



HAL
open science

Analyse statistique d'évaluations sensorielles au cours du temps

Stéphanie Ledauphin

► **To cite this version:**

Stéphanie Ledauphin. Analyse statistique d'évaluations sensorielles au cours du temps. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2007. Français. NNT: . tel-00139887

HAL Id: tel-00139887

<https://theses.hal.science/tel-00139887>

Submitted on 3 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
Sciences et Technologies de l'Information et des Matériaux

Année : 2007



ANALYSE STATISTIQUE
D'ÉVALUATIONS SENSORIELLES
AU COURS DU TEMPS

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée et soutenue publiquement par

Stéphanie LEDAUPHIN

le 23 mars 2007 devant le jury ci-dessous

M.	Philippe BESSE	Rapporteur externe, Professeur à l'Université de Toulouse
M.	Philippe CARMONA	Directeur de thèse, Professeur à l'Université de Nantes
Mme	Bernadette GOVAERTS	Rapporteur externe, Professeur à l'Université de Louvain, Belgique
M.	Georges OPPENHEIM	Rapporteur externe, Professeur à l'Université de Marne la Vallée
M.	Denys POMMERET	Président du jury, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II.
M.	El Mostafa QANNARI	Co-Directeur de thèse, Professeur à l'ENITIAA de Nantes
M.	Pascal SCHLICH	Chargé de recherche INRA au Centre Européen des Sciences du Goût de Dijon

ED:.....

Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé au sein de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs des Techniques des Industries Agricoles et Alimentaires (ENITIAA) dans l'Unité mixte de Sensométrie et de Chimiométrie (USC) de l'Institut National de la Recherche Agronomique (INRA). Je tiens à remercier tout particulièrement M. le professeur El Mostafa Qannari pour son encadrement, ses conseils et sa disponibilité. Cette thèse s'inscrit aussi dans le cadre du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de l'Université de Nantes. Je souhaite témoigner ici toute ma reconnaissance à M. le professeur Philippe Carmona qui a co-dirigé mes travaux. Je remercie également les professeurs Evelyne Vigneau (ENITIAA) et Denys Pommeret (IML, Marseille) pour leurs suggestions dans mes recherches et leur aide précieuse. Je tiens par ailleurs à montrer une grande sympathie à David Causeur (ENSAR, Rennes) et Mohamed Hanafi (ENITIAA) pour leurs remarques.

Je suis très touchée de l'honneur que m'a fait M. le Professeur Denys Pommeret en présidant le jury de thèse. J'exprime également toute ma gratitude à M. le Professeur Philippe Besse, Mme la Professeur Bernadette Govaerts et M. le professeur Georges Oppenheim qui ont accepté de rapporter ce travail de recherche et de prendre du temps pour lire mon travail. Je manifeste enfin toute ma reconnaissance à Pascal Schlich pour avoir consenti à participer au jury de thèse.

Je remercie l'équipe de l'ENITIAA qui m'a accueillie pendant la durée de cette thèse. J'ai une pensée toute particulière pour les nombreuses personnes sympathiques côtoyées à l'ENITIAA, notamment pour Isabelle Grousson, Sébastien Lê, Ghislaine Bidaud, Françoise Ledoux et tous les stagiaires qui ont éclairé de leur bonne humeur ces années de thèse. Merci aux thésards qui m'ont supporté pendant ces années: Karin Sahmer, Mariana Vlad, Hicham Nocairi, Melise Dantas, Catherine Bucumi et Le Hoa Vo Thi .

Merci à ma famille, mes amis et François pour leur soutien et leurs encouragements.

A Alexa.

Résumé

Dans les industries agro-alimentaires ainsi que dans d'autres secteurs d'activités, l'analyse des caractéristiques sensorielles des produits est la clé pour répondre aux attentes des consommateurs. L'analyse sensorielle des produits est le plus souvent basée sur l'établissement de profils sensoriels à partir de notes attribuées par des juges entraînés selon une liste de descripteurs (variables sensorielles). Comme cette épreuve est à vocation analytique, il importe d'étudier la performance des juges et d'en tenir compte dans l'établissement des profils sensoriels des produits. Dans cette perspective, nous proposons une démarche pour déterminer un tableau moyen robuste en ce sens que les juges marginaux ont un poids faible dans le calcul de ce tableau. La démarche permet également de procurer des indicateurs de performance du jury et de chacun des juges.

Bien que très utilisée en pratique, l'épreuve de profil sensoriel présente certaines limites. En effet, les notes attribuées par des juges correspondent à un résumé de l'intensité perçue au cours de l'évaluation du produit et de ce fait, ne rendent pas compte de la dynamique des perceptions. Depuis une vingtaine d'années, les courbes temps-intensité (TI) qui permettent de décrire l'évolution d'une sensation au cours de l'expérience, sont de plus en plus populaires parmi les praticiens de l'analyse sensorielle. Les méthodes de traitement de ces courbes sont très variées. La difficulté majeure pour l'analyse de telles courbes provient d'un effet juge important qui se traduit par la présence d'une signature propre à chaque juge. A l'heure actuelle, il n'existe pas de méthode établie pour l'étude des courbes temps-intensité. Nous proposons ici une approche fonctionnelle basée sur les fonctions B-splines. L'originalité de notre démarche tient dans la réduction de l'effet juge en utilisant une procédure d'alignement de courbes.

D'autres données sensorielles au cours du temps existent telles que le suivi de la dégradation organoleptique de produits alimentaires. Nous proposons, pour l'analyse de ces données, la modélisation par des chaînes de Markov ou chaînes de Markov cachées, de manière à pouvoir ensuite visualiser graphiquement la suivi de la dégradation.

Mots clés: analyse sensorielle, temps-intensité, analyse fonctionnelle, B-splines, alignement, COW, DTW, chaînes de Markov, tests statistiques, indicateurs de performance, tests de permutation, tableau compromis.

Statistical analysis of sensory evaluations in the course of time

Sensory analysis of food products is most often based on scores given by panelists according to a list of descriptors that characterize the products. A statistical method for analyzing sensory profiling data obtained by means of fixed vocabulary is discussed. It consists in a procedure for weighted averaging the data sets associated with the assessors taking account of the extent to which these assessors agree with the general point of view. The method of analysis also provides an overall index of the performance of the panel and performance indices associated with the various assessors.

In conventional sensory profiling, the evaluation focuses on an overall assessment and does not reflect the dynamic process of the sensory perception in the course of time. This is the reason why Time Intensity (TI) curves are becoming more and more popular notwithstanding the poor performance of the assessors and the tricky statistical issues these curves pose. In particular, a common feature of the TI curves is that each assessor tends to generate a characteristic shape, called ‘subject signature’. The functional approach adopted herein is specifically based on the identification and the correction of the ‘signature’ effect of the assessors by adjusting the individual curves. The cornerstones of the method are the use of the projection upon a B-spline basis and alignment procedures.

Other sensory analysis over time exist such as the study of the decay of organoleptic perception of the products. We propose to use Markov chains and Hidden Markov chains to model this decay and focus on the graphical comparison of the evolution of several products.

Keywords: Sensory evaluation, Time-Intensity, B-splines functions, alignment, COW, DTW, performance, permutation tests, weighted average configuration, Markov chains, shelf life of a product.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Épreuve du profil sensoriel: performances des juges	4
Introduction	4
1.1 Profil conventionnel et performance du jury	5
1.1.1 Introduction	5
1.1.2 Recherche du compromis	6
1.1.3 Procédure de validation	7
1.1.4 Application à deux études de cas	8
1.2 Profil libre et performance du jury	12
1.2.1 Analyse de Procruste Généralisée	13
1.2.2 Indices de performance associés aux juges et au jury	14
1.2.3 Application	15
Conclusion	20
Annexe A: Tests relatifs à la performance des juges et du panel	21
2 Les données sensorielles de type Temps Intensité	24
Introduction	24
2.1 Description	25
2.1.1 Collecte des données T-I et entraînement des juges	25
2.1.2 Analyse des données TI	26
2.2 Extraction de paramètres	27
2.2.1 Les paramètres les plus fréquents	28
2.2.2 Les méthodes du trapèze et des fractiles	28
2.3 Etude des courbes comme vecteurs	29
2.3.1 Détermination d'une courbe moyenne	29
2.3.2 Analyse en Composantes Principales	30
2.4 Approches fonctionnelles	31
2.4.1 Projection sur une base	31
2.4.2 Approximation par des modèles paramétriques	32

Conclusion	35
3 Caractérisation des produits par des courbes TI	37
Introduction	37
3.1 Contexte mathématique	38
3.1.1 Ensemble de fonctions	38
3.1.2 Lissage pénalisé et contraintes	39
3.2 Description des données	40
3.2.1 Données “boissons chocolatées”	40
3.2.2 Données “fromages”	40
3.2.3 Données “crèmes glacées”	41
3.2.4 Prétraitements	42
3.2.5 Double standardisation	42
3.3 Approche fonctionnelle	43
3.3.1 Choix de la base de fonctions splines	43
3.3.2 Courbe moyenne par juge, répétabilité	45
3.4 Caractérisation des produits	48
Conclusion	48
4 Réduction de l’effet juge par alignement des courbes	51
Introduction	51
4.1 Alignement de courbes	51
4.1.1 Alignement COW	52
4.1.2 Alignement DTW	53
4.2 Application à l’atténuation de l’effet juge	53
4.2.1 Alignement des squelettes à partir de la signature moyenne	53
4.2.2 Critère global	55
4.2.3 Validation: procédure de permutation	58
4.3 Application à une étude de cas	60
4.3.1 Atténuation de l’effet juge: comparaison de méthodes d’alignement	60
4.3.2 Résultats de la procédure globale d’alignement	64
4.3.3 Résultats de la validation	65
4.3.4 Caractérisation des produits	69
Conclusion	70
5 Données sensorielles au cours du temps et chaînes de Markov	71
Introduction	71
5.1 Description des données	72
5.2 Les chaînes de Markov	73
5.2.1 Les tests d’hypothèses	76

5.2.2	Différences entre les produits	78
5.3	Résultats	79
5.3.1	Saumons fumés	79
5.3.2	Produit déshydraté	82
5.4	Prise en compte des performances des juges	85
5.4.1	Modèle de Markov caché (HMM)	85
5.4.2	Intervalle de confiance par la procédure de bootstrap	88
5.4.3	Application aux données “saumons”	89
5.4.4	Détermination des intervalles de confiance pour les données “saumons”	90
	Conclusion	92
	Conclusion Générale	94
	Annexe	97
	Annexe B: Résolution de problème d’optimisation sous contraintes	97
	Annexe C: Algorithme EM et chaînes de Markov cachée	99
	Annexe D: Publications	102
	Annexe E: Communications aux congrès	103

Liste des figures

1.1	Différences entre juges dans la manière de noter : différents niveaux d'échelle (à gauche) ou différentes étendues (à droite).	5
1.2	Tests de permutations pour la performance de chacun des juges et pour la performance globale du jury: histogrammes des valeurs simulées des indicateurs de performances associés aux sept juges et au panel (nombre de simulations=1000).	10
1.3	Cercle des corrélations et premier plan factoriel.	11
1.4	Représentation des huit variétés de yaourts sur la base du premier plan principal du compromis.	16
2.1	Exemple de courbe TI: étude de la saveur sucrée dans une boisson chocolatée.	25
2.2	Méthodes de traitement des courbes TI.	26
2.3	Identification des paramètres d'une courbe TI.	28
2.4	Exemple de modélisation d'une courbe TI par un trapèze.	29
2.5	Deux évaluations de saveur sucrée pour le même produit par deux juges différents et courbe moyenne en gras.	30
2.6	Exemple de fonction B-spline quadratique en gras construite à partir de trois polynômes du second ordre.	32
3.1	Exemple de base formée de huit fonctions B-splines cubiques (4 nœuds intérieurs: 0,2; 0,4; 0,6 et 0,8).	39
3.2	Exemples de courbes TI.	41
3.3	Perception de l'arôme et évaluations de la fonte en bouche d'une crème glacée.	42
3.4	Exemple de détermination des trois paramètres ($T_0=0$, $\Delta=45.7$ et $Imax=52$) et du squelette (à droite).	43
3.5	Données 'fromages': Exemples de lissage pour différentes pénalités. . .	44
3.6	Données 'fromages': Evolution de la qualité d'ajustement R^2 et du carré de la distance en fonction du nombre de fonctions B-splines introduites dans la base (K), pour des splines de degré 3 et $\lambda=0.0005$. . .	45
3.7	Exemple de lissage dans le cas de la fonte en bouche.	45

4.1	Etude des fromages: Signature des 13 juges et signature globale du panel en gras.	54
4.2	Etude des boissons chocolatées: Signature des 10 juges et signature globale du panel en gras.	54
4.3	Exemple de transformation u et lissage de cette transformation à l'aide d'une fonction B-splines, pour aligner un signal sur un autre (pour $N=5$). $u(0,2) = 0,4$; $u(0,4) = 0,5$; $u(0,6) = 0,6$ et $u(0,8) = 0,7$	55
4.4	Données chocolats, méthodes d'alignement pour le juge 3. A gauche, signature du juge (en gras signature globale et c valeur du critère $\ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes dans le but d'aligner sa signature sur la signature globale. A droite, signal ajusté par les différentes méthodes.	61
4.5	Données chocolats, méthodes d'alignement pour le juge 1. A gauche, signature du juge (en gras signature globale et c valeur du critère $\ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes dans le but d'aligner sa signature sur la signature globale. A droite, signal ajusté par les différentes méthodes.	61
4.6	Données chocolats, méthodes d'alignement pour l'ensemble des juges. A gauche, signatures des juges (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes. A droite, signaux ajustés par les différentes méthodes.	62
4.7	Données fromages, méthodes d'alignement pour l'ensemble des juges. A gauche, signatures des juges (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes. A droite, signaux ajustés par les différentes méthodes.	63
4.8	Données chocolats, alignement pour les juges 1 et 3 par l'algorithme itératif. A gauche, signatures des juges multipliées par ρ_j (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \ \rho_j f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$). Au centre, transformations obtenues. A droite, signaux ajustés et valeur du critère.	64
4.9	Données chocolats, alignements pour l'ensemble des juges par l'algorithme itératif. A gauche, signatures des juges multipliées par ρ_j (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \ \rho_j f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$). Au centre, transformations obtenues. A droite, signaux ajustés et valeur du critère.	64
4.10	Données chocolats, coefficients ρ_j (à gauche) et α_j (à droite) pour les dix juges.	65
4.11	Premier plan factoriel de l'ACP des courbes associées aux juges et aux produits. Seuls les numéros associés aux juges sont indiqués.	66
4.12	Premier plan factoriel de l'ACP des courbes ajustées associées aux juges et aux produits. Seuls les numéros associés aux juges sont indiqués.	67

4.13	Donnes chocolats, distance entre les courbes des juges ajustées (par l’algorithme itératif) et la courbe moyenne pour chaque produit (600 permutations). L’étoile correspond à la valeur dans le cas non permuté et le diamant à la valeur initiale avant la procédure d’alignement.	68
4.14	Donnes chocolats, valeur de l’accord global du panel sur la forme des signaux (600 permutations). L’étoile correspond à la valeur dans le cas non permuté et le diamant à la valeur initiale avant la procédure d’alignement.	68
4.15	Premier plan factoriel de l’ACP des courbes ajustées. Seuls les numéros des produits sont indiqués.	69
4.16	Descriptif du premier axe principal dans l’ACP des courbes ajustées.	69
5.1	Pourcentage des évaluations des catégories ‘frais’ (couleur sombre), à ‘très dégradé’ (couleur claire) pour les produits A à F au cours du temps	73
5.2	Pourcentage des évaluations des cinq catégories ‘très bien’ (couleur sombre), à ‘très dégradé’ (couleur claire) pour chaque attribut au cours du temps	74
5.3	Graphe des transitions possibles d’une chaîne de Markov pour $N = 3$.	76
5.4	Données “saumons”: Analyse des correspondances sur les vecteurs d’états avec $T = 5$ et $N = 3$. Pt correspond au produit P à l’instant t , ainsi $B4$ correspond au saumon B à l’instant 4.	81
5.5	Analyse des correspondances sur les vecteurs d’états (produit déshydraté) avec $T = 29$ et $N = 6$. Dt correspond au descripteur D à l’instant t , ainsi $F7$ correspond à l’évaluation de flaveur (F) à l’instant 7.	84
5.6	Probabilités de transitions et probabilités conditionnelles pour une chaîne de Markov cachée à 3 états.	86
5.7	Analyse des correspondances sur les vecteurs d’états (données “saumons”) avec $T = 5$ et $N = 3$. Pt correspond au produit P à l’instant t , ainsi $B4$ correspond au saumon B à l’instant 4.	91

Liste des tableaux

1.1	Liste des descripteurs sensoriels.	9
1.2	Performance des juges et du jury.	10
1.3	Résultats des tests alternatifs pour l'étude sur les cidres.	11
1.4	Performances comparées pour les données originales et les données modifiées.	12
1.5	Résultats des tests alternatifs dans l'étude des bières.	13
1.6	Données d'évaluation sensorielle de 8 produits par 7 juges selon la procédure de profil libre.	17
1.7	Résultats des tests empiriques (avec 1000 permutations) et tests alternatifs concernant la performance des juges et du jury.	18
1.8	Coefficients de performance α_i et β_i . Les coefficients α_{i*} sont obtenus à partir des coefficients α_i par normalisation afin de permettre une comparaison directe avec les coefficients β_i	18
1.9	Indicateurs de performance et résultats des tests théoriques dans l'étude sur les yaourts (avec données modifiées: inversion des évaluations de certains produits pour le juge 1).	19
3.1	Projection dans une base de fonctions B-splines sous contraintes.	40
3.2	Données 'fromages': Pouvoir discriminant des juges (p-value) pour chaque critère. Pour une p-value < 0.05 , le juge est considéré comme ayant un pouvoir discriminant suffisant.	47
3.3	Données 'fromages': Répétabilité des juges pour chaque critère. Les juges ayant les résidus les plus importants sont considérés comme les moins répétables.	47
3.4	Données 'fromages': Résultats des tests alternatifs pour l'étude de performance du jury.	49
3.5	Données 'boissons chocolatées': Résultats des tests alternatifs pour l'étude de performance du jury.	49
4.1	Données chocolats, valeur du critère $\sum_{j=1}^m \ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$ pour les différentes méthodes d'alignement.	63

4.2	Données fromages, valeur du critère $\sum_{j=1}^m \ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$ pour les différentes méthodes d'alignement.	63
4.3	Données chocolats, valeur du critère $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \ \rho_j f_{ij} \circ u_j - f_i\ ^2$ avant et après la procédure itérative d'alignement.	65
4.4	Données ‘boissons chocolatées’: Etude de performance des juges et du jury.	66
5.1	Suivi du saumon B par neuf juges.	75
5.2	a. Tableau de contingence indiquant le nombre de fois que le produit B est passé de l'état i à l'instant $t = 0$ à l'état j à l'instant $t = 1$ ($i, j = 1, 2, 3$) pour les évaluations des neuf juges du tableau 5.1. 5.2-b. Cumul des tables $n_{ij}(t)$ pour $t = 0, \dots, 4$. 5.2-c. Profils lignes: estimation de la matrice de transition.	75
5.3	Données “saumons”: Test $H_0^{(1)}$: ordre=0, $H_1^{(1)}$: ordre ≥ 1	80
5.4	Données “saumons”: Test $H_0^{(2)}$: ordre=1, $H_1^{(2)}$: ordre ≥ 2	81
5.5	Données “saumons”: Test $H_0^{(3)}$: produits homogènes, $H_1^{(3)}$: au moins deux produits distincts.	81
5.6	Données “produit déshydraté”: Test $H_0^{(1)}$: ordre=0, $H_1^{(1)}$: ordre ≥ 1	83
5.7	Données “produit déshydraté”: Test $H_0^{(2)}$: ordre=1, $H_1^{(2)}$: ordre ≥ 2	83
5.8	Données “produit déshydraté”: Test $H_0^{(3)}$: descripteurs homogènes, $H_1^{(3)}$: au moins deux descripteurs distincts.	83
5.9	Evaluations des états d'un produit au cours du temps par un jury. $Y_t^{(q)}$ représentent les états attribués par le $q^{\text{ème}}$ juges au temps t	88
5.10	Estimation des probabilités de transitions (P) et des probabilités conditionnelles (π) pour les six produits (A , . . . , F) par le modèle de Markov caché.	89
5.11	Estimation des probabilités de transitions (P) pour les six produits (A , . . . , F) par le modèle de Markov.	90
5.12	Estimation par intervalles de confiance des probabilités de transitions (P) pour les six produits (A , . . . , F) par le modèle de Markov caché avec ré-échantillonnage.	92

Introduction Générale

Dans les industries agroalimentaires comme dans d'autres secteurs d'activités, l'analyse sensorielle est un passage obligé pour le développement et l'amélioration de nouveaux produits. Pour évaluer la douceur d'un jus d'orange, l'amertume d'un café ou la tendreté d'une viande, pour mesurer l'intensité du bruit d'une porte de voiture qui claque ou encore pour déterminer quelle crème de soin est la plus facile à étaler, des groupes de personnes sont invités à quantifier, à comparer ou à noter les informations qu'ils reçoivent par l'intermédiaire de leurs sens. Ces informations sont de nature à orienter les utilisateurs dans le choix et la conception des produits. *“L'évaluation sensorielle des aliments est une technologie dont l'objectif est la détermination des propriétés sensorielles ou organoleptiques des aliments”* (SSHA, 1998). L'analyse sensorielle qui mesure, analyse et interprète ces caractéristiques sensorielles peut être une aide à la conception d'un produit: reformulation des produits jusqu'à atteindre la satisfaction des consommateurs. Elle peut aussi être un outil de contrôle de qualité par l'évaluation de la conformité des produits fabriqués avec le cahier des charges. Les objectifs et types d'études sont très divers: caractérisation de produits en développement, mise en évidence des améliorations à apporter, positionnement d'un produit par rapport à ses principaux concurrents... La première étape d'une étude tient dans le choix de l'épreuve sensorielle (comparaison de produits, évaluations objectives par notation, classement, évolution dans le temps...). L'une des épreuves la plus utilisée est l'épreuve de profil sensoriel conventionnel (ou à vocabulaire fixé). Elle vise à caractériser un ensemble de produits sur le plan sensoriel. Pour cela un panel de juges est sélectionné et entraîné et une liste de descripteurs (variables sensorielles pertinentes, descriptives, ...) est établie grâce au concours des juges (SSHA, 1998). Cette liste va servir pour la caractérisation des produits considérés et peut également servir pour une longue période dans une perspective de contrôle de la qualité. Pour le traitement statistique, l'analyse de la variance et l'analyse en composantes principales sont très utilisées mais, force est de constater, que l'analyse sensorielle a suscité une recherche active parmi les statisticiens (Schlich, 1993; Naes et Risvik, 1996). Il existe une autre épreuve sensorielle dite “profil libre” dans laquelle les juges utilisent des listes de descripteurs différentes (en totalité ou en partie) pour évaluer les produits. Ceci permet de procurer davantage de flexibilité aux juges en leur donnant la possibilité d'utiliser des descripteurs

qu'ils comprennent bien. Pour le traitement des données, deux méthodes statistiques sont principalement utilisées: la méthode de Procruste généralisée, plus connue par l'acronyme GPA (Generalised Procrustes Analysis) (Gower, 1975) et la méthode STATIS (Lavit, 1988; Schlich, 1996).

Dans un premier chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse de données issues de profil conventionnel, en nous focalisant sur les performances des juges. En effet, en dépit de l'entraînement des juges, des différences de notation subsistent. Par conséquent, il importe de cerner la performance des juges et d'en tenir compte lors de la phase de détermination des profils sensoriels des produits. Dans cette perspective, nous proposons une démarche qui consiste à déterminer un indicateur de performance global du panel ainsi que des indicateurs de performance associés aux différents juges. Des tests d'hypothèses basés sur des procédures de permutations sont également mis en place afin d'évaluer la significativité de ces indicateurs. Enfin, ces indicateurs de performance sont utilisés pour déterminer un tableau moyen robuste des évaluations des différents juges. Dans le cadre du profil libre, il est usuel d'utiliser la méthode appelée GPA (Generalised Procrustes Analysis); celle-ci est décrite dans le sous chapitre 1.2. L'intérêt de ce rappel est de voir comment la méthode de caractérisation des performances des juges élaborée dans le cadre du profil conventionnel peut être adaptée à ce contexte et, également, de souligner une certaine similarité avec une démarche proposée dans le chapitre 4 pour l'analyse de courbes de type temps-intensité.

Le premier chapitre se situe dans le contexte de données ponctuelles (mesurées à un instant donné) alors que les chapitres suivants abordent l'analyse sensorielle des données au cours du temps. En effet, les notes attribuées en profil conventionnel et en profil libre correspondent en général à une synthèse de l'intensité étudiée (note ponctuelle). Cependant, cette intensité peut connaître une forte évolution au cours de l'évaluation sensorielle (action de la salive, température en bouche, mastication...). Le pic d'intensité peut être atteint à différents moments. Par exemple, pour les chewing-gums, le goût de menthe peut devenir très fort au bout de quelques secondes et ensuite s'atténuer après quelques minutes. Pour les sauces épicées, la sensation épicée peut n'être perçue qu'à partir d'un certain temps... De plus, deux produits donnés peuvent avoir le même pic d'intensité mais la sensation peut être beaucoup plus longue pour l'un des produits que pour l'autre. Le temps semble donc être un élément à prendre en compte. Ainsi, des auteurs ont préconisé de noter l'intensité maximale et le moment correspondant au cours de la dégustation ainsi que la durée de la saveur, flaveur ou texture (Sjöström et Cairncross, 1953; Neilsen, 1957; Birch et Munton, 1981; Larson-Powers et Pangborn, 1978; Moore et Shoemaker, 1981)... Nous voyons alors apparaître l'apport considérable d'informations d'une courbe qui décrit l'évolution de cette intensité au cours du temps; celle-ci est communément appelée courbe Temps Intensité (TI). Nous avons ainsi accès à la vitesse d'apparition de la saveur, le taux de croissance de l'intensité, le pic d'intensité,

la durée du pic, le taux de décroissance, la durée jusqu'à la disparition de la saveur, etc...

Le deuxième chapitre présente une recherche bibliographique sur les études de type temps-intensité, afin d'explorer les méthodes statistiques dévolues au traitement des données qui se présentent sous forme de courbes. De telles courbes ont tout d'abord été réalisées pour étudier les évolutions de saveurs puis pour l'analyse de la texture des aliments. Depuis une vingtaine d'années, la collecte et le traitement des données TI sont devenus de plus en plus aisés grâce aux avancées informatiques. Néanmoins, il n'existe toujours pas de méthode admise par tous pour l'analyse de telles données. Plusieurs approches ont ainsi été proposées; basées pour la plupart sur une extraction de paramètres caractéristiques des courbes. Nous pouvons également citer des procédures d'analyse des données basées sur l'établissement des courbes prototypes ou sur la mise en place d'un modèle paramétrique.

Le troisième chapitre décrit les prétraitements nécessaires à l'étude de telles courbes et la modélisation mise en place. Une approche fonctionnelle en utilisant des bases de fonctions B-splines a été adoptée. Le troisième chapitre traite également de la détermination de courbes compromises et d'un problème récurrent en évaluation sensorielle de manière générale et dans les études Temps Intensité en particulier, qui est la présence d'un effet juge important. Le quatrième chapitre développe des procédures d'alignements pour pallier ce problème. Une exploration de méthodes d'alignement utilisées dans d'autres domaines (chromatographie, reconnaissance vocale...) et adaptées à l'étude des courbes Temps Intensité, conduit à une méthode qui semble tout à fait appropriée pour l'analyse de courbes TI. Celle-ci est validée par une procédure de permutations.

Enfin, dans un cinquième chapitre, nous nous sommes intéressés à d'autres types de données sensorielles au cours du temps. Celles-ci concernent des suites de notes ou d'états traduisant l'évolution sensorielle de la dégradation de produits à des périodes successives de leur durée de vie. Pour l'analyse de ce type de données, une modélisation de type "chaînes de Markov" est développée puis étendue à une modélisation de type "chaînes de Markov cachées". Cette démarche permet de mettre en place des tests d'homogénéité des produits et de comparer leurs dégradations.

Chapitre 1

Épreuve du profil sensoriel: performances des juges

Introduction

L'évaluation sensorielle par un jury à l'aide de l'épreuve du profil sensoriel consiste à déterminer la nature et le degré des différences organoleptiques entre des produits. De manière concrète, les juges sont appelés à attribuer des notes d'intensité aux différents produits selon une liste de descripteurs (variables). Il existe principalement deux procédures décrites dans les sous chapitres 1.1 et 1.2: profil conventionnel appelé également profil à vocabulaire fixé et profil libre (Williams et Langron, 1984). Avec la première, les juges utilisent une liste préétablie de descripteurs afin d'évaluer les produits considérés. Pour les profils libres, les listes de descripteurs ne sont pas nécessairement les mêmes d'un juge à l'autre. Dans les deux cas, la détermination d'un compromis permet d'établir une carte sensorielle des produits ou de relier les aspects organoleptiques aux aspects physico-chimiques ainsi qu'aux données de préférences. L'épreuve sensorielle de profil conventionnel est de loin la plus répandue. Concrètement, les données se présentent sous forme d'un ensemble de tableaux. Chaque tableau est associé à un juge et donne la caractérisation des produits (en lignes) sur la base des descripteurs retenus (en colonnes). Pour analyser ce type d'épreuve, il est d'usage de considérer le tableau moyen. Nous proposons dans le sous chapitre 1.1 une démarche qui détermine un tableau moyen robuste en ce sens que les juges marginaux ont des poids faibles dans le calcul de ce tableau. La démarche permet également de procurer des indicateurs de performance du jury et de chacun des juges. Pour analyser des données de profil libre, la méthode la plus utilisée est l'analyse de Procrustes généralisée ("Generalised Procrustes Analysis", GPA). Nous rappelons cette méthode dans le sous chapitre 1.2. L'intérêt de ce rappel est de voir comment la méthode de caractérisation des performances des juges peut être adaptée à ce contexte et, également, de souligner une certaine similarité avec une démarche proposée dans le chapitre 4 pour l'analyse de courbes de type temps-intensité.

1.1 Profil conventionnel et performance du jury

1.1.1 Introduction

Les données issues d'une épreuve de profil sensoriel conventionnel concernant n produits évalués par m juges entraînés pour les p descripteurs considérés, peuvent être présentées sous forme de m tableaux \mathbf{X}_i (de dimension $n * p$). Chacun des tableaux \mathbf{X}_i donnant l'évaluation des produits vue par un juge (i dans $1 \dots m$). L'objectif in fine est de synthétiser l'information et de caractériser les produits sur un plan organoleptique. Dans cette perspective, il faut noter qu'une étape d'harmonisation des notes données par les juges est nécessaire. Le centrage des données pour chacun des juges permet de ramener les notes des juges à un même niveau (figure 1.1 à gauche). La figure 1.1 (à droite) met en évidence un autre type de problème lié à la manière d'utiliser l'étendue de l'échelle par chacun des juges. La démarche préconisée afin de contrer ce problème est de multiplier chacun des tableaux par un facteur d'échelle afin de ramener les configurations de tous les juges à une même dispersion. De manière précise, nous normalisons le tableau de manière à avoir $trace(\mathbf{X}'_i \mathbf{X}_i) = 1$ avec \mathbf{X}'_i la matrice transposée de \mathbf{X}_i (cf. Annexe A, page 21, pour un complément sur les notations utilisées).

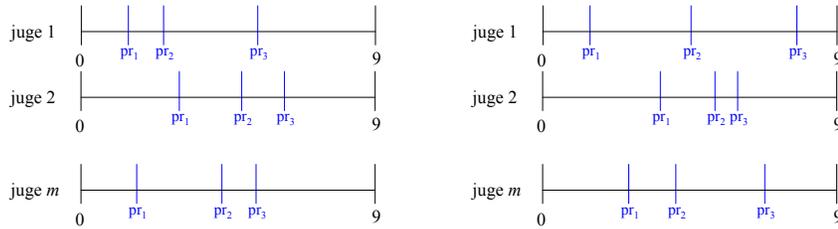


FIGURE 1.1 – Différences entre juges dans la manière de noter : différents niveaux d'échelle (à gauche) ou différentes étendues (à droite).

Dans la suite, nous supposons que les tableaux sont centrés et multipliés par des facteurs d'échelles de manière à avoir la même inertie. Afin de déterminer un compromis (tableau moyen), \mathbf{C} , qui devra synthétiser l'information globale apportée par l'ensemble des juges et qui servira de base pour la caractérisation sensorielle des produits, il est d'usage de calculer une moyenne arithmétique des différents tableaux. Cependant, il faut noter que, malgré le centrage et la normalisation des tableaux, des différences entre les juges peuvent subsister ; elles sont liées à leurs performances. Afin de tenir compte de cet aspect, nous cherchons à déterminer une moyenne pondérée des différents tableaux en tenant compte de ces performances. En d'autres termes, nous souhaitons associer à un juge qui serait en désaccord avec le reste du panel un poids faible dans le calcul de la moyenne. Cette démarche de pondération est également adoptée dans le cadre de STATIS (Lavit, 1988; Schlich, 1996). Cependant, une critique formulée à la démarche de STATIS tient au fait que

deux juges se ressemblent lorsque les distances entre produits perçues par ces deux juges sont similaires alors qu'ils peuvent être en désaccord unidimensionnel sur tous ou une partie des descripteurs. En d'autres termes, la méthode STATIS autorise des rotations entre les configurations des juges, à l'instar de l'analyse de Procruste généralisée (Gower, 1975).

Au-delà de cet aspect statistique consistant à pondérer les configurations des juges conduisant ainsi à une moyenne robuste, il faut souligner que les utilisateurs en évaluation sensorielle sont intéressés par la caractérisation de la performance de chacun des juges et la caractérisation de la performance globale de tout le panel. En s'appuyant sur une procédure proposée par Wakeling *et al.* (1992) dans le cadre de la méthode de Procruste généralisée et par Kazi-Aoual *et al.* (1995) dans le cadre de la méthode STATIS, nous avons mis en place une démarche de validation de la performance des juges et du compromis basée sur des tests de permutations.

1.1.2 Recherche du compromis

Nous considérons m tableaux \mathbf{X}_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) centrés et normés de dimensions n (nombre de produits) par p (nombre de descripteurs). Entre deux tableaux \mathbf{X}_i et $\mathbf{X}_{i'}$, correspondant respectivement aux configurations des juges i et i' , nous considérons l'indice de similarité suivant :

$$t_{ii'} = \frac{1 + \text{trace}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_{i'})}{2} \quad (1.1)$$

Cet indice de similarité est une transformation affine du coefficient de corrélation calculé entre les deux vecteurs de taille $n * p$ obtenus en 'vectorisant' les tableaux \mathbf{X}_i et $\mathbf{X}_{i'}$. Du fait du centrage et de la normalisation des tableaux, nous pouvons montrer que cet indice vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq t_{ii'} \leq 1 \\ t_{ii'} &= 1 \text{ si } \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i'} \\ t_{ii'} &= \frac{1}{2} \text{ si } \mathbf{X}_i \perp \mathbf{X}_{i'} \\ t_{ii'} &= 0 \text{ si } \mathbf{X}_i = -\mathbf{X}_{i'} \end{aligned}$$

Soit \mathbf{T} la matrice (de dimension $m * m$) dont l'élément générique est $t_{ii'}$ ($i, i' \in \{1, \dots, m\}$). Soit λ la plus grande valeur propre de \mathbf{T} et β un vecteur propre associé à λ . Comme toutes les entrées de la matrice \mathbf{T} sont positives, les composantes du vecteur β peuvent être choisies de manière à être toutes positives. Nous proposons de normaliser le vecteur β de manière à avoir $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$. En remarquant que pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$, nous avons $\sum_{i'=1}^m t_{ii'} \beta_{i'} = \lambda \beta_i$, nous en déduisons que lorsqu'un juge i est globalement en accord avec les autres juges ($t_{ii'}$ grand pour $i' = 1, 2, \dots, m$), le coefficient β_i qui lui est associé est relativement grand et que, inversement, si ce juge est en désaccord avec les autres, le coefficient β_i a tendance à être petit. Le tableau compromis \mathbf{C} que nous considérons est donné par :

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{C}^*}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{C}^{*T} \mathbf{C}^*)}} \text{ où } \mathbf{C}^* = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{X}_i \quad (1.2)$$

Nous avons choisi de normer \mathbf{C} afin qu'il soit dans la même échelle que les tableaux \mathbf{X}_i . Par la suite, nous définissons les coefficients α_i par: $\alpha_i = \text{trace}(\mathbf{X}_i' \mathbf{C})$. Les coefficients α_i et β_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) reflètent le même aspect à savoir l'accord du juge i avec le point de vue global du panel donné par \mathbf{C} . Cependant, les coefficients α_i sont plus facilement manipulables pour la mise en place de tests d'hypothèses. Nous avons les propriétés suivantes :

$$-1 \leq \alpha_i \leq 1$$

$\alpha_i = -1$ si $\mathbf{X}_i = -\mathbf{C}$ ce qui traduit un désaccord total du juge i avec le point de vue global du jury en ce sens que le juge i décrit les produits de manière diamétralement opposée aux autres juges.

$$\alpha_i = 1 \text{ si } \mathbf{X}_i = \mathbf{C}.$$

Afin de caractériser la performance globale du jury, nous proposons l'indicateur :

$\gamma = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha_i$. L'interprétation de cet indicateur est aisée : plus il est proche de 1, plus les juges sont en accord entre eux.

