



**HAL**  
open science

# La résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux

Sophie Martin

► **To cite this version:**

Sophie Martin. La résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT : . tel-00135007

**HAL Id: tel-00135007**

**<https://theses.hal.science/tel-00135007>**

Submitted on 6 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° ENSC –

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Mademoiselle SOPHIE MARTIN

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**Mathématiques Appliquées**

Sujet de la thèse :

**LA RESILIENCE DANS LES MODÈLES DE SYSTÈMES  
ÉCOLOGIQUES ET SOCIAUX**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 17 juin 2005 devant le jury composé de :

M. Yves MEYER	Professeur	Président du jury
M. Jean-Pierre NADAL	Directeur de recherche	Directeur de thèse
M. Guillaume DEFFUANT	Directeur de recherche	Examineur
M. Jean-Pierre AUBIN	Professeur	Rapporteur
M. Christian MULLON	Directeur de recherche	Rapporteur
M. Paul BOURGINE	Directeur de recherche	Membre invité

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes,  
Cemagref

24, avenue des Landais, F-63172 Aubière Cedex, France

©Sophie Martin, 2005



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Guillaume Deffuant qui m'a accueillie au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes et à Jean-Pierre Nadal qui a accepté de diriger ce travail. Je les remercie pour la confiance qu'ils m'ont toujours témoignée en m'accordant une grande autonomie.

Je tiens également à remercier Jean-Pierre Aubin et Christian Mullon d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je leur suis très reconnaissante pour leurs conseils et leurs suggestions qui ont permis l'amélioration de ce manuscrit.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Yves Meyer en acceptant de participer à ce jury. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour l'intérêt porté à ce travail.

Je remercie Claude Millier ainsi que les autres membres de la commission qui m'ont autorisée à effectuer une formation complémentaire par la recherche.

Ce travail est bien sûr le fruit de nombreux échanges. Je remercie Paul pour quelques conseils que je suis heureuse d'avoir suivis. Je remercie très vivement Jean-Pierre et Patrick pour le temps qu'ils ont passé à expliquer, écouter, discuter. Je remercie Hélène pour les réunions passionnantes auxquelles j'ai pu assister. Je remercie tout aussi vivement Isabelle et François qui m'ont apporté des critiques constructives à chaque fois que je les ai sollicités. Je remercie Stéphan et Nicolas pour tous les problèmes informatiques qu'ils m'ont aidée à résoudre.

Ce travail de thèse aura duré plus de trois années. Je saisis cette occasion pour rappeler de bons moments et remercier ceux avec qui j'espère en partager d'autres : je remercie Sylvie pour sa franchise et pour le mandarinier, Lambert pour ses lamberteries, Fred pour sa bonne humeur, Margaret pour les bonbons à la cerise et les nombreux allers-retours à l'aéroport, François et Chak pour leur hospitalité et leurs calendriers, Hélène pour les repas crêpes ou pizzas, Telma et Sophie pour l'ambiance des mardis après-midi. Je remercie aussi Choupette, Elodie, Stéphanie, Béatrice, Florent et Christian pour leur patience et leur humour durant ces

derniers mois.

Enfin, je remercie toute ma famille, pour les trois années que ce mémoire ponctue et pour toutes les autres.

# Introduction

Le premier chapitre va nous permettre de formuler notre problématique, de la situer dans le contexte scientifique et d'exposer notre méthodologie. Nous commencerons par remarquer que, malgré les nombreuses tentatives de définition, la signification de l'expression, pourtant tellement utilisée, *développement durable*, reste vague et suscite des critiques. Ce qui devrait être fait pour atteindre une société durable est, sans doute, un enjeu de comportement humain, que la science seule ne peut résoudre. Néanmoins, la création d'indicateurs liés au développement durable est à l'intersection de deux problématiques scientifiques, construire des outils d'aide à la gestion et formaliser les concepts liés à la durabilité. Plus précisément, la question de recherche que nous nous poserons concernera l'étude de la résilience dans les modèles écologiques et sociaux. Les limites que nous identifierons dans les travaux existants nous permettront de préciser les qualités essentielles d'une définition de la résilience dans le cadre de modèles de systèmes écologiques et sociaux, et, par conséquent, d'énoncer notre objectif : proposer une définition opérationnelle de la résilience compatible avec la définition conceptuelle de Holling et générale dans le cadre de modèles de systèmes écologiques et sociaux qui tiennent compte de nos ignorances sur leur fonctionnement.

Les chapitres 2 et 3 développent les solutions envisagées.

Dans le chapitre 2, nous justifierons, tout d'abord, notre choix de la théorie de la viabilité comme formalisme adapté à la modélisation de systèmes écologiques et sociaux. Ensuite, nous décrirons et argumenterons la définition de la résilience proposée eu égard aux contraintes imposées par les définitions conceptuelles et aux faiblesses des définitions opérationnelles soulignées dans le chapitre 1.

Pour que la définition de la résilience soit opérationnelle, il faut être capable de l'évaluer. Dans notre définition, le calcul de la résilience se ramène à un calcul de noyau de viabilité, concept essentiel de cette théorie. Cet ensemble peut être décrit analytiquement dans certains cas très simples. Cependant, dans la plupart des cas, seule une approximation numérique est possible. Nous consacrerons le chapitre 3 aux algorithmes de calcul de ces approximations.

Afin d'illustrer nos propos, nous calculerons les valeurs de résilience dans des modèles d'eutrophisation de lacs. Les résultats sont reproduits et commentés dans le chapitre 4.

Nous concluons notre rapport par le chapitre 5 dans lequel nous dresserons le bilan de notre travail de thèse et tracerons les objectifs à court et moyen terme.

# Chapitre 1

## Le développement durable et la résilience

Après la Seconde Guerre mondiale, les économistes et les décideurs des pays de l'hémisphère Nord considèrent la croissance économique fondée sur la technologie et la consommation comme la voie vers la prospérité universelle. Au cours des années 1960, toutefois, il devient évident que les progrès technologiques et la croissance économique ne sont pas obligatoirement bénéfiques. L'écologie<sup>1</sup> se développe en tant que science appliquée et les scientifiques apportent la preuve de la vulnérabilité de la biosphère et des effets nuisibles du gaspillage inhérent aux nouveaux modes de consommation.

Dès lors, la conciliation entre conditions de préservation des habitats et conditions de croissance économique devient un enjeu majeur discuté dans des conférences internationales. L'expression *développement durable*, née lors de ces débats, est aujourd'hui largement adoptée pour désigner les efforts à fournir ou entrepris pour parvenir à cette conciliation.

Les tentatives de définition du développement durable sont nombreuses, cependant sa signification reste vague. Son utilisation fréquente, comme label, attribué souvent sans véritable justification pour promouvoir des activités économiques ou des actions politiques, pose le problème de la distinction entre les actions qui respectent les conditions du développement durable et les autres. Plus généralement, existe-t-il des actions respectant ces conditions ?

Ce qui devrait être fait pour atteindre une société durable est un enjeu de comportement humain, que la science seule ne peut résoudre. Néanmoins, la création d'indicateurs liés au développement durable est à l'intersection de deux problématiques scientifiques, construire des outils d'aide à la gestion et formaliser les concepts liés à la durabilité<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>L'étymologie du mot *écologie* est *Oikos*, la maison, et *Logos*, la science. L'écologie est la « science de l'habitat » ou « la science qui étudie les conditions d'existence des êtres vivants ». L'étymologie du mot *économie* est *Oikos*, la maison, et *Nomos*, la loi. L'économie désigne les lois, l'administration de la maison.

<sup>2</sup>terme préféré à l'expression *développement durable* par la plupart des scientifiques, synonyme de

Parmi les outils d'aide à la gestion, nous nous intéresserons aux outils de compréhension et de prévision et plus particulièrement à la modélisation de systèmes écologiques et sociaux. Parmi les concepts liés à la durabilité, nous choisirons d'étudier une caractéristique de la stabilité, la résilience.

En écologie, deux définitions conceptuelles de la résilience ont obtenu un certain consensus. Les définitions opérationnelles utilisées pour évaluer la résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux sont plus nombreuses, mais présentent toutes des limites importantes. Elles sont soit limitées par les formalismes des modèles auxquels elles sont appliquées, soit issues d'une définition conceptuelle mal adaptée aux systèmes écologiques et sociaux, soit particulières au système considéré.

Notre objectif sera de proposer une définition de la résilience qui ne présente pas ces limites. Pour cela, nous choisirons d'utiliser le formalisme de la théorie de la viabilité.

## 1.1 Le développement durable : une ambition de gestion

### 1.1.1 Historique

La première vague de prise de conscience du lien étroit entre santé humaine et environnement a lieu dans les années 1960 [1, Blutsein (2003)]. Rachel Carson publie, en 1962, un livre dans lequel elle alerte l'opinion publique sur les problèmes de santé liés à la pollution par les pesticides [2]. Sir Frank Macfarlane Burnet donne en 1966 une définition de la durabilité : « The resources of the Earth must be maintained for the use and enjoyment of future generations in a measure not less than we now enjoy » [3].

En 1972, le Club de Rome<sup>3</sup> publie un rapport rédigé à sa demande par une équipe de chercheurs du Massachusetts Institute of Technology. Ce rapport<sup>4</sup> donne les résultats de simulations informatiques sur l'évolution de la population humaine en fonction de l'exploitation des ressources naturelles, avec des projections jusqu'en 2100. Il en ressort que la poursuite pérennité par rapport au temps ou viabilité par rapport aux contraintes.

<sup>3</sup>Le Club de Rome est une association privée internationale créée en 1968 dont l'objet est d'étudier, au niveau mondial, les problèmes des conditions de vie liés au développement économique. Elle regroupe une poignée d'hommes, occupant des postes relativement importants dans leurs pays respectifs et qui souhaitent que la recherche s'empare du problème de l'évolution du monde pris dans sa globalité pour tenter de cerner les limites de la croissance.

<sup>4</sup>Le titre original est « The limits to growth », il est traduit en français dans un registre alarmiste par « Halte à la croissance ! ».

de la croissance économique entraînera au cours du XXI<sup>e</sup> siècle une chute brutale des populations à cause de la pollution, de l'appauvrissement des sols cultivables et de la raréfaction des ressources énergétiques [4, Meadows *et al.* (1972)]. Face à la surexploitation des ressources naturelles liée à la croissance économique et démographique, le Club de Rome prône la croissance zéro. Le développement économique est alors présenté comme incompatible avec la protection de la planète à long terme.

La même année, dans ce climat de confrontation et non de conciliation entre préservation de l'environnement et croissance économique, se tient à Stockholm la Conférence des Nations Unies sur l'Environnement Humain (CNUEH). Pour la première fois sont rassemblés des responsables politiques et des scientifiques pour débattre de problèmes environnementaux mondiaux, tels que la pollution de l'air et de l'eau. Le terme *éco-développement* apparaît. Il insiste sur la nécessité d'intégrer l'équité sociale et la prudence écologique dans les modèles de développement économique du Nord et du Sud. Les principes énoncés à cette conférence sont largement approuvés. Cependant, dix ans plus tard, le programme sur l'environnement des Nations Unies conclut que peu de chemin a été parcouru [5, Clarke et Timberlake (1982)].

Dès 1980, l'Union Internationale pour la Conservation de la Nature et des ressources naturelles (UICN) parle de « Sustainable Development »<sup>5</sup>. Mais l'expression passe presque inaperçue jusqu'à ce qu'elle soit reprise, en 1987, dans le rapport de la Commission Mondiale sur l'Environnement et le Développement (CMED) [6]. Présidente de cette commission, Gro Harlem Brundtland choisit cette expression parce qu'elle associe environnement et développement.

En 1992, la deuxième Conférence des Nations Unies sur l'Environnement et le Développement a lieu à Rio. Elle redéfinit les enjeux identifiés à Stockholm dans la perspective du développement durable.

Depuis cette date, l'expression *développement durable* est adoptée dans le monde entier. Le Sommet Mondial pour le Développement Durable (SMDD) a lieu en 2002 à Johannesburg, en Afrique du Sud. Pour de nombreuses Organisations Non Gouvernementales (ONG)<sup>6</sup>, ce sommet est une occasion manquée, les gouvernements manquant de volonté politique pour adopter des plans d'actions ambitieux. Cependant, les États réaffirment leur engagement à rendre la société mondiale plus humaine, équitable et respectueuse de la dignité de chacun, à faire progresser le développement durable à tous les niveaux. Par rapport à Rio, où l'environ-

<sup>5</sup>traduit à l'époque par développement soutenable.

<sup>6</sup>Les Organisations Non Gouvernementales dont le statut n'est pas clairement défini dans le droit international se caractérisent principalement par l'origine privée de leur constitution, le but non lucratif de leur action, l'indépendance financière, l'indépendance politique et la notion d'intérêt public. Elles exercent leur influence grâce à leur capacité de mobilisation des citoyens.

nement était prédominant, Johannesburg aborde en particulier l'éradication de la pauvreté, l'amélioration de la santé, l'accès à l'eau potable et à l'énergie, ainsi que le partage équitable des bénéfices liés à l'utilisation de la biodiversité. Ce sommet amène un meilleur équilibre entre les trois piliers économique, social et environnemental du développement durable, qui reste le concept majeur [7, Seyfang (2003)].

### 1.1.2 Inquiétudes et critiques

En 1991, alors que le sommet de Rio se prépare, Gibson publie une critique du concept de développement durable, dans un journal publié par une ONG [8]. Il le critique sur trois points : il est vague, peut encourager les hypocrisies et créer des désillusions.

#### *Concept vague*

L'une des caractéristiques les plus remarquables de l'expression *développement durable* est qu'elle prend des significations différentes en fonction des interlocuteurs et des organisations. La littérature est riche en tentatives de définitions et les différentes conceptions sur la signification de cette expression reflètent davantage les positions politiques ou philosophiques de ceux qui proposent des définitions plutôt qu'une approche scientifique objective [9, Mebratu (1998)]. Une définition précise exclurait ceux qui n'y adhèrent pas. Ce flou peut par conséquent être considéré comme une opportunité politique.

#### *L'hypocrisie : le verni vert*

Cette critique concerne la façon dont le langage associé au développement durable est utilisé pour promouvoir des activités économiques comme des actions politiques. Bien sûr, le flou du concept encourage ces hypocrisies en permettant différents avis sur les pratiques durables à mettre en place. Cependant, dans ce cas, la question ne porte pas vraiment sur comment le développement durable est défini en principe mais plutôt sur comment il est mesuré en pratique. Comment peut-on évaluer une affirmation telle que « ce produit respecte l'environnement » ? Comment mesurer et comparer la destruction d'habitats face aux émissions de gaz à effet de serre ou encore aux mauvaises conditions de travail dans les pays en voie de développement ?

#### *Les désillusions*

L'expression *développement durable* a-t-elle un sens même dans sa formulation vague actuelle ? Les limites à la croissance du rapport Brundtland étaient d'ordres biologiques et physiques. Si ces limites sont réelles, il n'y a pas de sens à rechercher un développement qui dure. Hirsh envisage, en outre, dès 1976, des limites sociales à la croissance basées sur l'abondante littérature concernant les conséquences sociales et politiques néfastes de l'industrialisation [10].

Ces arguments ont comme point commun l'idée que si les tendances actuelles durent, les limites écologiques et sociales vont être atteintes. Cependant, l'incertitude est grande concernant les effets des changements politiques, sociaux et technologiques sur ces limites. Prenant comme exemple les processus naturels qui sont parvenus à produire la vie dans des circonstances variées durant des milliards d'années, certains assurent que les progrès technologiques permettront de ne jamais atteindre les limites écologiques. D'autres leur répondent alors qu'ils ne feront que retarder l'échéance [11, Robinson et Mendis (2003)].

### 1.1.3 Science et durabilité

Le sens donné à l'expression *développement durable* dépend de la façon de concevoir les relations homme-nature. Ces conceptions sont parfois si éloignées que certains ont ressenti le besoin d'utiliser un autre terme pour exprimer leurs préoccupations concernant les enjeux écologiques et sociaux. En particulier, les gouvernements et les organisations du secteur privé ont tendance à adopter l'expression *développement durable*, alors que les ONG et le monde académique emploient plus volontiers le terme de durabilité<sup>7</sup> dans les mêmes contextes. Cela est dû au fait que le terme de développement est perçu comme un synonyme de croissance et que, par conséquent, *développement durable* signifie améliorer la croissance et non, la remettre en question. Dans cette perspective, le terme de durabilité attire l'attention non pas sur le développement mais sur la capacité des hommes à continuer à vivre étant données les contraintes environnementales. Nous avons utilisé jusqu'à présent l'expression *développement durable* car c'est l'expression la plus employée dans les grandes instances politiques. Dans la suite de ce travail scientifique, nous emploierons le terme de durabilité.

Ce qui devrait être fait pour atteindre une société durable est un enjeu de comportement humain, qui doit être discuté lors de négociations concernant les futurs souhaités sous des conditions de profonde incertitude. La science ne peut pas résoudre les questions essentielles posées par le concept de durabilité. Cependant, ses contributions, comme celles de l'histoire, peuvent être cruciales pour informer, poser les problèmes et évaluer les implications de différents scénarios [12, Robinson (2004)] [13, Castro (1998)]. En mai 2000, à Tokyo, soixante et une Académies des Sciences du Monde ont signé une déclaration intitulée : « Transition to Sustainability in the 21st Century : The Contribution of Science and Technology ». Tout en reconnaissant que les problèmes impliquent également des actions aux niveaux économique, social et politique, ils insistent tout particulièrement sur les actions que la communauté scientifique et technologique peut mener à court et à long terme. Il est en particulier nécessaire de produire des connaissances nouvelles et de les appliquer avec succès, par exemple, dans le domaine de la santé publique, des sciences sociales mais

<sup>7</sup> « sustainability » en anglais.

aussi de la recherche fondamentale dans les sciences de la Terre et de l'environnement afin d'augmenter notre capacité, aujourd'hui très limitée, à prédire ou à atténuer les conséquences des catastrophes naturelles et des changements écologiques. Enfin, il est essentiel d'intégrer les savoirs de chaque discipline pour aboutir à une recherche et à des applications interdisciplinaires, dédiées à la résolution de problèmes locaux.

## 1.2 Construire des outils d'aide à la gestion

Les organisations ont besoin d'instruments sophistiqués pour construire des représentations adéquates des univers dans lesquels elles évoluent et pour coordonner efficacement leurs actions. L'ensemble de ces instruments est souvent désigné par la métaphore du tableau de bord [14, Malo (1992)][15, Bessire (2000)]. Son utilisation est très répandue dans différents contextes [16, Niven (2003)].

Dans le cadre d'une entreprise, un tableau de bord de gestion est un document d'information, sur mesure, de synthèse, orienté vers le contrôle et la prise de décision [17, Leroy (1998)]. Il doit permettre au responsable d'analyser les situations, d'anticiper les évolutions, de réagir dans des délais brefs. Il comporte des indicateurs de moyens qui mesurent la consommation des facteurs nécessaires à l'obtention de la production, des indicateurs de résultat qui évaluent le niveau de réalisation des missions sur les plans quantitatif et qualitatif et des indicateurs d'environnement qui fournissent des informations externes qui ont une influence sur l'activité du centre concerné et sur les décisions des responsables [18, Sulzer (1985)].

Dans le cadre des Schémas Directeurs d'Aménagement et de Gestion des Eaux (SDAGE)<sup>8</sup>, des tableaux de bord ont également été conçus et réalisés. Ils sont constitués d'un recueil d'indicateurs utilisés pour rendre compte d'une manière synthétique et simplifiée de l'état de l'environnement à un instant donné, pour évaluer les impacts sur le milieu, et rendre compte de la pertinence des actions menées.

La métaphore du tableau de bord laisse supposer qu'il y a un appareil en mouvement à piloter pour atteindre un objectif. Le pilotage est un comportement qui vise un objectif en prenant en compte les variations du contexte pour adapter son action, par exemple, le pilotage d'un véhicule. Le tableau de bord désigne le système de traitement et d'organisation de l'information qui permet de piloter. Dans le cas d'une voiture, il faut sans doute considérer que l'expression *tableau de bord* désigne l'ensemble du cockpit, la vision de la route par le pare-brise ou les rétroviseurs détectant également des informations pertinentes. Dans le cas

<sup>8</sup>Les Schémas Directeurs d'Aménagement et de Gestion des Eaux ont été élaborés de 1992 à 1995, pour chacun des six grands bassins hydrographiques français. Ils déterminent les orientations fondamentales d'une gestion équilibrée de la ressource en eau et les aménagements à réaliser pour les atteindre.

d'un sous-marin ou d'un avion au décollage, ces informations pertinentes ne peuvent être obtenues de la même manière. D'autres systèmes d'acquisition et de traitement des informations, intégrés cette fois au tableau de bord (le sonar, par exemple), sont mis en œuvre pour les obtenir. Ces systèmes utilisent les informations, acquises par des capteurs ou obtenues par des mesures statistiques par exemple, pour produire des images de la réalité d'où sont extraites les informations pertinentes pour piloter.

Le tableau de bord rassemble les valeurs d'indicateurs jugés pertinents. Ces indicateurs sont évalués par des outils d'aide à la gestion qui peuvent être classés selon trois grands axes :

- les outils d'information et d'analyse d'information (systèmes de documentation, de compréhension, de prévision, bases de données, analyse de données,...)
- les outils d'aide à la prise de décision (systèmes expert, logiciels de support de choix,...)
- les systèmes de communication et de coopération (systèmes de travail coopératif à distance, systèmes de négociation, ...)

Certains systèmes sont très spécialisés, mais d'autres tentent d'intégrer plusieurs fonctionnalités de ces trois axes.

### **1.2.1 Construire des outils de compréhension et de prévision**

Parmi les outils d'information et d'analyse d'information, les outils de compréhension et de prévision ont pour but de montrer sur un monde artificiel la diversité des dynamiques locales et l'existence éventuelle de processus de régulation. Ils doivent permettre également de comparer les résultats de différents scénarios. Ces outils produisent une image de la réalité passée et présente à partir de laquelle ils évaluent les indicateurs jugés pertinents.

Dans le cadre des systèmes écologiques et sociaux ou anthroposystèmes, une meilleure connaissance des dynamiques des écosystèmes mais également des interactions entre les hommes et les milieux est nécessaire pour interpréter correctement leur état actuel et émettre des scénarios pour le futur : si les hommes par leurs pratiques ont agi sur le milieu et construit leur « nature », les sociétés se sont également adaptées aux contraintes des milieux où elles vivent (Programme Environnement, Vie et Sociétés (PEVS) 1998-2002).

### **1.2.2 Modéliser les systèmes écologiques et sociaux**

La plupart des recherches sur les ressources naturelles utilisent la modélisation et la simulation. Les finalités sont diverses : les modèles peuvent être utilisés à des fins de contrôle et de prédiction ou à des fins de compréhension et de confrontation de points de vue et jouent

différents rôles dans la gestion des systèmes écologiques et sociaux [19, Weber (1995)].

Ils peuvent être utilisés pour concevoir des structures d'ingénierie, prévoir des changements dans les écosystèmes, estimer des paramètres statistiques, résumer de façon détaillée nos connaissances sur les mécanismes et bien d'autres applications encore. De tels modèles sont conçus pour réaliser une tâche précise.

