transition de phase, mais nous préférons éviter ici cette expression qui peut porter à confusion dans un contexte gibbsien.

Par exemple, lorsque les $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, h_c est la probabilité critique pour la percolation Bernoulli par site : $h_c = p_c^{\text{site}}(\mathbb{Z}^d)$.

Molchanov et Stepanov furent les premiers à considérer des problèmes de cette sorte dans le cas où les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ sont dépendantes – voir [MS83a, MS83b, MS86]. En particulier, ils ont remarqué que si on peut montrer que

$$P(\forall k \in A; X_k \geq h) = O(e^{-|A|f(h)}),$$

où f est une fonction qui a une limite infinie en l'infini, alors les arguments de Peierls classiques permettent de démontrer que pour h suffisamment grand, l'ensemble des sites k tels que $X_k \geq h$ ne percolent pas, et qu'à l'inverse, les sites k tels que $X_k \leq h$ percolent.

Ainsi, dans le cas où le support des lois est \mathbb{R} , pour obtenir une transition de percolation, le problème est obtenir une inégalité de ce type pour les champs $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ et $(-X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$

Ils traitent ainsi un certain nombre d'exemples, en particulier le cas des champs stationnaires gaussiens ayant une densité spectrale bornée.

Ici nous nous intéressons à des niveaux déterminés non pas par le niveau d'un champ stationnaire gaussien, mais par le niveau de sa valeur absolue.

En fait, ces deux manières de générer des champs à valeur dans $\{0, 1\}$ à partir d'un champ gaussien sont utilisées en physique pour modéliser des matériaux composites ; on note que ces deux types de champ correspondent à des matériaux composites très différents – voir par exemple Roberts et Knackstedt [RK96] ou Roberts et Teubner [RT95].

2.1.1 Le cas gaussien pur

Dans un premier temps, nous avons montré que les champs gaussiens faiblement dépendants (précisément ceux dont la susceptibilité est finie) vérifient le critère de Molchanov et Stepanov rappelé plus haut.

Bien sûr, il existe des champs gaussiens fortement dépendants pour lesquels cette hypothèse n'est pas vérifiée, on pense en particulier au cas où le champ gaussien est celui d'une mesure de Gibbs gaussienne en situation de transition de phase.

Afin de nous libérer de cette hypothèse, nous avons alors introduit un concept de percolation suivant des chemins raisonnables ; on a ainsi prouvé un phénomène de transition de percolation dans la classe des chemins raisonnables pour des champs gaussiens fortement dépendants. Précisons ce que l'on entend par chemin raisonnable : pour $s \in [1, d]$, soit

$$\mathcal{M}_{s,K} = \left\{ A \subset \mathbb{Z}^d \quad \sup_{x \in A} \sup_{r \geq 1} \frac{|A \cap B(x, r)|}{(2r + 1)^s} \leq K \right\}, \quad (25)$$

où

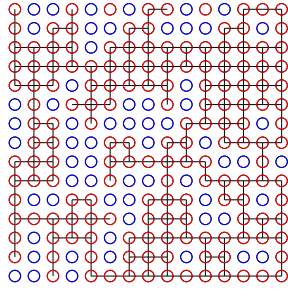
$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{Z}^d; \|x - y\|_\infty \leq r\}.$$

Les éléments de $\mathcal{M}_{s,K}$ sont dits (s, K) - raisonnables. De même, on dit qu'un chemin est (s, K) -raisonnable si son support est un ensemble (s, K) -raisonnable.

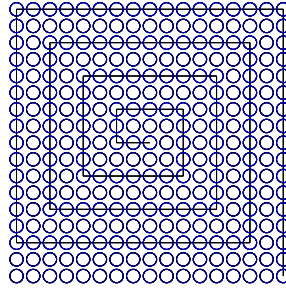
Bien sûr, toute partie de \mathbb{Z}^d est dans $\mathcal{M}_{d,1}$, donc la percolation $(d, 1)$ -raisonnable, c'est la percolation usuelle.

Intuitivement, s représente la dimension de l'espace que le chemin peut occuper et K/s représente une borne supérieure pour la densité du chemin dans un espace de dimension s .

Les dessins ci-dessous tentent de donner une impression de ce qu'est un chemin raisonnable (ou un chemin déraisonnable) sur \mathbb{Z}^2 , avec $s = 1$.



raisonnable



déraisonnable

Sur le dessin de gauche, il n'est pas difficile d'extraire du grand cluster un chemin assez droit joignant le centre de l'image à son bord. Il est clair qu'un tel chemin est très loin de remplir une portion du plan : il est légitime de le déclarer raisonnable. Le dessin de droite montre un long chemin ayant l'apparence d'une spirale. C'est manifestement le seul chemin du centre de l'image jusqu'à son bord. Dans ce cas, le chemin ressemble à une pelote de laine, remplissant une portion du plan, donc pas du tout un chemin raisonnable.

Remarquons que si A est le support d'un chemin sur le graphe orienté $\vec{\mathbb{E}}^d$, alors $A \in \mathcal{M}_{1,d}$. Ceci permet en particulier d'obtenir l'existence de transition de percolation pour la percolation orientée sur \mathbb{Z}^d , même dans des cas où la dépendance est forte.

Nous avons donc introduit un concept de percolation raisonnable qui consiste à éviter une percolation qui se ferait en prenant le chemin des écoliers. Mais bien sûr, on a envie de penser que les géodésiques doivent ressembler à des lignes droites, et que donc s'il n'y a pas de percolation raisonnable, c'est qu'il n'y a pas de percolation du tout ! L'étude de l'allure des plus courts chemins (c'est à dire des géodésiques) en théorie de la percolation – déjà dans le cas de la percolation Bernoulli – est donc un problème naturel qu'il serait intéressant d'approfondir. Nous reparlerons de ces problèmes dans la section 3 – sans toutefois épuiser le sujet.

2.1.2 Perturbations d'interactions quadratiques

Parmi les motivations pour une étude approfondie des mesures de Gibbs gaussiennes, nous avons mentionné l'idée que celles-ci pourraient servir de tête de pont pour l'étude d'interactions plus générales. Un des buts de ce travail était de mettre cette idée à l'épreuve des faits. Concrètement, on a considéré des mesures de Gibbs dont le hamiltonien est obtenu en rajoutant une contribution complémentaire au terme d'interaction propre d'un Hamil-

tonien quadratique : ainsi on considère le potentiel $\Phi^{J,V}$ défini par

$$\Phi_{\Lambda}^{J,V}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}(J(0)\omega_i^2 + V(\omega_i)) & \text{si } \Lambda = \{i\} \\ J(i-j)\omega_i\omega_j & \text{si } \Lambda = \{i, j\}, i \neq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, le hamiltonien correspondant est égal à

$$H_{\Lambda}^{J,V}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} V(\omega_i) + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \Lambda} J(i-j)\omega_i\omega_j + \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c} J(i-j)\omega_i\omega_j. \quad (26)$$

On est amené à introduire un certain nombre d'hypothèses qui seront alternativement utilisées

(H₁) V est paire.

(H₂) $\hat{J} \geq 0$ et $\frac{1}{j}$ est intégrable par rapport à la mesure de Haar sur \mathbb{U} .

(H₃) V est croissante sur $[0, +\infty)$.

(H₄) Il existe $A, B \geq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \quad V(x) \leq Ax^2 + B$.

(H₅) *Ferromagnétisme* $\forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}; J(k) \leq 0$.

(H₆) *Superstabilité* $\gamma = \inf\{\hat{J}(z); z \in \mathbb{U}\} > 0$.

(H₇) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup\{|c_k|; \|k\| \geq n\} < +\infty$, avec $c_k = \int_{\mathbb{U}} \frac{z^{-k}}{\hat{J}(z)} dz$.

Il faut se souvenir que dans le cas d'un espace d'états continu, l'existence d'une mesure de Gibbs est un problème en soi. Les hypothèses (H₁), (H₃), (H₅) sont destinées à faire bénéficier l'interaction quadratique perturbée de la propriété d'existence de la mesure de Gibbs dont jouit l'interaction quadratique vérifiant l'hypothèse (H₂). En particulier, on montre que si (H₁), (H₂), (H₃), (H₅) sont vérifiées, alors la suite des mesures de Gibbs fini-dimensionnelles avec condition au bord nulle est tendue ; ses valeurs d'adhérence sont des mesures de Gibbs pour le hamiltonien perturbé.