1.1.3 Procédure de validation

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit des indicateurs de performance à l'échelle du panel et à l'échelle individuelle pour chacun des juges. Dans ce paragraphe, nous souhaitons aller au-delà de cet aspect descriptif et proposer des tests d'hypothèses pour juger si, à l'échelle globale, le compromis reflète de manière significative un point de vue global des juges. A l'échelle de chaque juge, nous posons une question similaire, à savoir : est-ce que la performance du juge i reflétée par α_i traduit un accord significatif entre le juge i et le tableau compromis? En d'autres termes, α_i et γ devraient être significativement différents de zéro et positifs.

Test de permutations

La démarche est basée sur les tests de permutations. En cela, nous suivons la procédure proposée par Wakeling *et al.* (1992) dans le cadre de la méthode de Procruste généralisée et par Kazi-Aoual *et al.* (1995) dans le cadre de la méthode STATIS. La procédure consiste à faire des simulations sur le tableau \mathbf{X}_i du juge i . Pour cela, nous permutons de manière aléatoire les lignes de ce tableau. Par la suite, nous calculons la valeur $\tilde{\alpha}_i$ de l'accord de ce nouveau tableau avec le compromis \mathbf{C} , déterminé préalablement. Si la valeur observée α_i est plus grande que la majorité des valeurs obtenues à l'issue de l'étude de simulation consistant à permuter de manière aléatoire les lignes du tableau \mathbf{X}_i plusieurs fois (par exemple, 1000 fois), alors le juge i est considéré comme ayant une contribution significative à la détermination du compromis.

Afin d'établir un test d'hypothèses concernant la signification de la performance globale γ , nous pouvons procéder, comme pour les performances individuelles, à une étude de simulation à l'aide de permutations. De manière plus précise, nous

permutons les lignes de chacun des tableaux indépendamment des autres tableaux. Pour chaque simulation ainsi effectuée, nous calculons la valeur $\tilde{\gamma}$ et la décision quant à la signification du compromis est prise sur la base de l'histogramme des valeurs $\tilde{\gamma}$ simulées.

Test alternatif

Le problème de ce type de test basé sur des calculs intensifs réside dans le nombre très important de permutations (plus de 3,6 millions de permutations pour un nombre de produits égal à 10). A l'instar des résultats théoriques concernant les tests de permutations donnés par Kazi-Aoual *et al.* (1995), nous proposons de calculer la moyenne et la variance des valeurs $\tilde{\alpha}_i$ qui seraient obtenues si nous effectuions toutes les permutations. Ceci procure un test alternatif en supposant la normalité de la distribution des $\tilde{\alpha}_i$, ce qui est concevable, particulièrement lorsque le nombre de produits est relativement important. Nous proposons de faire de même en ce qui concerne la performance globale du panel. En désignant par m_i (respectivement, v_i) la moyenne (respectivement, la variance) de toutes les valeurs $\tilde{\alpha}_i$ obtenues après permutations des lignes, nous avons:

$$\begin{cases} m_i = 0 & (1.3) \\ v_i = \frac{1}{n-1} \text{trace}(\mathbf{X}'_i \mathbf{X}_i \mathbf{C}' \mathbf{C}) & (1.4) \end{cases}$$

La démonstration de ces propriétés est renvoyée en annexe A (page 21). Concrètement, un juge sera décrété comme ayant une contribution significative à la détermination du compromis si la valeur $\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$ dépasse un seuil fixé par l'utilisateur (typiquement, cette valeur seuil est comprise entre 2 et 3). Le même type de démarche s'applique dans le cadre de la performance globale du jury. Nous nous intéressons au calcul de la moyenne m_γ et de la variance v_γ des valeurs $\tilde{\gamma}$ qui seraient obtenues si nous effectuions toutes les permutations. Comme les permutations des tableaux sont effectuées de manière indépendante pour les différents juges, nous avons:

$$\begin{cases} m_\gamma = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m m_i = 0 & (1.5) \\ v_\gamma = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m v_i = \frac{1}{m^2(n-1)} \sum_{i=1}^m \text{trace}(\mathbf{X}'_i \mathbf{X}_i \mathbf{C}' \mathbf{C}) & (1.6) \end{cases}$$

Ainsi, le compromis \mathbf{C} sera décrété significatif si la valeur $\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$ dépasse un seuil fixé par l'utilisateur.

1.1.4 Application à deux études de cas

Une première application est présentée dans l'article de Ledauphin *et al.* (2006) et nous allons appliquer la méthode décrite précédemment à deux exemples de données afin d'illustrer son intérêt pratique. Dans le premier exemple, nous proposons d'étudier la performance du jury et, par la suite, de caractériser les produits sur la base du tableau compromis. Le premier exemple concerne une dégustation de cidres. Un jury d'analyse sensorielle a été sélectionné par l'ADRIA de Quimper. Le fichier de données est constitué des notations de dix variétés de cidres par sept juges selon dix descripteurs. La liste des descripteurs est consignée dans le tableau 1.1.

1	intensité de l'odeur
2	saveur sucrée
3	saveur acide
4	saveur amère
5	astringence
6	flaveur suffocante
7	flaveur piquante
8	flaveur d'alcool
9	flaveur parfumée
10	flaveur fruitée

TABLEAU 1.1 – *Liste des descripteurs sensoriels.*

Les résultats concernant la performance des juges et la performance globale du jury sont donnés dans le tableau 1.2. Les indicateurs de performance sont apparemment satisfaisants. Les poids associés aux différents juges sont de même ordre de grandeur tant et si bien que le compromis qui est déterminé par l'approche discutée dans ce papier est très proche du compromis moyen qui est usuellement calculé dans ce genre d'expériences (moyenne arithmétique). Les tests de permutations et les tests alternatifs présentés dans la figure 1.2 et dans le tableau 1.3 confirment la performance du jury. En effet, pour le test de permutations, les proportions de valeurs simulées $\tilde{\alpha}_i$ qui sont plus grandes que les valeurs réellement observées α_i sont inférieures à 1% (figure 1.2). Il en est de même pour la proportion des valeurs $\tilde{\gamma}$ au-dessus de la valeur observée γ (figure 1.2). Pour les tests alternatifs, les valeurs des statistiques de test sont toutes largement supérieures au seuil 3 (tableau 1.3).

Nous avons, par la suite, calculé la matrice compromis \mathbf{C} à partir des poids donnés dans le tableau 1.2. Une analyse en composantes principales effectuée sur ce tableau procure une caractérisation synthétique des produits. Le premier axe qui restitue 70% de l'inertie oppose les descripteurs flaveur sucrée, fruitée et parfumée, aux descripteurs flaveur d'alcool et astringence (figure 1.3). Un premier groupe de cidres contenant les cidres 4, 8 et 10 se distingue par des saveurs fruitée, parfumée et une saveur sucrée. Ce groupe s'oppose à un second groupe formé des cidres 2, 5, 6 et 7 ayant une flaveur d'alcool plus prononcée et une astringence plus forte. Le

Juges	Poids β_i	Indicateurs de performance α_i
juge 1	0,144	0,78
juge 2	0,146	0,81
juge 3	0,143	0,77
juge 4	0,142	0,76
juge 5	0,137	0,67
juge 6	0,146	0,81
juge 7	0,143	0,76
		Indicateur de performance γ
jury		0,76

TABLEAU 1.2 – Performance des juges et du jury.

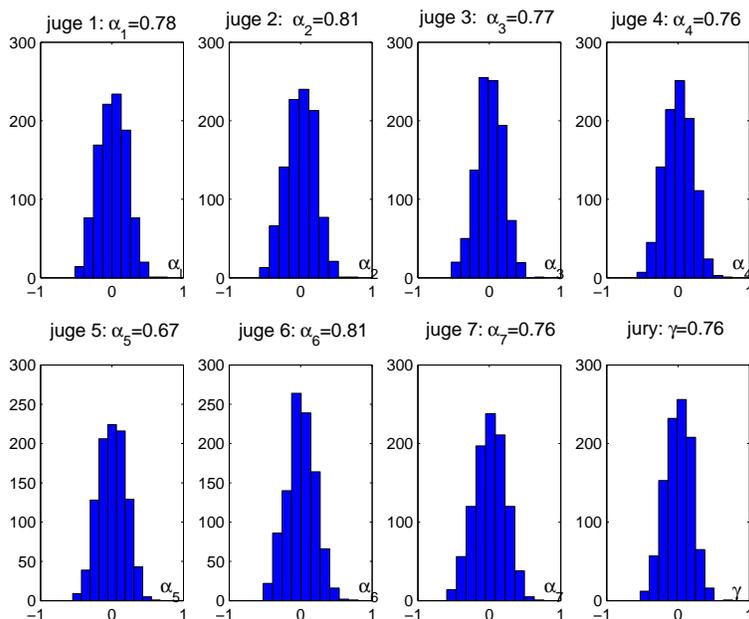


FIGURE 1.2 – Tests de permutations pour la performance de chacun des juges et pour la performance globale du jury: histogrammes des valeurs simulées des indicateurs de performances associés aux sept juges et au panel (nombre de simulations=1000).

Juges	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
juge 1	0,78	0	0,038	4,0
juge 2	0,81	0	0,043	3,9
juge 3	0,77	0	0,036	4,1
juge 4	0,76	0	0,039	3,8
juge 5	0,67	0	0,039	3,4
juge 6	0,81	0	0,042	3,9
juge 7	0,76	0	0,044	3,7
	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
jury	0,76	0	0,034	4,1

TABLEAU 1.3 – Résultats des tests alternatifs pour l'étude sur les cidres.

deuxième axe (18.9% de l'inertie), singularise le cidre 9 avec une odeur intense et une saveur suffocante notable.

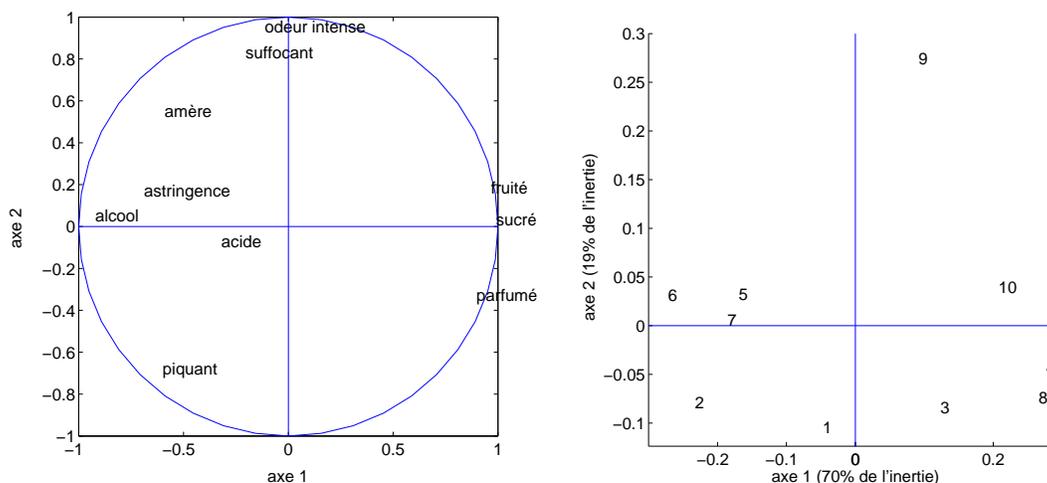


FIGURE 1.3 – Cercle des corrélations et premier plan factoriel.

Afin de souligner l'intérêt de la démarche, nous avons permuté les notes du juge 1 pour certains produits. De ce fait, le juge 1 n'est plus en accord avec les autres juges. Le tableau 1.4 permet de comparer les résultats concernant la performance du jury pour les données originales et pour les nouvelles données dans lesquelles les notes du juge 1 ont été modifiées. Il apparaît clairement que le poids du juge 1 avec les nouvelles données a nettement baissé. Les tests d'hypothèses basés sur les permutations et sur les résultats théoriques liés à la moyenne et la variance des valeurs de $\tilde{\alpha}_1$ obtenues par permutation ont confirmé que l'accord du juge 1 avec le reste du panel n'est pas significatif. Le tracé des cartes factorielles à partir du compromis des données modifiées est dans une très large mesure similaire à celui des données originales, ce qui corrobore l'idée que le procédé d'obtention du compromis est robuste.

Juges	Données originales			Données modifiées		
	Poids β_i	Valeurs α_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$	Poids β_i	Valeurs α_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
juge 1	0,144	0,78	4,0	0,087	-0,18	-1,0
juge 2	0,146	0,81	3,9	0,155	0,80	3,9
juge 3	0,143	0,77	4,1	0,154	0,79	4,1
juge 4	0,142	0,76	3,8	0,152	0,77	3,9
juge 5	0,137	0,67	3,4	0,148	0,70	3,6
juge 6	0,146	0,81	3,9	0,153	0,78	3,9
juge 7	0,143	0,76	3,7	0,151	0,75	3,6
		γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$		γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
jury		0,76	4,1		0,63	4,2

TABLEAU 1.4 – Performances comparées pour les données originales et les données modifiées.

Dans le deuxième exemple, nous avons étudié un cas où le jury n'était pas compétent. Il s'agissait, en effet, d'une étude réalisée par des étudiants qui n'avaient ni expérience ni formation en évaluation sensorielle. Le second fichier de travail est constitué des notations de treize personnes pour cinq types de bière selon quatre descripteurs (saveur amère, goût de levure, saveur fruitée et intensité du goût). Les différents tests ont permis de détecter la performance médiocre du jury. Le tableau 1.5 présente les résultats du test alternatif. Ainsi l'utilisateur est à même de décider que, pour cette étude, l'analyse sensorielle des produits n'a pas de valeur.

Juges	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
Juge 1	0,42	0	0,097	1,34
Juge 2	0,31	0	0,129	0,86
Juge 3	0,61	0	0,070	2,30
Juge 4	0,50	0	0,118	1,46
Juge 5	0,45	0	0,102	1,42
Juge 6	0,43	0	0,113	1,29
Juge 7	0,67	0	0,105	2,05
Juge 8	0,60	0	0,105	1,86
Juge 9	0,59	0	0,085	2,01
Juge 10	0,48	0	0,108	1,46
Juge 11	0,72	0	0,117	2,11
Juge 12	-0,05	0	0,111	-0,16
Juge 13	0,65	0	0,129	1,80
	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
jury	0,49	0	0,034	2,7

TABLEAU 1.5 – Résultats des tests alternatifs dans l'étude des bières.

1.2 Profil libre et performance du jury

Dans le cadre de l'épreuve sensorielle dite 'profil libre', les juges utilisent des listes de descripteurs différentes (en totalité ou en partie) pour évaluer les produits. Ceci permet de procurer davantage de flexibilité aux juges en leur donnant la possibilité d'utiliser des descripteurs qu'ils comprennent bien. Pour le traitement des données, deux méthodes statistiques sont principalement utilisées: la méthode de Procruste généralisée, plus connue par l'acronyme GPA (Generalised Procrustes Analysis) (Gower, 1975) et la méthode STATIS (Lavit, 1988). Nous nous intéressons ici, en particulier, à la méthode GPA car nous souhaitons mettre en parallèle cette démarche avec celle que nous préconisons pour ajuster des courbes TI (chapitre 4). Après une brève présentation de la méthode, nous montrons comment est-ce que l'étude de la performance du jury et des juges peut être facilement adaptée à ce contexte. Nous illustrons, enfin, la démarche sur la base d'une étude de cas concernant l'évaluation sensorielle de sept variétés de yaourts à l'aide d'une épreuve de profil libre.

1.2.1 Analyse de Procruste Généralisée

De même que précédemment, m , n et p désignent respectivement le nombre de juges, le nombre de produits et le nombre maximum de descripteurs évalués par un même juge. A chaque juge i , est associé le tableau \mathbf{X}_i . Tous les tableaux sont supposés de dimension $n * p$, quitte pour cela à compléter certains tableaux par des colonnes de zéros. Il est bien connu que ceci n'a pas d'incidence sur les résultats (Dijksterhuis et Gower, 1992). En sus du centrage et de l'introduction d'un facteur d'échelle pour chacun des tableaux individuels, il est nécessaire d'ajuster les tableaux par des rotations pour tenir compte du fait que les descripteurs ne sont pas les mêmes pour les différents juges.

Le problème de détermination du compromis \mathbf{C} des configurations $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ après ajustement par des rotations et des facteurs d'échelle peut être traduit par le problème d'optimisation suivant:

$$\min_{\{\mathbf{C}, \rho_i, H_i\}} \sum \|\rho_i \mathbf{X}_i H_i - \mathbf{C}\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de Hilbert-Schmidt définie pour une matrice \mathbf{X} par $\|\mathbf{X}\|^2 = \text{trace}(\mathbf{X}'\mathbf{X})$, \mathbf{C} désigne la configuration compromis, H_i la rotation qui ajuste la configuration \mathbf{X}_i au compromis et α_i le facteur d'échelle associé à \mathbf{X}_i . La contrainte de détermination proposée par Gower (1975) impose la conservation de l'inertie totale: $\sum \rho_i^2 \text{trace}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i) = \sum \text{trace}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)$. L'algorithme de résolution de ce problème d'optimisation est donné par l'algorithme 1 (ci-après).

algorithme 1 algorithme proposé par Gower (1975)

$r \leftarrow 1$ (r =nombre d'itérations avant convergence)

– centrer et réduire chaque tableau \mathbf{X}_i par un paramètre λ tel que:

$$\sum_{i=1}^m \lambda \text{trace}(\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i') = m$$

– poser $\mathbf{C} = \mathbf{X}_1$ et déterminer les rotations H_i qui ajustent \mathbf{X}_i sur \mathbf{C} pour $i = 2, \dots, m$.

– déterminer \mathbf{C} comme la moyenne des tableaux $\mathbf{X}_i H_i$ ($i = 1, \dots, m$)

– calculer la somme des carrés des résidus $S_r = m(1 - \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{C}'))$ et poser $\rho_i = 1$ ($i = 1, \dots, m$).

Répéter

$r \leftarrow r + 1$

– pour $i = 1, \dots, m$, ajuster chaque $\rho_i \mathbf{X}_i$ par rotation sur \mathbf{C} , calculer $\mathbf{X}_i^* = \rho_i \mathbf{X}_i H_i$ puis actualiser \mathbf{C}^*

– pour $i = 1, \dots, m$, calculer $\rho_i^* = \rho_i \sqrt{\frac{\text{trace}(\rho_i \mathbf{X}_i^* \mathbf{C}^{*'})}{\text{trace}(\rho_i^2 \mathbf{X}_i^* \mathbf{X}_i^*) \text{trace}(\mathbf{C}^* \mathbf{C}^{*'})}}$

– actualiser $\mathbf{X}_i^{**} = \left(\frac{\rho_i^*}{\rho_i}\right) \mathbf{X}_i^*$ et poser $\rho_i = \rho_i^*$

– calculer \mathbf{C}^{**} la nouvelle moyenne des tableaux \mathbf{X}_i^{**} et la nouvelle somme de résidus

$$S_r = S_{r-1} - m \cdot \text{trace}(\mathbf{C}^{**} \mathbf{C}^{**'} - \mathbf{C}\mathbf{C}')$$

– actualiser $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{**}$

Jusqu'à critère d'arrêt: $(S_{r-1} - S_r) < \text{seuil}$

1.2.2 Indices de performance associés aux juges et au jury

A l'issue de l'algorithme itératif qui est à la base de GPA, trois types de résultats sont obtenus:

- les facteurs d'échelle ρ_i ($i = 1, \dots, m$).
- le compromis \mathbf{C} .
- les rotations H_i ($i = 1, \dots, m$) qui ajustent au mieux les configurations \mathbf{X}_i ($i = 1, \dots, m$) au compromis.

Soit $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|}$, le tableau standardisé et soit $\mathbf{Y}_i = \frac{\mathbf{X}_i H_i}{\|\mathbf{X}_i\|}$. Nous proposons d'évaluer la performance du juge i ($i = 1, \dots, m$) par:

$$\alpha_i = \text{trace}(\mathbf{Y}_i' \mathbf{M})$$

Il est facile de vérifier que α_i est toujours compris entre 0 et 1 et que:

- $\alpha_i = 1$ si et seulement si $\mathbf{Y}_i = \mathbf{M}$, ce qui signifie que le tableau \mathbf{X}_i est parfaitement ajusté au compromis à l'aide d'un facteur d'échelle et d'une rotation.
- $\alpha_i = 0$ si et seulement si les variables de \mathbf{X}_i et celles de \mathbf{M} sont orthogonales (non corrélées) ce qui traduit un désaccord total car cela signifie que le juge i a évalué les produits sur la base de caractéristiques orthogonales à celle de l'ensemble du panel.

Afin de caractériser la performance globale du jury, nous proposons l'indicateur $\gamma = \left(\frac{1}{m}\right) \sum_{i=1}^m \alpha_i$. Plus cet indicateur est proche de 1, plus les juges sont en accord entre eux.

Comme dans le cadre du profil à vocabulaire fixé, nous pouvons aisément mettre en place des tests d'hypothèses relatifs à la performance des juges et du jury. La démarche utilise exactement la même technique de permutations que dans le cadre des profils fixes en considérant les tableaux $\mathbf{Y}_i = \frac{\mathbf{X}_i H_i}{\|\mathbf{X}_i\|}$ à la place des tableaux \mathbf{X}_i (pour les profils fixes). Les tests alternatifs discutés dans le cadre du profil fixe peuvent également se transposer sans difficultés dans ce cadre.

1.2.3 Application

Nous allons appliquer la méthode décrite précédemment à une étude de cas développée dans Dijksterhuis et Gower (1992) afin d'illustrer son intérêt pratique. Nous proposons d'étudier la performance du jury dans le cadre d'une étude au cours de laquelle sept juges ont évalué huit différents yaourts ($m = 7$, $n = 8$). Ainsi, le tableau des notes attribuées par un juge i , \mathbf{X}_i , comporte huit lignes (produits) mais le nombre de descripteurs a varié entre quatre et neuf selon les juges (nombre de colonnes). Les données sont indiquées dans le tableau 1.6 et les résultats (tests empiriques et tests théoriques) dans le tableau 1.7. L'indicateur global de la performance du jury est égal à 0.88 reflétant un accord satisfaisant entre les juges. Les juges qui

ont les indicateurs de performance les plus élevés sont les juges 2 et 3. Les juges qui sont le moins en accord avec le point de vue global du jury sont les juges 6 et 7. Nous pouvons également remarqué qu'il ne semble pas évident qu'il y ait une relation entre la performance des juges et le nombre de descripteurs utilisés par ces juges pour établir les profils sensoriels des produits.

Le graphique 1.4 donne la disposition des produits sur la base des deux premières composantes principales du tableau compromis obtenu par GPA qui restituent 79% d'inertie. Collins (1991) a conjecturé que les facteurs d'échelle obtenus par GPA tiennent compte non seulement de l'étendue de l'échelle utilisée par les juges mais également de leur performance. Qannari *et al.* (1997) ont précisé que les facteurs d'échelle de GPA pourrait s'écrire sous la forme $\rho_i = \beta_i \sqrt{\frac{t}{t_i}}$ avec $t_i = \text{trace}(\mathbf{X}'_i \mathbf{X}_i)$,

$t = \frac{1}{m} \sum_i t_i$ et β_i est facteur lié à la performance du juge i . Dans cette expression ρ_i apparaît clairement comme étant le produit d'un facteur d'échelle à proprement parlé $\sqrt{\frac{t}{t_i}}$ et d'un facteur de performance β_i . En inversant la relation précédente,

nous obtenons $\beta_i = \rho_i \sqrt{\frac{t_i}{t}}$. Dans l'exemple des yaourts, nous avons déterminé les facteurs ρ_i ($i=1, \dots, 7$) à l'aide de l'algorithme GPA et nous avons déduit les coefficients β_i . Par la suite, nous avons entrepris de comparer les coefficients β_i avec les indicateurs de performance α_i que nous avons proposés (tableau 1.8). Il ressort clairement de ce tableau que les coefficients α_i et β_i reflètent exactement les mêmes informations liées à la performance des juges. En effet après normalisation des coefficients α_i , de manière à avoir $\sum_i (\alpha_i^{*2}) = m$, nous obtenons une concordance (à 10^{-4} près) entre les coefficients β_i et α_i^* (tableau 1.8).

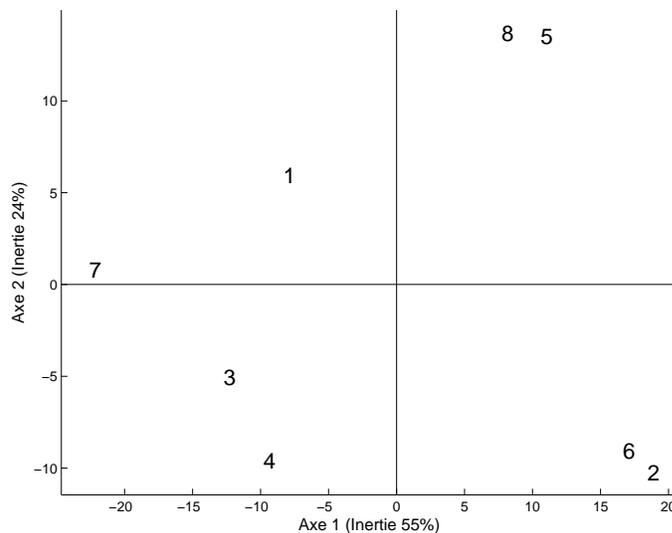


FIGURE 1.4 – Représentation des huit variétés de yaourts sur la base du premier plan principal du compromis.

<i>j</i>	<i>i</i>										<i>j</i>	<i>i</i>										
1	1	21	84	26	11	24					5	1	69	17	64	83						
	2	9	73	75	9	8						2	9	88	27	19						
	3	67	84	4	9	32						3	91	11	77	14						
	4	41	75	55	9	24						4	71	24	87	32						
	5	1	67	31	9	77						5	9	58	15	87						
	6	1	67	84	8	16						6	11	87	13	16						
	7	71	89	14	54	47						7	87	16	66	76						
	8	8	86	11	2	37						8	13	8	75	5						
2	1	37	15	82	65	59	22	32	34		6	1	71	16	26	9	45	87				
	2	22	19	14	24	15	16	25	37			2	88	33	72	1	12	66				
	3	79	58	65	32	46	22	25	4			3	49	21	69	84	54	71				
	4	7	85	42	73	86	25	57	56			4	24	77	62	1	17	52				
	5	22	14	3	2	5	27	42	32			5	86	1	76	77	78	67				
	6	9	1	14	24	21	33	22	47			6	88	2	81	13	15	49				
	7	91	54	9	69	4	27	78	76			7	34	74	63	13	84	2				
	8	15	1	33	62	36	25	25	58			8	87	1	66	89	63	73				
3	1	71	7	75	28	42	34	12	9	43	4	1	56	81	2	21	2					
	2	9	9	8	7	9	74	89	27	8		2	1	11	46	26	81					
	3	34	24	88	27	64	52	91	41	13		3	88	82	21	2	26					
	4	38	31	61	8	3	18	0	46	19		4	59	49	6	28	75					
	5	91	95	7	16	75	6	56	16	29		5	9	83	49	4	49					
	6	98	91	42	6	47	82	73	23	8		6	9	19	22	23	74					
	7	19	9	91	8	22	53	8	75	52		7	75	47	21	21	22					
	8	89	81	86	8	9	85	11	9	74		8	16	8	48	17	29					
7	1	42	16	68	59	0	45	28	8													
	2	12	7	33	37	76	16	63	15													
	3	11	16	57	42	25	16	12	8													
	4	7	19	15	24	25	62	4	2													
	5	1	7	17	5	33	51	57	9													
	6	8	9	44	33	27	23	43	3													
	7	32	4	65	51	2	64	32	28													
	8	61	9	14	46	71	72	57	75													

TABLEAU 1.6 – Données d'évaluation sensorielle de 8 produits par 7 juges selon la procédure de profil libre.

Juges	α_i	Tests empiriques			Tests théoriques		
		$m_i^{(e)}$	$v_i^{(e)}$	$\frac{\alpha_i^{(e)}}{v_i^{(e)}}$	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
juge 1	0,89	-0,01	0,05	4,0	0	0,05	4,0
juge 2	0,92	0,00	0,06	3,9	0	0,06	3,9
juge 3	0,93	0,00	0,05	4,2	0	0,05	4,2
juge 4	0,89	-0,01	0,05	3,9	0	0,05	3,8
juge 5	0,88	-0,01	0,06	3,6	0	0,06	3,6
juge 6	0,82	0,00	0,04	4,2	0	0,04	4,2
jury	0,83	-0,01	0,04	4,4	0	0,03	4,5
	γ	$m_\gamma^{(e)}$	$v_\gamma^{(e)}$	$\frac{\gamma^{(e)}}{\sqrt{v_\gamma^{(e)}}}$	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
jury	0,88	0,00	0,04	4,4	0	0,04	4,4

TABLEAU 1.7 – Résultats des tests empiriques (avec 1000 permutations) et tests alternatifs concernant la performance des juges et du jury.

juges	β_i	α_i	α_i^*
1	1.015	0.89	1.015
2	1.039	0.92	1.039
3	1.054	0.93	1.054
4	1.012	0.89	1.012
5	1.002	0.88	1.002
6	0.929	0.82	0.929
7	0.944	0.83	0.944

TABLEAU 1.8 – Coefficients de performance α_i et β_i . Les coefficients α_i^* sont obtenus à partir des coefficients α_i par normalisation afin de permettre une comparaison directe avec les coefficients β_i .

Afin de souligner l'intérêt de la démarche, de la même manière que dans la première étude de cas, nous avons permuté les notes du juge 1 pour quelques produits. De ce fait, le juge 1 est moins en accord avec les autres juges. Le tableau 1.9 permet de comparer les résultats concernant la performance du jury pour les données originales et pour les nouvelles données dans lesquelles les notes du juge 1 ont été modifiées. Il apparaît que l'accord du juge 1 avec le reste du panel a nettement baissé. Néanmoins, les tests d'hypothèses basés sur les résultats théoriques obtenues par permutation indique que la contribution du juge 1 à la détermination du compromis est significative. Ceci pourrait être expliqué par l'apport de la rotation qui ajuste, au mieux, les configurations. Le tracé des cartes factorielles à partir du compromis des données modifiées est dans une très large mesure similaire à celui des données originales, ce qui corrobore l'idée que le procédé d'obtention du compromis est robuste.

	données originales		données modifiées	
	α_i	test	α_i	test
juge 1	0,89	4,0	0,57	3,4
juge 2	0,92	3,9	0,92	4,0
juge 3	0,93	4,2	0,93	4,4
juge 4	0,89	3,8	0,87	3,9
juge 5	0,88	3,6	0,87	3,6
juge 6	0,82	4,2	0,81	4,3
juge 7	0,83	4,5	0,86	4,7
	γ		γ	
jury	0,88	4,4	0,83	4,6

TABLEAU 1.9 – Indicateurs de performance et résultats des tests théoriques dans l’étude sur les yaourts (avec données modifiées: inversion des évaluations de certains produits pour le juge 1).

Conclusion

La démarche que nous avons développée dans le sous chapitre 1.1 procure à l’utilisateur des outils qui lui permettent de porter un regard critique sur les données. Elle lui permet également de prendre des décisions telles que la mise à l’écart des données d’un juge non performant ou la mise en place d’un entraînement complémentaire. De plus, le compromis obtenu revêt un caractère robuste. Les tests d’hypothèses sont utiles car ils permettent de mieux étayer les conclusions. Les résultats théoriques concernant les tests de permutations procurent un moyen rapide pour effectuer les tests sans avoir à recourir à l’étude de simulations qui peut s’avérer fastidieuse.

Il faut noter que, dans le cadre du profil conventionnel, pour évaluer l’accord entre deux juges i et i' , la démarche d’analyse consiste à confronter les évaluations de ces juges pour chacun des descripteurs. Le coefficient $t_{ii'}$ qui mesure l’accord entre les juges est basé sur une synthèse de ces confrontations. De ce fait, il n’apparaît pas d’équivoque lorsque $t_{ii'}$ est très proche de 0 ou de 1. Cela implique en effet que les juges sont en plein désaccord ($t_{ii'} \simeq 0$) ou en plein accord ($t_{ii'} \simeq 1$) pour tous les descripteurs. En dehors de ces deux cas, la valeur $t_{ii'}$ peut cacher de nombreuses disparités. Nous préconisons, si l’utilisateur souhaite investir l’accord entre les juges de manière détaillée, que la démarche soit appliquée à chacun des descripteurs. Cela revient en définitive à considérer que le tableau associé à chacun des juges est réduit à une seule variable. Il faut souligner que la démarche concernant la détermination d’une moyenne pondérée peut être étendue à d’autres contextes.

La démarche de détermination d’un compromis “robuste” et validation à l’aide d’un test de permutations a été également utilisée dans le cadre de la méthode STATIS (Kazi-Aoual *et al.*, 1995; Schlich, 1996) et GPA (Qannari *et al.*, 1999). Dans le cadre de cette méthode, nous avons montré comment est ce que la procédure décrite dans le cadre du profil conventionnel peut être étendue au profil libre, afin

de permettre l'évaluation non seulement de la significativité du compromis dans sa globalité mais également de la contribution de chacun des juges. Au delà des méthodes de détermination d'un tableau compromis en évaluation sensorielle, nous avons montré que la procédure générale peut s'adapter à d'autres contextes tels que l'analyse en composantes principales (Ledauphin *et al.*, 2004). Cela permet, en particulier, de tester la significativité des axes factoriels et la significativité de la contribution des variables à la détermination des composantes principales.

Dans le chapitre 3, nous allons également recourir à cette stratégie de pondération pour la détermination de courbes "robustes". De même, nous allons nous inspirer de la démarche poursuivie dans le cadre de la méthode GPA et notamment du problème d'optimisation, pour proposer une démarche d'analyse de courbes de type temps-intensité dans le chapitre 4.

Annexe A: Tests relatifs à la performance des juges et du panel

Dans cette annexe, nous démontrons les propriétés concernant les statistiques des tests relatifs à la performance des juges et du panel.

Notations

- \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) est un espace vectoriel muni de la base canonique $\{e_k, k = 1 \dots n\}$ où le vecteur colonne e_k a pour composantes $(\delta_{ik})_{i=1 \dots n}$ avec le symbole de Kronecker $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.
- \mathbf{x} est un vecteur colonne dont les composantes dans la base canonique sont $(x_i, i = 1 \dots n)$.
- $\mathbf{1}_n$ est le vecteur colonne dont les composantes dans la base canonique sont toutes égales à 1.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}'\mathbf{y}$ désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n avec \mathbf{x}' le vecteur transposé de \mathbf{x} .
- $\bar{\mathbf{x}}$ désigne la moyenne du vecteur \mathbf{x} i.e. $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\mathbf{1}'_n\mathbf{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ désigne le produit d'Hadamard de \mathbf{x} et \mathbf{y} , c'est un vecteur dont les composantes sont $(x_i y_i, i = 1 \dots n)$.
- $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est un espace vectoriel muni de la base canonique $\{e_{lk}, l = 1 \dots n, k = 1 \dots p\}$ où $e_{lk} = (\delta_{il}\delta_{jk})'_{i=1 \dots n, j=1 \dots p}$.
- \mathbf{X} est une matrice dont les composantes dans la base canonique sont $(x_{ij}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots p)$.
- $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \text{trace}(\mathbf{X}'\mathbf{Y})$ désigne le produit scalaire utilisé dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.
- \wp_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.
- Pour $\sigma \in \wp_n$, $\mathbf{X}_\sigma = [\mathbf{x}_{\sigma,1} | \mathbf{x}_{\sigma,2} | \dots | \mathbf{x}_{\sigma,p}]$ et $\mathbf{x}_{\sigma,j} = (x_{\sigma(1),j}, x_{\sigma(2),j}, \dots, x_{\sigma(n),j})'$.

