



HAL
open science

Systemes tolerant aux defauts : analyse et synthese stochastiques

Samir Aberkane

► **To cite this version:**

Samir Aberkane. Systemes tolerant aux defauts : analyse et synthese stochastiques. Automatique / Robotique. Universite Henri Poincare - Nancy I, 2006. Francais. NNT: . tel-00151379

HAL Id: tel-00151379

<https://theses.hal.science/tel-00151379>

Submitted on 4 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinee au depot et a la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publies ou non, emanant des etablissements d'enseignement et de recherche francais ou etrangers, des laboratoires publics ou privs.



UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique
École Doctorale IAEM Lorraine
DFD Automatique et Production Automatisée

THÈSE

présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1
(Spécialité Automatique, Traitement du Signal et Génie Informatique)

par

Samir ABERKANE

Systemes Tolérants aux Défauts :
Analyse et Synthèse Stochastiques

Soutenue publiquement le 13 12 2006

Composition du jury

| | | |
|----------------------|---------------|--|
| <i>Rapporteurs :</i> | E.-K. BOUKAS | Professeur à l'École Polytechnique de Montreal |
| | O. SENAME | Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble |
| <i>Examineurs :</i> | M. BOUTAYEB | Professeur à l'Université Louis Pasteur, Strasbourg |
| | M. KINNAERT | Professeur à l'Université Libre de Bruxelles |
| | D. SAUTER | Professeur à l'Université Henri Poincaré, CRAN, Nancy |
| | J.-C. PONSART | Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, CRAN, Nancy |

Avant propos

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués à la Faculté des Sciences et Techniques de Vandoeuvre-lès-Nancy au sein du groupe thématique "Sûreté de Fonctionnement et Diagnostic des Systèmes (SURFDIAG)" dans l'équipe "Systèmes Distribués et Embarqués Réactifs aux Défauts (SYDER)" au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CNRS UMR 7039).

Table des matières

| | |
|---|------------|
| Résumé | i |
| Notations | vii |
| Abréviations | ix |
| Introduction générale | 1 |
| 1 Systèmes tolérants aux défauts | 5 |
| 1.1 Systèmes tolérants aux défauts (FTCS pour Fault Tolerant Control Systems) | 5 |
| 1.1.1 Classification | 6 |
| 1.2 Fondements et motivations | 7 |
| 1.3 Systèmes tolérants aux défauts par approches actives | 8 |
| 1.3.1 Défauts affectant les systèmes dynamiques | 8 |
| 1.3.2 Détection et identification des défauts | 9 |
| 1.3.3 Méthodes d'accommodation active | 11 |
| 1.3.4 Discussion | 23 |
| 1.4 Systèmes tolérants aux défauts à sauts markoviens | 24 |
| 1.4.1 Modèles mathématiques | 25 |
| 1.4.2 Avantages du formalisme Markovien | 29 |
| 1.4.3 Stabilité stochastique du FTCSMP | 30 |
| 1.4.4 Bref état de l'art | 34 |
| 1.4.5 Discussion | 48 |
| 1.5 Conclusion | 49 |
| 2 Stabilisation stochastique | 51 |
| 2.1 Introduction | 51 |
| 2.2 Retour statique de sortie | 52 |
| 2.2.1 Modèle dynamique | 53 |
| 2.2.2 Définitions et résultats préliminaires | 54 |
| 2.2.3 Formulation LMI | 56 |
| 2.2.4 Formulation NLMI | 62 |
| 2.3 Retour dynamique de sortie | 67 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.3.1 | Formulation LMI | 67 |
| 2.3.2 | Formulation BMI | 78 |
| 2.3.3 | Discussion | 81 |
| 2.3.4 | Formulation NLMI | 82 |
| 2.3.5 | Discussion | 82 |
| 2.4 | Conclusion | 83 |
| 3 | Commande multi-objectifs | 85 |
| 3.1 | Introduction | 85 |
| 3.2 | Retour statique de sortie | 86 |
| 3.2.1 | Modèle dynamique | 87 |
| 3.2.2 | Formulation LMI | 87 |
| 3.2.3 | Formulation NLMI | 104 |
| 3.3 | Retour dynamique de sortie | 115 |
| 3.3.1 | Formulation LMI | 116 |
| 3.3.2 | Formulation BMI | 120 |
| 3.3.3 | Formulation NLMI | 132 |
| 3.4 | Conclusion | 135 |
| 4 | Cas des systèmes à temps discret : application aux systèmes commandés par réseaux | 137 |
| 4.1 | Introduction | 138 |
| 4.2 | Systèmes tolérants aux défauts | 139 |
| 4.2.1 | Modèle dynamique | 139 |
| 4.2.2 | Définitions et résultats préliminaires | 140 |
| 4.2.3 | Principaux résultats | 142 |
| 4.2.4 | Prise en compte de la contrainte $\mathcal{P}_{ijv}\mathcal{X}_{ijv} = \mathbb{I}$ | 149 |
| 4.2.5 | Exemple numérique | 151 |
| 4.2.6 | Prise en compte de la contrainte $\mathbb{X}_v \leq \mathbb{Y}_v \mathbb{Z}_v^{-1} \mathbb{Y}'_v$ | 152 |
| 4.2.7 | Exemple numérique | 154 |
| 4.2.8 | Conclusion | 156 |
| 4.3 | Systèmes commandés par réseaux | 156 |
| 4.3.1 | Modèles de canal de communication | 157 |
| 4.3.2 | Modèles de protocoles | 159 |
| 4.3.3 | Problématiques | 160 |
| 4.3.4 | Présence de retards | 161 |
| 4.3.5 | Modèle dynamique | 162 |
| 4.3.6 | Résultats préliminaires | 165 |
| 4.3.7 | Principaux résultats | 166 |
| 4.3.8 | Prise en compte de la contrainte $\mathcal{P}_{ij}\mathcal{X}_{ij} = \mathbb{I}$ | 170 |
| 4.3.9 | Exemple numérique | 171 |

| | | |
|--|---|------------|
| 4.3.10 | Prise en compte de la contrainte $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}'$ | 172 |
| 4.3.11 | Exemple numérique | 174 |
| 4.3.12 | Conclusion | 175 |
| 4.4 | Conclusion générale | 176 |
| Conclusion générale | | 177 |
| A Définitions relatives aux processus stochastiques | | 183 |
| A.1 | Tribu ou σ -algèbre | 183 |
| A.2 | Mesure positive sur une tribu | 183 |
| A.3 | Mesure de probabilité | 184 |
| A.4 | Processus de Wiener ou mouvement Brownien | 184 |
| B Stabilité stochastique | | 187 |
| B.1 | Définitions | 187 |
| B.2 | Conditions de stabilité stochastique | 189 |
| C Compléments mathématiques | | 191 |
| Bibliographie | | 207 |

Notations

Les notations sont, dans la mesure du possible, les notations standards. Elles sont définies au fur et à mesure de leur utilisation dans le présent mémoire et sont conservées tout au long de celui-ci. Il nous a cependant paru utile de les rassembler ici.

- \square : fin d'un théorème ou d'une proposition.
- \diamond : fin d'un corollaire ou d'un lemme.
- \blacksquare : fin de preuve.
- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^n : ensemble des vecteurs réels de dimension n .
- $\mathbb{R}^{n \times m}$: ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$.
- \mathbb{S}^n : sous ensemble des matrices symétriques dans $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- \mathcal{M}' : transposée de la matrice \mathcal{M} .
- $\mathcal{M} < 0$: \mathcal{M} définie négative.
- $\mathcal{M} \leq 0$: \mathcal{M} semi définie négative.
- $\mathcal{M} > 0$: \mathcal{M} définie positive.
- $\mathcal{M} \geq 0$: \mathcal{M} semi définie positive.
- $\text{diag}[\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k]$: matrice bloc-diagonal dont les blocs diagonaux sont les \mathcal{M}_i .
- $\text{tr}(\mathcal{M})$: trace de la matrice \mathcal{M} .
- $\lambda_{\max}(\mathcal{M})$: plus grande valeur propre de $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.
- $\lambda_{\min}(\mathcal{M})$: plus petite valeur propre de $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.
- \star : indique des termes symétriques : $\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \star \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix}$.
- \mathbb{I} : matrice identité de dimension appropriée.
- $\mathbf{0}$: matrice nulle de dimension appropriée.
- $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$: notation condensée de la représentation d'état $C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D$.
- $P\{\cdot\}$: mesure de probabilité.
- $\mathcal{E}\{\cdot\}$: espérance mathématique.
- \mathcal{F} : σ -algèbre.
- (Ω, \mathcal{F}, P) : espace probabilisé.
- \mathcal{L} : opérateur infinitesimal faible.
- $L^2[0, \infty)$: espace des fonctions vectorielles de carré-intégrable sur l'intervalle $[0, \infty)$.

-
- $\| \cdot \|_2$: norme dans l'espace $L^2[0, \infty)$: $\| x \|_2 = \left\{ \int_0^\infty x'_t x_t dt \right\}^{1/2}$.
- $\| \cdot \|_{\mathcal{E}_2}$: norme dans l'espace $L^2((\Omega, \mathcal{F}, P), [0, \infty))$: $\| x \|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty x'_t x_t dt \right\}^{1/2}$.
- $\| \cdot \|$: norme vectorielle (ou matricielle) Euclidienne.

Abréviations

| | |
|----------------|---|
| AFTCS | : Active Fault Tolerant Control Systems. |
| AFTCSMP | : Active Fault Tolerant Control Systems with Markovian Process. |
| BMI | : Bilinear Matrix Inequalities. |
| CCL | : Cone Complementary. |
| CF | : Correct Fault detection rate. |
| CUSUM | : Cumulative SUM test. |
| DD | : Detection Delay. |
| EA | : Eigenstructure Assignment. |
| EDS | : Equation Différentielle Stochastique. |
| EMSS | : Exponential Mean Square Stability. |
| FA | : False Alarm rate. |
| FDI | : Fault Detection and Isolation. |
| FTC | : Fault Tolerant Control. |
| FTCS | : Fault Tolerant Control Systems. |
| GLR | : Generalized Likelihood Ratio test. |
| IF | : Incorrect Fault detection rate. |
| IMM | : Interacting Multiple Models. |
| JLQ | : Jump Linear Quadratic. |
| LMI | : Linear Matrix Inequalities. |
| MJLS | : Markovian Jump Linear Systems. |
| MMST | : Multiple Model Switching and Tuning. |
| MSS | : Mean Square Stability. |
| NLMI | : Nonlinear Matrix Inequalities. |
| PFTCS | : Passive Fault Tolerant Control Systems. |
| PIM | : Pseudo Inverse Method. |
| SS | : Stochastic Stability. |
| VTOL | : Vertical Take Off and Landing. |

Table des figures

| | | |
|------|---|-----|
| 1.1 | Indices de performances du processus FDI | 12 |
| 1.2 | Multiple Model Switching and Tuning | 16 |
| 1.3 | Single model vs. multiple model adaptation | 17 |
| 3.1 | Evolution des variables d'états : une seule réalisation des processus aléatoires | 102 |
| 3.2 | Evolution des sorties $z_{\infty t}$: une seule réalisation des processus aléatoires | 102 |
| 3.3 | Modes du processus défaut | 103 |
| 3.4 | Modes du processus FDI | 103 |
| 3.5 | Evolution des variables d'états : une seule réalisation des processus aléatoires | 105 |
| 3.6 | Evolution des sorties $z_{\infty t}$: une seule réalisation des processus aléatoires | 105 |
| 3.7 | Modes du processus Défaut | 106 |
| 3.8 | Modes du processus FDI | 106 |
| 3.9 | Ellipsoïdes de gains de retour de sortie | 113 |
| 3.10 | Evolution des variables d'états : une seule réalisation du processus aléatoire | 115 |
| 3.11 | Evolution du processus ϕ_t | 115 |
| 3.12 | Evolution des sorties $z_{\infty t}$: une seule réalisation du processus aléatoire | 116 |
| 3.13 | Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires | 132 |
| 3.14 | Evolution des sorties $z_{\infty t}$: une seule réalisation des processus aléatoires | 132 |
| 4.1 | Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires | 153 |
| 4.2 | Evolution des sorties $z_{\infty k}$: une seule réalisation des processus aléatoires | 153 |
| 4.3 | Ellipsoïdes de gains de retour de sortie | 155 |
| 4.4 | Modèle de type <i>Shannon-Weaver</i> | 158 |
| 4.5 | Modèle de retard variable. | 158 |
| 4.6 | Réseau modélisé comme une chaîne de Markov à trois niveaux de charge : bas (L), moyen (M) et haut (H). | 159 |
| 4.7 | Exemple de flux dans un réseau comportant un routeur. | 160 |
| 4.8 | Système commandé par réseaux : retards r_{sk} | 162 |
| 4.9 | Système commandé par réseaux : retards r_{sk} et retards r_{ak} | 163 |
| 4.10 | Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires | 172 |
| 4.11 | Evolution des sorties $z_{\infty k}$: une seule réalisation des processus aléatoires | 173 |
| 4.12 | Ellipse de gains de retour de sortie | 175 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.13 | Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires | 175 |
| 4.14 | Evolution des sorties $z_{\infty k}$: une seule réalisation des processus aléatoires | 176 |
| B.1 | Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov | 188 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Taux de transitions du processus FDI | 27 |
| 1.2 | Gains de retour d'état | 41 |
| 3.1 | Tests | 113 |
| 3.2 | Paramètres | 114 |
| 3.3 | Tests | 114 |

Introduction générale

La compétition économique, scientifique et militaire conduit les industries aéronautiques et astronautiques (et plus généralement les domaines de technologies de pointe) à concevoir des engins, avions, hélicoptères, stations orbitales, *etc.* sans cesse plus performants. L'intégration de gouvernes électriques et de calculateurs numériques puissants permet de réaliser des fonctions de commande sophistiquées et libère la créativité des concepteurs.

Les avions à centrage négatif sont un exemple significatif. En rendant l'appareil instable, on augmente sa manoeuvrabilité mais il faut alors faire appel au contrôle pour réaliser un boucle de stabilisation vitale. L'appareil devient ainsi vulnérable aux incidents tels que pannes d'actionneurs, capteurs ou calculateurs de bord [Mar86].

Une autre illustration est fournie par les stations orbitales de la prochaine génération avec leurs structures souples (antennes, panneaux solaires, *etc.*). Pour des durées de mission longues, dans des conditions de maintenance difficiles, il faudra être capable de réaliser des spécifications sévères en tenue d'attitude et d'orbite et cela en dépit d'éventuelles pannes partielles [Mar86]. Dans un tel contexte, la réussite de la mission dépendra encore plus du système de commande : c'est lui, qui en utilisant judicieusement des niveaux de redondance, pourra procurer une certaine *tolérance aux fautes*.

Dans la plupart des systèmes de commande conventionnels, la synthèse de loi de commande ne prend pas en considération l'éventuelle occurrence de pannes pouvant affecter le système. Dans d'autre cas, la redondance matérielle disponible dans le système à commander peut être très limitée. Dans les cas de figure ci-dessus, un AFTCS (en anglais : Active Fault Tolerant Control Systems) peut être conçu en utilisant les ressources disponibles et la redondance analytique et matérielle du système afin de s'accommoder des défauts. Les AFTCS compensent les effets des pannes soit en sélectionnant des lois de commande pré calculées, ou en synthétisant une nouvelle loi de commande en ligne et en temps réel. Les deux approches requièrent l'utilisation d'un algorithme de détection et d'identification de défauts (FDI pour Fault Detection and Isolation) afin d'identifier les changements induits par les différents défauts et de reconfigurer la loi de commande en ligne. La synthèse de cette classe de systèmes nécessite donc la cohabitation de différentes tâches, à savoir, la détection de défauts en ligne, la prise de décision en temps réel et la reconfiguration de loi de commande. Cela induit naturellement des problèmes inhérents à cette classe de systèmes : les retards de détection, les fausses alarmes, la non détection de défauts, *etc.*

Cependant, dans les différentes méthodes de reconfiguration existant dans la littérature, ces problématiques critiques ne sont pas explicitement prises en considération. En effet, la plupart de ces

méthodes supposent que l'information fournie par le module de FDI est parfaite ce qui représente une hypothèse irréaliste. Ce constat est à la base des travaux présentés dans ce document. En effet, nous nous sommes intéressés aux contraintes résultant de l'intégration d'un module de FDI et d'un module de reconfiguration de lois de commande. De telles contraintes peuvent conduire à une perte de performances, voire une instabilité, du système tolérant aux défauts, si ces différents aspects ne sont pas pris en compte lors de la conception du système. La formalisation mathématique de cette problématique nous a amené à nous intéresser à une classe de **Systèmes Hybrides Stochastiques à Sauts Markoviens**, auxquels nous ferons référence dans la suite du document par AFTCSMP (en anglais : Active Fault Tolerant Control Systems with Markovian Process). Dans cette classe de systèmes, deux processus aléatoires sont définis : le premier représente les défauts pouvant affecter les différents composants du système, et le second représente le processus FDI utilisé pour la reconfiguration de la loi de commande.

Une étude bibliographique des travaux menés dans le cadre des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens a montré que la majorité des résultats établis pour cette classe de systèmes traitent de l'**analyse** de la stabilité et des performances de ces systèmes et non de la **synthèse** de lois de commande remplissant un cahier des charges donné. Les seuls résultats relatifs à la problématique de synthèse conduisent à des correcteurs irréalisables en pratiques (correcteurs dépendant des processus défauts) et se basent sur l'hypothèse restrictive d'accessibilité du vecteur d'état. Le premier objectif de ce travail est donc de s'affranchir de cette hypothèse et de considérer ainsi des problèmes de synthèse de correcteurs par retour de sortie statique/dynamique et cela dans un cadre de commande multi-objectifs. Et plus particulièrement, nous nous intéresserons à des critères de performance $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

La problématique de commande multi-objectifs sera abordée dans le cas des systèmes à temps continu et à temps discret. Pour le cas continu, nous montrerons que les résultats développés peuvent s'appliquer aisément à la problématique de commande multi-objectifs indépendante du mode des MJLS (pour Markovian Jump Linear Systems). Cela représente un cas particulier très intéressant. Dans le cadre des systèmes à temps discret, nous montrerons là aussi que les résultats établis peuvent s'appliquer à la problématique de commande multi-objectifs tolérantes aux défauts des systèmes commandés par réseaux de communication.

Enfin, il est important de noter qu'au delà des résultats théoriques obtenus dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'aspect résolution numérique des différentes conditions de stabilité et de performances en boucle fermée et des algorithmes de résolutions numériques (convexes et non convexes) seront proposés et validés sur des exemples de simulation et cela en mettant en évidence leurs performances et leurs limitations.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

Chapitre 1 :

Ce chapitre présente dans un premier temps les principaux concepts de synthèse de lois de commande tolérantes aux défauts. Une classification non-exhaustive des principales méthodes développées dans

le domaine est ensuite établie. Chaque type de méthode fera l'objet d'une discussion critique afin de mettre en évidence ses avantages et ses inconvénients. Cela nous permettra d'introduire et de justifier les choix et les orientations de ce travail. En deuxième partie de chapitre, nous introduirons la classe de systèmes qui fera l'objet de notre étude : les systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens. Là aussi, nous donnerons un bref état de l'art des différents travaux réalisés dans ce domaine, cela afin de positionner nos travaux et de justifier les orientations choisies.

Chapitre 2 :

Ce chapitre aborde la problématique de synthèse de lois de commande, par retour de sortie statique et dynamique, stabilisant cette classe de systèmes hybrides stochastiques sujet à des incertitudes paramétriques (structurées et non structurées) et à des bruits multiplicatifs. Et plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à la notion de stabilité exponentielle au sens de la moyenne quadratique. Les approches développées sont essentiellement basées sur la théorie de Lyapunov et la notion de Supermartingale. Dans le cas du retour dynamique de sortie, nous avons montré qu'en s'appuyant sur une version du Lemme de Finsler, les conditions de stabilité peuvent être exprimées en termes d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI pour Bilinear Matrix Inequalities). Pour la résolution numérique de ces dernières, nous avons développé un algorithme d'optimisation non convexe (de type descente conjuguée du gradient) dont l'efficacité est démontrée en utilisant des exemples de simulation. Dans le cas du retour de sortie statique, nous avons d'abord proposé des conditions de stabilité exprimées sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI pour Linear Matrix Inequalities). Cependant, des résultats expérimentaux nous ont montré que la *simplicité* de ces conditions (il existe, en effet, des outils d'optimisation convexe sous contraintes LMI très performants. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes appuyés sur la LMI Toolbox implémentée dans MATLAB) se paye par un pessimisme relativement important. Afin de pallier ces limitations, une solution serait de dériver de nouvelles conditions suffisantes, sous forme LMI, moins restrictives et moins pessimistes, et d'utiliser alors des algorithmes d'optimisation convexe. Cependant, dans ce travail, nous nous sommes plutôt intéressés à la caractérisation de tous les correcteurs statiques stabilisant le système, c'est à dire que nous avons dérivé des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité stochastique, pour lesquelles des algorithmes numériques performants sont mis en oeuvre. En raison de la nature du problème, les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont formulées sous forme d'inégalités matricielles non linéaires (NLMI pour Nonlinear Matrix Inequalities), et des algorithmes d'optimisation non convexe doivent alors être utilisés. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur un formalisme se basant sur la synthèse d'ensembles ellipsoïdaux de gains de retour de sortie statique. D'un point de vue numérique, nous avons proposé un algorithme de type *Complémentarité sur le Cône* pour résoudre ces NLMI. L'efficacité de ce dernier a été démontré en s'appuyant sur des exemples de simulation.

Chapitre 3 :

En deuxième partie de thèse, nous nous sommes intéressés au problème de commande multi-performances de cette classe de systèmes. Plus particulièrement, nous avons considéré des critères \mathcal{H}_∞ (ou plus généralement, des contraintes intégrales quadratiques stochastiques), et des critères \mathcal{H}_2 .

Là aussi, nous avons étudié les cas de commande par retour de sortie dynamique et statique, et nous avons proposé des conditions sous forme LMI, BMI et NLMI pour la résolution de ce problème de synthèse multi-objectifs. Bien évidemment, des algorithmes d'optimisation convexe et non convexe sont là aussi proposés pour la résolution numérique de ces conditions.

Chapitre 4 :

Dans ce chapitre est abordé le problème de commande multi-objectifs par retour de sortie des systèmes à sauts Markoviens en temps discret. Deux axes sont développés, le premier concerne la commande multi-critères des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens en temps discret, et le second traite de la problématique des systèmes commandés par réseaux de communication. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation stochastique du système en boucle fermée, des performances \mathcal{H}_2 ainsi que des performances \mathcal{H}_∞ .

Dans la première partie, on établit deux caractérisations NLMI de correcteurs statiques par retour de sortie stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. La première caractérisation s'appuie sur les travaux de [dOBG99] traitant de l'analyse de la stabilité robuste des systèmes LTI en temps discret. Cette approche introduit une sorte de *découplage* entre les matrices de Lyapunov et les matrices du système. Ce *découplage* est alors utilisé afin de synthétiser des correcteurs ne dépendant que du processus FDI. La seconde caractérisation s'appuie sur le formalisme *ellipsoïdes de matrices*. Les différentes conditions de synthèse étant établies en termes d'inégalités matricielles non linéaires, leur résolution numérique reste un problème délicat. Des algorithmes d'optimisation itératifs de type complémentarité sur le cône seront proposés et mis en oeuvre sur des exemples de simulation.

La seconde partie du chapitre est dédiée à la problématique de stabilisation stochastique et de commande multi-critères des systèmes commandés par réseaux de communication sujets à des retards aléatoires et à des pannes pouvant affecter les différents composants du système. Cette application a été motivée par l'implication du CRAN dans le projet Européen NECST (Networked Control Systems Tolerant to Faults). Les différents retards aléatoires induits par la présence d'un réseau de communication pouvant être modélisés par une chaîne de Markov à temps discret et à espace d'état fini [KOC⁺92, XHH00], cette problématique est alors considérée sous le formalisme (MJLS). Nous proposons là aussi une structure de commande par retour statique de sortie, et nous montrerons que ce problème de synthèse représente un cas particulier intéressant du problème de synthèse traité en première partie de chapitre.

A la fin de cette thèse, un paragraphe sera consacré aux conclusions et aux perspectives des travaux présentés.

Chapitre 1

Systemes tolérants aux défauts

Dans ce chapitre introductif, nous allons dans un premier temps présenter les principaux concepts de synthèse de lois de commande tolérantes aux défauts. Certains types de méthodes de synthèse étant parfois difficiles à classer, nous donnerons une classification non-exhaustive de ces dernières. Cette classification permettra de se repérer parmi les grandes tendances actuelles. Chaque type de méthode fera l'objet d'une discussion critique afin de mettre en évidence ses avantages et ses inconvénients. Cela nous permettra d'introduire et de justifier les choix et les orientations de cette thèse. En deuxième partie de chapitre, nous introduirons la classe de systèmes qui fera l'objet de notre étude : les systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens. Là aussi, nous donnerons un bref état de l'art des différents travaux réalisés dans ce domaine, cela afin de positionner nos travaux et de justifier les orientations choisies.

1.1 Systemes tolérants aux défauts (FTCS pour Fault Tolerant Control Systems)

Un système tolérant aux défauts possède la capacité de s'accommoder, de manière automatique, des défauts pouvant affecter ses différents composants. Il permet notamment de garantir la stabilité du système et/ou des performances dégradées acceptables en présence de défauts. En effet, une loi de commande conventionnelle peut s'avérer très limitée et induire des comportements non désirés du système à commander, voire à l'instabilité de ce dernier, en présence d'un défaut. Pour pallier de telles situations, de nouvelles lois de commande ont été développées dans le but précis de maintenir les performances du système ainsi que sa stabilité, lors d'un mauvais fonctionnement du système [WZZ00]. Dans le domaine industriel ou en aéronautique, ce type de problèmes a été souvent évité en se fondant sur de la redondance matérielle à base d'actionneurs et de capteurs. Cette stratégie est non seulement onéreuse mais elle requiert aussi un important dispositif de maintenance. Ainsi, la commande tolérante aux défauts traitée de manière analytique, permet d'éviter de tels coûts d'achat et d'entretien.

La tâche principale qui incombe à la commande tolérante aux défauts est de synthétiser des lois de commande avec une structure permettant de garantir la stabilité et les performances du système, non seulement lorsque tous les composants de la commande sont opérationnels, mais aussi lorsque des capteurs ou des actionneurs sont défectueux.

1.1.1 Classification

Les techniques de synthèse de systèmes tolérants aux défauts sont généralement classées en deux approches distinctes : une approche passive (Passive Fault Tolerant Control Systems, PFTCS) et une approche active (Active Fault tolerant Control Systems, AFTCS). L'utilisation de l'une des deux approches dépend de : la capacité à déterminer, durant la phase de conception, les éventuels défauts pouvant affecter le système, du comportement du système en présence de défauts et du type de redondance présent dans ce dernier.

1.1.1.1 Méthodes passives

Dans cette approche, le système est conçu de telle sorte à tolérer un nombre limité de défauts supposés connus avant la phase de conception de la loi de commande. En effet, les méthodes PFTCS utilisent des techniques de commande robuste afin d'assurer l'insensibilité du système en boucle fermée à certains défauts, et cela sans changement de structures des régulateurs nominaux (situation sans défauts) et sans utilisation d'informations en ligne relatives aux différents défauts affectant le système [ELWW85], [Zho00], [CP01], [NS03]. En effet, en PFTCS, les défauts sont considérés comme sources d'incertitudes de modèle [Pat97]. Cependant, les PFTCS possèdent une capacité de tolérance aux défauts non anticipés très limitée. En pratique, l'utilisation seule des approches passives peut s'avérer alors être risquée [Pat97]. Généralement, les PFTCS possèdent les caractéristiques suivantes :

- Robustesse à des défauts connus à priori (anticipés) ;
- Utilisation de la redondance matérielle (actionneurs et capteurs multiples, *etc.*) ;
- Méthodes conservatives.

Pour une vue globale des méthodes de commandes robustes ou fiables, le lecteur pourra se référer aux travaux de [ZJ98], [Vei02], [Suy02].

1.1.1.2 Méthodes actives

Dans la plupart des systèmes de commande conventionnels, la synthèse de lois de commandes ne prend pas en considération l'éventuelle occurrence de défauts pouvant affecter le système. Dans d'autre cas, la redondance matérielle disponible dans le système à commander peut être très limitée. En effet, l'augmentation ou le changement de la configuration matérielle peut s'avérer onéreuse, voire impossible due aux limitations physiques. Dans les cas de figure ci dessus, un AFTCS peut être conçu en utilisant les ressources disponibles et la redondance analytique et matérielle du système afin de s'accommoder des défauts non anticipés.

Les AFTCS compensent les effets des défauts soit en sélectionnant des lois de commande pré-calculées, ou en synthétisant une nouvelle loi de commande en ligne et en temps réel. Les deux approches requiert l'utilisation d'un algorithme de détection et d'identification de défauts (FDI pour Fault Detection and Isolation) afin d'identifier les changements induits par les différents défauts et de reconfigurer la loi de commande en ligne. La synthèse de cette classe de systèmes nécessite donc la cohabitation de différentes taches, à savoir, la détection de défauts en ligne, la prise de décision en temps réel et la

reconfiguration de loi de commande. Généralement, un AFTCS possède les caractéristiques suivantes :

- Utilise la redondance analytique ;
- Utilise un algorithme de FDI et des contrôleurs reconfigurables ;
- Admet un fonctionnement en mode dégradé (performances dégradées) en présence de défauts ;
- Réduit le pessimisme des approches passives.

AFTCS est un domaine multi-disciplinaires complexe, couvrant un nombre important d'axes de recherches tels que les systèmes stochastiques, les statistiques, l'analyse de risques, la fiabilité, le traitement du signal, la commande des systèmes, la modélisation des systèmes dynamiques, *etc.*

1.2 Fondements et motivations

FTCS est une stratégie de synthèse de systèmes de commande à très haute fiabilité. Elle regroupe une famille de techniques récentes développées afin d'accroître la fiabilité et la disponibilité des systèmes opérant dans des environnements hostiles (conditions critiques). Les FTCS sont synthétisés afin de s'accommoder aux défauts dès leur apparition et avec une réactivité maximale, de tel sorte qu'un défaut *mineur* affectant un sous système n'évolue pas en défaut critique au niveau du système global. Le besoin de systèmes tolérants aux défauts afin d'accroître la fiabilité et le niveau d'automatisation des systèmes modernes de commande devient de plus en plus apparent. En effet, ces derniers sont utilisés dans différentes applications telles que : *safety-critical systems* (réacteurs nucléaires, aéronautique, systèmes de guidage de missiles, *etc.*), *cost-critical systems* (structures spatiales complexes, véhicules spatiaux, véhicules sous-marins autonomes, *etc.*) et *volume-critical systems* (réseaux mobiles de communication, autoroutes automatisées, *etc.*).

Dans les centrales nucléaires, exemple de *safety-critical systems*, l'occurrence d'un défaut peut générer un désastre écologique/humain. Une action de commande appropriée pourrait être dans ce cas l'arrêt du système en situation d'urgence. Dans les *cost-critical systems* et *volume-critical systems*, l'occurrence d'une panne peut conduire à des pertes économiques très lourdes. Les véhicules autonomes sous-marins et spatiaux sont des exemples où le système (véhicule) doit être capable de s'adapter à des événements inattendus, tels que les pannes, et dans le pire des scénarii, de retourner en sécurité vers sa base (sans compléter sa mission).

Parmi les exemples, abondants dans la littérature, de pannes ayant conduit à des situations catastrophiques, nous citons ci-dessous deux événements des plus marquants :

1. Le 26 Avril 1986, il s'est produit, à proximité de la ville Ukrainienne Chernobyl, une explosion énorme au niveau d'une centrale nucléaire, suivie d'une fusion progressive du réacteur No. 4. La raison principale de cette tragédie a été the faulty outdated technology et l'absence d'un mécanisme d'accommodation aux défauts [Vis90] ;
2. La fusée Ariane 5 a explosé en plein vol, le 4 Juin 1996, 37 secondes après son décollage. Cela a été causé par un défaut *software* au niveau de l'Unité de Référence Inertiel (URI) qui a fournit des informations erronées au système de contrôle. Ces dernières étaient relatives à la trajectoire et à la vitesse de la fusée [CNN96].

Les conséquences catastrophiques de ces pannes auraient pu être évitées, ou du moins atténuées, si le système de commande était synthétisé de manière à intégrer un certain degré de tolérance aux défauts. Dans le premier cas, une action de commande appropriée pourrait être l'arrêt du réacteur en situation d'urgence. Dans le second scénario, le dysfonctionnement de l'URI aurait pu être considéré comme un défaut capteur, et un mécanisme de *vote* aurait pu être implémenté afin de réaliser un test de conformité entre l'information fournie par l'URI et l'information prévue.

L'objet de cette thèse étant consacré principalement aux systèmes tolérants aux défauts par approches actives, nous allons introduire dans ce qui suit un bref tour d'horizon des différentes approches développées dans ce domaine.

1.3 Systèmes tolérants aux défauts par approches actives

Dans ce paragraphe, nous allons établir un bref état de l'art des différentes méthodes d'accommodation active. Bien sûr, cet état de l'art ne recouvre pas toutes les approches existantes dans la littérature. Cependant, le lecteur intéressé pourra se référer aux différents travaux donnés par la suite.

Chaque type de méthode fera l'objet d'une discussion critique afin de mettre en évidence ses avantages et ses inconvénients. Cela nous permettra d'introduire et de justifier les choix et les orientations des travaux présentés dans cette thèse.

1.3.1 Défauts affectant les systèmes dynamiques

Un défaut est défini comme étant une déviation, non souhaitée, d'au moins une propriété caractéristique ou d'un paramètre du système. Le défaut est un état pouvant induire des mauvais fonctionnements, voire même une perte totale de composants du système. Les défauts sont des événements qui apparaissent à différents endroits du système (actionneurs, capteurs, composants, ou toute combinaison des trois). Dans la littérature, les défauts sont classés selon plusieurs critères : caractéristiques temporelles des défauts, localisation physique dans le système et l'effet des défauts sur les performances de ce dernier.

Lorsque le critère choisi est la localisation des défauts dans le système, trois classes principales de défauts peuvent être définies :

- **Les défauts actionneurs** : Les défauts actionneurs agissent au niveau de la partie opérative du système en détériorant le signal d'entrée de ce dernier. Ils représentent une perte totale (défaillance) ou partielle d'un actionneur agissant sur le système. Un exemple de perte totale d'un actionneur est un actionneur qui est resté bloqué sur une position entraînant une incapacité à commander le système par le biais de ce dernier. Les défauts partiels peuvent être vus comme étant une perte de puissance au niveau des actionneurs (perte de puissance d'un moteur, fuite dans un vérin, *etc.*).
- **Les défauts capteurs** : Ce type de défaut est la cause d'une mauvaise image de l'état physique du système. Un défaut capteur partiel produit un signal avec plus ou moins d'adéquation avec la valeur vraie de la variable à mesurer. Ceci peut se traduire par une réduction de la valeur affichée

par rapport à la valeur vraie, ou de la présence d'un biais ou de bruit accru empêchant une bonne lecture. Un défaut capteur total produit une valeur qui n'est pas en rapport avec la grandeur à mesurer.

- **Les défauts composants ou systèmes :** Ce type de défaut provient du système lui-même ; bien souvent les défauts n'appartenant pas à un défaut capteur ou actionneur sont classés de manière arbitraire dans cette catégorie. Néanmoins, un défaut composant résulte de la casse ou de l'altération d'un composant du système réduisant les capacités de celui-ci à effectuer une tâche. En pratique, ceci revient à considérer une modification des caractéristiques du système proprement dit (la CTN : résistance à Coefficient de Température Négatif d'une chaudière est cassée, un roulement est altéré, *etc.*).

Si les défauts doivent être classés relativement à leur effets sur les performances du système, deux types de défauts peuvent être distingués : des défauts additifs et des défauts multiplicatifs. Les défauts additifs influencent la moyenne du signal de sortie du système, alors que les défauts multiplicatifs induisent des changements sur la variance et les corrélations du signal de sortie du système, ainsi que des changements dans les caractéristiques spectrales et de la dynamique du système.

1.3.2 Détection et identification des défauts

L'objectif principal d'un AFTCS est de reconfigurer la loi de commande en ligne. Pour cela, des informations relatives aux changements induits par d'éventuels défauts sont nécessaires. Dans ce contexte, un algorithme de FDI joue un rôle crucial dans la philosophie AFTCS. En effet, ce dernier doit détecter l'occurrence d'un défaut, et éventuellement, déterminer son amplitude.

1.3.2.1 Différentes approches de FDI

Plusieurs approches de FDI ont été développées. Généralement, ces approches peuvent être classées en deux catégories principales : techniques basées signal, et techniques basées modèle. Les méthodes basées signal détectent les défauts en testant des propriétés spécifiques de différents signaux de mesure. Les filtres passe-bandes et l'analyse spectrale sont des exemples des différentes techniques utilisées dans cette catégorie de méthodes. Les méthodes basées modèle possèdent un éventail d'application plus important, relativement aux méthodes basées signal, et sont généralement constituées de deux étapes : génération de résidu et évaluation du résidu (prise de décision). Le résidu est généré en comparant le comportement prévu du système avec le comportement mesuré de ce dernier, où le comportement prévu est obtenu en utilisant un modèle du système.

Pour la génération de résidu, basée modèle, deux approches principales ont été utilisées : des méthodes qualitatives (heuristiques) et des méthodes quantitatives (analytiques). Afin de synthétiser un AFTCS, la disponibilité d'une connaissance précise de la dynamique du système en défaut est un facteur crucial. Par conséquent, un intérêt plus particulier a été apporté aux méthodes quantitatives.

Il existe trois classes principales de méthodes quantitatives de génération de résidus : les approches basées observateurs, les approches par espace de parité et les approches par estimation de paramètres.

Le principe de base des approches basées observateurs est d'estimer les variables du système (vecteur d'états), en utilisant un observateur de Luenberger pour le cas déterministe ou un filtre de Kalman pour le cas stochastique et d'utiliser l'erreur d'estimation comme résidu.

Plusieurs méthodes de synthèse de gains d'observateurs ont été proposées dans la littérature : Placement de Structure Propre [PC91, PK89, SCH98], observateurs à entrées inconnues [FW89, HM94], forme canonique de Kronecker [FW89], filtres détecteurs [DS96], et des méthodes d'optimisation, dans le domaine fréquentiel, basées sur la factorisation de la matrice de fonctions de transfert du système [FD94]. De récents développements dans l'application des filtres de Kalman peuvent être trouvés dans [BN93, GQM00, KD97, Nik94, TW90, WZZ00]. Un banc d'observateurs ou de filtres de Kalman, possédant des propriétés distinctes, peut être utilisé en parallèle afin d'isoler les défauts affectant le système [Fra96, FW89, ZL98]. Le nombre ainsi que la nature des défauts à détecter et à isoler nécessitent différentes structures d'observateurs [DRJ01, Fra90]. Un état de l'art des méthodes basées observateurs, dédiées aux systèmes non linéaires, est donné par [GF97, HKY99].

Dans les approches par espace de parité, les résidus sont calculés comme étant la différence entre les sorties mesurées et les sorties estimées ainsi que leurs dérivées associées. Le résidu ainsi obtenu est pondéré par une matrice de transformation afin que ce dernier soit insensible aux perturbations affectant le système et en même temps accroître les capacités d'identification des défauts. L'approche par espace de parité, dans le domaine fréquentiel, a été développée par [Ger97], et dans le domaine temporel, dans [CW84].

Les méthodes de FDI basées sur l'estimation des paramètres reposent essentiellement sur le principe suivant : les défauts affectent, typiquement, les paramètres physiques du système. En estimant, de manière continue, les paramètres du système à surveiller, les résidus peuvent être choisis comme étant les erreurs d'estimation. Afin d'isoler, de manière efficace, les défauts affectant le système, la relation liant les coefficients du modèle du système aux paramètres physiques réels de ce dernier doit exister et être connue. Plusieurs méthodes d'estimation de paramètres pour des fins de FDI ont été proposées : estimation au sens des moindres carrés, approche par variable instrumentale, méthodes par erreur de sortie [Ise84, Ise93, Ise97], estimation par modes glissants [HZ97], approches heuristiques basées sur les réseaux de neurones [HF97] et filtres de Kalman étendus [TW90, WH95].

Récemment, plusieurs approches intéressantes ont été proposées pour la synthèse et l'implémentation de modules de FDI telles que les méthodes géométriques [HKK01], des méthodes se basant sur les inégalités matricielles linéaires [NAG00], et des approches fréquentielles [MD97, SH99].

Le rôle du module d'évaluation des résidus (prise de décision) est de détecter des changements significatifs affectant ces derniers afin de fournir une détection fiable. Plusieurs méthodes de prise de décision ont été utilisées dans la littérature. Citons par exemple, le cas des méthodes de décision binaire et les tests statistiques.

Les tests binaires résultent de la comparaison du résidu et d'un seuil fixé. Des seuils adaptatifs peuvent aussi être utilisés à des fins de robustesse [ENHR88]. Un état de l'art des méthodes utilisant un seuil adaptatif est donné dans [Fra96, PC91, YM00].

La théorie de la décision statistique offre aussi une variété de techniques de détection telles que les méthodes GLR (Generalized Likelihood Ratio), les méthodes SPRT (Sequential Probability Ration Test), les tests χ^2 , la méthode CUSUM (Cumulative Sum Test), *etc.* Pour un état de l'art de ces différentes méthodes, le lecteur pourra se référer à [Bas98, BN93, Bas88, Lai00, TW90, YM01].

Il existe une multitude de champs d'applications des différentes techniques de FDI. Ces champs d'applications regroupent, par exemple, le domaine de la communication [LR97], les procédés industriels [GHS00, KVDJ00], l'automobile et les industries du transport [DAR99, MMS98], l'énergie [JQ00], l'agriculture [LS00], les systèmes complexes à grande dimension [MSR00], *etc.*

1.3.2.2 Mesures de performances en FDI

Afin d'évaluer les performances d'un algorithme de FDI, plusieurs indices de performances ont été définis et utilisés [ZL98], à savoir :

- CF : correct fault detection ;
- FA : False alarm rate ;
- MF : missed fault detection ;
- IF : incorrect fault detection ;
- DD : detection delays.

Un algorithme de FDI performant doit posséder un certain degré de robustesse dans les décisions qu'il procure. La robustesse de la décision signifie que le processus de FDI doit avoir un CF élevé, et des FA, MF, IF et DD très bas.

La figure 1.1 montre une interprétation des différents indices CF, FA, MF et IF pour un système avec un mode nominal et trois défauts possibles.

1.3.3 Méthodes d'accommodation active

Les méthodes AFTC se distinguent des méthodes PFTC par les principes énoncés précédemment tels l'utilisation d'un module de FDI, une synthèse en ligne du régulateur, *etc.* Il est possible de classer les différentes méthodes actives selon certains critères tels que la commande développée soit ou non :

- basée sur des lois de commande pré-calculées hors-ligne (méthodes de projection) ;
- basée sur de l'accommodation de défauts en ligne (commutation de modèles de défauts par exemple) et n'utilisant pas de FDI ;
- tolérante aux défauts non-anticipés utilisant l'isolation et la détection des défauts.

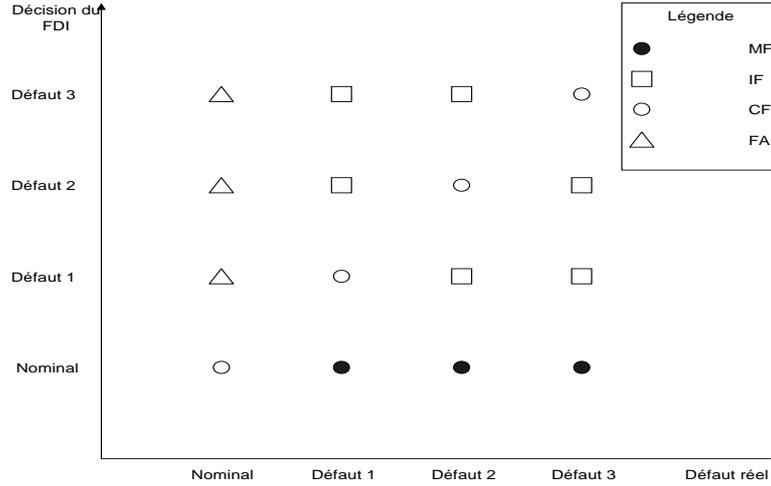


FIG. 1.1 – Indices de performances du processus FDI

Cependant certains types de commandes actives sont parfois difficiles à classer et de ce fait, la classification ci-après n'est pas exhaustive mais permet de se repérer parmi les grandes tendances actuelles.

1.3.3.1 Méthode de la pseudo-inverse

La méthode de la pseudo-inverse [GA91] est l'une des méthodes les plus citées dans le domaine de la commande tolérante aux défauts par approches actives du fait de sa simplicité de calcul et sa capacité à manipuler une très large classe de défauts, à condition qu'ils soient prédéfinis. La version de base de la méthode pseudo-inverse (il en existe plusieurs autres revisitées comme récemment dans [Sta05]) considère un système linéaire nominal sous la forme d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ et A , B , C sont des matrices de dimensions appropriées. La loi de commande est donnée par $u(t) = \mathcal{K}x(t)$, sous l'hypothèse d'accessibilité du vecteur d'état. La représentation d'état du système en défaut est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}^f(t) = A_f x^f(t) + B_f u^r(t) \\ y^f(t) = C_f x^f(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où la nouvelle loi de commande reconfigurée est de structure équivalente, c'est-à-dire $u^r(t) = \mathcal{K}_r x^f(t)$. Dans ce cadre là, l'objectif est de calculer la matrice de gain de retour d'état \mathcal{K}_r de telle sorte que la *distance* (définie ci-dessous) entre les A -matrices d'état des systèmes nominaux et en défaut (en boucle fermée) soit minimisée, *i.e.* :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_r = \underset{\mathcal{K}_r}{\operatorname{arg\,min}} \|(A + BK) - (A_f + B_f \mathcal{K}_r)\|_F \\ = B_f^\dagger (A + BK - A_f) \end{cases} \quad (1.3)$$

où B_f^\dagger est la pseudo-inverse de la matrice B_f et $\|\cdot\|_F$ représente la norme de Frobenius. Les avantages de cette approche résident dans le fait qu'elle est très appropriée pour une implémentation en ligne due à sa simplicité. Cette approche permet aussi de modéliser les effets des défauts affectant le système nominal comme des changements affectant la structure de toutes les matrices d'état de ce dernier. Cependant, le principal inconvénient relatif à cette méthode réside dans le fait que la loi de commande optimale calculée par (1.3) ne garantit pas toujours la stabilité en boucle fermée du système en défaut. En effet, des exemples simples illustrant ce phénomène peuvent être aisément générés, voir e.g. [GA91]. Afin de remédier à ce problème, une méthode de *pseudo-inverse modifiée* a été développée dans [GA92] en ajoutant une contrainte supplémentaire sur la stabilité du système en BF. Cependant, cette contrainte supplémentaire augmente considérablement le temps de calcul. Une approche similaire a été présentée par [Rau94] et [Liu98] où une loi de commande $u^r(t)$ est directement synthétisée à partir de la loi de commande nominale $u(t) : u^r(t) = B_f^\dagger B u(t)$. D'autres modifications et raffinements de cette méthode ont été proposés dans la littérature. Dans [TNS98, NSHT00, NBDM99], en considérant des défauts additifs dans l'équation d'état du système, les auteurs proposent d'intégrer un terme de commande additif dans la loi de commande reconfigurée afin de compenser les effets des défauts. Le cas du retour statique de sortie a été considéré par [KA99], et une approche fréquentielle du problème a été traitée par [KV00a]. Récemment, la méthode de la pseudo-inverse a été remaniée dans [Sta05] en utilisant un ensemble de modèles admissibles plutôt qu'une recherche optimale ne garantissant pas une certaine dynamique du système lors de la présence d'un défaut.

1.3.3.2 Placement de structure propre : Eigenstructure Assignment (EA)

Le placement de structure propre a été popularisé dans les années 1980 par Andry, Shapiro et Chung dans leur papier [ASC83], où la méthode de placement de structure propre directe (Direct Structure Assignment) a été introduite. L'idée principale de cette méthode consiste à placer les valeurs propres d'un système linéaire via un retour d'état, et ensuite à utiliser tout degré de liberté disponible pour placer les vecteurs propres correspondant aussi précisément que possible. Les valeurs propres déterminent la fréquence naturelle et l'amortissement (damping) de chaque mode, tandis que les vecteurs propres indiquent l'influence de chaque mode sur les différentes sorties du système. Dans ce qui suit, nous allons d'abord donner un bref aperçu sur les bases de cette méthode, puis nous mettrons en évidence les principes de mise en oeuvre de cette approche dans la reconfiguration de lois de commande.

i) Introduction au placement de structure propre

Cette section, largement inspirée par [DA94, KA96b], a pour but d'introduire le principe général de la méthode EA.

Soit le système linéaire suivant, supposé commandable et observable :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

La réponse du système est donnée par

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.5)$$

En supposant que la matrice d'état A est de rang plein et possède des valeurs propres distinctes, nous pouvons écrire, en nous basant sur la décomposition spectrale

$$e^{At} = e^{V\Lambda V^{-1}t} = Ve^{\Lambda t}L = \sum_{j=1}^n v_j e^{\lambda_j t} l_j \quad (1.6)$$

où $L = V^{-1}$, λ_j est la j -ème valeur propre, v_j est la j -ème colonne de V et l_j est la j -ème ligne de L .

A partir des équation (1.5) et (1.6), nous obtenons

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n c_i v_j e^{\lambda_j t} l_j x(0) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_i v_j l_j b_k \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}u(\tau)d\tau \quad (1.7)$$

où b_k est la k -ème colonne de B , c_i est la i -ème colonne de C et u_k est la k -ème entrée. La réponse de la i -ème sortie correspondant à une impulsion sur la k -ème entrée est donnée par

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m R_{ijk} e^{\lambda_j t} \quad (1.8)$$

où $R_{ijk} = c_i v_j l_j b_k$ est le résidu modale pour la sortie i associé à la valeur propre j et correspondant à l'entrée k .

La conclusion que nous pouvons tirer de l'analyse ci-dessus est que l'effet de chaque mode du système sur chaque sortie de ce dernier dépend des vecteurs propres du système. Cela met en évidence l'idée principale de cette méthode consistant à placer les valeurs propres d'un système linéaire via un retour d'état, et ensuite d'utiliser tout degré de liberté disponible pour minimiser la *distance* (au sens des moindres carrés) entre les vecteurs propres du système en boucle fermée et les vecteurs propres désirés.

ii) Reconfiguration de lois de commande par placement de structure propre

La méthode par placement de structure propre pour la reconfiguration de lois de commande est une approche plus intuitive que l'approche par pseudo-inverse car elle vise à faire coïncider les structures propres (c.à.d les valeurs propres et les vecteurs propres) des matrices des systèmes nominaux et en défaut en boucle fermée. L'idée principale est d'assigner exactement les plus importantes valeurs propres de ces matrices, et en même temps de minimiser la différence, en norme 2, entre les différents vecteurs propres correspondants. Cette méthode a été développée aussi bien avec une loi de commande par retour d'état [ZJ99a], [ZJ00] qu'avec une loi de commande par retour de sortie [KA96a]. Plus précisément, dans le cas de retour d'état, si $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ sont les valeurs propres de la matrice d'état du système en boucle fermée $A + BK$ résultant d'une loi de commande par retour d'état $u(t) = \mathcal{K}x(t)$, et si v_i sont leurs vecteurs propres correspondants, la méthode par placement de structure

propre consiste à calculer le gain \mathcal{K}_r de retour d'état pour le modèle en défaut (1.2), solution du problème d'optimisation suivant [ZJ99a]

$$\begin{cases} \text{Trouver} & \mathcal{K}_r \\ \text{tel que} & (A_f + B_f \mathcal{K}_r)v_i^f = \lambda_i v_i^f, i = 1, 2, \dots, n \\ \text{et} & v_i^f = \arg \min_{v_i^f} \|v_i - v_i^f\|_{W_i}^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\|v_i - v_i^f\|_{W_i}^2 = (v_i - v_i^f)^T W_i (v_i - v_i^f)$ et W_i est une matrice de pondération définie positive servant de degré de liberté supplémentaire. En d'autres termes, le nouveau gain \mathcal{K}_r est synthétisé de manière à ce que les pôles du système en boucle fermée coïncident avec les pôles du système nominal en boucle fermée ; de même que les vecteurs propres des matrices d'état doivent être les plus proches possibles. Du fait que les valeurs et les vecteurs propres déterminent la forme de la réponse temporelle du système en boucle fermée, le but est donc de garantir une dynamique du système en boucle fermée la plus proche possible de celle du système nominal. Ainsi, la méthode par placement de structure semble garantir la stabilité du système en boucle fermée. La charge de calcul relative à cette méthode ne semble pas importante dans la mesure où l'expression analytique de la solution de (1.9) est disponible [ZJ99a], *i.e.* une optimisation en ligne n'est pas nécessaire. Cependant, les incertitudes de modèles ainsi que les incertitudes relatives au processus FDI ne sont pas aisément incorporables dans le problème d'optimisation.

1.3.3.3 Approche multi-modèles

Dans cette section, nous allons nous intéresser à deux méthodes de reconfiguration de lois de commande appartenant à la famille des approches multi-modèles : Multiple Model Switching and Tuning (MMST) et Interacting Multiple Model (IMM). Ces deux méthodes considèrent un ensemble pré-défini de situations défectueuses (ensemble de défauts pouvant affecter le système). Dans la première approche, suite à l'apparition d'un défaut sur le système, l'algorithme MMST commute vers une loi de commande pré-calculée correspondant à la situation défectueuse. La seconde approche se différencie de la première en considérant le modèle du système en défaut, correspondant à un scénario donné, comme étant une combinaison convexe de tous les modèles en défauts pré-définis. Dans ce qui suit, nous allons présenter plus en détail les principes de base de ces deux approches.

i) Multiple Model Switching and Tuning (MMST)

Les approches multi-modèles ont reçu un intérêt grandissant ces dernières années [BM98, BLM00a, BLM00b, BLM01, BM99, Dem01, GBMR98, KV00a]. Dans l'approche MMST, la dynamique de chaque situation défectueuse est décrite par un modèle différent [BM98]. Ces modèles sont implantés en parallèle, où chacun possède un régulateur propre comme illustré à la figure (1.2). Le problème de reconfiguration de lois de commande est alors équivalent à définir, à chaque instant, quel couple de modèle (M_i)/régulateur (\mathcal{K}_i) est le plus approprié pour une situation défectueuse particulière.

La figure (1.3) illustre l'avantage d'une telle approche en reconfiguration de lois de commande. En

présence d'un défaut, le système est supposé passer d'un modèle nominal M_0 à un modèle en défaut M_f . La figure a) représente un schéma de commande adaptative utilisant un seul modèle, et la figure b) illustre le schéma MMST. Comme nous pouvons le voir, pour des modèles supposés certains, l'algorithme MMST convergera plus rapidement vers le modèle en défaut comparativement à l'approche basée sur un modèle unique.

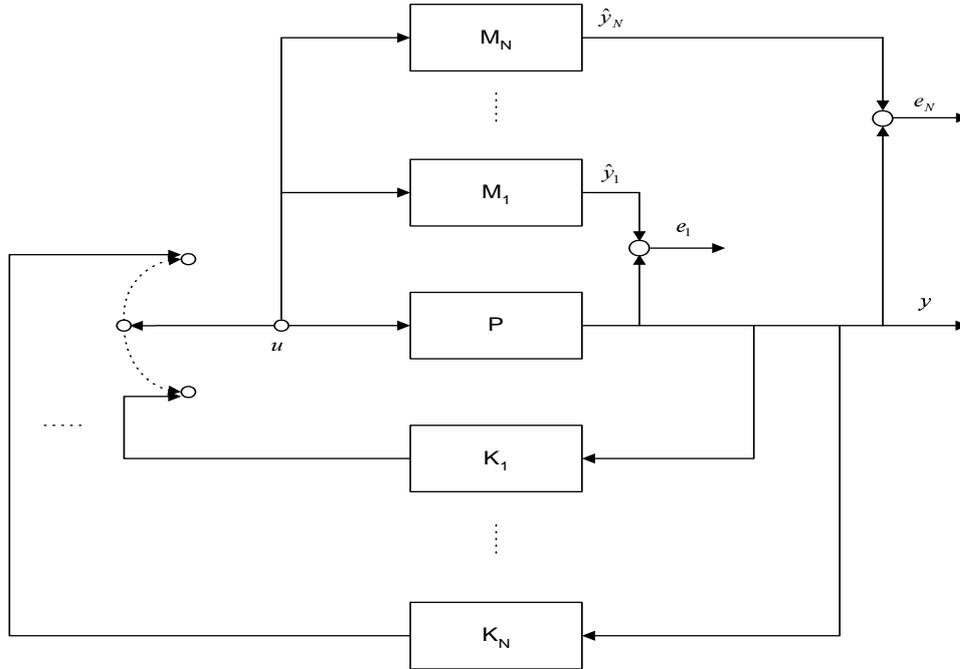


FIG. 1.2 – Multiple Model Switching and Tuning

Considérons les systèmes représentés sous la forme d'état suivante :

$$S : \begin{cases} \dot{x} = A_0(p(t))x + B_0(p(t))u \\ y = C_0(p(t))x \end{cases} \quad (1.10)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_0 \in \mathbb{R}^{k \times n}$ et $p(t) \in \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^l$ définissent les paramètres du système. $p(t)$ varie dans le temps de manière abrupte et représente les différents scénarii de défauts.

Soit \mathcal{M} l'ensemble de N modèles linéaires

$$\mathcal{M} : \{M_1, \dots, M_N\} \quad (1.11)$$

tel que

$$M_i : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u \\ y_i = C_i x_i + D_i u \end{cases} \quad (1.12)$$

où le modèle M_i correspond à un ensemble de paramètres $p_j \in \mathcal{S}$ donné. Un régulateur stabilisant \mathcal{K}_i est synthétisé pour chaque modèle $M_i \in \mathcal{M}$.

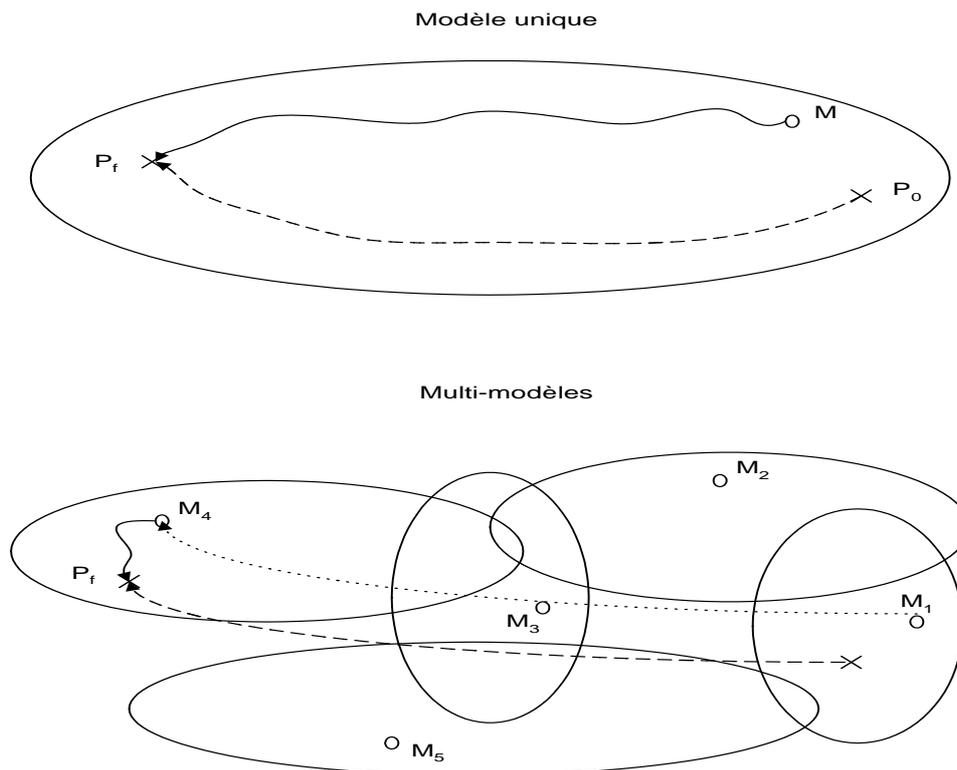


FIG. 1.3 – Single model vs. multiple model adaptation

La stratégie de reconfiguration de loi de commande est établie de la façon suivante : à chaque instant, le modèle le plus proche du système réel (c.à.d le plus apte à représenter le comportement dynamique du système), est déterminé en calculant un indice de performance $J_i(t)$, fonction des erreurs $e_i(t)$ entre les sorties estimées du modèle M_i et les mesures à l'instant t .

Un exemple d'indice de performance couramment utilisé est donné comme suit [NB97] :

$$J_i(t) = \alpha e_i^2(t) + \beta \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e_i^2(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

$$\alpha \geq 0, \beta > 0, \lambda > 0$$

où α et β sont des coefficients de pondération des termes d'erreurs instantanées et des termes d'erreurs à long terme, respectivement. Le facteur d'oubli λ assure la bornitude de l'indice de performance $J_i(t)$ pour e_i bornée. Le couple modèle/régulateur, M_i/\mathcal{K}_i , possédant le plus petit indice de performance est alors choisi et une période d'attente $T_{min} > 0$ est imposée afin d'éviter des commutations trop rapides. La plupart des algorithmes MMST incluent une partie *tuning* qui apparaît durant la période où le régulateur \mathcal{K}_i est actif, et durant laquelle, les paramètres du modèle M_i correspondant sont réactualisés en utilisant une technique appropriée d'identification [AW95]. Le théorème suivant énonce des résultats de stabilité de cette approche MMST [NB97] :

Théorème 1.1 *Considérons le système (1.10), où les N modèles sont fixés et le schéma de commutation est utilisé avec $\beta, \lambda, T_{min} > 0$ et $\alpha \geq 0$. Alors, pour tout système avec un vecteur paramètres $p \in \mathcal{S}$, il existe un nombre positif T_s et une fonction $\mu_{\mathcal{S}}(p, T_{min}) > 0$, tel que si :*

- $T_{min} \in (0, T_s)$
- il existe au moins un modèle M_i tel que $\|\hat{p}_j - p_j\| < \mu_s(p, T_{min})$

alors, tous les signaux du système global, ainsi que les différents indices de performances $J_i(t)$, sont uniformément bornés. Ici, T_s dépend uniquement de \mathcal{S} , et μ_s dépend de β, λ, α et \mathcal{S} . \square

Le théorème 1.1 établit que le système MMST est stable si l'ensemble des modèles M_i est suffisamment dense dans l'espace des paramètres \mathcal{S} et que le taux d'échantillonnage est suffisamment rapide. Cependant, le théorème 1.1 ne donne aucune précision ou méthodologie sur le choix de \mathcal{M} ou de T_{min} .

Malgré les limitations du théorème 1.1, plusieurs travaux, notamment dans le domaine de l'aéronautique, ont utilisé ce type d'approche [BM98, BLM00a, BLM00b, BLM01]. Pour des systèmes avec relativement peu de modes de défaillances ou des modes parfaitement connus, la commutation de modèles multiples possède l'avantage d'être très rapide et stable. Des travaux dans le cadre non linéaire de la commande MMST [NDfG03] ont permis d'étendre des résultats du cadre linéaire vers le non linéaire. Cependant, des défauts non répertoriés peuvent toujours apparaître constituant la principale limitation de ces méthodes. L'explosion du nombre de modèles avec le nombre de défauts simultanés considérés représente également une autre limitation.

ii) Interacting Multiple Models (IMM)

La méthode d'Interaction de Modèles Multiples (en anglais Interacting Multiple Model) tend à solutionner l'une des principales limitations de l'approche MMST, à savoir que chaque situation défectueuse doit être exactement modélisée, et cela en considérant que le modèle du système en défaut est représenté par une combinaison convexe de modèles pré-définis dans un ensemble \mathcal{M} . Dans ce contexte, le modèle du système défectueux est donné comme suit

$$M_f = \sum_{i=1}^N \mu_i M_i = \mu^T \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}, \quad M_i \in \mathcal{M}, \quad \mu_i > 0 \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^N \mu_i = 1, \quad (1.14)$$

ou sous forme d'équations d'états

$$M_f : \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_N \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \mu_1 C_1 & \mu_1 C_2 & \dots & \mu_1 C_N \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (1.15)$$

Remarque 1.1 Il est important de noter que le choix de l'ensemble des modèles pré-définis \mathcal{M} ainsi que la validité de l'hypothèse stipulant que le modèle du système en défaut est une combinaison

convexe des modèles M_i restent des questions ouvertes.

Dans l'approche IMM, le processus de détection de défauts consiste donc à identifier en ligne les variables μ_i . Il existe deux méthodes principales pour le calcul du vecteur paramètres μ . La première méthode propose de synthétiser un filtre de Kalman pour tout $M_i \in \mathcal{M}$ et de mettre ces derniers en parallèle. La probabilité que chacun de ces modèles représente l'état réel du système peut être calculée et μ est égal à ces probabilités. Cette méthode est appelée Multiple Model Adaptive Estimation (MMAE) [May99, ZJ99b]. Dans la seconde approche, l'estimation de l'erreur de sortie est calculée en fonction du vecteur μ . Ce dernier est donc choisi pour minimiser cette erreur [KV00b, KVN01].

Après avoir identifié le modèle du système en défaut, une multitude de stratégies de reconfiguration de lois de commande peuvent être utilisées. [KV00b] et [KVN01] proposent un schéma de commande prédictive dans lequel la minimisation de l'erreur de poursuite, et donc de μ , est incluse dans la fonction coût. [ZJ99b] suggère d'utiliser une stratégie EA et [May99] s'appuie sur un contrôleur fixe, n'utilisant le modèle du système en défaut M_f que pour l'estimation du vecteur d'état.

L'approche IMM possède des capacités attractives vis-à-vis du traitement du cas multi-défauts et cela en combinant (de façon convexe) les différents modèles mono-défauts. Cependant, le calcul en ligne des coefficients μ fait de cette méthode une approche adaptative et non à commutation de modèles (MMST). Cela conduit à une perte de vitesse de convergence propre à la méthode MMST.

1.3.3.4 Accommodation par commande adaptative

De nombreuses méthodes actives utilisant un modèle analytique sont issues de l'approche adaptative (table de données regroupant un ensemble de matrices de rétroaction ou de régulateurs calculés au préalable pour palier la présence de certains défauts sur un système, commande adaptative avec modèle de poursuite explicite, implicite, commande auto-ajustable, *etc.*). Ces méthodes semblent être naturelles pour résoudre le problème d'accommodation aux défauts. En effet, lorsqu'un défaut apparaît sur un système, il entraîne une modification de ses paramètres. L'identification en ligne de ces paramètres permet de déterminer les coefficients du nouveau correcteur.

La méthode par modèle de référence est une approche attractive. Le principe consiste à forcer le système, quelque soit son état, à atteindre les mêmes performances que le modèle désiré. Pour illustrer cela, considérons un système linéaire à temps invariant

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + d \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.16)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$ et un modèle de référence

$$\dot{y}_d = A_d y_d + B_d r \quad (1.17)$$

où $y_d \in \mathbb{R}^k$ et $r \in \mathbb{R}^k$. A_d et B_d sont des matrices carrées données, avec A_d stable. Une stratégie de commande par retour d'état est considérée et est donnée comme suit

$$u = C_0 r + G_0 x + v \quad (1.18)$$

où $C_0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $G_0 \in \mathbb{R}^{k \times n}$ et $v \in \mathbb{R}^k$ sont les paramètres du contrôleur. La dynamique en boucle fermée est alors donnée comme suit

$$\dot{y} = (CA + CBG_0)x + CBC_0 r + CBv + Cd \quad (1.19)$$

L'objectif de la loi de commande par retour d'état est de faire coïncider la dynamique en boucle fermée (1.19) avec la dynamique désirée (1.17). En théorie, dans le cas du 'modèle de poursuite parfait', aucune diminution des performances n'est tolérée. L'erreur entre le modèle désiré et le système doit donc toujours être nulle. Dans la pratique, deux approximations de cette approche peuvent être réalisées. La méthode par poursuite de modèle explicite consiste à minimiser, au sens des moindres carrés, l'erreur entre la sortie du modèle et la sortie du système. Par approche implicite, le critère de minimisation porte directement sur les trajectoires suivies par les composantes du vecteur d'état et non sur les sorties (minimisation d'un critère quadratique).

De nombreuses études ont été menées dans le cadre de l'accommodation aux défauts par modèle de poursuite. Ces méthodes ont souvent été testées en simulation dans le domaine de l'aéronautique [Dit88, HS90, OK91, Rau95, ZPIR91].

Morse et Ossman [MO90] ont étudié un régulateur multivariable adaptatif défini par Sobel [SHKa82] qui ajuste directement les gains du régulateur, en temps réel. Cette méthode, testée en simulation sur un avion AFTI/F-16, donne des résultats satisfaisants même en présence de défauts multiples. Cependant, les auteurs soulignent la difficulté de déterminer les matrices de pondération nécessaires à la conception de la loi de commande.

Bodson et al. [BG97] proposent trois algorithmes différents pour l'accommodation aux défauts fondée sur une loi de commande adaptative :

- une commande adaptative indirecte qui utilise une estimation des paramètres du système et un algorithme des moindres carrés ;
- une commande adaptative directe à erreur de sortie ;
- une commande adaptative directe à erreur d'entrée.

L'application en simulation de ces méthodes sur un avion donne des résultats satisfaisants, et en particulier le dernier algorithme. Mais les différentes situations étudiées ne font intervenir que des défauts peu sévères et sans bruit.

1.3.3.5 Commande prédictive

Par ailleurs, le potentiel de la commande prédictive à résoudre le problème de l'accommodation aux défauts a été montré par Maciejowski [Mac97]. Les méthodes proposées permettent de réadapter le correcteur en présence d'un défaut de manière à garantir la stabilité du système et à maintenir des

performances très proches de celles du système nominal [GBMR98, RM00, WKDWOK99].

Cependant, la plupart de ces méthodes sont valables sous certaines hypothèses : le modèle du défaut et ses effets sur le système doivent être parfaitement connus, les défauts considérés doivent être de faibles amplitudes de telle sorte que les objectifs puissent rester inchangés après l'apparition du défaut [Mac00].

Huzmezan et Maciejowski [HM98] ont traité le problème de l'accommodation aux défauts sévères apparaissant sur un avion. L'approche présentée utilise un modèle précis de l'avion qui est mis à jour lors de l'apparition d'un défaut. Ce modèle est associé à une commande prédictive et suppose connues les informations concernant la présence du défaut.

Kanev et Verhaegen [KV00b] ont proposé une méthode d'accommodation pour des systèmes non linéaires. Cette méthode est fondée sur une combinaison entre les techniques multi-modèles et la commande prédictive généralisée. Cette méthode a été appliquée à un robot et à un pendule inversé.

1.3.3.6 Méthodes heuristiques

L'accommodation aux défauts nécessite une grande 'flexibilité' afin de s'adapter au plus grand nombre de situations imprévues. En effet, en présence de défauts, le système est amené à évoluer dans des zones de fonctionnement que l'on ne maîtrise pas et dans lesquelles, on ne dispose pas toujours de modèle mathématique pour caractériser son évolution. Dans ce cas, une approche heuristique permet d'apporter une solution au problème de la reconfiguration, en particulier en introduisant la notion d'apprentissage [GRE, PHY⁺], ou de système expert [HS89].

Ces méthodes s'inscrivent dans le cadre général de la commande dite 'intelligente'. Cette stratégie nécessite en général :

- l'évaluation des performances du système ;
- la mémorisation des paramètres nouvellement calculés avec les points de fonctionnement correspondant ;
- la réactualisation de la loi de commande.

i) Systèmes experts

La capacité des systèmes experts à établir un raisonnement proche de celui d'un humain en fait un support solide pour résoudre le problème de la reconfiguration.

Handelman [HS89] a proposé une approche utilisant une combinaison de la redondance analytique et des systèmes experts afin de détecter et localiser un grand nombre de défauts potentiels et de pouvoir s'y accommoder en ligne. Cette approche aide à résoudre une partie des problèmes de la reconfiguration. Elle est efficace pour traiter des défauts brusques et des biais importants affectant les

capteurs et les actionneurs, mais elle n'est pas utilisable en présence de défauts de procédé proprement dit. Le système expert qu'il utilise est composé :

- d'une base de connaissance qui contient toute les informations, relatives à l'état du système, sous forme de paramètres et de règles ;
- d'un élément d'inférence qui cherche les valeurs des paramètres pour le test des différentes règles.

L'élément d'inférence gère les différentes composantes de la base de connaissances qui sont : la commande, la détection de défauts, le diagnostic, l'estimation de l'amplitude des défauts et la reconfiguration. Chacune de ces tâches est une entité en elle-même. Elle possède sa base de connaissance et son élément d'inférence qui fait son propre traitement et gère les relations avec les autres tâches réduisant ainsi le temps de calcul.

