

# Automorphismes et admissibilité dans les groupes de Coxeter et les monoïdes d'Artin-Tits

Anatole Castella

► **To cite this version:**

Anatole Castella. Automorphismes et admissibilité dans les groupes de Coxeter et les monoïdes d'Artin-Tits. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. tel-00136943

**HAL Id: tel-00136943**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00136943>**

Submitted on 16 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2782

UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

## THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Anatole CASTELLA

AUTOMORPHISMES ET ADMISSIBILITÉ DANS LES GROUPES  
DE COXETER ET LES MONOÏDES D'ARTIN-TITS

Soutenue le 13 décembre 2006 devant la commission d'examen constituée de :

M. Patrick DEHORNOY	(Président du jury)
M. Jean-Yves HÉE	(Directeur de thèse)
M. Jean MICHEL	
M. Luis PARIS	(Rapporteur)
M. Frédéric PAULIN	

Membre de la commission absent le jour de la soutenance :

M. Bernhard MÜHLHERR	(Rapporteur)
----------------------	--------------



## Remerciements

L'exercice des remerciements n'est pas facile, peut-être le pratiquons-nous trop rarement. Essayons.

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse Jean-Yves Hée. Il est à l'origine de mon intérêt pour les sujets traités dans ce mémoire, et m'a bien sûr considérablement aidé dans l'élaboration de ce dernier. Il a toujours été avec moi d'une grande disponibilité et d'une remarquable bienveillance (sans céder sur la rigueur mathématique), tout en me laissant une grande autonomie.

Outre mon directeur de thèse, je dois de vifs remerciements aux membres du GDR Tresses qui m'ont chaleureusement accueilli, invité à présenter mes travaux, et avec qui j'ai pu avoir de profitables discussions, en particulier à François Digne, Jean Michel, Luis Paris, Ivan Marin, Eddy Godelle et Patrick Dehornoy.

C'est un honneur pour moi que Patrick Dehornoy, Jean Michel, Bernhard Mühlherr, Luis Paris et Frédéric Paulin aient accepté de faire partie de mon jury. Je remercie encore Bernard Mühlherr et Luis Paris pour avoir bien voulu être les rapporteurs de ma thèse.

Un grand merci à mes parents pour tout, et à mes grands-parents pour leur soutien inconditionnel (malgré les groupes de "Coquecigrue"! ). Je pense également à mes frères, mes belles-sœurs et aux petits nouveaux de l'année : Valentine et Raphaël.

Je souhaite aussi saluer Evelyne et Patrick et les remercier de leur gentillesse et de tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Je ne serais rien non plus sans mes amis, ceux de Monastir, de Loudun ou de Tours, que j'ai trop délaissés depuis mon arrivée à Paris, et ceux qui m'ont permis de m'acclimater dans cette ville du nord : Cédric, Nico (1 et 2), Freud, J-B, Kiki, Céline (il y en a aussi plusieurs), David, Marc, Seb, Anne-Cé, Lapin, Olivier, Aurélien, Anne, Bertrand, Hervé, Hakim, Claire, Raphaëlle, Gihène, Yann, Laurence et Jean, Thomas et Pénélope ...

Et Célia



# Sommaire

<b>Introduction.</b>	<b>1</b>
<b>I Sur les automorphismes et la rigidité des groupes de Coxeter à angles droits.</b>	<b>11</b>
<b>1 Préliminaires.</b>	<b>13</b>
1.1 Généralités sur les groupes et sur les groupes de Coxeter. . . . .	13
1.2 Le cas à angles droits. . . . .	14
<b>2 Outils.</b>	<b>17</b>
2.1 Ensembles à relation. . . . .	17
2.2 Cellules et noyaux. . . . .	18
2.3 Théorème principal. . . . .	20
<b>3 Sur la rigidité des groupes de Coxeter à angles droits.</b>	<b>23</b>
3.1 Les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides. . . . .	23
3.2 Sur la rigidité forte. . . . .	24
<b>4 Le groupe <math>Aut([S], [S]_c)</math>.</b>	<b>27</b>
4.1 Les sous-groupes $Aut(\Gamma)$ et $K(\Gamma)$ . Dévissage de $Aut([S], [S]_c)$ . . . . .	27
4.2 Les sous-groupes $D(\Gamma)$ et $K^\circ(\Gamma)$ . Dévissage de $K(\Gamma)$ . . . . .	28
4.3 Étude du groupe $K^\circ(\Gamma)$ . . . . .	29
— Les sous-groupes $K_Y^\circ(\Gamma)$ , $Y \subseteq S$ , de $K^\circ(\Gamma)$ . . . . .	29
— Parties d'épaisseur nulle. . . . .	31
— Profondeur et décomposition en parties d'épaisseur nulle. . . . .	33
4.4 Conclusion. . . . .	34
— Cas des groupes de Coxeter à angles droits de rang fini. . . . .	35
<b>5 Exemples.</b>	<b>37</b>

<b>II</b>	<b>Sous-monoïdes admissibles des monoïdes d'Artin-Tits.</b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>Préliminaires.</b>	<b>43</b>
6.1	Généralités sur les monoïdes. . . . .	43
6.2	Monoïdes et groupes d'Artin-Tits. . . . .	44
<b>7</b>	<b>Partitions admissibles.</b>	<b>47</b>
7.1	Définitions. . . . .	47
7.2	Partitions admissibles et groupes de Coxeter. . . . .	48
7.3	Exemples. . . . .	50
<b>8</b>	<b>Morphismes admissibles entre monoïdes d'Artin-Tits.</b>	<b>51</b>
8.1	Morphismes qui respectent les ppcm. . . . .	51
8.2	Partitions admissibles et monoïdes d'Artin-Tits. . . . .	52
8.3	Les morphismes admissibles dans la littérature. . . . .	54
—	Morphismes admissibles et automorphismes du graphe. . . . .	54
—	Morphismes admissibles et LCM-homomorphismes. . . . .	55
—	Morphismes admissibles et éclatement d'un graphe de Coxeter. . . . .	56
8.4	Quelques propriétés des morphismes admissibles. . . . .	58
—	Respect de la combinatoire des monoïdes d'Artin-Tits. . . . .	58
—	Composé de morphismes admissibles. . . . .	60
—	Interprétations géométriques. . . . .	61
<b>9</b>	<b>Classification.</b>	<b>63</b>
9.1	Partitions admissibles et réductibilité. . . . .	63
—	Partition d'un graphe sphérique en composantes connexes. . . . .	63
—	Trace d'une partition admissible sur les composantes connexes. . . . .	64
9.2	Classification des 2-partitions admissibles des graphes sphériques. . . . .	66
—	2-partitions admissibles des graphes $A_n$ , $B_n$ et $D_n$ . . . . .	66
—	2-partitions admissibles des graphes $E_6$ , $E_7$ et $E_8$ . . . . .	67
—	2-partitions admissibles des graphes $F_4$ , $H_3$ , $H_4$ (et $I_2(m)$ ). . . . .	68
9.3	Pliages. . . . .	68
<b>III</b>	<b>Sur la représentation de Krammer-Paris.</b>	<b>71</b>
<b>10</b>	<b>Préliminaires.</b>	<b>73</b>
10.1	Systèmes de racines standard. . . . .	73
10.2	Relations binaires. . . . .	74

---

10.3 Morphismes de Krammer. . . . .	74
<b>11 Représentation de Krammer-Paris.</b>	<b>77</b>
11.1 Définition. . . . .	77
11.2 Sur la fidélité de la représentation de Krammer-Paris. . . . .	79
11.3 Action d'un groupe d'automorphismes du graphe. . . . .	80
<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>





# Introduction.

Ce texte est une contribution à l'étude des groupes de Coxeter et des groupes d'Artin-Tits. Les premiers ont été introduits par H.S.M. Coxeter [Cox35], pour l'étude des groupes finis de réflexions réelles, et les seconds sont apparus dans un article d'E. Artin [Art25], dans le cas particulier du *groupe des tresses*. Dans les deux cas, les définitions générales ont été données par J. Tits, dans [Tit61] pour les premiers et dans [Tit66] pour les seconds.

Nous abordons et étudions ces groupes de façon combinatoire. Les principaux résultats obtenus ici concernent les différents systèmes de Coxeter (resp. d'Artin-Tits) que l'on peut trouver dans un même groupe de Coxeter (resp. d'Artin-Tits) : nous nous intéressons, dans un premier temps, aux systèmes de Coxeter admis par un groupe de Coxeter dans son entier, puis, dans un second temps, à des sous-groupes d'un groupe de Coxeter (resp. d'Artin-Tits) qui sont eux-mêmes des groupes de Coxeter (resp. d'Artin-Tits).

Ce travail se décompose en trois parties, les deux dernières étant indépendantes de la première.

Dans la première partie, nous poursuivons les études de [Tit88, Müh98, Rad01, Hos03] sur le *problème d'isomorphie* des groupes de Coxeter à *angles droits*, qui consiste à déterminer les différents systèmes de Coxeter qu'admet un groupe de Coxeter fixé. Nous complétons la description du groupe des automorphismes d'un groupe de Coxeter à angles droits de [Tit88, Müh98], en étudiant le second des deux sous-groupes qui apparaissent dans la décomposition en produit semi-direct établie dans [Tit88] (le premier est décrit dans [Müh98]). Notre étude nous fournit une nouvelle preuve du fait que les groupes de Coxeter à angles droits sont *rigides* [Rad01, Hos03], c'est-à-dire que chacun admet un unique système de Coxeter (à isomorphisme près). Les résultats de cette première partie ont été publiés au *Journal of Algebra* **301** (2006), pages 642-669.

Dans la deuxième partie, nous introduisons la notion de sous-monoïde (resp. sous-groupe) *admissible* d'un monoïde (resp. groupe) d'Artin-Tits. La terminologie choisie vient du fait que ces sous-monoïdes (resp. sous-groupes) sont induits par une *partition admissible* du graphe de Coxeter, au sens de B. Mühlherr [Müh93]. Nous montrons qu'un sous-monoïde (resp. sous-groupe) admissible d'un monoïde d'Artin-Tits (resp. d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique) est un monoïde (resp. groupe) d'Artin-Tits. Cette construction généralise et unifie différentes situations déjà considérées dans la littérature, notamment la situation des sous-monoïdes (resp. sous-groupes) des points fixes d'un monoïde d'Artin-Tits (resp. d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique) sous l'action d'un groupe d'automorphismes du graphe, étudiée dans [DP99, Mic99, Cri00, BDM02], et la notion de LCM-homomorphisme définie dans [Cri99, God02]. Nous achevons la classification des partitions admissibles des graphes de Coxeter sphériques, commencée dans [Müh94] ; elle nous fournit, par exemple, la classification des LCM-homomorphismes de [Cri99].

Dans la troisième partie, nous considérons le monoïde  $B^+$  et le groupe d'Artin-Tits  $B$  associés à un graphe de Coxeter  $\Gamma$  *simplement lacé* et *sans triangle*, et nous étudions la représentation linéaire de  $B$  construite par L. Paris dans [Par02]. Nous nous intéressons plus précisément à la représentation du sous-monoïde des points fixes  $(B^+)^G$  de  $B^+$  sous l'action d'un groupe  $G$  d'automorphismes de  $\Gamma$  induite par cette représentation. Le sous-monoïde  $(B^+)^G$  stabilise le sous-espace des points fixes de l'espace de la représentation sous l'action de  $G$ . Nous montrons que, si le groupe  $G$  est fini, la représentation de  $(B^+)^G$  dans le sous-espace ainsi obtenue est fidèle ; lorsque le sous-monoïde est de type sphérique, cela implique que la représentation du sous-groupe des points fixes  $B^G$  de  $B$  sous l'action de  $G$  dans le sous-espace est fidèle.

Voici les définitions précises des groupes de Coxeter et des monoïdes et groupes d'Artin-Tits, suivies d'un résumé plus détaillé, partie par partie, des résultats de cette thèse.

Une *matrice de Coxeter* est une matrice symétrique  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  à coefficients dans  $\mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ , telle que  $m_{i,j} = 1$  si et seulement si  $i = j$ . On identifie une telle matrice  $\Gamma$  et son *graphe de Coxeter*, qui est le graphe d'ensemble de sommets  $I$  et dans lequel deux sommets  $i$  et  $j$  sont reliés par une arête étiquetée  $m_{i,j}$  si  $m_{i,j} \geq 3$  (on omet usuellement l'étiquette lorsque  $m_{i,j} = 3$ ).

On ne suppose pas l'ensemble  $I$  fini, puisque nombre des résultats classiques sur les groupes de Coxeter et les monoïdes et groupes d'Artin-Tits, et des résultats présentés ici, ne font pas intervenir cette hypothèse ; nous l'ajouterons explicitement, si nécessaire.

Le *groupe de Coxeter*  $W_\Gamma$ , le *groupe d'Artin-Tits*  $B_\Gamma$  et le *monoïde d'Artin-Tits*  $B_\Gamma^+$  associés à  $\Gamma$  sont donnés par les présentations :

$$\begin{aligned} W_\Gamma &= \langle s_i, i \in I \mid s_i^2 = 1, \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{i,j}}, \text{ si } m_{i,j} \neq \infty \rangle, \\ B_\Gamma &= \langle s_i, i \in I \mid \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{i,j}}, \text{ si } m_{i,j} \neq \infty \rangle, \\ B_\Gamma^+ &= \langle s_i, i \in I \mid \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{i,j}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{i,j}}, \text{ si } m_{i,j} \neq \infty \rangle^+, \end{aligned}$$

où les deux premières présentations sont des présentations de groupe, et la troisième est une présentation de monoïde. Nous notons de la même façon les générateurs de  $B_\Gamma^+$  et de  $B_\Gamma$ , ce qui ne pose pas de problème puisque, d'après [Par02], le morphisme canonique de  $B_\Gamma^+$  dans  $B_\Gamma$  est injectif et nous permet donc d'identifier  $B_\Gamma^+$  au sous-monoïde de  $B_\Gamma$  engendré par les  $s_i, i \in I$  (le résultat de [Par02] est donné pour  $I$  fini, mais cela implique le résultat général).

On pose  $S_\Gamma = \{s_i \mid i \in I\}$ ,  $\mathbf{S}_\Gamma = \{\mathbf{s}_i \mid i \in I\}$  et l'on dit que le couple  $(W_\Gamma, S_\Gamma)$  (resp.  $(B_\Gamma, \mathbf{S}_\Gamma)$ , resp.  $(B_\Gamma^+, \mathbf{S}_\Gamma)$ ) est le *système de Coxeter* (resp. le *système d'Artin-Tits*, resp. le *système d'Artin-Tits positif*) de type  $\Gamma$ . Un tel système détermine son type, à isomorphisme près, car, d'après [Bou68, Ch. V, n° 4.3], le coefficient  $m_{i,j}$  de la matrice  $\Gamma$  est exactement l'ordre du produit  $s_i s_j$  dans le groupe  $W_\Gamma$ . En particulier, pour  $i, j \in I, i \neq j$ , on a  $s_i \neq s_j$  (et donc  $\mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}_j$ ).

On note  $Aut(\Gamma)$  le *groupe des automorphismes* de  $\Gamma$ , c'est-à-dire des permutations  $\sigma$  de  $I$  telles que, pour tous  $i, j \in I$ ,  $m_{\sigma(i), \sigma(j)} = m_{i,j}$ . Vu les présentations données ci-dessus, le groupe  $Aut(\Gamma)$  s'identifie — en associant à chaque permutation de  $I$  la permutation de  $S_\Gamma$  (resp. de  $\mathbf{S}_\Gamma$ ) correspondante — à un sous-groupe du groupe  $Aut(W_\Gamma)$  (resp.  $Aut(B_\Gamma)$ , resp.  $Aut(B_\Gamma^+)$ ) des automorphismes de  $W_\Gamma$  (resp. de  $B_\Gamma$ , resp. de  $B_\Gamma^+$ ).

Par exemple, si  $\Gamma$  est le graphe  $A_n = \overset{1}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} \overset{3}{\bullet} \dots \text{---} \overset{n}{\bullet}$ , alors, à isomorphisme près,  $W_\Gamma$  est le groupe symétrique  $\text{Sym}_{n+1}$  (et  $s_i$  est la transposition  $(i, i+1)$ ) et  $B_\Gamma$  est le groupe des tresses à  $n+1$  brins (et  $s_i$  est le croisement du brin  $i+1$  au-dessus du brin  $i$ ).

—

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du problème d'isomorphie (explicité dans l'encadré ci-dessous) des groupes de Coxeter à *angles droits* : on dit qu'une matrice de Coxeter  $\Gamma$  et le groupe de Coxeter associé  $W_\Gamma$  sont à *angles droits* si  $\Gamma$  est à coefficients dans  $\{1, 2, \infty\}$ .

**Problème d'isomorphie.** Soit  $\Gamma$  une matrice de Coxeter.

1. Déterminer le groupe  $\text{Aut}(W_\Gamma)$  des automorphismes de  $W_\Gamma$ .
2. Décrire les matrices de Coxeter  $\Gamma'$  pour lesquelles le groupe  $W_{\Gamma'}$  est isomorphe à  $W_\Gamma$ .

On dit que  $\Gamma$  et  $W_\Gamma$  sont *rigides* si  $W_{\Gamma'} \approx W_\Gamma$  implique  $\Gamma' \approx \Gamma$ . Cette propriété n'est pas toujours satisfaite : les groupes de Coxeter associés aux deux graphes de Coxeter non isomorphes suivants (où  $n \geq 1$ ) :

$$\bullet \xrightarrow{2(2n+1)} \bullet \quad \text{et} \quad \bullet \xrightarrow{2n+1} \bullet,$$

sont isomorphes au groupe diédral d'ordre  $4(2n+1)$  (la partie génératrice considérée s'envoyant sur un ensemble constitué, dans le premier cas, de deux réflexions dont les axes forment un angle de  $\frac{\pi}{2(2n+1)}$ , et, dans le second cas, de  $-Id$  et de deux réflexions dont les axes forment un angle de  $\frac{\pi}{2n+1}$ ).

Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter à angles droits et  $(W, S) = (W_\Gamma, S_\Gamma)$  le système de Coxeter de type  $\Gamma$ .

À notre connaissance, les premières études du groupe  $\text{Aut}(W)$  sont les articles (parus simultanément) [Jam88, Tit88]. Dans [Jam88], L. James a déterminé  $\text{Aut}(W)$  dans le cas du graphe linéaire fini  $\Gamma = \bullet \overset{\infty}{\text{---}} \bullet \overset{\infty}{\text{---}} \bullet \dots \text{---} \bullet$ . Au début de [Tit88], J. Tits a établi, de façon générale, la décomposition suivante :

$$\text{Aut}(W) = \ker(\pi_{\text{Aut}}) \rtimes \text{Aut}(W, F_S), \quad \text{où}$$

- $\ker(\pi_{\text{Aut}})$  est le noyau du morphisme  $\pi_{\text{Aut}} : \text{Aut}(W) \rightarrow \text{Aut}(W^{ab})$  induit par la projection canonique de  $W$  sur son abélianisé  $W^{ab}$ ,
- $\text{Aut}(W, F_S)$  est le groupe constitué des automorphismes de  $W$  qui stabilisent la réunion  $F_S$  des sous-groupes *S-sphériques* de  $W$ , c'est-à-dire des sous-groupes *finis* de  $W$  de la forme  $\langle s_i \mid i \in J \rangle$ , où  $J \subseteq I$ .

J. Tits a commencé l'étude de ces deux groupes dans la suite de [Tit88] ; il a déterminé le groupe  $\text{Aut}(W, F_S)$  dans quelques exemples, et fourni des indications pour en faire une étude systématique. Dans [Müh98], B. Mühlherr a donné une présentation par générateurs et relations du groupe  $\ker(\pi_{\text{Aut}})$  (il le note  $\text{Spe}(W)$ ), dans le cas où  $I$  est fini.

D.G. Radcliffe [Rad99] et T. Hosaka [Hos03] ont montré que, si l'on ne considère que des matrices de Coxeter de taille finie, alors les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides. Ils utilisent pour cela des méthodes de dénombrement qui ne s'appliquent pas aux matrices de Coxeter de taille infinie.

Le but de cette partie est de décrire le groupe  $Aut(W, F_S)$ . Notre étude nous permet en particulier de montrer, en toute généralité (sans l'hypothèse de finitude de  $I$ ), que le groupe  $W$  est rigide. Après la première diffusion de ces résultats, D. G. Radcliffe nous a signalé que le résultat de rigidité est en fait conséquence du théorème [Rad01, 5.23] de sa thèse, dont nous n'avions alors pas connaissance. Nous espérons que notre approche du problème n'est pas rendue superflue par celle de [Rad01]; signalons, pour justifier cet espoir, que notre démonstration semble plus simple que celle de [Rad01, 5.23], puisqu'elle ne repose essentiellement que sur des résultats de [Tit88] et sur des raisonnements combinatoires.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les propriétés générales des groupes de Coxeter nécessaires à notre étude, et les résultats principaux établis par J. Tits dans [Tit88]. Ceux-ci impliquent que, si  $\Gamma$  est une matrice de Coxeter à angles droits, alors les seules matrices de Coxeter  $\Gamma'$  telles que  $W_\Gamma \approx W_{\Gamma'}$  sont à angles droits et de même dimension (finie ou infinie) que  $\Gamma$ ; de plus, pour de telles matrices  $\Gamma'$ , il existe un isomorphisme du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $[S]$  des parties finies de  $S$  sur l'espace vectoriel  $[S']$  des parties finies de  $S' = S_{\Gamma'}$ , qui envoie l'ensemble  $[S]_c$  des parties finies et commutatives de  $S$  sur l'ensemble  $[S']_c$  des parties finies et commutatives de  $S'$ . Ils permettent aussi d'identifier le groupe  $Aut(W, F_S)$  (via  $\pi_{Aut}$ ) au groupe  $Aut(W^{ab}, \overline{F})$  constitué des automorphismes de  $W^{ab}$  qui stabilisent l'image  $\overline{F}$  de l'ensemble  $F$  des éléments d'ordre fini de  $W$ , ou encore au groupe  $Aut([S], [S]_c)$  des automorphismes de  $[S]$  qui stabilisent  $[S]_c$  (cf. sections 1.1 à 1.2).

Dans le chapitre 2, nous introduisons les outils et présentons les premiers résultats nécessaires à notre étude. La terminologie employée — motivée par la situation de l'ensemble  $S = S_\Gamma$  muni de la relation de commutation dans  $S$  — et le résultat principal sont les suivants (nous suivons ici, en partie, les idées de [Tit88], notamment pour les propriétés et le rôle des *cellules*) :

**Définitions** (2.1.1, 2.1.4, 2.2.1 et 2.2.4). Nous appelons *ensemble à relation* tout couple  $(E, R)$  où  $E$  est un ensemble et  $R$  une relation binaire symétrique et réflexive sur  $E$ . Si  $(E, R)$  et  $(E', R')$  sont deux ensembles à relation, nous appelons *isomorphisme d'ensembles à relation* de  $(E, R)$  sur  $(E', R')$  toute bijection  $\sigma$  de  $E$  sur  $E'$  telle que  $(\sigma \times \sigma)(R) = R'$ .

Soit  $(E, R)$  un ensemble à relation. Nous notons  $\mathcal{P}(E)$  (resp.  $[E]$ ) le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel des parties (resp. des parties finies) de  $E$  (cf. section 1.1). Nous notons  $\mathcal{P}_c(E)$  (resp.  $[E]_c$ ) l'ensemble des parties (resp. des parties finies) de  $E$  constituées d'éléments deux à deux en relation  $R$ .

Soit  $C : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ ,  $X \mapsto \{y \in E \mid \forall x \in X, yRx\}$ . Nous appelons *noyaux* les classes d'équivalence de la relation  $C(\{x\}) = C(\{y\})$  sur  $E$ . Si  $N$  est un noyau, on appelle *cellule* de  $N$  la partie  $Cel(N) = C^2(\{x\})$ ,  $x \in N$  (indépendante du choix de  $x \in N$ ). Nous notons  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(E, R)$  l'ensemble des noyaux et  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E, R)$  l'ensemble des cellules. On munit l'ensemble  $\mathcal{N}$  (resp.  $\mathcal{C}$ ) de la relation binaire symétrique et réflexive  $R_{\mathcal{P}}$  donnée par  $XR_{\mathcal{P}}Y \Leftrightarrow X \cup Y \in \mathcal{P}_c(E)$ .

**Théorème** (2.3.6). *Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ensembles à relation et soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $[E]$  sur  $[E']$  envoyant  $[E]_c$  sur  $[E']_c$ .*

1. *L'isomorphisme  $\varphi$  induit un isomorphisme d'ensembles à relation qui respecte le cardinal*

$$\varphi_{\mathcal{N}} : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{N}', R'_{\mathcal{P}}) \\ N & \longmapsto & N' \end{array} \right. , \quad \text{où } \varphi([Cel(N)]) = [Cel(N')].$$

2. Les ensembles à relation  $(E, R)$  et  $(E', R')$  sont isomorphes.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la rigidité (section 3.1) et d'une notion plus fine de rigidité (section 3.2) des groupes de Coxeter à angles droits. Lorsque  $W_\Gamma \approx W_{\Gamma'}$ , on est assuré, grâce aux résultats du chapitre 1 rappelés ci-dessus, du fait que la matrice  $\Gamma'$  est à angles droits et de l'existence d'un isomorphisme de  $[S]$  sur  $[S']$  qui envoie  $[S]_c$  sur  $[S']_c$ . On obtient donc, comme corollaire du Théorème 2.3.6 et de façon indépendante de [Rad99, Hos03, Rad01], le résultat suivant :

**Théorème (3.1.2).** *Les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides.*

Dans le chapitre 4, nous décrivons le groupe  $Aut(W, F_S)$ , que l'on choisit d'expliciter en termes d'algèbre linéaire sur  $\mathbb{F}_2$ , en profitant de son identification au groupe  $Aut([S], [S]_c)$  rappelée ci-dessus. Soit  $R = R_\Gamma$  la relation de commutation dans  $S$ . Posons  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(S, R)$  et  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(S, R)$ .

Le théorème 2.3.6 fournit le morphisme  $\theta : \varphi \mapsto \varphi_{\mathcal{N}}$ , de  $Aut([S], [S]_c)$  dans le groupe  $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$  des automorphismes de l'ensemble à relation  $(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}})$  qui respectent le cardinal; on note  $K(\Gamma)$  le noyau de  $\theta$ . Dans la section 4.1, on construit une section de  $\theta$  à valeurs dans le groupe  $Aut(\Gamma)$ , on dispose donc d'un sous-groupe  $G$  de  $Aut(\Gamma)$  tel que  $Aut([S], [S]_c) = K(\Gamma) \rtimes G$  (cf. Proposition 4.1.3).

Dans la section 4.2, on montre que le groupe  $K(\Gamma)$  est exactement le groupe des automorphismes de  $[S]$  qui stabilisent chaque sous-espace  $[T]$ , pour  $T \in \mathcal{C}$  (cf. proposition 4.2.1). Il se décompose lui-même en le produit semi-direct  $K(\Gamma) = K^\circ(\Gamma) \rtimes D(\Gamma)$  (cf. proposition 4.2.5), où  $D(\Gamma)$  est le groupe des automorphismes de  $[S]$  qui stabilisent chaque sous-espace  $[N]$ , pour  $N \in \mathcal{N}$  — comme  $\mathcal{N}$  est une partition de  $S$ , on a  $[S] = \bigoplus_{N \in \mathcal{N}} [N]$  et  $D(\Gamma) \approx \prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N])$  — et où  $K^\circ(\Gamma)$  est le sous-groupe de  $K(\Gamma)$  suivant (cf. notation 4.2.4), où, pour  $s \in S$ , on note  $N(s)$  le noyau de  $s$  et on pose  $(C^2(\{s\}))^\circ = C^2(\{s\}) \setminus N(s)$  :

$$K^\circ(\Gamma) = \{\varphi \in K(\Gamma) \mid \forall s \in S, \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(\{s\}))^\circ]\}.$$

On étudie le groupe  $K^\circ(\Gamma)$  dans la section 4.3. Pour  $Y \subseteq S$ , on note  $K_Y^\circ(\Gamma)$  le sous-groupe de  $K^\circ(\Gamma)$  constitué des éléments de  $K^\circ(\Gamma)$  qui laissent fixe chaque singleton  $\{s\}$ , pour  $s \notin Y$  (cf. notation 4.3.3). On renvoie à la définition 4.3.17 pour la notion "d'épaisseur", dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , de  $Y$ . Lorsque  $Y$  est d'épaisseur nulle, le groupe  $K_Y^\circ(\Gamma)$  est un 2-groupe élémentaire simple à décrire (cf. formules (E1) ou (E2), page 33). Lorsque  $Y$  est d'épaisseur finie  $e$ , on dispose d'une partition de  $Y$  en parties  $Y_0, Y_1, \dots, Y_e$  d'épaisseur nulle (cf. définition 4.3.15) et du résultat suivant :

**Théorème (4.3.18).** *Soit  $Y \subseteq S$  d'épaisseur finie  $e$ . Alors :*

$$K_Y^\circ(\Gamma) = K_{Y_0}^\circ(\Gamma) \rtimes (K_{Y_1}^\circ(\Gamma) \rtimes (\dots \rtimes (K_{Y_{e-1}}^\circ(\Gamma) \rtimes K_{Y_e}^\circ(\Gamma)) \dots)).$$

Ce résultat s'applique au groupe  $K^\circ(\Gamma) = K_S^\circ(\Gamma)$  si  $S$  est d'épaisseur finie (c'est en particulier le cas si  $S$  est fini). Dans la section 4.4, nous interprétons l'étude effectuée en termes matriciels, dans le cas où  $S$  est fini; nous exhibons alors une partie génératrice (en général non minimale) de  $Aut([S], [S]_c)$ , constituée d'automorphismes de  $\Gamma$  et d'automorphismes involutifs.

Dans le chapitre 5, nous illustrons notre propos par quelques exemples qui complètent ceux traités dans [Jam88] et dans [Tit88].

Le but de la deuxième partie est de définir et d'étudier les sous-monoïdes (resp. sous-groupes) *admissibles* d'un monoïde (resp. groupe) d'Artin-Tits. Ils sont l'analogue, pour les monoïdes et groupes d'Artin-Tits, des sous-groupes des groupes de Coxeter définis et étudiés par B. Mühlherr, dans [Müh93], à partir de la notion de *partition admissible* d'un graphe de Coxeter.

Dans le chapitre 6, nous introduisons les notations générales et les propriétés des monoïdes et des groupes d'Artin-Tits utilisées dans le reste de la partie.

Le chapitre 7 est consacré au rappel de la notion de *partition admissible* d'un graphe de Coxeter et des résultats principaux de [Müh93]. La situation est la suivante : considérons une matrice de Coxeter  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  et une partition  $\tilde{I}$  de  $I$  constituée de parties *sphériques*, et formons le sous-groupe  $\tilde{W} = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I} \rangle$  de  $W = W_\Gamma$ , où chaque  $r_\alpha$  est l'unique élément de longueur maximale dans le sous-groupe fini  $W_\alpha = \langle s_i \mid i \in \alpha \rangle$  de  $W$ . Les  $r_\alpha$  sont des éléments d'ordre 2, et il semble naturel de chercher à voir si le couple  $(\tilde{W}, \{r_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I}\})$  est un système de Coxeter. S'il l'est, son type est la matrice  $\tilde{\Gamma} = (|r_\alpha r_\beta|)_{\alpha, \beta \in \tilde{I}}$  formée des ordres des produits  $r_\alpha r_\beta$ .

Par exemple, si  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  a deux éléments, alors  $\tilde{W} = \langle r_\alpha, r_\beta \rangle$  est un groupe diédral d'ordre  $2|r_\alpha r_\beta|$ , donc le couple  $(\tilde{W}, \{r_\alpha, r_\beta\})$  est un système de Coxeter de type  $I_2(|r_\alpha r_\beta|)$ . Par contre, dans le cas de la partition de  $A_5$  suivante :

$$A_5 = \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} \overset{3}{\circ} \text{---} \overset{4}{\circ} \text{---} \overset{5}{\circ}, \text{ avec } \alpha = \{1\}, \beta = \{2\} \text{ et } \gamma = \{3, 4, 5\},$$

le graphe de Coxeter de  $\tilde{\Gamma} = (|r_\alpha r_\beta|)_{\alpha, \beta \in \tilde{I}}$  est le graphe *affine*  $\tilde{G}_2 = \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \overset{\beta}{\bullet} \text{---} \overset{\gamma}{\circ}$ , donc le couple  $(\tilde{W}, \{r_\alpha, r_\beta, r_\gamma\})$  n'est pas un système de Coxeter (puisque  $\tilde{\Gamma}$  est non sphérique alors que  $\tilde{W}$  est fini).

Considérons la longueur  $\ell$  dans  $W$ , par rapport à l'ensemble  $\{s_i \mid i \in I\}$ . On a, pour tout élément  $w \in W$  et tout  $i \in I$ ,  $\ell(ws_i) = \ell(w) \pm 1$ . La condition d'admissibilité d'une partition  $\tilde{I}$  de  $I$  constituée de parties sphériques, est la condition qui spécifie que, pour tout  $(w, \alpha) \in \tilde{W} \times \tilde{I}$ , on a soit  $\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$  pour tout  $i \in \alpha$ , soit  $\ell(ws_i) = \ell(w) + 1$  pour tout  $i \in \alpha$ . Le résultat [Müh93, 1.1] affirme que, si  $\tilde{I}$  une partition admissible de  $\Gamma$ , alors le couple  $(\tilde{W}, \{r_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I}\})$  est un système de Coxeter (de type  $\tilde{\Gamma}$ ).

L'objet du chapitre 8 est d'étudier l'analogue de cette situation pour le monoïde d'Artin-Tits  $B^+ = B_\Gamma^+$  et pour le groupe d'Artin-Tits  $B = B_\Gamma$ . Le morphisme  $\pi : B^+ \rightarrow W$ , donné par  $s_i \mapsto s_i$ , admet une section ensembliste canonique dont l'image est notée  $B_{red}^+$ , ensemble des éléments *simples* de  $B^+$ . Si  $\tilde{I}$  est une partition de  $I$  constituée de parties sphériques, nous notons, pour chaque  $\alpha \in \tilde{I}$ ,  $\Delta_\alpha$  le relevé de  $r_\alpha$  dans  $B_{red}^+$ , et  $\tilde{B}^+$  (resp.  $\tilde{B}$ ) le sous-monoïde de  $B^+$  (resp. le sous-groupe de  $B$ ) engendré par les  $\Delta_\alpha$ ,  $\alpha \in \tilde{I}$ . Nous obtenons des caractérisations de l'admissibilité d'une partition de  $\Gamma$  en termes d'éléments simples dans  $B^+$  (Propositions 8.2.2 et 8.2.3), et les deux résultats suivants :

**Théorème (8.2.4).** *Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter et  $\tilde{I}$  une partition admissible de  $\Gamma$ . Alors le couple  $(\tilde{B}^+, \{\Delta_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I}\})$  est un système d'Artin-Tits positif de type  $\tilde{\Gamma}$ .*

**Corollaire (8.2.5).** *Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter sphérique et  $\tilde{I}$  une partition admissible de  $\Gamma$ . Alors le couple  $(\tilde{B}, \{\Delta_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I}\})$  est un système d'Artin-Tits de type  $\tilde{\Gamma}$ .*

Nous n'avons obtenu la conclusion de 8.2.5 que pour les groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Il est à noter que les travaux de J. Crisp [Cri00] et d'E. Godelle [God02] fournissent, grâce à des constructions topologiques fondées sur les complexes de Deligne (modifiés) associés aux systèmes d'Artin-Tits considérés, une généralisation de notre corollaire 8.2.5 à plusieurs cas non sphériques (via le lien entre leurs travaux et notre situation expliqué en section 8.3).

Nous appelons sous-monoïde *admissible* de  $B^+$  tout sous-monoïde  $\tilde{B}^+$  de  $B^+$  défini par une partition admissible  $\tilde{J}$  d'une partie  $J$  de  $I$ , et nous définissons les sous-groupes *admissibles* de  $B$  de la même manière. Dans la section 8.3, nous montrons comment cette construction généralise et unifie différentes situations :

- la situation du sous-monoïde (resp. sous-groupe) des points fixes d'un monoïde d'Artin-Tits (resp. d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique) sous l'action d'un groupe d'automorphismes du graphe, étudiée dans [DP99, Mic99, Cri00, BDM02],
- la situation des images des LCM-homomorphismes de [Cri99, God02],
- la situation des images des morphismes entre monoïdes d'Artin-Tits issu d'un *éclatement* d'un graphe de Coxeter de [CP01, Par02].

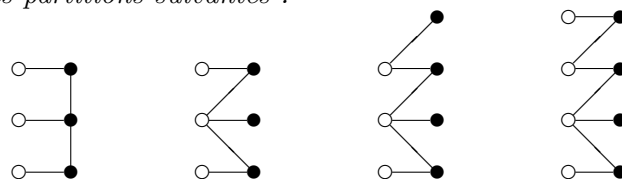
Dans la section 8.4, nous établissons quelques propriétés des sous-monoïdes admissibles. Nous montrons notamment le résultat suivant, qui généralise les résultats [Cri99, 2.2], [Cri00, 15] et [God02, 2.6], et qui implique, par exemple, que la *forme normale* dans un sous-monoïde admissible  $\tilde{B}^+$  d'un élément de  $\tilde{B}^+$  coïncide avec sa forme normale dans  $B^+$  (notons que dans [Cri99, 2.2] et dans [God02, 2.6], seule l'inclusion  $\tilde{B}_{red}^+ \subseteq \tilde{B}^+ \cap B_{red}^+$  est démontrée) :

**Proposition (8.4.1).** *Soit  $\tilde{B}^+$  un sous-monoïde admissible d'un monoïde d'Artin-Tits  $B^+$ . Alors les éléments simples de  $\tilde{B}^+$  sont exactement les éléments de  $\tilde{B}^+$  qui sont simples dans  $B^+$ . Autrement dit,  $\tilde{B}_{red}^+ = \tilde{B}^+ \cap B_{red}^+$ .*

Le chapitre 9 est consacré à la classification des partitions admissibles dont la matrice  $\tilde{\Gamma}$  est sans coefficient infini. Grâce aux résultats [Müh93, 1.2] et [Müh94, 2.5.5] (rappelés dans le chapitre 7), cela revient à classifier les partitions admissibles à deux éléments des graphes sphériques.

Dans la section 9.1, nous rappelons les résultats [Müh94, 2.5.3 et 2.5.4] qui permettent de se ramener au cas irréductible ; nous les redémontrons en raisonnant sur les éléments simples des monoïdes d'Artin-Tits et traitons ainsi, en plus du cas des coefficients finis de [Müh94, 2.5.3 et 2.5.4], le cas des coefficients infinis. Nous examinons, en section 9.2, la liste des partitions admissibles à deux éléments des graphes de Coxeter sphériques et irréductibles, dressée dans [Müh94, Table E] ; B. Mühlherr a prouvé que cette liste est exhaustive pour les séries infinies  $A_n$ ,  $B_n$  et  $D_n$  [Müh94, section 2.5], et nous vérifions qu'il en est de même pour les types exceptionnels. Nous prouvons par exemple le résultat suivant :

**Proposition (9.2.2).** *Les seules partitions admissibles à deux éléments  $\{\alpha, \beta\}$  des graphes  $E_6$ ,  $E_7$  et  $E_8$  sont les partitions suivantes :*



où  $|r_\alpha r_\beta| = 8$ ,  $|r_\alpha r_\beta| = 12$ ,  $|r_\alpha r_\beta| = 18$ ,  $|r_\alpha r_\beta| = 30$ .



La classification que l'on obtient ainsi se traduit, grâce aux liens établis dans la section 8.3, en la classification des LCM-homomorphismes de Crisp [Cri99]. Nous la détaillons dans la section 9.3 ; ceci nous amène à proposer une généralisation (et simplification) de la notion de *pliage* d'un graphe de Coxeter définie dans [Cri99, 4.1].

—

Dans la troisième et dernière partie, nous nous intéressons à la représentation linéaire (fidèle) des monoïdes d'Artin-Tits de type *simplement lacé* et *sans triangle* construite dans [Par02]. La construction de [Par02] fait suite aux constructions analogues de D. Krammer [Kra02] pour le type  $A_n$ , de A. M. Cohen et D. B. Wales [CW02] pour les types  $A_n$ ,  $D_n$ , et  $E_n$ , et de F. Digne [Dig03] pour tous les types sphériques *crystallographiques* (i.e. les types  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$ ,  $F_4$  et  $G_2 = I_2(6)$ ). Nous l'appelons représentation de *Krammer-Paris* dans ce qui suit.

On dit qu'une matrice de Coxeter  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  est *simplement lacée* si elle est à coefficients dans  $\{1, 2, 3\}$ , et qu'elle est *sans triangle* s'il n'existe pas trois éléments deux à deux distincts  $i, j, k \in I$  tels que les coefficients  $m_{i,j}$ ,  $m_{j,k}$  et  $m_{k,i}$  soient supérieurs ou égaux à 3.