Ils peuvent également être utilisés comme des caricatures de la réalité permettant de faciliter les discussions et de clarifier les échanges en contribuant à la compréhension collective du problème et des solutions envisagées. Comme les métaphores dans une narration, ces modèles illustrent les traits saillants du comportement du système plutôt que d'apporter des réponses à des problèmes spécifiques.

Cette activité de modélisation peut emprunter le formalisme classique des équations différentielles, très souvent utilisé pour représenter les flux de matière, d'énergie, d'information ou de monnaie<sup>9</sup>, mais également des entités en interactions<sup>10</sup>.

L'accroissement de puissance de calcul et de mémoire des machines permet de développer des modèles de plus en plus fins, et particulièrement des modèles individus-centrés (IC) représentant l'ensemble des entités du système et leurs interactions. Les automates cellulaires, modèles IC très simples, ont été utilisés pour modéliser des dynamiques spatialement explicites<sup>11</sup>. L'utilisation de modèles IC plus complexes est devenue très courante dans la modélisation de dynamiques forestières [25, Su *et al.* (2001)]. Les outils de caractérisation des structures spatiales, tels les Systèmes d'Information Géographique (SIG) ou les logiciels d'analyse spatiale peuvent être couplés à des outils de simulation des interactions, tels les automates cellulaires ou les systèmes multi-agents pour intégrer les informations géographiques dans la modélisation (Cirad-projet Green (gestion des ressources renouvelables, environnement), créé en 1993 par Jacques Weber).

De tels modèles ont, cependant, souvent un comportement global complexe et difficile à comprendre. Castellano *et al.* (2000) [26] ont réussi à réduire le comportement du modèle de diffusion de traits d'Axelrod (1997) [27] à celui d'un ensemble d'équations maîtresses. Cependant, Martin *et al.* (2004) [28] montrent la difficulté de prévoir le comportement des variables agrégées à partir des dynamiques individuelles et d'interactions dans un modèle de diffusion d'opinions proche de celui d'Axelrod.

La question du choix de l'échelle pour la modélisation est abordée par Edwards *et al.* (2003) [29]. Les auteurs mettent en évidence des domaines dans l'espace des paramètres dans lesquels les comportements d'un modèle individu-centré de diffusion sont comparables

<sup>9</sup>dans des modèles de fonctionnement de lacs [20, Carpenter *et al.* (1999)] ou de tourbières [21, Hilbert *et al.* (2000)], par exemple.

<sup>10</sup>des proies et des prédateurs [22, Alonzo (2002)] ou des pays face aux pollutions transfrontalières [23, Missfeldt (1999)], par exemple.

<sup>11</sup>des dynamiques d'espèces d'herbes dans [24, Matsinos et Troumbis (2002)].

à ceux du modèle agrégé associé.

### 1.3 Formaliser les concepts liés à la durabilité

Le sens donné au concept de durabilité dépend de la façon de concevoir les relations homme-nature. Ce flou peut être envisagé comme une opportunité politique. Il est nécessaire, en revanche, de formaliser les indicateurs pertinents pour éviter les malentendus (section 1.1).

Ces indicateurs liés aux systèmes économiques et sociaux peuvent être les résultats de mesures directes effectuées sur ces systèmes (nombre d'espèces par exemple), de calculs effectués à partir de ces mesures (la production totale de biomasse par exemple). Ils peuvent également être déduits des propriétés des systèmes dynamiques modélisant ces écosystèmes : la présence d'un équilibre asymptotiquement stable pour lequel toutes les populations sont présentes peut être un indicateur concernant la possibilité de coexistence entre ces différentes populations, question fondamentale en biologie. D'autres réponses peuvent être apportées en associant à la notion de coexistence des propriétés des systèmes dynamiques différentes : la persistance introduite par Freedman et Waltman (1977) [30] et la permanence introduite deux ans plus tard par Schuster *et al.* [31] (équivalente à la persistance uniforme) sont définies dans le cadre de systèmes dynamiques généraux [32, Butler *et al.* (1986)] et également utilisées pour étudier la survie ou l'extinction de populations [33, Freedman et Waltman (1984)]<sup>12</sup>.

Les transformations de la nature d'origine humaine s'intensifiant, la question du maintien des flux de ressources issues des écosystèmes indispensables à l'humanité et à toute autre forme de vie est toujours plus pertinente. Par conséquent, les caractéristiques des réponses de ces systèmes aux perturbations conduisent également à des indicateurs utiles. L'existence de plusieurs modes de fonctionnement des écosystèmes est reconnue depuis les années 1960. Ces différents modes peuvent correspondre à différents assemblages d'espèces dans une communauté [36, Scheffer *et al.* (1993)] ou à différentes densités dans un même assemblage [37, Loenardsson (1994)]. Des différences dans l'histoire du développement peuvent engendrer des modes de fonctionnement différents, mais ces systèmes peuvent également passer d'un mode à l'autre à la suite de perturbations [38, May (1977)]. Très souvent, ces changements sont soudains, dus à des effets de seuils [39, Wissel (1984)].

Après des années de pêche intensive, les stocks de sardines ont brusquement disparu des côtes de la Californie et du Japon à la fin des années 1940 comme les stocks d'anchois des côtes péruviennes et chiliennes dans les années 1970 [40, Botsford *et al.* (1997)].

Des modifications des conditions physico-chimiques peuvent également conduire à des discontinuités écologiques. L'exemple le plus connu est celui des lacs tempérés qui présentent

<sup>12</sup>Voir également [34, Jordán *et al.* (2003)][35, Jansen et Sigmund (1998)].

deux types de fonctionnements : l'un caractérisé par une eau claire et la présence de végétations aquatiques diverses, l'autre caractérisé par une eau croupie avec une biomasse d'algues très importante [41, Weisner *et al.* (1997)]. Au-delà d'une concentration-seuil en nutriments, le passage d'un fonctionnement du premier type au second est très probable.

Les stratégies de gestion des écosystèmes peuvent également les rendre plus instables. Les feux de forêts étant combattus de façon de plus en plus efficace, la biomasse des essences croît offrant les conditions de feux d'intensités plus fortes qu'auparavant qui peuvent engendrer la disparition de la forêt au profit de prairies [42, Holling (1986)].

L'invasion d'un territoire par une nouvelle espèce peut drastiquement modifier les caractéristiques des communautés qui le peuplaient : à la suite de la construction de canaux au XIXe siècle, les lamproies ont envahi les Grands Lacs. Leur activité de prédation a considérablement diminué la quantité de poissons susceptibles d'être pêchés [43, Aron et Smith (1971)].

### 1.3.1 Formaliser le concept de stabilité

De nombreuses significations sont attachées au concept de stabilité. Dans la théorie des systèmes dynamiques, un état d'équilibre est défini comme stable au sens de Lyapunov si toute évolution reste aussi près que souhaité de l'équilibre lorsqu'elle est issue d'un état suffisamment proche de cet équilibre. Un état d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable au sens de Lyapunov et si toute évolution converge vers l'état d'équilibre lorsqu'elle est issue d'un état suffisamment proche de cet équilibre. Dans le contexte des systèmes écologiques et sociaux, le concept de stabilité est également utilisé bien que manifestement ces systèmes évoluent. Pour justifier cet emploi, l'étude de la stabilité est associée à une échelle de temps qui dépend du système considéré et durant laquelle ce système peut être considéré à l'équilibre (les flux de matières et d'énergie sont stationnaires).

La stabilité est un concept majeur et son lien avec un autre concept majeur, la biodiversité, est l'une des questions centrales en écologie. L'idée que la richesse des espèces est source de stabilité écologique a été proposée par Darwin (1859) [44], reprise par MacArthur (1955) [45] et modélisée par May (1973) [46]. Plus récemment, Tilman (1996) et Tilman *et al.* (1996) ont montré expérimentalement sur des systèmes de petites tailles, sur des périodes brèves qu'accroître la richesse des espèces augmente la stabilité de certaines fonctions réalisées par le système mais diminue la stabilité de la population [47, 48]. Différents types de modèles tentent de décrire comment un accroissement de la richesse des espèces accroît la stabilité<sup>13</sup>.

Parmi les propriétés qui caractérisent la stabilité, la résistance représente l'intensité de la

<sup>13</sup>Voir [45, MacArthur (1955)][49, Lawton (1994)][50, Ehrlich et Ehrlich (1981)][51, Walker (1992)].

perturbation nécessaire pour éloigner le système de l'équilibre d'une unité de distance [52, Tilman et Downing (1994)]. Le temps mis par le système pour retourner dans un voisinage de l'équilibre après en avoir été éloigné par une perturbation, est également un concept important [53, Pimm (1984)].

### 1.3.2 Formaliser le concept de résilience

Dans le domaine des systèmes écologiques et sociaux, deux définitions différentes du concept de résilience ont obtenu un certain consensus.

Dans la première définition, la résilience est le temps mis par le système pour retourner dans un voisinage de l'équilibre après avoir été éloigné de cet équilibre par une perturbation [53, Pimm (1984)]. Cette définition met l'accent sur les concepts d'équilibre, de stabilité des équilibres et sur les propriétés du système au voisinage d'un équilibre stable. C'est une transposition de l'idée d'équilibre des forces de la physique au monde naturel. Son champ d'application est limité aux systèmes linéaires ou aux systèmes non-linéaires au voisinage d'un équilibre stable où une linéarisation est valide. Holling (1996) la nomme « engineering resilience » [54], considérant qu'envisager, concevoir et contrôler un système possédant un équilibre global relève de l'ingénierie.

La seconde définition met l'accent sur les conditions loin des équilibres où des instabilités peuvent faire passer le système dans un autre domaine de stabilité correspondant à un autre type de comportement. La résilience est alors mesurée par l'intensité maximale de la force que le système peut absorber sans changer de comportement, de fonctions, de processus de régulation [55, Holing (1973)]. Holling (1996) nomme cette définition de la résilience « ecosystem resilience » ou « ecological resilience » [54]. Au-delà de son nom, Levin *et al.* (1998) soulignent son intérêt dans l'étude de systèmes modélisés à composantes écologiques et économiques [56]. L'objectif sous-jacent est de maintenir le système entre certaines bornes plutôt qu'en un point stable.

L'« ecological résilience » peut être souhaitable ou non : une ressource polluée ou une dictature peuvent être très résilients. Dans la perspective de la durabilité, le fait d'accroître la résilience des états souhaités diminue l'intensité des dommages causés par d'éventuelles perturbations.

La capacité d'un système écologique et social à conserver son mode de fonctionnement dépend des variables qui contrôlent les frontières de ces différents modes, de l'intensité et de la fréquence des perturbations considérées, de l'échelle de temps [57, Carpenter *et al.* (2001)], de la distribution des espèces ou plutôt des fonctions qu'elles réalisent, à l'intérieur d'une même échelle de temps et d'espace, et entre les différentes échelles [58, Peterson (1998)] .

## 1.4 Revue des définitions de la résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux

La résilience a plusieurs niveaux de signification : concept lié à la durabilité, propriété de modèles dynamiques ou quantité mesurable de systèmes écologiques et sociaux. La définition d'indicateurs opérationnels, c'est à dire quantifiables, à partir de modèles de systèmes écologiques et sociaux a reçu relativement peu d'attention [57, Carpenter *et al.* (2001)].

Nous regroupons, tout d'abord, les définitions issues de la définition conceptuelle de Pimm, liées aux caractéristiques du retour à l'équilibre stable après une perturbation. Nous rassemblons ensuite les définitions issues de la définition de Holling, liées aux domaines de stabilité des modèles. Nous distinguons les définitions appliquées aux modèles de type équations différentielles et à ceux de type individus-centrés.

### 1.4.1 Définitions opérationnelles issues de la définition de Pimm

#### Modèles composés d'équations différentielles

Lorsque les modèles sont composés d'équations différentielles, les définitions opérationnelles les plus utilisées sont basées sur les valeurs propres de la dynamique linéarisée au voisinage de l'équilibre.

Soit  $\mathbf{A}$  l'approximation linéaire de la dynamique à l'équilibre, pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable, il faut et il suffit que les parties réelles de toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  soient strictement négatives.

Soit  $\lambda_1(\mathbf{A})$  la valeur propre de  $\mathbf{A}$  avec la plus grande partie réelle. Asymptotiquement, la norme de la distance à l'équilibre décroît d'un facteur  $1/e$  en un intervalle de temps de  $-1/Re(\lambda_1(\mathbf{A}))$ . Pimm et Lawton (1977) [59] ont donc considéré que  $-1/Re(\lambda_1(\mathbf{A}))$  peut être une mesure du temps de retour caractéristique. En la définissant comme inverse de ce temps de retour,  $-Re(\lambda_1(\mathbf{A}))$  peut être une mesure de la résilience du système.

DeAngelis (1980) a également utilisé cette définition de la résilience pour étudier les liens entre structure et résilience dans des modèles non linéaires de réseaux trophiques et de cycles de nutriments [60].

Pour compléter cette définition, qui est une propriété asymptotique, Neubert et Caswell (1997) [61] ont proposé des indices permettant de caractériser le régime transitoire qui suit la perturbation : la réactivité est le taux maximal instantané auquel la perturbation peut être

amplifiée, l'amplification maximale est le facteur par lequel la perturbation qui est le plus amplifiée est amplifiée.

### Modèles de type individus-centrés

Dans les modèles de ce type, les études sont réalisées par simulation et la résilience est évaluée comme inverse du temps nécessaire pour que système retrouve un état proche de celui qu'il avait avant perturbation. La définition de proche dépend des cas.

Pour étudier la résilience du système écologique et social de la Baie Tongoy (Chilie), Ortiz et Wolff (2002) ont choisi d'utiliser les logiciels `ECOPATH II` et `ECOSIM`. Wolff (1994) avait auparavant utilisé ces logiciels pour modéliser les réseaux trophiques de cette baie [62]. Le logiciel `ECOPATH II` a été développé par Christensen et Pauly (1992). Il permet de calculer les valeurs d'équilibre des flots de matières et d'énergie entre différents compartiments. Le nombre de ces compartiments pouvant aller jusqu'à plusieurs dizaines, il permet d'intégrer les nombreuses variables que contient un système écologique et social. Walters *et al.* (1997) ont développé l'extension dynamique d'`ECOPATH II` appelée `ECOSIM` [63] qui permet de simuler la réponse du système entier à une perturbation. Ortiz et Wolff (2002) évaluent la résilience par simulation. C'est le temps mis par le système après perturbation pour atteindre à nouveau l'état d'équilibre (unique), calculé par `ECOPATH II` avant cette même perturbation [64].

Pérez-España et Arreguí-Sánchez (2001) utilisent également un modèle programmé avec `ECOSIM` pour étudier par simulation les liens entre maturité et résilience. Ils utilisent comme définition de la résilience la tangente inverse du quotient de la résistance par le temps de retour. La résistance est l'inverse de la différence entre les valeurs extrémales de la biomasse après perturbation et le temps de retour est le temps mis pour retrouver une quantité de biomasse proche de la valeur originale [65].

Pour prendre en compte la dimension spatiale des processus de compétition et de dispersion des semences dans une prairie, Matsinos et Troumbis (2002) ont utilisé un modèle de type automate cellulaire : d'un point de vue abstrait, des règles sont données qui gouvernent l'évolution de l'état d'une cellule en fonction de ceux des cellules voisines. Ils étudient la résilience des communautés simulées face à des trous de différentes tailles dans la prairie effectués après deux cents pas de simulation pour s'assurer qu'un état stationnaire a été préalablement atteint. Contrairement au cas précédent, il n'y a pas d'équilibre global et l'état stationnaire atteint après la perturbation est très différent de celui d'avant la perturbation. La résilience est alors mesurée comme l'inverse du temps nécessaire à la communauté simulée pour coloniser à nouveau un pourcentage fixé (80% ou 90%) de la surface de la prairie [24].

Dans la même perspective, Ludwig *et al.* (2001) ont comparé la résilience de la savane boisée et de la prairie d’Australie face au piétinement des troupeaux [66], en utilisant SAVANNA un modèle composé de sous-systèmes pour l’équilibre des ressources, la production végétale et les dynamiques de populations, qui prend explicitement en compte les relations spatiales [67, Coughenour (1992)]. La comparaison s’effectue en comparant, après arrêt du piétinement, les pentes des courbes simulées de l’évolution de la biomasse totale qui représentent la vitesse de restauration.

## 1.4.2 Définitions opérationnelles issues de la définition de Holling

### Modèles composés d’équations différentielles

Faisant une interprétation légèrement plus large du concept d’« ecological resilience » de Holling, Beddington *et al.* (1976) identifient la résilience à l’intensité de la perturbation d’une quantité spécifique qu’une propriété du système peut supporter sans subir de changements qualitatifs [68].

Wollking *et al.* (1988) ont utilisé cette définition pour étudier la résilience dans un modèle proie-prédateur face à des changements de qualité nutritive de la proie traduits par des modifications du taux de conversion de proies en naissances de prédateurs [69]. La résilience dépend de l’étendue des plages de paramètres donnant un certain comportement qualitatif. Plus la plage est étendue plus la résilience est grande face à une modification de ces paramètres.

Suivant la même idée, Ludwig *et al.* (1997) utilisent les informations contenues dans les diagrammes de bifurcation pour mesurer la résilience. Ces diagrammes de bifurcation contiennent plus d’informations que les analyses de sensibilité et ils peuvent être obtenus par des études numériques réalisées par des logiciels spécialisés [70]. Les modifications de la résilience sont dues à des variables évoluant lentement, considérées comme des paramètres dans ces diagrammes, qui influent sur le diagramme des phases. Aux points de bifurcation (dans l’espace des paramètres), des équilibres changent de nature ou disparaissent. La dynamique du système est brusquement modifiée. C’est pourquoi Ludwig *et al.* (1997) utilisent la distance aux points de bifurcations comme mesure de la résilience [70].

Collings et Wollkind (1990) comme van Coller (1997) ont étudié la résilience de différents phénomènes stables de leurs modèles. Dans ce cas, les perturbations considérées ne concernent pas les paramètres du modèle mais les variables de l’espace des phases. La résilience est évaluée comme inversement proportionnelle à la taille des bassins d’attraction [71, 72].

Ces mesures évaluent la résilience de propriétés qui correspondent à des bassins d'attraction. Notons que si en assimilant mode de fonctionnement et bassin d'attraction ces définitions sont compatibles avec la définition de Holling, la taille des bassins est nécessaire mais non suffisante pour évaluer l'intensité de la force nécessaire pour faire basculer le système dans un autre bassin d'attraction. La résistance qui mesure l'intensité de la force extérieure nécessaire pour déplacer le système d'une distance donnée est également utile.

### **Modèles de type individus-centrés**

Pour étudier différentes gestions d'un lac, Janssen et Carpenter (1999) ont conçu un modèle multi-agent [73]. Chaque agent est susceptible par son activité d'occasionner des rejets de phosphates dans le lac. Leur quantité dépend des croyances des agents, mais aussi des structures des organisations et des choix de gestion. Les résultats sont des courbes obtenues par simulation. Un choix de gestion ou une organisation est qualifiée plus résiliente qu'une autre lorsque les valeurs maximales atteintes par les quantités de phosphates dans le lac au cours du temps de simulation sont plus faibles. Autrement dit, un système est plus résilient lorsque les courbes simulées restent plus éloignées des frontières du bassin d'attraction.

### **1.4.3 Limites**

#### **Limites liées aux formalismes des modèles**

**Les modèles déterministes ne tiennent pas compte de nos ignorances sur les dynamiques des systèmes écologiques et sociaux.** Partant de la constatation que, dans les systèmes écologiques et sociaux, les perturbations sont continues et les équilibres jamais atteints, Yves (1995) propose d'étendre la définition de la résilience de Pimm aux systèmes stochastiques [74]. Par analogie avec le temps de retour caractéristique des systèmes dynamiques déterministes, il définit la résilience stochastique comme le quotient de la variabilité des densités de populations par la variabilité des taux de croissance de ces populations. Il y a d'autres définitions de la résilience stochastique : Xu et Li (2002) définissent la résilience stochastique comme la moyenne des carrés des écarts aux équilibres instables dépendants du temps [75]. Ces définitions, obtenues à partir de la définition de Pimm, ont le mérite de s'appliquer à des séries temporelles ou à des modèles stochastiques capables de rendre compte dans une certaine mesure de nos ignorances sur le comportement du système.

**Les modèles intègrent des lois de régulation fixées *a priori*.** Dans les modèles déterministes, les lois de régulation sont nécessairement fixées *a priori*. Les résultats concernant la résilience ne sont donc valables que pour la loi fixée.

Dans les modèles de type individu-centrés intégrant une part d'incertitude concernant le comportement des agents, les règles de décision sont fixées mais l'intervention du hasard produit une suite d'actions non connues *a priori*. Néanmoins, les résultats concernant la résilience obtenus par simulation ne concernent que les réalisations des processus stochastiques propres à ces simulations.

Dans leur modèle de système économique et environnemental, Brock *et al.* (2002) intègrent l'influence des actions des décisionnaires sur l'état du système. Ces actions n'obéissent pas à une règle prédéfinie, cependant, la loi de rétroaction est obtenue en tant qu'argument d'une optimisation et l'étude de la résilience vient ensuite [76].

Or, lorsque les lois de régulation sont définies *a priori*, les résultats ne concernent que ces lois de régulation particulières. Ils peuvent permettre de comparer les valeurs de la résilience associées à ces lois entre elles mais pas de déterminer l'ensemble des lois satisfaisant un critère associé à la résilience.

En outre, Bonneuil (2003) a montré que le choix de la loi de régulation dans le modèle proie-prédateur bien connu peut être considéré comme arbitraire car beaucoup d'autres lois auraient produit le même type de comportement. Cette critique est d'autant plus pertinente que les systèmes modélisés ont des composantes sociales et économiques [77].

### **Limites liées aux définitions de la résilience**

**Les définitions opérationnelles issues de la définition conceptuelle de Pimm ne sont pas adaptées aux systèmes écologiques et sociaux.** L'« engineering resilience » s'intéresse aux conditions au voisinage d'un équilibre stable et mesure les effets de petites perturbations. Or, les écosystèmes sont des systèmes complexes qui n'ont pas un mais plusieurs domaines de stabilité [78, Bengtsson (2002)]. En outre, il peut ne pas y avoir d'équilibre stable vers lequel retourner mais un attracteur périodique ou chaotique. Par ailleurs, les perturbations subies par ces systèmes sont parfois de vigoureuses secousses plutôt que de légères vibrations. L'« engineering resilience » étudie de petites portions du paysage de stabilité du système et n'aide pas à comprendre les réponses des systèmes à de fortes perturbations. Le concept d'« engineering resilience » est par conséquent mal adapté à l'étude des systèmes écologiques et sociaux.

En revanche, l'« ecological resilience » se concentre sur les possibilités de transition entre états appartenant à différents ensembles caractérisés par leurs structures et leurs processus d'organisation. Elle s'intéresse aux contours, aux comportements loin des équilibres. Le concept de durabilité étant plus pertinent pour les systèmes stochastiques loin de l'équilibre que pour les systèmes déterministes à l'équilibre [56, Levin *et al.* (1998)], le concept d'« ecological resilience » est par conséquent mieux adapté aux études des systèmes écologiques et

sociaux liées à la durabilité.