Concernant la transition de percolation elle-même, plusieurs résultats sont montrés ; on va ici se contenter d'en énoncer un :

Théorème 6. *On suppose que (H₁), (H₂), (H₃), (H₄), (H₅), (H₇) sont vérifiées.*

Soit P une mesure de Gibbs obtenue par le procédé décrit ci-dessus ; on définit

$$h_+ = \inf\{a \geq 0; P(\text{il y a percolation orientée au dessus de } a) = 0\}.$$

Alors,

$$- 0 < h_+ < +\infty.$$

– Pour tout $a > h_+$, il n’y a p.s. pas percolation au dessus du niveau a , tandis qu’il y a p.s. percolation au dessus du niveau a pour $a < h_+$.
Sous l’hypothèse de ferromagnétisme (H_5), chacun des deux jeux d’hypothèses suivants implique (H_2) et (H_7).

$$(I_1) : \begin{cases} \hat{J} > 0 \text{ sur } \mathbb{U} \text{ (Superstabilité).} \\ \exists \alpha > 1 \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|n\|^\alpha |J(n)| < +\infty. \end{cases} \quad \text{ou } (I_2) : \begin{cases} d \geq 4. \\ \hat{J} \geq 0 \text{ sur } \mathbb{U}. \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|n\|^3 |J(n)| < +\infty. \\ \text{Mod}(\{n, J(n) \neq 0\}) = \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Pour prouver le fait que le jeu d’hypothèses (I_2) implique (H_7), on doit estimer les coefficients de Fourier de fonctions dont le groupe de périodes est \mathbb{Z}^d et qui admettent un pôle en l’origine, ce qui nécessite des calculs assez compliqués. Dans le cas où les hypothèses (I_1) sont vérifiées, les choses sont beaucoup plus simples, ce qui n’est guère étonnant, puisque dans ce cas on est dans la zone d’unicité avec des variables faiblement corrélées, tandis que dans le cas (I_2) on peut être (pour le hamiltonien quadratique non perturbé) en situation de transition de phase avec une covariance qui décroît lentement.

2.2 Théorèmes de limite centrale dans des modèles de coloriage

Les résultats commentés ici correspondent aux articles [4, 7].

Prenons un graphe aléatoire sur le réseau cubique \mathbb{L}^d choisi suivant une certaine loi, et choisissons, pour chacune des composantes connexes, avec quelle couleur on la peint, les composantes connexes étant coloriées indépendamment les unes des autres. Regardons alors le coloriage obtenu en faisant abstraction du caractère ouvert ou fermé des arêtes du graphe. Que voit-on alors ?

Dans le cas où la loi qui détermine le choix du graphe est la FK-percolation de paramètres p et q et que le coloriage se fait suivant la loi uniforme sur une palette de q couleurs, on sait que le coloriage obtenu est une réalisation du modèle de Potts à q états à la température inverse $\beta = -1/2 \log(1-p)$ – voir par exemple [HJL02]. Assez récemment, Olle Häggström a proposé que l’on applique cette construction au graphe simplement obtenu par une percolation Bernoulli classique : c’est ce qu’il a appelé le modèle *divide and color*. Notons que c’est dans le cadre de ce dernier modèle que nous avons d’abord développé les travaux que nous allons présenter maintenant ; la possibilité d’étendre nos techniques à des modèles plus généraux incluant le modèle de Potts ne nous étant apparue que plus tard.

2.2.1 Les théorèmes de limite centrale sur des graphes généraux

Pour G sous-graphe de \mathbb{L}^d , s réel et ν mesure de probabilité sur \mathbb{R} , on définit la “probabilité de coloriage” $P^{G,\nu,s}$ comme suit : $P^{G,\nu,s}$ est l’unique mesure sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}))$ sous laquelle les projections $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ sur les composantes vérifient :

- Pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, la loi de X_i est
 - ν si $|C(i)| < +\infty$.
 - δ_s sinon.
- Des variables aléatoires (X_i) appartenant à des composantes connexes différentes sont indépendantes.
- Les variables aléatoires appartenant à une même composante connexe sont identiques.

Notons $\mathcal{S}(\mathbb{L}^d) = (\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{B}(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}))$. Soit ϕ une mesure sur $\mathcal{S}(\mathbb{L}^d)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- (E) : ϕ est une mesure invariante par translation et ergodique sous l’action de \mathbb{Z}^d .
- (M) : $\exists \alpha > d \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^\alpha P(|C(0)| = k) < +\infty$.

Dans ce cas, on peut définir

$$\chi^f(\phi) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \phi(|C(0)| = k). \quad (27)$$

$\chi^f(\phi)$ représente la taille moyenne d’un cluster fini.

On note également $\theta_\phi = \phi(0 \leftrightarrow \infty)$.

La mesure de coloriage associée à ϕ, ν et s est définie par

$$P^{\phi,\nu,s} = \int_{\mathcal{S}(\mathbb{L}^d)} P^{G,\nu,s} d\phi(G).$$

On obtient d’abord le résultat suivant :

Théorème 7. *$P^{\phi,\nu,s}$ est laissée invariante par les translations de \mathbb{Z}^d et l’action de \mathbb{Z}^d sur $P^{\phi,\nu,s}$ est ergodique.*

Ainsi, si ν admet un moment d’ordre un, le théorème ergodique s’applique : on a alors une loi des grands nombres dans les grandes boîtes $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^d$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{k \in \Lambda_n} X_k = \mathbb{E}X_0 = \theta_\phi s + (1 - \theta_\phi) \left(\int x d\nu(x) \right).$$

L’étape naturelle suivante est de montrer des théorèmes de limite centrale. Dans les sommes considérées, il y aura deux types de termes : ceux provenant d’un cluster fini et ceux provenant des clusters infinis³. Ceux provenant des

³En général, il n’y a qu’un cluster infini d’après le théorème de Burton et Keane [BK89].

clusters finis vont se comporter peu ou prou comme des sommes de variables indépendantes, tandis que ceux provenant des cluster infinis sont tous égaux et introduisent un biais constant. Ainsi, si il y a un cluster infini, il est nécessaire de contrôler, outre les fluctuations usuelles de la somme des termes correspondant aux clusters finis, les fluctuations de la proportion occupée par ces clusters dans de grandes boîtes.

Quand $\theta_\phi = \phi(0 \leftrightarrow \infty) > 0$, on considérera donc aussi l'hypothèse suivante :

$$(CLT) : \exists \sigma_\phi^2 > 0, \frac{|\Lambda_n \cap C_\infty| - \theta_\phi |\Lambda_n|}{|\Lambda_n|^{1/2}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2).$$

Dans un premier temps, on se place à environnement fixé; on obtient alors le théorème “quenched” suivant :

Théorème 8. *On suppose que ϕ vérifie (E) et (M) et que ν est une mesure de probabilités sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre 2. On pose $m = \int_{\mathbb{R}} x d\nu(x)$ et $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 d\nu(x)$.*

Alors, pour ϕ -presque tout sous-graphe G de \mathbb{L}^d , on a :

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}} \sum_{x \in \Lambda_n \setminus C_\infty(G)} (X(x) - m) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \chi^f(\phi) \sigma^2)$$

où $C_\infty(G) = \{x \in \mathbb{Z}^d; x \leftrightarrow \infty\}$.

Bien sûr ici, l'éventuel cluster infini n'influe en rien sur le résultat puisqu'on l'a exclu de la somme.

Le théorème en environnement moyenné (“annealed”) suivant tient compte, lui, des fluctuations du cluster infini – lorsqu'un tel cluster peut exister, évidemment.

Théorème 9. *On suppose que ϕ vérifie (E) et (M) et que ν est une mesure de probabilités sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre 2. On pose $m = \int_{\mathbb{R}} x d\nu(x)$ et $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 d\nu(x)$. Soit également $s \in \mathbb{R}$.*

– Si $\theta_\phi = 0$, on a sous la mesure $P^{\phi, \nu, s}$

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}} \sum_{x \in \Lambda_n} (X(x) - m) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \chi^f(\phi) \sigma^2)$$

– Si $\theta_\phi > 0$ et que (CLT) est vérifié, alors on a sous $P^{\phi, \nu, s}$

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}} \sum_{x \in \Lambda_n} X(x) - ((1 - \theta_\phi)m + \theta_\phi s) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \chi^f(\phi) \sigma^2 + (s - m)^2 \sigma_\phi^2).$$

Remarquons que si on choisit de tirer au hasard la valeur affectée au(x) cluster(s) infini(s), il faut réintégrer le résultat obtenu, ce qui donne encore un théorème de limite centrale, mais où le centrage est aléatoire et la mesure limite est un mélange de mesures gaussiennes de variances distinctes, donc en général pas une mesure gaussienne.