Dans le chapitre 10, nous introduisons différentes notions nécessaires à la définition et à l'étude de la représentation de Krammer-Paris.

Nous rappelons tout d'abord la définition du système de racines *standard* associé à un système de Coxeter (cf. [Deo82]), sur laquelle repose la construction de la représentation de Krammer-Paris. Nous présentons ensuite, dans les sections 10.2 et 10.3, des notions relatives au monoïde des relations binaires sur un ensemble, et les notions de *morphismes de Krammer* et d'*élément de Krammer*, développées par J.-Y. Hée, dans [Hée04], pour analyser les preuves de fidélité des représentations considérées dans [Kra02, CW02, Dig03, Par02].

Soit  $L : B^+ \rightarrow B_{red}^+$  l'application qui envoie 1 sur 1 et qui associe à un élément non trivial de  $B^+$  le premier terme de sa forme normale (à gauche). Si  $\varphi : B^+ \rightarrow M$  est un morphisme de monoïdes, on dit que  $\varphi$  est un *morphisme de Krammer* si, pour tous  $a, b \in B^+$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b)$  implique  $L(a) = L(b)$ . Si  $M = E^E$  est le monoïde des applications d'un ensemble  $E$  dans lui-même, on dit qu'un élément  $e$  de  $E$  est un *élément de Krammer* pour  $\varphi$  si  $(\varphi(a))(e) = (\varphi(b))(e)$  implique  $L(a) = L(b)$  (et  $\varphi$  est alors un morphisme de Krammer). Un morphisme de Krammer à valeurs dans un monoïde simplifiable (par exemple un groupe) est injectif.

Nous commençons l'étude de la représentation de Krammer-Paris dans le chapitre 11.

Nous en rappelons la définition précise dans la section 11.1, et interprétons la preuve de la fidélité donnée dans [Par02], avec la terminologie introduite ci-dessus, dans la section 11.2.

L'espace  $\mathcal{H}_\Gamma$  de cette représentation admet une base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$  indexée par l'ensemble  $\Phi^+$  des racines positives du système de racines standard  $\Phi$  associé à  $\Gamma$ . La représentation de Krammer-Paris  $\psi : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_\Gamma)$ ,  $b \mapsto \psi_b$ , induit un morphisme  $\rho : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{Bin}(\Phi^+)$ ,  $b \mapsto R_b$ , à valeurs dans le monoïde des relations binaires sur l'ensemble  $\Phi^+$ . On associe à chaque relation binaire  $R$  sur  $\Phi^+$  une application  $f_R$  de l'ensemble  $\mathcal{P}(\Phi^+)$  des parties de  $\Phi^+$  dans lui-même, donnée par  $f_R(X) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{il existe } \beta \in \Phi^+ \text{ tel que } \alpha R \beta\}$ . La preuve de la fidélité de la représentation  $\psi$  donnée dans [Par02] revient essentiellement à montrer que l'ensemble  $\Phi^+$  est un élément de Krammer pour le morphisme  $B^+ \rightarrow \mathcal{P}(\Phi^+)^{\mathcal{P}(\Phi^+)}$ ,  $b \mapsto f_{R_b}$ , c'est-à-dire que, si deux éléments  $a$  et  $b$  de  $B_\Gamma^+$  sont tels que  $f_{R_a}(\Phi^+) = f_{R_b}(\Phi^+)$  (c'est le

cas si  $\psi_a = \psi_b$ ), alors  $L(a) = L(b)$ . Le morphisme  $\psi$  est donc un morphisme de Krammer à valeurs dans un groupe, donc est injectif.

Nous utilisons cette interprétation pour obtenir le résultat principal de la section 11.3. Si  $G$  est un sous-groupe de  $Aut(\Gamma)$ , alors le sous-espace  $(\mathcal{H}_\Gamma)^G$  des points fixes de  $\mathcal{H}_\Gamma$  sous  $G$  (où  $G$  agit sur  $\mathcal{H}_\Gamma$  par permutation de la base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$ ) est stabilisé par le sous-monoïde  $(B_\Gamma^+)^G$  des points fixes de  $B_\Gamma^+$  sous  $G$  (Proposition 11.3.3), et nous établissons le résultat suivant :

**Théorème (11.3.4).** *Si  $G$  est fini, alors la représentation  $\psi^G : (B_\Gamma^+)^G \rightarrow GL((\mathcal{H}_\Gamma)^G)$  est fidèle.*

Ce résultat généralise le résultat analogue démontré par F. Digne dans [Dig03], pour les automorphismes d'ordre 2 des graphes  $A_{2n-1}$  ( $n \geq 2$ ) et  $E_6$  et les automorphismes d'ordre 3 du graphe  $D_4$ . La preuve que nous donnons de 11.3.4 est nouvelle et générale, en ceci qu'elle évite tout raisonnement cas par cas.



## Première partie

# Sur les automorphismes et la rigidité des groupes de Coxeter à angles droits.



# Chapitre 1

## Préliminaires.

Dans ce premier chapitre, nous exposons les propriétés générales des groupes de Coxeter nécessaires à notre étude (section 1.1) et nous rappelons les résultats de [Tit88] sur les groupes de Coxeter à angles droits (section 1.2).

### 1.1 Généralités sur les groupes et sur les groupes de Coxeter.

Nous disons qu'un groupe (fini ou infini) est un *2-groupe élémentaire* si tous ses éléments non triviaux sont d'ordre 2. Bien sûr, les notions de 2-groupe élémentaire et de  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel (où  $\mathbb{F}_2$  est le corps à deux éléments) — ainsi que les notions de morphisme correspondantes — coïncident et on ne les distinguera donc pas. On pourra par exemple parler de *base* d'un 2-groupe élémentaire, sans faire explicitement référence à sa structure de  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel.

L'abélianisé d'un groupe engendré par des éléments d'ordre 2 est un 2-groupe élémentaire.

Soit  $E$  un ensemble. On note  $\mathcal{P}(E)$  (resp.  $[E]$ ) l'ensemble des parties (resp. des parties finies) de  $E$  et  $\mathcal{E}(E)$  l'ensemble des singletons de  $E$ . Muni de l'opération de différence symétrique  $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ ,  $\mathcal{P}(E)$  est un 2-groupe élémentaire (d'élément neutre  $\emptyset$ ) et  $[E]$  en est le sous-espace vectoriel de base  $\mathcal{E}(E)$ .

Un *groupe de Coxeter* est un groupe  $W$  admettant une partie génératrice  $S$  formée d'éléments d'ordre 2 telle que, si l'on note, pour  $s, t \in S$ ,  $m_{s,t}$  l'ordre du produit  $st$  dans  $W$ , le groupe  $W$  soit donné par la présentation :

$$W = \langle S \mid (st)^{m_{s,t}} = 1, \text{ si } s, t \in S \text{ avec } m_{s,t} \neq \infty \rangle .$$

On dit alors que le couple  $(W, S)$  est un *système de Coxeter*, de *type* la matrice  $\Gamma_{(W,S)} = (m_{s,t})_{s,t \in S}$  et de *rang* le cardinal (fini ou infini) de  $S$ . Nous disons aussi, dans cette partie, que  $(W, S)$  (resp.  $\Gamma_{(W,S)}$ ) est un système de Coxeter (resp. un type) *admis* par  $W$ . Nous disons encore que l'ensemble  $S$  est un *ensemble de Coxeter* pour  $W$  et nous notons  $\mathcal{S}(W)$  l'ensemble des ensembles de Coxeter pour  $W$ .

Cette approche est différente de celle de l'introduction, où l'on part d'une matrice de Coxeter  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$ , pour construire le groupe  $W_\Gamma$ , dans lequel il n'est pas assuré, a priori, que le produit  $s_i s_j$  est exactement d'ordre  $m_{i,j}$ . Le résultat [Bou68, Ch. V, n° 4.3] montre que c'est en fait toujours le cas, et les deux approches sont donc équivalentes, à un isomorphisme de matrices de Coxeter près — où l'on appelle isomorphisme (de matrices)

de  $(m_{s,t})_{s,t \in S}$  sur  $(m'_{s',t'})_{s',t' \in S'}$  toute bijection  $\alpha : S \xrightarrow{\sim} S'$  telle que, pour tous  $s, t \in S$ ,  $m_{s,t} = m'_{\alpha(s),\alpha(t)}$ .

**Définition 1.1.1.** On note  $S^*$  le monoïde des mots sur  $S$  (i.e. le monoïde libre engendré par  $S$ ) et, pour  $w \in W$ ,  $S^*(w)$  l'ensemble des éléments de  $S^*$  représentant  $w$  dans  $W$ . Les éléments de longueur minimale de  $S^*(w)$  sont dit *réduits* et leur longueur commune, notée  $\ell_S(w)$ , est appelée la *longueur* de  $w$  (par rapport à  $S$ ).

D'après [Bou68, Ch. IV, n° 1.8, Proposition 7], l'ensemble des éléments de  $S$  apparaissant dans un mot réduit de  $S^*(w)$  ne dépend que de  $w$ ; on appelle cet ensemble le  *$S$ -support* de  $w$  et on le note  $Supp_S(w)$ .

Soit  $X \subseteq S$ . On note  $W_X$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $X$ . D'après [Bou68, Ch. IV, n° 1.8, Corollaire 1], ce sous-groupe est constitué des éléments de  $W$  dont le  $S$ -support est inclus dans  $X$ . On en déduit que le couple  $(W_X, X)$  est un système de Coxeter de type  $(m_{s,t})_{s,t \in X}$ , que, pour  $X, Y \subseteq S$ , on a  $W_X \subseteq W_Y \iff X \subseteq Y$ , et que, si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de parties de  $S$ , alors  $W_{\bigcap_{i \in I} X_i} = \bigcap_{i \in I} W_{X_i}$  (cf. [Bou68, Ch. IV, n° 1.8, Théorème 2]).

**Définition 1.1.2.** Les sous-groupes  $W_X$ ,  $X \subseteq S$ , sont appelés sous-groupes  *$S$ -paraboliques standard* et on dit que  $X$  et  $W_X$  sont  *$S$ -sphériques* lorsque  $W_X$  est fini.

Nous utiliserons plus loin le résultat suivant sur les sous-groupes finis d'un groupe de Coxeter (cf. [Tit88, Proposition 1], ou [Bou68, Exercice 2d, page 130]) :

**Proposition 1.1.3.** *Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. Tout sous-groupe fini de  $W$  est, à conjugaison près, inclus dans un sous-groupe  $S$ -sphérique.*

Nous notons  $\mathcal{P}_c(S)$  (resp.  $[S]_c$ ) l'ensemble des parties commutatives (resp. des parties commutatives et finies) de  $S$ . Les éléments de  $[S]_c$  sont des parties  $S$ -sphériques et, plus généralement, pour tout  $X \in \mathcal{P}_c(S)$ , le sous-groupe  $S$ -parabolique standard  $W_X$  est un 2-groupe élémentaire de base  $X$ .

Notons  $Aut(\Gamma)$  le groupe des automorphismes de la matrice  $\Gamma$  (i.e. le groupe des permutations de  $S$  qui respectent les coefficients  $m_{s,t}$ ). Vu la présentation de  $W$ , tout élément de  $Aut(\Gamma)$  se prolonge en un automorphisme de  $W$ , et le groupe  $Aut(\Gamma)$  s'identifie ainsi au sous-groupe  $Aut(W, S)$  de  $Aut(W)$  constitué des automorphismes de  $W$  qui stabilisent  $S$ .

**Remarques 1.1.4.** Soit  $\sigma$  une permutation de  $S$ .

- a. L'application  $X \mapsto \sigma(X) = \{\sigma(x) \mid x \in X\}$  est un élément de  $Aut([S])$  qui respecte le cardinal et détermine entièrement  $\sigma$ . On la note encore  $\sigma$ .
- b. Si  $\sigma \in Aut(\Gamma)$ , alors  $\sigma$  stabilise  $[S]_c$  et définit donc un élément de  $Aut([S], [S]_c)$  (qui respecte le cardinal). Le groupe  $Aut(\Gamma)$  s'identifie ainsi à un sous-groupe de  $Aut([S], [S]_c)$ .

## 1.2 Le cas à angles droits.

**Définition 1.2.1** (angles droits). Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter de type  $\Gamma$ . On dit que  $(W, S)$  et  $\Gamma$  sont à *angles droits* si  $\Gamma$  est à coefficients dans  $\{1, 2, \infty\}$ .

Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter à angles droits de type  $\Gamma$ .

Dans ce cas, l'ensemble  $[S]_c$  des parties commutatives finies de  $S$  est exactement l'ensemble des parties  $S$ -sphériques. Les sous-groupes  $S$ -sphériques sont donc des 2-groupes

élémentaires et, d'après la proposition 1.1.3, tous les sous-groupes finis de  $W$  sont alors des 2-groupes élémentaires. En particulier, pour tous  $S' \in \mathcal{S}(W)$  et  $s', t' \in S'$ ,  $s' \neq t'$ , si le produit  $s't'$  est d'ordre fini, alors il est d'ordre 2. Tous les systèmes de Coxeter admis par  $W$  sont donc à angles droits.

La proposition suivante, qui apparaît dans la démonstration du corollaire 1 de [Tit88], montre en particulier que tous les éléments de  $\mathcal{S}(W)$  ont même cardinal, à savoir la dimension du 2-groupe élémentaire  $W^{ab}$  sur  $\mathbb{F}_2$ .

**Proposition 1.2.2.** *Notons  $\pi : W \rightarrow W^{ab}$ ,  $w \mapsto \bar{w}$ , le morphisme canonique de  $W$  sur son abélianisé.*

1. *L'application  $\mathcal{E}(S) \rightarrow W^{ab}$ ,  $\{s\} \mapsto \bar{s}$  se prolonge en un isomorphisme  $\pi_S$  de  $[S]$  sur  $W^{ab}$ .*
2. *De plus,  $\pi_S$  envoie  $[S]_c$  sur  $\bar{F}$ , où  $F$  désigne l'ensemble des éléments d'ordre fini de  $W$ .*

*Démonstration.* D'après la propriété universelle du système de Coxeter  $(W, S)$ , il existe un (unique) morphisme de groupes de  $W$  dans  $[S]$ , envoyant  $s$  sur  $\{s\}$ . Comme  $[S]$  est abélien, ce morphisme passe au quotient en le morphisme  $\rho_S : W^{ab} \rightarrow [S]$ , donné par  $\bar{s} \mapsto \{s\}$ . Comme  $\rho_S$  envoie la famille génératrice  $(\bar{s})_{s \in S}$  du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $W^{ab}$  sur la base  $(\{s\})_{s \in S}$  du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $[S]$ ,  $\rho_S$  est un isomorphisme, d'où le premier point, avec  $\pi_S = (\rho_S)^{-1}$ .

Montrons que  $\pi_S([S]_c) = \bar{F}$ . Soit  $X \in [S]_c$ . Alors  $\pi_S(X) = \prod_{s \in X} \bar{s}$  appartient à  $\bar{F}$ , puisque l'élément  $\prod_{s \in X} s$  de  $W$  est d'ordre 1 ou 2 (donc appartient à  $F$ ). On a donc  $\pi_S([S]_c) \subseteq \bar{F}$ . Réciproquement, soit  $w \in F$ . D'après la proposition 1.1.3, il existe une partie  $S$ -sphérique  $X$  (de  $S$ ) telle que  $w$  soit conjugué à un élément de  $W_X$ . Comme  $(W, S)$  est à angles droits, on a  $X \in [S]_c$  et  $w$  est donc conjugué à un élément  $\prod_{s \in Y} s$ , pour un certain  $Y \subseteq X$ . On a alors  $Y \in [S]_c$  et  $\bar{w} = \prod_{s \in Y} \bar{s} = \pi_S(Y)$ . On a donc  $\bar{F} \subseteq \pi_S([S]_c)$  et le résultat.  $\square$

**Remarques 1.2.3.** Soient  $S, S' \in \mathcal{S}(W)$ .

- a. L'application  $(\pi_{S'})^{-1} \circ \pi_S$  est un isomorphisme de  $[S]$  sur  $[S']$  envoyant  $[S]_c$  sur  $[S']_c$ .
- b. L'isomorphisme  $\pi_S$  nous permet d'identifier les groupes  $\text{Aut}([S])$  et  $\text{Aut}(W^{ab})$  d'une part, et les groupes  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  et  $\text{Aut}(W^{ab}, \bar{F})$  d'autre part.
- c. Revenons sur la remarque 1.1.4b. On suppose ici que  $\Gamma = \Gamma_{(W, S)}$  est à angles droits; on montre alors facilement que le groupe  $\text{Aut}(\Gamma)$  s'identifie précisément au sous-groupe de  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  constitué des éléments de  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  qui respectent le cardinal.

**Commentaires 1.2.4.** Identifions  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  et  $\text{Aut}(W^{ab}, \bar{F})$  grâce à  $\pi_S$ .

- a. Pour montrer que la suite :

$$\{1\} \hookrightarrow \ker(\pi_{\text{Aut}}) \hookrightarrow \text{Aut}(W) \xrightarrow{\pi_{\text{Aut}}} \text{Aut}(W^{ab}, \bar{F}) \rightarrow \{1\}$$

est exacte et scindée, J. Tits a défini la section de  $\pi_{\text{Aut}}$  qui, à tout  $\varphi \in \text{Aut}(W^{ab}, \bar{F}) = \text{Aut}([S], [S]_c)$ , associe l'automorphisme de  $W$  donné sur  $S$  par  $s \mapsto \prod_{t \in \varphi(\{s\})} t$ .

- b. Via cette section, on montre que  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  s'identifie au sous-groupe  $\text{Aut}(W, F_S)$  de  $\text{Aut}(W)$  constitué des automorphismes de  $W$  qui stabilisent l'ensemble  $F_S$  des éléments de  $S$ -support  $S$ -sphérique, i.e. la réunion des sous-groupes  $S$ -sphériques de  $W$ . On a donc  $\text{Aut}(W) = \ker(\pi_{\text{Aut}}) \rtimes \text{Aut}(W, F_S)$ .
- c. Via cette section, le sous-groupe de  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  identifié à  $\text{Aut}(\Gamma)$  comme en remarque 1.1.4b (ou 1.2.3c) s'envoie bien sur le sous-groupe  $\text{Aut}(W, S)$  de  $\text{Aut}(W)$ .





# Chapitre 2

## Outils.

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions les outils combinatoires que nous utiliserons jusqu'à la fin de cette première partie.

Dans la section 2.1, nous définissons la notion *d'ensemble à relation*, qui nous permet de traiter, avec la même terminologie, le cas d'un ensemble de Coxeter  $S$  pour un groupe de Coxeter à angles droits, muni de la relation binaire de commutation dans  $S$ , et le cas d'un ensemble de parties commutatives de  $S$ , muni de la relation binaire qui spécifie que deux parties commutatives sont de réunion commutative. Les *cellules* et les *noyaux*, définis dans la section 2.2, sont les sous-ensembles de  $S$  qui sont préservés (dans un sens précisé plus loin) par les isomorphismes que nous considérons dans la section 2.3. Les résultats de la section 2.3 sont les résultats sur lesquels s'appuient les études des deux chapitres suivants.

### 2.1 Ensembles à relation.

**Définition 2.1.1** (ensembles à relation). Nous appelons *ensemble à relation* tout couple  $(E, R)$  où  $E$  est un ensemble et  $R$  une relation binaire symétrique et réflexive sur  $E$ . Autrement dit,  $R$  est une partie de  $E \times E$  telle que, pour tous  $x, y \in E$ ,  $(x, x) \in R$ , et  $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$ . On note  $xRy$  pour  $(x, y) \in R$ .

Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ensembles à relation. Un *isomorphisme (d'ensembles à relation)* de  $(E, R)$  sur  $(E', R')$  est une bijection  $\sigma : E \xrightarrow{\sim} E'$  telle que  $(\sigma \times \sigma)(R) = R'$ . S'il en existe un, on dit que les ensembles à relation  $(E, R)$  et  $(E', R')$  sont isomorphes. En particulier, si  $(E, R) = (E', R')$ , on parle d'*automorphismes* de  $(E, R)$  et on note  $Aut(E, R)$  le groupe qu'ils constituent.

**Notation 2.1.2** (relation associée à  $\Gamma$ ). Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter de type  $\Gamma = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ . On munit  $S$  de la relation binaire symétrique et réflexive de commutation dans  $S$ , notée  $R_\Gamma = \{(s, t) \in S \times S \mid m_{s,t} = 1 \text{ ou } 2\}$ .

**Remarques 2.1.3.** Soit  $W$  un groupe de Coxeter à angles droits.

- a. Pour  $S \in \mathcal{S}(W)$  et  $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$ , la relation  $R_\Gamma$  détermine entièrement  $\Gamma$  puisque, pour tous  $s \neq t \in S$ , on a les équivalences suivantes :  $m_{s,t} = 2 \iff sR_\Gamma t$ , et  $m_{s,t} = \infty \iff (s, t) \notin R_\Gamma$ .
- b. On voit alors que, pour  $S, S' \in \mathcal{S}(W)$  et  $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$ ,  $\Gamma' = \Gamma_{(W,S')}$ , les notions d'isomorphisme de matrices de  $\Gamma$  sur  $\Gamma'$  et d'isomorphisme d'ensembles à relation de  $(S, R_\Gamma)$  sur  $(S', R_{\Gamma'})$  coïncident. En particulier, on a  $Aut(\Gamma) = Aut(S, R_\Gamma)$ .

**Définition 2.1.4** (commutants, parties commutatives). Soit  $(E, R)$  un ensemble à relation. Considérons l'application

$$C = C_{(E,R)} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \{y \in E \mid \forall x \in X, yRx\} \end{cases} .$$

Pour simplifier, nous notons  $C(x)$  l'image  $C(\{x\})$  du singleton  $\{x\}$  de  $E$ .

Par analogie avec ce qui se passe pour la relation  $(S, R_\Gamma)$  associée à une matrice de Coxeter  $\Gamma$ , nous disons que :

- pour  $x, y \in E$ ,  $x$  et  $y$  *commutent* lorsque  $xRy$  (i.e  $x \in C(y)$ ),
- pour  $X \subseteq E$ , l'image  $C(X)$  est le *commutant de  $X$  (dans  $E$ )* et  $X$  est *commutative* si les éléments de  $X$  commutent deux à deux (c'est-à-dire si  $X \subseteq C(X)$ ),

et nous notons  $\mathcal{P}_c(E)$  (resp.  $[E]_c$ ) l'ensemble des parties commutatives (resp. des parties commutatives et finies) de  $E$ .

**Propriétés 2.1.5.** Considérons l'application  $C = C_{(E,R)}$  de 2.1.4.

- a.  $C$  est décroissante (et donc  $C^2$  est croissante) pour l'inclusion,
- b. pour tout  $X \in \mathcal{P}(E)$ ,  $X \subseteq C^2(X)$ ,
- c. on déduit des assertions a et b que  $C^3 = C$ ,
- d. pour tout  $X \in \mathcal{P}(E)$ ,  $X$  est commutative  $\iff C^2(X)$  est commutative,
- e. pour tout  $X \in \mathcal{P}(E)$ ,  $C(X) = \bigcap_{x \in X} C(x)$ .

**Notation 2.1.6.** Soit  $(E, R)$  un ensemble à relation. Nous notons  $R_{\mathcal{P}}$  la relation binaire sur  $\mathcal{P}(E)$  donnée par  $XR_{\mathcal{P}}Y \iff \forall (x, y) \in X \times Y, xRy$ .

On vérifie que  $R_{\mathcal{P}}$  est symétrique (car  $R$  l'est) et que, pour  $X \in \mathcal{P}(E)$ , on a  $XR_{\mathcal{P}}X$  si et seulement si  $X$  est commutative.

**Remarques 2.1.7.** Ensembles à relation constitués de parties commutatives de  $E$ .

- a. Soit  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_c(E)$ . On note encore  $R_{\mathcal{P}}$  la relation  $R_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{X}^2$  induite par  $R_{\mathcal{P}}$  sur  $\mathcal{X}$ . C'est une relation symétrique et réflexive, et le couple  $(\mathcal{X}, R_{\mathcal{P}})$  est donc un ensemble à relation.
- b. Pour  $X, Y \in \mathcal{P}_c(E)$ , on a  $XR_{\mathcal{P}}Y \iff (X \cup Y) \in \mathcal{P}_c(E) \iff (X + Y) \in \mathcal{P}_c(E)$ .

Dans ce qui suit, nous serons amenés à considérer différents ensembles de parties commutatives d'un ensemble à relation  $(E, R)$  (cf. définitions 2.2.1 et 2.2.4). Cependant nous noterons  $R_{\mathcal{P}}$ , sans plus de précision, les différentes relations associées à ces différents ensembles de parties commutatives; cela ne provoquera pas de difficulté majeure puisque la relation  $XR_{\mathcal{P}}Y$  signifiera, dans chaque cas, que la réunion  $X \cup Y$  (ou la différence symétrique  $X + Y$ ) est encore commutative.

## 2.2 Cellules et noyaux.

Soit  $(E, R)$  un ensemble à relation et soit  $C = C_{(E,R)}$ .

**Définition 2.2.1** (cellules). Nous appelons *cellules* (de  $(E, R)$ ) les images par  $C^2$  des singletons de  $E$  et nous notons  $\mathcal{C}(E, R)$  l'ensemble qu'elles constituent. Nous disons plus précisément que la cellule  $C^2(x)$  est la *cellule de  $x$*  et que  $x$  *définit* la cellule  $C^2(x)$ .

**Commentaires 2.2.2.** Soit  $X \in \mathcal{P}_c(E)$ . On montre que  $C^2(X)$  est l'intersection des parties commutatives maximales de  $E$  contenant  $X$ . En particulier, pour  $x \in E$ , la cellule  $C^2(x)$  est l'intersection des parties commutatives maximales de  $E$  contenant  $x$ . C'est sous cette deuxième forme que la notion de cellule d'un élément a été introduite par J. Tits dans la partie finale de [Tit88] ( $C^2(x)$  y est noté  $T(x)$ ). Lorsque  $S$  est infini, la définition que l'on donne ici a l'avantage d'éviter d'avoir à utiliser le lemme de Zorn (pour l'existence des parties commutatives maximales).

**Propriétés 2.2.3.** Propriétés des cellules.

- a. Pour tout  $x \in E$ , on a  $x \in C^2(x)$  (cf. propriété 2.1.5b).
- b. Les cellules sont des parties commutatives de  $E$  (cf. propriété 2.1.5d).
- c. Comme  $C^3 = C$  (propriété 2.1.5c), les cellules sont des points fixes de  $C^2$  et on a donc en particulier, pour toute cellule  $T$ ,  $x \in T \implies C^2(x) \subseteq T$ .

**Définition 2.2.4** (noyaux). Notons  $\equiv$  la relation d'équivalence sur  $E$  donnée par  $y \equiv z \iff C(y) = C(z)$  (ou encore  $y \equiv z \iff C^2(y) = C^2(z)$ , puisque  $C^3 = C$ ). Nous appelons *noyaux* (de  $(E, R)$ ) les classes d'équivalence de  $E$  pour  $\equiv$  et nous notons  $\mathcal{N}(E, R)$  l'ensemble qu'ils constituent. Pour  $x \in E$ , on note  $N(x)$  le noyau (la classe) de  $x$  dans  $E$ .

**Notation 2.2.5.** Soit  $T \in \mathcal{C}(E, R)$ . L'ensemble  $\{x \in E \mid C^2(x) = T\}$  est un noyau de  $(E, R)$ ; on l'appelle *le noyau de  $T$*  et on le note  $Noy(T)$  (autrement dit,  $Noy(T) = N(x)$  pour tout  $x \in E$  tel que  $T = C^2(x)$ ).

Soit  $N \in \mathcal{N}(E, R)$ . On appelle *cellule de  $N$* , et on note  $Cel(N)$ , la cellule commune aux éléments de  $N$  (autrement dit,  $Cel(N) = C^2(x)$  pour tout  $x \in N$ ).

**Propriétés 2.2.6.** Lien entre cellules et noyaux.

- a. Soit  $N$  un noyau. On a  $N \subseteq Cel(N)$  (cf. propriété 2.2.3a). En particulier, les noyaux sont des parties commutatives (i.e.  $\mathcal{N}(E, R) \subseteq \mathcal{P}_c(E)$ ).
- b. Toute cellule est la réunion (disjointe) des noyaux qu'elle rencontre.
- c. Les applications  $Cel : \mathcal{N}(E, R) \rightarrow \mathcal{C}(E, R)$  et  $Noy : \mathcal{C}(E, R) \rightarrow \mathcal{N}(E, R)$  sont des bijections inverses l'une de l'autre.

Notons que, les cellules et les noyaux étant des parties commutatives de  $E$ , on peut munir chacun des ensembles  $\mathcal{C}(E, R)$  et  $\mathcal{N}(E, R)$  d'une structure d'ensemble à relation, avec la relation  $R_{\mathcal{P}}$  définie en notation 2.1.6 (cf. remarque 2.1.7a). Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 2.2.7.** *Les bijections  $Cel$  et  $Noy$  décrites ci-dessus sont des isomorphismes d'ensembles à relation inverses l'un de l'autre.*

*Démonstration.* Il s'agit de voir que, pour  $N, P \in \mathcal{N}(E, R)$ , on a l'équivalence  $NR_{\mathcal{P}}P \iff Cel(N)R_{\mathcal{P}}Cel(P)$ . Comme on a les inclusions  $N \subseteq Cel(N)$  et  $P \subseteq Cel(P)$ , l'implication  $Cel(N)R_{\mathcal{P}}Cel(P) \implies NR_{\mathcal{P}}P$  est évidente.

Réciproquement, supposons  $NR_{\mathcal{P}}P$ . Posons  $Cel(N) = C^2(x)$  et  $Cel(P) = C^2(y)$ , pour  $x \in N$  et  $y \in P$ . On a  $xRy$ , c'est-à-dire  $x \in C(y)$ , donc  $C^2(y) \subseteq C(x)$ , et on veut montrer que, pour tout  $x' \in Cel(N) = C^2(x)$  et tout  $y' \in Cel(P) = C^2(y)$ , on a  $x'Ry'$ . Comme  $y' \in C^2(y) \subseteq C(x)$ , on a  $C^2(x) \subseteq C(y')$ , et comme  $x' \in C^2(x)$ , on a  $x' \in C(y')$ , c'est-à-dire  $x'Ry'$ , d'où le résultat.  $\square$

Donnons à présent une propriété importante des noyaux, qui nous servira à la fois pour montrer la rigidité des groupes de Coxeter à angles droits (cf. section 2.3, théorème 2.3.6) et pour étudier le groupe  $Aut([S], [S]_c)$  (cf. section 4.1, proposition 4.1.3).

**Lemme 2.2.8.** *Pour  $N, P \in \mathcal{N}(E, R)$ , on a  $NR_{\mathcal{P}}P \iff \exists (x, y) \in N \times P, xRy$ .*

*Démonstration.* Le sens direct étant évident (par définition de  $R_{\mathcal{P}}$ ), montrons la réciproque.

Soient  $x \in N, y \in P$ , tels que  $xRy$ , et soient  $x' \in N, y' \in P$ . On a  $C(x) = C(x')$  et  $C(y) = C(y')$  par définition de  $N$  et  $P$ , et  $x \in C(y)$  par hypothèse sur  $x$  et  $y$ . On a alors  $x \in C(y')$ , ou encore  $y' \in C(x)$  (puisque  $R$  est symétrique), d'où  $y' \in C(x')$ , c'est-à-dire  $x'Ry'$ . On a donc le résultat.  $\square$

**Proposition 2.2.9.** *Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ensembles à relation. Supposons qu'il existe un isomorphisme d'ensembles à relation  $\psi$  respectant le cardinal, de  $(\mathcal{N}(E, R), R_{\mathcal{P}})$  sur  $(\mathcal{N}(E', R'), R'_{\mathcal{P}})$ .*

*Alors toute bijection  $\sigma$  de  $E$  sur  $E'$  définie, noyau par noyau, par n'importe quelle bijection de  $N \in \mathcal{N}(E, R)$  sur  $\psi(N) \in \mathcal{N}(E', R')$ , est un isomorphisme d'ensembles à relation de  $(E, R)$  sur  $(E', R')$ . En particulier, les ensembles à relation  $(E, R)$  et  $(E', R')$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* Remarquons que la construction est possible (grâce à l'axiome du choix) car  $\mathcal{N}(E, R)$  (resp.  $\mathcal{N}(E', R')$ ) est une partition de  $E$  (resp.  $E'$ ) et car, pour tout  $N \in \mathcal{N}$ , les noyaux  $N$  et  $\psi(N)$  ont même cardinal par hypothèse.

Soient  $x, y \in E$ . Notons  $N$  (resp.  $P$ ) le noyau de  $x$  (resp.  $y$ ). Grâce au lemme 2.2.8 et au fait que  $\psi$  est un isomorphisme d'ensembles à relation, on a les équivalences suivantes :  $xRy \iff NR_{\mathcal{P}}P \iff \psi(N)R'_{\mathcal{P}}\psi(P) \iff \sigma(x)R'\sigma(y)$ . La bijection  $\sigma$  est donc un isomorphisme d'ensembles à relation.  $\square$

## 2.3 Théorème principal.

Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ensembles à relation. Posons, pour simplifier,  $C = C_{(E, R)}$ ,  $C' = C_{(E', R')}$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(E, R)$  et  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(E', R')$ ,  $\mathcal{N}' = \mathcal{N}(E', R')$ .

Supposons qu'il existe un isomorphisme  $\mathbb{F}_2$ -linéaire  $\varphi$  de  $[E]$  sur  $[E']$  envoyant  $[E]_c$  sur  $[E']_c$ .

**Lemme 2.3.1.** *Soient  $X, Y \in [E]_c$ . Alors  $\varphi(X), \varphi(Y) \in [E']_c$  et on a :*

$$X \cup Y \text{ est commutative} \iff \varphi(X) \cup \varphi(Y) \text{ est commutative.}$$

*Démonstration.* On suppose  $X, Y \in [E]_c$  et  $\varphi([E]_c) = [E']_c$ , donc  $\varphi(X), \varphi(Y) \in [E']_c$ . De plus, on a  $X \cup Y \in [E]_c \iff X + Y \in [E]_c$  et  $\varphi(X) \cup \varphi(Y) \in [E']_c \iff \varphi(X) + \varphi(Y) \in [E']_c$  (cf. remarque 2.1.7b). Enfin, comme  $\varphi$  est un isomorphisme linéaire envoyant  $[E]_c$  sur  $[E']_c$ , on a  $X + Y \in [E]_c \iff \varphi(X) + \varphi(Y) \in [E']_c$  et on en déduit le résultat.  $\square$

**Notation 2.3.2.** Si  $T$  est une cellule d'un ensemble à relation  $(E, R)$ , nous posons  $T^\circ = T \setminus \text{Noy}(T) = \{x \in E \mid C^2(x) \not\subseteq T\}$  et nous notons  $V_T$  l'espace vectoriel quotient  $[T]/[T^\circ]$ .

**Proposition 2.3.3.** *Conservons les notations introduites ci-dessus.*

1. *Soit  $x \in E$ . Il existe  $x' \in \varphi(\{x\})$  tel que  $x \in \varphi^{-1}(\{x'\})$  et, pour tout tel  $x'$ , on a  $\varphi([C^2(x)]) = [C'^2(x')]$ .*
2. *Soit  $T \in \mathcal{C}$  et soit  $T'$  l'unique élément de  $\mathcal{C}'$  tel que  $\varphi([T]) = [T']$ . Alors  $\varphi([T^\circ]) = [T'^\circ]$  et  $\varphi$  induit donc un isomorphisme  $\bar{\varphi}_T : V_T \xrightarrow{\sim} V_{T'}$  donné par  $X + [T^\circ] \mapsto \varphi(X) + [T'^\circ]$ .*

*Démonstration.* Montrons la première assertion. L'existence de  $x' \in \varphi(\{x\})$  tel que  $x \in \varphi^{-1}(\{x'\})$  résulte des égalités

$$\{x\} = \varphi^{-1}(\varphi(\{x\})) = \varphi^{-1}\left(\sum_{x' \in \varphi(\{x\})} \{x'\}\right) = \sum_{x' \in \varphi(\{x\})} \varphi^{-1}(\{x'\})$$

et du fait que l'on a  $\sum_{x' \in \varphi(\{x\})} \varphi^{-1}(\{x'\}) \subseteq \bigcup_{x' \in \varphi(\{x\})} \varphi^{-1}(\{x'\})$ .

Pour montrer l'inclusion  $\varphi([C^2(x)]) \subseteq [C'^2(x')]$ , il suffit de montrer que, pour tout  $y \in C^2(x)$ , on a  $\varphi(\{y\}) \subseteq C'^2(x')$ , c'est-à-dire que, pour tout  $y' \in C'(x')$ , la partie  $\{y'\} \cup \varphi(\{y\})$  est commutative. Soient donc  $y \in C^2(x)$  et  $y' \in C'(x')$ . Les éléments  $x'$  et  $y'$  commutent (i.e.  $\{x'\} \cup \{y'\}$  est commutative), donc, par le lemme précédent,  $\varphi^{-1}(\{x'\}) \cup \varphi^{-1}(\{y'\})$  est une partie commutative, qui de plus contient  $x$  (par hypothèse sur  $x'$ ). On en déduit que l'on a  $\varphi^{-1}(\{y'\}) \subseteq C(x)$ , donc que  $\varphi^{-1}(\{y'\}) \cup \{y\}$  est commutative (puisque  $y \in C^2(x)$ ), et donc (grâce au lemme précédent) que  $\{y'\} \cup \varphi(\{y\})$  est également commutative. Puisque les rôles joués par  $(\varphi, x)$  et  $(\varphi^{-1}, x')$  sont symétriques, on obtient de la même façon l'inclusion  $\varphi^{-1}([C'^2(x')]) \subseteq [C^2(x)]$  et donc  $\varphi([C^2(x)]) = [C'^2(x')]$ .

Montrons la seconde assertion. D'après le premier point, pour  $T \in \mathcal{C}$ , il existe  $T' \in \mathcal{C}'$  tel que  $\varphi([T]) = [T']$ , et un tel  $T'$  est nécessairement unique puisque si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux ensembles tels que  $[X_1] = [X_2]$ , alors on a clairement  $X_1 = X_2$ .

Soit  $y \in T^\circ$ . D'après le premier point,  $\varphi$  envoie le sous-espace strict  $[C^2(y)]$  de  $[T]$  sur un sous-espace strict de  $[T']$  de la forme  $[U']$ , pour  $U' \in \mathcal{C}'$ ; en particulier,  $U' \subsetneq T'$ , i.e.  $U' \subseteq T'^\circ$ . On a donc  $\varphi(\{y\}) \in [U'] \subseteq [T'^\circ]$ , ce qui montre l'inclusion  $\varphi([T^\circ]) \subseteq [T'^\circ]$ . L'autre inclusion se démontre de la même façon, à partir de  $\varphi^{-1}$ , et on a donc  $\varphi([T^\circ]) = [T'^\circ]$ . La fin de l'assertion s'en déduit immédiatement.  $\square$

**Notation 2.3.4.** On déduit de la proposition précédente que l'isomorphisme linéaire  $\varphi : [E] \xrightarrow{\sim} [E']$  envoie de façon bijective (en respectant l'inclusion et la dimension) l'ensemble des sous-espaces de  $[E]$  de la forme  $[T]$ , où  $T \in \mathcal{C}$ , sur l'ensemble des sous-espaces de  $[E']$  de la forme  $[T']$ , où  $T' \in \mathcal{C}'$ . L'isomorphisme  $\varphi$  induit donc une bijection  $\varphi_{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{C}'$  donnée par :

$$\varphi_{\mathcal{C}} : \begin{cases} \mathcal{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}' \\ T & \longmapsto & T' \end{cases}, \quad \text{où } \varphi([T]) = [T'].$$

**Proposition 2.3.5.** *La bijection  $\varphi_{\mathcal{C}}$  est un isomorphisme d'ensembles à relation de  $(\mathcal{C}, R_{\mathcal{P}})$  sur  $(\mathcal{C}', R'_{\mathcal{P}})$ .*

*Démonstration.* Soient  $T, U \in \mathcal{C}$  et soient  $T' = \varphi_{\mathcal{C}}(T)$ ,  $U' = \varphi_{\mathcal{C}}(U) \in \mathcal{C}'$ . Il s'agit de montrer que l'on a  $TR_{\mathcal{P}}U \Leftrightarrow T'R'_{\mathcal{P}}U'$ . Supposons  $T'R'_{\mathcal{P}}U'$ , i.e.  $T' \cup U'$  commutative, et soit  $(t, u) \in T \times U$ . La partie  $\varphi(\{t\}) \cup \varphi(\{u\})$  de  $E'$  est incluse dans  $T' \cup U'$  donc est commutative. D'après le lemme 2.3.1, on a donc  $tRu$ . Comme ceci est vrai pour tout  $(t, u) \in T \times U$ , on a  $TR_{\mathcal{P}}U$ . L'autre implication se démontre de la même façon, en utilisant  $\varphi^{-1}$ .  $\square$

**Théorème 2.3.6.** *Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ensembles à relation et soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $[E]$  sur  $[E']$  envoyant  $[E]_c$  sur  $[E']_c$ .*

1. *L'isomorphisme  $\varphi$  induit un isomorphisme d'ensembles à relation qui respecte le cardinal*

$$\varphi_{\mathcal{N}} : \begin{cases} (\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{N}', R'_{\mathcal{P}}) \\ N & \longmapsto & N' \end{cases}, \quad \text{où } \varphi([C_{el}(N)]) = [C_{el}(N')].$$

2. *Les ensembles à relation  $(E, R)$  et  $(E', R')$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* Le fait que l'application  $\varphi_{\mathcal{N}}$  définie en 1 soit un isomorphisme d'ensembles à relation résulte des propositions 2.2.7 et 2.3.5, puisque l'on a  $\varphi_{\mathcal{N}} = \text{Noy} \circ \varphi_{\mathcal{C}} \circ \text{Cel}$  avec les isomorphismes  $\text{Cel} : (\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}, R_{\mathcal{P}})$ ,  $\varphi_{\mathcal{C}} : (\mathcal{C}, R_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}', R'_{\mathcal{P}})$  et  $\text{Noy} : (\mathcal{C}', R'_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{N}', R'_{\mathcal{P}})$ .