Proposition

En désignant par $E(\{\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C})\}_{\sigma \in \wp_n})$ (respectivement $E(\{(\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C}))^2\}_{\sigma \in \wp_n})$) la moyenne de toutes les valeurs données par $\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C})$ (respectivement $(\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C}))^2$) pour $\sigma \in \wp_n$, nous avons:

$$E(\{\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C})\}_{\sigma \in \wp_n}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$E(\{(\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C}))^2\}_{\sigma \in \wp_n}) = \frac{1}{(n-1)} \text{trace}(\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{C}'\mathbf{C}) \quad (\text{A.2})$$

Afin de démontrer cette proposition, nous énonçons la propriété suivante: pour $n > 3$, soit e_i et e_j deux vecteurs distincts de la base canonique et soit \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs de \mathbb{R}^n , nous avons:

$$E(\{\langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle\}_{\sigma \in \wp_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle = \frac{n^2 \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}'\mathbf{b}}{n(n-1)}. \quad (\text{A.3})$$

En effet,

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \varphi_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \varphi_n} \langle \mathbf{a}, e_{\sigma(i)} \rangle \langle \mathbf{b}, e_{\sigma(j)} \rangle$$

Nous considérons le recouvrement de φ_n à l'aide des ensembles disjoints $R_{k,h}^{(i,j)}$ ($k, h = 1, \dots, n$ et $k \neq h$), définis par:

$$R_{k,h}^{(i,j)} = \{\sigma \in \varphi_n, \sigma(i) = k \text{ et } \sigma(j) = h\}.$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \varphi_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{\sigma \in R_{k,h}^{(i,j)}} \langle \mathbf{a}, e_{\sigma(i)} \rangle \langle \mathbf{b}, e_{\sigma(j)} \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{\sigma \in R_{k,h}^{(i,j)}} \langle \mathbf{a}, e_k \rangle \langle \mathbf{b}, e_h \rangle \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h \sum_{\sigma \in R_{k,h}^{(i,j)}} 1 = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h \text{card}(R_{k,h}^{(i,j)}) \end{aligned}$$

Or, $\text{card}(R_{k,h}^{(i,j)}) = (n-2)!$, d'où

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \varphi_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^n a_k b_h = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h - \sum_{k=1}^n a_k b_k \right]$$

$$\text{Il s'ensuit: } \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \varphi_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle = \frac{n^2 \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}' \mathbf{b}}{n(n-1)}.$$

On déduit en particulier de (A.3), que si $\mathbf{b} = \mathbf{1}_n$, alors:

$$E(\{\langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle\}_{\sigma \in \varphi_n}) = \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.4})$$

La propriété (A.1) de la proposition énoncée ci-dessus est évidente car:

$$\begin{aligned} E(\{\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C})\}_{\sigma \in \varphi_n}) &= \sum_{j=1}^p E \left[\left\{ \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_{j,\sigma}, e_i \rangle \langle \mathbf{c}_j, e_i \rangle \right\}_{\sigma \in \varphi_n} \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{c}_j, e_i \rangle \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \varphi_n} \langle \mathbf{x}_{j,\sigma}, e_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

en utilisant l'égalité (A.4) avec $\mathbf{a} = \mathbf{x}_j$.

En ce qui concerne la propriété (A.2) de la proposition, nous avons:

$$\begin{aligned} E(\{(\text{trace}(\mathbf{X}'_\sigma \mathbf{C}))^2\}_{\sigma \in \varphi_n}) &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p E \left[(\mathbf{x}'_{j,\sigma} \mathbf{c}_j \mathbf{x}'_{k,\sigma} \mathbf{c}_k)_{\sigma \in \varphi_n} \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n E \left[\{x_{\sigma(i),j} x_{\sigma(l),k}\}_{\sigma \in \varphi_n} \right] c_{ij} c_{lk} \end{aligned}$$

Pour $i \neq l$, posons $\mathbf{a} = \mathbf{x}_j$ et $\mathbf{b} = \mathbf{x}_k$, la propriété (A.3) conduit à:

$$E \left[\{x_{\sigma(i),j} x_{\sigma(l),k}\}_{\sigma \in \varphi_n} \right] = -\frac{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}_k}{n(n-1)}$$

Pour $i = l$, posons $\mathbf{a} = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_k$, le résultat (A.4) conduit à:

$$E \left[\{x_{\sigma(i),j} x_{\sigma(i),k}\}_{\sigma \in \varphi_n} \right] = \frac{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}_k}{n}$$

Par la suite:

$$\begin{aligned}
E(\{(trace(\mathbf{X}'_{\sigma}\mathbf{C}))^2\}_{\sigma \in \wp_n}) &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left[\frac{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}_k}{n} \sum_{i=1}^n c_{ij} c_{ik} - \frac{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}_k}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n c_{ij} c_{lk} \right] \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left[\frac{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}_k \mathbf{c}'_j \mathbf{c}_k}{n} - \frac{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}_k}{n(n-1)} (-\mathbf{c}'_j \mathbf{c}_k) \right] \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left[\frac{\mathbf{x}'_j \mathbf{x}_k \mathbf{c}'_j \mathbf{c}_k}{n-1} \right] \\
&= \frac{1}{(n-1)} trace(\mathbf{X}' \mathbf{X} \mathbf{C}' \mathbf{C}).
\end{aligned}$$

Les égalités (1.3) et (1.4), du sous chapitre 1, concernant la moyenne et la variance des valeurs $\tilde{\alpha}_i$ simulées par permutation des lignes s'obtiennent en remplaçant \mathbf{X} par \mathbf{X}_i dans les égalités (A.1) et (A.2).

Chapitre 2

Les données sensorielles de type Temps Intensité

Introduction

L'épreuve de profil sensoriel conventionnel, largement utilisée dans la pratique, a été décrite dans le chapitre 1. Ce type d'épreuve consiste à caractériser les produits par des notes attribuées par des juges entraînés exprimant des intensités sensorielles. Ces notes peuvent être considérées comme des évaluations ponctuelles ne rendant donc pas compte de l'évolution des sensations. Cependant, de nombreux phénomènes intervenant durant l'évaluation d'un produit sont dynamiques, comme l'évolution de la texture durant la mastication ou la persistance d'une saveur. Il est alors possible d'enrichir les évaluations sensorielles statiques par l'acquisition d'un signal dit "Temps-Intensité" (TI) décrivant l'évolution au cours du temps de l'intensité de la perception. De telles courbes ont tout d'abord été tracées pour étudier les évolutions de saveurs (Sjöström et Cairncross, 1953; Neilsen, 1957; Birch et Muntton, 1981). Depuis 1978, l'intérêt de ces courbes pour l'analyse de la texture des aliments a été particulièrement souligné; Ainsi Larson-Powers et Pangborn (1978) ont étudié la fermeté de la gélatine, Moore et Shoemaker (1981) se sont intéressés aux propriétés de crèmes glacées, Pangborn et Koyasako (1981) ont recommandé l'utilisation de courbes temps-intensité pour étudier le broyage des aliments dans le processus de mastication en s'appuyant sur un exemple de viscosité de desserts. Depuis une vingtaine d'années, le développement de systèmes automatisés dédiés à l'acquisition des signaux Temps-Intensité a considérablement accéléré la diffusion de cette méthodologie.

Dijksterhuis et Piggot (2001) et Ovejero-Lopez *et al.* (2005) donnent une revue synthétique sur l'utilisation des courbes TI. Pour l'analyse statistique des données issues d'une procédure TI, plusieurs approches ont été proposées; basées pour la plupart sur une extraction de paramètres caractéristiques des courbes (Tuorila *et al.*, 1995; Zimoch et Gullet, 1997; Lallemand *et al.*, 1999; Harker *et al.*, 2003). Nous pouvons également citer des procédures d'analyse des données basées sur l'établissement

des courbes prototypes (Dijksterhuis et Eilers, 1997) et sur la mise en place d'un modèle paramétrique (Garrido *et al.*, 2001).

Dans cette partie, nous allons détailler la collecte des données temps intensité (sous chapitre 2.1). Nous traiterons ensuite des méthodes d'extraction de paramètres (sous chapitre 2.2), de l'approche vectorielle des courbes, c'est à dire en considérant chaque courbe comme un vecteur (sous chapitre 2.3) et de quelques approches fonctionnelles abordées dans des publications scientifiques (sous chapitre 2.4).

2.1 Description

2.1.1 Collecte des données T-I et entraînement des juges

Dans une étude de profil sensoriel au cours du temps, un juge est appelé à évaluer une perception (par exemple l'acidité d'un produit). Celui-ci met le produit en bouche et note l'évolution de l'intensité perçue au cours du temps. Les courbes de type TI nécessitent un système sophistiqué d'acquisition de données. La collecte de ces données se faisait auparavant en bougeant un stylo (dans la direction Y) sur un papier qui défile avec le temps (selon l'axe X). L'analyse nécessitait alors une transcription sur ordinateur très fastidieuse. Elle peut se faire par des estimations discrètes sur une échelle à intervalles de temps spécifiques. Le moyen le plus utilisé actuellement consiste à déplacer un curseur de gauche à droite ou de bas en haut lorsque l'intensité de la sensation augmente ou diminue à l'aide d'une souris d'ordinateur, d'une manette ou d'un pointeur optique. Le logiciel consigne la position du curseur à intervalles de temps indiqués par l'expérimentateur. Un exemple de courbe est donné dans la figure 2.1. Il existe également d'autres systèmes d'acquisition tels que 'finger span' qui est un système d'acquisition de données mesurant la distance entre le pouce et l'index, le juge écartant d'autant plus les doigts que l'intensité est forte (Etievant *et al.*, 1999).

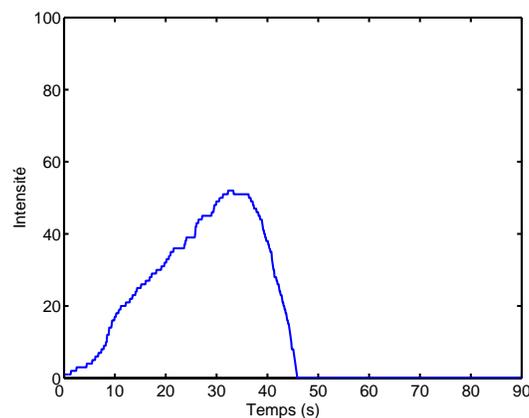


FIGURE 2.1 – Exemple de courbe TI: étude de la saveur sucrée dans une boisson chocolatée.

L'épreuve TI est une tâche relativement difficile pour les juges. En effet ceux ci doivent se concentrer dès la mise en bouche du produit et doivent retranscrire instantanément leur sensation à l'aide du curseur. La sélection des juges est rigoureuse et les qualités essentielles requises sont l'acuité sensorielle et les aptitudes d'utilisation du système d'acquisition. Peyvieux et Dijksterhuis (2001) ont donné des recommandations pour l'entraînement des dégustateurs. Après une présentation de la méthode, les juges sont entraînés à travailler avec des stimuli sonores puis des solutions simples (saccharose, chlorure de sodium...). Les juges s'entraînent ensuite sur les sensations de l'étude jusqu'à ce qu'ils montrent au moins deux courbes similaires pour des répétitions concernant le même produit. L'évaluation de la performance des juges s'effectue selon les critères identiques à ceux utilisés en profil conventionnel : répétabilité individuelle, capacité à discriminer les échantillons, accord au sein du jury.

2.1.2 Analyse des données TI

La base de données obtenue à l'issue d'une étude TI est volumineuse et les méthodes d'analyse proposées très diverses. Il existe deux types de traitement de données TI : la mise en valeur de critères pertinents ou une approche fonctionnelle. La figure 2.2 résume brièvement l'ensemble des méthodes appliquées pour l'étude des courbes TI. Celles-ci sont décrites dans les sous chapitres 2.2 (extraction de paramètres) et 2.3 (approche vectorielle). L'approche fonctionnelle sera abordée dans le sous chapitre 2.4 et détaillée dans le chapitre 3.

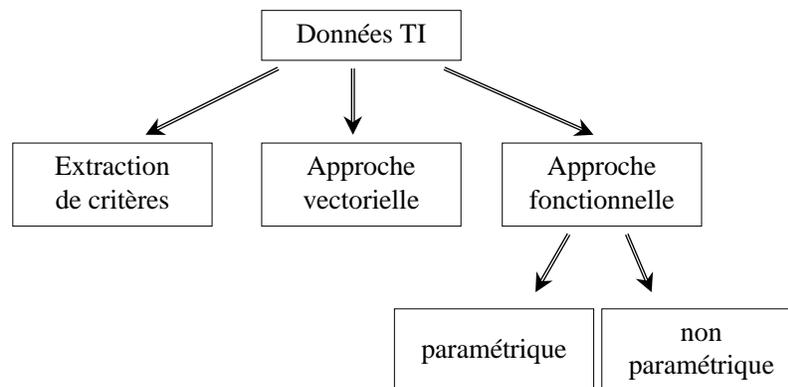


FIGURE 2.2 – Méthodes de traitement des courbes TI.

2.2 Extraction de paramètres

Il s'agit de la méthode de traitement statistique des courbes TI la plus ancienne. En effet, lorsque les courbes étaient tracées manuellement par chaque juge, le seul traitement possible consistait à déterminer les valeurs des critères pertinents et faire une analyse 'classique' des ensembles de tableaux qui d'une certaine façon s'apparentent à des données de type profils conventionnels (tableau critères x produits x juges). Une méthode simple et fréquemment utilisée pour analyser ce type de mesures est de calculer des valeurs récapitulatives et de les traiter par analyse de la variance. Il faut parfois réaliser des transformations, par exemple les transformations Box-Cox utilisées par Butler *et al.* (1996), lorsque les résidus ne suivent pas une distribution normale. Cette analyse permet de mettre en avant des éventuels effets: effet 'juge', effet 'produit', effet 'interactions'.

Dans le cas général, l'origine de la courbe (point 0) correspond à la mise en bouche du produit. On observe un temps de quelques secondes avant la perception de la saveur, celui ci existe (temps de réaction, T_0) même quand la perception est instantanée. La courbe croît ensuite jusqu'à un maximum ($Imax$). Il arrive que l'intensité reste stable pendant quelques secondes (plateau). Enfin, la courbe décroît jusqu'à la disparition de la sensation (figure 2.3). Les données de type temps-intensité peuvent être divisées en de multiples intervalles (par exemple toutes les 10 secondes, toutes les 20 secondes...) ou alors certains critères peuvent être mesurés et comparés. Il est possible de faire intervenir à la fois des paramètres traduisant une intensité de perception et des paramètres de forme. Parmi ces paramètres, nous pouvons citer (figure 2.3):

- le pic d'intensité ($Imax$)
- le temps pour atteindre $Imax$ ($Tmax$)
- le temps d'apparition de la perception ou temps de réaction (T_0)
- le temps d'extinction de la perception ($Tend$)
- la surface totale sous la courbe TI (AUC)
- la durée de la perception (DUR)
- la durée du plateau (DUR_{PLAT})
- le temps pour atteindre la moitié de l'intensité maximale ($\frac{TI_m}{2}$)
- la durée de la dégustation (DUR_{TOT}).

D'autres critères peuvent également être considérés (figure 2.3):

- la pente entre le début de la perception et $Tmax$, i.e. le taux de croissance avant le pic (R_{INC})
- la pente entre $Tmax$ et la fin de la perception, i.e. le taux de décroissance après le pic (R_{DEC})
- l'angle de croissance avant le pic (ANG_{INC})
- l'angle de décroissance après le pic (ANG_{DEC})
- l'aire sous la courbe avant et après le pic (respectivement A_{INC} et A_{DEC}).

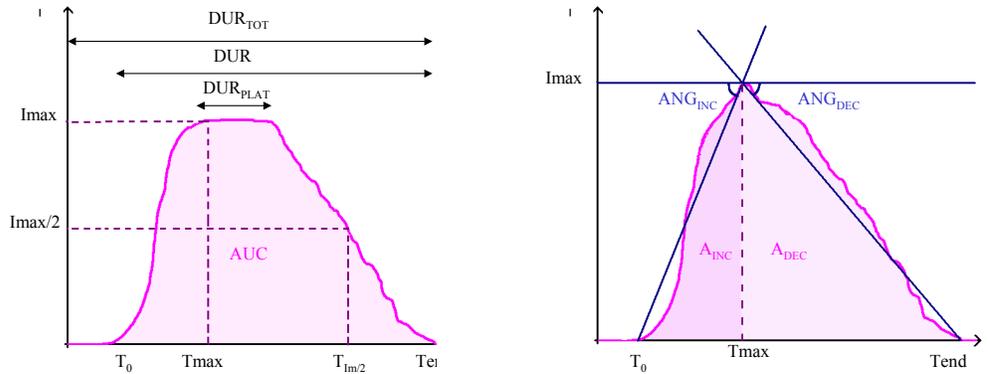


FIGURE 2.3 – Identification des paramètres d'une courbe TI.

2.2.1 Les paramètres les plus fréquents

T_{max} et I_{max} sont étudiés dans toutes les expériences Temps-Intensité. Tuorila *et al.* (1995) ont ajouté DUR_{PLAT} pour étudier l'effet temporel de la graisse sur une perception de saveur. Duizer *et al.* (1995) ont également considéré ANG_{INC} , ANG_{DEC} , A_{INC} , A_{DEC} et DUR pour étudier l'influence de l'orientation de l'axe pendant l'acquisition des données. Kallithraka *et al.* (2001) se sont intéressés à DUR et AUC pour étudier les corrélations entre la composition de la salive et les critères d'une courbe TI sur l'astringence. Ces exemples, très divers, montrent la multitude des études et les différentes possibilités de choix pour ces critères. La détermination de critères discriminants peut se faire par des tests de Tukey (Duizer *et al.*, 1995) ou des tests de Fisher (Guinard *et al.*, 2002). L'analyse de la variance peut être suivie d'une Analyse en Composantes Principales sur les critères discriminants. Ainsi, Guinard *et al.* (2002) ont sélectionné I_{max} , AUC et DUR_{PLAT} puis ont établi une carte factorielle. Cependant, il est important de préciser que l'étude par extraction de paramètres suppose que les courbes aient toutes la même forme, ce qui n'est pas toujours le cas. En effet, certains critères tels que la durée du plateau, les pentes et les angles ne sont pas toujours facilement identifiables.

2.2.2 Les méthodes du trapèze et des fractiles

Lallemand *et al.* (1999) ont proposé une modélisation sous forme de trapèze, en sélectionnant les 5 critères suivants :

- I_{max} ,
- le temps à 5% de l'intensité maximum dans la phase ascendante $t_{5\% \text{ asc.}}$,
- Le temps à 90% de l'intensité maximum dans la phase ascendante $t_{90\% \text{ asc.}}$,
- Le temps à 90% de l'intensité maximum dans la phase descendante $t_{90\% \text{ desc.}}$,
- Le temps à 5% de l'intensité maximum dans la phase descendante $t_{5\% \text{ desc.}}$,

A partir de ces cinq valeurs, il est possible de tracer une schématisation des courbes sous forme d'un trapèze (figure 2.4). De même que précédemment, l'analyse de ces paramètres revient à l'étude d'une matrice à trois entrées (juge, produit, paramètres du trapèze).

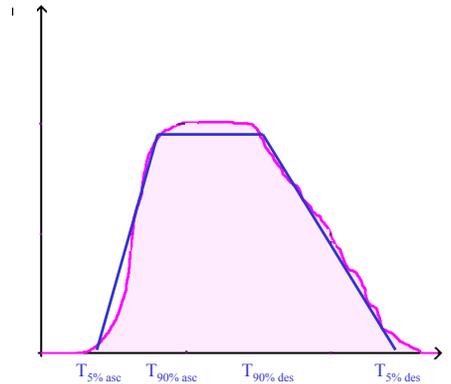


FIGURE 2.4 – Exemple de modélisation d'une courbe TI par un trapèze.

2.3 Etude des courbes comme vecteurs

Pour ne pas avoir à faire de choix sur les critères, l'idée est de considérer les courbes dans leur totalité. Chaque courbe $y(t)$ définie pour $t=1, \dots, T$, sera donc considérée comme un vecteur $y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$. A partir de plusieurs courbes ou 'vecteurs', il est alors possible, par exemple, de calculer une moyenne par produit ou de réaliser une Analyse en Composantes Principales (ACP). Les paragraphes suivants décrivent de telles procédures utilisées dans les publications concernant les courbes Temps Intensité.

2.3.1 Détermination d'une courbe moyenne

Le tracé d'une courbe moyenne directement à partir des courbes peut poser problème. Ainsi, Overbosh *et al.* (1986) montrent que déterminer des moyennes simples des intensités au cours du temps, peut mener à des courbes qui ne sont pas représentatives des données. Un des problèmes les plus notables est le temps de perception qui reste égal au plus grand temps de perception par les différents juges. Cette méthode a une tendance à 'gommer' les plateaux et peut même faire apparaître un double pic ou un pallier qui correspondrait à la perception d'une intensité intermédiaire pendant quelques secondes avant d'obtenir l'intensité maximale. L'exemple présenté dans la figure 2.5 illustre le risque d'obtenir des interprétations erronées qui pourraient découler du calcul d'une courbe moyenne.

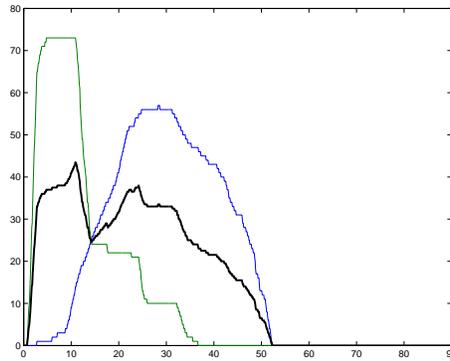


FIGURE 2.5 – Deux évaluations de saveur sucrée pour le même produit par deux juges différents et courbe moyenne en gras.

Overbosh *et al.* (1986) ont proposé de considérer les deux phases (ascendante et descendante) séparément et de faire une moyenne par morceaux homologues. Ainsi le traitement de courbes qui n’ont pas la même échelle de temps est possible. C’est une première approche de normalisation des courbes: standardisation au niveau de l’intensité maximale et de la durée totale.

Une difficulté majeure relevée dans l’analyse des courbes TI soulevée ici, vient de l’existence d’une grande variabilité parmi les juges malgré un entraînement relativement intensif. Ce problème existe déjà dans les profils conventionnels et est accentué dans une étude de type TI. En effet, certains juges utilisent la totalité du temps imparti et toute l’échelle de notation, l’aire sous leurs courbes est alors très importante; elle peut être quatre fois plus importante d’un juge à l’autre. Une caractéristique notable des courbes de type Temps-Intensité est que chaque juge a tendance à générer une courbe particulière: une ‘signature’ et que celle-ci ne peut pas être facilement éliminée (Buuren, 1992). Nous détaillons ce problème dans le chapitre 3 et proposons une solution dans le chapitre 4.

2.3.2 Analyse en Composantes Principales

Buuren (1992) a introduit la notion de moyenne pondérée en attribuant des poids aux courbes individuelles. Pour cela, il a considéré, pour chaque produit, le tableau constitué des valeurs des courbes individuelles en colonne et il a effectué une analyse en composantes principales centrées sur chaque tableau. Lorsque les courbes ont plus ou moins la même allure, la première composante principale correspond à un pourcentage de variance expliquée relativement grand. Cependant, du fait du centrage, l’allure générale des courbes originales n’est pas retrouvée par la première composante principale.

MacFie et Liu (1992) et Dijksterhuis (1993) ont formulé une variante à l’ACP précédemment décrite: l’ACP non centrée. Les composantes principales ainsi obtenues sont notées NPTIC (Noncentered Principal Time Intensity Curves). Quand

les courbes entre produits sont différentes, les premières NPTIC apporteront de l'information sur les positions relatives entre courbes (ces courbes ressemblent aux courbes moyennes). Les secondes et troisièmes NPTIC peuvent permettre de mettre en évidence l'arrivée tardive des pics ou une atténuation plus lente pour un produit.

Il faut ajouter qu'un problème important présent dans ce type d'études est de ne plus considérer le temps. En effet, la permutation de plusieurs colonnes (si les colonnes correspondent aux temps d'observation) mènerait exactement aux mêmes résultats.

2.4 Approches fonctionnelles

L'analyse de données fonctionnelle est un domaine de recherche riche et varié, proposant des méthodes d'analyse qui répondent à de objectifs de description, discrimination, prédiction, ... (Champely, 1994; Ramsay et Li, 1998). La recherche dans ce domaine consiste à proposer des méthodes d'analyse adaptées aux courbes et d'étudier les propriétés de ces méthodes. Les données ne sont pas considérées comme des vecteurs d'un espace de dimension finie, mais des fonctions choisies dans un espace fonctionnel de dimension infinie. Ce nouveau cadre pose des problèmes pratiques et théoriques. Dans les publications concernant l'analyse des courbes temps intensité, l'approche théorique est peu considérée, nous l'aborderons plus en détail dans le chapitre 3.

Pour comparer les courbes de différents produits, il est possible de modéliser les courbes par des méthodes paramétriques ou non. Une première étape consiste à standardiser les courbes individuelles soit simultanément selon l'échelle des temps et l'échelle des intensités (Dijksterhuis et Broeke, 1995), soit en séparant les deux échelles (Dijksterhuis et Eilers, 1997), c'est à dire en introduisant des facteurs d'échelle a_j pour l'intensité et b_j pour le temps pour chaque juge j . Ensuite, différentes modélisations peuvent être adoptées:

- courbe prototype à partir d'une base de B-splines (Dijksterhuis et Eilers, 1997),
- modèle paramétrique basé sur des modèles biologiques de la dynamique de la transformation des produits ingérés (Garrido *et al.*, 2001),
- modèle paramétrique logistique pour décrire les courbes TI (Eilers et Dijksterhuis, 2004),
- modèle paramétrique en se basant sur des équations différentielles non linéaires (Pfeiffer *et al.*, 2000).

2.4.1 Projection sur une base

On cherche à projeter le signal observé y sur une base de fonctions B_1, B_2, \dots, B_K (ondelettes, séries de Fourier, B-splines, ...). La figure 2.6 montre une B-spline

quadratique utilisée par Dijksterhuis et Eilers (1997). Celle-ci a été construite à partir de trois polynômes du second ordre. Les trois paraboles se joignent en des nœuds de manière continue et dérivable. Usuellement, les fonctions B-splines quadratiques ou cubiques sont choisies car ce sont des courbes simples et lisses ayant des propriétés intéressantes.

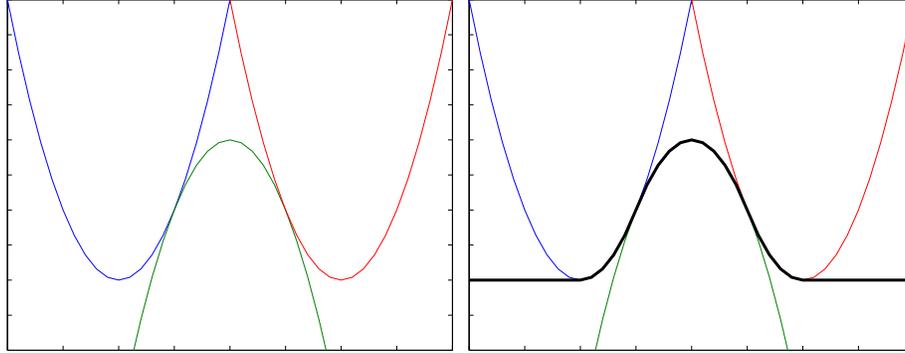


FIGURE 2.6 – Exemple de fonction B-spline quadratique en gras construite à partir de trois polynômes du second ordre.

A partir de ce type de courbes, il est possible d'approcher une courbe donnée, $y(t)$, par: $\sum_{k=1}^K c_k B_k(t)$. Les coefficients c_k déterminent l'allure de la courbe résultante. Dans l'exemple de Dijksterhuis et Eilers (1997), une courbe prototype f , définie comme une somme d'éléments d'une base de fonctions B-splines, est normalisée à la fois en intensité et en temps et est déterminée de manière à être aussi proche que possible des courbes individuelles. A partir des données (t_{ij}, y_{ij}) où j indique le juge ($j=1, \dots, m$) et i le temps ($i=1, \dots, n$) et sous l'hypothèse que les courbes ont des allures similaires après normalisation, Dijksterhuis et Eilers (1997) ont considéré que $y_{ij} = a_j f(b_j t_{ij})$ avec $f(t) = \sum_{k=1}^K c_k B_k(t)$. Certaines données peuvent manquer, c'est pourquoi ils ont introduit des poids w_{ij} nuls pour les données manquantes. Ces auteurs ont également observé que le nombre et l'ordre des B-splines n'ont pas beaucoup d'effet sur la courbe prototype. Ils ont conservé six splines quadratiques parce qu'ils ont constaté qu'un nombre supérieur à six fonctions splines n'améliore pas les résultats.

La tâche consiste à estimer les paramètres a_j , b_j et la courbe prototype f . Pour cela Dijksterhuis et Eilers (1997) proposent de procéder selon l'algorithme 2 (page suivante). Il est nécessaire de poser des conditions de normalisations pour avoir une solution unique (voir contraintes dans l'algorithme 2). Dijksterhuis et Eilers (1997) affirment qu'avec de bonnes initialisations, une vingtaine d'itérations suffit pour trouver une solution au problème.

algorithme 2 algorithme proposé par Dijkstrahuis et Eilers (1997)

- déterminer le maximum de chaque courbe $Imax_j$ et poser $a_j = \frac{1}{Imax_j}$
- multiplier les coefficients a_j par un facteur commun de manière à vérifier la contrainte suivante: $\sum_{j=1}^m \frac{a_j^2}{m} = 1$
- déterminer les temps d'atteinte du maximum pour chaque courbe $Tmax_j$ et poser $b_j = \frac{1}{Tmax_j}$
- multiplier les coefficients b_j tels que pour tout i et j $b_j t_{ij} \leq 1$

Répéter

- Pour estimer f , connaissant b_j et a_j , il faut minimiser la fonctions des moindres carrés: $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(y_{ij} - a_j \sum_{k=1}^K c_k B_k(b_j t_{ij}) \right)^2$.
- L'estimation de a_j , connaissant b_j et f . Par régression linéaire simple, l'estimation des a_j est explicite :

$$a_j = \frac{\sum_{i=1}^n w_{ij} y_{ij} f(b_j t_{ij})}{\sum_{i=1}^n w_{ij} f^2(b_j t_{ij})}, j = 1, \dots, m$$

- L'estimation de b_j , connaissant a_j et f . Le problème n'est plus linéaire, mais il est possible de le linéariser au voisinage de bonnes approximations \tilde{b}_j des b_j :

$$f(b_j x) = f(\tilde{b}_j x + \Delta b_j x) \approx f(\tilde{b}_j x) + \Delta b_j x f'(\tilde{b}_j x)$$

La dérivée pouvant être calculée grâce aux propriétés des fonctions B-splines:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^K c_k B_k^{(d)}(x) = \sum_{k=2}^K (c_k - c_{k-1}) B_k^{(d-1)}(x)$$

où d et $d - 1$ correspondent aux degrés des fonctions splines. Finalement, l'équation mène à l'expression explicite suivante:

$$\Delta b_j = \frac{\sum_{i=1}^n w_{ij} a_j t_{ij} f'(\tilde{b}_j t_{ij}) [y_{ij} - a_j f(\tilde{b}_j t_{ij})]}{\sum_{i=1}^n w_{ij} [a_j t_{ij} f'(\tilde{b}_j t_{ij})]^2}$$

Jusqu'à convergence

2.4.2 Approximation par des modèles paramétriques

Il est possible d'approcher une courbe par un modèle paramétrique. Ainsi, Pfeiffer *et al.* (2000) se sont intéressés à des équations différentielles non linéaires en s'appuyant sur des expressions de processus dynamiques de diffusion de la salive et d'adsorption/ désorption au niveau des récepteurs sensoriels. Le modèle s'exprime par trois variables dépendantes:

- y_1 , la concentration du stimulus,
- y_2 , la concentration du stimulus à l'interface avec la salive d'épaisseur l sur la langue,
- y_3 , la quantité de protéines (récepteurs) qui concernent le stimulus.

Ces variables s'expriment les unes en fonction des autres et en fonction de paramètres (coefficient d'adsorption, coefficient de désorption, quantité totale de protéines, coefficient de diffusion, ...). Elles vérifient des équations différentielles dont une solution analytique n'est pas connue. Néanmoins, des solutions par des méthodes numériques ont permis à Pfeiffer *et al.* (2000) de modéliser les courbes pour chaque juge.

Garrido *et al.* (2001) se sont basés sur des modèles biologiques de la dynamique de la transformation des produits ingérés : concentration du stimulus qui diminue de manière exponentielle dans la bouche, vitesse de réaction au niveau des récepteurs, perception de l'intensité par le cerveau. En définitive, ils proposent un modèle avec cinq paramètres :

- A qui dépend de la concentration initiale du stimulus (I_{max} important, A est faible)
- B qui dépend de la longueur du plateau (B augmente avec la longueur du plateau)
- k_0 qui augmente quand T_{max} diminue
- t_1 qui augmente avec le temps de réaction
- n_r qui augmente avec le taux de décroissance de la courbe après le pic d'intensité.

Valentová *et al.* (2002) ont étudié l'astringence de boissons en séparant les deux phases : mise en bouche-ingestion et ingestion-fin de la perception de l'astringence. Ils ont alors posé un modèle simple basé sur une fonction semi-logarithmique pour la première phase et sur une fonction exponentielle pour la seconde.

Un des reproches faits à ces derniers modèles est que les paramètres ne correspondent pas à des critères identifiables sur une courbe TI.

Eilers et Dijksterhuis (2004) ont développé un modèle paramétrique à cinq paramètres :

- c_0 , pic d'intensité
- a_1 , pente pour la partie croissante de la courbe

- a_2 , pente pour la partie décroissante de la courbe
- t_1 , temps correspondant au pic d'intensité
- t_2 , temps correspondant à la fin du plateau.

Ce modèle est le suivant : $f(t) = c_0 - \ln(1 + e^{-a_1(t-t_1)}) - \ln(1 + e^{-a_2(t-t_2)})$.

Il faut considérer des expériences assez longues pour avoir un retour au zéro, sinon il n'est pas possible d'estimer le coefficient a_2 . Ce modèle reproduit les courbes TI quand elles ont une forme commune, mais il ne s'applique pas pour des courbes relativement complexes : plateaux multiples, décroissance en deux phases. Pour ces situations, les auteurs cités ont proposé un modèle étendu qui consiste en définitive à séparer les courbes complexes en deux courbes traitées séparément par le modèle précédent.

Echols *et al.* (2003) utilisent ce modèle en considérant séparément les parties croissante et décroissante. En effet, ils cherchaient à étudier des courbes qui n'ont pas une forme habituelle (partie croissante, plateau, partie décroissante). Pour la texture, la courbe peut ne faire que croître ou que décroître. Ils précisent la nécessité pour certaines courbes d'un lissage préalable pour une efficacité optimale de l'algorithme d'approximation des paramètres. Echols *et al.* (2003) ont présenté une étude de cas concernant la texture de sauce au fromage où plusieurs facteurs pouvaient être modifiés : le procédé de fabrication, la composition en fromage, la source du fromage, la température de cuisson. Ils ont cherché à estimer les paramètres du modèle de décroissance suivant : $f(t) = c_0 - \ln(1 + e^{-a_1(t-t_1)})$ avec $a_1 < 0$. Par la suite, ils ont montré que la composition en fromage et le procédé ont une influence sur la pente de décroissance. Ils concluent en précisant que l'évaluation à l'aide de courbes TI et l'utilisation de modèles paramétriques constituent un outil très efficace pour le développement de nouveaux produits. Cette procédure permet, en effet, d'identifier les caractéristiques sensorielles qui sont le plus influencées par les facteurs de fabrication des produits.

Il faut cependant ajouter que les modèles paramétriques développés ci-avant ne mène à des résultats satisfaisants que pour des courbes qui correspondent parfaitement à la forme de courbes supposées par le modèle.

Conclusion

L'étude de la dynamique des sensations grâce aux courbes Temps Intensité (TI) permet une meilleure caractérisation des produits. Les études de type temps intensité sont très utilisées et les méthodes d'analyse sont très diverses. Il est important de noter que pour l'instant aucune des méthodes proposées ne s'est réellement imposée comme une méthode standard. L'analyse basée sur l'extraction de paramètres est le plus souvent utilisée. Cependant, dans ce type d'analyse, la difficulté majeure réside dans l'identification de ces paramètres. En effet, les paramètres de formes tels que

les pentes (croissance et décroissance) ne sont pas aisées à identifier. Dans certaines études, il arrive qu'un signal ait un creux et dans ce cas, la durée du plateau, le début de la décroissance ne se déterminent pas de manière automatique. Dans la bibliographie concernant l'analyse des signaux Temps Intensité, d'autres traitements ont été proposés, tels que la mise en place de modèles paramétriques. Cependant, la nécessité de disposer de courbes ayant une allure particulière consitue une contrainte majeure. Considérer la courbe dans sa totalité (étude des courbes comme vecteurs) a l'avantage de ne faire aucune hypothèse, mais néglige la dimension temps. L'approche fonctionnelle non paramétrique semble la plus appropriée puisqu'elle assume peu d'hypothèses sur la forme des courbes. Ainsi l'utilisation de l'espace de fonctions continues et d'une base dans cet espace permet à l'utilisateur de se focaliser sur la forme de la courbe en éliminant le bruit (voir chapitre 3).

De plus, le problème majeur qui se pose dans le cadre de l'analyse des courbes TI concerne la performance des juges. En effet, malgré l'entraînement des juges, la variabilité interindividuelle, déjà présente dans les épreuves de profil fixe, est amplifiée dans les études sensorielles TI. Nous verrons dans les chapitres suivants comment traiter ce problème.