2.2.2 Fluctuations du cluster infini dans des boîtes

Pour que les résultats de la section précédente puissent avoir un intérêt quelconque en régime surcritique, il faut être capable de démontrer (CLT). Avec l'aide du théorème de Newman [New80], nous avons établi le critère suivant :

Théorème 10. *Soit ϕ une mesure sur $\mathcal{S}(\mathbb{L}^d)$ invariante par translation et ergodique sous l'action de \mathbb{Z}^d . On suppose que ϕ satisfait les inégalités FKG et que l'on a $\theta_\phi = \phi(0 \leftrightarrow \infty) > 0$.*

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ et $r > 0$, considérons l'événement $D_{n,r} = \{|C(n)| > r\}$. Supposons aussi qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ telle que l'on ait simultanément :

$$(m) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \phi(+\infty > |C(0)| \geq r_n) < +\infty$$

$$(c) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \text{Covar}_\phi(D_{0,r_n}, D_{n,r_n}) < +\infty.$$

Alors, on a

– (S^*)

$$\sigma_\phi^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (\phi(0 \leftrightarrow \infty \text{ et } k \leftrightarrow \infty) - \theta_\phi^2) < +\infty.$$

– (CLT)

$$\frac{|\Lambda_n \cap C_\infty| - \theta_\phi |\Lambda_n|}{|\Lambda_n|^{1/2}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2).$$

L'idée d'utiliser le théorème de Newman pour prouver un théorème de limite centrale pour la densité de clusters infinis dans des modèles de percolation qui satisfont FKG n'est pas nouvelle ; déjà Newman et Schulman avaient remarqué dans [NS81a, NS81b] que $(S^*) + (FKG) \implies (CLT)$.

Pendant, cette remarque n'avait jamais été réellement exploitée faute d'exhiber un modèle où la condition (S^*) est vérifiée.

Concrètement, notre critère permet de diviser le problème en deux morceaux relatifs au comportement des clusters finis ; on doit obtenir

- L’existence de moments suffisamment élevés pour la taille des clusters finis
- Un contrôle de la corrélation de l’apparition de clusters raisonnablement larges dans des boîtes très éloignées – notons qu’on peut réécrire $\text{Covar}(D_{0,r_n}, D_{n,r_n})$ en $\text{Covar}(D_{0,r_n}^c, D_{n,r_n}^c)$.

Dans le cas de la percolation Bernoulli surcritique, la vérification de (c) est extrêmement simple puisqu’on peut choisir r_n égal à $\|n\|/3$; de la sorte les boîtes sont disjointes et donc les événements considérés sont indépendants dès que n est assez grand. Quant à la vérification de (m), c’est par exemple une conséquence immédiate des inégalités de Kesten et Zhang [KZ90]. Dans le cas de la percolation Bernoulli, on précise ainsi le résultat obtenu par Zhang [Zha01] à l’aide de martingales. En effet, sa méthode donne un théorème de limite centrale dans lequel l’ordre de la renormalisation est donné de manière implicite.

Pour ce qui est de la FK-percolation, la situation est plus complexe et les résultats obtenus jusqu’à présent ne semblent pas optimaux. Nous sommes parvenus à démontrer que pour $q \geq 1$, il existe $p_r(q) < 1$ tel que pour $p > p_r(q)$, le nombre de points dans de grandes boîtes qui appartiennent à l’amas infini de la FK-percolation sous la mesure $\phi_{p,q}$ satisfait au comportement de limite centrale classique, mais on n’arrive pas à descendre jusqu’à la borne inférieure $p_c(q)$ des p tels que $P(0 \leftrightarrow \infty) > 0$. Comme nous l’avons annoncé, notre outil est notre Théorème 10. Essayons d’expliquer ce qui nous limite ici dans l’application de ce théorème. Il y a deux volets : la taille des grands clusters finis et la décorrélation.

- la taille des grands clusters finis

Pour ce qui est de la taille des grands clusters finis, le problème est réglé au-dessus de p_{slab} grâce au travail de Pisztor [Pis96] : il y a décroissance exponentielle avec n de la probabilité que la taille du cluster de 0 soit fini et de taille dépassant n .

- l’obtention d’inégalités de décorrélation

L’obtention de telles inégalités est un problème récurrent dans l’étude de la FK-percolation. Ici, on utilise le fait que pour p assez grand le cluster infini est suffisamment gros pour encercler fermement les clusters finis et former ainsi des grillages épais bloquant le passage de l’information. Il est assez vraisemblable qu’en dimension trois ou plus, l’extension d’une telle méthode pour obtenir les inégalités de décorrélation soit vouée à l’échec : en effet, nous pensons qu’en dimension 3 ou plus, il existe des valeurs de $p > p_c$ telles que le cluster infini n’encercle pas les clusters finis, (ou en d’autres termes que $\mathbb{Z}^d \setminus C_\infty$ a une composante connexe infinie). Cette conjecture, dont nous avons eu l’occasion de discuter avec quelques collègues, ne semble pas être démontrée pour

l'instant, même dans le cas de la percolation Bernoulli.

En dimension $d = 2$, le résultat est bien meilleur, puisque dans ce cas, on peut prendre $p_r(q) = p_g^*$, or p_g^* est vraisemblablement égal à p_c .⁴ Ce petit miracle est dû aux propriétés de dualité de \mathbb{Z}^2 qui permettent tout à la fois d'utiliser des grillages moins épais que dans les dimensions plus grandes et de transposer des inégalités de la zone sous-critique à la zone surcritique. D'un point de vue plus heuristique, on peut penser que ceci est lié au fait qu'en dimension deux, le cluster infini enserme les clusters finis pour toutes les valeurs de $p > p_g^*$.

2.2.3 Théorèmes de limite centrale dans le modèle de Potts

À l'aide des résultats des deux précédentes sections, on a obtenu divers théorèmes de limite centrale dans le modèle de Potts. Citons en deux, un en sous-critique, un en sur-critique.

Soit q un entier au moins égal à 2. On note $\nu = \frac{1}{q}(e_1 + e_2 + \dots + e_q) = \frac{1}{q}(1, \dots, 1)$.

Dans la suite, on note $\beta_c = -\frac{1}{2} \ln(1 - p_c)$, $\beta_g = -\frac{1}{2} \ln(1 - p_g)$ et $\beta_r = -\frac{1}{2} \ln(1 - p_r(q))$.

On sait qu'il y a unicité de la mesure de Gibbs pour $\beta < \beta_c$ tandis qu'il y a transition de phase pour $\beta > \beta_c$.

A haute température, on a le résultat suivant

Théorème 11. *Soit $\beta < \beta_g$. On note $p = 1 - \exp(-2\beta)$ et $\nu = \frac{1}{q}(e_1 + e_2 + \dots + e_q)$. Il existe une unique mesure de Gibbs pour le modèle de Potts à q états à la température β sous laquelle on a le résultat suivant pour la distribution empirique :*

$$\frac{n(\Lambda_t) - |\Lambda_t|\nu}{\sqrt{|\Lambda_t|}} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\chi(p, q)}{q^2}(qI - J)\right),$$

où $n(\Lambda)$ désigne le vecteur des effectifs des sites des différents types (entre 1 et q) dans la boîte Λ . J est la matrice $q \times q$ dont tous les termes valent 1 et

$$\chi(p, q) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \phi_{p, q}^1(|C(0)| = k).$$

⁴Rappelons que $p_g(q)$ est la borne supérieure des p tels que $P(0 \leftrightarrow B(0, n))$ décroît exponentiellement vite avec n . Il est communément conjecturé que p_g est égal à p_c . Cette conjecture est un fait démontré lorsque $q = 1, 2$ ou $q \geq 25.72$. Rappelons aussi qu'en dimension 2, le fait que $p_g = p_c$ implique que p_c est égal au point fixe de l'involution $x \mapsto x^*$, où x si x^* sont liés par la relation $F(x)F(x^*) = 1$, avec $F(x) = \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{x}{1-x}$. Ainsi, lorsque $d = 2$ et $p_g = p_c$, on a $p_r = p_c$.