**Les définitions ne sont pas généralisables.** Les définitions utilisées avec des modèles composés d'équations différentielles comme celles liées aux valeurs propres des systèmes linéarisés ou celles liées aux propriétés issues des diagrammes de bifurcation sont générales, c'est à dire qu'elles sont utilisables avec tous les modèles de ce type quel que soit le système réel associé.

La grande majorité des définitions utilisées avec des modèles de type individus-centrés ne sont pas généralisables. Lorsque la définition de la résilience est l'inverse du temps mis par les simulations pour qu'une variable agrégée du modèle atteigne un certain pourcentage de sa valeur avant la perturbation, la justification du choix de la variable agrégée à considérer est spécifique au problème étudié.

Or, comme la comparaison entre différents systèmes peut être productrice de connaissances, il y a un véritable bénéfice à utiliser des définitions applicables à différents systèmes écologiques et sociaux [57, Carpenter *et al.* (2001)].

## Conclusion

Des définitions opérationnelles de la résilience existent mais elles sont :

- soit associées à des modèles de systèmes écologiques et sociaux qui n'intègrent pas les incertitudes sur les comportements du système ou fixent les lois de régulation *a priori*,
- soit basées sur la définition conceptuelle de Pimm, le concept d'équilibre et les petites perturbations, mal adaptés aux systèmes écologiques et sociaux,
- soit spécifiques à un problème donné, et par suite, difficilement généralisables.

## 1.5 Objectif de la thèse

L'objectif de cette thèse est de proposer une définition opérationnelle de la résilience,

- compatible avec la définition conceptuelle de Holling qui ne présuppose pas que ces systèmes sont à l'équilibre, ni que les perturbations subies sont petites,
- générale dans le cadre de modèles de systèmes écologiques et sociaux capables de prendre en compte nos ignorances sur le fonctionnement de ces systèmes ainsi que l'ensemble des lois de régulation possibles *a priori*.

## 1.6 Démarche

Pour atteindre cet objectif, nous effectuons trois choix essentiels. Ces choix concernent le formalisme des modèles de systèmes écologiques et sociaux, la définition conceptuelle de référence et la méthode de calcul.

Pour que la définition de la résilience soit générale, dans le cadre de modèles de systèmes écologiques et sociaux qui tiennent compte de nos ignorances sur leur fonctionnement et ne sont pas contraints de fixer les lois de régulation *a priori*, nous choisissons le cadre mathématique de la théorie de la viabilité qui permet d'étudier de tels modèles. Nous présenterons cette théorie, plusieurs de ses applications et les théorèmes principaux dans la section 2.1.

Pour que la définition de la résilience soit compatible avec la définition conceptuelle de Holling, nous suivrons les recommandations de Ludwig *et al.* (1997) [70] et de Carpenter *et al.* (2001) [57]. Nous rappellerons ces recommandations avant de présenter le principe et la formulation mathématique de la définition proposée dans la section 2.2.

Pour que la définition de la résilience soit opérationnelle, nous étudierons les algorithmes capables de l'évaluer. Dans la définition que nous proposons, le calcul de la résilience se ramène à un calcul de noyau de viabilité, concept essentiel de cette théorie. Dans les cas simples, cet ensemble peut être décrit analytiquement. Cependant, dans la plupart des cas, seule une approximation numérique est possible. Nous reprendrons le principe de l'algorithme de viabilité de Saint-Pierre (1994) [79] que nous présenterons dans la section 3.1. Pour traiter des problèmes de plus grande dimension, diminuer le temps de calcul ou améliorer la qualité de l'approximation, nous réaliserons plusieurs modifications décrites dans le chapitre 3.

# Chapitre 2

## La résilience dans le formalisme de la viabilité

Nous présenterons tout d'abord le formalisme des modèles auxquels notre définition de la résilience va s'appliquer. Nous justifierons le choix de la théorie de la viabilité en soulignant ses intérêts eu égard aux limites identifiées dans la section 1.4.3, de certains formalismes utilisés pour modéliser des systèmes écologiques et sociaux. Nous illustrerons les possibilités offertes avec plusieurs applications issues de la littérature et rappellerons les théorèmes principaux qui nous seront utiles.

Nous proposerons ensuite, dans le cadre de la théorie de la viabilité, une définition de la résilience compatible avec la définition conceptuelle de Holling : nous reprendrons les recommandations de Ludwig *et al.* (1997) [70] et de Carpenter *et al.* (2001) [57], puis exposerons le principe de notre définition et préciserons la formulation mathématique. Nous montrerons, en particulier, que, suivant notre définition, la résilience se caractérise à l'aide des concepts de noyau de viabilité et noyau discriminant.

### 2.1 La théorie de la viabilité

#### 2.1.1 Un formalisme adapté à la modélisation de systèmes écologiques et sociaux

Nous avons vu, dans la sous-section 1.4.3, que les modèles de systèmes écologiques et sociaux doivent pouvoir prendre en compte non seulement notre ignorance de l'environnement futur du système, mais également l'absence de déterminisme (y compris l'impossibilité

de décrire totalement les dynamiques du système) : notre ignorance des lois reliant certains contrôles aux états du système et la diversité des dynamiques possibles du système.

La théorie de la viabilité s'intéresse précisément à l'évolution de l'état de systèmes contrôlés, gouvernés par des dynamiques non-déterministes et soumis à des contraintes : la vitesse dépend de l'état du système de manière multivoque, autrement dit, à un état du système est associé un ensemble de vitesses. La vitesse effective, qui appartient à cet ensemble, dépend également du choix des contrôles et d'éventuelles perturbations.

La théorie de la viabilité analyse la compatibilité entre les dynamiques et l'ensemble des contraintes sur les états. Elle détermine également l'ensemble des contrôles qui permettent d'empêcher le système de violer ces contraintes. Depuis le début des années 1980, des mathématiciens du Centre de Recherche Viabilité, Jeux, Contrôle<sup>1</sup> ont démontré les théorèmes de viabilité qui permettent d'obtenir des procédures de sélection d'*évolutions viables*, i.e., de caractériser les connexions entre la dynamique et les contraintes qui garantissent l'existence d'au moins une solution respectant les contraintes<sup>2</sup>. Ces théorèmes procurent les processus de régulation qui maintiennent la viabilité et aussi, au fur et à mesure que le temps passe, améliore l'état du système en fonction de critères de préférence. Nous verrons dans la section suivante, 2.2, comment les *noyaux de viabilité* permettent d'étendre la définition des propriétés étudiées lors de l'évaluation de la résilience, à d'autres ensembles que les bassins d'attraction<sup>3</sup>.

## 2.1.2 Plusieurs applications issues de la littérature

Les techniques provenant de la théorie de la viabilité sont appliquées dans différents domaines comme l'étude de systèmes non linéaires, les problèmes de contrôle et les jeux différentiels.

Aubin *et al.* (1991) étudient les conditions de pérennité du système de retraites [81]. Le système modélisé est composé des actifs et des inactifs, la dynamique tient compte du fait qu'une partie du revenu des actifs est versée aux retraités. Des questions d'équité et de pouvoir d'achat constituent les contraintes. Le noyau de viabilité de l'ensemble de ces contraintes est composé des états à partir desquels le système des retraites est viable (les actifs comme les retraités ont un pouvoir d'achat suffisant garanti).

<sup>1</sup>Centre de Recherche de l'Université Paris Dauphine.

<sup>2</sup>Voir en particulier Aubin (1991) [80].

<sup>3</sup>Voir les définitions opérationnelles de la résilience de Ludwig *et al.* (1997) [70] et van Coller (1997) [72] décrites dans la section 1.4.2.

À partir des équations classiques de Lotka-Volterra, Bonneuil et Müllers (1997) modélisent plusieurs jeux dynamiques entre prédateurs et proies liés à des ensembles de contraintes différents en fonction des objectifs : soit leur viabilité individuelle, soit leur coexistence. Ils étudient les rétroactions qui permettent au système de rester dans ces ensembles de contraintes [82].

Le terme d'interaction dans ce modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra produit des solutions dans lesquelles deux espèces coexistent. Bonneuil (2003) étudie les conditions que le terme d'interaction (ou fonction de correction) doit satisfaire pour que la coexistence soit possible, autrement dit, pour que l'ensemble des états où les deux espèces coexistent soit un domaine de viabilité [77]. Il montre que la fonction de correction proposée par Lotka-Volterra est une parmi celles qui satisfont ces conditions.

Plus proche de notre problématique, Aubin et Sigmund (1988) montrent que la notion de viabilité permet d'étendre celle de permanence<sup>4</sup> au-delà des systèmes déterministes et de prendre ainsi en compte notre ignorance de l'environnement futur du système et des lois reliant certains contrôles à l'état du système, comme la diversité des dynamiques possibles du système [83]. Pour étudier un modèle dynamique lié à la gestion de ressources renouvelables, Béné *et al.* (2001) utilisent le concept de noyau de viabilité pour déterminer, lorsque cela est possible, les options de gestion à choisir pour garantir la pérennité du système. Ils soulignent, en particulier, les configurations de surexploitation irréversible conduisant à l'extinction de la ressource [84].

Dans la même perspective, Mullon *et al.* (2004) suivent une approche de type viabilité pour modéliser des écosystèmes marins. Ils montrent comment le noyau de viabilité peut être utilisé pour définir les bons états en indiquant ceux qu'il faut absolument éviter [85].

### 2.1.3 Des concepts et théorèmes principaux utiles pour notre définition de la résilience

Cette sous-section débute par le rappel de la définition du concept d'*évolution viable*. Dans le cas d'un système contrôlé dont l'évolution de l'état dépend de cet état, mais également d'actions extérieures maîtrisables, le sous-ensemble formé des états desquels part au moins une solution viable est appelé *noyau de viabilité*. Ce sous-ensemble peut être caractérisé par des conditions de tangentialité. Les problèmes d'optimisation en horizon infini comme la fonction de temps de crise minimal peuvent être résolus par la détermination de noyaux de viabilité de systèmes auxiliaires.

L'évolution de l'état du système peut également être influencée par des perturbations non

<sup>4</sup>Voir section 1.3.

maîtrisables. Ces perturbations peuvent être interprétées comme le fait d'une nature indifférente ou comme l'écart entre la dynamique réelle et la dynamique modélisée, dû à nos ignorances de certains comportements du système. Dans ce contexte non coopératif, le concept d'état viable qui suppose implicitement que tous les processus de régulation peuvent être choisis, n'a plus de sens. Le concept pertinent est celui de *noyau discriminant* qui peut également être caractérisé par des conditions de tangentialité. Les fonctions valeurs associées à ces jeux différentiels peuvent être calculées à l'aide de noyaux discriminants ou d'intersections de noyaux de viabilité de systèmes auxiliaires.

### Le concept d'évolution viable

Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  l'espace des états du système. Les évolutions  $x(t)$  décrivent l'état du système en fonction du temps  $t \in R_+ := [0, +\infty[$ . Aubin (1991) définit le concept d'évolution viable dans un ensemble de contraintes  $K \subset X$  [80].

**Définition 2.1.3.1** *La trajectoire d'une évolution viable est contenue dans  $K$  :*

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) \in K. \tag{2.1}$$

### Étude d'un système contrôlé

**Description de la dynamique.** L'évolution de l'état du système dépend de cet état, mais elle peut également être influencée par des actions extérieures appelées *contrôles*. Ces contrôles sont appelés *commandes* lorsqu'ils sont le fait d'acteurs ou *régulons* lorsque la source n'est pas vraiment identifiée. L'évolution de l'état du système est donc gouvernée par un système dynamique de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) & \text{(action)} \\ u(t) \in U(x(t)) & \text{(retroaction)} \end{cases} \tag{2.2}$$

prenant en compte le fait que les différents contrôles  $u$  qui peuvent intervenir au temps  $t$  appartiennent à un ensemble  $U(x(t))$  qui dépend de l'état du système au temps  $t$ . Soit  $Y$  l'espace des contrôles, la correspondance  $U : X \rightsquigarrow Y$  décrit les contraintes dépendant de l'état sur les contrôles.

Partant d'un point initial donné  $x_0$ , il peut exister plusieurs évolutions possibles correspondant aux différents contrôles opérés au cours du temps  $t \rightarrow u(t)$ .

Une solution du système (2.2) est une évolution  $t \rightarrow x(t)$  telle qu'il existe une fonction de

contrôle mesurable  $t \rightarrow u(t)$  telle que les conditions de (2.2) soient vérifiées presque partout. La correspondance  $\mathcal{S}$  associe à tout état initial  $x \in X$  le sous-ensemble  $\mathcal{S}(x) \subset \mathcal{C}(0, \infty; X)$  des solutions issues de  $x$ .

Nous aurons besoin de la définition d'un système contrôlé *Marchaud* dans les énoncés des théorèmes suivants :

**Définition 2.1.3.2** Soient  $U : X \rightsquigarrow Y$  et  $f : X \times Y \rightarrow X$ .  $(U, f)$  est un système contrôlé *Marchaud* si  $\text{Graph}(U)$  est fermé,  $f$  est continue,  $f$  et  $U$  ont des croissances linéaires<sup>5</sup> et les ensembles  $\{f(x, u) | u \in U(x)\}$  sont convexes pour tout  $x \in \text{Dom}^6(U)$ .

**Caractérisation d'un ensemble viable.** Un ensemble  $K$  est viable si pour tout  $x \in K$ , il existe une solution de (2.2) partant de  $x$  et viable dans  $K$ . Intuitivement, un ensemble est viable s'il existe en chaque point de sa frontière, une dérivée tangente à ce sous-ensemble qui permet à la trajectoire de rentrer à l'intérieur ou de poursuivre sur la frontière. La notion de tangentialité est définie à partir de celle de cône contingent<sup>7</sup> :

**Définition 2.1.3.3** Le cône contingent à  $K$  en  $x$  est l'ensemble

$$T_K(x) := \{v \in X \mid \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0\}, \quad (2.4)$$

où  $d_K(y)$  est la distance de  $y$  à  $K$  définie par

$$d_K(y) := \inf_{z \in K} \|y - z\|.$$

<sup>5</sup>Soit  $F : X \rightsquigarrow X$  une correspondance. Notons

$$\|F(x)\| := \sup_{y \in F(x)} \|y\|,$$

$F$  a une croissance linéaire s'il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\forall x \in \text{Dom}(F), \|F(x)\| \leq c(\|x\| + 1).$$

Cette hypothèse évite l'explosion en temps fini des solutions puisqu'elles sont bornées par une exponentielle.

<sup>6</sup>Le domaine d'une fonction multivoque  $U$  est défini par

$$\text{Dom}(U) := \{x \in X \mid U(x) \neq \emptyset\}. \quad (2.3)$$

<sup>7</sup>introduit par Georges Bouligand et Francesco Severi au début des années 1930.

Si  $x$  appartient à l'intérieur de  $K$ , le cône contingent à  $K$  en  $x$  en l'espace  $X$  tout entier. Si  $K$  est une variété différentielle, le cône contingent coïncide avec l'espace tangent et si  $K$  est convexe, il coïncide avec l'espace tangent de l'analyse convexe.

**Theorème 2.1.3.1** *Soit  $(U, f)$  un système contrôlé Marchaud. Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$  fermé. Alors  $K$  est viable pour le système contrôlé (2.2) si et seulement si la correspondance de régulation  $R_K$  définie par*

$$\forall x \in K, R_K(x) := \{u \in U(x) \mid f(x, u) \in T_K(x)\} \quad (2.5)$$

*a des valeurs non vides pour tout  $x \in K$ .*

**Caractérisation du noyau de viabilité.** Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$ , le noyau de viabilité de  $K$  pour le système contrôlé (2.2), noté  $\text{Viab}(K)$ , est le sous-ensemble des états initiaux  $x_0 \in K$  tels qu'il existe au moins une solution  $x(\cdot) \in \mathcal{S}(x_0)$  du système (2.2) partant de  $x_0$  et viable dans  $K$ .

**Theorème 2.1.3.2** *Soit  $(U, f)$  est un système contrôlé Marchaud. Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$  fermé. Alors le noyau de viabilité de  $K$  existe et est égal au plus grand sous-ensemble fermé de  $K$  viable pour (2.2).*

Les équilibres, les trajectoires de solutions périodiques, les ensembles limites et les attracteurs, s'ils existent, sont contenus dans le noyau de viabilité.

**Caractérisation du noyau de viabilité d'ordre  $T$ .** Le noyau de viabilité d'ordre  $T$  est l'ensemble des états  $x \in K$  tels qu'il existe au moins une solution de (2.2) partant de  $x$  et viable dans  $K$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Il est noté  $\text{Viab}(K, T)$ .

Les deux théorèmes suivants montrent l'équivalence entre les noyaux de viabilité d'ordre  $T$  et les ensembles de niveaux du noyau de viabilité d'un système auxiliaire.

Soit la fonction temps de sortie maximal définie par

$$\tau_K^\#(x) := \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \tau_K(x(\cdot)) = \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \inf\{t \in [0, \infty[ \mid x(t) \notin K\}.$$

Nous rappelons les définitions d'épigraphe et d'hypographe d'une fonction étendue (Fig. 2.1) :

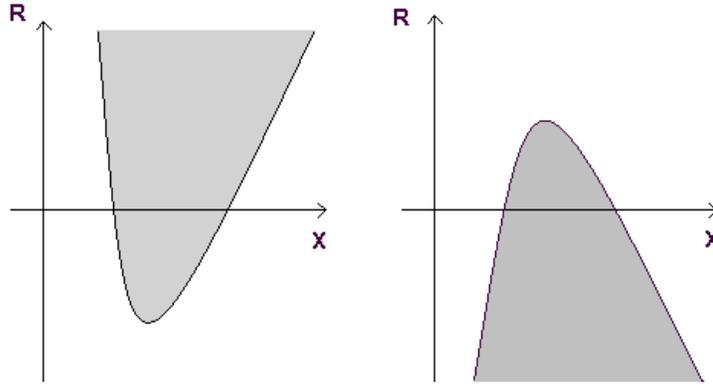


FIG. 2.1 – L'épigraphe de la fonction étendue  $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est colorié en gris dans la figure de gauche. L'hypographe de la fonction étendue  $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  est colorié en gris dans la figure de droite.

**Définition 2.1.3.4** Une fonction étendue est une fonction  $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Son domaine est l'ensemble des points où  $V$  est finie :

$$\text{Dom}(V) := \{x \in X \mid V(x) \neq \infty\}.$$

$V$  est non triviale si son domaine n'est pas réduit à l'ensemble vide.

Son épigraphe est défini par :

$$\mathcal{E}p(V) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid V(x) \leq \lambda\}.$$

L'hypographe d'une fonction  $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  est défini par :

$$\mathcal{H}yp(V) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid V(x) \geq \lambda\}.$$

**Theorème 2.1.3.3** Soit  $(U, f)$  un système contrôlé Marchaud et soit  $K \subset X$  fermé, alors pour tout  $T \geq 0$ , les noyaux de viabilité d'ordre  $T$  sont caractérisés par :

$$\text{Viab}(K, T) = \{x \in K \mid \tau_K^\sharp(x) \geq T\}.$$

Soit  $F$  la correspondance définie par  $F(x) := \{f(x, u) \mid u \in U(x)\}$ .

Associons à  $F$  la correspondance  $\psi_F : K \times \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$  définie par

$$\psi_K(x, w) := \begin{cases} F(x) \times \{-1\} & \text{si } w > 0 \\ \overline{\text{co}}(F(x) \cup \{0\}) \times [-1, 0] & \text{si } w = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Théorème 2.1.3.4** *Supposons que  $(U, f)$  est un système contrôlé Marchaud et que  $K \subset \text{Dom}(U)$  est fermé, alors l'hypographe de la fonction temps de sortie maximal  $\tau_K^\sharp$  est la noyau de viabilité de  $K \times \mathbb{R}_+$  pour la correspondance  $\psi_F$  :*

$$\mathcal{Hyp}(\tau_K^\sharp) = \text{Viab}_{\psi_K}(K \times \mathbb{R}_+).$$

**Problèmes d'optimisation en horizon infini.** Ces problèmes sont étudiés par Aubin et Frankowska (1996) [86]. L'objectif est de déterminer la fonction valeur associée à un problème d'optimisation en horizon infini. Nous rappelons la définition de l'épiderivée contingente avant d'énoncer le théorème qui lie l'épigraphe de la fonction valeur au noyau de viabilité d'un système auxiliaire.

**Définition 2.1.3.5** *Soit  $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction étendue non triviale et  $x$  appartenant à son domaine, l'épiderivée contingente  $D_\uparrow V(x)$  vérifie*

$$\forall y \in X, D_\uparrow V(x)(y) := \liminf_{h \rightarrow 0^+, y' \rightarrow y} \frac{V(x + hy') - V(x)}{h}$$

*et l'épigraphe de l'épiderivée contingente  $D_\uparrow V(x)$  est égal au cône contingent à l'épigraphe de  $V$  en  $(x, V(x))$*

$$\mathcal{E}p(D_\uparrow V(x)) = T_{\mathcal{E}p(V)}(x, V(x))$$

Soit  $\mathcal{S}_t(x_0)$  l'ensemble des solutions  $(x(\cdot), u(\cdot))$  du système contrôlé (2.2) en  $x_0$  au temps  $t$ . Soit la fonction valeur

$$V(t, x_0) := \inf_{(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{S}_t(x_0)} \int_t^\infty e^{a\tau} W(x(\tau), u(\tau)) d\tau \in [0, +\infty[$$

du problème d'optimisation intertemporelle de la fonctionnelle actualisée

$$\int_t^\infty e^{at} W(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

sur toutes les solutions  $(x(\cdot), u(\cdot))$  du système contrôlé (2.2) partant au temps  $t$  de  $x_0$ .