Montrons que  $\varphi_{\mathcal{N}}$  respecte le cardinal. Soient  $N \in \mathcal{N}$  et  $N' = \varphi_{\mathcal{N}}(N) \in \mathcal{N}'$ . Posons  $T = \text{Cel}(N)$  et  $T' = \text{Cel}(N')$ . On a  $\varphi([T]) = [T']$ . D'après la seconde assertion de la proposition 2.3.3, les espaces vectoriels  $V_T$  et  $V_{T'}$  sont isomorphes (via  $\bar{\varphi}_T$ ) et ont donc même dimension. Or  $T$  est la réunion disjointe de  $N$  et de  $T^\circ$ , donc  $[T] = [N] \oplus [T^\circ]$  et les espaces vectoriels  $[N]$  et  $V_T = [T]/[T^\circ]$  sont isomorphes. De même, les espaces vectoriels  $[N']$  et  $V_{T'}$  sont isomorphes et on a le résultat puisque l'espace vectoriel  $[N]$  (resp.  $[N']$ ), qui admet pour base l'ensemble des singletons de  $N$  (resp. de  $N'$ ), est de dimension  $\text{Card}(N)$  (resp.  $\text{Card}(N')$ ).

Le second point résulte du premier et de la proposition 2.2.9.  $\square$

## Chapitre 3

# Sur la rigidité des groupes de Coxeter à angles droits.

Dans ce chapitre, nous examinons deux notions de rigidité appliquées aux groupes de Coxeter à angles droits.

Dans la section 3.1.2, nous montrons que les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides (au sens défini dans l'introduction de cette thèse). Dans la section 3.2, nous étudions une notion plus fine de rigidité, la rigidité *forte*, qui consiste à déterminer si deux ensembles de Coxeter pour un groupe de Coxeter  $W$  sont conjugués dans  $W$ .

### 3.1 Les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides.

Rappelons la notion de rigidité d'un groupe de Coxeter :

**Définition 3.1.1** (rigidité). Soit  $W$  un groupe de Coxeter. On dit que  $W$  est *rigide* lorsque, pour tous  $S, S' \in \mathcal{S}(W)$ , il existe un automorphisme de  $W$  envoyant  $S$  sur  $S'$ , i.e. lorsque les matrices  $\Gamma_{(W,S)}$  et  $\Gamma_{(W,S')}$  sont isomorphes.

La conjonction de la seconde assertion du théorème 2.3.6 et de la remarque 1.2.3a nous fournit le résultat :

**Théorème 3.1.2.** *Les groupes de Coxeter à angles droits sont rigides.*

*Démonstration.* Soit  $W$  un groupe de Coxeter à angles droits et soient  $S, S' \in \mathcal{S}(W)$ . Notons  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  les types respectifs des systèmes  $(W, S)$  et  $(W, S')$ ; ce sont des matrices de Coxeter à angles droits (cf. section 1.2). Considérons les relations de commutation  $R_\Gamma$  et  $R_{\Gamma'}$  dans  $S$  et  $S'$  respectivement (cf. notation 2.1.2).

D'après la proposition 1.2.2, il existe un isomorphisme de  $[S]$  sur  $[S']$  envoyant  $[S]_c$  sur  $[S']_c$  (par exemple l'isomorphisme  $(\pi_{S'})^{-1} \circ \pi_S$  de la remarque 1.2.3a). On en déduit, grâce au théorème 2.3.6, que les ensembles à relation  $(S, R_\Gamma)$  et  $(S', R_{\Gamma'})$  sont isomorphes. Comme les matrices  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont à angles droits, cela revient à dire que les matrices  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont isomorphes (cf. remarque 2.1.3b). On a donc le résultat.  $\square$



### 3.2 Sur la rigidité forte.

**Définition 3.2.1** (rigidité forte). Soit  $W$  un groupe de Coxeter. On dit que  $W$  est *fortement rigide* lorsque, pour tous  $S, S' \in \mathcal{S}(W)$ , il existe  $w \in W$  tel que  $wSw^{-1} = S'$  (c'est-à-dire lorsqu'il existe un automorphisme *intérieur* de  $W$  envoyant  $S$  sur  $S'$ ).

Notons  $Int(W)$  le groupe des automorphismes intérieurs de  $W$ . Soient  $S \in \mathcal{S}(W)$  et  $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$ ; identifions  $Aut(\Gamma)$  au sous-groupe  $Aut(W, S)$  de  $Aut(W)$  (cf. section 1.1). On vérifie facilement que l'on a la caractérisation :

$$W \text{ est fortement rigide} \iff W \text{ est rigide et } Aut(W) = Int(W) \cdot Aut(\Gamma).$$

**Remarques 3.2.2.** Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter à angles droits de type  $\Gamma$ .

- a. On a  $Aut(W) = \ker(\pi_{Aut}) \rtimes Aut(W, F_S)$ , et les inclusions  $Int(W) \subseteq \ker(\pi_{Aut})$  et  $Aut(\Gamma) \approx Aut(W, S) \subseteq Aut(W, F_S) \approx Aut([S], [S]_c)$  (cf. commentaires 1.2.4b et 1.2.4c).
- b. On déduit du théorème 3.1.2 et de l'assertion précédente la caractérisation suivante :

$$W \text{ est fortement rigide} \iff \ker(\pi_{Aut}) = Int(W) \text{ et } Aut([S], [S]_c) = Aut(\Gamma).$$

**Commentaires 3.2.3.** Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter à angles droits de type  $\Gamma$ . Identifions  $Aut([S], [S]_c)$  au sous-groupe  $Aut(W, F_S)$  de  $Aut(W)$ .

- a. Notons  ${}^W S$  l'ensemble des conjugués des éléments de  $S$  dans  $W$ . Le corollaire 1 de [Tit88] montre en particulier que l'on a  $\ker(\pi_{Aut}) \subseteq Aut(W, {}^W S)$  (sous-groupe des automorphismes de  $W$  qui stabilisent  ${}^W S$ ). De plus, on vérifie que l'on a  $Aut(W, F_S) \cap Aut(W, {}^W S) = Aut(\Gamma)$ . On en déduit la caractérisation  $Aut([S], [S]_c) = Aut(\Gamma) \iff Aut(W) = Aut(W, {}^W S)$ .
- b. Lorsque  $W$  est de rang *fini*, on peut, par des considérations simples sur  $\Gamma$  (ou sur son graphe), déterminer si  $W$  est fortement rigide ou non. En effet, on a :
  1.  $\ker(\pi_{Aut}) = Int(W) \iff \forall s \in S, \forall t, u \in S \setminus C(s), \exists t_0 = t, t_1, \dots, t_n = u \in S \setminus C(s)$  tels que  $t_{i-1}$  et  $t_i$  commutent, pour  $1 \leq i \leq n$  (cf. [Müh98], corollaire du théorème principal),
  2.  $Aut([S], [S]_c) = Aut(\Gamma) \iff \forall s \in S, C^2(s) = \{s\}$  (cf. [BM05, Théorème 5.1], appliqué aux groupes de Coxeter à angles droits et de rang fini, et les commentaires 2.2.2 et 3.2.3a).

Cette caractérisation est également donnée dans [BMMN02], théorème 4.10.

- c. Si  $W$  est de rang *infini*, la condition b1 est nécessaire pour avoir  $\ker(\pi_{Aut}) = Int(W)$ , mais n'est pas suffisante (cf. [Tit88, proposition 5 et remarque finale de la partie 3]). Par contre, la proposition 3.2.7 ci-dessous montre que la caractérisation b2 est encore valable. C'est un résultat qui découle également de l'étude du groupe  $Aut([S], [S]_c)$  que nous effectuons dans la partie suivante (cf. remarque 4.4.1c ci-dessous).

**Notation 3.2.4.** Soient  $s \in S$  et  $t \in C^2(s)$ ,  $t \neq s$ . Nous notons  $\alpha_{s,t}$  l'endomorphisme  $\mathbb{F}_2$ -linéaire de  $[S]$  donné par  $\alpha_{s,t}(\{x\}) = \{x\}$  si  $x \in S \setminus \{s\}$ , et  $\alpha_{s,t}(\{s\}) = \{s, t\}$ .

**Propriétés 3.2.5.** Soit  $\alpha_{s,t}$  comme ci-dessus :

- a. c'est un endomorphisme involutif, donc un élément de  $Aut([S])$ ,

b. on a plus précisément  $\alpha_{s,t} \in \text{Aut}([S], [S]_c)$ .

En effet, pour  $X \in [S]_c$ , on a soit  $\alpha_{s,t}(X) = X \in [S]_c$  si  $s \notin X$ , soit  $\alpha_{s,t}(X) = X + \{t\}$  si  $s \in X$ , auquel cas  $t \in C^2(s) \subseteq C^2(X) \subseteq C(X)$  (la dernière inclusion est vérifiée car,  $X$  étant commutative, on a  $X \subseteq C(X)$ ) et donc  $X + \{t\} \in [S]_c$ ; ceci montre l'inclusion  $\alpha_{s,t}([S]_c) \subseteq [S]_c$ , et comme  $\alpha_{s,t}$  est involutif, on a le résultat.

**Commentaires 3.2.6.** La matrice de  $\alpha_{s,t}$  dans la base des singletons de  $[S]$  est une matrice de transvection élémentaire. L'automorphisme  $\alpha_{s,t}$ , vu comme élément de  $\text{Aut}(W)$ , envoie  $s$  sur  $st$  et fixe les autres éléments de  $S$ . Il apparaît sous une forme plus générale dans [BM05, Lemme 6.1].

**Proposition 3.2.7.** Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter à angles droits de type  $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$ . On a

$$\text{Aut}([S], [S]_c) = \text{Aut}(\Gamma) \iff \forall s \in S, C^2(s) = \{s\}.$$

*Démonstration.* Supposons que, pour tout  $s \in S$ ,  $C^2(s) = \{s\}$ . La proposition 2.3.3 nous montre alors que les sous-espaces de  $[S]$  de la forme  $[\{s\}] = \{\emptyset, \{s\}\}$ , où  $s \in S$ , sont permutés entre eux par les éléments de  $\text{Aut}([S], [S]_c)$ . Comme ces éléments sont des automorphismes de  $[S]$ , ils fixent  $\emptyset$  (élément neutre de  $[S]$ ) et permutent donc entre eux les singletons de  $S$ . On en déduit que  $\text{Aut}([S], [S]_c) \subseteq \text{Aut}(\Gamma)$  (cf. remarque 1.2.3c).

Réciproquement, supposons qu'une cellule  $C^2(s)$  contienne un élément  $t \neq s$ , et considérons l'endomorphisme  $\alpha_{s,t}$  de  $[S]$  défini comme ci-dessus. C'est un élément de  $\text{Aut}([S], [S]_c)$ , d'après la remarque 3.2.5b, qui n'appartient pas à  $\text{Aut}(\Gamma)$ , puisqu'il ne respecte pas le cardinal. On a donc  $\text{Aut}(\Gamma) \subsetneq \text{Aut}([S], [S]_c)$  et le résultat.  $\square$



## Chapitre 4

# Le groupe $Aut([S], [S]_c)$ .

Soient  $W$  un groupe de Coxeter à angles droits,  $S \in \mathcal{S}(W)$  et  $\Gamma = \Gamma_{(W,S)}$ .

Dans ce chapitre, nous étudions le groupe  $Aut(W, F_S)$ . Rappelons qu'il s'identifie à  $Aut(W^{ab}, \overline{F})$  et à  $Aut([S], [S]_c)$ , comme en remarque 1.2.3b et commentaires 1.2.4b. C'est précisément ce groupe  $Aut([S], [S]_c)$  que nous décrivons dans ce qui suit.

Les résultats de la section 2.3, appliqués au cas particulier où  $S = S'$ , nous fournissent deux premières décompositions en produits semi-directs, détaillées en sections 4.1 et 4.2. La section 4.3 est consacrée à l'étude du sous-groupe  $K^\circ(\Gamma)$  qui apparaît dans la seconde décomposition. Nous collectons les résultats obtenus dans la section 4.4, et les appliquons au cas particulier du rang fini.

Pour alléger les énoncés, nous posons  $R = R_\Gamma$ ,  $C = C_{(S,R)}$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(S, R)$  et  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(S, R)$ .

### 4.1 Les sous-groupes $Aut(\Gamma)$ et $K(\Gamma)$ . Dévissage de $Aut([S], [S]_c)$ .

Nous notons  $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$  le groupe des automorphismes de l'ensemble à relation  $(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}})$  qui respectent le cardinal. Le théorème 2.3.6 nous montre en particulier que tout  $\varphi \in Aut([S], [S]_c)$  induit un élément  $\varphi_{\mathcal{N}}$  de  $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ , donné, pour  $N \in \mathcal{N}$ , par  $N \mapsto N'(\in \mathcal{N})$ , où  $\varphi([Cel(N)]) = [Cel(N')]$ .

**Notation 4.1.1** (le groupe  $K(\Gamma)$ ). Notons  $\theta$  l'application

$$Aut([S], [S]_c) \rightarrow Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card), \varphi \mapsto \varphi_{\mathcal{N}}.$$

On vérifie facilement que  $\theta$  est un morphisme de groupes. Nous notons  $K(\Gamma)$  son noyau.

Rappelons que l'on a  $Aut(\Gamma) = Aut(S, R)$  (cf. remarque 2.1.3b) et que le groupe  $Aut(\Gamma)$  s'identifie, via  $\sigma \mapsto (X \mapsto \sigma(X))$ , au sous-groupe de  $Aut([S], [S]_c)$  constitué des éléments de  $Aut([S], [S]_c)$  qui respectent le cardinal (cf. remarque 1.2.3c). Pour  $\sigma \in Aut(\Gamma)$ , on note encore  $\sigma$  l'élément de  $Aut([S], [S]_c)$  donné par  $X \mapsto \sigma(X)$ .

Soit  $\sigma \in Aut(\Gamma)$ . On vérifie que, pour tout  $X \in [S]$ , on a  $\sigma([X]) = [\sigma(X)]$  et  $C(\sigma(X)) = \sigma(C(X))$ . L'automorphisme  $\sigma$  permute donc les noyaux (de même cardinal) de  $(S, R)$  et l'on voit que l'élément  $\theta(\sigma) = \sigma_{\mathcal{N}}$  de  $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$  est simplement donné par  $N \mapsto \sigma(N)$ .

**Notation 4.1.2.** Soit  $\Omega$  l'ensemble des classes d'équivalence de la relation d'équivalence  $Card(N) = Card(P)$  sur  $\mathcal{N}$ . Pour  $\omega \in \Omega$ , fixons une fois pour toutes un représentant  $N_\omega$  de

la classe  $\omega$  et, pour tout  $N \in \omega$ , une bijection  $\sigma_{\omega, N} : N_\omega \xrightarrow{\sim} N$  (il en existe une, puisque  $Card(N_\omega) = Card(N)$ ).

Pour  $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ , nous définissons la permutation  $\sigma_\psi$  de  $S$ , noyau par noyau, de la manière suivante : si  $N \in \mathcal{N}$  et si  $\omega$  est la classe de  $N$  (et de  $\psi(N)$ ), alors  $\sigma_\psi$  est donné de  $N$  sur  $\psi(N)$  par  $\sigma_{\omega, \psi(N)} \circ (\sigma_{\omega, N})^{-1}$ . On note  $G$  l'ensemble des  $\sigma_\psi$ , pour  $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ .

**Proposition 4.1.3.** *Pour  $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ , on a  $\sigma_\psi \in Aut(\Gamma)$ . De plus, l'application  $\psi \mapsto \sigma_\psi$  est un morphisme de groupes et une section de  $\theta$ . En particulier,  $G$  est un sous-groupe de  $Aut(\Gamma)$  et on a les décompositions :*

$$Aut([S], [S]_c) = K(\Gamma) \rtimes G \quad \text{et} \quad Aut(\Gamma) = (K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)) \rtimes G$$

*Démonstration.* La proposition 2.2.9 nous montre que, si  $\psi \in Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ , la permutation  $\sigma_\psi$  de  $S$  appartient à  $Aut(\Gamma)$ . De plus, vu la définition des  $\sigma_\psi$ , l'application  $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card) \rightarrow Aut(\Gamma)$ ,  $\psi \mapsto \sigma_\psi$  est un morphisme de groupes et  $\sigma_\psi$  s'envoie sur  $\psi$  par  $\theta$ , d'où le résultat.  $\square$

Le groupe  $K(\Gamma)$  est explicité dans la section suivante. Décrivons pour le moment le groupe  $K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)$  :

**Proposition 4.1.4.** *Soient  $\sigma \in K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)$  et  $N \in \mathcal{N}$ . Alors  $\sigma$  induit (par restriction) une permutation  $\sigma|_N$  de  $N$ . De plus, l'application  $\rho_1 : K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) \rightarrow \prod_{N \in \mathcal{N}} Perm(N)$ ,  $\sigma \mapsto (\sigma|_N)_{N \in \mathcal{N}}$  est un isomorphisme de groupes.*

*Démonstration.* On sait que tout élément  $\sigma$  de  $Aut(\Gamma)$  permute les noyaux (cf. ci-dessus) et induit donc une bijection de  $N$  sur  $\sigma(N)$ . Si, de plus,  $\sigma \in K(\Gamma)$ , alors  $\sigma(N) = N$  et la permutation  $\sigma|_N$  est bien définie. On vérifie facilement que  $\sigma \mapsto (\sigma|_N)_{N \in \mathcal{N}}$  est un morphisme de groupes injectif (puisque  $\mathcal{N}$  est une partition de  $S$ ). De plus, si  $(\sigma_N)_{N \in \mathcal{N}}$  est un élément de  $\prod_{N \in \mathcal{N}} Perm(N)$ , alors, d'après la proposition 2.2.9, la permutation de  $S$  définie noyau par noyau par  $\sigma_N : N \rightarrow N$ , pour tout  $N \in \mathcal{N}$ , appartient à  $Aut(\Gamma)$  (c'est le cas particulier où  $\psi = Id_{\mathcal{N}}$ ). On voit donc que le morphisme  $\sigma \mapsto (\sigma|_N)_{N \in \mathcal{N}}$  est surjectif.  $\square$

## 4.2 Les sous-groupes $D(\Gamma)$ et $K^\circ(\Gamma)$ . Dévissage de $K(\Gamma)$ .

Comme  $\mathcal{N}$  est une partition de  $S$ , on a  $[S] = \bigoplus_{N \in \mathcal{N}} [N]$ .

**Proposition 4.2.1.** *L'ensemble  $[S]_c$  est l'ensemble des sommes (finies)  $\sum_{N \in \mathcal{N}} X_N$  où, pour tout  $N \in \mathcal{N}$ ,  $X_N \in [N]$ , et où  $\{N \in \mathcal{N} \mid X_N \neq \emptyset\}$  est fini et de réunion commutative (i.e. formé de noyaux deux à deux en relation  $R_{\mathcal{P}}$ ). On en déduit que l'on a :*

$$K(\Gamma) = \{\varphi \in Aut([S]) \mid \forall T \in \mathcal{C}, \varphi([T]) = [T]\}.$$

*Démonstration.* Toute telle somme  $\sum_{N \in \mathcal{N}} X_N$  est une partie commutative finie de  $S$  et appartient donc à  $[S]_c$ . Réciproquement, si  $X \in [S]_c$ , alors, dans la décomposition  $[S] = \bigoplus_{N \in \mathcal{N}} [N]$ ,  $X$  s'écrit  $X = \sum_{1 \leq k \leq n} X_k$ , où, pour tout  $k$ ,  $X_k$  est une partie finie non vide d'un noyau  $N_k$  et où, d'après le lemme 2.2.8, les noyaux  $N_k$  sont deux à deux en relation  $R_{\mathcal{P}}$ .

Comme  $K(\Gamma)$  est, par définition, le noyau de  $\theta$ , on a  $\varphi([T]) = [T]$ , pour tous  $\varphi \in K(\Gamma)$  et  $T \in \mathcal{C}$ . Réciproquement, il s'agit de montrer que, si  $\varphi \in Aut([S])$  satisfait à  $\varphi([T]) = [T]$ , pour tout  $T \in \mathcal{C}$ , alors  $\varphi([S]_c) = [S]_c$ . Or si  $N$  est un noyau de  $S$  et si  $X \in [N]$ , on a

$\varphi(X) \in [Cel(N)] \subseteq [S]_c$ ; comme on sait que deux noyaux  $N$  et  $P$  sont en relation  $R_{\mathcal{P}}$  si et seulement si les cellules  $Cel(N)$  et  $Cel(P)$  le sont (cf. proposition 2.2.7), la caractérisation de  $[S]_c$  obtenue ci-dessus permet de conclure que l'on a  $\varphi([S]_c) \subseteq [S]_c$ . Le même raisonnement appliqué à  $\varphi^{-1}$  nous fournit  $\varphi^{-1}([S]_c) \subseteq [S]_c$  et on a donc le résultat.  $\square$

**Notation 4.2.2** (le sous-groupe  $D(\Gamma)$ ). Posons

$$D(\Gamma) = \{\varphi \in Aut([S]) \mid \forall N \in \mathcal{N}, \varphi([N]) = [N]\}.$$

Comme  $[S] = \bigoplus_{N \in \mathcal{N}} [N]$ , il est clair que  $D(\Gamma)$  s'identifie à  $\prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N])$ , via l'isomorphisme  $\rho_2 : \varphi \mapsto (\varphi|_{[N]})_{N \in \mathcal{N}}$ .

**Proposition 4.2.3.** *Le sous-groupe  $D(\Gamma)$  de  $Aut([S])$  est inclus dans  $K(\Gamma)$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition précédente, il suffit de vérifier que, pour tout  $\varphi \in D(\Gamma)$  et tout  $T \in \mathcal{C}$ , on a  $\varphi([T]) = [T]$ . Or toute cellule  $T$  est la réunion des  $N(s)$ , pour  $s \in T$  (propriété 2.2.6b), donc  $[T] = \sum_{s \in T} [N(s)]$  et on en déduit le résultat.  $\square$

**Notation 4.2.4** (le sous-groupe  $K^\circ(\Gamma)$ ). Soit  $T \in \mathcal{C}$ . On pose  $T^\circ = T \setminus Noy(T)$  et  $V_T = [T]/[T^\circ]$  (cf. notation 2.3.2). D'après la proposition 2.3.3, tout élément  $\varphi$  de  $K(\Gamma)$  induit un automorphisme  $\bar{\varphi}_T$  de l'espace vectoriel quotient  $V_T$ , donné par  $\bar{\varphi}_T : \bar{X} = X + [T^\circ] \mapsto \overline{\varphi(X)} = \varphi(X) + [T^\circ]$ .

L'application  $\rho_3 : \varphi \mapsto (\bar{\varphi}_T)_{T \in \mathcal{C}}$  est clairement un morphisme de groupes de  $K(\Gamma)$  dans  $\prod_{T \in \mathcal{C}} Aut(V_T)$ . On note  $K^\circ(\Gamma)$  son noyau. On a

$$K^\circ(\Gamma) = \{\varphi \in K(\Gamma) \mid \forall s \in S, \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^\circ]\}.$$

**Proposition 4.2.5.** *La restriction de  $\rho_3$  à  $D(\Gamma)$  est bijective. En particulier, on a :*

$$K(\Gamma) = K^\circ(\Gamma) \rtimes D(\Gamma).$$

*Démonstration.* Soient  $N \in \mathcal{N}$  et  $T = Cel(N)$ . Comme  $T$  est la réunion disjointe de  $N$  et de  $T^\circ$ , on a la décomposition  $[T] = [N] \oplus [T^\circ]$ , et le morphisme  $X \mapsto \bar{X} = X + [T^\circ]$  est donc un isomorphisme de  $[N]$  sur  $V_T$ . Si l'on identifie  $[N]$  à  $V_T$  (et  $Aut([N])$  à  $Aut(V_T)$ ) via cet isomorphisme, alors la restriction de  $\rho_3$  à  $D(\Gamma)$  s'identifie à l'isomorphisme  $\rho_2 : \varphi \mapsto (\varphi|_{[N]})_{N \in \mathcal{N}}$  de  $D(\Gamma)$  sur  $\prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N])$  (cf. notation 4.2.2). On a donc le résultat.  $\square$

**Commentaires 4.2.6.** Exemples d'éléments de  $D(\Gamma)$  et de  $K^\circ(\Gamma)$ .

- a. On a  $K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) \subseteq D(\Gamma)$ . De plus, l'isomorphisme  $\rho_1$  de la proposition 4.1.4 est induit par l'isomorphisme  $\rho_2$  si l'on identifie, pour tout  $N \in \mathcal{N}$ ,  $Perm(N)$  à un sous-groupe de  $Aut([N])$ , via  $\sigma \mapsto (X \mapsto \sigma(X))$  (cf. remarque 1.1.4a).
- b. Soient  $s \in S$  et  $t \in C^2(s)$ ,  $t \neq s$ . Alors l'élément  $\alpha_{s,t}$  de  $Aut([S], [S]_c)$ , défini en notation 3.2.4, appartient à  $D(\Gamma)$  ou à  $K^\circ(\Gamma)$  selon que  $C^2(t) = C^2(s)$  ou que  $C^2(t) \not\subseteq C^2(s)$ .

## 4.3 Étude du groupe $K^\circ(\Gamma)$ .

**Les sous-groupes  $K_Y^\circ(\Gamma)$ ,  $Y \subseteq S$ , de  $K^\circ(\Gamma)$ .**

Les résultats de cette section 4.3 sont valables pour le groupe  $K(\Gamma)$  (en remplaçant systématiquement  $K^\circ$  par  $K$  dans les énoncés qui suivent). Cependant, comme ils ne nous serviront qu'à décrire le groupe  $K^\circ(\Gamma)$ , c'est dans ce cadre que nous les présentons.

**Définition 4.3.1** (support). Soit  $End([S])$  l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel  $[S]$ . Pour  $\varphi \in End([S])$ , on appelle *support de  $\varphi$*  l'ensemble  $D_\varphi = \{s \in S \mid \varphi(\{s\}) \neq \{s\}\}$ .

**Propriétés 4.3.2.** Soit  $\varphi \in End([S])$ .

- a. On vérifie facilement que l'on a  $D_\varphi = \emptyset \iff \varphi = Id_{[S]}$ , et que, si  $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n$ , avec  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in End([S])$ , alors  $D_\varphi \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq n} D_{\varphi_k}$ .
- b. De plus, si  $\varphi \in Aut([S])$ , alors  $D_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$ .

**Notation 4.3.3** (les sous-groupes  $K_Y^\circ(\Gamma)$ ). Soit  $Y \subseteq S$ . Nous notons  $K_Y^\circ(\Gamma)$  le sous-ensemble  $\{\varphi \in K^\circ(\Gamma) \mid D_\varphi \subseteq Y\}$  de  $K^\circ(\Gamma)$ . D'après les propriétés 4.3.2a et 4.3.2b ci-dessus,  $K_Y^\circ(\Gamma)$  est un sous-groupe de  $K^\circ(\Gamma)$ . Remarquons que  $K_S^\circ(\Gamma) = K^\circ(\Gamma)$ .

**Définition 4.3.4** (parties saturées). Soit  $Y \subseteq S$ . Nous disons qu'une partie  $X$  de  $S$  est *Y-saturée* si, pour tout  $x \in X \cap Y$ ,  $C^2(x) \cap Y \subseteq X$ . Nous disons simplement *saturée* pour  $S$ -saturée.

**Propriétés 4.3.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux parties de  $S$ .

- a.  $X$  est  $Y$ -saturée si et seulement si  $X \cap Y = \bigcup_{x \in X \cap Y} C^2(x) \cap Y$ . En particulier, les parties saturées sont les réunions de cellules.
- b. Si  $Y' \subseteq Y$  et si  $X$  est  $Y$ -saturée, alors  $X$  est  $Y'$ -saturée.

**Définition 4.3.6** (troncature). Soient  $X \subseteq S$  et  $\varphi \in End([S])$ . On appelle *troncature de  $\varphi$  suivant  $X$*  l'endomorphisme  $\varphi_X$  de  $[S]$  donné par  $\varphi_X(\{s\}) = \varphi(\{s\})$  si  $s \in X$  et  $\varphi_X(\{s\}) = \{s\}$  si  $s \notin X$ . Clairement,  $\varphi_X$  coïncide avec  $\varphi$  sur  $[X \cup (S \setminus D_\varphi)]$  et  $D_{\varphi_X} = X \cap D_\varphi$ .

**Lemme 4.3.7.** Soient  $Y \subseteq S$  et  $X$  une partie  $Y$ -saturée de  $S$ .

1. Soient  $\varphi, \psi \in K_Y^\circ(\Gamma)$ . Alors  $(\varphi \circ \psi)_X = \varphi_X \circ \psi_X$ .
2. L'application  $K_Y^\circ(\Gamma) \rightarrow K_{X \cap Y}^\circ(\Gamma)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi_X$  est un morphisme de groupes. Son noyau est le sous-groupe  $K_{Y \setminus X}^\circ(\Gamma)$  de  $K_Y^\circ(\Gamma)$ .

*Démonstration.* Montrons le premier point. Soient  $\varphi, \psi \in K_Y^\circ(\Gamma)$  et  $s \in S$ . Montrons que l'on a  $(\varphi \circ \psi)_X(\{s\}) = (\varphi_X \circ \psi_X)(\{s\})$ . Si  $s \notin X \cap Y$ , alors  $\varphi_X(\{s\}) = \psi_X(\{s\}) = (\varphi \circ \psi)_X(\{s\}) = \{s\}$  et le résultat est clair. Si  $s \in X \cap Y$ , alors  $C^2(s) \subseteq X \cup (S \setminus Y)$  puisque  $X$  est  $Y$ -saturée. On a alors  $C^2(s) \subseteq X \cup (S \setminus D_\varphi)$  (puisque  $D_\varphi \subseteq Y$ ) et  $\varphi_X$  coïncide donc avec  $\varphi$  sur  $[C^2(s)]$ . De plus, comme  $\psi \in K(\Gamma)$ , on a  $\psi_X(\{s\}) = \psi(\{s\}) \in [(C^2(s))]$ , d'où l'on déduit que  $(\varphi_X \circ \psi_X)(\{s\}) = \varphi(\psi(\{s\})) = (\varphi \circ \psi)_X(\{s\})$ .

Montrons le second point. Pour montrer que  $\varphi \mapsto \varphi_X$  est un morphisme de groupes de  $K_Y^\circ(\Gamma)$  dans  $K_{X \cap Y}^\circ(\Gamma)$ , il suffit (grâce au premier point) de montrer que, pour  $\varphi \in K_Y^\circ(\Gamma)$ , la troncature  $\varphi_X$  appartient à  $K_{X \cap Y}^\circ(\Gamma)$ . Vu la définition de  $\varphi_X$ , le seul fait non trivial à montrer est que  $\varphi_X$  appartient à  $K(\Gamma)$ . Le premier point nous montre en particulier que  $(\varphi^{-1})_X$  et  $\varphi_X$  sont des automorphismes (de  $[S]$ ) inverses l'un de l'autre (puisque  $(Id_{[S]})_X = Id_{[S]}$ ). D'après la proposition 4.2.1, il reste à montrer que l'on a  $\varphi_X([T]) = [T]$ , pour toute cellule  $T$ . Or, par définition de  $\varphi_X$  et de  $(\varphi^{-1})_X$  et comme  $\varphi \in K(\Gamma)$ , on a clairement  $\varphi_X([T]) \subseteq [T]$  et  $(\varphi^{-1})_X([T]) = (\varphi_X)^{-1}([T]) \subseteq [T]$ , d'où le résultat. Le noyau de ce morphisme est clairement le sous-groupe  $K_{Y \setminus X}^\circ(\Gamma)$  de  $K_Y^\circ(\Gamma)$ , et le lemme est donc démontré.  $\square$

**Proposition 4.3.8.** Soit  $Y \subseteq S$  et soit  $X$  une partie  $Y$ -saturée de  $S$ . On a la décomposition :

$$K_Y^\circ(\Gamma) = K_{Y \setminus X}^\circ(\Gamma) \rtimes K_{X \cap Y}^\circ(\Gamma).$$

*Démonstration.* L'assertion 2 du lemme précédent nous dit que l'on a un morphisme de groupes  $\varphi \mapsto \varphi_X$  de  $K_Y^\circ(\Gamma)$  dans  $K_{X \cap Y}^\circ(\Gamma)$  et que ce morphisme a pour noyau  $K_{Y \setminus X}^\circ(\Gamma)$ . Comme l'inclusion naturelle  $K_{X \cap Y}^\circ(\Gamma) \hookrightarrow K_Y^\circ(\Gamma)$  en est clairement une section, on a le résultat.  $\square$

Ce résultat suggère une méthode pour décrire le groupe  $K_Y^\circ(\Gamma)$ , pour une partie donnée  $Y$  de  $S$  : trouver une partie  $Y$ -saturée  $X \subsetneq Y$  telle que le sous-groupe  $K_{Y \setminus X}^\circ(\Gamma)$  soit "simple à décrire", puis décrire le sous-groupe  $K_{X \cap Y}^\circ(\Gamma) = K_X^\circ(\Gamma)$  par récurrence.

Dans la section suivante, nous décrivons le sous-groupe  $K_Z^\circ(\Gamma)$  de  $K^\circ(\Gamma)$  dans le cas où  $Z$  est une partie d'"épaisseur nulle" (voir la définition 4.3.9 ci-dessous).

Dans la section 4.3, nous allons voir comment décomposer toute partie  $Y$  de  $S$  en l'union disjointe d'une partie d'épaisseur nulle  $Y_0$  et d'une partie  $Y$ -saturée  $Y_{\geq 1}$ . La proposition 4.3.8, appliquée récursivement, nous permettra alors de décomposer le groupe  $K_Y^\circ(\Gamma)$  (au moins lorsque  $Y$  est "d'épaisseur finie", au sens de la définition 4.3.17 ci-dessous) en produits semi-directs itérés de certains de ses sous-groupes  $K_Z^\circ(\Gamma)$  avec  $Z$  d'épaisseur nulle (cf. théorème 4.3.18).

### Parties d'épaisseur nulle.

Nous définissons plus loin (en définition 4.3.17) "l'épaisseur" (dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) d'une partie de  $S$ .

**Définition 4.3.9** (parties d'épaisseur nulle). On dit qu'une partie  $Z$  de  $S$  est *d'épaisseur nulle* si, pour tout  $s \in Z$ ,  $(C^2(s))^\circ \cap Z = \emptyset$  (i.e. si tous les noyaux sont  $Z$ -saturés).

**Remarques 4.3.10.** Exemples de parties d'épaisseur nulle.

- a. Si  $Z$  est d'épaisseur nulle et si  $Z' \subseteq Z$ , alors  $Z'$  est d'épaisseur nulle.
- b. Les noyaux (et donc les parties de noyaux, d'après a) sont d'épaisseur nulle.

Fixons une partie  $Z$  de  $S$  d'épaisseur nulle.

**Lemme 4.3.11.** Soient  $\varphi, \psi \in \text{End}([S])$  de support inclu dans  $Z$  et soit  $s \in Z$ . Si  $\varphi(\{s\}) = \{s\} + Y$  et  $\psi(\{s\}) = \{s\} + Y'$ , où  $Y, Y' \in [(C^2(s))^\circ]$ , alors  $(\varphi \circ \psi)(\{s\}) = (\psi \circ \varphi)(\{s\}) = \{s\} + Y + Y'$ .

*Démonstration.* Par hypothèse,  $Z$  est d'épaisseur nulle et contient  $s$ , donc est disjointe de  $(C^2(s))^\circ$ . A fortiori, les parties  $Y$  et  $Y'$  de  $(C^2(s))^\circ$  sont disjointes de  $D_\varphi$  et de  $D_\psi$  (qui sont inclus dans  $Z$ ). On a donc  $\varphi(Y') = Y'$ ,  $\psi(Y) = Y$ , et un calcul direct nous donne le résultat.  $\square$

**Proposition 4.3.12.**  $K_Z^\circ(\Gamma) = \{\varphi \in \text{End}([S]) \mid D_\varphi \subseteq Z \text{ et, } \forall s \in Z, \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^\circ]\}$ . En particulier,  $K_Z^\circ(\Gamma)$  est un 2-groupe élémentaire.

*Démonstration.* Par définition de  $K^\circ(\Gamma)$  et de son sous-groupe  $K_Z^\circ(\Gamma)$ , on a l'inclusion

$$K_Z^\circ(\Gamma) \subseteq \{\varphi \in \text{End}([S]) \mid D_\varphi \subseteq Z \text{ et, } \forall s \in Z, \varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^\circ]\}.$$

Soit donc  $\varphi$  un endomorphisme de  $[S]$  tel que  $D_\varphi \subseteq Z$  et que  $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^\circ]$ , pour tout  $s \in Z$ .



Montrons que  $\varphi^2 = \text{Id}_{[S]}$ . Si  $s \notin Z$ , alors on a  $\varphi(\{s\}) = \{s\}$ , donc  $\varphi^2(\{s\}) = \{s\}$ ; si  $s \in Z$ , alors  $\varphi(\{s\}) = \{s\} + Y$ , où  $Y \in [(C^2(s))^\circ]$ , et le lemme précédent nous fournit  $\varphi^2(\{s\}) = \{s\} + Y + Y = \{s\}$ .

Il reste à montrer que  $\varphi$  appartient à  $K(\Gamma)$ . Il suffit pour cela de montrer que, pour toute cellule  $T$ ,  $\varphi([T]) = [T]$  (cf. proposition 4.2.1) et, comme  $\varphi$  est involutif, il suffit de montrer que  $\varphi([T]) \subseteq [T]$ . Or pour  $s \in T$  (qui satisfait donc à  $C^2(s) \subseteq T$ ), on a soit  $s \notin D_\varphi$ , auquel cas  $\varphi(\{s\}) = \{s\} \in [T]$ , soit  $s \in D_\varphi$ , donc  $s \in Z$  et  $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^\circ] \subseteq [T]$ . On a donc le résultat.  $\square$

**Corollaire 4.3.13.** *Soit  $(Z_i)_{i \in I}$  une partition de  $Z$ .*

*Alors l'application  $\varphi \mapsto (\varphi_{Z_i})_{i \in I}$ , où  $\varphi_{Z_i}$  est la troncature de  $\varphi$  suivant  $Z_i$ , est un isomorphisme de groupes de  $K_Z^\circ(\Gamma)$  sur le produit direct de ses sous-groupes  $K_{Z_i}^\circ(\Gamma)$  ( $i \in I$ ).*

*Démonstration.* Remarquons que, puisque  $Z$  est d'épaisseur nulle, chaque  $Z_i$ ,  $i \in I$ , est d'épaisseur nulle (cf. remarque 4.3.10a). D'après la caractérisation des éléments de  $K_X^\circ(\Gamma)$  pour une partie d'épaisseur nulle  $X$ , obtenue dans la proposition 4.3.12, il est clair que, pour tout  $i \in I$ , la troncature de tout élément de  $K_Z^\circ(\Gamma)$  suivant  $Z_i$  est un élément de  $K_{Z_i}^\circ(\Gamma)$ .

De plus, si  $\varphi, \psi \in K_Z^\circ(\Gamma)$ , alors  $(\varphi \circ \psi)_{Z_i} = \varphi_{Z_i} \circ \psi_{Z_i}$ . En effet, pour  $s \in Z_i$ , on a  $\varphi_{Z_i}(\{s\}) = \varphi(\{s\}) = \{s\} + Y$  et  $\psi_{Z_i}(\{s\}) = \psi(\{s\}) = \{s\} + Y'$ , où  $Y, Y' \in [(C^2(s))^\circ]$ , et le lemme 4.3.11 nous fournit  $(\varphi \circ \psi)(\{s\}) = \{s\} + Y + Y' = (\varphi_{Z_i} \circ \psi_{Z_i})(\{s\})$ . L'application  $\varphi \mapsto (\varphi_{Z_i})_{i \in I}$  est donc un morphisme de groupes de  $K_Z^\circ(\Gamma)$  dans  $\prod_{i \in I} K_{Z_i}^\circ(\Gamma)$ . Ce morphisme est injectif car l'image  $(\varphi_{Z_i})_{i \in I}$  détermine  $\varphi$  sur  $[Z]$  (puisque  $(Z_i)_{i \in I}$  est une partition de  $Z$ ), donc sur  $[D_\varphi]$ .