Le module de commande doit fournir en permanence une estimation de l'état afin de calculer la commande à appliquer au procédé. Le module de détection a pour tâche de surveiller le système et de détecter les défauts significatifs. La phase de diagnostic cherche ensuite les causes probables du défaut et essaie de trouver un modèle mathématique du système défaillant. Ce modèle mathématique est choisi dans une *banque* de modèles définis hors ligne pour d'éventuels défauts connus à l'avance. Cette procédure correspond à une technique multi-modèles. Une fois le modèle du système en défaut connu, la phase de reconfiguration sélectionne l'action à prendre pour rétablir l'équilibre. Cette action peut être une des règles heuristiques pré-définies ou bien un ajustement de la loi de commande par une approche analytique.

ii) Réseaux de neurones

Les stratégies d'accommodation aux défauts fondées sur les techniques d'apprentissage par réseaux de neurones ont été introduites par Farrell et *al.* [FBA93]. D'autres méthodes ont ensuite été développées pour les systèmes non linéaires et appliquées en simulation pour s'accommoder aux défauts de capteurs et d'actionneurs d'avions [HWP92, NNNC95, NNC⁺95, NMI⁺99].

Polycarpou a proposé une approche permettant d'estimer le défaut en ligne à l'aide de réseaux de neurones [PH95, Pol01]. Cette estimation sert à la fois au diagnostic et à l'accommodation aux défauts. Une procédure systématique pour la mise en oeuvre d'un algorithme d'estimation non linéaire a été développée. Un schéma d'apprentissage stable a également été proposé en utilisant la théorie de Lyapunov. Cette approche est valable pour une classe particulière de systèmes multivariables non linéaires soumis à des défauts abrupts uniquement. Elle requiert également que tous les états du système soient mesurés.

Les auteurs utilisant ces techniques soulignent cependant les difficultés de mise en oeuvre de ces dernières à cause des capacités de calcul nécessaires et du manque d'outils de validation des algorithmes d'estimation et de commande par réseaux de neurones.

iii) Logique floue

Par ailleurs, la théorie de la logique floue a également été utilisée pour concevoir des techniques d'accommodation aux défauts dans le cadre de systèmes non linéaires. Un modèle flou de Takagi-Sugeno est d'abord conçu à l'aide d'une structure hiérarchique d'apprentissage. Ensuite, le schéma d'accommodation basé sur une commande neuro/floue adaptative stable permet l'apprentissage en ligne de nouvelles dynamiques inconnues causées par l'apparition des défauts [YP01].

Lopez et Patton [LP99] ont utilisé les modèles de Takagi-Sugeno pour le diagnostic et l'accommodation à l'aide d'observateurs et de régulateurs flous. Les conditions de stabilité des modèles adaptatifs flous ont été données.

Les méthodes d'accommodation aux défauts basées sur la logique floue ont été appliquées en simulation à de nombreux systèmes non linéaires, comme par exemple, une chaudière à gaz [ASNR93], un système d'air conditionné [LD01], un moteur [LPD00], un avion [SV98] ou une centrale nucléaire [EU95].

1.3.3.7 Reconfigurabilité

Peu d'études notent le fait que ce sont les propriétés du système défaillant qui déterminent les performances qui peuvent être atteintes en présence d'un défaut. Des modèles de composants génériques ont été utilisés pour analyser la capacité d'un système à tolérer des défauts [SG98]. L'analyse est basée sur une description qualitative des services qu'un composant du système peut fournir. La reconfiguration consiste alors à combiner les services fournis par différents composants afin d'atteindre l'objectif désiré.

Une analyse plus quantitative que qualitative des propriétés du système défaillant permet de déterminer si le système peut continuer à fonctionner après l'apparition d'un défaut. L'étude est fondée sur la controllabilité des systèmes hybrides [FKB99].

L'analyse des propriétés de la tolérance aux défauts de capteurs a été traitée par Staroswiecki [SHA99]. Cette étude porte sur l'utilisation des indices d'observabilité pour déterminer le nombre minimal de capteurs garantissant une estimation partielle ou totale de l'état du système.

Une représentation graphique des ensembles de capteurs ou d'actionneurs redondants a été proposée par Hoblos [Hob01]. Ces ensembles sont organisés selon un graphe orienté contenant tous les chemins d'accommodation pour lesquels l'espace d'état reste observable/commandable. La tolérance aux défauts est analysée en étudiant les chemins de ce graphe et en se fondant sur le degré de redondance et sur la fiabilité des composants.

1.3.4 Discussion

Les AFTCS compensent les effets des défauts soit en sélectionnant des lois de commande pré calculées, ou en synthétisant une nouvelle loi de commande en ligne et en temps réel. Les deux approches

requièrent l'utilisation d'un algorithme de détection et d'identification de défauts (FDI) afin d'identifier les changements induits par les différents défauts et de reconfigurer la loi de commande en ligne. La synthèse de cette classe de systèmes nécessite donc la cohabitation de différentes tâches, à savoir, la détection de défauts en ligne, la prise de décision en temps réel et la reconfiguration de la loi de commande. Cela induit naturellement des problèmes inhérents à cette classe de systèmes, à savoir : les retards de détection, les fausses alarmes, la non détection de défauts, *etc.* Cependant, dans les différentes méthodes exposées ci dessus, ces problématiques critiques ne sont pas explicitement prises en considération. En effet, la plupart de ces méthodes supposent que l'information fournie par le module de FDI est parfaite *c.à.d* qu'à tout instant l'état du processus FDI est identique à l'état du processus défaut.

Ce constat est à la base des travaux présentés dans ce document. En effet, nous nous sommes intéressés aux contraintes résultants de l'intégration d'un module de FDI et d'un module de reconfiguration de lois de commandes. Ces contraintes peuvent conduire à une perte de performances, voire une instabilité, du système tolérant aux défauts, si ces différents aspects ne sont pas pris en compte lors de la conception du système.

La formalisation mathématique de cette problématique nous a amené à nous intéresser à une classe de **Systèmes Hybrides Stochastiques à Sauts Markoviens**, auxquels nous ferons référence dans la suite du document par **AFTCSMP** (en anglais : **Active Fault Tolerant Control Systems with Markovian Process**). Dans cette classe de systèmes, deux processus aléatoires sont définis : le premier représente les défauts pouvant affecter les différents composants du système, et le second représente le processus FDI utilisé pour la reconfiguration de la loi de commande.

1.4 Systèmes tolérants aux défauts à sauts markoviens

Les pannes sont des événements aléatoires ponctuels pouvant affecter tout composant du système, à tout moment, et avec divers degrés de sévérité : ainsi un gyroscope défaillant se traduit par la perte d'une position angulaire, alors que le blocage d'une servo-valve rend inutilisable une gouverne. Afin de modéliser le comportement aléatoire des pannes ainsi que les changements induits par l'apparition de ces dernières, au niveau du système, un process stochastique, $\eta(t)$, est défini. Les décisions du processus FDI sont basées sur des tests statistiques, et ne sont donc pas déterministes. Un processus stochastique, $\psi(t)$, est défini afin de représenter ces décisions. Les deux processus $\eta(t)$ et $\psi(t)$ sont supposés Markoviens à espace d'états finis $S = \{1, 2, \dots, s\}$ et $R = \{1, 2, \dots, r\}$, respectivement. Cela représente la première limitation de notre travail. Cependant, l'hypothèse Markovienne est nécessaire pour limiter la complexité mathématique et elle constitue une première modélisation couramment utilisée, par exemple en théorie de la fiabilité.

Limiter le processus $\eta(t)$ à un ensemble fini de valeurs revient, pour la description des pannes, à supposer qu'un composant est soit intègre, soit hors-service et à exclure la dégradation progressive du fonctionnement. Ceci peut correspondre à une gestion prudente des composants qui désactive les éléments dès qu'ils manifestent des défauts, mais il est clair que l'on pourrait envisager des politiques plus fines en décrivant une intégrité variant dans la plage 0% – 100%.

Typiquement, un système de contrôle est synthétisé en supposant que le système n'est pas sujet à des pannes. Cependant, cela n'est pas réaliste. Fort heureusement, l'occurrence de pannes n'est pas fréquente, voire rare. Pour de tels événements rares, et en définissant un petit intervalle de temps h , la probabilité d'apparition de deux événements, ou plus, dans cet intervalle de temps est presque nulle. Naturellement, le processus stochastique le mieux approprié pour décrire le comportement d'événements rares est le processus de Poisson, qui est aussi un processus de Markov [TK84].

Le processus FDI peut être interprété comme un test stochastique d'hypothèses [SW93]. Ce test d'hypothèses peut être implémenté en utilisant des tests sur un seul échantillon de données (single sample tests), *i.e.*, les données actuellement disponibles, des tests à fenêtre glissante, ou des tests séquentiels. Dans le cas des *single sample tests*, l'information est collectée, traitée, et *jetée* (discarded) et cela à chaque échantillon de temps (time sample). Si l'information est corrompue par un bruit blanc additif, alors le processus FDI est *sans mémoire* (memoryless). Cela signifie que la décision du processus FDI est indépendante des décisions antérieures. Sous ces conditions, un processus Markovien peut être utilisé afin de décrire le comportement des transitions du processus FDI [SW93]. Aussi, le processus FDI peut être, raisonnablement, représenté par un processus Markovien si le temps requis par la prise de décision du processus FDI est suffisamment petit par rapport à l'intervalle de temps entre deux défauts consécutifs.

Dans certains systèmes physiques, l'hypothèse Markovienne semble être très forte, cependant, elle peut rester valable pour un changement adéquat de la structure d'état. Par conséquent, aucun système physique ne peut être classifié, avec exactitude, comme étant Markovien ou non-Markovien [How71a]. Le lecteur intéressé pourra aussi se référer à [How71b, Str68] pour une étude de la convergence de processus non-Markoviens vers des processus Markoviens.

1.4.1 Modèles mathématiques

1.4.1.1 Modèle dynamique du système

Le système nominal (sans défauts) peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = f(x_t, u(y_t, t), t) \\ y_t = h(x_t, t) \end{cases} \quad (1.20)$$

Si le système (1.20) est sujet à des défauts aléatoires et que ces derniers sont supervisés par un algorithme de FDI, alors le FTCSMP peut être décrit comme suit [SW93]

$$\begin{cases} \dot{x}_t = f(x_t, u(y_t, \psi_t, t), \xi_t, \eta_t, t) \\ y_t = h(x_t, \zeta_t, t) \end{cases} \quad (1.21)$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état; $y_t \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée; $u(y_t, \psi_t, t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande; ξ_t, η_t, ζ_t représentent les différents processus aléatoires modélisant les défauts système, actionneurs et capteurs respectivement; et ψ_t représente le processus aléatoire modélisant le processus FDI. ξ_t, η_t, ζ_t et ψ_t sont des processus Markoviens à espaces d'états finis $\mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$, $\mathcal{A} = \{1, \dots, a\}$,

$\mathcal{C} = \{1, \dots, c\}$ et $\mathcal{R} = \{1, \dots, r\}$, respectivement.

La fonction f est supposée vérifier la condition :

$$f(0, u(y_t, \psi_t, t), \xi_t, \eta_t, t) = 0 \quad (1.22)$$

la condition d'accroissement

$$\| f(x_t, u(y_t, \psi_t, t), \xi_t, \eta_t, t) \| \leq k(1 + \| x \|) \quad (1.23)$$

et la condition de Lipschitz

$$\| f(\tilde{x}, u(y, \psi, t), \xi, \eta, t) - f(x, u(y, \psi, t), \xi, \eta, t) \| \leq k \| \tilde{x} - x \| \quad (1.24)$$

où k est une constante donnée. Sous ces conditions, la solution $x(t) = x(t; \psi_0, \xi_0, \eta_0, t_0)$ du système (1.21) est unique (presque sûrement) et est un processus stochastique absolument continu [Kha62]. Le processus $\{x_t, \xi_t, \eta_t, \zeta_t, \psi_t\}$ est un processus Markovien sur l'intervalle $I = [t_0, t_f]$ [Kha80, SW93, Won71]. Afin d'illustrer cette propriété Markovienne, considérons $t_0 \leq s \leq t_f \in I$, alors x_t est uniquement déterminée par $x_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$ et ψ_s avec $s \leq w \leq t$. Sachant que ξ_t, η_t, ζ_t et ψ_t sont des processus Markoviens, ξ_w, η_w, ζ_w et ψ_w , conditionnés sur ξ_s, η_s, ζ_s et ψ_s avec $w \geq s$, sont indépendants de $\xi_{\tilde{w}}, \eta_{\tilde{w}}, \zeta_{\tilde{w}}$ et $\psi_{\tilde{w}}, \tilde{w} < s$. Il s'en suit que $(x_t, \xi_t, \eta_t, \zeta_t, \psi_t)$, conditionné sur $(x_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s, \psi_s)$, est indépendant des variables aléatoires $(x_{\tilde{w}}, \xi_{\tilde{w}}, \eta_{\tilde{w}}, \zeta_{\tilde{w}}, \psi_{\tilde{w}})$.

Dans le travail présenté dans cette thèse, nous nous intéresserons au cas des systèmes dynamiques linéaires. La représentation d'état est donnée dans ce cas par :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = A(\xi_t)x_t + B(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) \\ y_t = C(\zeta_t)x_t \end{cases} \quad (1.25)$$

où $A(\xi_t)$, $B(\eta_t)$ et $C(\zeta_t)$ sont des matrices de dimensions appropriées. Notons, à partir de ce modèle, que les matrices A , B et C dépendent des processus défauts systèmes, actionneurs et capteurs, respectivement. Notons aussi que le signal de commande $u(y_t, \psi_t, t)$ ne dépend que de la décision du processus FDI ψ_t . Ce modèle souligne l'aspect pratique du formalisme Markovien, où les processus défauts et le processus FDI ne sont pas toujours identiques.

1.4.1.2 Les processus défauts et FDI

Dans ce qui suit, nous allons caractériser les processus défauts actionneurs η_t et FDI ψ_t . Cependant, il est important de noter que les mêmes définitions s'appliquent aux processus défauts capteurs et systèmes.

Soit $\eta(t)$ un processus Markovien homogène à espace d'état fini $\mathcal{A} = \{1, \dots, a\}$, muni d'une matrice de transition

$$\begin{aligned} P(\tau) &= [P_{ij}(\tau)] \\ &= [P\{\eta(t + \tau) = j | \eta(t) = i\}] \\ &= e^{H\tau}, \quad t_0 \leq t \leq t + \tau \leq t_f \end{aligned} \quad (1.26)$$

où $i, j \in \mathcal{A}$ et $H = [h_{ij}]$ avec $h_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$, et $h_{ii} = -\sum_{j \neq i} h_{ij}$.

Partant de cette formulation, et sachant que $\eta(t)$ est un processus Markovien à espace d'état fini \mathcal{A} . La probabilité de transition du processus défaut actionneur, $\eta(t)$, est alors définie comme suit

$$\begin{aligned} p_{kj}(\Delta t) &= \alpha_{kj} \Delta t + o(\Delta t) & (k \neq j) \\ p_{kk}(\Delta t) &= 1 - \sum_{k \neq j} \alpha_{kj} \Delta t + o(\Delta t) & (k = j) \end{aligned} \quad (1.27)$$

où α_{kj} représente le taux de transition du processus défaut actionneur (actuator failure rate). Δt est l'intervalle infinitésimal de temps de transition et $o(\Delta t)$ est composé des termes infinitésimaux d'ordres supérieurs à 1.

Sachant que $\eta(t) = k \in \mathcal{A}$, la probabilité conditionnelle de transition du processus FDI, $\psi(t)$, est définie comme suit

$$\begin{aligned} p_{ij}^k(\Delta t) &= q_{ij}^k \Delta t + o(\Delta t) & (i \neq j) \\ p_{ii}^k(\Delta t) &= 1 - \sum_{i \neq j} q_{ij}^k \Delta t + o(\Delta t) & (k = j) \end{aligned} \quad (1.28)$$

où le taux de transition q_{ij}^k est le taux avec lequel le processus FDI décide que le prochain état est j quittant l'état i et sachant que le processus défaut est à l'état k . Le tableau 1.1 montre les taux de transitions du processus FDI.

| | | | | |
|------------|-----------------------------|-----------------------------|----------|-----------------------------|
| | $\psi = 1$ | $\psi = 2$ | \dots | $\psi = r$ |
| $\psi = 1$ | $-\sum_{j \neq 1} q_{1j}^k$ | q_{12}^k | \dots | q_{1r}^k |
| $\psi = 2$ | q_{21}^k | $-\sum_{j \neq 2} q_{2j}^k$ | \dots | q_{2r}^k |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| $\psi = r$ | q_{r1}^k | q_{r2}^k | \dots | $-\sum_{j \neq r} q_{rj}^k$ |

TAB. 1.1 – Taux de transitions du processus FDI

En fonction des différentes valeurs des indices i , j et k , plusieurs interprétations peuvent être assignées à q_{ij}^k , telles que les **retards de détection**, **taux de fausses alarmes**, **taux d'erreurs dans la détection et l'identification des défauts**, *etc.* Il est crucial de noter que les taux q_{ij}^k sont déterminés par la nature du processus FDI. Ces taux sont essentiels pour la stabilité stochastique du système en boucle fermée. En d'autres termes, la stabilité stochastique du FTCSMP dépend des performances du processus FDI, à travers q_{ij}^k [MJZ01b, MJZ02, SW93].

En pratique, il est difficile de déterminer avec exactitude les valeurs des taux de transitions q_{ij}^k [SW93]. Cependant, des simulations de Monte Carlo ainsi que des connaissances à priori peuvent être utilisées afin d'obtenir une approximation de ces taux. Analytiquement, les taux conditionnels peuvent être déterminés une fois connues les fonctions de distribution [Bir85, Str60]. Dans ce cas, les taux de

transitions sont calculés comme suit

$$q_{ij}^k(t) = \frac{f_{ij}^k(t)}{[1 - F_{ij}^k(t)]} \quad (1.29)$$

où $F_{ij}^k(t)$ est la fonction de distribution du temps de séjour (holding time distribution function) et $f_{ij}^k(t)$ la fonction de densité de probabilité (density function). Le calcul de (1.29) est détaillé dans la section suivante.

1.4.1.3 Calcul des taux de transition

Les probabilités de transition du processus FDI peuvent être déterminées une fois connues la fonction de distribution du temps de séjour ou les fonctions de fiabilité du processus FDI [Bir85, Pap84]. Soit τ l'intervalle de temps, pour lequel aucune transition du processus FDI n'a lieu et $F_{ij}^k(t)$ sa fonction de distribution quand le processus FDI quitte l'état i pour atteindre l'état j sachant que le processus défaut est à l'état k . Si le processus de FDI est initialisé à $t = 0$, alors $F_{ij}^k(t)$ est la probabilité que le processus FDI va *commuter* avant le temps t et est donnée par

$$F_{ij}^k(t) = P\{\tau \leq t\} \quad (1.30)$$

et la probabilité qu'aucune transition (commutation) n'ait lieu avant le temps t est connue comme étant la fonction de fiabilité et est donnée par

$$R_{ij}^k(t) = P\{\tau > t\} = 1 - F_{ij}^k(t) \quad (1.31)$$

La fonction de distribution conditionnelle de transition du processus de FDI dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, en supposant qu'aucune commutation n'ait eu lieu avant le temps t est donnée comme suit

$$F_{ij}^k(t + \Delta t | \tau > t) = \frac{P\{\tau \leq t + \Delta t, \tau > t\}}{P\{\tau > t\}} = \frac{P\{t < \tau \leq t + \Delta t\}}{P\{\tau > t\}} \quad (1.32)$$

Les propriétés de la fonction de distribution impliquent

$$F_{ij}^k(t + \Delta t | \tau > t) = \frac{F_{ij}^k(t + \Delta t) - F_{ij}^k(t)}{1 - F_{ij}^k(t)} \quad (1.33)$$

Le taux de transition du processus FDI est donné par

$$q_{ij}^k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F_{ij}^k(t + \Delta t | \tau > t)}{\Delta t} \right\} \quad (1.34)$$

Il s'en suit

$$q_{ij}^k(t) = \frac{f_{ij}^k(t)}{[1 - F_{ij}^k(t)]} \quad (1.35)$$

et en terme de la fonction de fiabilité

$$q_{ij}^k(t) = -\frac{(dR_{ij}^k(t)/dt)}{R_{ij}^k(t)} \quad (1.36)$$

Le calcul de la fonction de distribution et de la fonction de fiabilité peut être trouvé dans la littérature [Bir85].

1.4.2 Avantages du formalisme Markovien

Le modèle FTCSMP permet la formalisation mathématique des problématiques résultant de l'intégration d'un module de FDI dans un schéma de reconfiguration de lois de commande (les retards de détection, les fausses alarmes, la non détection de défauts, *etc.*), et cela en définissant un processus Markovien décrivant les défauts aléatoires affectant le système et un autre processus Markovien pour représenter le processus FDI. Idéalement, le processus FDI doit fonctionner de façon parfaite. C'est-à-dire, qu'à tout instant, l'état du processus FDI est identique à l'état du processus défaut. Partant de là, les deux processus peuvent être modélisés par un unique processus Markovien. Ce modèle est connu dans la littérature sous le nom des systèmes à sauts Markoviens, en anglais, Markovien Jump Linear Systems (MJLS). Cependant, comme nous l'avons souligné ci dessus, ce modèle n'est pas approprié pour des applications réelles, et les résultats relatifs à la classe des systèmes MJLS ne peuvent donc pas être appliqués en l'état aux systèmes AFTCSMP.

1.4.2.1 Erreurs de détection et d'identification

En pratique, le processus FDI peut fournir des décisions erronées, signifiant que le processus défaut est à l'état $k \in \mathcal{A}$, et que le processus FDI est à l'état $i \in \mathcal{R}$, et $i \neq k$. Si nous essayons de traiter cette situation avec les résultats existants (formalisme MJLS), en supposant une connaissance a priori de toutes les combinaisons d'erreurs possibles entre le processus défaut et le processus FDI, cela revient à supposer, implicitement, que le processus défaut est directement mesurable. Cette hypothèse n'est pas réaliste en pratique. Sous cette hypothèse forte, un contrôleur stabilisant le système peut être calculé de telle sorte qu'il soit indépendant des erreurs de détection et d'identification, mais cela n'est généralement pas vrai. Une étude de ce cas peut être trouvée dans [MJZ01a, MJZ03].

1.4.2.2 Retards de détection et fausses alarmes

Il est probablement plus difficile encore de traiter les problématiques des retards de détection et des fausses alarmes du processus FDI en se basant sur les travaux portant sur les systèmes MJLS. Ces deux imperfections sont intimement liées aux caractéristiques de la génération de résidus, de la méthode utilisée pour l'évaluation des résidus, du choix du seuil de décision, et des perturbations et bruits environnementaux affectant le système. Ces différents facteurs induisent des retards de détection ainsi que des taux de fausses alarmes aléatoires. C'est-à-dire que l'espace d'état représentant ces imperfections peut être tellement *large* qu'il serait impossible de pré-définir toute les combinaisons possibles et d'appliquer ainsi les résultats existant dans la littérature. Un autre facteur limitant l'utilisation des résultats existant se traduit par le conflit entre la robustesse du module FDI aux perturbations externes et sa sensibilité aux défauts affectant le système, créant ainsi des objectifs antagonistes rendant inapplicables les méthodes MJLS. L'impact des retards de détection sur la stabilité du AFTCSMP a été étudié par [MJZ01a, MJZ03].

En conclusion, les résultats relatifs aux systèmes hybrides et aux MJLS, supposent que le mode du système est connu. Du point de vue des systèmes tolérants aux défauts par approches actives, cela

implique une détection instantanée des défauts et une identification parfaite de ces derniers, ce qui est irréaliste. En effet, les retards de détection, et les erreurs de détection et d'identification sont inhérents aux AFTCS et doivent donc être pris en compte. Dans la plupart des problématiques traitées dans ce manuscrit, des résultats relatifs aux MJLS seront présentés comme cas particuliers intéressants des AFTCSMP.

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser aux propriétés de stabilité du AFTCSMP, et plus particulièrement à la notion de stabilité exponentielle en moyenne quadratique [Koz69]. Il est important de noter que dans les systèmes stochastiques, la notion de stabilité en moment implique la notion de stabilité presque sûre [LF96]. Nous allons donc nous intéresser aussi à la stabilité asymptotique presque sûre du AFTCSMP.

1.4.3 Stabilité stochastique du FTCSMP

En se basant sur les techniques utilisées dans l'analyse des systèmes stochastiques, nous allons utiliser la méthode directe de Lyapunov (seconde méthode) afin d'étudier les conditions de stabilité stochastique de AFTCSMP. L'approche par fonction de Lyapunov stochastique est utilisée afin de déduire des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Quand à la propriété de supermartingale, elle est utilisée dans l'étude de la stabilité asymptotique presque sûre. Avant d'énoncer les conditions de stabilité exponentielle en moyenne quadratique et de stabilité asymptotique presque sûre, nous allons d'abord introduire quelques outils et définitions basiques nécessaires à la bonne lecture du document.

1.4.3.1 Supermartingales

Définissons l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Ω est l'espace des événements élémentaires, \mathcal{F} est une σ -algèbre composée de tous les sous-ensembles mesurables de Ω , et P est la mesure de probabilité. Soit $\mu_t \subset \mathcal{F}$ une famille de σ -algèbres d'événements de Ω , définie pour tout $t \geq 0$, tel que $\mu_s \subset \mu_t$ pour $s < t$. Les définitions et les théorèmes suivant sont tirés de [Doo90].

Définition 1.1 Soit $\delta(t, w)$ un processus stochastique à moyenne finie $\mathcal{E}\{\delta(t, w)\} < \infty$, tel que $\delta(t, w) = \delta(t)$ est une variable aléatoire μ_t -mesurable pour tout t . La famille $(\delta(t, w), \mu_t)$ est appelée *Supermartingale* si $\forall s < t, \mathcal{E}\{\delta(t) \mid \mu_s\} \leq \delta(s)$.

Si $\delta(t) > 0, \forall t \geq 0$, alors nous avons une Supermartingale positive. L'application de la théorie des Martingales au problème de stabilité stochastique est basée sur les théorèmes suivants.

Théorème 1.2 Si $\{\delta(t, w), \mu_t\}$ est une Supermartingale positive, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t, w) = \delta_\infty$ existe presque sûrement et est finie. Nous avons aussi, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\delta(t, w)\} = \mathcal{E}\{\delta_\infty\}$. \square

Théorème 1.3 Si $\{\delta(t, w), \mu_t, t \geq 0\}$ est une supermartingale non-négative, alors pour tout $\lambda > 0$,

nous avons

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \infty} \delta(t, w) \geq \lambda \right\} \leq \frac{\mathcal{E} \{ \delta(0, w) \}}{\lambda} \quad (1.37)$$

□

1.4.3.2 Fonctions de Lyapunov stochastiques

L'un des outils fondamentaux dans l'analyse de la stabilité des systèmes stochastiques est la fonction de Lyapunov stochastique. Cette fonction est utilisée pour décrire le comportement (stabilité des différentes trajectoires) des solutions d'une équation différentielle stochastique, et cela sans solution explicite de cette dernière.

Les conditions devant être vérifiées par une fonction stochastique afin d'être qualifiée de fonction de Lyapunov stochastique sont données par la définition qui suit :

Définition 1.2 [MJZ03, SW93] *La fonction aléatoire $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$ est dite fonction de Lyapunov Stochastique candidate si les conditions suivantes sont vérifiées pour $\varepsilon < \infty$ fixé :*

- a) *La fonction $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$ est définie positive et continue en x_t et t dans l'ensemble ouvert $O_\varepsilon = \{x_t : \vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) < \varepsilon\} \forall \eta_t \in \mathcal{A}, \forall \xi_t \in \mathcal{S}, \forall \psi_t \in \mathcal{R}$ et $\forall t \geq t_0$, et $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) = 0$ seulement si $x_t = 0$. (La fonction $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$ est dite définie positive si $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) \geq W(x_t) \forall \eta_t \in \mathcal{A}, \forall \xi_t \in \mathcal{S}, \forall \psi_t \in \mathcal{R}$ et $\forall t \geq t_0$, où $W(x_t)$ est définie positive au sens de Lyapunov).*
- b) *Le processus de Markov $\{x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t\}$ est défini jusqu'à $t = \tau_\varepsilon$ où $\tau_\varepsilon = \inf\{t : x_t \notin O_\varepsilon\}$. Si $x_t \in O_\varepsilon \quad \forall t < \infty$, alors $\tau_\varepsilon = \infty$.*
- c) *La fonction $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$ est dans le domaine de \mathcal{L} où \mathcal{L} est l'opérateur infinitésimal faible du processus Markovien $\{x_{\tau_t}, \eta_{\tau_t}, \xi_{\tau_t}, \psi_{\tau_t}\}$ et $\tau_t = \min(t, \tau_\varepsilon)$.*

1.4.3.3 L'opérateur infinitésimal faible

Définition 1.3 [MJZ03, SW93] *Une fonction bornée $f(\phi)$ est dite dans le domaine de l'opérateur infinitésimal faible \mathcal{L} du processus aléatoire ϕ_t si la limite*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}\{f(\phi_{t+\tau})|\phi_t\} - f(\phi_t)}{\tau} = \mathcal{L}f(\phi) = h(\phi)$$

existe ponctuellement dans \mathbb{R} et vérifie,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{E}\{h(\phi_{t+\tau})|\phi_t\} = h(\phi_t)$$

Si nous généralisons la définition 1.3 à des fonctions à temps variant $f(\phi, t)$, alors nous avons

$$\mathcal{L}f(\phi, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\phi, t) + h(\phi, t)$$

1.4.3.4 Formule de Dynkin

La formule de Dynkin joue un rôle primordial dans le prolongement du concept de l'approche par fonctions de Lyapunov des systèmes déterministes aux systèmes stochastiques. En effet, la difficulté majeure dans les développements antérieurs, a été de trouver un lien entre la fonction de Lyapunov $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$, l'opérateur infinitésimal faible $\mathcal{L}\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$, et le théorème de Martingale. La formule de Dynkin a clairement mis en évidence cette connection et a permis de prouver l'analogie stochastique de l'équation déterministe suivante :

$$\vartheta(x_0) - \vartheta(x_t) = \int_0^t k(x_s) ds = - \int_0^t \dot{\vartheta}(x_s) ds \quad (1.38)$$

Cette dernière étant à la base de la seconde méthode de Lyapunov.

Définition 1.4 [Dyk65] *Soit le processus de Markov continu à droite $\{x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t\}$. Si une fonction bornée $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$ est dans le domaine de \mathcal{L} , alors pour tout $\tau_t = \min\{t, \tau_\varepsilon\}$ avec $\mathcal{E}\{\tau_t\} < \infty$, et $s < \tau_t$ fixé, nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ \vartheta(x_{\tau_t}, \eta_{\tau_t}, \xi_{\tau_t}, \psi_{\tau_t}) \mid \mathcal{N}_s \right\} - \vartheta(x_s, \eta_s, \xi_s, \psi_s) &= \mathcal{E} \left\{ \int_s^{\tau_t} \{ \vartheta_s(x, \eta, \xi, \psi, s) + h(x, \eta, \xi, \psi, s) \} ds \mid \mathcal{N}_s \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \int_s^{\tau_t} \mathcal{L}\vartheta(x_s, \eta_s, \xi_s, \psi_s, s) ds \mid \mathcal{N}_s \right\} \end{aligned} \quad (1.39)$$

où \mathcal{N}_s est la σ -algèbre générée par le processus $\{x, \eta, \xi, \psi\}$ jusqu'au temps s . L'équation (1.39) est appelée *formule de Dynkin*.

Il est important de noter que toutes les fonctions de Lyapunov stochastiques ne possèdent pas la propriété de Supermartingale. Le lemme 1.1 énonce la condition pour laquelle cette propriété est garantie pour une fonction de Lyapunov stochastique donnée.

Lemme 1.1 *Soit la fonction de Lyapunov stochastique $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$, et supposons que $\mathcal{L}\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) \leq 0$. Alors le processus $\vartheta(x_{\tau_t}, \eta_{\tau_t}, \xi_{\tau_t}, \psi_{\tau_t}, \tau_t)$ est une Supermartingale. \diamond*

Preuve. En appliquant la formule de Dynkin, nous avons

$$\mathcal{E} \left\{ \vartheta(x_{\tau_t}, \eta_{\tau_t}, \xi_{\tau_t}, \psi_{\tau_t}) \mid \mathcal{N}_s \right\} - \vartheta(x_s, \eta_s, \xi_s, \psi_s) = \mathcal{E} \left\{ \int_s^{\tau_t} \mathcal{L}\vartheta(x_s, \eta_s, \xi_s, \psi_s, s) ds \mid \mathcal{N}_s \right\} \leq 0 \quad (1.40)$$

d'où

$$\mathcal{E} \left\{ \vartheta(x_{\tau_t}, \eta_{\tau_t}, \xi_{\tau_t}, \psi_{\tau_t}) \mid \mathcal{N}_s \right\} \leq \vartheta(x_s, \eta_s, \xi_s, \psi_s) \quad (1.41)$$

Sachant que $\vartheta(x_{\tau_t}, \eta_{\tau_t}, \xi_{\tau_t}, \psi_{\tau_t})$ est une fonction de Lyapunov stochastique, elle est définie positive pour tout $t \geq 0$. A partir de la définition 1.1, il s'en suit que $\vartheta(x_{\tau_t}, \eta_{\tau_t}, \xi_{\tau_t}, \psi_{\tau_t})$ est une Supermartingale positive. \blacklozenge

Si la condition du lemme 1.1 est vérifiée par la fonction de Lyapunov stochastique candidate, nous pouvons alors appliquer les théorèmes de Supermartingale afin d'obtenir des conditions de stabilité

asymptotique presque sûre et de stabilité exponentielle, au sens de la moyenne quadratique, pour le système (1.25).

1.4.3.5 Conditions de stabilité stochastique

Il a été montré que $\{x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t\}$ est un processus Markovien joint. Cependant, dans ce qui suit, nous nous intéressons uniquement aux propriétés de stabilité des trajectoires x_t . Cela doit être donc pris en compte dans la définition des concepts de stabilité stochastique du AFTCSMP. Dans un premier temps, nous allons définir la stabilité asymptotique presque sûre et la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du AFTCSMP (1.25). Des conditions pour les deux types de stabilité ont été développées dans [SW93]. Ces théorèmes sont énoncés ici sans preuves afin d'éviter toute répétition. Cependant le lecteur intéressé peut se référer aux travaux cités ci-dessus.

Supposons, sans perte de généralité, que le point d'équilibre, $x = 0$, est la solution pour laquelle les propriétés de stabilité sont étudiées ; alors les définitions et résultats suivant peuvent être énoncés.

Définition 1.5 *Le point d'équilibre, $x = 0$, du système (1.25) est dit stable presque sûrement pour tout $t \geq 0$, si $\forall \xi_0 \in \mathcal{S}, \eta_0 \in \mathcal{A}, \psi_0 \in \mathcal{R}, \epsilon > 0, \rho > 0$, il existe $\delta(\epsilon, \rho, t_0) > 0$ tel que pour tout $\|x_0\| < \delta$ et $t \geq 0$, nous avons*

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \infty} \|x(t; x_0, t_0)\| \geq \epsilon \right\} \leq \rho \quad (1.42)$$

Définition 1.6 *Le point d'équilibre, $x = 0$, du système (1.25) est dit asymptotiquement stable presque sûrement pour tout $t \geq 0$, si il est stable presque sûrement et*

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0, t_0) = 0 \right\} = 1 \quad (1.43)$$

Définition 1.7 *Le point d'équilibre, $x = 0$, du système (1.25) est dit exponentiellement stable au sens de la moyenne quadratique, si $\forall \xi_0 \in \mathcal{S}, \eta_0 \in \mathcal{A}, \psi_0 \in \mathcal{R}$, il existe $\delta(\xi_0, \eta_0, \psi_0) > 0$ et des constantes positives $a > 0$ et $b > 0$, tel que si $\|x_0\| \leq \delta$, alors l'inégalité suivante est vérifiée $\forall t \geq t_0$*

$$\mathcal{E} \{ \|x_t\|^2 \} \leq b \|x_0\|^2 \exp[-a(t - t_0)] \quad (1.44)$$

Théorème 1.4 *Le point d'équilibre, $x = 0$, du système (1.25) est asymptotiquement stable presque sûrement si il existe une fonction de Lyapunov stochastique, $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$, tel que*

$$\mathcal{L}\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) = -k(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) \leq 0 \quad (1.45)$$

où $k(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) > 0$, est continue en x_t et $k(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t) = 0$ seulement si $x_t = 0$. \square

Théorème 1.5 *Le point d'équilibre, $x = 0$, du système (1.25) est exponentiellement stable au sens de la moyenne quadratique $\forall t \geq t_0$ si il existe une fonction de Lyapunov stochastique, $\vartheta(x_t, \eta_t, \xi_t, \psi_t, t)$, tel que*

$$K_1 \|x_t\|^2 \leq \vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) \leq K_2 \|x_t\|^2 \quad (1.46)$$

et

$$\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) \leq -K_3 \|x_t\|^2 \quad (1.47)$$

où K_1, K_2 et K_3 sont des constantes positives données. \square

Après avoir introduit quelques définitions et résultats relatifs à la classe de systèmes hybrides stochastiques étudiée dans ce document, nous allons, dans ce qui suit présenter un bref état de l'art des principaux travaux effectués dans ce domaine.

1.4.4 Bref état de l'art

Dans ce qui suit, nous allons récapituler certains des principaux travaux développés dans le domaine des AFTCSMP. Les résultats énoncés sont donnés sans preuves. Les lecteurs intéressés peuvent se référer aux différentes références données par la suite.

1.4.4.1 Stabilité stochastique

Le modèle AFTCSMP a été initialement proposé par [SW93]. En effet, les auteurs ont considéré deux processus aléatoires. Le processus $\eta(t)$ modélisant les défauts actionneurs affectant le système et le processus $\psi(t)$ modélisant le mécanisme de FDI. Les deux processus $\eta(t)$ et $\psi(t)$ sont supposés Markoviens, mesurables, séparables et à espaces d'état finis, $\mathcal{A} = \{1, \dots, a\}$ et $\mathcal{R} = \{1, \dots, r\}$, respectivement. La représentation d'état du système considéré est donnée comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_t = Ax_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t) \\ u(x_t, \psi_t) = -\mathcal{K}(\psi_t)x_t \end{cases} \quad (1.48)$$

Les auteurs ont ensuite proposé des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité exponentielle en moyenne quadratique pour cette classe de systèmes. Ces résultats s'expriment par le théorème 1.6. La preuve de ce dernier s'appuie sur la théorie de Lyapunov et la notion de supermartingale.

Théorème 1.6 Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (1.48) est qu'il existe des solutions d'état d'équilibre (steady state solutions) $\mathcal{P}_{ik}, i \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{A}$ pour $t \rightarrow -\infty$, aux équations différentielles matricielles linéaires couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{P}}_{ik}(t) + \tilde{A}'_{ik}\mathcal{P}_{ik}(t) + \mathcal{P}_{ik}(t)\tilde{A}_{ik} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{jk}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ij}(t) + \mathcal{Q}_{ik} = 0 \\ i \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{A}, t \in (-\infty, 0] \end{cases} \quad (1.49)$$

avec

$$\mathcal{P}_{ik}(0) = 0, \forall i \in \mathcal{R}, \forall k \in \mathcal{A} \quad (1.50)$$

où $\mathcal{Q}_{ik} > 0, \forall i \in \mathcal{R}, \forall k \in \mathcal{A}$ et

$$\tilde{A}_{ik} = A - B_k \mathcal{K}_i - 0.5\mathbb{I} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \right) \quad (1.51)$$

\square

1.4.4.2 Stabilité stochastique dans un environnement bruité

Le modèle AFTCSMP a été proposé dans le but de décrire, de façon plus réaliste et plus pointue, le comportement réel des systèmes tolérants aux défauts. En effet, le formalisme Markovien permet de prendre en considération, de façon naturelle, les phénomènes résultant de l'intégration des modules de FDI et de reconfiguration de lois de commandes, à savoir, les retards de détection, les erreurs de détection et d'identification, *etc.* Cependant, les travaux initiaux de [SW93] ne prennent pas en considération les différents bruits environnementaux affectant le système. Afin de palier cette limitation, [MJZ01b, MJZ03] ont analysé la stabilité des systèmes tolérants aux défauts en présence de bruits. Cette classe de systèmes peut être modélisée par les équations différentielles stochastiques suivantes

$$\begin{cases} dx_t = Ax_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t, t)dt + D(x_t, \eta_t, t)d\varpi_{1t} + E(u_t, \eta_t, t)d\varpi_{2t} + F(\eta_t)d\varpi_{3t} \\ u(x_t, \psi_t, t) = -\mathcal{K}(\psi_t)x_t \end{cases} \quad (1.52)$$

où ϖ_{it} sont des processus de Wiener, indépendants, dans \mathbb{R}^{n_i} , $\forall i = 1, 2, 3$. $D(x_t, \eta_t, t)$, $E(u_t, \eta_t, t)$ et $F(\eta_t)$ sont des fonctions matricielles de dimension $\mathbb{R}^{n \times n_i}$. Trois types de bruits sont considérés dans l'équation (1.52) : bruit dépendant de l'état $D(x_t, \eta_t, t)d\varpi_{1t}$, bruit dépendant de la commande $E(u_t, \eta_t, t)d\varpi_{2t}$ et bruit indépendant de la commande et de l'état $F(\eta_t)d\varpi_{3t}$ qui sera, d'ailleurs, appelé par la suite *bruit indépendant*. $D(x_t, \eta_t, t)$ et $E(u_t, \eta_t, t)$ sont supposées linéaires en x_t et u_t , respectivement :

$$\begin{aligned} D(x_t, \eta_t, t) &= \sum_{l=1}^n D_l(\eta_t)x_{lt} \\ E(u_t, \eta_t, t) &= \sum_{l=1}^m E_l(\eta_t)u_{lt} \end{aligned} \quad (1.53)$$

où x_{lt} , u_{lt} , D_l et E_l sont les l -ème composantes du vecteur d'état, du vecteur commande, des matrices de distribution des bruits dépendant de l'état et de la commande, respectivement.

Le résultat principal de ces travaux se traduit par le théorème 1.7 donnant une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (1.52) [MJZ01b, MJZ03].

Théorème 1.7 Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (1.52) est qu'il existe des solutions d'état d'équilibre \mathcal{P}_{ki} , $v_{ki} > 0$ ($v(\eta, \psi, t)$ étant une fonction scalaire), $i \in \mathcal{R}$, $k \in \mathcal{A}$ pour $t \rightarrow -\infty$, aux équations différentielles matricielles linéaires couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{P}}_{ki}(t) + \tilde{A}'_{ki}\mathcal{P}_{ki}(t) + \mathcal{P}_{ki}(t)\tilde{A}_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ji}(t) + \Lambda_{ki}(t) + \mathcal{K}'_i \Gamma_{ki}(t) \mathcal{K}_i + \mathcal{Q}_{ki} = 0 \\ \dot{v}_{ki}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k [v_{kj}(t) - v_{ki}(t)] + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} [v_{ji}(t) - v_{ki}(t)] + \text{tr} \{F'_k \mathcal{P}_{ki}(t) F_k\} = 0 \\ i \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{A}, t \in (-\infty, 0] \end{cases} \quad (1.54)$$

où $Q_{ki} > 0, \forall i \in \mathcal{R}, \forall k \in \mathcal{A}$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_{ki} = A - B_k \mathcal{K}_i - 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \right) \\ \Lambda_{ki}(t) = \Lambda(\mathcal{P}_{ki}(t), k, i) = [\text{tr} \{ D'_{kl} \mathcal{P}_{ki}(t) D_{kc} \}], \forall l, c = 1, \dots, n \\ \Gamma_{ki}(t) = \Gamma(\mathcal{P}_{ki}(t), k, i) = [\text{tr} \{ E'_{kl} \mathcal{P}_{ki}(t) E_{kc} \}], \forall l, c = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

avec les conditions

$$\mathcal{P}_{ki}(0) = 0, v_{ki}(0) = 0, \forall k \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathcal{R} \quad (1.55)$$

□

1.4.4.3 Effets des imperfections du processus FDI sur la stabilité du AFTCSMP

Dans cette section, nous rapportons les travaux de [MJZ01a, MJZ03] sur les effets des imperfections du module de FDI sur la stabilité stochastique des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens. Nous commencerons d'abord par l'étude de l'impact des retards de détection, et cela en introduisant dans un premier temps les différents modèles de retards considérés et en analysant dans un second temps l'effet de ces derniers sur la stabilité du AFTCSMP. Les effets des erreurs de détection seront aussi mis en évidence au travers d'une nouvelle modélisation de AFTCSMP.

i) **Effets des retards de détection sur la stabilité du AFTCSMP** Le système considéré est donné sous sa représentation d'état par les équations différentielles stochastiques suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_t = Ax_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t) \\ u(x_t, \psi_t) = -\mathcal{K}(\psi_t)x_t \end{array} \right. \quad (1.56)$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n, u(x_t, \psi_t) \in \mathbb{R}^m, \eta_t$ est le processus Markovien à espace d'état fini \mathcal{A} décrivant le processus défaut actionneur et ψ_t est le processus Markovien modélisant le processus FDI.

i.1) **Interprétation des retards de détection** Un retard de détection est défini comme étant le temps nécessaire au processus FDI afin de fournir une décision. Dans cette section, une formulation mathématique des taux de transitions du processus FDI est développée afin de décrire les retards de détection.

Les taux de transitions du processus FDI sont donnés par

$$q_{ij}^k(t) = \frac{f_{ij}^k(t)}{[1 - F_{ij}^k(t)]} \quad (1.57)$$

et en terme de la fonction de fiabilité

$$q_{ij}^k(t) = -\frac{(dR_{ij}^k(t)/dt)}{R_{ij}^k(t)} \quad (1.58)$$

i.2) **Retards de détection exponentiellement distribués** Si les retards de détection du processus FDI sont exponentiellement distribués avec

$$\text{mean} = \frac{1}{\lambda_{ij}^k} \quad (1.59)$$

la fonction de densité de probabilité correspondante est alors donnée par

$$f_{ij}^k(t) = \begin{cases} \lambda_{ij}^k \exp \{-\lambda_{ij}^k t\} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

la fonction de distribution de probabilité est

$$F_{ij}^k(t) = \begin{cases} 1 - \exp \{-\lambda_{ij}^k t\} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

et la fonction de fiabilité est donnée comme suit

$$R_{ij}^k(t) = \exp \{-\lambda_{ij}^k t\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.62)$$

A partir de (1.58), les taux de transitions du processus FDI se déduisent comme suit

$$q_{ij}^k(t) = \frac{\lambda_{ij}^k \exp \{-\lambda_{ij}^k t\}}{\exp \{-\lambda_{ij}^k t\}} = \lambda_{ij}^k = \frac{1}{\text{mean}} \quad (1.63)$$

i.3) **Retards de détection distribués selon une loi γ .** Si les retards de détection du processus FDI sont distribués selon une loi γ , la fonction de densité de probabilité correspondante est alors donnée par

$$f_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_{ij}^k}{\gamma(r_{ij}^k)} (\lambda_{ij}^k t)^{r_{ij}^k-1} \exp \{-\lambda_{ij}^k t\} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Pour un entier $r > 0$, la fonction de distribution de probabilité est alors

$$F_{ij}^k(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{m=0}^{r_{ij}^k-1} \frac{1}{m!} (\lambda_{ij}^k t)^m \exp \{-\lambda_{ij}^k t\} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

et la fonction de fiabilité est donnée par

$$R_{ij}^k(t) = \sum_{m=0}^{r_{ij}^k-1} \frac{1}{m!} (\lambda_{ij}^k t)^m \exp \{-\lambda_{ij}^k t\} \quad t \geq 0 \quad (1.66)$$

La dérivée de la fonction de fiabilité est donnée comme suit

$$\frac{dR_{ij}^k(t)}{dt} = -\exp \{-\lambda_{ij}^k t\} \frac{\lambda_{ij}^k}{(r_{ij}^k-1)!} (\lambda_{ij}^k t)^{r_{ij}^k-1} \quad (1.67)$$

Les taux de transition du processus FDI sont alors donnés par

$$\begin{aligned} q_{ij}^k(t) &= \frac{\exp\{-\lambda_{ij}^k t\} \frac{\lambda_{ij}^k}{(r_{ij}^k-1)!} (\lambda_{ij}^k t)^{r_{ij}^k-1}}{\exp\{-\lambda_{ij}^k t\} \sum_{m=0}^{r_{ij}^k-1} \frac{1}{m!} (\lambda_{ij}^k t)^m} = \frac{\frac{\lambda_{ij}^k}{(r_{ij}^k-1)!} (\lambda_{ij}^k t)^{r_{ij}^k-1}}{\sum_{m=0}^{r_{ij}^k-1} \frac{1}{m!} (\lambda_{ij}^k t)^m} \\ &= \frac{(\lambda_{ij}^k)^{r_{ij}^k} (t)^{r_{ij}^k-1}}{(r_{ij}^k-1)! \sum_{m=0}^{r_{ij}^k-1} \frac{1}{m!} (\lambda_{ij}^k t)^m} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Les taux de transition d'état d'équilibre sont calculés comme suit

$$\bar{q}_{ij}^k = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\lambda_{ij}^k)^{r_{ij}^k} (t)^{r_{ij}^k-1}}{(r_{ij}^k-1)! \sum_{m=0}^{r_{ij}^k-1} \frac{1}{m!} (\lambda_{ij}^k t)^m} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\lambda_{ij}^k)^{r_{ij}^k} (t)^{r_{ij}^k-1}}{(r_{ij}^k-1)! \frac{1}{(r_{ij}^k-1)!} (\lambda_{ij}^k t)^{r_{ij}^k-1}} \right] = \lambda_{ij}^k \quad (1.69)$$

i.4) Condition nécessaire et suffisante de stabilité stochastique Une condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle en moyenne quadratique a été donnée dans [MJZ01b, MJZ02, SW93]. Cette dernière peut être modifiée de telle sorte que les taux de transitions du processus FDI sont remplacés par les moyennes des retards de détection exponentiellement distribués (distribués selon une loi γ). La condition de stabilité exponentielle en moyenne quadratique est alors donnée par le théorème 1.8.

Théorème 1.8 Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (1.56) est qu'il existe des solutions d'état d'équilibre \mathcal{P}_{ik} , $i \in \mathcal{R}$, $k \in \mathcal{A}$ pour $t \rightarrow -\infty$, aux équations différentielles matricielles linéaires couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{P}}_{ik}(t) + \tilde{A}'_{ik} \mathcal{P}_{ik}(t) + \mathcal{P}_{ik}(t) \tilde{A}_{ik} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq k}} \lambda_{ij}^k \mathcal{P}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ji}(t) + \mathcal{Q}_{ik} = 0 \\ i \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{A}, t \in (-\infty, 0] \end{cases} \quad (1.70)$$

avec les conditions

$$\mathcal{P}_{ik}(0) = 0, \forall i \in \mathcal{R}, \forall k \in \mathcal{A} \quad (1.71)$$

où $\mathcal{Q}_{ik} > 0$, $\forall i \in \mathcal{R}, \forall k \in \mathcal{A}$ et

$$\tilde{A}_{ik} = A - B_k \mathcal{K}_i - 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} \lambda_{ij}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \right) \quad (1.72)$$

□

ii) Effets des erreurs de détection Les systèmes tolérants aux défauts par approches actives s'appuient sur les décisions fournies par le module de FDI afin de reconfigurer la loi de commande en conséquence. Le fait qu'une partie importante de l'algorithme de FDI soit un test d'hypothèses nécessite l'existence de probabilités d'erreurs associées à ses décisions [SW93, Tre68]. Il est donc évident que l'algorithme de FDI peut fournir des décisions erronées.

Afin d'étudier les effets des erreurs de détection et d'identification des défauts sur la stabilité du FTCSMP, [MJZ03] synthétisent une loi de commande en se basant sur les principes de programmation dynamique. Le correcteur est supposé avoir accès aux états des deux processus défauts et FDI.

ii.1) **Nouveau modèle du AFTCSMP** La méthodologie utilisée afin de rendre compte de l'effet des erreurs de détection et d'identification des défauts sur la stabilité du FTCSMP est de supposer que les deux processus aléatoires sont accessibles. Le calcul des gains de retour d'état se fait sur la base de la connaissance des deux processus aléatoires. Cependant, il est crucial de souligner que la loi de commande dans les systèmes tolérants aux défauts est reconfigurée en n'utilisant que l'information fournie par le module de FDI, et que l'hypothèse d'accessibilité du processus défaut n'est utilisée que pour étudier, de façon analytique, les effets des erreurs de détection. Cela motive la modification du modèle du système tolérant aux défauts (1.56) comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_t = Ax_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t) \\ u(x_t, \eta_t, \psi_t) = -\mathcal{K}(\eta_t, \psi_t)x_t \end{cases} \quad (1.73)$$

Dans le modèle ci-dessus, émettre l'hypothèse d'un module FDI *parfait* (c.à.d pas d'erreurs de détection) reviendrait à forcer la relation : $\eta_t = \psi_t$. Le cas où $\eta_t \neq \psi_t$ peut être interprété comme étant une fausse alarme, erreurs de détection, *etc.*

L'objectif est de synthétiser une loi de commande tolérante aux défauts minimisant le critère de performance suivant :

$$\begin{aligned} J &= \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} L(x_t, \eta_t, \psi_t, t) dt \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [x_t' Q(\eta_t, \psi_t) x_t + u_t' R(\eta_t, \psi_t) u_t] dt \right\} \end{aligned} \quad (1.74)$$

où $Q(\eta_t, \psi_t)$ et $R(\eta_t, \psi_t)$ sont des matrices semi-définies positives et définies positives, respectivement. Sans perte de généralité, nous supposons que le temps final est $t_f = 0$, et que le temps initial est t_0 .

ii.2) **Synthèse de la loi de commande** Une loi de commande tolérante aux défauts pour le système (1.73), minimisant le critère de performance (1.74), est donnée par le Théorème suivant.

Théorème 1.9 La loi de commande minimisant (1.74) est donnée par

$$u_{ki}^*(t) = -R_{ki}^{-1} B_k' \mathcal{P}_{ki}(t) x_t = -\mathcal{K}_{ki}(t) x_t \quad (1.75)$$

où les matrices $\mathcal{P}_{ki}(t)$ sont les solutions des pseudo équations matricielles de Riccati (Riccati-like matrix equations) suivantes

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{P}}_{ki}(t) + \tilde{A}_{ki}' \mathcal{P}_{ki}(t) + \mathcal{P}_{ki}(t) \tilde{A}_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ji}(t) + \mathcal{K}_{ki}' R_{ki} \mathcal{K}_{ki} + \mathcal{Q}_{ki} = 0 \\ \forall \mathcal{P}_{ki}(t_f) = 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

avec

$$\tilde{A}_{ki} = A - B_k \mathcal{K}_{ki} - 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \right) \quad (1.77)$$

□

Pour une reconfiguration en ligne, le contrôleur doit avoir accès au processus FDI. Dans ce cas de figure, deux scénarii possibles sont à considérer. Si le processus FDI est supposé parfait, alors $\eta_t = \psi_t$, et (1.75) se réduit à

$$u_k^*(t) = -R_k^{-1} B_k' \mathcal{P}_k(t) x_t = -\mathcal{K}_k(t) x_t \quad (1.78)$$

Dans le cas où $\eta_t \neq \psi_t$, cela signifierait que la décision du processus FDI est erronée. Les contrôleurs résultants pourraient conduire dans ce cas là à une perte de performances du système, voire à l'instabilité de ce dernier. Ce dernier cas de figure sera illustré par la suite par un exemple numérique.

ii.3) **Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité stochastique** Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (1.73) est donnée par le théorème 1.10 [MJZ01b, MJZ02, SW93].

Théorème 1.10 Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (1.73) est qu'il existe des solutions d'état d'équilibre \mathcal{P}_{ik} , $i \in \mathcal{R}$, $k \in \mathcal{A}$ pour $t \rightarrow -\infty$, aux équations différentielles matricielles linéaires couplées suivantes :

$$\dot{\mathcal{P}}_{ki}(t) + \tilde{A}'_{ki} \mathcal{P}_{ki}(t) + \mathcal{P}_{ki}(t) \tilde{A}_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq k}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ji}(t) + \mathcal{Q}_{ki} = 0 \quad (1.79)$$

avec les conditions

$$\mathcal{P}_{ki}(0) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{R}, \forall k \in \mathcal{A} \quad (1.80)$$

où $\mathcal{Q}_{ki} > 0$, $\forall i \in \mathcal{R}, \forall k \in \mathcal{A}$ et \tilde{A}_{ki} est défini par (1.77). □

ii.4) **Exemple numérique** Afin d'illustrer les résultats théoriques exposés ci-dessus, considérons un système, sujet à un défaut actionneur, donné comme suit [MJZ03] :

$$A = [0.4], \quad B_1 = [1.5], \quad B_2 = [0.2].$$

Les taux de défauts actionneurs sont donnés par

$$\alpha_{12} = 0.005, \quad \alpha_{21} = 0.001.$$

Les taux de transitions du processus FDI sont

$$q_{ij}^1 = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.18 \\ 0.79 & -0.79 \end{bmatrix}, \quad q_{ij}^2 = \begin{bmatrix} -1.06 & 1.06 \\ 0.12 & -0.12 \end{bmatrix}$$

Les différentes matrices de pondération Q_{ki} et R_{ki} sont données par

$$Q_{ki} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.50 \\ 1.75 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad R_{ki} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

L'objectif est de calculer une loi de commande tolérante aux défauts pour le système donné par (1.73). L'effet des erreurs de détection sera étudié. L'existence de matrices définies-positives, $\mathcal{P}_{ik} > 0$, solutions des équations différentielles (1.79) est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

a) **Calcul des gains de retour d'état** Les gains de retour d'état sont calculés en utilisant les résultats du Théorème 1.9 et sont donnés par le tableau 1.2

| \mathcal{K}_{11} | \mathcal{K}_{12} | \mathcal{K}_{21} | \mathcal{K}_{22} |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| [1.342] | [1.150] | [4.311] | [4.241] |

TAB. 1.2 – Gains de retour d'état

Ils peuvent être interprétés comme suit : \mathcal{K}_{11} et \mathcal{K}_{22} représentent le bon fonctionnement du processus FDI en situation nominal (pas de défauts) et en présence de défaut, respectivement. \mathcal{K}_{12} correspond au cas où le système est en mode nominal mais le processus FDI indique la présence d'un défaut (fausse alarme : **FA**). De la même manière, \mathcal{K}_{21} correspond au cas où le système est sujet à un défaut mais le processus FDI n'arrive pas à le détecter (non détection : **MD**).

b) **Détection parfaite** Ce cas représente le cas idéal. Les gains de retour d'état sont dans ce cas donnés par

$$\mathcal{K}_{\text{nominal}} = \mathcal{K}_{11} = [1.342], \quad \mathcal{K}_{\text{défaut}} = \mathcal{K}_{22} = [4.241].$$

Pour les gains ci-dessus, les équations différentielles (1.79) admettent des solutions définies-positives, ce qui prouve la stabilité exponentielle du système tolérant aux défauts (1.73).

c) **Erreurs de détection–FA** Si le système est en mode nominal mais que le processus FDI indique la présence d'un défaut, les gains de retour d'état utilisés sont alors donnés par

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_{11} = [1.342], \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_{12} = [1.150].$$

La résolution des équations (1.79) montrent que les solutions sont non bornées. On conclut donc que le système est **stochastiquement instable**. Cela illustre les effets néfastes d'une erreur de détection sur le système tolérant aux défauts.

d) **Erreurs de détection–MD** Ce scénario correspond au cas où le système est sujet à un défaut mais que le processus FDI n'arrive pas à le détecter. Les gains de retour d'état utilisés sont alors donnés par

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_{22} = [4.241], \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_{21} = [4.311].$$

Le système (1.73) est dans ce cas là stochastiquement stable. En effet, les équations (1.79) admettent des solutions définies positives. Pour cet exemple particulier, la non détection du défaut n'affecte pas la stabilité du système. Cependant, ce n'est pas une conclusion générale et la non détection de défauts peut engendrer une instabilité du système en boucle fermée dans d'autres cas.

1.4.4.4 Synthèse de lois de commande tolérantes aux défauts

i) **Commande JLQ (Jump Linear Quadratic)** Dans cette section, nous exposons les travaux de [MJZ99, MJZ03] sur la commande JLQ des systèmes tolérants aux défauts. Trois scénarii seront considérés. Le premier reflète la nature de l'approche AFTCSMP qui utilise deux processus aléatoires distincts pour représenter les défauts aléatoires affectant le système et la décision du processus FDI. Malheureusement, les contrôleurs résultant ne sont pas réalisables en pratique. Dans le second scénario, le contrôleur est reconfiguré en se basant sur l'information fournie par le module de FDI, et n'a pas besoin d'avoir accès au processus défaut. Il en résulte des contrôleurs réalisables en pratique. Dans certaines situations, le module de FDI ne peut fournir de décisions. Cette situation résulte, par exemple, d'un défaut affectant le matériel d'acquisition de données ou d'une durée excessive de convergence des tests statistiques vers une décision. Cette situation représente le troisième scénario.

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_t = Ax_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t) \\ u(x_t, \psi_t) = -\mathcal{K}(\psi_t)x_t \end{cases} \quad (1.81)$$

Afin de simplifier les notations, une fonction indicatrice $\Theta_{ki} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A} \times \mathcal{R}}$ sera utilisée afin d'indiquer que le processus défaut est à l'état k et que le processus FDI est à l'état i .

L'objectif de la loi de commande JLQ est de minimiser le critère de performance quadratique suivant

$$J = \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [x_t' Q(\eta_t, \psi_t) x_t + u_t' R(\eta_t, \psi_t) u_t] dt \right\} \quad (1.82)$$

où $Q(\eta_t, \psi_t)$ et $R(\eta_t, \psi_t)$ sont des matrices semi-définies positives et définies positives, respectivement, et sont notées Q_{ki} et R_{ki} pour $\eta = k \in \mathcal{A}$, $\psi = i \in \mathcal{R}$.

Si la fonction coût est définie comme suit

$$V(x_t, \eta_t, \psi_t, t) = \min_u J \quad (1.83)$$

alors, le problème de commande JLQ peut être reformulé comme suit

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \min_u \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [x_t' Q(\eta_t, \psi_t) x_t + u_t' R(\eta_t, \psi_t) u_t] dt \right\} \\ \text{t. q :} \\ \dot{x}_t = Ax_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t) \end{cases} \quad (1.84)$$

En définissant les matrices de pseudo-covariances (covariances-like) comme suit

$$\mathcal{X}_{ki}(t) = \mathcal{E} \{ x_t x_t' | \eta_t = k, \psi_t = i \} = \mathcal{E} \{ x_t x_t' \Theta_{ki} \} \quad (1.85)$$

et en considérant l'évolution dynamique de $\mathcal{X}_{ki}(t)$, le problème d'optimisation \mathcal{O} peut être transformé en un problème d'optimisation déterministe équivalent. Dans ce contexte, les matrices de pseudo covariance seront considérées comme l'état du système, et les gains de retour d'état, $\mathcal{K}_i(t)$, comme l'entrée de commande de ce dernier. La fonction coût déterministe équivalente est donnée par le lemme 1.2.

Lemme 1.2 Soit $i \in \mathcal{R}$ l'état du processus FDI et $k \in \mathcal{A}$ l'état du processus défaut actionneur. Si $\eta(t_0)$, $\psi(t_0)$ sont indépendants de $x(t_0)$, alors pour l'ensemble de matrices $(Q_{ki} + \mathcal{K}'_i R_{ki} \mathcal{K}_i)$, la fonction coût est donnée par

$$J_d = \int_{t_0}^{t_f} \text{tr} \{ \mathcal{X}_{ki}(t) (Q_{ki} + \mathcal{K}'_i R_{ki} \mathcal{K}_i) \} dt \quad (1.86)$$

◇

i.1) **Lois de commande sur un horizon de temps fini** Dans ce qui suit, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des lois de commande optimales pour le système (1.81) sont données. Trois scénarii possibles sont considérés.

Scénario 1 : Les deux processus, défaut et FDI, sont accessibles Le modèle AFTCSMP fait apparaître deux processus aléatoires distincts, η_t et ψ_t . La synthèse d'une loi de commande pour cette classe de systèmes peut donc naturellement mener à des contrôleurs fonctions des deux processus. Le théorème 1.11 illustre ce résultat et résulte de l'application du principe du maximum matriciel [Ath67].

Théorème 1.11 Les matrices de gain de retour d'état sont obtenues par la relation suivante

$$R_{ki} \mathcal{K}_{ki} \mathcal{X}_{ki}(t) - B'_k \mathcal{P}_{ki}(t) \mathcal{X}_{ki}(t) = 0 \quad (1.87)$$

où $\mathcal{P}_{ki}(t)$ sont les solutions des pseudo équations de Riccati

$$\dot{\mathcal{P}}_{ki}(t) + \tilde{A}'_{ki} \mathcal{P}_{ki}(t) + \mathcal{P}_{ki}(t) \tilde{A}_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ji}(t) + \mathcal{K}'_{ki} R_{ki} \mathcal{K}_{ki} + Q_{ki} = 0 \quad (1.88)$$

$\forall \mathcal{P}_{ki}(t_f) = 0$, \tilde{A}_{ki} est défini par (1.77) et $\mathcal{X}_{ki}(t)$ sont les solutions des équations différentielles de pseudo covariance

$$\dot{\mathcal{X}}_{ki}(t) = \hat{A}_{ki} \mathcal{X}_{ki}(t) + \mathcal{X}_{ki}(t) \hat{A}'_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ji}^k \mathcal{X}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{jk} \mathcal{X}_{ji}(t) \quad (1.89)$$

$\forall \mathcal{X}_{ki}(t_0) = \mathcal{E} \{ x(t_0) x'(t_0) | \Theta_{ki} \}$, et

$$\hat{A}_{ki} = A - B_k \mathcal{K}_{ki} - 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ji}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{jk} \right) \quad (1.90)$$

□

Scénario 2 : Seul le processus FDI est accessible Il a été montré dans la section précédente que des erreurs de détection peuvent induire des pertes de performances, voire une instabilité du système en boucle fermée [MJZ01a]. Afin de réduire le risque d'instabilité, la distribution de probabilité du processus défaut doit être considérée. Soit la distribution de probabilité du processus Markovien η_t donnée par

$$v_k(t) = P\{\eta_t = k\} \quad (1.91)$$

où

$$v_k(t) \geq 0, \forall k \in \mathcal{A}, \sum_{k=1}^a v_k(t) = 1 \quad (1.92)$$

On suppose que l'état initial est une variable aléatoire avec

$$\mathcal{E}\{x(t_0)\} = 0, \mathcal{E}\{x(t_0)x'(t_0)\} = \mathcal{X}(t_0) \quad (1.93)$$

La matrice de covariance est donnée dans ce cas là par

$$\mathcal{X}_i(t) = \sum_{k=1}^a v_k(t) \mathcal{X}_{ki}(t) \quad (1.94)$$

Théorème 1.11 Une condition nécessaire pour l'existence de la loi de commande $u_i(t) = -\mathcal{K}_i x_t$ est qu'il existe des matrices $\mathcal{P}_{ki}(t)$ solutions des pseudo équations de Riccati :

$$\dot{\mathcal{P}}_{ki}(t) + \tilde{A}'_{ki} \mathcal{P}_{ki}(t) + \mathcal{P}_{ki}(t) \tilde{A}_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ji}(t) + \mathcal{K}'_i R_{ki} \mathcal{K}_i + \mathcal{Q}_{ki} = 0 \quad (1.95)$$

$\forall \mathcal{P}_{ki}(t_f) = 0$, et $\mathcal{X}_{ki}(t)$ sont les solutions des équations différentielles de pseudo covariance :

$$\dot{\mathcal{X}}_{ki}(t) = \hat{A}_{ki} \mathcal{X}_{ki}(t) + \mathcal{X}_{ki}(t) \hat{A}'_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ji}^k \mathcal{X}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{jk} \mathcal{X}_{ji}(t) \quad (1.96)$$

$$\forall \mathcal{X}_{ki}(t_0) = \sum_{k=1}^s v_k(t_0) \mathcal{X}_0.$$

Les matrices de gain de retour d'état sont alors obtenues par la relation suivante

$$\sum_{k=1}^a [R_{ki} \mathcal{K}_i v_k(t) \mathcal{X}_{ki}(t) - B'_k v_k(t) \mathcal{P}_{ki}(t) \mathcal{X}_{ki}(t)] = 0 \quad (1.97)$$

□

Scénario 3 : Les deux processus, défaut et FDI, sont inaccessibles Il existe des situations où la décision du module de FDI n'est pas disponible en temps voulu. Une cause possible d'une telle défaillance serait, par exemple, l'importance du temps requis par l'algorithme FDI afin de fournir une décision. Cette problématique a été mise en évidence dans différents travaux [MJZ01a, Mar89, SW93]. Afin de synthétiser une loi de commande indépendante des deux processus aléatoires, nous considérons, en plus de la distribution de probabilité du processus défaut, la distribution de probabilité du processus FDI donnée comme suit

$$w_i^k(t) = P\{\psi_t = i \mid \eta_t = k\} \quad (1.98)$$

où

$$w_i^k(t) \geq 0, \forall k \in \mathcal{A}, \sum_{i=1}^r w_i^k(t) = 1 \quad (1.99)$$

La matrice de covariance est donnée dans ce cas par

$$\mathcal{X}_t = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^a w_i^k(t) v_k(t) \mathcal{X}_{ki}(t) \quad (1.100)$$

Le théorème 1.12 donne les conditions nécessaires d'existence de la loi de commande.

Théorème 1.12 Une condition nécessaire pour l'existence de la loi de commande $u_t = -\mathcal{K}x_t$ est qu'il existe des matrices $\mathcal{P}_{ki}(t)$ solutions des pseudo équations de Riccati :

$$\dot{\mathcal{P}}_{ki}(t) + \tilde{A}'_{ki} \mathcal{P}_{ki}(t) + \mathcal{P}_{ki}(t) \tilde{A}_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ji}(t) + \mathcal{K}' R_{ki} \mathcal{K} + \mathcal{Q}_{ki} = 0 \quad (1.101)$$

$\forall \mathcal{P}_{ki}(t_f) = 0$, et $\mathcal{X}_{ki}(t)$ sont les solutions des équations différentielles de pseudo covariance :

$$\dot{\mathcal{X}}_{ki}(t) = \hat{A}_{ki} \mathcal{X}_{ki}(t) + \mathcal{X}_{ki}(t) \hat{A}'_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ji}^k \mathcal{X}_{kj}(t) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{jk} \mathcal{X}_{ji}(t) \quad (1.102)$$

$$\forall \mathcal{X}_{ki}(t_0) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s w_i^k(t_0) v_k(t_0) \mathcal{X}_0.$$

Les matrices de gains de retour d'état sont alors obtenues par la relation suivante

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^a \left[R_{ki} \mathcal{K} w_i^k(t) v_k(t) \mathcal{X}_{ki}(t) - B'_k w_i^k(t) v_k(t) \mathcal{P}_{ki}(t) \mathcal{X}_{ki}(t) \right] = 0 \quad (1.103)$$

□

i.2) **Lois de commande sur un horizon de temps infini** Le comportement du problème d'optimisation dans le cas d'un horizon de temps infini doit être soigneusement examiné. En effet, la fonction coût en elle même peut être infinie ce qui pourrait conduire à la non existence de solutions. Dans ce qui suit, ces difficultés sont examinées et des conditions d'existence de loi de commande pour un horizon de temps infini sont données.

a) **La fonction coût** Pour que le problème d'optimisation soit solvable pour $t_f \rightarrow \infty$, la fonction coût doit être finie, pour une loi de commande donnée. Sous certaines conditions, cela peut être garanti par le lemme suivant.

Lemme 1.3 Si le système (1.81) est exponentiellement stable en moyenne quadratique, un ensemble non vide de paires de commandes et de trajectoires d'état u_t, x_t existe, pour lequel (1.82) est fini pour tout $x(t_0)$. ◇

b) **Solutions d'état d'équilibre pour $\mathcal{P}_{ki}(t)$** Il a été prouvé que si le système (1.81) est exponentiellement stable en moyenne quadratique, alors il existe des solutions d'état d'équilibre pour les

équations de Riccati matricielles [MJZ02].

Lemme 1.4 Si le système (1.81) est exponentiellement stable en moyenne quadratique, alors les équations différentielles de pseudo Riccati admettent des solutions d'état d'équilibre définies positives uniques, $\bar{\mathcal{P}}_{ki}$, solutions des équations matricielles algébriques suivantes

$$\tilde{A}'_{ki}\bar{\mathcal{P}}_{ki} + \bar{\mathcal{P}}_{ki}\tilde{A}_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ij}^k \bar{\mathcal{P}}_{kj} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{kj} \bar{\mathcal{P}}_{ji} + \mathcal{K}'_i R_{ki} \mathcal{K}_i + \mathcal{Q}_{ki} = 0 \quad (1.104)$$

◇

c) **Solutions d'état d'équilibre pour $\mathcal{X}_{ki}(t)$** Le théorème 1.13 fournit des conditions pour lesquelles des solutions d'état d'équilibre existent pour les pseudo équations différentielles de covariance.

Théorème 1.13 Si le système (1.81) est stable (au sens déterministe), alors les équations différentielles de pseudo covariance admettent des solutions d'état d'équilibre définies positives uniques, $\bar{\mathcal{X}}_{ki}$, solutions des équations matricielles algébriques suivantes

$$\hat{A}_{ik}\bar{\mathcal{X}}_{ki} + \bar{\mathcal{X}}_{ik}\hat{A}'_{ki} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{R} \\ j \neq i}} q_{ji}^k \bar{\mathcal{X}}_{kj} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \alpha_{jk} \bar{\mathcal{X}}_{ji} + \mathcal{X}_{ki}(t_0) = 0 \quad (1.105)$$

□

d) **Solutions d'état d'équilibre pour les gains de retour d'état** L'existence de solutions d'état d'équilibre pour les pseudo équations différentielles de Riccati et les pseudo équations différentielles de covariance implique l'existence de gains de retours d'état \mathcal{K}_i constants. Ces gains sont obtenus, dans le cas d'horizon de temps infini, par le théorème 1.14.