Chapitre 3

Caractérisation des produits par des courbes TI

Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, la modélisation la plus classique, mais aussi probablement la plus simple, d'une courbe TI consiste à réduire le signal observé à un ensemble de paramètres caractéristiques de la courbe. Plus récemment, de nouvelles modélisations ont visé à mieux retranscrire la continuité dans le temps du signal TI. Ces approches, dites fonctionnelles, reposent sur l'hypothèse que le signal observé est l'expression bruitée d'une courbe lisse. Ainsi, Garrido *et al.* (2001) s'appuient sur une analyse des mécanismes biochimiques intervenant au cours de la mastication pour proposer une famille paramétrée de courbes formalisant les signaux TI. A l'instar de la modélisation proposée par Dijksterhuis et Eilers (1997), d'autres approches non-paramétriques offrent une alternative plus souple aux modèles non-linéaires de Garrido *et al.* (2001).

S'inspirant à la fois de l'approche classique d'extraction de paramètres et de l'approche fonctionnelle, la modélisation sur laquelle s'appuie notre travail consiste, entre autres, à décomposer le signal dans une base de fonctions B-splines. Pour cela, nous précisons le contexte théorique dans le sous chapitre 3.1. Pour l'analyse des études de cas décrites dans le sous chapitre 3.2, quelques prétraitements proposés dans le paragraphe 3.2.4 sont nécessaires. Nous avons de plus utilisé une double standardisation (en temps et en intensité) afin de nous focaliser sur la forme des courbes. Toutefois, il faut noter que les paramètres de standardisation (durée de l'évaluation, intensité maximale) sont conservés pour une étude ultérieure. Les signaux standardisés associés à chaque juge et chaque produit représentent la dynamique de la sensation étudiée. Pour pouvoir les analyser, nous avons opté pour la réduction de l'information par projection sur une base de fonctions. Les courbes étant supposées suffisamment lisses, nous avons considéré une base de fonctions splines (Boor, 1978). Le choix du nombre de fonctions dans la base est développé dans le paragraphe 3.3.1. Enfin, les paragraphes 3.3.2 et 3.4 abordent la détermination de la moyenne des

répétitions ainsi que des courbes représentative de chaque produit, en insistant sur les difficultés rencontrées (problème de variabilité interindividuelles). La méthode utilisée pour ces derniers points se base sur la procédure de détermination de compromis développée dans le sous chapitre 1.1 en calculant des moyennes pondérées en fonction de la similitude des courbes entre elles.

3.1 Contexte mathématique

Champely (1994) retrace un historique très intéressant de l'analyse de données fonctionnelles. Nous n'allons indiquer ici que les traitements et résultats intéressants pour le type de données étudiées en Temps Intensité.

3.1.1 Ensemble de fonctions

Comme Champely (1994), nous cherchons “dans un premier temps à estimer à partir d'une fonction discrétisée, une courbe qui sera dans un second temps l'objet fonctionnel d'une analyse”. Après une étape de standardisation, nous avons choisi une méthode de régression non paramétrique qui considère que les données sont constituées d'une partie lisse et d'une partie bruitée. Chacune des courbes appartient à l'ensemble $L^2([0,1])$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ de carré intégrable. Le produit scalaire considéré est le produit scalaire de Hilbert-Schmidt défini par:

$$\forall f, g \in L^2([0,1]) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

et la norme induite est:

$$\forall f \in L^2([0,1]) \quad \|f\| = \left(\int_0^1 f^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

La partie lisse est supposée appartenir à l'espace vectoriel engendrée par une base de fonctions Φ_k , $k = 1, \dots, K$. Nous avons choisi une base de fonctions B-splines d'ordre 4 (formées de polynômes d'ordre 3) appelée base de B-splines cubiques, notées B_k , $k = 1, \dots, K$. Les propriétés des fonctions B-splines sont décrites par Champely (1994), entre autres:

- leur support est restreint.
- elles forment une partition de l'unité: $\forall t \in [0,1] \sum_{k=1}^K B_k(t) = 1$.
- elles sont positives.

La figure 3.1 montre un exemple de base de fonctions B-splines cubiques. L'intérêt, dans notre cas, est de pouvoir lisser les signaux enregistrés. Soient $(x_t, y_t)_{t=1, \dots, T}$, les T points enregistrés pour la courbe y . Les coefficients B-splines $(c_k)_{k=1, \dots, K}$ minimisent:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(y_t - \sum_{k=1}^K c_k B_k(x_t) \right)^2$$

Posons \mathbf{B} la matrice de dimension $T * K$ dont l'élément générique est $b_{tk} = B_k(x_t)$ pour $t = 1, \dots, T$ et $k = 1, \dots, K$. Sous forme matricielle, le problème d'optimisation est $\min_{\mathbf{c}} (\mathbf{y} - \mathbf{Bc})'(\mathbf{y} - \mathbf{Bc})$ et la solution $\mathbf{c} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{y}$ (cf annexe B, page 97).

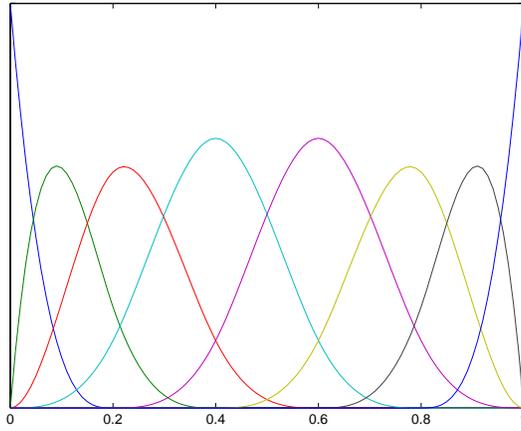


FIGURE 3.1 – Exemple de base formée de huit fonctions B-splines cubiques (4 nœuds intérieurs: 0,2; 0,4; 0,6 et 0,8).

3.1.2 Lissage pénalisé et contraintes

Ce paragraphe regroupe des résultats concernant le lissage pénalisé avec ou sans contrainte particulière, dont les calculs sont donnés en annexe (annexe B, page 97).

Dans l'étude d'une courbe lisse bruitée ou même pour l'interpolation, il est usuel de considérer les splines lissantes (Boor, 1978; Ramsay et Silverman, 1997). Celles-ci permettent d'établir une sorte de compromis entre avoir un bon ajustement et obtenir une courbe lisse. Il suffit pour cela d'introduire un terme dans le problème d'optimisation précédent qui pénalise les fonctions qui ne présentent pas une grande régularité, la contrepartie étant une perte de la qualité d'ajustement. Ramsay et Silverman (1997) et Champely (1994) introduisent un terme qui dépend de la dérivée seconde de la fonction ajustée:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(y_i - \sum_{k=1}^K c_k B_k(x_t) \right)^2 + \lambda \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^K c_k B_k^{(2)}(t) \right)^2 dt$$

où $B_k^{(2)}$ correspond à la dérivée seconde de la fonction B-splines B_k . Le paramètre λ , positif ou nul, est appelé paramètre de lissage et est fixé par l'utilisateur. Pour λ nul, nous retrouvons le problème d'optimisation précédent; plus il augmente, plus les variations importantes sont pénalisées pour se rapprocher d'une courbe la plus lisse possible (droite). La solution est alors $\mathbf{c} = (\mathbf{B}'\mathbf{B} + \lambda\mathbf{G})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{y}$ où \mathbf{G} est la matrice des intégrales des produits des dérivées secondes des fonctions B-splines (Champely,

1994): $\mathbf{G} = (g_{ij}) = (\int_0^1 B_i^{(2)}(t)B_j^{(2)}(t)dt)$.

D'autre part, il est possible de considérer les cas où les coefficients c_1 et c_K sont supposés fixés. Nous verrons, par exemple l'intérêt de fixer c_1 à 0 et c_K à 0 ou 1. Le tableau 3.1 regroupe les résultats que nous avons obtenus sous certaines contraintes. \mathbf{c}^* est le vecteur (c_2, \dots, c_{K-1}) , \mathbf{B}^* est la matrice \mathbf{B} privée de la première et de la dernière colonne, et les autres notations sont explicitées dans l'annexe (annexe B, page 97).

contraintes		optimum en
c_1	c_K	\mathbf{c}^*
0	0	$((\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^* + \lambda\mathbf{G}^*)^{-1}(\mathbf{B}^*)'\mathbf{y}$
0	1	$((\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^* + \lambda\mathbf{G}^*)^{-1}((\mathbf{B}^*)'\mathbf{y} - (\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}_K - \lambda\mathbf{G}_K^*)$

TABLEAU 3.1 – Projection dans une base de fonctions B-splines sous contraintes.

3.2 Description des données

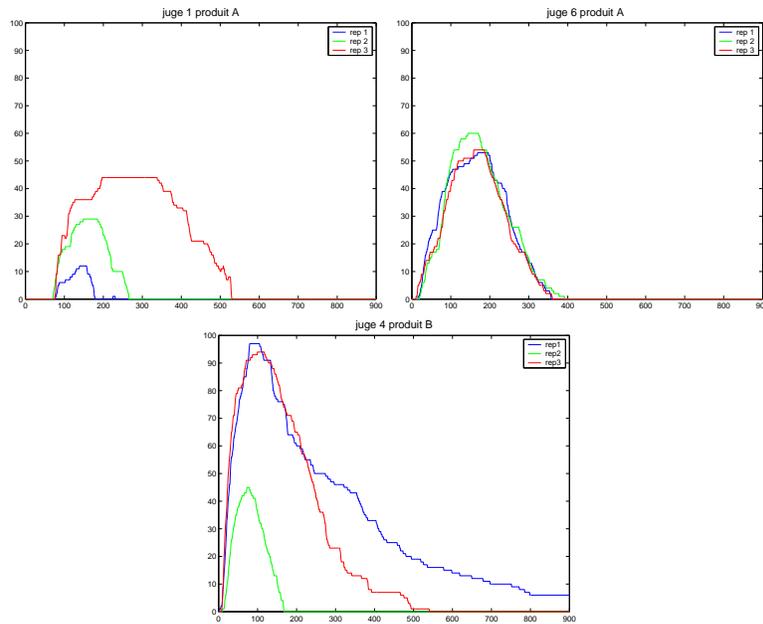
Les trois paragraphes suivants présentent des ensembles de données réels sur lesquels nous avons appliqué différentes procédures et méthodologies. Sur la base de ces exemples, il apparaît évident que certains prétraitements sont nécessaires. Ensuite, une double standardisation (en temps et en intensité) sera présentée afin de se focaliser sur la forme du signal.

3.2.1 Données “boissons chocolatées”

Les données TI présentées ci-dessous proviennent du CCFRA (Campden & Chorleywood Food Research Association, Royaume Uni) et portent sur l'évaluation de la saveur sucrée de six boissons chocolatées. L'évaluation a été réalisée par dix juges, chacun d'eux ayant répété trois fois la mesure. Le temps d'enregistrement est de 90 secondes, avec un point de mesure tous les dixièmes de secondes. Trois exemples de courbes TI obtenues pour un juge et un produit donnés, pour chacune des répétitions, sont donnés dans la figure 3.2.

3.2.2 Données “fromages”

Les données TI présentées ci-dessous proviennent d'une expérience décrite par Salles *et al.* (2002). Trois fromages commerciaux à pâte molle : un Camembert fabriqué avec du lait cru, un Camembert et un Brie fabriqués avec du lait pasteurisé (45% de matière grasse) ont été considérés pour cette étude. Treize sujets ont été sélectionnés et entraînés à noter l'arôme de fromages par rapport à différents composés de référence en solution dans de l'eau pure, puis à la notation temporelle

FIGURE 3.2 – *Exemples de courbes TI.*

de la perception en continu par la méthode temps-intensité avec des échantillons de fromage. Pour chacun des trois fromages, des mesures de perception temporelle de la note soufrée ont été effectuées. Chaque fromage a été dégusté trois fois par chaque sujet. Les échantillons (14 g), servis à une température de 20°C, étaient présentés selon un carré latin afin d’éviter les effets de reports. Pour chaque sujet, le temps entre la prise de deux échantillons était d’au moins 15 minutes. Entre deux échantillons, il était demandé aux juges de se rincer la bouche avec de l’eau et des crackers. De plus, les sujets disposaient comme référence de la note soufrée d’une solution aqueuse de diméthylsulfure à une concentration de $3,3\mu LL^{-1}$ dans un flacon à fermeture hermétique qu’ils pouvaient ouvrir et sentir avant chaque mesure. Les données étaient collectées à partir de l’introduction de l’échantillon en bouche pendant 5 minutes. Le sujet devait évaluer la note soufrée en actionnant une manette sur une échelle graduée de 0 à 10 pendant la mastication de l’échantillon. L’enregistrement des signaux au cours de la mastication d’un échantillon a permis la construction des courbes de perception temporelle de la note soufrée.

3.2.3 Données “crèmes glacées”

Nous disposons également de deux évaluations sensorielles concernant la perception d’arômes et la fonte en bouche (%) de crèmes glacées réalisées par “Danish Dairy Research Foundation” (Frost *et al.*, 2005). Douze juges expérimentés ont évalué douze crèmes glacées et chaque évaluation a été répétée trois fois. Les crèmes glacées avaient différentes teneurs en matières grasses (3%, 6% et 12%) et différents

arômes (banane, noix de coco, fruits rouges et vanille). Deux exemples de courbes sont présentées dans la figure 3.3 représentant respectivement l'évolution au cours du temps de la perception de l'arôme et de la fonte en bouche. Nous illustrons sur la base de cet exemple, la possibilité d'adaptation de la méthode à des courbes qui ne sont pas en forme en cloche. Néanmoins, nous n'approfondirons pas l'étude de ces données.

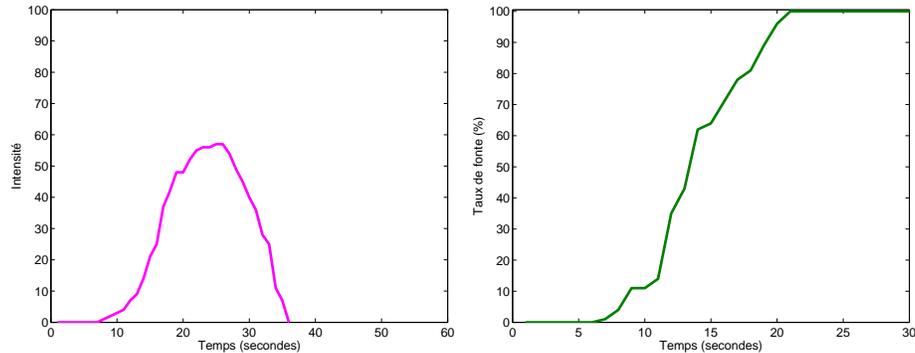


FIGURE 3.3 – Perception de l'arôme et évaluations de la fonte en bouche d'une crème glacée.

3.2.4 Prétraitements

Les courbes brutes initiales peuvent présenter de petits pics en dehors de la zone de perception du signal que l'on assimilera à des erreurs de manipulation du curseur. Ces pics seront éliminés dans une phase de prétraitement des données. De même, il arrive qu'un juge ne ramène pas le curseur à zéro avant la fin de l'évaluation mais que le signal reste constant en fin de la courbe (pas de changement dans la perception). C'est par exemple le cas pour la courbe produite par le juge 4 pour le produit B lors de sa première répétition (figure 3.2). Dans ces cas, la courbe TI est tronquée et ramenée à zéro.

3.2.5 Double standardisation

Une observation des courbes présentées dans la figure 3.2 permet de voir que celles-ci sont différentes de plusieurs points de vue: intensité maximale, durée de la perception, forme du signal (décroissance rapide ou lente), . . . Afin de nous focaliser sur la forme de la courbe, nous avons décomposé chaque signal en trois paramètres (T_0 , Δ et $Imax$) et la courbe standardisée, appelée dans la suite *squelette*.

Le squelette d'une courbe TI est obtenue après translation du temps au début du signal T_0 , standardisation par Δ sur l'échelle des temps et standardisation par $Imax$ sur l'échelle des intensités. Pour une courbe initiale y , le squelette z est défini,

pour t dans $[0,1]$ par:

$$z(t) = \frac{1}{I_{max}}y(\Delta t + T_0)$$

La figure 3.4 présente un exemple de détermination des trois paramètres de standardisation et de squelette.

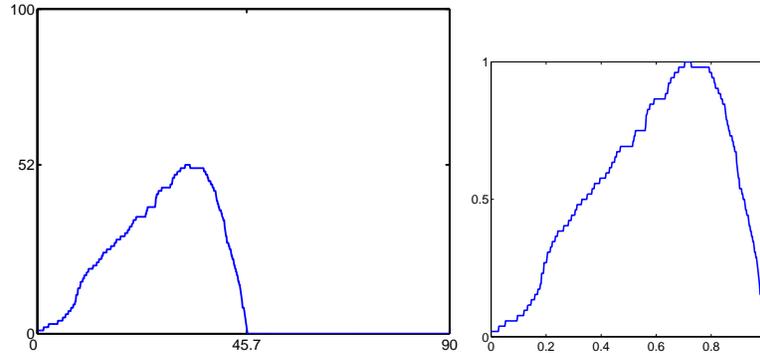


FIGURE 3.4 – Exemple de détermination des trois paramètres ($T_0=0$, $\Delta=45.7$ et $I_{max}=52$) et du squelette (à droite).

Il faut souligner que les trois paramètres définis pour chacune des courbes sont conservées pour des études ultérieures (sous chapitre 3.3.2 et chapitre 4).

3.3 Approche fonctionnelle

3.3.1 Choix de la base de fonctions splines

L'analyse des squelettes des courbes consiste dans un premier temps à projeter chacun de ces signaux standardisés dans une base de fonctions. La base retenue est une base de B-splines, bien adaptée pour modéliser des courbes assez lisses. Les fonctions B-splines présentent des propriétés intéressantes de continuité et de dérivabilité en un certain nombre de points appelés nœuds. Par soucis de simplicité, nous avons opté pour des nœuds répartis de manière régulière sur l'ensemble d'étude $[0,1]$. Pour l'analyse des courbes TI, cette projection présente un double intérêt : d'une part, lisser les signaux observés, d'autre part, compresser l'information relative au squelette de la courbe en un nombre fini et relativement réduit de coefficients $c_k, (k = 1, \dots, K)$. Le vecteur \mathbf{c} correspond alors aux coordonnées dans la base de fonctions (il reflète l'allure de la courbe) et le vecteur \mathbf{Bc} correspond aux valeurs prises par la courbe lissée aux temps considérés. Les squelettes considérés ont dans la majorité des études de cas des formes de cloches ($z(0) = 0$ et $z(1) = 0$), il est alors possible d'imposer à chaque courbe lisse de s'annuler en 0 et en 1 en ajoutant la contrainte $c_0 = 0$ et $c_K=0$. Nous avons vu dans le sous chapitre précédent que

les paramètres c_1, \dots, c_{K-1} s'obtiennent en résolvant un problème d'optimisation similaire à celui présenté (annexe B, page 97).

La qualité de l'ajustement des fonctions lissées aux signaux observés dépend des paramètres de la base B-splines, à savoir le degré d des fonctions B-splines de la base et le nombre de nœuds ν définis à l'intérieur de l'intervalle d'étude (et supposés être régulièrement espacés). Le nombre K de B-splines dans la base se déduit de ces deux paramètres: $K = d + \nu + 1$.

Nous considérons ici des B-splines d'ordre 4, c'est à dire de degré 3 qui sont les plus utilisées et permettent d'obtenir de meilleurs lissages sans discontinuité de courbure (Dijksterhuis et Eilers, 1997). Pour obtenir des courbes lisses, nous avons introduit une pénalisation (voir sous chapitre 3.1). La figure 3.5 présente les résultats pour les données fromages pour quatre valeurs de λ : $\lambda = 0$ (pas de pénalité), $\lambda = 0,01$; $\lambda = 0,001$ et $\lambda = 0,0001$. D'après la figure 3.5 en haut à gauche, il semble évident d'introduire une contrainte de lissage pour éviter des erreurs d'interprétation. La figure 3.5 en haut à droite montre qu'il ne faudrait néanmoins pas introduire trop de pénalité au risque de s'éloigner des données originales.

Le choix du nombre de fonctions K dans la base et du paramètre λ qui donne de l'importance ou non à la pénalité introduite, est réalisé en étudiant la qualité d'ajustement reflétée par le coefficient de détermination R^2 et la distance entre le squelette de chaque courbe TI et la courbe lissée. La figure 3.6 présente les résultats pour les données fromages sous forme de boîtes à moustaches pour $\lambda = 0,0005$. Le paramètre λ et la dimension de la base retenue, dans cet exemple, sont $\lambda = 0,0005$ et $K = 10$.

Nous pouvons ajouter que dans l'étude de la fonte en bouche des crèmes glacées, les courbes étaient strictement croissantes, nous avons alors considéré le paramètre Δ de durée de fonte et nous avons imposé $c_1 = 0$ et $c_K = 1$. La procédure est alors très similaire à l'étude des courbes précédentes. La figure 3.7 illustre l'application de la modélisation à un autre type de courbes.

Si aucune hypothèse n'est faite sur la forme des courbes, la procédure peut être appliquée, il suffit alors de n'imposer aucune contrainte sur les paramètres c_1 et c_K .

3.3.2 Courbe moyenne par juge, répétabilité

Pour chaque triplet "juge j x produit i x répétition r ", nous disposons après estimation des paramètres du modèle, de quatre types d'information: T_0 , Δ et $Imax$ ainsi que le vecteur \mathbf{c} des coefficients dans la base formée des fonctions B-splines.

Pour les critères unidimensionnels T_0 , Δ et $Imax$, noté indifféremment X , et chaque juge j , une analyse de la variance à un facteur est réalisée. Le modèle considéré est :

$$X_{ir}^{(j)} = \mu^{(j)} + \alpha_i^{(j)} + \epsilon_{ir}^{(j)}$$

L'écart-type résiduel de ce modèle permet d'évaluer la répétabilité du juge considéré

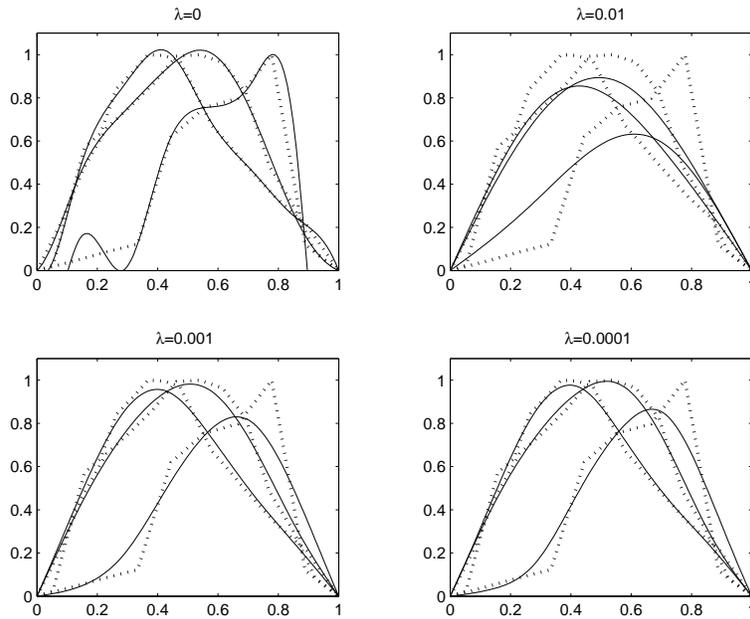


FIGURE 3.5 – Données ‘fromages’: Exemples de lissage pour différentes pénalités.

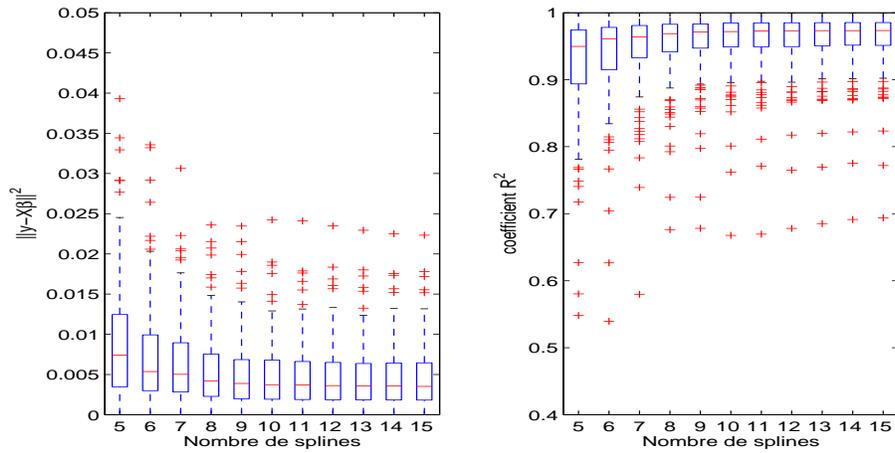


FIGURE 3.6 – Données ‘fromages’: Evolution de la qualité d’ajustement R^2 et du carré de la distance en fonction du nombre de fonctions B-splines introduites dans la base (K), pour des splines de degré 3 et $\lambda=0.0005$.

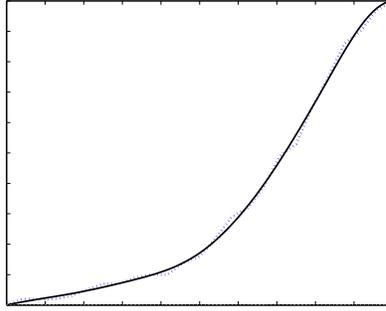


FIGURE 3.7 – Exemple de lissage dans le cas de la fonte en bouche.

pour le critère envisagé, et le niveau de significativité (p-value) associé à l’effet produit reflète son pouvoir discriminant: plus cette valeur est petite, plus le juge est discriminant.

L’information relative au squelette des courbes TI contenue dans la matrice des coefficients B-splines est traitée par analyse de variance à deux facteurs, à savoir le produit $i(i = 1, \dots, n)$ et le “spline” $k(k = 1, \dots, K)$. A partir du modèle :

$$c_{k,ir}^{(j)} = \mu^{(j)} + \alpha_i^{(j)} + \beta_k^{(j)} + \alpha\beta_{ik}^{(j)} + \epsilon_{k,ir}^{(j)}$$

La répétabilité du juge est estimée à partir de l’écart-type résiduel et le pouvoir discriminant du juge en utilisant la p-value associée à l’interaction.

Les résultats pour les données de fromages sont présentés dans les tableaux 3.2 et 3.3. Il apparaît que peu de juges différencient les produits vis-à-vis du critère T_0 (p-value rarement inférieure à 0,05). En ce qui concerne les trois autres critères (durée, intensité maximale de perception et squelette), neuf, six et huit juges (respectivement) expriment des différences dans la perception des produits. Quelques juges sont peu répétables sur certains critères. Alors que les juge 3, 4, 6, 7, 11 et 13 ont toujours les résidus les plus faibles.

Il est important de souligner que l’analyse de la variance de l’effet juge pour chaque produit, mène à des p-value presque toutes inférieures à 0,05; ce qui indique la présence d’un effet juge important.

Nous avons ensuite cherché une courbe “moyenne”, pour chaque juge j et chaque produit i , des R répétitions. Compte-tenu des problèmes de répétabilité identifiés précédemment, une moyenne équipondérée des répétitions ne semble pas pertinente. Nous proposons, par conséquent, de considérer une moyenne pondérée des critères T_0 , Δ et $Imax$. Le poids attribuée à chaque répétition doit tenir compte de la similitude avec les autres répétitions. Ainsi, en posant \mathbf{X} la matrice formée des critères T_0 , Δ et $Imax$ en colonnes et des R répétitions en ligne, nous avons utilisé la procédure décrite dans le chapitre 1 en attribuant un poids à chacune des répétitions (pour chaque juge et chaque produit) en fonction de l’‘accord’ avec les autres répétitions.

Juges	T_0	I_{max}	Δ	squelette
1	0,13	0,03	0,48	0,01
2	0,07	0,28	0,36	0,84
3	0,02	< 0,001	< 0,001	< 0,001
4	0,01	< 0,001	0,02	< 0,001
5	0,53	0,39	0,34	0,38
6	0,01	0,05	0,14	0,13
7	0,82	< 0,001	0,28	< 0,001
8	0,87	0,06	0,32	0,67
9	1,00	< 0,001	0,04	0,97
10	< 0,005	0,06	< 0,005	< 0,001
11	0,58	< 0,001	< 0,005	< 0,001
12	0,79	< 0,001	< 0,001	0,05
13	0,27	< 0,005	0,80	< 0,001

TABLEAU 3.2 – Données ‘fromages’: Pouvoir discriminant des juges (p -value) pour chaque critère. Pour une p -value < 0.05 , le juge est considéré comme ayant un pouvoir discriminant suffisant.

Juges	T_0	I_{max}	Δ	squelette
1	0,06	1,43	1,11	0,14
2	0,07	1,90	0,52	0,16
3	0,09	0,79	0,32	0,11
4	0,07	0,68	0,22	0,12
5	0,11	3,14	1,10	0,14
6	0,05	1,23	0,31	0,14
7	0,07	0,36	0,37	0,09
8	0,17	1,70	0,34	0,17
9	0,12	0,54	0,34	0,22
10	0,03	1,89	0,34	0,10
11	0,07	0,96	0,32	0,16
12	0,37	0,33	0,19	0,23
13	0,09	1,07	0,14	0,12

TABLEAU 3.3 – Données ‘fromages’: Répétabilité des juges pour chaque critère. Les juges ayant les résidus les plus importants sont considérés comme les moins répétables.

De la même manière, pour déterminer le squelette “moyen” sur les R répétitions, une matrice \mathbf{X} est construite à partir des coefficients dans la base B-splines en colonne et les répétitions en ligne. A partir des poids attribués à chaque squelette en fonction de la similitude avec les autres répétitions, il est possible de construire un squelette ‘moyen’.

3.4 Caractérisation des produits

Une fois la modélisation mise en place (standardisation, définition du squelette, projection dans la base de fonctions, détermination d’une courbe moyenne par juge et par produit), il est possible de réaliser une Analyse en Composantes Principales sur les paramètres obtenus (I_{max} , T_0 , Δ , coefficients dans la base de fonctions) afin de caractériser les produits et les positionner les uns par rapport aux autres. De plus, nous cherchons à attribuer un indicateur de performance à chaque juge en fonction de son accord avec le reste du panel pour l’ensemble des produits, pour pouvoir évaluer la performance du jury. Pour cela, nous proposons de consigner dans un tableau X_j les paramètres associés aux produits (I_{max} , T_0 , Δ , coefficients dans la base de fonctions) en ligne, pour chaque juge j . Par la suite, nous pouvons déterminer des poids et des indicateurs de performance, de la même manière que dans le chapitre 1. Les résultats pour l’étude de cas sur les fromages sont présentés dans le tableau 3.4 et ceux sur les boissons chocolatées dans le tableau 3.5. Il apparaît clairement que la performance du jury et de chaque juge, pour l’étude sur les fromages, est faible surtout lorsque seul les squelettes sont considérés. Dans l’étude de cas sur les boissons chocolatées, nous voyons apparaître un juge qui semble indiquer des caractérisations différentes (juge 2) et un juge qui indique le contraire des autres juges (juge 8). Les différences interindividuelles peuvent être dues à des différences physiologiques entre les individus. Zimoch et Gullet (1997) montrent, par exemple, qu’il existe des différences dans la mastication des aliments. Dans cette étude concernant la jutosité de différentes variétés de viande, les dégustateurs ont été classés en trois groupes selon leur façon de mastiquer. Mioche *et al.* (2002) ont mis en évidence des différences dans l’action de la salive. Toutes ces différences sont difficiles à prendre en compte. Néanmoins, il apparaît primordial de pouvoir traiter ce problème d’accord entre les juges, afin de pouvoir caractériser correctement les produits.

Conclusion

Ce chapitre décrit la modélisation des courbes Temps Intensité que nous avons mise en place. A partir d’une courbe décrivant l’évolution d’une sensation au cours du temps, nous nous intéressons, d’une part, aux paramètres tels que l’intensité maximale, la durée totale de la perception et, d’autre part, aux paramètres de forme. Pour ces derniers, nous avons défini le squelette et nous l’avons caractérisé par des

Juges	étude du squelette				étude de tous les critères			
	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
1	0,58	0	0,26	1,1	0,67	0	0,48	1,0
2	0,19	0	0,29	0,4	0,66	0	0,48	0,9
3	0,58	0	0,23	1,2	0,96	0	0,47	1,4
4	0,93	0	0,40	1,5	0,99	0	0,49	1,4
5	0,27	0	0,06	1,1	0,89	0	0,47	1,3
6	0,18	0	0,07	0,7	0,54	0	0,47	0,8
7	0,90	0	0,36	1,5	0,92	0	0,48	1,3
8	0,79	0	0,31	1,4	0,99	0	0,49	1,4
9	0,57	0	0,16	1,4	0,98	0	0,49	1,4
10	0,73	0	0,36	1,2	0,78	0	0,48	1,1
11	0,63	0	0,17	1,5	0,97	0	0,47	1,4
12	0,59	0	0,26	1,2	0,97	0	0,47	1,4
13	0,87	0	0,31	1,6	0,88	0	0,46	1,3
jury	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
	0,57	0	0,15	1,5	0,86	0	0,37	1,41

TABLEAU 3.4 – Données ‘fromages’: Résultats des tests alternatifs pour l’étude de performance du jury.

Juges	étude du squelette				étude de tous les critères			
	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
1	0,51	0	0,05	2,2	0,83	0	0,18	2,0
2	0,19	0	0,04	0,9	0,83	0	0,19	1,9
3	0,61	0	0,10	2,0	0,96	0	0,18	2,2
4	0,86	0	0,14	2,3	0,95	0	0,19	2,2
5	0,61	0	0,08	2,1	0,97	0	0,18	2,3
6	0,55	0	0,10	1,7	0,82	0	0,16	2,1
7	0,79	0	0,15	2,1	0,93	0	0,16	2,3
8	-0,30	0	0,06	-1,2	0,70	0	0,15	1,8
9	0,65	0	0,10	2,1	0,96	0	0,19	2,2
10	0,66	0	0,12	1,9	0,92	0	0,18	2,1
jury	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
	0,51	0	0,04	2,5	0,89	0	0,15	2,3

TABLEAU 3.5 – Données ‘boissons chocolatées’: Résultats des tests alternatifs pour l’étude de performance du jury.

coefficients dans une base de fonctions B-splines. A partir de ces paramètres, il est possible de réaliser des analyses de la variance pour qualifier la répétabilité ou le pouvoir discriminant de juges. Il est aussi possible de déterminer une courbe moyenne des répétitions et une courbe compromis pour les juges en attribuant à ces juges des poids en fonction de leur accord avec le reste du panel. Enfin, pour caractériser chacun des produits, nous pouvons réaliser une ACP sur les paramètres associés aux juges et aux produits. Néanmoins, une particularité notable des courbes de type Temps Intensité, est la présence d'un effet juge important. En effet, il est bien connu que chaque juge a tendance à générer une courbe particulière (signature) qui ne peut pas être facilement éliminée (Buuren, 1992).

L'objectif d'une étude TI est de pouvoir tenir compte de ces différences interindividuelles pour caractériser les produits et évaluer la performance des dégustateurs. Le chapitre 4 détaille une procédure d'alignement que nous avons mise en place pour atténuer la présence de l'effet juge.

Chapitre 4

Réduction de l'effet juge par alignement des courbes

Introduction

Le sous chapitre 3.4 précédent souligne la présence d'une forte variabilité interindividuelle parmi les juges. Un objectif majeur des démarches de modélisation des signaux TI est donc d'identifier cette variabilité afin de focaliser l'analyse sur la caractérisation des produits. Ainsi, plusieurs démarches visent à déterminer un compromis des courbes observées pour un même produit par différents juges (Liu et MacFie, 1990; Dijksterhuis et Piggot, 2001). Notre démarche d'identification et de réduction de la variabilité interindividuelle présente une certaine similarité avec une approche proposée par Dijksterhuis et Eilers (1997). Elle permet de mettre en évidence les "signatures" propres aux différents juges. Les procédures que nous proposons utilisent des transformations non linéaires du temps dans le but d'ajuster les différentes courbes: DTW (Dynamic Time Warping: Ramsay et Li (1998)) et COW (Correlation Optimised Warping: Nielsen *et al.* (1998)). La première est utilisée dans des domaines tels que la reconnaissance vocale (Rabiner et Juang, 1993), le suivi de procédés (Ramaker *et al.*, 2003) ou l'analyse d'images médicales (Jue *et al.*, 2006). La seconde est utilisée en chromatographie (Malabat *et al.*, 2004; Tomasi *et al.*, 2004) et également en imagerie médicale (Fei *et al.*, 2003). Après une description de ces méthodes dans le sous chapitre 4.1, le sous chapitre 4.2 est dévolu à l'adaptation de ces méthodes en analyse de courbes temps intensité. De plus, une procédure de permutation est développée pour valider la procédure d'alignement dans le sous chapitre 4.3. Une fois l'effet juge réduit, il est possible de caractériser les différents produits. Ainsi, une analyse multidimensionnelle sur la base de coefficients caractéristiques des courbes comprenant notamment les coefficients associés aux fonctions B-splines permet la caractérisation des produits.