Montrons qu'il est surjectif. Si  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est un élément de  $\prod_{i \in I} K_{Z_i}^\circ(\Gamma)$ , définissons l'endomorphisme  $\varphi$  de  $[S]$  par  $\varphi(\{s\}) = \{s\}$  si  $s \notin Z$ , et  $\varphi(\{s\}) = \varphi_i(\{s\})$  si  $s \in Z_i$ . D'après la caractérisation de la proposition 4.3.12,  $\varphi$  est un élément de  $K_Z^\circ(\Gamma)$ , et il s'envoie clairement sur la famille  $(\varphi_i)_{i \in I}$ . On a donc le résultat.  $\square$

**Corollaire 4.3.14.** *Soient  $N \in \mathcal{N}$ , et  $X \subseteq N$ . On pose  $T = \text{Cel}(N)$ . Alors  $X$  est d'épaisseur nulle et l'application  $\varphi \mapsto (\text{Id}_{[S]} + \varphi)|_{[X]}$  est un isomorphisme de 2-groupes élémentaires de  $K_X^\circ(\Gamma)$  sur le groupe (additif)  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}([X], [T^\circ])$ , constitué des applications  $\mathbb{F}_2$ -linéaires de  $[X]$  dans  $[T^\circ]$ .*

*Démonstration.* La partie  $X$  de  $N$  est d'épaisseur nulle d'après la remarque 4.3.10b. Soit  $\varphi \in K_X^\circ(\Gamma)$ . On sait que, pour  $s \in S$ , on a  $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [(C^2(s))^\circ]$ . En particulier, pour  $s \in X \subseteq N$ , on a  $C^2(s) = T$ , donc  $\varphi(\{s\}) \in \{s\} + [T^\circ]$ . L'application  $\mathbb{F}_2$ -linéaire  $(\text{Id}_{[S]} + \varphi)|_{[X]}$  est donc à valeurs dans  $[T^\circ]$  et l'application  $\varphi \mapsto (\text{Id}_{[S]} + \varphi)|_{[X]}$  est donc bien à valeurs dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}([X], [T^\circ])$ .

Soient  $\varphi, \psi \in K_X^\circ(\Gamma)$  et  $s \in X$ . On a  $\varphi(\{s\}) = \{s\} + Y$  et  $\psi(\{s\}) = \{s\} + Y'$ , où  $Y, Y' \in [T^\circ]$ , et, d'après le lemme 4.3.11,  $\varphi \circ \psi(\{s\}) = \{s\} + Y + Y'$ , d'où  $(\text{Id}_{[S]} + \varphi \circ \psi)(\{s\}) = Y + Y' = (\text{Id}_{[S]} + \varphi)(\{s\}) + (\text{Id}_{[S]} + \psi)(\{s\})$ . Donc  $\varphi \mapsto (\text{Id}_{[S]} + \varphi)|_{[X]}$  est un morphisme de groupes. Ce morphisme est injectif, car l'image  $(\text{Id}_{[S]} + \varphi)|_{[X]}$  de  $\varphi$  détermine  $\varphi$  sur  $[X]$ , donc sur  $[D_\varphi]$ .

Montrons qu'il est surjectif. Pour  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}([X], [T^\circ])$ , notons encore  $f$  l'endomorphisme  $f \oplus 0|_{[S \setminus X]}$  (prolongement de  $f$  à  $[S]$ , défini par 0 sur  $[S \setminus X]$ ). Alors l'endomorphisme  $\varphi = \text{Id}_{[S]} + f$  de  $[S]$  appartient à  $K_X^\circ(\Gamma)$  (d'après la proposition 4.3.12), et s'envoie clairement sur  $f$ .  $\square$

Pour décomposer  $K_Z^\circ(\Gamma)$  (où  $Z$  est d'épaisseur nulle) comme dans le corollaire 4.3.13, nous allons privilégier, vu le corollaire 4.3.14, les partitions de  $Z$  en parties de noyaux. Par exemple, on obtient :

$$(E1) \quad K_Z^\circ(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \prod_{N \in \mathcal{N}(Z)} \mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}([N \cap Z], [(C\ell(N))^\circ]), \text{ via}$$

$$\varphi \mapsto ((Id_{[S]} + \varphi)|_{[N \cap Z]})_{N \in \mathcal{N}(Z)},$$

où  $\mathcal{N}(Z) = \{N(z) \mid z \in Z\}$  est l'ensemble des noyaux rencontrés par  $Z$ ,

$$(E2) \quad K_Z^\circ(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \prod_{s \in Z} \mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}(\{\{s\}\}, [(C^2(s))^\circ]) \xrightarrow{\sim} \prod_{s \in Z} [(C^2(s))^\circ], \text{ via}$$

$$\varphi \mapsto ((Id_{[S]} + \varphi)|_{\{\{s\}\}})_{s \in Z} \text{ et } (f_s)_{s \in Z} \mapsto (f_s(\{s\}))_{s \in Z},$$

avec la partition de  $Z$  en l'ensemble de ses singletons.

### Profondeur et décomposition en parties d'épaisseur nulle.

**Définition 4.3.15** (profondeur). Soit  $Y \subseteq S$ . On appelle *chaîne* (d'éléments de  $Y$ ) toute suite finie  $(y_0, y_1, \dots, y_p)$  d'éléments de  $Y$  telle que, pour  $1 \leq i \leq p$ ,  $C^2(y_{i-1}) \not\subseteq C^2(y_i)$ . Si  $(y_0, y_1, \dots, y_p)$  est une chaîne, on dit que sa *longueur* est  $p$ , et qu'elle a pour *origine*  $y_0$ .

Soit  $Y \subseteq S$ . On définit la fonction  $Y$ -profondeur  $p_Y : Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , de la façon suivante : pour  $y \in Y$ ,  $p_Y(y)$  est la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des chaînes d'éléments de  $Y$  d'origine  $y$ . Pour  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on pose  $Y_p = \{y \in Y \mid p_Y(y) = p\}$ , et  $Y_{\geq p} = \cup_{k \geq p} Y_k = \{y \in Y \mid p_Y(y) \geq p\}$  (En particulier,  $Y_{\geq 0} = Y$  et  $Y_\infty = Y_{\geq \infty}$ ).

**Propriétés 4.3.16.** Soit  $Y \subseteq S$ .

- a. Si  $Y$  est une cellule, alors  $Y_0 = \text{Noy}(Y)$ , et  $Y_{\geq 1} = Y \setminus \text{Noy}(Y) = Y^\circ$ . Plus généralement, si  $Y$  est saturée (i.e. si  $Y$  est une réunion de cellules) et si  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , alors  $Y_p$  est une réunion de noyaux, et  $Y_{\geq p}$  est saturée.
- b. Les  $Y_p$ , pour  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , sont deux à deux disjoints, et chaque partie  $Y_{\geq p}$  est  $Y$ -saturée.
- c. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $Y_n$  est d'épaisseur nulle, et satisfait à  $Y_n \neq \emptyset \implies Y_k \neq \emptyset$ , pour tout  $k \leq n$ . De plus, si  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on vérifie que  $(Y_{\geq n})_p = Y_{n+p}$ , d'où  $(Y_{\geq n})_{\geq p} = Y_{\geq n+p}$ .

**Définition 4.3.17** (épaisseur). Soit  $Y \subseteq S$ . Nous appelons *épaisseur de  $Y$*  la borne supérieure (dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) de la fonction  $p_Y$ . On vérifie facilement que les parties d'épaisseur 0, au sens que l'on vient de définir, sont les parties d'épaisseur nulle au sens de la définition 4.3.9 ci-dessus.

Lorsque  $S$  est d'épaisseur finie, nous disons que  $(W, S)$  et  $\Gamma_{(W, S)}$  sont *d'épaisseur finie*. Comme cette notion ne dépend pas de  $S \in \mathcal{S}(W)$  (puisque  $W$  est rigide), nous disons aussi, sans ambiguïté, que  $W$  est d'épaisseur finie. C'est par exemple le cas lorsque  $\mathcal{C}$  (ou  $\mathcal{N}$ ) est fini et, en particulier, on voit donc que tout groupe de Coxeter de rang fini est d'épaisseur finie.

**Théorème 4.3.18.** Soit  $Y \subseteq S$  d'épaisseur finie  $e$ . Alors :

$$K_Y^\circ(\Gamma) = K_{Y_0}^\circ(\Gamma) \rtimes (K_{Y_1}^\circ(\Gamma) \rtimes (\dots \rtimes (K_{Y_{e-1}}^\circ(\Gamma) \rtimes K_{Y_e}^\circ(\Gamma)) \dots)).$$

De plus, si  $Y$  est saturée, alors  $K_{Y_e}^\circ(\Gamma) = \{Id_{[S]}\}$ .

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Sans hypothèse sur  $Y$ , la proposition 4.3.8, appliquée à  $Y_{\geq k}$  et à la partie  $Y_{\geq k}$ -saturée  $(Y_{\geq k})_{\geq 1} = Y_{\geq k+1}$  (propriétés 4.3.16b et 4.3.16c), nous fournit la décomposition :

$$K_{Y_{\geq k}}^\circ(\Gamma) = K_{Y_k}^\circ(\Gamma) \rtimes K_{Y_{\geq k+1}}^\circ(\Gamma).$$

On suppose ici  $Y$  d'épaisseur finie  $e$ , donc on a  $Y_{\geq e+1} = \emptyset$  et  $K_{Y_{\geq e+1}}^\circ(\Gamma) = \{Id_{[S]}\}$ . La formule voulue s'obtient alors facilement par récurrence, en appliquant le procédé ci-dessus successivement aux parties  $Y_{\geq k}$ , pour  $0 \leq k \leq e$ .

Si, de plus,  $Y$  est saturée, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $y \in Y_n \Rightarrow (C^2(y))^\circ \subseteq Y_{\geq n+1}$ , et on voit que  $Y_e$  est nécessairement constitué d'éléments  $y$  tels que  $(C^2(y))^\circ = \emptyset$ . Mais alors, par définition de  $K_{Y_e}^\circ(\Gamma)$ , on a  $K_{Y_e}^\circ(\Gamma) = \{Id_{[S]}\}$ .  $\square$

## 4.4 Conclusion.

Le but de ce chapitre était de décrire le groupe  $Aut(W, F_S) \approx Aut([S], [S]_e)$  intervenant dans la décomposition de  $Aut(W)$  en produit semi-direct établie par J. Tits dans [Tit88].

Dans la section 4.1, nous avons défini un sous-groupe  $G$  de  $Aut(\Gamma)$ , isomorphe au groupe  $Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ , pour lequel on a (d'après la proposition 4.1.3) :

$$Aut([S], [S]_e) = K(\Gamma) \rtimes G \text{ et } Aut(\Gamma) = (K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma)) \rtimes G. \quad (4.1)$$

Les propositions 4.1.4 et 4.2.5 nous donnent (avec le commentaire 4.2.6a) :

$$\begin{aligned} K(\Gamma) &= K^\circ(\Gamma) \rtimes D(\Gamma), & \text{et } D(\Gamma) &\xrightarrow{\sim} \prod_{N \in \mathcal{N}} Aut([N]), \\ & & \text{via } \rho_2 : \varphi &\mapsto (\varphi|_{[N]})_{N \in \mathcal{N}}, \\ K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) &\subseteq D(\Gamma), & \text{et } K(\Gamma) \cap Aut(\Gamma) &\xrightarrow{\sim} \prod_{N \in \mathcal{N}} Perm(N), \\ & & \text{via } \rho_1 : \sigma &\mapsto (\sigma|_N)_{N \in \mathcal{N}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le théorème 4.3.18 nous permet de décrire le groupe  $K^\circ(\Gamma) = K_S^\circ(\Gamma)$ , dans le cas où  $S$  (qui est une partie saturée) est d'épaisseur finie  $e$ . On obtient :

$$K^\circ(\Gamma) = K_{S_0}^\circ(\Gamma) \rtimes (K_{S_1}^\circ(\Gamma) \rtimes (\cdots \rtimes (K_{S_{e-2}}^\circ(\Gamma) \rtimes K_{S_{e-1}}^\circ(\Gamma)) \cdots)). \quad (4.3)$$

Enfin, pour  $0 \leq k \leq e-1$ , la partie  $S_k$  de  $S$  est d'épaisseur nulle (cf. propriété 4.3.16c) et contient les noyaux qu'elle rencontre (cf. propriété 4.3.16a), ce qui signifie que,  $\mathcal{N}(S_k)$  désignant l'ensemble  $\{N(s) \mid s \in S_k\}$ , on a, pour tout  $N \in \mathcal{N}(S_k)$ ,  $N \subseteq S_k$ ; les formules (E1) et (E2) appliquées à  $S_k$  nous donnent donc :

$$\begin{aligned} K_{S_k}^\circ(\Gamma) &\xrightarrow{\sim} \prod_{N \in \mathcal{N}(S_k)} \mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}([N], [(C^2(N))^\circ]), \\ \varphi &\mapsto ((Id_{[S]} + \varphi)|_{[N]})_{N \in \mathcal{N}(S_k)} \\ K_{S_k}^\circ(\Gamma) &\xrightarrow{\sim} \prod_{s \in S_k} [(C^2(s))^\circ], \\ \varphi &\mapsto (\{s\} + \varphi(\{s\}))_{s \in S_k}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Remarques 4.4.1.** Rappelons que l'on note  $\mathcal{E}(S)$  l'ensemble des singletons de  $S$ . On a :

a.  $S$  est d'épaisseur nulle  $\Leftrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{C} \Leftrightarrow K^\circ(\Gamma) = \{1\}$ ,

- b.  $\mathcal{N} = \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow D(\Gamma) = \{1\} \Leftrightarrow \text{Aut}(\Gamma) \cap K(\Gamma) = \{1\} \Leftrightarrow G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  
c.  $\mathcal{C} = \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow K(\Gamma) = \{1\} \Leftrightarrow \text{Aut}([S], [S]_c) = \text{Aut}(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma$  satisfait aux conditions de a et de b.

On retrouve ainsi le résultat de la proposition 3.2.7.

### Cas des groupes de Coxeter à angles droits de rang fini.

Supposons à présent  $S$  de cardinal fini  $n$ . Notons  $e$  l'épaisseur (finie) de  $S$ .

Fixons un arrangement de la base  $\mathcal{E}(S)$  de  $[S]$  qui respecte la partition de  $S$  en les sous-ensembles  $S_0, S_1, \dots, S_e$  d'une part, et, pour tout  $0 \leq k \leq e$ , la partition  $\mathcal{N}(S_k)$  de  $S_k$  d'autre part. On identifie  $\text{Aut}([S])$  à  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ , en identifiant chaque automorphisme de  $[S]$  à sa matrice dans cette base. Notons que les matrices de transvection élémentaire engendrent  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ .

Les éléments de  $\text{Aut}(\Gamma)$  sont des matrices de permutation et, pour  $s \in S$  et  $t \in C^2(s)$ ,  $t \neq s$ , l'élément  $\alpha_{s,t}$  de  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  (cf. notation 3.2.4) est une matrice de transvection élémentaire.

Pour tous  $0 \leq k \leq e$  et  $N \in \mathcal{N}(S_k)$ , on a  $(\text{Cel}(N))^\circ \subseteq S_{\geq k+1}$ ; vu l'arrangement choisi pour la base  $\mathcal{E}(S)$ , les éléments de  $K(\Gamma)$ , qui stabilisent les sous-espaces  $[\text{Cel}(N)] = [N] \oplus [(\text{Cel}(N))^\circ]$ , pour  $N \in \mathcal{N}$ , sont des matrices (inversibles) triangulaires inférieures par blocs, relativement à la partition de  $S$  en les sous-ensembles  $S_0, S_1, \dots, S_e$ , telles que, pour tout  $0 \leq k \leq e$ , le bloc diagonal relatif à  $S_k$  soit une matrice inversible diagonale par blocs, relativement à la partition  $\mathcal{N}(S_k)$  de  $S_k$ . Rappelons que l'automorphisme  $\alpha_{s,t}$  ci-dessus appartient à  $D(\Gamma)$  ou à  $K^\circ(\Gamma)$  selon que  $C^2(t) = C^2(s)$  ou que  $C^2(t) \subsetneq C^2(s)$  (cf. commentaire 4.2.6b).

Le groupe  $D(\Gamma) \approx \prod_{N \in \mathcal{N}} \text{Aut}([N])$  est le groupe des matrices inversibles diagonales par blocs, relativement à la partition  $\mathcal{N}$  de  $S$  — c'est le sous-groupe de  $K(\Gamma)$  constitué des matrices de  $K(\Gamma)$  dont les blocs strictement sous la diagonale sont nuls. Chaque  $\text{Aut}([N])$  est engendré par les transvections élémentaires  $\alpha_{s,t}$ ,  $s \neq t \in N$ , donc  $D(\Gamma)$  est engendré par les  $\alpha_{s,t}$ , pour  $s \neq t \in S$  tels que  $C^2(s) = C^2(t)$ .

Le groupe  $K^\circ(\Gamma)$  est le sous-groupe de  $K(\Gamma)$  constitué des matrices de  $K(\Gamma)$  telles que, pour tout  $0 \leq k \leq e$ , le bloc diagonal relatif à  $S_k$  soit la matrice identité. De plus, pour  $0 \leq k \leq e - 1$ , le groupe  $K_{S_k}^\circ(\Gamma)$ , s'identifie, via  $\varphi \mapsto (\{s\} + \varphi(\{s\}))_{s \in S_k}$ , au groupe (additif)  $\prod_{s \in S_k} [(C^2(s))^\circ]$ ; par exemple, pour  $s \in S_k$  et  $t \in (C^2(s))^\circ$ , l'élément  $\alpha_{s,t}$  de  $K_{S_k}^\circ(\Gamma)$  s'identifie au singleton  $\{t\}$  de  $[(C^2(s))^\circ]$ . On en déduit que  $K_{S_k}^\circ(\Gamma)$  est engendré par les  $\alpha_{s,t}$ , pour  $s \in S_k$  et  $t \in (C^2(s))^\circ$ ; donc  $K^\circ(\Gamma)$  est engendré par les  $\alpha_{s,t}$ , pour  $s, t \in S$  tels que  $C^2(t) \subsetneq C^2(s)$ .

Le groupe  $K(\Gamma)$  est donc engendré par les automorphismes (involutifs)  $\alpha_{s,t}$ , où  $s \in S$  et  $t \in C^2(s)$ ,  $t \neq s$  (dans le cas où  $S$  est infini, un raisonnement analogue montre que ces automorphismes engendrent le sous-groupe de  $K(\Gamma)$  constitué des éléments de support — au sens de la définition 4.3.1 — fini), et le groupe  $\text{Aut}([S], [S]_c)$  est donc engendré par ces éléments et les éléments du sous-groupe  $G$  de  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

Cet ensemble générateur n'est en général pas minimal : par exemple, s'il existe  $s, t, u \in S$ , deux à deux distincts et tels que  $C^2(u) \subseteq C^2(t) \subseteq C^2(s)$ , alors  $\alpha_{s,u} = (\alpha_{s,t} \circ \alpha_{t,u})^2$ .



# Chapitre 5

## Exemples.

Voici quelques exemples qui illustrent l'étude effectuée dans le chapitre précédent.

Soit  $\Gamma = (m_{s,t})_{s,t \in S}$  une matrice de Coxeter à angles droits.

Nous retrouvons en particulier les résultats établis dans [Jam88, Tit88] : les cas qui y sont étudiés sont tous d'épaisseur nulle ou égale à 1, et, s'ils sont d'épaisseur 1, leurs noyaux sont réduits aux singletons.

**Exemples 5.1.** Exemples de [Jam88] et de [Tit88] (le groupe  $Aut(F(\Gamma))$  étudié par J. Tits est isomorphe à  $Aut([S], [S]_c)$ ).

- Supposons que le graphe de  $\Gamma$  soit le graphe  $\bullet \overset{\infty}{\text{---}} \bullet \overset{\infty}{\text{---}} \bullet \cdots \bullet$  à  $n$  sommets, numérotés de 1 à  $n$  de gauche à droite, avec  $n \geq 4$  (les cas  $1 \leq n \leq 3$  sont traités au point suivant). On a, pour  $i \notin \{3, n-2\}$ ,  $C^2(i) = \{i\}$ , et, si  $n \neq 5$  (resp. si  $n = 5$ ),  $C^2(3) = \{1, 3\}$  et  $C^2(n-2) = \{n-2, n\}$  (resp.  $C^2(3) = \{1, 3, 5\}$ ). On voit donc que  $\mathcal{N} = \mathcal{E}(S)$  et  $S$  est d'épaisseur 1, avec  $S_0 = \{2, 3, \dots, n-1\}$  et  $S_1 = \{1, n\}$ .

On a alors  $Aut([S], [S]_c) = K^\circ(\Gamma) \rtimes Aut(\Gamma) \approx K^\circ(\Gamma) \rtimes \mathbb{F}_2$ , et  $K^\circ(\Gamma) = K_{S_0}^\circ(\Gamma) \approx \prod_{s \in S_0} [(C^2(s))^\circ] \approx (\mathbb{F}_2)^2$ , d'après les formules (4.1) à (4.4) et la remarque 4.4.1b.

Le groupe  $Aut([S], [S]_c) \approx ((\mathbb{F}_2)^2) \rtimes \mathbb{F}_2$  est donc le groupe diédral d'ordre 8.

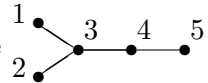
- Supposons que le graphe de  $\Gamma$  soit "bipartite complet", i.e. que  $S$  soit la réunion disjointe de deux sous-ensembles non vides  $S'$  et  $S''$  tels que  $m_{s,t} = \infty \Leftrightarrow (s,t) \in S' \times S''$  ou  $(s,t) \in S'' \times S'$ .

Avec notre terminologie, il s'agit du cas où  $S$  est d'épaisseur nulle et a deux noyaux, qui sont  $S'$  et  $S''$ .

On a alors  $Aut([S], [S]_c) = D(\Gamma) \rtimes G \approx (Aut([S']) \times Aut([S''])) \rtimes G$ , d'après les formules (4.1) et (4.2) et la remarque 4.4.1a, avec  $G \approx Aut(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, Card)$ , donc  $G = \{1\}$  si  $S'$  et  $S''$  n'ont pas même cardinal, et  $G \approx \mathbb{F}_2$  si  $S'$  et  $S''$  ont même cardinal.

- Supposons que le graphe de  $\Gamma$  soit un cycle de longueur  $n = 3$  ou  $n \geq 5$  (le cas  $n = 4$  est traité au point précédent). On vérifie alors que  $\mathcal{C} = \mathcal{E}(S)$  et donc  $Aut([S], [S]_c) = Aut(\Gamma)$  (cf. proposition 3.2.7, ou remarque 4.4.1c).
- Les autres cas étudiés par J. Tits sont tous d'épaisseur 1 et satisfont tous à  $\mathcal{N} = \mathcal{E}(S)$ . On a alors, comme au premier point,  $Aut([S], [S]_c) = K_{S_0}^\circ(\Gamma) \rtimes Aut(\Gamma)$  et  $K_{S_0}^\circ(\Gamma) \approx \prod_{s \in S_0} [(C^2(s))^\circ]$ .

Voici un premier exemple de graphe d'épaisseur non nulle avec  $\mathcal{N} \neq \mathcal{E}(S)$  :

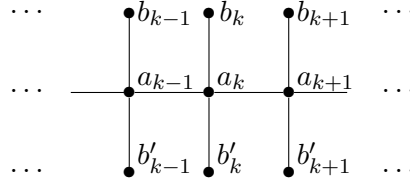
**Exemple 5.2.** Supposons que le graphe de  $\Gamma$  soit le graphe , où toutes les arêtes sont étiquetées  $\infty$ . On a :

Sommet $s$	1	2	3	4	5
Cellule $C^2(s)$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 5\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{5\}$
Noyau $N(s)$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$

On vérifie que  $G \approx \text{Aut}(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, \text{Card}) = \{1\}$  et que  $S$  est d'épaisseur 1, avec  $S_0 = \{3, 4\}$  et  $S_1 = \{1, 2, 5\}$ . On a alors, grâce aux formules (4.1) à (4.4) :  $\text{Aut}([S], [S]_c) = K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \rtimes D(\Gamma)$ , avec  $\begin{cases} D(\Gamma) \approx \text{Aut}(\{1, 2\}) \approx \text{GL}_2(\mathbb{F}_2) \approx \text{Sym}_3, \text{ et} \\ K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \approx [(C^2(3))^{\circ}] \times [(C^2(4))^{\circ}] \approx (\mathbb{F}_2)^3. \end{cases}$

Voici un exemple de graphe infini, mais d'épaisseur finie :

**Exemple 5.3.** Supposons que le graphe de  $\Gamma$  soit le graphe infini (indexé par  $\mathbb{Z}$ ) suivant, où toutes les arêtes sont étiquetées  $\infty$  :



On a :

Sommet $s$	$a_k$	$b_k$	$b'_k$
Cellule $C^2(s)$	$\{a_k, b_{k-1}, b'_{k-1}, b_{k+1}, b'_{k+1}\}$	$\{b_k, b'_k\}$	$\{b_k, b'_k\}$
Noyau $N(s)$	$\{a_k\}$	$\{b_k, b'_k\}$	$\{b_k, b'_k\}$

Tout élément de  $\text{Aut}(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, \text{Card})$  est entièrement déterminé par son action sur le sous-ensemble  $\{a_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}$  de  $\mathcal{N}$ , puisque si  $\{a_k\}$  s'envoie sur  $\{a_l\}$ , alors  $\{b_k, b'_k\}$  s'envoie sur  $\{b_l, b'_l\}$  (par respect du cardinal et de la relation  $R_{\mathcal{P}}$ ). On voit alors que  $\text{Aut}(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, \text{Card})$  s'identifie au groupe diédral infini  $D_{\infty} = \langle \psi, \psi' \rangle$  engendré par les symétries  $\psi : k \mapsto -k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , et  $\psi' : k \mapsto -k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Via cette identification (et celle de  $\text{Aut}(\mathcal{N}, R_{\mathcal{P}}, \text{Card})$  au sous-groupe  $G$  de  $\text{Aut}(\Gamma)$ ), on a donc  $\text{Aut}([S], [S]_c) = K(\Gamma) \rtimes D_{\infty}$  (cf. formule (4.1)).

On déduit du tableau ci-dessus que  $S$  est d'épaisseur 1, avec  $S_0 = \{a_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  et  $S_1 = \{b_k, b'_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . On obtient, grâce aux formules (4.2) (4.3) et (4.4),  $K(\Gamma) = K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \rtimes D(\Gamma)$ , avec :

$$D(\Gamma) \approx \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{GL}_2(\mathbb{F}_2) \approx \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Sym}_3 \quad \text{et} \quad K_{S_0}^{\circ}(\Gamma) \approx \prod_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{F}_2)^4 \approx (\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}}.$$

Voilà enfin des exemples de graphes finis d'épaisseur arbitraire (finie), et un graphe (infini) d'épaisseur infinie :

**Exemples 5.4.** Soit  $e \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ . Supposons que  $S = \{s_k, s'_k \mid 0 \leq k < e + 1\}$  et que  $m_{s,t} = \infty$  si et seulement si  $\{s, t\} = \{s_k, s'_k\}$  avec  $0 \leq k < e + 1$ . On a :

Sommet $s$	$s_k$	$s'_k$
Cellule $C^2(s)$	$\{s_0, s_1, \dots, s_k\}$	$\{s'_i \mid k \leq i < e + 1\}$
Noyau $N(s)$	$\{s_k\}$	$\{s'_k\}$

Comme  $\mathcal{N} = \mathcal{E}(S)$ , on a  $D(\Gamma) = \{1\}$  et  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  (cf. remarque 4.4.1b).  
On a donc  $\text{Aut}([S], [S]_c) = K^\circ(\Gamma) \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$ .

Supposons  $e$  fini. On vérifie alors que  $\text{Aut}(\Gamma) = \langle \sigma \rangle \approx \mathbb{F}_2$ , où  $\sigma$  envoie  $s_k$  sur  $s'_{e-k}$  et  $s'_k$  sur  $s_{e-k}$ , pour  $0 \leq k \leq e$ . On a donc  $\text{Aut}([S], [S]_c) = K^\circ(\Gamma) \rtimes \langle \sigma \rangle \approx K^\circ(\Gamma) \rtimes \mathbb{F}_2$ . On voit que  $S$  est d'épaisseur  $e$ , avec  $S_k = \{s'_k, s_{e-k}\}$ , pour  $0 \leq k \leq e$ . On a donc, d'après les formules (4.3) et (4.4),  $K^\circ(\Gamma) = K_{S_0}^\circ(\Gamma) \rtimes (K_{S_1}^\circ(\Gamma) \rtimes (\cdots \rtimes (K_{S_{e-2}}^\circ(\Gamma) \rtimes K_{S_{e-1}}^\circ(\Gamma)) \cdots))$  et, pour  $0 \leq k \leq e-1$ ,  $K_{S_k}^\circ(\Gamma) \approx [(C^2(s'_k))^\circ] \times [(C^2(s_{e-k}))^\circ] \approx (\mathbb{F}_2)^{e-k} \times (\mathbb{F}_2)^{e-k} \approx (\mathbb{F}_2)^{2(e-k)}$ .

Supposons  $e = \infty$ . Alors  $\text{Aut}(\Gamma) = \{1\}$ , donc  $\text{Aut}([S], [S]_c) = K^\circ(\Gamma)$ .

On voit que  $S$  est d'épaisseur infinie, avec  $S_k = \{s'_k\}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et  $S_\infty = \{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . On ne peut donc pas appliquer le théorème 4.3.18 à  $S$ ; cependant, la proposition 4.3.8 reste valable : si l'on pose  $X = \{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  et  $X' = \{s'_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , alors  $X$  et  $X'$  sont saturés, donc d'après la proposition 4.3.8,  $K_X^\circ(\Gamma)$  et  $K_{X'}^\circ(\Gamma)$  sont distingués dans  $K^\circ(\Gamma)$  et  $K^\circ(\Gamma) = K_X^\circ(\Gamma) \times K_{X'}^\circ(\Gamma)$ .

Le groupe  $K_X^\circ(\Gamma)$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{Aut}([X]) = \text{GL}_{\mathbb{F}_2}([X])$  et, plus précisément, si l'on fixe la base  $(\{s_0\}, \{s_1\}, \dots)$  de  $[X]$ , au sous-groupe de  $\text{GL}_{\mathbb{F}_2}([X])$  constitué des matrices (infinies à droite) triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

De même, le groupe  $K_{X'}^\circ(\Gamma)$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{Aut}([X']) = \text{GL}_{\mathbb{F}_2}([X'])$  et, plus précisément, si l'on fixe la base  $(\{s'_0\}, \{s'_1\}, \dots)$  de  $[X']$ , au sous-groupe de  $\text{GL}_{\mathbb{F}_2}([X'])$  constitué des matrices (infinies à droite) triangulaires inférieures, avec des 1 sur la diagonale et un nombre fini de 1 dans chaque colonne, inversibles et telles que l'inverse soit de la même forme.





Deuxième partie

**Sous-monoïdes admissibles des  
monoïdes d'Artin-Tits.**



# Chapitre 6

## Préliminaires.

Dans ce chapitre, nous regroupons les propriétés combinatoires des groupes de Coxeter et des monoïdes et groupes d'Artin-Tits dont nous aurons besoin dans le reste de cette partie.

### 6.1 Généralités sur les monoïdes.

Soit  $M$  un monoïde, c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi de composition interne associative possédant un élément unité. On note la loi de  $M$  multiplicativement et on note  $1$  l'élément unité de  $M$ .

On dit que  $M$  est *simplifiable à gauche* (resp. à droite) si, pour tous  $x, y, z \in M$ , l'égalité  $xy = xz$  (resp.  $yx = zx$ ) implique  $y = z$ . On dit que  $M$  est *simplifiable* s'il est simplifiable à gauche et simplifiable à droite.

Soit  $S = \{s_e \mid e \in E\}$  un sous-ensemble générateur de  $M$ , dont les éléments sont indexés par un ensemble  $E$ . On suppose l'application  $E \rightarrow S, e \mapsto s_e$ , bijective. Nous disons qu'un mot  $e_1 \cdots e_n$  sur  $E$  est une *représentation* (sur  $E$ ) d'un élément  $x$  de  $M$  si  $x = s_{e_1} \cdots s_{e_n}$ . On dit qu'un tel mot est *réduit* (ou est une représentation *réduite* de  $x$  sur  $E$ ) s'il est de longueur minimale parmi les représentations de  $x$ . On note  $\ell(x) = \ell_S(x)$  cette longueur minimale ; on appelle *longueur sur  $M$  par rapport à  $S$*  la fonction  $\ell : M \rightarrow \mathbb{N}$  ainsi définie.

On note  $\preceq$  (resp.  $\succcurlyeq$ ) la divisibilité à gauche (resp. à droite) dans  $M$ , c'est-à-dire que, pour  $x, y \in M$ , on note  $y \preceq x$  (resp.  $x \succcurlyeq y$ ) s'il existe  $z \in M$  tel que  $x = yz$  (resp.  $x = zy$ ).

On en déduit les notions naturelles de *pgcd* et de *ppcm* dans  $M$  : un élément  $d$  de  $M$  est un *pgcd à gauche* d'un sous-ensemble non vide  $X$  de  $M$  si  $d \preceq x$  pour tout  $x \in X$  et si, lorsque  $z \in M$  est tel que  $z \preceq x$  pour tout  $x \in X$ , alors  $z \preceq d$  ; un élément  $m$  de  $M$  est un *ppcm à droite* d'un sous-ensemble non vide  $X$  de  $M$  si  $x \preceq m$  pour tout  $x \in M$  et si, lorsque  $z \in M$  est tel que  $x \preceq z$  pour tout  $x \in X$ , alors  $m \preceq z$ . On définit les notions de *pgcd à droite* et de *ppcm à gauche* de façon symétrique.

Lorsque deux éléments  $x, y \in M$  ont un unique ppcm à gauche (resp. à droite), on note cet unique élément  $x \vee_L y$  (resp.  $x \vee_R y$ ). De même, lorsque  $x, y \in M$  ont un unique pgcd à gauche (resp. à droite), on note cet unique élément  $x \wedge_L y$  (resp.  $x \wedge_R y$ ).

Si  $x, y \in M$  et  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $\Pi_m(x, y)$  le produit  $xyxy \cdots$  à  $m$  facteurs.

## 6.2 Monoïdes et groupes d'Artin-Tits.

Soit  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter. On rappelle que l'on note :

$$\begin{aligned} W &= W_\Gamma = \langle s_i, i \in I \mid s_i^2 = 1, \Pi_{m_{i,j}}(s_i, s_j) = \Pi_{m_{i,j}}(s_j, s_i), \text{ si } m_{i,j} \neq \infty \rangle, \\ B &= B_\Gamma = \langle \mathbf{s}_i, i \in I \mid \Pi_{m_{i,j}}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \Pi_{m_{i,j}}(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_i), \text{ si } m_{i,j} \neq \infty \rangle, \\ B^+ &= B_\Gamma^+ = \langle \mathbf{s}_i, i \in I \mid \Pi_{m_{i,j}}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \Pi_{m_{i,j}}(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_i), \text{ si } m_{i,j} \neq \infty^+ \rangle, \end{aligned}$$

respectivement le groupe de Coxeter, le groupe d'Artin-Tits et le monoïde d'Artin-Tits associés à  $\Gamma$ . On pose  $S = S_\Gamma = \{s_i \mid i \in I\}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\Gamma = \{\mathbf{s}_i \mid i \in I\}$  et on dit que le couple  $(W, S)$  (resp.  $(B, \mathbf{S})$ , resp.  $(B^+, \mathbf{S})$ ) est le système de Coxeter (resp. d'Artin-Tits, resp. d'Artin-Tits positif) de type  $\Gamma$ . Le groupe  $W$  est engendré, comme monoïde, par  $S$ . On appelle longueur *standard* la longueur  $\ell$  sur  $W$  (resp. sur  $B^+$ ) par rapport à  $S$  (resp. à  $\mathbf{S}$ ).

On dispose d'un morphisme  $\pi = \pi_\Gamma : B \rightarrow W$  qui envoie, pour tout  $i \in I$ ,  $\mathbf{s}_i$  sur  $s_i$ . L'application  $I \rightarrow S, i \mapsto s_i$ , est bijective (cf. [Bou68, Ch. V, n° 4.3]), donc il en est de même de l'application  $I \rightarrow \mathbf{S}, i \mapsto \mathbf{s}_i$ . D'après [Tit69, Théorème 3], deux représentations réduites sur  $I$  d'un élément  $w$  de  $W$  se déduisent l'une de l'autre par une suite finie de transformations — que l'on appelle *relations de tresses* — de la forme  $\Pi_{m_{i,j}}(i, j) \rightsquigarrow \Pi_{m_{i,j}}(j, i)$ , pour  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ , tels que  $m_{i,j} \neq \infty$ .

**Définition 6.2.1** (éléments simples). On associe à  $w \in W$  l'élément  $\mathbf{w}$  de  $B^+$  représenté (sur  $I$ ) par n'importe quelle représentation réduite de  $w$  (sur  $I$ ). Nous disons qu'un tel élément  $\mathbf{w}$  est *simple* et nous notons, selon l'usage :

$$B_{red}^+ = \{\mathbf{w} \mid w \in W\} = \{x \in B^+ \mid \ell(x) = \ell(\pi(x))\}$$

(cette notation fait référence aux représentations réduites des éléments de  $W$  ; les représentations sur  $I$  des éléments de  $B^+$  sont toutes réduites).

**Définition 6.2.2** (formes normales). D'après [Mic99, 2.1], il existe une unique fonction  $L : B^+ \rightarrow B_{red}^+$  telle que, pour tout  $(\mathbf{w}, x) \in B_{red}^+ \times B^+$ , on ait  $\mathbf{w} \preceq x$  si et seulement si  $\mathbf{w} \preceq L(x)$ .

Cette fonction satisfait à  $L(xy) = L(xL(y))$ , pour tous  $x, y \in B^+$ , et permet de définir la *forme normale (à gauche)* d'un élément  $x \in B^+$ ,  $x \neq 1$ , c'est-à-dire l'unique suite  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments de  $B_{red}^+$  telle que l'on ait  $x = x_1 \cdots x_n$ ,  $x_n \neq 1$  et, pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $x_k = L(x_k x_{k+1})$ .

On a des résultats analogues en intervertissant gauche et droite.

Rappelons les notions et les propriétés des sous-monoïdes (resp. sous-groupes) *paraboliques standard* :

**Définition 6.2.3.** Soit  $J \subseteq I$ . On pose  $\Gamma_J = (m_{i,j})_{i,j \in J}$ , et on note  $W_J$  (resp.  $B_J$ , resp.  $B_J^+$ ) le sous-groupe de  $W$  (resp. le sous-groupe de  $B$ , resp. le sous-monoïde de  $B^+$ ) engendré par  $\{s_j \mid j \in J\}$  (resp. par  $\{\mathbf{s}_j \mid j \in J\}$ ). On dit que les sous-groupes  $W_J$  et  $B_J$  (resp. les sous-monoïdes  $B_J^+$ ) sont les sous-groupes (resp. sous-monoïdes) *paraboliques standard* de  $W$  et de  $B$  (resp. de  $B^+$ ).

D'après [Bou68, Ch. IV, n° 1.8, Corollaire 1],  $(W_J, \{s_j \mid j \in J\})$  est un système de Coxeter de type  $\Gamma_J$ . L'analogue pour les monoïdes d'Artin-Tits est clair, au vu de leurs présentations, et H. van der Lek a établi l'analogue pour les groupes d'Artin-Tits dans [vdL83, 4.13]) : le résultat y est démontré pour  $I$  fini, mais il implique le résultat général.

La longueur standard sur  $W_J$  (resp.  $B_J^+$ ) est induite par la longueur standard sur  $W$  (resp.  $B^+$ ). On en déduit que les relevés dans  $(B_J^+)_{red}$  et dans  $B_{red}^+$  d'un élément de  $W_J$  coïncident, d'où  $(B_J^+)_{red} = B_{red}^+ \cap B_J^+$ .

**Définition 6.2.4** (parties sphériques). On dit que  $\Gamma_J$  est *sphérique*, ou que  $J$  est *sphérique* (relativement à  $\Gamma$ ), lorsque  $W_J$  est fini. Dans ce cas, on note  $r_J$  l'unique élément (d'ordre 2, si  $J \neq \emptyset$ ) de plus grande longueur dans  $W_J$ , et on pose  $\Delta_J = \mathbf{r}_J$  (c'est l'unique élément de plus grande longueur dans  $(B_J^+)_{red}$ ).

D'après [BS72, Mic99], le monoïde  $B^+$  est un monoïde simplifiable, dans lequel les pgcd et les ppcm sont uniques, lorsqu'ils existent. De plus, deux éléments de  $B^+$  ont toujours un pgcd à droite (resp. à gauche), et ont un ppcm à droite (resp. à gauche) dès qu'ils ont un multiple à droite (resp. à gauche) commun.