Théorème 1.14 Les gains de retour d'état minimisant (1.82) sont obtenus comme solutions des équations suivantes

$$\begin{cases} R_{ki}\mathcal{K}_{ki}\bar{\mathcal{X}}_{ki} - B'_k\bar{\mathcal{P}}_{ki}\bar{\mathcal{X}}_{ki} = 0, & \text{Scénario 1} \\ \sum_{k=1}^a [R_{ki}\mathcal{K}_i v_k \bar{\mathcal{X}}_{ki} - B'_k v_k \bar{\mathcal{P}}_{ki} \bar{\mathcal{X}}_{ki}] = 0 & \text{Scénario 2} \\ \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^a [R_{ki}\mathcal{K}_i w_i^k v_k \bar{\mathcal{X}}_{ki} - B'_k w_i^k v_k \bar{\mathcal{P}}_{ki} \bar{\mathcal{X}}_{ki}] = 0 & \text{Scénario 3} \end{cases} \quad (1.106)$$

où $\bar{\mathcal{P}}_{ki}$ et $\bar{\mathcal{X}}_{ki}$ sont les solutions des équations algébriques (1.104) et (1.105) respectivement. □

ii) **Commande \mathcal{H}_∞ dans le cas des systèmes à temps continu** Dans cette section, nous exposons les travaux de [SB97] sur la commande \mathcal{H}_∞ des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens en temps continu.

Soit le système dynamique, défini dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , et représenté sous forme d'état comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_t = A(\eta_t)x_t + B_1(\eta_t)w_t + B_2(\eta_t)u(\eta_t, \psi_t, x_t) \\ z_t = C(\eta_t)x_t + D(\eta_t)u(\eta_t, \psi_t, x_t) \\ u(\eta_t, \psi_t, x_t) = -\mathcal{K}(\eta_t, \psi_t)x_t \end{cases} \quad (1.107)$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u(\eta_t, \psi_t, x_t) \in \mathbb{R}^k$ est l'entrée de commande, $w_t \in \mathbb{R}^p$ est la perturbation exogène appartenant à $L^2[0, \infty)$, et $z_t \in \mathbb{R}^m$ est la sortie à commander appartenant à $L^2((\Omega, \mathcal{F}, P), [0, \infty))$.

Le problème de commande \mathcal{H}_∞ considéré peut s'écrire comme suit :

Trouver les gains de retour d'état $\mathcal{K}(\eta_t, \psi_t)$, tel que pour tout $w_t \in l^2[0, \infty)$ non nul

i) *dans le cas à horizon de temps fini, le système (1.107) vérifie la relation*

$$\|z\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \|w\|_2 \quad (1.108)$$

sur l'intervalle de temps $[0, T]$, où $\gamma_\infty > 0$ est le niveau de performance \mathcal{H}_∞ et

$$\|z\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T z_t' z_t dt \right\}^{1/2}$$

ii) *dans le cas à horizon de temps infini, le système (1.107) est stochastiquement stable et vérifie la relation (1.108) sur l'intervalle $[0, \infty)$.*

Les théorèmes suivant énoncent les principaux résultats obtenus dans le cas à horizon de temps fini et infini, respectivement.

Théorème 1.15 (horizon fini) Soit le système (1.107). Alors, pour $\gamma_\infty > 0$ donné, il existe une commande par retour d'état $u(\eta_t, \psi_t, x_t)$ tel que

$$\|z\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \|w\|_2$$

pour tout $w_t \in l^2[0, \infty)$, si les équations différentielles couplées de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_{ik}(t) + A_k' \mathcal{P}_{ik}(t) + \mathcal{P}_{ik}(t) A_k + \mathcal{P}_{ik}(t) [\gamma_\infty^{-2} B_{1k} B_{1k}' - B_{2k} R_k^{-1} B_{2k}'] \mathcal{P}_{ik}(t) \\ + \sum_{j \in \mathcal{R}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{jk}(t) + \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ij}(t) + C_k' C_k = 0 \end{aligned} \quad (1.109)$$

avec les conditions aux limites

$$\mathcal{P}_{ik}(T) = 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathcal{A}, \quad t \in [0, T]$$

admettent une solution $\{\mathcal{P}_{ik}(t), i \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{A}\}$ sur $[0, T]$. Dans ce cas, la loi de commande par retour d'état est donnée par

$$\begin{aligned} u(\eta_t, \psi_t, x_t) &= -\mathcal{K}(\eta_t, \psi_t)x_t \\ \mathcal{K}(\eta_t, \psi_t) &= R^{-1}(\eta_t)B_2'(\eta_t)\mathcal{P}(\eta_t, \psi_t, t) \\ t &\in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.110)$$

□

Théorème 1.16 (horizon infini) Soit le système (1.107). Alors, pour $\gamma_\infty > 0$ donné, il existe une commande par retour d'état $u(\eta_t, \psi_t, x_t)$ tel que le système en boucle fermée est stochastiquement stable et

$$\|z\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \|w\|_2$$

pour tout $w_t \in l^2[0, \infty)$, si les équations de Riccati algébriques couplées suivantes

$$A'_k \mathcal{P}_{ik} + \mathcal{P}_{ik} A_k + \mathcal{P}_{ik} [\gamma_\infty^{-2} B_{1k} B'_{1k} - B_{2k} R_k^{-1} B'_{2k}] \mathcal{P}_{ik} + \sum_{j \in \mathcal{R}} q_{ij}^k \mathcal{P}_{jk} + \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_{kj} \mathcal{P}_{ij} + C'_k C_k = 0 \quad (1.111)$$

admettent une solution $\{\mathcal{P}_{ik}, i \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{A}\}$. Dans ce cas, la loi de commande par retour d'état est donnée par

$$\begin{aligned} u(\eta_t, \psi_t, x_t) &= -\mathcal{K}(\eta_t, \psi_t) x_t \\ \mathcal{K}(\eta_t, \psi_t) &= R^{-1}(\eta_t) B'_2(\eta_t) \mathcal{P}(\eta_t, \psi_t) \\ t &\in [0, \infty]. \end{aligned} \quad (1.112)$$

□

1.4.5 Discussion

Les travaux présentés ci-dessus peuvent être divisés en deux problématiques principales :

- i) analyse de la stabilité stochastique des AFTCSMP (avec et sans la prise en compte de bruits) ;
- ii) synthèse de lois de commande optimales par retour statique d'état (commande \mathcal{H}_∞) pour les AFTCSMP.

Dans la première problématique, le modèle du AFTCSMP considéré intègre l'effet de bruits environnementaux mais sans tenir compte des perturbations exogènes pouvant affecter le système. Quand à la seconde problématique, elle considère l'effet des perturbation exogènes dans un environnement non bruité. Cela a motivé notre choix d'un modèle dynamique intégrant l'effet des deux entrées externes au système.

Le second point transparaissant de cette étude est que la plupart des résultats établis pour cette classe de systèmes traitent de l'**analyse** de la stabilité et des performances de ces systèmes et non de la **synthèse** de lois de commande remplissant un cahier des charges donné. Les seuls résultats relatifs à la problématique de synthèse conduisent à des correcteurs irréalisables en pratiques (ces derniers dépendent des processus défauts, voir les théorèmes 1.15 et 1.16) et se basent sur l'hypothèse restrictive d'accessibilité du vecteur d'état. Le premier objectif de ce travail est donc de s'affranchir de cette hypothèse et de considérer ainsi des problèmes de synthèse de correcteur par retour de sortie statique/dynamique et cela dans un cadre de commande multi-objectifs. Et plus particulièrement, nous nous intéresserons à des critères de performance $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

La problématique de commande multi-objectifs sera abordée dans le cas des systèmes à temps continu

et à temps discret. Pour le cas continu, nous montrerons que les résultats développés peuvent s'appliquer aisément à la problématique de commande multi-objectifs indépendante du mode des (MJLS). Cela représente un cas particulier très intéressant. Dans le cadre des systèmes à temps discret, nous montrerons là aussi que les résultats établis peuvent s'appliquer à la problématique de commande multi-objectifs tolérantes aux défauts des systèmes commandés par réseaux.

Enfin, il est important de noter qu'au delà des résultats théoriques obtenus dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'aspect résolution numérique des différentes conditions de stabilité et de performances en boucle fermée. En effet, pour chaque problématique considérée, des algorithmes de résolutions numériques (convexes et non convexes) seront proposés et validés sur des exemples de simulation et cela en mettant en évidence leurs performances et leurs limitations.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps présenté un bref état de l'art des principales méthodes de synthèses de systèmes tolérants aux défauts par approches actives, en mettant en évidence leurs avantages et inconvénients. Il est ressortit de cette étude que la plupart de ces méthodes supposent que l'information fournie par le module de FDI est parfaite. De ce fait, ces méthodes sont inadaptées pour la prise en compte des contraintes inhérentes à cette classe de systèmes (retards de détection, fausses alarmes, *etc*). Ce constat nous a permis d'introduire la problématique abordée dans ce travail au travers des AFTCSMP. Après avoir défini cette classe de systèmes hybrides stochastiques, nous avons présenté quelques définitions et résultats relatifs aux systèmes stochastiques. Si cette présentation n'a évidemment pas la prétention d'être exhaustive, elle est néanmoins suffisante à la lecture du présent mémoire. Nous avons ensuite établi un tour d'horizon des différents travaux réalisés dans ce domaine. Cela nous a permis de positionner nos travaux et de justifier les orientations suivies dans le présent travail.

Chapitre 2

Stabilisation stochastique

Dans ce chapitre, le problème de stabilisation interne stochastique par retour statique/dynamique de sortie des AFTCSMP est considérée dans le cas où ce dernier est sujet à des bruits multiplicatifs. Les différents résultats seront présentés de manière à respecter la chronologie de nos travaux et cela afin de mettre en évidence la complexité de la problématique abordée. Dans le cas du retour statique de sortie, nos principaux résultats se traduisent par une caractérisation sous forme d'inégalités matricielles linéaires et non linéaires des correcteurs statiques stabilisant le système en boucle fermée. Les résultats relatifs à la problématique du retour dynamique de sortie seront ensuite établis, où là aussi des caractérisations, sous forme d'inégalités matricielles linéaires, bilinéaires et non linéaires des correcteurs dynamiques stabilisant le système en boucle fermée seront données.

2.1 Introduction

La stabilisation des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens a reçu, récemment, une attention particulière après les travaux de [SW93]. Cela a été motivé par le soucis d'intégration des modules de FDI et de reconfiguration de lois de commande dans une optique d'application en temps réel. En effet, le formalisme Markovien permet la prise en compte, de façon naturelle, des problèmes inhérents à cette classe de systèmes, à savoir : les retards de détection, les fausses alarmes, la non détection de défauts, *etc.*

Dans [SW93], les auteurs ont considéré le système représenté sous forme d'état comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_t = Ax_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t) \\ u(x_t, \psi_t) = -\mathcal{K}(\psi_t)x_t \end{cases} \quad (2.1)$$

et ont proposé des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité exponentielle en moyenne quadratique pour cette classe de systèmes en terme de solutions d'équations différentielles de Riccati non standards.

Mahmoud et al [MJZ03] ont analysé la stabilité des systèmes tolérants aux défauts dans un environ-

nement bruité. Cette classe de systèmes peut être modélisée par les EDS suivantes

$$\begin{cases} dx_t = Ax_t dt + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t, t)dt + D(x_t, \eta_t, t)d\varpi_{1t} \\ + E(u_t, \eta_t, t)d\varpi_{2t} + F(\eta_t)d\varpi_{3t} \\ u(x_t, \psi_t, t) = -\mathcal{K}(\psi_t)x_t \end{cases} \quad (2.2)$$

où ϖ_{it} sont des processus de Wiener (ou mouvements Browniens), indépendants, dans \mathbb{R}^{n_i} , $\forall i = 1, 2, 3$. $D(x_t, \eta_t, t)$, $E(u_t, \eta_t, t)$ et $F(\eta_t)$ sont des fonctions matricielles de dimension $\mathbb{R}^{n \times n_i}$. Trois types de bruits sont considérés dans l'équation (2.2) : bruit dépendant de l'état $D(x_t, \eta_t, t)d\varpi_{1t}$, bruit dépendant de la commande $E(u_t, \eta_t, t)d\varpi_{2t}$ et bruit indépendant de la commande et de l'état $F(\eta_t)d\varpi_{3t}$. Des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité exponentielle en moyenne quadratique ont été, là aussi, proposées en se basant sur la résolution d'équations différentielles de Riccati non standards. Cependant, il apparaît aux travers de ces travaux trois points principaux ayant motivé la problématique introduite dans le présent chapitre, à savoir

- travaux traitant de l'analyse de la stabilité stochastique et non de la synthèse de régulateurs stabilisant le système en boucle fermée ;
- vecteur d'états du système supposé accessible ;
- absence d'algorithmes et de méthodes numériques efficaces.

Fort de ces constatations, nous allons abordé dans ce chapitre la problématique de stabilisation exponentielle par retour statique/dynamique de sortie des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens, sujets à des bruits multiplicatifs. Les résultats seront exposés de manière à respecter la chronologie de nos travaux. Nous nous intéresserons dans un premier temps au cas de la commande par retour statique de sortie, pour laquelle des caractérisations, sous forme LMI et NLMI, des correcteurs statiques stabilisant le système en boucle fermée seront présentées. Puis nous introduirons les résultats relatifs à la problématique du retour dynamique de sortie, où là aussi, des caractérisations sous forme LMI, BMI et NLMI, des correcteurs dynamiques stabilisant le système en boucle fermée seront données.

2.2 Retour statique de sortie

Le problème de commande par retour de sortie statique est d'une importance primordiale en théorie de la commande et particulièrement dans les cas pratiques. En effet, dans la majorité des cas, les problèmes pratiques de commande doivent être résolus sous l'hypothèse restrictive d'information partielle. Le système de commande ne dispose pas de la connaissance complète de l'état du système afin d'élaborer la loi de commande puisque seules les mesures fournies par les capteurs (en nombre limité) lui sont accessibles. Dans le présent travail, nous nous basons sur des approches utilisant la théorie de Lyapunov afin de dériver des conditions nécessaires et suffisantes d'existence. Des conditions sous formes d'inégalités matricielles linéaires (conditions suffisantes) et non linéaires (conditions nécessaires et suffisantes) seront ainsi énoncées.

2.2.1 Modèle dynamique

Afin de décrire la classe des systèmes à sauts Markoviens traitée dans ce travail, fixons dans un premier temps un espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) . Cette classe de systèmes est caractérisée par un vecteur d'état **hybride**. La première composante est continue et représente l'état du système, et la seconde est discrète et représente les différents processus défauts affectant le système, ainsi que le processus FDI. Le modèle dynamique du système tolérant aux défauts sujet à des bruits multiplicatifs, défini dans l'espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) , est décrit par les EDS suivantes :

$$\varphi : \begin{cases} dx_t = A(\xi_t)x_t dt + B(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t)dt + E(\xi_t, \eta_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t)x_t d\varpi_{lt} \\ y_t = C_2 x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = C_1 x_t + D_1(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

où

- $x_t \in \mathbb{R}^n$: état du système ;
- $u(y_t, \psi_t, t) \in \mathbb{R}^r$: entrée de commande du système ;
- $y_t \in \mathbb{R}^q$: sortie mesurée du système ;
- $z_t \in \mathbb{R}^p$: sortie commandée du système ;
- $w_t \in \mathbb{R}^m$: perturbations externes ;
- ξ_t, η_t et ψ_t : processus défauts systèmes, défauts actionneurs et processus FDI, respectivement. ξ_t, η_t et ψ_t sont des processus Markoviens mesurables, séparables et à espaces d'états finis $Z = \{1, 2, \dots, z\}$, $S = \{1, 2, \dots, s\}$ et $R = \{1, 2, \dots, r\}$, respectivement ;
- $\varpi_t = [\varpi_{1t} \dots \varpi_{vt}]'$: processus de Wiener v -dimensionnel défini sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) donné. Le processus de Wiener est supposé indépendant des différents processus Markoviens ;
- $A(\xi_t), B(\eta_t), E(\xi_t, \eta_t), D_2(\xi_t, \eta_t), D_1(\eta_t)$ et $\mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t)$: matrices aléatoires de dimensions appropriées.

En commande tolérante aux défauts par approche active, nous considérons que la loi de commande n'est fonction que du processus FDI. Dans ce contexte, nous définissons les compensateurs par retour statique de sortie (φ_s) comme suit

$$\varphi_s : \left\{ u_t = \mathcal{K}(\psi_t)y_t \right. \quad (2.4)$$

En combinant (2.3) et (2.4), la représentation d'état du système en boucle fermée est donnée par :

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} dx_t = \bar{A}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)x_t dt + \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t)x_t d\varpi_{lt} \\ y_t = C_2 x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t)x(t) + \bar{D}_1(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t \end{cases} \quad (2.5)$$

où

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) & \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \\ \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) & \bar{D}_1(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\xi_t) & E(\xi_t, \eta_t) \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\eta_t) \\ D_1(\eta_t) \end{bmatrix} \mathcal{K}(\psi_t) \begin{bmatrix} C_2 & D_2(\xi_t, \eta_t) \end{bmatrix}$$

Les processus défauts et FDI :

$\xi(t)$, $\eta(t)$ et $\psi(t)$ étant des processus Markoviens homogènes à espaces d'état finis, nous pouvons définir la probabilité de transition du processus défaut système comme suit (voir Chapitre 1) :

$$\begin{cases} p_{ij}(\Delta t) = \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \\ p_{ii}(\Delta t) = 1 - \sum_{i \neq j} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases} ; i, j \in Z$$

La probabilité de transition du processus défaut actionneur est donnée par

$$\begin{cases} p_{kl}(\Delta t) = \nu_{kl}\Delta t + o(\Delta t) \\ p_{kk}(\Delta t) = 1 - \sum_{k \neq l} \nu_{kl}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases} ; k, l \in S$$

où π_{ij} est le taux de transition du processus défaut système, et ν_{kl} est le taux de transition du processus défaut actionneur.

Sachant que $\xi = k$ et $\eta = l$, la probabilité de transition conditionnelle du processus FDI $\psi(t)$ est donnée comme suit :

$$\begin{cases} p_{iv}^{kl}(\Delta t) = \lambda_{iv}^{kl}\Delta t + o(\Delta t) \\ p_{ii}^{kl}(\Delta t) = 1 - \sum_{i \neq v} \lambda_{iv}^{kl}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases} ; i, v \in R$$

λ_{iv}^{kl} représente le taux de transition de l'état i à l'état v du processus Markovien $\psi(t)$ conditionné par $\xi = k \in Z$ et $\eta = l \in S$. Selon les valeurs de $i, v \in R, k \in Z$ et $l \in S$, plusieurs interprétations, telles que le taux de fausses alarmes, le taux de bonnes détections, *etc.*, peuvent être attribuées à λ_{iv}^{kl} [MJZ03, SW93].

Objectif. Dans ce qui suit, notre objectif est de synthétiser des contrôleurs statiques φ_s assurant la stabilité exponentielle stochastique, de manière interne, du système en boucle fermée (2.5).

Avant de procéder, nous allons d'abord introduire quelques définitions et résultats préliminaires nécessaires à la dérivation de nos principaux résultats.

2.2.2 Définitions et résultats préliminaires

Dans cette section, nous allons dans un premier temps rappeler quelques définitions basiques, relatives à des notions de stabilité stochastique, puis nous introduirons quelques résultats préliminaires portant sur la stabilité exponentielle, au sens de la moyenne quadratique, du système tolérant aux défauts sujet à des bruits multiplicatifs.

Dans ce qui suit, et sans perte de généralité, nous supposons que le point d'équilibre, $x = 0$, est la solution en laquelle les propriétés de stabilité sont examinées.

Définition 2.1 *Le système (2.5) est dit*

(i) *stochastiquement stable (SS) si il existe une constante positive $K(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$ telle que la relation suivante est vérifiée pour toute condition initiale $(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$:*

$$\mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty \|x_t\|^2 dt \right\} \leq K(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0) \quad (2.6)$$

(ii) *exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si il est exponentiellement stable au sens de la moyenne quadratique pour $w_t = 0$, i.e. quels que soient ξ_0, η_0, ψ_0 et $\gamma(\xi_0, \eta_0, \psi_0)$, il existe deux nombres $a > 0$ et $b > 0$ tel que si $\|x_0\| \leq \gamma(\xi_0, \eta_0, \psi_0)$, la relation suivante est vérifiée $\forall t \geq t_0$ pour toute solution de (2.5) ayant pour condition initiale x_0 :*

$$\mathcal{E} \{ \|x_t\|^2 \} \leq b \|x_0\|^2 \exp[-a(t - t_0)] \quad (2.7)$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour la stabilité exponentielle, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique du système en boucle fermée (2.5).

Théorème 2.1 *La solution $x = 0$ du système bouclé (2.5) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique $\forall t \geq t_0$ si il existe une fonction de Lyapunov stochastique $\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$ telle que*

$$K_1 \|x_t\|^2 \leq \vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) \leq K_2 \|x_t\|^2 \quad (2.8)$$

et

$$\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) \leq -K_3 \|x_t\|^2 \quad (2.9)$$

où K_1, K_2 et K_3 sont des constantes positives données. □

Une condition nécessaire pour la stabilité exponentielle du système (2.5) est donnée par le théorème 2.2.

Théorème 2.2 *Si la solution $x = 0$ du système bouclé (2.5) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique, alors pour toute fonction $W(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$ quadratique en les variables x , définie positive, bornée et continue $\forall t \geq t_0, \forall \xi_t \in Z, \forall \eta_t \in S$ et $\forall \psi_t \in R$, il existe une fonction définie positive $\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$ quadratique en les variables x vérifiant les conditions du théorème 2.1 et telle que $\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) = -W(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$. □*

Remarque 2.1 Les preuves de ces deux Théorèmes s'appuient sur les mêmes arguments que dans [MJZ03, SW93]. Elles ne seront donc pas développées dans cette section. Le lecteur intéressé pourra consulter les références ci-dessus.

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle du système en boucle fermée (2.5) en termes d'inégalités matricielles couplées.

Proposition 2.1 Le système bouclé (2.5) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices symétriques définies positives \mathcal{P}_{ijk} ,

$i \in Z, j \in S$ et $k \in R$ telle que :

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} < 0 \quad (2.10)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$, où

$$\tilde{\Lambda}_{ijk} = \bar{A}_{ijk} - 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right) \quad (2.11)$$

□

Preuve. La preuve de cette proposition se déduit aisément des théorèmes 2.1 et 2.2. ■

2.2.3 Formulation LMI

Dans cette section, nous allons, dans un premier temps établir une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation exponentielle, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique du système (2.3). La condition ainsi obtenue est formulée comme un problème de faisabilité d'inégalités matricielles couplées. Ces dernières étant non linéaires en les variables de décision, les techniques d'optimisation convexe sont de ce fait inadaptées pour la résolution de ce problème. Un schéma de relaxation LMI est alors adopté afin d'éliminer les nonlinéarités du problème originel. Il résulte de ce schéma une condition suffisante de stabilité exponentielle donnée sous forme de problème de faisabilité d'inégalités matricielles linéaires, pour lequel des algorithmes d'optimisation convexe très performants sont disponibles dans la littérature.

Le problème de stabilisation abordé peut être formulé comme suit

Problématique 2.1.

Trouver une loi de commande $u_t = \mathcal{K}(\psi_t)y_t$ tel que :

$$\mathcal{E} \{ \|x_t\|^2 \} \leq b \|x_0\|^2 \exp[-a(t - t_0)] \quad (2.12)$$

où x_t sont les trajectoires du système bouclé (2.5). ▼

Une caractérisation par inégalités matricielles non linéaires des compensateurs (φ_s) stabilisant le système (2.3), de manière interne, au sens de la moyenne quadratique est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.2 (Condition nécessaire et suffisante) Le système bouclé (2.5) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des

matrices $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{X}'_{ijk} > 0$, \mathcal{K}_k , et $\bar{\Omega}_{ijk}$ vérifiant les inégalités matricielles non linéaires suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{ijk}\mathcal{Z}_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{X}_{ijk}\bar{\Omega}'_{ijk} & \tilde{A}_{ijk} + B_j\mathcal{K}_kC_2 + \bar{\Omega}_{ijk} & \mathcal{X}_{ijk}\Theta_{ij} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \\ \star & -\mathcal{Z}_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbb{J}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

où \mathcal{Z}_{ijk} sont des matrices définies positives quelconques et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = [\mathcal{R}1_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}), \mathcal{R}2_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}), \mathcal{R}3_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk})] \\ \mathcal{R}1_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = [\alpha_{i1}\mathcal{X}_{ijk}, \dots, \alpha_{i(i-1)}\mathcal{X}_{ijk}, \alpha_{i(i+1)}\mathcal{X}_{ijk}, \dots, \alpha_{iz}\mathcal{X}_{ijk}] \\ \mathcal{R}2_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = [\beta_{j1}\mathcal{X}_{ijk}, \dots, \beta_{j(j-1)}\mathcal{X}_{ijk}, \beta_{j(j+1)}\mathcal{X}_{ijk}, \dots, \beta_{js}\mathcal{X}_{ijk}] \\ \mathcal{R}3_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = [\gamma_{k1}\mathcal{X}_{ijk}, \dots, \gamma_{k(k-1)}\mathcal{X}_{ijk}, \gamma_{k(k+1)}\mathcal{X}_{ijk}, \dots, \gamma_{kr}\mathcal{X}_{ijk}] \\ \alpha_{il} = \sqrt{\pi_{il}}; \beta_{jl} = \sqrt{\nu_{jl}}; \gamma_{kl} = \sqrt{\lambda_{kl}^{ij}} \\ \mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = \text{diag}[\mathcal{S}1_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}), \mathcal{S}2_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}), \mathcal{S}3_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk})] \\ \mathcal{S}1_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = [\mathcal{X}_{1jk}, \dots, \mathcal{X}_{(i-1)jk}, \mathcal{X}_{(i+1)jk}, \dots, \mathcal{X}_{zjk}] \\ \mathcal{S}2_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = [\mathcal{X}_{i1k}, \dots, \mathcal{X}_{i(j-1)k}, \mathcal{X}_{i(j+1)k}, \dots, \mathcal{X}_{isk}] \\ \mathcal{S}3_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) = [\mathcal{X}_{ij1}, \dots, \mathcal{X}_{ij(k-1)}, \mathcal{X}_{ij(k+1)}, \dots, \mathcal{X}_{ijr}] \\ \tilde{A}_{ijk} = A_i - 0.5\mathbb{I} \left(\begin{array}{c} \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \end{array} \right) \\ \Theta_{ij} = [\mathbb{W}'_{1ij}, \dots, \mathbb{W}'_{vij}] \\ \mathbb{J}_{ijk} = \text{diag}[\mathcal{X}_{ijk}, \dots, \mathcal{X}_{ijk}] \end{array} \right.$$

\mathbb{J}_{ijk} contient v éléments.

Si (2.13) est faisable, alors la loi de commande par retour statique de sortie, stabilisant le système (2.3) est donnée comme suit

$$u_k(t) = \mathcal{K}_k y(t)$$

□

Preuve. Soient les inégalités matricielles (2.10). D'après le lemme de projection réciproque (voir **annexe C** : page 192), et en considérant $\Psi =$

$$\left(\sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} \right), \text{ et } S = \tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} \text{ nous obtenons}$$

$$\left[\begin{array}{c} \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} + \mathcal{Z}_{ijk} - (\Omega_{ijk} + \Omega'_{ijk}) \\ \star \\ \mathcal{P}_{ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \Omega_{ijk} \\ -\mathcal{Z}_{ijk} \end{array} \right] < 0 \quad (2.14)$$

où Z_{ijk} sont des matrices définies positives quelconques, $\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

Définissons $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{P}_{ijk}^{-1}$ et $\bar{\Omega}_{ijk} = \mathcal{X}_{ijk}\Omega_{ijk}$. En utilisant la transformation de congruence

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

et en appliquant le complément de Schur (voir annexe C : page 191) au terme

$$\mathcal{X}_{ijk} \left(\sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} \right) \mathcal{X}_{ijk}$$

l'inégalité (2.14) devient

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{ijk} Z_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{X}_{ijk} \bar{\Omega}'_{ijk} & \tilde{\Lambda}_{ijk} + \bar{\Omega}_{ijk} & \mathcal{X}_{ijk} \Theta_{ij} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \\ \star & -Z_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{\mathcal{J}}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.15)$$

d'où le résultat escompté. ■

Remarque 2.2 La condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle donnée par la proposition 2.2 est non linéaire en les variables de décision \mathcal{X}_{ijk} et $\bar{\Omega}_{ijk}$. Les techniques d'optimisation convexe sont de ce fait inadaptées pour la résolution de ce problème. Cependant, le degré de liberté introduit par les variables Z_{ijk} peut être utilisé de sorte à établir une condition suffisante de stabilité stochastique formulée comme un problème de faisabilité d'inégalités matricielles linéaires. Cela est illustré par la proposition suivante.

Proposition 2.3 (Condition suffisante) Si il existe des matrices $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{X}'_{ijk} > 0$, \mathcal{K}_k , et $\bar{\Omega}_{ijk}$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mu_{ijk} \mathbb{I} - \bar{\Omega}_{ijk} - \bar{\Omega}'_{ijk} & (\mu_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk}) & \tilde{A}_{ijk} + B_j \mathcal{K}_k C_2 + \bar{\Omega}_{ijk} & \mathcal{X}_{ijk} \Theta_{ij} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \\ \star & -\mu_{ijk} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mu_{ijk} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\tilde{\mathcal{J}}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

où μ_{ijk} sont des constantes positives, alors le système bouclé (2.5) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique.

Si (2.16) est faisable, alors la loi de commande par retour de sortie statique, stabilisant le système (2.3) est donnée comme suit

$$u_k(t) = \mathcal{K}_k y(t)$$

□

Remarque 2.3 Les scalaires μ_{ijk} sont introduits afin de réduire le pessimisme de la condition suffisante de stabilité exponentielle stochastique donnée par la proposition 2.3.

Preuve. Sachant, d'après la proposition 2.2, que \mathcal{Z}_{ijk} sont des matrices définies positives quelconques, définissons $\mathcal{Z}_{ijk} = \mu_{ijk}\mathbb{I} \forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$. En appliquant le complément de Schur au terme

$$\mathcal{X}_{ijk}\mathcal{Z}_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} - \bar{\Omega}'_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{X}_{ijk}\bar{\Omega}_{ijk}$$

l'inégalité (2.13) peut être réécrite comme suit

$$\begin{bmatrix} -\mu_{ijk}^{-1}\bar{\Omega}_{ijk}\bar{\Omega}'_{ijk} & (\mu_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk}) & \tilde{A}_{ijk} + B_j\mathcal{K}_kC_2 + \bar{\Omega}_{ijk} & \mathcal{X}_{ijk}\Theta_{ij} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \\ \star & -\mu_{ijk}\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mu_{ijk}\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathcal{J}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

Alors, et en se basant sur la relation

$$-\mu_{ijk}^{-1}\bar{\Omega}_{ijk}\bar{\Omega}'_{ijk} \leq -\bar{\Omega}'_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk} + \mu_{ijk}\mathbb{I}$$

nous obtenons l'inégalité matricielle (2.16). Cela conclut cette preuve. \blacksquare

Remarque 2.4 (Robustesse) Dans [APH06], nous nous sommes intéressés à la problématique de stabilisation *robuste* du système (2.3). La robustesse est ici relative à des incertitudes paramétriques affectant les différentes matrices d'état. Le modèle considéré est donné comme suit

$$\varphi : \begin{cases} dx_t = [A(\xi_t) + \Delta A(\xi_t)]x_t dt + [B(\eta_t) + \Delta B(\eta_t)]u(y_t, \psi_t, t)dt + E(\xi_t, \eta_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t)x_t d\varpi_{lt} \\ y_t = C_2 x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = C_1 x_t + D_1(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) \end{cases} \quad (2.18)$$

où $\Delta A(\xi_t)$ et $\Delta B(\eta_t)$ représentent les incertitudes paramétriques du système. Ces dernières sont supposées *structurées*, et plus particulièrement, nous avons considéré une forme **NBU** (pour Norm Bounded Uncertainties). Les incertitudes paramétriques structurées sont modélisées dans ce cas comme suit

$$\begin{cases} \Delta A(\xi_t) = \mathbf{D}_{A(\xi_t)} \mathbf{F}_{A(\xi_t)} \mathbf{E}_{A(\xi_t)} \\ \Delta B(\eta_t) = \mathbf{D}_{B(\eta_t)} \mathbf{F}_{B(\eta_t)} \mathbf{E}_{B(\eta_t)} \end{cases} \quad (2.19)$$

où $\mathbf{D}_{A(\xi_t)}$, $\mathbf{F}_{A(\xi_t)}$, $\mathbf{E}_{A(\xi_t)}$, $\mathbf{D}_{B(\eta_t)}$, $\mathbf{F}_{B(\eta_t)}$ et $\mathbf{E}_{B(\eta_t)}$ sont des matrices de dimensions appropriées. $\mathbf{D}_{A(\xi_t)}$, $\mathbf{D}_{B(\eta_t)}$, $\mathbf{E}_{A(\xi_t)}$, $\mathbf{E}_{B(\eta_t)}$ sont supposées connues, et $\mathbf{F}_{A(\xi_t)}$, $\mathbf{F}_{B(\eta_t)}$ sont des fonctions matricielles Lipschitziennes vérifiant les conditions

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_{A(\xi_t)} \mathbf{F}_{A(\xi_t)} \leq \mathbb{I} \\ \mathbf{F}'_{B(\eta_t)} \mathbf{F}_{B(\eta_t)} \leq \mathbb{I}, \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.20)$$

Le résultat suivant peut alors être énoncé

Proposition 2.4 Si il existe des matrices $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{X}'_{ijk} > 0$, \mathcal{K}_k , $\bar{\Omega}_{ijk}$ et des scalaires positifs ε_{A_i} et ε_{B_j} vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} F_{ijk} & (\mu_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk}) & \mathcal{X}_{ijk}\Theta_{ij} & \mathcal{X}_{ijk}\mathbf{E}'_{A_i} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) & \tilde{A}_{ijk} + B_j\mathcal{K}_kC_2 & \mathbf{0} \\ \star & -\mu_{ijk}\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{J}}_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\varepsilon_{A_i}\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathcal{S}_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\mu_{ijk}\mathbb{I} & C'_2\mathcal{K}'_k\mathbf{E}'_{B_j} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\varepsilon_{B_j}\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

où

$$F_{ijk} = \mu_{ijk}\mathbb{I} - \bar{\Omega}_{ijk} - \bar{\Omega}'_{ijk} + \varepsilon_{A_i}\mathbf{D}_{A_i}\mathbf{D}'_{A_i} + \varepsilon_{B_j}\mathbf{D}_{B_j}\mathbf{D}'_{B_j}$$

alors le système (2.3) est exponentiellement stabilisable, de manière robuste, au sens de la moyenne quadratique par un retour statique de sortie, donné par

$$u_k(t) = \mathcal{K}_ky(t)$$

□

Remarque 2.5 Les résultats présentés ci-dessus peuvent être aisément appliqués à la problématique de stabilisation exponentielle stochastique par retour statique de sortie de la classe des systèmes linéaires à sauts Markoviens (MJLS). Et cela dans le cas où le gain de retour est indépendant du mode. En effet, cette problématique peut résulter de la non disponibilité d'algorithmes de calcul du mode actif du système, d'un temps de calcul trop important, *etc.* Un résultat relatif à la stabilisation stochastique de cette classe de système a été récemment obtenu dans [BAM04]. En effet, les auteurs proposent une caractérisation LMI du gain de retour d'état stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée. Ces résultats se basent sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov commune à tout les modes, rendant ces résultats relativement pessimistes. La contribution essentielle de notre travail réside dans l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendantes du mode.

Pour cela, considérons la représentation d'état en boucle fermée suivante

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} dx_t = \bar{A}(\phi_t)x_t dt + \bar{E}(\phi_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}_l(\phi_t)x_t d\varpi_{lt} \\ y_t = C_2(\phi_t)x_t + D_2(\phi_t)w_t \\ z_t = \bar{C}_1(\phi_t)x_t + \bar{D}_1(\phi_t)w_t \end{cases} \quad (2.22)$$

où

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\phi_t) & \bar{E}(\phi_t) \\ \bar{C}_1(\phi_t) & \bar{D}_1(\phi_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\phi_t) & E(\phi_t) \\ C_1(\phi_t) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\phi_t) \\ D_1(\phi_t) \end{bmatrix} \mathcal{K} \begin{bmatrix} C_2(\phi_t) & D_2(\phi_t) \end{bmatrix}$$

Le processus ϕ_t est un processus Markovien à temps continu et à espace d'état fini $H = \{1, \dots, h\}$, muni de la matrice de transition $\Xi = [\Phi]_{i,j=1,\dots,h}$. Dans ce cas, la probabilité de transition du processus

ϕ_t peut être définie comme suit

$$p_{kj}(\Delta t) = \Phi_{kj}\Delta t + o(\Delta t) \quad (k \neq j) \quad (2.23)$$

où $\sum_{\substack{j \in H \\ j \neq i}} \Phi_{ij} = -\Phi_{ii}$.

En se basant sur les mêmes arguments que ceux utilisés pour prouver les résultats de la proposition 2.3, nous pouvons formuler le corollaire suivant. Ce dernier donne une condition suffisante de stabilité exponentielle stochastique du système bouclé (2.22).

Corollaire 2.1 Si il existe des matrices $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}'_i > 0$, \mathcal{K} , et $\bar{\Omega}_i$ vérifiant les LMI suivantes

$$\begin{bmatrix} \mu_i \mathbb{I} - \bar{\Omega}_i - \bar{\Omega}'_i & (\mu_i \mathcal{X}_i - \bar{\Omega}_i) & \tilde{A}_i + B_i \mathcal{K} C_{2i} + \bar{\Omega}_i & \mathcal{X}_i \Theta_i & \mathcal{R}_i(\mathcal{X}_i) \\ \star & -\mu_i \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mu_i \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathfrak{J}_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathcal{S}_i(\mathcal{X}_i) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

où μ_i sont des constantes positives et

$$\begin{cases} \mathcal{R}_i(\mathcal{X}_i) = [\alpha_{i1}\mathcal{X}_i, \dots, \alpha_{i(i-1)}\mathcal{X}_i, \alpha_{i(i+1)}\mathcal{X}_i, \dots, \alpha_{ih}\mathcal{X}_i] \\ \alpha_{il} = \sqrt{\Phi_{il}} \\ \mathcal{S}_i(\mathcal{X}_i) = \text{diag}[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{(i-1)}, \mathcal{X}_{(i+1)}, \dots, \mathcal{X}_h] \\ \tilde{A}_i = A_i - 0.5\mathbb{I} \sum_{\substack{l \in H \\ l \neq i}} \Phi_{il} \\ \Theta_i = [\mathbb{W}'_{1i}, \dots, \mathbb{W}'_{vi}] \\ \mathfrak{J}_i = \text{diag}[\mathcal{X}_i, \dots, \mathcal{X}_i] \end{cases}$$

alors le système bouclé (2.22) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique.

Si (2.24) est faisable, alors la loi de commande par retour de sortie statique est donnée comme suit

$$u_t = \mathcal{K}y_t$$

◇

Discussion

i) Avant d'opter pour l'utilisation du Lemme de projection réciproque, et par analogie au cas déterministe, nous nous sommes intéressés à l'application du Lemme de projection (voir **annexe C** : page 191) afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilité stochastique sous forme de problème de faisabilité de LMIs avec contraintes de rang. Cependant l'application de ce lemme conduit à des contrôleurs dépendants de tous les processus aléatoires, ce qui rend ces résultats inapplicables en pratique.

ii) **Pessimisme.** Nous avons pu vérifier expérimentalement que les conditions suffisantes de stabilité (2.16) introduisent un pessimisme relativement important, notamment pour des problèmes de grande dimension. Cela est dû à la relation $-\mu_{ijk}^{-1}\bar{\Omega}_{ijk}\bar{\Omega}'_{ijk} \leq -\bar{\Omega}'_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk} + \mu_{ijk}\mathbb{I}$. En effet, l'égalité n'est obtenue que pour $\bar{\Omega}_{ijk} = \mu_{ijk}\mathbb{I}$, ce qui revient donc à imposer une structure aux matrices $\bar{\Omega}_{ijk}$.

Afin de palier ces limitations, une solution serait de dériver de nouvelles conditions suffisantes, sous forme LMI, moins restrictives et moins pessimistes, et d'utiliser alors des algorithmes d'optimisation convexe. Cependant, dans ce travail, nous nous sommes plutôt intéressés à la caractérisation de tous les correcteurs statiques stabilisant le système, *i.e.*, dériver des conditions **nécessaires et suffisantes** de stabilité stochastique, pour lesquelles des algorithmes numériques performants sont mis en oeuvre. En raison de la nature du problème, les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont formulées sous forme d'inégalités matricielles non linéaires, et des algorithmes d'optimisation non convexe doivent alors être utilisés. Cela est illustré par la section suivante.

2.2.4 Formulation NLMI

Dans cette section, nous adoptons un nouveau formalisme basé sur la synthèse d'ensembles ellipsoïdaux de correcteurs. Ce formalisme a été introduit par [PAB02, PA05]. Les résultats sont formulés sous forme d'inégalités matricielles non linéaires.

Avant de procéder, nous allons d'abord introduire quelques définitions et résultats préliminaires nécessaires à la dérivation de nos principaux résultats.

2.2.4.1 Définitions

Dans cette section, nous allons dans un premier temps rappeler quelques définitions basiques, relatives à la notion d'ellipsoïdes dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , puis nous introduirons un ensemble particulier de matrices qui sera utilisé tout au long de ce document. Dus aux notations et par extension de la notion d'ellipsoïdes dans \mathbb{R}^n , ces ensembles seront appelés *ellipsoïdes de matrices* dans $\mathbb{R}^{m \times p}$.

Définition 2.2 : Les ellipsoïdes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 (les ellipses) Une ellipse peut être définie par trois éléments : x_0 , r et Z tels que

$$x \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)'Z(x - x_0) \leq r \quad (2.25)$$

$x_0 \in \mathbb{R}^2$: centre, $r \in \mathbb{R}$: rayon, $Z \in \mathbb{S}^2$, $Z > 0$, $\|Z\| = 1$: géométrie.

Définition 2.3 : Les ellipsoïdes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n Les ellipsoïdes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n sont définis par trois éléments : x_0 , r et Z tels que

$$x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0)'Z(x - x_0) \leq r \quad (2.26)$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$: centre, $r \in \mathbb{R}$: rayon, $Z \in \mathbb{S}^n$, $Z > 0$, $\|Z\| = 1$: géométrie.

Définition 2.4 : Les ellipsoïdes de matrices dans $\mathbb{R}^{m \times p}$ [PAB02, PA05] Il s'agit de l'extension aux matrices des ellipsoïdes de \mathbb{R}^n . Les ellipsoïdes de matrices sont définis par trois éléments : \mathcal{K}_0 , R et \mathbb{Z} tels que

$$\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times p} : (\mathcal{K} - \mathcal{K}_0)' \mathbb{Z} (\mathcal{K} - \mathcal{K}_0) \leq R \quad (2.27)$$

$\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}^{m \times p}$: centre, $R \in \mathbb{S}^p$: rayon, $\mathbb{Z} \in \mathbb{S}^m$, $\mathbb{Z} > 0$, $\|\mathbb{Z}\| = 1$: géométrie.

Définition 2.5 : Les $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïdes de matrices dans $\mathbb{R}^{m \times p}$ [PAB02, PA05] Un $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde dans $\mathbb{R}^{m \times p}$ est l'ensemble des matrices $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ vérifiant les inégalités matricielles suivantes :

$$\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times p} : \mathbb{Z} > 0; \quad \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathcal{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.28)$$

avec $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^p$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\mathbb{Z} \in \mathbb{S}^m$.

Les $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïdes sont des ellipsoïdes de matrices de centre $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ et de rayon $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$, avec :

$$\mathcal{K}_0 = -\mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}', \quad R = \mathcal{K}'_0 \mathbb{Z} \mathcal{K}_0 - \mathbb{X} \quad (2.29)$$

Définition 2.6 [PAB02, PA05] Un $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est **non vide**, c'est-à-dire qu'il existe au moins un \mathcal{K} vérifiant la relation (2.28), si, et seulement si, le rayon R est semi-défini positif :

$$\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}\text{-ellipsoïde non vide} \iff R \geq 0 \quad (2.30)$$

or :

$$R \geq 0 \iff \mathcal{K}'_0 \mathbb{Z} \mathcal{K}_0 - \mathbb{X} \geq 0 \iff \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Z} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' - \mathbb{X} \geq 0 \iff \mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (2.31)$$

Théorème 2.3 [PAB02, PA05] Un $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est **non vide**, si, et seulement si, la contrainte non linéaire suivante est vérifiée :

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (2.32)$$

□

Lemme 2.1 [PAB02, PA05] En utilisant la formule du complément de schur, nous obtenons l'équivalence suivante

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathcal{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \leq 0 \\ \mathbb{Z} > 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \mathbb{X} + \mathcal{K}' \mathbb{Y}' + \mathbb{Y} \mathcal{K} & \mathcal{K}' \mathbb{Z} \\ \star & -\mathbb{Z} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.33)$$

Puisqu'une $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde peut se mettre sous la forme d'une LMI, et que l'ensemble des solutions d'une LMI est convexe, alors l'ensemble des \mathcal{K} vérifiant (2.28) est **convexe**. ◇

La problématique abordée dans cette section se résume comme suit :

Problématique 2.2.

Trouver tous les ellipsoïdes de matrices de gain de retour statique, $\mathcal{K}(\psi_t)$, tel que :

$$\mathcal{E} \{ \|x_t\|^2 \} \leq b \|x_0\|^2 \exp[-a(t - t_0)] \quad (2.34)$$

où x_t sont les trajectoires du système bouclé (2.5). ▼

En se basant sur la proposition 2.1, une caractérisation en terme d'ellipsoïdes de matrices des compensateurs (φ_s) stabilisant exponentiellement le système bouclé, de manière interne, est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.5 Le système (2.5) est exponentiellement stochastiquement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{P}_{ijk} = \mathcal{P}'_{ijk} > 0$, $\mathbb{X}_k \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}'_k > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_j \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{ijk} \\ \mathcal{P}'_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_j \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

et les inégalités matricielles non linéaires données comme suit

$$\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}_k' \quad (2.36)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$, où

$$\Theta_{ijk} = \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{h \in Z} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{l \in S} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{v \in R} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} \quad (2.37)$$

Soit $\{\mathcal{P}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ une solution, alors les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes, non vides, sont des ensembles de gains stabilisants. □

Preuve.

a) Suffisance

Supposons qu'il existe des matrices $\{\mathcal{P}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ vérifiant les inégalités (2.35)-(2.36). En se basant sur les propriétés des ellipsoïdes de matrices, les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes sont non vides. Soit \mathcal{K}_k un élément quelconque du $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïde. Les LMIs (2.35) impliquent que pour tout $\begin{pmatrix} x_t' & u_t' \end{pmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ A_i x_t + B_j u_t \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{ijk} \\ \mathcal{P}'_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ A_i x_t + B_j u_t \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} C_2 x_t \\ u_t \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_2 x_t \\ u_t \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

La définition 2.5 implique que pour toute trajectoire non nulle, nous avons

$$x_t' \mathfrak{J}_{ijk} x_t < y_t' \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathcal{K}'_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} y_t \leq 0 \quad (2.39)$$

où

$$\mathfrak{J}_{ijk} = \bar{A}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk} \bar{A}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{h \in Z} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{l \in S} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{v \in R} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv}$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

La stabilité stochastique est alors vérifiée en se basant sur la proposition 2.1 pour une fonction de Lyapunov stochastique donnée par $\vartheta(\xi_t, \eta_t, \psi_t) = x_t' \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) x_t$.

b) Nécessité

Supposons que les \mathcal{K}_k sont des gains de retour de sortie stabilisants et que $\vartheta(\xi_t, \eta_t, \psi_t) = x_t' \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) x_t$ est une fonction de Lyapunov Stochastique. A partir de la proposition 2.1, nous avons

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_k C_2 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ u_t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_t \\ u_t \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_j \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{ijk} \\ \mathcal{P}_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ u_t \end{pmatrix} < 0 \quad (2.40)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

En appliquant le Lemme de Finsler [SIG98], il existe des scalaires τ_{ijk} tel que

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_j \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{ijk} \\ \mathcal{P}_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_j \end{bmatrix} < \tau_{ijk} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_k C_2 & -\mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{K}_k C_2 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \leq \varepsilon_k \begin{bmatrix} \mathcal{K}_k C_2 & -\mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{K}_k C_2 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

où $\varepsilon_k = \max_{i,j}(\tau_{ijk})$. L'inégalité (2.35) est obtenue avec

$$\mathbb{X}_k = \varepsilon_k \mathcal{K}'_k \mathcal{K}_k, \quad \mathbb{Y}_k = -\varepsilon_k \mathcal{K}'_k, \quad \mathbb{Z}_k = \varepsilon_k \mathbb{I}$$

L'élément (2,2) de la matrice obtenue implique que $\mathbf{0} < \mathbb{Z}_k$. Cela complète cette preuve. \blacksquare

Remarque 2.6 Comme précédemment, les résultats présentés ci-dessus peuvent être appliqués à la problématique de stabilisation exponentielle stochastique par retour statique de sortie des (MJLS). Et cela toujours dans le cas où le gain de retour est indépendant du mode. Cela s'exprime par le corollaire suivant

Corollaire 2.2 Le système (2.22) est exponentiellement stochastiquement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}'_i > \mathbf{0}$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > \mathbf{0}$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_i \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Theta_i & \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_i \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} C_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

et les inégalités matricielles non linéaires

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (2.43)$$

$\forall i \in H$, où

$$\Theta_i = \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{li} \mathcal{P}_i \mathbb{W}_{li} + \sum_{v \in H} \Phi_{iv} \mathcal{P}_v \quad (2.44)$$

Soit $\{\mathcal{P}_i, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ une solution, alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde non vide est un ensemble de gains stabilisants. \diamond

Remarque 2.7 Dans la section 2.2.3, nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité exponentielle au sens de la moyenne quadratique du système bouclé (2.5) en terme d'inégalités matricielles non linéaires (proposition 2.2). Il est donc légitime de questionner l'apport de l'approche *ellipsoïdes de matrices* par rapport à ces résultats. Dans ce qui suit, et de manière non exhaustive, nous donnons quelques avantages du formalisme *ellipsoïdes de matrices*. Le lecteur intéressé pourra se référer à [PAB02, PA05] pour une analyse plus complète.

- D'un point de vue numérique, les conditions de stabilité stochastique données par la proposition 2.5 peuvent être aisément résolues par un algorithme d'optimisation non convexe. Ce dernier est basé sur une technique de complémentarité sur le cône, permettant la prise en compte des contraintes non convexes et cela en les incluant dans le critère d'un problème d'optimisation convexe. Un tel algorithme sera proposé dans le chapitre 3.
- Le formalisme *ellipsoïdes de matrices* permet aussi la synthèse de correcteurs sujets à des spécifications sur les gains de commande. Dans ce qui suit, nous allons introduire quelques résultats portant sur la propriété de *résilience*. Cependant, il est important de noter que des contraintes de structure, d'inclusion, *etc.* peuvent aussi être considérées [PAB02, PA05].

2.2.4.2 Fragilité et Résilience

Une application importante de la proposition 2.5 concerne la notion de *fragilité* de la loi de commande. Par extension de la notion de stabilité robuste, la notion de *résilience* est définie comme suit

Définition 2.7 [PAB02, PA05] Soient \mathcal{K}_{k0} les gains stabilisants du système (2.3) et $\Delta\mathcal{K}_k$ des ensembles d'incertitudes additives sur les gains de retour de sortie \mathcal{K}_{k0} . Les correcteurs sont dits

- **fragiles** relativement aux ensembles $\Delta\mathcal{K}_k$ si pour $\delta\mathcal{K}_k \in \Delta\mathcal{K}_k$ donnés, le système bouclé avec $\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{k0} + \delta\mathcal{K}_k$ est stochastiquement instable ;
- **Non-fragiles**, ou **résilients** si le système bouclé est stochastiquement stable $\forall \delta\mathcal{K}_k \in \Delta\mathcal{K}_k$.

La résilience possède le même statut que la notion de robustesse. En effet, cette dernière concerne les propriétés du système en boucle fermée relativement aux incertitudes paramétriques affectant le modèle du système, quand à la seconde notion, elle traite des éventuelles incertitudes pouvant intervenir lors de l'implémentation de la loi de commande calculée.

En se basant sur le même formalisme que précédemment, les corollaires suivants peuvent être énoncés.

Corollaire 2.3. Soient \mathcal{P}_{ijk} , \mathbb{X}_k , \mathbb{Y}_k et \mathbb{Z}_k les solutions des inégalités matricielles (2.35)-(2.36). Les

correcteurs centraux \mathcal{K}_{k0} sont résilients relativement aux incertitudes additives $\delta\mathcal{K}_k$ avec

$$\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{k0} + \delta\mathcal{K}_k, \quad \delta'\mathcal{K}_k\mathbb{Z}_k\delta\mathcal{K}_k \leq R \quad (2.45)$$

◇

Le corollaire 2.3 illustre le fait que la notion de fragilité est traitée de façon naturelle dans le formalisme *ellipsoïdes de matrices*. En effet, il résulte de la procédure de synthèse des gains stabilisant des ensembles d'incertitudes admissibles. Le volume des $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes résultant peut alors être utilisé pour évaluer la résilience des correcteurs statiques. Cependant, le volume ne prend pas en considération la notion de géométrie. Lorsqu'une géométrie particulière est souhaitée, les Corollaires suivants montrent comment modifier le problème d'inégalités matricielles initial.

Corollaire 2.4. Soient \mathcal{P}_{ijk} , \mathbb{X}_k , \mathbb{Y}_k et \mathbb{Z}_k les solutions des inégalités matricielles (2.35)-(2.36) sous les contraintes

$$\mathbb{Z}_k = \mathbb{I}, \quad 0 < \rho_k\mathbb{I} \leq \mathbb{Y}_k\mathbb{Y}'_k - \mathbb{X}_k \quad (2.46)$$

alors les correcteurs centraux $\mathcal{K}_{k0} = -\mathbb{Y}'_k$ sont résilients, relativement aux incertitudes additives bornées en norme, $\delta\mathcal{K}_k$, avec

$$\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{k0} + \delta\mathcal{K}_k, \quad \delta'\mathcal{K}_k\delta\mathcal{K}_k \leq \rho_k\mathbb{I} \quad (2.47)$$

◇

Corollaire 2.5. Soient \mathcal{P}_{ijk} , \mathbb{X}_k , \mathbb{Y}_k et \mathbb{Z}_k les solutions des inégalités matricielles (2.35)-(2.36) sous les contraintes

$$\mathbb{X}_k \leq (1 - \bar{\delta}^2)\mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}' \quad (2.48)$$

alors les correcteurs centraux $\mathcal{K}_{k0} = -\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}'_k$ sont résilients, relativement à toutes les incertitudes multiplicatives vérifiant

$$\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{k0} + \delta\mathcal{K}_{k0}, \quad |\delta| \leq \bar{\delta} \quad (2.49)$$

◇

2.3 Retour dynamique de sortie

Dans ce qui suit, les résultats portant sur la stabilisation stochastique par retour dynamique de sortie seront exposés de manière à respecter la chronologie de nos travaux. L'objectif étant de mettre en évidence la complexité de cette problématique.

2.3.1 Formulation LMI

Dans un premier temps, et par analogie au cas déterministe, nous nous sommes fixés comme objectif l'obtention de conditions nécessaires et suffisantes de stabilité stochastique sous forme de problème de faisabilité d'inégalités matricielles linéaires.

Le modèle dynamique de l'AFTCSMP, défini dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , considéré est décrit par les EDS suivantes

$$\varphi : \begin{cases} \dot{x}_t = A(\xi_t)x_t + B(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) + E(\xi_t, \eta_t)w_t \\ y_t = C_2x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = C_1x_t + D_1(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) \end{cases} \quad (2.50)$$

Le correcteur dynamique d'ordre plein est donné comme suit

$$\varphi_c : \begin{cases} \dot{v}_t = A_c(\psi_t)v_t + B_c(\psi_t)y_t \\ u_t = C_c(\psi_t)v_t \end{cases} \quad (2.51)$$

où $A_c(\psi_t)$, $B_c(\psi_t)$ et $C_c(\psi_t)$ sont des matrices de dimensions appropriées.

La représentation d'état du système en boucle fermée est alors donnée par

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} \dot{\chi}_t = \Lambda(\xi_t, \eta_t, \psi_t)\chi_t + \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t \\ \bar{y}_t = \bar{C}_2(\psi_t)\chi_t + \bar{D}_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t)\chi_t \end{cases} \quad (2.52)$$

où :

$$\begin{aligned} \chi_t &= [x'_t, v'_t]'; \bar{y}_t = [y'_t, u'_t]'; \Lambda(\xi_t, \eta_t, \psi_t) = \begin{bmatrix} A(\xi_t) & B(\eta_t)C_c(\psi_t) \\ B_c(\psi_t)C_2 & A_c(\psi_t) \end{bmatrix}; \\ \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) &= \begin{bmatrix} E(\xi_t, \eta_t) \\ B_c(\psi_t)D_2(\xi_t, \eta_t) \end{bmatrix}; \bar{C}_2(\psi_t) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_c(\psi_t) \end{bmatrix}; \bar{D}_2(\xi_t, \eta_t) = \begin{bmatrix} D_2(\xi_t, \eta_t) \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) &= \begin{bmatrix} C_1 & D_1(\eta_t)C_c(\psi_t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Le problème de stabilisation abordé peut être formulé comme suit

Problématique 2.3.

Établir une caractérisation LMI de tous les correcteurs dynamiques (*conditions nécessaires et suffisantes*) φ_d tel que :

$$\mathcal{E} \{ \|\chi_t\|^2 \} \leq b \|\chi_0\|^2 \exp[-a(t - t_0)] \quad (2.54)$$

où χ_t sont les trajectoires du système bouclé (2.52). ▼

Avant d'introduire le résultat principal de cette section et toujours dans un souci de clarification, nous commencerons par donner quelques résultats préliminaires. Ces résultats sont similaires à ceux donnés dans la section 2.2.2 pour le cas du retour statique de sortie.

2.3.1.1 Résultats Préliminaires

Dans cette section, nous récapitulons quelques résultats portant sur la stabilité exponentielle, au sens de la moyenne quadratique, du système en boucle fermée (2.52).

Dans ce qui suit, et sans perte de généralité, nous supposons que le point d'équilibre, $\chi = 0$, est la solution en laquelle les propriétés de stabilité sont examinées.

Le corollaire suivant donne une condition suffisante pour la stabilité exponentielle, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique du système en boucle fermée (2.52).

Corollaire 2.6 *La solution $\chi = 0$ du système bouclé (2.52) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique $\forall t \geq t_0$ si il existe une fonction de Lyapunov stochastique $\vartheta(\chi_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$ telle que*

$$K_1 \|\chi_t\|^2 \leq \vartheta(\chi_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) \leq K_2 \|\chi_t\|^2 \quad (2.55)$$

et

$$\mathcal{L}\vartheta(\chi_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) \leq -K_3 \|\chi_t\|^2 \quad (2.56)$$

où K_1, K_2 et K_3 sont des constantes positives données. \diamond

Une condition nécessaire pour la stabilité exponentielle, au sens de la moyenne quadratique du système en boucle fermée (2.52) est donnée par le corollaire 2.7.

Corollaire 2.7 *Si la solution $\chi = 0$ du système bouclé (2.52) est exponentiellement stable au sens de la moyenne quadratique, alors pour toute fonction $W(\chi_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$ quadratique en les variables χ_t , définie positive, bornée et continue $\forall t \geq t_0, \forall \xi_t \in Z, \forall \eta_t \in S$ et $\forall \psi_t \in R$, il existe une fonction définie positive $\vartheta(\chi_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$ quadratique en les variables χ_t vérifiant les conditions du corollaire 2.6 et telle que $\mathcal{L}\vartheta(\chi_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t) = -W(\chi_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t, t)$. \diamond*

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle du système en boucle fermée (2.52).

Proposition 2.6 Le système bouclé (2.52) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices symétriques définies positives \mathcal{P}_{ijk} , $i \in Z, j \in S$ and $k \in R$ telle que :

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} < 0 \quad (2.57)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ and $k \in R$, où

$$\tilde{\Lambda}_{ijk} = \Lambda_{ijk} - 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right) \quad (2.58)$$

\square

Preuve La preuve de cette proposition se déduit aisément des Corollaires 2.6 et 2.7. ■

En se basant sur les résultats ci-dessus, une caractérisation par inégalités matricielles linéaires des compensateurs (φ_c) stabilisant exponentiellement le système bouclé, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.7 Le système bouclé (2.52) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{X}'_{ijk}$, $\mathcal{Y}_{ijk} = \mathcal{Y}'_{ijk}$, \mathcal{H}_{ijk} , et \mathcal{F}_{ijk} , $\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$, solutions des inégalités matricielles linéaires suivantes

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{ijk}\mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{Y}_{ijk}\tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{F}'_{ijk}B'_j + B_j\mathcal{F}_{ijk} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \\ \star & \mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.59)$$

$$\tilde{A}'_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk}\tilde{A}_{ijk} + C'_2\mathcal{H}'_{ijk} + \mathcal{H}_{ijk}C_2 + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih}\mathcal{X}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl}\mathcal{X}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij}\mathcal{X}_{ijv} < 0 \quad (2.60)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbb{I} \\ \star & \mathcal{X}_{ijk} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.61)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = [\mathcal{R}1_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}), \mathcal{R}2_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}), \mathcal{R}3_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk})] \\ \mathcal{R}1_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = [\alpha_{i1}\mathcal{Y}_{ijk}, \dots, \alpha_{i(i-1)}\mathcal{Y}_{ijk}, \alpha_{i(i+1)}\mathcal{Y}_{ijk}, \dots, \alpha_{iz}\mathcal{Y}_{ijk}] \\ \mathcal{R}2_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = [\beta_{j1}\mathcal{Y}_{ijk}, \dots, \beta_{j(j-1)}\mathcal{Y}_{ijk}, \beta_{j(j+1)}\mathcal{Y}_{ijk}, \dots, \beta_{js}\mathcal{Y}_{ijk}] \\ \mathcal{R}3_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = [\gamma_{k1}\mathcal{Y}_{ijk}, \dots, \gamma_{k(k-1)}\mathcal{Y}_{ijk}, \gamma_{k(k+1)}\mathcal{Y}_{ijk}, \dots, \gamma_{kr}\mathcal{Y}_{ijk}] \\ \alpha_{il} = \sqrt{\pi_{il}}; \beta_{jl} = \sqrt{\nu_{jl}}; \gamma_{kl} = \sqrt{\lambda_{kl}^{ij}} \\ \mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = -\text{diag}[\mathcal{S}1_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}), \mathcal{S}2_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}), \mathcal{S}3_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk})] \\ \mathcal{S}1_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = [\mathcal{Y}_{1jk}, \dots, \mathcal{Y}_{(i-1)jk}, \mathcal{Y}_{(i+1)jk}, \dots, \mathcal{Y}_{zjk}] \\ \mathcal{S}2_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = [\mathcal{Y}_{i1k}, \dots, \mathcal{Y}_{i(j-1)k}, \mathcal{Y}_{i(j+1)k}, \dots, \mathcal{Y}_{isk}] \\ \mathcal{S}3_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) = [\mathcal{Y}_{ij1}, \dots, \mathcal{Y}_{ij(k-1)}, \mathcal{Y}_{ij(k+1)}, \dots, \mathcal{Y}_{ijr}] \\ \tilde{A}_{ijk} = A_i - 0.5\mathbb{I} \begin{pmatrix} \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} & \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} & \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Les correcteurs (φ_c) correspondant sont donnés comme suit :

$$A_{cijk} = \left(\mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \right)^{-1} \left[\tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk}\tilde{A}_{ijk}\mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk}B_j\mathcal{F}_{ijk} + \mathcal{H}_{ijk}C_2\mathcal{Y}_{ijk} + \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih}\mathcal{Y}_{hjk}^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl}\mathcal{Y}_{ilk}^{-1} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij}\mathcal{Y}_{ijv}^{-1} \right) \mathcal{Y}_{ijk} \right] \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} + 0.5\mathbb{I} \begin{pmatrix} \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} & \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} & \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$B_{cijk} = \left(\mathcal{Y}_{ijk}^{-1} - \mathcal{X}_{ijk} \right)^{-1} \mathcal{H}_{ijk} \quad (2.63)$$

$$C_{cijk} = \mathcal{F}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \quad (2.64)$$

□

Preuve.

a) Suffisance

Supposons que $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{X}'_{ijk}$, $\mathcal{Y}_{ijk} = \mathcal{Y}'_{ijk}$, \mathcal{H}_{ijk} , et \mathcal{F}_{ijk} , $\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ soient des solutions faisables des LMIs (2.59)-(2.61). Alors, pour un partitionnement des matrices \mathcal{P}_{ijk} et \mathcal{T}_{ijk} donné par

$$\mathcal{P}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{ijk} & \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} - \mathcal{X}_{ijk} \\ \star & \mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.65)$$

$$\mathcal{T}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbb{I} \\ \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

et A_{cijk} , B_{cijk} , C_{cijk} définies par (2.62)-(2.64), il s'en suit (en utilisant le complément de Schur) l'inégalité matricielle (2.67) qui implique que les inégalités matricielles couplées (2.57) sont vérifiées. Alors, et en se basant sur la proposition 2.6, le système bouclé (2.52) est exponentiellement stable.

$$\mathcal{T}'_{ijk} \left(\tilde{A}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk} \tilde{A}_{ijk} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} \right) \mathcal{T}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}1_{ijk} & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}2_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.67)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}1_{ijk} = & \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{Y}_{ijk} \tilde{A}_{ijk} + \mathcal{F}'_{ijk} B'_i + B_i \mathcal{F}_{ijk} \\ & + \mathcal{Y}_{ijk} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{Y}_{hjk}^{-1} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{Y}_{ilk}^{-1} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{Y}_{ijv}^{-1} \right) \mathcal{Y}_{ijk} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\mathcal{Z}2_{ijk} = \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} \tilde{A}_{ijk} + C'_j \mathcal{H}'_{ijk} + \mathcal{H}_{ijk} C_j + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{X}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{X}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{X}_{ijv} \quad (2.69)$$

b) Nécessité

Supposons que le système bouclé (2.52) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique, alors la proposition 2.6 implique que les inégalités matricielles couplées (2.57) sont vérifiées. Soit le partitionnement de la matrice \mathcal{P}_{ijk} donné comme suit :

$$\mathcal{P}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{1ijk} & \mathcal{P}_{2ijk} \\ \star & \mathcal{P}_{3ijk} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Définissons les matrices

$$\mathcal{Y}_{ijk} = \left(\mathcal{P}_{1ijk} - \mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}'_{2ijk} \right)^{-1} > 0 \quad (2.71)$$

$$\mathcal{T}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbb{I} \\ \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathcal{J}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}'_{2ijk} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

En multipliant (2.57) à gauche par $\mathcal{T}'_{ijk} \mathcal{J}'_{ijk}$, et à droite par $\mathcal{J}_{ijk} \mathcal{T}_{ijk}$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}1_{ijk} & \mathcal{M}'_{ijk} \\ \star & \mathcal{N}2_{ijk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}3_{ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}4_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.73)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}1_{ijk} = \tilde{A}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{Y}_{ijk} \tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{F}'_{ijk} B'_i + B_i \mathcal{F}_{ijk} \\ \mathcal{N}2_{ijk} = \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{P}_{1ijk} + \mathcal{P}_{1ijk} \tilde{A}_{ijk} + C'_j \mathcal{H}'_{ijk} + \mathcal{H}_{ijk} C_j \\ \mathcal{M}_{ijk} = \tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{P}_{1ijk} \tilde{A}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{P}_{1ijk} B_i \mathcal{F}_{ijk} + \mathcal{H}_{ijk} C_j \mathcal{Y}_{ijk} - \mathcal{P}_{2ijk} \tilde{A}_{cijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}'_{2ijk} \mathcal{Y}_{ijk} \\ + \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \left(\mathcal{P}_{1hjk} - \mathcal{P}_{2hjk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}'_{2ijk} \right) + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \left(\mathcal{P}_{1ilk} - \mathcal{P}_{2ilk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}'_{2ijk} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \left(\mathcal{P}_{1ijv} - \mathcal{P}_{2ijv} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}'_{2ijk} \right) \right) \mathcal{Y}_{ijk} \\ \tilde{A}_{cijk} = A_{cijk} - 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} - \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} - \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right) \\ \mathcal{F}_{ijk} = -C_{cijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}'_{2ijk} \mathcal{Y}_{ijk} \\ \mathcal{H}_{ijk} = \mathcal{P}_{2ijk} B_{cijk} \\ \mathcal{N}3_{ijk} = \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{Y}_{ijk} \left[\mathcal{Y}_{ijv}^{-1} + \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ijv} - \mathcal{P}_{2ijv} \right) \mathcal{P}_{3ijv}^{-1} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ijv} - \mathcal{P}_{2ijv} \right)' \right] \mathcal{Y}_{ijk} \\ + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{Y}_{ijk} \left[\mathcal{Y}_{ilk}^{-1} + \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ilk} - \mathcal{P}_{2ilk} \right) \mathcal{P}_{3ilk}^{-1} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ilk} - \mathcal{P}_{2ilk} \right)' \right] \mathcal{Y}_{ijk} \\ + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{Y}_{ijk} \left[\mathcal{Y}_{hjk}^{-1} + \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3hjk} - \mathcal{P}_{2hjk} \right) \mathcal{P}_{3hjk}^{-1} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3hjk} - \mathcal{P}_{2hjk} \right)' \right] \mathcal{Y}_{ijk} \\ \mathcal{N}4_{ijk} = \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{1hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{1ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{1ijv} \end{array} \right.$$

Les conditions $\mathcal{P}_{ijk} > 0$, $\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ sont équivalentes à

$$\mathcal{T}'_{ijk} \mathcal{J}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} \mathcal{J}_{ijk} \mathcal{T}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbb{I} \\ \star & \mathcal{P}_{1ijk} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.74)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ijv} - \mathcal{P}_{2ijv} \right) \mathcal{P}_{3ijv}^{-1} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ijv} - \mathcal{P}_{2ijv} \right)' + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ilk} - \mathcal{P}_{2ilk} \right) \mathcal{P}_{3ilk}^{-1} \\ & \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3ilk} - \mathcal{P}_{2ilk} \right)' + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3hjk} - \mathcal{P}_{2hjk} \right) \mathcal{P}_{3hjk}^{-1} \left(\mathcal{P}_{2ijk} \mathcal{P}_{3ijk}^{-1} \mathcal{P}_{3hjk} - \mathcal{P}_{2hjk} \right)' \geq 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

et en utilisant le complément de Schur, il s'en suit que (2.59)-(2.61) sont vérifiées pour, $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{P}_{1ijk}$, $\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$. D'où le résultat escompté. ■

Remarque 2.8 (Robustesse) Dans [APS05], nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité exponentielle robuste pour le système (2.50) sujet à des incertitudes paramétriques. Le modèle considéré est donné comme suit

$$\varphi : \begin{cases} \dot{x}_t = [A(\xi_t) + \Delta A(\xi_t)]x_t + B(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) + E(\xi_t, \eta_t)w_t \\ y_t = C_2 x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = C_1 x_t + D_1(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) \end{cases} \quad (2.76)$$

Les incertitudes considérées sont de deux types

i) Incertitudes structurées :

- NBU : ce type d'incertitudes est modélisé comme suit

$$\Delta A(\xi_t) = \mathbf{H}(\xi_t) \mathbf{F}(\xi_t) \mathbf{G}(\xi_t)$$

- LCU (pour Linear Combination Uncertainties) : Le modèle de cette forme d'incertitudes structurées est donné par

$$\Delta A(\xi_t) = \sum_{l=1}^{p_\Delta} \mathbf{N}_l(\xi_t) \mathbf{a}_l(\xi_t, t)$$

où $\mathbf{N}_l(\xi_t)$ sont des matrices connues et \mathbf{a}_l représentent les paramètres incertains bornés, *i.e.*

$$|\mathbf{a}_l(t)| \leq \bar{\mathbf{a}}_l \quad \forall l \in \{1, \dots, p_\Delta\}, \quad \xi(t) = i \in Z, \quad \forall t \geq 0$$

où $\bar{\mathbf{a}}_l$ sont des scalaires positifs donnés. Les matrices $\mathbf{N}_l(\xi_t)$ peuvent être réécrites comme suit

$$\mathbf{N}_l(\xi_t) = \mathbf{d}_l(\xi_t) \mathbf{v}_l'(\xi_t)$$

où $\mathbf{d}_l(\xi_t)$ et $\mathbf{v}_l(\xi_t)$ sont des matrices de dimensions appropriées.

ii) Incertitudes non structurées :

- VBU (pour Value Bounded Uncertainties) : Les incertitudes paramétriques sont dans ce cas modélisées comme suit :

$$|\Delta A_i| \leq \mathbf{M}_i, \quad \mathbf{M}_i = [\mathbf{m}_{lj}]_i; \quad \mathbf{m}_{lj} \geq 0$$

où $|\cdot|$ représente le module des différents éléments des matrices correspondantes et \mathbf{M}_i est une matrice connue, dont tout les éléments sont positifs.