Le théorème suivant montre l'équivalence entre l'épigraphe de la fonction valeur du problème d'optimisation intertemporelle et le noyau de viabilité de l'ensemble  $\text{Dom}(U) \times \mathbb{R}_+$  pour le système auxiliaire associé à la correspondance  $G : X \times \mathbb{R} \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$ , définie par

$$G(x, w) := \{(f(x, v), \lambda) \mid v \in U(x) \text{ et } \lambda + aw \in [-c(\|x\| + 1), -W(x, v)]\}. \quad (2.7)$$

**Theorème 2.1.3.5** *Supposons*

- $(U, f)$  est un système contrôlé Marchaud,
  - $W : (x, v) \in \text{Graph}(U) \rightarrow W(x, v) \in \mathbb{R}_+$  est une fonction semi-continue inférieurement, positive et convexe par rapport à  $v$ ,
  - $\exists c > 0$  tel que  $\forall (x, v) \in \text{Graph}(U), W(x, v) \leq c(\|x\| + 1)$ ,
  - le domaine  $K := \text{Dom}(U)$  est fermé,
- alors,  $V(t, x)$  et la plus petite fonction semi-continue inférieurement  $V_\alpha$  vérifiant :

- la propriété de monotonie :  $\forall x_0 \in \text{Dom}(V_\alpha)$ , il existe un solution du système contrôlé (2.2) partant de  $x_0$  à  $t = 0$  et satisfaisant

$$\forall t \geq 0, e^{at}V_\alpha(x(t)) - V_\alpha(x_0) + \int_0^t e^{a\tau}W(x(\tau), u(\tau))d\tau \leq 0, \quad (2.8)$$

- $V_\alpha$  plus grande ou égale à la fonction indicatrice de  $K$ ,  $\phi_K$ ,

sont reliées par la formule

$$V(t, x) = e^{at}V_\alpha(x). \quad (2.9)$$

De plus, une solution  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in \mathcal{S}(x_0)$  de (2.2) satisfait l'inégalité (2.8) pour  $V_\alpha$  si et seulement si c'est une solution optimale du problème d'optimisation intertemporelle :

$$\int_0^\infty e^{a\tau}W(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))d\tau = \inf_{(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{S}(x_0)} \int_0^\infty e^{a\tau}W(x(\tau), u(\tau))d\tau.$$

Dans ce cas, cette solution vérifie le principe d'optimalité :

$$\forall t \geq 0, e^{at}V_\alpha(\hat{x}(t)) = \int_t^\infty e^{a\tau}W(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))d\tau \quad (2.10)$$

et satisfait l'équation

$$e^{at}V_\alpha(\hat{x}(t)) - e^{as}V_\alpha(\hat{x}(s)) + \int_s^t e^{a\tau}W(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))d\tau = 0. \quad (2.11)$$

Notons

$$R_\alpha(x) := \{u \in U(x) \mid D_\uparrow V_\alpha(x)(f(x, u)) + W(x, u) + aV_\alpha(x) \leq 0\}$$

alors, les solutions optimales au problème d'optimisation intertemporelle sont gouvernées par la loi de régulation optimale,

$$\text{pour presque tout } t \geq 0, \quad u(t) \in R_\alpha(x(t)).$$

**Exemple d'optimisation en horizon infini : la fonction temps de crise.** La fonction temps de crise a été introduite par Doyen et Saint-Pierre (1997) [87]. Le temps de crise associé à

une évolution est le temps passé hors de l'ensemble des contraintes. Soit  $(U, f)$  un système contrôlé et,  $K$ , un ensemble de contraintes, tout point  $x \in X$  peut être caractérisé par le temps de crise minimal :

$$C_K(x) := \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \mu(t | x(t) \notin K) \quad (2.12)$$

avec  $\mu$  mesure de Lebesgue.

Le temps de crise minimal est la fonction valeur associée à un problème d'optimisation en horizon infini :

$$C_K(x) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \int_0^{+\infty} W(x(\tau)) d\tau$$

avec  $W := \chi_{X \setminus K}$ .

En associant à  $(U, f)$  la correspondance  $G : X \times \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$  définie par

$$G(x, w) := \left\{ (f(x, v), \lambda) \mid v \in U(x) \text{ et } \lambda \in [-1, -\chi_{X \setminus K}(x)] \right\}, \quad (2.13)$$

le théorème suivant est un corollaire du théorème 2.1.3.

**Théorème 2.1.3.6** *Si  $(U, f)$  un système contrôlé Marchaud et  $K \subset X$  fermé et vérifiant  $K \cap \text{Dom}(U) \neq \emptyset$ , alors l'épigraphe de la fonction temps de crise  $C_K$  est le noyau de viabilité de  $X \times \mathbb{R}_+$  pour la correspondance  $G$  :*

$$\mathcal{E}p(C_K) = \text{Viab}_G(X \times \mathbb{R}_+).$$

## Étude d'un jeu dynamique

**Description de la dynamique.** Comme dans le cas d'un système contrôlé (2.2), l'évolution de l'état du système  $x(t)$  dépend de cet état et du contrôle  $u \in U(x(t))$ . Nous supposons, en outre, que cette évolution est influencée par des perturbations  $p \in P(x(t))$ . Ces perturbations peuvent être interprétées comme le fait d'une nature indépendante et indifférente<sup>8</sup>, ou comme l'écart entre la dynamique réelle et la dynamique modélisée, dû à nos ignorances de certains comportements du système. L'évolution de l'état du système est donc gouvernée par un système dynamique de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) &= c(x(t), u(t), p(t)) \\ u(t) &\in U(x(t)) \\ p(t) &\in P(x(t)) \end{cases} \quad (2.14)$$

prenant en compte le fait que, comme les contrôles, les différentes perturbations  $p$  qui peuvent intervenir au temps  $t$  appartiennent à un ensemble  $P(x(t))$  qui dépend de l'état du système

<sup>8</sup>ces perturbations sont appelées *tyches* dans [88, Aubin (1997)].

au temps  $t$ .

Une solution du système (2.14) est une évolution  $t \rightarrow x(t)$  telle qu'il existe une fonction de contrôle  $t \rightarrow u(t)$  et une fonction associée aux perturbations  $t \rightarrow p(t)$  mesurables telles que les conditions de (2.14) soient vérifiées presque partout.

Les théorèmes suivants sont vrais pour des jeux dynamiques *Marchaud* :

**Définition 2.1.3.6** Soit  $U : X \rightsquigarrow Y$ ,  $P : X \rightsquigarrow Z$  et  $c : X \times Y \times Z \rightarrow X$ ,  $(U, P, c)$  est un jeu dynamique *Marchaud* si  $\text{Graph}(U)$  et  $\text{Graph}(P)$  sont fermés, les valeurs  $U(x)$  et  $P(x)$  sont convexes,  $c$  est continue et convexe par rapport à  $u$  et  $p$ ,  $U$  et  $P$  ont des croissances linéaires.

**Caractérisation d'un ensemble discriminant.** Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des sélections continues  $x \rightarrow \tilde{p}(x) \in P(x)$  de la correspondance  $P$  qui est non vide lorsque  $P$  est semi-continue inférieurement et à valeurs convexes d'après le théorème de Michael [89, Aubin et Frankowska (1990)].

Un ensemble  $K$  est *discriminant* si pour toute sélection continue  $\tilde{p}(x) \in P(x)$  et pour tout  $x \in K$ , il existe au moins une solution  $x(\cdot)$  vérifiant

$$\begin{cases} x'(t) &= c(x(t), u(t), \tilde{p}(x(t))) \\ u(t) &\in U(x(t)) \end{cases} \quad (2.15)$$

partant de  $x$  et viable dans  $K$ <sup>9</sup>.

**Théorème 2.1.3.7** Soit  $(U, P, c)$  un jeu dynamique *Marchaud*. Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$  fermé. Supposons que  $P$  est semi-continue inférieurement, alors  $K$  est un ensemble discriminant pour le jeu dynamique (2.14) si et seulement si la correspondance  $\Delta_K : \text{Graph}(P|_K) \rightsquigarrow Y$  définie par

$$\forall (x, p) \in \text{Graph}(P|_K), \quad \Delta_K(x, p) := \{u \in U(x) \mid c(x, u, p) \in T_K(x)\} \quad (2.16)$$

a des valeurs non vides pour tout  $x \in K$  et tout  $p \in P(x)$ .

**Caractérisation du noyau discriminant.** Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$ , le noyau discriminant de  $K$  pour le jeu dynamique (2.14), noté  $\text{Disc}(K)$ , est le plus grand sous-ensemble fermé de  $K$  discriminant pour (2.14).

Sous les hypothèses du théorème 2.1.3.7, le noyau discriminant est un ensemble discriminant.

<sup>9</sup>Autrement dit,  $x$  viable dans  $K$  pour la dynamique  $f(x, u) := c(x, u, \tilde{p}(x))$ .

La caractérisation du noyau discriminant en tant que sous-ensemble d'états initiaux de  $K$  satisfaisant une certaine propriété est plus délicate que dans le cas du noyau de viabilité [90, Cardaliaguet (1994)].

Cardaliaguet (1994) lie les concepts de noyaux de viabilité et noyaux discriminants en présentant les noyaux discriminants comme des intersections de noyaux de viabilité [90] :

**Théorème 2.1.3.8** *Supposons que le jeu dynamique  $(U, P, c)$  est Marchaud, que  $K \subset \text{Dom}(U)$  est fermé et que  $P$  est semi-continue inférieurement. Posons*

$$K_0 := K \text{ et } \forall i \geq 0, K_i := \bigcap_{\tilde{p} \in \mathcal{P}} \text{Viab}_{c(\cdot, U(\cdot), \tilde{p}(\cdot))}(K_{i-1})$$

alors

$$\text{Disc}_{(U, P, c)}(K) = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

**Problèmes d'optimisation en horizon infini.** Dans le cas du système contrôlé, l'épigraphe de la fonction valeur est le noyau de viabilité d'un système auxiliaire<sup>10</sup>. Pour un jeu différentiel, l'objectif est de caractériser la fonction valeur en tant que noyau discriminant, autrement dit, en tant qu'intersection de noyaux de viabilité d'après la théorème 2.1.3.8. Soit la fonction semi-continue inférieurement

$$W : (x, u, p) \in X \times Y \times Z \rightarrow W(x, u, p) \in \mathbb{R}_+$$

à laquelle est associé le coût actualisé en horizon temporel infini

$$\int_0^{\infty} e^{a\tau} W(x(\tau), u(\tau), p(\tau)) d\tau \in [0, +\infty].$$

L'objectif est de déterminer la fonction  $V$  qui vérifie le critère de monotonie suivant appelé monotonie discriminante : pour toute sélection continue  $\tilde{p}(x) \in \mathcal{P}$  jouée par la nature et tout état  $x_0 \in \text{Dom}(V)$ , il existe une solution  $x(\cdot)$  de (2.15) partant de  $x_0$  et monotone dans le sens

$$\forall t \geq 0, e^{at} V_\alpha(x(t)) - V_\alpha(x_0) + \int_0^t e^{a\tau} W(x(\tau), u(\tau), \tilde{p}(x(\tau))) d\tau \leq 0. \quad (2.17)$$

Les deux théorèmes suivants montrent l'équivalence entre l'épigraphe de cette fonction et le noyau discriminant de l'ensemble des contraintes  $\text{Dom}(U) \cap \text{Dom}(P) \times \mathbb{R}_+$  pour le jeu

<sup>10</sup>Théorème 2.1.3.5.

dynamique défini par la correspondance  $G : X \times \mathbb{R} \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$

$$G(x, w) := \{(c(x, u, p), \lambda) \mid u \in U(x), p \in P(x) \text{ et } \lambda + aw \in [-\gamma(\|x\| + 1), -W(x, u, p)]\}. \quad (2.18)$$

**Théorème 2.1.3.9** *Supposons*

- $(U, P, c)$  est un jeu dynamique Marchaud,
- $P$  est semi-continue inférieurement,
- $W : (x, u, p) \in X \times Y \times Z \rightarrow W(x, u, p) \in \mathbb{R}_+$  est une fonction semi-continue inférieurement, positive et convexe par rapport à  $u$ ,
- $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  est une fonction étendue positive semi-continue inférieurement,
- $\exists \gamma > 0$  tel que

$$\begin{cases} i) \forall (x, u, p) \in X \times Y \times Z, W(x, u\gamma, p) \leq \gamma(\|x\| + 1) \\ ii) \forall x \in \text{Dom}(V), \inf_{u \in U(x), p \in P(x)} D_{\uparrow} V(x)(c(x, u, p)) \geq -\gamma(\|x\| + 1) \end{cases} \quad (2.19)$$

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $V$  possède la propriété de monotonie discriminante.
2.  $V$  est une fonction discriminante : soit  $\Delta_P : X \times Z \rightsquigarrow Y$  définie pour  $(x, p) \in \text{Graph}(P)$  par

$$\Delta_P(x, p) := \{u \in U(x) \mid D_{\uparrow} V(x)(c(x, u, p)) + W(x, u, p) + aV(x) \leq 0\},$$

alors

$$\forall x \in X, \forall p \in P(x), \Delta_V(x, p) \neq \emptyset.$$

Si  $V$  ne satisfait aucune des conditions du théorème précédente, il existe une plus petite fonction semi-continue inférieurement plus grande ou égale à  $V$  satisfaisant la propriété de monotonie discriminante. Ce résultat est un corollaire du théorème 2.1.3.8.

**Théorème 2.1.3.10** *Les hypothèses sont celles du théorème 2.1.3.9. Partant d'une fonction semi-continue inférieurement non triviale  $V^0 : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ , les fonctions  $V^j$  sont définies par récurrence :*

$$V^{j+1} := \sup_{\tilde{p} \in \mathcal{P}} V_{\tilde{p}, \alpha}^j,$$

avec  $V_{\tilde{p}, \alpha}^j$  plus petite fonction semi-continue inférieurement positive plus grande ou égale à  $V^j$  et monotone par rapport à  $W(x, u, \tilde{p}(x))$  pour le système (2.15).

Alors, la fonction semi-continue inférieurement

$$V^{\infty} := \sup_{j \geq 0} V^j$$

est la plus petite fonction semi-continue inférieurement plus grande ou égale à  $V$  satisfaisant la propriété de monotonie discriminante.

## 2.2 La définition de la résilience

### 2.2.1 Les conditions de compatibilité avec la définition conceptuelle de Holling

Nous avons vu dans la sous-section 1.4.3, que le concept de durabilité est plus pertinent pour les systèmes stochastiques loin de l'équilibre que pour les systèmes déterministes à l'équilibre [56, Levin *et al.* (1998)]. Les définitions opérationnelles inspirées par la définition conceptuelle de Pimm, se focalisent sur les concepts d'équilibre et de petites perturbations. Elles sont, par conséquent, mal adaptées à l'étude de la résilience dans les systèmes écologiques et sociaux. En revanche, l'« ecological resilience » de Holling se concentre sur les possibilités de transition entre états appartenant à différents ensembles caractérisés par leurs structures et leurs processus d'organisation. Elle s'intéresse aux contours, aux comportements loin des équilibres et est, par conséquent, bien adaptée au cadre de systèmes écologiques et sociaux.

L'« ecological resilience » de Holling (1973) est l'intensité maximale de la force que le système peut absorber sans changer de comportement, de fonctions, de processus de régulation [55]. Beddington *et al.* (1976) interprètent l'« ecological résilience » comme l'intensité de la perturbation d'une quantité spécifique qu'une propriété du système peut supporter sans subir de changements qualitatifs [68].

Partant de la définition conceptuelle de Holling et de l'interprétation de Beddington *et al.* (1976), Ludwig *et al.* (1997) et Carpenter *et al.* (2001) ont déduit des contraintes concernant les définitions opérationnelles qui s'y réfèrent [70, 57]. La valeur de la résilience dépend :

- (i) de l'état du système,
- (ii) de la propriété du système étudiée,
- (iii) des types de perturbations envisagées,
- (iv) du coût associé à la restauration éventuelle de cette propriété,
- (v) des contrôles disponibles, et
- (vi) de l'horizon temporel considéré.

La définition que nous proposons dans le formalisme de la viabilité tient explicitement compte de ces six points.

La dynamique du système dépend de son état (i). Elle peut également être influencée par des actions extérieures (contrôles) (v) ou par des perturbations non maîtrisables. L'évolution de l'état du système peut alors être modélisée par une inclusion différentielle de la forme

de (2.14) pour prendre en compte l'influence éventuelle des différents contrôles possibles et intégrer nos ignorances sur les dynamiques. Nous considérons d'abord le cas où les perturbations sont négligeables. L'évolution de l'état du système est alors décrite par un système contrôlé de type (2.2).

La résilience de propriétés différentes (ii) du système peut être étudiée : par exemple, dans le cas d'un lac, la résilience de la propriété d'oligotrophie ou d'eutrophie ; dans le cas d'une population d'agriculteurs, la résilience de la rentabilité de leurs activités et, dans le cas d'un lac entouré par une population d'agriculteurs, la résilience de la propriété d'oligotrophie et de rentabilité. L'ensemble des états du système pour lesquels cette propriété est vérifiée n'est pas nécessairement définie en tant que bassin d'attraction de la dynamique comme dans Ludwig *et al.* (1997) ou van Coller *et al.* (1997) [70, 72].

Reprenant l'interprétation de Beddington *et al.* (1976), l'intensité de la perturbation d'une quantité spécifique, qu'une propriété du système peut supporter sans subir de changements qualitatifs [68], nous allons tout d'abord nous poser la question de la conservation de cette propriété sans perturbation pour une durée  $T$  associée à l'horizon temporel considéré (vi). La réponse est donnée par le calcul du noyau de viabilité de l'ensemble des états qui possèdent la propriété en question, pour la dynamique (2.2) ou par le calcul du noyau discriminant pour la dynamique (2.14). Cette analyse permet d'identifier les situations dans lesquelles la propriété ne peut être conservée.

L'analyse se poursuit, alors, par l'évaluation du coût de restauration de cette propriété (iv). Ce coût, associé à toute évolution du système, peut être soit économique (somme d'argent nécessaire), soit écologique (diminution de la biodiversité, pollutions, ...), soit les deux. Son taux d'actualisation est posé nul afin de ne pas déprécier les pénalités des futurs éloignés par rapport à celles des futurs proches en accord avec l'état d'esprit associé au concept de durabilité<sup>11</sup>. Sa valeur minimale sur toutes les évolutions possibles issues d'un même état du système est l'indicateur de coût associé à cet état. Cette fonction indicateur de coût peut être interprétée comme la fonction valeur du problème d'optimisation intertemporelle décrit dans la section 2.1.3 et, par conséquent, obtenue par des calculs de noyaux de viabilité.

La valeur de la résilience dépend des perturbations envisagées (iii) (les variables concernées, les intensités maximales,...). Ces perturbations envisagées sont décrites par une correspondance qui, à chaque état du système, associe l'ensemble des états atteignables à partir de cet état, à la suite d'une perturbation. Afin de prendre en compte le pire des cas, nous retenons le coût de restauration maximal sur l'ensemble des états atteignables.

Nous évaluons la résilience comme l'inverse de ce coût.

<sup>11</sup> « répondre aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre à leurs propres besoins » [6, Brundtland (1987)].

## 2.2.2 La formulation mathématique dans le cas d'un système contrôlé

### Le modèle

**Les dynamiques et les contrôles.** L'état du système écologique et social au temps  $t$  est décrit par le vecteur  $x(t)$  appartenant à l'espace des états  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

La dynamique dépend de l'état du système  $x(t)$  et de différentes actions externes appelées contrôles  $u(t) \in Y$  qui peuvent influencer l'évolution du système au temps  $t$ . Ces contrôles ne sont pas définis *a priori* par des lois de régulation déterminant  $\hat{u}(t)$  ou  $\tilde{u}(x)$ . Cependant, ils peuvent être contraints en fonction de l'état du système. Ainsi, la correspondance  $U : X \rightsquigarrow Y$  associe à tout état  $x$  l'ensemble des contrôles admissibles lorsque l'état du système est  $x$ .

Les contrôles admissibles sont les contrôles au moyen desquels une institution (une agence gouvernementale ou un gestionnaire privé) agit sur le système. Elle peut choisir n'importe quel contrôle admissible, puis en choisir un autre. Elle a les ressources nécessaires pour supporter les coûts de modification de ces contrôles, qui sont externes au système.

La variation de  $x(t)$  au temps  $t$  est décrite par l'inclusion différentielle (2.2) étudiée dans la sous-section 2.1.3 et reproduite ci-dessous :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)), \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $U : X \rightsquigarrow Y$  qui associe à l'état  $x$  l'ensemble des contrôles admissibles et

$$f : \text{Graph}(U) \rightarrow X$$

qui associe à  $x(t)$  et  $u(t) \in U(x(t))$  la dérivée  $x'(t)$ .

La dynamique est non déterministe si plusieurs contrôles sont admissibles. Si la fonction  $u(\cdot)$  est supposée gouvernée par une loi de régulation définie *a priori* en fonction du temps  $t \rightarrow \hat{u}(t)$  ou en fonction de l'état  $x \rightarrow \tilde{u}(x)$ , alors la dynamique est décrite par une équation différentielle ordinaire et l'évolution de  $x(t)$  est déterministe.

**La propriété étudiée interprétée comme une contrainte sur l'état du système.** Nous supposons qu'il existe une correspondance  $h : X \rightarrow H$  qui associe à l'état du système un indicateur concernant la propriété du système étudiée. La propriété est vraie lorsque l'indicateur appartient à un sous-ensemble particulier  $M$  de  $H$ . Le sous-ensemble  $K$  de  $X$  contenant tous les états possédant cette propriété est défini par :

$$K = h^{-1}(M). \quad (2.21)$$

**L'horizon temporel.** L'horizon temporel considéré est défini par  $T$  qui peut être infini.

### La formulation mathématique de la définition de la résilience

Suivant le principe de la définition décrit dans la sous-section 2.2.1, la formulation mathématique de la résilience nécessite trois étapes intermédiaires : la caractérisation de l'ensemble des états à partir desquels la propriété peut être conservée jusqu'à  $T$ , la détermination de la fonction valeur associée au coût éventuel de restauration de la propriété avant le temps  $T$  et l'évaluation du coût des perturbations envisagées.

**L'ensemble des états à partir desquels la propriété peut être conservée jusqu'à  $T$ .** L'évolution du système est gouvernée par les dynamiques décrites dans les équations (2.20). Si son état  $x(0)$  à  $t = 0$  appartient à  $K$ , cela signifie que la propriété identifiée par  $K$  est vraie à  $t = 0$ . La première question qui se pose est si cette propriété peut être conservée jusqu'à  $T$ .

Comme plusieurs contrôles sont admissibles en chaque état du système, il peut y avoir de nombreuses évolutions, partant de  $x(0) \in K$  et satisfaisant (2.20) pour  $t \in [0, T]$ . Si l'une d'entre elle reste dans  $K$  jusqu'à  $T$ , cela signifie qu'il existe une loi de régulation  $t \rightarrow u(t)$  telle que la propriété est conservée durant la période caractéristique. Si aucune d'entre elles ne reste dans  $K$  jusqu'à  $T$ , cela signifie que partant de  $x(0)$ , le système est condamné à perdre la propriété représentée par l'ensemble  $K$  avant  $t = T$  quels que soient les choix de contrôles effectués parmi les contrôles admissibles. L'ensemble formé des états à partir desquels il existe au moins une évolution restant dans  $K$  jusqu'au temps  $T$  est le noyau de viabilité d'ordre  $T$ <sup>12</sup> noté  $\text{Viab}(K, T)$ . Ce sous-ensemble de  $K$  dépend de la dynamique  $f$ , des ensembles de contrôles admissibles  $U$  et de l'ensemble des contraintes  $K$ . Il contient les équilibres, mais aussi les états à partir desquels il existe une évolution viable dans  $K$  jusqu'à  $T$ . Ces évolutions peuvent être gouvernées par des contrôles constants (niches de viabilité). Des régulations par des modifications des contrôles peuvent également avoir lieu.