D'après [BS72, 5.7], si  $J$  est une partie non vide de  $I$ , les éléments  $\mathbf{s}_j$ ,  $j \in J$ , admettent un ppcm (à droite ou à gauche) si et seulement si  $\Gamma_J$  est sphérique, auquel cas leur ppcm (à droite et à gauche) est l'élément  $\Delta_J = \mathbf{r}_J$ . En particulier, deux éléments  $\mathbf{s}_i$  et  $\mathbf{s}_j$  admettent un ppcm (à droite ou à gauche) si et seulement si  $m_{i,j} \neq \infty$ , auquel cas  $\mathbf{s}_i \vee_R \mathbf{s}_j = \mathbf{s}_i \vee_L \mathbf{s}_j = \Delta_{\{i,j\}} = \Pi_{m_{i,j}}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \Pi_{m_{i,j}}(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_i)$ .

**Remarques 6.2.5.** Le groupe  $B$  est engendré (comme groupe) par  $B^+$ .

Lorsque  $\Gamma$  est sphérique,  $B$  est plus précisément le *groupe des fractions* de  $B^+$ , c'est-à-dire que tout élément  $g$  de  $B$  s'écrit sous la forme  $g = x^{-1}y = x'y'^{-1}$ , où  $x, y, x', y' \in B^+$  (cf. [BS72, 5.5]). Dans ce cas, d'après [DP99, 7.5], il existe même un unique couple  $(x, y) \in (B^+)^2$  (resp.  $(x', y') \in (B^+)^2$ ) tel que  $g = x^{-1}y$  et  $x \wedge_L y = 1$  (resp.  $g = x'y'^{-1}$  et  $x' \wedge_R y' = 1$ ). On dit que ce couple  $(x, y)$  (resp.  $(x', y')$ ) est une *fraction irréductible à gauche* (resp. à droite), et est la *forme irréductible à gauche* (resp. à droite) de  $g$ .



# Chapitre 7

## Partitions admissibles.

La notion de *partition admissible* d'un graphe de Coxeter a été introduite et étudiée par B. Mühlherr dans [Müh93, Müh94]. Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et les principaux résultats qui y sont établis.

Les définitions et notations concernant les partitions admissibles sont regroupées dans la section 7.1. La section 7.2 présente les principaux résultats de [Müh93] sur les partitions admissibles d'un graphe de Coxeter  $\Gamma$  et sur les sous-groupes du groupe de Coxeter  $W_\Gamma$  induits par de telles partitions. Dans la section 7.3, nous rappelons des exemples traités dans [Müh93, Müh94].

### 7.1 Définitions.

Soit  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter.

**Définition 7.1.1** ([Müh93]). On dit qu'une partition  $\tilde{I}$  de  $I$  est *sphérique* (relativement à  $\Gamma$ ), ou, par abus de langage, est *une partition sphérique de  $\Gamma$* , si, pour tout  $\alpha \in \tilde{I}$ ,  $\Gamma_\alpha$  est sphérique.

Dans ce cas, on pose  $\tilde{S} = \{r_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I}\}$ , et on note  $\tilde{W}$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $\tilde{S}$  et  $\tilde{\ell}$  la longueur sur  $\tilde{W}$  par rapport à  $\tilde{S}$  (le groupe  $\tilde{W}$  est engendré par  $\tilde{S}$  comme monoïde, puisque les éléments  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \tilde{I}$ , sont d'ordre 2). On appelle *type de la partition  $\tilde{I}$*  la matrice de Coxeter  $\tilde{\Gamma} = (\tilde{m}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \tilde{I}}$ , où  $\tilde{m}_{\alpha,\beta} = |r_\alpha r_\beta|$ .

Notons que l'application  $\tilde{I} \rightarrow \tilde{S}$ ,  $\alpha \mapsto r_\alpha$  est bijective. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \tilde{I}$  et  $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_d} \in \tilde{W}$ . On dit que le mot  $\alpha_1 \cdots \alpha_d$  sur  $\tilde{I}$  est *compatible*, ou est une représentation *compatible* de  $w$  (relativement à  $\Gamma$ ) si  $\ell(w) = \sum_{n=1}^d \ell(r_{\alpha_n})$ .

**Remarque 7.1.2.** Soit  $\tilde{I}$  une partition sphérique de  $\Gamma$ , de type  $\tilde{\Gamma}$ .

1. On dispose d'un morphisme surjectif  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{\tilde{I}} : W_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \tilde{W}$ , donné par  $s_\alpha \mapsto r_\alpha$ .
2. Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \tilde{I}$  et  $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_d} \in \tilde{W}$ , on a toujours  $\ell(w) \leq \sum_{n=1}^d \ell(r_{\alpha_n})$ , avec égalité lorsque la représentation  $R_{\alpha_1} \cdots R_{\alpha_d}$  de  $w$  sur  $I$ , où  $R_{\alpha_n}$  est une représentation réduite de  $r_{\alpha_n}$  sur  $I$  (pour  $1 \leq n \leq d$ ), est réduite.

**Notation 7.1.3.** Soit  $w \in W$ . On pose  $\begin{cases} I^+(w) &= \{i \in I \mid \ell(ws_i) = \ell(w) + 1\}, \\ I^-(w) &= \{i \in I \mid \ell(ws_i) = \ell(w) - 1\}. \end{cases}$

Notons que  $I^-(w)$  est une partie sphérique de  $I$  (cf. [Müh93, 2.8]).



**Définition 7.1.4** ([Müh93]). Soit  $\tilde{I}$  une partition de  $I$ . On dit que  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $I$  (relativement à  $\Gamma$ ), ou, par abus de langage, est une partition admissible de  $\Gamma$ , si c'est une partition sphérique de  $\Gamma$  telle que, pour tout  $(w, \alpha) \in \tilde{W} \times \tilde{I}$ , on ait  $\alpha \subseteq I^+(w)$  ou  $\alpha \subseteq I^-(w)$ .

**Remarque 7.1.5.** Soient  $\alpha$  une partie sphérique de  $I$  et  $w \in W$ .

Alors, d'après [Müh93, 2.4 et 2.8], on a  $\alpha \subseteq I^-(w)$  (resp.  $\alpha \subseteq I^+(w)$ ) si et seulement si  $\ell(wr_\alpha) = \ell(w) - \ell(r_\alpha)$  (resp.  $\ell(wr_\alpha) = \ell(w) + \ell(r_\alpha)$ ), i.e. si et seulement si  $w$  est l'élément le plus long (resp. le plus court) de l'ensemble  $wW_\alpha$ .

## 7.2 Partitions admissibles et groupes de Coxeter.

Les trois lemmes suivants sont laissés en exercice dans [Müh93]. Pour la commodité du lecteur, on en donne ici des démonstrations. Elles sont inspirées de [Dro03].

**Lemme 7.2.1** ([Müh93, 3.2]). Soit  $\tilde{I}$  une partition admissible de  $\Gamma$ . Soient  $\tilde{J} \subseteq \tilde{I}$  et  $J = \bigcup_{\alpha \in \tilde{J}} \alpha$ . Alors  $\tilde{J}$  est une partition admissible de  $\Gamma_J$ .

*Démonstration.* Cela résulte du fait que, pour tout  $w \in W_J \approx W_{\Gamma_J}$ , on a  $J^-(w) = I^-(w)$  et  $J^+(w) = I^+(w) \cap J$  (cf. [Bou68, Ch. IV, n° 1.8]).  $\square$

Dans ce qui suit, on appelle *2-partition* une partition à deux éléments.

**Lemme 7.2.2** ([Müh93, 3.3]). Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  une 2-partition sphérique de  $\Gamma$ . Sont équivalents :

1.  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ ,
2. une représentation sur  $\tilde{I}$  d'un élément de  $\tilde{W}$  est réduite si et seulement si elle est compatible,
3. pour tout entier naturel  $m < \tilde{m}_{\alpha, \beta} + 1$ , les mots  $\Pi_m(\alpha, \beta)$  et  $\Pi_m(\beta, \alpha)$  sont compatibles.

La condition 3 n'est pas dans [Müh93, 3.3]. Elle permet de simplifier la démonstration du lemme suivant, et nous sera utile, dans le chapitre 8, à partir de la proposition 8.2.2.

*Démonstration.* Le sous-groupe  $\tilde{W} = \langle r_\alpha, r_\beta \rangle$  de  $W$  est un groupe diédral d'ordre  $2\tilde{m}_{\alpha, \beta}$ . Les représentations réduites sur  $\tilde{I}$  des éléments de  $\tilde{W}$  sont donc les mots  $\Pi_m(\alpha, \beta)$  et  $\Pi_m(\beta, \alpha)$ , pour tout entier naturel  $m < \tilde{m}_{\alpha, \beta} + 1$ . On vérifie qu'un mot sur  $\tilde{I}$  qui n'est pas réduit n'est pas compatible, d'où l'équivalence de 2 et 3.

Supposons 3 et montrons 1. Soit  $w = \Pi_m(r_\alpha, r_\beta) \in \tilde{W}$ , où  $m < \tilde{m}_{\alpha, \beta} + 1$ . Montrons que  $\alpha \subseteq I^+(w)$  ou  $\alpha \subseteq I^-(w)$ , et que  $\beta \subseteq I^+(w)$  ou  $\beta \subseteq I^-(w)$ . On peut supposer  $w \neq 1$  (car  $\alpha \cup \beta = I = I^+(1)$ ). Posons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n = \alpha$  si  $n$  est impair et  $\alpha_n = \beta$  si  $n$  est pair. Comme  $\Pi_m(\alpha, \beta)$  est compatible, on a  $\alpha_m \subseteq I^-(w)$ . Si  $\tilde{m}_{\alpha, \beta}$  est fini et si  $m = \tilde{m}_{\alpha, \beta}$ , on a donc  $\alpha \cup \beta = I = I^-(w)$ . Si  $m < \tilde{m}_{\alpha, \beta}$ , alors le mot  $\Pi_{m+1}(\alpha, \beta)$  est réduit, donc compatible, d'où  $\alpha_{m+1} \subseteq I^-(wr_{\alpha_{m+1}})$  et donc  $\alpha_{m+1} \subseteq I^+(w)$ .

Supposons 1 et montrons 3. Montrons tout d'abord, par récurrence sur  $\ell(w)$ , que tout  $w \in \tilde{W}$  admet une représentation compatible (donc réduite) sur  $\tilde{I}$ . Si  $w = 1$ , c'est évident. Sinon, soit  $i \in I$  tel que  $\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$ . Quitte à échanger  $\alpha$  et  $\beta$ , on a  $i \in \alpha$ , donc  $\alpha \subseteq I^-(w)$  (par admissibilité de  $\tilde{I}$ ) et  $\ell(wr_\alpha) = \ell(w) - \ell(r_\alpha)$ . Par hypothèse de récurrence,  $wr_\alpha$  admet une représentation compatible  $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ , et  $\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha$  est alors une représentation compatible de  $w$ .

Pour tout entier naturel  $m < \tilde{m}_{\alpha,\beta}$ , le mot  $\Pi_m(\alpha, \beta)$  est l'unique représentation réduite sur  $\tilde{I}$  de l'élément  $\Pi_m(r_\alpha, r_\beta)$  de  $\tilde{W}$ . Il reste donc à vérifier que, si  $\tilde{m}_{\alpha,\beta}$  est fini et si le mot  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(\alpha, \beta)$  est compatible, alors le mot  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(\beta, \alpha)$  l'est aussi. C'est clair si  $\tilde{m}_{\alpha,\beta}$  est pair. Si  $\tilde{m}_{\alpha,\beta}$  est impair, posons  $w = \Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(r_\alpha, r_\beta) = \Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(r_\beta, r_\alpha)$  et  $w' = \Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}-1}(r_\beta, r_\alpha)$ . Le mot  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}-1}(\beta, \alpha)$  est l'unique représentation réduite de  $w'$ , donc elle est compatible, d'où  $\alpha \subseteq I^-(w')$ . Comme  $w'$  n'est pas l'élément le plus long de  $W$ , on a  $\beta \not\subseteq I^-(w')$ , d'où, par admissibilité,  $\beta \subseteq I^+(w')$ . On en déduit le résultat.  $\square$

**Lemme 7.2.3** ([Müh93, 3.4]). *Supposons  $\Gamma$  sphérique et soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  une 2-partition de  $I$ . Alors  $\tilde{m}_{\alpha,\beta} \neq \infty$  et les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ ,
2. les mots  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(\alpha, \beta)$  et  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(\beta, \alpha)$  sont compatibles.

Dans ce cas, on a  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(r_\alpha, r_\beta) = \Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(r_\beta, r_\alpha) = r_I$ .

*Démonstration.* Le fait que  $\tilde{m}_{\alpha,\beta}$  soit fini est clair, et l'implication  $1 \Rightarrow 2$  résulte du lemme précédent. Si 2, il est immédiat que, pour tout  $m \leq \tilde{m}_{\alpha,\beta}$ , les mots  $\Pi_m(\alpha, \beta)$  et  $\Pi_m(\beta, \alpha)$  sont compatibles, d'où 1 par le lemme précédent.

Considérons l'élément  $w = \Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(r_\alpha, r_\beta) = \Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(r_\beta, r_\alpha)$  de  $\tilde{W}$ . Comme les deux mots  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(\alpha, \beta)$  et  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(\beta, \alpha)$  sont compatibles, on a  $\alpha \cup \beta = I = I^-(w)$ , d'où  $w = r_I$ .  $\square$

**Proposition 7.2.4** ([Müh93, 3.5]). *Soit  $\tilde{I}$  une partition de  $I$  telle que, pour tous  $\alpha, \beta \in \tilde{I}$  avec  $\alpha \neq \beta$ ,  $\{\alpha, \beta\}$  soit une partition admissible de  $\Gamma_{\alpha \cup \beta}$ . Alors, pour tout  $w \in \tilde{W}$  :*

1. une représentation de  $w$  sur  $\tilde{I}$  est réduite si et seulement si elle est compatible,
2. si  $\alpha, \beta \in \tilde{I}$  et si  $v$  est l'élément le plus court (pour  $l$ ) de  $wW_{\alpha \cup \beta}$ , on a  $v \in \tilde{W}$ ,  $\tilde{\ell}(w) = \tilde{\ell}(v) + \tilde{\ell}(v^{-1}w)$  et  $v^{-1}w \in \langle r_\alpha, r_\beta \rangle$ ,
3. pour tout  $\alpha \in \tilde{I}$ , on a  $\alpha \subseteq I^+(w)$  ou  $\alpha \subseteq I^-(w)$ ,
4. pour tout  $\alpha \in \tilde{I}$ , on a  $\tilde{\ell}(wr_\alpha) = \tilde{\ell}(w) - 1 \Leftrightarrow \alpha \subseteq I^-(w)$ ,
5. pour tout  $\alpha \in \tilde{I}$ , on a  $\tilde{\ell}(wr_\alpha) = \tilde{\ell}(w) + 1 \Leftrightarrow \alpha \subseteq I^+(w)$ ,
6. si  $\alpha, \beta \in \tilde{I}$  sont tels que  $\alpha \cup \beta \subseteq I^-(w)$ , alors  $\tilde{m}_{\alpha,\beta} \neq \infty$  et il existe une représentation réduite de  $w$  sur  $\tilde{I}$  qui finit par  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha,\beta}}(\alpha, \beta)$ .

**Théorème 7.2.5** ([Müh93, 1.1]). *Soit  $\tilde{I}$  une partition admissible de  $\Gamma$ . Alors le couple  $(\tilde{W}, \tilde{S})$  est un système de Coxeter de type  $\tilde{\Gamma}$ . Autrement dit, le morphisme surjectif  $\tilde{\varphi}_{\tilde{I}} : W_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \tilde{W}$ , donné par  $s_\alpha \mapsto r_\alpha$ , est injectif.*

**Théorème 7.2.6** ([Müh93, 1.2]). *Soit  $\tilde{I}$  une partition (sphérique) de  $\Gamma$ . Sont équivalents :*

1.  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ ,
2. pour tous  $\alpha, \beta \in \tilde{I}$  avec  $\alpha \neq \beta$ ,  $\{\alpha, \beta\}$  est une partition admissible de  $\Gamma_{\alpha \cup \beta}$ .

**Corollaire 7.2.7** ([Müh94, 2.5.5]). *Soit  $\tilde{I}$  une partition admissible de  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma$  est sphérique si et seulement si  $\tilde{\Gamma}$  est sphérique ; de plus, dans ce cas, l'élément le plus long de  $\tilde{W} \approx W_{\tilde{\Gamma}}$  (pour  $\tilde{\ell}$ ) coïncide avec l'élément le plus long de  $W$  (pour  $l$ ).*

*En particulier, pour  $\alpha, \beta \in \tilde{I}$ , alors  $\tilde{m}_{\alpha,\beta} \neq \infty$  si et seulement si  $\Gamma_{\alpha \cup \beta}$  est sphérique.*

*Démonstration.* Il est clair que, si  $W$  est fini, alors  $\tilde{W}$  l'est. Réciproquement, supposons  $\tilde{\Gamma}$  sphérique et soit  $w$  l'élément le plus long de  $\tilde{W} \approx W_{\tilde{\Gamma}}$  (pour  $\tilde{\ell}$ ). On a  $\tilde{\ell}(wr_\alpha) = \tilde{\ell}(w) - 1$  pour tout  $\alpha \in \tilde{I}$ , d'où  $I = \cup_{\alpha \in \tilde{I}} \alpha \subseteq I^-(w)$  par la proposition 7.2.4 (assertion 4). Cela implique que  $\Gamma$  est sphérique et que  $w$  est l'élément le plus long de  $W$ .  $\square$

### 7.3 Exemples.

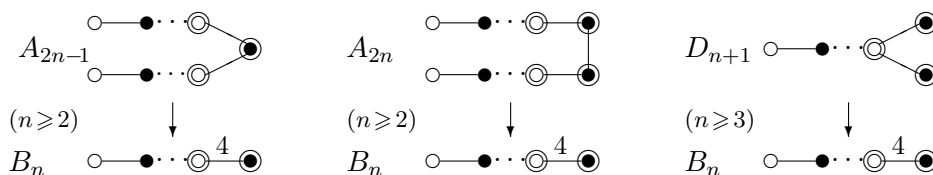
La notion de partition admissible généralise la situation du sous-groupe des points fixes d'un groupe de Coxeter sous l'action d'un groupe d'automorphismes du graphe, étudiée dans [Hée90, Hée91]. B. Mühlherr a précisément établi le résultat suivant (dont le deuxième point est le résultat [Hée91, 3.4 (a) et (c)]) :

**Théorème 7.3.1** ([Müh93, 1.3]). *Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Notons  $\tilde{J}$  l'ensemble des orbites sphériques de  $I$  sous  $G$ ,  $J \subseteq I$  leur réunion et  $\tilde{\Gamma}$  le type de la partition sphérique  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ . Alors :*

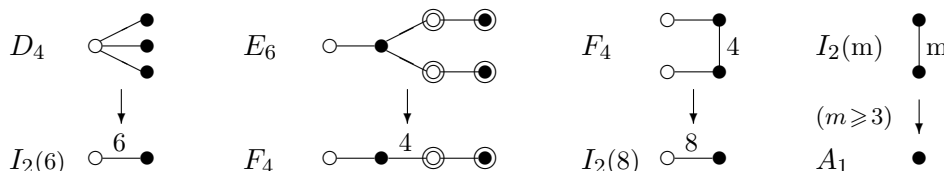
1.  $\tilde{J}$  est une partition admissible de  $\Gamma_J$ ,
2.  $W^G = \tilde{W}$  et le couple  $(W^G, \{r_\alpha \mid \alpha \in \tilde{J}\})$  est un système de Coxeter (de type  $\tilde{\Gamma}$ ).

**Exemples 7.3.2.** Dans le cas des automorphismes des graphes de Coxeter sphériques et irréductibles, on obtient les résultats suivants (pour la détermination des types des partitions obtenues, on peut se reporter aux résultats de [Müh94, section 2.5], rappelés dans le chapitre 9 ci-dessous) :

- Les automorphismes d'ordre 2 de  $A_{2n-1}$  ( $n \geq 2$ ),  $A_{2n}$  ( $n \geq 2$ ) et  $D_{n+1}$  ( $n \geq 3$ ) induisent des partitions admissibles de type  $B_n$ .

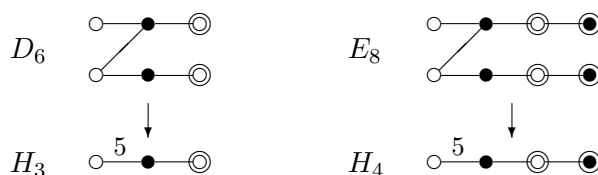


- Les automorphismes d'ordre 3 de  $D_4$  induisent une partition admissible de type  $I_2(6)$  et l'automorphisme d'ordre 2 de  $E_6$  (resp.  $F_4$ , resp.  $I_2(m)$ ,  $m \geq 3$ ) induit une partition admissible de type  $F_4$  (resp.  $I_2(8)$ , resp.  $A_1$ ).



Voici deux exemples de partitions admissibles qui ne sont pas constituées d'orbites sous l'action d'un groupe d'automorphismes du graphe de Coxeter. Là encore, on peut vérifier que ces partitions sont admissibles, et déterminer leur type, grâce aux résultats de [Müh94, section 2.5], rappelés dans le chapitre 9 :

**Exemples 7.3.3.** Plongements de  $W_{H_3}$  dans  $W_{D_6}$  et de  $W_{H_4}$  dans  $W_{E_8}$ .



## Chapitre 8

# Morphismes admissibles entre monoïdes d'Artin-Tits.

Dans ce chapitre, nous étudions l'analogie des résultats de B. Mühlherr [Müh93] sur le sous-groupe d'un groupe de Coxeter induit par une partition admissible du graphe, pour les monoïdes et les groupes d'Artin-Tits.

Dans la section 8.1, nous rappelons la notion de *morphisme qui respecte les ppcm* définie par J. Crisp dans [Cri99]. Cette notion est l'une des clés des résultats de la section 8.2, où nous établissons que le sous-monoïde (resp. sous-groupe) d'un monoïde d'Artin-Tits (resp. d'un groupe d'Artin-Tits de type sphérique) est un monoïde (resp. un groupe) d'Artin-Tits. Dans la section 8.3, nous montrons comment notre construction généralise et unifie des résultats antérieurs, sur la situation du sous-monoïde (resp. sous-groupe) des points fixes d'un monoïde (resp. groupe) d'Artin-Tits sous l'action d'un groupe d'automorphismes du graphe, étudiée dans [DP99, Mic99, Cri00, BDM02], sur la notion de LCM-homomorphisme, définie dans [Cri99] et généralisée dans [God02], et sur la notion de morphisme entre monoïdes d'Artin-Tits issu d'un *éclatement* d'un graphe de Coxeter, définie dans [CP01, section 6] et généralisée dans [Par02, section 5]. Dans la section 8.4, nous montrons que des propriétés importantes établies dans [Cri99, Cri00, God02] s'étendent à notre cadre.

On fixe deux matrices de Coxeter  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  et  $\Gamma' = (m'_{i',j'})_{i',j' \in I'}$ , et on pose  $W = W_\Gamma$ ,  $B^+ = B_\Gamma^+$ ,  $W' = W_{\Gamma'}$ , et  $B'^+ = B_{\Gamma'}^+$ . Si  $\alpha$  est une partie sphérique de  $I'$  (relativement à  $\Gamma'$ ), on note  $r'_\alpha$  l'élément le plus long de  $W'_\alpha$  et  $\Delta'_\alpha$  son relevé dans  $B'^+_{red}$ .

### 8.1 Morphismes qui respectent les ppcm.

La notion de morphisme qui respecte les ppcm entre monoïdes d'Artin-Tits a été définie et étudiée par J. Crisp dans [Cri99, Cri00].

**Définition 8.1.1** ([Cri99, 1.1]). On dit qu'un morphisme entre monoïdes d'Artin-Tits  $\varphi : B^+ \rightarrow B'^+$  respecte les ppcm à droite si :

1. pour tout  $i \in I$ ,  $\varphi(\mathbf{s}_i) \neq 1$ ,
2. pour tous  $i, j \in I$ ,  $\mathbf{s}_i \vee_R \mathbf{s}_j$  existe dans  $B^+$  si et seulement si  $\varphi(\mathbf{s}_i) \vee_R \varphi(\mathbf{s}_j)$  existe dans  $B'^+$ , auquel cas  $\varphi(\mathbf{s}_i) \vee_R \varphi(\mathbf{s}_j) = \varphi(\mathbf{s}_i \vee_R \mathbf{s}_j)$ .

On définit de façon symétrique les morphismes qui *respectent les ppcm à gauche*, et on dit simplement qu'un morphisme *respecte les ppcm* s'il respecte les ppcm à droite et les ppcm à gauche.

**Théorème 8.1.2** ([Cri00, 8]). *Soit  $\varphi : B^+ \rightarrow B'^+$  un morphisme qui respecte les ppcm à droite.*

1. *Pour tous  $x, y \in B^+$ ,  $x \vee_R y$  existe dans  $B^+$  si et seulement si  $\varphi(x) \vee_R \varphi(y)$  existe dans  $B'^+$ , auquel cas  $\varphi(x) \vee_R \varphi(y) = \varphi(x \vee_R y)$ .*
2. *Pour tous  $x, y \in B^+$ ,  $\varphi(x) \preceq \varphi(y) \Rightarrow x \preceq y$ . En particulier,  $\varphi$  est injectif.*

La version symétrique de ce résultat est bien sûr vraie.

Voici un exemple de morphisme qui respecte les ppcm, inspiré des études faites dans [Cri99, God02].

**Lemme 8.1.3.** *Soit  $(\alpha_i)_{i \in I}$  une famille de parties non vides et sphériques de  $I'$  (relativement à  $\Gamma'$ ). On suppose que, si  $m_{i,j} \neq \infty$ , alors  $\Gamma'_{\alpha_i \cup \alpha_j}$  est sphérique et  $\Delta'_{\alpha_i \cup \alpha_j} = \Pi_{m_{i,j}}(\Delta'_{\alpha_i}, \Delta'_{\alpha_j})$ . Alors l'application  $\mathbf{s}_i \mapsto \Delta'_{\alpha_i}$  se prolonge en un morphisme de monoïdes de  $B^+$  dans  $B'^+$ .*

*De plus, si l'on suppose que, lorsque  $m_{i,j} = \infty$ ,  $\Gamma'_{\alpha_i \cup \alpha_j}$  est non sphérique, alors ce morphisme respecte les ppcm.*

*Démonstration.* Le premier point est clair puisque, pour  $m_{i,j} \neq \infty$ , les hypothèses nous donnent en particulier  $\Pi_{m_{i,j}}(\Delta'_{\alpha_i}, \Delta'_{\alpha_j}) = \Pi_{m_{i,j}}(\Delta'_{\alpha_j}, \Delta'_{\alpha_i})$  dans  $B'^+$ . Montrons le second point. On a  $\varphi(\mathbf{s}_i) = \Delta'_{\alpha_i} \neq 1$ , car  $\alpha_i$  est non vide. De plus, on a la suite d'équivalences suivante (que le symbole  $\vee$  désigne le ppcm à droite ou le ppcm à gauche) :  $\mathbf{s}_i \vee \mathbf{s}_j$  existe dans  $B^+ \Leftrightarrow m_{i,j} \neq \infty \Leftrightarrow \Gamma'_{\alpha_i \cup \alpha_j}$  est sphérique  $\Leftrightarrow \Delta'_{\alpha_i \cup \alpha_j} = \Delta'_{\alpha_i} \vee \Delta'_{\alpha_j}$  existe dans  $B'^+$ , auquel cas on a  $\varphi(\mathbf{s}_i \vee \mathbf{s}_j) = \varphi(\Pi_{m_{i,j}}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)) = \Pi_{m_{i,j}}(\Delta'_{\alpha_i}, \Delta'_{\alpha_j}) = \Delta'_{\alpha_i \cup \alpha_j} = \Delta'_{\alpha_i} \vee \Delta'_{\alpha_j} = \varphi(\mathbf{s}_i) \vee \varphi(\mathbf{s}_j)$ .  $\square$

## 8.2 Partitions admissibles et monoïdes d'Artin-Tits.

Le lemme suivant est la seconde clé de la démonstration de notre théorème 8.2.4 ci-dessous. Il traduit la notion de compatibilité (cf. définition 7.1.1) en termes d'éléments simples dans les monoïdes d'Artin-Tits.

**Lemme 8.2.1.** *Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  des éléments d'une partition sphérique de  $\Gamma$ . Alors*

$$\alpha_1 \cdots \alpha_d \text{ est compatible} \Leftrightarrow \Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d} \text{ est simple (i.e. appartient à } B_{red}^+).$$

*Dans ce cas, si  $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_d}$ , alors  $\mathbf{w} = \Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d}$ .*

*Démonstration.* Posons  $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_d} = \pi(\Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d})$ . Supposons  $\alpha_1 \cdots \alpha_d$  compatible, i.e.  $\ell(w) = \sum_{n=1}^d \ell(r_{\alpha_n})$ . Alors, si l'on fixe une représentation réduite  $R_{\alpha_n}$  de chaque  $r_{\alpha_n}$  sur  $I$ , la représentation  $R_{\alpha_1} \cdots R_{\alpha_d}$  de  $w$  sur  $I$  est réduite et donc, par définition de  $\mathbf{w}$ , on a  $\mathbf{w} = \Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d}$  dans  $B_{red}^+$ . Réciproquement, si  $\Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d} \in B_{red}^+$ , alors  $\ell(w) = \ell(\Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d}) = \sum_{n=1}^d \ell(\Delta_{\alpha_n}) = \sum_{n=1}^d \ell(r_{\alpha_n})$  (on a la première et la troisième égalités par caractérisation de  $B_{red}^+$ , et la seconde par additivité de la longueur sur  $B^+$ ), donc  $\alpha_1 \cdots \alpha_d$  est compatible.  $\square$

Ce résultat permet de reformuler les caractérisations des 2-partitions admissibles de [Müh93] (rappelées en 7.2.2 et 7.2.3 ci-dessus) comme suit :

**Proposition 8.2.2.** Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  une 2-partition sphérique de  $\Gamma$ . Sont équivalents :

1.  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ ,
2. pour tout entier naturel  $m < \tilde{m}_{\alpha, \beta} + 1$ ,  $\Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$  et  $\Pi_m(\Delta_\beta, \Delta_\alpha)$  appartiennent à  $B_{red}^+$ .

**Proposition 8.2.3.** Supposons  $\Gamma$  sphérique et soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  une 2-partition de  $I$ . Alors  $\tilde{m}_{\alpha, \beta} \neq \infty$  et les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ ,
2.  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha, \beta}}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$  et  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha, \beta}}(\Delta_\beta, \Delta_\alpha)$  appartiennent à  $B_{red}^+$ .

Dans ce cas, on a  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha, \beta}}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) = \Pi_{\tilde{m}_{\alpha, \beta}}(\Delta_\beta, \Delta_\alpha) = \Delta_I$ .

Nous pouvons à présent prouver les deux résultats principaux de ce chapitre :

**Théorème 8.2.4.** Soit  $\tilde{I}$  une partition admissible de  $\Gamma$ , de type  $\tilde{\Gamma}$ . Alors :

1. l'application  $\mathfrak{s}_\alpha \mapsto \Delta_\alpha$  définit un morphisme de monoïdes  $\varphi = \varphi_{\tilde{I}}$  de  $B_{\tilde{\Gamma}}^+$  dans  $B_\Gamma^+ = B^+$ , d'image le sous-monoïde  $\tilde{B}^+ = \langle \Delta_\alpha, \alpha \in \tilde{I} \rangle$  de  $B^+$ ,
2. ce morphisme respecte les ppcm, donc est injectif.

Le couple  $(\tilde{B}^+, \{\Delta_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I}\})$  est donc un système d'Artin-Tits positif de type  $\tilde{\Gamma}$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le lemme 8.1.3 à l'ensemble  $\tilde{I}$  qui est formé de parties non vides et sphériques de  $I$  (relativement à  $\Gamma$ ) : on a  $\tilde{m}_{\alpha, \beta} \neq \infty$  si et seulement si  $\Gamma_{\alpha \cup \beta}$  est sphérique, par le corollaire 7.2.7, et, lorsque c'est le cas,  $\Pi_{\tilde{m}_{\alpha, \beta}}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) = \Delta_{\alpha \cup \beta}$  par la proposition 8.2.3.  $\square$

**Corollaire 8.2.5.** Sous les mêmes hypothèses, le morphisme  $\varphi : B_{\tilde{\Gamma}}^+ \hookrightarrow B_\Gamma^+$  se prolonge en un morphisme de groupes  $\varphi_{gr} : B_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow B_\Gamma$ , qui a pour image le sous-groupe  $\tilde{B} = \langle \Delta_\alpha, \alpha \in \tilde{I} \rangle$  de  $B_\Gamma$ . Si  $\tilde{\Gamma}$  est sphérique (i.e. si  $\Gamma$  est sphérique, cf. corollaire 7.2.7), alors  $\varphi_{gr}$  est injectif. En particulier, le couple  $(\tilde{B}, \{\Delta_\alpha \mid \alpha \in \tilde{I}\})$  est alors un système d'Artin-Tits de type  $\tilde{\Gamma}$ .

*Démonstration.* L'existence du morphisme  $\varphi_{gr} : B_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow B_\Gamma$  est claire. Si  $\tilde{\Gamma}$  est sphérique, tout élément  $g$  de  $B_{\tilde{\Gamma}}$  s'écrit sous la forme  $g = x^{-1}y$ , où  $x, y \in B_{\tilde{\Gamma}}^+$  (Remarque 6.2.5). L'égalité  $\varphi_{gr}(g) = 1$  implique alors  $\varphi(x) = \varphi(y)$  et on conclut grâce à l'injectivité de  $\varphi$ .  $\square$

**Définition 8.2.6.** Soient  $J \subseteq I$  et  $\tilde{J}$  une partition admissible de  $\Gamma_J$ , de type  $\tilde{\Gamma}$ . Nous disons que :

- le sous-monoïde  $\tilde{B}^+ = \langle \Delta_\alpha, \alpha \in \tilde{J} \rangle$  de  $B_\Gamma^+$  (resp. le sous-groupe  $\tilde{B} = \langle \Delta_\alpha, \alpha \in \tilde{J} \rangle$  de  $B_\Gamma$ ) est induit par la partition admissible  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ , ou, par abus de langage, est un sous-monoïde (resp. sous-groupe) admissible de  $B_\Gamma^+$  (resp.  $B_\Gamma$ ),
- le morphisme  $\varphi = \varphi_{\tilde{J}} : B_{\tilde{\Gamma}}^+ \hookrightarrow B_\Gamma^+$  (resp.  $\varphi_{gr} : B_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow B_\Gamma$ ), donné par le théorème 8.2.4 (resp. par le corollaire 8.2.5), est induit par la partition admissible  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ , ou, par abus de langage, est un morphisme admissible.

**Remarque 8.2.7.** Dans la définition 8.2.6 ci-dessus, nous prenons en compte le cas d'une partition  $\tilde{J}$  d'une partie  $J$  de  $I$ . Cela ne change pas les conclusions du théorème 8.2.4 et du corollaire 8.2.5. De plus, de cette façon, la notion de sous-monoïde admissible généralise la notion de sous-monoïde parabolique standard et de sous-monoïdes des points fixes d'un monoïde d'Artin-Tits sous l'action d'un groupe d'automorphismes du graphe (Proposition 8.3.1 ci-dessous), et la notion de morphisme admissible généralise la notion de LCM-homomorphisme de [Cri99, God02] (Proposition 8.3.5 ci-dessous).

**Remarque 8.2.8.** Soient  $J \subseteq I$ ,  $\tilde{J}$  une partition admissible de  $\Gamma_J$ , de type  $\tilde{\Gamma}$ , et  $\tilde{\varphi}$ ,  $\varphi$  et  $\varphi_{gr}$  les morphismes définis comme dans la remarque 7.1.2 et la définition 8.2.6 ci-dessus. On a le diagramme commutatif suivant, où  $\tilde{\varphi}$  et  $\varphi$  sont injectifs et où  $\varphi_{gr}$  est injectif lorsque  $\tilde{\Gamma}$  est sphérique :

$$\begin{array}{ccccc} B_{\tilde{\Gamma}}^+ & \longrightarrow & B_{\tilde{\Gamma}} & \xrightarrow{\pi_{\tilde{\Gamma}}} & W_{\tilde{\Gamma}} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_{gr} & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ B_{\Gamma}^+ & \longrightarrow & B_{\Gamma} & \xrightarrow{\pi_{\Gamma}} & W_{\Gamma} \end{array}$$

**Remarque 8.2.9.** Si la partition  $\tilde{J}$  est seulement supposée sphérique, l'application  $s_{\alpha} \mapsto \Delta_{\alpha}$  ne se prolonge pas nécessairement en un morphisme de  $B_{\tilde{\Gamma}}^+$  dans  $B_{\Gamma}^+$  : par exemple, si  $\Gamma = \circ \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{2} \bullet \xrightarrow{3}$ , avec  $\alpha = \{1\}$  et  $\beta = \{2, 3\}$ , alors  $\tilde{m}_{\alpha, \beta} = 3$  mais  $\Delta_{\alpha} \Delta_{\beta} \Delta_{\alpha} \neq \Delta_{\beta} \Delta_{\alpha} \Delta_{\beta}$  dans  $B_{\Gamma}^+$  (pour une raison de longueur).

### 8.3 Les morphismes admissibles dans la littérature.

Nous montrons, dans cette section, comment les notions de sous-monoïdes et de morphismes admissibles généralisent et unifient trois situations déjà connues.

#### Morphismes admissibles et automorphismes du graphe.

On retrouve, dans la proposition suivante, les résultats de [DP99, Mic99, Cri00, BDM02] sur le sous-monoïde (resp. sous-groupe) des points fixes du monoïde d'Artin-Tits  $B_{\tilde{\Gamma}}^+$  (resp. du groupe d'Artin-Tits  $B_{\Gamma}$  lorsque  $\Gamma$  est sphérique) sous l'action d'un groupe d'automorphismes de  $\Gamma$ .

**Proposition 8.3.1.** Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Notons  $\tilde{J}$  l'ensemble des orbites sphériques de  $I$  sous  $G$ ,  $J \subseteq I$  leur réunion et  $\tilde{\Gamma}$  le type de la partition sphérique  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ . Alors :

1. on a  $\tilde{B}^+ = (B^+)^G$ , en particulier, le couple  $((B^+)^G, \{\Delta_{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{J}\})$  est un système d'Artin-Tits positif de type  $\tilde{\Gamma}$ ,
2. si  $\Gamma$  est sphérique, on a  $\tilde{B} = B^G$ , en particulier, le couple  $(B^G, \{\Delta_{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{J}\})$  est alors un système d'Artin-Tits de type  $\tilde{\Gamma}$ .

*Démonstration.* Vu les théorèmes 7.3.1, 8.2.4 et le corollaire 8.2.5, il s'agit de montrer que  $\tilde{B}^+ = (B^+)^G$  et que, dans le cas où  $\Gamma$  est sphérique,  $\tilde{B} = B^G$ .

On a  $\tilde{B}^+ \subseteq (B^+)^G$  et  $\tilde{B} \subseteq B^G$ , puisque les éléments de  $G$  agissent sur  $B^+$  en respectant la longueur standard, donc fixent l'élément  $\Delta_{\alpha}$ , pour chaque orbite sphérique  $\alpha \in \tilde{J}$ .

Soit  $x \in (B^+)^G$  et montrons que  $x \in \tilde{B}^+$ . On peut supposer  $x \neq 1$ , et considérer un  $i \in I$  tel que  $s_i \preceq x$ . Alors, pour tout  $g \in G$ ,  $s_{g(i)} \preceq x$ , ce qui implique que l'orbite  $\alpha$  de  $i$  sous  $G$  est sphérique et que  $\Delta_{\alpha} \preceq x$ . Il existe donc  $x' \in B^+$  tel que  $x = \Delta_{\alpha} x'$ , et l'on a  $x' \in (B^+)^G$  (en utilisant la simplifiabilité dans  $B^+$ ) et  $\ell(x') < \ell(x)$ . On conclut, par récurrence, que  $x' \in \tilde{B}^+$ , d'où  $x \in \tilde{B}^+$ .

Supposons à présent  $\Gamma$  sphérique et soit  $b \in B^G$ . Il existe un unique couple  $(x, y) \in B^+$  tel que  $b = x^{-1}y$  et  $x \wedge_L y = 1$  (Remarque 6.2.5). Par unicité, on a nécessairement  $x, y \in (B^+)^G$ , et on conclut, grâce au point précédent, que  $x, y \in \tilde{B}^+$ , et donc  $b \in \tilde{B}$ .  $\square$

**Remarques 8.3.2.** Cet énoncé et sa démonstration sont essentiellement les mêmes que dans [Cri00, 10, 11], et en effet, la conjonction de [Cri00, 6], de [Cri03] et du lemme 8.3.4 montre que la matrice de Coxeter construite par J. Crisp dans [Cri00] est bien la matrice  $\tilde{\Gamma}$ .