4.1 Alignement de courbes

Le problème d'alignement de courbes est rencontré dans de nombreuses situations comme cela a été souligné en introduction. Les méthodes d'alignements de courbes les plus utilisées sont basées sur:

- l'alignement à partir de paramètres clés tels que les pics,
- la méthode COW (Correlation Optimised Warping),
- la méthode DTW (Dynamic Time Warping).

Le principe de base de ces techniques est d'aligner une courbe sur une autre courbe prise comme cible.

Pour la première méthode, cela consiste à déterminer les pics (d'un chromatogramme, par exemple) des deux courbes et à réaliser des interpolations linéaires entre chaque pic. Le problème majeur de cette démarche est la détection des pics (problème de pics manquants, faux pics...). Nous nous sommes intéressés aux deux autres méthodes, pour lesquelles l'alignement est effectué par la détermination d'une fonction non linéaire croissante du paramètre d'intérêt (longueur d'onde ou, comme dans notre cas, le temps) sans se baser sur de la détection de points particuliers.

4.1.1 Alignement COW

Soit x_t , $t = 1, \dots, T$ le paramètre d'intérêt (le temps par exemple), y_t le signal à aligner et z_t le signal cible.

La méthode COW aligne ces deux signaux au moyen d'étirage et de compression par morceaux linéaires du signal à aligner, $y_t = y(x_t)$, de manière à avoir la meilleure correspondance possible avec le signal cible $z_t = z(x_t)$. Dans notre cas, x_t parcourt l'intervalle $[0,1]$ du temps avec un pas de discrétisation de 0,1 (par exemple). L'algorithme développé dans COW fonctionne de la manière suivante. D'abord, le signal y est divisé en un nombre fixé de sections, N . Chaque section dans le signal y est déformée, signifiant que sa longueur est étirée ou raccourcie en décalant ses bornes. Chaque point de section peut être décalé de plus ou moins un paramètre dénoté s , excepté le début et la fin du signal qui sont fixes. Par exemple, si s vaut 0,2 (et si le pas de discrétisation vaut 0,1), il y a cinq limites possibles d'une section: -0,2; -0,1; 0; 0,1 et 0,2. Les sections (étirées ou raccourcies) ainsi obtenues du signal y sont interpolées de manière linéaire et la corrélation entre le signal y interpolé et le signal cible z est calculée. L'objectif de l'alignement est bien évidemment de maximiser cette corrélation reflétant ainsi une forte correspondance entre la courbe alignée et la courbe cible. La durée de calcul de l'algorithme dépend des deux paramètres d'entrée, c'est à dire le nombre de sections dans le signal N et le paramètre s . Le choix du paramètre s est habituellement guidé, dans le cas des chromatogrammes,

par les décalages maximaux observés dans les deux profils et par la longueur des sections elles-mêmes.

4.1.2 Alignement DTW

Dans la démarche DTW (Ramsay et Li, 1998), une fonction de déformation du temps (transformation non linéaire du temps) $u(x_t)$ est déterminée pour aligner le signal y sur le signal de référence z . Cette transformation est décomposée selon une base de fonctions B-splines comme suit : $u(x_t) = \sum_{k=1}^K c_k B_k(x_t)$ où K représente le nombre de B-splines, c_k le coefficient de déformation pour la k ème fonction B-spline B_k . Le but de la procédure DTW est d'optimiser les paramètres de déformation c_k afin de trouver une fonction de déformation u pour laquelle le signal $y(u(x_t))$ est aussi proche que possible du signal de référence. S , le carré de la distance entre le signal de référence z et le signal interpolé, est minimisé : $S = \int_0^1 [z(t) - y(u(t))]^2 dt$. La solution est obtenue en utilisant un principe de descente du gradient jusqu'à la convergence (Ramsay et Li, 1998). Il faut noter que si le nombre de fonctions B-splines est élevé, la fonction de déformation risque de montrer trop de variations. Ceci peut se traduire concrètement par un surajustement au niveau de l'alignement ou, en d'autres termes, une tendance à tenir compte aussi bien de phénomènes structurel (signature des juges) que d'artefacts expérimentaux. Afin de contrer ce problème, un terme de pénalité est ajouté (voir pénalité de lissage dans le chapitre 3). En contrepartie, la qualité de l'alignement (reflétée par S) sera moins bonne.

4.2 Application à l'atténuation de l'effet juge

Comme nous l'avons souligné précédemment, l'atténuation des signatures des juges afin de bien mettre en exergue l'effet produit a été un souci constant des chercheurs dans le cadre des courbes TI (Dijksterhuis et Eilers, 1997). Cependant, les propositions faites dans cette optique sont loin d'être satisfaisantes. En effet, Dijksterhuis et Eilers (1997) proposent d'associer à chaque juge un facteur d'échelle permettant soit de contracter, soit de dilater le temps. Cette procédure est basée sur le principe que la perception du temps d'un juge à un autre varie de manière linéaire. A l'évidence, cette hypothèse est restrictive. Nous proposons ici, d'effectuer une transformation croissante non linéaire du temps pour chacun des juges afin d'aligner les courbes TI relatives au même produit. Cette transformation est propre à chacun des juges et est la même pour tous les produits évalués par ce juge. En d'autres termes, nous considérons que chaque juge a une perception du temps qui lui est propre et qui dépend de facteurs physiologiques (vitesse de mastication, sécrétion de la salive, ...) comme cela a été souligné par Fisher *et al.* (1994); Zimoch et Gullet (1997); Wilson et Brown (1997).

4.2.1 Alignement des squelettes à partir de la signature moyenne

Nous nous sommes inspirés de la démarche poursuivie dans le cadre du profil sensoriel conventionnel (ou à vocabulaire fixé) pour proposer une procédure d'alignement des courbes TI. En effet, pour un descripteur donné, il est proposé de calculer la moyenne générale (tous produits et tous juges confondus) et calculer, pour chaque juge, la moyenne des notes pour tous les produits. L'effet juge est déterminé en effectuant la différence entre la moyenne du juge considéré et la moyenne globale. Pour supprimer l'effet juge, il est possible de soustraire la moyenne du juge considéré à toutes ses évaluations. Nous avons adopté une démarche similaire pour la réduction de l'effet juge présent sur la forme des courbes. Concrètement, nous avons déterminé la moyenne des courbes de chaque juge (pour les différents produits) de manière à obtenir une courbe qui reflète sa tendance générale: sa signature f_j (figure 4.1). D'autre part, nous avons déterminé la tendance générale \bar{f} en moyennant les différentes signatures de tous les juges (en gras sur les figures 4.1 et 4.2). Cette courbe correspond également à la moyenne de toutes les courbes (tous les juges et tous les produits confondus). Elle traduit une allure globale de la perception pour la gamme de produits considérés. Ainsi pour l'exemple présenté en figure 4.1, la perception a tendance à augmenter jusqu'à atteindre un point maximum au tiers de la durée totale de perception puis, la perception décroît. Afin de réduire l'effet juge, nous proposons d'aligner la signature de chaque juge à la courbe globale en nous basant sur les procédures COW ou DTW. Ceci permet de déterminer pour chaque juge une transformation, u , qui aligne sa signature à la courbe globale. Par la suite, cette transformation sera appliquée à chacune des courbes (associées aux différents produits) du juge considéré (substituer à la courbe $y(t)$, la courbe $y(u(t))$).

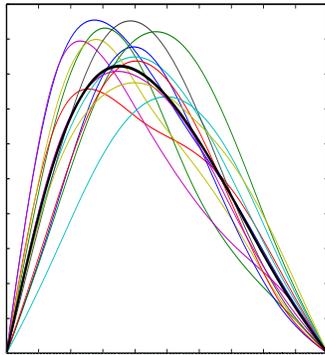


FIGURE 4.1 – *Etude des fromages: Signature des 13 juges et signature globale du panel en gras.*

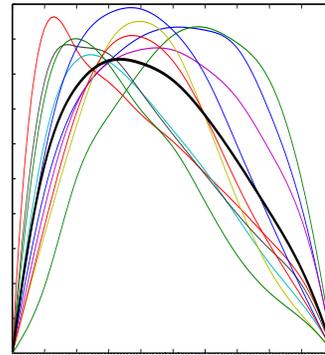


FIGURE 4.2 – *Etude des boissons chocolatées: Signature des 10 juges et signature globale du panel en gras.*

En nous basant sur la procédure COW, nous avons fait varier les paramètres N

(nombre de sections) et s , et avons retenu le choix qui correspondait au meilleur ajustement (plus grand produit scalaire entre chaque courbe ajustée et la courbe cible). Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe précédent, l'alignement pour la procédure COW s'opère par interpolation linéaire par morceaux. Considérant le contexte des courbes TI, nous préconisons de lisser chaque transformation u (qui est linéaire par morceaux) à l'aide d'une décomposition sur une base de B-splines, afin de garder l'allure relativement lisse des courbes TI. Nous pouvons alors imposer $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$ (en posant, $c_1 = 0$ et $c_K = 1$). De plus, une pénalité de lissage est introduite en s'assurant que la transformation est croissante.

La figure 4.3 montre un exemple de transformation u . Dans l'exemple illustré par cette figure, $u(0,2) = 0,4$; $u(0,4) = 0,5$; $u(0,6) = 0,6$ et $u(0,8) = 0,7$. La transformation optimale est obtenue en explorant toutes les possibilités indiquées par des points en ayant pour objectif de maximiser la corrélation entre la signature du juge considéré ajustée et la signature globale. Nous noterons cette procédure *Max Corr*. Il est aussi possible de conserver la transformation qui minimise le carré de la distance entre la signature du juge ajustée et la signature globale: $d(f_j, \bar{f})^2 = \|f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$ où f_j est la signature du juge j , $f_j \circ u_j$ est la signature du juge j qui a été ajustée en appliquant une transformation qui lui est propre u_j et \bar{f} est la signature globale. Nous noterons cette procédure *Min Dist*.

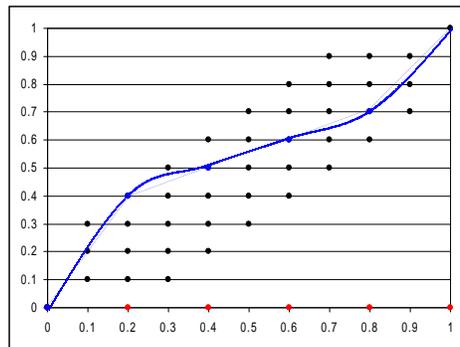


FIGURE 4.3 – Exemple de transformation u et lissage de cette transformation à l'aide d'une fonction B-splines, pour aligner un signal sur un autre (pour $N=5$). $u(0,2) = 0,4$; $u(0,4) = 0,5$; $u(0,6) = 0,6$ et $u(0,8) = 0,7$.

Enfin, pour comparer les résultats, nous avons utilisé la méthode DTW directement: détermination descente du gradient de la transformation u lissée dans la base de fonctions B-splines qui minimise la distance, en ajoutant une pénalité. Dans le cas d'une pénalité, le paramètre λ a été fixé à 0.0001, ce qui pour les données considérées correspond à imposer une contrainte suffisante de lissage.

4.2.2 Critère global

Les adaptations de procédures d'alignement de courbes (COW et DTW) à l'analyse de courbes TI qui ont été proposées dans les paragraphes précédents, sont basées sur une idée intuitive. En effet, nous avons proposé de déterminer la transformation (non linéaire du temps) à appliquer aux courbes données par chaque juge en alignant la courbe représentant la signature du juge à la courbe représentant la signature globale du jury. Comme nous l'avons souligné, cette idée est basée sur la similarité avec la démarche pratiquée dans le cadre du profil conventionnel pour déterminer l'effet juge.

Nous proposons d'adopter une démarche plus directe basée sur un critère d'optimisation qui reflète parfaitement l'objectif poursuivi. Cette démarche consiste à déterminer un facteur ρ_j et une transformation du temps u_j associés au juge j ($j=1, \dots, m$) de manière à minimiser le critère:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - f_i\|^2 \quad (4.1)$$

où f_{ij} et f_i correspondent respectivement à la courbe du produit i associée au juge j et à la courbe prototype du produit i .

Nous imposons la contrainte de détermination suivante:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho_j^2 \|f_{ij} \circ u_j\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|f_{ij}\|^2 \quad (4.2)$$

Il est clair que ce problème d'optimisation présente une grande similarité avec le critère qui est à la base de GPA (sous chapitre 1.2). Il est également clair que ce problème d'optimisation reflète tout à fait l'objectif poursuivi par l'utilisateur. En effet, à travers ce problème d'optimisation, il apparaît que nous cherchons une courbe f_i représentative de l'évolution de la sensation du produit i ($i=1, \dots, n$). Cette courbe 'compromis' apparaît comme une synthèse des courbes données par les différents juges. Cependant, une transformation u_j , qui est la même pour tous les produits et de ce fait caractéristique du juge j ($j=1, \dots, m$), est déterminée de manière à mieux aligner les différentes courbes f_{ij} . Le rôle des coefficients ρ_j sera discuté ultérieurement.

Pour résoudre le problème d'optimisation considéré, nous pouvons noter que pour u_j et ρ_j fixés, l'optimum, f_i , est obtenu pour:

$$f_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \rho_j f_{ij} \circ u_j \text{ pour tout } i \in [1, \dots, n] \quad (4.3)$$

D'autre part, il est facile de vérifier que le critère d'optimisation 4.1 considéré peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - f_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - \bar{f} + \bar{f} - f_i\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\|\rho_j f_{ij} \circ u_j - \bar{f}\|^2 + \|\bar{f} - f_i\|^2 + 2\langle \rho_j f_{ij} \circ u_j - \bar{f}, \bar{f} - f_i \rangle \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - \bar{f}\|^2 + m \sum_{i=1}^n \|\bar{f} - f_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^m \rho_j f_{ij} \circ u_j - m\bar{f}, \bar{f} - f_i \right\rangle
 \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation 4.3 ci-dessus, ceci peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - f_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - \bar{f}\|^2 + m \sum_{i=1}^n \|\bar{f} - f_i\|^2 - 2m \sum_{i=1}^n \langle \bar{f} - f_i, \bar{f} - f_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - \bar{f}\|^2 - m \sum_{i=1}^n \|\bar{f} - f_i\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j\|^2 + mn\|\bar{f}\|^2 - 2 \sum_{j=1}^m \rho_j \sum_{i=1}^n \langle f_{ij} \circ u_j, \bar{f} \rangle
 \end{aligned}$$

La contrainte 4.2 mène au résultat suivant:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - f_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|f_{ij}\|^2 + mn\|\bar{f}\|^2 - 2 \sum_{j=1}^m \rho_j \sum_{i=1}^n \langle f_{ij} \circ u_j, \bar{f} \rangle$$

Le problème consiste alors à maximiser sous la contrainte 4.2:

$$\sum_{j=1}^m \rho_j \sum_{i=1}^n \langle f_{ij} \circ u_j, \bar{f} \rangle = n \sum_{j=1}^m \rho_j \left\langle \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{ij} \right) \circ u_j, \bar{f} \right\rangle = n \sum_{j=1}^m \langle \rho_j f_j \circ u_j, \bar{f} \rangle$$

. Nous pouvons remarquer à ce niveau que l'idée de base consiste à aligner la courbe $\rho_j f_j$ du juge j (signature du juge j multipliée par ρ_j) sur la moyenne globale \bar{f} (signature globale). De ce point, nous rejoignons l'idée intuitive développée dans le paragraphe précédent.

Enfin pour u_j et f_i fixés, le coefficient ρ_j est déterminé par:

$$\rho_j \propto \frac{\sum_{i=1}^n \langle f_{ij} \circ u_j, f_i \rangle}{\sum_{i=1}^n \|f_{ij} \circ u_j\|^2}$$

Le coefficient de proportionnalité est déterminé de manière à ce que la contrainte 4.2 de détermination soit vérifiée. En d'autres termes, le coefficient de proportionnalité est égal à :

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \|f_{ik}\|^2}{\sum_{j=1}^m \frac{(\sum_{i=1}^n \langle f_{ij} \circ u_j, f_i \rangle)^2}{\sum_{i=1}^n \|f_{ij} \circ u_j\|^2}}$$

Pour la minimisation du critère 4.1, un algorithme itératif peut être mise en oeuvre (algorithme 3, page suivante).

Nous obtenons à la fin de l'algorithme des paramètres ρ_j , u_j et f_i qui minimisent le critère considéré 4.1. Comme nous l'avons signalé dans le cadre de la méthode GPA, les coefficients ρ_j ($j = 1, \dots, m$) ont un double rôle :

- facteur d'échelle tenant compte des aires sous les courbes (squelettes)
- facteur de performance reflétant l'accord du juge j avec le reste du panel.

4.2.3 Validation: procédure de permutation

La validation revêt dans ce cadre un double intérêt :

- s'assurer que la procédure d'alignement proposée est pertinente.
- s'assurer que la procédure d'alignement n'opère pas un surajustement en ayant une forte tendance à ajuster même des courbes qui ne traduisent pas nécessairement des signatures communes.

Pour le premier point, nous proposons de nous intéresser aux indicateurs d'accord (α présentés dans le paragraphe 3.4). En toute logique, nous devrions nous attendre à ce que l'accord parmi les membres du jury sur la caractérisation des produits par la forme des signaux augmente après la procédure de réduction de signature. De plus, une démarche descriptive qui consiste à effectuer une analyse en composantes principales sur le tableau composé des coefficients splines des courbes associées aux différents produits et aux différents juges (en ligne) est effectuée sur la base des courbes initiales standardisées puis sur la base des courbes alignées. La pertinence de l'alignement est reflétée par le degré de rassemblement (proximité sur les cartes factorielles) des juges qui diminue après la procédure d'alignement.

Afin de s'assurer que les procédures d'alignement n'ont pas une forte tendance au surajustement, nous avons mis en oeuvre une démarche basée sur des permutations qui consiste à :

1. Pour chaque produit, les courbes associées aux différents juges sont permutées

algorithme 3 algorithme global d'alignement

$r \leftarrow 1$ (initialisations, r est le nombre d'itérations)

- $u_j^{(1)}(t) = t$ sont les transformations identité
- $\rho_j^{(1)} = 1$ vérifient bien

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho_j^2 \|f_{ij}\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|f_{ij}\|^2$$

- La moyenne des courbes par produit est calculée: $f_i^{(1)} = \frac{1}{m} \sum_j \rho_j^{(1)} f_{ij} \circ u_j^{(1)} = \frac{1}{m} \sum_j f_{ij}$.
- La signature des juges est calculée: $f_j = \frac{1}{n} \sum_i f_{ij}$.
- La signature globale des courbes est calculée: $\bar{f}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_i f_i^{(1)}$.

Répéter

$r \leftarrow r + 1$

- Pour $\rho_j^{(r-1)}$ fixés, $u_j^{(r)}$ est déterminée à l'aide de la procédure d'alignement des courbes $\rho_j^{(r-1)} f_j$ sur la courbe $\bar{f}^{(r-1)}$ de manière à minimiser $\|\rho_j^{(r-1)} f_j \circ u_j^{(r)} - \bar{f}^{(r-1)}\|^2$.
- Pour $u_j^{(r)}$ et $f_i^{(r-1)}$ fixés, $\rho_j^{(r)}$ est défini par:

$$\rho_j^{(r)} \propto \frac{\sum_{i=1}^n \langle f_{ij} \circ u_j^{(r)}, f_i^{(r-1)} \rangle}{\sum_{i=1}^n \|f_{ij} \circ u_j^{(r)}\|^2}$$

avec le coefficient de proportionnalité déterminé par la contrainte 4.2

- Pour $u_j^{(r)}$ et $\rho_j^{(r)}$ fixés, $f_i^{(r)}$ et $\bar{f}^{(r)}$ sont réactualisées

$$f_i^{(r)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \rho_j^{(r)} f_{ij} \circ u_j^{(r)} \text{ pour tout } i \in [1, \dots, n]$$

$$\bar{f}^{(r)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i^{(r)}$$

Jusqu'à le critère se stabilise (décroissance plus petite qu'un seuil fixé par l'utilisateur)

aléatoirement.

2. Les procédures de détermination des “*signatures*” et d’alignement des courbes sont effectuées. Comme les juges ont été permutés, la notion de signature perd son sens. En effet, les courbes qui portent le label d’un juge correspondent en réalité à des courbes associées à des juges différents du fait de la permutation.
3. Nous avons appliqué la procédure d’alignement en mettant en oeuvre l’algorithme précédent. Par la suite, nous avons calculé le critère qui reflète la qualité de l’alignement: distances entre les courbes ajustées des juges et les courbes prototypes des produits. En toute logique, nous devrions nous attendre à ce que les courbes obtenues après permutations soient moins bien ajustées que dans la situation initiale (sans permutation des juges) et ceci devrait se traduire par un critère moins bon. De plus, nous pouvons regarder l’accord global du panel qui ne devrait pas être aussi bon dans les cas permutés que dans le cas initial ajusté.

4.3 Application à une étude de cas

4.3.1 Atténuation de l’effet juge: comparaison de méthodes d’alignement

A titre illustratif, nous représentons, pour les données “chocolats” (voir paragraphe 3.2.1), la courbe qui reflète la signature du juge 3 (moyenne des courbes associées aux différents produits, pour ce juge) ainsi que la courbe reflétant la signature globale (moyenne de toutes les courbes associées aux différents produits et aux différents juges) dans la figure 4.4. Nous représentons également sur cette figure les transformations du temps déterminées à l’aide des procédures précédemment décrites: DTW, alignement en maximisant la corrélation (*Max Corr*) et alignement en minimisant la distance (*Min Dist*). Il ressort que les transformations obtenues par ces différentes procédures se ressemblent dans une large mesure. Ces transformations semblent indiquer que par rapport à l’ensemble du panel, le juge considéré (juge 3) perçoit une baisse d’intensité de manière plus lente que les autres juges (croissance plus importante et décroissance plus faible). La transformation u (ici, u_3) va donc décélérer sa perception au début du signal. A titre de comparaison, les résultats concernant le juge 1 sont représentés dans la figure 4.5. Ce juge est complètement différent du juge 3, il perçoit une augmentation lente et une baisse plus rapide. La transformation u_1 va donc accélérer sa perception au début du signal.

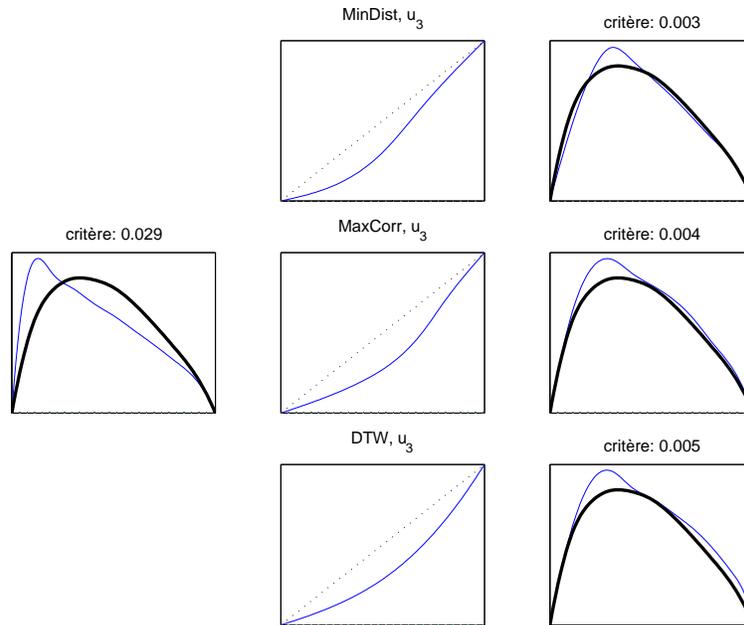


FIGURE 4.4 – Données chocolats, méthodes d’alignement pour le juge 3. À gauche, signature du juge (en gras signature globale et c valeur du critère $\|f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes dans le but d’aligner sa signature sur la signature globale. À droite, signal ajusté par les différentes méthodes.

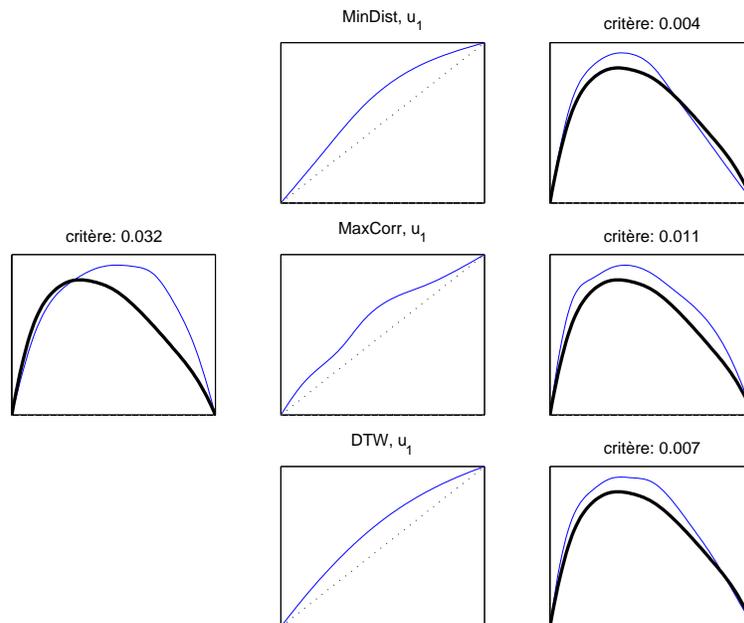


FIGURE 4.5 – Données chocolats, méthodes d’alignement pour le juge 1. À gauche, signature du juge (en gras signature globale et c valeur du critère $\|f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes dans le but d’aligner sa signature sur la signature globale. À droite, signal ajusté par les différentes méthodes.

La figure 4.6 montre les résultats d'alignements pour l'ensemble du panel pour les trois méthodes et le tableau 4.1 récapitule la valeur du critère (distance moyenne entre les signatures, initiales ou ajustées, pour l'ensemble du panel et la signature globale). Globalement les transformations obtenues sont proches et celles obtenues par *Max Corr* mènent à des résultats moins satisfaisants.

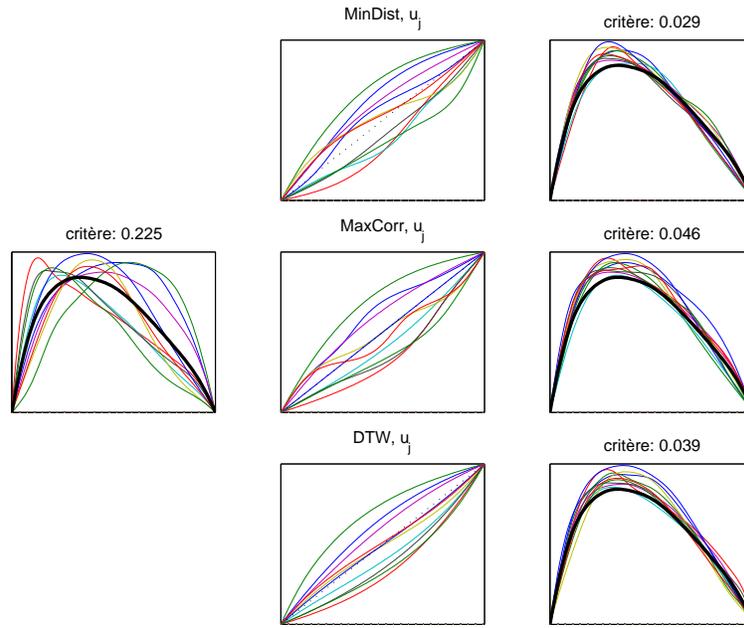


FIGURE 4.6 – Données chocolats, méthodes d'alignement pour l'ensemble des juges. A gauche, signatures des juges (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \|f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes. A droite, signaux ajustés par les différentes méthodes.

Les résultats et conclusions sont similaires lorsque les méthodes d'alignement sont appliquées à l'étude de cas sur les fromages. La figure 4.7 montre les résultats d'alignements pour l'ensemble du panel pour les trois méthodes et le tableau 4.2 récapitule la valeur du critère (distance moyenne entre les signatures (initiales ou ajustées) pour l'ensemble du panel et la signature globale). En résumé, il ressort des deux tableaux 4.1 et 4.2 que, bien que les résultats obtenus par les différentes procédures se recoupent dans une large mesure sur la base des deux études de cas, la première (*Min Dist*) conduit à un meilleur ajustement. Par la suite, les ajustements seront effectués grâce à cette procédure.

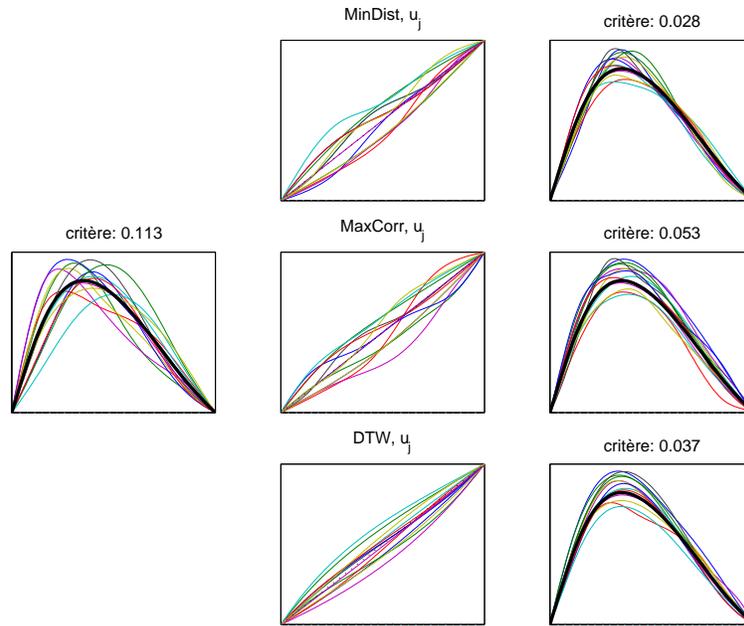


FIGURE 4.7 – Données fromages, méthodes d’alignement pour l’ensemble des juges. A gauche, signatures des juges (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \|f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$). Au centre, transformations obtenues par les différentes méthodes. A droite, signaux ajustés par les différentes méthodes.

méthodes d’alignement	critère $\sum_{j=1}^m \ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$
initial	0,225
<i>Min Dist</i>	0,029
<i>Max Corr</i>	0,046
DTW	0,039

TABLEAU 4.1 – Données chocolats, valeur du critère $\sum_{j=1}^m \|f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$ pour les différentes méthodes d’alignement.

méthodes d’alignement	critère $\sum_{j=1}^m \ f_j \circ u_j - \bar{f}\ ^2$
initial	0,113
<i>Min Dist</i>	0,028
<i>Max Corr</i>	0,053
DTW	0,037

TABLEAU 4.2 – Données fromages, valeur du critère $\sum_{j=1}^m \|f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$ pour les différentes méthodes d’alignement.

4.3.2 Résultats de la procédure globale d'alignement

Sur la base des études de cas que nous avons considérées, nous avons remarqué que la fonction de perte (équation 4.1) décroît graduellement au cours de l'algorithme et se stabilise très vite (moins de 5 itérations). Nous pouvons également souligner que les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus après la procédure d'alignement qui a été proposée sur des bases intuitives dans les paragraphes précédents. Les figures 4.8 et 4.9 montrent les résultats d'alignements respectivement pour les deux juges du paragraphe précédent et pour l'ensemble du panel et le tableau 4.3 récapitule la valeur des critères.

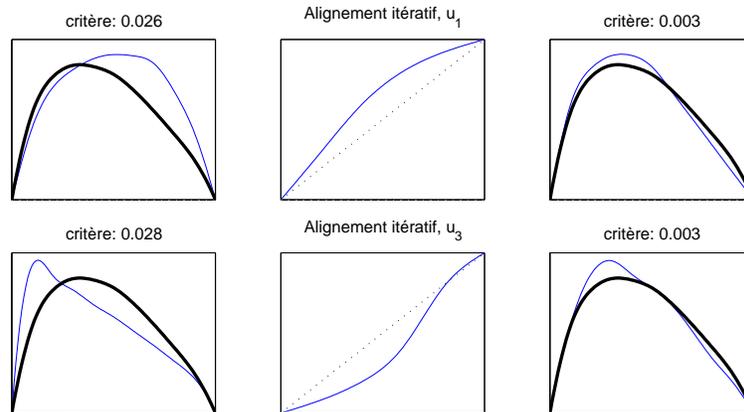


FIGURE 4.8 – Données chocolats, alignement pour les juges 1 et 3 par l'algorithme itératif. A gauche, signatures des juges multipliées par ρ_j (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \|\rho_j f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$). Au centre, transformations obtenues. A droite, signaux ajustés et valeur du critère.

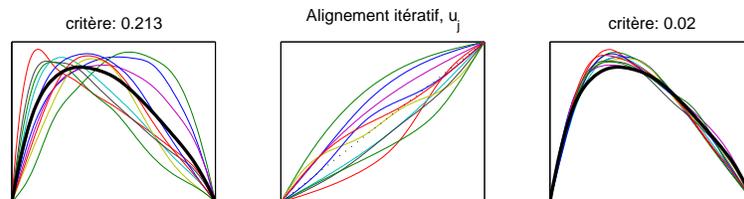


FIGURE 4.9 – Données chocolats, alignements pour l'ensemble des juges par l'algorithme itératif. A gauche, signatures des juges multipliées par ρ_j (en gras signature globale et c valeur du critère $\sum_j \|\rho_j f_j \circ u_j - \bar{f}\|^2$). Au centre, transformations obtenues. A droite, signaux ajustés et valeur du critère.

En résumé, il ressort que les résultats obtenus se recoupent dans une large mesure ce qui confirme la validité de l'idée intuitive présentée précédemment. Néanmoins, ce nouvel algorithme d'alignement nous donne accès à des informations complémentaires, en particulier aux coefficients ρ_j (figure 4.10, à gauche). Nous pouvons remarquer que ces facteurs d'échelle ne diffèrent pas de manière significative (valeurs proches

	critère
	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \ \rho_j f_{ij} \circ u_j - f_i\ ^2$
initial	1,849
procédure itérative	0,472

TABLEAU 4.3 – *Données chocolats, valeur du critère $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \|\rho_j f_{ij} \circ u_j - f_i\|^2$ avant et après la procédure itérative d’alignement.*

de 1). Ceci vient du fait que les courbes ont été préalablement standardisées pour réaliser un alignement sur la base des squelettes. Afin de souligner l’idée que ces facteurs ρ_j reflètent également un aspect lié à la performance des juges, nous avons comparé ces coefficients avec les coefficients α_j (paragraphe 3.4) obtenus en comparant les coefficients splines associés aux courbes des juges ajustées pour tous les produits. Comme cela a été discuté dans le chapitre 1, ces coefficients α_j reflètent l’accord des juges avec le point de vue global du jury. Il ressort de la figure 4.10 qui compare les coefficients ρ_j et α_j que ces coefficients varient dans le même sens sauf pour le juge 8.

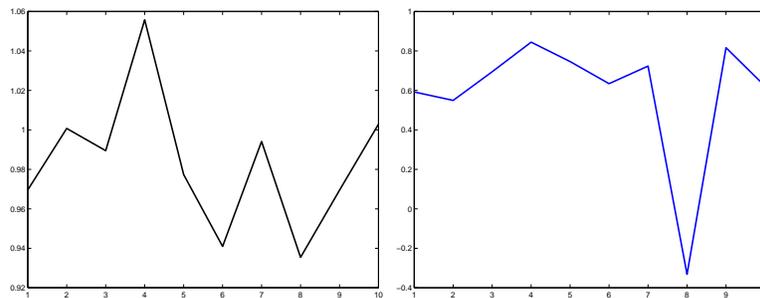


FIGURE 4.10 – *Données chocolats, coefficients ρ_j (à gauche) et α_j (à droite) pour les dix juges.*

4.3.3 Résultats de la validation

Dans ce paragraphe, nous avons cherché à valider la procédure d’alignement effectuée sur les données boissons chocolatées. Le tableau 4.4 montre les indicateurs d’accord entre les juges avant et après la procédure d’alignement par l’algorithme itératif. L’accord a augmenté pour l’ensemble du panel ainsi que pour la majorité des juges. La procédure d’alignement a donc permis de mettre en évidence des signaux ajustés sur lesquels les juges sont en accord les uns avec les autres. Seul le juge 8 reste différent des autres. La procédure d’alignement, ne peut en effet pas changer les évaluations, si le juge n’est pas du tout en accord avec les autres membres du panel. En toute rigueur, il conviendrait de refaire les analyses en écartant ce juge.