D'après les théorèmes 2.1.3.3 et 2.1.3.4, lorsque  $(U, f)$  est Marchaud et  $K \subset \text{Dom}(U)$  est fermé, le noyau de viabilité d'ordre  $T$  peut être obtenu comme ensemble de niveau du noyau de viabilité d'un système auxiliaire : soit  $(x, \rho) \in K \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\text{Viab}_{(U,f)}(K, T) = \text{Viab}_{\psi_K}(K \times \mathbb{R}_+) \cap \{\rho = T\} \quad (2.22)$$

<sup>12</sup>voir sous-section 2.1.3.

avec  $\psi_F$  définie par

$$\psi_K(x, \rho) := \begin{cases} F(x) \times \{-1\} & \text{si } \rho > 0 \\ \overline{co}(F(x) \cup \{0\}) \times [-1, 0] & \text{si } \rho = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

**L'indicateur de coût : la fonction valeur associée au coût éventuel de restauration de la propriété avant le temps  $T$ .** Le coût associé à une évolution peut être de nature économique, social ou écologique. Le plus souvent, ce coût est évalué en ajoutant des gains et soustrayant des dépenses à chacun des pas de temps. Dans notre approche, ce coût est défini de manière un peu différente. Comme il est utilisé pour évaluer la résilience de la propriété étudiée, sa définition est liée à cette propriété : le coût doit permettre de mesurer la capacité du système à maintenir cette propriété durant une période  $T$  ou à la rétablir avant  $T$ . Autrement dit, le coût mesure la distance entre l'évolution de l'état du système et l'objectif qui lui est fixé dans la perspective de l'étude de la résilience : maintenir cette propriété ou au moins la rétablir avant  $T$ . Un tel coût est utilisé dans Béné *et al.* (2001) dans un modèle de gestion des ressources marines renouvelables. L'une des variables est le bénéfice. La contrainte (ou l'objectif) imposée sur cette variable est d'être positive et le coût associé à une évolution est la durée de la période de bénéfice négatif [84].

En tant que distance entre une évolution et une évolution idéale qui remplirait pleinement les objectifs, le coût d'une évolution doit satisfaire les deux conditions suivantes :

**Condition 1** Lorsque l'objectif est atteint, le coût doit être nul. Par conséquent, le coût d'une évolution au cours de laquelle la propriété étudiée est conservée est nul. Maintenir cette propriété peut nécessiter des changements de contrôles et ces changements ont un coût. Néanmoins, comme nous l'avons précisé dans la définition du modèle, ces coûts sont externes, pris en charge par l'institution qui agit sur le système : Béné *et al.* (2001) n'ont pas pris en compte le coût des variations de l'effort de pêche dans l'évaluation du bénéfice global du secteur [84]<sup>13</sup>.

**Condition 2** Le coût associé à une évolution telle que la propriété n'est pas rétablie au temps  $T$ , c'est à dire  $x(T)$  n'appartient pas à  $K$ , est infini. Certainement, les états où la propriété n'est pas vraie ne sont pas totalement dépourvus d'intérêts. Un lac eutrophe, par exemple, peut encore servir de réservoir de nutriments. Cependant, en ce qui concerne l'évaluation de la résilience de la propriété étudiée, l'objectif est de conserver cette propriété, ou, au moins, de la rétablir avant  $T$ . Si  $x(T)$  n'appartient pas à  $K$ , cela signifie que la propriété a non seulement été perdue mais également qu'elle n'a pu être restaurée avant  $T$ . Par conséquent le coût associé à une telle évolution doit être infini car l'objectif est totalement manqué.

<sup>13</sup>Pour prendre en compte le coût des modifications des contrôles, il faut considérer les contrôles comme des variables dont les dérivées deviennent les nouveaux contrôles.

Plusieurs évolutions peuvent partir de  $x$  et vérifier (2.20), puisque plusieurs contrôles peuvent être admissibles. L'évolution de coût minimal partant de  $x$  est la meilleure évolution étant donné l'objectif de maintenir ou au moins rétablir la propriété étudiée avant le temps  $T$ . Ce coût minimal constitue la valeur de l'indicateur de coût en  $x$ .

Notons  $\mathcal{C}_{K,T}(x) : \mathcal{S}_{(U,f)}(x) \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui à une évolution  $(x(\cdot), u(\cdot))$  issue de  $x$  associe son coût et  $C_{K,T} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction indicateur de coût qui à  $x \in X$  associe le coût minimal sur toutes les évolutions issues de  $x$  et vérifiant (2.20) :

$$C_{K,T}(x) := \inf_{(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{S}_{(U,f)}(x)} \mathcal{C}_{K,T}(x)(x(\cdot), u(\cdot)).$$

Pour tout  $x \in X$ ,  $\mathcal{C}_{K,T}(x)$  doit satisfaire **les conditions 1 et 2**. En fonction de la valeur de  $T$ , deux cas se présentent.

Si  $T = \infty$ , posons

$$C_{K,\infty}(x)(x(\cdot), u(\cdot)) := \int_0^\infty W(x(\tau), u(\tau)) d\tau \in [0, +\infty]$$

avec

$$W : (x, u) \in \text{Graph}(U) \rightarrow W(x, u) \in \mathbb{R}_+$$

une fonction positive ou nulle, semi-continue inférieurement, convexe par rapport à  $u$  et à croissance linéaire de constante  $c$ . Les fonctions  $\mathcal{C}_{K,T}(x)$  sont bien définies pour les évolutions satisfaisant (2.20).

De plus, si  $W(x, u) = 0$  pour  $x \in K$  et si  $W(x, u) > 0$  pour  $x \notin K$ , elles vérifient les **conditions 1 et 2**.

Sous ces hypothèses, l'épigraphe de la fonction indicateur de coût

$$C_{K,\infty} = \inf_{(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{S}_{(U,f)}(x)} \int_0^\infty W(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

est égal au noyau de viabilité d'un système auxiliaire. En effet, d'après le théorème 2.1.3.5, si  $(U, f)$  est un système contrôlé Marchaud et  $\text{Dom}(U)$  est fermé, l'épigraphe de la fonction valeur du problème d'optimisation intertemporelle

$$V(x) := \inf_{(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{S}_{(U,f)}(x)} \int_0^\infty W(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

est le noyau de viabilité de l'ensemble  $\text{Dom}(U) \times \mathbb{R}_+$  pour le système auxiliaire défini par la correspondance  $G : X \times \mathbb{R} \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$  :

$$G(x, w) := \{(f(x, v), \lambda) \mid v \in U(x) \text{ et } \lambda \in [-c(\|x\| + 1), -W(x, v)]\}. \quad (2.24)$$

Si  $T < \infty$ , nous définissons la fonction  $C_{K,T}(x)$  par

$$C_{K,T}(x)(x(\cdot), u(\cdot)) := \int_0^T W(x(\tau), u(\tau))d\tau + C(x(T)).$$

Si  $W(x, u) := 0$  et  $C(x) = 0$  pour  $x \in K$ , le coût d'une évolution au cours de laquelle la propriété étudiée est conservée est nul (**condition 1**). Si  $C(x) = +\infty$  pour  $x \notin K$ , la **condition 2** est satisfaite, c'est à dire le coût associé à une évolution telle que la propriété n'est pas rétablie au temps  $T < \infty$  est infini. Sous ces hypothèses, la fonction indicateur de coût est définie par

$$C_{K,T}(x) = \inf_{(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{S}_{(U,f)}(x)} \int_0^T W(x(\tau), u(\tau))d\tau + C(x(T)).$$

Montrons que l'épigraphe de la fonction  $C_{K,T}$  est égal au noyau de viabilité d'un système auxiliaire.

Soit la correspondance  $H : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightsquigarrow X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  :

$$H(x, \rho, w) := \{(h(x, \rho, v, \beta), \lambda) \mid (v, \beta) \in \widehat{U}(x, \rho) \text{ et } \lambda \in [-c(\|x\| + 1), -W(x, v)]\} \quad (2.25)$$

avec  $(\widehat{U}, h)$  le système contrôlé défini par  $h : \text{Dom}(\widehat{U}) \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$  et  $\widehat{U} : X \times \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow Y \times \mathbb{R}$  :

$$h(x, \rho, v, \beta) := (\beta f(x, v), -\beta) \quad (2.26)$$

et

$$\widehat{U}(x, \rho) := \begin{cases} U(x) \times \{-1\} & \text{si } x \notin K \text{ ou } \rho > 0 \\ U(x) \times [-1, 0] & \text{si } x \in K \text{ et } \rho = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Le système contrôlé  $(\widehat{U}, h)$  est Marchaud lorsque  $(U, f)$  est Marchaud.

D'après le théorème 2.1.3.5, si  $(\widehat{U}, h)$  est un système contrôlé Marchaud et  $\text{Dom}(\widehat{U})$  est fermé, l'épigraphe de la fonction valeur du problème d'optimisation intertemporelle

$$\widehat{V}(x, \rho) := \inf_{(x(\cdot), \rho(\cdot), u(\cdot), \beta(\cdot)) \in \mathcal{S}_{(\widehat{U}, h)}(x)} \int_0^\infty W(x(\tau), u(\tau))d\tau$$

est le noyau de viabilité de l'ensemble  $\text{Dom}(\widehat{U}) \times \mathbb{R}_+$  pour le système auxiliaire défini par la correspondance  $H$  (2.25).

De plus, soit  $(x, T) \in \text{Dom}(\widehat{U})$  avec  $T > 0$ , pour toute évolution

$$(x(\cdot), \rho(\cdot), u(\cdot), \beta(\cdot)) \in \mathcal{S}_{(\widehat{U}, h)}(x),$$

lorsque  $t \in [0, T[$ ,  $\rho(t) = T - t > 0$  et  $\rho(t) = 0$  pour  $t \geq T$  ce qui implique  $x(t) = x(T)$  pour  $t \geq T$ .

Par conséquent,

$$\int_0^\infty W(x(\tau), u(\tau))d\tau = \int_0^T W(x(\tau), u(\tau))d\tau + \int_T^\infty W(x(T), u(\tau))d\tau.$$

Si, en plus de  $W(x, u) = 0$  pour tout  $x \in K$ ,  $W(x, u) > 0$  pour tout  $x \notin K$ , alors

$$\widehat{V}(x, T) = C_{K,T}(x).$$

Résumons, si  $W(x, u) = 0$  pour tout  $x \in K$  et  $W(x, u) > 0$  pour tout  $x \notin K$ , alors

- si  $T = \infty$ , l'épigraphe de la fonction indicateur de coût  $C_{K,\infty}$  est égal au noyau de viabilité de  $\text{Dom}(U) \times \mathbb{R}_+$  pour le système contrôlé (2.24),
- si  $T < \infty$ , l'épigraphe de la fonction indicateur de coût  $C_{K,T}$  est égal à la trace sur l'hyperplan  $\rho = T$  du noyau de viabilité de l'ensemble

$$\text{Dom}(\widehat{U}) \times \mathbb{R}_+ = \text{Dom}(U) \times [0, T] \times \mathbb{R}_+$$

pour le système contrôlé (2.25).

**Le coût d'une perturbation et la résilience du système face à cette perturbation.** La résilience est une mesure de la capacité du système à surmonter les perturbations. Ainsi, sa valeur dépend aussi des perturbations envisagées. Nous décrivons ces perturbations par une correspondance  $D$  qui associe à tout état  $x$  du système l'ensemble  $D(x)$  de tous les états atteignables partant de  $x$  après une occurrence de cette perturbation : lorsque qu'une perturbation se produit le système passe de l'état  $x$  à l'état  $y \in D(x)$ . Les conséquences de ce saut en ce qui concerne la propriété étudiée et l'objectif de la conserver ou au moins de la restaurer avant  $T$ , les dommages éventuels, sont mesurés par le coût de restauration minimal associé à l'état atteint après le saut, c'est à dire la valeur de l'indicateur de coût en  $y$  :

$$C_{K,T}(x \rightarrow y) := C_{K,T}(y). \quad (2.28)$$

Lorsque la perturbation  $D$  se produit, le système peut passer de l'état  $x$  à n'importe quel état de l'ensemble  $D(x)$ . N'ayant pas d'information supplémentaire, nous prenons en compte le pire des cas et évaluons le coût d'une perturbation comme le coût maximal sur tous les sauts de  $x$  dans  $y \in D(x)$ .

$$C_{K,T,D}(x) := \max_{y \in D(x)} C_{K,T}(x \rightarrow y) = \max_{y \in D(x)} C_{K,T}(y). \quad (2.29)$$

La résilience du système dans l'état  $x$  face à la perturbation  $D$  est définie comme l'inverse du coût associé à  $D$  en  $x$ . En particulier, si le coût est infini, la résilience est nulle et si le coût est nul, la résilience est infinie :

$$R_{K,T,D}(x) := \frac{1}{C_{K,T,D}(x)} = \min_{y \in D(x)} \frac{1}{C_{K,T}(y)}. \quad (2.30)$$

### 2.2.3 La formulation mathématique dans le cas d'un jeu dynamique

#### Le modèle

**Les dynamiques et les contrôles.** Comme dans le cas d'un système contrôlé, la dynamique dépend de l'état du système  $x(t)$  et de différentes actions externes, les contrôles  $u(t) \in Y$ , qui peuvent influencer l'évolution du système au temps  $t$ . L'évolution de l'état du système peut également être influencée par des perturbations non maîtrisables  $p(t) \in Z$ . Nous rappelons que les contrôles admissibles sont les contrôles au moyen desquels une institution ou un gestionnaire agit sur le système, et que les perturbations peuvent être interprétées comme le fait d'une nature indifférente ou comme l'écart entre la dynamique réelle et la dynamique modélisée, dû à nos ignorances de certains comportements du système. Pour éviter les confusions avec les perturbations envisagées lors du calcul de la résilience, nous parlerons d'écarts entre dynamiques réelles et modélisées.

La variation de  $x(t)$  au temps  $t$  est décrite par l'inclusion différentielle (2.14) étudiée dans la sous-section 2.1.3 et reproduite ci-dessous :

$$\begin{cases} x'(t) &= c(x(t), u(t), p(t)) \\ u(t) &\in U(x(t)), \\ p(t) &\in P(x(t)), \end{cases} \quad (2.31)$$

avec  $U : X \rightsquigarrow Y$  qui associe à l'état  $x$  l'ensemble des contrôles admissibles,  $P : X \rightsquigarrow Z$  qui associe à l'état  $x$  les marges d'erreurs du modèle et  $c : X \times Y \times Z \rightarrow X$  qui associe à  $x(t) \in X$ ,  $u(t) \in U(x(t))$  et  $p(t) \in P(x(t))$  la dérivée  $x'(t)$ .

Les contrôles et les marges d'erreurs ne sont pas définis *a priori* par des lois  $(\hat{u}(t), \hat{p}(t))$  ou  $(\tilde{u}(x), \tilde{p}(x))$ , cependant, ils peuvent être contraints en fonction de l'état du système.

**La propriété étudiée interprétée comme contrainte sur l'état du système.** Comme dans le cas du système contrôlé, nous supposons qu'il existe une correspondance  $h : X \rightarrow H$  qui associe à l'état du système un indicateur concernant la propriété du système étudiée. La propriété est vraie lorsque l'indicateur appartient à un sous-ensemble particulier  $M$  de  $H$ . Le sous-ensemble  $K$  de  $X$  contenant tous les états possédant cette propriété est défini par :

$$K = h^{-1}(M). \quad (2.32)$$

**L'horizon temporel.** L'horizon temporel considéré est défini par  $T$  qui peut être infini.

### La formulation mathématique de la définition de la résilience

Suivant le principe de la définition décrit dans la sous-section 2.2.1, comme dans le cas du système contrôlé, la formulation mathématique de la résilience nécessite trois étapes intermédiaires : la caractérisation de l'ensemble des états à partir desquels la propriété peut être conservée jusqu'à  $T$ , la détermination de la fonction valeur associée au coût éventuel de restauration de la propriété avant le temps  $T$  et l'évaluation du coût des perturbations envisagées.

Cependant, dans ce contexte non coopératif, le concept d'état viable, qui suppose implicitement que tous les processus de régulation peuvent être choisis, n'a plus de sens. Le concept pertinent est celui de *noyau discriminant* comme nous l'avons vu dans la sous-section 2.1.3. Nous allons traduire les définitions et les résultats impliquant des noyaux de viabilité dans le cas des systèmes contrôlés en termes de noyaux discriminants dans le cas des jeux dynamiques.

**L'ensemble des états à partir desquels la propriété peut être conservée jusqu'à  $T$ .** L'évolution du système est gouvernée par les dynamiques décrites dans les équations (2.31). Si son état  $x(0)$  à  $t = 0$  appartient à  $K$ , cela signifie que la propriété identifiée par  $K$  est vraie à  $t = 0$ . La première question qui se pose est si cette propriété peut être conservée jusqu'à  $T$  malgré les écarts éventuels entre dynamiques réelles et modélisées.

Imitant le cas du système contrôlé, nous définissons le jeu dynamique auxiliaire  $(\widehat{U}, P, \zeta_K)$  avec  $\widehat{U} : X \times \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow Y \times [0, 1]$ ,  $P : X \rightsquigarrow Z$  et  $\zeta_K : X \times \mathbb{R}_+ \times Y \times [0, 1] \times Z \rightarrow X \times \mathbb{R}_+$  définis par

$$\zeta_K(x, \rho, u, \beta, p) := (\beta c(x, u, p), -\beta), \quad (2.33)$$

et

$$\widehat{U}(x, \rho) := \begin{cases} U(x) \times \{-1\} & \text{si } \rho > 0 \\ U(x) \times [-1, 0] & \text{si } \rho = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

$(\widehat{U}, P, \zeta_K)$  pour le jeu dynamique  $(U, P, c)$  est l'analogue de  $\psi_K$  (2.23) pour le système contrôlé  $(U, f)$  (2.20). Dans le cas du système contrôlé, pour  $(x, \rho) \in K \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\text{Viab}_{\psi_K}(K \times \mathbb{R}_+) \cap \{\rho = T\}$$

est égal à l'ensemble des états à partir desquels il existe au moins une évolution au cours de laquelle la propriété peut être conservée jusqu'à  $T$ . De même, dans le cas d'un jeu dynamique,

nous caractérisons les états à partir desquels, quels que soient les écarts entre dynamiques réelles et modélisées, il existe au moins une évolution au cours de laquelle la propriété peut être conservée jusqu'à  $T$ , par l'ensemble

$$Disc_{(\hat{U}, P, \zeta_K)}(K \times \mathbb{R}_+) \cap \{\rho = T\} \quad (2.35)$$

avec  $(x, \rho) \in K \times \mathbb{R}_+$ .

En effet, soit  $(x, T) \in Disc_{(\hat{U}, P, \zeta_K)}(K \times \mathbb{R}_+)$ ,  $T > 0$ ,  $\forall \tilde{p} \in \mathcal{P}$ , sélection continue de  $P$ , il existe  $(x(\cdot), \rho(\cdot))$  issue de  $(x, T)$ , satisfaisant

$$\begin{aligned} (x'(t), \rho'(t)) &= \zeta_K(x(t), \rho(t), u(t), \beta(t), \tilde{p}(x(t))) \\ (u, \beta) &\in \hat{U}(x(t), \rho(t)) \end{aligned}$$

Si  $T > 0$ ,  $\forall t \in [0, T[$ ,  $\rho(t) = T - t > 0$  et  $x(t < T)$  vérifie

$$\begin{aligned} x'(t) &= c(x(t), u(t), \tilde{p}(x(t))) \\ u(t) &\in U(x(t)) \end{aligned}$$

et reste dans  $K$ . Ainsi,  $\forall x \in Disc_{(\hat{U}, P, \zeta_K)}(K \times \mathbb{R}_+) \cap \{\rho = T\}$ ,  $\forall \tilde{p} \in \mathcal{P}$ , il existe une évolution issue de  $x$ , viable dans  $K$  pour  $t \in [0, T]$ .

**L'indicateur de coût : la fonction valeur associée au coût éventuel de restauration de la propriété avant le temps  $T$ .** La définition du coût est liée à la propriété dont la résilience est étudiée : le coût doit permettre de mesurer la capacité du système à maintenir cette propriété durant une période  $T$  ou à la rétablir avant  $T$  malgré les écarts éventuels entre dynamiques réelles et modélisées.

En ce qui concerne les évolutions, leur coût mesure, comme dans le cas d'un système contrôlé, la distance entre l'évolution de l'état du système et l'objectif qui lui est fixé dans la perspective de l'étude de la résilience : maintenir cette propriété ou au moins la rétablir avant  $T$ .

En tant que distance entre une évolution et une évolution idéale qui remplirait pleinement les objectifs, le coût d'une évolution doit toujours satisfaire les deux **conditions 1 et 2** de la sous-section 2.2.2 : le coût d'une évolution au cours de laquelle la propriété étudiée est conservée est nul ; le coût associé à une évolution telle que la propriété n'est pas rétablie au temps  $T$ , c'est à dire  $x(T)$  n'appartient pas à  $K$ , est infini.

Soit  $\mathcal{C}_{K,T}(x) : \mathcal{S}_{(U,P,c)}(x) \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui à une évolution issue de  $x$  associe son coût. Pour tout  $x \in X$ ,  $\mathcal{C}_{K,T}(x)$  doit satisfaire **les conditions 1 et 2**.

Comme dans le cas du système contrôlé, deux cas se présentent en fonction de la valeur de  $T$ .

Si  $T = \infty$ , posons

$$\mathcal{C}_{K,\infty}(x)(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot)) := \int_0^\infty W(x(\tau), u(\tau), p(\tau)) d\tau \in [0, +\infty],$$

avec

$$W : (x, u, p) \in X \times Y \times Z \rightarrow W(x, u, p) \in \mathbb{R}_+$$

positive, semi-continue inférieurement, convexe par rapport à  $u$  et à croissance linéaire de constante  $\gamma$ .

Si  $W(x, u, p) = 0$  pour  $x \in K$  et  $W(x, u, p) > 0$  pour  $x \notin K$ , les fonctions  $\mathcal{C}_{K,\infty}(x)$  vérifient les **conditions 1 et 2**. Par analogie avec le cas du système contrôlé, en remplaçant noyau de viabilité par noyau discriminant, nous définissons la fonction  $C_{K,\infty} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  comme la fonction dont l'épigraphe est égal au noyau discriminant de  $\text{Dom}(U) \times \mathbb{R}_+$  pour le jeu dynamique défini par :

$$G(x, w) := \{(c(x, u, p), \lambda) \mid u \in U(x), p \in P(x) \text{ et } \lambda \in [-\gamma(\|x\| + 1), -W(x, u, p)]\}. \quad (2.36)$$

Si  $T < \infty$ , nous définissons le coût d'une évolution issue de  $x$  par

$$\mathcal{C}_{K,T}(x)(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot)) := \int_0^T W(x(\tau), u(\tau), p(\tau)) d\tau + C(x(T)).$$

Si  $W(x, u, p) = 0$  et  $C(x) = 0$  pour  $x \in K$  et si  $C(x) = +\infty$  pour  $x(t) \notin K$ , les fonctions  $\mathcal{C}_{K,T}(x)$  vérifient les **conditions 1 et 2**. Par analogie avec le cas du système contrôlé, en remplaçant noyau de viabilité par noyau discriminant, nous définissons la fonction indicateur de coût  $C_{K,T < +\infty} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  comme la fonction dont l'épigraphe est égal à la trace sur l'hyperplan  $\rho = T$  du noyau discriminant de l'ensemble  $X \times \mathbb{R}_+$  pour le jeu dynamique défini par la correspondance  $H : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightsquigarrow X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  :

$$H(x, \rho, w) := \{(h(x, \rho, v, \beta, p), \lambda) \mid (v, \beta) \in \widehat{U}(x, \rho), p \in P(x) \text{ et } \lambda \in [-\gamma(\|x\| + 1), -W(x, v, p)]\} \quad (2.37)$$

avec  $(\widehat{U}, h)$  le jeu dynamique défini par  $h : X \times \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$  et  $\widehat{U} : X \times \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow Y \times \mathbb{R}$  :

$$h(x, \rho, u, \beta, p) := (\beta c(x, u, p), -\beta) \quad (2.38)$$

et

$$\widehat{U}(x, \rho) := \begin{cases} U(x) \times \{-1\} & \text{si } x \notin K \text{ ou } \rho > 0 \\ U(x) \times [-1, 0] & \text{si } x \in K \text{ et } \rho = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Le jeu dynamique  $(\widehat{U}, P, h)$  est Marchaud lorsque  $(U, P, c)$  est Marchaud.