Le résultat suivant peut alors être énoncé

Proposition 2.8 Une condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle robuste, au sens de la moyenne quadratique du système (2.76) couplé avec (2.51) est que les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \phi_{ijk} & \Delta'_{ijk} & R_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \\ \star & -\gamma_i \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & S_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.77)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{ijk} & \Xi_{ijk} \\ \star & -(1/\gamma_i)\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.78)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbb{I} \\ \star & \mathcal{X}_{ijk} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.79)$$

où

a) Incertitudes (NBU)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ijk} = \mathfrak{J}_{ijk} + \gamma_i \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i' \\ \theta_{ijk} = \mathfrak{T}_{ijk} + (1/\gamma_i) \mathbf{G}_i' \mathbf{G}_i \\ \mathfrak{J}_{ijk} = \tilde{A}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{Y}_{ijk} \tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{F}'_{ijk} B_j' + B_j \mathcal{F}_{ijk} \\ \mathfrak{T}_{ijk} = \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} \tilde{A}_{ijk} + C_2' \mathcal{L}'_{ijk} + \mathcal{L}_{ijk} C_2 + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{X}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{X}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{X}_{ijv} \\ \Delta_{ijk} = \mathbf{G}_i \mathcal{Y}_{ijk} \\ \Xi_{ijk} = \mathcal{X}_{ijk} \mathbf{H}_i \end{array} \right.$$

b) Incertitudes (LCU)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ijk} = \mathfrak{J}_{ijk} + \bar{\mathbf{a}}_i \gamma_i \mathbf{W}_i \mathbf{W}_i' \\ \theta_{ijk} = \mathfrak{T}_{ijk} + (\bar{\mathbf{a}}_i / \gamma_i) \mathbf{T}_i' \mathbf{T}_i \\ \mathbf{W}_i = [\mathbf{d}_{1i} \dots \mathbf{d}_{p_{\Delta i}}] \\ \mathbf{T}_i = [\mathbf{v}_{1i} \quad \vdots \quad \mathbf{v}_{p_{\Delta i}}]' \\ \Delta_{ijk} = \sqrt{\bar{\mathbf{a}}_i} \mathbf{T}_i \mathcal{Y}_{ijk} \\ \Xi_{ijk} = \sqrt{\bar{\mathbf{a}}_i} \mathcal{X}_{ijk} \mathbf{W}_i \end{array} \right.$$

c) Incertitudes (VBU)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ijk} = \mathfrak{J}_{ijk} + \gamma_i I \\ \theta_{ijk} = \mathfrak{T}_{ijk} + (n/\gamma_i) \text{diag}(\mathbf{M}_i' \mathbf{M}_i) \\ \Delta_{ijk} = \sqrt{n} \text{diag}(\mathbf{M}_i' \mathbf{M}_i) \mathcal{Y}_{ijk} \\ \Xi_{ijk} = \mathcal{X}_{ijk} \end{array} \right.$$

admettent des solutions $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{X}'_{ijk}$, $\mathcal{Y}_{ijk} = \mathcal{Y}'_{ijk}$, \mathcal{L}_{ijk} , \mathcal{F}_{ijk} et $\gamma_i > 0$, $\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$. Les contrôleurs correspondants (φ_c) sont donnés par

$$B_{cijk} = (\mathcal{Y}_{ijk}^{-1} - \mathcal{X}_{ijk})^{-1} \mathcal{L}_{ijk} \quad (2.80)$$

$$C_{cijk} = \mathcal{F}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \quad (2.81)$$

$$A_{cijk} = \left(\mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \right)^{-1} \left[\tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} \tilde{A}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} B_j \mathcal{F}_{ijk} + \mathcal{L}_{ijk} C_2 \mathcal{Y}_{ijk} + \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{Y}_{hjk}^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{Y}_{ilk}^{-1} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{Y}_{ijv}^{-1} + \Sigma_{ijk} \right) \mathcal{Y}_{ijk} + \Phi_{ijk} \right] \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} + 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right) \quad (2.82)$$

où

a) Incertitudes (NBU)

$$\begin{cases} \Sigma_{ijk} = (1/\gamma_i) \mathbf{G}'_i \mathbf{G}_i \\ \Phi_{ijk} = \gamma_i \mathcal{X}_{ijk} \mathbf{H}_i \mathbf{H}'_i \end{cases}$$

b) Incertitudes (LCU)

$$\begin{cases} \Sigma_{ijk} = (\bar{\mathbf{a}}_i/\gamma_i) \mathbf{T}'_i \mathbf{T}_i \\ \Phi_{ijk} = \bar{\mathbf{a}}_i \gamma_i \mathcal{X}_{ijk} \mathbf{W}_i \mathbf{W}'_i \end{cases}$$

c) Incertitudes (VBU)

$$\begin{cases} \Sigma_{ijk} = (n/\gamma_i) \text{diag}(\mathbf{M}'_i \mathbf{M}_i) \\ \Phi_{ijk} = \gamma_i \mathcal{X}_{ijk} \end{cases}$$

□

Remarque 2.9 Le résultat introduit ci-dessus nous montre que l'obtention de conditions nécessaires et suffisantes de stabilité stochastique sous forme LMI conduit à des correcteurs dépendant des processus Markoviens η_t , ξ_t et ψ_t . Cela rend ces correcteurs irréalisables en pratique. Ce résultat illustre encore une fois la complexité de la problématique abordée dans ce travail. Cependant, et en adoptant la même méthodologie que dans [MJZ03], ces résultats peuvent être exploités pour l'étude des effets des imperfections du module de FDI sur la stabilité du système tolérant aux défauts.

Une première alternative dans la procédure de synthèse serait de transformer le problème de synthèse de correcteurs dynamiques en problème de synthèse de correcteurs statiques et d'appliquer ainsi les résultats développés dans la section 2.2.3. Cela se résume comme suit

Corollaire 2.8 La synthèse de correcteurs dynamiques φ_d , donnés par

$$\varphi_d : \begin{cases} \dot{v}_t = A_d(\psi_t)v_t + B_d(\psi_t)y_t \\ u_t = C_d(\psi_t)v_t + D_d(\psi_t)y_t \end{cases} \quad (2.83)$$

pour le système (2.3), peut se ramener à la recherche de correcteurs statiques $\mathbb{K}(\psi_t)$ pour le système augmenté φ_{aug}

$$\varphi_{\text{aug}} : \begin{cases} d\bar{x}_t = \tilde{A}(\xi_t)\bar{x}_t dt + \tilde{B}(\eta_t)\bar{u}(\bar{y}_t, \psi_t, t)dt + \tilde{E}(\xi_t, \eta_t)w(t)dt + \sum_{l=1}^v \tilde{\mathbb{W}}_l(\xi_t, \eta_t)\bar{x}_t d\varpi_{lt} \\ \bar{y}_t = \tilde{C}_2\bar{x}_t + \tilde{D}_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = \tilde{C}_1\bar{x}_t + \tilde{D}_1(\eta_t)\bar{u}(\bar{y}_t, \psi_t, t) \end{cases} \quad (2.84)$$

où

$$\begin{cases} \bar{x}_t = \begin{bmatrix} x'_t & v'_t \end{bmatrix}' ; \bar{y}_t = \begin{bmatrix} y'_t & u'_t \end{bmatrix}' ; \bar{u}_t = \mathbb{K}(\psi_t)\bar{y}_t \\ \mathbb{K}(\psi_t) = \begin{bmatrix} A_d(\psi_t) & B_d(\psi_t) \\ C_d(\psi_t) & D_d(\psi_t) \end{bmatrix} ; \tilde{A}(\xi_t) = \begin{bmatrix} A(\xi_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \\ \tilde{B}(\eta_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B(\eta_t) \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \tilde{E}(\xi_t, \eta_t) = \begin{bmatrix} E(\xi_t, \eta_t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \\ \tilde{\mathbb{W}}_l(\xi_t, \eta_t) = \begin{bmatrix} \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \tilde{D}_2(\xi_t, \eta_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_2(\xi_t, \eta_t) \end{bmatrix} ; \\ \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \tilde{D}_1(\eta_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & D_1(\eta_t) \end{bmatrix}. \end{cases}$$

◇

La reformulation du problème sous forme de synthèse de correcteurs statiques conduit en se basant sur les résultats de la section 2.2.3 au résultat suivant

Proposition 2.9 (Formulation LMI) Si il existe des matrices $\mathcal{X}_{ijk} = \mathcal{X}'_{ijk} > 0$, \mathbb{K}_k , et $\bar{\Omega}_{ijk}$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mu_{ijk}\mathbb{I} - \bar{\Omega}_{ijk} - \bar{\Omega}'_{ijk} & (\mu_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} - \bar{\Omega}_{ijk}) & \hat{A}_{ijk} + \tilde{B}_j\mathbb{K}_k\tilde{C}_2 + \bar{\Omega}_{ijk} & \mathcal{X}_{ijk}\Theta_{ij} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \\ \star & -\mu_{ijk}\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mu_{ijk}\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\bar{\mathfrak{J}}_{ijk} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{X}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.85)$$

où

$$\hat{A}_{ijk} = \tilde{A}_i - 0.5\mathbb{I} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right)$$

alors le système (2.84) couplé avec (2.83) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique. □

Remarque 2.10 Comme pour le cas du retour de sortie statique, le résultat présenté ci-dessus peut être appliqué à la problématique de stabilisation exponentielle stochastique par retour dynamique de sortie des (MJLS). Et cela dans le cas où les différentes matrices du correcteur dynamique sont indépendantes du mode. La synthèse du correcteur dynamique indépendant du mode se reformule là aussi sous forme de synthèse de correcteur statique. Cela se résume comme suit

Corollaire 2.9 La synthèse du correcteur dynamique φ_d , donné par

$$\varphi_d : \begin{cases} \dot{v}_t = A_d v_t + B_d y_t \\ u_t = C_d v_t + D_d y_t \end{cases} \quad (2.86)$$

pour le système (2.22), peut se ramener à la recherche d'un correcteur statique \mathbb{K} pour le système augmenté φ_{aug}

$$\varphi_{\text{aug}} : \begin{cases} d\bar{x}_t = \tilde{A}(\Phi_t)\bar{x}_t dt + \tilde{B}(\Phi_t)\bar{u}(\bar{y}_t, t)dt + \tilde{E}(\Phi_t)w(t)dt + \sum_{l=1}^v \tilde{\mathbb{W}}_l(\Phi_t)\bar{x}_t d\varpi_{lt} \\ \bar{y}_t = \tilde{C}_2(\Phi_t)\bar{x}_t + \tilde{D}_2(\Phi_t)w_t \\ z_t = \tilde{C}_1(\Phi_t)\bar{x}_t + \tilde{D}_1(\Phi_t)\bar{u}(\bar{y}_t, t) \end{cases} \quad (2.87)$$

où

$$\begin{cases} \bar{x}_t = \begin{bmatrix} x'_t & v'_t \end{bmatrix}'; \bar{y}_t = \begin{bmatrix} v'_t & y'_t \end{bmatrix}'; \bar{u}_t = \mathbb{K}\bar{y}_t \\ \mathbb{K} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{bmatrix}; \tilde{A}(\Phi_t) = \begin{bmatrix} A(\Phi_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \\ \tilde{B}(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B(\Phi_t) \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \tilde{E}(\Phi_t) = \begin{bmatrix} E(\Phi_t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \\ \tilde{\mathbb{W}}_l(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \mathbb{W}_l(\Phi_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \tilde{C}_2(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ C_2(\Phi_t) & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \tilde{D}_2(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_2(\Phi_t) \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_1(\Phi_t) = \begin{bmatrix} C_1(\Phi_t) & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \tilde{D}_1(\Phi_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & D_1(\Phi_t) \end{bmatrix}. \end{cases}$$

◇

Le résultat suivant peut alors être énoncé

Corollaire 2.10 (Formulation LMI) Si il existe des matrices $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}'_i > 0$, \mathcal{K} , et $\bar{\Omega}_i$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mu_i \mathbb{I} - \bar{\Omega}_i - \bar{\Omega}'_i & (\mu_i \mathcal{X}_i - \bar{\Omega}_i) & \hat{A}_i + \tilde{B}_i \mathbb{K} \tilde{C}_{2i} + \bar{\Omega}_i & \mathcal{X}_i \Theta_i & \mathcal{R}_i(\mathcal{X}_i) \\ * & -\mu_i \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mu_i \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\mathbb{J}_i & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\mathcal{S}_i(\mathcal{X}_i) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.88)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_i(\mathcal{X}_i) = [\alpha_{i1}\mathcal{X}_i, \dots, \alpha_{i(i-1)}\mathcal{X}_i, \alpha_{i(i+1)}\mathcal{X}_i, \dots, \alpha_{ih}\mathcal{X}_i] \\ \alpha_{il} = \sqrt{\Phi_{il}} \\ \mathcal{S}_i(\mathcal{X}_i) = \text{diag} [\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{(i-1)}, \mathcal{X}_{(i+1)}, \dots, \mathcal{X}_h] \\ \hat{A}_i = \tilde{A}_i - 0.5\mathbb{I} \sum_{\substack{l \in H \\ l \neq i}} \Phi_{il} \\ \Theta_i = [\tilde{\mathbb{W}}'_{1i}, \dots, \tilde{\mathbb{W}}'_{vi}] \\ \mathbb{J}_i = \text{diag} [\mathcal{X}_i, \dots, \mathcal{X}_i] \end{array} \right.$$

alors le système (2.87) couplé avec (2.86) est exponentiellement stable. \diamond

2.3.1.2 Discussion

Comme nous l'avons déjà souligné dans la section 2.2.3, le pessimisme introduit par les conditions de stabilité (2.85) et (2.88) est relativement important, notamment pour des problèmes de grandes dimensions. Cependant, ces approches peuvent être utilisées comme une *première étape* précédant la mise en oeuvre d'algorithmes plus élaborés. En effet, si le problème LMI (2.85) est faisable, alors les correcteurs dynamiques stabilisant stochastiquement le système tolérants aux défauts sont caractérisés par ces solutions LMI (les problèmes LMI étant convexes, leur résolution numérique s'appuie sur des outils existant très performants). Dans le cas contraire aucune conclusion ne peut être tirée sur l'existence de correcteurs stabilisants (conditions suffisantes). D'autres conditions et méthodes doivent alors être développées pour la résolution de cette problématique.

La première méthode proposée se base sur une formulation BMI du problème de stabilisation stochastique. Cette approche est développée dans la section suivante.

2.3.2 Formulation BMI

Le système en boucle fermée résultant du couplage de (2.3) et de (2.51) s'écrit comme suit

$$\varphi_{cl} : \left\{ \begin{array}{l} d\chi_t = \Lambda(\xi_t, \eta_t, \psi_t)\chi_t dt + \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \bar{\mathbb{W}}_l(\xi_t, \eta_t)\chi_t d\varpi_{lt} \\ \bar{y}_t = \bar{C}_2(\psi_t)\chi_t + \bar{D}_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t)\chi_t \end{array} \right. \quad (2.89)$$

où les différentes matrices sont données par (2.53) et $\bar{\mathbb{W}}_l(\xi_t, \eta_t) = \begin{bmatrix} \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Avant de présenter le résultat principal de cette section, nous introduisons le résultat préliminaire donnée par la proposition 2.10.

Proposition 2.10 Le système bouclé (2.89) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices symétriques définies positives \mathcal{P}_{ijk} ,

$i \in Z, j \in S$ and $k \in R$ tel que :

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \bar{\mathbb{W}}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \bar{\mathbb{W}}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} < 0 \quad (2.90)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$. □

Preuve La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 2.1. ■

La formulation BMI du problème de stabilisation exponentielle stochastique par retour dynamique de sortie du système tolérant aux défauts à sauts Markoviens est basée sur le lemme C.5 et la paramétrisation suivante des matrices de Lyapunov \mathcal{P}_{ijk}

$$\mathcal{P}_{ijk} = \mathcal{M}_k^T \mathcal{N}_{ijk}^{-1} \mathcal{M}_k > 0 \quad (2.91)$$

où \mathcal{N}_{ijk} sont des matrices symétriques définies positives et \mathcal{M}_k sont des matrices non singulières. Cette paramétrisation est inspirée des travaux de [dSTB04] portant sur le filtrage \mathcal{H}_∞ , indépendant du mode, des MJLS.

En se basant sur la proposition 2.10 et avec des matrices \mathcal{P}_{ijk} données par (2.91), une caractérisation en terme d'inégalités matricielles bilinéaires des compensateurs (2.51) stabilisant le système (2.3) est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.11 Si il existe des matrices $\mathbb{R}_k, \mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k$ et des matrices symétriques \mathbb{N}_{ijk} , $i \in Z, j \in S$ et $k \in R$ telle que

$$\begin{bmatrix} \Omega_k + \Omega'_k & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ijk} - \mathbb{N}_{ijk} & \delta_{ijk} \mathbb{N}_{ijk} & \star \\ \Xi_{ijk} & \mathbf{0} & -\Gamma_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.92)$$

où

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k & 0 \\ \mathbb{S}_k + \mathbb{D}_k & \mathbb{D}_k \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$\mathbb{A}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k A_i + \mathbb{R}_k B_j Z_k & \mathbb{R}_k B_j Z_k \\ \mathbb{S}_k A_i + \mathbb{Y}_k C_2 + \mathbb{X}_k + \mathbb{S}_k B_j Z_k & \mathbb{X}_k + \mathbb{S}_k B_j Z_k \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$\Gamma_{ijk} = \text{diag} \{ \mathbb{T}_{1ijk}, \mathbb{T}_{2ijk}, \mathbb{T}_{3ijk}, \mathbb{T}_{4ijk} \} \quad (2.95)$$

$$\begin{cases}
\mathbb{T}_{1ijk} = [\mathbb{N}_{1jk}, \dots, \mathbb{N}_{(i-1)jk}, \mathbb{N}_{(i+1)jk}, \dots, \mathbb{N}_{zjk}] \\
\mathbb{T}_{2ijk} = [\mathbb{N}_{i1k}, \dots, \mathbb{N}_{i(j-1)k}, \mathbb{N}_{i(j+1)k}, \dots, \mathbb{N}_{isk}] \\
\mathbb{T}_{3ijk} = [\mathbb{N}_{ij1}, \dots, \mathbb{N}_{ij(k-1)}, \mathbb{N}_{ij(k+1)}, \dots, \mathbb{N}_{ijr}] \\
\mathbb{T}_{4ijk} = [\mathbb{N}_{ijk}, \dots, \mathbb{N}_{ijk}] \\
\Xi_{ijk} = [F_{1ijk}, F_{2ijk}, F_{3ijk}, F_{4ijk}]' \\
F_{1ijk} = [\sqrt{\pi_{i1}}\Omega'_k, \dots, \sqrt{\pi_{i(i-1)}}\Omega'_k, \sqrt{\pi_{i(i+1)}}\Omega'_k, \dots, \sqrt{\pi_{iz}}\Omega'_k] \\
F_{2ijk} = [\sqrt{\nu_{j1}}\Omega'_k, \dots, \sqrt{\nu_{j(j-1)}}\Omega'_k, \sqrt{\nu_{j(j+1)}}\Omega'_k, \dots, \sqrt{\nu_{js}}\Omega'_k] \\
F_{3ijk} = [\sqrt{\lambda_{k1}^{ij}}\Omega'_k, \dots, \sqrt{\lambda_{k(k-1)}^{ij}}\Omega'_k, \sqrt{\lambda_{k(k+1)}^{ij}}\Omega'_k, \dots, \sqrt{\lambda_{kr}^{ij}}\Omega'_k] \\
F_{4ijk} = [\Phi'_{1ijk}, \dots, \Phi'_{vijk}] \\
\Phi_{lijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k \mathbb{W}_{lij} & \mathbf{0} \\ \mathbb{S}_k \mathbb{W}_{lij} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\delta_{ijk} = - \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right)
\end{cases} \quad (2.96)$$

et \mathbb{T}_{4ijk} , F_{4ijk} comportent v éléments. Alors, le système (2.3) couplé avec (2.51) est exponentiellement stable.

Les matrices de fonctions de transferts des contrôleurs dynamiques correspondant sont données comme suit

$$H_k(s) = \mathbb{Z}_k (s\mathbb{I} - \mathbb{D}_k^{-1}\mathbb{X}_k)^{-1} \mathbb{D}_k^{-1}\mathbb{Y}_k, \quad \forall k \in R. \quad (2.97)$$

□

Preuve La preuve de cette proposition se base sur les mêmes arguments que pour la preuve de la proposition 3.12 (voir chapitre 3). ■

Remarque 2.11 Les résultats donnés par la proposition 2.10 peuvent être aisément appliqués à la problématique de stabilisation exponentielle stochastique par retour dynamique de sortie des (MJLS). Et cela, dans le cas où le contrôleur est indépendant du mode. Ceci est illustré par le corollaire suivant.

Corollaire 2.12 Si il existe des matrices \mathbb{R} , \mathbb{S} , \mathbb{D} , \mathbb{X} , \mathbb{Y} , \mathbb{Z} et des matrices symétriques \mathbb{N}_i , $i \in H$, tel que

$$\begin{bmatrix} \Omega + \Omega' & \star & \star \\ \mathbb{A}_i - \mathbb{N}_i & \delta_i \mathbb{N}_i & \star \\ \Xi_i & \mathbf{0} & -\Gamma_i \end{bmatrix} < 0 \quad (2.98)$$

où

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbf{0} \\ \mathbb{S} + \mathbb{D} & \mathbb{D} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{R}A_i + \mathbb{R}B_i\mathbb{Z} & \mathbb{R}B_i\mathbb{Z} \\ \mathbb{S}A_i + \mathbb{Y}C_{2i} + \mathbb{X} + \mathbb{S}B_i\mathbb{Z} & \mathbb{X} + \mathbb{S}B_i\mathbb{Z} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

$$\Gamma_i = \text{diag} \{ \mathbb{T}_{1i}, \mathbb{T}_{2i} \} \quad (2.101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{1i} = [\mathbb{N}_1, \dots, \mathbb{N}_{(i-1)}, \mathbb{N}_{(i+1)}, \dots, \mathbb{N}_h] \\ \mathbb{T}_{2i} = [\mathbb{N}_i, \dots, \mathbb{N}_i] \\ \Xi_i = [F_{1i}, F_{2i}]' \\ F_{1i} = [\sqrt{\Phi_{i1}}\Omega', \dots, \sqrt{\Phi_{i(i-1)}}\Omega', \sqrt{\Phi_{i(i+1)}}\Omega', \dots, \sqrt{\Phi_{ih}}\Omega'] \\ F_{2i} = [\Phi'_{1i}, \dots, \Phi'_{vi}] \\ \Phi_{li} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}W_{li} & \mathbf{0} \\ \mathbb{S}W_{li} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \delta_i = - \sum_{\substack{l \in H \\ l \neq i}} \Phi_{il} \end{array} \right. \quad (2.102)$$

et \mathbb{T}_{2i} , F_{2i} comportent v éléments. Alors, le système (2.22) couplé avec (2.86) (avec $D_d = \mathbf{0}$) est exponentiellement stable au sens de la moyenne quadratique.

La matrice de fonctions de transferts du contrôleur dynamique correspondant est donnée comme suit

$$H(s) = \mathbb{Z} (s\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{X})^{-1} \mathbb{D}^{-1}\mathbb{Y} \quad (2.103)$$

◇

2.3.3 Discussion

Les conditions de stabilité (sous forme d'inégalités matricielles) données dans la proposition 2.11 et le corollaire 2.12 n'étant pas linéaires en les variables, il est difficile de vérifier leur faisabilité directement. Cependant, la paramétrisation donnée par ces conditions offre plusieurs avantages :

- La caractérisation donnée par la proposition 2.11 et le corollaire 2.12 permettent une paramétrisation explicite des différentes matrices des correcteurs dynamiques (problem in *closed form* [GBdO99]) ;
- Le problème de stabilisation stochastique avec des matrices de sorties des correcteurs fixées (semblable au problème de commande énoncé dans [TIH96]), est un problème sous forme LMI ;
- Pour \mathbb{Z}_k fixés, les conditions (2.92) sont sous forme LMIs en les variables \mathbb{N}_{ijk} , \mathbb{R}_k , \mathbb{S}_k , \mathbb{D}_k , \mathbb{X}_k , \mathbb{Y}_k ;
- Pour \mathbb{R}_k et \mathbb{S}_k fixés, les conditions (2.92) sont sous forme LMIs en les variables \mathbb{N}_{ijk} , \mathbb{D}_k , \mathbb{X}_k , \mathbb{Y}_k , \mathbb{Z}_k .

Cela suggère une méthode de type décente coordonnée. Un tel algorithme, avec ses différentes propriétés, sera donné dans le Chapitre 3.

Cependant, il est important de noter qu'il existe plusieurs algorithmes plus ou moins sophistiqués pour la résolution de problèmes BMI (donner une référence), et que le choix d'un algorithme de type décente coordonnée n'est ici justifié que par sa simplicité et pour des raisons d'illustrations, et non par rapport à ses performances.

2.3.4 Formulation NLMI

En se basant sur les résultats des sections précédentes et en s'appuyant sur le corollaire 2.8, le problème de stabilisation stochastique par retour dynamique de sortie dans un formalisme NLMI peut aussi être reformulé en un problème de synthèse de correcteurs statiques. Cela est illustré par la proposition 2.12 et le corollaire 2.13.

Proposition 2.12 (Systèmes tolérants aux défauts). Le système (2.84) couplé avec (2.83) est exponentiellement stable au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{P}_{ijk} = \mathcal{P}'_{ijk} > 0$, $\mathbb{X}_k \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}'_k > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{B}_j \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{ijk} \\ \mathcal{P}_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{B}_j \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

et les inégalités matricielles non linéaires données comme suit

$$\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}_k' \quad (2.105)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$, où

$$\Theta_{ijk} = \sum_{l=1}^v \tilde{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \tilde{W}_{lij} + \sum_{h \in Z} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{l \in S} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{v \in R} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} \quad (2.106)$$

Soit $\{\mathcal{P}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ une solution, alors les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes, non vides, sont des ensembles de gains stabilisants. \square

Corollaire 2.13 (MJLS) Le système (2.87) couplé avec (2.86) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}'_i > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Theta_i & \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

et les inégalités matricielles non linéaires

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (2.108)$$

$\forall i \in H$, où

$$\Theta_i = \sum_{l=1}^v \tilde{W}'_{li} \mathcal{P}_i \tilde{W}_{li} + \sum_{v \in H} \Phi_{iv} \mathcal{P}_v \quad (2.109)$$

Soit $\{\mathcal{P}_i, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ une solution, alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde non vide est un ensemble de gains stabilisants. \diamond

2.3.5 Discussion

Nous allons montrer dans le chapitre suivant que l'implementation des conditions NLMI données par la proposition 2.12 conduit à des correcteurs centraux *non satisfaisants*. Une première solution sera alors proposée et commentée.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi des conditions suffisantes ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation exponentielle en moyenne quadratique par retour de sortie statique/dynamique des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens. Dans un premier temps nous avons proposé une caractérisation sous forme LMI (conditions suffisantes) des correcteurs statiques stabilisant le système en boucle fermée. Une caractérisation sous forme NLMI (conditions nécessaires et suffisantes) a été ensuite développée en adoptant un formalisme basé sur la synthèse d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs. Ce formalisme permet notamment la synthèse de correcteurs sujets à des spécifications sur les gains de commande. Plus particulièrement, nous avons introduit quelques résultats portant sur la propriété de résilience.

La problématique du retour dynamique de sortie a été considérée en seconde partie de chapitre. Nous avons d'abord proposé une caractérisation sous forme LMI (conditions nécessaires et suffisantes) des correcteurs dynamiques et cela en s'inspirant de résultats relatifs aux cas des systèmes déterministes. Cette caractérisation conduit à des correcteurs dépendant des processus défauts et sont donc irréalisables en pratique. Une première solution a été alors de reformuler le problème sous une forme BMI et cela en se basant sur une version du Lemme de Finsler et une paramétrisation adéquate des matrices de Lyapunov. Finalement, une caractérisation NLMI des correcteurs dynamiques a été proposée en se basant sur le formalisme ellipsoïdes de matrices.

Chapitre 3

Commande multi-objectifs

Dans ce chapitre est abordé le problème de la commande multi-objectifs par retour de sortie des systèmes tolérant aux défauts à sauts Markoviens. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation stochastique du système en boucle fermée, des performances \mathcal{H}_2 ainsi que des performances \mathcal{H}_∞ (ou plus généralement, des performances intégrales quadratiques stochastiques). Nous proposerons deux structures de commande : les correcteurs statiques par retour de sortie, et les correcteurs dynamiques par retour de sortie.

Dans le premier cas, on établit une caractérisation sous forme d'inégalités matricielles linéaires et non linéaires des correcteurs statiques stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Les résultats relatifs à la problématique du retour dynamique de sortie seront ensuite établit, où là aussi des caractérisations, sous forme d'inégalités matricielles linéaires, bilinéaires et non linéaires des correcteurs dynamiques seront données.

Tout au long de ce chapitre, nous nous attacherons à l'aspect résolution numérique des différentes conditions de stabilité et de performances en boucle fermée. En effet, pour chaque problématique considérée, des algorithmes de résolutions numériques seront proposés et validés sur des exemples de simulation et cela en mettant en évidence leurs performances et leurs limitations.

3.1 Introduction

Le problème général de synthèse en performance abordé dans ce travail s'inscrit dans un cadre de synthèse multi-objectifs. Ce dernier tend à trouver des correcteurs stabilisant stochastiquement le système tolérant aux défauts à sauts Markoviens et garantissant simultanément plusieurs critères de performance. Plus particulièrement, nous nous intéressons à des critères de performances de type $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

La problématique de la commande \mathcal{H}_∞ par retour statique d'état des AFTCSMP dans un environnement non bruité a été initialement considérée par [SB97] où les principaux résultats sont donnés en termes de solution d'équations de Riccati non standards. Les gains de retour ainsi obtenus dépendent des processus défauts, rendant ces résultats inapplicables en pratique. En effet, pour la synthèse de la loi de commande par retour d'état, les auteurs se basent sur l'hypothèse forte de disponibilité de tous les processus aléatoires. Cependant, ces résultats peuvent être exploités pour l'étude des effets des

imperfections du module de FDI sur la stabilité et le niveau de performance \mathcal{H}_∞ du système tolérant aux défauts (voir **Chapitre 1**).

A notre connaissance, le problème de commande \mathcal{H}_2 n'a quand à lui pas été traité dans le cadre des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens. La première étape dans la résolution de cette problématique est donc de définir la norme \mathcal{H}_2 dans le cadre des AFTCSMP. Cette définition se base sur les travaux de [CdVG99, DM02, DMS04] portant sur la commande \mathcal{H}_2 des MJLS et représente une généralisation de la norme \mathcal{H}_2 des MJLS. Les différentes normes ainsi définies, le problème de synthèse $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ peut alors être considéré. Nous proposons deux structures de commande : les correcteurs statiques par retour de sortie, et les correcteurs dynamiques par retour de sortie. Ces structures nous permettent de nous affranchir de l'hypothèse d'accessibilité du vecteur d'état. Dans le cas du retour statique de sortie, des caractérisations LMI et NLMI des correcteurs stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ seront données. Ces caractérisations se basent sur les mêmes formalismes que ceux introduits dans le chapitre précédent. Nous nous intéresserons aussi à l'aspect résolution numérique des conditions NLMI, et un algorithme de type complémentarité sur le cône sera ainsi proposé. La validité des différents résultats théoriques obtenus sera illustrée à travers des exemples de simulation.

La problématique du retour dynamique de sortie sera ensuite considérée. Les premiers résultats exposés se basent sur une formulation LMI du problème de commande. De façon équivalente à la problématique de stabilisation exponentielle stochastique, cette formulation se révèle être inadaptée en pratique. Après la mise en évidence des limites de l'approche LMI, une formulation BMI du problème de commande multi-objectifs sera introduite. Cette formulation se base sur l'utilisation d'une version du lemme de Finsler (**Lemme C.5**) et une paramétrisation particulière des différentes matrices de Lyapunov. Un algorithme de type descente conjuguée du gradient sera proposé pour la résolution numérique de ces conditions et sera validé sur des exemples de simulation. Tout au long de ce chapitre, nous montrerons aussi que les résultats développés peuvent s'appliquer aisément à la problématique de commande multi-objectifs par retour de sortie indépendant du mode des (MJLS). Le problème de synthèse de correcteurs indépendants du mode des MJLS a été peu étudié dans la littérature. Un résultat relatif à la commande \mathcal{H}_∞ de cette classe de système a été récemment obtenu dans [BAM04]. Les auteurs proposent une caractérisation LMI du gain de retour d'état assurant des performances \mathcal{H}_∞ du système en boucle fermée. Ces résultats se basent sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov commune à tout les modes, rendant ces résultats relativement pessimistes. La contribution essentielle de notre travail réside dans l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendantes du mode.

3.2 Retour statique de sortie

Dans ce paragraphe, nous abordons la problématique de commande multi-objectifs par retour statique de sortie du AFTCSMP. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la caractérisation sous forme LMI et NLMI de correcteurs statiques assurant certaines performances (objectifs) du système en boucle fermée. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation stochastique du système en boucle fermée, des performances \mathcal{H}_2 ainsi que des performances \mathcal{H}_∞ (ou plus généralement,

des performances intégrales quadratiques stochastiques : **SIQC** pour Stochastic Integral Quadratic Constraints).

3.2.1 Modèle dynamique

Par soucis de clarté, et afin de faciliter la lecture de cette partie, nous rappelons brièvement ci-dessous le modèle dynamique de la classe de systèmes hybrides considérée. Ce dernier est décrit par les EDS suivantes :

$$\varphi : \begin{cases} dx_t = A(\xi_t)x_t dt + B(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t)dt + E(\xi_t, \eta_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t)x_t d\varpi_{lt} \\ y_t = C_2 x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = C_1 x_t + D_1(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Les correcteurs par retour statique de sortie (φ_s) sont définis comme suit

$$\varphi_s : \left\{ u_t = \mathcal{K}(\psi_t)y_t \right. \quad (3.2)$$

En combinant (3.1) et (3.2), la représentation d'état du système en boucle fermée est donnée par :

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} dx_t = \bar{A}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)x_t dt + \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t)x_t d\varpi_{lt} \\ y_t = C_2 x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t)x(t) + \bar{D}_1(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) & \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \\ \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) & \bar{D}_1(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\xi_t) & E(\xi_t, \eta_t) \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\eta_t) \\ D_1(\eta_t) \end{bmatrix} \mathcal{K}(\psi_t) \begin{bmatrix} C_2 & D_2(\xi_t, \eta_t) \end{bmatrix}$$

3.2.2 Formulation LMI

Avant d'aborder le problème de synthèse multi-objectifs, nous allons dans un premier temps établir des résultats relatifs aux problématiques de synthèse mono-objectif, à savoir, la commande \mathcal{H}_∞ et la commande \mathcal{H}_2 des AFTCSMP.

3.2.2.1 Commande \mathcal{H}_∞

Soit le système (3.1) avec

$$z_t = z_{\infty t} = C_{\infty 1}x_t + D_{\infty 1}(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t)$$

où l'indice ' ∞ ' est relatif à des performances \mathcal{H}_∞ .

Dans ce paragraphe, nous abordons la problématique de synthèse de correcteurs stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée, et garantissant un niveau de réjection de perturbations $\gamma_\infty > 0$. Cette problématique est considérée sous un formalisme d'optimisation convexe. Mathématiquement,

nous nous intéressons à la caractérisation LMI des correcteurs φ_s stabilisant stochastiquement le système (3.3) et assurant la relation suivante pour tout $w \in L^2[0, \infty)$:

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty z'_{\infty t} z_{\infty t} dt \right\}^{1/2} < \gamma_\infty [\|w\|_2^2 + a(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)]^{1/2} \quad (3.4)$$

où γ_∞ représente le niveau d'atténuation des perturbations et $a(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$ est une constante dépendant des conditions initiales $(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$.

Avant de procéder, nous allons d'abord introduire quelques résultats préliminaires nécessaires à la dérivation de nos principaux résultats.

Proposition 3.1 Si le système bouclé (3.3) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique, alors il est stochastiquement stable. \square

Preuve Sachant que le système (3.3) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique, il s'en suit de la proposition 2.1 qu'il existe des matrices symétriques définies positives \mathcal{P}_{ijk} , $i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ telle que

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} = \Xi_{ijk} < 0$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

Notons qu'il est aisé de montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\Xi_{ijk} + \alpha \mathcal{P}_{ijk}^2 < 0.$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

Considérons la fonction de Lyapunov stochastique suivante

$$\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) = x_t' \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) x_t$$

alors

$$\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) = x_t' \{\Xi(\xi_t, \eta_t, \psi_t)\} x_t + 2x_t' \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) w_t. \quad (3.5)$$

En utilisant le Lemme de majoration (voir **annexe C** : page 191), nous pouvons écrire la relation suivante

$$\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) \leq -x_t' \Gamma(\xi_t, \eta_t, \psi_t) x_t + \alpha^{-1} w_t' \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)' \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) w_t$$

où

$$\Gamma(\xi_t, \eta_t, \psi_t) = -\Xi(\xi_t, \eta_t, \psi_t) - \alpha \mathcal{P}^2(\xi_t, \eta_t, \psi_t)$$

En se basant sur la formule de Dynkin, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{ \vartheta(x_T, \xi_T, \eta_T, \psi_T) \} - \vartheta(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0) &= \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \mathcal{L}\vartheta(x_\tau, \xi_\tau, \eta_\tau, \psi_\tau) d\tau \right\} \\
&\leq -\mathcal{E} \left\{ \int_0^T x'_\tau \Gamma(\xi_\tau, \eta_\tau, \psi_\tau) x_\tau d\tau \right\} \\
&\quad + \alpha^{-1} \mathcal{E} \left\{ \int_0^T w'_\tau \bar{E}'(\xi_\tau, \eta_\tau, \psi_\tau) \bar{E}(\xi_\tau, \eta_\tau, \psi_\tau) w_\tau d\tau \right\} \\
&\leq -\mathcal{E} \left\{ \int_0^T \lambda_{\min} \Gamma(\xi_\tau, \eta_\tau, \psi_\tau) x'_\tau x_\tau d\tau \right\} \\
&\quad + \alpha^{-1} \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \lambda_{\max}(\bar{E}'(\xi_\tau, \eta_\tau, \psi_\tau) \bar{E}(\xi_\tau, \eta_\tau, \psi_\tau)) w'_\tau w_\tau d\tau \right\}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A partir de la relation (3.6), nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \mathcal{E} \{ x'_T \mathcal{P}(\xi_T, \eta_T, \psi_T) x_T \} + \min_{i,j,k} \{ \lambda_{\min} \Gamma(i, j, k) \} \mathcal{E} \left\{ \int_0^T x'_\tau x_\tau d\tau \right\} \right\} \\
&\leq \{ x'_0 \mathcal{P}(\xi_0, \eta_0, \psi_0) x_0 \} + \alpha^{-1} \max_{i,j,k} \{ \lambda_{\max} \bar{E}'(i, j, k) \bar{E}(i, j, k) \} \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty w'_\tau w_\tau d\tau \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

A partir de (3.7), et sachant que $\mathcal{E} \{ x'_t \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) x_t \} \geq 0$ et que $w \in L^2[0, \infty)$, alors le système bouclé (3.3) est stochastiquement stable. \blacksquare

La proposition 3.2 donne des conditions de stabilité stochastique et de performance \mathcal{H}_∞ du système bouclé (3.3) en terme d'inégalités matricielles non linéaires.

Proposition 3.2 Si il existe des matrices symétriques définies positives $\mathcal{P}_{\infty ijk}$, et des matrices \mathcal{K}_k , $i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ telles que

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{ijk} & \bar{C}'_{\infty 1jk} \bar{D}_{\infty 1ijk} + \mathcal{P}_{\infty ijk} \bar{E}_{ijk} \\ \star & \bar{D}'_{\infty 1ijk} \bar{D}_{\infty 1ijk} - \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} = \Phi_{ijk} < 0 \tag{3.8}$$

où

$$\Upsilon_{ijk} = \tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{\infty ijk} + \mathcal{P}_{\infty ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{\infty ijk} \mathbb{W}_{lij} + \bar{C}'_{\infty 1jk} \bar{C}_{\infty 1jk} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{\infty hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{\infty ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{\infty ijk}$$

$\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$

alors le système bouclé (3.3) est stochastiquement stable et vérifie

$$\| z_\infty \|_{\mathcal{E}_2} < \left[\gamma_\infty^2 \| w \|_2^2 + x'_0 \mathcal{P}_{\infty}(\xi_0, \eta_0, \psi_0) x_0 \right]^{1/2}. \tag{3.9}$$

\square

Preuve. Partant de (3.8), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk}\mathcal{P}_{\infty ijk} + \mathcal{P}_{\infty ijk}\tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij}\mathcal{P}_{\infty ijk}\mathbb{W}_{lij} + \bar{C}'_{\infty 1jk}\bar{C}_{\infty 1jk} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih}\mathcal{P}_{\infty hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl}\mathcal{P}_{\infty ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij}\mathcal{P}_{\infty ijv} < 0$$

Sachant que $\bar{C}'_{\infty 1jk}\bar{C}_{\infty 1jk} \geq 0$, cela implique la relation suivante

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk}\mathcal{P}_{\infty ijk} + \mathcal{P}_{\infty ijk}\tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij}\mathcal{P}_{\infty ijk}\mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih}\mathcal{P}_{\infty hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl}\mathcal{P}_{\infty ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij}\mathcal{P}_{\infty ijv} = \Xi_{ijk} < 0 \quad (3.10)$$

A partir de cette dernière équation, et en se basant sur les résultats de la proposition 2.1, nous pouvons conclure que le système bouclé (3.3) est exponentiellement stable, de manière interne au sens de la moyenne quadratique. Il s'en suit, à partir de la proposition 3.1, que le système (3.3) est stochastiquement stable.

Prouvons maintenant que la relation (3.9) est vérifiée. Commençons par définir le critère suivant

$$\mathcal{J}_T = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (z'_{\infty t} z_{\infty t} - \gamma_{\infty}^2 w'_t w_t) dt \right\} \quad (3.11)$$

Alors, pour prouver (3.9), il suffit d'établir que

$$\mathcal{J}_{\infty} \leq x'_0 \mathcal{P}_{\infty}(\xi_0, \eta_0, \psi_0) x_0$$

Soit la fonction de Lyapunov stochastique

$$\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) = x'_t \mathcal{P}_{\infty}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) x_t \quad (3.12)$$

alors

$$\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) = x'_t \{\Xi(\xi_t, \eta_t, \psi_t)\} x_t + 2x'_t \mathcal{P}_{\infty}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) w_t. \quad (3.13)$$

et

$$\begin{aligned} z'_{\infty t} z_{\infty t} - \gamma_{\infty}^2 w'_t w_t &= [\bar{C}_{\infty 1}(\eta_t, \psi_t) x_t + \bar{D}_{\infty 1}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) w_t]' [\bar{C}_{\infty 1}(\eta_t, \psi_t) x_t + \bar{D}_{\infty 1}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) w_t] - \gamma_{\infty}^2 w'_t w_t \\ &= x'_t \bar{C}'_{\infty 1}(\eta_t, \psi_t) \bar{C}_{\infty 1}(\eta_t, \psi_t) x_t + x'_t \bar{C}'_{\infty 1}(\eta_t, \psi_t) \bar{D}_{\infty 1}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) w_t \\ &\quad + w'_t \bar{D}'_{\infty 1}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \bar{C}_{\infty 1}(\eta_t, \psi_t) x_t + w'_t \bar{D}'_{\infty 1}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \bar{D}_{\infty 1}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) w_t - \gamma_{\infty}^2 w'_t w_t \end{aligned} \quad (3.14)$$

cela implique l'égalité suivante

$$z'_{\infty t} z_{\infty t} - \gamma_{\infty}^2 w'_t w_t + \mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) = \chi'_t \Phi(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \chi_t \quad (3.15)$$

où $\chi_t = \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix}$.

en ajoutant et en soustrayant $\mathcal{E} \left\{ \int_0^T \mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) dt \right\}$ à (3.11), nous obtenons

$$\mathcal{J}_T = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (z'_{\infty t} z_{\infty t} - \gamma_{\infty}^2 w'_t w_t + \mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t)) dt \right\} - \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t)) dt \right\} \quad (3.16)$$

En utilisant la formule de Dynkin, nous obtenons

$$\mathcal{E} \{ \vartheta(x_T, \xi_T, \eta_T, \psi_T) \} - \vartheta(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0) = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) dt \right\} \quad (3.17)$$

d'où

$$\mathcal{J}_T = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \chi_t' \Phi(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \chi_t dt \right\} - \mathcal{E} \{ \vartheta(x_T, \xi_T, \eta_T, \psi_T) \} + \vartheta(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0) \quad (3.18)$$

Sachant que $\Phi(\xi_t, \eta_t, \psi_t) < 0$ et que $\mathcal{E} \{ \vartheta(x_T, \xi_T, \eta_T, \psi_T) \} \geq 0$, nous avons la relation suivante

$$\mathcal{J}_T \leq \vartheta(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$$

ce qui implique que $\mathcal{J}_\infty \leq x_0' \mathcal{P}(\xi_0, \eta_0, \psi_0) x_0$. Cela conclut cette preuve. \blacksquare

Remarque 3.1 Soient les matrices $\mathbb{U} \geq 0$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}'$ et \mathbb{Q} . La caractérisation précédente peut alors s'étendre à des contraintes plus générales. Ces dernières sont quadratiques en w_t et z_t et sont données sous la forme :

$$J_{SIQC} = \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} z_t \\ w_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}' & \mathbb{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_t \\ w_t \end{pmatrix} dt \right\} < 0 \quad (3.19)$$

Ces contraintes sont dites : **Stochastic Quadratic Integral Constraints** [CZT03].

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que la relation (3.19) soit vérifiée.

Proposition 3.3 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{ijk} = \mathcal{P}'_{ijk} > 0$ et des matrices \mathcal{K}_k , $i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ telles que

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{ijk} \bar{E}_{ijk} + \bar{C}'_{1jk} \mathbb{Q} & \bar{C}'_{1jk} \Delta \\ \star & \mathbb{Q}' \bar{D}_{1ijk} + \bar{D}'_{1ijk} \mathbb{Q} + \mathbb{V} & \bar{D}'_{1ijk} \Delta \\ \star & \star & -\Sigma \end{bmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

où

$$\begin{cases} \mathbb{U} = \Delta \Sigma^{-1} \Delta' \\ \Theta_{ijk} = \tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{ijv} \end{cases}$$

alors le système en boucle fermée (3.3) est stochastiquement stable et

$$J_{SIQC} < 0$$

\square

Preuve Partant de (3.20), nous avons

$$\Theta_{ijk} < 0$$

A partir de cette dernière équation, et en se basant sur les résultats de la proposition 2.1, nous pouvons conclure que le système bouclé (3.3) est exponentiellement stable, de manière interne, au

sens de la moyenne quadratique. Il s'en suit, à partir de la proposition 3.1, que le système (3.3) est stochastiquement stable.

Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante

$$\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) = x_t' \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) x_t \quad (3.21)$$

alors :

$$\mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) = \begin{pmatrix} x_t \\ w_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Theta(\xi_t, \eta_t, \psi_t) & \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ w_t \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

en additionnant et en soustrayant $\mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) dt \right\}$ à J_{SIQC} , nous obtenons

$$J_{SIQC} = \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} x_t \\ w_t \end{pmatrix}' \left(\Phi(\xi_t, \eta_t, \psi_t) + \begin{pmatrix} \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) & \bar{D}_{1ijk} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}' & \mathbb{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) & \bar{D}_{1ijk} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_t \\ w_t \end{pmatrix} dt \right\} - \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) dt \right\} \quad (3.23)$$

où

$$\Phi(\xi_t, \eta_t, \psi_t) = \begin{pmatrix} \Theta(\xi_t, \eta_t, \psi_t) & \mathcal{P}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En utilisant la formule de Dynkin, nous obtenons

$$\mathcal{E} \left\{ \vartheta(x_{t_f}, \xi_{t_f}, \eta_{t_f}, \psi_{t_f}) \right\} - \vartheta(x_{t_0}, \xi_{t_0}, \eta_{t_0}, \psi_{t_0}) = \mathcal{E} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\vartheta(x_t, \xi_t, \eta_t, \psi_t) dt \right\} \quad (3.24)$$

En assumant, sans perte de généralité, que $\vartheta(x_{t_0}, \xi_{t_0}, \eta_{t_0}, \psi_{t_0}) = 0$, il s'en suit de (3.23) et (3.24) que si

$$\Phi(\xi_t, \eta_t, \psi_t) + \begin{pmatrix} \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) & \bar{D}_{1ijk} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}' & \mathbb{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) & \bar{D}_{1ijk} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.25)$$

alors (3.19) est vérifiée.

Finalement, en factorisant le terme $\mathbb{U} \geq 0$ comme suit

$$\mathbb{U} = \Delta \Sigma^{-1} \Delta'$$

et en appliquant le complément de Schur, (3.25) est équivalente à (3.20). Cela conclut cette preuve. ■

En se basant sur les propositions 3.1 et 3.2 nous pouvons établir le résultat principal de cette section. Ce dernier se traduit par la proposition 3.4 qui donne une caractérisation LMI des compensateurs statiques (φ_s) stabilisant stochastiquement le système bouclé (3.3) et garantissant (3.9).

Proposition 3.4 Si il existe des matrices $\mathcal{X}_{\infty ijk} = \mathcal{X}'_{\infty ijk} > 0$, $\bar{\Omega}_{\infty ijk}$, \mathcal{K}_k telles que les LMI suivantes sont faisables

$$\left[\begin{array}{ccc} \mu_{ijk}\mathbb{I} - \bar{\Omega}_{\infty ijk} - \bar{\Omega}'_{\infty ijk} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}^2\mathbb{I} \end{bmatrix} & (\mu_{ijk}\bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} - \bar{\Omega}_{\infty ijk}) & \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}_{\infty ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \star & -\mu_{ijk}\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{S}}_{\infty ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{array} \right] \begin{array}{l} \Theta_{ijk} + \bar{\Omega}_{\infty ijk} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mu_{ijk}\mathbb{I} \\ \star \end{array} \left. \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Pi'_{ijk} \\ -\mathbb{I} \end{array} \right] < 0 \quad (3.26)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mu_{ijk}\mathbb{I} & \Pi'_{ijk} \\ \star & \mathbb{I} \end{array} \right] > 0 \quad (3.27)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{ijk} = \begin{bmatrix} C_{\infty 1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + D_{\infty 1j}\mathcal{K}_k \begin{bmatrix} C_2 & D_{2ij} \end{bmatrix} \\ \Theta_{ijk} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ijk} & E_{ij} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{K}_k \begin{bmatrix} C_2 & D_{2ij} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathcal{R}}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) & \mathcal{X}_{\infty ijk}[\mathbb{W}'_{1ij}, \dots, \mathbb{W}'_{vij}] \\ \bar{\mathcal{S}}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{J}_{ijk} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ \mathfrak{J}_{ijk} = \text{diag}[\mathcal{X}_{\infty ijk}, \dots, \mathcal{X}_{\infty ijk}]; \end{array} \right. \quad (3.28)$$

et μ_{ijk} sont des scalaires positifs $\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$. Alors le système (3.3) est stochastiquement stable et vérifie la relation (3.9). La loi de commande correspondante est donnée dans ce cas comme suit

$$u_k(t) = \mathcal{K}_k y(t)$$

□

Preuve. Les inégalités matricielles (3.8) peuvent être réécrites comme suit

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} = & \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}'_{ijk} & \mathbf{0} \\ \tilde{E}'_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_{ijk} & \tilde{E}_{ijk} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty 1jk} \\ \bar{D}'_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{\infty 1jk} & \bar{D}_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{\infty ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{\infty hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{\infty ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

D'après le lemme de projection et en considérant

$$\begin{aligned} \Psi_{ijk} = & \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{\infty ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{\infty hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{\infty ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty 1jk} \\ \bar{D}'_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{\infty 1jk} & \bar{D}_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

et

$$S_{ijk} = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}'_{ijk} & \mathbf{0} \\ \tilde{E}'_{ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ijk} + \mathcal{Z}_{ijk} - (\Omega_{\infty ijk} + \Omega'_{\infty ijk}) & S'_{ijk} + \Omega_{ijk} \\ \star & -\mathcal{Z}_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.32)$$

où \mathcal{Z}_{ijk} sont des matrices définies positives quelconques, $\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

Définissons $\mathcal{X}_{\infty ijk} = \mathcal{P}_{\infty ijk}^{-1}$ et $\bar{\Omega}_{\infty ijk} = \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} \Omega_{\infty ijk}$. En utilisant la transformation de congruence

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

et en appliquant le complément de Schur au terme

$$\bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{\infty ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{\infty hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{\infty ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk}$$

l'inégalité (3.32) devient

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} \left(\mathcal{Z}_{ijk} + \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty 1jk} \\ \bar{D}'_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{\infty 1jk} & \bar{D}_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \right) \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} - \bar{\Omega}_{\infty ijk} \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} - \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} \Omega'_{\infty ijk} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ \star \\ \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) \\ \mathbf{0} \\ -\bar{\mathcal{S}}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) \\ \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} + \bar{\Omega}_{\infty ijk} \\ \mathbf{0} \\ -\mathcal{Z}_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

Sachant que \mathcal{Z}_{ijk} sont des matrices définies positives quelconques, définissons

$$\mathcal{Z}_{ijk} = \left(\mu_{ijk} \mathbb{I} - \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty 1jk} \\ \bar{D}'_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{\infty 1jk} & \bar{D}_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \right) > 0$$

ou d'une façon équivalente

$$\begin{bmatrix} \mu_{ijk}\mathbb{I} & \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty 1jk} \\ \bar{D}'_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \\ \star & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.35)$$

En appliquant le complément de Schur au terme

$$\bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} \left(\mathcal{Z}_{ijk} + \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty 1jk} \\ \bar{D}'_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{\infty 1jk} & \bar{D}_{\infty 1ijk} \end{bmatrix} \right) \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} - \bar{\Omega}_{\infty ijk} \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} - \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} \bar{\Omega}'_{\infty ijk} \quad (3.36)$$

l'inégalité (3.34) peut se réécrire comme suit

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} & -\mu_{ijk}^{-1} \bar{\Omega}_{\infty ijk} \bar{\Omega}'_{\infty ijk} & (\mu_{ijk} \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} - \bar{\Omega}_{\infty ijk}) & \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \Theta_{ijk} + \bar{\Omega}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mu_{ijk} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\bar{\mathcal{S}}_{ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mu_{ijk} \mathbb{I} & \Pi'_{ijk} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.37)$$

Alors, et en utilisant la relation

$$-\mu_{ijk}^{-1} \bar{\Omega}_{\infty ijk} \bar{\Omega}'_{\infty ijk} \leq -\bar{\Omega}'_{\infty ijk} - \bar{\Omega}_{\infty ijk} + \mu_{ijk} \mathbb{I}$$

nous obtenons l'inégalité matricielle (3.26). Cela conclut cette preuve. \blacksquare

Remarque 3.2 D'un point de vue pratique, les contrôleurs stabilisant le système en boucle fermée et assurant un niveau de réjection de perturbations optimal sont d'un très grand intérêt. De tels contrôleurs peuvent être obtenus en résolvant le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\mathcal{O}_{\infty} : \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \delta \\ \delta > 0, \mathcal{X}_{\infty ijk} = \mathcal{X}'_{\infty ijk} > 0, \mathcal{K}_k, \bar{\Omega}_{\infty ijk} \\ \text{t.q.} \\ \begin{bmatrix} \mu_{ijk} \mathbb{I} - \bar{\Omega}_{\infty ijk} - \bar{\Omega}'_{\infty ijk} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\delta \mathbb{I} \end{bmatrix} & (\mu_{ijk} \bar{\mathcal{X}}_{\infty ijk} - \bar{\Omega}_{\infty ijk}) & \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}_{\infty ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \Theta_{ijk} + \bar{\Omega}_{\infty ijk} \\ \star & -\mu_{ijk} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{S}}_{\infty ijk}(\mathcal{X}_{\infty ijk}) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mu_{ijk} \mathbb{I} \\ \star & \star & \star & \star \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \mu_{ijk} \mathbb{I} & \Pi'_{ijk} \\ \star & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0 \end{array} \right.$$

Où les contraintes LMI sont obtenues à partir des inégalités matricielles (3.26), en remplaçant γ_∞^2 par δ . Cela conduit au corollaire suivant :

Corollaire 3.1 Soient $\delta > 0$, $\mathcal{X}_{\infty ijk} = \mathcal{X}'_{\infty ijk} > 0$, \mathcal{K}_k , et $\bar{\Omega}_{\infty ijk}$ les solutions du problème d'optimisation \mathcal{O}_∞ . Alors, la loi de commande (3.2) stabilise stochastiquement le système (3.1) et assure un niveau de réjection de perturbations inférieur à $\sqrt{\delta}$. \diamond

Remarque 3.2 Le problème d'optimisation convexe \mathcal{O}_∞ consiste en la minimisation d'une fonction coût linéaire sous des contraintes LMI. Ce problème peut aisément être résolu en utilisant la fonction `mincx` implémentée dans la boîte à outils LMI disponible sur MATLAB [GNLC95].

Remarque 3.3 Comme pour le cas de la stabilisation exponentielle au sens de la moyenne quadratique du AFTCSMP, la problématique de commande \mathcal{H}_∞ indépendante du mode de la classe des systèmes MJLS représente un cas particulier intéressant pour lequel les résultats développés dans cette section s'appliquent aisément. En effet, pour le système (3.38)

$$\varphi_{\text{MJLS}} : \begin{cases} dx_t = \bar{A}(\phi_t)x_t dt + \bar{E}(\phi_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}_l(\phi_t)x_t d\varpi_{lt} \\ y_t = C_2(\phi_t)x_t + D_2(\phi_t)w_t \\ z_{\infty t} = \bar{C}_{\infty 1}(\phi_t)x_t + \bar{D}_{\infty 1}(\phi_t)w_t \end{cases} \quad (3.38)$$

où

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\phi_t) & \bar{E}(\phi_t) \\ \bar{C}_{\infty 1}(\phi_t) & \bar{D}_{\infty 1}(\phi_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\phi_t) & E(\phi_t) \\ C_{\infty 1}(\phi_t) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\phi_t) \\ D_{\infty 1}(\phi_t) \end{bmatrix} \mathcal{K} \begin{bmatrix} C_2(\phi_t) & D_2(\phi_t) \end{bmatrix}$$

et en se basant sur les mêmes arguments que ceux utilisés pour prouver les résultats de la proposition 3.4, le corollaire suivant peut être formulé.

Corollaire 3.2 Soient $\delta > 0$, $\mathcal{X}_{\infty i} = \mathcal{X}'_{\infty i} > 0$, \mathcal{K} , et $\bar{\Omega}_{\infty i}$ les solutions du problème d'optimisation $\mathcal{O}_{\text{MJLS}}$

$$\mathcal{O}_{\text{MJLS}} : \left\{ \begin{array}{l} \min_{\delta > 0, \mathcal{X}_{\infty i} = \mathcal{X}'_{\infty i} > 0, \mathcal{K}, \bar{\Omega}_{\infty i}} \delta \\ \text{t.q.} \\ \begin{bmatrix} \mu_i \mathbb{I} - \bar{\Omega}_{\infty i} - \bar{\Omega}'_{\infty i} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\delta \mathbb{I} \end{bmatrix} & (\mu_i \bar{\mathcal{X}}_{\infty i} - \bar{\Omega}_{\infty i}) & \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}_i(\mathcal{X}_{\infty i}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \Theta_i + \bar{\Omega}_{\infty i} & \mathbf{0} \\ * & -\mu_i \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\bar{\mathcal{S}}_i(\mathcal{X}_{\infty i}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\mu_i \mathbb{I} & \Pi'_i \\ * & * & * & * & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \mu_i \mathbb{I} & \Pi'_i \\ * & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0 \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_i = \begin{bmatrix} C_{\infty 1i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + D_{\infty 1i} \mathcal{K} \begin{bmatrix} C_{2i} & D_{2i} \end{bmatrix} \\ \Theta_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & E_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{K} \begin{bmatrix} C_2 & D_{2i} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathcal{R}}_i(\mathcal{X}_{\infty i}) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_i(\mathcal{X}_{\infty i}) & \mathcal{X}_{\infty i}[\mathbb{W}'_{1i}, \dots, \mathbb{W}'_{vi}] \\ \mathcal{S}_i(\mathcal{X}_{\infty i}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{J}_i \end{bmatrix} \\ \bar{\mathcal{X}}_{\infty i} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{\infty i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \\ \mathbb{J}_i = \text{diag}[\mathcal{X}_{\infty i}, \dots, \mathcal{X}_{\infty i}]; \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Alors, la loi de commande $u_t = \mathcal{K}y_t$ stabilise stochastiquement le système (3.38) et assure un niveau de réjection de perturbations inférieur à $\sqrt{\delta}$. \diamond

3.2.2.2 Commande \mathcal{H}_2

Soit le système (3.1) avec

$$z_t = z_{2t} = C_{21}x_t + D_{21}(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t)$$

et $D_2(\xi_t, \eta_t) = \mathbf{0}$. z_{2t} est la sortie à commander pour laquelle des performances \mathcal{H}_2 sont considérées. Avant d'établir les résultats principaux de cette section, nous allons dans un premier temps introduire la définition 3.1 qui représente une généralisation de la définition de la norme \mathcal{H}_2 des systèmes à sauts Markoviens (MJLS) [CdVG99, DM02, DMS04] à la classe des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens.

Définition 3.1 Nous définissons la norme \mathcal{H}_2 du système bouclé (φ_{cl}) supposé stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique, comme suit

$$\|\varphi_{cl}\|_2^2 = \sum_{d=1}^m \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \|z_{d,i,j,k}\|_{\mathcal{E}_2}^2$$

où $z_{d,i,j,k}$ représente la sortie $\{z_t; t \geq 0\}$ quand :

- l'entrée est donnée par $w = \{w_t; t \geq 0\}$, $w_t = e_d \delta_t$, δ_t est une impulsion unitaire, et e_d est un vecteur unitaire de dimension m formé par un 1 à la position d et des zéros ailleurs ;
- $x_0 = 0$, $\xi_0 = i$, $\eta_0 = j$, $\psi_0 = k$ et $\mu = (\mu_{111}, \dots, \mu_{s_z r})$ est la distribution initiale du processus de Markov joint.

Partant de la définition ci-dessus et en s'appuyant sur les mêmes arguments que ceux utilisés dans [CdVG99, DM02, DMS04], le corollaire suivant peut être énoncé.

Corollaire 3.3 Supposons que le système bouclé (φ_{cl}) est exponentiellement stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $\|\varphi_{cl}\|_2^2 = \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(E'_{ij} \mathcal{P}_{oijk} E_{ij})$, où $\mathcal{P}_o = \{\mathcal{P}_{o111}, \dots, \mathcal{P}_{oszr}\}$ représente le Grammien d'observabilité, *i.e.*, \mathcal{P}_{oijk} sont les uniques solutions semi-définies positives des équations suivantes

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{oijk} + \mathcal{P}_{oijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{oijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{ohjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{oilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{oijv} + \bar{C}'_{21} \bar{C}_{21} = 0 \quad (3.40)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

ii) $\|\varphi_{cl}\|_2^2 < \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(E'_{ij} \mathcal{P}_{2ijk} E_{ij})$, où \mathcal{P}_{2ijk} sont les solutions définies positives des inégalités matricielles suivantes

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{2ijk} + \mathcal{P}_{2ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{2ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{2hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{2ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{2ijv} + \bar{C}'_{21} \bar{C}_{21} < 0 \quad (3.41)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

iii) Si il existe des matrices définies positives \mathcal{P}_{2ijk} et des matrices \mathcal{K}_k telles que

$$\sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(E'_{ij} \mathcal{P}_{2ijk} E_{ij}) < \gamma_2^2$$

$$\tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{2ijk} + \mathcal{P}_{2ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{2ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{2hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{2ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{2ijv} + \bar{C}'_{21} \bar{C}_{21} < 0$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$, alors \mathcal{K}_k sont des gains stabilisants tel que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$.

iv) Le problème de commande \mathcal{H}_2 par retour statique de sortie est résolu par le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(\mathbf{Z}_{ijk}) \\ \text{t.q.} \\ E'_{ij} \mathcal{P}_{2ijk} E_{ij} < \mathbf{Z}_{ijk} \\ \tilde{\Lambda}'_{ijk} \mathcal{P}_{2ijk} + \mathcal{P}_{2ijk} \tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \mathbb{W}'_{lij} \mathcal{P}_{2ijk} \mathbb{W}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{P}_{2hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{P}_{2ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{P}_{2ijv} + \bar{C}'_{21} \bar{C}_{21} < 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

◇

En s'appuyant sur la méthodologie utilisée pour la problématique de commande \mathcal{H}_∞ , des résultats de commande \mathcal{H}_2 similaires sont obtenus et sont résumés comme suit

Proposition 3.5 Le problème de commande \mathcal{H}_2 par retour statique de sortie du système (3.3) est résolu par le problème d'optimisation convexe suivant

$$\mathcal{O}_2 : \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{Z}_{ijk}, \mathcal{X}_{2ijk}=\mathcal{X}'_{2ijk}>0, \mathcal{K}_k, \bar{\Omega}_{2ijk}} \sum_{ijk} \mu_{ijk} \text{tr}(\mathbf{Z}_{ijk}) \\ \text{t.q :} \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_{ijk} & E'_{ij} \\ * & \mathcal{X}_{2ijk} \end{array} \right] > 0 \\ \left[\begin{array}{cccccc} \delta_{ijk}\mathbb{I} - \bar{\Omega}_{2ijk} - \bar{\Omega}'_{2ijk} & (\delta_{ijk}\mathcal{X}_{2ijk} - \bar{\Omega}_{2ijk}) & \bar{\mathcal{R}}_{ijk}(\mathcal{X}_{2ijk}) & \tilde{A}_{ijk} + B_j\mathcal{K}_kC_2 + \bar{\Omega}_{2ijk} & \mathbf{0} & \\ * & -\delta_{ijk}\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ * & * & -\bar{\mathcal{S}}_{ijk}(\mathcal{X}_{2ijk}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ * & * & * & -\delta_{ijk}\mathbb{I} & \Pi'_{ijk} & \\ * & * & * & * & * & -\mathbb{I} \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} \delta_{ijk}\mathbb{I} & \Pi'_{ijk} \\ * & \mathbb{I} \end{array} \right] > 0 \end{array} \right.$$

où δ_{ijk} sont des scalaires positifs et

$$\Pi_{ijk} = C_{21} + D_{21j}\mathcal{K}_kC_2$$

La loi de commande correspondante est donnée par $u_t = \mathcal{K}_ky_t$. □

Preuve. La preuve de cette proposition s'appuie sur les mêmes arguments que ceux utilisés pour la preuve de la proposition 3.4. ■

Remarque 3.4 Des résultats relatifs à la commande \mathcal{H}_2 par retour statique de sortie des MJLS sont résumés par le corollaire suivant.

Corollaire 3.4 Le problème de commande \mathcal{H}_2 par retour statique de sortie du système (3.38) est

résolu par le problème d'optimisation convexe suivant

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \min_{\mathbf{Z}_i, \mathcal{X}_{2i}=\mathcal{X}'_{2i}>0, \mathcal{K}, \bar{\Omega}_{2i}} \sum_i \mu_i \text{tr}(\mathbf{Z}_i) \\ \text{t.q.} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_i & E'_i \\ \star & \mathcal{X}_{2i} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} \delta_i \mathbb{I} - \bar{\Omega}_{2i} - \bar{\Omega}'_{2i} & (\delta_i \mathcal{X}_{2i} - \bar{\Omega}_{2i}) & \bar{\mathcal{R}}_i(\mathcal{X}_{2i}) & \tilde{A}_i + B_i \mathcal{K} C_{2i} + \bar{\Omega}_{2i} & \mathbf{0} \\ \star & -\delta_i \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{S}}_i(\mathcal{X}_{2i}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\delta_i \mathbb{I} & \Pi'_i \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \delta_i \mathbb{I} & \Pi'_i \\ \star & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0 \end{cases}$$

où δ_i sont des scalaires positifs et

$$\Pi_i = C_{21i} + D_{21i} \mathcal{K} C_{2i}$$

La loi de commande correspondante est donnée par $u_t = \mathcal{K} y_t$. \diamond

3.2.2.3 Synthèse multi-objectifs

Le problème de synthèse multi-objectifs tend à trouver des correcteurs stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant en même temps des performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimales. Le problème de synthèse multi-critères est formulé comme suit :

Soient α_2 et α_∞ deux scalaires positifs donnés. Le problème de synthèse multi-critères consiste à trouver des correcteurs par retour de sortie statique stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et solutions du problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min_{\gamma_2, \gamma_\infty, \mathcal{K}_k} \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_\infty \gamma_\infty \\ \text{t.q.} \\ \| z_\infty \|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \| w \|_2, \quad \| \varphi_{cl} \|_2 < \gamma_2 \end{cases} \quad (3.43)$$

La solution de ce problème de commande revient donc à trouver des correcteurs statiques satisfaisant les différentes inégalités matricielles données dans les propositions 3.4 et 3.5.

3.2.2.4 Exemples numériques

a) Commande \mathcal{H}_∞

Dans cette section, la stratégie de commande \mathcal{H}_∞ par retour statique de sortie est illustrée en utilisant un exemple aéronautique. Soit le système nominal avec :

$$A = \begin{bmatrix} -1.175 & 0.9871 \\ -8.458 & -0.8776 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.194 & -0.0359 \\ -19.29 & -3.803 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \mathbb{W} = 0.5 \times \mathbb{I},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, C_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce modèle est adapté de [MJH04]. Il représente la dynamique longitudinale linéarisée et découplée d'un avion F-18 volant à une vitesse de 0.7 mach, à une altitude de 14000 pieds. Le vecteur d'état $x_t \in \mathbb{R}^2$ est composé de :

- x_1 : angle d'attaque ;
- x_2 : vitesse de tangage.

et les composantes du vecteur de commande sont :

- u_1 : symmetric elevator position ;
- u_2 : symmetric pitch thrust velocity nozzle position.

Pour des fins d'illustration, nous allons considérer deux modes défectueux différents :

- **Mode 2** : perte de puissance de 50% au niveau du second actionneur ;
- **Mode 3** : perte du premier actionneur et perte de puissance de 50% au niveau du second actionneur.

En considérant ces deux modes, nous avons $S = \{1, 2, 3\}$, où le **mode 1** représente le cas nominal (sans pannes). Le processus défaut est supposé Markovien. Le processus FDI est aussi Markovien avec $R = \{1, 2, 3\}$.

Les taux de transition du processus défaut actionneur sont donnés par :

$$[\nu_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.0010 & 0.0010 \\ 0.0010 & -0.002 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0010 & -0.002 \end{bmatrix}$$

Les taux de transition du processus FDI sont donnés comme suit :

$$[\lambda_{ij}^1] = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 & 0.01 \\ 1.00 & -1.01 & 0.01 \\ 1.00 & 0.01 & -1.01 \end{bmatrix}, [\lambda_{ij}^2] = \begin{bmatrix} -1.01 & 1.00 & 0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 1.00 & -1.01 \end{bmatrix},$$

$$[\lambda_{ij}^3] = \begin{bmatrix} -1.01 & 0.01 & 1.00 \\ 0.01 & -1.01 & 1.00 \\ 0.01 & 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}.$$

Pour le système décrit ci-dessus, et en résolvant le problème d'optimisation convexe \mathcal{O}_∞ , nous obtenons un niveau de performance \mathcal{H}_∞ donné par : $\gamma_\infty = 1.4237$.