Dans la suite, on notera $\text{WPt}_{q,\beta,s}$ la mesure de Gibbs pour le modèle de Potts à q états correspondant à l'état fondamental s à la température inverse $\beta := -\frac{1}{2} \log(1-p)$ – il s'agit en fait de la mesure de coloriage obtenue pour la mesure FK “wired” lorsque l'on colorie la composante infinie avec la couleur s – voir par exemple la proposition 2.4 de [HJL02].

On peut alors énoncer un théorème à basse température :

Théorème 12. *Soit $\beta > \beta_r$. On suppose que Φ_γ est une mesure de Gibbs pour le modèle de Potts à q états à la température inverse β qui peut s'écrire sous la forme*

$$\Phi_\gamma = \int \text{WPt}_{q,\beta,z} d\gamma(z).$$

Pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, on note R_Λ un élément de $\{1, \dots, q\}$ qui réalise le maximum de $(n_\Lambda(k))_{k \in \{1, \dots, q\}}$. On note encore $p = 1 - \exp(-2\beta)$ et $\nu = \frac{1}{q}(e_1 + e_2 + \dots + e_q)$. Alors, sous Φ_γ , on a

$$\frac{n(\Lambda_t) - |\Lambda_t|((1 - \theta_\phi)\nu + \theta_\phi e_{R_{\Lambda_t}})}{\sqrt{|\Lambda_t|}} \Longrightarrow \mu,$$

où μ est la loi de $X + S(e_Z - \nu)$, où X, S et Z sont indépendants avec $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{\chi^f(p,q)}{q^2}(qI - J))$, $S \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{p,q}^2)$ et $Z \sim \gamma$.

J est la matrice $q \times q$ dont tous les termes valent 1 ,

$$\begin{aligned} \chi^f(p, q) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \phi_{p,q}^1(|C(0)| = k), \\ \text{et } \sigma_{p,q}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (\phi_{p,q}^1(0 \leftrightarrow \infty \text{ et } k \leftrightarrow \infty) - \theta(p, q)^2). \end{aligned}$$

Lorsque $\phi = \text{WPt}_{q,\beta,z}$, la limite μ est gaussienne et

$$\frac{n(\Lambda_t) - |\Lambda_t|((1 - \theta_\phi)\nu + \theta_\phi e_z)}{\sqrt{|\Lambda_t|}} \Longrightarrow \mu.$$

Remarquons que même si on ne peut pas “voir” le cluster infini en observant le modèle de Potts, on peut savoir avec quelle couleur il a été colorié : pour des boîtes Λ suffisamment grandes, c'est la couleur R_Λ qui apparaît le plus souvent dans la boîte.

3 Percolation de premier passage et compétition

Les articles [8, 10, 9, 11] décrits dans cette section sont le résultat d'une collaboration avec Régine Marchand.

3.1 La percolation de premier passage

La percolation de premier passage a été introduite par Hammersley and Welsh comme un modèle de propagation d'un fluide dans un média poreux. À chaque arête du graphe \mathbb{Z}^d , on associe une variable aléatoire positive qui représente le temps nécessaire pour traverser l'arête. Dans le cas le plus classique, on suppose que les temps de passages sont indépendants, distribués suivant une même loi ν admettant un moment d'ordre deux.⁵ On peut alors définir le temps nécessaire pour suivre un chemin : c'est la somme des temps des arêtes qui le composent. On peut alors parler de temps minimal pour aller d'un point x à un point y : c'est la borne inférieure des temps des chemins qui vont de x à y .

Ainsi, cette famille de temps de passage induit une distance (aléatoire) $d(., .)$ sur \mathbb{Z}^d qui peut asymptotiquement être comparée à la distance usuelle : pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, la suite $d(0, nx)/n$ admet une limite presque sûre $\mu(x)$. La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le théorème ergodique sous-additif.

La fonctionnelle $x \mapsto \mu(x)$ se prolonge sur \mathbb{R}^d en une semi-norme. Lorsque $\nu(0) < p_c(\mathbb{Z}^d)$, alors cette semi-norme est en fait une norme et on a en plus un théorème de forme asymptotique : si l'on note

$$B_t = \{x \in \mathbb{Z}^d; d(0, x) \leq t\},$$

l'ensemble des points qui sont à une distance au plus t de l'origine, alors l'ensemble renormalisé B_t/t converge presque sûrement vers la boule unité associée à μ .

3.2 Percolation de premier passage sur le cluster infini

Les résultats décrits dans cette section correspondent aux travaux [8, 9].

La percolation et la percolation de premier passage puisent toutes deux leurs motivations dans la modélisation de la diffusion d'un fluide à travers un matériau poreux. Dans le premier modèle, on suppose que le fluide rencontre des résistances telles qu'à certains endroits il ne peut passer. On ne s'intéresse pas à l'évolution temporelle, mais juste à la géométrie de l'espace

⁵On peut grandement affaiblir cette hypothèse, mais ce n'est pas notre propos ici.

rempli par le fluide en temps infini. Inversement, dans le second modèle, le fluide est supposé parvenir à passer partout, cependant les résistances qu'il rencontre peuvent lui permettre de passer plus ou moins vite. Ici, ce qui importe, c'est au contraire l'évolution de l'espace occupé au cours du temps. Aussi, il nous a paru naturel de combiner les deux modèles pour pouvoir étudier l'évolution temporelle de la diffusion d'un fluide qui est réellement contraint par la résistance du milieu.

On étudie ainsi la percolation de premier passage sur l'amas infini de la percolation Bernoulli de paramètre $p > p_c$. Les temps de passage des arêtes ouvertes sont supposées suivre une loi stationnaire S_ν sur $\Omega_S = \mathbb{R}_+^{\mathbb{E}^d}$ invariante par translations et ergodique, vérifiant en plus certaines conditions de moments :

$$(H_{\text{int}}) \quad \sup_{1 \leq i \leq d} \int \eta_{\{0, e_i\}} dS_\nu(\eta) = \sup_{e \in \mathbb{E}^d} \int \eta_e dS_\nu(\eta) < +\infty$$

ainsi que

$$(H_\alpha) \quad \exists A_\alpha, B_\alpha > 0 \text{ such that } \forall \Lambda \subseteq \mathbb{E}^d \quad S_\nu \left(\eta \in \Omega_S; \sum_{e \in \Lambda} \eta_e \geq B_\alpha |\Lambda| \right) \leq \frac{A_\alpha}{|\Lambda|^\alpha},$$

la valeur de α requise pouvant varier suivant les théorèmes.

L'hypothèse (H_α) est en fait un mélange entre des hypothèses de moments et des hypothèses de dépendance. Ainsi, si S_ν est la mesure produit $\nu^{\otimes \mathbb{E}^d}$, l'hypothèse (H_α) peut être obtenue comme conséquence de l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund dès que le temps de passage des arêtes a un moment d'ordre 2α . Remarquons qu'évidemment, (H_α) est toujours vérifiée lorsque les temps de passage sont bornés. Quelques exemples plus complexes sont étudiés dans l'article.

Sous l'hypothèse H_α avec $\alpha > 1$, on montre l'existence d'une fonctionnelle μ analogue à celle intervenant en percolation de premier passage classique : pour $u \in \mathbb{Z}^d$, si l'on note $(T_{n,u})_{n \geq 1}$ la suite des entiers naturels k tels que ku est dans le cluster infini, alors on a

$$\forall u \in \mathbb{Z}^d \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(0, T_{n,u}u)}{T_{n,u}} = \mu(u) \quad \mathbb{P} \text{ p.s. sur l'événement } \{0 \leftrightarrow \infty\}.$$

Si (H_α) est vérifiée pour un certain $\alpha > d^2 + 2d - 1$, alors on a même un contrôle uniforme (voir par exemple Lemme 5.7 de [8]).

$$\overline{\lim}_{\|x\|_1 \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow x\}} \left| \frac{d(0, x)}{\mu(x)} - 1 \right| = 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \quad (28)$$

Si de plus μ est une norme, on a alors un théorème de forme asymptotique : si l'on note comme précédemment B_t l'ensemble des points du graphe

aléatoire qui sont à une distance inférieure ou égale à t de l'origine et \mathcal{D} la distance de Hausdorff, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{D} \left(\frac{B_t}{t}, \mathcal{B}_\mu(0, 1) \right) = 0 \quad \text{p.s.}, \quad (29)$$

Nous donnons dans l'article plusieurs critères permettant d'assurer que μ est une norme. En particulier, si la loi des temps de passage est une loi produit $\nu^{\otimes \mathbb{E}^d}$, μ est une norme dès que $p\nu(0) < p_c$.