**Le coût d'une perturbation et la résilience du système face à cette perturbation.** Comme dans le cas du système contrôlé, une correspondance  $D$  associe à tout état  $x$  du système l'ensemble  $D(x)$  de tous les états atteignables partant de  $x$  après une occurrence de cette perturbation : lorsque qu'une perturbation se produit le système passe de l'état  $x$  à l'état  $y \in D(x)$ . Le coût du saut de  $x$  à  $y$  est mesuré par le coût de restauration minimal associé à l'état atteint après le saut, c'est à dire la valeur de l'indicateur de coût en  $y$  :

$$C_{K,T}(x \rightarrow y) := C_{K,T}(y). \quad (2.40)$$

Le coût d'une perturbation  $D(x)$  est le coût maximal sur tous les sauts de  $x$  dans  $y \in D(x)$ .

$$C_{K,T,D}(x) := \max_{y \in D(x)} C_{K,T}(x \rightarrow y) = \max_{y \in D(x)} C_{K,T}(y). \quad (2.41)$$

La résilience du système dans l'état  $x$  face à la perturbation  $D$  est définie comme l'inverse du coût associé à  $D$  en  $x$  :

$$R_{K,T,D}(x) := \frac{1}{C_{K,T,D}(x)} = \min_{y \in D(x)} \frac{1}{C_{K,T}(y)}. \quad (2.42)$$

### Conclusions

Le formalisme des inclusions différentielles prend en compte les effets des actions extérieures sans loi de régulation fixée *a priori*, ainsi que nos ignorances sur les dynamiques du système : la vitesse dépend de l'état du système de manière multivoque, autrement dit, à un état du système est associé un ensemble de vitesses. La vitesse effective, qui appartient à cet ensemble, dépend également du choix des contrôles et d'éventuelles perturbations.

Comme l'ont souligné Beddington *et al.* (1976), la résilience d'un état d'un système dépend de la propriété considérée [68]. Interpréter l'ensemble des états pour lesquels cette propriété est vraie comme un ensemble de contraintes permet d'étudier d'autres ensembles que les bassins d'attraction [72, van Coller (1997)].

La théorie de la viabilité analyse la compatibilité entre les dynamiques et l'ensemble des contraintes sur les états. Un horizon temporel étant fixé, les théorèmes de viabilité permettent, dans un premier temps, de distinguer les états viables : d'un état viable est issue au moins

une évolution contenue dans l'ensemble des contraintes jusqu'à l'horizon temporel fixé. Dans un second temps, ces théorèmes permettent d'associer aux états non viables des indicateurs de coût définis comme le coût minimal sur toutes les évolutions issues de ces états. Le coût d'une évolution représente une distance entre cette évolution et une évolution idéale au cours de laquelle la propriété serait conservée. La valeur de l'indicateur de coût associée à l'état du système après une perturbation évalue les éventuels dommages causés par cette perturbation. Lorsque les perturbations envisagées sont définies en chaque état du système par un ensemble d'états atteignables, nous retenons le pire des cas. Ainsi, l'inverse du coût maximal sur l'ensemble des perturbations envisagées à partir d'un état est la valeur de la résilience du système en cet état pour la propriété, l'horizon temporel, les coûts et les perturbations considérés.

La formulation mathématique de la résilience proposée dans le formalisme de la théorie de la viabilité prend en compte la diversité des dynamiques du système. Elle est, en outre, compatible avec l'interprétation de Holling.



# Chapitre 3

## Les algorithmes de calcul de noyaux de viabilité

Nous avons montré dans la section 2.2 que, dans la définition que nous proposons, la résilience se caractérise à l'aide des concepts de noyau de viabilité et de noyaux discriminants. Elle bénéficie donc de leurs propriétés mathématiques et peut être évaluée à l'aide des algorithmes de calcul de ces noyaux.

Les noyaux de viabilité sont des ensembles qui peuvent être définis analytiquement dans certains cas extrêmement simples<sup>1</sup>. Dans les cas complexes, l'algorithme de viabilité de Saint-Pierre (1994) permet d'obtenir une approximation numérique de cet ensemble en calculant les noyaux discrets finis exacts pour des systèmes dynamiques discrets en temps et en espace associés au problème initial posé sous forme d'inclusion différentielle [79]. Dans la première section de ce chapitre, nous décrirons cet algorithme et proposerons deux variantes dans le cas Lipschitz. Les noyaux discriminants de systèmes continus peuvent également être approchés par des noyaux discriminants de systèmes discrets finis [91, Cardaliaguet *et al.*(1999)] : les schémas de discrétisation, les preuves de convergence et les algorithmes de calcul sont similaires, nous nous focalisons donc sur l'approximation des noyaux de viabilité.

L'algorithme de viabilité a deux faiblesses : il est gourmand en mémoire ce qui limite la dimension des problèmes qu'il peut traiter ; il utilise un schéma numérique diffusif qui entraîne une surestimation des noyaux réels.

Afin de pouvoir traiter des problèmes de plus grande dimension, nous proposerons trois pistes :

<sup>1</sup>Voir la sous-section 4.2.2.

1. améliorer l'implémentation de l'algorithme :
  - en utilisant des structures plus économes en mémoire,
  - en gardant en mémoire les derniers contrôles viables afin de tester en priorité ces contrôles aux points voisins ce qui permet un gain de temps dans les zones où les contrôles viables varient peu
  - et en utilisant le schéma numérique de Runge-Kutta afin de réduire le grossissement nécessaire de la dynamique et donc obtenir une approximation plus fine du noyau réel.
2. utiliser des méthodes de discrimination telles que les Machines à Vecteurs Supports, pour construire des expressions analytiques des noyaux approchés,
3. s'inspirer des méthodes de tir pour approcher le noyau par l'ensemble des points viables au moins jusqu'à un temps seuil.

En ce qui concerne la diminution du phénomène de diffusion numérique, nous décrirons les gains obtenus par utilisation d'un schéma anti-diffusif en termes de précision de l'approximation.

### 3.1 L'algorithme de viabilité de Saint-Pierre

Saint-Pierre (1994) a proposé une méthode de construction de noyaux de viabilité utilisant des approximations discrètes [79]. Nous présentons par la suite plus en détail le cas Lipschitz. Cependant, Quincampoix et Saint-Pierre (1995) ont également adapté l'algorithme au cas des inclusions différentielles Hölderiennes [92].

Cet algorithme se décompose en deux étapes :

- l'approximation du noyau de viabilité du système continu par des noyaux de systèmes discrets,
- puis par des noyaux de systèmes discrets finis.

#### 3.1.1 Problème posé

Soit  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $K$  un sous-ensemble compact de  $X$ . Considérons l'inclusion différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x) & \text{pour presque tout } t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in K, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $F$  est une correspondance *Marchaud*<sup>2</sup> définie de  $X$  dans  $X$ .

L'objectif est d'approcher le noyau de viabilité de  $K$  pour  $F$ , noté  $\text{Viab}_F(K)$ , et défini comme le sous-ensemble composé de tous les éléments  $x_0 \in K$  tels qu'il existe au moins une évolution satisfaisant (3.1) qui reste dans  $K$  indéfiniment [80, Aubin (1991)]<sup>3</sup>.

### 3.1.2 Théorèmes de convergence des approximations par des noyaux de viabilité de systèmes dynamiques discrets en temps

Saint-Pierre (1994) pose tout d'abord le problème de l'approximation par des noyaux de viabilité de systèmes dynamiques discrets obtenus par des schémas de discrétisation [79]. Dans le schéma de discrétisation d'Euler, par exemple, pour un  $\rho > 0$  fixé, à l'inclusion différentielle continue (3.1) est associé le schéma discret :

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1}-x^n}{\rho} \in F(x^n) & \text{pour tout } n \geq 1, \\ x^0 = x_0 \in K. \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit  $G_\rho$  la correspondance définie par  $G_\rho = 1 + \rho F$ , le système (3.2) peut être réécrit :

$$x^{n+1} \in G_\rho(x^n) \text{ pour tout } n \geq 0. \quad (3.3)$$

Le noyau de viabilité discret de  $K$  pour  $G_\rho$ , dynamique discrète, est défini comme le noyau de viabilité continu et noté  $\text{Viab}_{G_\rho}(K)$ .

Les définitions de convergence d'ensembles utilisées sont celles de Painlevé-Kuratowski. Soit  $A(s)$  des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  paramétrés par  $s \in S$  où  $S$  est un espace métrique :

**Définition 3.1.2.1** *La limite supérieure de  $A(s)$  lorsque  $s \rightarrow \bar{s}$  est l'ensemble*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{s \rightarrow \bar{s}} d_{A(s)}(x) = 0\}.$$

*Cette limite supérieure est notée  $\text{Limsup}_{s \rightarrow \bar{s}} A(s)$ .*

**Définition 3.1.2.2** *La limite inférieure de  $A(s)$  lorsque  $s \rightarrow \bar{s}$  est l'ensemble*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{s \rightarrow \bar{s}} d_{A(s)}(x) = 0\}.$$

*Cette limite inférieure est notée  $\text{Liminf}_{s \rightarrow \bar{s}} A(s)$ .*

<sup>2</sup>Une correspondance non triviale  $F : X \rightsquigarrow X$  est *Marchaud* si  $F$  est semi-continue supérieurement, à valeurs non vides, convexes, compactes et à croissance linéaire.

<sup>3</sup>Pour des détails supplémentaires, voir la sous-section 2.1.3.

**Définition 3.1.2.3** Lorsque les limites supérieure et inférieure de  $A(s)$  coïncident,  $A(s)$  possède une limite lorsque  $s \rightarrow \bar{s}$  notée  $\text{Lim}_{s \rightarrow \bar{s}} A(s)$ .

Nous supposons que  $F$  est une correspondance bornée :

$$\exists M \geq 0, \forall x \in X, \forall y \in F(x), \|y\| \leq M. \quad (3.4)$$

Pour tout  $\rho > 0$ , soit  $F_\rho$  une approximation de  $F$  satisfaisant les conditions suivantes :

$$F_\rho : X \rightsquigarrow X \text{ est semi-continue supérieurement, à valeurs non vides, convexes et compactes} \quad (3.5)$$

$$\text{Graph}(F_\rho) \subset \text{Graph}(F) + \phi(\rho)\mathcal{B} \text{ avec } \lim_{\rho \rightarrow 0} \phi(\rho) = 0^+, \quad (3.6)$$

$$\forall x \in X, \bigcup_{\|y-x\| \leq M\rho} F(y) \subset F_\rho(x). \quad (3.7)$$

Soit  $K_\rho$  une suite, éventuellement constante, de sous-ensembles de  $X$  telle que  $K = \text{Limsup}_{\rho > 0} K_\rho$ .

Soit  $\Gamma_\rho = \mathbf{1} + \rho\mathbf{F}_\rho$ . L'ensemble  $\text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K_\rho)$  est le noyau de viabilité discret de  $K_\rho$  pour  $\Gamma_\rho$ . Lorsque  $F$  est Marchaud et  $F_\rho$  vérifie (3.5), (3.6) et (3.7), la limite quand  $\rho$  tend vers 0 des noyaux de viabilité  $\text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K_\rho)$  est égale au noyau de viabilité de  $K$  pour la dynamique continue  $F$  :

**Théorème 3.1.2.1** Soient  $F$  une correspondance Marchaud bornée par  $M$  et  $K$  un ensemble fermé. Soit  $F_\rho$  une approximation de  $F$  vérifiant (3.5), (3.6) et (3.7) et  $\Gamma_\rho := \mathbf{1} + \rho\mathbf{F}_\rho$ . Alors, pour tout  $\rho > 0$ ,

$$\text{Viab}_F(K) \subset \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K_\rho)$$

et

$$\text{Lim}_{\rho \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K_\rho) = \text{Viab}_F(K)$$

**Remarque** — La démonstration de l'inclusion  $\text{Limsup}_{\rho \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K_\rho) \subset \text{Viab}_F(K)$  utilise les hypothèses (3.5) et (3.6) et le théorème d'Ascoli-Mazur. La convexité des images est cruciale. L'inclusion  $\text{Viab}_F(K) \subset \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K_\rho)$  est une conséquence de l'hypothèse (3.7).

Lorsque  $F$  est Lipschitz, il existe une suite particulière  $\Gamma_\rho$  vérifiant les conditions (3.5) et (3.6) et telle que la limite des noyaux discrets soit égale au noyau continu :

**Theorème 3.1.2.2** Soient  $F$  une correspondance Marchaud et  $l$ -Lipschitz et  $K$  un sous-ensemble fermé de  $X$  tel que  $M := \sup_{x \in K} \sup_{y \in F(x)} \|y\| < +\infty$ .

Considérons  $F_\rho := F + \frac{Ml}{2} \rho \mathcal{B}$  et  $\Gamma_\rho := 1 + \rho F_\rho$ ,

alors,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K) = \text{Viab}_F(K). \quad (3.8)$$

Nous ajoutons la proposition suivante qui est une version locale du théorème de Saint-Pierre (1994) :

**Theorème 3.1.2.3** Soient  $F$  une correspondance Marchaud bornée par  $\bar{M}$  et  $\bar{l}$ -Lipschitz et  $K$  un sous-ensemble fermé de  $X$ .

Soit  $\alpha > 0$  et  $M, l : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que

$$\forall x \in K, \forall x' \in \mathcal{B}(x, \alpha) \sup_{y \in F(x')} \|y\| \leq M(x) \quad (3.9)$$

et

$$F(x') \subset F(x) + l(x) \|x' - x\| \mathcal{B}. \quad (3.10)$$

Soit  $\rho > 0$ , tel que

$$\rho \bar{M} \leq \alpha. \quad (3.11)$$

Considérons  $F_\rho(x) := F(x) + \frac{M(x)l(x)}{2} \rho \mathcal{B}$  et  $\Gamma_\rho := 1 + \rho F_\rho$ ,

alors,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K) = \text{Viab}_F(K). \quad (3.12)$$

**Preuve** —  $F_\rho$  satisfait (3.5) et (3.6) avec  $\phi(\rho) \leq \bar{M}l\rho$ . Par conséquent,

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K) \subset \text{Viab}_F(K).$$

Montrons maintenant que  $\text{Viab}_F(K) \subset \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K)$ . Soit  $x^0 \in \text{Viab}_F(K)$ . Soit  $x(\cdot)$  une évolution viable issue de  $x^0$ . Soit  $\rho$  tel que  $\bar{M}l\rho \leq \alpha$ . Posons  $x^n := x(n\rho)$ .

$$\begin{aligned} x^{n+1} - x^n &= x(n\rho + \rho) - x(n\rho) \\ &= \int_0^\rho x'(n\rho + \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Or,

$$x'(n\rho + \tau) \in F(x(n\rho + \tau))$$

et

$$x(n\rho + \tau) - x(n\rho) = \int_0^\tau x'(n\rho + \sigma) d\sigma \quad (3.14)$$

avec

$$x'(n\rho + \sigma) \in F(x(n\rho + \sigma))$$

et

$$\|F(x(n\rho + \sigma))\| \leq \overline{M}$$

donc,

$$|x(n\rho + \tau) - x(n\rho)| \leq \overline{M}\tau \leq \overline{M}\rho \leq \alpha, \quad (3.15)$$

d'après la condition (3.11).

Ainsi, d'après les définitions (3.9) et (3.10),

$$\begin{aligned} F(x(n\rho + \tau)) &\subset F(x(n\rho)) + l(x(n\rho))|x(n\rho + \tau) - x(n\rho)| \\ &\subset F(x(n\rho)) + l(x(n\rho))M(x(n\rho))\tau\mathcal{B}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'où,

$$x^{n+1} - x^n \in \rho F(x(n\rho)) + l(x(n\rho))M(x(n\rho))\frac{\rho^2}{2}\mathcal{B}, \quad (3.17)$$

Ainsi  $x^{n+1} \in \Gamma_\rho(x^n)$  et comme l'évolution  $x(\cdot)$  est viable,  $\forall n \geq 0$ ,  $x^n \in K$  et  $x^0 \in \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K)$ . —

### 3.1.3 Théorèmes de convergence des approximations par des noyaux de viabilité de systèmes dynamiques discrets finis

À tout  $h \in \mathbb{R}$ , Saint-Pierre associe  $X_h$  un ensemble dénombrable de parties de  $X$  tel que :

$$\forall x \in X, \exists x_h \in X_h \text{ tel que } d(x, x_h) \leq \alpha(h) \quad (3.18)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0. \quad (3.19)$$

L'ensemble  $X_h$  est appelé grille. Cette grille peut être un ensemble de points ou une famille d'intervalles ou de courbes définies analytiquement. Dans la suite, nous considérons que  $X_h$  est une grille de points.

Soit  $G_h : X_h \rightarrow X_h$  une correspondance finie et un sous-ensemble  $K_h \subset \text{Dom}(G_h)$ . Le système dynamique discret fini associé à  $G_h$  est :

$$x_h^{n+1} \in G_h(x_h^n) \text{ pour tout } n \geq 0. \quad (3.20)$$

Soit  $(X_h)_{h \in \mathbb{R}_+}$  une suite de grilles de  $X$ .

Soient  $F$  est une correspondance Marchaud,  $(F_\rho)_\rho$  une famille de correspondances vérifiant les conditions (3.5), (3.6) et (3.7) et  $\Gamma_\rho := 1 + \rho F_\rho$ .

Soit  $\Gamma_{\rho,h} := X_h \rightsquigarrow X_h$  une famille de correspondances finies à valeurs non vides telle que pour tout  $\rho > 0$  et pour tout  $h > 0$  :

$$\text{Graph}(\Gamma_{\rho,h}) \subset \text{Graph}(\Gamma_\rho) + \psi(\rho, h)\mathcal{B} \text{ avec } \lim_{\rho \rightarrow 0, \frac{h}{\rho} \rightarrow 0} \frac{\psi(\rho, h)}{\rho} = 0^+, \quad (3.21)$$

$$\forall x_h \in X_h, \quad \bigcup_{\|y-x_h\| \leq \alpha(h)} [\Gamma_\rho(y) + \alpha(h)\mathcal{B}] \cap X_h \subset \Gamma_{\rho,h}(x_h). \quad (3.22)$$

Soit  $K$  un sous-ensemble fermé de  $X$  et  $K_h$  sa projection sur la grille  $X_h$  définie par

$$K_h := (K + \alpha(h)\mathcal{B}) \cap X_h$$

L'ensemble  $\text{Viab}_{\Gamma_{\rho,h}}(K_h)$  est le noyau de viabilité discret fini de  $K_h$  pour  $\Gamma_{\rho,h}$ . Lorsque  $F$  est Marchaud,  $F_\rho$  vérifie (3.5), (3.6) et (3.7) et  $\Gamma_{\rho,h}$  vérifie (3.21) et (3.22), la limite quand  $\rho$  et  $\frac{h}{\rho}$  tendent vers 0 des noyaux de viabilité  $\text{Viab}_{\Gamma_{\rho,h}}(K_h)$  est égale au noyau de viabilité de  $K$  pour la dynamique continue  $F$  :

**Theorème 3.1.3.1** *Soit  $F$  une correspondance Marchaud.*

*Soit  $F_\rho$  une approximation de  $F$  vérifiant (3.5), (3.6) et (3.7) et  $\Gamma_\rho := 1 + \rho F_\rho$ .*

*Soit  $\Gamma_{\rho,h}$  une approximation de  $\Gamma_\rho$  vérifiant (3.21) et (3.22).*

*Soit  $K$  un ensemble fermé et  $K_h := (K + \alpha(h)\mathcal{B}) \cap X_h$ .*

*Alors, pour tout  $\rho > 0$ ,*

$$\text{Viab}_F(K) \subset \text{Viab}_{\Gamma_{\rho,h}}(K_h) + \alpha(h)\mathcal{B}$$

*et*

$$\text{Lim}_{\rho \rightarrow 0, \frac{h}{\rho} \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_{\rho,h}}(K_h) = \text{Viab}_F(K)$$

Lorsque  $F$  est Lipschitz et que  $(X_h)_{h \in \mathbb{R}_+}$  est une suite de grilles de  $X$ , Saint-Pierre (1994) a montré qu'une suite particulière de correspondances finies,  $\Gamma_{\rho,h}$  est telle que la limite des noyaux de viabilité discrets finis est égale au noyau de viabilité du système continu :

**Theorème 3.1.3.2** *Soit  $F : X \rightsquigarrow X$  une correspondance Marchaud et  $l$ -Lipschitz,  $K$  un sous-ensemble fermé de  $\text{Dom}(F)$  satisfaisant  $M := \sup_{x \in K} \sup_{y \in F(x)} \|y\| < \infty$ .*

Soit  $\Gamma_\rho := \mathbf{1} + \rho F + \frac{Ml}{2}\rho^2\mathcal{B}$  et  $k := 1 + \rho l$ .

Supposons  $M$  et  $l$  sont non nuls et que  $\rho$  et  $h$  sont choisis tels que :

$$\alpha(h) \leq \frac{Ml}{2}\rho^2. \quad (3.23)$$

Soient  $\Gamma_\rho^{kMl\rho^2} : X \rightarrow X$  et  $\Gamma_{\rho h}^{kMl\rho^2} : X_h \rightarrow X_h$  tels que :

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{kMl\rho^2}(x) &:= \Gamma_\rho(x) + kMl\rho^2\mathcal{B} \\ \Gamma_{\rho h}^{kMl\rho^2}(x_h) &:= \Gamma_\rho^{kMl\rho^2}(x_h) \cap X_h. \end{aligned}$$

Soit  $K_h^{Ml\rho^2} := (K^+Ml\rho^2\mathcal{B}) \cap X_h$ , alors,

$$\text{Viab}_F(K) = \lim_{\rho, h \rightarrow 0} (\text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K) + \alpha(h)\mathcal{B}) \cap X_h \quad (3.24)$$

et

$$\text{Viab}_F(K) = \lim_{\rho, h \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_{\rho h}^{kMl\rho^2}}(K_h^{Ml\rho^2}). \quad (3.25)$$

### 3.1.4 Processus de construction des noyaux de viabilité approchés

#### Calcul d'un noyau de viabilité discret fini

Considérons le système dynamique discret

$$x^{n+1} \in G(x^n) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Saint-Pierre (1994) a démontré la proposition suivante :

**Proposition 3.1.4.1** Soit  $G : X \rightsquigarrow X$  une correspondance semi-continue supérieurement à valeurs fermées et  $K$  un sous-ensemble compact de  $\text{Dom}(G)$ .