Les gains de retour de sortie correspondants sont donnés comme suit :

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.0005 & 25.0210 \end{bmatrix}', \quad \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.9044 & 24.8438 \end{bmatrix}', \quad \mathcal{K}_3 = \begin{bmatrix} -0.8885 & 33.3975 \end{bmatrix}'.$$

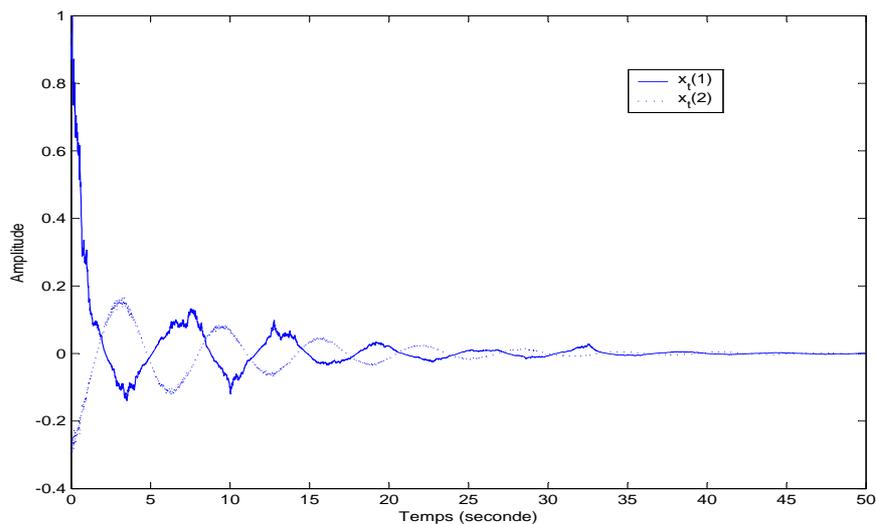


FIG. 3.1 – Evolution des variables d'états : une seule réalisation des processus aléatoires

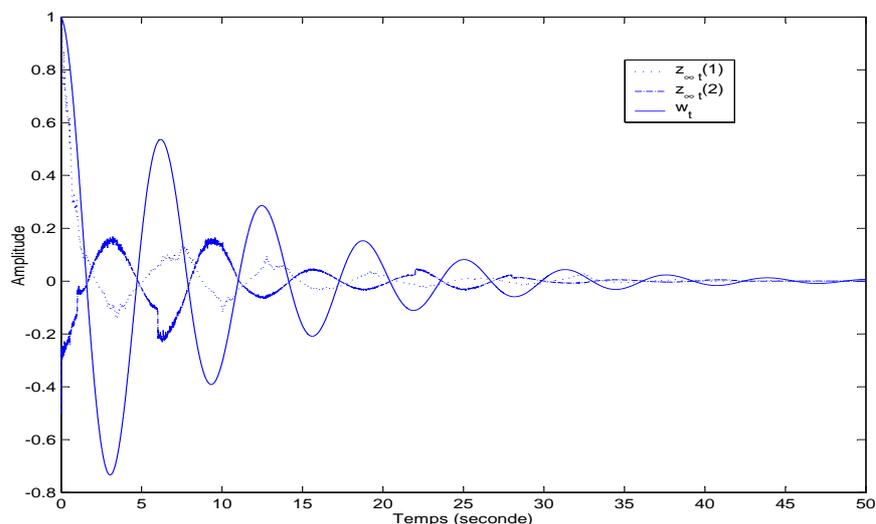


FIG. 3.2 – Evolution des sorties $z_{\infty t}$: une seule réalisation des processus aléatoires

L'évolution des trajectoires d'état du système en boucle fermée résultant des correcteurs obtenus est illustrée par la figure 3.1. Ces trajectoires correspondent aux réalisations des processus défaut η_t et FDI ψ_t données respectivement par la figure 3.3 et la figure 3.4. La figure 3.2 représente l'évolution

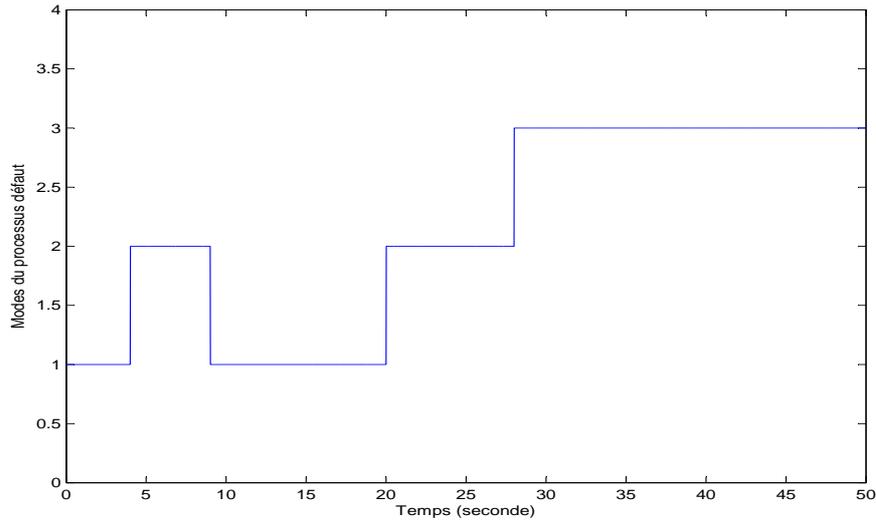


FIG. 3.3 – Modes du processus défaut

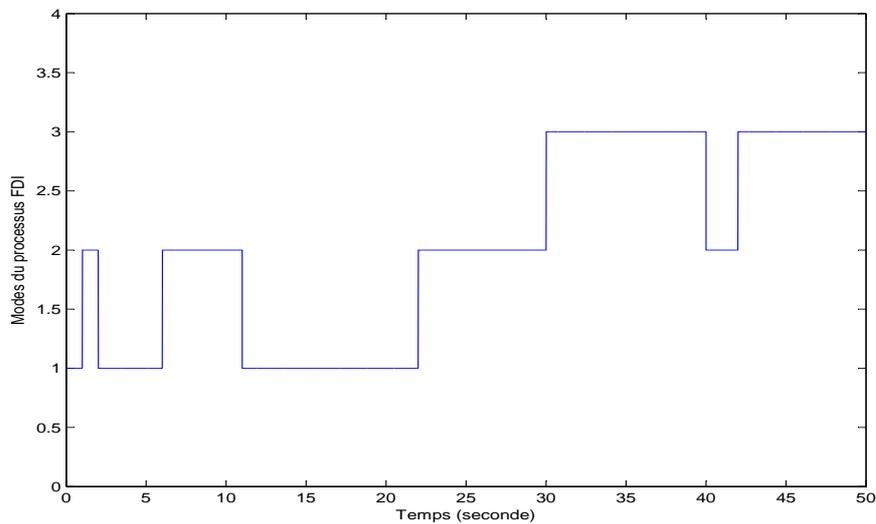


FIG. 3.4 – Modes du processus FDI

des sorties commandées $z_{\infty t}$. Nous pouvons voir à travers ces différentes figures que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint et que le système en boucle fermée est stochastiquement stable.

b) Commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Considérons l'exemple académique suivant :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9749 & -0.3257 & 0.2333 \\ -2.3779 & -2.0122 & 0.6464 \\ -1.0923 & 1.5677 & -1.129 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, W = 0.5 \times I,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous allons considérer par la suite que ce système est sujet à un défaut composant modifiant la dynamique du système comme suit :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1970 & 0.7925 & -1.1087 \\ 1.6969 & 0.6034 & 2.1442 \\ 0.7260 & -0.0584 & -1.3528 \end{bmatrix}.$$

Nous avons dans ce cas $Z = \{1, 2\}$, où le **mode 1** représente le cas nominal et le **mode 2** est le mode défectueux. Le processus FDI est Markovien avec $R = \{1, 2\}$.

Les taux de transition du processus défaut système sont donnés par :

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0050 \\ 0.0100 & -0.0100 \end{bmatrix}$$

Les taux de transition du processus FDI sont donnés comme suit :

$$[\lambda_{ij}^1] = \begin{bmatrix} -0.1000 & 0.1000 \\ 0.9000 & -0.9000 \end{bmatrix}, [\lambda_{ij}^2] = \begin{bmatrix} -1.000 & 1.0000 \\ 0.1000 & -0.1000 \end{bmatrix}.$$

Pour le système décrit ci-dessus, et en résolvant le problème d'optimisation convexe multi-objectifs, nous obtenons des niveaux de performance \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ donnés respectivement par : $\gamma_2 = 1.5220$ et $\gamma_\infty = 2.4071$.

Les correcteurs correspondants sont :

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} -4.4997 & -0.2004 \\ 0.4205 & -1.9996 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} -5.9835 & -1.0247 \\ 0.4364 & -3.4051 \end{bmatrix}.$$

Les trajectoires d'états du système en boucle fermée sont illustrées par la figure 3.5. Ces trajectoires correspondent à des réalisations des processus défaut η_t et FDI ψ_t données respectivement par la figure 3.7 et la figure 3.8. La figure 3.6 représente l'évolution des sorties commandées $z_{\infty t}$. Nous pouvons constater que le système en boucle fermée est stochastiquement stable et que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint.

3.2.3 Formulation NLMI

Dans cette section, la problématique de commande multi-objectifs des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens est considérée sous le formalisme *ellipsoïdes de matrices*. En effet, des résultats de commande \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ sont formulés sous forme d'inégalités matricielles non linéaires pour lesquelles un algorithme de type **complémentarité sur le cône** est proposé.

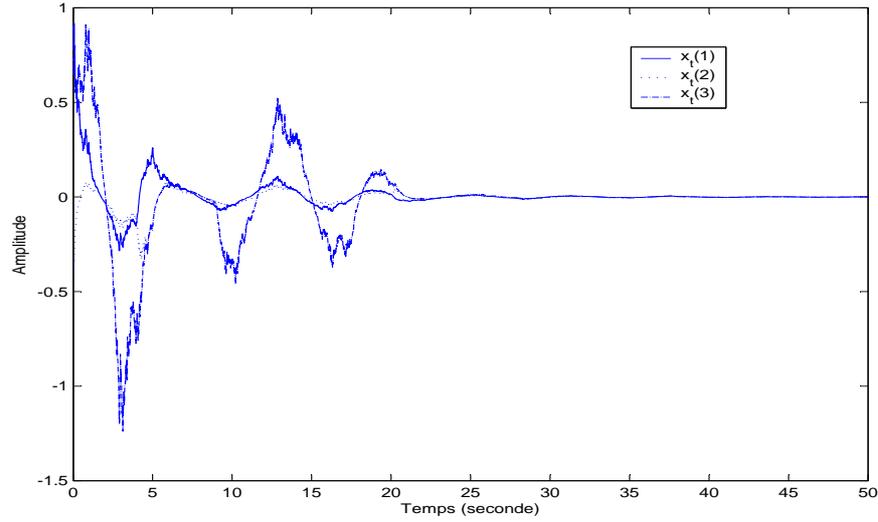
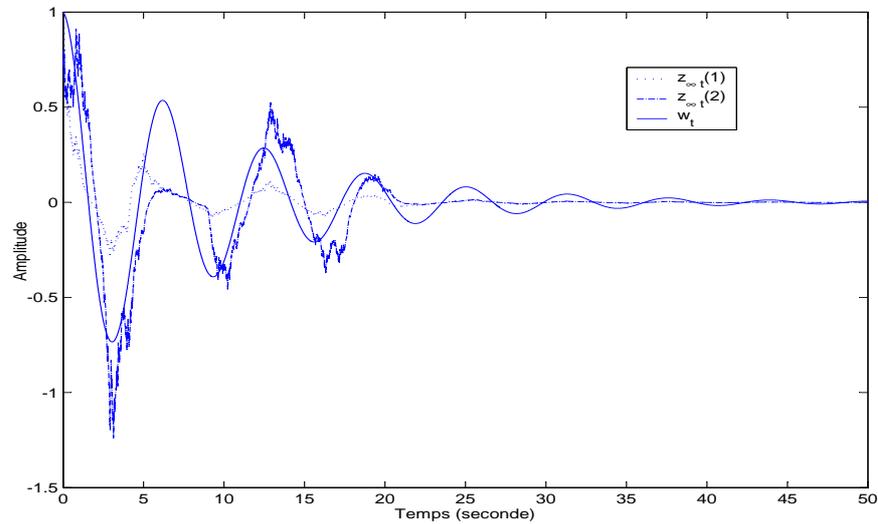


FIG. 3.5 – Evolution des variables d'états : une seule réalisation des processus aléatoires

FIG. 3.6 – Evolution des sorties z_{ott} : une seule réalisation des processus aléatoires

3.2.3.1 Commande \mathcal{H}_∞

En se basant sur les propositions 3.1 et 3.2, et en s'appuyant sur les mêmes arguments et méthodologies que ceux utilisés pour la résolution de la problématique de stabilisation exponentielle (Chapitre 2), une caractérisation en terme d'ellipsoïdes de matrices des compensateurs (φ_s) stabilisant stochastiquement le système bouclé (3.3) et assurant des performances \mathcal{H}_∞ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.6 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ijk} = \mathcal{P}'_{\infty ijk} > 0$, $\mathbb{X}_k \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}'_k > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\mathbb{M}'_{1ij} \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{\infty ijk} \\ \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{1ij} < \mathbb{M}'_{2j} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{2j} + \mathbb{M}'_{3ij} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \mathbb{M}_{3ij} \quad (3.44)$$

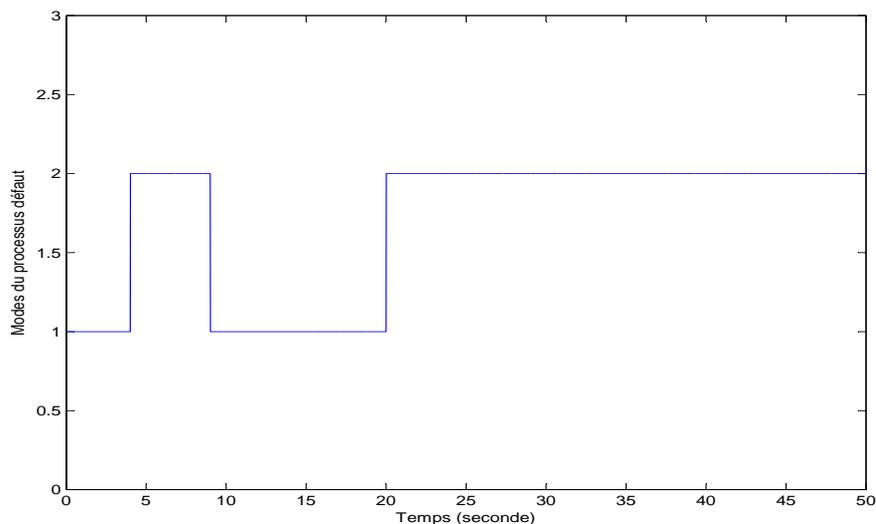


FIG. 3.7 – Modes du processus Défaut

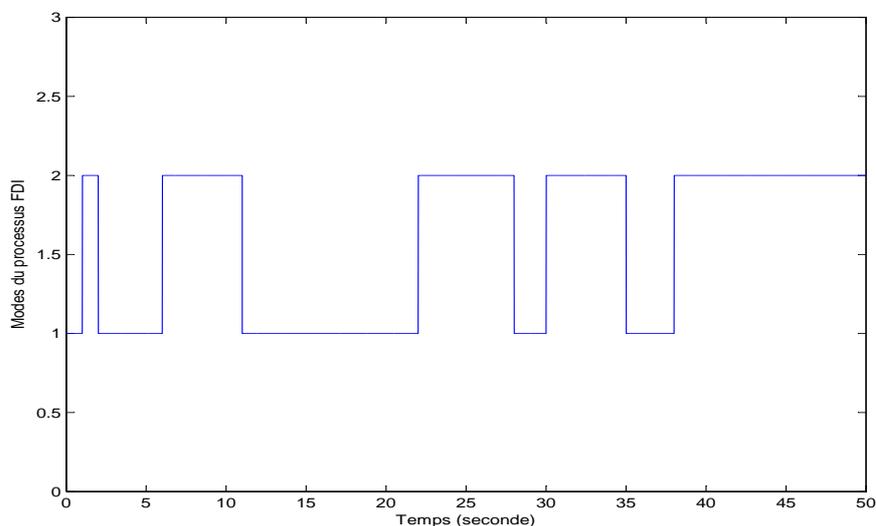


FIG. 3.8 – Modes du processus FDI

et les inégalités nonlinéaires suivantes

$$\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}'_k \quad (3.45)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$, où

$$\mathbb{M}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_i & E_{ij} & B_j \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{2j} = \begin{bmatrix} C_{\infty 1} & \mathbf{0} & D_{\infty 1j} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{3ij} = \begin{bmatrix} C_2 & D_{2ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisant stochastiquement le système (3.3) tels que

$$\| z_\infty \|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty z'_{\infty t} z_{\infty t} dt \right\}^{1/2} < \gamma_\infty \| w \|_2 \quad (3.46)$$

□

Preuve : La preuve de cette proposition s'appuie sur les mêmes arguments que ceux utilisés pour la preuve de la proposition 2.5. ■

Remarque 3.5 Comme précédemment, les résultats présentés ci-dessus peuvent être appliqués à la problématique de commande \mathcal{H}_∞ par retour statique de sortie des MJLS. Et cela toujours dans le cas où le gain de retour est indépendant du mode. Cela s'exprime par le corollaire suivant.

Corollaire 3.5 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty i} = \mathcal{P}'_{\infty i} > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > 0$ vérifiant les contraintes LMIs suivantes

$$\mathbb{M}'_{1i} \begin{bmatrix} \Theta_i & \mathcal{P}_{\infty i} \\ \mathcal{P}_{\infty i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{1i} < \mathbb{M}'_{2i} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{2i} + \mathbb{M}'_{3i} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{3i} \quad (3.47)$$

et les inégalités matricielles non linéaires

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (3.48)$$

$\forall i \in H$, où

$$\mathbb{M}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_i & E_i & B_i \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{2i} = \begin{bmatrix} C_{\infty 1i} & \mathbf{0} & D_{\infty 1i} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{3i} = \begin{bmatrix} C_{2i} & D_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est un ensemble de gains stabilisant stochastiquement le système (3.38) tel que

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty z'_{\infty t} z_{\infty t} dt \right\}^{1/2} < \gamma_\infty \|w\|_2 \quad (3.49)$$

◇

3.2.3.2 Commande \mathcal{H}_2

Le résultat relatif à la commande \mathcal{H}_2 par retour statique de sortie du système (3.3) est donné par la proposition 3.7. Cette dernière découle des propriétés des ellipsoïdes de matrices et s'appuie sur les résultats du corollaire 3.3.

Proposition 3.7 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{2ijk} = \mathcal{P}'_{2ijk} > 0$, $\mathbb{X}_k \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}'_k$ vérifiant les contraintes suivantes

$$\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}'_k \quad (3.50)$$

$$\sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(E'_{ij} \mathcal{P}_{2ijk} E_{ij}) < \gamma_2^2 \quad (3.51)$$

$$\mathbb{N}'_{1ij} \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{2ijk} \\ \mathcal{P}_{2ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{1ij} < -\mathbb{N}'_{2j} \mathbb{N}_{2j} + \mathbb{N}'_3 \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \mathbb{N}_3 \quad (3.52)$$

$\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$, où

$$\mathbb{N}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_j \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_{2j} = \begin{bmatrix} C_{21} & D_{21j} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_3 = \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisants tels que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$. \square

Preuve. La preuve de cette proposition suit les mêmes lignes que la preuve de la proposition 2.5. \blacksquare

Nous terminons ce paragraphe en donnant, comme pour les sections précédentes, des résultats relatifs à la commande \mathcal{H}_2 par retour de sortie indépendant du mode du système (3.38).

Corollaire 3.6 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{2i} = \mathcal{P}'_{2i} > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > 0$ vérifiant les contraintes

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}' \quad (3.53)$$

$$\sum_i \mu_i \text{tr}(E'_i \mathcal{P}_{2i} E_i) < \gamma_2^2 \quad (3.54)$$

$$\mathbb{N}'_{1i} \begin{bmatrix} \Theta_i & \mathcal{P}_{2i} \\ \mathcal{P}_{2i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{1i} < -\mathbb{N}'_{2i} \mathbb{N}_{2i} + \mathbb{N}'_{3i} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{3i} \quad (3.55)$$

$\forall i \in H$, où

$$\mathbb{N}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_i & B_i \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_{2i} = \begin{bmatrix} C_{21i} & D_{21i} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_{3i} = \begin{bmatrix} C_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est un ensemble de gains stabilisants tels que $\|\varphi_{MJLS}\|_2 < \gamma_2$. \diamond

3.2.3.3 Synthèse multi-objectifs

Le problème de synthèse multi-objectifs tend à trouver des correcteurs stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant en même temps des performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Le problème de synthèse multi-critères est formulé comme suit :

Soient γ_∞ et γ_2 deux niveaux donnés de performances \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2 respectivement. Le problème de synthèse multi-critères consiste à trouver des gains de retour de sortie \mathcal{K}_k stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et telles que

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \|w\|_2$$

$$\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$$

Le résultat de synthèse multi-objectifs est évident. Il suffit en effet de trouver des gains de retour de sortie satisfaisant les différentes inégalités matricielles données par les propositions 3.6 et 3.7. Cela se résume par le corollaire suivant.

Corollaire 3.7 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ijk}$, \mathcal{P}_{2ijk} , $\mathbb{X}_k \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{S}^r$ vérifiant les contraintes (3.44)-(3.45) et (3.51)-(3.52), alors les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisants assurant les niveaux de performances requis. \diamond

Tous les problèmes de synthèse abordés dans ce travail (stabilisation exponentielle interne, stabilisation stochastique, commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) sous le formalisme ellipsoïdes de matrices, sont formulés comme des problèmes de faisabilité d'inégalités matricielles. En effet, ils sont tous équivalents à trouver des solutions admissibles $(\mathcal{Q}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k)$ pour des contraintes pouvant s'écrire sous la forme générale

$$\mathcal{F}(\mathcal{Q}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k) < 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}_k' \quad (3.56)$$

où \mathcal{Q}_{ijk} représentent les matrices de Lyapunov $\mathcal{P}_{\bullet ij k}$ et $\mathcal{F}(\cdot)$ est un opérateur matriciel linéaire. Les contraintes $\mathcal{F}(\mathcal{Q}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k) < 0$ sont convexes et il existe des outils numériques très performants pour la résolution de ce type de contraintes LMI. La difficulté principale provient des contraintes sous formes d'inégalités matricielles non linéaires $\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}_k'$, ce qui rend le problème de synthèse non convexe.

3.2.3.4 Prise en compte de la non convexité du problème

Les exemples numériques sont résolus en utilisant un algorithme itératif du premier ordre. Ce dernier est basé sur une technique de complémentarité sur le cône (CCL) [GOA97], permettant la prise en compte des contraintes non convexes et cela en les incluant dans le critère d'un problème d'optimisation convexe. Avant d'établir un tel algorithme, nous introduisons dans un premier temps un résultat permettant de transformer le problème de faisabilité (3.56) en un problème d'optimisation non convexe équivalent.

Lemme 3.1 Le problème (3.56) est faisable si et seulement si zéro est l'optimum globale du problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min & \text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{S}) \\ \text{t.q.} & \mathcal{F}(\mathcal{Q}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k) < 0 \\ & \mathbb{X}_k \leq \widehat{\mathbb{X}}_k \quad \mathcal{S}_k = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{X}}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \mathcal{T}_{1k} \geq \mathbb{I} \quad \mathcal{T}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{1k} & \mathcal{T}_{2k} \\ \star & \mathcal{T}_{3k} \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

où

$$\mathbb{S} = \text{diag}\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r\}, \quad \mathbb{T} = \text{diag}\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r\}$$

◇

Preuve. Avec les contraintes $\mathcal{T}_k \geq 0$ et $\mathcal{S}_k \geq 0$, nous avons $\mathbb{T} \geq 0$ et $\mathbb{S} \geq 0$ ce qui induit l'implication suivante

$$\text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{S}) = 0 \Rightarrow \mathbb{T}\mathbb{S} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{T}_k \mathcal{S}_k = \mathbf{0}, \quad \forall k \in R \quad (3.58)$$

Cela conduit après quelques manipulations matricielles à la relation suivante

$$\widehat{\mathbb{X}}_k = -\mathcal{T}_{1k}^{-1} \mathcal{T}_{2k} \mathbb{Y}_k' = -\mathcal{T}_{1k}^{-1} (-\mathcal{T}_{1k} \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1}) \mathbb{Y}_k' = \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}_k'$$

Les contraintes non linéaires sont ainsi satisfaites

$$\mathbb{X}_k \leq \widehat{\mathbb{X}}_k = \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}'_k$$

L'implication inverse se déduit en choisissant $\widehat{\mathbb{X}}_k = \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}'_k$ et \mathbb{T}_k tel que $\mathbb{T}_k \mathbb{S}_k = 0, \forall k \in R$. ■

Comme dans [GOA97, PA05], le problème d'optimisation (3.57) peut alors être résolu en utilisant un algorithme de gradient conditionnel du premier ordre aussi connu comme la méthode de direction faisable de Franck et Wolfe. Les propriétés de cet algorithme ne sont pas rappelées ici. Notons seulement que cet algorithme se base sur la relaxation du critère non linéaire $\text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{S})$ en un critère linéaire $\text{tr}(\mathbb{T}_h\mathbb{S} + \mathbb{T}\mathbb{S}_h)$. Le problème d'optimisation LMI ainsi obtenu est exécuté itérativement où \mathbb{T}_h et \mathbb{S}_h sont les solutions du problème d'optimisation à l'itération précédente. La séquence $\text{tr}(\mathbb{T}_h\mathbb{S}_h)$ est alors décroissante. Cependant, il n'existe aucune garantie de convergence de l'algorithme vers un optimum globale.

Remarque 3.6 [PA05] Le critère d'arrêt habituellement utilisé dans les algorithmes d'optimisation de type gradient est soit lié à une vitesse de convergence faible (slow progress) de l'objectif d'optimisation ou à la satisfaction du critère $\text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{S}) = 0$. Dans le premier cas, l'algorithme échoue du fait d'un comportement *plat* ou d'une convergence vers un optimum local non satisfaisant. Le second cas correspond à la convergence de l'algorithme vers l'optimum globale. Cependant, et dus aux contraintes $\mathbb{T} \geq \mathbf{0}$ et $\mathbb{S} \geq \mathbf{0}$, l'algorithme sera en réalité stoppé dans le cas où $\text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{S}) = \epsilon$ où ϵ est un niveau de précision fixé. La contrainte non linéaire peut dans ce cas, ne pas être satisfaite, ce qui représente une faiblesse significative de l'algorithme.

Néanmoins, sachant que les contraintes faisant apparaître les variables $\widehat{\mathbb{X}}_k$ ne sont pas l'objectif du problème originel (3.56), dans les exemples numériques présentés ci-dessous nous adoptons les critères d'arrêts suivants

- si $\text{tr}(\mathbb{T}_{h-1}\mathbb{S}_{h-1} - \mathbb{T}_h\mathbb{S}_h < \epsilon)$, alors STOP, l'algorithme a échoué.
- si $\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}'_k, \forall k \in R$, STOP, les ellipsoïdes de matrices ont été trouvés.

L'algorithme de type complémentarité sur le cône est donné comme suit

Algorithme CCL :

- i) Trouver une solution faisable $\mathbb{X}_{k0}, \mathbb{Y}_{k0}, \mathbb{Z}_{k0}, \widehat{\mathbb{X}}_{k0}, \mathcal{Q}_{ijk0}, \mathbb{T}_0, \mathbb{S}_0$. Si il n'existe pas de solution, STOP, l'algorithme a échoué. $h = 0$;
- ii) $\mathbf{V}_h = \mathbb{S}_h, \mathbf{W}_h = \mathbb{T}_h$, et trouver $\mathbb{X}_{k(h+1)}, \mathbb{Y}_{k(h+1)}, \mathbb{Z}_{k(h+1)}, \widehat{\mathbb{X}}_{k(h+1)}, \mathcal{Q}_{ijk(h+1)}, \mathbb{T}_{h+1}, \mathbb{S}_{h+1}, \mathbb{T}_{h+1}$

solutions du problème LMI

$$\begin{cases} \min & \text{tr}(\mathbf{V}_h \mathbb{T} + \mathbf{W}_h \mathbb{S}) \\ \text{t.q.} & \mathcal{F}(\mathcal{Q}_{ijk}, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k) < 0 \\ & \mathbb{X}_k \leq \widehat{\mathbb{X}}_k \quad \mathcal{S}_k = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{X}}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \mathcal{T}_{1k} \geq \mathbb{I} \quad \mathcal{T}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{1k} & \mathcal{T}_{2k} \\ \star & \mathcal{T}_{3k} \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

iii) si $\text{tr}(\mathbb{T}_{h-1} \mathbb{S}_{h-1} - \mathbb{T}_h \mathbb{S}_h < \varepsilon)$, alors STOP, l'algorithme a échoué.

iv) si $\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}_k'$, $\forall k \in R$, STOP, les ellipsoïdes de matrices ont été trouvés. Sinon, $h = h + 1$ et retourner à l'étape ii).

3.2.3.5 Exemples numériques

a) Commande tolérante aux défauts

La stratégie de commande multi-objectifs par retour de sortie statique développée dans cette partie est illustrée en utilisant un exemple aéronautique. Soit le système nominal défini par la représentation d'état suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0565 & 29.072 & -175.610 & 9.6783 & 1.6022 \\ -0.0601 & -0.7979 & -0.2996 & 0 & 0 \\ 9.218 \times 10^{-3} & -0.0179 & -0.1339 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.1339 & 0.1339 & 2.0092 \\ 2.3491 & -2.3491 & 0.7703 \\ 0.0444 & -0.0444 & -1.3575 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{W}_1 = 0.1 \times \mathbb{I}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce modèle est adapté de [MJH04]. Il représente les dynamiques directionnelles-latérales d'un 'McDonnell F-4C Phantom' volant à Mach 0.6 et à une altitude de 35000 pieds. Les variables d'état x_i , $i = 1, \dots, 5$ représentent

x_1 : la vitesse latérale (pieds par seconde) ;

- x_2 : vitesse de roulis (radian par seconde) ;
- x_3 : vitesse de lacet (radian par seconde) ;
- x_4 : angle de roulis (radian) ;
- x_5 : angle de lacet (radian).

Les entrées de commande u_1 , u_2 et u_3 correspondent respectivement à l'aileron gauche, l'aileron droit et au déplacement du gouvernail de direction.

Pour des fins d'illustration, nous considérons deux modes défectueux :

- **Mode 2** : Une perte de puissance de 50% sur l'aileron gauche ;
- **Mode 3** : Perte totale de l'aileron droit.

Il s'en suit que $S = \{1, 2, 3\}$, où le **mode 1** représente le cas nominale (sans défauts). Le processus défaut est supposé Markovien. Le processus FDI est aussi Markovien avec $R = \{1, 2, 3\}$.

Les taux de transition du processus défaut actionneur sont donnés par :

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.0010 & 0.0010 \\ 0.0010 & -0.002 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0010 & -0.002 \end{bmatrix}$$

Les taux de transition du processus FDI sont donnés comme suit

$$[\lambda_{ij}^1] = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 & 0.01 \\ 1.00 & -1.01 & 0.01 \\ 1.00 & 0.01 & -1.01 \end{bmatrix}, \quad [\lambda_{ij}^2] = \begin{bmatrix} -1.01 & 1.00 & 0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 1.00 & -1.01 \end{bmatrix},$$

$$[\lambda_{ij}^3] = \begin{bmatrix} -1.01 & 0.01 & 1.00 \\ 0.01 & -1.01 & 1.00 \\ 0.01 & 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}.$$

Pour le système décrit ci-dessus, plusieurs essais ont été réalisés en utilisant l'algorithme **CCL**. Ces différents essais correspondent à différentes spécifications sur les niveaux de performances \mathcal{H}_∞ (γ_∞) et \mathcal{H}_2 (γ_2). Le tableau 3.1 décrit quelques uns de ces tests où

- **iter** : nombre d'itérations de l'algorithme ;
- **time** : temps de calcul (LMIs résolues avec la LMI toolbox, MATLAB 6.5.1) ;
- **Tr(TS)** : valeur du critère d'optimisation $\text{Tr}(\mathbb{T}_h \mathbb{S}_h)$ à l'itération où l'algorithme s'est arrêté ;
- \mathcal{K}_{k0} , $k \in R$: correcteurs obtenus comme centres des ellipsoïdes de matrices.

La méthode de synthèse ainsi mise en oeuvre nous permet d'avoir des ensembles de gains décrits par des ellipsoïdes. Tous les éléments de ces ellipsoïdes garantissent les mêmes propriétés. Cela est illustré par la figure (3.9) où les ellipsoïdes externes correspondent au test 1 et les ellipsoïdes internes

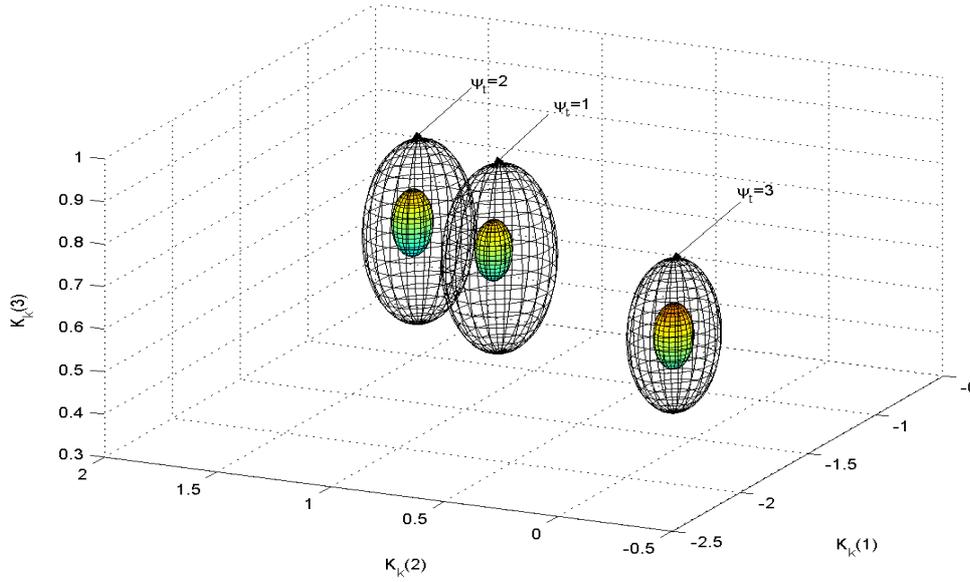


FIG. 3.9 – Ellipsoïdes de gains de retour de sortie

correspondent au test 3. Ces ellipsoïdes peuvent être utilisées par exemple, pour l'évaluation de la résilience du système en boucle fermée (voir **chapitre 2**).

b) Commande indépendante du mode du MJLS

Nous avons appliqué la stratégie de commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie statique à un modèle d'hélicoptère VTOL adapté de [dFGdVC00]. La dynamique du système considéré peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} dx_t = A(\phi_t)x_t dt + B(\phi_t)u(y_t, t)dt + Ew_t dt + \mathbb{W}_1 x_t d\varpi_t \\ y_t = C_2 x_t \\ z_{\infty t} = C_{\infty 1} x_t + D_{\infty 1} u(y_t, t) \\ z_{2t} = C_{21} x_t + D_{21} u(y_t, t) \end{cases}$$

où ϕ_t indique la vitesse du vent. Les différentes matrices d'état du système sont données par :

$$A(\phi_t) = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & a_{32}(\phi_t) & -0.707 & a_{34}(\phi_t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\phi_t) = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ b_{21}(\phi_t) & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

| test | γ_∞^2 | γ_2^2 | iter | time(s) | Tr(TS) | \mathcal{K}'_{10} | \mathcal{K}'_{20} | \mathcal{K}'_{30} |
|------|-------------------|--------------|------|----------|-------------|---|---|--|
| 1 | 20 | 20 | 3 | 53.1270 | 978.9951 | $\begin{bmatrix} -1.1923 & 1.0420 & 0.5950 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.9980 & 1.5119 & 0.5902 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1.9197 & -0.1601 & 0.6304 \end{bmatrix}$ |
| 2 | 10 | 10 | 3 | 53.2570 | 1.0339e+003 | $\begin{bmatrix} -1.1918 & 1.0498 & 0.6004 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.9890 & 1.5242 & 0.5948 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1.9242 & -0.1638 & 0.6306 \end{bmatrix}$ |
| 3 | 5 | 5 | 3 | 54.6480 | 1.2628e+003 | $\begin{bmatrix} -1.1936 & 1.0668 & 0.6126 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.9812 & 1.5498 & 0.6049 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1.9408 & -0.1704 & 0.6338 \end{bmatrix}$ |
| 4 | 1 | 1 | 7 | 191.5250 | 7.9193e+006 | échec | échec | échec |

TAB. 3.1 – Tests

$$\mathbb{W}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le comportement du processus ϕ_t est modélisé par une chaîne de Markov à trois états correspondant à des vitesses de vent de 135 (valeur nominale), 60 et 170 Knots. Les valeurs des différents paramètres a_{32} , a_{34} , et b_{32} sont données par le tableau 3.2.

| Airspeed (Knots) | a_{32} | a_{34} | b_{21} |
|------------------|----------|----------|----------|
| 135 | 0.3681 | 1.4200 | 3.5446 |
| 60 | 0.0664 | 0.1198 | 0.9775 |
| 170 | 0.5047 | 2.5460 | 5.1120 |

TAB. 3.2 – Paramètres

La matrice de transition est donnée par :

$$\Xi = \begin{bmatrix} -0.0907 & 0.0671 & 0.0236 \\ 0.0671 & -0.0671 & 0 \\ 0.0236 & 0 & -0.0236 \end{bmatrix}$$

Comme pour l'exemple précédent, plusieurs essais ont été réalisés en utilisant l'algorithme **CCL**. Ces différents essais correspondent à différentes spécifications sur les niveaux de performances \mathcal{H}_∞ (γ_∞) et \mathcal{H}_2 (γ_2). Le tableau 3.3 décrit quelques uns de ces tests où \mathcal{K}_0 est le gain de retour de sortie obtenu comme centre de l'ellipsoïde de matrices.

| test | γ_∞^2 | γ_2^2 | iter | time(s) | Tr(TS) | \mathcal{K}'_0 |
|------|-------------------|--------------|------|---------|-------------|--|
| 1 | 10 | 10 | 3 | 3.2150 | 41.1558 | $\begin{bmatrix} 0.7073 & -0.5424 \end{bmatrix}$ |
| 2 | 5 | 5 | 3 | 3.3350 | 41.7471 | $\begin{bmatrix} 0.6984 & -0.5379 \end{bmatrix}$ |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 3.1940 | 105.8766 | $\begin{bmatrix} 0.5201 & -0.4358 \end{bmatrix}$ |
| 4 | 0.5 | 0.5 | 9 | 12.8080 | 9.3888e+003 | échec |

TAB. 3.3 – Tests

L'évolution des trajectoires d'états du système en boucle fermée résultant du correcteur obtenu est illustrée par la figure 3.10. Ces trajectoires correspondant au test 3 et à la réalisation du processus Markovien ϕ_t donnée par la figure 3.11. La figure 3.12 représente l'évolution des sorties commandées

$z_{\infty t}$. Nous pouvons voir à travers ces différentes figures que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint et que le système en boucle fermée est stochastiquement stable.

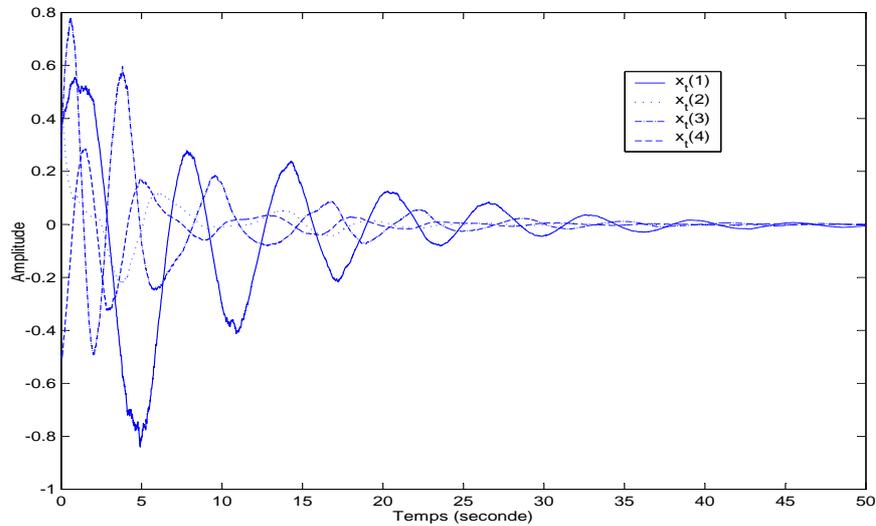


FIG. 3.10 – Evolution des variables d'états : une seule réalisation du processus aléatoire

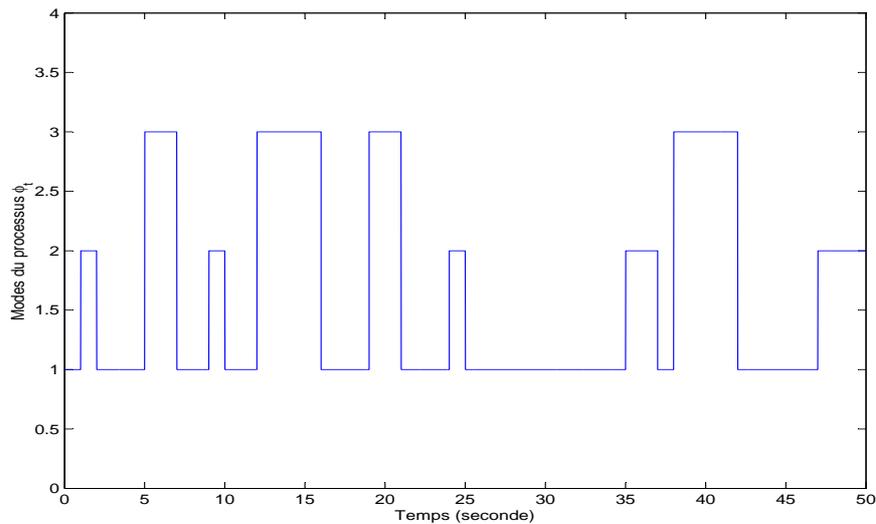


FIG. 3.11 – Evolution du processus ϕ_t

3.3 Retour dynamique de sortie

Dans ce qui suit, des résultats portant sur la commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ par retour dynamique de sortie des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens sont développés. Les premiers résultats exposés se basent sur une formulation LMI du problème de commande. Cette formulation se révèle être inadaptée en pratique. En effet, les correcteurs résultant de cette approche dépendent des processus défauts et sont donc irréalisables. Une première alternative est alors de reformuler le problème de commande par

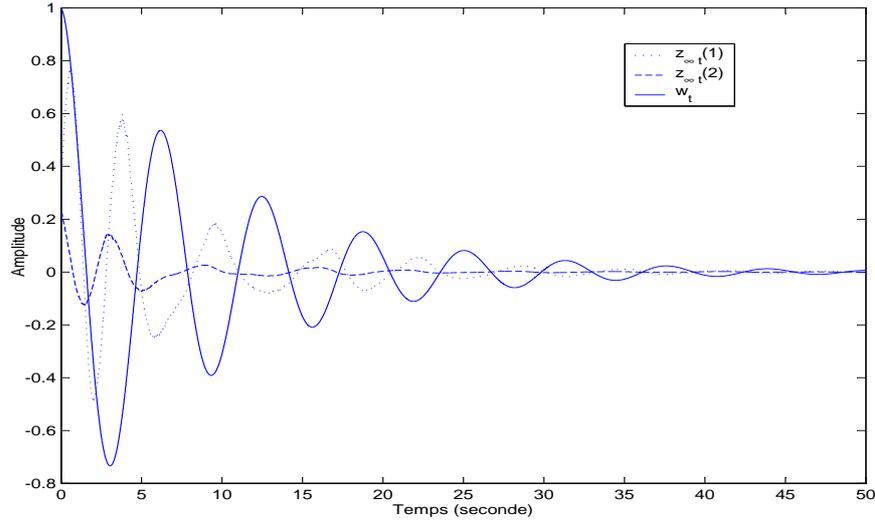


FIG. 3.12 – Evolution des sorties $z_{\infty t}$: une seule réalisation du processus aléatoire

retour dynamique de sortie en un problème de commande par retour statique de sortie et d'appliquer ainsi les différents résultats obtenus dans les sections précédentes.

Après la mise en évidence des limites de l'approche LMI, une formulation BMI du problème de commande multi-objectifs sera introduite. Un algorithme de type descente conjuguée du gradient sera proposé pour la résolution numérique de ces conditions et sera validé sur des exemples de simulation. Nous conclurons cette partie par une formulation NLMI de la problématique abordée. Nous montrerons à travers un exemple numérique les contraintes générées lors de la résolution numérique de ces conditions. Une première solution (relaxation) sera alors proposée et commentée.

3.3.1 Formulation LMI

Dans un premier temps, et en se basant sur la même méthodologie que celle utilisée pour la dérivation des résultats de stabilisation stochastique interne, nous allons introduire dans ce qui suit une caractérisation LMI de correcteurs par retour de sortie dynamique stabilisant stochastiquement le système tolérant aux défauts et assurant des performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Par soucis de clarté, et afin de faciliter la lecture de ce paragraphe, nous rappelons brièvement ci dessous le modèle dynamique de la classe de systèmes hybrides considérée. Ce dernier est décrit par les EDS suivantes :

$$\varphi : \begin{cases} \dot{x}_t = A(\xi_t)x_t + B(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) + E(\xi_t, \eta_t)w_t \\ y_t = C_2x_t + D_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = C_1x_t + D_1(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t) \end{cases} \quad (3.60)$$

Le correcteur dynamique d'ordre plein est donné comme suit

$$\varphi_c : \begin{cases} \dot{v}_t = A_c(\psi_t)v_t + B_c(\psi_t)y_t \\ u_t = C_c(\psi_t)v_t \end{cases} \quad (3.61)$$

où $A_c(\psi_t)$, $B_c(\psi_t)$ et $C_c(\psi_t)$ sont des matrices de dimensions appropriées.

La représentation d'état du système en boucle fermée est alors donnée par

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} \dot{\chi}_t = \Lambda(\xi_t, \eta_t, \psi_t)\chi_t + \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t \\ \bar{y}_t = \bar{C}_2(\psi_t)\chi_t + \bar{D}_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_t = \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t)\chi_t \end{cases} \quad (3.62)$$

où :

$$\begin{aligned} \chi_t &= [x'_t, v'_t]'; \bar{y}_t = [y'_t, u'_t]'; \Lambda(\xi_t, \eta_t, \psi_t) = \begin{bmatrix} A(\xi_t) & B(\eta_t)C_c(\psi_t) \\ B_c(\psi_t)C_2 & A_c(\psi_t) \end{bmatrix}; \\ \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t) &= \begin{bmatrix} E(\xi_t, \eta_t) \\ B_c(\psi_t)D_2(\xi_t, \eta_t) \end{bmatrix}; \bar{C}_2(\psi_t) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_c(\psi_t) \end{bmatrix}; \bar{D}_2(\xi_t, \eta_t) = \begin{bmatrix} D_2(\xi_t, \eta_t) \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \bar{C}_1(\eta_t, \psi_t) &= \begin{bmatrix} C_1 & D_1(\eta_t)C_c(\psi_t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

3.3.1.1 Commande \mathcal{H}_∞

Soit le système (3.60) avec

$$z_t = z_{\infty t} = C_{\infty 1}x_t + D_{\infty 1}(\eta_t)u(y_t, \psi_t, t)$$

où l'indice ' ∞ ' est relatif à des performances \mathcal{H}_∞ .

Dans ce paragraphe, nous abordons la problématique de caractérisation LMI de correcteurs dynamiques stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée, et garantissant un niveau de réjection de perturbations $\gamma_\infty > 0$, *i.e.* assurant la relation suivante pour tout $w \in L^2[0, \infty)$:

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty z'_{\infty t} z_{\infty t} dt \right\}^{1/2} < \gamma_\infty [\|w\|_2^2 + a(\chi_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)]^{1/2} \quad (3.64)$$

où γ_∞ représente le niveau d'atténuation des perturbations et $a(\chi_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$ est une constante dépendant des conditions initiales $(\chi_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$.

Avant de procéder, nous allons d'abord introduire quelques résultats préliminaires nécessaires à la dérivation de nos principaux résultats.

Proposition 3.8 Si il existe des matrices symétriques définies positives \mathcal{P}_{ijk} , $i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ telles que

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_{ijk}\mathcal{P}_{ijk} + P_{ijk}\tilde{\Lambda}_{ijk} + \bar{C}'_{\infty 1jk}\bar{C}_{\infty 1jk} + \gamma_\infty^{-2}\mathcal{P}_{ijk}\bar{E}_{ijk}\bar{E}'_{ijk}\mathcal{P}_{ijk} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih}\mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl}\mathcal{P}_{ilk} \\ + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij}\mathcal{P}_{ijv} < 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$

alors le système (3.62) est stochastiquement stable et vérifie

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} < [\gamma_\infty^2 \|w\|_2^2 + \chi_0^T \mathcal{P}(\xi_0, \eta_0, \psi_0) \chi_0]^{1/2}. \quad (3.66)$$

□

Preuve La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 3.2. ■

En se basant sur la proposition 3.8, le résultat suivant peut alors être énoncé

Proposition 3.9 La contrainte \mathcal{H}_∞ (3.65) est équivalente à (3.67)-(3.69)

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_{ijk} & (C_{\infty 1} \mathcal{Y}_{ijk} + D_{\infty 1j} \mathcal{F}_{ijk})' & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \\ \star & -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.67)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{ijk} & (\mathcal{X}_{ijk} E_{ij} + \mathcal{L}_{ijk} D_{2ij}) \\ \star & -\gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbb{I} \\ \star & \mathcal{X}_{ijk} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.69)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\phi}_{ijk} = \tilde{A}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{Y}_{ijk} \tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{F}'_{ijk} B'_j + B_j \mathcal{F}_{ijk} + \gamma_\infty^{-2} E_{ij} E'_{ij} \\ \bar{\theta}_{ijk} = \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} \tilde{A}_{ijk} + C'_2 \mathcal{L}'_{ijk} + \mathcal{L}_{ijk} C_2 \\ \quad + C'_{\infty 1} C_{\infty 1} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{X}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{X}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{X}_{ijv} \end{cases}$$

Les correcteurs (φ_c) correspondants sont donnés par

$$B_{cijk} = (\mathcal{Y}_{ijk}^{-1} - \mathcal{X}_{ijk})^{-1} \mathcal{L}_{ijk} \quad (3.70)$$

$$C_{cijk} = \mathcal{F}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} A_{cijk} = & (\mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{Y}_{ijk}^{-1})^{-1} \left[\tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} \tilde{A}_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} B_j \mathcal{F}_{ijk} + \mathcal{L}_{ijk} C_2 \mathcal{Y}_{ijk} + \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{Y}_{hjk}^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{Y}_{ilk}^{-1} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{Y}_{ijv}^{-1} \right) \mathcal{Y}_{ijk} + C'_{\infty 1} (C_{\infty 1} \mathcal{Y}_{ijk} + D_{\infty 1j} \mathcal{F}_{ijk}) + \gamma_\infty^{-2} (\mathcal{X}_{ijk} E_{ij} + \mathcal{L}_{ijk} D_{2ij}) \right] \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \\ & + 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

□

Preuve La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 2.7. ■

3.3.1.2 Commande \mathcal{H}_2

La formulation LMI du problème de commande \mathcal{H}_2 par retour dynamique de sortie du système (3.60) est résumée par la proposition suivante.

Proposition 3.10 Le problème de commande \mathcal{H}_2 par retour dynamique de sortie du système (3.60) est résolu par le problème d'optimisation convexe suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(\mathbf{Z}_{ijk}) \\ \text{t. q.} \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{ijk} & \mathbb{I} & E_{ij} \\ * & \mathcal{X}_{ijk} & \mathcal{X}_{ijk} E_{ij} + \mathcal{L}_{ijk} D_{2ij} \\ * & * & \mathbf{Z}_{ijk} \end{array} \right] > 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{Y}_{ijk} \tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{F}'_{ijk} B'_j + B_j \mathcal{F}_{ijk} & \mathcal{Y}_{ijk} C'_{21} + \mathcal{F}'_{ijk} D'_{21} & \mathcal{R}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \\ * & -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ * & * & \mathcal{S}_{ijk}(\mathcal{Y}_{ijk}) \end{array} \right] < 0 \\ \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} \tilde{A}'_{ijk} + C'_{21} \mathcal{L}'_{ijk} + \mathcal{L}_{ijk} C_2 + C'_{21} C_{21} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{X}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{X}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{X}_{ijv} < 0 \end{array} \right. \quad (3.73)$$

La paramétrisation LMI des correcteurs correspondants est donnée par (3.70), (3.71) et

$$\begin{aligned} A_{cijk} = & (\mathcal{X}_{ijk} - \mathcal{Y}_{ijk}^{-1})^{-1} \left[\tilde{A}'_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} \tilde{A}'_{ijk} \mathcal{Y}_{ijk} + \mathcal{X}_{ijk} B_j \mathcal{F}_{ijk} + \mathcal{L}_{ijk} C_2 \mathcal{Y}_{ijk} + \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} \mathcal{Y}_{hjk}^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} \mathcal{Y}_{ilk}^{-1} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \mathcal{Y}_{ijv}^{-1} \right) \mathcal{Y}_{ijk} + C'_{21} (C_{21} \mathcal{Y}_{ijk} + D_{\infty 1j} \mathcal{F}_{ijk}) \right] \mathcal{Y}_{ijk}^{-1} \\ & + 0.5 \mathbb{I} \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

□

Remarque 3.7 Les résultats exposés ci-dessus induisent les mêmes conclusions que celles obtenues pour la problématique de stabilisation exponentielle stochastique (**Remarque 2.9**). En effet, la formulation LMI du problème de commande conduit à des correcteurs dynamiques dépendant des processus Markoviens η_t , ξ_t et ψ_t . Cela rend ces correcteurs irréalisables en pratique. Néanmoins, et en adoptant la même méthodologie que dans [MJZ03], ces résultats peuvent être exploités pour l'étude des effets des imperfections du module de FDI sur la stabilité et le niveau de performance $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ du système tolérant aux défauts.

En s'appuyant sur le corollaire 2.8 le problème de synthèse de correcteurs dynamiques peut être transformé de façon équivalente en un problème de synthèse de correcteurs statiques. Les résultats donnés par les propositions 3.4 et 3.5 peuvent alors être appliqués.

3.3.2 Formulation BMI

Le système en boucle fermée résultant du couplage de (3.1) et de (3.61) s'écrit comme suit

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} d\chi_t = \Lambda(\xi_t, \eta_t, \psi_t)\chi_t dt + \bar{E}(\xi_t, \eta_t, \psi_t)w_t dt + \sum_{l=1}^v \bar{\mathbb{W}}_l(\xi_t, \eta_t)\chi_t d\varpi_{lt} \\ \bar{y}_t = \bar{C}_2(\psi_t)\chi_t + \bar{D}_2(\xi_t, \eta_t)w_t \\ z_{\infty t} = \bar{C}_{\infty 1}(\eta_t, \psi_t)\chi_t \\ z_{2t} = \bar{C}_{21}(\eta_t, \psi_t)\chi_t \end{cases} \quad (3.75)$$

où les différentes matrices sont données par (3.63) et $\bar{\mathbb{W}}_l(\xi_t, \eta_t) = \begin{bmatrix} \mathbb{W}_l(\xi_t, \eta_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

3.3.2.1 Commande \mathcal{H}_∞

Avant de présenter le résultat principal de ce paragraphe, nous introduisons le résultat préliminaire donné par la proposition 3.11.

Proposition 3.11 Si il existe des matrices symétriques définies positives $\mathcal{P}_{\infty ijk}$, $i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ telles que

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_{ijk}\mathcal{P}_{\infty ijk} + \mathcal{P}_{\infty ijk}\tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \bar{\mathbb{W}}'_{lij}\mathcal{P}_{\infty ijk}\bar{\mathbb{W}}_{lij} + \bar{C}'_{\infty 1jk}\bar{C}_{\infty 1jk} + \gamma_\infty^{-2}\mathcal{P}_{\infty ijk}\bar{E}_{ijk}\bar{E}'_{ijk}\mathcal{P}_{\infty ijk} \\ + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih}\mathcal{P}_{\infty hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl}\mathcal{P}_{\infty ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij}\mathcal{P}_{\infty ijk} < 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

alors le système (3.75) est stochastiquement stable et vérifie

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty z'_{\infty t} z_{\infty t} dt \right\}^{1/2} < \gamma_\infty \|w\|_2 \quad (3.77)$$

□

La formulation BMI du problème de commande \mathcal{H}_∞ par retour dynamique de sortie des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens est basée sur le lemme C.5 et la paramétrisation suivante des matrices de Lyapunov $\mathcal{P}_{\infty ijk}$:

$$\mathcal{P}_{\infty ijk} = \mathcal{M}'_k \mathcal{N}_{\infty ijk}^{-1} \mathcal{M}_k > 0 \quad (3.78)$$

où $\mathcal{N}_{\infty ijk}$ sont des matrices symétriques définies positives et \mathcal{M}_k sont des matrices non singulières.

La proposition suivante représente le résultat principal de cette section. Cette dernière se base sur la proposition 3.11 avec $\mathcal{P}_{\infty ijk}$ donnée par 3.78 et une paramétrisation adéquate des matrices \mathcal{M}_k et des matrices du correcteur dynamique.

Proposition 3.12 Si il existe des matrices $\mathbb{R}_k, \mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k$ et des matrices symétriques $\mathbb{N}_{\infty ijk}$, $i \in Z, j \in S$ et $k \in R$ telles que

$$\begin{bmatrix} \Omega_k + \Omega'_k & \star & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ijk} - \mathbb{N}_{\infty ijk} & \delta_{ijk} \mathbb{N}_{\infty ijk} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbb{E}'_{ijk} & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} & \star & \star \\ \mathbb{C}_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{I} & \star \\ \Xi_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Gamma_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.79)$$

où

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k & 0 \\ \mathbb{S}_k + \mathbb{D}_k & \mathbb{D}_k \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbb{A}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k A_i + \mathbb{R}_k B_j Z_k & \mathbb{R}_k B_j Z_k \\ \mathbb{S}_k A_i + \mathbb{Y}_k C_2 + \mathbb{X}_k + \mathbb{S}_k B_j Z_k & \mathbb{X}_k + \mathbb{S}_k B_j Z_k \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\mathbb{E}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k E_{ij} \\ \mathbb{S}_k E_{ij} + \mathbb{Y}_k D_{2ij} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\mathbb{C}_{ijk} = \begin{bmatrix} C_{\infty 1} + D_{\infty 1} Z_k & D_{\infty 1} Z_k \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\Gamma_{ijk} = \text{diag} \{ \mathbb{T}_{1ijk}, \mathbb{T}_{2ijk}, \mathbb{T}_{3ijk}, \mathbb{T}_{4ijk} \} \quad (3.84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{1ijk} = [\mathbb{N}_{\infty 1jk}, \dots, \mathbb{N}_{\infty (i-1)jk}, \mathbb{N}_{\infty (i+1)jk}, \dots, \mathbb{N}_{\infty zjk}] \\ \mathbb{T}_{2ijk} = [\mathbb{N}_{\infty i1k}, \dots, \mathbb{N}_{\infty i(j-1)k}, \mathbb{N}_{\infty i(j+1)k}, \dots, \mathbb{N}_{\infty isk}] \\ \mathbb{T}_{3ijk} = [\mathbb{N}_{\infty ij1}, \dots, \mathbb{N}_{\infty ij(k-1)}, \mathbb{N}_{\infty ij(k+1)}, \dots, \mathbb{N}_{\infty ijr}] \\ \mathbb{T}_{4ijk} = [\mathbb{N}_{\infty ijk}, \dots, \mathbb{N}_{\infty ijk}] \\ \Xi_{ijk} = [F_{1ijk}, F_{2ijk}, F_{3ijk}, F_{4ijk}]' \\ F_{1ijk} = [\sqrt{\pi_{i1}} \Omega'_k, \dots, \sqrt{\pi_{i(i-1)}} \Omega'_k, \sqrt{\pi_{i(i+1)}} \Omega'_k, \dots, \sqrt{\pi_{iz}} \Omega'_k] \\ F_{2ijk} = [\sqrt{\nu_{j1}} \Omega'_k, \dots, \sqrt{\nu_{j(j-1)}} \Omega'_k, \sqrt{\nu_{j(j+1)}} \Omega'_k, \dots, \sqrt{\nu_{js}} \Omega'_k] \\ F_{3ijk} = [\sqrt{\lambda_{k1}^{ij}} \Omega'_k, \dots, \sqrt{\lambda_{k(k-1)}^{ij}} \Omega'_k, \sqrt{\lambda_{k(k+1)}^{ij}} \Omega'_k, \dots, \sqrt{\lambda_{kr}^{ij}} \Omega'_k] \\ F_{4ijk} = [\Phi'_{1ijk}, \dots, \Phi'_{vijk}] \\ \Phi_{lijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k \mathbb{W}_{lij} & \mathbf{0} \\ \mathbb{S}_k \mathbb{W}_{lij} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \delta_{ijk} = - \left(\sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij} \right) \end{array} \right. \quad (3.85)$$

et $\mathbb{T}_{4ijk}, F_{4ijk}$ comportent v éléments. Alors, le système (3.75) est stochastiquement stable et vérifie (3.77).

Les matrices de fonctions de transferts des contrôleurs dynamiques correspondants sont données comme suit

$$H_k(s) = \mathbb{Z}_k (s\mathbb{I} - \mathbb{D}_k^{-1} \mathbb{X}_k)^{-1} \mathbb{D}_k^{-1} \mathbb{Y}_k, \quad \forall k \in R. \quad (3.86)$$

□

Preuve Nous allons montrer que si les inégalités (3.79) sont vérifiées, alors les correcteurs (3.86) assurent que les conditions (3.76) de la proposition 3.11 sont satisfaites pour une paramétrisation des matrices de Lyapunov $\mathcal{P}_{\infty ijk} > 0$ donnée par (3.78).

Notons que pour des matrices $\mathcal{P}_{\infty ijk} > 0$ données par (3.78), les inégalités (3.76) peuvent se réécrire comme suit

$$\Pi'_{ijk} \Upsilon_{ijk} \Pi_{ijk} < 0 \quad (3.87)$$

où

$$\Pi_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{N}_{\infty ijk}^{-1} \mathcal{M}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\Upsilon_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \mathbf{0} & \overline{\mathcal{C}}'_{\infty 1jk} & \mathcal{R}_{\infty ijk} \\ \mathcal{M}_k \Lambda_{ijk} & \delta_{ijk} \mathcal{N}_{\infty ijk} & \mathcal{M}_k \overline{E}_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathcal{S}_{\infty ijk} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{\infty ijk} = [\mathcal{R}_{\infty 1ijk}, \mathcal{R}_{\infty 2ijk}, \mathcal{R}_{\infty 3ijk}, \mathcal{R}_{\infty 4ijk}] \\ \mathcal{R}_{\infty 1ijk} = [\sqrt{\pi_{i1}} \mathcal{M}'_k, \dots, \sqrt{\pi_{i(i-1)}} \mathcal{M}'_k, \sqrt{\pi_{i(i+1)}} \mathcal{M}'_k, \dots, \sqrt{\pi_{iz}} \mathcal{M}'_k] \\ \mathcal{R}_{\infty 2ijk} = [\sqrt{\nu_{j1}} \mathcal{M}'_k, \dots, \sqrt{\nu_{j(j-1)}} \mathcal{M}'_k, \sqrt{\nu_{j(j+1)}} \mathcal{M}'_k, \dots, \sqrt{\nu_{js}} \mathcal{M}'_k] \\ \mathcal{R}_{\infty 3ijk} = [\sqrt{\lambda_{k1}^{ij}} \mathcal{M}'_k, \dots, \sqrt{\lambda_{k(k-1)}^{ij}} \mathcal{M}'_k, \sqrt{\lambda_{k(k+1)}^{ij}} \mathcal{M}'_k, \dots, \sqrt{\lambda_{kr}^{ij}} \mathcal{M}'_k] \\ \mathcal{R}_{\infty 4ijk} = [\overline{\mathbb{W}}'_{1ij} \mathcal{M}'_k, \dots, \overline{\mathbb{W}}'_{vij} \mathcal{M}'_k] \\ \mathcal{S}_{\infty ijk} = \text{diag} [\mathcal{S}_{\infty 1ijk}, \mathcal{S}_{\infty 2ijk}, \mathcal{S}_{\infty 3ijk}, \mathcal{S}_{\infty 4ijk}] \\ \mathcal{S}_{\infty 1ijk} = [\mathcal{N}_{\infty 1jk}, \dots, \mathcal{N}_{\infty (i-1)jk}, \mathcal{N}_{\infty (i+1)jk}, \dots, \mathcal{N}_{\infty zjk}] \\ \mathcal{S}_{\infty 2ijk} = [\mathcal{N}_{\infty i1k}, \dots, \mathcal{N}_{\infty i(j-1)k}, \mathcal{N}_{\infty i(j+1)k}, \dots, \mathcal{N}_{\infty isk}] \\ \mathcal{S}_{\infty 3ijk} = [\mathcal{N}_{\infty ij1}, \dots, \mathcal{N}_{\infty ij(k-1)}, \mathcal{N}_{\infty ij(k+1)}, \dots, \mathcal{N}_{\infty ijr}] \\ \mathcal{S}_{\infty 4ijk} = [\mathcal{N}_{\infty ijk}, \dots, \mathcal{N}_{\infty ijk}] \end{array} \right. \quad (3.90)$$

$\mathcal{S}_{\infty 4ijk}$ comporte v éléments.

Définissons des matrices non singulières \mathcal{U}_k et \mathcal{V}_k de dimension $n \times n$ telles que $\mathcal{U}_k \mathcal{V}_k = \mathbb{D}_k$ et soit la matrice \mathcal{M}_k paramétrisée comme suit

$$\mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_k^{-1} & \mathbb{R}_k^{-1} \mathcal{V}'_k \\ -\mathcal{U}_k^{-1} \mathbb{S}_k \mathbb{R}_k^{-1} & \mathcal{U}_k^{-1} \mathcal{V}'_k - \mathcal{U}_k^{-1} \mathbb{S}_k \mathbb{R}_k^{-1} \mathcal{V}'_k \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.91)$$

Définissons aussi la matrice \mathcal{T}_k telle que :

$$\mathcal{T}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{R}'_k & \mathbb{S}'_k \\ \mathbf{0} & \mathcal{U}'_k \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Notons que

$$\mathcal{M}_k^{-T} \mathcal{T}_k = \mathfrak{J}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathcal{V}_k & \mathcal{V}_k \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

et \mathcal{M}_k et \mathcal{T}_k sont non singulières. En effet, à partir de (3.79) il s'en suit que $\Omega_k + \Omega'_k < 0$, ce qui implique que les matrices \mathbb{R}_k et \mathbb{D}_k sont non singulières. Alors, et en considérant la définition des matrices \mathcal{U}_k et \mathcal{V}_k , les matrices \mathcal{T}_k et $\mathcal{M}_k^{-T} \mathcal{T}_k$ sont non singulières. Cela implique que les matrices \mathcal{M}_k^{-T} sont aussi non singulières.

Introduisons maintenant les matrices

$$\mathbb{F}_k = \text{diag} \{ \mathfrak{J}_k, \mathfrak{J}_k, \mathbb{I}, \mathbb{I}, \bar{\mathfrak{J}}_k \} \quad (3.94)$$

$$\bar{\mathfrak{J}}_k = \{ \mathfrak{J}_k, \dots, \mathfrak{J}_k \} \quad (3.95)$$

où $\bar{\mathfrak{J}}_k$ contient $((z-1) + (s-1) + (r-1) + v)$ matrices \mathfrak{J}_k .

En appliquant la transformation de congruence $\mathbb{F}'_k(\cdot)\mathbb{F}_k$ à la matrice Υ_{ijk} , l'inégalité (3.87) peut se réécrire d'une façon équivalente comme suit

$$\kappa' \mathbb{F}'_k \Upsilon_{ijk} \mathbb{F}_k \kappa < 0, \quad \kappa = \mathbb{F}_k^{-1} \Pi_{ijk} \varsigma, \quad \varsigma \neq 0 \quad (3.96)$$

en considérant

$$\{ \kappa : \kappa = \mathbb{F}_k^{-1} \Pi_{ijk} \varsigma, \quad \varsigma \neq 0 \} = \{ \kappa : \mathbb{H}_{ijk} \mathbb{F}_k \kappa = 0, \quad \kappa \neq 0 \} \quad (3.97)$$

où

$$\mathbb{H}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_k & -\mathcal{N}_{\infty ij k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

l'inégalité (3.96) est équivalente à

$$\kappa' \mathbb{F}'_k \Upsilon_{ijk} \mathbb{F}_k \kappa < 0, \quad \forall \kappa \neq 0 : \mathbb{H}_{ijk} \mathbb{F}_k \kappa = 0 \quad (3.99)$$

En s'appuyant sur le lemme C.5, (3.99) est vérifiée si et seulement si les inégalités suivantes sont faisables par rapport aux variables matricielles $\bar{\mathbb{L}}_{ijk}$ de dimensions appropriées

$$\mathbb{F}'_k \Upsilon_{ijk} \mathbb{F}_k + \bar{\mathbb{L}}_{ijk} \mathbb{H}_{ijk} \mathbb{F}_k + \mathbb{F}'_k \mathbb{H}'_{ijk} \bar{\mathbb{L}}'_{ijk} < 0 \quad (3.100)$$

Sans perte de généralité, réécrivons les matrices $\bar{\mathbb{L}}_{ijk}$ comme étant $\bar{\mathbb{L}}_{ijk} = \mathbb{F}'_k \mathbb{L}_{ijk}$, alors (3.100) est équivalente à

$$\mathbb{F}'_k (\Upsilon_{ijk} + \mathbb{L}_{ijk} \mathbb{H}_{ijk} + \mathbb{H}'_{ijk} \mathbb{L}'_{ijk}) \mathbb{F}_k < 0 \quad (3.101)$$

En définissant

$$\mathbb{L}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

les inégalités (3.101) se réécrivent de la façon suivante

$$\mathbb{F}'_k \bar{\Upsilon}_{ijk} \mathbb{F}_k < 0 \quad (3.103)$$

où

$$\bar{\mathbf{Y}}_{ijk} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_k + \mathcal{M}'_k & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{M}_k \Lambda_{ijk} - \mathcal{N}'_{\infty ijk} & \delta_{ijk} \mathcal{N}_{\infty ijk} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{E}}'_{ijk} \mathcal{M}'_k & -\gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} & \star & \star \\ \bar{\mathbf{C}}_{\infty 1jk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{I} & \star \\ \bar{\mathcal{R}}'_{\infty ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathcal{S}_{\infty ijk} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

Considérons la réalisation, dans l'espace d'état, des correcteurs dynamiques (3.61) donnée par les relations suivantes

$$A_{ck} = \mathcal{V}_k \mathbb{D}_k^{-1} \mathbb{X}_k \mathcal{V}_k^{-1}, \quad B_{ck} = \mathcal{V}_k \mathbb{D}_k^{-1} \mathbb{Y}_k, \quad C_{ck} = \mathbb{Z}_k \mathcal{V}_k^{-1} \quad (3.105)$$

et soit la matrice $\mathbb{N}_{\infty ijk}$ définie comme suit

$$\mathbb{N}_{\infty ijk} = \mathcal{T}'_k \mathcal{M}_k^{-1} \mathcal{N}_{\infty ijk} \mathcal{M}_k^{-T} \mathcal{T}_k \quad (3.106)$$

En effectuant les manipulations matricielles adéquates, il peut être aisément montré que

$$\mathcal{T}'_k \Lambda_{ijk} \mathcal{M}_k^{-T} \mathcal{T}_k = \mathbb{A}_{ijk}, \quad \mathcal{T}'_k \bar{\mathbf{E}}_{ijk} = \mathbb{E}_{ijk}, \quad \bar{\mathbf{C}}_{\infty 1jk} \mathcal{M}_k^{-T} \mathcal{T}_k = \mathbb{C}_{ijk} \quad (3.107)$$

$$\mathcal{T}'_k \mathcal{M}_k^{-T} \mathcal{T}_k = \Omega_k, \quad \bar{\mathcal{J}}'_k \mathcal{R}_{\infty ijk} \bar{\mathcal{J}}_k = \Xi'_{ijk} \quad (3.108)$$

$$\bar{\mathcal{J}}'_k \mathcal{S}_{\infty ijk} \bar{\mathcal{J}}_k = \Gamma_{ijk} \quad (3.109)$$

En prenant en compte les relations (3.94), (3.95) et (3.106)-(3.109), on peut aisément vérifier que la relation (3.103) est équivalente à la relation (3.79). L'inégalité (3.76) est donc vérifiée avec $\mathcal{P}_{\infty ijk} = \mathcal{M}'_k \mathcal{N}_{\infty ijk}^{-1} \mathcal{M}_k$. Finalement, Les matrices de fonctions de transferts des contrôleurs dynamiques (3.86) sont obtenues à partir de la relation (3.105). ■

Remarque 3.8 D'un point de vue pratique, les contrôleurs stabilisant le système en boucle fermée et assurant un niveau de réjection de perturbations optimal sont d'un très grand intérêt. De tels contrôleurs peuvent être obtenus en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\mathcal{O}_{\infty} : \begin{cases} \min_{\tau > 0, \mathbb{N}_{\infty ijk} = \mathbb{N}'_{\infty ijk} > 0, \mathbb{R}_k, \mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k} \tau \\ \text{t.q.} \\ \begin{bmatrix} \Omega_k + \Omega'_k & \star & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ijk} - \mathbb{N}_{\infty ijk} & \delta_{ijk} \mathbb{N}_{\infty ijk} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbb{E}'_{ijk} & -\tau \mathbb{I} & \star & \star \\ \mathbb{C}_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{I} & \star \\ \Xi_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Gamma_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

Où les contraintes LMI sont obtenues à partir des inégalités matricielles (3.79), en remplaçant γ_{∞}^2 par τ . Cela conduit au corollaire suivant :

Corollaire 3.8 Soient $\tau > 0$, $N_{\infty ijk} = N'_{\infty ijk} > 0$, $\mathbb{R}_k, \mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k$ les solutions du problème d'optimisation \mathcal{O}_{∞} . Alors, la loi de commande (3.61) stabilise stochastiquement le système (3.1) et assure un niveau de réjection de perturbations inférieur à $\sqrt{\tau}$. \diamond

Remarque 3.9 Les résultats ci-dessus peuvent être aisément étendus à une classe plus générale de contraintes quadratiques, à savoir les contraintes **SIQC**. Cela est illustré par les résultats suivants

Corollaire 3.9 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{ijk} = \mathcal{P}'_{ijk} > 0$, $i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ telles que

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{ijk}\bar{E}_{ijk} + \bar{C}'_{1jk}\mathbb{Q} & \bar{C}'_{1jk}\Delta \\ \star & \mathbb{V} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\Sigma \end{bmatrix} < 0 \quad (3.110)$$

où

$$\begin{cases} \mathbb{U} = \Delta\Sigma^{-1}\Delta' \\ \Theta_{ijk} = \tilde{\Lambda}'_{ijk}\mathcal{P}_{ijk} + \mathcal{P}_{ijk}\tilde{\Lambda}_{ijk} + \sum_{l=1}^v \bar{\mathbb{W}}'_{lij}\mathcal{P}_{ijk}\bar{\mathbb{W}}_{lij} + \sum_{\substack{h \in Z \\ h \neq i}} \pi_{ih}\mathcal{P}_{hjk} + \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq j}} \nu_{jl}\mathcal{P}_{ilk} + \sum_{\substack{v \in R \\ v \neq k}} \lambda_{kv}^{ij}\mathcal{P}_{ijv} \end{cases}$$

alors

$$J_{SIQC} < 0$$

où J_{SIQC} est donné par 3.19. \diamond

Corollaire 3.10 Si il existe des matrices $\mathbb{R}_k, \mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k$ et des matrices symétriques N_{ijk} , $i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$ telles que

$$\begin{bmatrix} \Omega_k + \Omega'_k & \star & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ijk} - N_{ijk} & \delta_{ijk}N_{ijk} & \star & \star & \star \\ \mathcal{C}_{ijk} & \mathbb{E}'_{ijk} & \mathbb{V} & \star & \star \\ \bar{\mathcal{C}}_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Sigma & \star \\ \Xi_{ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Gamma_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.111)$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{ijk} = \mathbb{Q}'\mathcal{C}_{ijk} \\ \bar{\mathcal{C}}_{ijk} = \Delta'\mathcal{C}_{ijk} \end{cases}$$

Alors, les contraintes quadratiques J_{SIQC} sont vérifiées.