Les théorèmes énoncés ci-dessus sont beaucoup plus exigeants que ceux dont on dispose en percolation de premier passage "classique" (autrement dit dans le cas où $p = 1$). Ainsi, notre théorème de forme asymptotique réclame, si on veut l'appliquer à des variables indépendantes, de disposer de moments d'ordre supérieur à $2(d^2 + 2d - 1)$, alors qu'on sait bien (voir par exemple Cox et Durrett [CD81]) qu'un moment d'ordre deux suffit. D'ailleurs, même dans le cas stationnaire, un moment d'ordre supérieur à d suffit lorsque $p = 1$: voir Boivin [Boi90].

Pourquoi donc cette différence criante ? En fait, le fait que les chemins doivent être pris dans le graphe de la percolation complique drastiquement les choses, même pour les étapes qui paraissent les plus simples. Si on se souvient que le but est d'appliquer un théorème ergodique sous-additif, l'étape zéro est d'avoir l'intégrabilité de la longueur du plus court chemin entre 0 et nx . Lorsque $p = 1$, il est évident qu'un moment d'ordre 1 est suffisant, on peut même raffiner les hypothèses en construisant $2d$ chemins indépendants allant de 0 à nx . Ici, il n'y a pas toujours de chemin entre deux points donnés : on peut évidemment construire un chemin de 0 à $T_{n,x}$, mais il faut encore contrôler sa longueur et on n'a toujours qu'un seul chemin. Il serait intéressant d'obtenir, au moins dans le cas indépendant, des hypothèses plus faibles, mais cela ne semble pas évident.

Un cas intéressant où cette condition de moments est (trivialement) vérifiée est le cas où les temps de passage des arêtes ouvertes sont constamment égaux à 1 : dans ce cas, la distance d associée, appelée distance chimique, donne des informations sur l'amas infini de la percolation Bernoulli. Dans la suite, afin d'éviter les confusions, on notera la distance chimique D plutôt que d .

En 1996, Antal et Pisztora [AP96] ont prouvé que la distance chimique ne pouvait asymptotiquement être beaucoup plus grande que la norme 1 : pour tout $p > p_c$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$\overline{\lim}_{\|x\|_1 \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x, D(0, x) \geq \rho \|x\|_1)}{\|x\|_1} < 0. \quad (30)$$

L'équation (28) établie dans [8] suggère que la quantité $\rho \|x\|_1$ apparaissant dans l'équation (30) peut être remplacée par $(1+\varepsilon)\mu(x)$. De fait, dans [8],

nous nous sommes employés à montrer le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim}_{\|x\|_1 \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbb{P}_p \left(0 \leftrightarrow x, \frac{D(0,x)}{\mu(x)} \notin (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \right)}{\|x\|_1} < 0. \quad (31)$$

De cette borne, on déduit une inégalité de grandes déviations pour le résultat de convergence vers la forme asymptotique :

pour tout réel $\varepsilon > 0$ fixé, il existe deux constantes strictement positives A et B telles que

$$\forall t > 0 \quad \overline{\mathbb{P}}_p \left(\mathcal{D} \left(\frac{B_t}{t}, \mathcal{B}_\mu(0, 1) \right) \geq \varepsilon \right) \leq A e^{-Bt},$$

où $\overline{\mathbb{P}}_p$ est la loi de Bernoulli de paramètre p conditionnée par l'événement “0 est dans le cluster infini”.

La preuve de l'inégalité (31) se divise naturellement en deux parties : le contrôle de la probabilité d'une distance anormalement grande (ou pour parler de manière plus imagée, les grandes déviations par au-dessus) et celui de la probabilité d'une distance anormalement petite (les grandes déviations par en-dessous).

La preuve des grandes déviations par au-dessus utilise, à l'aide d'une renormalisation statique appropriée, le fait que lorsque p est suffisamment proche de 1, la distance chimique ressemble à la distance usuelle $\|\cdot\|_1$:

Théorème 13. *Pour tout $\alpha > 0$, il existe $p'(\alpha) \in (p_c(d), 1)$ tel que pour tout $p \in (p'(\alpha), 1]$, la percolation Bernoulli de paramètre p vérifie :*

$$\overline{\lim}_{\|x\|_1 \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x, D(0, x) \geq (1 + \alpha)\|x\|_1)}{\|x\|_1} < 0.$$

Comme corollaire de ce résultat, on obtient la continuité en $p = 1$ de l'application $p \mapsto \mu_p$, où μ_p est la norme associée à la distance chimique de paramètre p :

Corollaire 2. $\lim_{p \rightarrow 1} \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |\mu_p(x) - \|x\|_1| = 0.$

Pour ce qui est des grandes déviations par en-dessous, la preuve suit dans les grandes lignes la stratégie utilisée par Grimmett et Kesten [GK84] pour prouver une borne exponentielle pour une quantité analogue en percolation de premier passage dans la direction de l'axe principal.

Dans les deux preuves, on rencontre une difficulté technique rarement évoquée dans la littérature due au fait que nous voulons ici des bornes exponentielles dans toutes les directions, avec de surcroît un contrôle uniforme en la direction. Ainsi, la forme et la direction des boîtes apparaissant dans les procédés de renormalisation dépendent de la direction observée et doivent être choisies avec beaucoup de soin.

3.3 Problèmes de compétition

Il y a un peu moins de dix ans, Häggström et Pemantle ont fait paraître un article [HP98] qui a donné de nouvelles motivations à l'étude de la percolation de premier passage. Cet article, intitulé "First passage percolation and a model for competing spatial growth" considère deux espèces qui essaient chacune de coloniser l'espace à partir d'un point et progressent comme le ferait un processus de percolation de premier passage, à la nuance près qu'il est impossible d'occuper un point qui a déjà été occupé par l'adversaire.

Disons que l'un progresse avec des temps de passage suivant la loi exponentielle de paramètre λ_1 , et l'autre avec des temps de passage suivant la loi exponentielle de paramètre λ_2 . La conjecture est qu'il est possible que les deux espèces s'étendent indéfiniment sans qu'aucune ne soit encerclée par l'autre si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$. Ce problème a déjà suscité une importante littérature, relative à la conjecture dans le modèle initial [HP98], chez Garet et Marchand [10], Hoffman [Hof05a, Hof05b] ou dans des modèles connexes comme le modèle continu de Deijfen et Häggström [Dei03, DHB04, DH04, DH05] ou celui de Kordzakhia et Lalley [KL05]. Cependant, comme on va le voir, le problème est loin d'être épuisé.

3.3.1 Coexistence

Dans l'article fondateur [HP98], Häggström et Pemantle ont montré que la coexistence est possible lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$ et $d = 2$. La méthode, qui utilise des estimées numériques de la constante de temps en percolation de premier passage, ne semble malheureusement pas pouvoir être étendue aux dimensions supérieures. Dans [10], Régine Marchand et moi-même avons étendu le résultat à une dimension quelconque. En réalité, nous avons établi la coexistence dans un cadre très général où les deux protagonistes ont la même loi de temps de passage, la loi pouvant même être une loi stationnaire ergodique sur un amas de percolation Bernoulli, comme dans le cadre de l'article [8]. Si l'on excepte les hypothèses de moments, la seule condition réellement contraignante est que la fonctionnelle μ associée ne soit pas identiquement nulle. Il semble que l'on soit là assez proche d'une hypothèse optimale. De

fait, on peut exhiber des exemples en dimension 2 où la fonctionnelle μ est nulle et où la coexistence n'est pas possible. À notre grande satisfaction, notre méthode s'est révélée suffisamment robuste pour pouvoir être adaptée à d'autres modèles : en effet, en joignant l'idée centrale de notre papier avec un couplage astucieux, Deijfen et Häggström ont pu montrer [DH04] que la coexistence était possible dans le modèle de compétition sur \mathbb{R}^d à temps continu introduit par Deijfen, Häggström et Bagley [DHB04] à partir d'un modèle de percolation de premier passage sur \mathbb{R}^d dû à Deijfen [Dei03].