Soit la suite  $(K^n)_n$  (avec  $K^0 = K$ ) définie par :

$$K^{n+1} := \{x \in K^n \text{ tels que : } G(x) \cap K^n \neq \emptyset\} \quad (3.26)$$

alors  $\text{Viab}_G(K) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K^n$ .

Dans le cas d'un système dynamique discret fini

$$x_h^{n+1} \in G_h(x_h^n) \text{ pour tout } n \geq 0,$$

avec  $G_h : X_h \rightsquigarrow X_h$  et  $X_h$  grille de points, la proposition 3.1.4.1 est vraie dès que  $G_h$  à des valeurs non vides : soit la suite  $(K_h^n)_n$  (avec  $K_h^0 = K_h$ ) définie par

$$K_h^{n+1} := \{x \in K_h^n \text{ tels que : } G_h(x) \cap K_h^n \neq \emptyset\} \quad (3.27)$$

alors  $\text{Viab}_{G_h}(K_h) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_h^n$ . De plus, il existe  $p$  fini tel que  $\text{Viab}_{G_h}(K_h) = K_h^p$ .

## Raffinement

Saint-Pierre (1994) a montré qu'il n'était pas nécessaire de reprendre les calculs sur la totalité de l'ensemble fini  $K_h$  à chaque changement de pas  $h$  [79] : sur la grille plus fine, le noyau de viabilité pour la dynamique discrète finie de la projection de l'ensemble  $K$  est égal au noyau de viabilité pour la même dynamique de la projection du noyau de viabilité dilaté, calculé sur une grille plus grossière. C'est le principe de raffinement.

Considérons deux suites  $h_p$  et  $\rho_p$  positives tendant vers 0 vérifiant pour tout  $p$  positif la condition (3.23).

**Théorème 3.1.4.1** *Supposons que les hypothèses du théorème 3.1.3.2 sont vérifiées et posons :*

$$\begin{cases} D_1 := K_{h_1}^{Ml\rho_1^2} \\ D_{p+1} := \text{Viab}_{\Gamma_{\rho_p h_p}^{kMl\rho_p^2}}[(D_p + (h_p + h_{p+1})\mathcal{B}) \cap K_{h_{p+1}}^{Ml\rho_{p+1}^2}] \end{cases} \quad (3.28)$$

alors,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_p = \text{Viab}_F(K).$$

### 3.1.5 Description schématique du fonctionnement du programme implémenté à partir de cet algorithme

Dans  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble des contraintes est  $K$  et la dynamique  $F$ . Les grilles utilisées sont des grilles de points régulières,  $X_{h_p} := h_p \mathbb{Z}^n$  avec  $h_p := \frac{1}{2^p}$  et  $\rho_p = \sqrt{\frac{h_p}{Ml}}$  ( $M$  et  $l$  sont supposés non nuls). Notons,  $\Gamma_p := \Gamma_{\rho_p h_p}^{kMl\rho_p^2}$ .

**Initialisation** La première étape consiste à mémoriser les points appartenant à

$$K_{h_1} := (K + h_1 \mathcal{B}) \cap X_{h_1}.$$

Posons  $D_1^0 := K_{h_1}$ . Ces points sont représentés par des carrés pleins dans la figure 3.1.

**Boucle** Le nombre d'itérations est limité par la taille mémoire et le temps de calcul.

Pour  $p$  valant 1 à  $\bar{p}$  :

- Calcul du noyau de viabilité discret fini correspondant au pas  $h_p$  :
- répéter

$$\begin{cases} D_p^{n+1} \leftarrow \{x \in D_p^n \mid \Gamma_p(x) \cap D_p^n \neq \emptyset\} \text{ (Fig. 3.2)} \\ n \leftarrow n + 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

- jusqu'à  $D_p^{n+1} = D_p^n$ .  
 $D_p^\infty \leftarrow D_p^n$ .  
 – *Raffinement* : si  $p < \bar{p}$  alors  $D_{p+1}^0 \leftarrow [D_p^\infty + 3h_{p+1}\mathcal{B}] \cap K_{h_{p+1}}$  (Fig. 3.3).

**Sortie**  $D_{\bar{p}}^\infty$ , noyau de viabilité approché au pas  $\bar{p}$ .

### 3.1.6 Limites

L'algorithme de viabilité permet d'approcher les noyaux de viabilité de systèmes continus en calculant les noyaux exacts de systèmes discrets définis sur une grille finie.

La taille de cette grille croît exponentiellement avec la dimension, ce qui limite l'utilisation pratique aux petites dimensions. D'autre part, cet algorithme utilise un schéma numérique diffusif qui entraîne une surestimation des noyaux réels.

## 3.2 Améliorer l'implémentation de l'algorithme de viabilité

À partir de l'algorithme de viabilité, Patrick Saint-Pierre a développé un programme qui a permis de calculer de nombreuses approximations de noyaux de viabilité<sup>4</sup>.

Soit un ensemble de contraintes  $K$  et une dynamique  $F$ , l'algorithme de viabilité consiste à approcher le noyau de viabilité de  $K$  pour  $F$  par des noyaux de viabilité exacts de systèmes dynamiques discrets finis associés (section 3.1).

Le programme permet de réaliser deux tâches successivement :

- à grille fixée, calculer le noyau de viabilité exact du système dynamique discret fini associé

$$K_h^{n+1} := \{x \in K_h^n \text{ tels que : } G_h(x) \cap K_h^n \neq \emptyset\} \quad (3.30)$$

- passer d'une grille à une grille de pas plus petit pour obtenir une approximation plus fine du noyau réel

$$\begin{cases} D_1 := K_{h_1}^{Ml\rho_1^2} \\ D_{p+1} := \text{Viab}_{\Gamma_{\rho_p h_p}^{kMl\rho_p^2}}[(D_p + (h_p + h_{p+1})\mathcal{B}) \cap K_{h_{p+1}}^{Ml\rho_{p+1}^2}]. \end{cases} \quad (3.31)$$

<sup>4</sup>Entre autres [87, Doyen et Saint-Pierre (1997)][81, Aubin *et al.* (2001)][93, Martin (2004)][94, Bonneuil et Saint-Pierre (2005)].

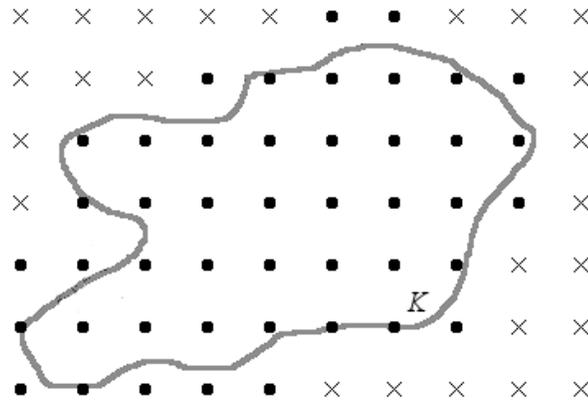


FIG. 3.1 – Initialisation : les points de la grille appartenant à  $D_1^0$  sont représentés par des carrés pleins.

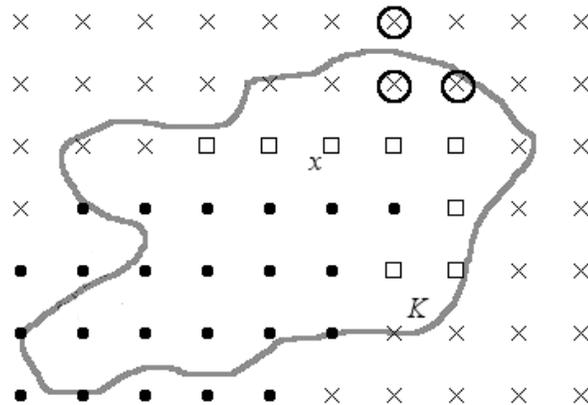


FIG. 3.2 – Une étape du calcul de noyau de viabilité discret fini : passage de  $D_1^n$  représenté par les carrés pleins et les carrés vides à  $D_1^{n+1}$  composé uniquement des carrés pleins. Les points représentés par des carrés vides comme le point  $x$ , dont les successeurs sont entourés par des cercles, n'ont pas de successeur parmi les points de  $D_1^n$ .

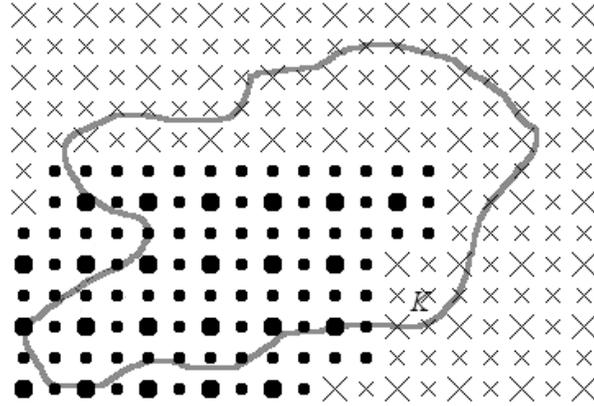


FIG. 3.3 – Raffinement : passage de  $D_1^\infty$  représenté par les grands carrés pleins à  $D_2^0$  composé des points représentés par les carrés pleins petits et grands.

En étroite collaboration avec Saint-Pierre, nous avons programmé la version locale de l'algorithme de viabilité en réalisant trois modifications majeures qui permettent d'économiser de la mémoire et du temps, d'améliorer la qualité de l'approximation, et donc de traiter des problèmes de plus grande dimension :

- soit  $X_h$  une grille de points régulière de  $X := \mathbb{R}^n$  définie par  $X_h := h * \mathbb{Z}^n$ , notre première amélioration concerne la représentation, la mémorisation et la manipulation de sous-ensembles finis de  $X_h$ , utiles lors des calculs de noyaux de viabilité discrets finis (3.30) et lors des raffinements (3.31),
- soit une dynamique discrète finie décrite par la correspondance  $\Gamma_{\rho,h} : X_h \rightsquigarrow X_h$  le calcul de noyaux de viabilité discrets finis (3.30) nécessite de réaliser des tests sur les successeurs de  $x_h \in X_h, y_h \in G_h(x_h)$ . Notre deuxième amélioration concerne l'ordre de test de ces successeurs.
- soit  $F$  la dynamique continue, notre troisième amélioration est la discrétisation suivant le schéma numérique de Runge-Kutta qui permet de réduire la dilatation nécessaire de la dynamique et donc, d'obtenir une approximation plus fine du noyau réel.

### 3.2.1 Remplacer le tableau de points par une structure plus économe en mémoire

#### Motivations

À grille fixée, le calcul du noyau de viabilité du système dynamique discret fini est itératif (3.27) : le sous-ensemble fini  $K_h^{n+1}$  de  $X_h$  obtenu à l'étape  $n + 1$  dépend du sous-ensemble fini  $K_h^n$  calculé à l'étape précédente. Le programme construit et mémorise une structure qui

représente le sous-ensemble fini de  $X_h$  initial  $K_h^0$ . Puis, à chaque étape, il modifie ce sous-ensemble en retirant certains points selon la règle décrite par (3.27).

Lors du raffinement, pour passer d'une grille de pas  $h$  à une grille de pas  $h/2$  (3.28), le programme fait évoluer cette structure en ajoutant de nouveaux éléments à la grille grossière.

Le programme actuel développé par Patrick Saint-Pierre permet de calculer des noyaux de viabilité en dimension 2 ou 3. Pour représenter un sous-ensemble de  $X_h$ , il utilise un tableau de dimension 2 ou 3 de booléens pour indiquer si un point de la grille régulière appartient ou non au sous-ensemble. Nous avons défini et implémenté une structure plus économe en mémoire, adaptée à la dimension  $n$ ,  $n$  étant bien sûr borné en pratique par la taille mémoire du système sur lequel le programme est utilisé.

Dans le programme développé par Saint-Pierre, le nombre de case par dimension du tableau est égal à la précision maximale demandée dès l'initialisation. Nous proposons une structure qui permet une allocation dynamique de la mémoire.

### La représentation des sous-ensembles de $X_h$

La grille  $X_h$  est définie par  $X_h := h * \mathbb{Z}^n$ . Soit  $D$  un sous-ensemble fini de  $X_h$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , posons  $A := (a_1 h, \dots, a_n h) \in X_h$  avec

$$a_i h = \min_{(d_1, \dots, d_n) \in D} (d_i)$$

et  $B := (b_1 h, \dots, b_n h) \in X_h$  avec

$$b_i h = \max_{(d_1, \dots, d_n) \in D} (d_i),$$

alors

$$\begin{aligned} D &\subset (\{A\} + h * (\mathbb{Z}^n)^+) \cap (\{B\} + h * (\mathbb{Z}^n)^-) \\ &\subset \{A\} + h * M \end{aligned} \quad (3.32)$$

avec  $M = \prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, c_i\}$  et  $c_i = b_i - a_i$ . Soit  $D_M \subset M$  tel que  $D = \{A\} + h * D_M$ ,  $D_M$  est isomorphe à  $D$ .

Les noyaux de viabilité ne sont pas convexes *a priori*. Nous avons néanmoins constaté que, pour la plupart des noyaux de viabilité discrets finis calculés dans des travaux existants<sup>5</sup>, il existe des directions  $j \in \{1, \dots, n\}$  telles que les ensembles  $(\text{Viab}_F(K) \cap \bigcap_{i \neq j} \{x_i = x_i^0\})_{x^0 \in \mathbb{R}^n}$  possèdent moins de deux composantes connexes. En particulier, il existe une direction pour laquelle ces ensembles ont une seule composante connexe lorsque le noyau est

<sup>5</sup>Voir [87, Doyen et Saint-Pierre (1997)][81, Aubin *et al.* (2001)][93, Martin (2004)][94, Bonneuil et Saint-Pierre (2005)].

égal à l'épigraphe ou à l'hypographe d'une fonction<sup>6</sup>. Partant de cette constatation, nous avons choisi d'implémenter une structure hybride pour représenter  $D_M \subset M$ , l'une des coordonnées étant traitée différemment des  $n - 1$  autres : une suite de débuts et fins d'intervalles est mémorisée, ces intervalles concernent la dernière coordonnée et à chaque valeur  $(m_1, \dots, m_{n-1})$  des  $n - 1$  premières coordonnées correspond une sous-suite de bornes d'intervalles représentant  $D_M \cap \bigcap_{i=0, \dots, n-1} \{l_i = m_i\}$ .

**Les  $n - 1$  premières coordonnées.** Soit  $M^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \{0, 1, \dots, c_i\} \subset \mathbb{N}^{n-1}$ . Pour traiter les  $n - 1$  dimensions de façon similaire, nous avons choisi comme élément de base l'hypercube de dimension  $n - 1$ ,  $\mathcal{H}^{n-1} := \{0, 1\}^{n-1}$ .

Soit  $m^{n-1} \in M^{n-1}$ , l'application qui à  $m^{n-1} = (m_1, \dots, m_{n-1})$  associe

$$((p_1, \dots, p_{n-1}), (q_1, \dots, q_{n-1}))$$

avec

$$\begin{aligned} p_i &:= E\left(\frac{m_i}{2}\right) \\ q_i &:= m_i - 2p_i \end{aligned} \quad (3.33)$$

est injective ( $E$  désigne la partie entière).

Les scalaires  $p_i$  déterminent le numéro  $n_c$  de l'hypercube auquel  $m^{n-1} \in M^{n-1}$  est associé (Fig. 3.4) :

$$n_c = \sum_{j=1}^{n-2} (p_j * \prod_{k=j+1}^{n-1} (E\left(\frac{c_k}{2}\right) + 1)) + p_{n-1} + 1,$$

et les scalaires  $q_i$  le numéro,  $n_s$ , du sommet de l'hypercube numéro  $n_c$  correspondant à  $m^{n-1}$  (Fig. 3.5) :

$$n_s = \sum_{j=1}^{n-1} q_j * 2^{n-1-j}.$$

**La dernière coordonnée.** Soit  $m := (m_1, \dots, m_n)$  appartenant à  $M$ .

Les coordonnées  $(m_1, \dots, m_{n-1})$  de  $m$  étant fixées, lorsque  $m_n$  varie de 0 à  $c_n$ ,  $m$  parcourt l'ensemble

$$M \cap \bigcap_{i=0, \dots, n-1} \{l_i = m_i\}.$$

Si le chiffre 0 est associé au cas  $m \notin D_M$  et le chiffre 1 au cas contraire  $m \in D_M$ , l'information à mémoriser est une suite appartenant à  $\{0, 1\}^{c_n+1}$ . Partant de la constatation décrite au paragraphe précédent concernant le faible nombre de composantes connexes dans une telle suite, nous avons choisi d'utiliser comme codage les nombres de 0 et de 1 consécutifs.

<sup>6</sup>Voir la section 2.1.

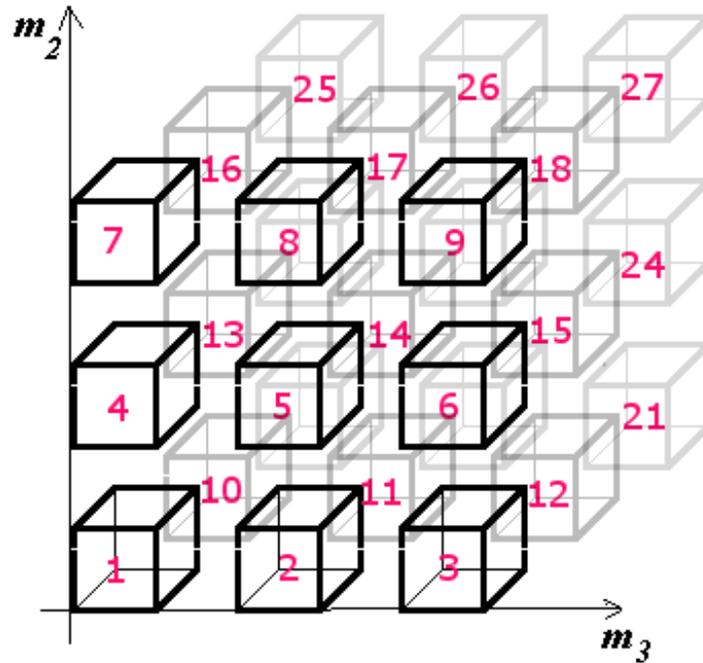


FIG. 3.4 – Recouvrement de  $M^3$  par des cubes.

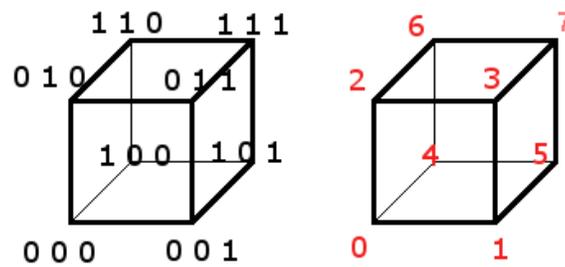


FIG. 3.5 – Numérotation des sommets d'un cube.

Par exemple, la suite 000001111111111111110000110000 est codée par les quatre nombres 5,15,4,2. Dans ce cas, le codage que nous proposons n'est pas avantageux, cependant, lorsque la longueur de la suite augmente tout en ayant peu de composantes connexes, il le devient.

Pour coder une suite de  $(c_n + 1)$  0 ou 1,

- il faut  $c_n + 1$  bits<sup>7</sup> ou  $E(\frac{c_n+1}{8}) + 1$  octets<sup>8</sup> ( $E$  désigne la partie entière) en codant successivement chaque élément de la suite,
- dans le codage que nous proposons, nous comptons le nombre de 0 consécutifs,  $n_0^1$ , le nombre de 1 consécutifs,  $n_1^1, \dots, n_0^S, n_1^S$ , avec  $S$  nombre de composantes connexes de l'ensemble des 1. Chacun des  $n_0^i$  et  $n_1^i$  est majoré par  $c_n + 1$ , son codage en base 2 nécessite au plus  $E(\log_2(c_n + 1) + 1)$  bits. Le codage complet utilise, par conséquent,  $E(\log_2(c_n) + 1) * 2 * S$  bits soit

$$E\left(\frac{E(\log_2(c_n) + 1) * 2 * S}{8}\right) + 1$$

octets.

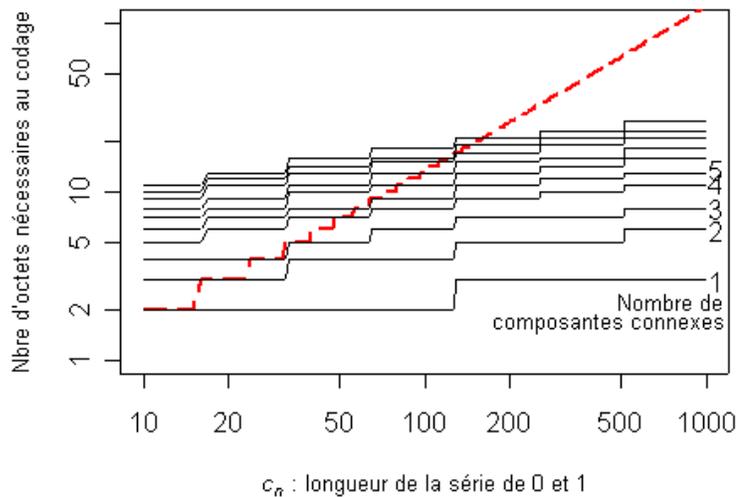


FIG. 3.6 – Nombre d’octets nécessaires au codage en fonction de la longueur de la suite avec une échelle logarithmique. En pointillés rouges, le codage classique. En courbes pleines noires, le codage que nous proposons : chaque courbe correspond à une valeur du nombre de composantes connexes de l’ensemble des 1.

La figure 3.6 montre que pour des valeurs faibles du nombre de composantes connexes, le codage que nous proposons nécessite moins de taille mémoire dès que la longueur de la suite augmente.

<sup>7</sup>Le bit représente la plus petite unité de mémoire utilisable sur un ordinateur. Cette mémoire ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

<sup>8</sup>Un octet est composé de huit bits. C’est l’unité de mesure la plus couramment utilisée.

Représentation schématique de la structure en dimension  $n$  (Fig. 3.7)

Le nombre d'hypercubes est lié aux  $c_i$  par la formule :  $N = \prod_{j=1}^{n-1} E(\frac{c_j}{2}) + 1$ . La longueur des chaînes binaires vaut  $L = c_n + 1$ .