Nous avons ensuite tracé la carte factorielle (premier plan principal) de l’ACP des squelettes attribués à chaque juge et à chaque produit, en mettant à l’écart les

Juges	α_i avant alignement	α_j après alignement par algorithme itératif
1	0,51	0,59
2	0,19	0,55
3	0,61	0,70
4	0,86	0,88
5	0,61	0,75
6	0,55	0,61
7	0,79	0,71
8	-0,30	-0,33
9	0,65	0,81
10	0,66	0,62
	γ avant alignement	γ après alignement par algorithme itératif
jury	0,51	0,59

TABLEAU 4.4 – Données ‘boissons chocolatées’: Etude de performance des juges et du jury.

données du juge 8. Il est possible de réaliser une ACP sur les coefficients splines associés à chaque courbe ou d'utiliser l'ACP telle qu'elle est définie dans le cadre de données fonctionnelles (Besse et Cardot, 2003; Ramsay et Silverman, 1997). Les résultats se rejoignent dans une très large mesure. Les résultats pour les squelettes initiaux et pour les squelettes ajustés sont représentés respectivement dans les figures 4.11 et 4.12 (ACP sur données fonctionnelles).

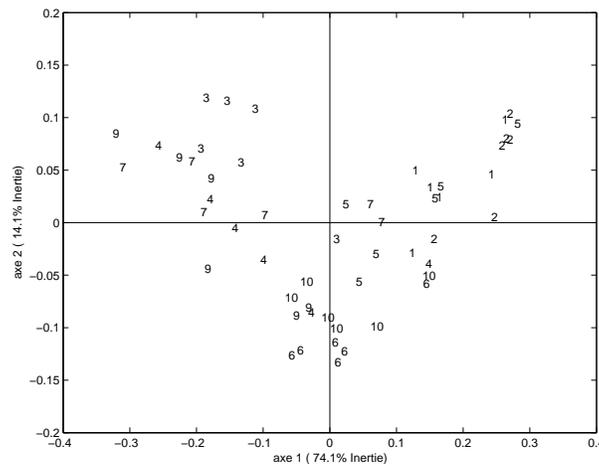


FIGURE 4.11 – Premier plan factoriel de l'ACP des courbes associées aux juges et aux produits. Seuls les numéros associés aux juges sont indiqués.

La figure 4.11 (resp. 4.12) représente le premier plan factoriel de l'ACP des courbes standardisées (resp. standardisées et ajustées à l'aide de la procédure d'ali-

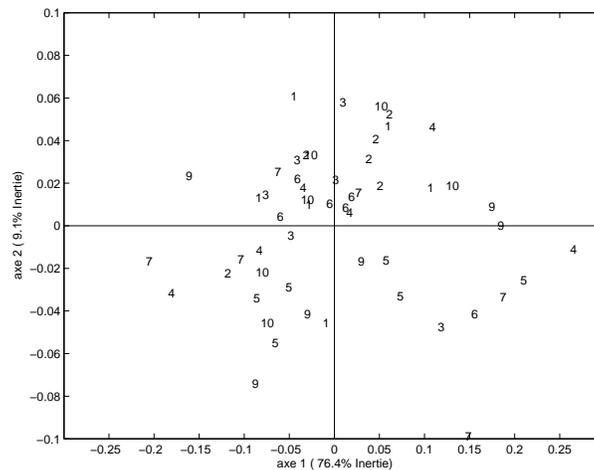


FIGURE 4.12 – Premier plan factoriel de l'ACP des courbes ajustées associées aux juges et aux produits. Seuls les numéros associés aux juges sont indiqués.

gnement) associées aux juges et aux produits. La proximité des courbes associées au même juge dans la figure 4.11 indique clairement que c'est l'effet juge qui est prédominant dans le tableau des courbes standardisées. Cet effet a été très significativement réduit grâce à la procédure d'alignement (figure 4.12) et la caractérisation des trois produits est alors possible (cf paragraphe suivant).

Enfin, la procédure de permutations valide la démarche (figure 4.13). En effet, la distance entre les courbes ajustées et les courbes moyennes par produit vaut 0,47 alors que sans alignement, cette valeur était 1,85. Pour l'ensemble des permutations simulées, nous obtenons dans tous les cas une valeur supérieure à 0,47 (figure 4.13). Enfin, nous nous sommes intéressés à l'indicateur global de performance (figure 4.14). Celui-ci valait initialement 0,51 et a atteint 0,59 après la procédure d'alignement. Lorsque la procédure de permutation a été effectuée sur les juges, l'accord du panel a été dans tous les cas inférieur à 0,42. Ces résultats confirment l'hypothèse que la procédure d'alignement permet de réduire la distance entre les courbes et augmenter l'accord entre les juges seulement si des signatures sont présentes parmi les membres du jury.

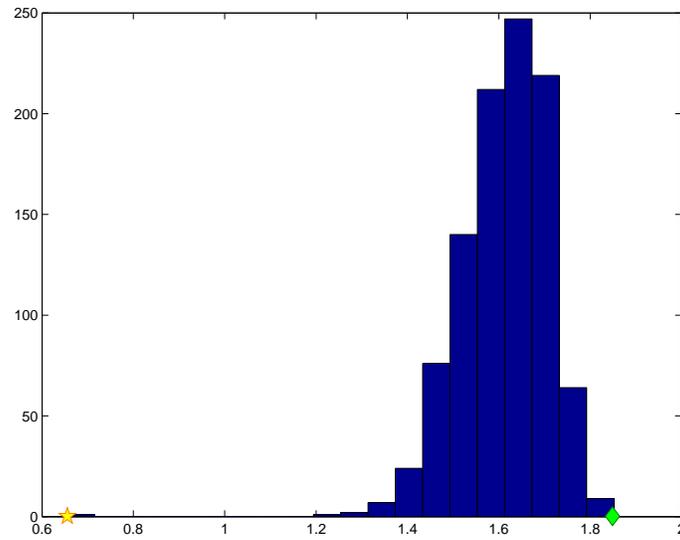


FIGURE 4.13 – *Donnes chocolats, distance entre les courbes des juges ajustées (par l'algorithme itératif) et la courbe moyenne pour chaque produit (600 permutations). L'étoile correspond à la valeur dans le cas non permuté et le diamant à la valeur initiale avant la procédure d'alignement.*

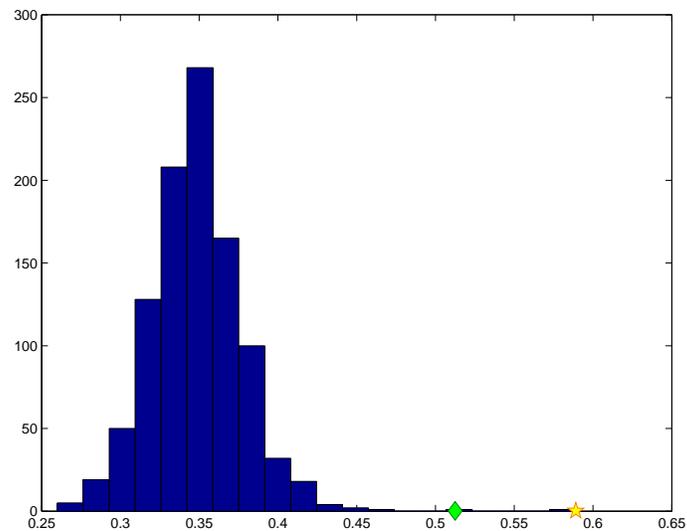


FIGURE 4.14 – *Donnes chocolats, valeur de l'accord global du panel sur la forme des signaux (600 permutations). L'étoile correspond à la valeur dans le cas non permuté et le diamant à la valeur initiale avant la procédure d'alignement.*

4.3.4 Caractérisation des produits

Nous avons montré que la procédure d'alignement réduit effectivement l'effet juge présent dans les signatures des juges. Une fois celui-ci réduit, nous pouvons nous focaliser sur la caractérisation des produits par leur squelette. La figure 4.15 montre le résultat de l'ACP des courbes ajustées associées aux juges et aux produits, dans l'étude de cas sur les boissons chocolatées (ACP sur objet fonctionnel). Le premier axe principal oppose les produits 3 et 6 aux produits 1, 2 et 4. Le produit 5 est intermédiaire. L'axe 1 est caractérisé par des courbes à croissance rapide et décroissance lente (75% du temps de perception) à gauche et par des courbes à croissance modérée et à décroissance rapide après un maximum avec plateau au milieu de la perception (4.16). Les produits 1, 2 et 4 sont donc caractérisés par saveur sucrée qui apparaît rapidement au début de la perception et qui disparaît lentement. A l'opposé, les produits 3 et 6 sont ont une saveur sucrée qui s'atténue plus tardivement mais de manière plus brève.

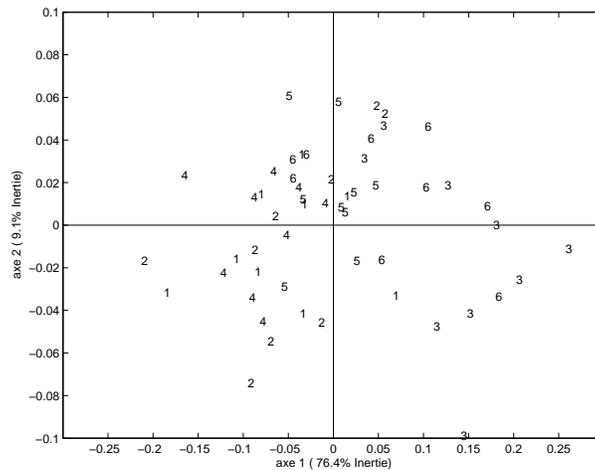


FIGURE 4.15 – Premier plan factoriel de l'ACP des courbes ajustées. Seuls les numéros des produits sont indiqués.

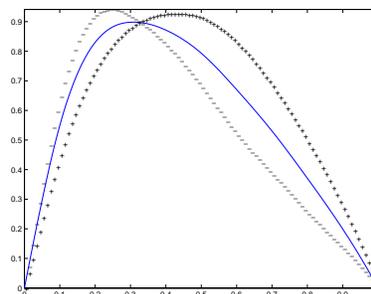


FIGURE 4.16 – Descriptif du premier axe principal dans l'ACP des courbes ajustées.

Conclusion

Dans les deux chapitres précédents, nous avons abordé le cas de données sensorielles de type Temps Intensité en mettant en avant la présence d'une grande variabilité interindividuelle. Celle-ci existe dans les études sensorielles conventionnelles (profils fixes) et est encore plus présente dans les études TI. Elle se manifeste par la présence d'une signature propre à chaque juge. Elle peut être due à des différences physiologiques et des différences dans la manière de retranscrire l'information. Le but est donc de définir cette variabilité et de la réduire pour se focaliser sur la caractérisation des produits. Dans cette perspective, nous avons développé une procédure d'alignement qui permet de déterminer une transformation du temps propre à chaque juge de nature à réduire les variations entre les juges. La fonction de perte associée à cette stratégie d'analyse s'inspire de celle de GPA (Generalized Procrustes Analysis) et l'algorithme de résolution consiste en un algorithme itératif qui utilise, entre autres, une adaptation de la procédure COW (Correlation Optimisation Warping) pour l'alignement de deux courbes. Une procédure de permutation permet de valider la pertinence de la démarche générale.

Une fois l'effet juge réduit, la caractérisation des produits devient plus pertinente.

Chapitre 5

Données sensorielles au cours du temps et chaînes de Markov

Introduction

Comme cela a été indiqué en introduction, l'analyse sensorielle est utilisée pour le développement et l'amélioration des produits et également pour le suivi de la qualité des produits. Cela permet, entre autres, d'évaluer la date limite de consommation et l'évolution de la qualité des produits en fonction du temps. Dans beaucoup de situations, le vieillissement se manifeste par une dégradation des produits sur le plan organoleptique. C'est pourquoi il est préconisé de procéder à des évaluations sensorielles des produits à différents intervalles de temps. Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons à l'évaluation sensorielle effectuée par un jury entraîné qui est appelé à s'exprimer sur la qualité d'un ou plusieurs produits à intervalles de temps réguliers. L'évaluation consiste à attribuer aux produits des états exprimant un niveau de fraîcheur allant de 'très frais' à 'impropre à la consommation'.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, le protocole expérimental qui est à la base de cette étude est utilisé pour la détermination de la date limite de consommation. Des analyses statistiques usuellement proposées dans ce cadre sont basées sur des modèles de survie (Hough *et al.*, 2003; Curia *et al.*, 2005; Salvador *et al.*, 2005; Hough *et al.*, 2006). Cependant, leur objectif est relativement restreint en ce sens qu'ils visent à déterminer la date à partir de laquelle les produits deviennent impropres à la consommation. L'approche discutée ici permet d'avoir une vision dynamique de l'évolution des produits.

Nous considérons les différentes modalités (par exemple, de 'très frais' à 'très dégradé') comme étant des états d'une chaîne de Markov homogène et, pour chaque produit, nous ajustons un modèle markovien de premier ordre. L'accent est mis sur les tests d'hypothèses mis en oeuvre pour juger de l'adéquation du modèle et la comparaison des produits. Afin d'avoir une vision globale de l'évolution des produits sur la base d'une représentation graphique, nous proposons d'effectuer une analyse factorielle des correspondances (AFC) sur un tableau de données obtenu à partir des modèles

associés aux différents produits.

Il est à souligner que la modélisation à l'aide d'une chaîne de Markov suppose que les juges sont cohérents dans leur évaluation, en ce sens qu'ils attribuent au produit considéré une suite d'états compatibles avec le sens de la dégradation. En pratique, ceci n'est pas garanti. Afin de pallier ce problème, nous proposons d'utiliser des chaînes de Markov cachées, dans le dernier sous chapitre (5.4). Ceci permet d'éviter des prétraitements fastidieux sur les données. La démarche générale est illustrée sur la base de deux études de cas décrits dans le sous chapitre 5.1.

5.1 Description des données

m juges entraînés ont évalué R produits à des temps $t = 0, 1, \dots, T$. L'évaluation de chacun des juges pour un produit donné consiste à attribuer une modalité exprimant l'état de fraîcheur du produit allant de 'très frais' à 'impropre à la consommation'. Dans la suite, ces modalités (états) sont notées $1, 2, \dots, N$.

Le plus souvent, l'évolution organoleptique des produits se traduit par une dégradation du fait de la prolifération micro-biologique. Bien évidemment, il y a des exceptions à cette règle comme c'est le cas de certains vins. Dans la suite, nous allons considérer que les évaluations au cours du temps données par un juge pour un produit reflètent une dégradation. Dans cette perspective, un prétraitement des données a été effectué pour pallier quelques inconsistances des juges. Ce prétraitement a consisté à imposer pour les évaluations de chaque juge à avoir une suite croissante d'états allant dans le sens de la dégradation du produit considéré. Ainsi, si pour l'évaluation d'un produit, un juge donne, par exemple, la suite d'états (2,1,2), celle-ci a été transformée en (2,2,2). Nous évoquerons dans le sous chapitre 5.4 une solution alternative à ce prétraitement. La démarche générale est illustrée sur la base de deux études de cas.

Les données "saumons fumés"

Une analyse sensorielle a été conduite à l'IFREMER (Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer) sur six saumons différents (notés **A**, **B**, ..., **F**). 33 juges ont ainsi évalué l'altération de ces saumons en considérant trois états: 'frais', 'dégradé' et 'très dégradé' (notés dans la suite: 1, 2 et 3) pendant 6 semaines ($t = 0, \dots, 5$). La figure 5.1 représente la proportion des notes au cours du temps pour chaque produit. On peut noter que toutes les évaluations ne commencent pas à 'frais' et que les produits **A** et **C** n'ont jamais été observés dans un état 'très dégradé'.

Les données "produit déshydraté"

Une évaluation sensorielle a été conduite par une entreprise agro-alimentaire pour déterminer la durée de vie d'un produit déshydraté conservé dans des conditions

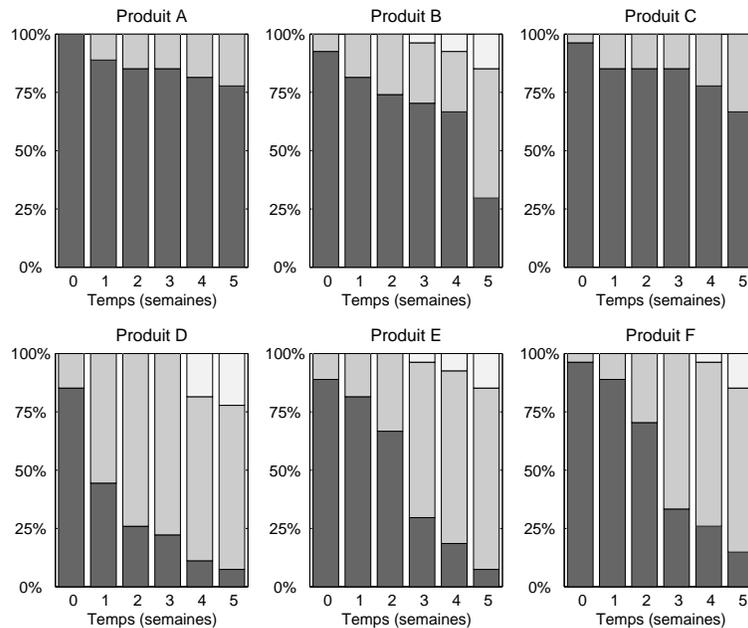


FIGURE 5.1 – *Pourcentage des évaluations des catégories ‘frais’ (couleur sombre), à ‘très dégradé’ (couleur claire) pour les produits A à F au cours du temps .*

d’entreposage différentes (réfrigérateur ou à température ambiante). Trois attributs sensoriels (odeur, flaveur et apparence) ont été évalués par six juges en considérant 5 états correspondant à des niveaux de dégradation allant de 1 (‘très bien’) à 5 (‘très dégradé’). L’étude de cas est décrite avec plus de détails par Freitas *et al.* (2003). Nous ne considérons ici que les données des 30 premières semaines ($t = 0, \dots, 29$) car les données des semaines suivantes comportent beaucoup de valeurs manquantes. La figure 5.2 représente la proportion des notes (de ‘très bien’ à ‘très dégradé’) au cours du temps pour chaque attribut. Pour le produit conservé au réfrigérateur, les trois attributs restaient dans le même état (‘très bien’) pendant les 30 premières semaines, nous n’avons donc représenté dans la figure 5.2 qu’un seul attribut (flaveur).

5.2 Les chaînes de Markov

A chaque produit (ou chaque attribut), nous proposons d’associer une chaîne de Markov qui reflète sa dégradation. S’agissant d’un jury entraîné censé donner des évaluations homogènes, il est possible d’estimer les paramètres du modèle (matrice de transition) en agrégeant les évaluations des juges. En d’autres termes, la probabilité de transition d’un état i à un état j (pour i et j allant de 1 à N) est estimée

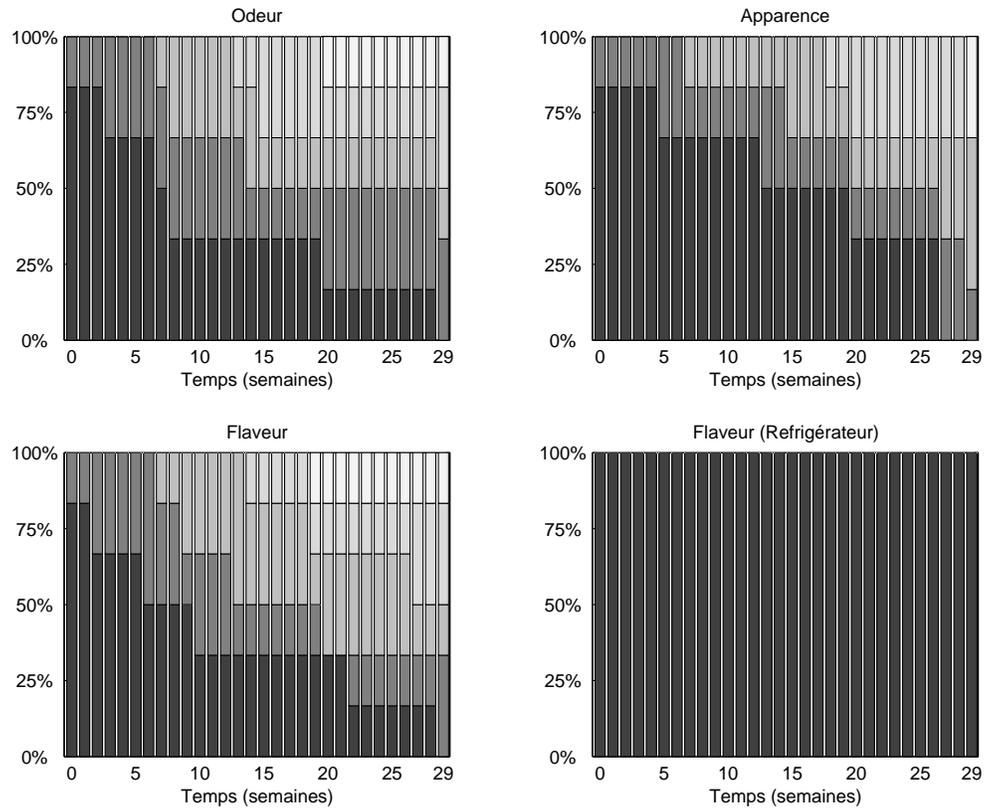


FIGURE 5.2 – Pourcentage des évaluations des cinq catégories ‘très bien’ (couleur sombre), à ‘très dégradé’ (couleur claire) pour chaque attribut au cours du temps .

par:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} n_{ij}(t)}{\sum_{t=0}^{T-1} n_{i.}(t)} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} n_{ij}(t)}{\sum_{k=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} n_{ik}(t)}.$$

où:

- $n_{i.}(t)$ le nombre de fois où le produit est dans l'état i à la date t ($t = 0, \dots, T - 1$).
- $n_{ij}(t)$ le nombre de fois où le produit est passé de l'état i à la date t à l'état j à la date $t + 1$ ($t = 0, \dots, T - 1$)

Afin de fixer les idées, nous illustrons la démarche d'estimation des probabilités de transition sur la base des données concernant le saumon **B**. Le tableau 5.1 donne les différentes évaluations de neuf juges au cours du temps. Les tableaux 5.2.a, 5.2.b et 5.2.c illustrent le calcul de $n_{ij}(t)$ (pour $t=0$ et pour les neuf juges considérés), le calcul des effectifs n_{ij} obtenus en cumulant les effectifs $n_{ij}(t)$ pour $t = 0, \dots, T - 1$ et enfin, les estimations \hat{p}_{ij} obtenues à partir des profils lignes de la table 5.2.b.

Date	jugé 1	jugé 2	jugé 3	jugé 4	jugé 5	jugé 6	jugé 7	jugé 8	jugé 9
t=0	1	1	2	1	1	1	1	1	1
t=1 semaine	1	1	2	1	1	2	2	1	2
t=2 semaines	1	1	2	2	1	2	2	2	2
t=3 semaines	1	2	3	2	1	2	2	2	2
t=4 semaines	2	2	3	2	1	3	2	2	2
t=5 semaines	3	2	3	3	2	3	2	2	2

TABLEAU 5.1 – Suivi du saumon **B** par neuf juges.

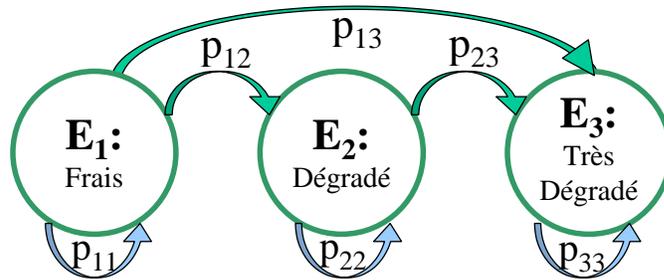
$n_{ij}(t)$	j			$n_{i.}(t)$	n_{ij}	j			$n_{i.}$	\hat{p}_{ij}	j			$p_{i.}$
à t=0	1	2	3			1	2	3		ou $\frac{n_{ij}}{n_{i.}}$	1	2	3	
$i=1$	5	3	0	8	$i=1$	11	8	0	19	$i=1$	0,58	0,42	0	1
$i=2$	0	1	0	1	$i=2$	0	19	4	23	$i=2$	0	0,83	0,17	1
$i=3$	0	0	0	0	$i=3$	0	0	3	3	$i=3$	0	0	1	1
$n_{.j}(t)$	5	4	0	9	$n_{.j}$	11	27	7	45	$p_{.j}$	0,58	1,25	1,17	

2.2 - a.

2.2 - b.

2.2 - c.

TABLEAU 5.2 – a. Tableau de contingence indiquant le nombre de fois que le produit **B** est passé de l'état i à l'instant $t = 0$ à l'état j à l'instant $t = 1$ ($i, j = 1, 2, 3$) pour les évaluations des neuf juges du tableau 5.1. 5.2-b. Cumul des tables $n_{ij}(t)$ pour $t = 0, \dots, 4$. 5.2-c. Profils lignes: estimation de la matrice de transition.

FIGURE 5.3 – Graphe des transitions possibles d'une chaîne de Markov pour $N = 3$.

Du fait de l'hypothèse de dégradation irréversible des produits au cours du temps, les matrices de transition associées aux produits sont nécessairement triangulaires (supérieures). A titre illustratif, la figure 5.3 représente les différents états ($N = 3$) et les flèches indiquent les transitions possibles avec leur probabilité respective. Une fois les paramètres du modèle estimés, nous pouvons réaliser des tests sur l'ordre de la chaîne de Markov ainsi que des tests d'homogénéité des produits.

5.2.1 Les tests d'hypothèses

Préalablement à l'exploration des données à l'aide du modèle Markovien, il convient d'évaluer la validité de ce modèle et de déterminer l'ordre de la chaîne de Markov. Les tests d'hypothèses appropriés à cette situation sont discutés dans plusieurs références (Basawa et Rao, 1980; Anderson et Goodman, 1957), ceux-ci ont été adaptés au contexte de la présente étude (matrices triangulaires). Pour la détermination de l'ordre de la chaîne de Markov, il est préconisé de procéder de manière séquentielle en testant, dans un premier temps, si la chaîne est d'ordre 0 ($p_{ij} = p_{i'j}$ pour tout i, i' dans $\{1, 2, \dots, N\}$) contre l'hypothèse alternative stipulant que la chaîne est d'ordre supérieur ou égal à 1. Par la suite, l'hypothèse stipulant un ordre 1 est testée contre l'hypothèse stipulant un ordre supérieur ou égal à 2. Considérons dans un premier temps la situation:

$H_0^{(1)}$: l'ordre de la chaîne est 0.

$H_1^{(1)}$: l'ordre de la chaîne est supérieur ou égal à 1.

L'hypothèse $H_0^{(1)}$ reflète l'idée qu'il n'y a pas d'évolution dans le temps pour le produit considéré ($p_{ij} = p_{i'j}$ pour tout i, i' dans $\{1, 2, \dots, N\}$) alors que l'hypothèse $H_1^{(1)}$ signifie que le processus a une 'mémoire': la probabilité pour un produit d'arriver dans un état dépend de l'état dans lequel il se trouve au moment précédent. Dans la pratique, deux statistiques de tests sont proposées pour départager les deux

hypothèses. La première statistique est donnée par:

$$K_{O1} = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^N n_{ij} \ln \left(\frac{n_{ij} n_{..}}{n_{i.} n_{.j}} \right)$$

où $n_{.j} = \sum_{i=1}^N n_{ij}$ et $n_{..} = \sum_{j=1}^N n_{.j}$

Alternativement, nous pouvons utiliser un test de χ^2 basé sur:

$$K_{O2} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^N \frac{(n_{ij} - n_{i.} n_{.j} / n_{..})^2}{n_{i.} n_{.j} / n_{..}}$$

Pour les statistiques considérées, il est à noter que les sommes sont restreintes aux cas $i \leq j$ car pour $i > j$, $n_{ij} = 0$. De manière générale, il est démontré que les statistiques de test suivent, sous l'hypothèse $H_0^{(1)}$, une loi de χ^2 à $N(N-1)$ (Basawa et Rao, 1980). Dans le présent contexte, où les matrices considérées sont triangulaires, nous pouvons montrer que le degré de liberté est égal à $\frac{N(N-1)}{2}$. En effet, la marge ligne du tableau (n_{ij}) est constante et fixée à 1 et les éléments en dessous de la diagonale sont nuls. Le nombre de degré de libertés est égal à soit $\frac{N(N+1)}{2} - 1$ auquel est soustrait le nombre de termes associés à la marge ligne (soit $N-1$). En définitive, le nombre de degrés de libertés est égal à $d = \frac{N(N+1)}{2} - 1 - (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$.

Si à l'issue du test d'hypothèses, $H_0^{(1)}$ est rejetée, nous pouvons considérer la nouvelle situation de tests d'hypothèses:

$H_0^{(2)}$: l'ordre de la chaîne est 1.

$H_1^{(2)}$: l'ordre de la chaîne est supérieur ou égal à 2.

Deux statistiques sont proposées pour départager les hypothèses. Elles sont respectivement données par:

$$K_{O3} = 2 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^N n_{ijk} \ln \left(\frac{n_{ijk} n_{.j}}{n_{ij} n_{.jk}} \right)$$

$$K_{O4} = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^N \frac{(n_{ij} n_{.jk} / n_{.j} - n_{ijk})^2}{n_{ij} n_{.jk} / n_{.j}}$$

avec $n_{ijk} = \sum_{t=0}^{T-2} n_{ijk}(t)$ et $n_{ijk}(t)$ le nombre de fois où le produit est passé de l'état i à la date t à l'état j à la date $t+1$ puis à l'état k à la date $t+2$ ($i, j, k = 1, \dots, N$ et $t = 0, \dots, T-2$). Le terme $n_{.jk}$ est égal à $\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-2} n_{ijk}(t)$.

Sous $H_0^{(2)}$, ces deux statistiques sont asymptotiquement distribuées selon des lois de χ^2 et pour la situation considérée ici, nous pouvons vérifier que le nombre de degrés de libertés est égal à $\frac{N(N+1)(N-1)}{6}$.

Le fait de rejeter $H_0^{(1)}$ dans le premier test et de ne pas rejeter $H_0^{(2)}$ dans le second test procure une raison suffisante, dans le cadre considéré ici, pour adopter un modèle markovien d'ordre 1, même si ces deux derniers tests ne prouvent pas que le modèle considéré est effectivement un modèle Markovien du premier ordre. Ceci est d'autant plus vrai que le second test étant conditionné au rejet de l'hypothèse $H_0^{(1)}$, a en vérité un risque d'erreur supérieur au seuil de signification fixé.

Dans la suite, nous supposons qu'un modèle associé à une chaîne de Markov d'ordre 1 a été validé. De ce fait, l'évolution de la dégradation du produit \mathbf{r} peut être régie par une matrice de transition que nous désignons par $\mathbf{P}^{(r)}$ ($r = 1, \dots, \mathbf{R}$). Naturellement, l'utilisateur est intéressé par la possibilité d'évaluer si les produits constituent un ensemble homogène en ce sens que leurs dégradations au cours du temps sont similaires. Ceci revient en définitive à mettre en balance les deux hypothèses suivantes:

$H_0^{(3)}$: les produits sont homogènes i.e. $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)} = \dots = \mathbf{P}^{(\mathbf{R})}$

$H_1^{(3)}$: au moins un des produits a une matrice de transition différente des autres.

Sous $H_0^{(3)}$, tous les produits ont la même matrice de transition et une matrice de transition "moyenne" est déterminée en agrégeant tous les produits. En adoptant les mêmes notations que précédemment, les statistiques proposées pour tester $H_0^{(3)}$ contre $H_1^{(3)}$ (Collins, 1974; Basawa et Rao, 1980) sont définies par:

$$K_{H1} = 2 \sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} \sum_{i,j=1}^N n_{ij}^{(\mathbf{r})} \ln \left(\frac{n_{ij}^{(\mathbf{r})}}{n_i \hat{p}_{ij}^{(0)}} \right)$$

$$K_{H2} = \sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} \sum_{i,j=1}^N \frac{(n_{ij}^{(\mathbf{r})} - n_i \hat{p}_{ij}^{(0)})^2}{n_i \hat{p}_{ij}^{(0)}}$$

avec

$$\hat{p}_{ij}^{(0)} = \frac{\sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} n_{ij}^{(\mathbf{r})}}{\sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} n_i^{(\mathbf{r})}}$$

Ici, l'exposant (\mathbf{r}) réfère au produit \mathbf{r} ($\mathbf{r} = 1, \dots, \mathbf{R}$). Sous $H_0^{(3)}$, les statistiques considérées suivent asymptotiquement une loi de χ^2 à $\frac{N(N-1)}{2}(\mathbf{R} - 1)$ degrés de liberté.

5.2.2 Différences entre les produits

Si à l'issue du test d'hypothèses relatif à l'homogénéité des produits, nous sommes conduits à rejeter l'hypothèse nulle, il convient de 'localiser' les différences en identifiant quels sont les produits qui sont différents et en quoi ils sont différents. Un test d'homogénéité en considérant les produits deux par deux peut s'avérer fastidieux lorsque le nombre de produits est relativement important. Comme alternative, nous

proposons une démarche exploratoire basée sur l'analyse factorielle des correspondances (AFC).

Considérons un produit \mathbf{r} ($\mathbf{r} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{R}$) auquel est associée la matrice de transition $\mathbf{P}^{(\mathbf{r})}$. Le vecteur ligne $\mu_0 = (1, 0, \dots, 0)$ est le vecteur d'état initial qui indique que le produit considéré est dans un très bon état de fraîcheur. Le vecteur d'état à l'instant t ($t > 0$) est obtenu par la relation bien connue $\mu_t = \mu_{t-1}\mathbf{P}^{(\mathbf{r})}$.

Soit la matrice $\mathbf{M}^{(\mathbf{r})}$ de dimensions $(T + 1, N)$ définie par:

$$\mathbf{M}^{(\mathbf{r})} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \dots \\ \mu_T \end{pmatrix}$$

Les lignes de cette matrice correspondent au temps qui peut éventuellement être fixé à un horizon supérieur à celui de l'experimentation (prédiction) et les colonnes correspondent aux différents états. Afin d'étudier l'évolution de la dégradation du produit considéré nous proposons d'effectuer une AFC sur la matrice $\mathbf{M}^{(\mathbf{r})}$.

Lorsque l'étude comporte plusieurs produits, il est possible de comparer l'évolution des dégradations des différents produits. Pour cela, nous proposons de concaténer verticalement les matrices $\mathbf{M}^{(\mathbf{r})}$ ($\mathbf{r} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{R}$) associés aux différents produits, et de faire l'AFC de la matrice \mathbf{M} associée qui est de dimensions $(\mathbf{R} * (T + 1), N)$.

5.3 Résultats

5.3.1 Saumons fumés

Rappelons que cette étude de cas concerne l'évolution de la dégradation de sept saumons fumés désignés par $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{G}$, pendant 5 semaines. Pour cela, trois états ont été considérés: 'frais', 'dégradé' et 'très dégradé'. Pour chacun des produits, nous avons estimé les probabilités de transition d'un état à l'autre. A titre illustratif, la matrice de transition pour le produit \mathbf{D} est donnée par:

$$\mathbf{P}^{(\mathbf{D})} = \begin{bmatrix} 0,59 & 0,39 & 0,02 \\ 0 & 0,94 & 0,06 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les résultats du test mettant en balance $H_0^{(1)}$: ordre de la chaîne égal à 0 contre $H_1^{(1)}$: ordre de la chaîne supérieur ou égal à 1, sont consignés dans le tableau 5.3. Pour tous les produits, l'hypothèse $H_0^{(1)}$ est rejetée au seuil $\alpha = 0,05$. Ceci nous amène à tester l'hypothèse $H_0^{(2)}$: ordre de la chaîne égal à 1 contre $H_1^{(2)}$: ordre de la chaîne supérieur ou égal à 2. Les résultats concernant ce test d'hypothèses sont présentés dans le tableau 5.4. Tous ces tests ne préconisent pas de rejeter $H_0^{(2)}$ pour le seuil $\alpha = 0,05$. Ce constat confirme la possibilité d'utiliser des chaînes de Markov d'ordre 1 pour modéliser la dégradation des différents produits considérés.

Sur la base des matrices de transition associées aux différents produits, nous avons effectué un test d'homogénéité des sept produits considérés et il s'est révélé que ces sept produits ne peuvent pas être considérés comme étant homogènes pour une erreur de première espèce égale à 0,05 (tableau 5.5).

En utilisant la matrice de transition associée à chaque produit, nous avons simulé l'évolution de la dégradation des produits au cours du temps en déterminant de manière récurrente les vecteurs d'états aux différents instants. Tous ces vecteurs d'états (associés aux différents produits pour les différents instants) ont été disposés dans un tableau comme indiqué dans le paragraphe 5.2.2 et le tableau ainsi obtenu de dimensions $(R*(T+1), N)$ avec $R = 6$, $T = 5$ et $N = 3$ a été soumis à une AFC. Il est à souligner que le premier axe factoriel restitue à lui seul 92,8% de l'inertie. Le tableau soumis à l'AFC ayant trois colonnes, il s'ensuit que le plan factoriel (figure 5.4) restitue 100% de l'inertie. De la figure 5.4 se dégage de manière évidente un effet Guttman qui découle très vraisemblablement de la structure des matrices de transition considérées ici (matrices triangulaires). Le premier axe factoriel représente un gradient de dégradation allant de 'frais' à 'très dégradé'. Il apparaît que les produit **A** et **C** sont très proches et conservent une bonne qualité jusqu'à 5 semaines d'entreposage. A l'opposé les produits **D**, **E** et **F** quittent rapidement l'état 'frais' pour rester dans un état 'dégradé' intermédiaire avant de se dégrader complètement. Le produit **B** est intermédiaire, dans le sens où il conserve une bonne qualité pendant un temps acceptable puis reste peu de temps dans l'état intermédiaire 'dégradé'. Pour comparer le produit **B** aux produits **D**, **E** et **F**, nous pouvons dire qu'ils atteignent un stade 'très dégradé' identique après 5 semaines. Cependant, le produit **B** est préférable puisqu'il conserve une fraîcheur pendant plus longtemps.