Une question qui vient alors naturellement est celui de la possibilité de coexistence pour plus de deux types de particules. Les premiers résultats, très significatifs, ont été très récemment obtenus par Hoffman [Hof05b] dans le cas de la dimension $d = 2$.

La preuve de notre théorème se fait en deux étapes : d'abord, on montre qu'il est possible de choisir les positions des sources initiales de telle manière que la coexistence soit possible. Ensuite, à l'aide d'arguments de modification, on étend ce résultat pour des positions relatives quelconques. Le coeur de la preuve est évidemment la première étape, la deuxième étape étant plus technique, quoique non sans difficulté – en particulier on est amené à séparer le cas des lois à support discret du cas des lois à support continu. Je ne résiste pas au plaisir de donner au lecteur la preuve de ce premier point dans le cas de la percolation de premier passage usuelle (autrement dit lorsque $p = 1$), preuve qui ne nécessite, contrairement à la preuve du cas général, l'introduction d'aucun formalisme. Les notations utilisées sont celles de la section 3.1

Théorème 14. *Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\mu(x) > 0$ et $r \geq 1$ un entier suffisamment grand pour que $\frac{\mathbb{E}d(0,rx)}{r} < 2\mu(x)$.⁶ Notons*

$$S_0 = \overline{\lim}_{\|y\|_1 \rightarrow +\infty} \{d(0, y) < d(rx, y)\} \text{ et } S_1 = \overline{\lim}_{\|y\|_1 \rightarrow +\infty} \{d(0, y) > d(rx, y)\}.$$

Alors,

$$P(S_0 \cap S_1) > 0,$$

ce qui signifie que la probabilité de coexistence pour une source en 0 et une autre en rx est strictement positive.

Démonstration.

Notons $X_n = d(0, nrx) - d(rx, nrx)$ et $X'_n = d(rx, -nrx) - d(0, -nrx)$.

⁶En effet, on sait que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}d(0,rx)}{r} = \mu(x)$.

X_n et X'_n vérifient $|X_n| \leq d(0, rx)$ et $|X'_n| \leq d(0, rx)$ d'après l'inégalité triangulaire pour la distance d .

Pour $\omega \notin S_1$, $X_n(\omega) \leq 0$ pour n assez grand tandis que pour $\omega \notin S_0$, $X'_n(\omega) \leq 0$ pour n assez grand. Finalement, lorsque $\omega \notin S_0 \cap S_1$, on a

$$X_n(\omega) + X'_n(\omega) \leq d(0, rx)(\omega)$$

pour n assez grand.

Notons encore $Q_n = \sum_{k=1}^n (X_k + X'_{k-1})$, $Z_n = \frac{Q_n}{n}$ et $Z = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Z_n$.

Il est facile de voir que

$$\forall \omega \notin S_0 \cap S_1 \quad Z(\omega) \leq d(0, rx)(\omega). \quad (32)$$

Comme $|Z_n| \leq d(0, rx)$ et que $d(0, rx)$ est intégrable, il s'ensuit (grâce par exemple au lemme de Fatou) que

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Z_n \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}Z_n.$$

$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}d(0, nrx) - d(rx, nrx) = \mathbb{E}d(0, nrx) - d(0, (n-1)rx)$ par stationnarité. Il s'ensuit que $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbb{E}d(0, nrx)$.

De manière analogue,

$$\mathbb{E}X'_n = \mathbb{E}d(rx, -nrx) - d(0, nrx) = \mathbb{E}d((n+1)rx, 0) - d(0, nrx) = \mathbb{E}d(0, (n+1)rx) - d(0, nrx),$$

encore par stationnarité. On a donc $\mathbb{E}(X'_0 + X'_1 + \dots + X'_{n-1}) = \mathbb{E}d(0, nrx)$.

Ainsi, $\mathbb{E}Z_n = \frac{2\mathbb{E}d(0, nrx)}{n}$. Comme $\frac{\mathbb{E}d(0, nrx)}{n}$ converge vers $\mu(rx)$ lorsque n tend vers l'infini, il s'ensuit que

$$\mathbb{E}Z \geq 2\mu(rx) = 2r\mu(x) \quad (33)$$

En mettant ensemble (32) et (33), on voit que $P(S_0 \cap S_1) = 0$ (ou de manière équivalente $P((S_0 \cap S_1)^c) = 1$) mènerait à une contradiction. \square

3.3.2 Non-coexistence

Dans [HP00], Häggström et Pemantle montrent que, sauf peut être pour un ensemble dénombrable de valeurs du rapport λ_1/λ_2 , la probabilité de coexistence est nulle. Pour le modèle de Deijfen évoqué plus haut, Deijfen, Häggström and Bagley [DHB04] ont montré le même résultat, avec toujours la même exception "sauf peut être pour un ensemble dénombrable de valeurs".

Jusqu'à présent, nul n'a réussi à se soustraire à cette irritante exception. Comme l'ont souligné Häggström et Pemantle [HP00], il est tentant de penser qu'un argument de monotonie pourrait permettre de balayer le problème ; en fait les choses semblent réellement plus compliquées que cela, puisque dans un travail récent, Deijfen and Häggström [DH05], ont exhibé des graphes pour lesquels la coexistence survient pour plusieurs valeurs du rapport des vitesses.

Un problème analogue intéressant est le suivant : considérons qu'une tache de couleur jaune progresse à vitesse constante 1 à partir d'un point a sur un amas de percolation Bernoulli de paramètre p_1 , tandis qu'une tache de couleur bleue progresse à vitesse constante 1 à partir d'un point b sur un amas de percolation Bernoulli de paramètre p_2 , en supposant, comme précédemment qu'aucune couleur ne peut s'étaler là où l'autre a déjà pris place. Est-il possible que les deux taches s'étendent indéfiniment ?

Nous avons montré dans [10], que la réponse est positive lorsque $p_1 = p_2$. D'autre part, un petit raisonnement simple permet de voir que si p_1 et p_2 dépassent le seuil de percolation orientée \vec{p}_c , les deux types peuvent coexister.

Cela amène à poser la conjecture suivante :

Conjecture 1. *En compétition Bernoulli, la probabilité de coexistence est nulle si $p_2 < \min(p_1, \vec{p}_c)$.*

Pour ce modèle, nous prouvons le résultat suivant, assez semblable à celui d'Häggström et Pemantle :

Théorème 15. *Soit $p_1 > p_c$ un réel fixé : Il existe un ensemble dénombrable $Bad \subset [p_c, \vec{p}_c[$ tel que pour tout $p_2 \in [0, \min(p_1, \vec{p}_c)[\setminus Bad$, la probabilité que les deux espèces grandissent indéfiniment est nulle.*

Dans ses grandes lignes, notre travail suit la stratégie initiée par Häggström and Pemantle [HP00], mais nous avons dû maîtriser des difficultés supplémentaires. D'une part, on ne peut bénéficier ici de la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle : en effet, dans notre modèle, un site essaie d'en contaminer un autre une fois et une seule, ce qui entraîne par exemple que le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ n'est pas markovien. D'autre part, et c'est là le plus important, les formes asymptotiques correspondant à des paramètres distincts ne sont pas homothétiques. Cette particularité qui était due aux propriétés d'échelle de la famille des lois exponentielles est perdue. Cela implique qu'il n'y a plus de norme naturelle qui permette à la fois de travailler avec les deux progressions ; il faut donc utiliser des comparaisons fines entre les deux normes. En particulier, on est amené à montrer que pour p et q vérifiant $p_c < p < q < \vec{p}_c$, il existe une constante $C_{p,q} < 1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \mu_q(x) \leq C_{p,q} \mu_p(x),$$

en d'autres termes la forme asymptotique correspondant au paramètre p est incluse dans l'intérieur de la forme asymptotique correspondant au paramètre q .