J. Crisp établit l'assertion 2 de la proposition 8.3.1 dans le cadre plus général des matrices de Coxeter "de type FC"<sup>1</sup> (cf. [Cri00, 4]), et il montre en fait précisément que, dans ce cadre, le morphisme admissible  $\varphi_{gr} : B_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow B$  est encore injectif et a encore pour image  $B^G$  (cf. [Cri00, Section 5]).

### Morphismes admissibles et LCM-homomorphismes.

On rappelle ci-dessous la définition des LCM-homomorphismes de [Cri99, God02]. Dans [Cri99, 2.1], J. Crisp se restreint au cas d'une matrice  $\Gamma$  sans coefficient infini et ne donne donc pas la condition (L3) ci-dessous, qui est ajoutée par E. Godelle dans [God02, 2.1].

**Définition 8.3.3** ([Cri99, God02]). Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  et  $\Gamma'$  deux matrices de Coxeter. Une *LCM-donnée* de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$  est une application  $T : I \rightarrow \mathcal{P}(I')$  telle que :

- (L0) les ensembles  $T(i)$ ,  $i \in I$ , sont non vides et deux à deux disjoints,
- (L1) pour tout  $i \in I$ , la matrice  $\Gamma'_{T(i)}$  est sphérique,
- (L2) si  $m_{i,j} \neq \infty$ , alors  $\Gamma'_{T(i) \cup T(j)}$  est sphérique et  $\Delta'_{T(i) \cup T(j)} = \Pi_{m_{i,j}}(\Delta'_{T(i)}, \Delta'_{T(j)})$ ,
- (L3) si  $m_{i,j} = \infty$ , alors, pour tout  $i' \in T(i)$ , la matrice  $\Gamma'_{\{i'\} \cup T(j)}$  est non sphérique.

D'après le lemme 8.1.3, une LCM-donnée  $T$ , de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$ , permet de définir un morphisme qui respecte les ppcm  $\varphi_T : B^+ \rightarrow B'^+$ , donné par  $s_i \mapsto \Delta'_{T(i)}$ . Suivant [Cri99, God02], nous disons que  $\varphi_T$  est un *LCM-homomorphisme*.

Une LCM-donnée  $T$  de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$  définit donc une partition sphérique  $\{T(i) \mid i \in I\}$  (relativement à  $\Gamma'$ ) de la réunion des  $T(i)$ ,  $i \in I$ . On démontre, dans la proposition 8.3.5 ci-dessous, qu'il s'agit en fait d'une partition admissible de type  $\Gamma$ . Les LCM-homomorphismes sont donc des morphismes admissibles.

**Lemme 8.3.4.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux parties sphériques de  $I$  relativement à  $\Gamma$ .

1. Si  $\Gamma_{\alpha \cup \beta}$  est sphérique et s'il existe un entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\Delta_{\alpha \cup \beta} = \Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) = \Pi_m(\Delta_\beta, \Delta_\alpha)$ , alors  $m = |r_\alpha r_\beta|$ .
2. Si, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) \in B_{red}^+$ , alors  $|r_\alpha r_\beta| = \infty$  et  $\Gamma_{\alpha \cup \beta}$  n'est pas sphérique.

*Démonstration.* Sous les hypothèses de l'assertion 1, on a  $(r_\alpha r_\beta)^m = \Pi_{2m}(r_\alpha, r_\beta) = (r_{\alpha \cup \beta})^2 = 1$  dans  $W = W_\Gamma$ , donc  $|r_\alpha r_\beta|$  divise  $m$ . Si  $|r_\alpha r_\beta| < m$ , alors, en remplaçant un facteur  $\Pi_{|r_\alpha r_\beta|}(r_\alpha, r_\beta)$  de  $\Pi_m(r_\alpha, r_\beta)$  par  $\Pi_{|r_\alpha r_\beta|}(r_\beta, r_\alpha)$ , on voit que des termes se simplifient, d'où  $\ell(\Pi_m(r_\alpha, r_\beta)) < \Sigma_m(\ell(r_\alpha), \ell(r_\beta)) = \Sigma_m(\ell(\Delta_\alpha), \ell(\Delta_\beta)) = \ell(\Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta))$ , ce qui contredit le fait que  $\Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$  est simple.

Sous les hypothèses de l'assertion 2, le groupe diédral  $\langle r_\alpha, r_\beta \rangle \subseteq W_{\alpha \cup \beta}$  est infini, donc  $|r_\alpha r_\beta| = \infty$  et  $\Gamma_{\alpha \cup \beta}$  n'est pas sphérique.  $\square$

**Proposition 8.3.5.** Soient  $T$  une LCM-donnée de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$  et  $J' = \bigcup_{i \in I} T(i) \subseteq I'$ . Alors l'ensemble  $\{T(i) \mid i \in I\}$  est une partition admissible de  $\Gamma'_{J'}$ , de type  $\Gamma$ .

<sup>1</sup>On dit qu'une matrice de Coxeter  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  est de type FC si  $I$  est fini et si elle satisfait à la propriété suivante : pour tout  $J \subseteq I$ ,  $\Gamma_J$  n'a pas de coefficient infini  $\implies \Gamma_J$  est sphérique.



*Démonstration.* Il est clair, vu les conditions (L0) et (L1), que  $\{T(i) \mid i \in I\}$  est une partition sphérique de  $\Gamma'_{J'}$ . De plus, il résulte de [God02, 2.5] que, si  $m_{i,j} = \infty$ , on a, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Pi_m(\Delta'_{T(i)}, \Delta'_{T(j)}) \in B'_{red}$ .

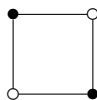
Le lemme 8.3.4 montre alors que la partition  $\{T(i) \mid i \in I\}$  est de type  $\Gamma$ , et les propositions 8.2.2 et 8.2.3 montrent que, pour tous  $i, j \in I$ ,  $\{T(i), T(j)\}$  est une partition admissible de  $\Gamma'_{T(i) \cup T(j)}$ , et on a alors le résultat par le théorème 7.2.6.  $\square$

**Remarque 8.3.6.** Réciproquement, on peut vérifier qu'une partition admissible de  $\Gamma'$ , de type  $\Gamma$ , définit une LCM-donnée de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$ , dans chacun des cas suivants :

1. la matrice  $\Gamma$  n'a pas de coefficient infini (i.e. la condition (L3) n'intervient pas),
2. la matrice  $\Gamma'$  est "de type FC" (cf. la note du bas de la page 55) et la partition admissible est issue d'un groupe d'automorphismes de  $\Gamma'$ ,
3. la matrice  $\Gamma'$  est "à angles droits"<sup>2</sup> ; il suffit d'utiliser, pour voir cela, le résultat [Müh94, 2.5.15], rappelé en proposition 9.1.3 ci-dessous.

Mais cela n'est pas vrai en toute généralité, c'est-à-dire qu'il existe des partitions admissibles (de type ayant un coefficient infini) qui ne satisfont pas à la condition (L3) : on donne, en 8.3.7 ci-dessous, un exemple d'une telle partition issue d'un automorphisme de graphe ; la proposition 8.3.10 ci-dessous en fournit d'autres exemples, non nécessairement issues d'automorphismes de graphes (cf. remarque 8.3.12), et on en exhibe, dans l'exemple 8.4.8 ci-dessous, dans des graphes de type FC (elles sont alors nécessairement non issues d'automorphismes de graphes).

**Exemple 8.3.7.** Considérons le graphe de Coxeter  $\Gamma$  de type affine  $\tilde{A}_3$ , et sa partition admissible constituée des orbites de  $\Gamma$  sous l'action du "demi-tour" :



Cette partition admissible (de type  $\tilde{\Gamma} = I_2(\infty)$ ), ne définit pas une LCM-donnée de  $I_2(\infty)$  dans  $\Gamma$  (i.e. ne satisfait pas à la condition (L3)), puisque, si  $i$  est l'un des sommets de ce graphe et si  $\beta$  désigne l'orbite ne contenant pas  $i$ , alors  $\Gamma_{\{i\} \cup \beta}$  est du type sphérique  $A_3$ .

### Morphismes admissibles et éclatement d'un graphe de Coxeter.

On rappelle, en définition 8.3.8 ci-dessous, une construction de B. Mühlherr [Müh94, section 2.6], dont une version presque identique a été obtenue de façon indépendante par J. Crisp et L. Paris [CP01, section 6], dans le cas des matrices de Coxeter sans coefficient infini, et généralisée à tous les cas par L. Paris [Par02, section 5] (la différence vient du choix de l'entier  $N$  dans la définition 8.3.8, et du fait que J. Crisp et L. Paris se limitent au cas des matrices de dimension finie).

**Définition 8.3.8** (éclatements). Soit  $\Gamma = (m_{s,t})_{s,t \in S}$  une matrice de Coxeter telle que l'ensemble  $\{m_{s,t} \mid s, t \in S\}$  soit fini. Soit :

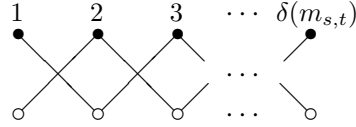
$$\delta : \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{N}, \begin{cases} n \mapsto n - 1 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ n \mapsto \frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair,} \\ \infty \mapsto 2. \end{cases}$$

<sup>2</sup>On dit qu'une matrice de Coxeter  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  est à angles droits si, pour tous  $i, j \in I$ ,  $m_{i,j} \in \{1, 2, \infty\}$ .

Soient  $N_0 = \text{ppcm}\{\delta(m_{s,t}) \mid s, t \in S, s \neq t\}$  et  $N$  un multiple de  $N_0$ .

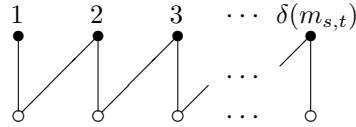
Un éclatement  $\hat{\Gamma}$  de  $\Gamma$  est un graphe de Coxeter d'ensemble de sommets la réunion disjointe  $\hat{S}$  d'ensembles  $I(s) = \{s^{(1)}, \dots, s^{(N)}\}$  de cardinal  $N$ , où  $s \in S$ , et dont les arêtes sont réparties comme suit :

1. il n'y a pas d'arête entre deux éléments d'un même ensemble  $I(s)$ ,
2. si  $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  est pair, le graphe  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$  est la réunion disjointe de  $\frac{N}{\delta(m_{s,t})}$  copies du graphe suivant :



où les sommets notés ● constituent  $I(s)$  et les sommets notés ○ constituent  $I(t)$ ,

3. si  $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  est impair, le graphe  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$  est la réunion disjointe de  $\frac{N}{\delta(m_{s,t})}$  copies du graphe suivant :



où les sommets notés ● constituent  $I(s)$  et les sommets notés ○ constituent  $I(t)$ ,

4. si  $m_{s,t} = \infty$ , le graphe  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$  est la réunion disjointe de  $\frac{N}{2}$  copies du graphe suivant :



où les sommets notés ● constituent  $I(s)$  et les sommets notés ○ constituent  $I(t)$ .

**Exemple 8.3.9.** Si  $\Gamma$  est de type  $H_3$  (resp.  $H_4$ ), alors tout éclatement  $\hat{\Gamma}$  de  $\Gamma$ , construit avec  $N = N_0 = 2$ , est de type  $D_6$  (resp.  $E_8$ ), et l'on retrouve les figures des exemples 7.3.3.

**Proposition 8.3.10** ([Müh94, 2.6.2 et 2.6.3]). *L'ensemble  $\{I(s) \mid s \in S\}$  est une partition admissible de  $\hat{\Gamma}$ , de type  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* On rappelle qu'il suffit de vérifier que, pour  $s, t \in S$ ,  $\{I(s), I(t)\}$  est une partition admissible de  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$ , de matrice  $I_2(m_{s,t})$  (théorème 7.2.6).

Lorsque  $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , le graphe  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$  est la réunion disjointe de  $\frac{2N}{m_{s,t}-1}$  copies de  $A_{m_{s,t}-1}$ , et la partition  $\{I(s), I(t)\}$  induit sur chacune des composantes connexes de  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$  la partition "bipartite" de  $A_{m_{s,t}-1}$  (sauf si  $m_{s,t} = 2$ , auquel cas on obtient la partition triviale de  $A_1$ ). Lorsque  $m_{s,t} = \infty$ , le graphe  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$  est la réunion disjointe de  $\frac{N}{2}$  copies de  $\tilde{A}_3$ , et la partition  $\{I(s), I(t)\}$  induit sur chacune des composantes connexes de  $\hat{\Gamma}_{I(s) \sqcup I(t)}$  la partition de  $\tilde{A}_3$  décrite dans l'exemple 8.3.7 ci-dessus.

Des résultats de B. Mühlherr [Müh94], rappelés dans le corollaire 9.1.6 et dans le lemme 9.2.1 ci-dessous, montrent alors le résultat.  $\square$

**Corollaire 8.3.11.** *Soient  $\Gamma$  une matrice de Coxeter et  $\hat{\Gamma}$  un éclatement de  $\Gamma$ . Le morphisme  $\varphi : B_{\Gamma}^+ \rightarrow B_{\hat{\Gamma}}^+$ , donné par  $s \mapsto \Delta_{I(s)}$ , est un morphisme admissible.*

Notons que cette construction permet de plonger tout groupe de Coxeter (resp. monoïde d'Artin-Tits) associé à une matrice de Coxeter prenant un nombre fini de valeurs, dans un groupe de Coxeter (resp. monoïde d'Artin-Tits) associé à une matrice de Coxeter "simplement lacée", i.e. à coefficients dans  $\{1, 2, 3\}$ .

**Remarques 8.3.12.** Lorsque  $\Gamma$  n'a pas de coefficient infini, le morphisme  $\varphi$  du corollaire 8.3.11 est un LCM-homomorphisme, obtenu par *pliage*, au sens de [Cri99, 4.1] (voir aussi la section 9.3 ci-dessous).

Lorsque  $\Gamma$  a un coefficient infini,  $\varphi$  n'est pas un LCM-homomorphisme au sens de [God02] : si  $m_{s,t} = \infty$  et si  $\hat{s} \in I(s)$ , alors  $\tilde{\Gamma}_{\{\hat{s}\} \cup I(t)}$  est la réunion disjointe de  $N - 2$  composantes connexes de type  $A_1$  et d'une composante connexe de type  $A_3$ , donc est sphérique. Notons que, dans [Par02, section 5], L. Paris montre et utilise le fait que  $\varphi$  est un morphisme qui respecte les ppcm (à droite).

## 8.4 Quelques propriétés des morphismes admissibles.

On montre ici que des propriétés établies dans [Cri99, Cri00, God02] s'étendent au cas des sous-monoïdes et morphismes admissibles.

### Respect de la combinatoire des monoïdes d'Artin-Tits.

Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter,  $J \subseteq I$  et  $\tilde{J}$  une partition admissible de  $\Gamma_J$ . Soit  $\varphi : B_{\tilde{\Gamma}}^+ \hookrightarrow B_{\Gamma}^+$  le morphisme (admissible) induit par la partition admissible  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ , d'image le sous-monoïde admissible  $\tilde{B}^+$  de  $B^+ = B_{\Gamma}^+$ .

On sait déjà que le morphisme admissible  $\varphi$  *présERVE* les ppcm et la divisibilité, comme dans le théorème 8.1.2.

La proposition qui suit établit que les notions d'éléments simples dans  $B^+$  et dans  $\tilde{B}^+$  coïncident. Elle généralise les résultats [Cri99, 2.2], [Cri00, 15] et [God02, 2.6]. Notons que, dans [Cri99, 2.2] et [God02, 2.6], seule l'inclusion  $\tilde{B}_{red}^+ \subseteq \tilde{B}^+ \cap B_{red}^+$  est démontrée.

**Proposition 8.4.1.** *Posons  $\tilde{B}_{red}^+ = \varphi((B_{\tilde{\Gamma}}^+)_{red})$ . Alors  $\tilde{B}_{red}^+ = \tilde{B}^+ \cap B_{red}^+$ .*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{w} \in W_{\tilde{\Gamma}} \approx \tilde{W}$  et  $\alpha_1 \cdots \alpha_d$  une représentation réduite de  $\tilde{w}$  sur  $\tilde{J}$ . Alors  $\alpha_1 \cdots \alpha_d$  est compatible (cf. proposition 7.2.4), donc  $\varphi(\tilde{w}) = \Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d} \in B_{red}^+ \cap \tilde{B}^+$  (cf. lemme 8.2.1). Réciproquement, soit  $w \in B_{red}^+ \cap \tilde{B}^+$ . On a  $w = \Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d}$ , pour certains  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \tilde{J}$ , donc  $\pi(w) = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_d}$  et le mot  $\alpha_1 \cdots \alpha_d$  sur  $\tilde{J}$  est compatible, donc réduit (cf. proposition 7.2.4). Mais alors, si l'on pose  $\tilde{w} = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_d} \in W_{\tilde{\Gamma}}$ , on a  $\tilde{w} = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_d}$  dans  $(B_{\tilde{\Gamma}}^+)_{red}$  et  $w = \varphi(\tilde{w})$ .  $\square$

Les propositions 8.4.3 et 8.4.4 ci-dessous reprennent le théorème [God02, 2.10].

On aurait pu se contenter de citer ce résultat, puisqu'il s'applique ici : le morphisme admissible  $\varphi$  satisfait aux hypothèses de [God02, 2.10] et à la condition supplémentaire — qu'il faut ajouter aux énoncés de [God02, 2.9 et 2.10] pour que les preuves données dans [God02] soient correctes — d'être à valeurs dans  $B_{\cup_{\alpha \in J} p(\alpha)}^+$ , où  $p(\alpha) = \{i \in I \mid s_i \preceq \varphi(s_{\alpha})\} = \{i \in I \mid \varphi(s_{\alpha}) \succcurlyeq s_i\}$ . Nous préférons redémontrer ces propositions avec nos notations et les résultats établis ici. Les démonstrations que l'on donne sont toutefois largement inspirées de celles de [God02, 2.9 et 2.10].

**Lemme 8.4.2.** *Soient  $\tilde{w} \in (B_{\tilde{\Gamma}}^+)_{red}$  et  $i \in I$ .*

1. *Si  $s_i \preceq \varphi(\tilde{w})$  (resp.  $\varphi(\tilde{w}) \succcurlyeq s_i$ ), alors  $i \in J$  et, si  $\alpha$  désigne l'élément de  $\tilde{J}$  qui contient  $i$ , on a  $s_{\alpha} \preceq \tilde{w}$  (resp.  $\tilde{w} \succcurlyeq s_{\alpha}$ ).*

2. Si  $i$  appartient à  $J$  et si  $\mathbf{s}_i\varphi(\tilde{\mathbf{w}}) \in B_{red}^+$  (resp.  $\varphi(\tilde{\mathbf{w}})\mathbf{s}_i \in B_{red}^+$ ), alors, si  $\alpha$  désigne l'élément de  $\tilde{J}$  qui contient  $i$ , on a  $\mathbf{s}_\alpha\tilde{\mathbf{w}} \in (B_\Gamma^+)_{red}$  (resp.  $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{s}_\alpha \in (B_\Gamma^+)_{red}$ ).

*Démonstration.* Montrons le résultat pour les propriétés à gauche. Posons  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{s}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{s}_{\alpha_d}$ . D'après la proposition 8.4.1, on a  $\varphi(\tilde{\mathbf{w}}) = \Delta_{\alpha_1} \cdots \Delta_{\alpha_d} \in B_{red}^+$ . Posons  $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_d} \in \tilde{W}$ , de sorte que  $\varphi(\tilde{\mathbf{w}}) = w$ .

Montrons 1. On a  $\mathbf{w} \in B_J^+$ , donc la condition  $\mathbf{s}_i \preceq \mathbf{w}$  implique  $i \in J$ . Cette condition équivaut à  $\ell(\mathbf{s}_i w) = \ell(w) - 1$ , c'est-à-dire à  $i \in I^-(w^{-1})$ . Par admissibilité de la partition  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ , on a donc  $\alpha \in I^-(w^{-1})$ , d'où  $\ell(r_\alpha w) = \ell(w) - \ell(r_\alpha)$ . On en déduit que  $\Delta_\alpha = \varphi(\mathbf{s}_\alpha) \preceq \mathbf{w} = \varphi(\tilde{\mathbf{w}})$ , d'où, d'après le théorème 8.1.2,  $\mathbf{s}_\alpha \preceq \tilde{\mathbf{w}}$ .

Montrons 2. La condition  $\mathbf{s}_i \mathbf{w} \in B_{red}^+$  équivaut à  $\ell(\mathbf{s}_i w) = \ell(w) + 1$ , c'est-à-dire à  $i \in I^+(w^{-1})$ . Par admissibilité de la partition  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ , on a donc  $\alpha \in I^+(w^{-1})$ , d'où  $\ell(r_\alpha w) = \ell(w) + \ell(r_\alpha)$ . On en déduit que  $\Delta_\alpha \mathbf{w} = \varphi(\mathbf{s}_\alpha \tilde{\mathbf{w}}) \in B_{red}^+$ , d'où, d'après la proposition 8.4.1,  $\mathbf{s}_\alpha \tilde{\mathbf{w}} \in (B_\Gamma^+)_{red}$ .  $\square$

**Proposition 8.4.3.** *Le morphisme  $\varphi$  respecte les formes normales (à gauche et à droite), c'est-à-dire que, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est la forme normale à gauche (resp. à droite) d'un élément non trivial de  $B_\Gamma^+$ , alors  $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$  est la forme normale à gauche (resp. à droite) de  $\varphi(x)$  dans  $B^+$ .*

*Démonstration.* Montrons le résultat pour les formes normales à gauche. D'après la proposition 8.4.1, les images par  $\varphi$  des éléments d'une forme normale appartiennent à  $B_{red}^+$ . Vu la définition 6.2.2 des formes normales à gauche, il suffit, pour obtenir le cas général, d'établir le cas  $n = 2$ .

Soient donc  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (B_\Gamma^+)_{red}$  tels que  $\tilde{L}(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \mathbf{x}$  (où  $\tilde{L} : B_\Gamma^+ \rightarrow (B_\Gamma^+)_{red}$  est comme en 6.2.2) et montrons que  $L(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})) = \varphi(\mathbf{x})$ . On a  $\varphi(\mathbf{x}) \in B_{red}^+$  et  $\varphi(\mathbf{x}) \preceq \varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})$ , donc  $\varphi(\mathbf{x}) \preceq L(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}))$ . Posons  $L(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})) = \varphi(\mathbf{x})\mathbf{h}$ , pour un certain  $\mathbf{h} \in B_{red}^+$  tel que  $\mathbf{h} \preceq \varphi(\mathbf{y})$ . Si  $\mathbf{h} \neq 1$ , alors il existe  $i \in I$  tel que  $\mathbf{s}_i \preceq \mathbf{h}$  donc, d'après le lemme 8.4.2,  $i \in J$  et, si  $\alpha$  désigne l'élément de  $\tilde{J}$  qui contient  $i$ , alors  $\mathbf{s}_\alpha \preceq \mathbf{y}$ ; mais comme  $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{s}_i \in B_{red}^+$  (car  $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{s}_i \preceq \varphi(\mathbf{x})\mathbf{h}$  et  $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{h} \in B_{red}^+$ ) le lemme 8.4.2 nous fournit alors  $\mathbf{x}\mathbf{s}_\alpha \in (B_\Gamma^+)_{red}$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\tilde{L}(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ . On a donc  $\mathbf{h} = 1$ , c'est-à-dire  $L(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})) = \varphi(\mathbf{x})$ .  $\square$

**Proposition 8.4.4.** *Le morphisme  $\varphi$  respecte les pgcd (à gauche et à droite), c'est-à-dire que, pour tout  $x, y \in B_\Gamma^+$ , on a  $\varphi(x \wedge_L y) = \varphi(x) \wedge_L \varphi(y)$  (resp.  $\varphi(x \wedge_R y) = \varphi(x) \wedge_R \varphi(y)$ ).*

*Démonstration.* Montrons le résultat pour les pgcd à gauche. Il est clair que, pour  $a, b \in B^+$ , on a  $a \wedge_L b = 1$  si et seulement si  $L(a) \wedge_L L(b) = 1$  (et de même dans  $B_\Gamma^+$ ).

Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (B_\Gamma^+)_{red}$ . Il est clair que, si  $\varphi(\mathbf{x}) \wedge_L \varphi(\mathbf{y}) = 1$ , alors  $\mathbf{x} \wedge_L \mathbf{y} = 1$ . Réciproquement, s'il existe  $i \in I$  tel que  $\mathbf{s}_i \preceq \varphi(\mathbf{x}) \wedge_L \varphi(\mathbf{y})$ , le lemme 8.4.2 nous fournit un élément  $\alpha$  de  $\tilde{J}$  tel que  $\mathbf{s}_\alpha \preceq \mathbf{x} \wedge_L \mathbf{y}$ . On a donc  $\varphi(\mathbf{x}) \wedge_L \varphi(\mathbf{y}) = 1$  si et seulement si  $\mathbf{x} \wedge_L \mathbf{y} = 1$ .

Soient à présent  $x, y \in B_\Gamma^+$  et posons  $x = (x \wedge_L y)x_1$  et  $y = (x \wedge_L y)y_1$ . On a  $x_1 \wedge_L y_1 = 1$ ,  $\varphi(x) = \varphi(x \wedge_L y)\varphi(x_1)$ ,  $\varphi(y) = \varphi(x \wedge_L y)\varphi(y_1)$  et il s'agit d'établir que  $\varphi(x_1) \wedge_L \varphi(y_1) = 1$ . D'après le premier point de cette démonstration, on a  $\tilde{L}(x_1) \wedge_L \tilde{L}(y_1) = 1$ , donc  $\varphi(\tilde{L}(x_1)) \wedge_L \varphi(\tilde{L}(y_1)) = 1$  (d'après le deuxième point de cette démonstration). Or, d'après la proposition 8.4.3, on a  $\varphi(\tilde{L}(x_1)) = L(\varphi(x_1))$  et  $\varphi(\tilde{L}(y_1)) = L(\varphi(y_1))$ , d'où  $\varphi(x_1) \wedge_L \varphi(y_1) = 1$  (à nouveau grâce au premier point de cette démonstration).  $\square$

**Corollaire 8.4.5.** *Supposons  $\Gamma$  sphérique. Alors  $\tilde{\Gamma}$  est sphérique (cf. corollaire 7.2.7) et le morphisme  $\varphi_{gr} : B_{\tilde{\Gamma}} \hookrightarrow B_{\Gamma}$  respecte les fractions irréductibles (au sens de la définition 6.2.5), c'est-à-dire que, si  $(x, y)$  est la forme irréductible à gauche (resp. à droite) d'un élément  $g$  de  $B_{\tilde{\Gamma}}$ , alors  $(\varphi(x), \varphi(y))$  est la forme irréductible à gauche (resp. à droite) de  $\varphi_{gr}(g)$  dans  $B_{\Gamma}$ .*

*Démonstration.* Cf. [God02, 2.11]. Cela résulte directement des définitions des formes irréductibles et de la proposition 8.4.4.  $\square$

### Composé de morphismes admissibles.

On rappelle, en proposition 8.4.6 ci-dessous, le résultat [Müh94, 2.5.6] sur les *partitions admissibles de partitions admissibles* (démontré ici à l'aide des morphismes admissibles).

Ce résultat implique que la classe des morphismes admissibles est stable par composition (cf. corollaire 8.4.7). Il offre également un critère pour prouver ou infirmer l'admissibilité de partitions sphériques, que l'on illustre dans l'exemple 8.4.8 ci-dessous, et que l'on utilisera à plusieurs reprises dans le chapitre 9.

**Proposition 8.4.6** ([Müh94, 2.5.6]). *Soient  $I'$  une partition admissible de  $\Gamma$ , de matrice  $\Gamma' = (m'_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in I'}$ , et  $I''$  une partition sphérique de  $\Gamma$ , de matrice  $\Gamma'' = (m''_{\Phi, \Psi})_{\Phi, \Psi \in I''}$ .*

*Posons, pour  $\Phi \in I''$ ,  $\bar{\Phi} = \cup_{\alpha \in \Phi} \alpha$ , et  $\bar{I} = \{\bar{\Phi} \mid \Phi \in I''\}$ . Alors  $\bar{I}$  est une partition sphérique de  $\Gamma$ , de matrice  $\Gamma''$ . De plus, on a l'équivalence :*

$$\bar{I} \text{ est une partition admissible de } \Gamma \iff I'' \text{ est une partition admissible de } \Gamma'.$$

*Démonstration.* Posons  $W = W_{\Gamma}$ ,  $B^+ = B_{\Gamma}^+$ ,  $W' = W_{\Gamma'}$ ,  $B'^+ = B_{\Gamma'}^+$  et  $W'' = W_{\Gamma''}$ ,  $B''^+ = B_{\Gamma''}^+$ . Considérons le morphisme admissible  $\varphi : B'^+ \rightarrow B^+$ ,  $s_{\alpha} \mapsto \Delta_{\alpha}$ , induit par  $I'$ , et l'isomorphisme de groupes  $\tilde{\varphi} : W' \xrightarrow{\sim} \langle r_{\alpha}, \alpha \in I' \rangle \subseteq W$ .

Soit  $\Phi \in I''$ . La matrice  $\Gamma'_{\Phi}$  est sphérique, donc  $\text{ppcm}\{s_{\alpha} \mid \alpha \in \Phi\} = \Delta'_{\Phi}$  existe dans  $B'^+$ . Comme  $\Phi$  est fini et comme  $\varphi$  préserve les ppcm, au sens du théorème 8.1.2, le ppcm des  $\Delta_{\alpha} = \varphi(s_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \Phi$ , existe dans  $B^+$ . Cela implique que  $\bar{\Phi}$  est sphérique et que  $\text{ppcm}\{\Delta_{\alpha} \mid \alpha \in \Phi\} = \Delta_{\bar{\Phi}} = \varphi(\Delta'_{\Phi})$ ; et donc  $\tilde{\varphi}(r'_{\Phi}) = r_{\bar{\Phi}}$  dans  $W$ . Pour  $\Phi, \Psi \in I''$ , on a alors  $m''_{\Phi, \Psi} = |r'_{\Phi} r'_{\Psi}| = |\tilde{\varphi}(r'_{\Phi} r'_{\Psi})| = |r_{\bar{\Phi}} r_{\bar{\Psi}}|$ , d'où le premier point.

De plus, on a  $\varphi(B'^+_{red}) = \varphi(B'^+) \cap B^+_{red}$  d'après la proposition 8.4.1. Donc pour tous  $\Phi, \Psi \in I''$  avec  $\Phi \neq \Psi$ , et pour tout entier naturel  $m < m''_{\Phi, \Psi} + 1$ , on a l'équivalence suivante :

$$\Pi_m(\Delta'_{\Phi}, \Delta'_{\Psi}), \Pi_m(\Delta'_{\Psi}, \Delta'_{\Phi}) \in B'^+_{red} \iff \Pi_m(\Delta_{\bar{\Phi}}, \Delta_{\bar{\Psi}}), \Pi_m(\Delta_{\bar{\Psi}}, \Delta_{\bar{\Phi}}) \in B^+_{red}.$$

On en déduit le second point (grâce au théorème 7.2.6 et à la proposition 8.2.2).  $\square$

Le résultat suivant a été établi pour les LCM-homomorphismes de [Cri99] (cf. [Cri99, page 134]). Je ne sais pas s'il est vrai pour les LCM-homomorphismes de [God02].

**Corollaire 8.4.7.** *Le morphisme composé de deux morphismes admissibles est un morphisme admissible.*

*Démonstration.* Soient  $\Gamma, \Gamma'$  et  $\Gamma''$  trois matrices de Coxeter. Posons  $B^+ = B_{\Gamma}^+$ ,  $B'^+ = B_{\Gamma'}^+$  et  $B''^+ = B_{\Gamma''}^+$ . Soient deux morphismes admissibles  $\varphi : B'^+ \rightarrow B^+$  et  $\varphi' : B''^+ \rightarrow B'^+$ ; autrement dit,  $\Gamma'$  est la matrice d'une partition admissible  $J'$  de  $\Gamma_J$ ,  $J \subseteq I$ , et  $\Gamma''$  est la matrice d'une partition admissible  $K''$  de  $\Gamma'_{K'}$ ,  $K' \subseteq J'$ . Mais alors  $K'$  est une partition

admissible de  $\Gamma_K$ , où  $K = \cup_{\alpha \in K'} \alpha \subseteq J$ , d'après le lemme 7.2.1. La proposition 8.4.6 ci-dessus nous dit alors que  $\bar{K} = \{\bar{\Phi} \mid \Phi \in K''\}$  est une partition admissible de  $\Gamma_K$ . De plus, avec les notations de la preuve de la proposition 8.4.6, on a  $\varphi \circ \varphi'(\mathbf{s}_\Phi) = \varphi(\Delta'_\Phi) = \Delta_{\bar{\Phi}}$ , donc le morphisme composé  $\varphi \circ \varphi' : B''^+ \rightarrow B^+$  est le morphisme induit par la partition admissible  $\bar{K}$  de  $\Gamma_K$ .  $\square$

**Exemple 8.4.8.** Considérons les graphes de Coxeter suivants, où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  :

$$\Gamma = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ m \quad m \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ m \quad m \\ \bullet \end{array} \quad \tilde{\Gamma} = \bullet_1 \text{---} m \text{---} \bullet_2 \text{---} \infty \text{---} \bullet_3$$

Le graphe  $\tilde{\Gamma}$ , qui est de type FC, est le type de la partition admissible de  $\Gamma$  formée des orbites sous l'action des automorphismes de  $\Gamma$  qui consistent à permuter quatre des cinq "branches".

D'après la proposition 8.4.6, la partition sphérique  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$  de  $\tilde{\Gamma}$  est admissible puisqu'elle "se remonte" en la partition admissible de  $\Gamma$  constituée des orbites sous l'action de tous les automorphismes de  $\Gamma$ . Cette partition admissible (de type  $I_2(\infty)$ ) de  $\tilde{\Gamma}$  ne définit pas une LCM-donnée de  $I_2(\infty)$  dans  $\tilde{\Gamma}$ , puisqu'elle ne satisfait pas à la condition (L3) de la définition 8.3.3.

### Interprétations géométriques.

On peut vérifier que la réalisation géométrique des LCM-homomorphismes de [Cri99] (entre groupes d'Artin-Tits), en termes de morphismes entre groupes fondamentaux des espaces quotients (pour l'action du groupe de Coxeter associé) des complexes de Salvetti, décrite dans la section 3 de [Cri99], se généralise au cas des morphismes admissibles (entre groupes d'Artin-Tits).

De même, on peut vérifier que la construction, détaillée dans [God02, 3.2], de l'application simpliciale continue  $\Phi_p$  entre complexes de Deligne (modifiés), associée à une LCM-donnée  $p$  (avec la terminologie de la définition 8.3.3) se généralise aux partitions admissibles.

Par contre, la preuve de l'injectivité des LCM-homomorphismes de [God02] entre groupes d'Artin-Tits de type FC — plus précisément la preuve de [God02, 3.7] — ne se généralise pas telle quelle au cas des partitions admissibles. Je ne sais pas si les morphismes admissibles entre groupes d'Artin-Tits de type FC qui ne sont pas des LCM-homomorphismes — il en existe : cf. exemple 8.4.8 — sont injectifs.



# Chapitre 9

## Classification.

Le but de ce chapitre est d'achever la classification des partitions admissibles dont le type n'a pas de coefficient infini, commencée dans [Müh94]. Vu les résultats de la section 8.3, cela revient à classer les LCM-homomorphismes de Crisp [Cri99], i.e. ceux pour lesquels la condition (L3) est vide.

Les résultats [Müh93, 1.2] et [Müh94, 2.5.5], rappelés aux théorème 7.2.6 et corollaire 7.2.7 ci-dessus, permettent de ramener cette classification à la classification des 2-partitions admissibles des graphes de Coxeter sphériques.

Nous rappelons et précisons, dans la section 9.1, les résultats de [Müh94] sur les 2-partitions admissibles et la réductibilité d'un graphe de Coxeter. Ils permettent de se ramener à la classification des 2-partitions admissibles des graphes de Coxeter sphériques et *irréductibles*, que nous donnons dans la section 9.2 : nous rappelons les résultats obtenus dans [Müh94] pour les séries infinies  $A_n$ ,  $B_n$  et  $D_n$ , et nous les complétons par l'étude des cas exceptionnels (Propositions 9.2.2 et 9.2.4). Enfin, dans la section 9.3, nous faisons le lien entre cette classification et la notion de *pliage* d'un graphe de Coxeter, introduite par J. Crisp dans [Cri99, 4.1], comme moyen de construction effective de LCM-homomorphismes et début de classification. Nous proposons une généralisation (et simplification) de la notion de pliage (Définition 9.3.1) et complétons la liste des cas de [Cri99, 4.1] (Proposition 9.3.3).

### 9.1 Partitions admissibles et réductibilité.

Soit  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter. On pose  $W = W_\Gamma$  et  $B^+ = B_\Gamma^+$ .

#### Partition d'un graphe sphérique en composantes connexes.

Nous montrons que la partition d'un graphe de Coxeter sphérique en un ensemble de réunions de ses composantes connexes est admissible, et nous rappelons un résultat de [Müh94], qui limite les "formes" que peut prendre une 2-partition admissible d'un graphe connexe.

Le lemme ci-dessous est utilisé sans démonstration dans [Müh94, section 2.5]. Nous en donnons une, basée sur les propriétés du système de racines *standard* associé à une matrice de Coxeter (cf. [Deo82]).

**Lemme 9.1.1.** *Soient  $v, w \in W$  de supports disjoints.*



1.  $vw = wv \iff \forall (i, j) \in \text{Supp}(v) \times \text{Supp}(w), m_{i,j} = 2$ .
2.  $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$ .

*Démonstration.* Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base  $(a_i)_{i \in I}$  et  $\Phi = \{w(a_i) \mid w \in W, i \in I\}$  le système de racines standard associé à  $\Gamma$  dans  $V$ . On a  $w(a_i) \in \Phi^+ \iff i \in I^+(w)$ , et  $w(a_i) \in \Phi^- \iff i \in I^-(w)$ . Posons  $\Phi_w = \{a \in \Phi^+ \mid w(a) \in \Phi^-\}$ . Pour toute décomposition réduite  $i_1 \cdots i_n$  de  $w$ , on a  $\Phi_w = \{a_{i_n}\} \cup s_{i_n}(\Phi_{w'})$ , où  $w' = s_{i_1} \cdots s_{i_{n-1}}$ , et  $\ell(w) = n = |\Phi_w|$ .

Posons  $J = \text{Supp}(v)$  et  $K = \text{Supp}(w)$ . On a  $\Phi_v \subseteq \Phi_J^+$  et  $\Phi_w \subseteq \Phi_K^+$ . Comme  $J \cap K = \emptyset$ , on a  $v(\Phi_K^+) \subseteq \Phi^+$ ,  $v(\Phi_K^-) \subseteq \Phi^-$ , et de même,  $w(\Phi_J^+) \subseteq \Phi^+$ ,  $w(\Phi_J^-) \subseteq \Phi^-$ .

Montrons le premier point. Le seul sens à démontrer est le sens direct. Supposons donc que  $vw = wv$ , et montrons, par récurrence sur  $\ell(w)$ , que, pour tout  $k \in K$ , on a  $vs_k = s_kv$ . Si  $w = 1$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons donc  $\ell(w) \geq 1$  et posons  $w = w's_{k_0}$ , pour  $k_0 \in I$  et  $w' \in W$  tel que  $\ell(w') = \ell(w) - 1$ ; on a  $K = \{k_0\} \cup \text{Supp}(w')$ . Comme  $a_{k_0} \in \Phi_K^+$  et  $w(a_{k_0}) \in \Phi_K^-$ , on a  $v(a_{k_0}) \in \Phi^+$  et  $vw(a_{k_0}) = wv(a_{k_0}) \in \Phi^-$ . Ceci implique  $v(a_{k_0}) \in \Phi_K^-$ . On a donc  $v(a_{k_0}) \in (a_{k_0} + V_J) \cap V_K$ , d'où  $v(a_{k_0}) = a_{k_0}$ , et donc  $vs_{k_0} = s_{k_0}v$ . Le fait que  $v$  commute à  $w$  et à  $s_{k_0}$  implique que  $v$  et  $w'$  commutent, donc, par récurrence, pour tout  $k \in \text{Supp}(w')$ ,  $vs_k = s_kv$ . On a donc le résultat.

Montrons le second point. On vérifie que  $\Phi_{vw}$  contient  $\Phi_w$  et  $w^{-1}(\Phi_v)$ , et que ces deux ensembles sont disjoints, d'où  $\ell(w) + \ell(v) = |\Phi_w| + |w^{-1}(\Phi_v)| \leq |\Phi_{vw}| = \ell(vw) \leq \ell(v) + \ell(w)$ .  $\square$

Le résultat suivant est implicite dans [Müh94].