Saumons	K_{O1}	K_{O2}	DDL = $\frac{N(N-1)}{2}$	Kcritique ($\alpha = 5\%$)	Hyp. retenue
A	72,5	79,8	3	7,8	$H_1^{(1)}$
B	100,0	97,4	3	7,8	$H_1^{(1)}$
C	76,9	73,2	3	7,8	$H_1^{(1)}$
D	99,0	98,6	3	7,8	$H_1^{(1)}$
E	109,2	94,7	3	7,8	$H_1^{(1)}$
F	95,5	73,0	3	7,8	$H_1^{(1)}$

TABLEAU 5.3 – Données "saumons": Test $H_0^{(1)}$: ordre=0, $H_1^{(1)}$: ordre ≥ 1 .

Saumons	K_{O3}	K_{O4}	$DDL = \frac{N(N-1)(N+1)}{6}$	Kcritique ($\alpha = 5\%$)	Hyp. retenue
A	0,0	0,0	4	9,5	$H_0^{(2)}$
B	0,0	0,0	4	9,5	$H_0^{(2)}$
C	0,0	0,0	4	9,5	$H_0^{(2)}$
D	0,1	0,1	4	9,5	$H_0^{(2)}$
E	0,3	0,3	4	9,5	$H_0^{(2)}$
F	2,1	0,6	4	9,5	$H_0^{(2)}$

TABLEAU 5.4 – Données “saumons”: Test $H_0^{(2)}$: ordre=1, $H_1^{(2)}$: ordre ≥ 2 .

K_{H1}	K_{H2}	$DDL = \frac{N(N-1)}{2}(\mathbf{R} - 1)$	Kcritique ($\alpha = 5\%$)	Hyp. retenue
65,9	60,4	15	25,0	$H_1^{(3)}$

TABLEAU 5.5 – Données “saumons”: Test $H_0^{(3)}$: produits homogènes, $H_1^{(3)}$: au moins deux produits distincts.

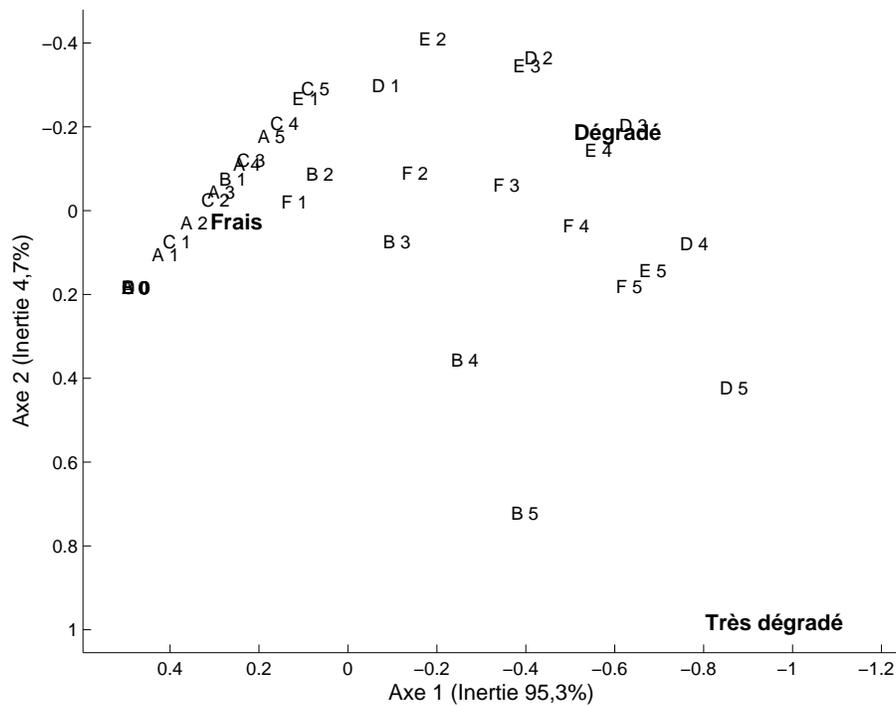


FIGURE 5.4 – Données “saumons”: Analyse des correspondances sur les vecteurs d’états avec $T = 5$ et $N = 3$. Pt correspond au produit P à l’instant t , ainsi B4 correspond au saumon **B** à l’instant 4.

5.3.2 Produit déshydraté

La modélisation par une chaîne de Markov a concerné l'évolution de la dégradation du produit considéré pour trois descripteurs (odeur, flaveur et apparence) dans deux conditions d'entreposage (réfrigérateur et à température et taux d'humidité ambiants). A titre illustratif, nous trouvons la matrice de transition suivante pour l'évaluation de l'apparence du produit déshydraté entreposé à température ambiante:

$$\mathbf{P}^{(A)} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,93 & 0,07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le tableau 5.6 donne les résultats des tests d'hypothèses stipulant un ordre égal à 0 contre un ordre supérieur ou égal à 1 pour la chaîne de Markov. Pour le seuil $\alpha = 0,05$, il convient de rejeter l'hypothèse $H_0^{(1)}$ pour tous les descripteurs lorsque le produit a été conservé à température ambiante. Au contraire, pour le produit conservé au réfrigérateur, le test d'hypothèses ne préconise pas de rejeter $H_0^{(1)}$ au seuil $\alpha = 0,05$. Ce dernier constat est cohérent avec la figure 5.2 qui laissait bien apparaître qu'il n'y avait pas d'évolution notable du produit considéré lorsque celui-ci était entreposé au réfrigérateur. Pour la suite, nous ne considérerons que les cas où le produit a été entreposé à température ambiante et nous nous intéressons à la comparaison de la dégradation des différents descripteurs. En effet, l'utilisateur peut être intéressé par une telle comparaison qui peut révéler des directions d'investigation pour l'amélioration des produits. Le tableau 5.7 concerne les tests d'hypothèses stipulant un modèle markovien d'ordre 1 (hypothèse nulle) contre un modèle markovien d'ordre supérieur ou égal à 2 (hypothèse alternative). Il ressort que pour tous les descripteurs, il n'y a pas lieu de rejeter l'hypothèse nulle $H_0^{(2)}$ au seuil $\alpha = 0,05$. Nous avons par la suite effectué un test d'hypothèses afin d'évaluer si les matrices de transition associées aux différents descripteurs sont égales. Pour ce test, nous avons procédé de la même manière que pour les six variétés de saumons. Le test d'hypothèses ne rejette pas l'hypothèse $H_0^{(3)}$ pour une erreur de première espèce de 0,05 (tableau 5.8).

Bien que le test d'hypothèses ne préconise pas le rejet de l'hypothèse stipulant que l'évolution de la dégradation du produit est similaire pour les différents descripteurs, il serait utile d'effectuer l'AFC selon la procédure décrite précédemment. En effet, une telle analyse est de nature à révéler les différences entre les descripteurs qui n'auraient pas été détectées par le test d'hypothèses par manque de puissance.

Pour chaque descripteur, nous avons donc simulé l'évolution de la dégradation du produit en utilisant la matrice de transition et la relation de récurrence reliant le vecteur d'état à un moment donné au vecteur d'état au moment précédent. Ces vecteurs d'états ont été consignés dans un tableau. Par la suite, nous avons concaténé verticalement les tableaux associés aux différents descripteurs et nous avons soumis

le tableau de dimension $(R * (T + 1), N)$ soit (90,5) ainsi obtenu à une AFC. Le premier plan qui restitue 96,5% de l'inertie est représenté dans la figure 5.5. Il ressort que les dynamiques de dégradation de l'odeur et de la flaveur sont très proches traduisant par là qu'ils relèvent en définitive de la même sensation. Cependant, nous pouvons noter graphiquement que la dégradation du point de vue de l'apparence est légèrement différente de celles des deux autres descripteurs en ce sens qu'elle semble se détériorer très rapidement dès que le processus de dégradation est entamé.

Produit déshydraté	K_{O1}	K_{O2}	$DDL = \frac{N(N-1)}{2}$	Kcritique	Hyp. retenue
Apparence (A)	348	332	10	18,3	$H_1^{(1)}$
Flaveur (F)	418	473	10	18,3	$H_1^{(1)}$
Odeur (O)	416	476	10	18,3	$H_1^{(1)}$
Apparence (Af)					
(produit au réfrigérateur)	0	0	10	18,3	$H_0^{(1)}$
Odeur (Of)					
(produit au réfrigérateur)	0	0	10	18,3	$H_0^{(1)}$
Flaveur (Ff)					
(produit au réfrigérateur)	0	0	10	18,3	$H_0^{(1)}$

TABLEAU 5.6 – Données “produit déshydraté”: Test $H_0^{(1)}$: ordre=0, $H_1^{(1)}$: ordre ≥ 1 .

Produit déshydraté	K_{O3}	K_{O4}	$DDL = \frac{N(N-1)(N+1)}{6}$	Kcritique	Hyp. retenue
Apparence (A)	2,85	0,40	20	31,4	$H_0^{(2)}$
Flaveur (F)	2,03	0,22	20	31,4	$H_0^{(2)}$
Odeur (O)	1,66	0,16	20	31,4	$H_0^{(2)}$

TABLEAU 5.7 – Données “produit déshydraté”: Test $H_0^{(2)}$: ordre=1, $H_1^{(2)}$: ordre ≥ 2 .

	K_{H1}	K_{H2}	$DDL = \frac{N(N-1)(R-1)}{2}$	Kcritique	Hyp. retenue
Produit déshydraté	1,85	1,88	20	31,4	$H_0^{(3)}$

TABLEAU 5.8 – Données “produit déshydraté”: Test $H_0^{(3)}$: descripteurs homogènes, $H_1^{(3)}$: au moins deux descripteurs distincts.

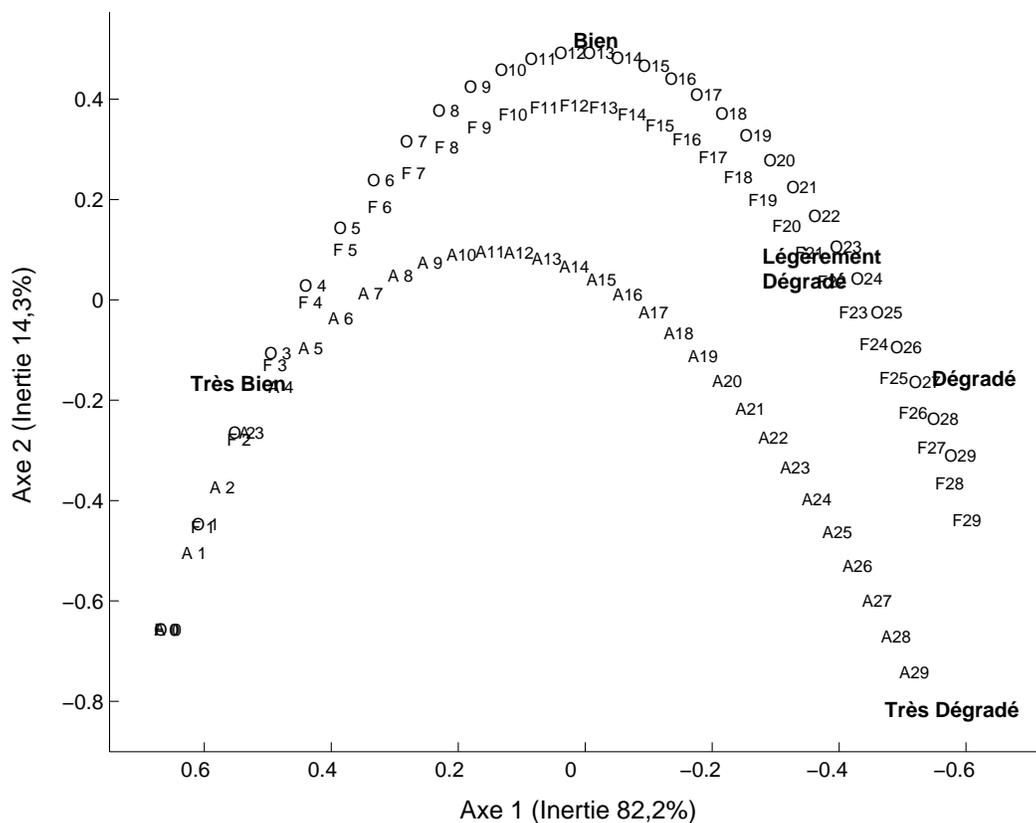


FIGURE 5.5 – Analyse des correspondances sur les vecteurs d'états (produit déshydraté) avec $T = 29$ et $N = 6$. D_t correspond au descripteur D à l'instant t , ainsi F_7 correspond à l'évaluation de flaveur (\mathbf{F}) à l'instant 7 .

5.4 Prise en compte des performances des juges

Dans les sous chapitres précédents, nous avons proposé d'appliquer des chaînes de Markov pour étudier le dynamique de la dégradation et utilisé des propriétés de ces chaînes de Markov pour introduire des tests d'hypothèses sur l'homogénéité des produits. Ce modèle fournit un cadre approprié pour l'analyse de données de dégradation. Cependant, nous avons supposé qu'il n'y avait aucune transition en arrière (c.-à-d. pas de transition d'un produit d'un état donné à un état plus frais). Comme cela peut se produire dans la pratique, nous avons, dans un premier temps, préconisé d'effectuer un prétraitement sur les données afin de pallier ce problème d'inconsistance du jury. Par exemple, si un membre du jury a évalué un produit dans les états (2,1,3) à trois dates successives, alors cette suite a été modifiée soit en (2,2,3) soit (2,3,3). Dans ce sous chapitre, nous proposons une démarche alternative. Concrètement, cela consiste à considérer que l'évaluation d'un membre du jury à une période donnée est une variable aléatoire qui dépend de l'état réel du produit. En d'autres termes, nous proposons de tenir compte de l'incertitude d'un juge dans l'évaluation de l'état réel du produit. Comme cet état est inconnu, il est évalué par une chaîne de Markov cachée (HMC). Les modèles de Markov cachés (HMM) sont très employés dans la reconnaissance de la parole (Devijver, 1985; Nwe *et al.*, 2003) et pendant les dix dernières années, ils ont été également très utilisés dans différents domaines tels que la modélisation de la consommation électrique (Yu et Sheblé, 2006), l'écologie (LeBer *et al.*, 2004) ou le séquençage génomique (Gough *et al.*, 2001). Dans le contexte considéré ici, l'objectif est d'estimer, premièrement, la probabilité pour un juge de déterminer l'état réel du produit à partir de la succession des états représentant l'évolution de la qualité du produit considéré et, deuxièmement, les probabilités de transition entre les différents états. Ces dernières probabilités permettent de comparer la dégradation des produits, comme cela a été fait dans le sous chapitre 5.2.1. Nous avons utilisé les mêmes données que celles décrites dans le paragraphe 5.1 afin de permettre une comparaison entre ces deux procédures et d'évaluer l'apport de la modélisation par une chaîne de Markov cachée. Dès à présent, nous pouvons souligner que l'intérêt de la présente démarche par rapport à la précédente est de dispenser l'utilisateur d'effectuer des prétraitements afin de lever les ambiguïtés et les inconsistences liées au sens de la dégradation.

5.4.1 Modèle de Markov caché (HMM)

Les évaluations successives ($t = 0, 1, \dots, T$) de chaque membre du jury concernant l'évolution de la qualité d'un produit sont notées Y_t et sont supposées suivre un processus stochastique. L'idée fondamentale des modèles cachés de Markov est de s'associer à chaque évaluation Y_t l'état caché E_t du produit. La variable aléatoire cachée E_t détermine la distribution conditionnelle de Y_t . Si $Y_t = E_t$ alors le juge a perçu l'état réel du produit. Plus généralement, la probabilité conditionnelle que le membre du jury attribue l'état i à un produit alors que son état est j ($i, j = 1,$

$2, \dots, N$) est noté π_{ij} . Plus formellement, nous pouvons écrire:

$$\pi_{ij} = \mathbb{P}(Y_t = i | E_t = j).$$

Nous supposons également que l'état caché $\{E_t\}$ suit une chaîne de Markov homogène d'ordre 1, ce qui semble plausible au vu des résultats obtenus dans le sous chapitre 5.3. Avec les notations ci-dessus, les probabilités de transition sont données par la formule:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(E_t = j | E_{t-1} = i), \text{ pour } i, j = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T.$$

La figure 5.6 représente le schéma global d'une chaîne de Markov cachée avec trois états comme dans l'étude de cas des "données saumons". Nous pouvons noter qu'il n'est pas possible pour un produit de se déplacer d'un état donné à un état plus frais.

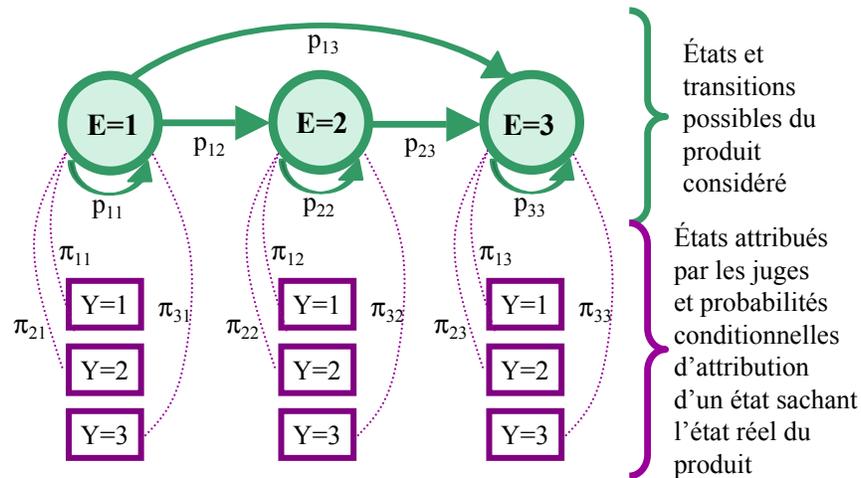


FIGURE 5.6 – Probabilités de transitions et probabilités conditionnelles pour une chaîne de Markov cachée à 3 états.

Le vecteur de paramètres que nous cherchons à estimer est:

$$\phi = (p_{11}, \dots, p_{NN}, \pi_{11}, \dots, \pi_{NN}).$$

Ce qui peut être fait en calculant la fonction de vraisemblance (détails en annexe C, page 99) et, ensuite, en cherchant le maximum de cette fonction par un algorithme EM (Dempster *et al.*, 1977) qui est couramment utilisé dans de nombreux domaines et en particulier pour la détermination des paramètres d'un modèle à partir de la fonction de vraisemblance. Pour l'évaluation des paramètres du vecteur ϕ , l'algorithme EM procède de manière itérative en alternant une étape d'évaluation

de l'espérance (E), où l'espérance de la vraisemblance est calculée, et une étape de maximisation (M), où le maximum de vraisemblance est déterminé en maximisant la vraisemblance trouvée à l'étape E . L'algorithme EM adapté aux chaînes de Markov cachées (HMM) est appelé algorithme de Baum-Welch (Baum, 1972).

Spécifiquement, à une itération donnée de l'algorithme, les états des produits sont considérés comme des valeurs manquantes et, en utilisant les estimations des paramètres du modèle (π_{ij} et p_{ij}), les états réels sont estimés en considérant leur espérance. C'est l'étape E . Ensuite, les paramètres p_{ij} sont mis à jour en calculant le nombre de fois où le produit est passé de l'état i à l'état j et le nombre de fois où le produit était dans l'état i . La maximisation de la vraisemblance dans ce cas est semblable à la première étude (sous chapitre 5.2) où la succession des états était donnée. Enfin, les paramètres π_{ij} sont mis à jour en maximisant la fonction de vraisemblance avec les paramètres p_{ij} considérés comme fixés. C'est l'étape M . Plus de détails sont donnés dans l'annexe C.

Initialisation l'algorithme EM

L'algorithme EM étant itératif, des initialisations pour les paramètres p_{ij} et π_{ij} sont nécessaires et revêtent un caractère primordial. Il est en général recommandé d'en essayer plusieurs en considérant une large gamme de probabilités conditionnelles allant de probabilités ne comportant aucune erreur (matrice identité) à des incertitudes plus grandes. De même, il convient de considérer plusieurs matrices triangulaires supérieures pour l'initialisation des matrices de transition \mathbf{P} . Par exemple, pour l'étude de cas "saumons", les initialisations ont été prise entre:

$$\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

La première initialisation suppose que les juges n'ont fait aucune erreur dans leur évaluations alors que la dernière suppose des erreurs plus grandes. De la même manière, plusieurs initialisations sont possibles pour \mathbf{P} . Néanmoins, nous avons observé que seulement deux types de matrices suffisent pour l'étude de cas "saumons",

données par les matrices suivantes: $\mathbf{P}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans le premier cas, nous supposons que le produit ne peut passer que d'un état à un état voisin (par exemple de 'dégradé' à 'très dégradé') alors que dans le second cas, le produit peut 'sauter' d'un état à un état beaucoup plus avancé (par exemple de 'frais' à 'très dégradé'). Les initialisations proches de ces deux matrices mènent aux mêmes résultats.

La solution retenue après toutes les initialisations est celle qui correspond à la plus grande fonction de vraisemblance.

Evaluations par plusieurs juges

Lorsque plusieurs juges indiquent leurs évaluations d'un même produit, nous obtenons un ensemble de données qui peut être formalisé selon le schéma indiqué par le tableau 5.9.

Non observés	E_0	E_1	\dots	E_T
Observés	$Y_0^{(1)}$	$Y_1^{(1)}$	\dots	$Y_T^{(1)}$
	$Y_0^{(2)}$	$Y_1^{(2)}$	\dots	$Y_T^{(2)}$
	\vdots	\vdots		\vdots
	$Y_0^{(Q)}$	$Y_1^{(Q)}$	\dots	$Y_T^{(Q)}$

TABLEAU 5.9 – *Evaluations des états d'un produit au cours du temps par un jury.* $Y_t^{(q)}$ représentent les états attribués par le $q^{\text{ème}}$ juges au temps t .

Les paramètres π_{ij} indiquant les incertitudes des juges concernant l'état 'réel' du produit sont supposés être égaux pour tous les juges. Ceci reflète le fait que les juges étant formés sont supposés se comporter d'une manière semblable. En toute rigueur, les probabilités π_{ii} devraient être égales à 1 et les probabilités π_{ij} devrait être égales à 0 pour $i \neq j$). Cependant le modèle donne la possibilité de confondre deux états proches surtout lorsque le produit se trouve en réalité dans une situation intermédiaire entre ces deux états. En d'autres termes, les paramètres π_{ij} sont prévus pour prendre en compte l'hésitation des juges entre deux états proches.

5.4.2 Intervalle de confiance par la procédure de bootstrap

Afin d'étayer les résultats obtenus à l'aide du modèle HMC, nous avons décidé de définir des intervalles de confiance autour des probabilités de transition. L'intérêt de cette démarche est d'évaluer l'incertitude autour des paramètres estimés. Par ailleurs, comme les chaînes de Markov cachées sont sensibles aux initialisations considérées dans l'algorithme EM, la détermination des intervalles de confiance permet d'évaluer la sensibilité des paramètres estimés à cette phase d'initialisation. En l'absence d'informations concernant la distribution des variables considérées, nous avons décidé de recourir à un procédure de ré-échantillonnage non paramétrique, de type Bootstrap (Efron, 1979). Il est bien connu que cette procédure consiste à effectuer une série d'échantillonnages avec remise et, à chaque fois, estimer les paramètres selon la démarche décrite dans les paragraphes précédents. Par la suite, un intervalle de confiance des paramètres d'intérêt est déterminé à partir des distributions empiriques des estimations de ces paramètres obtenus à partir des différents échantillons ainsi considérés.

5.4.3 Application aux données “saumons”

Les résultats sont présentés dans le tableau 5.10 et pour comparer les deux stratégies d’analyse (chaînes de Markov et chaînes de Markov cachées), nous indiquons également les résultats obtenus dans la première partie (tableau 5.11).

De manière générale, nous pouvons dire que la performance du jury est satisfaisante. Ceci est reflété par le fait que, pour presque tous les produits, la diagonale des matrices $\mathbf{\pi}$ est proche de 1 et, par conséquent, les éléments non-diagonaux sont proches de 0. Les produits **D** et **F** sont, dans une certaine mesure, une exception à cette constatation globale. En effet pour le produit **D**, nous avons trouvé $\pi_{23} = 0,69$ et pour le produit **F**, $\pi_{23} = 0,66$. Ceci traduit le fait que les membres du jury ont une tendance confondre les états 2 et 3, ou, plus probablement, que les produits **F** et **D** étaient dans un état intermédiaire entre les états 2 et 3 quand ils ont été évalués par les membres du jury. Nous pouvons également noter que les probabilités de transition obtenues par HMC (tableau 5.10) et celles obtenus par un modèle markovien après prétraitement des données (tableau 5.11) sont relativement proches. Cependant, des différences relativement plus grandes entre les probabilités de transition obtenues à partir des deux approches sont observé pour les produits B et F.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{P}^{(\mathbf{A})} = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi^{(\mathbf{A})} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0 & 0 \\ 0,02 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}^{(\mathbf{B})} = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 & 0 \\ 0 & 0,83 & 0,17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi^{(\mathbf{B})} = \begin{pmatrix} 0,94 & 0 & 0 \\ 0,06 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}^{(\mathbf{C})} = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi^{(\mathbf{C})} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,20 & 0 \\ 0,02 & 0,80 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}^{(\mathbf{D})} = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,36 & 0,05 \\ 0 & 0,85 & 0,15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi^{(\mathbf{D})} = \begin{pmatrix} 0,87 & 0 & 0,03 \\ 0,13 & 1 & 0,69 \\ 0 & 0 & 0,28 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}^{(\mathbf{E})} = \begin{pmatrix} 0,73 & 0,27 & 0 \\ 0 & 0,94 & 0,06 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi^{(\mathbf{E})} = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,36 & 0 \\ 0,10 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}^{(\mathbf{F})} = \begin{pmatrix} 0,84 & 0,16 & 0 \\ 0 & 0,93 & 0,07 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi^{(\mathbf{F})} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,36 & 0 \\ 0,02 & 0,66 & 0,66 \\ 0 & 0 & 0,34 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

TABLEAU 5.10 – Estimation des probabilités de transitions (\mathbf{P}) et des probabilités conditionnelles (π) pour les six produits (**A**, . . . , **F**) par le modèle de Markov caché.

Une fois la matrice de transition estimée pour chacun des produits, nous pouvons mettre en place une comparaison des produits en utilisant l’AFC comme décrit précédemment. Globalement, nous pouvons remarquer que les résultats se recoupent dans une large mesure avec ceux de l’étude précédente basée sur les chaînes de Markov après prétraitement des données. Les résultats sont présentés dans la figure

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P}_{(\text{MC})}^{(\text{A})} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{P}_{(\text{MC})}^{(\text{C})} = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{P}_{(\text{MC})}^{(\text{E})} = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,29 & 0 \\ 0 & 0,93 & 0,07 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{P}_{(\text{MC})}^{(\text{B})} = \begin{pmatrix} 0,84 & 0,16 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{P}_{(\text{MC})}^{(\text{D})} = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,39 & 0,02 \\ 0 & 0,94 & 0,06 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{P}_{(\text{MC})}^{(\text{F})} = \begin{pmatrix} 0,74 & 0,24 & 0,02 \\ 0 & 0,96 & 0,04 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

TABLEAU 5.11 – Estimation des probabilités de transitions (\mathbf{P}) pour les six produits ($\mathbf{A}, \dots, \mathbf{F}$) par le modèle de Markov.

5.7, le premier axe factoriel explique 86,2% de la l’inertie totale et le second, 13,8%. Dans cette figure, nous voyons que les produits \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} restent dans un état ‘Frais’ pendant les trois premières semaines d’entreposage. Après cinq semaines, les produits \mathbf{A} et \mathbf{C} commencent à se dégrader alors que le produit \mathbf{B} atteint plus rapidement un état ‘Très Dégradé’. Les autres produit, \mathbf{D} , \mathbf{E} et \mathbf{F} restent ‘Frais’ peu de temps, se stabilisent dans un état intermédiaire puis se dégradent. En particulier, la dégradation du produit \mathbf{D} est plus rapide.

5.4.4 Détermination des intervalles de confiance pour les données “saumons”

Nous avons effectué la procédure de bootstrap sur les données “saumons” précédemment décrites. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.12. Les intervalles de confiance des paramètres p_{11} , p_{12} , p_{13} pour les produits \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} sont suffisamment restreints pour affirmer que les résultats obtenus pour ces paramètres sont stables et corrects. Concernant les paramètres p_{22} et p_{23} , les résultats confirment la nécessité d’observer les produits plus souvent dans l’état ‘Dégradé’ et ‘Très dégradé’ pour avoir des estimations plus satisfaisantes. Cette dernière remarque est valable pour tous les produits (surtout pour les produits \mathbf{A} et \mathbf{C} qui n’ont pas été observés dans le dernier état). En ce qui concerne les trois derniers produits, les résultats sont moins convaincants. Une étude sur une durée plus longue et la présence de quelques juges supplémentaires auraient sûrement conduit à des résultats plus probants.

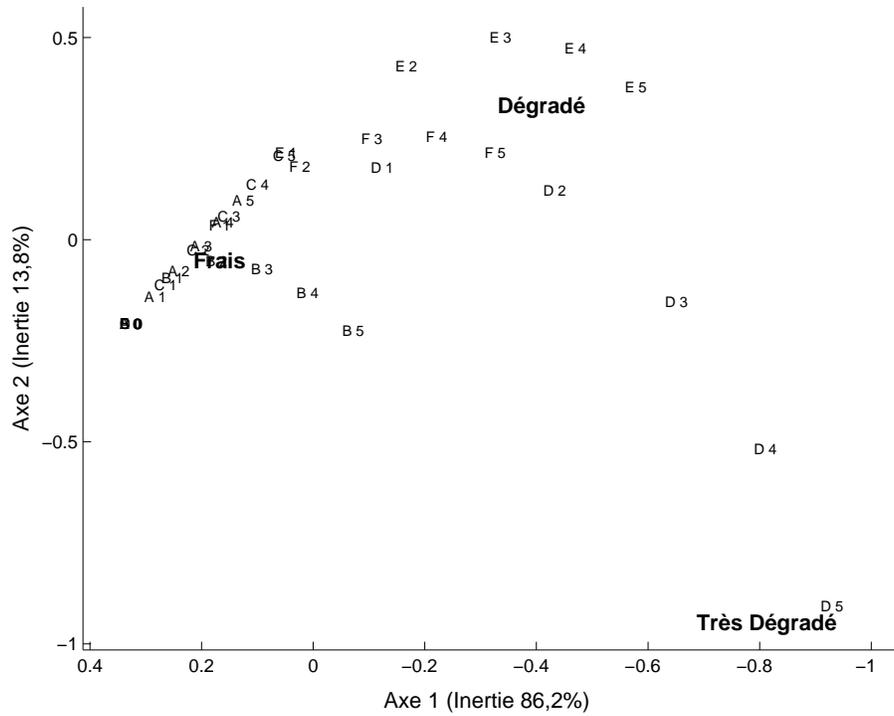


FIGURE 5.7 – Analyse des correspondances sur les vecteurs d'états (données “saumons”) avec $T = 5$ et $N = 3$. P_t correspond au produit P à l'instant t , ainsi B_4 correspond au saumon \mathbf{B} à l'instant 4.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{(\text{boot})}^{(\mathbf{A})} &= \begin{pmatrix} [0,91; 0,98] & [0,02; 0,09] & [0; 0,02] \\ 0 & [0,5; 1] & [0; 0,5] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{(\text{boot})}^{(\mathbf{B})} &= \begin{pmatrix} [0,82; 0,91] & [0,08; 0,18] & [0; 0] \\ 0 & [0,54; 0,90] & [0,10; 0,46] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{(\text{boot})}^{(\mathbf{C})} &= \begin{pmatrix} [0,86; 0,97] & [0,03; 0,12] & [0; 0,07] \\ 0 & [0; 1] & [0; 1] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{(\text{boot})}^{(\mathbf{D})} &= \begin{pmatrix} [0,45; 0,68] & [0,32; 0,55] & [0; 0] \\ 0 & [0,68; 0,99] & [0,01; 0,32] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{(\text{boot})}^{(\mathbf{E})} &= \begin{pmatrix} [0,45; 0,78] & [0,21; 0,55] & [0; 0] \\ 0 & [0,44; 0,98] & [0,02; 0,56] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{(\text{boot})}^{(\mathbf{F})} &= \begin{pmatrix} [0,62; 0,82] & [0,08; 0,37] & [0; 0,2] \\ 0 & [0,58; 1] & [0; 0,42] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

TABLEAU 5.12 – Estimation par intervalles de confiance des probabilités de transitions (\mathbf{P}) pour les six produits ($\mathbf{A}, \dots, \mathbf{F}$) par le modèle de Markov caché avec ré-échantillonnage.

Conclusion

Contrairement aux démarches classiques qui visent à déterminer de manière plus ou moins ponctuelle la date limite de consommation d'un produit, la démarche proposée ici permet d'avoir une vision dynamique de l'évolution des produits. Il faut également souligner que la démarche est flexible et permet de comparer plusieurs produits correspondant à différentes variétés ou à différents procédés de fabrication. Dans cette perspective, l'analyse des correspondances complète le test d'hypothèses par une représentation graphique qui permet d'avoir un aperçu global de l'évolution des produits.

Nous avons considéré le cas de produits qui subissent une dégradation de manière irréversible. Pour cela, nous avons été amenés, dans un premier temps, à effectuer un prétraitement sur les données procurées par chacun des juges. Dans un second temps, nous avons adapté une démarche basée sur des chaînes de Markov cachées. Ceci consiste à associer à chaque produit une chaîne de Markov (cachée) dont les états sont appréhendés à travers les évaluations des juges. A ces derniers, nous associons des probabilités conditionnelles d'indiquer un état sachant l'état 'réel' dans lequel le produit se trouve. La méthode des chaînes de Markov cachées apparaît comme une amélioration de la première stratégie sur les chaînes de Markov en évitant des prétraitements fastidieux et parfois subjectifs. De plus, la matrice des probabilités conditionnelles reflète une performance globale du jury. Idéalement, celle-ci devrait

être diagonale. Nous pouvons ajouter que la dégradation des produits est reflétée par la matrice stochastique (somme des lignes égale à 1) des probabilités de transitions. Le fait d'avoir des paramètres diagonaux proches de 1 signifie que le produit considéré ne se dégrade pas rapidement. Enfin, une démarche de ré-échantillonnage par bootstrap permet de valider ou de relativiser les résultats obtenus après application du modèle de Markov caché. En effet, il est bien connu que l'algorithme itératif utilisé est très sensible aux initialisations. De plus, la procédure de bootstrap permet d'indiquer s'il est préférable d'ajouter des données ou tout au moins de conseiller un nombre supérieur de juges pour une étude similaire ultérieure.

Dans le cas où plusieurs produits sont étudiés parallèlement, l'analyse factorielle des correspondances révèle un effet Guttman: le premier axe est un gradient de la dégradation alors que le second axe oppose les valeurs intermédiaires aux valeurs extrêmes. Le premier axe représentant un pourcentage très important de l'inertie totale, il est alors possible d'utiliser les coordonnées associées au premier axe pour des analyses ultérieures telles que l'analyse de la variance pour déterminer si un produit est significativement différent des autres. Alternativement, ces coordonnées peuvent être utilisées pour explorer la relation entre l'évolution de la dégradation des produits avec d'autres types de données telles que les données de formulations des produits ou les préférences de consommateurs, par exemple.

Conclusion Générale

Nous nous sommes placés, dans une première partie, dans le cadre des études sensorielles conventionnelles (profil fixe). Les données peuvent être présentées sous forme d'un ensemble de tableaux dont les lignes sont associées aux produits et les colonnes, aux descripteurs. Nous avons proposé une procédure de détermination d'un tableau compromis en tenant compte des performances des juges. Nous avons également proposé des indicateurs de performance associés à chacun des juges et au panel. Sur la base de ces indicateurs, nous avons proposé des tests d'hypothèses permettant de tester la significativité de la contribution de chacun des juges à la détermination du compromis ainsi que la pertinence du compromis obtenu. Ces tests d'hypothèses sont basés sur des procédures de permutations. Parallèlement, nous avons proposé des alternatives à ces tests basées sur des propriétés relatives à la moyenne et la variance de chacun des indicateurs lorsque toutes les permutations sont effectuées. Cette démarche a une portée générale, c'est ainsi que nous avons montré comment elle peut être aisément adaptée au cas des profils libres et la méthode de Procrustes Généralisée.