3.4 Quelques perspectives

3.4.1 Le problème des géodésiques

On peut considérer la percolation de premier passage comme une distance aléatoire sur un graphe. Un objectif primordial est la compréhension de la structure des géodésiques associées à cette distance. Par exemple on conjecture qu'il existe des géodésiques dans toutes les directions. Certaines briques ont été posées, notamment par Newman [New95], Licea et Newman [LN96], et plus récemment Lalley [Lal03], pour faire le lien entre les propriétés des géodésiques et les propriétés géométriques de la boule unité associée à μ . Malheureusement, pour l'instant, on ne connaît aucun exemple de temps de passage pour lequel les propriétés de la boule effectivement prouvées permettent d'en déduire quelque chose sur les géodésiques. Ainsi, il est conjecturé par Newman [New95] qu'on peut faire partir de l'origine avec probabilité un une infinité de géodésiques distinguables, mais aujourd'hui les résultats connus sont que

- En dimension quelconque, la probabilité que l'on puisse faire partir de l'origine deux géodésiques distinguables est strictement positive. (voir notre article [10])
- En dimension 2 et pour des temps de passage exponentiels, la probabilité que l'on puisse faire partir de l'origine quatre géodésiques distinguables est strictement positive (voir Hoffman [Hof05b]).

3.4.2 Compétition

Concernant les problèmes de compétition apparentés à la percolation de premier passage, on a déjà évoqué deux problèmes restant à ce jour ouverts :

- Possibilité de coexistence pour 3 espèces (ou plus) ayant la même vitesse
- Impossibilité de coexistence pour deux espèces ayant des vitesses distinctes précisément fixées dans l'énoncé du théorème

Bien sûr, ces deux problèmes ont des buts opposés. Cependant, ils se ressemblent dans la mesure où ils recèlent des difficultés communes. Il est certainement un peu hasardeux de parler de ce qui est important et de ce qui ne l'est pas pour des problèmes qui ne sont pas résolus ; aussi discuterons nous plutôt de ce qui n'est pas complètement satisfaisant dans les solutions apportées aujourd'hui aux problèmes connexes qui eux, sont résolus. Ces

blancs sont, nous le pressentons, fortement liés aux difficultés rencontrées dans les deux problèmes évoqués plus haut.

Parlons d'abord du problème de coexistence que nous avons résolu dans [10]. Dans leur première attaque du problème, Häggström et Pemantle ont basé leur approche sur une étude fine de la progression locale d'une infection. Cela permet en dimension deux d'obtenir une minoration explicite de la probabilité de coexistence. Malheureusement, les estimées ne sont pas suffisamment bonnes pour pouvoir donner des résultats en dimensions supérieures. Quant à nous, nous avons substitué à l'approche locale d'Häggström et Pemantle une approche plus globale, qui est essentiellement une preuve par l'absurde non constructive qui ne permet pas⁷ d'obtenir de minoration de la probabilité de coexistence. Pourtant, il serait très intéressant de savoir comment évolue la probabilité de coexistence quand on écarte les sources initiales. Il est probable que cette probabilité tende vers un lorsque l'écart tend vers l'infini, mais on ne sait pas le prouver alors que les simulations informatiques semblent montrer que cette probabilité décroît très vite avec l'écart.⁸ De même, les simulations numériques⁹ semblent montrer que lorsqu'il y a coexistence, les deux espèces se partagent l'espace suivant un cône d'angle aléatoire, de manière analogue à ce qui a été démontré dans le modèle TASEP par Ferrari et Pimentel [FP05]. Voilà encore matière à réflexion.

Passons maintenant au problème de la non-coexistence. Rappelons les grandes lignes de la méthode inventée par Häggström et Pemantle [HP00] et reprise dans d'autres modèles par Deijfen, Häggström et Bagley [DHB04] d'une part, par Garet et Marchand [11] d'autre part. Dans chacun de ces articles, on considère des familles de temps de passages stochastiquement comparables indexés par un paramètre que j'appellerai ici la force. La preuve se divise en deux points : on commence par montrer que s'il y a coexistence, alors le territoire occupé en temps t par les belligérants grossit à la même vitesse que si seul le plus faible des deux se déployait. Jusqu'alors, les raisonnements qui sont faits sont valables pour toutes les valeurs possibles pour les forces des deux opposants. Mais pour l'instant, on n'a pas de réponse à la question de la possibilité de coexistence.

⁷sauf dans quelques cas particuliers

⁸Un premier pas semble avoir été fait par Hoffman dans un preprint récent [Hof05b] où il montre que l'on peut trouver des sources rendant la probabilité de coexistence aussi proche de un que l'on veut.

⁹Pour les simulations numériques, on pourra se référer aux divers programmes que j'ai écrits et qui sont disponibles sur ma page web

<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/garet/linux/cppp.php>

à la fois sous forme de fichier source et de paquet pour Debian/Gnu Linux. Ces programmes sont distribués sous licence GPL.

C'est alors qu'intervient un argument de couplage qui permet de trouver une sortie honorable à une situation qui semblait dans l'impasse et d'obtenir le résultat désiré "sauf peut être pour un ensemble dénombrable de valeurs". Il n'empêche que l'on n'est pas parvenu à une solution constructive qui permettrait par exemple de montrer que l'hypothèse de coexistence avec un déploiement conforme à la vitesse du plus faible mène à une contradiction. Pourtant, on sent bien qu'une telle situation ne peut se produire : imaginons un instant que chacun des deux se soit octroyé un domaine infini, l'un se déplaçant à vitesse 1, l'autre à vitesse $\lambda > 1$ et considérons une arête loin de l'origine qui soit à l'interface entre les deux régions. Les deux points qui la composent sont atteints à peu près au même moment, l'un par un chemin dans une région où l'on voyage à vitesse 1, l'autre dans une région où l'on voyage à vitesse λ . Même si ces chemins ne sont pas des géodésiques de l'espace total, on peine à imaginer quelle devrait être la géométrie de la frontière qui permettrait que le plus court chemin dans le domaine où on voyage à vitesse 1 ait la même longueur que le plus court chemin dans le domaine où on voyage à vitesse λ . Cela amène à se demander si on change beaucoup le plus court chemin entre deux points si on interdit l'entrée d'un certain domaine. Cela incite par exemple à étudier comment se comporte la percolation de premier passage dans des sous-ensembles de \mathbb{Z}^d . Plus précisément, il nous semble intéressant d'étudier des problèmes du type suivant : un ensemble $E \subset \mathbb{Z}^d$ connexe étant donné, on peut définir pour $(x, y) \in E^2$ $d_E(x, y)$ comme la borne inférieure des sommes $\sum_{e \in \gamma} t_e$, où γ décrit l'ensemble des chemins reliant x à y en n'utilisant que des points de E . Par exemple, si l'on note $\mathbb{H}_d = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{d-1}$, il serait intéressant de montrer que pour tout x dans \mathbb{H}_d , on a presque sûrement $d_{\mathbb{H}_d}(0, nx) \sim d_{\mathbb{Z}^d}(0, nx)$, ce qui serait en quelque sorte un analogue au résultat de Grimmett et Marstrand [GM90] pour la percolation : $p_c(\mathbb{Z}^d) = p_c(\mathbb{H}_d)$.

Finalement, on se rend compte que nos difficultés à étudier les problèmes de compétition sont liées à nos ignorances sur la percolation de premier passage elle-même. On sent bien par exemple l'intérêt qu'il y aurait à connaître finement l'allure des géodésiques, l'amplitude avec laquelle elles peuvent s'écarter d'une ligne droite. Ici encore, les résultats sont limités par le manque de connaissance que nous avons de la géométrie de la forme asymptotique, voir par exemple Newman et Piza [NP95].

Arrivés au terme de cette partie – et de ce mémoire –, nous espérons avoir fait sentir au lecteur que la percolation de premier passage demeure un champ de recherches largement ouvert, entretenant des rapports étroits avec la percolation, en un mot un terrain riche de problèmes passionnants à élucider.