Les matrices de fonctions de transferts des contrôleurs dynamiques correspondants sont données comme suit

$$H_k(s) = \mathbb{Z}_k (s\mathbb{I} - \mathbb{D}_k^{-1}\mathbb{X}_k)^{-1} \mathbb{D}_k^{-1}\mathbb{Y}_k, \quad \forall k \in R. \quad (3.112)$$

\diamond

Remarque 3.10 Le cas particulier de commande \mathcal{H}_{∞} par retour de sortie indépendant du mode des MJLS peut aussi être traité en utilisant la même méthodologie. En se basant sur les mêmes

arguments que ceux utilisés pour prouver la proposition 3.12, les résultats suivants peuvent être énoncés

Corollaire 3.11 Si il existe des matrices $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{D}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ et des matrices symétriques $\mathbb{N}_{\infty i}, i \in Z$ telles que

$$\begin{bmatrix} \Omega + \Omega' & \star & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_i - \mathbb{N}_{\infty i} & \delta_i \mathbb{N}_{\infty i} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbb{E}'_i & -\gamma_\infty^2 \mathbb{I} & \star & \star \\ \mathbb{C}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{I} & \star \\ \Xi_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Gamma_i \end{bmatrix} < 0 \quad (3.113)$$

où

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbf{0} \\ \mathbb{S} + \mathbb{D} & \mathbb{D} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{A}_i + \mathbb{R}\mathbb{B}_i\mathbb{Z} & \mathbb{R}\mathbb{B}_i\mathbb{Z} \\ \mathbb{S}\mathbb{A}_i + \mathbb{Y}\mathbb{C}_{2i} + \mathbb{X} + \mathbb{S}\mathbb{B}_i\mathbb{Z} & \mathbb{X} + \mathbb{S}\mathbb{B}_i\mathbb{Z} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\mathbb{E}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{E}_i \\ \mathbb{S}\mathbb{E}_i + \mathbb{Y}\mathbb{D}_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$\mathbb{C}_i = \begin{bmatrix} C_{\infty 1i} + D_{\infty 1i}\mathbb{Z} & D_{\infty 1i}\mathbb{Z} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$\Gamma_i = \text{diag} \{ \mathbb{T}_{1i}, \mathbb{T}_{2i} \} \quad (3.118)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}_{1i} = [\mathbb{N}_1, \dots, \mathbb{N}_{(i-1)}, \mathbb{N}_{(i+1)}, \dots, \mathbb{N}_h] \\ \mathbb{T}_{2i} = [\mathbb{N}_i, \dots, \mathbb{N}_i] \\ \Xi_i = [F_{1i}, F_{2i}]' \\ F_{1i} = [\sqrt{\Phi_{i1}}\Omega', \dots, \sqrt{\Phi_{i(i-1)}}\Omega', \sqrt{\Phi_{i(i+1)}}\Omega', \dots, \sqrt{\Phi_{ih}}\Omega'] \\ F_{2i} = [\Phi'_{1i}, \dots, \Phi'_{vi}] \\ \Phi_{li} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{W}_{li} & \mathbf{0} \\ \mathbb{S}\mathbb{W}_{li} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \delta_i = -\sum_{\substack{l \in H \\ l \neq i}} \Phi_{il} \end{array} \right. \quad (3.119)$$

et $\mathbb{T}_{2ijk}, F_{2ijk}$ comportent v éléments. Alors, le MJLS est stochastiquement stable et vérifie (3.77).

La matrice de fonctions de transferts du contrôleur dynamique correspondant est donnée comme suit

$$H(s) = \mathbb{Z} (s\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{X})^{-1} \mathbb{D}^{-1}\mathbb{Y}. \quad (3.120)$$

◇

Corollaire 3.12 Si il existe des matrices $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{D}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ et des matrices symétriques $\mathbb{N}_i, i \in Z$, telles que

$$\begin{bmatrix} \Omega + \Omega' & \star & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_i - \mathbb{N}_i & \delta_i \mathbb{N}_i & \star & \star & \star \\ \mathbb{C}_i & \mathbb{E}'_i & \mathbb{V} & \star & \star \\ \overline{\mathbb{C}}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Sigma & \star \\ \Xi_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Gamma_i \end{bmatrix} < 0 \quad (3.121)$$

où

$$\begin{cases} \mathbb{C}_i = \mathbb{Q}' \mathbb{C}_i \\ \overline{\mathbb{C}}_i = \Delta' \mathbb{C}_i \end{cases}$$

Alors, les contraintes quadratiques J_{SIQC} sont vérifiées.

La matrice de fonctions de transferts du contrôleur dynamique correspondant est donnée comme suit

$$H(s) = \mathbb{Z} (s\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{Y}. \quad (3.122)$$

◇

3.3.2.2 Commande \mathcal{H}_2

La Formulation BMI du problème de commande \mathcal{H}_2 par retour dynamique de sortie du système (3.1) est donnée par la proposition 3.13.

Proposition 3.13 Le problème de commande \mathcal{H}_2 par retour de sortie dynamique est résolu par le problème d'optimisation suivant

$$\mathcal{O}_2 : \begin{cases} \min_{\mathbf{Z}_{ijk}, \mathbb{N}_{2ijk}, \mathbb{R}_k, \mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k} \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(\mathbf{Z}_{ijk}) \\ \text{s.t :} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ijk} & \star \\ \mathbb{E}_{ijk} & \mathbb{N}_{2ijk} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} \Omega_k + \Omega'_k & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_{ijk} - \mathbb{N}_{2ijk} & \delta_{ijk} \mathbb{N}_{2ijk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{C}_{ijk} & \star & -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \Xi_{ijk} & \star & \star & -\Gamma_{ijk} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.123)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $k \in R$.

Les matrices de fonctions de transferts des contrôleurs dynamiques correspondant sont données comme suit

$$H_k(s) = \mathbb{Z}_k (s\mathbb{I} - \mathbb{D}_k^{-1} \mathbb{X}_k)^{-1} \mathbb{D}_k^{-1} \mathbb{Y}_k, \quad \forall k \in R. \quad (3.124)$$

□

Preuve La preuve de cette proposition s'appuie sur les mêmes lignes que celles de la proposition 3.12. ■

Nous concluons cette section en donnant un résultat de commande \mathcal{H}_2 par retour dynamique de sortie indépendant du mode pour la classe des systèmes MJLS.

Corollaire 3.13 Le problème de commande \mathcal{H}_2 par retour de sortie dynamique pour le MJLS est résolu par le problème d'optimisation suivant

$$\mathcal{O}_2 : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}_i, \mathbb{N}_{2i}, \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{D}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}} \sum_i \mu_i \text{tr}(\mathbf{Z}_i) \\ \text{t.q.} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_i & \star \\ \mathbb{E}_i & \mathbb{N}_{2i} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} \Omega + \Omega' & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_i - \mathbb{N}_{2i} & \delta_i \mathbb{N}_{2i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{C}_{ijk} & \star & -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \Xi_i & \star & \star & -\Gamma_i \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.125)$$

$\forall i \in \mathbb{Z}$.

La matrice de fonctions de transferts du contrôleur dynamique correspondant est donnée comme suit

$$H(s) = \mathbb{Z} (s\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{X})^{-1} \mathbb{D}^{-1}\mathbb{Y}. \quad (3.126)$$

□

3.3.2.3 Synthèse multi-objectifs

Le problème de synthèse multi-objectifs tend à trouver des correcteurs stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant en même temps des performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Le problème de synthèse multi-critères est formulé comme suit :

Soient α_2 et α_∞ deux scalaires positifs donnés. Le problème de synthèse multi-critères consiste à trouver des correcteurs dynamiques stabilisant le système en boucle fermée et solutions du problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min_{\gamma_2, \gamma_\infty, A_{ck}, B_{ck}, C_{ck}} \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_\infty \gamma_\infty \\ \text{t.q.} \\ \|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty, \quad \|w\|_2, \quad \|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2 \end{cases} \quad (3.127)$$

La solution de ce problème de commande revient donc à trouver des correcteurs dynamiques satisfaisant les différentes inégalités matricielles données dans les propositions 3.12 et 3.13.

3.3.2.4 Aspects numériques

Les différentes inégalités matricielles données par les propositions 3.12 et 3.13 ne sont pas linéaires en les variables de décision, il est donc difficile de les vérifier directement. Cependant, la paramétrisation donnée par ces conditions offre plusieurs avantages :

- La caractérisation donnée par les propositions 3.12 et 3.13 permettent une paramétrisation explicite des différentes matrices des correcteurs dynamiques (problem in *closed form* [GBdO99]);
- Le problème de commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ avec des matrices de sorties des correcteurs fixées (semblable au problème de commande énoncé dans [TIH96]), est un problème sous forme LMI;
- Pour \mathbb{Z}_k fixés, les conditions (3.79) et (3.123) sont sous forme LMI en les variables $\mathbf{Z}_{ijk}, \mathbf{N}_{\infty ijk}, \mathbf{N}_{2ijk}, \mathbb{R}_k, \mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k$;
- Pour \mathbb{R}_k et \mathbb{S}_k fixés, les conditions (3.79) et (3.123) sont sous forme LMI en les variables $\mathbf{Z}_{ijk}, \mathbf{N}_{\infty ijk}, \mathbf{N}_{2ijk}, \mathbb{D}_k, \mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k$.

Cela suggère une méthode de type décente coordonnée (**DC**). Cependant, comme il a été mentionné dans le chapitre 2, il est important de noter qu'il existe plusieurs algorithmes plus ou moins sophistiqués pour la résolution de problèmes BMI, et que le choix d'un algorithme de type décente coordonnée n'est ici justifié que par sa simplicité et pour des raisons d'illustrations, et non par rapport à ses performances.

Pour l'initialisation de cet algorithme, nous nous basons sur la même méthodologie que celle utilisée dans [KSVS04]. Un tel algorithme est donné comme suit :

Algorithme DC

- i) **Initialisation** : $q = 0$. Trouver des gains de retour d'états \mathbb{Z}_{kq} solutions du problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min_{\gamma_{2q}, \gamma_{\infty q}, \mathbb{Z}_{kq}} \alpha_2 \gamma_{2q} + \alpha_\infty \gamma_{\infty q} \\ \text{t.q.} \\ \|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_{\infty q}, \quad \|w\|_2, \quad \|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_{2q} \end{cases} \quad (3.128)$$

- ii) Fixer les matrices \mathbb{Z}_{kq} et trouver une solution du problème d'optimisation convexe (3.127) en termes des variables $\mathbf{Z}_{ijkq}, \mathbf{N}_{2ijkq}, \mathbf{N}_{\infty ijkq}, \mathbb{R}_{kq}, \mathbb{S}_{kq}, \mathbb{D}_{kq}, \mathbb{X}_{kq}, \mathbb{Y}_{kq}$. Fixer la valeur du critère d'optimisation $v_q = \alpha_2 \gamma_{2q} + \alpha_\infty \gamma_{\infty q}$.
- iii) Fixer les matrices \mathbb{R}_{kq} et \mathbb{S}_{kq} et trouver une solution du problème d'optimisation convexe (3.127) en termes des variables $\mathbf{Z}_{ijkq}, \mathbf{N}_{2ijkq}, \mathbf{N}_{\infty ijkq}, \mathbb{D}_{kq}, \mathbb{X}_{kq}, \mathbb{Y}_{kq}, \mathbb{Z}_{kq}$. Fixer la valeur du critère d'optimisation $\omega_q = \alpha_2 \gamma_{2q} + \alpha_\infty \gamma_{\infty q}$.
- iv) Si $v_q - \omega_q < \epsilon$, $\epsilon > 0$, STOP. Sinon, $q \leftarrow q + 1$ et retourner à l'étape ii).

Comme dans toute méthode de type décente coordonnée, l'algorithme ci dessus génère une séquence décroissante des valeurs de la fonction objectif. La convergence de l'algorithme est donc garantie. Cependant, il n'y a aucune garantie de convergence vers l'optimum global.

3.3.2.5 Exemple du VTOL

La stratégie de commande multi-objectifs par retour dynamique de sortie développée dans cette partie est illustrée en utilisant un modèle d'hélicoptère VTOL [dFGdVC00]. Soit le système nominal défini par la représentation d'état suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.707 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.0468 & 0 \\ 0.0457 & 0.0099 \\ 0.0437 & 0.0011 \\ -0.0218 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{W}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur d'état $x_t \in \mathbb{R}^4$ est composé de :

- x_1 : vitesse longitudinale ;
- x_2 : vitesse verticale ;
- x_3 : vitesse de tangage ;
- x_4 : angle de tangage.

et les composantes du vecteur de commande sont :

- u_1 : commande cyclique générale ;
- u_2 : commande cyclique longitudinale.

Nous supposons dans ce qui suit que le système est sujet à deux modes défectueux :

- **Mode 2** : Perte de puissance de 50% sur le premier actionneur ;
- **Mode 3** : Perte de puissance de 50% sur les deux actionneurs.

Nous avons alors $S = \{1, 2, 3\}$, où le **mode 1** représente le cas nominal. Le processus FDI est supposé Markovien avec $R = \{1, 2, 3\}$.

Les taux de transition du processus défaut actionneur sont donnés par :

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.0010 & 0.0010 \\ 0.0010 & -0.002 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0010 & -0.002 \end{bmatrix}$$

Les taux de transition du processus FDI sont donnés comme suit :

$$[\lambda_{ij}^1] = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 & 0.01 \\ 1.00 & -1.01 & 0.01 \\ 1.00 & 0.01 & -1.01 \end{bmatrix}, [\lambda_{ij}^2] = \begin{bmatrix} -1.01 & 1.00 & 0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 1.00 & -1.01 \end{bmatrix},$$

$$[\lambda_{ij}^3] = \begin{bmatrix} -1.01 & 0.01 & 1.00 \\ 0.01 & -1.01 & 1.00 \\ 0.01 & 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}.$$

Pour le système décrit ci-dessus, et en utilisant l'Algorithme **DC**, nous obtenons les performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ suivantes : $\gamma_2 = 1.3813$, $\gamma_\infty = 7.0430$.

Les correcteurs dynamiques correspondants sont donnés par :

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -4.5605 & 6.1141 & -0.7661 & -2.0089 & 4.6913 & -4.9146 \\ 1.2505 & -13.949 & 2.1057 & 2.8241 & -2.0707 & 10.8691 \\ -0.8586 & 9.0361 & -3.6110 & -6.1882 & 4.1034 & -6.6348 \\ 1.7167 & 0.8173 & 1.3675 & 0.6197 & -1.8753 & -1.2901 \\ \hline -0.5951 & -0.1871 & 0.3333 & 0.4416 & & \mathbf{0} \\ 0.0519 & 0.8206 & -0.6220 & -1.5290 & & \mathbf{0} \end{array} \right]_{\psi_t=1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -1.8554 & -0.8810 & -0.0395 & -0.5837 & 1.6635 & 0.9851 \\ -2.7850 & -8.6549 & 4.1078 & 3.8934 & -1.7314 & 5.2828 \\ 0.2180 & 2.2321 & -2.8481 & -4.2791 & 3.0771 & -1.2354 \\ 1.3433 & 3.3313 & 1.1581 & 0.1551 & -1.4002 & -3.4934 \\ \hline -0.6729 & 0.0591 & 0.1496 & 0.2176 & & \mathbf{0} \\ 2.4528 & 1.4950 & -2.1517 & -3.1308 & & \mathbf{0} \end{array} \right]_{\psi_t=2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -2.0190 & -0.9464 & 0.0742 & -0.4221 & 1.7047 & 0.9938 \\ -0.7222 & -6.3567 & 2.2273 & 1.2006 & -1.3945 & 4.5383 \\ -0.5881 & 0.9657 & -2.1838 & -3.2807 & 2.9401 & -0.5600 \\ 1.3238 & 3.2111 & 1.2362 & 0.1852 & -1.3741 & -3.4574 \\ \hline -0.7787 & 0.0063 & 0.2350 & 0.3908 & & \mathbf{0} \\ 1.8829 & 1.2999 & -1.9038 & -3.0831 & & \mathbf{0} \end{array} \right]_{\psi_t=3}$$

où

$$\left[\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline \star & \mathbf{0} \end{array} \right]_{\psi_t=i}$$

est une réalisation du correcteur (φ_d) pour $\psi_t = i$.

L'évolution des trajectoires d'état du système en boucle fermée résultant des correcteurs obtenus est illustrée par la figure 3.13. Ces trajectoires correspondent à une seule réalisation des processus

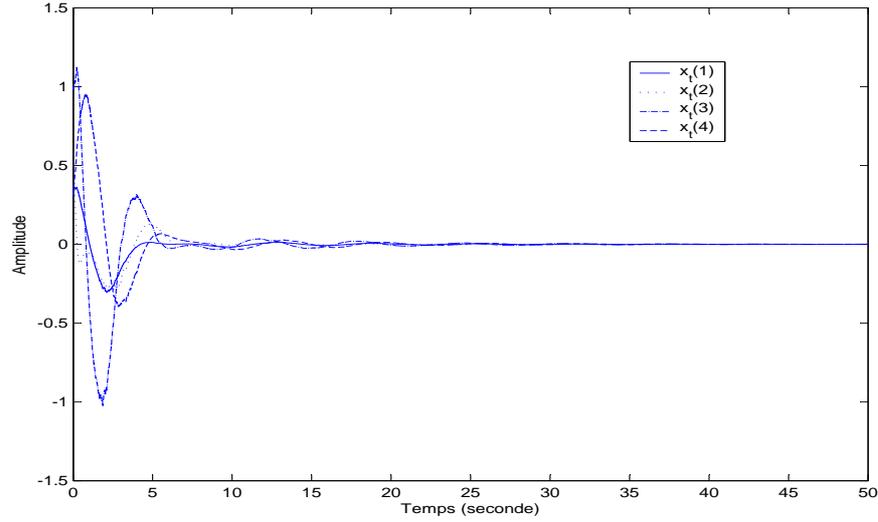


FIG. 3.13 – Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires

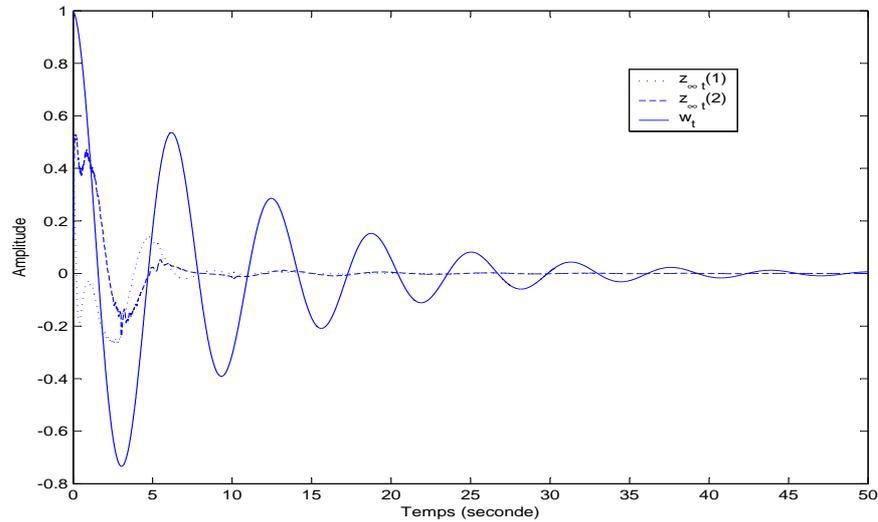


FIG. 3.14 – Evolution des sorties $z_{\infty t}$: une seule réalisation des processus aléatoires

Markoviens η_t et ψ_t . La figure 3.14 représente l'évolution des sorties commandées $z_{\infty t}$. Nous pouvons voir à travers ces différentes figures que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint et que le système en boucle fermée est stochastiquement stable.

3.3.3 Formulation NLMI

En suivant la même méthodologie que dans la section 3.2.3 et en s'appuyant sur le corollaire 2.8, les résultats suivants peuvent être énoncés

Corollaire 3.14 (Commande \mathcal{H}_{∞} des AFTCSMP) Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ijk} = \mathcal{P}'_{\infty ijk} > 0$,

$\mathbb{X}_k \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}'_k > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\tilde{\mathbb{M}}'_{1ij} \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{\infty ijk} \\ \mathcal{P}_{\infty ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{M}}_{1ij} < \tilde{\mathbb{M}}'_{2j} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{M}}_{2j} + \tilde{\mathbb{M}}'_{3ij} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{M}}_{3ij} \quad (3.129)$$

et les inégalités matricielles non linéaires

$$\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}'_k \quad (3.130)$$

$\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$, où

$$\tilde{\mathbb{M}}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{E}_{ij} & \tilde{B}_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{2j} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\infty 1} & \mathbf{0} & \tilde{D}_{\infty 1j} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{3ij} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{2ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisants tels que

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty z'_{\infty t} z_{\infty t} dt \right\}^{1/2} < \gamma_\infty \|w\|_2 \quad (3.131)$$

◇

Corollaire 3.15 (Commande \mathcal{H}_2 des AFTCSMP) Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{2ijk} = \mathcal{P}'_{2ijk} > 0$, $\mathbb{X}_k \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}'_k$ vérifiant les contraintes suivantes

$$\mathbb{X}_k \leq \mathbb{Y}_k \mathbb{Z}_k^{-1} \mathbb{Y}'_k \quad (3.132)$$

$$\sum_{i,j,k} \mu_{ijk} \text{tr}(\tilde{E}'_{ij} \mathcal{P}_{2ijk} \tilde{E}_{ij}) < \gamma_2^2 \quad (3.133)$$

$$\tilde{\mathbb{N}}'_{1ij} \begin{bmatrix} \Theta_{ijk} & \mathcal{P}_{2ijk} \\ \mathcal{P}_{2ijk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{N}}_{1ij} < -\tilde{\mathbb{N}}'_{2j} \tilde{\mathbb{N}}_{2j} + \tilde{\mathbb{N}}'_3 \begin{bmatrix} \mathbb{X}_k & \mathbb{Y}_k \\ \star & \mathbb{Z}_k \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{N}}_3 \quad (3.134)$$

$\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$, où

$$\tilde{\mathbb{N}}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{B}_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{N}}_{2j} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{21} & \tilde{D}_{21j} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{N}}_3 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors les $\{\mathbb{X}_k, \mathbb{Y}_k, \mathbb{Z}_k\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisants tels que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$. ◇

Corollaire 3.16 (Commande \mathcal{H}_∞ des MJLS) Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty i} = \mathcal{P}'_{\infty i} > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > 0$ vérifiant les contraintes LMIs suivantes

$$\tilde{\mathbb{M}}'_{1i} \begin{bmatrix} \Theta_i & \mathcal{P}_{\infty i} \\ \mathcal{P}_{\infty i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{M}}_{1i} < \tilde{\mathbb{M}}'_{2i} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{M}}_{2i} + \tilde{\mathbb{M}}'_{3i} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{M}}_{3i} \quad (3.135)$$

et les inégalités matricielles non linéaires

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (3.136)$$

$\forall i \in H$, où

$$\tilde{\mathbb{M}}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{E}_i & \tilde{B}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{2i} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\infty 1i} & \mathbf{0} & \tilde{D}_{\infty 1i} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{3i} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2i} & \tilde{D}_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est un ensemble de gains stabilisant stochastiquement le système (3.38) tel que

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty z'_{\infty t} z_{\infty t} dt \right\}^{1/2} < \gamma_\infty \|w\|_2 \quad (3.137)$$

◇

Corollaire 3.17 (Commande \mathcal{H}_2 des MJLS) Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{2i} = \mathcal{P}'_{2i} > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > 0$ vérifiant les contraintes

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}' \quad (3.138)$$

$$\sum_i \mu_i \text{tr}(\tilde{E}'_i \mathcal{P}_{2i} \tilde{E}_i) < \gamma_2^2 \quad (3.139)$$

$$\tilde{\mathbb{N}}'_{1i} \begin{bmatrix} \Theta_i & \mathcal{P}_{2i} \\ \mathcal{P}_{2i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{N}}_{1i} < -\tilde{\mathbb{N}}'_{2i} \tilde{\mathbb{N}}_{2i} + \tilde{\mathbb{N}}'_{3i} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \tilde{\mathbb{N}}_{3i} \quad (3.140)$$

$\forall i \in H$, où

$$\tilde{\mathbb{N}}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{N}}_{2i} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{21i} & \tilde{D}_{21i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{N}}_{3i} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est un ensemble de gains stabilisants tel que $\|\varphi_{\text{MJLS}}\|_2 < \gamma_2$. ◇

3.3.3.1 Exemples numériques

Reprenons l'exemple **b)** de la section 3.2.3.5. En appliquant l'algorithme **CCL** au problème de commande multi-objectifs par retour dynamique de sortie pour des niveaux de performances $\gamma_\infty^2 = \gamma_2^2 = 5$, nous obtenons les paramètres suivants :

$$\mathbb{K}_0 = \left[\begin{array}{cccc|cc} -0.8508 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -0.8508 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -0.8508 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -0.8508 & & \\ \hline & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & 0.1927 & \\ & & & & -0.3855 & \end{array} \right] \quad (3.141)$$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 0.1629 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0.1629 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0.1629 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0.1629 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 86.2908 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Y} = \begin{bmatrix} 0.2200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -123.9206 & 161.9495 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Z} = \begin{bmatrix} 0.2585 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0.2585 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0.2585 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0.2585 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 247.2609 & -197.8547 \\ * & * & * & * & * & 321.1858 \end{bmatrix}.$$

L'algorithme a donc convergé vers un correcteur statique $u_t = D_{c}y_t$. Cela est dû au fait que les différentes matrices du correcteur dynamique ne sont pas *explicitement* caractérisées par les conditions données par les corollaires 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17.

Une première solution à ce problème consisterait à *exclure* toute solution de la forme (3.141) et cela en fixant certaines variables de décisions et en résolvant le problème d'optimisation par rapport aux variables de décisions *libres*. Dans ce qui suit, nous exposons les résultats obtenus pour une paramétrisation de la matrice \mathbb{X} donnée comme suit

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{11} & \mathbf{C} \\ * & \mathbb{X}_{22} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{C} est une matrice constante de dimension appropriée.

En appliquant l'algorithme **CCL** avec cette nouvelle paramétrisation, nous obtenons le résultat suivant

$$\mathbb{K}_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} -1.0752 & -0.3514 & -0.2758 & -0.0268 & -0.0142 \\ -0.3514 & -1.3944 & -0.4282 & -0.0416 & -0.0220 \\ -0.2758 & -0.4282 & -1.1850 & -0.0327 & -0.0173 \\ -0.0268 & -0.0416 & -0.0327 & -0.8521 & -0.0017 \\ \hline & 0.0267 & 0.0415 & 0.0326 & 0.0032 & 0.2012 \\ & 0.0080 & 0.0124 & 0.0098 & 0.000 & -0.3820 \end{array} \right] \quad (3.142)$$

Cependant, il est important de noter que la démarche suivie ci-dessus n'a pour l'instant aucune justification théorique. Le pessimisme introduit par une telle méthodologie n'a lui aussi pas encore été évalué. En effet, ces aspects constituent l'une des problématiques à laquelle nous nous intéressons actuellement.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la commande multi-objectifs par retour de sortie des systèmes tolérant aux défauts à sauts Markoviens. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation stochastique du système en boucle fermée, des performances \mathcal{H}_2 ainsi que des performances \mathcal{H}_∞ . Deux structures de commande ont été proposées : les contrôleurs statiques par

retour de sortie, et les correcteurs dynamiques par retour de sortie.

Dans un premier temps nous avons proposé une caractérisation LMI des correcteurs statiques stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de réjection de perturbations $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimaux. Une caractérisation sous forme NLMI a été ensuite développée en adoptant un formalisme basé sur la synthèse d'ensemble ellipsoïdaux de correcteurs. Les conditions ainsi obtenues étant non convexes, un algorithme de type complémentarité sur le cône a été proposé pour leur résolution numérique. Ce dernier permet la prise en compte des contraintes non convexes et cela en les incluant dans le critère d'un problème d'optimisation convexe itératif. Les performances ainsi que les limitations de cet algorithme ont été illustrées aux travers d'exemples de simulation.

La problématique du retour dynamique de sortie a été considérée en seconde partie de chapitre. Nous avons d'abord proposé une caractérisation sous forme LMI des correcteurs dynamiques et cela en s'inspirant de résultats relatifs aux cas des systèmes déterministes. Après la mise en évidence des limites de l'approche LMI (cette caractérisation conduit à des correcteurs dépendant des processus défauts et donc irréalisables en pratique), une formulation BMI du problème de commande multi-objectifs a été introduite. Cette formulation se base sur l'utilisation d'une version du lemme de Finsler (**Lemme C.5**) et une paramétrisation particulière des différentes matrices de Lyapunov. Un algorithme de type descente conjuguée du gradient a été proposé pour la résolution numérique de ces conditions et a été validé sur des exemples de simulation.

Chapitre 4

Cas des systèmes à temps discret : application aux systèmes commandés par réseaux

Dans ce chapitre est abordé le problème de commande multi-objectifs par retour de sortie des systèmes à sauts Markoviens en temps discret. Deux axes sont développés, le premier concerne la commande multi-critères des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens en temps discret, et le second traite de la problématique des systèmes commandés par réseaux. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation stochastique du système en boucle fermée, des performances \mathcal{H}_2 ainsi que des performances \mathcal{H}_∞ .

Dans la première partie, on établit deux caractérisations NLMI de correcteurs statiques par retour de sortie stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. La première caractérisation s'appuie sur les travaux de [dOBG99] traitant de l'analyse de la stabilité robuste des systèmes LTI en temps discret. En effet, nous montrerons que dans ce contexte, la problématique résultant du fait que les gains des correcteurs tolérants aux défauts ne dépendent que de la décision du processus FDI est prise en compte de manière naturelle. Cela est dû au *découplage* entre les matrices de Lyapunov et les matrices du système introduit par ces conditions. La seconde caractérisation s'appuie sur le formalisme *ellipsoïdes de matrices* dont les avantages ont été énoncés dans les différents chapitres précédents. Les différentes conditions de synthèse étant établies en termes d'inégalités matricielles non linéaires, leur résolution numérique reste un problème délicat. Des algorithmes d'optimisation itératifs de type complémentarité sur le cône seront proposés et mis en oeuvre sur des exemples de simulation.

La seconde partie du chapitre est dédiée à la problématique de stabilisation stochastique et de commande multi-critères des systèmes commandés par réseaux sujets à des retards aléatoires et à des pannes pouvant affecter les différents composants du système. Les différents retards aléatoires induits par la présence d'un réseau de communication pouvant être modélisés par une chaîne de Markov à temps discret et à espace d'état fini [KOC⁺92, XHH00], cette problématique est alors considérée sous le formalisme (MJLS). Nous proposons là aussi une structure de commande par retour statique de

sortie, et nous montrerons que ce problème de synthèse représente un cas particulier intéressant du problème de synthèse traité en première partie de chapitre.

4.1 Introduction

Ce chapitre se divise en deux parties principales. La première a pour objectif d'étendre les résultats obtenus dans les chapitres précédents au cas des systèmes à temps discret, et la deuxième est consacrée à la problématique des systèmes commandés par réseaux de communications.

De manière similaire au cas des systèmes en temps continu, la problématique de synthèse en performance abordée dans le cadre des systèmes en temps discret s'inscrit là aussi dans un cadre de synthèse multi-objectifs. Plus particulièrement, nous nous intéressons à des critères de performances de type $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

La problématique de la commande \mathcal{H}_∞ par retour statique d'état des AFTCSMP en temps discret a été initialement considérée par [SBNG03]. Les principaux résultats sont donnés en termes de solutions d'équations de Riccati non standards. Les gains de retour ainsi obtenus dépendent des processus défauts, rendant ces résultats inapplicables en pratique. D'autre part, une recherche bibliographique a mis en évidence l'absence de résultats relatifs au problème de commande \mathcal{H}_2 dans le cadre des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens et en temps discret. Comme pour le cas continu, la première étape dans la résolution de cette problématique est donc de définir la norme \mathcal{H}_2 dans le cadre des AFTCSMP en temps discret. Cette définition se base sur les travaux de [CM98, CFM05] portant sur la commande \mathcal{H}_2 des MJLS en temps discret. La définition de la norme \mathcal{H}_2 des AFTCSMP introduite dans ce chapitre représente une généralisation de la norme \mathcal{H}_2 des MJLS. Les différentes normes ainsi définies, le problème de synthèse $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ peut alors être considéré dans un contexte stochastique. Afin de nous affranchir de l'hypothèse d'accessibilité du vecteur d'état, nous proposons une structure de commande par retour statique de sortie. Deux caractérisations sous forme NLMI des correcteurs stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ seront données. La première caractérisation se base sur les travaux de [dOBG99] traitant de l'analyse de la stabilité robuste des systèmes LTI en temps discret. Les conditions obtenues dans ces travaux introduisent une sorte de *découplage* entre les matrices de Lyapunov et les matrices du système. Ce *découplage* peut alors être utilisé afin de synthétiser des correcteurs ne dépendant que du processus FDI. La seconde caractérisation s'appuie sur le formalisme *ellipsoïdes de matrices* dont les avantages ont été énoncés dans les différents chapitres précédents. L'aspect résolution numérique des différentes conditions NLMI sera là aussi pris en compte et des algorithmes de type complémentarité sur le cône seront proposés. La validité des différents résultats théoriques obtenus sera illustrée à travers des exemples de simulation.

La seconde partie du chapitre est dédiée à la problématique des systèmes commandés par réseaux (NCSs pour Networked Control Systems). Plus particulièrement, nous nous intéresserons au problème de stabilisation stochastique et de commande multi-critères des systèmes commandés par réseaux sujets à des retards aléatoires et à des pannes pouvant affecter les différents composants du système. Cette problématique est considérée sous le formalisme (MJLS). En effet, et en se basant sur les travaux

de [KOC⁺92, XHH00], les différents retards aléatoires induits par la présence d'un réseau de communication peuvent être modélisés comme une chaîne de Markov à temps discret et à espace d'état fini. Le modèle ainsi obtenu appartient à la classe des systèmes à sauts Markoviens. Nous proposons là aussi une structure de commande par retour statique de sortie, et nous montrerons que le problème de synthèse dans le cadre des NCSs représente un cas particulier intéressant du problème de synthèse traité en première partie de chapitre. En effet, deux caractérisations des correcteurs statiques seront données : une caractérisation NLMI par *découplage* et une caractérisation NLMI par *ellipsoïdes de matrices*. Des algorithmes de type complémentarité sur le cône seront ensuite proposés et validés à travers des exemples de simulation.

4.2 Systèmes tolérants aux défauts

Cette première partie de chapitre est consacrée à la problématique de commande multi-objectifs des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens en temps discret. Avant d'établir nos principaux résultats, nous allons dans un premier temps définir le modèle dynamique de la classe de systèmes traitée, puis nous donnerons quelques définitions et résultats préliminaires afin de faciliter la lecture de cette partie.

4.2.1 Modèle dynamique

Afin de décrire la classe des systèmes à sauts Markoviens traitée dans cette partie, fixons dans un premier temps un espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) . Le modèle dynamique du système tolérant aux défauts à saut Markoviens, défini dans l'espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) , est décrit par les EDS suivantes :

$$\varphi : \begin{cases} x_{k+1} = A_x(\xi_k)x_k + B_u(\eta_k)u(y_k, \psi_k, k) + E_w(\xi_k, \eta_k)w_k \\ y_k = C_yx_k + D_y(\xi_k, \eta_k)w_k \\ z_k = C_zx_k + D_z(\eta_k)u(y_k, \psi_k, k) \end{cases} \quad (4.1)$$

où

- $x_k \in \mathbb{R}^n$: état du système ;
- $u(y_k, \psi_k, k) \in \mathbb{R}^r$: entrée de commande du système ;
- $y_k \in \mathbb{R}^q$: sortie mesurée du système ;
- $z_k \in \mathbb{R}^p$: sortie commandée du système ;
- $w_k \in \mathbb{R}^m$: perturbations externes ;
- ξ_k, η_k et ψ_k : processus défauts systèmes, défauts actionneurs et processus FDI, respectivement. ξ_k, η_k et ψ_k sont des processus Markoviens mesurables, séparables et à espaces d'états finis $Z = \{1, 2, \dots, s\}$, $S = \{1, 2, \dots, a\}$ et $R = \{1, 2, \dots, f\}$, respectivement ;
- $A_x(\xi_k), B_u(\eta_k), E_w(\xi_k, \eta_k), D_y(\xi_k, \eta_k)$ et $D_z(\eta_k)$: matrices aléatoires de dimensions appropriées.

En commande tolérante aux défauts par approche active, nous considérons que la loi de commande n'est fonction que du processus FDI. Dans ce contexte, nous définissons les compensateurs par retour

statique de sortie (φ_s) comme suit

$$\varphi_s : \left\{ u_k = \mathcal{K}(\psi_k)y_k \right. \quad (4.2)$$

En combinant (4.1) et (4.2), la représentation d'état du système en boucle fermée est donnée par :

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}(\xi_k, \eta_k, \psi_k)x_k + \bar{E}(\xi_k, \eta_k, \psi_k)w_k \\ y_k = C_y x_k + D_y(\xi_k, \eta_k)w_k \\ z_k = \bar{C}_z(\eta_k, \psi_k)x_k + \bar{D}_z(\xi_k, \eta_k, \psi_k)w_k \end{cases} \quad (4.3)$$

où

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\xi_k, \eta_k, \psi_k) & \bar{E}(\xi_k, \eta_k, \psi_k) \\ \bar{C}_z(\eta_k, \psi_k) & \bar{D}_z(\xi_k, \eta_k, \psi_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(\xi_k) & E_w(\xi_k, \eta_k) \\ C_z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u(\eta_k) \\ D_z(\eta_k) \end{bmatrix} \mathcal{K}(\psi_k) \begin{bmatrix} C_y & D_y(\xi_k, \eta_k) \end{bmatrix}$$

Les processus défauts et FDI :

ξ_k , η_k et ψ_k étant des processus Markoviens homogènes à temps discret et à espaces d'état finis, nous pouvons définir la probabilité de transition du processus défaut système comme suit

$$\alpha_{il} = P\{\xi_{k+1} = l \mid \xi_k = i\} \quad (4.4)$$

où $\alpha_{il} \geq 0$ et $\sum_{l \in Z} \alpha_{il} = 1$.

La probabilité de transition du processus défaut actionneur est donnée par

$$\beta_{jl} = P\{\eta_{k+1} = l \mid \eta_k = j\} \quad (4.5)$$

Sachant que $\xi_k = i$ et $\eta_k = j$, la probabilité de transition du processus FDI ψ_k est donnée par

$$\gamma_{vl}^{ij} = P\{\psi_{k+1} = l \mid \xi_k = i, \eta_k = j, \psi_k = v\} \quad (4.6)$$

4.2.2 Définitions et résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, nous allons dans un premier temps rappeler quelques définitions basiques, relatives à des notions de stabilité stochastique, puis nous introduirons quelques résultats préliminaires portant sur la stabilité en moyenne quadratique du système tolérant aux défauts.

Dans ce qui suit, et sans perte de généralité, nous supposerons que le point d'équilibre, $x = 0$, est la solution en laquelle les propriétés de stabilité sont examinées.

Définition 4.1 *Le système 4.1 avec $u_k = 0$ et $w_k = 0$ est dit*

1. *Stochastiquement stable (SS) si pour toute condition initiale $(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$, la relation suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)\|^2 \right\} < \infty \quad (4.7)$$

2. *Stable en moyenne quadratique (MSS pour Mean Square Stable) si pour toute condition initiale $(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$, la relation suivante est vérifiée*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{ \| x_k(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0) \|^2 \} = 0 \quad (4.8)$$

3. *Exponentiellement stable en moyenne quadratique (EMSS pour Exponentially Mean Square Stable) si pour toute condition initiale $(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$, il existe des constantes $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$ telles que $\forall k \geq 0$*

$$\mathcal{E} \{ \| x_k(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0) \|^2 \} < \beta \alpha^k \| x_0 \|^2 \quad (4.9)$$

4. *Stable presque sûrement si pour toute condition initiale $(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0)$, la relation suivante est vérifiée*

$$P \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \| x_k(x_0, \xi_0, \eta_0, \psi_0) \| = 0 \right\} = 1 \quad (4.10)$$

Remarque 4.1 En utilisant les mêmes arguments que dans [JCFL91], nous pouvons montrer que les trois premières notions de stabilité sont équivalentes et que chacune d'elles implique la stabilité presque sûre. En effet, la seule différence réside dans le fait que [JCFL91] ne considèrent qu'un seul processus Markovien.

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la (SS) du système en boucle fermée (4.3).

Proposition 4.1 Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Le système (4.1) est stochastiquement stabilisé par φ_s ;
- ii) Les inégalités matricielles

$$\bar{A}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{ijv} \bar{A}_{ijv} - \mathcal{P}_{ijv} < 0, \quad \forall i \in Z, j \in S, v \in R. \quad (4.11)$$

sont faisables par rapport aux matrices \mathcal{K}_v et $\mathcal{P}_{ijv} > 0$ où

$$\bar{A}_{ijv} = A_{xi} + B_{uj} \mathcal{K}_v C_y; \quad \bar{\mathcal{P}}_{ijv} = \sum_{r \in Z} \alpha_{ir} \sum_{d \in S} \beta_{jd} \sum_{q \in R} \gamma_{vq}^{ij} \mathcal{P}_{rdq}$$

iii) Pour tout $\mathbf{Q} = (\mathcal{Q}_{111}, \dots, \mathcal{Q}_{ijv}, \dots, \mathcal{Q}_{saf})$ avec $\mathcal{Q}_{ijv} > 0$, il existe un unique

$\mathbf{P} = (\mathcal{P}_{111}, \dots, \mathcal{P}_{ijv}, \dots, \mathcal{P}_{saf})$ avec $\mathcal{P}_{ijv} > 0$ vérifiant les équations de Lyapunov couplées suivantes

$$\bar{A}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{ijv} \bar{A}_{ijv} - \mathcal{P}_{ijv} + \mathcal{Q}_{ijv} = 0 \quad \forall i \in Z, j \in S, v \in R. \quad (4.12)$$

□

Preuve. La preuve de cette proposition s'appuie sur les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve de résultats de stabilité dans [CFM05, ZHL03], excepté que dans ce travail nous considérons

trois processus Markoviens, alors que dans les références ci-dessus, les auteurs ne considèrent qu'un seul processus Markovien. ■

Nous concluons cette section en introduisant le lemme 4.1. Ce dernier sera utilisé pour la preuve de l'un de nos principaux résultats.

Lemme 4.1 Les propositions suivantes sont équivalentes

i) Il existe une matrice symétrique définie positive \mathcal{P} telle que

$$A'f(\mathcal{P})A - \mathcal{P} < 0$$

où $f(\mathcal{P}) > 0$ est une fonction matricielle de \mathcal{P} .

ii) Il existe une matrice symétrique définie positive \mathcal{P} et une matrice \mathcal{G} telles que

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P} & A'\mathcal{G}' \\ \star & -\mathcal{G} - \mathcal{G}' + f(\mathcal{P}) \end{bmatrix} < 0$$

◇

Preuve. La preuve de ce lemme est similaire à la preuve du théorème 1 dans [dOBG99]. ■

4.2.3 Principaux résultats

Dans ce paragraphe, nous abordons la problématique de commande multi-objectifs par retour statique de sortie du AFTCSMP en temps discret. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la caractérisation sous forme NLMI de correcteurs statiques stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

4.2.3.1 Stabilisation stochastique

Dans cette section, nous allons dans un premier temps établir une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation stochastique du système (4.1). La condition ainsi obtenue est formulée comme un problème de faisabilité d'inégalités matricielles sous une contrainte égalité de la forme $\mathcal{P}\mathcal{X} = \mathbb{I}$. L'outil principal dans la dérivation de cette condition est le lemme 4.1.

Dans un second temps, et par analogie au cas continu, une caractérisation par ellipsoïdes de matrices des correcteurs statiques stabilisant stochastiquement le système (4.1) sera aussi donnée. Comme il a été illustré dans les chapitres précédents, cette formulation permet notamment la synthèse de correcteurs sujets à des spécifications sur les gains de commande.

Une caractérisation par inégalités matricielles non linéaires des compensateurs (φ_s) stabilisant stochastiquement le système (4.1) est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.2 Le système en boucle fermée (4.3) est stochastiquement stable si et seulement si il existe des matrices \mathcal{K}_v , des matrices $\bar{\mathcal{G}}_{ijv}$ et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{ijv} > 0$, $\mathcal{X}_{ijv} > 0$ vérifiant les

inégalités matricielles couplées suivantes

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{ijv} & \bar{A}'_{ijv} & \mathbf{0} \\ \star & -\bar{\mathcal{G}}_{ijv} - \bar{\mathcal{G}}'_{ijv} & \bar{\mathcal{G}}_{ijv} \mathbb{R}_{ijv} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{X}}_{ijv} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.13)$$

sous les contraintes

$$\mathcal{P}_{ijv} \mathcal{X}_{ijv} = \mathbb{I} \quad (4.14)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{X}}_{ijv} = \text{diag}\{\bar{\mathcal{T}}_{1jv}, \bar{\mathcal{T}}_{2jv}, \dots, \bar{\mathcal{T}}_{sjv}\}; \\ \bar{\mathcal{T}}_{1jv} = [\mathcal{X}_{111}, \mathcal{X}_{112}, \dots, \mathcal{X}_{11f}, \mathcal{X}_{121}, \mathcal{X}_{122}, \dots, \mathcal{X}_{12f}, \dots, \mathcal{X}_{1j1}, \mathcal{X}_{1j2}, \dots, \mathcal{X}_{1jf}, \dots, \mathcal{X}_{1a1}, \mathcal{X}_{1a2}, \dots, \mathcal{X}_{1af}]; \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{T}}_{sjv} = [\mathcal{X}_{s11}, \mathcal{X}_{s12}, \dots, \mathcal{X}_{s1f}, \mathcal{X}_{s21}, \mathcal{X}_{s22}, \dots, \mathcal{X}_{s2f}, \dots, \mathcal{X}_{sj1}, \mathcal{X}_{sj2}, \dots, \mathcal{X}_{sjf}, \dots, \mathcal{X}_{sa1}, \mathcal{X}_{sa2}, \dots, \mathcal{X}_{saf}]; \\ \mathbb{R}_{ijv} = \text{diag}\{\Gamma_{1jv}, \Gamma_{2jv}, \dots, \Gamma_{sjv}\}; \\ \Gamma_{1jv} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{j1}\gamma_{v1}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{j1}\gamma_{v2}^{ij}}, \dots, \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{j1}\gamma_{vf}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{j2}\gamma_{v1}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{j2}\gamma_{v2}^{ij}}, \dots, \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{j2}\gamma_{vf}^{ij}}, \dots, \\ \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{ja}\gamma_{v1}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{ja}\gamma_{v2}^{ij}}, \dots, \sqrt{\alpha_{i1}\beta_{ja}\gamma_{vf}^{ij}} \end{array} \right]; \\ \vdots \\ \Gamma_{sjl} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{\alpha_{is}\beta_{j1}\gamma_{v1}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{is}\beta_{j1}\gamma_{v2}^{ij}}, \dots, \sqrt{\alpha_{is}\beta_{j1}\gamma_{vf}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{is}\beta_{j2}\gamma_{v1}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{is}\beta_{j2}\gamma_{v2}^{ij}}, \dots, \sqrt{\alpha_{is}\beta_{j2}\gamma_{vf}^{ij}}, \dots, \\ \sqrt{\alpha_{is}\beta_{ja}\gamma_{v1}^{ij}}, \sqrt{\alpha_{is}\beta_{ja}\gamma_{v2}^{ij}}, \dots, \sqrt{\alpha_{is}\beta_{ja}\gamma_{vf}^{ij}} \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

Si (4.13)-(4.14) sont faisables, alors la loi de commande par retour statique de sortie correspondant est donnée par

$$u_{vk} = \mathcal{K}_v y_k$$

□

Preuve. Soient les inégalités matricielles (4.13). L'utilisation du lemme 1 avec $f(\mathcal{P}_{ijv}) = \bar{\mathcal{P}}_{ijv}$ conduit à

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{ijv} & \bar{A}'_{ijv} \mathcal{G}'_{ijv} \\ \star & -\mathcal{G}'_{ijv} - \mathcal{G}_{ijv} + \bar{\mathcal{P}}_{ijv} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

Notons qu'à partir de la relation (4.15), les matrices \mathcal{G}_{ijv} sont non singulières. Définissons $\bar{\mathcal{G}}_{ijv} = \mathcal{G}_{ijv}^{-1}$. En utilisant la transformation de congruence

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{G}}_{ijv} \end{bmatrix}$$

et en appliquant le complément de Schur au terme $\bar{\mathcal{G}}_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{ijv} \bar{\mathcal{G}}'_{ijv}$, les inégalités (4.15) deviennent

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{ijv} & \bar{A}'_{ijv} & \mathbf{0} \\ \star & -\bar{\mathcal{G}}_{ijv} - \bar{\mathcal{G}}'_{ijv} & \bar{\mathcal{G}}_{ijv} \mathbb{R}_{ijv} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{X}}_{ijv} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

Cela conclue cette preuve. ■

En se basant sur la proposition 4.1, une caractérisation en terme d'ellipsoïdes de matrices des compensateurs (φ_s) stabilisant stochastiquement le système (4.1) est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.3 Le système (4.3) est stochastiquement stable si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{P}_{ijv} = \mathcal{P}'_{ijv} > 0$, $\mathbb{X}_v \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_v \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z}'_v > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_{xi} & B_{uj} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{ijv} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{\mathcal{P}}_{ijv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_{xi} & B_{uj} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} C_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{X}_v & \mathbb{Y}_v \\ \star & \mathbb{Z}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

et les inégalités matricielles non linéaires données comme suit

$$\mathbb{X}_v \leq \mathbb{Y}_v \mathbb{Z}_v^{-1} \mathbb{Y}'_v \quad (4.18)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $v \in R$.

Soit $\{\mathcal{P}_{ijv}, \mathbb{X}_v, \mathbb{Y}_v, \mathbb{Z}_v\}$ une solution, alors les $\{\mathbb{X}_v, \mathbb{Y}_v, \mathbb{Z}_v\}$ -ellipsoïdes, non vides, sont des ensembles de gains stabilisants. □

Preuve. La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la proposition 2.5. ■

4.2.3.2 Commande \mathcal{H}_∞

Soit le système (4.1) avec

$$z_k = z_{\infty k} = C_\infty x_k + D_\infty(\eta_k)u(y_k, \psi_k, k)$$

où l'indice ' ∞ ' est relatif à des performances \mathcal{H}_∞ .

Dans cette section, nous abordons la problématique de synthèse de correcteurs par retour statique de sortie stabilisant stochastiquement le système (4.1) et assurant un niveau de réjection de perturbations $\gamma_\infty > 0$. Cette problématique est adressée sous un formalisme d'optimisation non convexe.

Afin d'aborder la problématique de commande \mathcal{H}_∞ dans un contexte stochastique, nous considérons l'espace $L^2((\Omega, \mathcal{F}, P), [0, \infty))$ des processus \mathcal{F} -mesurables, $z_{\infty k}$, pour lesquels

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} = \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z'_{\infty k} z_{\infty k} \right\}^{1/2} < \infty$$

Le problème de commande \mathcal{H}_∞ stochastique peut être formulé comme suit :

Pour un niveau de performance \mathcal{H}_∞ (γ_∞) donné, trouver des gains de retour statique de sortie \mathcal{K}_v tels que

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z'_{\infty k} z_{\infty k} \right\} < \gamma_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} w'_k w_k \quad (4.19)$$

i.e.

$$\|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \|w\|_2$$

Dans ce cas, le système en boucle fermée (4.3) est stochastiquement stable et possède un niveau de performance \mathcal{H}_∞ sur $[0, \infty)$ donné par γ_∞ .

Avant d'établir nos principaux résultats portant sur la commande \mathcal{H}_∞ de cette classe de systèmes hybrides stochastiques, nous introduisons la proposition suivante donnant une condition nécessaire et suffisante de résolution du problème de commande \mathcal{H}_∞ en terme d'inégalités matricielles non linéaires. Cette dernière est obtenue en se basant sur le lemme réel borné des systèmes linéaires à sauts Markoviens et à temps discret [ZHL03].

Proposition 4.4 Le système (4.3) est stochastiquement stable et $\|\varphi_{cl}\|_\infty < \gamma_\infty$ si et seulement si il existe des matrices \mathcal{K}_v et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{\infty jv} > 0$ vérifiant les inégalités matricielles couplées suivantes

$$\begin{bmatrix} \bar{A}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{\infty jv} \bar{A}_{ijv} - \mathcal{P}_{\infty jv} + \bar{C}'_{\infty jv} \bar{C}_{\infty jv} & \bar{A}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{\infty jv} \bar{E}_{ijv} + \bar{C}'_{\infty jv} \bar{D}_{\infty jv} \\ * & -(\gamma_\infty^2 \mathbb{I} - \bar{E}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{\infty jv} \bar{E}_{ijv} - \bar{D}'_{\infty jv} \bar{D}_{\infty jv}) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\infty jv} &= C_\infty + D_{\infty j} \mathcal{K}_v C_y \\ \bar{D}_{\infty jv} &= D_{\infty j} \mathcal{K}_v D_{yij} \end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en position d'introduire nos résultats portant sur la commande \mathcal{H}_∞ stochastique par retour statique de sortie des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens et à temps discret.

Proposition 4.5 Le système (4.1) est stochastiquement stabilisé par φ_s et $\|\varphi_{cl}\|_\infty < \gamma_\infty$ si et seulement si il existe des matrices \mathcal{K}_v , des matrices $\bar{\mathcal{G}}_{\infty jv}$ et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{\infty jv} > 0$, $\mathcal{X}_{\infty jv} > 0$ vérifiant les inégalités matricielles suivantes

$$\begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{P}_{\infty jv} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty jv} \\ \bar{D}'_{\infty jv} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{A}'_{ijv} \\ \bar{E}'_{ijv} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ * & -\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\bar{\mathcal{G}}_{\infty jv} - \bar{\mathcal{G}}'_{\infty jv} & \bar{\mathcal{G}}_{\infty jv} \mathbb{R}_{\infty jv} \\ * & * & * & -\bar{\mathcal{X}}_{\infty jv} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

sous les contraintes

$$\mathcal{P}_{\infty jv} \mathcal{X}_{\infty jv} = \mathbb{I} \quad (4.22)$$

Si (4.21)-(4.22) sont faisables, alors \mathcal{K}_v sont des gains de retour statique de sortie stabilisant stochastiquement le système (4.1) et garantissant un niveau de performance \mathcal{H}_∞ donné par γ_∞ . □

Preuve. Les inégalités matricielles (4.20) peuvent se réécrire de façon équivalente comme suit

$$\begin{bmatrix} \bar{A}'_{ijv} \\ \bar{E}'_{ijv} \end{bmatrix} \bar{\mathcal{P}}_{\infty ijv} \begin{bmatrix} \bar{A}_{ijv} & \bar{E}_{ijv} \end{bmatrix} - \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{P}_{\infty ijv} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty ijv} \\ \bar{D}'_{\infty ijv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{\infty ijv} & \bar{D}_{\infty ijv} \end{bmatrix} \right\}}_{\mathcal{L}_{\infty ijv}} < 0 \quad (4.23)$$

En utilisant le lemme 4.1 avec $f(\mathcal{P}_{\infty ijv}) = \bar{\mathcal{P}}_{\infty ijv}$ nous obtenons

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\infty ijv} & \begin{bmatrix} \bar{A}'_{ijv} \\ \bar{E}'_{ijv} \end{bmatrix} \mathcal{G}'_{\infty ijv} \\ \star & -\mathcal{G}'_{\infty ijv} - \mathcal{G}_{\infty ijv} + \bar{\mathcal{P}}_{\infty ijv} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24)$$

En utilisant la transformation de congruence

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{G}}_{\infty ijv} \end{bmatrix}$$

et en appliquant le complément de Schur au terme $\bar{\mathcal{G}}_{\infty ijv} \bar{\mathcal{P}}_{\infty ijv} \bar{\mathcal{G}}'_{\infty ijv}$, nous obtenons (4.21). Cela conclue cette preuve. ■

En se basant sur la proposition 4.4, une caractérisation en terme d'ellipsoïdes de matrices des compensateurs (φ_s) stabilisant stochastiquement le système (4.1) et assurant des performances \mathcal{H}_{∞} est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.6 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ijv} = \mathcal{P}'_{\infty ijv} > 0$, $\mathbb{X}_v \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_v \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z}'_v > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\mathbb{M}'_{1ij} \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{\infty ijv} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{\mathcal{P}}_{\infty ijv} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{1ij} < \mathbb{M}'_{2j} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_{\infty}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{2j} + \mathbb{M}'_{3ij} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_v & \mathbb{Y}_v \\ \star & \mathbb{Z}_v \end{bmatrix} \mathbb{M}_{3ij} \quad (4.25)$$

et les inégalités non linéaires suivantes

$$\mathbb{X}_v \leq \mathbb{Y}_v \mathbb{Z}_v^{-1} \mathbb{Y}'_v \quad (4.26)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $v \in R$, où

$$\mathbb{M}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{xi} & E_{wij} & B_{uj} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{2j} = \begin{bmatrix} C_{\infty} & \mathbf{0} & D_{\infty j} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{3ij} = \begin{bmatrix} C_y & D_{yij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors les $\{\mathbb{X}_v, \mathbb{Y}_v, \mathbb{Z}_v\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisants stochastiquement le système (4.1) tel que

$$\|z_{\infty}\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_{\infty} \|w\|_2$$

□

Preuve. La preuve de cette proposition s'appuie sur les mêmes arguments que ceux utilisés pour la preuve de la proposition 2.5. ■

4.2.3.3 Commande \mathcal{H}_2

Soit le système (4.1) avec

$$z_k = z_{2k} = C_2 x_k + D_2(\eta_k)u(y_k, \psi_k, k)$$

et $D_y(\xi_k, \eta_k) = \mathbf{0}$. z_{2k} est la sortie à commander pour laquelle des performances \mathcal{H}_2 sont considérées. Avant d'établir les résultats principaux de cette section, nous allons dans un premier temps introduire la définition 4.2 qui représente une généralisation de la définition de la norme \mathcal{H}_2 des systèmes à sauts Markoviens et à temps discret [CM98] à la classe des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens en temps discret.

Definition 4.2 Nous définissons la norme \mathcal{H}_2 du système bouclé (φ_{cl}) supposé stable, de manière interne, au sens de la moyenne quadratique, comme suit

$$\|\varphi_{cl}\|_2^2 = \sum_{d=1}^m \sum_{i,j,v} \|z_{2d,i,j,v}\|_{\mathcal{E}_2}^2$$

où $z_{2d,i,j,v}$ représente la séquence de sortie (z_{20}, z_{21}, \dots) quand :

- la séquence d'entrée est donnée par $w = (w_0, w_1, \dots)$, $w_0 = e_d$, $w_k = 0$, $k > 0$, $e_d \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur unitaire de dimension m formé par un '1' à la position d et des zéros ailleurs ;
- $\xi_0 = \xi_1 = i$, $\eta_0 = \eta_1 = j$, $\psi_0 = \psi_1 = v$.

Partant de la définition ci-dessus et en s'appuyant sur les mêmes arguments que ceux utilisés dans [CM98], le corollaire suivant peut être énoncé.

Corollaire 4.1 Supposons que le système bouclé (φ_{cl}) est stochastiquement stable alors les propriétés suivantes sont vérifiées

- $\|\varphi_{cl}\|_2^2 = \sum_{i,j,v} \text{tr}(E_{w_{ij}}' \mathcal{P}_{oijv} E_{w_{ij}})$, où $\mathcal{P}_o = \{\mathcal{P}_{o111}, \dots, \mathcal{P}_{osaf}\}$ représente le Grammien d'observabilité, *i.e.*, \mathcal{P}_{oijv} sont les uniques solutions semi-définies positives des équations suivantes

$$\bar{A}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{oijv} \bar{A}_{ijv} - \mathcal{P}_{oijv} + \bar{C}'_{2jv} \bar{C}_{2jv} = 0 \quad (4.27)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $v \in R$.

- $\|\varphi_{cl}\|_2^2 < \sum_{i,j,k} \text{tr}(E_{w_{ij}}' \mathcal{P}_{2ijv} E_{w_{ij}})$, où \mathcal{P}_{2ijv} sont les solutions définies positives des inégalités matricielles suivantes

$$\bar{A}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{2ijv} \bar{A}_{ijv} - \mathcal{P}_{2ijv} + \bar{C}'_{2jv} \bar{C}_{2jv} < 0 \quad (4.28)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $v \in R$.

- Si il existe des matrices définies positives \mathcal{P}_{2ijv} et des matrices \mathcal{K}_v telles que

$$\sum_{i,j,k} \text{tr}(E_{w_{ij}}' \mathcal{P}_{2ijv} E_{w_{ij}}) < \gamma_2^2$$

$$\bar{A}'_{ijv} \bar{\mathcal{P}}_{2ijv} \bar{A}_{ijv} - \mathcal{P}_{2ijv} + \bar{C}'_{2jv} \bar{C}_{2jv} < 0$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $v \in R$, alors \mathcal{K}_v sont des gains stabilisant tel que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$.

◇

En s'appuyant sur le corollaire 4.1, et en utilisant la même méthodologie que celle utilisée pour le problème de commande \mathcal{H}_∞ , des résultats de commande \mathcal{H}_2 sont obtenus et sont résumés comme suit.

Proposition 4.7 Si il existe des matrices \mathcal{K}_v , des matrices $\bar{\mathcal{G}}_{2ijv}$ et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{2ijv} > 0$, $\mathcal{X}_{2ijv} > 0$ vérifiant les inégalités matricielles suivantes

$$\sum_{i,j,k} \text{tr}(E_{wij}' \mathcal{P}_{2ijv} E_{wij}) < \gamma_2^2 \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{2ijv} & \bar{A}'_{ijv} & \mathbf{0} & \bar{C}'_{2jv} \\ \star & -\bar{\mathcal{G}}_{2ijv} - \bar{\mathcal{G}}'_{2ijv} & \bar{\mathcal{G}}_{2ijv} \mathbb{R}_{2ijv} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{X}}_{2ijv} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.30)$$

sous les contraintes

$$\mathcal{P}_{2ijv} \mathcal{X}_{2ijv} = \mathbb{I} \quad (4.31)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $v \in R$, alors \mathcal{K}_v sont des gains stabilisants tels que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$.

□

Preuve La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 4.2. ■

Proposition 4.8 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{2ijv} = \mathcal{P}'_{2ijv} > 0$, $\mathbb{X}_v \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_v \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z}'_v$ vérifiant les contraintes suivantes

$$\mathbb{X}_v \leq \mathbb{Y}_v \mathbb{Z}_v^{-1} \mathbb{Y}'_v \quad (4.32)$$

$$\sum_{i,j,k} \text{tr}(E_{wij}' \mathcal{P}_{2ijv} E_{wij}) < \gamma_2^2 \quad (4.33)$$

$$\mathbb{N}'_{1ij} \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{2ijv} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{\mathcal{P}}_{2ijv} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{1ij} < -\mathbb{N}'_{2j} \mathbb{N}_{2j} + \mathbb{N}'_3 \begin{bmatrix} \mathbb{X}_v & \mathbb{Y}_v \\ \star & \mathbb{Z}_v \end{bmatrix} \mathbb{N}_3 \quad (4.34)$$

$\forall i \in Z, j \in S$ et $v \in R$, où

$$\mathbb{N}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ A_{xi} & B_{uj} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_{2j} = \begin{bmatrix} C_2 & D_{2j} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_3 = \begin{bmatrix} C_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors les $\{\mathbb{X}_v, \mathbb{Y}_v, \mathbb{Z}_v\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisants tels que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$.

□

Preuve La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 2.5. ■

4.2.3.4 Synthèse multi-objectifs

Le problème de synthèse multi-objectifs tend à trouver des correcteurs stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant en même temps des performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Le problème de synthèse multi-critères est formulé comme suit :

Soient γ_∞ et γ_2 deux niveaux de performances \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2 donnés. Le problème de synthèse multi-critères consiste à trouver des gains de retour de sortie \mathcal{K}_v stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et tels que

$$\| z_\infty \|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \| w \|_2$$

$$\| \varphi_d \|_2 < \gamma_2$$

Le résultat de synthèse multi-objectifs est évident. Il suffit en effet de trouver des gains de retour de sortie satisfaisant les différentes inégalités matricielles données par les propositions 4.5 et 4.7 (4.6 et 4.8 pour le formalisme ellipsoïdes de matrices). Cela se résume par les Corollaires suivants.

Corollaire 4.2 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty i j v}$, $\mathcal{P}_{2 i j v}$, $\mathcal{X}_{\infty i j v}$, $\mathcal{X}_{2 i j v}$, $\bar{\mathcal{G}}_{\infty i j v}$, $\bar{\mathcal{G}}_{2 i j v}$, et \mathcal{K}_v vérifiant les contraintes (4.21)-(4.22) et (4.29)-(4.31), alors les gains \mathcal{K}_v sont des gains stabilisants assurant les niveaux de performances requis. \diamond

Corollaire 4.3 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty i j v}$, $\mathcal{P}_{2 i j v}$, $\mathbb{X}_v \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y}_v \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z}_v \in \mathbb{S}^r$ vérifiant les contraintes (4.25)-(4.26) et (4.33)-(4.34), alors les $\{\mathbb{X}_v, \mathbb{Y}_v, \mathbb{Z}_v\}$ -ellipsoïdes sont des ensembles de gains stabilisants assurant les niveaux de performances requis. \diamond

4.2.4 Prise en compte de la contrainte $\mathcal{P}_{i j v} \mathcal{X}_{i j v} = \mathbb{I}$

Les conditions données par les propositions 4.5 et 4.7 sont formulées comme un problème de faisabilité de LMIs sous des contraintes égalités de la forme $\mathcal{P}_{i j v} \mathcal{X}_{i j v} = \mathbb{I}$. Les exemples numériques sont résolus en utilisant un algorithme itératif du premier ordre. Ce dernier est basé sur une technique de complémentarité sur le cône (CCL), permettant la prise en compte des contraintes non convexes et cela en les incluant dans le critère d'un problème d'optimisation convexe.

Pour $\mathbf{P}_\infty = (\mathcal{P}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{P}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{P}_{\infty s a f})$, $\mathbf{G}_\infty = (\mathcal{G}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{G}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{G}_{\infty s a f})$, $\mathbf{K} = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_v, \dots, \mathcal{K}_f)$, $\mathbf{X}_\infty = (\mathcal{X}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{X}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{X}_{\infty s a f})$, $\mathbf{P}_2 = (\mathcal{P}_{2111}, \dots, \mathcal{P}_{2 i j v}, \dots, \mathcal{P}_{2 s a f})$, $\mathbf{G}_2 = (\mathcal{G}_{2111}, \dots, \mathcal{G}_{2 i j v}, \dots, \mathcal{G}_{2 s a f})$, et $\mathbf{X}_2 = (\mathcal{X}_{2111}, \dots, \mathcal{X}_{2 i j v}, \dots, \mathcal{X}_{2 s a f})$, définissons les deux ensembles convexes suivant :

$$\mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2} \triangleq \{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2) : \text{LMIs(4.29) - (4.30)}, \mathcal{P}_{2 i j v} > 0, \mathcal{X}_{2 i j v} > 0, \forall i \in S, j \in Z, v \in R\}$$

et

$$\mathcal{C}_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{K}, \mathbf{X}_\infty)}^{\mathcal{H}_\infty} \triangleq \{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{K}, \mathbf{X}_\infty) : \text{LMIs(4.21)}, \mathcal{P}_{\infty i j v} > 0, \mathcal{X}_{\infty i j v} > 0, \forall i \in S, j \in Z, v \in R\}$$

Nous pouvons voir à partir de la proposition 4.5 (proposition 4.7, respectivement) que le problème de commande \mathcal{H}_∞ (Commande \mathcal{H}_2 , respectivement) du système (4.1) est faisable si et seulement si il existe des matrices $\mathbf{P}_\infty = (\mathcal{P}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{P}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{P}_{\infty s a f})$, $\mathbf{G}_\infty = (\mathcal{G}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{G}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{G}_{\infty s a f})$, $\mathbf{K} = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_v, \dots, \mathcal{K}_f)$, $\mathbf{X}_\infty = (\mathcal{X}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{X}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{X}_{\infty s a f})$, $\mathbf{P}_2 = (\mathcal{P}_{2111}, \dots, \mathcal{P}_{2i j v}, \dots, \mathcal{P}_{2s a f})$, $\mathbf{G}_2 = (\mathcal{G}_{2111}, \dots, \mathcal{G}_{2i j v}, \dots, \mathcal{G}_{2s a f})$, et $\mathbf{X}_2 = (\mathcal{X}_{2111}, \dots, \mathcal{X}_{2i j v}, \dots, \mathcal{X}_{2s a f})$ telles que

$$(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{K}, \mathbf{X}_\infty) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{K}, \mathbf{X}_\infty)}^{\mathcal{H}_\infty}, \quad \mathcal{P}_{\infty i j v} \mathcal{X}_{\infty i j v} = \mathbb{I} \quad \forall i \in S, j \in Z, v \in R \quad (4.35)$$

(resp.

$$(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2}, \quad \mathcal{P}_{2i j v} \mathcal{X}_{2i j v} = \mathbb{I} \quad \forall i \in S, j \in Z, v \in R) \quad (4.36)$$

L'algorithme CCL est basé sur le fait que pour toutes matrices $\mathcal{X} > 0$ et $\mathcal{P} > 0$ ($\mathcal{X}, \mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$), si la LMI

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathbb{I} \\ \star & \mathcal{P} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.37)$$

est faisable, alors $\text{tr}(\mathcal{P}\mathcal{X}) \geq n$, et $\text{tr}(\mathcal{P}\mathcal{X}) = n$ si et seulement si $\mathcal{P}\mathcal{X} = \mathbb{I}$.

Une solution de (4.35) (resp. (4.36)) peut alors être obtenue en résolvant le problème d'optimisation non convexe suivant

$$\min_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{K}, \mathbf{X}_\infty) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathbf{K}, \mathbf{X}_\infty)}^{\mathcal{H}_\infty}} \left\{ \text{tr}(\mathbb{X}_\infty \mathbb{P}_\infty) : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{\infty i j v} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathcal{P}_{\infty i j v} \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in S, j \in Z, v \in R \right\} \quad (4.38)$$

(resp.

$$\min_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2}} \left\{ \text{tr}(\mathbb{X}_2 \mathbb{P}_2) : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{2i j v} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathcal{P}_{2i j v} \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in S, j \in Z, v \in R \right\} \quad (4.39)$$

où

$$\mathbb{X}_\infty = \text{diag}\{\mathcal{X}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{X}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{X}_{\infty s a f}\}, \quad \mathbb{P}_\infty = \text{diag}\{\mathcal{P}_{\infty 111}, \dots, \mathcal{P}_{\infty i j v}, \dots, \mathcal{P}_{\infty s a f}\}$$

(resp.

$$\mathbb{X}_2 = \text{diag}\{\mathcal{X}_{2111}, \dots, \mathcal{X}_{2i j v}, \dots, \mathcal{X}_{2s a f}\}, \quad \mathbb{P}_2 = \text{diag}\{\mathcal{P}_{2111}, \dots, \mathcal{P}_{2i j v}, \dots, \mathcal{P}_{2s a f}\})$$

Nous pouvons voir que si la solution optimale de (4.38) (resp. (4.39)) satisfait

$$\text{tr}(\mathbb{X}_\infty \mathbb{P}_\infty) = n \times s \times a \times f \quad (4.40)$$

(resp.

$$\text{tr}(\mathbb{X}_2 \mathbb{P}_2) = n \times s \times a \times f \quad (4.41)$$

alors (4.35) (resp. (4.36)) est faisable. Le problème de commande \mathcal{H}_∞ (resp. commande \mathcal{H}_2) est transformé en un problème d'optimisation (4.38) (resp. (4.39)). Cependant, cela reste un problème difficile dû à la non convexité de la fonction coût. L'algorithme CCL est alors utilisé pour résoudre ce problème d'optimisation.