Dans les chapitres 2, 3 et 4, nous avons abordé le cas de données sensorielles de type Temps Intensité. L'avantage de la description sensorielle par des courbes Temps-Intensité (TI) est de disposer d'une information supplémentaire sur la dynamique de la sensation dans l'objectif de mieux caractériser les produits. Le soucis majeur rencontré en analyse sensorielle et accentué en étude TI vient de l'appareil de mesure: les juges. En effet, il existe une grande variabilité interindividuelle qui est due à des différences physiologiques et des différences dans la manière de retranscrire l'information. Le but est donc de définir cette variabilité et de la réduire pour se focaliser sur la caractérisation des produits. Dans cette perspective, des prétraitements des données et des stratégies d'analyse sont proposés. En particulier, dans le chapitre 4, nous avons développé une procédure d'alignement qui permet de déterminer une transformation du temps propre à chaque juge de nature à réduire les variations entre les juges. La fonction de perte associée à cette stratégie d'analyse s'inspire de celle de GPA (Generalized Procrustes Analysis) et l'algorithme de résolution consiste en un algorithme itératif qui utilise, entre autres, une adaptation de la procédure COW (Correlation Optimisation Warping) pour l'alignement de deux courbes. Enfin, une procédure de permutation permet de valider la pertinence de la démarche générale.

Dans le chapitre 5, nous nous sommes intéressés à un autre type de données sen-

sorielles concernant l'évolution de la dégradation de produits au cours du temps. Dans un premier temps, nous avons adopté une modélisation à l'aide de chaînes de Markov. Afin de tenir compte de la performance des juges, nous avons étendu la démarche précédente en considérant des chaînes de Markov cachées. Les résultats de l'analyse ont été étayés grâce à une procédure de type bootstrap et, afin de permettre une vision synthétique de l'évolution de la dégradation de plusieurs produits, nous avons effectué une AFC (Analyse Factorielle des Correspondances) sur les vecteurs d'états simulés grâce aux modèles Markoviens.

Nous avons étudié le cas des courbes TI associées à une sensation. Il est bien évident, que pour avoir une caractérisation plus complète, il conviendrait de mettre en place des expériences de même type pour appréhender plusieurs sensations. La pratique la plus courante consiste à étudier les sensations les unes après les autres à l'aide d'une procédure de type TI. Il est clair qu'une telle démarche est très coûteuse et demande beaucoup de temps et beaucoup de disponibilité de la part des juges. C'est pourquoi, des méthodes alternatives ont été développées. Par exemple, la méthode DATI (Dual Attribute Time Intensity) consiste à évaluer deux sensations en même temps : une sensation suivant l'axe horizontal et l'autre suivant l'axe vertical Duizer *et al.* (1997). L'entraînement pour ce genre d'étude est plus fastidieux et l'utilisation de deux axes simultanément ajoute une difficulté à l'expérience. Cependant, les résultats semblent satisfaisants. Pour leurs études, Duizer *et al.* (1997) n'ont pas trouvé de différences significatives entre les deux méthodes: SATI (Single Attribute Time Intensity) et DATI. En tout état de cause, ce type d'expériences conduit à des données encore plus complexes que celles que nous avons considérées. De ce point de vue, cela mériterait une étude approfondie. Récemment, il a été proposé une nouvelle méthode d'acquisition de données sensorielles dans le temps qui permet de prendre en compte plus de descripteurs à la fois : la méthode de la Dominance Temporelle des Sensations (Pineau, 2004; Pineau *et al.*, 2004). Ce protocole expérimental est intéressant car il permet la caractérisation sensorielle des produits sur la base de plusieurs descripteurs dans un temps restreint et avec un coût raisonnable. Cela consiste à interroger les sujets sur plusieurs attributs. Au cours de l'expérimentation les juges doivent indiquer quel attribut est dominant et quelle note d'intensité attribuer à la sensation dominante. Le calcul du nombre de fois (parmi les différents juges et les différentes répétitions) où chaque descripteur est dominant pour un produit donné permet de tracer la série des fréquences de citations appelée courbe DTS. La collection des différentes courbes DTS d'un même produit donne une image de la temporalité du profil sensoriel du produit considéré. Cette méthode nécessite beaucoup de concentration pour les dégustateurs, une vitesse de réaction très grande et des capacités à noter tous les descripteurs. De plus, le problème de variabilité interindividuelle se pose toujours. En effet, les différentes sensations pourraient être perçues par le juge à des moments différents du fait de facteurs physiologiques ou autres inhérents aux juges. Par conséquent, il serait intéressant d'explorer comment adapter notre méthodologie de réduction de la variabilité des

juges à ce type d'épreuves.

Pour l'alignement des courbes, nous avons mis en évidence des transformations non linéaires du temps associées aux juges. Ces transformations pourraient présenter un intérêt pour le praticien. En effet, ce dernier pourrait être intéressé par définir une typologie des juges en fonction du comportement reflété par ces transformations et expliquer cette typologie par des facteurs physiologiques, par exemple.

Annexe

Annexe B: Résolution de problème d'optimisation sous contraintes

Dans cette annexe, nous regroupons des résultats concernant le lissage pénalisé avec ou sans contrainte.

Notations

- $B_k, k = 1, \dots, K$ sont des fonctions B-splines cubiques définies sur $[0,1]$ formant une base.
- $B_k^{(1)}$ et $B_k^{(2)}$, $k = 1, \dots, K$ sont respectivement les dérivées premières et secondes des fonctions B-splines.
- \mathbf{B} est la matrice de dimension $T * K$ associée au vecteur (x_1, \dots, x_T) dont l'élément générique est $b_{tk} = B_k(x_t)$ pour $t = 1, \dots, T$ et $k = 1, \dots, K$.
- $\mathbf{B}^* = (b_{tk})_{(k=2, \dots, K-1, t=1, \dots, T)}$ est une matrice de dimension $T * (K - 2)$.
- \mathbf{B}_K est le vecteur de longueur T associé au vecteur (x_1, \dots, x_T) dont les composantes sont $B_K(x_t)$ pour $t = 1, \dots, T$.
- \mathbf{G} est la matrice de dimension $K * K$ des intégrales des produits des dérivées secondes des fonctions B-splines: $\mathbf{G}_{ij} = \int_0^1 B_i^{(2)}(t)B_j^{(2)}(t)dt$
- $\mathbf{G}^* = (\mathbf{G}_{ij})_{(i,j=2, \dots, K-1)}$ est la matrice de dimension $(K - 2) * (K - 2)$
- \mathbf{G}_K^* est le vecteur de longueur $K - 2$ des intégrales des produits des dérivées secondes des fonctions B-splines avec la dérivée seconde de la $K^{\text{ème}}$ fonction B-splines: $\mathbf{G}_K^* = (\int_0^1 B_i^{(2)}(t)B_K^{(2)}(t)dt)_{i=2, \dots, K-1}$
- $\mathbf{c}^* = (c_2, \dots, c_{K-1})$

Premier cas

Soit le problème d'optimisation suivant: $\min_{\mathbf{c}} (\mathbf{y} - \mathbf{Bc})'(\mathbf{y} - \mathbf{Bc})$.
Le critère à minimiser est donc $f(\mathbf{c}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{Bc} + \mathbf{c}'\mathbf{B}'\mathbf{Bc}$.

Le gradient correspondant est $\nabla f(\mathbf{c}) = 2\mathbf{B}'\mathbf{B}\mathbf{c} - 2\mathbf{B}'\mathbf{y}$
 la solution est donc: $\mathbf{c} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{y}$

Deuxième cas: contrainte de lissage

Soit le problème d'optimisation suivant: $\min_{\mathbf{c}} (\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{c})'(\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{c}) + \lambda\mathbf{c}'\mathbf{G}\mathbf{c}$.
 Le critère à minimiser est donc $f(\mathbf{c}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{B}\mathbf{c} + \mathbf{c}'\mathbf{B}'\mathbf{B}\mathbf{c} + \lambda\mathbf{c}'\mathbf{G}\mathbf{c}$.
 Le gradient correspondant est $\nabla f(\mathbf{c}) = 2\mathbf{B}'\mathbf{B}\mathbf{c} - 2\mathbf{B}'\mathbf{y} + 2\lambda\mathbf{G}\mathbf{c}$
 la solution est donc: $\mathbf{c} = (\mathbf{B}'\mathbf{B} + \lambda\mathbf{G})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{y}$

Troisième cas: $c_1 = c_K = 0$ et contrainte de lissage

Le critère à minimiser est alors: $f(\mathbf{c}^*) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{B}^*\mathbf{c}^* + (\mathbf{c}^*)'(\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^*\mathbf{c}^* + \lambda(\mathbf{c}^*)'\mathbf{G}^*\mathbf{c}^*$.
 En effet, certains termes sont nuls, par exemple $-2\mathbf{y}'\mathbf{B}_1\mathbf{c}_1$ et $-2\mathbf{y}'\mathbf{B}_K\mathbf{c}_K$.
 Le gradient correspondant est $\nabla f(\mathbf{c}^*) = 2(\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^*\mathbf{c}^* - 2(\mathbf{B}^*)'\mathbf{y} + 2\lambda\mathbf{G}^*\mathbf{c}^*$
 la solution est donc: $\mathbf{c}^* = ((\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^* + \lambda\mathbf{G}^*)^{-1}(\mathbf{B}^*)'\mathbf{y}$

Quatrième cas: $c_1 = 0, c_K = 1$ et contrainte de lissage

Le critère à minimiser est alors: $f(\mathbf{c}^*) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{B}^*\mathbf{c}^* + (\mathbf{c}^*)'(\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^*\mathbf{c}^* + 2(\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}_K\mathbf{c}^* + \lambda(\mathbf{c}^*)'\mathbf{G}^*\mathbf{c}^* + 2\lambda\mathbf{G}_K^*\mathbf{c}^* + cste$.
 En effet, certains termes ne dépendant que de c_K , ne seront pas explicités.
 Le gradient correspondant est $\nabla f(\mathbf{c}^*) = 2(\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^*\mathbf{c}^* - 2(\mathbf{B}^*)'\mathbf{y} + 2\lambda\mathbf{G}^*\mathbf{c}^* + 22(\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}_K + 2\lambda\mathbf{G}_K^*$
 la solution est donc: $\mathbf{c}^* = ((\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}^* + \lambda\mathbf{G}^*)^{-1}((\mathbf{B}^*)'\mathbf{y} - (\mathbf{B}^*)'\mathbf{B}_K - \lambda\mathbf{G}_K^*)$

Annexe C: Algorithme EM et chaînes de Markov cachée

Maximum de vraisemblance

Nous développons ici la fonction de maximum de vraisemblance explicitée dans le sous chapitre 5.4. Celle-ci a un rôle primordial dans la détermination des paramètres du modèle HMM par l'algorithme EM. Notons N le nombre d'états et T le nombre total de périodes. Soit $\phi = (p_{11}, \dots, p_{NN}, \pi_{11}, \dots, \pi_{NN})$ le vecteur de paramètres à estimer. Pour les données observées, la fonction de vraisemblance ϕ est la distribution jointe des variables aléatoires Y_0, \dots, Y_T pour $Y_0 = y_0, \dots, Y_T = y_T$. Notons $\nu_{e_0} = \mathbb{P}(E_0 = 1)$ la probabilité initiale pour un produit d'être dans l'état 1 (par exemple, 'Frais') et supposons que cette probabilité n'est pas nulle. Nous pouvons affirmer que, pour $E_0 = e_0, \dots, E_T = e_T$ donnés, la probabilité conditionnelle de $Y_0 = y_0, \dots, Y_T = y_T$ est $\prod_{t=0}^T \pi_{y_t e_t}$ et la probabilité jointe de $E_0 = e_0, \dots, E_T = e_T$ est $\nu_{e_0} \prod_{t=1}^T p_{e_{t-1} e_t}$. Cette dernière expression résulte du fait que le processus E_t est considéré comme étant Markovien.

Enfin, la densité jointe de $E_0, \dots, E_T, Y_0, \dots, Y_T$ pour $e_0, \dots, e_T, y_0, \dots, y_T$ est $\nu_{e_0} \pi_{y_0 e_0} \prod_{t=1}^T p_{e_{t-1} e_t} \pi_{y_t e_t}$ et la fonction de vraisemblance ϕ est obtenue en sommant sur toutes les séquences possibles d'états; c'est à dire:

$$L_T(\phi) = \sum_{e_0, \dots, e_T=1}^N \nu_{e_0} \pi_{y_0 e_0} \prod_{t=1}^T p_{e_{t-1} e_t} \pi_{y_t e_t}.$$

Les états non observés sont représentés par les variables aléatoires suivantes:

$$I_{jk}(t) = 1 \text{ si } e_{t-1} = j \text{ et } e_t = k,$$

ce qui signifie qu'il y a une transition de l'état j à l'état k au temps t . Nous définissons également la variable indicatrice d'être dans l'état i au temps t par:

$$J_i(t) = 1 \text{ si } e_t = i.$$

Avec ces notations, le logarithme de la fonction de vraisemblance peut être réécrit de la manière suivante:

$$\log L_T(\phi) = \log(\nu_{e_0}) + \sum_{j,k=1}^N \log p_{jk} \sum_{t=1}^T I_{jk}(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T J_i(t) \log \pi_{y_t i}.$$

Pour estimer ϕ , l'algorithme EM peut être considéré en maximisant cette fonction.

algorithme EM

Pour un produit fixé, les étapes suivantes sont répétées jusqu'à la convergence (plus de changement significatif dans les paramètres à estimer).

1. A chaque itération dans l'étape E , l'espérance de la probabilité conditionnelle des valeurs non observées $J_i(t)$ et $I_{jk}(t)$ sont calculées en utilisant les équations 'forward-backward' pour chaque juge (q):

– Équation 'Forward':

$$a_j(t) = \mathbb{P}(Y_0 = y_0, \dots, Y_t = y_t, E_t = j) \text{ pour } t = 0 \dots T$$

La valeur à $t = 0$ est $a_j(0) = \mathbb{P}(Y_0 = y_0, E_0 = j) = \nu_j \pi_{y_0, j}$ et de manière récursive: $a_j(t+1) = [\sum_{k=1}^N p_{kj} a_k(t)] \pi_{y_{t+1}, j}$

– Équation 'Backward':

$$b_j(t) = \mathbb{P}(Y_{t+1} = y_{t+1}, \dots, Y_T = y_T, E_t = j) \text{ pour } t = 0 \dots T-1 \text{ et } b_j(T) =$$

1. De manière récursive, nous avons: $b_j(t) = \sum_{k=1}^N p_{jk} \pi_{y_{t+1}, k} b_k(t+1)$

– L'espérance conditionnelle de $J_i(t)$ pour $t = 0 \dots T$ est:

$$J_i(t) = \mathbb{E}[J_i(t) | Y_1 = y_1 \dots Y_T = y_T] = \mathbb{P}(E_t = i | Y_1 = y_1 \dots Y_T = y_T)$$

$$J_i(t) = \frac{\mathbb{P}(E_t = i, Y_1 = y_1 \dots Y_T = y_T)}{\mathbb{P}(Y_1 = y_1 \dots Y_T = y_T)}$$

$$J_i(t) = \frac{a_i(t) b_i(t)}{\sum_{k=1}^N a_k(T)}$$

– L'espérance conditionnelle de $I_{jk}(t)$ pour $t = 1 \dots T$ est:

$$I_{jk}(t) = \mathbb{E}[I_{jk}(t) | Y_0 = y_0 \dots Y_T = y_T]$$

$$I_{jk}(t) = \mathbb{P}(E_{t-1} = j, E_t = k | Y_0 = y_0 \dots Y_T = y_T)$$

$$I_{jk}(t) = \frac{\mathbb{P}(E_{t-1} = j, E_t = k, Y_0 = y_0 \dots Y_T = y_T)}{\mathbb{P}(Y_0 = y_0 \dots Y_T = y_T)}$$

$$I_{jk}(t) = \frac{a_j(t-1) p_{jk} \pi_{y_t, k} b_k(t)}{\sum_{i=1}^N a_i(T)}$$

2. Dans l'étape M , les estimations de p_{jk} et de π_{jk} sont calculées à partir des états non observés (estimés à l'étape précédente) en maximisant le maximum de vraisemblance, c'est à dire pour:

$$p_{jk} = \frac{\sum_{q=1}^Q \sum_{t=1}^T I_{jk}^{(q)}(t)}{\sum_{q=1}^Q \sum_{t=1}^T \sum_{l=1}^N I_{jl}^{(q)}(t)}$$

$$\pi_{kj} = \frac{c_{kj}}{\sum_{l=1}^N c_{lj}} \text{ où } c_{kj} = \sum_{q=1}^Q \sum_{t=0}^T J_j^{(q)}(t) \delta_{ytk} \text{ et } \delta_{yj} = 1 \text{ si } y = j \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Annexe D: Publications

Acceptées

- **Ledauphin S., Hanafi M. & Qannari E.M.**(2004) “Simplification and signification of principal components”, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **74**, pp. 277-281.
- **Ledauphin S., Vigneau E. & Causeur D.**(2005) “Functional Approach for the analysis of Time Intensity curves using B-splines”, *Journal of Sensory Studies*, **20**, pp. 285-300.
- **Ledauphin S., Hanafi M. & Qannari E.M.**(2006) “Détermination et validation d’un tableau compromis en profil sensoriel conventionnel”, *Revue de Statistique Appliquée*, **LIV(1)**, pp. 47-60.
- **Ledauphin S., Hanafi M. & Qannari E.M.**(2006) “Assessment of the agreement among the subjects in fixed vocabulary profiling”, *Food Quality and Preference*, **17 (3-4)**, pp. 277-280.
- **Ledauphin S., Vigneau E. & Qannari E.M.**(2006) “A procedure for the analysis of time intensity curves”, *Food Quality and Preference*, **17 (3-4)**, pp. 290-295.
- **Lê S. & Ledauphin S.**(2006) “You like tomato, I like tomato: Segmentation of consumers with missing values”, *Food Quality and Preference*, **17 (3-4)**, pp. 228-233.
- **Ledauphin S., Pommeret D. & Qannari E.M.**(2006) “A Markovian model to study products shelf lives”, *Food Quality and Preference*, **17 (7-8)**, pp. 598-603.
- **Ledauphin S., Pommeret D. & Qannari E.M.** “Application des chaînes de Markov pour le suivi de la dégradation de produits alimentaires”, *Revue de Statistique Appliquée*, *In Press*

Soumises

- **Ledauphin S., Pommeret D. & Qannari E.M.** “Application of Hidden Markov Model to products shelf life”, *Food Quality and Preference*
- **Ledauphin S., Salles C. & Qannari E.M.** “Alignements de courbes de type temps intensité en analyse sensorielle”, *Sciences des aliments*.

Annexe E: Communications aux congrès

1. **Ledauphin S., Hanafi M. & Qannari E.M.** “La simplification et la signification des composantes principales dans le cadre d’une Analyse en Composantes Principales”. **Chimiométrie 2003 les 3-4 décembre 2003 à PARIS.**
2. **Ledauphin S., Vigneau E. & Qannari E.M.** “Les données sensorielles de type Temps Intensité”. **Forum des jeunes mathématiciennes les 30-31 janvier 2004 à PARIS.**
3. **Ledauphin S., Hanafi M. & Qannari E.M.** “Performance d’un jury en profil sensoriel conventionnel”. **8^{èmes} journées Agro-industrie et méthodes statistiques les 10-12 mars 2004 à RENNES.**
4. **Vigneau E., Ledauphin S. & Causeur D.** “Approche fonctionnelle de l’analyse des signaux Temps Intensité”. **8^{èmes} journées Agro-industrie et méthodes statistiques les 10-12 mars 2004 à RENNES.**
5. **Ledauphin S., Vigneau E. & Qannari E.M.** “A procedure for the analysis of Time Intensity curves”. **7th Sensometrics meeting les 28-30 juillet 2004 à UC DAVIS (USA, Californie).**
6. **Ledauphin S. & Lê S.** “You like tomato, I like tomato: Segmentation of consumers with missing values”. **Workshop, 7th Sensometrics meeting les 28-30 juillet 2004 à UC DAVIS (USA, Californie).**
7. **Ledauphin S., Vigneau E. & Qannari E.M.** “Ajustement de courbes de type temps-intensité en évaluation sensorielle”. **Chimiométrie 2004 les 30 novembre et 1 décembre 2004 à PARIS.**
8. **Ledauphin S., Vigneau E. & Qannari E.M.** “Ajustement de courbes de type temps-intensité en évaluation sensorielle en présence de répétitions”. **XXXVII^{èmes} journées de Statistiques les 6-10 juin 2005 à PAU.**
9. **Ledauphin S., Pommeret D. & Qannari E.M.** “A Markovian model to assess products shelf lives”. **Communication par affiche. 6th Pangborn Sensory Science Symposium les 7-11 août 2005 à Harrogate International Center (UK, Yorkshire).**
10. **Ledauphin S., Pommeret D. & Qannari E.M.** “A Hidden Markov Model to assess products shelf life”. **Communication par affiche. 8th Sensometrics meeting les 2-4 août 2006 à ÅS (Norvège).**

11. **Ledauphin S. & Qannari E.M.** “A new algorithm for the alignment of time intensity curves”. **COMPSTAT 2006** les 28 août - 1 septembre 2006 à *ROME*.

12. **Ledauphin S., Salles C. & Qannari E.M.** “Alignment of TI curves in sensory analysis: comparison of methods and validation”. *Communication par affiche*. **IUFOST 2006** les 17-21 septembre 2006 à *NANTES*.

Bibliographie

- T.W. ANDERSON ET L.A. GOODMAN (1957). Statistical inference about markov chains. *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, pp. 89–109.
- I.V. BASAWA ET B.L.S. PRAKASA RAO (1980). *Statistical Inference for Stochastic Processes*. Academic Press, London, 3ème édition.
- L. BAUM (1972). An inequality and associated maximization technique in statistical estimation of probabilistic functions of markov processes. *Inequalities*, **3**, pp. 1–8.
- P. BESSE ET H. CARDOT (2003). *Modélisation statistique de données fonctionnelles in Analyse de données*. Hermes, London, g. govaert édition.
- G.G. BIRCH ET S.L. MUNTON (1981). Use of the smurf in taste analysis. *Chemical Senses*, **6**, pp. 45–52.
- C. DE BOOR (1978). *A Practical Guide to Splines*. Springer, Berlin.
- G. BUTLER, L.M. POSTE, D.A. MACKIE ET A. JONES (1996). Time intensity as a tool for measurement of meat tenderness. *Food Quality and Preference*, **7**(3-4), pp. 193–204.
- S. VAN BUUREN (1992). Analysing time intensity responses in sensory evaluation. *Food Technology*, **46**(2), pp. 101–114.
- S. CHAMPELY (1994). *Analyse de données fonctionnelles, Approximation par les splines de régression*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I.
- A.J. COLLINS (1991). The use of generalised procrustes techniques in sensory analysis. Dans *Journées Agro-Industries et Méthodes Statistiques*, Nantes, France.
- L. COLLINS (1974). Estimating markov transition probabilities from micro-unit data. *Applied Statistics*, **23**(3), pp. 355–371.
- A. CURIA, M. AGUERRIDO, K. LANGHOR ET G. HOUGH (2005). Survival analysis applied to sensory shelf life of yogurts: Argentine formulations. *Journal of Food Science*, **70**(7), pp. 442–445.
- A.P. DEMPSTER, N.M. LAIRD ET D.B. RUBIN (1977). Maximum likelihood from incomplete data using the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society*, **39**(B), pp. 1–38.
- P.A. DEVIJVER (1985). Baum's forward-backward algorithm revisited. *Pattern Recognition Letters*, **3**(6), pp. 369–373.

- G.B. DIJKSTERHUIS (1993). Principal component analysis of time-intensity bitterness curves. *Journal of Sensory Studies*, **8**, pp. 317–328.
- G.B. DIJKSTERHUIS ET E. VAN DER BROEKE (1995). Matching the shape of ti curves. *Journal of Sensory Studies*, **10**, pp. 149–161.
- G.B. DIJKSTERHUIS ET P. EILERS (1997). Modelling time-intensity curves using prototype curves. *Food Quality and Preference*, **8**(2), pp. 131–140.
- G.B. DIJKSTERHUIS ET J.C. GOWER (1992). The interpretation of generalised procrustes analysis and allied methods. *Food Quality and Preference*, **3**, pp. 67–87.
- G.B. DIJKSTERHUIS ET J.R. PIGGOT (2001). Dynamic methods of sensory analysis. *Trends In Food Science and Technology*, **11**, pp. 284–290.
- L.M. DUIZER, K. BLOOM ET C.J. FINDLAY (1995). The effect of line orientation on the recording of time intensity perception of sweetener solutions. *Food Quality and Preference*, **6**(2), pp. 121–126.
- L.M. DUIZER, K. BLOOM ET C.J. FINDLAY (1997). Dual attribute time-intensity sensory evaluation: a new method for temporal measurement of sensory perceptions. *Food Quality and Preference*, **8**(4), pp. 261–269.
- S. ECHOLS, A. LAKSHMANAN, S. MUELLER, F. ROSSI ET A. THOMAS (2003). Parametric modelling of time intensity data collected on product prototypes generated from a fractional factorial experiment to quantify sources of texture variability. *Food Quality and Preference*, **14**(5-6), pp. 527–536.
- B. EFRON (1979). Bootstrapping methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, **7**, pp. 1–26.
- P.H.C. EILERS ET G.B. DIJKSTERHUIS (2004). A parametric model for time intensity curves. *Food Quality and Preference*, **15**(3), pp. 239–245.
- P.X. ETIEVANT, G. CALLEMENT, D. LANGLOIS, S. ISSANCHOU ET N. COQUIBUS (1999). Odor intensity evaluation in gas chromatography-olfactometry by finger span method. *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, **47**(4), pp. 1673–1680.
- B. FEI, B. KEMPER ET D.L. WILSON (2003). A comparative study of warping and rigid body registration for the prostate and pelvic mr volumes. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, **27**, pp. 267–281.
- U. FISHER, R.B. BOULTON ET A.C. NOBLE (1994). Physiological factors contributing to the variability of sensory assessments: Relationship between salivary flow rate and temporal perception of gustatory stimuli. *Food Quality and Preference*, **5**, pp. 55–64.
- M.-A. FREITAS, W. BORGES ET L.-. HO (2003). A statistical model for shelf life estimation using sensory evaluations scores. *Communications in statistics theory and methods*, **32**(8), pp. 1559–1589.
- M.B. FROST, H. HEYMAN, W.L.P. BREDIE, G.B. DIJKSTERHUIS ET M. MARTENS (2005). Sensory measurement of dynamic flavour intensity in ice ream with different fat levels and flavourings. *Food Quality and Preference*, **16**(4), pp. 305–314.

- D. GARRIDO, A. CALVI NO ET G. HOUGH (2001). A parametric model to average time-intensity taste data. *Food Quality and Preference*, **12**(1), pp. 1–8.
- J. GOUGH, K. KARPLUS, R. HUGHEY ET C. CHOTHIA (2001). Assignment of homology to genome sequences using a library of hidden markov models that represent all proteins of known structure. *Journal of Molecular Biology*, **313**(4), pp. 903–919.
- J. C. GOWER (1975). Generalized procrustes analysis. *Psychometrika*, **40**(1), pp. 33–51.
- J.X. GUINARD, C. WEE, A. MACSUNAS ET D. FRITTER (2002). Flavor release from salad dressing varying in fat and garlic flavor. *Food Quality and Preference*, **13**(3), pp. 129–137.
- F.R. HARKER, K. LAU ET A. GUNSEN (2003). Juiciness of fresh fruit: a time intensity study. *Postharvest Biology and Technology*, **29**, pp. 55–60.
- G. HOUGH, L. GARITTA ET G. GOMEZ (2006). Sensory shelf life predictions by survival analysis accelerated storage models. *Food Quality and Preference*, **17**(6), pp. 468–473.
- G. HOUGH, K. LANGHOR, G. GOMEZ ET A. CURIA (2003). Survival analysis applied to sensory shelf life of foods. *Journal of Food Science*, **68**, pp. 359–362.
- T. JUE, J. WARRENA, J. CARSONF J., M. BELLOD, I. KAKADIARISD, W. CHIUB, C. THALLERB ET G. EICHELEC (2006). 3d volume reconstruction of a mouse brain from histological sections using warp filtering. *Journal of Neuroscience Methods*, **156**, pp. 84–100.
- S. KALLITHRAKA, J. BAKKER, M.N. CLIFFORD ET L. VALLIS (2001). Correlations between saliva protein composition and some time-intensity parameters of astringency. *Food Quality and Preference*, **12**(2), pp. 145–152.
- F. KAZI-AOUAL, S. HITIER, R. SABATIER ET J.D. LEBRETON (1995). Refined approximations to permutation tests for multivariate inference. *Computational Statistics and Data Analysis*, **20**(6), pp. 643–656.
- M. LALLEMAND, A. GIBOREAU, A. RYTZ ET B. COLAS (1999). Extracting parameters from time intensity curves using a trapezoid model: the example of some sensory attributes of ice cream. *Journal of Sensory Studies*, **14**, pp. 387–399.
- N. LARSON-POWERS ET R.M. PANGBORN (1978). Paired comparison and time intensity measurements of the sensory properties of beverages and gelatines containing sucrose or synthetic sweeteners. *Journal of Animal Science*, **43**, pp. 41–46.
- C. LAVIT (1988). *Analyse conjointe de tableaux quantitatifs*. Masson.
- F. LEBER, M. BENOÎT, C. SCHOTT, J.-F. MARI ET C. MIGNOLET (2004). Studying crop sequences with carrotage, a hmm-based data mining software. *Ecological Modelling*, **191**(1), pp. 170–185.
- S. LEDAUPHIN, M. HANAFI ET E.M. QANNARI (2004). Simplification and signification of principal components. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **74**(2), pp. 277–281.

- S. LEDAUPHIN, M. HANAFI ET E.M. QANNARI (2006). Assessment of the agreement among the subjects in fixed vocabulary profiling. *Food Quality and Preference*, **17**, pp. 277–280.
- Y.H. LIU ET H.J.H. MACFIE (1990). Methods for averaging time intensity curves. *Chemical Senses*, **15**, pp. 471–484.
- H.J.H. MACFIE ET Y.H. LIU (1992). Developments in the analysis of time intensity curves. *Food Technology*, **46**(11), pp. 92–97.
- C. MALABAT, D. SAINT-DENIS ET D.N. RUTLEDGE (2004). Amélioration du traitement des données chromatographiques par chimiométrie à l'aide d'outils d'alignement: application à l'analyse du lait. Dans *Forum LABO & Forum BIOTECH*, CNIT Paris-La Défense, France.
- L. MIOCHE, P. BOURDIOL, S. MONIER ET J.F. MARTIN (2002). The relationship between chewing activity and food bolus properties obtained from different meat textures. *Food Quality and Preference*, **13**, pp. 583–588.
- L.J. MOORE ET C.F. SHOEMAKER (1981). Sensory textural properties of stabilised ice cream. *Journal of Food Science*, **46**, pp. 399–409.
- T. NAES ET E. RISVIK (1996). *Multivariate analysis of data in sensory science*. Elsevier.
- A.J. NEILSEN (1957). Time intensity studies. *Drug and Cosmetic Industry*, **80**, pp. 452–453.
- N. V. NIELSEN, J. M. CARSTENSEN ET J. SMEDSGAARD (1998). Aligning of single and multiple wavelength chromatographic profiles for chemometric data analysis using correlation optimised warping. *Journal of Chromatography A*, **805**, pp. 17–35.
- T.L. NWE, S.W. FOO ET L.C. DE SILVA (2003). Speech emotion recognition using hidden markov models. *Speech communication*, **41**, pp. 603–623.
- I. OVEJERO-LOPEZ, R. BRO ET W.L.P. BREDIE (2005). Univariate and multivariate modelling of flavour release in chewing gum using time-intensity: a comparison of data analytical methods. *Food Quality and Preference*, **16**(4), pp. 327–343.
- P. OVERBOSH, J.C. VAN DEN ENDEN ET B.M. KEUR (1986). An improved method for measuring perceived intensity time relationships in human taste and smell. *Chemical Senses*, **11**, pp. 331–338.
- R.M. PANGBORN ET A. KOYASAKO (1981). Time course of viscosity, sweetness and flavour in chocolate desserts. *Journal of Texture Studies*, **12**, pp. 141–150.
- C. PEYVIEUX ET G. DIJKSTERHUIS (2001). Training a sensory panel for ti: a case study. *Food Quality and Preference*, **12**(1), pp. 19–28.
- J.F. PFEIFFER, R.B. BOULTON ET A.C. NOBLE (2000). Modelling the sweetness response using time-intensity data. *Food Quality and Preference*, **11**, pp. 129–138.
- N. PINEAU (2004). Méthodes d'acquisition, de codage et d'analyse de profils sensoriels temporels. Dans *8èmes Journées Agro-Industries et Méthodes Statistiques*, pp. 87–93, Rennes, France.

- N. PINEAU, R. PESSINA, S. CORDELLE, A. IMBERT, M. ROGEAUX ET P. SCHLICH (2004). Temporal dominance of sensations: comparison with conventional profiling and time-intensity. Dans *7th Sensometrics Meeting*, p. 40, Davis, California.
- E.M. QANNARI, P. COURCOUX, M. LEJEUNE ET O. MAYSTRE (1997). Comparaison de trois stratégies de détermination d'un compromis en évaluation sensorielle. *Revue de Statistiques Appliquée*, **XLV**(1), pp. 61–74.
- E.M. QANNARI, H.J.H. MACFIE ET P. COURCOUX (1999). Performance indices and isotropic scaling factors in sensory profiling. *Food Quality and Preference*, **10**, pp. 17–21.
- L. RABINER ET B.H. JUANG (1993). *Fundamentals of speech recognition*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall.
- H.-J. RAMAKER, E.N.M. VAN SPRANG, J.A. WESTERHUIS ET A.K. SMILDE (2003). Dynamic time warping of spectroscopic batch data. *Analytica Chimica Acta*, **498**, pp. 133–153.
- J.O. RAMSAY ET X. LI (1998). Curve registration. *Journal of Royal Statistical Society*, **60**(2), pp. 351–363.
- J.O. RAMSAY ET B.W. SILVERMAN (1997). *Functional Data Analysis*. Springer series in statistics, Springer-Verlag, New York.
- C. SALLES, T.A. HOLLOWOOD, R.S.T. LINFORTH ET A.J. TAYLOR (2002). Relating real time flavour release to sensory perception of soft cheeses. Dans *Flavour Research at the Dawn of the Twenty first Century Proceedings of the 10th Weurman Flavour Research Symposium*, pp. 170–175, Beaune, France.
- A. SALVADOR, S.-M. FISZMAN, A. CURIA ET G. HOUGH (2005). Survival analysis applied to sensory shelf life of yogurts ii: Spanish formulations. *Journal of Food Science*, **70**(7), pp. 442–445.
- P. SCHLICH (1993). *Contribution à la sensométrie*. Ph d. dissertation, Université Paris Sud.
- P. SCHLICH (1996). *Multivariate Analysis of Data in Sensory Science: Defining and validating assessor compromises about product distances and attribute correlations*. Elsevier, Naes and Risvik, Amsterdam.
- L.B. SJÖSTRÖM ET S.E. CAIRNCROSS (1953). Analysis of flavor. Dans *Food Acceptance Testing Methodology*, pp. 87–93, Symposium Palmer House, Chicago. Quartermaster Food and Container Institute, Chicago.
- SSHA (1998). *Evaluation sensorielle. Manuel méthodologique. 2^{ème} édition*. TEC & DOC, Lavoisier, Paris.
- G. TOMASI, F. VAN DEN BERG ET C. ANDERSSON (2004). Correlation optimized warping and dynamic time warping as preprocessing methods for chromatographic data. *Journal of Chemometrics*, **18**, pp. 231–241.
- H. TUORILA, C. SOMMERDAHL ET L. HYVONEN (1995). Does fat affect the timing of flavor perception? a case study with yoghurt. *Food Quality and Preference*, **6**, pp. 55–58.

- H. VALENTOVÁ, S. SKROVAÁNKOVÁ, Z. PANOVSÁ ET J. POKORNÝ (2002). Time intensity studies of astringent taste. *Food Chemistry*, **78**, pp. 29–37.
- I. WAKELING, M.M. RAATS ET H.J.H. MACFIE (1992). A comparison of consensus tests for generalised procrustes analysis. *Journal of Sensory Studies*, **7**, pp. 91–96.
- A. A. WILLIAMS ET S. P. LANGRON (1984). The use of free choice profiling for the evaluation of commercial ports. *Journal of Science of Food and Agriculture*, **35**, pp. 558–568.
- E. WILSON ET W.E. BROWN (1997). Influence of food matrix structure and oral breakdown during mastication on temporal perception of flavor. *Journal of Sensory Studies*, **21**, pp. 69–86.
- W. YU ET G.B. SHEBLÉ (2006). Modeling electricity markets with hidden markov model. *Electricity Power Systems Research*, **76**(6-7), pp. 445–451.
- J. ZIMICH ET E.A. GULLET (1997). Temporal aspects of perception of juiciness and tenderness of beef. *Food Quality and Preference*, **8**(3), pp. 203–211.