Références

- [AHK75] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn. Homogeneous random fields and quantum statistical mechanics. *J. Funct. Anal.*, 19 :242–272, 1975.
- [Alb94] J. M. P. Albin. On the upper and lower classes for a stationary Gaussian stochastic process. *Ann. Probab.*, 22(1) :77–93, 1994.
- [Ant91] R. G. Antonini. Sur le comportement asymptotique du processus de Orstein-Uhlenbeck multidimensionnel. *Ann. Sci. Blaise Pascal*, 9(96) :33–44, 1991.
- [AP96] Peter Antal and Agoston Pisztora. On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 24(2) :1036–1048, 1996.
- [BK89] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3) :501–505, 1989.
- [Boi90] Daniel Boivin. First passage percolation : the stationary case. *Probab. Theory Related Fields*, 86(4) :491–499, 1990.
- [CD81] J. Theodore Cox and Richard Durrett. Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Ann. Probab.*, 9(4) :583–603, 1981.
- [CD00] P. Caputo and J.-D. Deuschel. Large deviations and variational principle for harmonic crystals. *Comm. Math. Phys.*, 209(3) :595–632, 2000.
- [CD01] P. Caputo and J.-D. Deuschel. Critical large deviations in harmonic crystals with long-range interactions. *Ann. Probab.*, 29(1) :242–287, 2001.
- [Dei03] Maria Deijfen. Asymptotic shape in a continuum growth model. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(2) :303–318, 2003.
- [DH04] Maria Deijfen and Olle Häggström. Coexistence in a two-type continuum growth model. *Adv. in Appl. Probab.*, 36(4) :973–980, 2004.
- [DH05] Maria Deijfen and Olle Häggström. Nonmonotonic coexistence regions for the two-type Richardson model on graphs. *preprint*, 2005.
- [DHB04] M. Deijfen, O. Häggström, and J. Bagley. A stochastic model for competing growth on \mathbf{R}^d . *Markov Process. Related Fields*, 10(2) :217–248, 2004.
- [Dob80] R. L. Dobrushin. Gaussian random fields—Gibbsian point of view. In *Multicomponent random systems*, volume 6 of *Adv. Probab. Related Topics*, pages 119–151. Dekker, New York, 1980.

- [DR79] H. Doss and G. Royer. Processus de diffusion associé aux mesures de Gibbs sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 46(1) :107–124, 1978/79.
- [FP05] P. A. Ferrari and L. P. R. Pimentel. Competition interfaces and second class particles. *Ann. Probab.*, 33(4) :1235–1254, 2005.
- [Fri82] J. Fritz. Stationary measures of stochastic gradient systems, infinite lattice models. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 59(4) :479–490, 1982.
- [Geo88] Hans-Otto Georgii. *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988.
- [GK84] Geoffrey Grimmett and Harry Kesten. First-passage percolation, network flows and electrical resistances. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 66(3) :335–366, 1984.
- [GM90] G. R. Grimmett and J. M. Marstrand. The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 430(1879) :439–457, 1990.
- [HJL02] Olle Häggström, Johan Jonasson, and Russell Lyons. Coupling and Bernoullicity in random-cluster and Potts models. *Bernoulli*, 8(3) :275–294, 2002.
- [Hof05a] Christopher Hoffman. Coexistence for Richardson type competing spatial growth models. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1B) :739–747, 2005.
- [Hof05b] Christopher Hoffman. Geodesics in first passage percolation. *Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/math.PR/0508114>*, 2005.
- [HP98] Olle Häggström and Robin Pemantle. First passage percolation and a model for competing spatial growth. *J. Appl. Probab.*, 35(3) :683–692, 1998.
- [HP00] Olle Häggström and Robin Pemantle. Absence of mutual unbounded growth for almost all parameter values in the two-type Richardson model. *Stochastic Process. Appl.*, 90(2) :207–222, 2000.
- [HS81] R. Holley and D. Stroock. Diffusions on an infinite-dimensional torus. *J. Funct. Anal.*, 42(1) :29–63, 1981.
- [KL05] George Kordzakhia and Steven P. Lalley. A two-species competition model on \mathbf{Z}^d . *Stochastic Process. Appl.*, 115(5) :781–796, 2005.
- [KS94] Yu. G. Kondratiev and T. A. Sokol. Gaussian measures and stochastic quantification. *Selecta Mathematica formerly Sovietica*, 13(3) :225–238, 1994.

- [KZ90] Harry Kesten and Yu Zhang. The probability of a large finite cluster in supercritical Bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 18(2) :537–555, 1990.
- [Kün80] H.-R. Künsch. *Reellwertige Zufallsfelder auf einem Gitter : Interpolationsprobleme, Variationsprinzip und statistische Analyse*. PhD thesis, Zürich, 1980.
- [Lal03] Steven P. Lalley. Strict convexity of the limit shape in first-passage percolation. *Electron. Comm. Probab.*, 8 :135–141 (electronic), 2003.
- [Lig85] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag, 1985.
- [LN96] Cristina Licea and Charles M. Newman. Geodesics in two-dimensional first-passage percolation. *Ann. Probab.*, 24(1) :399–410, 1996.
- [MS83a] S. A. Molchanov and A. K. Stepanov. Percolation in random fields. I. *Teoret. Mat. Fiz.*, 55(2) :246–256, 1983.
- [MS83b] S. A. Molchanov and A. K. Stepanov. Percolation in random fields. II. *Teoret. Mat. Fiz.*, 55(3) :419–430, 1983.
- [MS86] S. A. Molchanov and A. K. Stepanov. Percolation in random fields. III. *Teoret. Mat. Fiz.*, 67(2) :177–185, 1986.
- [New80] C. M. Newman. Normal fluctuations and the FKG inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 74(2) :119–128, 1980.
- [New95] Charles M. Newman. A surface view of first-passage percolation. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 1017–1023, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [NP95] Charles M. Newman and Marcelo S. T. Piza. Divergence of shape fluctuations in two dimensions. *Ann. Probab.*, 23(3) :977–1005, 1995.
- [NS81a] C. M. Newman and L. S. Schulman. Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.*, 26(3) :613–628, 1981.
- [NS81b] C. M. Newman and L. S. Schulman. Number and density of percolating clusters. *J. Phys. A*, 14(7) :1735–1743, 1981.
- [Pis96] Agoston Pisztora. Surface order large deviations for Ising, Potts and percolation models. *Probab. Theory Related Fields*, 104(4) :427–466, 1996.
- [PQ73] Pramod K. Pathak and Clifford Qualls. A law of iterated logarithm for stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181 :185–193, 1973.

- [RK96] A. P. Roberts and M. A. Knackstedt. Structure-property correlations in model composite materials. *Phys. Rev. E*, 54 :2313–2328, september 1996.
- [Roy79] G. Royer. Processus de diffusion associé à certains modèles d’Ising à spins continus. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 46(2) :165–176, 1978/79.
- [Roz67] Ju. A. Rozanov. Gaussian fields with given conditional distributions. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 12 :433–443, 1967.
- [RT95] A. P. Roberts and M. Teubner. Transport properties of heterogeneous materials derived from Gaussian random fields : Bounds and simulation. *Phys. Rev. E*, 51 :4141–4154, may 1995.
- [Zha01] Yu Zhang. A martingale approach in the study of percolation clusters on the \mathbb{Z}^d lattice. *J. Theor. Probab.*, 14(1) :165–187, 2001.

Les travaux présentés relèvent d'une branche des probabilités que l'on appelle la mécanique statistique. L'idée générale est que l'on étudie des systèmes infinis de particules en essayant d'établir le lien entre les propriétés microscopiques (par exemple l'interaction entre des particules proches) et les propriétés macroscopiques (par exemple les caractéristiques à grande échelle des mesures d'équilibre.) Ce mémoire se divise en trois parties :

- Mesures de Gibbs et champs gaussiens
- Percolation et mesures de Gibbs
- Percolation de premier passage et compétition

La première partie traite des mesures de Gibbs gaussiennes, classiques et quantiques. On y étudie finement la structure de l'ensemble des mesures de Gibbs classiques (*resp.* quantiques) dont le support est raisonnable ainsi que les dynamiques stochastiques de gradient canoniquement associées. Une attention particulière est accordée à l'influence de la transition de phase. La deuxième partie traite de problèmes associant percolation et mesure de Gibbs, à savoir l'existence de transition de percolation dans des modèles issus de perturbations d'interactions quadratiques et des théorèmes de limite centrale pour la répartition des phases dans les modèles d'Ising et de Potts. La troisième partie étudie des modèles de percolation de premier passage et des problèmes de compétition associés. On montre en particulier des théorèmes de forme asymptotique et de grandes déviations pour la percolation de premier passage sur l'amas de percolation Bernoulli et l'on étudie des problèmes de coexistence/non-coexistence entre des espèces qui se propagent de manière analogue à ce qui se passe en percolation de premier passage.