**Proposition 9.1.2.** *Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  une 2-partition sphérique de  $\Gamma$ . On a  $\Gamma = \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta \iff \tilde{m}_{\alpha,\beta} = 2$ , auquel cas  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Le sens direct de l'équivalence est évident. La réciproque et la fin de la proposition résultent du lemme 9.1.1.  $\square$

**Proposition 9.1.3** ([Müh94, 2.5.15]). *Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  une 2-partition admissible de  $\Gamma$ . Supposons qu'il existe  $i_0 \in \alpha$  tel que  $m_{i_0,j} = 2$ , pour tout  $j \in \beta$ . Alors  $\Gamma = \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 9.1.1, on a, pour tout  $(v, w) \in W_\alpha \times W_\beta$ ,  $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$ . L'hypothèse de la proposition donne  $r_\beta s_{i_0} = s_{i_0} r_\beta$ , donc  $\ell(r_\alpha r_\beta s_{i_0}) = \ell(r_\alpha s_{i_0} r_\beta) = \ell(r_\alpha s_{i_0}) + \ell(r_\beta) = \ell(r_\alpha) - 1 + \ell(r_\beta) = \ell(r_\alpha r_\beta) - 1$ . Par admissibilité, on a donc  $\alpha \subseteq I^-(r_\alpha r_\beta)$ , d'où  $I = \alpha \cup \beta \subseteq I^-(r_\alpha r_\beta)$ . Ceci implique que  $I$  est sphérique et que  $r_I = r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha$ . On a alors le résultat grâce au lemme 9.1.1.  $\square$

### Trace d'une partition admissible sur les composantes connexes.

Nous décrivons ici le comportement d'une 2-partition admissible de  $\Gamma$  qui rencontre toutes les composantes connexes de  $\Gamma$ .

Supposons que  $\Gamma$  n'est pas connexe et fixons une décomposition  $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Pour  $k = 1, 2$ , notons  $I_k$  l'ensemble des sommets de  $\Gamma_k$  et posons  $W_k = W_{I_k} \approx W_{\Gamma_k}$  et  $B_k^+ = B_{I_k}^+ \approx B_{\Gamma_k}^+$ . On a  $I = I_1 \sqcup I_2$ ,  $W = W_1 \times W_2$  et  $B^+ = B_1^+ \times B_2^+$ .

On vérifie que la longueur standard dans  $W_k \approx W_{\Gamma_k}$  (resp.  $B_k^+ \approx B_{\Gamma_k}^+$ ) est induite par la longueur standard dans  $W$  (resp.  $B^+$ ). Cette propriété et le lemme 9.1.1 montrent que l'on a  $B_{red}^+ = (B_1^+)_{red} \times (B_2^+)_{red}$ . De plus, lorsque  $\Gamma$  est sphérique, alors  $r_I = r_{I_1} r_{I_2}$  et  $\Delta_I = \Delta_{I_1} \Delta_{I_2}$ .

**Lemme 9.1.4.** *Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\tilde{I}_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$  une 2-partition de  $I_k$ . Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  la 2-partition de  $I$  définie par  $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$  et  $\beta = \beta_1 \sqcup \beta_2$ . Alors  $\tilde{I}$  est une partition sphérique de  $\Gamma$  si et seulement si, pour  $k = 1, 2$ ,  $\tilde{I}_k$  est une partition sphérique de  $\Gamma_k$ . Lorsque c'est le cas, on a  $r_\alpha = r_{\alpha_1} r_{\alpha_2}$  et  $r_\beta = r_{\beta_1} r_{\beta_2}$ . De plus, si l'on pose  $\tilde{m} = |r_\alpha r_\beta|$ , et, pour  $k = 1, 2$ ,  $\tilde{m}_k = |r_{\alpha_k} r_{\beta_k}|$ , alors  $\tilde{m} = \text{ppcm}\{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2\}$  (avec la convention que, si  $\tilde{m}_1 = \infty$  ou  $\tilde{m}_2 = \infty$ , alors  $\text{ppcm}\{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2\} = \infty$ ).*

*Démonstration.* Résulte des égalités  $W = W_1 \times W_2$ ,  $W_\alpha = W_{\alpha_1} \times W_{\alpha_2}$  et  $W_\beta = W_{\beta_1} \times W_{\beta_2}$ .  $\square$

Les deux résultats suivants généralisent les lemmes [Müh94, 2.5.3, 2.5.4] (en prenant en compte le cas des coefficients infinis).

**Proposition 9.1.5.** *Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\tilde{I}_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$  une 2-partition sphérique de  $\Gamma_k$  et posons  $\tilde{m}_k = |r_{\alpha_k} r_{\beta_k}|$ . Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  la partition sphérique de  $\Gamma$  définie par  $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$  et  $\beta = \beta_1 \sqcup \beta_2$ . On a  $r_\alpha = r_{\alpha_1} r_{\alpha_2}$  et  $r_\beta = r_{\beta_1} r_{\beta_2}$ . Posons  $\tilde{m} = |r_\alpha r_\beta| = \text{ppcm}\{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2\}$ .*

*Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ ,
2. pour  $k = 1, 2$ ,  $\tilde{I}_k$  est une partition admissible de  $\Gamma_k$ , et  $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$ ,

*et lorsque ces conditions sont réalisées, on a  $\tilde{m} = \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$ .*

*Démonstration.* On a  $\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_1} \Delta_{\alpha_2}$ ,  $\Delta_\beta = \Delta_{\beta_1} \Delta_{\beta_2}$ . On en déduit que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) = \Pi_m(\Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\beta_1}) \Pi_m(\Delta_{\alpha_2}, \Delta_{\beta_2})$ .

Supposons 2 et montrons 1. Notons que l'on a  $\tilde{m} = \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$ . Pour  $k = 1, 2$ , la proposition 8.2.2 nous montre que, pour  $m < \tilde{m}_k + 1$ ,  $\Pi_m(\Delta_{\alpha_k}, \Delta_{\beta_k})$  et  $\Pi_m(\Delta_{\beta_k}, \Delta_{\alpha_k})$  appartiennent à  $(B_k^+)_{red}$ . On en déduit que, pour  $m < \tilde{m} + 1$ ,  $\Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$  et  $\Pi_m(\Delta_\beta, \Delta_\alpha)$  appartiennent à  $B_{red}^+$ , d'où le résultat par la proposition 8.2.2.

Supposons 1 et montrons 2. Si  $\tilde{m} \neq \infty$ , alors  $\tilde{m}_k \neq \infty$ , pour  $k = 1, 2$ , et  $\Gamma$  est sphérique (cf. corollaire 7.2.7), donc  $\Gamma_k$  est sphérique, pour  $k = 1, 2$ . La proposition 8.2.3 montre que l'on a alors  $\Delta_I = \Pi_{\tilde{m}}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) = \Pi_{\tilde{m}}(\Delta_\beta, \Delta_\alpha)$ . Comme on a les décompositions  $\Delta_I = \Delta_{I_1} \Delta_{I_2}$ ,  $\Pi_{\tilde{m}}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) = \Pi_{\tilde{m}}(\Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\beta_1}) \Pi_{\tilde{m}}(\Delta_{\alpha_2}, \Delta_{\beta_2})$  et de même en échangeant les rôles de  $a$  et de  $b$ , et les rôles de  $a_i$  et de  $\beta_i$ , l'unicité de la décomposition dans  $B_1^+ \times B_2^+$  donne  $\Delta_{I_k} = \Pi_{\tilde{m}}(\Delta_{\alpha_k}, \Delta_{\beta_k}) = \Pi_{\tilde{m}}(\Delta_{\beta_k}, \Delta_{\alpha_k})$ , pour  $k = 1, 2$ . On a alors le résultat grâce au lemme 8.3.4 et à la proposition 8.2.3. Supposons  $\tilde{m} = \infty$ . La proposition 8.2.2 nous montre que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Pi_m(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) = \Pi_m(\Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\beta_1}) \Pi_m(\Delta_{\alpha_2}, \Delta_{\beta_2})$  appartient à  $B_{red}^+$  (et de même en permutant  $\alpha$  et  $\beta$ ). Donc, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Pi_m(\Delta_{\alpha_k}, \Delta_{\beta_k})$  et  $\Pi_m(\Delta_{\beta_k}, \Delta_{\alpha_k})$  appartiennent à  $(B_k^+)_{red}$ , pour  $k = 1, 2$ , d'où le résultat grâce au lemme 8.3.4 et à la proposition 8.2.2.  $\square$

**Corollaire 9.1.6.** *Supposons que  $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$ . Pour  $1 \leq k \leq n$ , soient  $I_k$  l'ensemble (supposé non vide) des sommets de  $\Gamma_k$ ,  $\tilde{I}_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$  une 2-partition sphérique de  $\Gamma_k$ , et  $\tilde{m}_k = |r_{\alpha_k} r_{\beta_k}|$ . Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  la 2-partition sphérique de  $\Gamma$  définie par  $\alpha = \alpha_1 \sqcup \cdots \sqcup \alpha_n$  et  $\beta = \beta_1 \sqcup \cdots \sqcup \beta_n$ . On a  $r_\alpha = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_n}$  et  $r_\beta = r_{\beta_1} \cdots r_{\beta_n}$ . Posons  $\tilde{m} = |r_\alpha r_\beta| = \text{ppcm}\{\tilde{m}_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ .*

*Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\tilde{I}$  est une partition admissible de  $\Gamma$ ,
2. pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $\tilde{I}_k$  est une partition admissible de  $\Gamma_k$ , et  $\tilde{m}_1 = \cdots = \tilde{m}_n$ ,

*et lorsque ces conditions sont réalisées, on a  $\tilde{m} = \tilde{m}_1 = \cdots = \tilde{m}_n$ .*

*Démonstration.* Clair par récurrence sur  $n$ , à partir du lemme 9.1.4 et de la proposition 9.1.5.  $\square$

## 9.2 Classification des partitions admissibles à deux éléments des graphes de Coxeter sphériques.

Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter sphérique. Soit  $\tilde{I} = \{\alpha, \beta\}$  une 2-partition admissible de  $\Gamma$ . Notons  $I_1, \dots, I_n$  les composantes connexes de  $\Gamma$ .

- Si l'une des composantes  $I_k$  de  $\Gamma$  est incluse dans  $\alpha$  ou dans  $\beta$ , alors la proposition 9.1.3 nous fournit  $\Gamma = \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$ , donc  $\tilde{m}_{\alpha, \beta} = 2$  (et toute composante connexe de  $\Gamma$  est alors incluse dans  $\alpha$  ou dans  $\beta$ ).
- Supposons que toute composante connexe  $I_k$  de  $\Gamma$  rencontre  $\alpha$  et  $\beta$ . Posons  $\alpha_k = \alpha \cap I_k$  et  $\beta_k = \beta \cap I_k$ . Alors le corollaire 9.1.6 montre que  $\{\alpha_k, \beta_k\}$  est une 2-partition admissible de  $\Gamma_{I_k}$ . De plus, si l'on pose  $\tilde{m}_k = |r_{\alpha_k} r_{\beta_k}|$ , alors  $\tilde{m}_{\alpha, \beta} = \tilde{m}_1 = \dots = \tilde{m}_n$ .

On est donc ramené à décrire les 2-partitions admissibles des graphes de Coxeter sphériques et irréductibles, et leurs coefficients  $\tilde{m}_{\alpha, \beta}$  correspondants.

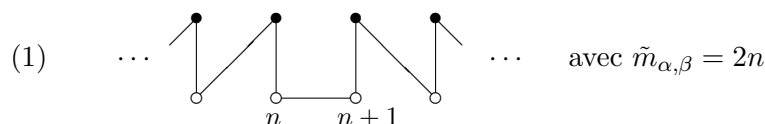
Un premier résultat dans ce sens est le lemme 9.2.1 ci-dessous. Comme un graphe de Coxeter sphérique et irréductible  $\Gamma$  est un arbre fini, on peut parler de la partition bipartite de  $\Gamma$  (si  $\Gamma \neq A_1$ ).

**Lemme 9.2.1** ([Müh94, 2.5.13]). *La partition bipartite  $\{\alpha, \beta\}$  d'un graphe de Coxeter sphérique et irréductible (distinct de  $A_1$ ) est admissible, et le coefficient  $\tilde{m}_{\alpha, \beta}$  est le nombre de Coxeter du graphe.*

*Démonstration.* Cela résulte de [BS72, Lemme 5.8] qui fournit la caractérisation de la proposition 8.2.3.  $\square$

### 2-partitions admissibles des graphes $A_n$ ( $n \geq 2$ ), $B_n$ ( $n \geq 2$ ) et $D_n$ ( $n \geq 4$ ).

Les 2-partitions admissibles des types  $A_n$  ( $n \geq 2$ ),  $B_n$  ( $n \geq 2$ ) et  $D_n$  ( $n \geq 4$ ) ont été classifiées par B. Mühlherr dans [Müh94, section 2.5]. Dans ces cas-là, les seules 2-partitions admissibles, outre les partitions bipartites, sont, pour chaque  $n \geq 2$ , la 2-partition de  $A_{2n}$  suivante (où les sommets sont numérotés dans l'ordre naturel) :



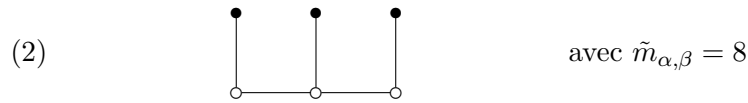
Le fait que cette 2-partition soit admissible résulte du résultat [Müh94, 2.5.6] (rappelé dans la proposition 8.4.6 ci-dessus), appliqué à la partition admissible issue de la symétrie de  $A_{2n}$ , partition qui est de type  $B_n$  (cf. exemples 7.3.2), et à la partition bipartite de  $B_n$ .

Pour montrer que ce sont les seules possibilités, B. Mühlherr examine, dans un premier temps, le cas du type  $A_n$ . Il établit le résultat pour ce type-là par des calculs explicites dans le groupe symétrique. Il en déduit le résultat pour le type  $B_n$  en utilisant le fait que, d'après [Müh94, 2.5.6], une 2-partition admissible de  $B_n$  "se relève" en une 2-partition admissible de  $A_{2n-1}$  (cf. exemples 7.3.2). Enfin, la symétrie d'ordre 2 de  $D_n$  induit une partition admissible

de type  $B_{n-1}$  (cf. exemple 7.3.2). Grâce au résultat [Müh94, 2.5.15] (rappelé dans la proposition 9.1.3 ci-dessus), on voit que, pour toute 2-partition admissible de  $D_n$ , les sommets  $n-1$  et  $n$  (pour la numérotation de [Bou68, Planche IV]) appartiennent à la même partie de la partition. On en déduit, grâce à [Müh94, 2.5.6], qu'une 2-partition admissible de  $D_n$  induit une 2-partition admissible de  $B_{n-1}$ , et on a alors le résultat.

### 2-partitions admissibles des graphes $E_6$ , $E_7$ et $E_8$ .

Dans [Müh94, 2.5.14], B. Mühlherr montre que la 2-partition de  $E_6$  suivante est admissible : cela résulte de [Müh94, 2.5.6] (cf. proposition 8.4.6), appliqué à la partition admissible issue de la symétrie de  $E_6$ , qui est de type  $F_4$ , et à la partition admissible issue de la symétrie de  $F_4$ , qui est de type  $I_2(8)$  (cf. exemples 7.3.2).



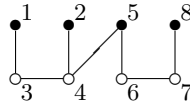
**Proposition 9.2.2.** *Les seules 2-partitions admissibles des graphes  $E_n$  ( $n = 6, 7, 8$ ), sont les partitions bipartites et la 2-partition (2) ci-dessus.*

*Démonstration.* Les 2-partitions admissibles d'un graphe  $\Gamma$  de type  $E_n$ ,  $n = 6, 7, 8$ , sont à rechercher dans l'ensemble des 2-partitions qui ne satisfont pas à la condition de [Müh94, 2.5.15] (cf. proposition 9.1.3 ci-dessus). Outre les 2-partitions bipartites et la 2-partition (2), il reste une possibilité pour le graphe  $E_6$ , cinq pour le graphe  $E_7$  et neuf pour le graphe  $E_8$ .

Pour  $m, n, p, \in \mathbb{N}$ , notons  $\Sigma_m(n, p)$  la somme  $n + p + n + p \cdots$  à  $m$  termes. Vu le lemme 7.2.3, pour chaque 2-partition admissible  $\{\alpha, \beta\}$  de  $\Gamma$ , il existe  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  tel que l'on ait  $\Sigma_m(\ell(r_\alpha), \ell(r_\beta)) = \Sigma_m(\ell(r_\beta), \ell(r_\alpha)) = \ell(r_I)$ . Or d'après [Bou68, Planches V à VII], on a, si  $\Gamma = E_6$  (resp.  $E_7$ , resp.  $E_8$ ),  $\ell(r_I) = 36$  (resp. 63, resp. 120). Ceci permet d'éliminer la 2-partition restante de  $E_6$ , et de ne conserver qu'une possibilité pour  $E_7$  (avec  $m = 14$ ) et quatre pour  $E_8$  (avec  $m = 20$  pour l'une d'entre elles et  $m = 24$  pour les trois autres).

On vérifie alors, au besoin à l'aide d'un logiciel de calcul (comme GAP ou Maple), que l'égalité  $\Pi_m(r_\alpha, r_\beta) = r_I$  n'est réalisée dans aucune des cinq possibilités restantes. Celles-ci ne sont donc pas admissibles (cf. lemme 7.2.3).  $\square$

**Exemple 9.2.3.** Détaillons le principe de la démonstration de la proposition 9.2.2 sur la 2-partition de  $E_8$  suivante :



Il s'agit de l'une des neuf candidates citées au début de la démonstration de 9.2.2, puisque tout sommet noté  $\bullet$  est lié à un sommet noté  $\circ$ , et inversement. Posons  $\alpha = \{1, 2, 5, 8\}$  et  $\beta = \{3, 4, 6, 7\}$ ; on a  $r_\alpha = s_1 s_2 s_5 s_8$  et  $r_\beta = (s_3 s_4 s_3)(s_6 s_7 s_6)$ , avec  $\ell(r_\alpha) = 4$  et  $\ell(r_\beta) = 6$ , donc cette partition est l'une des quatre dernières candidates, avec  $m = 24$  (puisque  $120 = \Sigma_{24}(4, 6) = \Sigma_{24}(6, 4)$ ). Pour montrer que cette 2-partition n'est pas admissible, il reste à établir, par exemple, que  $\Pi_{24}(r_\beta, r_\alpha) \neq r_I$ . Pour cela, il suffit de vérifier que la représentation  $\Pi_{24}((3, 4, 3, 6, 7, 6), (1, 2, 5, 8))$  de  $\Pi_{24}(r_\beta, r_\alpha)$ , qui est de longueur 120, n'est pas réduite. On montre en fait ci-dessous que le mot  $\Pi_5((3, 4, 3, 6, 7, 6), (1, 2, 5, 8))$  est déjà non réduit, en vérifiant que le mot  $\Pi_4((3, 4, 3, 6, 7, 6), (1, 2, 5, 8))$  est équivalent, par relations de tresses, à un mot finissant par 3 (dans ce qui suit, le passage d'une ligne à l'autre s'effectue

en permutant deux séquences soulignées, par relations de tresses de longueur 2, ou en opérant une relation de tresses de longueur 3 sur la séquence repérée par une accolade) :

$$\begin{aligned}
\Pi_4((3, 4, 3, 6, 7, 6), (1, 2, 5, 8)) &= (3, 4, \underline{3}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{6}, 1, 2, 5, 8, 3, 4, 3, 6, 7, 6, 1, 2, 5, 8) \\
&\approx (3, 4, 6, 7, 6, \underline{3}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{5}, 8, 3, 4, 3, 6, 7, 6, 1, 2, 5, 8) \\
&\approx (3, 4, 6, 7, 6, 2, 5, 8, \underbrace{3, 1, 3}_4, 4, 3, 6, 7, 6, 1, 2, 5, 8) \\
&\approx (3, 4, 6, 7, 6, 2, 5, 8, 1, \underline{3}, \underline{1}, \underline{4}, 3, 6, 7, 6, 1, 2, 5, 8) \\
&\approx (3, 4, 6, 7, 6, 2, 5, 8, 1, 3, 4, \underline{1}, \underline{3}, \underline{6}, 7, 6, 1, 2, 5, 8) \\
&\approx (3, 4, 6, 7, 6, 2, 5, 8, 1, 3, 4, 6, 7, 6, \underbrace{1, 3, 1}_4, 2, 5, 8) \\
&\approx (3, 4, 6, 7, 6, 2, 5, 8, 1, 3, 4, 6, 7, 6, 3, 1, \underline{3}, 2, 5, 8) \\
&\approx (3, 4, 6, 7, 6, 2, 5, 8, 1, 3, 4, 6, 7, 6, 3, 1, 2, 5, 8, 3).
\end{aligned}$$

### 2-partitions admissibles des graphes $F_4$ , $H_3$ , $H_4$ (et $I_2(m)$ , $m \geq 3$ ).

La symétrie de  $F_4$  induit la 2-partition admissible suivante (cf. exemple 7.3.2) :

$$(3) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \circ \text{---} 4 \text{---} \circ \end{array} \quad \text{avec } \tilde{m}_{\alpha, \beta} = 8$$

**Proposition 9.2.4.** *Les seules 2-partitions admissibles des graphes  $F_4$ ,  $H_3$ ,  $H_4$  et  $I_2(m)$ ,  $m \geq 3$ , sont les partitions bipartites et la 2-partition (3) ci-dessus.*

*Démonstration.* Le résultat est trivial pour les types diédraux.

La condition de la proposition 9.1.3 permet de vérifier rapidement qu'il n'y a pas d'autre 2-partition admissible que les partitions bipartites et la 2-partition (3), sauf éventuellement la 2-partition de  $H_4$  suivante :

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \circ \text{---} 5 \text{---} \circ \end{array}$$

On montre que cette dernière 2-partition n'est pas admissible en suivant la même démarche que dans la preuve de la proposition 9.2.2, ou en remarquant, grâce à la proposition 8.4.6 ci-dessus et aux exemples 7.3.3 ou 8.3.9, que cette 2-partition "se remonte" en une 2-partition de  $E_8$  — en fait la 2-partition étudiée dans l'exemple 9.2.3 — dont on a prouvé la non admissibilité en proposition 9.2.2.  $\square$

### 9.3 Pliages.

Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$ ,  $\Gamma' = (m'_{i',j'})_{i',j' \in I'}$  deux matrices de Coxeter. Posons  $B^+ = B_\Gamma^+$  et  $B'^+ = B_{\Gamma'}^+$ .

Dans [Cri99, 4.1], J. Crisp définit la notion de "pliage" ("folding" en anglais) de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$ , dans le cas où  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  n'ont pas de coefficient infini : il s'agit d'une application surjective  $f : I' \rightarrow I$ , qui satisfait à une (longue) liste de propriétés, et qui induit un LCM-homomorphisme  $\phi^f : B^+ \rightarrow B'^+$  (cf. [Cri99, 4.2]). Si l'on note  $T^f : I \rightarrow \mathcal{P}(I')$  la LCM-donnée telle que  $\phi^f = \varphi_{T^f}$ , alors  $T^f$  est donnée par  $T^f(i) = f^{-1}(\{i\})$ , pour  $i \in I$ , et satisfait à la condition

$\bigcup_{i \in I} T^f(i) = I'$ . À la fin de la section 4 de [Cri99], J. Crisp pose le problème de savoir si tout LCM-homomorphisme  $\varphi_T : B^+ \rightarrow B'^+$  tel que  $\bigcup_{i \in I} T(i) = I'$  est obtenu à partir d'un pliage de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$ .

Les résultats des sections 8.3 et 9.2 montrent que la réponse à ce problème est non, avec la définition des pliages de [Cri99, 4.1]. Ils suggèrent en outre, pour obtenir une réponse positive, de généraliser (et simplifier) la définition des pliages [Cri99, 4.1], comme en définition 9.3.1 ci-dessous, et de compléter la liste de [Cri99, 4.1], comme en proposition 9.3.3 ci-dessous.

**Définition 9.3.1** (pliages). Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  et  $\Gamma' = (m'_{i',j'})_{i',j' \in I'}$  deux matrices de Coxeter. Nous appelons *pliage de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$*  toute application  $f : I' \rightarrow I$  telle que l'ensemble  $\{f^{-1}(\{i\}) \mid i \in I\}$  soit une partition admissible de  $\Gamma'$ , de type  $\Gamma$ .

Notons que, si  $f$  est un pliage de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$  et si  $\Gamma$  n'a pas de coefficient infini, alors  $\Gamma'$  n'a pas de coefficient infini (cf. corollaire 7.2.7). La réciproque est fautive (cf. exemple 8.3.7).

**Notation 9.3.2.** Si  $\Gamma$  est un graphe de Coxeter, et si  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , on note  $n\Gamma$  le graphe constitué de la réunion disjointe de  $n$  copies de  $\Gamma$ .

**Proposition 9.3.3.** Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  et  $\Gamma' = (m'_{i',j'})_{i',j' \in I'}$  deux matrices de Coxeter. On suppose  $\Gamma$  sans coefficient infini. Soit  $f : I' \rightarrow I$  une application. Alors  $f$  est un pliage de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$  si et seulement si  $f$  est surjective et satisfait aux conditions suivantes, pour tous  $i, j \in I$  :

1. la partie  $f^{-1}(\{i\})$  de  $I'$  est sphérique relativement à  $\Gamma'$ ,
2. si  $m_{i,j} = 2$ , il n'y a pas d'arête entre un sommet de  $f^{-1}(\{i\})$  et un sommet de  $f^{-1}(\{j\})$ ,
3. si  $m = m_{i,j} \geq 3$ , on a l'une des situations suivantes :
  - (A)  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})} = nI_2(m)$ ,  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , et chaque composante connexe (de type  $I_2(m)$ ) a l'un de ses sommets dans  $f^{-1}(\{i\})$  et l'autre dans  $f^{-1}(\{j\})$ ,
  - (B)  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$  est sphérique et irréductible, de nombre de Coxeter égal à  $m$ , et la partition  $\{f^{-1}(\{i\}), f^{-1}(\{j\})\}$  de  $f^{-1}(\{i,j\})$  est la partition bipartite de  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$ ,
  - (C1)  $m = 2n$ ,  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})} = A_{2n}$ , et la 2-partition  $\{f^{-1}(\{i\}), f^{-1}(\{j\})\}$  de  $f^{-1}(\{i,j\})$  est la 2-partition admissible (1) de 9.2, pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,
  - (C2)  $m = 8$ ,  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})} = E_6$ , et la 2-partition  $\{f^{-1}(\{i\}), f^{-1}(\{j\})\}$  de  $f^{-1}(\{i,j\})$  est la 2-partition admissible (2) de 9.2,
  - (C3)  $m = 8$ ,  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})} = F_4$ , et la 2-partition  $\{f^{-1}(\{i\}), f^{-1}(\{j\})\}$  de  $f^{-1}(\{i,j\})$  est la 2-partition admissible (3) de 9.2,
  - (D) l'application  $f^{-1}(\{i,j\}) \rightarrow \{i,j\}$  induite par  $f$  est la composée  $h \circ g$ , où  $h$  est un pliage de type (A), de  $nI_2(m)$  sur  $\Gamma_{\{i,j\}} = I_2(m)$ , et  $g$  est un pliage de  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$  sur  $nI_2(m)$  qui ne fait intervenir que les situations (A) à (C3).

*Démonstration.* Soit  $f$  un pliage de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$ . Alors  $f$  est surjective et la condition 1 est satisfaite (les  $f^{-1}(\{i\})$  sont non vides et sphériques relativement à  $\Gamma'$ ). De plus, pour  $i, j \in I$  avec  $i \neq j$ , la partition  $\{f^{-1}(\{i\}), f^{-1}(\{j\})\}$  de  $f^{-1}(\{i,j\})$  est une partition admissible de  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$  (cf. lemme 7.2.1), et comme  $m_{i,j} \neq \infty$ , le graphe  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$  est sphérique (cf. corollaire 7.2.7).

Vu la proposition 9.1.2, si  $m_{i,j} = 2$ , il n'y a pas d'arête entre un sommet de  $f^{-1}(\{i\})$  et un sommet de  $f^{-1}(\{j\})$ , donc la condition 2 est satisfaite. Supposons donc  $m = m_{i,j} \geq 3$ .

Si  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$  est irréductible, alors, vu les résultats de la section 9.2, on est dans l'une des situations (B) à (C3). Sinon, soient  $I'_1, \dots, I'_n$  les composantes connexes de  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$ . Vu les propositions 9.1.2 et 9.1.3, tous les  $I'_k$  rencontrent  $f^{-1}(\{i\})$  et  $f^{-1}(\{j\})$ , induisant ainsi une 2-partition admissible  $\{\alpha_k, \beta_k\}$  de  $\Gamma'_{I'_k}$ ; de plus, si l'on pose  $\tilde{m}_k = |r_{\alpha_k} r_{\beta_k}|$ , alors  $m = \tilde{m}_1 = \dots = \tilde{m}_n$  (cf. corollaire 9.1.6). Si tous les  $\Gamma'_{I'_k}$  sont de type  $I_2(m)$ , alors on est dans la situation (A). Sinon, on est dans la situation (D), où  $g$  est le pliage de  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$  sur  $nI_2(m)$  qui envoie chaque composante connexe  $\Gamma'_{I'_k}$  sur l'une des copies de  $I_2(m)$ , et où  $h$  est le pliage de type (A) de  $nI_2(m)$  sur  $\Gamma_{\{i,j\}} = I_2(m)$ .

Réciproquement, soit  $f : I' \rightarrow I$  surjective et satisfaisant à 1, 2 et 3. Les ensembles  $f^{-1}(\{i\})$  forment une partition sphérique de  $I'$ , et les résultats des sections 9.1 et 9.2 montrent que, pour tous  $i, j \in I$  avec  $i \neq j$ , la partition  $\{f^{-1}(\{i\}), f^{-1}(\{j\})\}$  de  $f^{-1}(\{i, j\})$  est une partition admissible de  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i,j\})}$ , avec pour coefficient  $m_{i,j}$  (on utilise le corollaire 9.1.6 pour les situations (A) et (D), ou la proposition 8.4.6 pour la situation (D)). La partition  $\{f^{-1}(i) \mid i \in I\}$  de  $I'$  est donc une partition admissible de  $I'$  (cf. théorème 7.2.6), et a pour type  $\Gamma$ .  $\square$

**Remarque 9.3.4.** Revenons sur cette caractérisation des pliages entre matrices de Coxeter sans coefficient infini.

- Par rapport à [Cri99, 4.1], on a ajouté les situations (C2), (C3) et généralisé la situation (C) de [Cri99, 4.1] en la situation (C1) (la situation (C) est le cas  $n = 2$  de (C1)). Notons que la définition des pliages [God06, 1.8] comporte elle aussi la situation (C3) (notée (C')).
  - Le seul graphe de Coxeter sphérique et irréductible de nombre de Coxeter égal à 3 est le graphe  $A_2 = I_2(3)$ . La situation (B) avec  $m_{i,j} = 3$  se réduit donc au cas trivial (i.e. avec  $n = 1$ ) de la situation (A).
  - La condition 1 est superflue pour tout sommet non isolé  $i$  de  $\Gamma$  (i.e. tel qu'il existe  $j \in I$  avec  $m_{i,j} \geq 3$ ), puisqu'alors un examen des situations (A) à (D) montre que les composantes connexes de  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i\})}$  sont en nombre fini et de type  $A_1, A_2, A_3$  ou  $B_2$ . On peut donc remplacer la condition 1 par la condition plus faible suivante :
- 1'. si  $i$  est isolé dans  $\Gamma$ , alors  $\Gamma'_{f^{-1}(\{i\})}$  est sphérique.

Ces conditions n'apparaissent pas dans les définitions [Cri99, 4.1] et [God06, 1.8].

Troisième partie

Sur la représentation de  
Krammer-Paris.





# Chapitre 10

## Préliminaires.

Ce chapitre est consacré à l'introduction des notions utiles pour définir et étudier la représentation linéaire des monoïdes et des groupes d'Artin-Tits construite dans [Par02].

Dans la section 10.1, nous rappelons la définition des systèmes de racines *standard* associé à un système de Coxeter, au sens de [Deo82]. Dans les sections 10.2 et 10.3, nous introduisons les notions relatives aux relations binaires sur un ensemble, et la notion de *morphisme de Krammer*, développées par J.-Y. Hée [Hée04] pour analyser les preuves de la fidélité des représentations linéaires construites dans [Kra02, CW02, Dig03, Par02].

### 10.1 Systèmes de racines standard.

Soient  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter et  $(W, S) = (W_\Gamma, S_\Gamma)$  le système de Coxeter de type  $\Gamma$ .

On note  $\Phi = \Phi_\Gamma$  le *système de racines standard* associé à  $\Gamma$ , c'est-à-dire le sous-ensemble  $\Phi = \{w(\alpha_i) \mid w \in W, i \in I\}$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}\alpha_i$ , où l'action de  $W$  sur  $V$  est donnée, pour  $i, j \in I$ , par  $s_i(\alpha_j) = \alpha_j + 2 \cos(\frac{\pi}{m_{i,j}})\alpha_i$ . On dit que les racines  $\alpha_i, i \in I$ , sont les racines *simples* de  $\Phi$ , et que la dimension de  $V$  (le cardinal de  $I$ ) est le *rang* de  $\Phi$ .

On note  $\Phi^+$  (resp.  $\Phi^-$ ) l'ensemble des racines à coordonnées toutes positives ou nulles (resp. toutes négatives ou nulles) dans la base  $(\alpha_i)_{i \in I}$ . On a  $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ .

On dispose d'une forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $V$ , invariante par  $W$ , donnée, pour  $i, j \in I$ , par  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -2 \cos(\frac{\pi}{m_{i,j}})$ ; pour  $\alpha = w(\alpha_i) \in \Phi$ , on a  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$  et l'action de l'élément  $s_\alpha = ws_iw^{-1} \in W$  (qui ne dépend que de  $\alpha$ ) sur  $V$  est alors donnée par  $s_\alpha(x) = x - \langle \alpha, x \rangle \alpha$ .

Le groupe  $Aut(\Gamma)$  agit sur  $V$  par permutation de la base  $(\alpha_i)_{i \in I}$ . On vérifie que cette action stabilise  $\Phi, \Phi^+$  et  $\Phi^-$ , tout  $\sigma \in Aut(\Gamma)$  agissant sur  $\Phi$  via  $w(\alpha_i) \mapsto \sigma(w)(\alpha_{\sigma(i)})$ .

**Remarque 10.1.1.** Pour ne pas confondre ces systèmes de racines avec ceux définis dans [Bou68, Ch. VI], nous appelons ces derniers les systèmes de racines *cristallographiques (finis)*.

Si  $\Gamma$  est de type  $A_n, n \geq 1$  (resp.  $D_n, n \geq 4$ , resp.  $E_n, n = 6, 7, 8$ ), alors le système de racines standard  $\Phi_\Gamma$  coïncide avec le système de racines cristallographique (fini) de graphe de Dynkin  $A_n, n \geq 1$  (resp.  $D_n, n \geq 4$ , resp.  $E_n, n = 6, 7, 8$ ).

## 10.2 Relations binaires.

On rappelle des constructions de [Hée04].

Soit  $\Omega$  un ensemble.

Notons  $\text{Bin}(\Omega)$  le monoïde des relations binaires sur  $\Omega$ , où, pour  $R, R' \in \text{Bin}(\Omega)$ , le produit  $RR'$  est donné par  $\alpha RR'\beta \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Omega, \alpha R\gamma R'\beta$ .

Notons  $\text{Mat}_\Omega(\mathbb{R}^+)$  le monoïde des matrices carrées à coefficients réels positifs ou nuls sur  $\Omega$  qui n'ont qu'un nombre fini de coefficients non nuls sur chaque colonne, muni de la multiplication des matrices.

On dispose du morphisme de monoïdes suivant :

$$\tau_1 : \text{Mat}_\Omega(\mathbb{R}^+) \rightarrow \text{Bin}(\Omega), M \mapsto R_M,$$

où, pour  $M = (M_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \Omega} \in \text{Mat}_\Omega(\mathbb{R}^+)$ , on pose  $R_M = \{(\alpha, \beta) \in \Omega^2 \mid M_{\alpha,\beta} > 0\}$ .

Notons  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ , et  $\mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}$  le monoïde des applications de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans lui-même, muni de la composition des applications. On dispose du morphisme de monoïdes suivant :

$$\tau_2 : \text{Bin}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}, R \mapsto f_R,$$

où, pour  $R \in \text{Bin}(\Omega)$  et  $X \subseteq \Omega$ , on pose  $f_R(X) = \{\alpha \in \Omega \mid \exists \beta \in X, \alpha R\beta\}$ . Le morphisme  $\tau_2$  est injectif.

**Propriétés 10.2.1.** Soient  $R \in \text{Bin}(\Omega)$  et  $f_R = \tau_2(R)$ .

1. Si  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille de parties de  $\Omega$ , alors  $f_R(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_R(X_\lambda)$ .
2. Soit  $V = \bigoplus_{\alpha \in \Omega} \mathbb{R}e_\alpha$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  indexée par  $\Omega$ . Soient  $X$  une partie finie de  $\Omega$  et  $v_X = \sum_{\alpha \in X} \lambda_\alpha e_\alpha$  un élément de  $V$  tel que, pour tout  $\alpha \in X$ ,  $\lambda_\alpha > 0$ . Alors, si  $M \in \text{Mat}_\Omega(\mathbb{R}^+)$  et si  $R = R_M = \tau_1(M)$ , l'ensemble  $(\tau_2 \circ \tau_1(M))(X) = f_{R_M}(X)$  est l'ensemble des indices des éléments de la base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  qui apparaissent dans la décomposition (suivant cette base) de l'élément  $M(v_X)$  de  $V$ .

Notons  $c : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $X \mapsto {}^cX = \Omega \setminus X$ , le passage au complémentaire dans  $\mathcal{P}(\Omega)$ . On dispose de l'automorphisme (involutif) du monoïde  $\mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}$  suivant :

$$\tau_3 : \mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}, f \mapsto \bar{f} = c \circ f \circ c.$$

Si  $f \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathcal{P}(\Omega)}$  et  $X \subseteq \Omega$ , on a  $\bar{f}(X) = {}^c(f({}^cX))$ . En particulier, si  $R \in \text{Bin}(\Omega)$  et  $X \subseteq \Omega$ , on vérifie que l'on a  $\bar{f}_R(X) = \{\alpha \in \Omega \mid \text{si } \beta \in \Omega \text{ et } \alpha R\beta, \text{ alors } \beta \in X\}$ .

## 10.3 Morphismes de Krammer.

On note  $L : B^+ \rightarrow B_{red}^+$  l'application qui envoie 1 sur 1 et qui associe à  $b \neq 1$  le premier terme de la forme normale à gauche de  $b$ . Autrement dit,  $L(b)$  est l'unique plus grand diviseur à gauche simple de  $b$ .

**Définition 10.3.1** ([Hée04]). On dit qu'un morphisme de monoïdes  $\varphi : B^+ \rightarrow M$  est un *morphisme de Krammer* si, pour tous  $a, b \in B^+$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow L(a) = L(b)$ .

Si  $E$  est un ensemble et  $\varphi : B^+ \rightarrow E^E$ ,  $b \mapsto \varphi_b$ , on dit qu'un élément  $e \in E$  est un *élément de Krammer pour  $\varphi$*  si, pour tous  $a, b \in B^+$ ,  $\varphi_a(e) = \varphi_b(e) \Rightarrow L(a) = L(b)$  ( $\varphi$  est alors un morphisme de Krammer).

Voici le résultat sur lequel reposent les démonstrations de fidélité des représentations de [Kra02, CW02, Dig03, Par02] :

**Lemme 10.3.2** ([Hée04]). *Un morphisme de Krammer à valeurs dans un monoïde simplifiable à gauche est injectif.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : B^+ \rightarrow M$  un morphisme de Krammer, avec  $M$  simplifiable à gauche. Soient  $a, b \in B^+$  tels que  $\varphi(a) = \varphi(b)$  (donc  $L(a) = L(b)$ ). Montrons par récurrence sur  $\ell(a) + \ell(b)$  que  $a = b$ . Si  $\ell(a) + \ell(b) = 0$ , alors  $a = b = 1$ . Supposons donc  $\ell(a) + \ell(b) \geq 1$ , avec, par exemple,  $a \neq 1$ . Alors  $L(a) = L(b) \neq 1$  et il existe  $a', b' \in B^+$  tels que  $a = L(a)a'$ ,  $b = L(b)b'$ , avec  $\ell(a') + \ell(b') < \ell(a) + \ell(b)$ . On a alors  $\varphi(a) = \varphi(L(a))\varphi(a') = \varphi(b) = \varphi(L(b))\varphi(b')$  dans  $M$ , d'où  $\varphi(a') = \varphi(b')$  par simplifiabilité à gauche dans  $M$ , et  $a' = b'$  par hypothèse de récurrence. On a donc le résultat.  $\square$

Soient  $\varphi : B^+ \rightarrow M$  et  $\tau : M \rightarrow N$  deux morphismes de monoïdes. Il est clair que, si  $\tau \circ \varphi$  est un morphisme de Krammer, alors  $\varphi$  l'est.



# Chapitre 11

## Représentation de Krammer-Paris.

Dans ce chapitre, nous considérons le monoïde d'Artin-Tits  $B_\Gamma^+$  et le groupe d'Artin-Tits  $B_\Gamma$  associés à un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangle, et nous étudions les représentations linéaires de  $B_\Gamma^+$  et de  $B_\Gamma$  construites par L. Paris dans [Par02].