L'algorithme CCL pour la résolution du problème de commande multi-objectifs est donné comme suit

Algorithme 4.1. Soient $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_2 > 0$

i) **Initialisation.** $h = 0$: trouver une solution faisable $(\mathbf{P}_{\infty 0}, \mathbf{G}_{\infty 0}, \mathbf{K}_0, \mathbf{X}_{\infty 0}) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_{\infty}, \mathbf{G}_{\infty}, \mathbf{K}, \mathbf{X}_{\infty})}^{\mathcal{H}_\infty}, (\mathbf{P}_{20}, \mathbf{G}_{20}, \mathbf{K}_0, \mathbf{X}_{20}) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2}$;

ii) $\mathbf{V}_h = \mathbb{P}_h$ et $\mathbf{W}_h = \mathbb{X}_h$ où

$$\mathbb{X}_h = \text{diag}\{\mathcal{X}_{\infty 111h}, \dots, \mathcal{X}_{\infty i j v h}, \dots, \mathcal{X}_{\infty s a f h}, \mathcal{X}_{2111h}, \dots, \mathcal{X}_{2i j v h}, \dots, \mathcal{X}_{2s a f h}\}$$

$$\mathbb{P}_h = \text{diag}\{\mathcal{P}_{\infty 111h}, \dots, \mathcal{P}_{\infty i j v h}, \dots, \mathcal{P}_{\infty s a f h}, \mathcal{P}_{2111h}, \dots, \mathcal{P}_{2i j v h}, \dots, \mathcal{P}_{2s a f h}\}$$

Définir la fonction linéaire

$$f_h(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{V}_h \mathbf{X} + \mathbf{W}_h \mathbf{P}) \quad (4.42)$$

iii) trouver $(\mathbb{P}_{h+1}, \mathbb{X}_{h+1})$ solution du problème d'optimisation convexe suivant

$$\min_{(\mathbf{P}_{\infty}, \mathbf{G}_{\infty}, \mathbf{K}, \mathbf{X}_{\infty}) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_{\infty}, \mathbf{G}_{\infty}, \mathbf{K}, \mathbf{X}_{\infty})}^{\mathcal{H}_\infty}, (\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2}} \left\{ f_h(\mathbf{P}, \mathbf{X}) : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{\infty i j v} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathcal{P}_{\infty i j v} \end{bmatrix} \geq 0; \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{2i j v} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathcal{P}_{2i j v} \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in S, j \in Z, v \in R \right\} \quad (4.43)$$

iv) si le critère d'arrêt est satisfait, aller à l'étape v). Sinon, $h = h + 1$ et aller à l'étape ii).

v) fixer \mathbf{K} . Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty i j v}$ et $\mathcal{P}_{2i j v}$ telles que (4.20), (4.28) et (4.29) sont vérifiées alors \mathbf{K} est solution du problème de commande multi-objectifs. Sinon, échec de l'algorithme.

Remarque 4.2 Les étapes i), iii) et v) de l'algorithme ci-dessus sont des problèmes LMIs pour lesquels des outils de résolution numériques très performants sont disponibles.

Remarque 4.3 Le critère d'arrêt de l'algorithme est : $\text{tr}(\text{TS}) - (n \times s \times a \times f) = \epsilon$ où ϵ est un niveau de précision fixé. La solution trouvée peut dans ce cas ne pas être satisfaisante ce qui représente une faiblesse significative de l'algorithme. Une étape de *vérification* est alors ajoutée dans l'algorithme (étape v) ci dessus).

4.2.5 Exemple numérique

Dans cette section, la stratégie de commande multi-objectifs par retour statique de sortie est illustrée en utilisant un modèle discrétisé de la dynamique longitudinale linéarisée et découplée d'un avion F-18 (section 3.2.3 : exemple a)) avec une période d'échantillonnage $T_s = 0.01s$. Soit le système nominal avec :

$$A_x = \begin{bmatrix} 0.9879 & 0.009769 \\ -0.0837 & 0.9908 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} -2.874 \times 10^{-3} & -5.439 \times 10^{-4} \\ -0.1919 & -0.03784 \end{bmatrix}, E_w = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, C_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, D_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour des fins d'illustration, nous allons considérer un mode défectueux :

◦ **Mode 2** : Perte totale du second actionneur.

En considérant ce mode, nous avons $S = \{1, 2\}$, où le **mode 1** représente le cas nominal (sans pannes). Le processus défaut est supposé Markovien. Le processus FDI est aussi Markovien avec $R = \{1, 2\}$.

La matrice de probabilités de transition du processus défaut actionneur est donnée par :

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de probabilités de transition du processus FDI est donnée comme suit

$$[\gamma_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}, [\gamma_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Pour le système décrit ci-dessus, et en utilisant l'algorithme 4.1 avec $\gamma_\infty^2 = \gamma_2^2 = 20$, nous obtenons les gains de retour de sortie donnés par

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.4884 & -2.0721 \end{bmatrix}', \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.9671 & -1.7280 \end{bmatrix}'.$$

L'évolution des trajectoires d'états du système en boucle fermée résultant des correcteurs obtenus est illustrée par la figure 4.1. La figure 4.2 représente l'évolution des sorties commandées $z_{\infty k}$. Nous pouvons voir à travers ces différentes figures que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint et que le système en boucle fermée est stochastiquement stable.

4.2.6 Prise en compte de la contrainte $\mathbb{X}_v \leq \mathbb{Y}_v \mathbb{Z}_v^{-1} \mathbb{Y}_v'$

La contrainte non linéaire $\mathbb{X}_v \leq \mathbb{Y}_v \mathbb{Z}_v^{-1} \mathbb{Y}_v'$ est traitée de façon similaire à celle du cas continu. Cela se traduit par le lemme 4.2 et l'algorithme 4.2.

Lemme 4.2 Le problème de synthèse multi-objectifs est faisable si et seulement si zéro est l'optimum

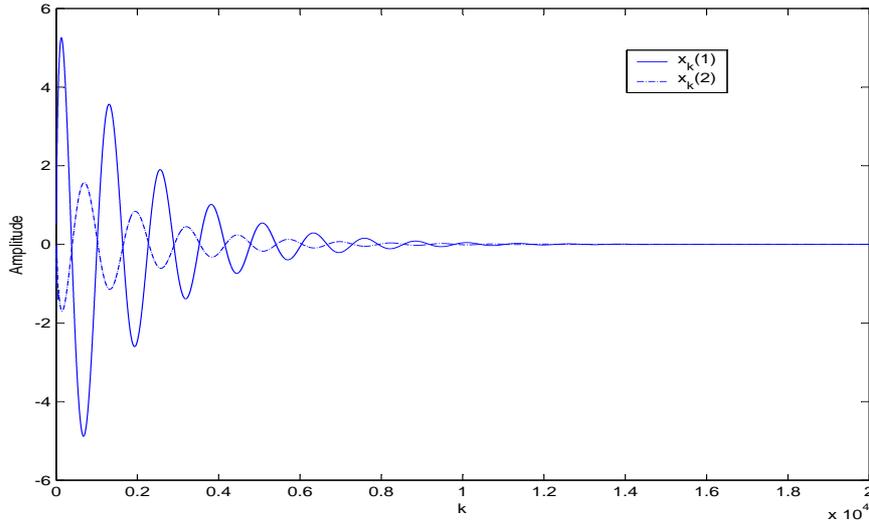


FIG. 4.1 – Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires

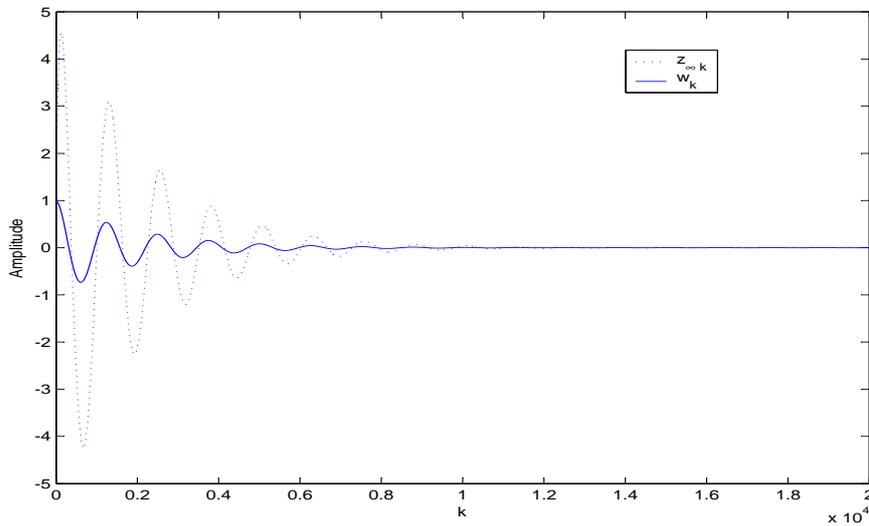


FIG. 4.2 – Evolution des sorties $z_{\infty k}$: une seule réalisation des processus aléatoires

globale du problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min & \text{tr}(\mathbb{T}\mathbb{S}) \\ \text{t.q.} & (4.25), (4.33) - (4.34) \\ & \mathbb{X}_v \leq \widehat{\mathbb{X}}_v \quad \mathcal{S}_v = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{X}}_v & \mathbb{Y}_v \\ \star & \mathbb{Z}_v \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \mathcal{T}_{1v} \geq \mathbb{I} \quad \mathcal{T}_v = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{1v} & \mathcal{T}_{2v} \\ \star & \mathcal{T}_{3v} \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

où

$$\mathbb{S} = \text{diag}\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_f\}, \quad \mathbb{T} = \text{diag}\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_f\}$$

◇

Algorithme 4.2.

- i) Trouver une solution faisable $\mathbb{X}_{v0}, \mathbb{Y}_{v0}, \mathbb{Z}_{v0}, \hat{\mathbb{X}}_{v0}, \mathcal{Q}_{ijv0}, \mathbb{T}_0, \mathbb{S}_0$. Si il n'existe pas de solution, STOP, l'algorithme a échoué. $h = 0$;
- ii) $\mathbf{V}_h = \mathbb{S}_h, \mathbf{W}_h = \mathbb{T}_h$, et trouver $\mathbb{X}_{v(h+1)}, \mathbb{Y}_{v(h+1)}, \mathbb{Z}_{v(h+1)}, \hat{\mathbb{X}}_{v(h+1)}, \mathcal{Q}_{ijv(h+1)}, \mathbb{T}_{h+1}, \mathbb{S}_{h+1}, \mathbb{T}_{h+1}$ solutions du problème LMI

$$\begin{cases} \min & \text{tr}(\mathbf{V}_h \mathbb{T} + \mathbf{W}_h \mathbb{S}) \\ \text{t.q.} & (4.25), (4.33) - (4.34) \\ & \mathbb{X}_v \leq \hat{\mathbb{X}}_v \quad \mathcal{S}_v = \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{X}}_v & \mathbb{Y}_v \\ \star & \mathbb{Z}_v \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \mathbb{T}_{1v} \geq \mathbb{I} \quad \mathcal{T}_v = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_{1v} & \mathbb{T}_{2v} \\ \star & \mathbb{T}_{3v} \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

iii) si $\text{tr}(\mathbb{T}_{h-1} \mathbb{S}_{h-1} - \mathbb{T}_h \mathbb{S}_h < \varepsilon)$, alors STOP, l'algorithme a échoué.

iv) si $\mathbb{X}_v \leq \mathbb{Y}_v \mathbb{Z}_v^{-1} \mathbb{Y}_v', \forall v \in R$, STOP, les ellipsoïdes de matrices ont été trouvées. Sinon, $h = h + 1$ et retourner à l'étape ii).

4.2.7 Exemple numérique

Soit le système nominal défini par la représentation d'état suivante :

$$A_x = \begin{bmatrix} 0.9993 & 0.2901 & -1.755 & 0.09675 & 0.01602 \\ -5.985 \times 10^{-4} & 0.992 & -2.456 \times 10^{-3} & -2.9 \times 10^{-5} & -4.802 \times 10^{-6} \\ 9.214 \times 10^{-5} & -1.648 \times 10^{-4} & 0.9986 & 4.46 \times 10^{-6} & 7.383 \times 10^{-7} \\ -2.997 \times 10^{-6} & 9.96 \times 10^{-3} & -1.318 \times 10^{-5} & 1 & -1.602 \times 10^{-8} \\ 4.608 \times 10^{-7} & -8.476 \times 10^{-7} & 9.993 \times 10^{-3} & 1.487 \times 10^{-8} & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 1.682 \times 10^{-3} & -1.682 \times 10^{-3} & 0.03312 \\ 0.0234 & -0.0234 & 7.684 \times 10^{-3} \\ 4.416 \times 10^{-4} & -4.416 \times 10^{-4} & -0.01357 \\ 1.171 \times 10^{-4} & -1.171 \times 10^{-4} & 3.845 \times 10^{-5} \\ 2.212 \times 10^{-6} & -2.212 \times 10^{-6} & -6.784 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, E_w = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} \\ 0 & 1 \times 10^{-3} \\ 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, C_y = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

$$C_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce modèle a été obtenu en discrétisant le modèle dynamique du 'McDonnell F-4C Phantom' de l'exemple a) de la section 3.2.3.5 avec une période d'échantillonnage $T_s = 0.01s$.

Nous supposons que ce système est sujet à un défaut actionneur :

- o **Mode 2** : Perte totale de l'aileron gauche.

Il s'en suit que $S = \{1, 2\}$, où le **mode 1** représente le cas nominal (sans défauts). Le processus défaut est supposé Markovien. Le processus FDI est aussi Markovien avec $R = \{1, 2\}$.

La matrice de probabilités de transition du processus défaut actionneur est donnée par :

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de probabilités de transition du processus FDI est donnée comme suit

$$[\gamma_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}, [\gamma_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

La figure 4.3 nous montre le tracé des deux ellipsoïdes de gains de retour de sortie correspondant au cas nominal ($\psi_k = 1$) et au cas défectueux ($\psi_k = 2$) pour $\gamma_\infty^2 = \gamma_2^2 = 50$. Les gains de retour de sortie centraux (centres des ellipsoïdes) sont donnés par

$$\mathcal{K}'_{10} = \begin{bmatrix} 0.0400 & 0.2623 & 0.0992 \end{bmatrix}, \mathcal{K}'_{20} = \begin{bmatrix} 0.0352 & 1.3639 & 0.3612 \end{bmatrix}.$$

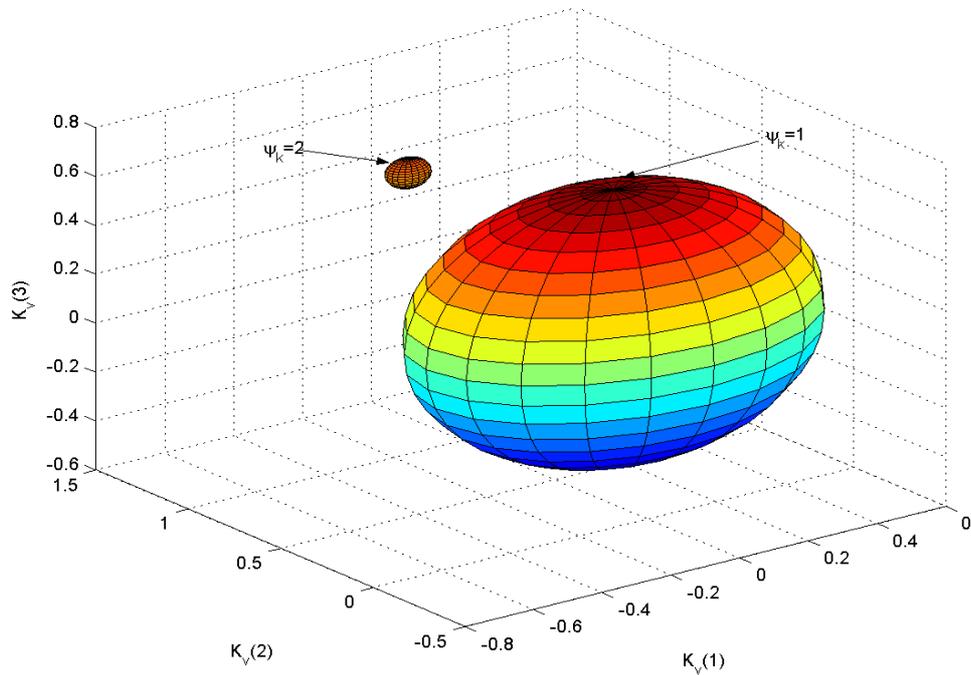


FIG. 4.3 – Ellipsoïdes de gains de retour de sortie

Comme pour le cas des systèmes à temps continu, la méthode de synthèse ainsi mise en oeuvre nous permet d'avoir des ensembles de gains décrits par des ellipsoïdes. Tous les éléments de ces ellipsoïdes garantissent les mêmes propriétés. Ces ellipsoïdes peuvent être utilisées pour l'évaluation de la résilience du système en boucle fermée (voir chapitre 2).

4.2.8 Conclusion

Dans cette première partie de chapitre, nous avons abordé la problématique de commande multi-critères par retour statique de sortie des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens en temps discret. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation stochastique du système en boucle fermée, des performances \mathcal{H}_2 ainsi que des performances \mathcal{H}_∞ .

Nous avons proposé deux caractérisations NLMI de correcteurs statiques par retour de sortie stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. La première caractérisation s'appuie sur les travaux de [dOBG99]. Elle est formulée sous forme de problème de faisabilité d'inégalités matricielles linéaires sous une contrainte égalité. Un algorithme d'optimisation de type complémentarité sur le cône a été proposé pour la résolution numérique de ces conditions. Ces résultats théoriques ont été validés sur un exemple de simulation.

La seconde caractérisation s'appuie sur le formalisme *ellipsoïdes de matrices*. Ce formalisme permet notamment la synthèse de correcteurs sujets à des spécifications sur les gains de commande. Les différentes conditions de synthèse étant établies en termes de faisabilité d'inégalités matricielles linéaires sous des contraintes de type inégalités matricielles non linéaires, leur résolution numérique reste un problème délicat. Un algorithme d'optimisation itératif de type complémentarité sur le cône a été là aussi proposé et mis en oeuvre sur un exemple de simulation.

4.3 Systèmes commandés par réseaux

Les systèmes commandés par réseau (NCSs pour Networked Control Systems) sont des boucles de régulation fermées par un réseau de communication en temps réel. En effet, dans les NCSs, les réseaux sont utilisés afin d'échanger des informations et des signaux de commande (entrée de référence, sortie mesurée du système, entrée de commande, *etc.*) entre les différents composants du système de commande (capteurs, contrôleurs, actionneurs, *etc.*). Les NCSs constituent une nouvelle classe de systèmes, introduisant des problèmes spécifiques liés à la présence de retards, à la perte d'information, ou à la gestion du flux de données. Ces contraintes prennent une importance considérable lors de la commande de procédés rapides pour lesquels les caractéristiques du réseau ne peuvent plus être négligées. Nous retrouvons notamment ce genre de systèmes dans des domaines d'application complexes tels que l'automobile, l'aéronautique, l'aérospatiale, ou plus généralement tout système complexe géré au travers d'un réseau dédié [WYB02, Wit05]. Par ailleurs, ces systèmes complexes peuvent induire des effets catastrophiques suite à l'occurrence d'un défaut ou d'une panne sur l'un de leurs composants. Il est donc primordial d'intégrer des spécifications de tolérance aux défauts dans le cahier des charges de tels systèmes.

Le canal de communication entre le système et le contrôleur est souvent modélisé comme une ligne de transmission, c'est-à-dire un élément physique induisant un retard constant, dépendant des propriétés structurelles de la ligne. Cette description devient plus complexe lorsque le système est commandé au travers d'un réseau utilisé par de multiples utilisateurs. Dans ce cas, le retard induit ne dépend plus seulement d'éléments physiques mais aussi et surtout des algorithmes mis en place pour la gestion du

trafic sur le réseau et le codage de l'information. Le canal de communication utilisé pour la commande du système considéré subi l'influence de tous les autres flux de données présents sur le réseau. Un réseau peut être caractérisé par deux éléments de première importance lors de sa modélisation [Wit05] :

- la gestion du flux de données au niveau local (émetteur/récepteur), où les mesures physiques sont converties en unités d'information à transmettre,
- la gestion du flux de données au niveau global, où un algorithme gère les interactions entre les différents flux, évitant ainsi par exemple les collisions ou la perte de paquets induits par une surcharge du réseau.

Lors de l'émission, la gestion des données dépend du protocole utilisé et de son implémentation. La taille, la fréquence d'émission et la priorité des paquets peuvent ainsi être ajustées, en prenant éventuellement en compte des consignes issues de la gestion globale du réseau.

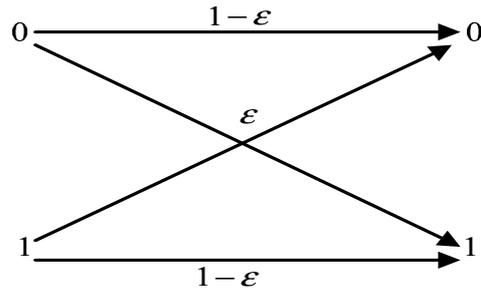
Après un bref aperçu de modèles élémentaires de canaux de communication, nous verrons dans ce chapitre des exemples de réseaux à utilisateurs multiples et les différentes problématiques induites par la commande des systèmes en réseau. Nous mettrons ensuite l'accent sur la problématique spécifique traitée dans ce travail, à savoir la stabilisation stochastique et la commande multi-critères des NCSs sujets à des retards aléatoires et à des pannes pouvant affecter les différents composants du système.

4.3.1 Modèles de canal de communication

Le canal de communication est envisagé de différentes façons selon le domaine d'application dans lequel il est utilisé. Dans le cadre de la théorie de l'information, celui-ci est considéré comme une source de corruption de l'information. Ainsi la communication de données binaires s'effectue, en prenant comme exemple un modèle de type Shannon- Weaver [SW49], avec une corruption de donnée de probabilité ϵ . Ceci signifie qu'un 0 émis a une probabilité de $1 - \epsilon$ de conduire à la réception d'un 0 et une probabilité de ϵ de conduire à la réception d'un 1, comme illustré dans la figure 4.4. Une autre approche plus fréquemment utilisée dans le cadre de l'automatique, consiste à considérer le canal comme une source de retard dans la communication. La transmission est supposée fidèle et le problème de modélisation revient à établir le modèle de retard le plus proche de celui subi par les données. Dans ce travail, nous considérons le canal de communication comme une source de retards aléatoires. Dans ce qui suit, et de manière non exhaustive, deux modèles élémentaires de canal de communication, où le retard apparaît comme une variable aléatoire, sont présentés. La première approche considère le canal comme un retard pur, variable et discret. Le dernier modèle (aussi basé sur un retard pur) décrit quand à lui le réseau de communication comme un ensemble d'états, chacun étant caractérisé par une distribution spécifique de retards. Le lecteur intéressé par un état de l'art plus détaillé peut se référer par exemple à [Wit05].

4.3.1.1 Système à retard variable

Cette approche considère le canal de transmission comme un retard variable dans le temps (celui-ci étant la principale source d'instabilité du système). Le retard peut alors être caractérisé par un modèle déterministe, une distribution probabiliste ou encore une chaîne de Markov. Ce dernier exemple est

FIG. 4.4 – Modèle de type *Shannon-Weaver*.

étudié dans [KOC⁺92] et induit le modèle de retard présenté dans la figure 4.5. La chaîne de Markov est utilisée pour fixer l'un des β_i à un, les autres valant zéro, ce qui permet de permuer entre les différentes valeurs du retard. Le signal échantillonné y_k est ainsi retardé d'un nombre d'échantillons $i\Delta$ du fait du β_i non nul. Le système distant reçoit le signal w_k .

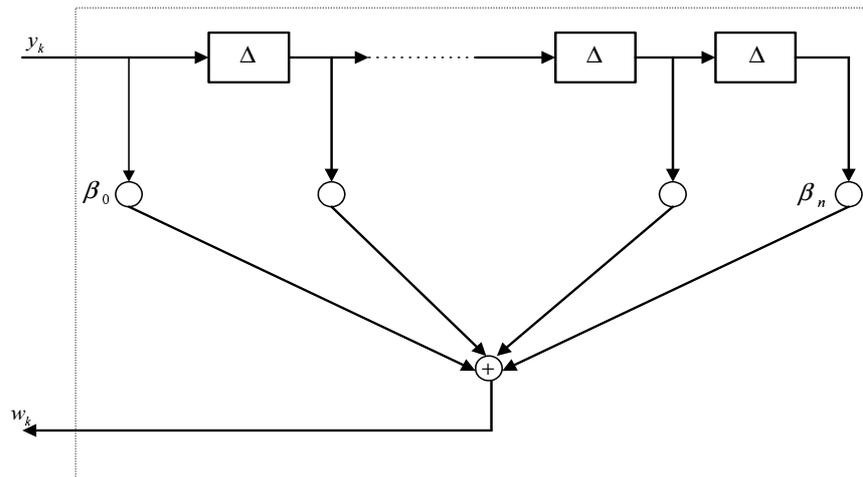


FIG. 4.5 – Modèle de retard variable.

4.3.1.2 Ensemble de modèles

Le réseau de communication peut être aussi considéré comme un système ayant différents modes de fonctionnement, en fonction de la quantité d'information qu'il doit gérer. Dans ce cas, différents modèles peuvent être appliqués selon l'état global du réseau. Ainsi dans [NBW98], le réseau est modélisé en utilisant une chaîne de Markov à multiples états, pour lesquels l'état r_k correspond à la charge du réseau (distribution probabiliste du retard de transmission). Un exemple de ce modèle est présenté dans la figure 4.6 avec trois niveaux de charge. La probabilité de distribution pour r_k peut ensuite être établie en utilisant une matrice de transition, la probabilité de l'état et le vecteur de distribution de l'état du modèle de Markov.

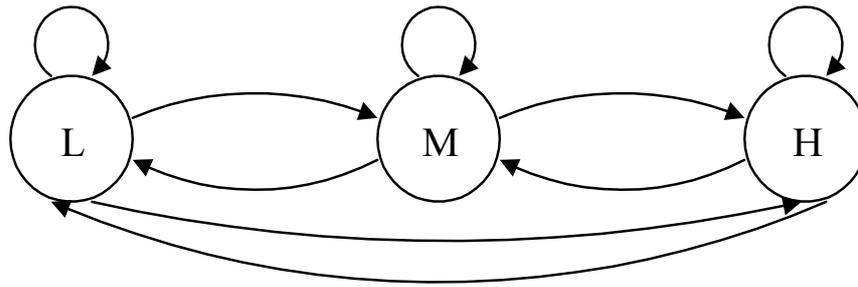


FIG. 4.6 – Réseau modélisé comme une chaîne de Markov à trois niveaux de charge : bas (L), moyen (M) et haut (H).

4.3.2 Modèles de protocoles

Les modèles de protocoles sont difficiles à établir, l'interaction entre les différents utilisateurs ne pouvant être prédite. Néanmoins, des résultats concernant des modèles moyens permettent de comprendre les principaux processus mis en jeu et de mettre en valeur les propriétés principales des réseaux. Trois modèles différents de protocoles sont présentés, illustrant les principaux réseaux de communication utilisés dans l'industrie.

4.3.2.1 Bus de terrain : CAN

Le bus de terrain CAN (Controller Area Network) a été développé par la compagnie allemande Bosch pour des applications en industrie. CAN est définie dans les standards ISO 11898 et 11519-1 [NBW98]. Il est caractérisé par l'utilisation de niveaux de priorité pour l'émission des messages (229 niveaux). Son débit est au maximum de 1Mbit/s, pour une longueur de 40m. Un noeud peut émettre à tout instant si le bus est silencieux mais c'est le message à plus haut niveau de priorité qui a l'accès au bus (au travers du contrôleur central du bus) si deux noeuds tentent d'émettre au même instant. Le délai de transmission induit par ce système a été étudié dans [NBW98], où il est décomposé comme la somme de trois retards : le temps d'attente de fin de l'émission en cours, le temps d'attente que les messages à priorité supérieure soient émis, et le temps de transmission du message considéré. Des résultats expérimentaux ont montré que des fonctions de densité probabiliste sont suffisantes pour établir des modèles simples, mais qu'un modèle de Markov peut être utilisé pour des représentations plus complexes.

4.3.2.2 Réseaux locaux : Ethernet

Les réseaux locaux (souvent dénommés LAN, pour Local Area Networks) sont largement répandus et habituellement utilisés pour connecter des ordinateurs dans les réseaux privés. Leur taille est limitée, rendant le retard connu et borné, et ils ont un taux de transmission élevé. Ethernet constitue un exemple courant de réseau LAN en bus, sans contrôleur centralisé. L'accès au bus peut être effectué par protocole à détection de porteuse (CSMA - Carrier Sense Multiple Access) avec détection de collision (CD - Collision Detection). Avec cette méthode l'émission débute seulement si le canal est libre, mais deux (ou plus) émetteurs peuvent décider d'émettre en même temps, ce qui induit une

collision. Cette dernière est automatiquement détectée et les deux émetteurs arrêtent leur émission, pour la reprendre après un temps aléatoire. Les caractéristiques du retard dépendent fortement de la charge du réseau, rendant Ethernet très difficile à modéliser.

4.3.2.3 Réseaux longue distance : Protocole de transfert

Les réseaux grande distance ou WAN (Wide Area Network) sont caractérisés par la présence d'un ou plusieurs routeurs et de commutateurs, qui gèrent et distribuent l'information. La principale influence du routeur est d'induire une file d'attente où sont stockés les messages avant d'être retransmis. Notons que ce problème apparaît également dans les LAN, où les commutateurs sont de plus en plus utilisés. Lorsque les flux d'entrée dans le routeur sont trop importants, celui-ci devient congestionné et des paquets d'information sont perdus. L'émetteur peut être informé des paquets reçus par l'envoi d'acquittements (acknowledgements) par le destinataire. Un flux de données passant par un routeur est présenté dans la figure 4.7 [Wit05]. Un modèle moyen déterministe du retard est disponible pour différents types de réseaux, notamment pour ceux à file d'attente [GH98]. Le protocole de contrôle de transfert TCP (Transfer Control Protocol) est un exemple classique de protocole utilisé dans les réseaux longue distance et LAN, mis en place aux deux extrémités du canal de communication afin de permettre aux utilisateurs d'émettre et de recevoir des données au travers d'internet. C'est un protocole dit sécurisé, dans le sens où tout paquet perdu est réémis. Son objectif principal est de maximiser le taux de transmission de l'utilisateur en ajustant la taille de la fenêtre d'émission de l'utilisateur en fonction de la congestion du réseau, exprimée par le nombre de paquets perdus.

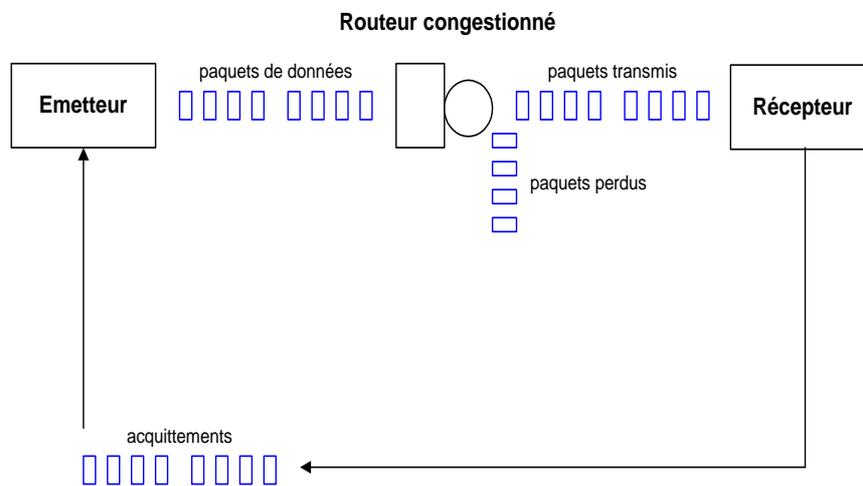


FIG. 4.7 – Exemple de flux dans un réseau comportant un routeur.

4.3.3 Problématiques

La présence d'un réseau dans la boucle de commande induit de nombreuses problématiques spécifiques telles que [Wit05] :

- la quantification du signal lors de l'émission/réception des paquets d'information,
- la compression/décompression des informations transitant par le réseau,

- la perte de paquets due à la congestion du réseau,
- la gestion du trafic par le routeur afin de garantir la stabilité ou la performance du système considéré lors de la congestion,
- la stabilisation des systèmes en présence de retard,
- la prise en compte de la bande passante disponible (dépendante de l'état d'occupation du réseau) lors de la synthèse du contrôleur.

Dans le travail présenté ci-dessous, nous positionnons le problème de commande par l'intermédiaire d'un réseau de communication dans le cadre de la transmission avec retard. Plus particulièrement, le retard sera considéré aléatoire. Avant d'établir nos principaux résultats, nous donnons dans ce qui suit un bref état de l'art sur la commande des NCSs avec retard.

4.3.4 Présence de retards

Un élément fondamental induit par la présence du réseau dans la boucle de commande est la présence de retards entre les capteurs et le correcteur, et entre le correcteur et les actionneurs. Les retards induits par le réseau de communication peuvent être constants, variants dans le temps, et dans la plupart des cas, aléatoires. L'occurrence de retards dans la boucle de commande peut conduire à une dégradation des performances du système, voire à l'instabilité de ce dernier. Dans [NBW98], l'analyse de la stabilité ainsi que la synthèse de lois de commande pour les NCSs ont été étudiées en considérant que le retard induit par le réseau de communication à chaque période d'échantillonnage est aléatoire et inférieur à une période d'échantillonnage. Dans [ZBP01], la stabilité des NCSs a été analysée en s'appuyant sur une approche *systèmes hybrides* et cela dans le cas où le retard induit est déterministe (constant ou variant dans le temps); et dans [LZA03], une approche *systèmes à commutation (switched systems)* a été utilisée pour étudier la stabilité des NCSs. Dans [YWaGX04], la problématique de détermination du retard induit maximal préservant la stabilité du système en boucle fermée a été considérée. Dans [XW04], le retard induit par le réseau est supposé variant dans le temps et inférieur à une période d'échantillonnage.

Il est à noter que dans tous les travaux ci-dessus, le système est considéré à temps continu. Le cas des systèmes à temps discret a été traité par [KOC⁺92] et [XHH00] où les retards aléatoires induits par le réseau de communication ont été modélisés par une chaîne de Markov à temps discret et à espace d'état fini. Le problème de stabilisation des NCSs est alors considéré sous le formalisme (MJLS). Comme nous l'avons mentionné dans les chapitres précédents, il existe une littérature très abondante traitant de la stabilisation, de la commande optimale, de la commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ainsi que différentes applications de cette classe de systèmes. Nous citons par exemple [Bou06, Bou05, Bou99, CZT03, dFGdVC00, dSF93, DM02, DMS04, JC90, JC92] pour le cas des systèmes à temps continu et [CFM05] pour le cas des systèmes à temps discret.

Nous allons dans ce qui suit définir le modèle dynamique des systèmes commandés par réseaux considéré dans ce travail. Ce modèle représente une classe de systèmes à sauts Markoviens en temps discret où deux processus Markoviens sont définis. Le premier modélise l'effet du retard induit par le réseau de communication, et le second représente les différents défauts pouvant affecter les composants

du système.

4.3.5 Modèle dynamique

Considérons la classe des systèmes dynamiques stochastiques, définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , donnée comme suit :

$$\varphi : \begin{cases} x_{k+1} = A_x(\eta_k)x_k + B_u(\eta_k)u(y_k, k) + B_w(\eta_k)w_k \\ y_k = C_y x_k \\ z_k = C_z(\eta_k)x_k + D_z(\eta_k)u(y_k, k) \end{cases} \quad (4.46)$$

où

- $x_k \in \mathbb{R}^n$: état du système ;
- $u(y_k, k) \in \mathbb{R}^r$: entrée de commande du système ;
- $y_k \in \mathbb{R}^q$: sortie mesurée du système ;
- $z_k \in \mathbb{R}^p$: sortie commandée du système ;
- $w_k \in \mathbb{R}^m$: perturbations externes ;
- $\{\eta_k, k \geq 0\}$: processus aléatoire décrivant les défauts affectant le système,
- $A_x(\eta_k), B_u(\eta_k), E_w(\eta_k), C_z(\eta_k)$ et $D_z(\eta_k)$: matrices aléatoires de dimensions appropriées.

Nous supposerons par la suite que le processus η_k est un processus Markovien à temps discret et à espace d'état fini $\mathcal{I} = \{1, \dots, \nu\}$. La probabilité de transition de l'état i à l'état l , ($i, l \in \mathcal{I}$), du processus η_k est donnée par α_{il} , *i.e.*

$$\alpha_{il} = P\{\eta_{k+1} = l \mid \eta_k = i\} \quad (4.47)$$

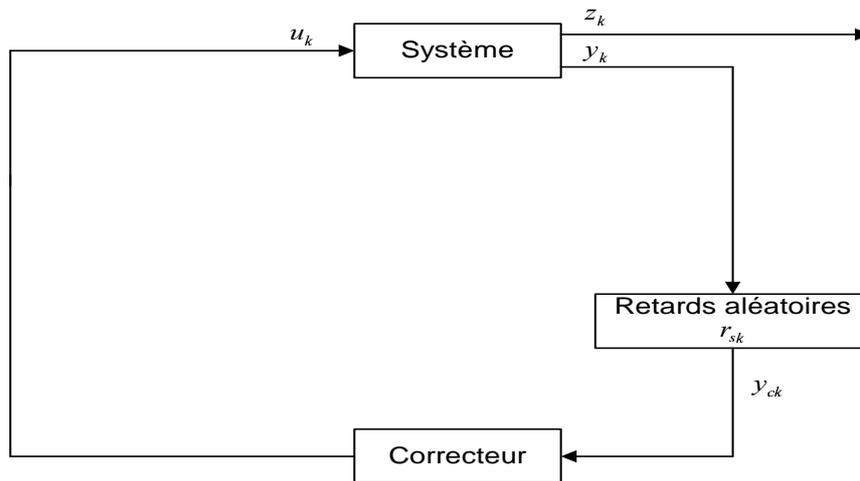


FIG. 4.8 – Système commandé par réseaux : retards r_{sk}

Nous supposerons aussi qu'il existe des retards aléatoires bornés entre les capteurs et le correcteur (figure 4.8). La loi de commande par retour de sortie statique est donnée dans ce cas là comme suit

$$\varphi_s : \left\{ u(y_k, r_{sk}, k) = \mathcal{K}y_{ck} = \mathcal{K}C_y x_{k-r_{sk}} \right. \quad (4.48)$$

où $\{r_{sk}\}$ est une séquence d'entiers aléatoires bornée avec $0 \leq r_{sk} \leq d_s < \infty$, et d_s est connu.

Remarque 4.4 Nous pouvons utiliser des correcteurs dépendant du retard si nous connaissons la valeur de ce dernier en temps réel, ce qui est le cas si nous utilisons des données datées (time-stamped data) dans le réseau de communication. La loi de commande est donnée dans ce cas là par

$$\varphi_s : \left\{ u(y_k, r_{sk}, k) = \mathcal{K}_{r_{sk}} y_{ck} = \mathcal{K}_{r_{sk}} C_y x_{k-r_{sk}} \right. \quad (4.49)$$

Remarque 4.5 Les résultats qui seront développés dans cette section peuvent aisément s'appliquer au cas de la présence additionnelle de retards entre le correcteur et les actionneurs r_{ak} (figure 4.9) et cela en modélisant r_{ak} par une autre chaîne de Markov à temps discret et à espace d'état fini. Cette dernière est supposée indépendante des autres processus aléatoires. La loi de commande est donnée dans ce cas là par

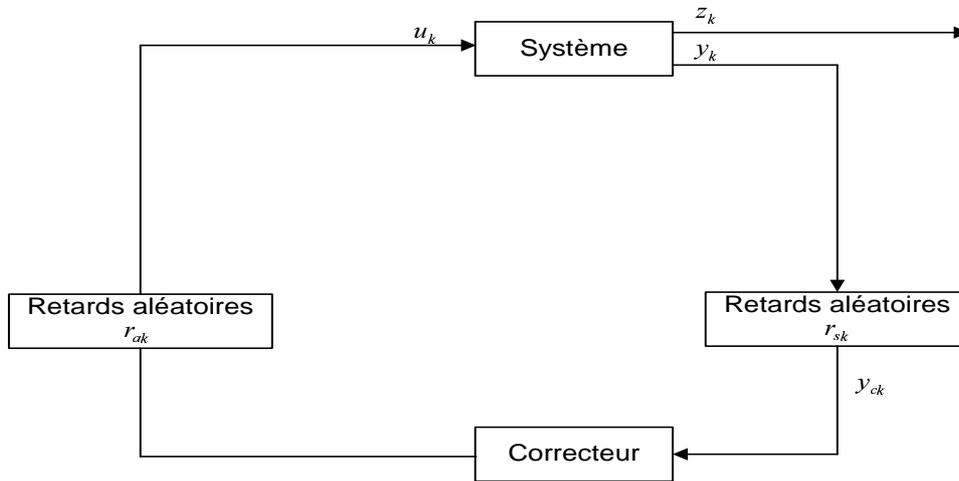


FIG. 4.9 – Système commandé par réseaux : retards r_{sk} et retards r_{ak}

$$\varphi_s : \left\{ u(y_k, r_{sk}, r_{ak}, k) = \mathcal{K} C_y x_{k-r_{sk}-r_{ak}} \right. \quad (4.50)$$

En augmentant le vecteur d'état comme suit

$$\tilde{x}_k = [x'_k \ x'_{(k-1)} \ \dots \ x'_{(k-d_s)}]'$$

où $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^{(d_s+1)n}$, le système en boucle fermée devient

$$\varphi_{cl} : \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \left(\tilde{A}_x(\eta_k) + \tilde{B}_u(\eta_k) \mathcal{K} \tilde{C}_y(r_{sk}) \right) \tilde{x}_k + \tilde{B}_w(\eta_k) w_k \\ y_k = \tilde{C}_y(r_{sk}) \tilde{x}_k \\ z_k = \left(\tilde{C}_z(\eta_k) + D_z(\eta_k) \mathcal{K} \tilde{C}_y(r_{sk}) \right) \tilde{x}_k \end{cases} \quad (4.51)$$

où

$$\tilde{A}_x(\eta_k) = \begin{bmatrix} A_x(\eta_k) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{B}_u(\eta_k) = \begin{bmatrix} B_u(\eta_k) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{B}_w(\eta_k) = \begin{bmatrix} B_w(\eta_k) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_y(r_{sk}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & C_y & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_z(\eta_k) = \begin{bmatrix} C_z(\eta_k) & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

et tous les éléments de $\tilde{C}_y(r_{sk})$ sont nuls excepté le bloc $(r_{sk} + 1)$. Ce dernier étant la matrice C_y .

L'une des difficultés de cette approche réside dans la modélisation de la séquence r_{sk} . Dans le cadre de ce travail, les transitions du processus aléatoire r_{sk} sont modélisées par une chaîne de Markov à temps discret et à espace d'état fini $S = \{0, \dots, d_s\}$ [KOC⁺92, XHH00, ZSCH05]. Dans ce cas, nous avons

$$P\{r_{s(k+1)} = j \mid r_{sk} = i\} = p_{ij} \quad (4.52)$$

où $0 \leq i, j \leq d_s$. Ce modèle est relativement général. En effet, il permet la prise en compte, de manière naturelle, des pertes de packets dans le réseau de communication [XHH00, ZSCH05]. L'hypothèse principale dans ce contexte est que le correcteur utilise à chaque instant les données les plus récentes : si nous avons $y_{(k-r_{sk})}$ à l'instant k , mais qu'il n'y a pas de nouvelle information à l'instant $k + 1$ (données perdues ou retard trop important), alors les données $y_{(k-r_{sk})}$ peuvent être utilisées. Dans ce modèle de systèmes commandés par réseaux (figure 4.8), le retard r_{sk} peut alors croître de 1 au plus à chaque pas, ce qui conduit à la contrainte

$$P\{r_{s(k+1)} > r_{sk} + 1\} = 0$$

A l'inverse, le retard r_{sk} peut décroître d'autant de pas que possible. La décroissance de r_{sk} modélise la perte de packets dans le réseau ou la non prise en compte de données antérieures si des données plus récentes sont disponibles au même instant [XHH00, ZSCH05]. La structure de la matrice de probabilités de transition du processus retard r_{sk} est alors donnée comme suit

$$P_s = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p_{(d_s-1)d_s} \\ p_{d0} & p_{d1} & p_{d2} & p_{d3} & \dots & p_{d_s d_s} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

où

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \text{ et } \sum_{j=0}^{d_s} p_{ij} = 1 \quad (4.54)$$

Les éléments sur la diagonale de la matrice de transition représentent les probabilités que les données arrivent en séquence avec des retards égaux. Les éléments au dessus de la diagonale sont les probabilités d'occurrence de retards plus importants et les éléments en dessous de la diagonale indiquent une perte de packets ou la non prise en compte de données antérieurs si des données plus récentes sont disponibles au même instant.

4.3.6 Résultats préliminaires

Avant d'établir nos principaux résultats, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires nécessaires à la bonne lecture de cette partie. Nous allons dans un premier temps définir la notion de stabilité stochastique traitée dans le cadre des NCSs puis nous introduirons quelques résultats portant sur la stabilisation stochastique du NCSs.

Dans ce qui suit, et sans perte de généralité, nous supposons que le point d'équilibre, $\tilde{x} = 0$, est la solution en laquelle les propriétés de stabilité sont examinées.

Définition 4.3 *Le système 4.51 avec $u_k = 0$ et $w_k = 0$ est dit Stochastiquement stable si pour toute condition initiale $(\tilde{x}_0, r_{s0}, \eta_0)$, la relation suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|\tilde{x}_k(x_0, r_{s0}, \eta_0)\|^2 \mid \tilde{x}_0, r_{s0}, \eta_0 \right\} < \infty \quad (4.55)$$

Le corollaire suivant donne une condition nécessaire et suffisante de stabilisation stochastique du système (4.51).

Corollaire 4.4 Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Le système (4.51) est stochastiquement stabilisé par φ_s ;
- ii) Les inégalités matricielles

$$\bar{A}'_{ij} \bar{\mathcal{P}}_{ij} \bar{A}_{ij} - \mathcal{P}_{ij} < 0, \quad \forall i \in \mathfrak{I}, j \in S. \quad (4.56)$$

sont faisables pour des matrices \mathcal{K} et $\mathcal{P}_{ij} > 0$, où

$$\bar{A}_{ij} = \tilde{A}_{xi} + \tilde{B}_{ui} \mathcal{K} \tilde{C}_{yj}; \quad \bar{\mathcal{P}}_{ij} = \sum_{v=1}^{d_s} p_{jv} \sum_{m=1}^{\nu} \alpha_{im} \mathcal{P}_{mv}$$

- iii) Pour tout $\mathbf{Q} = (Q_{11}, \dots, Q_{ij}, \dots, Q_{vd_s})$ avec $Q_{ij} > 0$, il existe un unique

$\mathbf{P} = (\mathcal{P}_{11}, \dots, \mathcal{P}_{ij}, \dots, \mathcal{P}_{vd_s})$ avec $\mathcal{P}_{ij} > 0$ vérifiant les équations de Lyapunov couplées suivantes

$$\bar{A}'_{ij} \bar{\mathcal{P}}_{ij} \bar{A}_{ij} - \mathcal{P}_{ij} + Q_{ij} = 0 \quad \forall i \in \mathfrak{I}, j \in S. \quad (4.57)$$

◇

4.3.7 Principaux résultats

4.3.7.1 Stabilisation stochastique

Dans ce paragraphe, nous allons, dans un premier temps établir une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation stochastique du système (4.51). La condition ainsi obtenue est formulée comme un problème de faisabilité d'inégalités matricielles sous une contrainte égalité de la forme $\mathcal{P}\mathcal{X} = \mathbb{I}$. Dans un second temps, une caractérisation par ellipsoïdes de matrices du correcteur statique stabilisant stochastiquement le système (4.51) sera également donnée.

Une caractérisation par inégalités matricielles non linéaires du compensateur (φ_s) stabilisant stochastiquement le système (4.51) est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 4.5 Le système en boucle fermée (4.51) est stochastiquement stable si et seulement si il existe une matrice \mathcal{K} , des matrices $\bar{\mathcal{G}}_{ij}$ et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{ij} > 0$, $\mathcal{X}_{ij} > 0$ vérifiant les inégalités matricielles couplées suivantes

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{ij} & \bar{A}'_{ij} & \mathbf{0} \\ \star & -\bar{\mathcal{G}}_{ij} - \bar{\mathcal{G}}'_{ij} & \bar{\mathcal{G}}_{ij}\mathbb{R}_{ij} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{X}} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.58)$$

sous les contraintes

$$\mathcal{P}_{ij}\mathcal{X}_{ij} = \mathbb{I} \quad (4.59)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{X}} = \text{diag}\{\bar{\mathcal{T}}_1, \bar{\mathcal{T}}_2, \dots, \bar{\mathcal{T}}_\nu\}; \\ \bar{\mathcal{T}}_1 = [\mathcal{X}_{11}, \mathcal{X}_{12}, \dots, \mathcal{X}_{1d_s}]; \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{T}}_\nu = [\mathcal{X}_{\nu 1}, \mathcal{X}_{\nu 2}, \dots, \mathcal{X}_{\nu d_s}]; \\ \mathbb{R}_{ij} = [\Gamma_{1ij}, \Gamma_{2ij}, \dots, \Gamma_{\nu ij}]; \\ \Gamma_{1ij} = [\sqrt{\alpha_{i1}p_{j1}}, \sqrt{\alpha_{i1}p_{j2}}, \dots, \sqrt{\alpha_{i1}p_{jd_s}}]; \\ \vdots \\ \Gamma_{\nu ij} = [\sqrt{\alpha_{i\nu}p_{j1}}, \sqrt{\alpha_{i\nu}p_{j2}}, \dots, \sqrt{\alpha_{i\nu}p_{jd_s}}]; \end{cases}$$

Si (4.58)-(4.59) sont faisables, alors la loi de commande par retour statique de sortie correspondant est donnée par

$$u_k = \mathcal{K}y_k$$

◇

Preuve La preuve de ce corollaire est similaire à celle de la proposition 4.2. ■

En se basant sur le corollaire 4.4, une caractérisation en terme d'ellipsoïde de matrices du compensateur (φ_s) stabilisant stochastiquement le système (4.51) est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 4.6 Le système (4.51) est stochastiquement stable si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}'_{ij} > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{xi} & \tilde{B}_{ui} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{ij} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{\mathcal{P}}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{xi} & \tilde{B}_{ui} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \tilde{C}_{yj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{yj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

et l'inégalité matricielle non linéaire donnée comme suit

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}' \quad (4.61)$$

$\forall i \in \mathfrak{I}, j \in \mathfrak{S}$.

Soit $\{\mathcal{P}_{ij}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ une solution, alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde, non vide, est un ensemble de gains stabilisants. \diamond

Preuve La preuve de ce corollaire est similaire à celle de la proposition 4.3. \blacksquare

4.3.7.2 Commande \mathcal{H}_∞

Soit le système (4.46) avec

$$z_k = z_{\infty k} = C_\infty(\eta_k)x_k + D_\infty(\eta_k)u(y_k, k)$$

où l'indice ' ∞ ' est relatif à des performances \mathcal{H}_∞ .

Dans cette section, nous abordons la problématique de synthèse de correcteurs par retour statique de sortie stabilisant stochastiquement le système (4.51) et assurant un niveau de réjection de perturbations $\gamma_\infty > 0$.

Par analogie aux résultats établis dans les paragraphes précédents, le problème de commande \mathcal{H}_∞ stochastique peut être formulé comme suit :

Pour un niveau de performance \mathcal{H}_∞ (γ_∞) donné, trouver un gain de retour statique de sortie \mathcal{K} tel que

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z'_{\infty k} z_{\infty k} \right\} < \gamma_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} w'_k w_k \quad (4.62)$$

i.e.

$$\| z_\infty \|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_\infty \| w \|_2$$

Dans ce cas, le système en boucle fermée (4.51) est stochastiquement stable et possède un niveau de performance \mathcal{H}_∞ sur $[0, \infty)$ donné par γ_∞ .

Comme précédemment, et en se basant sur le lemme réel borné des systèmes linéaires à sauts Markoviens et à temps discret nous pouvons établir le corollaire suivant donnant une condition nécessaire et suffisante de résolution du problème de commande \mathcal{H}_∞ en terme d'inégalités matricielles non linéaires.

Corollaire 4.7 Le système (4.51) est stochastiquement stable et $\|\varphi_{cl}\|_\infty < \gamma_\infty$ si et seulement si il existe une matrice \mathcal{K} et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{\infty ij} > 0$ vérifiant les inégalités matricielles couplées suivantes

$$\begin{bmatrix} \bar{A}'_{ij} \bar{\mathcal{P}}_{ij} \bar{A}_{ij} - \mathcal{P}_{ij} + \bar{C}'_{\infty ij} \bar{C}_{\infty ij} & \bar{A}'_{ij} \bar{\mathcal{P}}_{ij} \tilde{B}_{wi} \\ \star & -(\gamma_\infty^2 \mathbb{I} - \tilde{B}'_{wi} \bar{\mathcal{P}}_{ij} \tilde{B}_{wi}) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.63)$$

où

$$\bar{C}_{\infty ij} = \tilde{C}_{\infty i} + D_{\infty i} \mathcal{K} \tilde{C}_{y j}$$

◇

Nous sommes maintenant en position d'introduire nos résultats portant sur la commande \mathcal{H}_∞ stochastique par retour statique de sortie des NCSs à sauts Markoviens et à temps discret.

Corollaire 4.8 Le système (4.51) est stochastiquement stabilisé par φ_s et $\|\varphi_{cl}\|_\infty < \gamma_\infty$ si et seulement si il existe une matrice \mathcal{K} , des matrices $\bar{\mathcal{G}}_{\infty ij}$ et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{\infty ij} > 0$, $\mathcal{X}_{\infty ij} > 0$ vérifiant les inégalités matricielles suivantes

$$\begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{P}_{ij} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{C}'_{\infty ij} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{A}'_{ij} \\ \tilde{B}'_{wi} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \star & -\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{G}}_{ij} - \bar{\mathcal{G}}'_{ij} & \bar{\mathcal{G}}_{ij} \mathbb{R}_{ij} \\ \star & \star & \star & -\bar{\mathcal{X}} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.64)$$

sous les contraintes

$$\mathcal{P}_{ij} \mathcal{X}_{ij} = \mathbb{I} \quad (4.65)$$

Si (4.64)-(4.65) sont faisables, alors \mathcal{K} est un gain de retour statique de sortie stabilisant stochastiquement le système (4.51) et garantissant un niveau de performance \mathcal{H}_∞ donné par γ_∞ . ◇

Preuve La preuve de ce corollaire est similaire à celle de la proposition 4.5. ■

En se basant sur le corollaire 4.7, une caractérisation en terme d'ellipsoïde de matrices du compensateur (φ_s) stabilisant stochastiquement le système (4.51) et assurant des performances \mathcal{H}_∞ est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 4.9 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ij} = \mathcal{P}'_{\infty ij} > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' > 0$ vérifiant les LMIs suivantes

$$\mathbb{M}'_{1i} \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{\infty ij} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{\mathcal{P}}_{\infty ij} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{1i} < \mathbb{M}'_{2i} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{2i} + \mathbb{M}'_{3j} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \mathbb{M}_{3j} \quad (4.66)$$

et l'inégalité non linéaire suivante

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (4.67)$$

$\forall i \in Z, j \in S$, où

$$\mathbb{M}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{xi} & \tilde{B}_{wi} & \tilde{B}_{ui} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{2i} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\infty i} & \mathbf{0} & D_{\infty i} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{3j} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{yj} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est un ensemble de gains stabilisants stochastiquement le système (4.51) tel que

$$\|z_{\infty}\|_{\mathcal{E}_2} < \gamma_{\infty} \|w\|_2$$

◇

Preuve La preuve de ce corollaire est similaire à celle de la proposition 4.6. ■

4.3.7.3 Commande \mathcal{H}_2

Soit le système (4.46) avec

$$z_k = z_{2k} = C_2(\eta_k)x_k + D_2(\eta_k)u(y_k, k)$$

z_{2k} est la sortie à commander pour laquelle des performances \mathcal{H}_2 sont considérées.

En s'appuyant sur la même méthodologie que celle utilisée dans la résolution de la problématique de commande \mathcal{H}_{∞} des NCSs, des résultats de commande \mathcal{H}_2 sont obtenus et sont résumés comme suit.

Corollaire 4.10 si il existe une matrice \mathcal{K} , des matrices $\bar{\mathcal{G}}_{2ij}$ et des matrices symétriques $\mathcal{P}_{2ij} > 0$, $\mathcal{X}_{2ij} > 0$ vérifiant les inégalités matricielles suivantes

$$\sum_{i,j} \text{tr}(\tilde{B}'_{wi} \mathcal{P}_{2ij} \tilde{B}_{wi}) < \gamma_2^2 \quad (4.68)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{2ij} & \bar{A}'_{ij} & \mathbf{0} & \bar{C}'_{2ij} \\ \star & -\bar{\mathcal{G}}_{2ij} - \bar{\mathcal{G}}'_{2ij} & \bar{\mathcal{G}}_{2ij} \mathbb{R}_{2ij} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\bar{\mathcal{X}}_{2ij} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.69)$$

sous les contraintes

$$\mathcal{P}_{2ij} \mathcal{X}_{2ij} = \mathbb{I} \quad (4.70)$$

$\forall i \in \mathfrak{I}, j \in S$, alors \mathcal{K} est un gain stabilisant tel que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$. ◇

Preuve La preuve de ce corollaire est similaire à celle de la proposition 4.7. ■

Corollaire 4.11 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{2ij} = \mathcal{P}'_{2ij} > 0$, $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}'$ vérifiant les contraintes suivantes

$$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \mathbb{Z}^{-1} \mathbb{Y}' \quad (4.71)$$

$$\sum_{i,j} \text{tr}(\tilde{B}'_{wi} \mathcal{P}_{2ij} \tilde{B}_{wi}) < \gamma_2^2 \quad (4.72)$$

$$\mathbb{N}'_{1i} \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{2ij} & \mathbf{0} \\ \star & \bar{\mathcal{P}}_{2ij} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{1i} < -\mathbb{N}'_{2i} \mathbb{N}_{2i} + \mathbb{N}'_{3j} \begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{3j} \quad (4.73)$$

$\forall i \in \mathfrak{I}, j \in S$, où

$$\mathbb{N}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{xi} & \tilde{B}_{ui} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_{2i} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2i} & D_{2i} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_{3j} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{yj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est un ensemble de gains stabilisants tel que $\|\varphi_{cl}\|_2 < \gamma_2$. \diamond

Preuve La preuve de ce corollaire est similaire à celle de la proposition 4.8. \blacksquare

4.3.7.4 Synthèse multi-objectifs

Le problème de synthèse multi-critères est formulé comme suit :

Soient γ_∞ et γ_2 deux niveaux de performances \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2 donnés. Le problème de synthèse multi-critères consiste à trouver un gain de retour de sortie \mathcal{K} stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et tel que

$$\begin{aligned} \|z_\infty\|_{\mathcal{E}_2} &< \gamma_\infty \|w\|_2 \\ \|\varphi_{cl}\|_2 &< \gamma_2 \end{aligned}$$

Le résultat de synthèse multi-objectifs est évident. Il suffit en effet de trouver un gain de retour de sortie satisfaisant les différentes inégalités matricielles données par les corollaires 4.8 et 4.10 (4.9 et 4.11 pour le formalisme ellipsoïdes de matrices). Cela se résume par les Corollaires suivants.

Corollaire 4.12 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ij}$, \mathcal{P}_{2ij} , $\mathcal{X}_{\infty ij}$, \mathcal{X}_{2ij} , $\bar{\mathcal{G}}_{\infty ij}$, $\bar{\mathcal{G}}_{2ij}$, et \mathcal{K} vérifiant les contraintes (4.64)-(4.65) et (4.68)-(4.70), alors le gain \mathcal{K} est un gain stabilisant, assurant les niveaux de performances requis. \diamond

Corollaire 4.13 Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ij}$, \mathcal{P}_{2ij} , $\mathbb{X} \in \mathbb{S}^q$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $\mathbb{Z} \in \mathbb{S}^r$ vérifiant les contraintes (4.66)-(4.67) et (4.72)-(4.73), alors le $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}\}$ -ellipsoïde est un ensemble de gains stabilisant, assurant les niveaux de performances requis. \diamond

4.3.8 Prise en compte de la contrainte $\mathcal{P}_{ij}\mathcal{X}_{ij} = \mathbb{I}$

Nous allons dans ce qui suit établir un algorithme numérique permettant la prise en compte de la contrainte $\mathcal{P}_{ij}\mathcal{X}_{ij} = \mathbb{I}$. Cette problématique étant similaire à celle rencontrée dans la section 4.2.4, les différentes propriétés de l'algorithme ne sont pas rappelées ici.

Pour $\mathbf{P}_\infty = (\mathcal{P}_{\infty 11}, \dots, \mathcal{P}_{\infty ij}, \dots, \mathcal{P}_{\infty vds})$, $\mathbf{G}_\infty = (\mathcal{G}_{\infty 11}, \dots, \mathcal{G}_{\infty ij}, \dots, \mathcal{G}_{\infty vds})$, \mathcal{K} , $\mathbf{X}_\infty = (\mathcal{X}_{\infty 11}, \dots, \mathcal{X}_{\infty ij}, \dots, \mathcal{X}_{\infty vds})$, $\mathbf{P}_2 = (\mathcal{P}_{211}, \dots, \mathcal{P}_{2ij}, \dots, \mathcal{P}_{2vds})$, $\mathbf{G}_2 = (\mathcal{G}_{211}, \dots, \mathcal{G}_{2ij}, \dots, \mathcal{G}_{2vds})$, et

$\mathbf{X}_2 = (\mathcal{X}_{211}, \dots, \mathcal{X}_{2ij}, \dots, \mathcal{X}_{2vd_s})$, définissons deux ensembles convexes par un ensemble de LMIs comme suit

$$\mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathcal{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2} \triangleq \{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathcal{K}, \mathbf{X}_2) : \text{LMIs(4.68) - (4.69)}, \mathcal{P}_{2ij} > 0, \mathcal{X}_{2ij} > 0, \forall i \in \mathfrak{I}, j \in S, \}$$

et

$$\mathcal{C}_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathcal{K}, \mathbf{X}_\infty)}^{\mathcal{H}_\infty} \triangleq \{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathcal{K}, \mathbf{X}_\infty) : \text{LMIs(4.64)}, \mathcal{P}_{\infty ij} > 0, \mathcal{X}_{\infty ij} > 0, \forall i \in \mathfrak{I}, j \in S\}$$

L'algorithme CCL pour la résolution du problème de commande multi-objectifs est donné comme suit

Algorithme 4.3. Soient $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_2 > 0$

i) **Initialisation.** $h = 0$: trouver une solution faisable $(\mathbf{P}_{\infty 0}, \mathbf{G}_{\infty 0}, \mathcal{K}_0, \mathbf{X}_{\infty 0}) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathcal{K}, \mathbf{X}_\infty)}^{\mathcal{H}_\infty}$, $(\mathbf{P}_{20}, \mathbf{G}_{20}, \mathcal{K}_0, \mathbf{X}_{20}) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathcal{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2}$;

ii) $\mathbf{V}_h = \mathbb{P}_h$ et $\mathbf{W}_h = \mathbb{X}_h$ où

$$\mathbb{X}_h = \text{diag}\{\mathcal{X}_{\infty 11h}, \dots, \mathcal{X}_{\infty ijh}, \dots, \mathcal{X}_{\infty vds_h}, \mathcal{X}_{211h}, \dots, \mathcal{X}_{2ijh}, \dots, \mathcal{X}_{2vdsh}\}$$

$$\mathbb{P}_h = \text{diag}\{\mathcal{P}_{\infty 11h}, \dots, \mathcal{P}_{\infty ijh}, \dots, \mathcal{P}_{\infty vds_h}, \mathcal{P}_{211h}, \dots, \mathcal{P}_{2ijh}, \dots, \mathcal{P}_{2vdsh}\}$$

Définir la fonction linéaire

$$f_h(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{V}_h \mathbb{X} + \mathbf{W}_h \mathbb{P}) \quad (4.74)$$

iii) trouver $(\mathbb{P}_{h+1}, \mathbb{X}_{h+1})$ solution du problème d'optimisation convexe suivant

$$\min_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathcal{K}, \mathbf{X}_\infty) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_\infty, \mathbf{G}_\infty, \mathcal{K}, \mathbf{X}_\infty)}^{\mathcal{H}_\infty}, (\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathcal{K}, \mathbf{X}_2) \in \mathcal{C}_{(\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2, \mathcal{K}, \mathbf{X}_2)}^{\mathcal{H}_2}} \left\{ f_h(\mathbf{P}, \mathbf{X}) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{\infty ij} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathcal{P}_{\infty ij} \end{bmatrix} \geq 0; \\ \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{2ij} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathcal{P}_{2ij} \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in \mathfrak{I}, j \in S \end{cases} \right\} \quad (4.75)$$

iv) si le critère d'arrêt est satisfait, aller à l'étape v). Sinon, $h = h + 1$ et aller à l'étape ii).

v) fixer \mathcal{K} . Si il existe des matrices $\mathcal{P}_{\infty ij}$ et \mathcal{P}_{2ij} tel que (4.63), (4.76) et (4.68)

$$\bar{A}'_{ij} \bar{\mathcal{P}}_{2ij} \bar{A}_{ij} - \mathcal{P}_{2ij} + \bar{C}'_{2i} \bar{C}_{2i} < 0 \quad (4.76)$$

sont vérifiées alors \mathcal{K} est solution du problème de commande multi-objectifs. Sinon, échec de l'algorithme.

4.3.9 Exemple numérique

Soit le système de l'exemple 4.2.5 avec $S = \{1, 2\}$ où

o **Mode 1** : Cas nominal ;

◦ **Mode 2** : Perte totale du second ationneur.

Le retard aléatoire induit par les capteurs appartient à l'ensemble $\{0, 1\}$ (*i.e.* $r_s \in \{0, 1\}$) et sa matrice de probabilité de transition est donnée par

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de probabilité de transition du processus défaut est donnée par

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En appliquant l'algorithme 4.3 avec $\gamma_\infty^2 = \gamma_2^2 = 40$, nous obtenons

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} -0.3830 & -0.5149 \end{bmatrix}'$$

L'évolution des trajectoires d'états du système en boucle fermée résultant du correcteur obtenu est illustrée par la figure 4.10. La figure 4.11 représente l'évolution des sorties commandées $z_{\infty k}$. Nous pouvons voir à travers ces différentes figures que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint et que le système en boucle fermée est stochastiquement stable.

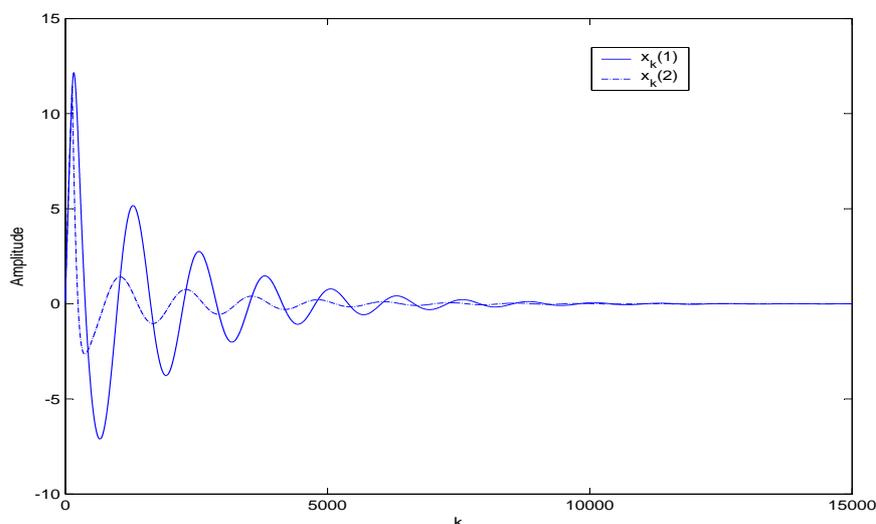
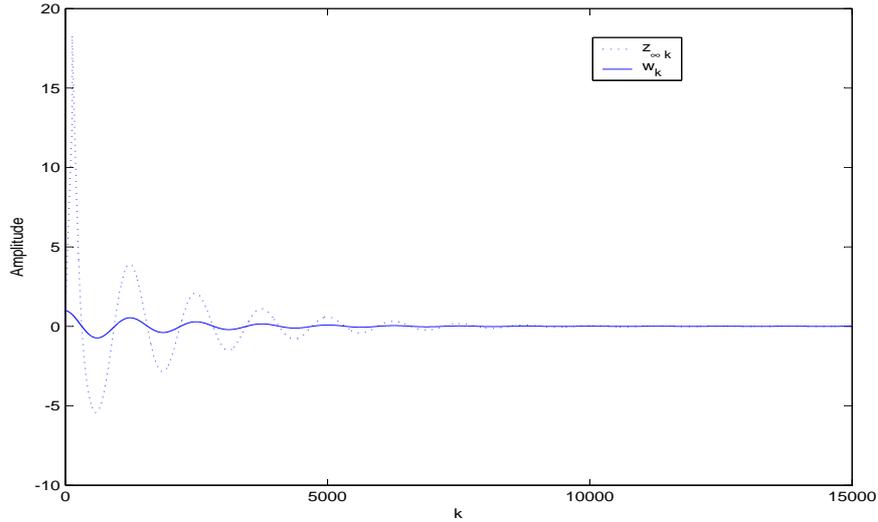


FIG. 4.10 – Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires

4.3.10 Prise en compte de la contrainte $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}'$

La contrainte non linéaire $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}'$ est traitée de façon similaire à celle établie dans la section 4.2.6. Cela se traduit par le lemme 4.2 et l'algorithme 4.4.

Lemme 4.2 Le problème de synthèse multi-objectifs est faisable si et seulement si zéro est l'optimum

FIG. 4.11 – Evolution des sorties $z_{\infty k}$: une seule réalisation des processus aléatoires

global du problème d'optimisation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \text{tr}(\mathcal{T}\mathcal{S}) \\ \text{t.q.} \quad (4.66), (4.72) - (4.73) \\ \mathbb{X} \leq \hat{\mathbb{X}} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{X}} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{T}_1 \geq \mathbb{I} \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 \\ \star & \mathcal{T}_3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.77)$$

◇

Algorithme 4.4.

- i) Trouver une solution faisable $\mathbb{X}_0, \mathbb{Y}_0, \mathbb{Z}_0, \hat{\mathbb{X}}_0, \mathcal{Q}_{ij0}, \mathcal{T}_0, \mathcal{S}_0$. Si il n'existe pas de solution, STOP, l'algorithme a échoué. $h = 0$;
- ii) $\mathbf{V}_h = \mathcal{S}_h, \mathbf{W}_h = \mathcal{T}_h$, et trouver $\mathbb{X}_{(h+1)}, \mathbb{Y}_{(h+1)}, \mathbb{Z}_{(h+1)}, \hat{\mathbb{X}}_{(h+1)}, \mathcal{Q}_{ij(h+1)}, \mathcal{T}_{h+1}, \mathcal{S}_{(h+1)}, \mathbb{T}_{h+1}$ solutions du problème LMI

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \text{tr}(\mathbf{V}_h \mathcal{T} + \mathbf{W}_h \mathcal{S}) \\ \text{t.q.} \quad (4.66), (4.72) - (4.73) \\ \mathbb{X} \leq \hat{\mathbb{X}} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{X}} & \mathbb{Y} \\ \star & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \mathcal{T}_1 \geq \mathbb{I} \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 \\ \star & \mathcal{T}_3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.78)$$

- iii) si $\text{tr}(\mathcal{T}_{h-1}\mathcal{S}_{h-1} - \mathcal{T}_h\mathcal{S}_h < \varepsilon)$, alors STOP, l'algorithme a échoué.
- iv) si $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}\mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Y}'$, STOP, l'ellipsoïde de matrices a été trouvée. Sinon, $h = h + 1$ et retourner à l'étape ii).

4.3.11 Exemple numérique

Soit le système nominal défini par la représentation d'état suivante :

$$A_x = \begin{bmatrix} 0.9996 & 2.70 \times 10^{-4} & 1.646 \times 10^{-4} & -4.557 \times 10^{-3} \\ 4.794 \times 10^{-4} & 0.9900 & -1.761 \times 10^{-4} & -0.0400 \\ 9.995 \times 10^{-4} & 0.0050 & 0.9931 & 0.0252 \\ 0 & 0 & 9.965 \times 10^{-3} & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 4.423 \times 10^{-3} & 1.754 \times 10^{-3} \\ 0.0508 & -0.0755 \\ -0.0548 & 0.0445 \\ -2.749 \times 10^{-4} & 2.233 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, E_w = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ce modèle a été obtenu en discrétisant le modèle dynamique de l'hélicoptère VTOL de l'exemple b) de la section 3.2.5.5 avec une période d'échantillonnage $T_s = 0.01s$.

Nous supposons que ce système est sujet à un défaut actionneur :

- **Mode 2** : Perte totale du second actionneur.