Nous rappelons les définitions de ces représentations dans la section 11.1. Dans la section 11.2, nous interprétons la preuve de la fidélité de la représentation de  $B_\Gamma^+$  donnée dans [Par02], en suivant les idées et la terminologie de [Hée04], rappelées dans les sections 10.2 et 10.3 du chapitre précédent. Cette analyse nous permet de prouver, dans la section 11.3, le résultat principal de cette partie : si  $G$  est un sous-groupe fini de  $\Gamma$ , alors  $G$  agit sur l'espace  $\mathcal{H}$  de la représentation de  $B_\Gamma^+$  construite dans [Par02], le sous-monoïde  $(B_\Gamma^+)^G$  des points fixes de  $B_\Gamma^+$  sous  $G$  stabilise le sous-espace  $\mathcal{H}^G$  des points fixes de  $\mathcal{H}$  sous  $G$ , et la représentation de  $(B_\Gamma^+)^G$  dans  $\mathcal{H}^G$  ainsi définie est fidèle.

### 11.1 Définition.

Soit  $\Gamma = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter identifiée à son graphe de Coxeter.

On dit que la matrice  $\Gamma$  est *simplement lacée* si elle est à coefficients dans  $\{1, 2, 3\}$ . On dit que  $\Gamma$  est *sans triangle* s'il n'existe pas trois éléments deux à deux distincts  $i, j, k \in I$  tels que les coefficients  $m_{i,j}$ ,  $m_{j,k}$  et  $m_{k,i}$  soient supérieurs ou égaux à 3.

Dans cette section, nous rappelons la construction de la représentation linéaire du monoïde d'Artin-Tits  $B_\Gamma^+$  (resp. du groupe d'Artin-Tits  $B_\Gamma$ ) associé à une matrice de Coxeter  $\Gamma$  simplement lacée et sans triangle, utilisée dans [Par02]. Dans ce qui suit, nous l'appelons la représentation de *Krammer-Paris* de  $B_\Gamma^+$  (resp. de  $B_\Gamma$ ).

**Notation 11.1.1.** Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(x, y)$  le corps des fractions rationnelles à deux indéterminées sur  $\mathbb{Q}$ . Soient  $\Gamma$  une matrice de Coxeter (simplement lacée) et  $\Phi = \Phi_\Gamma$  le système de racines standard associé à  $\Gamma$ .

On note  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Gamma = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{K}e_\alpha$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$  indexée par l'ensemble  $\Phi^+$  des racines positives du système de racines  $\Phi$ .

On note  $\mathcal{H}_0^+ = (\mathcal{H}_\Gamma)_0^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{Q}[y] \cdot e_\alpha$  le  $\mathbb{Q}[y]$ -module libre de base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$ .

**Définition 11.1.2** ([Par02, section 3]). Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé.

Pour tout  $i \in I$ , on note  $\varphi_{\mathbf{s}_i}$  l'endomorphisme de  $\mathcal{H}_0^+$  défini sur la base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$  par :

$$\varphi_{\mathbf{s}_i}(e_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \alpha_i, \\ e_\alpha & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha \rangle = 0, \\ ye_{s_i(\alpha)} & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha \rangle > 0 \text{ et } \alpha \neq \alpha_i, \\ (1-y)e_\alpha + e_{s_i(\alpha)} & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha \rangle < 0. \end{cases}$$

**Proposition 11.1.3** ([Par02, 3.2]). *L'application  $\mathbf{s}_i \mapsto \varphi_{\mathbf{s}_i}$  se prolonge en un morphisme de monoïdes  $\varphi : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}_0^+)$ ,  $b \mapsto \varphi_b$ .*

**Notation 11.1.4.** Notons, pour  $\alpha \in \Phi^+$ ,  $\text{dp}(\alpha) = \min\{\ell(w) \mid w \in W, w(\alpha) \in \Phi^-\}$  la *profondeur* de la racine positive  $\alpha$ .

**Définition 11.1.5** ([Par02, section 3]). Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangle. Pour chaque racine positive  $\alpha \in \Phi^+$  de profondeur supérieure ou égale à 2, on fixe un élément  $j_\alpha \in I$  tel que  $\text{dp}(s_{j_\alpha}(\alpha)) = \text{dp}(\alpha) - 1$ . On définit des polynômes  $T(i, \alpha) \in \mathbb{Z}[y]$ , pour  $i \in I$  et  $\alpha \in \Phi^+$ , par récurrence sur  $\text{dp}(\alpha)$  :

1. Si  $\text{dp}(\alpha) = 1$ , on pose  $T(i, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha_i, \\ y^2 & \text{si } \alpha = \alpha_i. \end{cases}$
2. Supposons  $\text{dp}(\alpha) \geq 2$  et soit  $j = j_\alpha$  l'élément de  $I$  que l'on a fixé plus haut. On a  $\text{dp}(s_j(\alpha)) = \text{dp}(\alpha) - 1$ , c'est-à-dire  $\langle \alpha_j, \alpha \rangle = b > 0$ .
  - (a) Si  $\langle \alpha_i, \alpha \rangle > 0$ , on pose  $T(i, \alpha) = y^{\text{dp}(\alpha)}(y - 1)$ .
  - (b) Si  $\langle \alpha_i, \alpha \rangle = 0$ , alors  $T(i, \alpha)$  est défini par :

$$\begin{cases} yT(i, s_j(\alpha)) & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \\ (y-1)T(i, s_j(\alpha)) + yT(j, s_i s_j(\alpha)) & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1. \end{cases}$$

- (c) Si  $\langle \alpha_i, \alpha \rangle = -a < 0$ , alors  $T(i, \alpha)$  est défini par :

$$\begin{cases} yT(i, s_j(\alpha)) & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \\ (y-1)T(i, s_j(\alpha)) + yT(j, s_i s_j(\alpha)) & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1 \text{ et } b > a, \\ T(j, s_j(\alpha)) + (y-1)T(i, s_j(\alpha)) & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1 \text{ et } b = a, \\ yT(i, s_j(\alpha)) + T(j, s_j(\alpha)) + y^{\text{dp}(\alpha)-1}(1-y) & \text{si } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1 \text{ et } b < a. \end{cases}$$

**Lemme 11.1.6** ([Par02, 3.3 et 3.4]). *Si  $\text{dp}(\alpha) \geq 2$ , le polynôme  $T(i, \alpha)$  ne dépend pas du choix de l'élément  $j \in I$  tel que  $\text{dp}(s_j(\alpha)) = \text{dp}(\alpha) - 1$ .*

**Théorème 11.1.7** ([Par02, 3.6, 3.7 et 3.8]). *Pour tout  $i \in I$ , on note  $\psi_{\mathbf{s}_i}$  l'endomorphisme de  $\mathcal{H}$  défini sur la base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$  par :*

$$\psi_{\mathbf{s}_i}(e_\alpha) = \varphi_{\mathbf{s}_i}(e_\alpha) + xT(i, \alpha)e_{\alpha_i}.$$

Alors  $\psi_{\mathbf{s}_i} \in \text{GL}(\mathcal{H})$  et l'application  $\mathbf{s}_i \mapsto \psi_{\mathbf{s}_i}$  se prolonge en un morphisme de monoïdes  $\psi : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$ ,  $b \mapsto \psi_b$ .

De plus, comme  $\text{GL}(\mathcal{H})$  est un groupe, le morphisme  $\psi$  induit un morphisme de groupes  $\psi_{gr} : B_\Gamma \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$ ,  $b \mapsto (\psi_{gr})_b$ .

## 11.2 Sur la fidélité de la représentation de Krammer-Paris.

Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangle. Soient  $\psi : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$  et  $\psi_{gr} : B_\Gamma \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$  les représentations de Krammer-Paris du monoïde  $B^+ = B_\Gamma^+$  et du groupe  $B = B_\Gamma$  respectivement.

En suivant les idées de [Hée04], nous interprétons ici la démonstration de la fidélité de la représentation  $\psi : B^+ \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$ , donnée dans [Par02, section 4], avec les outils et la terminologie introduits dans les sections 10.2 et 10.3 ci-dessus.

Comme  $\psi$  est à valeurs dans un groupe, il suffit, pour démontrer l'injectivité de  $\psi$ , de démontrer que c'est un morphisme de Krammer (cf. Lemme 10.3.2), et il suffit pour cela de démontrer qu'un morphisme composé  $\tau \circ \psi$  est un morphisme de Krammer.

- Par construction, le morphisme  $\psi$  est à valeurs dans le sous-monoïde de  $\text{GL}(\mathcal{H})$  constitué des automorphismes de  $\mathcal{H}$  dont la matrice dans la base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$  est à coefficients polynomiaux. Si l'on remplace  $x$  par 0 dans ces matrices, on retrouve le morphisme  $\varphi = \varepsilon_{x=0} \circ \psi : B^+ \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}_0^+)$  de la définition 11.1.2 (puisque les morphismes  $\varphi$  et  $\varepsilon_{x=0} \circ \psi$  coïncident sur le sous-ensemble générateur  $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_i \mid i \in I\}$  de  $B^+$ ).
- Soient  $i \in I$  et  $\alpha \in \Phi^+$  et considérons l'élément  $\varphi_{\mathbf{s}_i}(e_\alpha)$  de  $\mathcal{H}_0^+$ . Si l'on remplace l'indéterminée  $y$  par une valeur  $y_0 \in ]0, 1[$ , alors les coefficients suivant la base  $(e_\beta)_{\beta \in \Phi^+}$  de  $\varphi_{\mathbf{s}_i}(e_\alpha)$  sont positifs ou nuls. Si l'on identifie les endomorphismes du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\bigoplus_{\beta \in \Phi^+} \mathbb{R}e_\beta$  à leur matrice dans la base  $(e_\beta)_{\beta \in \Phi^+}$ , on obtient donc un morphisme  $\varphi_0 = \varepsilon_{y=y_0} \circ \varphi : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{Mat}_{\Phi^+}(\mathbb{R}^+)$ .
- Considérons le morphisme  $\tau_1 \circ \varphi_0 : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{Bin}(\Phi^+)$ ,  $b \mapsto R_b$ . Vu la définition de  $\varphi$  (cf. définition 11.1.2), la relation binaire  $R_i = R_{\mathbf{s}_i}$ , pour  $i \in I$ , est donnée par :

$$\alpha R_i \beta \iff \begin{cases} \alpha = s_i(\beta), \text{ ou} \\ \alpha = \beta \text{ et } \langle \alpha_i, \alpha \rangle < 0 \end{cases} .$$

- Posons  $\rho = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \varphi_0 : B_\Gamma^+ \rightarrow \mathcal{P}(\Phi^+)^{\mathcal{P}(\Phi^+)}$ ,  $b \mapsto f_{R_b} = f_b$ . Pour  $i \in I$ , notons plus simplement  $f_i = f_{\mathbf{s}_i}$ .

**Proposition 11.2.1.** *Le morphisme  $\tau_3 \circ \rho : B_\Gamma^+ \rightarrow \mathcal{P}(\Phi^+)^{\mathcal{P}(\Phi^+)}$ ,  $b \mapsto \overline{f}_b$  est donné, pour tout  $i \in I$  et tout  $X \subseteq \Phi^+$ , par :*

$$\begin{aligned} \overline{f}_i(X) = \{ \alpha_i \} &\cup \{ \alpha \in \Phi^+ \mid \langle \alpha_i, \alpha \rangle = 0 \text{ et } \alpha \in X \} \\ &\cup \{ \alpha \in \Phi^+ \mid \langle \alpha_i, \alpha \rangle > 0, \alpha \neq \alpha_i, \text{ et } s_i(\alpha) \in X \} \\ &\cup \{ \alpha \in \Phi^+ \mid \langle \alpha_i, \alpha \rangle < 0 \text{ et } \alpha, s_i(\alpha) \in X \}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On a  $\overline{f}_i(X) = \{ \alpha \in \Phi^+ \mid \text{si } \beta \in \Phi^+ \text{ et } \alpha R_i \beta, \text{ alors } \beta \in X \}$  (cf. section 10.2). Si  $\alpha = \alpha_i$ , alors il n'existe pas de racine positive  $\beta$  telle que  $\alpha R_i \beta$ , donc  $\alpha_i \in \overline{f}_i(X)$ . Considérons à présent une racine  $\alpha \in \Phi^+$  distincte de  $\alpha_i$ . Si  $\langle \alpha_i, \alpha \rangle \geq 0$ , alors  $\alpha$  n'est en relation  $R_i$  qu'avec la racine positive  $s_i(\alpha)$ , on a donc  $\alpha \in \overline{f}_i(X)$  si et seulement si  $s_i(\alpha) \in X$ . Si  $\langle \alpha_i, \alpha \rangle < 0$ , alors  $\alpha$  n'est en relation  $R_i$  qu'avec les deux racines positives  $s_i(\alpha)$  et  $\alpha$ , on a donc  $\alpha \in \overline{f}_i(X)$  si et seulement si  $\alpha, s_i(\alpha) \in X$ .  $\square$

**Corollaire 11.2.2.** *L'élément  $\emptyset$  de  $\mathcal{P}(\Phi^+)$  est un élément de Krammer pour le morphisme  $\tau_3 \circ \rho : B_\Gamma^+ \rightarrow \mathcal{P}(\Phi^+)^{\mathcal{P}(\Phi^+)}$  (donc  $\Phi^+$  est un élément de Krammer pour  $\rho$ ).*

*En particulier, la représentation  $\psi : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$  est fidèle.*



*Démonstration.* La proposition 11.2.1 montre que l'action de  $B^+$  dans  $\mathcal{P}(\Phi^+)$ , définie par le morphisme  $\tau_3 \circ \rho : B^+ \rightarrow \mathcal{P}(\Phi^+)^{\mathcal{P}(\Phi^+)}$ , coïncide avec l'action  $*$  définie dans [Par02, 4.4]. Le résultat [Par02, 4.9] montre alors (en particulier) que  $\emptyset$  est un élément de Krammer pour  $\tau_3 \circ \rho$  (donc  $\Phi^+$  est un élément de Krammer pour  $\rho$ ).

Le morphisme  $\tau_3 \circ \rho$  (ou  $\rho$ ) est donc un morphisme de Krammer. Comme  $\tau_3 \circ \rho$  (ou  $\rho$ ) est obtenu en composant  $\psi$  par la gauche, le morphisme  $\psi$  est également un morphisme de Krammer. Enfin, comme  $\psi$  est à valeurs dans un groupe,  $\psi$  est injectif, d'après le lemme 10.3.2.  $\square$

**Corollaire 11.2.3** ([Par02, section 1]). *Supposons  $\Gamma$  simplement lacée, sans triangle et sphérique, c'est-à-dire de type  $A$ ,  $D$  ou  $E$ . Alors la représentation  $\psi_{gr} : B_\Gamma \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$  est fidèle.*

À ma connaissance, on ne sait pas si la représentation  $\psi_{gr}$  est fidèle pour toute matrice de Coxeter simplement lacée et sans triangle.

**Remarque 11.2.4.** Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé.

- Soient  $\alpha, \beta \in \Phi_\Gamma^+$ . Alors  $\Phi_\Gamma \cap (\alpha + \mathbb{Z}\beta) = \{\alpha, s_\beta(\alpha)\}$ .  
En effet, posons  $p = \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ . On a  $s_\beta(\alpha) = \alpha - p\beta$ , donc  $\{\alpha, s_\beta(\alpha)\} \subseteq \Phi_\Gamma \cap (\alpha + \mathbb{Z}\beta)$ . Réciproquement, si  $\gamma = \alpha + q\beta \in \Phi_\Gamma$ , alors  $\langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + 2pq + q^2\langle \beta, \beta \rangle$ , et comme  $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle = 2$ , on a  $q(p + q) = 0$ . Si  $q = 0$ , on a  $\gamma = \alpha$ ; sinon, on a  $q = -p$ , donc  $\gamma = s_\beta(\alpha)$ .
- On en déduit que, pour  $\alpha, \beta \in \Phi^+$  et  $i \in I$ , on a :

$$\alpha R_i \beta \iff \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \alpha = s_i(\beta) - n\alpha_i.$$

Ces relations binaires  $R_i$  sont donc l'analogue, pour les systèmes de racines standard, des relations binaires définies par F. Digne dans [Dig03, 3.4] pour les systèmes de racines cristallographiques réduits.

### 11.3 Action d'un groupe d'automorphismes du graphe.

On conserve les notations des sections précédentes :  $\Gamma$  est une matrice de Coxeter simplement lacée sans triangle,  $\Phi$  est le système de racines standard associé à  $\Gamma$  dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$ , et  $\psi : B_\Gamma^+ \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$  (resp.  $\psi_{gr} : B_\Gamma \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$ ) est la représentation de Krammer-Paris du monoïde (resp. du groupe) d'Artin-Tits associé à  $\Gamma$ .

La forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $V$  est clairement invariante par  $\text{Aut}(\Gamma)$  (cf. section 10.1). De plus, les éléments de  $\text{Aut}(\Gamma)$  agissent sur  $\Phi^+$ , donc agissent sur  $\mathcal{H}$  par permutation de la base. Si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$ , la proposition 11.3.2 ci-dessous montre (grâce à la remarque 11.3.1) que, via  $\psi$  (resp.  $\psi_{gr}$ ),  $(B^+)^G$  (resp.  $B^G$ ) stabilise  $\mathcal{H}^G$ .

**Remarques 11.3.1.** Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Supposons que  $B^+$  (resp.  $B$ ) et  $G$  agissent sur un ensemble  $E$ , de sorte que, pour tous  $i \in I$ ,  $\sigma \in G$  et  $e \in E$ ,  $\sigma \cdot (s_i \cdot e) = s_{\sigma(i)} \cdot (\sigma \cdot e)$ . Alors  $(B^+)^G$  (resp.  $B^G$ ) stabilise  $E^G$ .

**Lemme 11.3.2.** Soient  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $i \in I$  et  $\alpha \in \Phi^+$ . Alors :

1.  $\sigma(\varphi_{s_i}(e_\alpha)) = \varphi_{s_{\sigma(i)}}(e_{\sigma(\alpha)})$ ,
2.  $T(\sigma(i), \sigma(\alpha)) = T(i, \alpha)$ .

On en déduit que l'on a  $\sigma(\psi_{\mathbf{s}_i}(e_\alpha)) = \psi_{\mathbf{s}_{\sigma(i)}}(e_{\sigma(\alpha)})$ .

*Démonstration.* On obtient le premier point en comparant directement les formules de définition de  $\varphi_{\mathbf{s}_i}(e_\alpha)$  et de  $\varphi_{\mathbf{s}_{\sigma(i)}}(e_{\sigma(\alpha)})$ , rappelées en 11.1.2 ci-dessus (noter que l'on a  $\langle \alpha, \alpha_i \rangle = \langle \sigma(\alpha), \alpha_{\sigma(i)} \rangle$ ).

Notons que, pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ , on a  $\text{dp}(\alpha) = \text{dp}(\sigma(\alpha))$ . On montre le second point par récurrence sur  $\text{dp}(\alpha) = \text{dp}(\sigma(\alpha))$ . Si  $\text{dp}(\alpha) = 1$ , le résultat est clair. Supposons donc  $\text{dp}(\alpha) \geq 2$ , et fixons  $j \in I$  tel que  $\text{dp}(s_j(\alpha)) = \text{dp}(\alpha) - 1$ . Alors l'élément  $\sigma(j)$  de  $I$  est tel que  $\text{dp}(s_{\sigma(j)}(\sigma(\alpha))) = \text{dp}(\sigma(\alpha)) - 1$ . On obtient le résultat par un examen des formules rappelées en 11.1.5 ci-dessus, appliquées avec les indices  $j$  (pour  $T(i, \alpha)$ ) et  $\sigma(j)$  (pour  $T(\sigma(i), \sigma(\alpha))$ ), ce qui est possible grâce au lemme 11.1.6, et par l'hypothèse de récurrence.  $\square$

**Proposition 11.3.3.** *Soient  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangle et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Les représentations  $\psi : B^+ \hookrightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$  et  $\psi_{gr} : B \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$  induisent des représentations :*

$$\begin{aligned} \psi^G : (B^+)^G &\rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}^G), & b &\mapsto (\psi_b)_{|\mathcal{H}^G}, \\ \psi_{gr}^G : B^G &\rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}^G), & b &\mapsto ((\psi_{gr})_b)_{|\mathcal{H}^G}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Cela résulte de la remarque 11.3.1 et du lemme 11.3.2.  $\square$

Rappelons que le sous-monoïde  $(B^+)^G$  de  $B^+$  est (isomorphe à) un monoïde d'Artin-Tits  $B_{\tilde{\Gamma}}^+$  (cf. [Mic99, Cri00], ou la proposition 8.3.1 ci-dessus), où, si l'on note  $\tilde{J}$  l'ensemble des orbites sphériques de  $I$  sous  $G$ , et  $J$  leur réunion, la matrice  $\tilde{\Gamma}$  est le type de la partition sphérique  $\tilde{J}$  de  $\Gamma_J$ , au sens de la définition 7.1.1 ci-dessus. Voici le résultat principal de cette partie :

**Théorème 11.3.4.** *Soient  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangle et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Supposons que toute orbite de  $\Phi^+$  sous  $G$  soit finie (ce qui est le cas par exemple si  $G$  est fini). Alors la représentation  $\psi^G : (B^+)^G \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}^G)$  est fidèle.*

*Démonstration.* Le sous-monoïde  $(B^+)^G$  de  $B^+$  est (isomorphe à) un monoïde d'Artin-Tits  $B_{\tilde{\Gamma}}^+$ , et, pour tout  $b \in (B^+)^G = B_{\tilde{\Gamma}}^+$ , les formes normales à gauche de  $b$  dans  $B_{\tilde{\Gamma}}^+$  et dans  $B^+$  coïncident, c'est-à-dire que, si l'on note  $\tilde{L} : B_{\tilde{\Gamma}}^+ \rightarrow (B_{\tilde{\Gamma}}^+)_{red}$  l'application définie comme dans la section 10.3, on a, pour tout  $b \in (B^+)^G = B_{\tilde{\Gamma}}^+$ , l'égalité  $\tilde{L}(b) = L(b)$  (cf. [Mic99], ou la proposition 8.4.3 ci-dessus).

Pour montrer que le morphisme  $\psi^G : \tilde{B}^+ \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}^G)$  est injectif, il suffit, d'après le lemme 10.3.2, de montrer que c'est un morphisme de Krammer (puisque  $\text{GL}(\mathcal{H}^G)$  est un groupe). Soient donc  $a, b \in \tilde{B}^+$  tels que  $(\psi_a)_{|\mathcal{H}^G} = (\psi_b)_{|\mathcal{H}^G}$  et montrons que  $\tilde{L}(a) = \tilde{L}(b)$ .

Soit  $\Theta \in \Phi^+/G$  une orbite de  $\Phi^+$  sous  $G$ . Le cardinal de  $\Theta$  est supposé fini, on peut donc considérer l'élément  $e_\Theta = \sum_{\alpha \in \Theta} e_\alpha$  de  $\mathcal{H}$ . On a clairement  $e_\Theta \in \mathcal{H}^G$ , donc  $\psi_a(e_\Theta) = \psi_b(e_\Theta)$ . On a donc, en remplaçant  $x$  par 0,  $\varphi_a(e_\Theta) = \varphi_b(e_\Theta)$ , et, en remplaçant  $y$  par une valeur  $y_0 \in ]0, 1[$ ,  $(\varphi_0(a))(e_\Theta) = (\varphi_0(b))(e_\Theta)$  (cf. section 11.2). On en déduit que  $f_a(\Theta) = f_b(\Theta)$ , puisque ces ensembles sont les ensembles d'indices des éléments de la base  $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$  qui apparaissent dans la décomposition suivant cette base de l'élément  $(\varphi_0(a))(e_\Theta) = (\varphi_0(b))(e_\Theta)$  de  $\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{R}e_\alpha$  (cf. Propriétés 10.2.1).

Comme l'ensemble  $\Phi^+$  est la réunion de ses orbites sous  $G$ , on a (cf. Propriétés 10.2.1) :

$$f_a(\Phi^+) = \bigcup_{\Theta \in \Phi^+/G} f_a(\Theta) = \bigcup_{\Theta \in \Phi^+/G} f_b(\Theta) = f_b(\Phi^+).$$

Or  $\Phi^+$  est un élément de Krammer pour le morphisme  $\rho : B^+ \rightarrow \mathcal{P}(\Phi^+)^{\mathcal{P}(\Phi^+)}$ ,  $b \mapsto f_b$  (cf. corollaire 11.2.2), donc l'égalité  $f_a(\Phi^+) = f_b(\Phi^+)$  implique  $L(a) = L(b)$ . On a alors le résultat puisque  $\tilde{L}(a) = L(a)$  et  $\tilde{L}(b) = L(b)$ .  $\square$

**Corollaire 11.3.5.** *Soient  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangle et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Supposons que toute orbite de  $\Phi^+$  sous  $G$  soit finie et que le graphe  $\tilde{\Gamma}$  soit sphérique (ce qui est le cas par exemple si  $\Gamma$  est sphérique). Alors la représentation  $(\psi_{gr})^G : B^G \rightarrow GL(\mathcal{H}^G)$  est fidèle.*

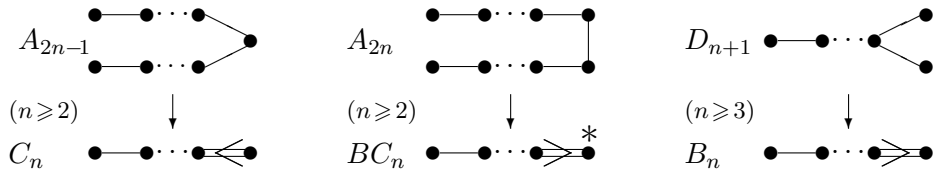
*Démonstration.* Le graphe  $\tilde{\Gamma}$  est sphérique, donc le sous-groupe  $B^G$  de  $B$  s'identifie au groupe d'Artin-Tits  $B_{\tilde{\Gamma}}$  (cf. [DP99, Mic99, Cri00] ou la proposition 8.3.1 ci-dessus), qui est le groupe des fractions du monoïde  $B_{\tilde{\Gamma}}^+ \approx (B^+)^G$  (au sens de la remarque 6.2.5 ci-dessus). L'injectivité de  $(\psi_{gr})^G$  résulte alors de celle de  $\psi^G$ .  $\square$

**Remarques 11.3.6.** La proposition 11.3.3 ci-dessus est l'analogue, pour la représentation de [Par02], du corollaire [Dig03, 3.11], et le théorème 11.3.4 celui du résultat suivant [Dig03, 3.11], sur l'injectivité de la représentation induite.

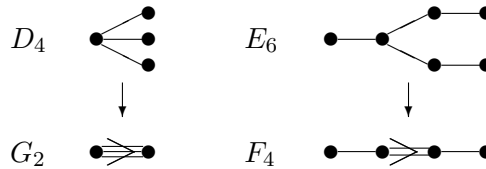
- En particulier, le corollaire 11.3.5 généralise à tous les automorphismes des graphes de Coxeter de type  $A$ ,  $D$  et  $E$  le résultat de [Dig03], sur les automorphismes d'ordre 2 de  $A_{2n-1}$  ( $n \geq 2$ ) et de  $E_6$  et les automorphismes d'ordre 3 de  $D_4$ . De plus, notre raisonnement évite les vérifications cas par cas faites dans [Dig03].
- Soient  $\Gamma$  un graphe de Coxeter de type  $A$ ,  $D$  ou  $E$  et  $\sigma$  un automorphisme (non trivial) de  $\Gamma$ . Soit  $\Phi = \Phi_\Gamma$  le système de racines standard associé à  $\Gamma$  dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}\alpha_i$ . D'après [Car72, Ch. 13], l'ensemble  $\tilde{\Phi} = \{\alpha_\Theta \mid \Theta \in \Phi/\sigma\}$ , où  $\alpha_\Theta = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\alpha \in \Theta} \alpha$ , est un système de racines cristallographique (fini) dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V^\sigma$ , de groupe de Weyl  $(W_\Gamma)^\sigma$ ; si  $O$  est une orbite de  $I$  sous  $\sigma$ , l'élément  $r_O$  de  $(W_\Gamma)^\sigma$  agit sur  $V^\sigma$  par une réflexion de vecteur  $\alpha_O = \alpha_{\{\alpha_i \mid i \in O\}} = \frac{1}{|O|} \sum_{i \in O} \alpha_i$ .

Le type (c'est-à-dire le graphe de Dynkin) du système de racines  $\tilde{\Phi}$  est déterminé de la façon suivante (cf. [Car72, Ch. 13]) :

- si  $\sigma$  est l'automorphisme d'ordre 2 de  $A_{2n-1}$ ,  $n \geq 2$  (resp.  $A_{2n}$ ,  $n \geq 2$ , resp.  $D_{n+1}$ ,  $n \geq 3$ ), alors  $\tilde{\Phi}$  est de type  $C_n$  (resp.  $BC_n$ , resp.  $B_n$ ).



- si  $\sigma$  est un des automorphismes d'ordre 3 de  $D_4$  (resp. l'automorphisme d'ordre 2 de  $E_6$ ), alors  $\tilde{\Phi}$  est de type  $G_2$  (resp. de type  $F_4$ ).



- L'application  $\Theta \mapsto \alpha_\Theta$  définit une bijection de  $\Phi/\sigma$  sur  $\tilde{\Phi}$ , et de  $\Phi^+/\sigma$  sur  $\tilde{\Phi}^+$ . On peut donc, via cette bijection, indexer la base  $(e_\Theta)_{\Theta \in \Phi^+/\sigma}$  de  $\mathcal{H}^\sigma$ , où  $e_\Theta = \sum_{\alpha \in \Theta} e_\alpha$ , par l'ensemble des racines positives  $\tilde{\Phi}^+$  du système de racines  $\tilde{\Phi}$ .

Suivons la même démarche que dans [Dig03] et dans la section 11.2. On peut vérifier que, si  $O$  est une orbite de  $I$  sous  $\sigma$  et  $\Theta'$  une orbite de  $\Phi^+$  sous  $\sigma$ , les coefficients suivant la base  $(e_\Theta)_{\Theta \in \Phi^+/\sigma}$  de  $(\psi^G)_{\Delta_O}(e_{\Theta'})$  sont polynomiaux (en  $x$  et  $y$ ).

En remplaçant  $x$  par 0, on obtient un morphisme  $\varphi^G : (B^+)^G \rightarrow \text{End}(\oplus_{\Theta \in \Phi^+/\sigma} \mathbb{Q}[y] \cdot e_\Theta)$ ,  $b \mapsto (\varphi^G)_b$ . Ce morphisme  $\varphi^G$  est en fait le morphisme  $(B^+)^G \rightarrow \text{End}((\mathcal{H}_0^+)^G)$  induit par  $\varphi$ .

En remplaçant  $y$  par une valeur  $y_0 \in ]0, 1[$ , et en identifiant les éléments du monoïde  $\text{End}(\oplus_{\Theta \in \Phi^+/\sigma} \mathbb{R}e_\Theta)$  à leur matrice dans la base  $(e_\Theta)_{\Theta \in \Phi^+/\sigma}$ , il se trouve que l'on obtient un morphisme  $(\varphi^G)_0 : (B^+)^G \rightarrow \text{Mat}_{\Phi^+/\sigma}(\mathbb{R}^+)$ .

Considérons alors le morphisme  $\tau_1 \circ (\varphi^G)_0 : (B^+)^G \rightarrow \text{Bin}(\Phi^+/\sigma)$ ,  $b \mapsto R_b$ . Il semble (mais nous n'avons pas de preuve rédigée) que, pour toute orbite  $O$  de  $I$  sous  $\sigma$  et tous  $\Theta, \Theta' \in \Phi^+/\sigma$ , on ait :

$$\Theta R_{\Delta_O} \Theta' \iff \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \alpha_\Theta = r_O(\alpha_{\Theta'}) - n\alpha_O.$$

On retrouverait ainsi des relations binaires sur  $\tilde{\Phi}^+$  analogues à celles de [Dig03, 3.4]. Ceci fournirait, grâce aux résultats de [Dig03], une nouvelle preuve de l'injectivité de la représentation  $\psi^\sigma$ , dans tous les cas sauf celui de la symétrie de  $A_{2n}$  ( $n \geq 2$ ), qui fait intervenir le système de racines non réduit  $BC_n$ , puisque le raisonnement de [Dig03] suppose les systèmes de racines réduits.



# Bibliographie

- [Art25] E. Artin. *Theorie der Zöpfe*. Hamburg Abh. **4**, pages 47–72, (1925).
- [BDM02] D. Bessis, F. Digne, and J. Michel. *Springer theory in braid groups and the Birman-Ko-Lee monoid*. Pac. J. Math. **205**, pages 287–309, (2002).
- [BM05] P. Bahls and M. Mihalik. *Reflection Independence In Even Coxeter Groups*. Geom. Dedic. **110**, pages 63–80, (2005).
- [BMMN02] N. Brady, J.P. MacCammond, B. Mühlherr, and W.D. Neumann. *Rigidity of Coxeter groups and Artin groups*. Geom. Dedic. **94**, pages 91–109, (2002).
- [Bou68] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres IV à VI*. Hermann, Paris, (1968).
- [BS72] E. Brieskorn and K. Saito. *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*. Invent. Math. **17**, pages 245–271, (1972).
- [Car72] R. Carter. *Simple groups of Lie type*. Wiley, (1972).
- [Cox35] H.S.M. Coxeter. *The complete enumeration of the finite groups of the form  $R_i^2 = (R_i R_j)^{m_{i,j}} = 1$* . J. London Math. Soc. **10**, pages 21–25, (1935).
- [CP01] J. Crisp and L. Paris. *The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an Artin group*. Invent. Math. **145**, pages 19–36, (2001).
- [Cri99] J. Crisp. *Injective maps between Artin groups*. Geometric Group Theory Down Under, Proceedings of a Special Year in Geometric Group Theory, Canberra, Australia, 1996, pages 119–137, de Gruyter Verlag (1999).
- [Cri00] J. Crisp. *Symmetrical subgroups of Artin groups*. Adv. in Math. **152**, pages 159–177, (2000).
- [Cri03] J. Crisp. *Erratum to "Symmetrical subgroups of Artin groups"*. Adv. in Math. **179**, pages 318–320, (2003).
- [CW02] A.M. Cohen and D.B. Wales. *Linearity of Artin groups of finite type*. Israel J. of Math. **131**, pages 101–123, (2002).
- [Deo82] V. V. Deodhar. *On the root system of a Coxeter group*. Comm. Algebra **10**, pages 611–630, (1982).
- [Dig03] F. Digne. *On the linearity of Artin Braid groups*. J. Algebra **268**, pages 39–57, (2003).
- [DP99] P. Dehornoy and L. Paris. *Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups*. Proc. London Math. Soc. **79**, pages 569–604, (1999).
- [Dro03] P. Drouot. Mémoire de DEA. Amiens, (2003).

- [God02] E. Godelle. *Morphismes injectifs entre groupes d'Artin-Tits*. *Algebr. Geom. Topol.* **2**, pages 519–536, (2002).
- [God06] E. Godelle. *Quasi-centraliser of LCM-homomorphisms*. *Comm. Algebra* **34**, pages 3167–3181, (2006).
- [Hos03] T. Hosaka. *Determination up to isomorphism of Right-Angled Coxeter systems*. *Proc. Japan Ac.* **79**, pages 33–35, (2003).
- [Hée90] J.-Y. Hée. *Construction de groupes tordus en théorie de Kac-Moody*. *C.R. Acad. Sci. Paris* **310**, pages 77–80, (1990).
- [Hée91] J.-Y. Hée. *Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné*. *Geom. Dedic.* **37**, pages 65–102, (1991).
- [Hée04] J.-Y. Hée. *Homomorphismes de Krammer*. Notes personnelles, (2004).
- [Jam88] L.D. James. *Complexes and Coxeter Groups - Operations and Outer Automorphisms*. *J. Algebra* **113**, pages 339–345, (1988).
- [Kra02] D. Krammer. *Braid groups are linear*. *Ann. of Math.* **155**, pages 131–156, (2002).
- [Mic99] J. Michel. *A note on words in braid monoids*. *J. Algebra* **215**, pages 366–377, (1999).
- [Müh93] B. Mühlherr. *Coxeter Groups in Coxeter Groups*. *Finite Geom. and Combinatorics*, Cambridge University Press, pages 277–287, (1993).
- [Müh94] B. Mühlherr. *Some contributions to the theory of buildings based on the gate property*. PhD thesis, Tübingen, (1994).
- [Müh98] B. Mühlherr. *Automorphisms of Graph-Universal Coxeter Groups*. *J. Algebra* **200**, pages 629–649, (1998).
- [Par02] L. Paris. *Braid monoids inject in their groups*. *Comment. Math. Helv.* **77**, pages 609–637, (2002).
- [Rad99] D.G. Radcliffe. *Rigidity of Right-Angled Coxeter Groups*. arXiv:math/9901049, (1999).
- [Rad01] D.G. Radcliffe. *Unique presentation of Coxeter groups and related groups*. PhD thesis, University of Wisconsin, Milwaukee, (2001).
- [Tit61] J. Tits. *Groupes et géométries de Coxeter*. Notes de l'I.H.É.S., (1961).
- [Tit66] J. Tits. *Normalisateurs de Tore I. Groupes de Coxeter étendus*. *J. Algebra* **4**, pages 96–116, (1966).
- [Tit69] J. Tits. *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*. *Symp. Math. (INDAM, Rome, 1967-68)*, Academic Press, London, pages 175–185, (1969).
- [Tit88] J. Tits. *Sur le groupe des automorphismes de certains groupes de Coxeter*. *J. Algebra* **113**, pages 346–357, (1988).
- [vdL83] H. van der Lek. *The homotopy type of complex hyperplane complements*. PhD thesis, Nijmegen, (1983).





## Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude combinatoire des groupes de Coxeter et des groupes d'Artin-Tits. Dans la première partie, nous complétons la description du groupe des automorphismes d'un groupe de Coxeter à angles droits en étudiant le second des deux sous-groupes qui apparaissent dans la décomposition en produit semi-direct établie par Tits (le premier est décrit par Mühlherr). Nous retrouvons ainsi le résultat de Radcliffe sur la rigidité des groupes de Coxeter à angles droits. Dans la deuxième partie, nous introduisons et étudions la notion de sous-monoïde d'un monoïde d'Artin-Tits induit par une partition admissible du graphe de Coxeter, au sens de Mühlherr. Nous montrons qu'un tel sous-monoïde est un monoïde d'Artin-Tits, et que cette notion généralise et unifie les situations des sous-monoïdes des points fixes d'un monoïde d'Artin-Tits sous l'action d'automorphismes du graphe, et des LCM-homomorphismes de Crisp et Godelle. Nous achevons la classification des partitions admissibles des graphes de Coxeter sphériques, commencée par Mühlherr ; elle nous fournit la classification des LCM-homomorphismes de Crisp. Dans la troisième partie, nous étudions la représentation de Krammer-Paris d'un monoïde d'Artin-Tits de type simplement lacé et sans triangle. Le sous-monoïde des points fixes d'un tel monoïde sous l'action d'un groupe d'automorphismes du graphe stabilise le sous-espace des points fixes de l'espace de la représentation sous l'action de ce groupe. Nous utilisons des notions développées par Hée pour prouver que la représentation ainsi obtenue est fidèle. Cela généralise, en évitant tout cas par cas, des résultats établis par Digne dans les cas sphériques.

**Mots-clés:** groupes de Coxeter, groupes d'Artin-Tits, monoïdes d'Artin-Tits, rigidité, automorphismes, partitions admissibles, représentations.

## Abstract

This thesis is a contribution to the combinatorial study of Coxeter groups and Artin-Tits groups. In the first part, we complete the description of the automorphism group of a right-angled Coxeter group, by studying the second of the two subgroups that appear in the semi-direct product established by Tits (the first one is described by Mühlherr). We thus recover Radcliffe's result on rigidity of right-angled Coxeter groups. In the second part, we introduce and study the notion of submonoids of an Artin-Tits monoid induced by an admissible partition of the associated Coxeter graph, in the sense of Mühlherr. We show that such a submonoid is an Artin-Tits monoid, and that this notion generalizes and unifies the situation of submonoids of fixed elements of an Artin-Tits monoid under the action of graph automorphisms, and the notion of LCM-homomorphisms of Crisp and Godelle. We complete Mühlherr's classification of admissible partitions of spherical Coxeter graphs ; this leads us to the classification of Crisp's LCM-homomorphisms. In the third part, we study the Krammer-Paris representation of an Artin-Tits monoid of simply laced type without triangle. The submonoid of fixed elements of such a monoid under the action of a group of graph automorphisms stabilizes the subspace of fixed points of the space of the representation under the action of this group. We use notions developed by Hée to show that the representation obtained in this way is faithful. This generalizes, without any case-by-case enumeration, results established by Digne in the spherical case.

**Keywords:** Coxeter groups, Artin-Tits groups, Artin-Tits monoids, rigidity, automorphisms, admissible partitions, representations.