Il s'en suit que $S = \{1, 2\}$, où le **mode 1** représente le cas nominal (sans défauts). Le retard aléatoire induit par les capteurs appartient à l'ensemble $\{0, 1\}$ (*i.e.* $r_s \in \{0, 1\}$) et sa matrice de probabilité de transition est donnée par

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de probabilités de transition du processus défaut actionneur est donnée par :

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La figure 4.12 nous montre le tracé de l'ensemble ellipsoïdal des gains de retour de sortie pour $\gamma_{\infty}^2 = \gamma_2^2 = 5$. Le gain de retour de sortie central (centre de l'ellipse) est donné par

$$\mathcal{K}'_0 = \begin{bmatrix} 1.0575 & -0.1174 \end{bmatrix}$$

Les figure 4.13 et 4.14 illustrent l'évolution des variables d'états du système bouclé ainsi que les sorties à commander $z_{\infty k}$. Ces tracés correspondent à une seule réalisation des différents processus aléatoires. Nous pouvons voir là aussi que l'objectif d'atténuation des perturbations est atteint et que le système en boucle fermée est stochastiquement stable.

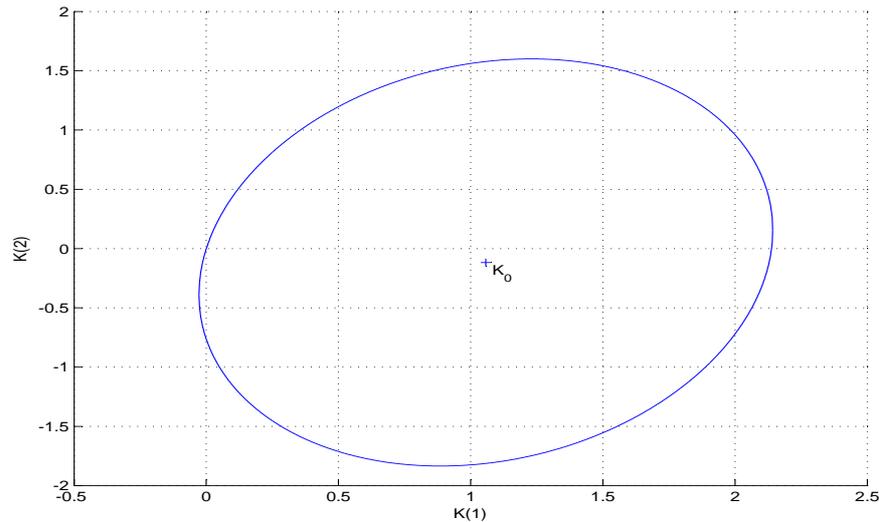


FIG. 4.12 – Ellipse de gains de retour de sortie

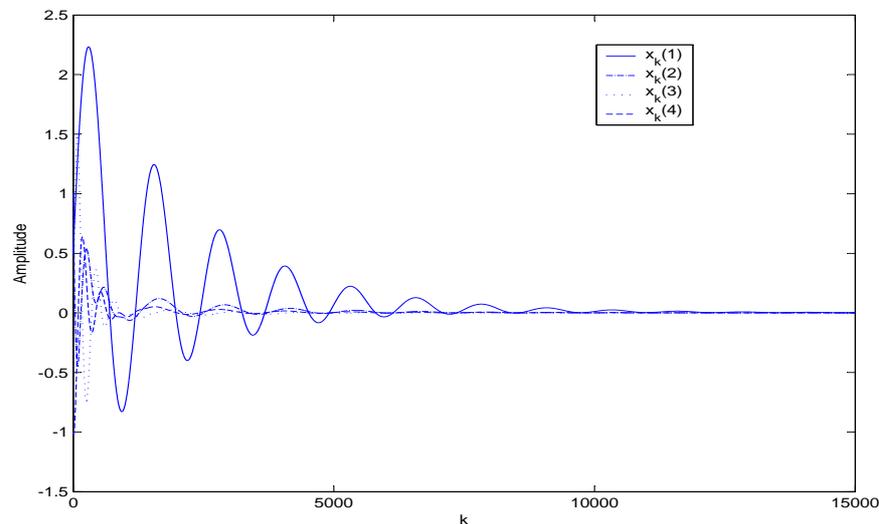


FIG. 4.13 – Evolution des variables d'état : une seule réalisation des processus aléatoires

4.3.12 Conclusion

Dans cette deuxième partie de chapitre, nous avons abordé la problématique de commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ par retour statique de sortie des NCSs sujets à des retards aléatoires et à des défauts pouvant affecter les différents composants du système. Ce problème de synthèse a été abordé sous le formalisme (MJLS), et cela en modélisant les processus retard et défaut par des chaînes de Markov à temps discret et à espace d'état fini. En se basant sur les mêmes arguments que ceux utilisés en première partie de chapitre, deux caractérisations NLMI des correcteurs statiques stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ont été établies. Pour chacune des deux approches, un algorithme d'optimisation itératif de type complémentarité sur le cône a été proposé et mis en oeuvre sur un exemple de simulation.

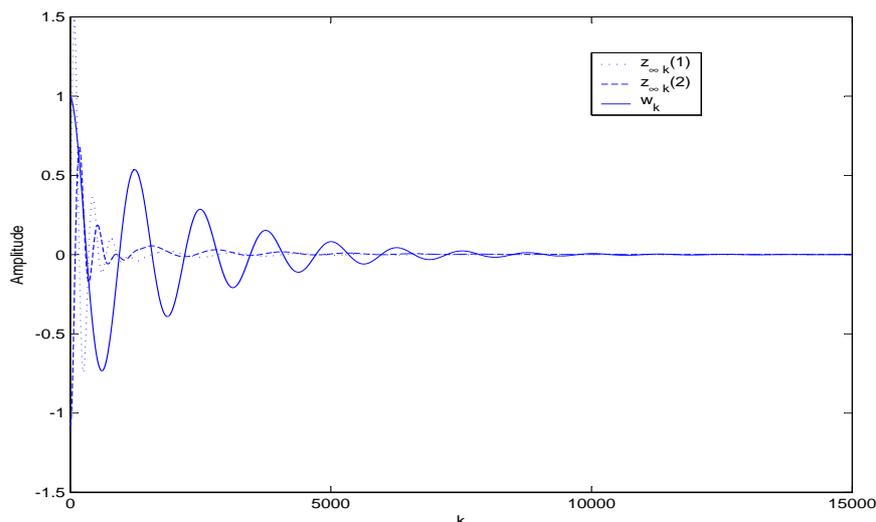


FIG. 4.14 – Evolution des sorties $z_{\infty k}$: une seule réalisation des processus aléatoires

4.4 Conclusion générale

Dans ce chapitre, nous avons abordé la problématique de commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de deux classes de systèmes hybrides stochastiques. La première classe représente les systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens en temps discret et la seconde représente la classe des systèmes commandés par réseaux.

Dans le premier cas, nous avons proposé deux caractérisations NLMI de correcteurs statiques par retour de sortie stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Des algorithmes d'optimisation itératifs de type complémentarité sur le cône ont été proposés pour la résolution de ces conditions et mis en oeuvre sur des exemples de simulation.

En deuxième partie de chapitre, nous nous sommes intéressés à la classe des systèmes commandés par réseaux. Après un bref aperçu des modèles élémentaires de canaux de communication, nous avons donné des exemples de réseaux à utilisateurs multiples ainsi que les différentes problématiques induites par la commande des NCSs. Nous avons ensuite mis l'accent sur la problématique spécifique traitée dans ce travail, à savoir la stabilisation stochastique et la commande multi-critères des NCSs sujets à des retards aléatoires et à des pannes pouvant affecter les différents composants du système. En se basant sur les mêmes arguments que ceux utilisés en première partie de chapitre, deux caractérisations NLMI des correcteurs statiques stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ont été également établies et des algorithmes d'optimisation ont été proposés pour la résolution des différentes conditions de synthèse.

Conclusion générale

Les travaux présentés dans le présent rapport s'inscrivent dans le cadre de la commande multi-objectifs d'une classe de systèmes hybrides stochastiques à sauts Markoviens : les **Système Tolérants aux Défauts à Saut Markoviens**.

Bilan

La synthèse de systèmes tolérants aux défauts par approche active nécessite la cohabitation de différentes tâches, à savoir, la détection de défauts en ligne, la prise de décision en temps réel et la reconfiguration de loi de commande. Cela induit naturellement des problèmes inhérents à cette classe de systèmes, à savoir : les retards de détection, les fausses alarmes, la non détection de défauts...*etc.* Cependant, dans les différentes méthodes de reconfiguration existantes dans la littérature, ces problématiques critiques ne sont pas explicitement prises en considération. En effet, la plupart de ces méthodes supposent que l'information fournie par le module de FDI est parfaite. Ce constat est à la base des travaux présentés dans ce document. En effet, les travaux traités dans cette thèse se sont principalement focalisés sur les contraintes résultants de l'intégration d'un module de FDI et d'un module de reconfiguration de lois de commandes. Ces contraintes peuvent conduire à une perte de performances, voir une instabilité, du système tolérant aux défauts, si ces différents aspects ne sont pas pris en compte lors de la conception du système. La formalisation mathématique de cette problématique nous a amené à nous intéresser à une classe de systèmes hybrides stochastiques à sauts Markoviens : les **Système Tolérants aux Défauts à Saut Markoviens**. Dans cette classe de systèmes, deux processus aléatoires sont définis : le premier représente les défauts pouvant affecter les différents composants du système, et le second représente le processus FDI utilisé pour la reconfiguration de la loi de commande.

Une étude bibliographique des travaux menés dans le cadre des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens a montré que les résultats établis pour cette classe de systèmes traitent de l'**analyse** de la stabilité et des performances de ces systèmes et non de la **synthèse** de lois de commande remplissant un cahier des charges donné. Les seuls résultats relatifs à la problématique de synthèse conduisent à des correcteurs irréalisables en pratiques et se basent sur l'hypothèse restrictive d'accessibilité du vecteur d'état. Le premier objectif de ce travail a donc été de s'affranchir de cette hypothèse et de considérer ainsi des problèmes de synthèse de correcteurs par retour de sortie statique/dynamique et cela dans un cadre de commande multi-objectifs. Et plus particulièrement, nous nous sommes

intéressés à des critères de performance $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

La problématique de commande multi-objectifs a été abordée dans le cas des systèmes à temps continu et à temps discret. Pour le cas continu, les différentes approches développées sont essentiellement basées sur la théorie de Lyapunov et la notion de Supermartingale. Dans le cas du retour dynamique de sortie, et après avoir montré les limites de l'approche LMI, nous avons montré qu'en s'appuyant sur une version du Lemme de Finsler et une paramétrisation adéquate des matrices de Lyapunov, les conditions de stabilité et de commande multi-objectifs pouvaient être exprimées en termes d'Inégalités Matricielles Bilinéaires. Dans le cas du retour de sortie statique, nous avons d'abord proposé des caractérisations sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires des correcteurs statiques stabilisants stochastiquement le système en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Cependant, des résultats expérimentaux nous ont montré que la *simplicité* de ces conditions se paye par un pessimisme relativement important. Afin de pallier ces limitations nous avons proposé une caractérisation NLMI des correcteurs statiques et cela en s'appuyant sur un formalisme se basant sur la synthèse d'ensembles ellipsoïdaux de gains de retour de sortie statique. Nous avons aussi montré que les résultats développés dans le cadre des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens pouvaient s'appliquer aisément à la problématique de commande multi-objectifs indépendante du mode des (MJLS). Cela représente un cas particulier très intéressant.

Dans le cadre des systèmes en temps discret, deux axes ont été développés, le premier concerne la commande multi-critères des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markovien en temps discret, et le second traite de la problématique des systèmes commandés par réseaux. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation stochastique du système en boucle fermée, des performances \mathcal{H}_2 ainsi que des performances \mathcal{H}_∞ .

Dans la première partie, nous avons établi deux caractérisations NLMI de correcteurs statiques par retour de sortie stabilisant le système tolérant aux défauts en boucle fermée et assurant des niveaux de performances $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. La première caractérisation s'appuie sur l'introduction d'une sorte de *découplage* entre les matrices de Lyapunov et les matrices du système. Ce *découplage* est alors utilisé afin de synthétiser des correcteurs ne dépendant que du processus FDI. La seconde caractérisation s'appuie sur le formalisme *ellipsoïdes de matrices*.

Le second axe a été consacré à la problématique de stabilisation stochastique et de commande multi-critères des systèmes commandés par réseaux sujet à des retards aléatoires et à des pannes pouvant affecter les différents composants du système. Cette application a été motivée par l'implication du CRAN dans le projet Européen NECST (Networked Control Systems Tolerant to Faults). Les différents retards aléatoires induits par la présence d'un réseau de communication ont été modélisés par une chaîne de Markov à temps discret et à espace d'état fini. Cette problématique a alors été considérée sous le formalisme (MJLS). Nous avons proposé là aussi une structure de commande par retour statique de sortie et nous avons montré que ce problème de synthèse représente un cas particulier intéressant du problème de synthèse traité dans le premier axe.

Enfin, il est important de noter qu'au delà des résultats théoriques obtenus dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'aspect résolution numérique des différentes conditions de stabilité et de performances en boucle fermée, et des algorithmes de résolutions numériques ont été proposés. En effet, les différentes conditions de synthèse étant établies en termes d'inégalités matricielles bilinéaires et non linéaires, leurs résolution numérique reste un problème délicat. Des algorithmes d'optimisation itératifs de type descente conjugué du gradient (conditions BMI) et des algorithmes d'optimisation itératifs de type complémentarité sur le cône (conditions NLMI) ont été proposés et mis en oeuvre sur des exemples de simulation en mettant en évidence leurs performances et leurs limitations.

Perspectives et résultats préliminaires

L'ensemble des résultats obtenus jusqu'à présent se situe dans le cadre défini dans l'introduction générale : état de dimension fini et dynamique linéaire, mode à sauts Markoviens sur un ensemble fini, taux de transitions des différents processus stochastiques supposés connus, un seul décideur.

Dans ce qui suit, nous allons revenir sur ces hypothèses en proposant et en mettant en évidence quelques perspectives d'extension des résultats obtenus à une classe plus riche de systèmes.

Modèles des processus défauts et FDI

- **Matrices de transition incertaines** : Comme nous l'avons mentionné dans le premier chapitre de ce travail, en pratique, il est difficile de déterminer avec exactitude les valeurs des taux de transition des différents processus Markoviens. Il est donc nécessaire de considérer un certain degré d'incertitude sur les valeurs des différentes matrices de transition. Des travaux ont été menés dans ce sens dans le domaine des MJLS. En effet dans [CdVG99, RG96] les auteurs considèrent que la matrice de transition Π est *incertaine*. Plus précisément ils considèrent que pour tout $t \geq 0$, $\Pi(t) \in \mathcal{P}$, où \mathcal{P} est un polytope (ensemble polytopique) donné par

$$\mathcal{P} = \text{Co} \{ \Pi_1, \dots, \Pi_l \} = \left\{ \Pi = \sum_{i=1}^{i=l} \lambda_i \Pi_i \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, l, \sum_{i=1}^{i=l} \lambda_i = 1 \right\}$$

où les Π_i sont des matrices de transition données. La stabilité des MJLS est alors analysée aux sommets du polytope donnant ainsi une condition suffisante de stabilité stochastique. Cette méthodologie peut être aisément appliquée aux problématiques abordées dans ce travail. Les différentes conditions de synthèse doivent alors être vérifiées aux sommets des différents polytopes auxquels appartiennent les différentes matrices de transition des processus défauts et FDI.

Cependant, il est important de noter que la pertinence de ce modèle d'incertitudes n'a pas été évaluée par les auteurs. La modélisation des incertitudes des matrices de transition reste une question largement ouverte et qui serait intéressant de développer.

- **Processus FDI modélisé comme un processus semi-Markovien** : Dans le cadre des AFTCSMP, le processus FDI est modélisé comme un processus Markovien dont les transitions sont conditionnées sur celles des processus défauts. L'hypothèse implicite du modèle Markovien est que le processus FDI est *sans mémoire*, c'est-à-dire que les tests d'hypothèses sont implémentés en

utilisant les données actuellement disponibles (telles que les mesures les plus récentes, ou une fenêtre de mesures récentes de longueur fixe et *petite*), qui sont ensuite *jetées* de telle sorte à ce que les données actuellement utilisées soient indépendantes des données utilisées dans les tests précédents. Cependant, et afin de minimiser les taux de fausses alarmes, beaucoup de tests FDI utilisés dans la littérature FTC sont de nature séquentielle, *i.e.*, les tests utilisent des données antérieures en plus des données actuellement disponibles [Wil76, WJ76, Wal83, PFC89]. On trouve parmi ces tests : Sequential Probability Ratio Test (SPRT), One-Side Monitoring test, Generalized Likelihood Ratio (GLR) test...*etc.* [Wal97]. L'hypothèse Markovienne n'est alors plus valide pour ces tests, due à la propriété de *mémoire* inhérente à cette classe de méthodes. Une alternative serait alors d'utiliser un processus semi-Markovien afin de décrire les transitions du processus FDI. Cela permettrait de prendre en considération l'aspect séquentiel des tests d'hypothèses [Wal97]. Cette modélisation représente l'un des axes de recherche que nous développons actuellement.

Classes de systèmes

– **Systèmes non-linéaires** : La prise en compte d'une dynamique non-linéaire de l'état n'a guère besoin d'être justifiée : tous les systèmes technologiques présentent des non-linéarités. Il faut toutefois bien situer la prise en compte des non-linéarités dans la structure fonctionnelle de la commande et rester cohérent avec les objectifs de base tels que guidage, stabilisation, régulation,...*etc.*

Récemment nous sommes intéressés à une classe particulière de systèmes non-linéaires : les systèmes **bilinéaires** (bilinéarité état/commande) [APS06]. La représentation d'état du système tolérant aux défauts est donnée dans ce cas là par :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = A(\xi_t)x_t + B(\eta_t)u(x_t, \psi_t, t) + \sum_{i=1}^m N_i(\xi_t, \eta_t)x_t u_i(x_t, \psi_t, t) \\ y_t = Cx_t \\ u(x_t, \psi_t, t) = \mathcal{K}(\psi_t)x_t \end{cases}$$

Nous avons proposé des conditions de stabilité exponentielle stochastique *locale*, ainsi qu'un algorithme de synthèse des correcteurs stabilisant le système en boucle fermée. L'approche développée se base sur une représentation locale équivalente du terme bilinéaire dans un domaine compacte dans \mathbb{R}^n , et cela en s'appuyant sur la théorie des **inclusions différentielles** [MP89]. La procédure de synthèse consiste dans ce cas à trouver une loi de commande par retour statique de sortie (loi de commande linéaire) stabilisant stochastiquement le système en boucle fermée, pour tout vecteur d'état initial x_0 appartenant à un domaine de stabilité \mathcal{D}_0 . Ce dernier est calculé en se basant sur la notion d'**invariance positive**. La problématique implicite étant de maximiser le domaine de stabilité, un algorithme d'optimisation se basant sur un schéma de relaxation LMI a été aussi proposé. Nos travaux actuels dans le cadre des systèmes non-linéaires portent sur deux axes. À court terme, nous nous intéressons à la synthèse de lois de commande stabilisant de manière *globale* la classe des systèmes bilinéaires à sauts Markoviens et assurant des performances de type $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. À plus long terme, nous nous intéresserons à des classes de systèmes non-linéaires plus générales. Cette approche graduelle se justifie par la complexité de la problématique abordée.

- **Plusieurs décideurs** : L'introduction de plusieurs décideurs est justifiée lorsque le système est de grande dimension : pour une structure souple dans l'espace par exemple, on associera à différents éléments de la structure des organes de contrôle décentralisés dont l'action sera éventuellement coordonnée par un superviseur centralisé. L'autorité de commande étant ainsi distribuée entre plusieurs organes, il faut concevoir des stratégies de coopération afin d'assurer un contrôle globale : c'est l'objet de la **théorie des jeux** [Kan04].

Une part de la recherche sur les jeux a été consacrée aux jeux sur des systèmes linéaires stochastiques avec des objectifs quadratiques. On a introduit des bruits gaussiens large bande pour modéliser les perturbations continues qui affectent le système opérant dans un environnement aléatoire. Une extension de la théorie des jeux différentiels à la classe des MJLS a été proposé par [Mar86] où l'auteur considère des objectifs quadratiques et utilisent des stratégies de Nash (en boucle ouverte et fermée) et de Stackelberg. Des critères de performance de type \mathcal{H}_∞ ont été considéré par la suite par. Cependant, les résultats obtenus par les auteurs ne peuvent s'appliquer en l'état aux systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens. En effet, la loi de commande obtenue dépend des matrices du systèmes et donc requiert la disponibilité des processus défauts.

La formulation du jeux dans le cadre des systèmes tolérants aux défauts à sauts Markoviens nécessite donc de rajouter une contrainte supplémentaire sur la loi de commande. Cette dernière ne doit dépendre que du processus FDI. La formalisation de cette contrainte ainsi que la formulation du jeux associé restent des questions ouvertes.

Annexe A

Définitions relatives aux processus stochastiques

A.1 Tribu ou σ -algèbre

Soit Ω un ensemble non vide et \mathcal{F} une classe de parties de Ω . On dit que \mathcal{F} est une tribu sur Ω si

1. L'ensemble vide est dans \mathcal{F} ;
2. \mathcal{F} est stable par le passage au complémentaire ;
3. \mathcal{F} est stable par union dénombrable.

Formellement :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$;
3. si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F}$ alors $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \in \mathcal{F}$.

Si \mathcal{F} est une tribu sur Ω , alors (Ω, \mathcal{F}) est appelé espace mesurable ou probabilisable en fonction du contexte, et les éléments de \mathcal{F} sont des événements. La notion de mesure est définie à l'intérieur d'un espace mesurable et celle de probabilité à l'intérieur d'un espace probabilisable.

A.2 Mesure positive sur une tribu

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable. On appelle mesure positive sur (Ω, \mathcal{F}) une fonction \mathcal{M} définie sur \mathcal{F} , à valeurs dans $[0, +\infty)$, vérifiant :

1. $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$;
2. Pour toute famille finie ou infinie dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de la tribu \mathcal{F} deux à deux disjoints (*i.e.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$), on a :

$$\mathcal{M} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(A_n)$$

Soit $A \in \mathcal{F}$ alors le nombre $\mathcal{M}(A)$ (fini ou non) est appelé *mesure* de A et le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M})$ est appelé *espace mesuré*.

A.3 Mesure de probabilité

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable. On appelle mesure de probabilité (ou simplement probabilité) sur (Ω, \mathcal{F}) une mesure positive (notée P) qui associe à tout événement A de \mathcal{F} un nombre $P(A)$, appelé probabilité de A , et qui satisfait aux axiomes suivants :

1. $\forall A \in \mathcal{F} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble fini ou infini dénombrable d'éléments de la tribu \mathcal{F} deux à deux disjoints alors :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) est appelé *espace probabilisé*.

A.4 Processus de Wiener ou mouvement Brownien

En 1827, le botaniste Robert Brown avait observé que des particules de la taille d'un micron submergées dans un fluide avaient un mouvement très irrégulier. En 1905, Einstein a montré que ce mouvement pouvait être expliqué par des collisions avec des molécules présentes dans le fluide. Einstein a alors construit un modèle mathématique de ce phénomène que l'on a appelé le mouvement Brownien. Une analyse mathématique rigoureuse de ce type de processus a été élaborée par Wiener en 1923.

Nous donnons ci-dessous les principales propriétés du processus de Wiener $(\varpi_t)_{t \geq 0}$:

1. $\varpi_0 \equiv 0$;
2. les trajectoires d'un processus de Wiener sont des fonctions continues de $t \in [0, \infty)$;
3. espérance mathématique : $\mathcal{E}(\varpi_t) \equiv 0$;
4. fonction de corrélation : $\mathcal{E}(\varpi_t \varpi_s) = t \wedge s$, ($t \wedge s = \min(t, s)$) ;
5. pour tout t_1, \dots, t_n , le vecteur aléatoire $(\varpi_{t_1}, \dots, \varpi_{t_n})$ est Gaussien ;
6. pour tout s, t

$$\mathcal{E}(\varpi_t^2) \equiv t;$$

$$\mathcal{E}(\varpi_t - \varpi_s) \equiv 0;$$

$$\mathcal{E}(\varpi_t - \varpi_s)^2 = |t - s|.$$

7. les accroissements aléatoires du processus de Wiener, $(\varpi_t - \varpi_s)$ et $(\varpi_u - \varpi_v)$ sont indépendants pour tout $0 \leq s < t < v < u < \infty$
8. propriété de Martingale (notation : $\varpi_0^s = \{\varpi_u, 0 \leq u \leq s\}$)

$$\mathcal{E}(\varpi_t | \varpi_0^s) = \varpi_s;$$

$$\mathcal{E}\{(\varpi_t - \varpi_s)^2 \mid \varpi_0^s\} = t - s.$$

Annexe B

Stabilité stochastique

B.1 Définitions

Définition B.1 (Stabilité au sens de Lyapunov) Le point d'équilibre est dit stable si, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que si $\|x_0\| < \delta$, il s'en suit que

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon \quad (\text{B.1})$$

Définition B.2 (Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov) Le point d'équilibre est dit asymptotiquement stable si il est stable et qu'il existe δ tel que si $\|x_0\| < \delta$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0)\| = 0 \quad (\text{B.2})$$

Les définitions ci-dessus peuvent être interprétées d'un point de vue géométrique comme suit. Soit le cercle \mathcal{C}_2 de rayon \mathcal{R}_2 (Figure B.1), alors le point d'équilibre est stable si il est possible de trouver un autre cercle \mathcal{C}_1 de rayon \mathcal{R}_1 tel que toute trajectoire commençant dans \mathcal{C}_1 demeurera dans \mathcal{C}_2 , $\forall t > 0$. Le point d'équilibre est dit stochastiquement stable si il est stable et si il existe un cercle \mathcal{C}_3 tel que toute trajectoire commençant dans \mathcal{C}_2 tendra asymptotiquement vers le point d'équilibre (*i.e.* pour $t \rightarrow \infty$). Dans ce dernier cas, si les trajectoires ont une enveloppe exponentielle en tendant vers le point d'équilibre alors la solution est dite exponentiellement stable.

Afin d'étendre les concepts de stabilité introduit ci-dessus au domaine stochastique, les différentes définitions sont exprimées en termes des trois formes de convergence. La solution $x(t; x_0, t_0)$ est alors réécrite sous la forme $x(t; x_0, t_0, w)$ afin d'indiquer que c'est un processus stochastique avec une variable aléatoire w . Différents concepts de stabilité stochastique peuvent alors être énoncés :

Définition B.3 (Stabilité en probabilité) Le point d'équilibre est dit stable en probabilité, si pour $\varepsilon > 0$, $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon, \epsilon, t_0)$ tel que si $\|x_0\| < \delta$, alors

$$P \left\{ \sup_{t \geq t_0} \|x(t; x_0, t_0, w)\| > \epsilon \right\} < \varepsilon \quad (\text{B.3})$$

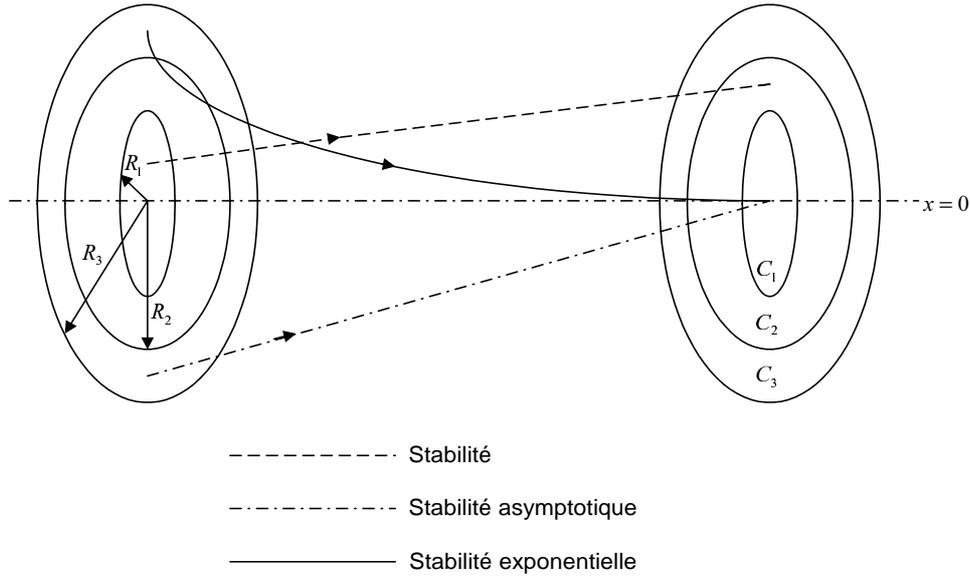


FIG. B.1 – Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov

Définition B.4 (Stabilité en moment d'ordre m) Le point d'équilibre est dit stable en moment d'ordre m si le moment d'ordre m du vecteur solution existe et si pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que si $\|x_0\| < \delta$, il s'en suit que

$$\mathcal{E} \left\{ \sup_{t \geq t_0} \|x(t; x_0, t_0, w)\|^m \right\} < \varepsilon \quad (\text{B.4})$$

Définition B.5 (Stabilité presque sûre) Le point d'équilibre est dit presque sûrement stable, si

$$P \left\{ \lim_{\|x_0\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq t_0} \|x(t; x_0, t_0, w)\| = 0 \right\} = 1 \quad (\text{B.5})$$

La stabilité presque sûr est le concept de stabilité le plus *proche* de la stabilité déterministe du système. De façon similaire, la stabilité (déterministe) asymptotique au sens de Lyapunov peut être étendue au domaine stochastique et cela en réécrivant la définition B.2 en termes des trois modes de convergence comme suit :

Définition B.6 (Stabilité asymptotique en probabilité) Le point d'équilibre est dit asymptotiquement stable en probabilité si il est stable en probabilité et si il existe ρ tel que si $\|x_0\| < \rho$, il s'en suit

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t \geq \delta} \|x(t; x_0, t_0, w)\| > \varepsilon \right\} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Définition B.7 (Stabilité asymptotique en moment d'ordre m) Le point d'équilibre est dit asymptotiquement stable en moment d'ordre m si il est stable en moment d'ordre m et si il existe ρ tel que si $\|x_0\| < \rho$, il s'en suit

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \sup_{t \geq \delta} \|x(t; x_0, t_0, w)\|^m \right\} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Définition B.8 (Stabilité asymptotique presque sûre) *Le point d'équilibre est dit presque sûrement asymptotiquement stable si il est stable presque sûrement et si il existe ρ tel que si $\|x_0\| < \rho$, il s'en suit*

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t \geq \delta} \|x(t; x_0, t_0, w)\| > \epsilon \right\} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Un concept de stabilité asymptotique ayant reçu un intérêt particulier en commande des systèmes stochastique est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique définie comme suit [KK60] :

Définition B.9 (Stabilité exponentielle en moment d'ordre m) *Le point d'équilibre est dit exponentiellement stable en moment d'ordre m si il existe $\rho > 0$ et des constantes $a > 0$, $b > 0$ tel que si $\|x_0\| < \rho$, il s'en suit*

$$\mathcal{E} \{ \|x(t; x_0, t_0, w)\|^m \} \leq b \|x_0\|^m \exp \{-a(t - t_0)\} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Conditions de stabilité stochastique

Dans ce qui suit, les conditions de stabilité stochastique données par les différents théorèmes ont été formulées par [Kus67]. Elles sont énoncées sans preuves. Le lecteur intéressé pourra se référer à ces travaux.

Théorème B.1 (Stabilité en probabilité) *Le point d'équilibre est stable en probabilité si*

$$\vartheta(x, y) > 0, \quad \mathcal{L}\vartheta(x, y) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}_m = \{x : \vartheta(x, y) < m\}, \quad m < \infty \quad (\text{B.10})$$

Théorème B.2 (Stabilité asymptotique en probabilité) *Le point d'équilibre est asymptotiquement stable en probabilité si*

$$\vartheta(x, y) > 0, k(x, y) > 0, \quad \mathcal{L}\vartheta(x, y) = -k(x, y) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}_m \quad (\text{B.11})$$

Théorème B.3 (Stabilité exponentielle en probabilité) *Le point d'équilibre est exponentiellement asymptotiquement stable si*

$$\vartheta(x, y) > 0, \quad \mathcal{L}\vartheta(x, y) = -\sigma\vartheta(x, y) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}_m \quad (\text{B.12})$$

Annexe C

Compléments mathématiques

Lemme C.1 (Lemme de majoration) [WXdS92, XC03] Soient \mathcal{A} , \mathcal{W} , \mathcal{G} , \mathcal{M} , \mathcal{N} des matrices réelles de dimensions appropriées telles que $\mathcal{W} > 0$ et $\mathcal{M}'\mathcal{M} \leq \mathbb{I}$. Alors nous avons les inégalités suivantes

i) Pour tout scalaire $\gamma > 0$ et deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$2x'\mathcal{G}\mathcal{M}\mathcal{N}y \leq \gamma^{-1}x'\mathcal{G}\mathcal{G}'x + \gamma y'\mathcal{N}'\mathcal{N}y \quad (\text{C.1})$$

ii) Pour tout scalaire $\gamma > 0$ tel que $\mathcal{W} - \gamma\mathcal{G}\mathcal{G}' > 0$,

$$(\mathcal{A} + \mathcal{G}\mathcal{M}\mathcal{N})'\mathcal{W}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{G}\mathcal{M}\mathcal{N}) \leq \mathcal{A}'(\mathcal{W} - \gamma\mathcal{G}\mathcal{G}')^{-1}\mathcal{A} + \gamma^{-1}\mathcal{N}'\mathcal{N} \quad (\text{C.2})$$

◆

Lemme C.2 (Complément de Schur) [BGFB94] Soient les matrices constantes $\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}$ de dimensions appropriées où \mathcal{M} et \mathcal{Q} sont des matrices symétriques, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

i)

$$\mathcal{Q} < 0 \text{ et } \mathcal{M} - \mathcal{L}'\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{L} < 0 \quad (\text{C.3})$$

ii)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} & \mathcal{L}' \\ \star & \mathcal{Q} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.4})$$

La matrice $\mathcal{M} - \mathcal{L}'\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{L}$ est appelée complément de Schur de la matrice \mathcal{Q} .

◆

Lemme C.3 (Lemme de projection) [GA94, SIG98] Étant données trois matrices \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{Q} ($\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$), les deux propositions suivantes sont équivalentes

i) Il existe une matrice \mathcal{P} telle que

$$\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{C} + (\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{C})' + \mathcal{Q} < 0 \quad (\text{C.5})$$

ii)

$$(\mathcal{B}'^\perp)'\mathcal{Q}(\mathcal{B}'^\perp) < 0 \quad (\text{ou } \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mu\mathcal{B}\mathcal{B}' - \mathcal{Q} > 0) \quad (\text{C.6})$$

et

$$(\mathcal{C}^\perp)' \mathcal{Q} (\mathcal{C}^\perp) < 0 \quad (\text{ou } \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mu \mathcal{C}' \mathcal{C} - \mathcal{Q} > 0) \quad (\text{C.7})$$

◆

Lemme C.4 (Lemme de projection réciproque (Reciprocal Projection Lemma)) [ATB01]

Soit \mathcal{P} une matrice définie positive donnée. les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\Psi + \mathcal{S} + \mathcal{S}' < 0$;

ii) le problème LMI

$$\begin{bmatrix} \Psi + \mathcal{P} - (\mathcal{W} + \mathcal{W}') & \mathcal{S}' + \mathcal{W}' \\ * & -\mathcal{P} \end{bmatrix} < 0$$

est faisable par rapport à la variable \mathcal{W} .

◆

Lemme C.5 Soient les matrices $\Psi_{ijk} = \Psi'_{ijk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathcal{H}_{ijk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\forall i \in Z$, $j \in S$ et $k \in R$, alors

$$x_t' \Psi_{ijk} x_t < 0, \forall x_t \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}_{ijk} x_t = 0, x_t \neq 0; \quad (\text{C.8})$$

si et seulement si il existe des matrices $\mathcal{L}_{ijk} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tel que :

$$\Psi_{ijk} + \mathcal{L}_{ijk} \mathcal{H}_{ijk} + \mathcal{H}'_{ijk} \mathcal{L}'_{ijk} < 0, \forall i \in Z, j \in S, k \in R. \quad (\text{C.9})$$

Notons que si des contraintes arbitraires sont imposées aux matrices \mathcal{L}_{ijk} , les conditions (C.9) restent suffisantes pour que (C.8) soient vérifiées.

◆

Preuve La preuve de ce Lemme est similaire à celle du Lemme 2.1 dans [dSTB04]

■

Bibliographie

- [APH06] S. ABERKANE, J.C. PONSART et F. HAMELIN : Robust static output feedback \mathcal{H}_∞ control of a class of stochastic hybrid systems in noisy environment : Lmi formulation. *In proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'06*, 2006. [2.2.3](#)
- [APS05] S. ABERKANE, J.C. PONSART et D. SAUTER : Output feedback robust \mathcal{H}_∞ control of uncertain active fault tolerant control systems via convex analysis. *Submitted,??*, 2005. [2.3.1.1](#)
- [APS06] S. ABERKANE, J.C. PONSART et D. SAUTER : Stochastic stability of a class of stochastic bilinear hybrid systems : Convex analysis and synthesis. *In proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'06*, 2006. [4.4](#)
- [ASC83] A. N. ANDRY, E. Y. SHAPIRO et J. C. CHUNG : Eigenstructure assignment for linear systems. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 19, 1983. [1.3.3.2](#)
- [ASNR93] C. AUBRUN, D. SAUTER, H. NOURA et M. ROBERT : Fault diagnosis and reconfiguration of systems using fuzzy logic : Application to a therma plant. *International Journal of Systems Science*, 24, 1993. [1.3.3.6](#)
- [ATB01] P. APKARIAN, H.D. TUAN et J. BERNUSSOU : Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and synthesis with enhanced linear matrix innequalities (lmi) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:1941–1946, 2001. [C](#)
- [Ath67] M. ATHANS : The matrix maximum principle. *Information on Control*, 11:592–599, 1967. [1.4.4.4](#)
- [AW95] K. J. ASTROM et B. WITTENMARK : *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995. [1.3.3.3](#)
- [BAM04] E. K. BOUKAS et N. F. AL-MUTHAIRI : \mathcal{H}_∞ constant gain state feedback stabilization of stochastic hybrid systems with wiener process. *Mathematical Problems in Engineering*, 2004. [2.2.3](#), [3.1](#)
- [Bas88] M. BASSEVILLE : Detecting changes in signals and systems - a survey. *Automatica*, 24:309–326, 1988. [1.3.2.1](#)
- [Bas98] M. BASSEVILLE : On-board component fault detection and isolation using the statistical local approach. *Automatica*, 34:1391–1396, 1998. [1.3.2.1](#)
- [BG97] M. BODSON et J. GROSZKIEWICZ : Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control. *IEEE Control Systems Magazine*, 5:217–229, 1997. [1.3.3.4](#)

- [BGFB94] S. BOYD, L. EL GHAOU, E. FERON et V. BALAKRISHNAN : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994. [C](#)
- [Bir85] A. BIROLIN : *On the Use of Stochastic Processes in Modeling Reliability Problems : Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. [1.4.1.2](#), [1.4.1.3](#), [1.4.1.3](#)
- [BLM00a] J. D. BOSKOVIC, S. M. LI et R. K. MEHRA : Reconfigurable flight control design using multiple switching controllers and on-line estimation of damage related parameters. *In proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Application*, 2000. [1.3.3.3](#), [1.3.3.3](#)
- [BLM00b] J. D. BOSKOVIC, S. M. LI et R. K. MEHRA : Study of an adaptive reconfigurable control scheme for tailless advanced fighter aircraft (tafa) in the presence of wing damage. *In Position Location and Navigation Symposium*, pages 341–348, 2000. [1.3.3.3](#), [1.3.3.3](#)
- [BLM01] J. D. BOSKOVIC, S. M. LI et R. K. MEHRA : Robust supervisory fault tolerant flight control system. *In proceedings of the American Control Conference*, 2001. [1.3.3.3](#), [1.3.3.3](#)
- [BM98] J. D. BOSKOVIC et R. K. MEHRA : A multiple model-based reconfigurable flight control system design. *In proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1998. [1.3.3.3](#), [1.3.3.3](#)
- [BM99] J. D. BOSKOVIC et R. K. MEHRA : Stable multiple model adaptive flight control for accomodation of a large class of control effector failures. *In proceedings of the American Control Conference*, 1999. [1.3.3.3](#)
- [BN93] M. BASSEVILLE et I. V. NIKIFOROV : *Detection of Abrupt Changes : Theory and Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1993. [1.3.2.1](#)
- [Bou99] E. K. BOUKAS : Exponential stabilizability of stochastic systems with markovian jumping parameters. *Automatica*, 35:1437–1441, 1999. [4.3.4](#)
- [Bou05] E. K. BOUKAS : Stabilization of stochastic nonlinear hybrid systems. *Int. J. Innovative Computing, Information and Control*, 1:131–141, 2005. [4.3.4](#)
- [Bou06] E. K. BOUKAS : Static output feedback control for stochastic hybrid systems : Lmi approach. *Automatica*, 42:183–188, 2006. [4.3.4](#)
- [CdVG99] O. L. V. COSTA, J. B. R. do VAL et J. C. GEROMEL : Continuous-time state-feedback \mathcal{H}_2 -control of Markovian jump linear systems via convex analysis. *Automatica*, 35:259–268, 1999. [3.1](#), [3.2.2.2](#), [4.4](#)
- [CFM05] O. L. V. COSTA, M. D. FRAGOSO et R. P. MARQUES : *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. Springer, 2005. [4.1](#), [4.2.2](#), [4.3.4](#)
- [CM98] O. L. V. COSTA et R. P. MARQUES : Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:95–100, 1998. [4.1](#), [4.2.3.3](#)

- [CNN96] W. N. CNN : Unmanned european rocket explodes on first flight. In *http://www.cnn.com/WORLD/9606/04/rocket.explode*, 1996. [1.2](#)
- [CP01] J. CHEN et R. J. PATTON : Fault tolerant control systems design using linear matrix inequalities. In *proceedings of the 6th European Control Conference*, 2001. [1.1.1.1](#)
- [CW84] E. Y. CHOW et A. S. WILSKY : Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29:603–614, 1984. [1.3.2.1](#)
- [CZT03] C. CHENG, Q. ZHAO et F. TAO : Stability and performance of the stochastic fault tolerant control systems. In *proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision & Control*, 2003. [3.2.2.1](#), [4.3.4](#)
- [DA94] J. B. DAVIDSON et D. ANDRISANI : *Gain Weighted Eigenspace Assignment*. Technical Report, NASA, 1994. [1.3.3.2](#)
- [DAR99] L. DINCA, T. ALDEMIR et G. RIZZONI : A model-based probabilistic approach for fault detection and identification with application to the diagnosis of automotive engines. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:2200–2205, 1999. [1.3.2.1](#)
- [Dem01] M. A. DEMETRIOU : Adaptive reorganization of switched systems with faulty actuators. In *proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 2001. [1.3.3.3](#)
- [dFGdVC00] D. P. de FARIAS, J. C. GEROMEL, J. B. R. do VAL et O. L. V. COSTA : Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:944–949, 2000. [3.2.3.5](#), [3.3.2.5](#), [4.3.4](#)
- [Dit88] C. J. DITTMAR : A hyperstable model-following flight control systems used for re-configuration following aircraft impairment. In *proceedings of the American Control Conference*, pages 2219–2224, 1988. [1.3.3.4](#)
- [DM02] V. DRAGAN et T. MOROZAN : Stability and robust stabilization to linear stochastic systems described by differential equations with markov jumping and multiplicative white noise. *Stochastic Analysis and Applications*, 20:33–92, 2002. [3.1](#), [3.2.2.2](#), [4.3.4](#)
- [DMS04] V. DRAGAN, T. MOROZAN et A. STOICA : \mathcal{H}_2 optimal control for linear stochastic systems. *Automatica*, 40:1103–1113, 2004. [3.1](#), [3.2.2.2](#), [4.3.4](#)
- [dOBG99] M. C. de OLIVEIRA, J. BERNUSSOU et J. C. GEROMEL : A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, 37:261–265, 1999. [\(document\)](#), [4](#), [4.1](#), [4.2.2](#), [4.2.8](#)
- [Doo90] J. L. DOOB : *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1990. [1.4.3.1](#)
- [DRJ01] H. P. B. DASSANAYAKE, C. ROBERTS et C. J. GOODMAN : An architecture for system-wide fault detection and isolation. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 215:37–43, 2001. [1.3.2.1](#)
- [DS96] R. K. DOUGLAS et J. L. SPEYER : Robust fault detection filter design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19:214–218, 1996. [1.3.2.1](#)

- [dSF93] C. E. de SOUZA et M. D. FRAGOSO : \mathcal{H}_∞ control for linear systems with markovian jumping parameters. *Control Theory and Advanced Technology*, 9:457–466, 1993. [4.3.4](#)
- [dSTB04] C. E. de SOUZA, A. TROFINO et A. BARBOSA : Mode-independent \mathcal{H}_∞ filters for hybrid markov linear systems. *In proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision & Control*, 2004. [2.3.2](#), [C](#)
- [Dyk65] E. B. DYKIN : *Markov Processes*. Springer, Berlin, 1965. [1.4.3.4](#)
- [ELWW85] J. S. ETERNO, D. P. LOOZE, J. L. WEISS et A. S. WILLSKY : Design issues for fault tolerant restructurable aircraft control. *In proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, 1985. [1.1.1.1](#)
- [ENHR88] A. EMANI-NAEINI, M. M. HATHTER et S. M. ROCK : Effect of model uncertainty on failure detection : The threshold selection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:1106–1115, 1988. [1.3.2.1](#)
- [EU95] E. ERYUREK et B. R. UPADHYAYA : An integrated fault tolerant control and diagnostics system for nuclear power plants. *In proceedings of the Topical Meeting on Computer Based Human Support Systems : Technology, Methods and Future*, pages 267–274, 1995. [1.3.3.6](#)
- [FBA93] J. A. FARRELL, T. BERGER et B. D. APPLEBY : Using learning techniques to accommodate unanticipated faults. *IEEE Control Systems Magazine*, 13:40–49, 1993. [1.3.3.6](#)
- [FD94] P. M. FRANCK et X. DING : Frequency domain approach to optimally robust residual generation. *Automatica*, 30:789–804, 1994. [1.3.2.1](#)
- [FKB99] C. W. FREI, F. J. KRAUS et M. BLANKE : Recoverability viewed as a system property. *In proceedings of the European Control Conference*, 1999. [1.3.3.7](#)
- [Fra90] P. M. FRANCK : Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey and some new results. *Automatica*, 26:459–474, 1990. [1.3.2.1](#)
- [Fra96] P. M. FRANCK : Analytical and qualitative model-based fault diagnosis - a survey and some new results. *European Journal of Control*, 2:6–28, 1996. [1.3.2.1](#)
- [FW89] P. M. FRANCK et J. WUNNENBERG : *Robust Fault Diagnosis Using Unknown Input Observers Schemes, in Fault Diagnosis in Dynamic Systems - Theory and Applications*. Prentice Hall International, New York, 1989. [1.3.2.1](#)
- [GA91] Z. GAO et P. ANTSAKLIS : Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control. *International Journal of Control*, 53:717–729, 1991. [1.3.3.1](#), [1.3.3.1](#)
- [GA92] Z. GAO et P. ANTSAKLIS : Reconfigurable control system design via perfect model following. *International Journal of Control*, 56:783–798, 1992. [1.3.3.1](#)
- [GA94] P. GAHINET et P. APKARIAN : A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994. [C](#)

- [GBdO99] J. C. GEROMEL, J. BERNUSSOU et M. C. de OLIVEIRA : h_2 -norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers : Decentralized and reliable control. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 44:1449–1454, 1999. [2.3.3](#), [3.3.2.4](#)
- [GBMR98] M. GOPINATHAN, J. D. BOSKOVIC, R. K. MEHRA et C. RAGO : A multiple model predictive scheme for fault-tolerant flight control design. *In proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1998. [1.3.3.3](#), [1.3.3.5](#)
- [Ger97] J. GERTLER : Fault detection and isolating using parity space. *Control Engineering Practice*, 5:653–661, 1997. [1.3.2.1](#)
- [GF97] E. A. GARCIA et P. M. FRANCK : Deterministic nonlinear observer-based approach to fault diagnosis - a survey. *Control and Engineering Practice*, 5:663–760, 1997. [1.3.2.1](#)
- [GH98] D. GROSS et C. M. HARRIS : *Fundamentals of Queuing Theory (3rd ed.)*. Jhon Wiley and Sons, New York, 1998. [4.3.2.3](#)
- [GHS00] A. GENOVESI, J. HARMAND et J. P. STEYER : Integrated fault detection and isolation : Application to a winery's wastewater treatment plant. *Applied Intelligence*, 13:59–65, 2000. [1.3.2.1](#)
- [GNLC95] P. GAHINET, A. NEMIROVSKI, A. J. LAUB et M. CHILALI : *LMI Control Toolbox*. User's Guide, 1995. [3.2.2.1](#)
- [GOA97] L. EL GHAOU, F. OUSTRY et M. AITRAMI : A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:1171–1176, 1997. [3.2.3.4](#), [3.2.3.4](#)
- [GQM00] A. GUASCH, J. QUEVEDO et R. MILNE : Fault diagnosis for gas turbines based on the control systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25:477–483, 2000. [1.3.2.1](#)
- [GRE] H. E. GARCIA, A. RAY et R. M. EDWARDS : Reconfigurable control of power plants using learning automata. *IEEE Control Systems Magazine*. [1.3.3.6](#)
- [HF97] Z. HAN et P. M. FRANCK : Physical parameter estimation based fdi with neural networks. *In Proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'97*, Hull, UK, 1997. [1.3.2.1](#)
- [HKK01] H. HAMMOURI, P. KABORE et M. KINAERT : A geometric approach to fault detection and isolation for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:1451–1455, 2001. [1.3.2.1](#)
- [HKY99] H. HAMMOURI, M. KINAERT et E. H. E. YAAGOUBI : Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:1879–1884, 1999. [1.3.2.1](#)
- [HM94] M. HOU et P. C. MULLER : Fault detection and isolation observers. *International Journal of Control*, 60:827–846, 1994. [1.3.2.1](#)

- [HM98] M. HUZMEZAN et J. M. MACIEJOWSKI : Reconfigurable flight control of a high incidence research model using predictive control. *In proceedings of the IEE Conference Publication*, pages 1169–1174, 1998. [1.3.3.5](#)
- [Hob01] G. HOBLOS : *Contribution à l'analyse de la tolérance aux Fautes des Systèmes d'Instrumentation*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille-France, 2001. [1.3.3.7](#)
- [How71a] R. A. HOWARD : *Dynamic Probabilistic Systems : Markov Models*. Jhon Wiley Inc., New York, 1971. [1.4](#)
- [How71b] R. A. HOWARD : *Dynamic Probabilistic Systems : Semi-Markov and Decision Processes*. Jhon Wiley Inc., New York, 1971. [1.4](#)
- [HS89] D. A. HANDELMAN et R. F. STENDEL : Combining expert system and analytical redundancy concepts for fault-tolerant flight control. *Journal of Guidance, Dynamics and Control*, 12:39–45, 1989. [1.3.3.6](#)
- [HS90] C. Y. HUANG et R. F. STENDEL : Restructurable control using proportional integral implicit model following. *Journal of Guidance, Dynamics and Control*, 13:303–339, 1990. [1.3.3.4](#)
- [HWB92] C. M. HA, Y. P. WEI et J. A. BESOLO : Reconfigurable aircraft flight control system via neural networks. *In proceedings of the AIAA Guidance and Control Conference*, 1992. [1.3.3.6](#)
- [HZ97] F. J. HERMANS et M. B. ZARROP : Parameter estimation using sliding mode principles. *In proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'97*, Hull, UK, 1997. [1.3.2.1](#)
- [Ise84] R. ISERMANN : Process fault-detection based on modeling and estimation methods - a survey. *Automatica*, 20:387–404, 1984. [1.3.2.1](#)
- [Ise93] R. ISERMANN : Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing. *Automatica*, 29:815–836, 1993. [1.3.2.1](#)
- [Ise97] R. ISERMANN : Supervision, fault detection and fault-diagnosis methods - an introduction. *Control Engineering Practice*, 5:639–652, 1997. [1.3.2.1](#)
- [JC90] Y. JI et H. J. CHIZECK : Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35:777–788, 1990. [4.3.4](#)
- [JC92] Y. JI et H. J. CHIZECK : Jump linear quadratic Gaussian control in continuous time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:1884–1892, 1992. [4.3.4](#)
- [JCFL91] Y. JI, H. J. CHIZECK, X. FENG et K. A. LOPARO : Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 7:247–270, 1991. [4.2.2](#)

- [JQ00] Y. JIANG et X. QIN : Hydraulic process fault diagnosis and parameter identification in district heating networks. *Transactions-American Society of Heating Refrigerating and Air Conditioning Engineers*, 106:284–291, 2000. [1.3.2.1](#)
- [KA96a] I. KONSTANTOPOULOS et P. J. ANTSAKLIS : An eigenstructure assignment approach to control reconfiguration. *In proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on Control and Automation*, 1996. [1.3.3.2](#)
- [KA96b] I. KONSTANTOPOULOS et P. J. ANTSAKLIS : *Eigenstructure Assignment in Reconfigurable Control Systems*. Technical Report, Interdisciplinary Studies of Intelligent Systems, 1996. [1.3.3.2](#)
- [KA99] I. KONSTANTOPOULOS et P. J. ANTSAKLIS : An optimization approach to control reconfiguration. *Dynamics and Control*, 9:255–270, 1999. [1.3.3.1](#)
- [Kan04] H. Abou KANDIL : *La Commande Optimale des Systèmes Dynamiques*. Hermès, 2004. [4.4](#)
- [KD97] J. Y. KELLER et M. DAROUACH : A new estimator for dynamic stochastic systems with unknown inputs : Application to robust fault diagnosis. *In proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'97*, Hull, UK, 1997. [1.3.2.1](#)
- [Kha62] R. Z. KHASHMINSKII : On the stability of trajectory of markov processes. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 26:144–147, 1962. [1.4.1.1](#)
- [Kha80] R. Z. KHASHMINSKII : *Stochastic Stability of Differential Equations*. Sijthoff and Noordhoff, Maryland, 1980. [1.4.1.1](#)
- [KK60] I. I. KATS et N. N. KRASOVSKII : On stability of systems with random parameters. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24:1225–1296, 1960. [B.1](#)
- [KOC⁺92] R. KRTOLOVA, U. OZGUNER, H. CHAN, H. GOKTAS, J. WINKELMAN et M. LIUBAKKA : Stability of linear feedback systems with random communication delays. *International Journal of Control*, 37:1884–1892, 1992. ([document](#)), [4](#), [4.1](#), [4.3.1.1](#), [4.3.4](#), [4.3.5](#)
- [Koz69] F. KOZIN : A survey of stability of stochastic systems. *Automatica*, 5:95–112, 1969. [1.4.2.2](#)
- [KSVS04] S. KANEV, C. SCHERER, M. VERHAEGEN et B. De SCHUTTER : Robust output-feedback controller design via local bmi optimization. *Automatica*, 40:1115–1127, 2004. [3.3.2.4](#)
- [Kus67] H. J. KUSHNER : *Stochastic Stability and Control, Mathematics in Science and Engineering, vol. 33*. Academic Press, New York, 1967. [B.2](#)
- [KV00a] S. KANEV et M. VERHAEGEN : A bank of reconfigurable lqg controllers for linear systems subjected to failures. *In proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 2000. [1.3.3.1](#), [1.3.3.3](#)
- [KV00b] S. KANEV et M. VERHAEGEN : Controller reconfiguration for non-linear systems. *Control Engineering Practice*, 8:1223–1235, 2000. [1.3.3.3](#), [1.3.3.5](#)

- [KVDJ00] M. KINNAERT, D. VRANCIC, E. DENOLIN et D. X. JURICIC : Model-based fault detection and isolation for a gas-liquid separation unit. *Control Engineering Practice*, 8:1273–1283, 2000. [1.3.2.1](#)
- [KVN01] S. KANEV, M. VERHAEGEN et G. NIJSSE : A method for the design of fault-tolerant systems in case of sensor and actuator faults. In *European Control Conference ECC*, 2001. [1.3.3.3](#)
- [Lai00] L. T. LAI : Sequential multiple hypothesis testing and efficient fault detection-isolation in stochastic systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46:695–700, 2000. [1.3.2.1](#)
- [LD01] X. F. LIU et A. DEXTER : Fault tolerant supervisory control of a vav air conditioning systems. *Energy Buildings*, 33:379–389, 2001. [1.3.3.6](#)
- [LF96] K. LOPARO et X. FENG : *Stability of Stochastic Systems : Control Engineering Handbook*. Ed. B. Levine, CRC Press, Inc., 1996. [1.4.2.2](#)
- [Liu98] W. LIU : An on-line expert system-based fault-tolerant control systems. *Expert Systems with Applications*, 11:59–64, 1998. [1.3.3.1](#)
- [LP99] C. J. LOPEZ et R. J. PATTON : Takagi-sugeno fuzzy fault tolerant control for non-linear system. In *proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4368–4373, 1999. [1.3.3.6](#)
- [LPD00] C. J. LOPEZ, R. J. PATTON et S. DALEY : Takagi-sugeno fuzzy fault tolerant control for an induction motor. *Neural Computing*, 1:19–28, 2000. [1.3.3.6](#)
- [LR97] C. S. LI et R. RAMASWAMI : Automatic fault detection, isolation, and recovery in transparent all-optical networks. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 15:1784–1789, 1997. [1.3.2.1](#)
- [LS00] R. LINKER et I. SEGNER : Fault detection and isolation in greenhouses. *Acta Horticulture*, 534:367–374, 2000. [1.3.2.1](#)
- [LZA03] H. LIN, G. ZHAI et P. ANTSAKLIS : Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of networked control systems. In *proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision & Control*, 2003. [4.3.4](#)
- [Mac97] J. M. MACIEJOWSKI : Reconfigurable control using constrained optimization. In *proceedings of the European Control Conference*, pages 2219–2224, 1997. [1.3.3.5](#)
- [Mac00] J. M. MACIEJOWSKI : Fault-tolerant aspects of mpc. In *proceedings of the IEE Seminar on Practical Experiences with Predictive Control*, 2000. [1.3.3.5](#)
- [Mar86] M. MARITON : *Les Systèmes Linéaires à Sauts Markoviens*. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris XI, Orsay, 1986. ([document](#)), [4.4](#)
- [Mar89] M. MARITON : Detection delays, false alarm rates and reconfiguration of control systems. *International Journal of Control*, 49:981–992, 1989. [1.4.4.4](#)

- [May99] P. S. MAYBECK : Multiple model adaptive algorithms for detecting and compensating sensor and actuator/surface failures in aircraftflight controlsystems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9:1051–1070, 1999. [1.3.3.3](#)
- [MD97] G. MALLORY et R. DORAISWAMI : A frequency domain identification scheme for control and fault diagnosis. *Journal of Dynamic Systems*, 119:48–53, 1997. [1.3.2.1](#)
- [MJH04] M. MAKI, J. JIANG et K. HAGINO : A stability guaranteed active fault tolerant control system against actuator failures. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14:1061–1077, 2004. [3.2.2.4](#), [3.2.3.5](#)
- [MJZ99] M. MAHMOUD, J. JIANG et Y. ZHANG : Optimal control law for fault tolerant control systems. In *proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision & Control*, Sydney, Australia, 1999. [1.4.4.4](#)
- [MJZ01a] M. MAHMOUD, J. JIANG et Y. ZHANG : Effects of fault detection and isolation to the stability of fault tolerant control systems. In *proceedings of the 2001 American Control Conference*, Arlington, USA, 2001. [1.4.2.1](#), [1.4.2.2](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.4](#), [1.4.4.4](#)
- [MJZ01b] M. MAHMOUD, J. JIANG et Y. ZHANG : Stochastic stability analysis of active fault-tolerant control systems in the presence of noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:1810–1815, 2001. [1.4.1.2](#), [1.4.4.2](#), [1.4.4.2](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.3](#)
- [MJZ02] M. MAHMOUD, J. JIANG et Y. ZHANG : Stochastic stability analysis of fault-tolerant control systems with multiple failure processes. *International Journal of Systems Science*, 33:55–65, 2002. [1.4.1.2](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.4](#)
- [MJZ03] M. MAHMOUD, J. JIANG et Y. ZHANG : *Active Fault Tolerant Control Systems : Stochastic Analysis and Synthesis*. Springer, 2003. [1.4.2.1](#), [1.4.2.2](#), [1.4.3.2](#), [1.4.3.3](#), [1.4.4.2](#), [1.4.4.2](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.4](#), [2.1](#), [2.2.1](#), [2.2.2](#), [2.3.1.1](#), [3.3.1.2](#)
- [MMS98] A. MIRABADI, N. MORT et F. SCHMID : Fault detection and isolation in multisensor train navigation systems. In *IEE Conference Publication Institution of Electronics*, pages 969–977, 1998. [1.3.2.1](#)
- [MO90] W. D. MORSE et K. A. OSSMAN : Model following reconfigurable flight control systems of the afti/f-16. *Journal of Guidance, Dynamics and Control*, 13:969–976, 1990. [1.3.3.4](#)
- [MP89] A. P. MOLCHANOV et E. S. PYATNISKII : Criteria of asymptotic satbility of differential and difference inclusions encountered in control theory. *System and Control Letters*, 13:59–64, 1989. [4.4](#)
- [MSR00] L. MAGNI, R. SCATTOLINI et C. ROSSI : A fault detection and isolation method for complex industrial systems. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part A Systems and Humans*, 30:860–864, 2000. [1.3.2.1](#)
- [NAG00] E. NOBREGA, M. ABDALLA et K. M. GRIGORIADIS : Lmi based approach to fault detection and isolation. In *proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000. [1.3.2.1](#)

- [Pap84] A. PAPOULIS : *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw Hill, New York, 1984. [1.4.1.3](#)
- [Pat97] R. J. PATTON : Fault tolerant control : The 1997 situation. *In proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'97*, 1997. [1.1.1.1](#)
- [PC91] R. J. PATTON et J. CHEN : Robust fault detection using eigenstructure assignment : A tutorial consideration and some new results. *In proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1991. [1.3.2.1](#)
- [PFC89] R. J. PATTON, P. M. FRANCK et R. N. CLARK : *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Applications*. Prentice-Hall International, London, 1989. [4.4](#)
- [PH95] M. M. POLYCARPOU et A. HELMICKI : Automated fault detection and accommodation : A learning systems approach. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 25:1447–1458, 1995. [1.3.3.6](#)
- [PHY⁺] C. J. PAUL, L. E. HOLLOWAY, D. YAN, J. K. STROSNIDER et B. H. KROGH : An intelligent reactive monitoring and scheduling system. *IEEE Control Systems Magazine*. [1.3.3.6](#)
- [PK89] R. J. PATTON et S. M. KANGETHE : *Robust Fault Diagnosis Using Eigenstructure Assignment of Observers, in Fault Diagnosis in Dynamic Systems - Theory and Applications*. Prentice Hall International, New York, 1989. [1.3.2.1](#)
- [Pol01] M. M. POLYCARPOU : Fault accommodation of a class of multivariable nonlinear dynamical systems using a learning approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:736–742, 2001. [1.3.3.6](#)
- [Rau94] H. RAUCH : Intelligent fault diagnosis and control reconfiguration. *IEEE Control Systems Magazine*, 14:6–12, 1994. [1.3.3.1](#)
- [Rau95] H. E. RAUSCH : Autonomous control reconfiguration. *IEEE Control Systems Magazine*, 15:37–49, 1995. [1.3.3.4](#)
- [RG96] M. A. RAMI et L. EL GHAOUI : Robust state-feedback stabilization of jump linear systems via lmis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:1015–1022, 1996. [4.4](#)
- [RM00] C. ROWE et J. M. MACIEJOWSKI : Improving the feasibility of lmi-based robust constrained model predictive control : Application to fault tolerant control. *In proceedings of the UKACC International Conference on CONTROL*, 2000. [1.3.3.5](#)
- [SB97] P. SHI et E. K. BOUKAS : \mathcal{H}_∞ -control for Markovian jumping linear systems with parametric uncertainty. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 95:75–99, 1997. [1.4.4.4](#), [3.1](#)
- [SBNG03] P. SHI, E. K. BOUKAS, S. K. NGUANG et X. GUO : Robust disturbance attenuation for discrete-time active fault tolerant control systems with uncertainties. *Optimal Control Applications and Methods*, 24:85–101, 2003. [4.1](#)

- [SCH98] L. C. SHEN, S. K. CHANG et P. L. HSU : Robust fault detection and isolation with unstructured uncertainty using eigenstructure assignment. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21:50–55, 1998. [1.3.2.1](#)
- [SG98] M. STAROSWIECKI et A. GEHIN : Analysis of system reconfigurability using generic component models. *In proceedings of the UKACC International Conference on CONTROL*, 1998. [1.3.3.7](#)
- [SH99] D. SAUTER et F. HAMELIN : Frequency-domain optimization for robust fault detection and isolation in dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:878–883, 1999. [1.3.2.1](#)
- [SHA99] M. STAROSWIECKI, G. HOBLOS et A. AITOUICHE : Fault tolerance analysis of sensor failures. *In proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3581–3586, 1999. [1.3.3.7](#)
- [SHKa82] K. SOBEL et d L. MABIUS H. KAUFMAN A : Implicite adaptive control for a class of mimo systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 18:576–590, 1982. [1.3.3.4](#)
- [SIG98] R. E. SKELTON, T. IWASAKI et K. GRIGORIADIS : *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor and Francis, 1998. [2.2.4.1](#), [C](#)
- [Sta05] M. STAROSWIECKI : Fault tolerant control : The pseudo-inverse method revisited. *In proceedings of the 16th Triennial IFAC World Congress*, 2005. [1.3.3.1](#), [1.3.3.1](#)
- [Str60] R. L. STRATONOVICH : Conditional markov processes. *Theory of Probability and its Applications*, 5:156–178, 1960. [1.4.1.2](#)
- [Str68] R. L. STRATONOVICH : *Conditional Markov Processes and Their Applications to the Theory of Optimal Control*. Elsevier, New York, 1968. [1.4](#)
- [Suy02] K. SUYAMA : What is reliable control? *In proceedings of the 15th Triennial IFAC World Congress*, 2002. [1.1.1.1](#)
- [SV98] G. SCHRAM et H. B. VERBRUGGEN : A fuzzy logic approach to fault tolerant control. *Journal A*, 39:14–21, 1998. [1.3.3.6](#)
- [SW49] C. SHANNON et W. WEAVER : *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana, 1949. [4.3.1](#)
- [SW93] R. SRICHANDER et B. K. WALKER : Stochastic stability analysis for continuous-time fault tolerant control systems. *International Journal of Control*, 57:433–452, 1993. [1.4](#), [1.4.1.1](#), [1.4.1.1](#), [1.4.1.2](#), [1.4.3.2](#), [1.4.3.3](#), [1.4.3.5](#), [1.4.4.1](#), [1.4.4.2](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.3](#), [1.4.4.4](#), [2.1](#), [2.2.1](#), [2.2.2](#)
- [TIH96] H. TOKUNAGA, T. IWASAKY et S. HARA : Multi-objective robust control with transient specifications. *In proceedings of the IEEE Conference on Decision & Control*, 1996. [2.3.3](#), [3.3.2.4](#)
- [TK84] H. M. TAYLOR et S. KARLIN : *An Introduction to Stochastic Modelling*. Academic Press, Orlando, 1984. [1.4](#)

- [TNS98] D. THEILLIOL, H. NOURA et D. SAUTER : Fault tolerant control method for actuator and components faults. *In proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1998. [1.3.3.1](#)
- [Tre68] H. L. V. TREES : *Detection, Estimation, and Modulation Theory*. Wiley, New York, 1968. [1.4.4.3](#)
- [TW90] S. TZAFESTAS et K. WATANABE : Modern approaches to system/sensor fault detection and diagnosis. *Journal A*, 31:42–57, 1990. [1.3.2.1](#)
- [Vei02] R. VEILLETE : Design of reliable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:290–304, 2002. [1.1.1.1](#)
- [Vis90] R. VISSCHER : Chernobyl nuclear disaster. *In http://www.chernobyl.co.uk*, 1990. [1.2](#)
- [Wal83] B. K. WALKER : Recent developments in fault diagnosis and accomodation. *In AIAA Guidance and Control Conference*, 1983. [4.4](#)
- [Wal97] B. K. WALKER : Fault tolerant control system reliability and performance prediction using semi-markov models. *In SAFEPROCESS*, 1997. [4.4](#)
- [WH95] B. K. WALKER et K. Y. HUANG : Fdi by extended kalman filter parameter estimation for industrial actuator benchmark. *Control Engineering Practice*, 3:1769–1774, 1995. [1.3.2.1](#)
- [Wil76] A. S. WILLSKY : A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, 6:601–611, 1976. [4.4](#)
- [Wit05] E. WITRANT : *Stabilisation des systèmes commandés par réseaux*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 2005. [4.3](#), [4.3.1](#), [4.3.2.3](#), [4.3.3](#)
- [WJ76] A. S. WILLSKY et H. L. JONES : A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21:108–112, 1976. [4.4](#)
- [WKDWOK99] S. WON-KEE, K. DAE-WOO et K. OH-KYU : Fault tolerant model predictive control for nonlinear boiler system. *Journal of Electrical Engineering and Information Science*, 4:298–304, 1999. [1.3.3.5](#)
- [Won71] W. M. WONHAM : *Random Differential Equations in Control Theory, Probabilistic Methods in Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1971. [1.4.1.1](#)
- [WXdS92] Y. WANG, L. XIE et C. E. de SOUZA : Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 19:139–149, 1992. [C](#)
- [WYB02] C. C. WALSH, H. YE et L. G. BUSHNELL : Stability analysis of networked control systems. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 10:438–446, 2002. [4.3](#)
- [WZZ00] N. E. WU, Y. M. ZHANG et K. ZHOU : Detection, estimation and accommodation of loss control effectiveness. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processins*, 14:775–795, 2000. [1.1](#), [1.3.2.1](#)

- [XC03] S. XU et T. CHEN : Robust \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurement. *Automatica*, 39:500–516, 2003. [C](#)
- [XHH00] L. XIAO, A. HASSIBI et J. P. HOW : Control with random communication delays via discrete-time jump linear system approach. *In proceedings of the 2000 American Control Conference*, 2000. ([document](#)), [4](#), [4.1](#), [4.3.4](#), [4.3.5](#), [4.3.5](#)
- [XW04] G. XIE et L. WANG : Stabilization of networked control systems with time-varying network-induced delay. *In proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision & Control*, 2004. [4.3.4](#)
- [YM00] S. YOON et J. F. MACGREGOR : Statistical and causal model-based approaches to fault detection and isolation. *AIChE Journal*, 46:1813–1824, 2000. [1.3.2.1](#)
- [YM01] S. YOON et J. F. MACGREGOR : Fault diagnosis with multivariable statistical model part i : Using steady state fault signature. *Journal of Process Control*, 11:387–393, 2001. [1.3.2.1](#)
- [YP01] D. YIXIN et K. M. PASSINO : Stable fault-tolerant adaptive fuzzy/neural control for turbine engine. *IEEE Control Systems Technology*, 9:494–509, 2001. [1.3.3.6](#)
- [YWaGX04] M. YU, L. WANG et T. CHU et G. XIE : Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach. *In proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision & Control*, 2004. [4.3.4](#)
- [ZBP01] W. ZHANG, M. S. BRANICKY et S. M. PHILLIPS : Stability of networked control systems. *IEEE Control System Magazine*, 21:84–99, 2001. [4.3.4](#)
- [ZHL03] L. ZHANG, B. HUANG et J. LAM : \mathcal{H}_∞ model reduction of markovian jump linear systems. *Systems and Control Letters*, 50:103–118, 2003. [4.2.2](#), [4.2.3.2](#)
- [Zho00] K. ZHOU : A new controller architecture for high performance, robust and fault tolerant control. *In proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 2000. [1.1.1.1](#)
- [ZJ98] Q. ZHAO et J. JIANG : Reliable state feedback control system design against actuator failure. *Automatica*, 34:1267–1272, 1998. [1.1.1.1](#)
- [ZJ99a] Y. ZHANG et J. JIANG : Design of integrated fault detection, diagnosis and reconfigurable control systems. *In proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999. [1.3.3.2](#), [1.3.3.2](#)
- [ZJ99b] Y. ZHANG et J. JIANG : An interacting multiple-model based fault detection, diagnosis and fault-tolerant control approach. *In proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999. [1.3.3.3](#)
- [ZJ00] Y. ZHANG et J. JIANG : Design of proportional integral reconfigurable control systems via eigenstructure assignment. *In proceedings of the American Control Conference*, 2000. [1.3.3.2](#)

- [ZL98] Y. M. ZHANG et X. R. LI : Detection and diagnosis of sensor and actuator failures using imm estimator. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34: 1293–1313, 1998. [1.3.2.1](#), [1.3.2.2](#)
- [ZPIR91] F. A. ZAID, K. Goussman P. IOANNOU et R. ROONEY : Accomodation of failures in the f-16 aircraft using adaptive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 11:73–84, 1991. [1.3.3.4](#)
- [ZSCH05] L. ZHANG, Y. SHI, T. CHEN et B. HUANG : A new method for stabilization of networked control systems with random delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50:1177–1181, 2005. [4.3.5](#), [4.3.5](#)