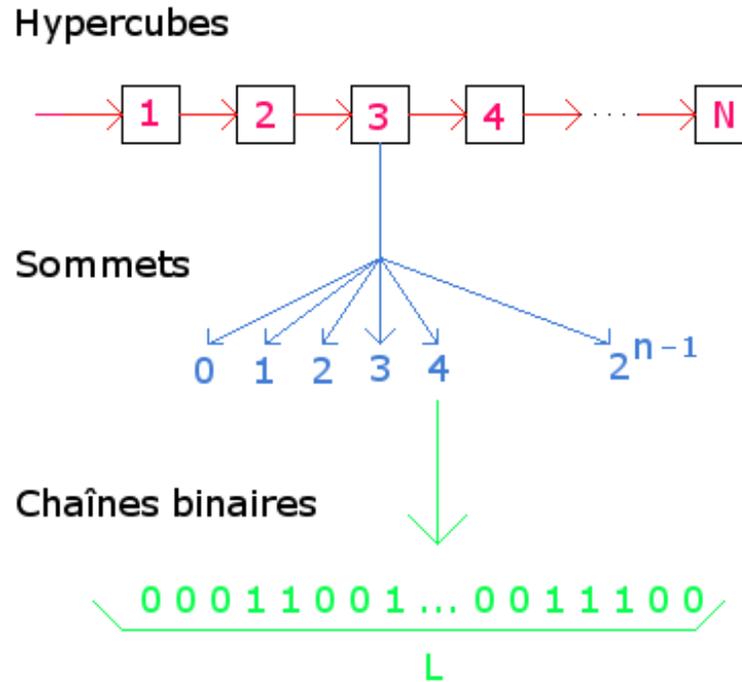


FIG. 3.7 – Schéma de la structure en dimension  $n$ .

### Les opérations sur les sous-ensembles de $X_h$ nécessaires à la réalisation de l'algorithme

À l'étape  $n + 1$  de l'algorithme, certains points  $x$  de  $K_h^n$  sont retirés si

$$G(x) \cap K_h^n = \emptyset.$$

Deux procédures sont nécessaires : une procédure de test d'appartenance à  $K_h^n$  et une procédure de retrait d'un point.

Quant à l'opération de raffinement, elle utilise la même procédure dans les  $n - 1$  premières dimensions, d'où l'intérêt de l'agencement à base d'hypercube de dimension  $n - 1$ . Une autre procédure réalise le raffinement dans la dernière dimension.

*Procédure de test d'appartenance*

Cette procédure doit renvoyer le label associé à un point  $m = (m_1, \dots, m_n) \in M$  : 1 si le point appartient à  $D_M$ , 0 sinon.

Comme décrit dans le paragraphe précédent, la procédure utilise les  $n - 1$  premières coordonnées pour déterminer le numéro de l'hypercube auquel le point appartient, puis le numéro du sommet de l'hypercube sur lequel le point est situé. Enfin, le  $(m_n + 1)^{\text{ème}}$  bit de la chaîne binaire associée à ce sommet est égal au label de  $m$ .

#### *Procédure de retrait d'un point*

Retirer un point  $m$  équivaut à modifier son label de 1 à 0. Comme dans la procédure précédente, les  $n - 1$  premières coordonnées de  $m$  permettent de déterminer la chaîne binaire à l'intérieur de laquelle le label de  $m$  est codé. Le  $(m_n + 1)^{\text{ème}}$  bit de cette chaîne doit être modifié de 1 à 0. Il faut distinguer deux cas :

- si la modification du 1 en 0 ne change pas le nombre de composantes connexes, la modification du code ne porte que sur deux nombres.

Par exemple, la chaîne 00011110011100 est codée par 3,4,2,3. La chaîne obtenue en remplaçant le premier 1 (souligné) par 0 est codée par 4,3,2,3.

- si la modification de ce 1 en 0 augmente de 1 le nombre de composantes connexes, deux nombres du code sont modifiés et deux sont ajoutés. Par exemple, la chaîne 00011110011100 est codée par 3,4,2,3. La chaîne obtenue en remplaçant le deuxième 1 (souligné) par 0 est codée par 3,1,1,2,2,3.

#### *Procédure de raffinement*

Soit  $D$  un sous-ensemble fini de  $X_h$ , la procédure de raffinement construit une représentation de l'ensemble  $[D + \alpha(h)\mathcal{B}]$  sur la grille  $X_{\frac{h}{2}} := \frac{h}{2} * \mathbb{Z}^n$ . Cette opération est nécessaire pour appliquer le principe de raffinement (3.31). Concrètement, les labels des points qui appartenaient à la grille plus grossière ne sont pas modifiés, les labels des nouveaux sont déduits de ceux des anciens suivant la règle : le label d'un nouveau point vaut 0 si tous ses points voisins (distance en norme du sup  $\leq \frac{h}{2}$ ) ont le label 0, et 1 sinon.

Les  $n - 1$  premières dimensions se traitent de façon identique. Il faut dans chacune de ces dimensions dédoubler chacun des hypercubes qui pavent  $M^{n-1}$  comme illustré dans la figure 3.8 pour des hypercubes de dimension 3. Les chaînes binaires associées aux sommets des hypercubes qui appartenaient à la grille plus grossière ne sont pas modifiés, les chaînes binaires associées aux nouveaux sommets sont déduites des chaînes binaires associées aux anciens sommets en respectant la règle énoncée au paragraphe précédent. La figure 3.9 illustre les chaînes binaires à conserver et celles à créer lorsque les hypercubes sont de dimension 3. Dans le cas général, lorsque la dimension de l'espace des états est  $n$ , les hypercubes sont alors de dimension  $n - 1$ , les intuitions issues du cas particulier de la dimension 4 se généralisent

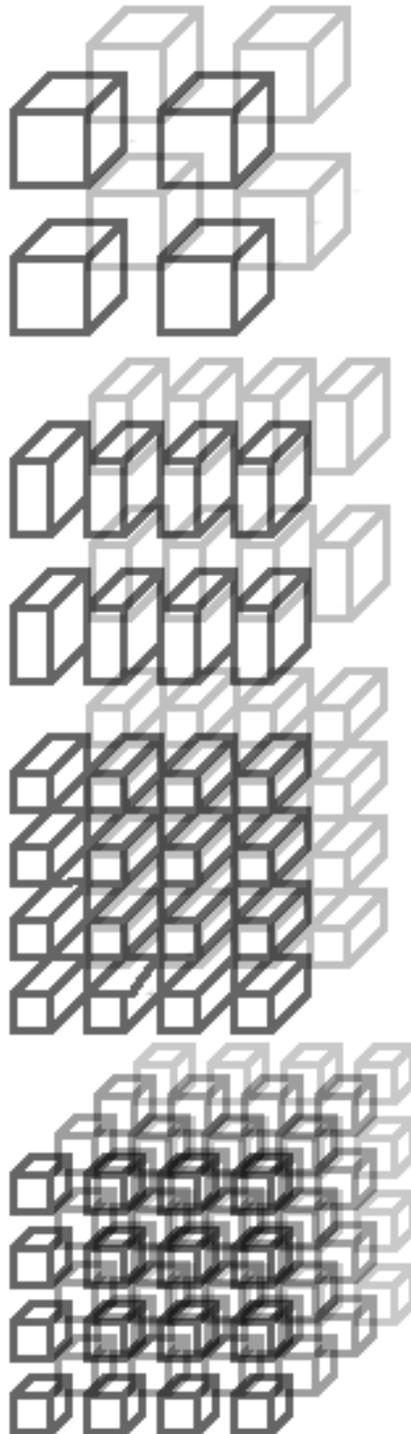


FIG. 3.8 – Dédoublément des hypercubes de dimension 3 successivement dans les trois dimensions. Le nombre de cubes est multiplié par  $2^3$ .

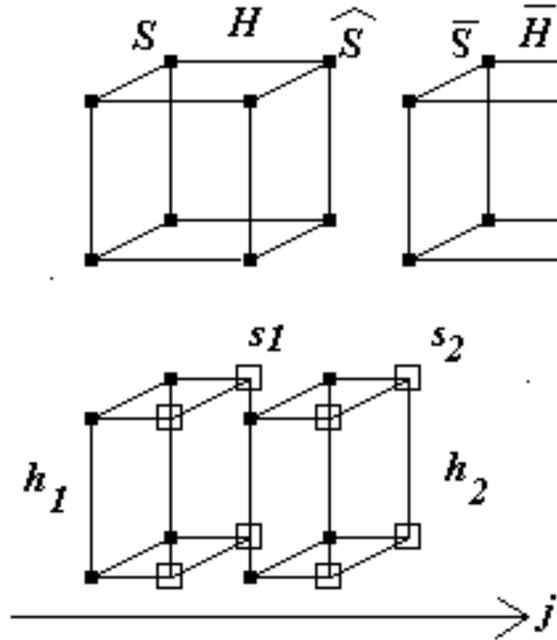


FIG. 3.9 – Dédoublage des hypercubes de dimension 3 dans la direction  $j$ . Représentés par des carrés peins, les sommets dont les chaînes binaires associées sont conservées, en carrés vides, ceux dont les chaînes binaires associées doivent être créées.

aisément. Nous définissons la réunion de deux chaînes binaires :

**Définition 3.2.1.1** *La réunion de deux chaînes binaires est la chaîne binaire dont chaque bit est égal au maximum des bits de même rang de chacune des deux chaînes.*

Lors d'un raffinement dans la dimension  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , chaque hypercube  $H$  se scinde en deux hypercubes  $h_1$  et  $h_2$  comme illustré dans la figure 3.9.

- Pour calculer les chaînes binaires associées aux sommets de  $h_1$ , les chaînes binaires de  $H$  suffisent.
  - Les sommets de  $h_1$  représentés par des carrés pleins correspondent aux sommets de  $H$ , les chaînes associées sont donc égales à celles des sommets de  $H$ .
  - Les sommets de  $h_1$  représentés par des carrés vides ne correspondent à aucun sommet de  $H$ . La chaîne binaire associée est la réunion des deux chaînes binaires associées à deux sommets de  $H$ . Par exemple, la chaîne binaire associée au sommet  $s_1$  de  $h_1$  est la réunion des chaînes binaires associées aux sommets  $S$  et  $\widehat{S}$  de  $H$ .
- Pour calculer les chaînes binaires associées aux sommets de  $h_2$ , il faut connaître les chaînes associées aux sommets de  $H$  et de  $\bar{H}$  hypercube image de  $H$  par la translation de vecteur nul sur toutes les composantes sauf la  $j^{\text{ème}}$  qui vaut 2.
  - Les sommets de  $h_2$  représentés par des carrés pleins correspondent aux sommets de

$H$ , les chaînes associées sont donc égales à celles des sommets de  $H$ .

- Les sommets de  $h_2$  représentés par des carrés vides ne correspondent à aucun sommet de  $H$ . La chaîne associée est la réunion de deux chaînes binaires, l'une associée à un sommet de  $H$  et l'autre à un sommet de  $\bar{H}$ . Par exemple, la chaîne binaire associée au sommet  $s_2$  de  $h_2$  est la réunion des chaînes binaires associées au sommet  $\hat{S}$  de  $H$  et  $\bar{S}$  de  $\bar{H}$ .

Dans la  $n^{\text{ème}}$  dimension, le raffinement correspond à une opération sur des chaînes binaires. Par exemple, après raffinement, la chaîne 00011110011100 devient 00000111111110001111110000 et son code 3,4,2,3 devient 5,9,3,7. De manière générale, le code  $\dots n_0^j, n_1^j \dots$  devient  $\dots (2 * n_0^1 - 1), (2 * n_1^1 + 1) \dots$

Le raffinement consiste à effectuer les procédures de raffinement dans chacune des  $n$  directions. Le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces opérations sont effectuées.

La structure que nous avons implémentée permet une représentation des ensembles finis de  $X_h$  plus économe en mémoire qu'un tableau de points, et une allocation dynamique de la mémoire lors du raffinement en particulier. Elle permet également d'effectuer rapidement les opérations sur ces ensembles nécessaires aux calculs de noyaux discrets finis, tests d'appartenance et retraits de points, et au raffinement.

Ces tests d'appartenance concernent les successeurs des points par la dynamique discrète. L'ordre dans lequel ces tests sont effectués peut également permettre de gagner du temps.

### 3.2.2 Garder en mémoire les derniers contrôles viables

#### Motivations

Pour déterminer si un point de la grille doit être retiré ou non, il faut tester si au moins un de ses successeurs appartient à la grille (3.30). Si aucun successeur n'appartient à la grille, le point est retiré. Ces successeurs sont définis en général par une correspondance  $G : X \rightsquigarrow X$ . Nous nous intéressons au cas où

$$G(x) := g(x, u) \text{ avec } u \in U(x).$$

Si effectivement un des successeurs appartient à la grille, la réponse à la suite des tests est qu'il faut conserver le point initial et cette réponse est obtenue d'autant plus rapidement qu'un successeur appartenant à la grille apparaît tôt dans la liste des successeurs à tester.

De nombreux exemples de noyaux de viabilité calculés analytiquement ou de manière approchée par l'algorithme de viabilité ont des frontières qui présentent peu ou pas de singularités.

Le fait de tester en priorité, pour un point  $x$ , les successeurs calculés en utilisant des contrôles proches de ceux qui ont permis de trouver un successeur sur la grille pour un point voisin de  $x$  permet un gain de temps dans les zones où le contrôle viable varie peu.

### Description de l'algorithme permettant de tester les contrôles du plus proche au plus éloigné du contrôle de référence

L'ensemble compact  $U(x) \in \mathbb{R}^m$  des contrôles admissibles au point  $x$  dépend de  $x$ . Nous supposons qu'il existe un hypercube  $H = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$  tel que  $\forall x \in K, U(x) \subset H$ . Ces contrôles sont discrétisés suivant les pas  $\{e_i\}_{i=1}^m$ . Tout contrôle discret  $u_d$  de  $H$  peut être repéré par des coordonnées entières et positives  $\{c_i\}_{i=1}^m$  et  $u_d = \{\dots, a_i + c_i \cdot e_i, \dots\}$ . Nous définissons la distance entre deux contrôles à partir de la norme  $L^1$  sur la différence de leurs coordonnées entières :

$$d(u_d, v_d) = \sum_{i=1}^m |c_i(u_d) - c_i(v_d)|.$$

Soient  $x$  un point de la grille à tester et  $y$  un point voisin de  $x$  conservé car son successeur calculé avec le contrôle  $u_d^*$  de coordonnées  $\{c_i^*\}_{i=1}^m$  appartient à la grille.

Le premier successeur de  $x$  à tester est celui calculé avec  $u_d^*$  si bien sûr  $u_d^* \in U(x)$ . Ensuite il faut tester ceux qui sont à une distance de 1 de  $u_d^*$  tout en appartenant à  $U(x)$ , puis 2,...

La valeur,  $d_{max}$ , de la distance maximale entre  $u_d^*$  et  $u_d \in U(x)$  dépend des coordonnées du contrôle discret de référence  $u_d^*$  :

$$d_{max} = \sum_{i=0}^{m-1} \max(c_i^*, \frac{b_i - a_i}{e_i} - c_i^*).$$

Les contrôles à tester sont repérés par leurs coordonnées entières relatives par rapport à  $u_d^*$  contrôle de référence.

Les coordonnées relatives du contrôle à tester après  $u_d^*$  sont prises égales à

$$u_{d,rel}^1 = \{-1, 0, \dots, 0\}.$$

La distance entre  $u_d^*$  et  $u_{d,rel}^1$  vaut bien 1. Comme pour tous les contrôles suivants, il faut vérifier que  $u_{d,rel}^1$  appartient bien à  $U(x)$ .

$u_{d,rel}^n = \{u_0, \dots, u_{m-1}\}$  est entièrement déterminé par :

- le vecteur  $v^n$  de dimension  $p$  qui contient la valeur absolue des  $p$  coordonnées non nulles de  $u_{d,rel}^n$  dans le même ordre que dans  $u_{d,rel}^n$ . L'ensemble  $V(v^n)$  des vecteurs  $v$  de dimension  $p$  dont les coordonnées sont celles de  $v^n$  à une permutation près est totalement ordonné par la relation d'ordre lexicographique. Soit  $d = \sum_{i=0}^{p-1} v^n(i)$ .  $W_{d,p}$  est l'ensemble des vecteurs  $v$  de dimension  $p$  de coordonnées entières strictement positives

- telles que  $\forall i \in \{0, \dots, p-2\}, v(i) \leq v(i+1)$  et  $\sum_{i=0}^{p-1} v(i) = d$ . Cet ensemble est également totalement ordonné par l'ordre lexicographique.
- l'entier  $u_{-+}^n = \sum_{i=0}^{m-1} 2^{j(i)} \cdot \delta_{u_i > 0}$  avec  $j$  défini par  $j(0) = 0$  et  $j(n+1) = j(n)$  si  $u_n = 0$  et  $j(n+1) = j(n) + 1$  si  $u_n \neq 0$ . Cet entier code le signe des  $p$  coordonnées non nulles. Il peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 (toutes les coordonnées non nulles sont négatives) et  $2^p - 1$  (toutes les coordonnées non nulles sont positives).
  - l'entier  $u_{position}^n = \sum_{i=0}^{m-1} 2^i \cdot \delta_{u_i \neq 0}$  qui code l'emplacement des  $p \leq m$  coordonnées non nulles. Cet entier peut prendre  $C_m^p$  valeurs différentes correspondant aux  $C_m^p$  combinaisons de  $p$  éléments parmi  $m$ . Notons  $P_{p,m}$  l'ensemble de ces valeurs. La plus petite valeur de  $P_{p,m}$  vaut  $\sum_{i=0}^{p-1} 2^i$  et correspond à  $p$  premières coordonnées non nulles. La plus grande valeur vaut  $\sum_{i=0}^{p-1} 2^{m-1-i}$  et correspond à  $p$  dernières coordonnées non nulles. Lorsque  $p = m$ ,  $P_{m,m}$  ne contient qu'une seule valeur  $2^m - 1$ .

$u_{d,rel}^{n+1}$  se déduit de  $u_{d,rel}^n$  suivant les six règles suivantes. Une fois l'une de ces règles appliquée les suivantes sont ignorées.

**Règle 1** si  $v^n < \max(V(v^n))$ , alors  $u_{d,rel}^{n+1}$  est caractérisé par  $\{v^{n+1}, u_{-+}^n, u_{position}^n\}$  avec  $v^{n+1}$  tel que  $\forall v \in V(v^n), v < v^n$  ou  $v^{n+1} < v$ .

Ni les valeurs absolues, ni les emplacements, ni le signe des coordonnées relatives non nulles ne sont modifiés. Leurs valeurs absolues sont uniquement permutées.

**Règle 2** si  $u_{-+}^n < 2^j - 1$  alors  $u_{d,rel}^{n+1}$  est caractérisé par  $\{v_0, u_{-+}^n + 1, u_{position}^n\}$  avec  $v_0 = \operatorname{argmin}(V(v^n))$ .

Ni les valeurs absolues, ni les emplacements des coordonnées relatives non nulles ne sont modifiés. Les signes le sont. Les valeurs absolues sont permutées pour obtenir l'arrangement le plus petit suivant l'ordre lexicographique.

**Règle 3** si  $u_{position}^n < \max(P_{p,m})$  alors  $u_{d,rel}^{n+1}$  est caractérisé par  $\{v_0, 0, u_{position}^{n+1}\}$  avec  $\forall w \in P_{p,m}, w < u_{position}^n$  ou  $u_{position}^{n+1} < w$  et  $v_0 = \operatorname{argmin}(V(v^n))$ .

Les emplacements des coordonnées relatives non nulles sont modifiés. Les signes des valeurs non nulles sont tous négatifs. Leurs valeurs absolues sont permutées pour obtenir l'arrangement le plus petit suivant l'ordre lexicographique.

**Règle 4** si  $v^n < \max(W_{d,p})$  alors  $u_{d,rel}^{n+1}$  est caractérisé par  $\{v_0, 0, u_0\}$  avec

$$u_0 = \operatorname{argmin}(P_{p,m}) \text{ et } v_0 = \operatorname{argmin}(V(w^{n+1}))$$

où  $w^{n+1}$  tel que  $\forall w \in W_{d,p}, w < v^n$  ou  $w^{n+1} < w$ .

Les valeurs des coordonnées relatives non nulles sont modifiées. Elles sont placées aux  $p$  premières coordonnées. Les signes des valeurs non nulles sont tous négatifs. Leurs valeurs absolues sont permutées pour obtenir l'arrangement le plus petit suivant l'ordre lexicographique.

**Règle 5** si  $p > 1$  alors  $u_{d,rel}^{n+1}$  est caractérisé par  $\{u_0, 0, v_0\}$  avec  $u_0 = \operatorname{argmin}(P_{p-1,m})$  et  $v_0 = \operatorname{argmin}(V(\operatorname{argmin}(W_{d,p-1})))$ .

Le nombre de valeurs non nulles est modifié. Les valeurs des coordonnées relatives non nulles sont modifiées pour obtenir les  $p - 1$  valeurs dont l'arrangement est le plus petit suivant l'ordre lexicographique. Elles sont placées aux  $p$  premières coordonnées. Les signes des valeurs non nulles sont tous négatifs. Leurs valeurs absolues sont permutées pour obtenir l'arrangement le plus petit suivant l'ordre lexicographique.

**Règle 6** si  $d < d_{max}$  alors  $u_{d,rel}^{n+1}$  est caractérisé par  $\{u_0, 0, v_0\}$  avec

$$u_0 = \operatorname{argmin}(P_{\min(d+1,m),m}) \text{ et } v_0 = \operatorname{argmin}(V(\operatorname{argmin}(W_{d+1,\min(d+1,m)}))).$$

La distance est augmentée de 1. Le nombre de valeurs non nulles est modifié. Les valeurs des coordonnées relatives non nulles sont modifiées pour obtenir les  $p - 1$  valeurs dont l'arrangement est le plus petit suivant l'ordre lexicographique. Elles sont placées aux  $p$  premières coordonnées. Les signes des valeurs non nulles sont tous négatifs. Leurs valeurs absolues sont permutées pour obtenir l'arrangement le plus petit suivant l'ordre lexicographique.

**Règle 7** Il n'y a plus de contrôle à tester.

### 3.2.3 Utiliser le schéma numérique de Runge-Kutta

#### Motivations

Les théorèmes de Saint-Pierre présentés dans la section 3.1 assurent la convergence des noyaux de viabilité discrets et finis donc calculables vers le noyau du système continu original lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers 0. En pratique, ces pas sont bornés inférieurement à cause des temps de calcul et des tailles mémoire limités. À pas de discrétisation égaux, la qualité de l'approximation dépend des schémas de discrétisation utilisés.

La variante du théorème 3.1.3.2 développée dans l'annexe A montre le lien entre l'extension de la dynamique et les pas de discrétisation en temps et en espace lorsque le schéma de discrétisation est le schéma d'Euler : la dynamique discrète associée à l'inclusion différentielle  $F$ ,  $l$ -Lipschitz et bornée par  $M$ , est

$$G_{ph}^d := 1 + \rho F + d\mathcal{B}$$

avec  $d \geq (k + 1)\alpha(h) + \frac{Ml}{2}\rho^2$ .

L'utilisation d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 permet d'introduire une dépendance en  $\rho^3$  de l'extension nécessaire de la dynamique et donc obtenir une approximation plus fine du noyau réel.

### Schémas numériques de discrétisation en temps

#### *Méthode d'Euler*

La méthode d'Euler utilise la tangente en un point pour déterminer le point suivant. Dans le cas univoque,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et l'équation différentielle  $X' = f(X)$ , la méthode d'Euler consiste à approcher  $X(t + \rho)$  par  $X(t) + \rho f(X(t))$ . D'après le développement de Taylor-Lagrange, l'erreur commise est en  $O(\rho^2)$ .

Dans le cas multivoque,  $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$  et l'inclusion différentielle  $X' \in F(X)$ , la méthode d'Euler approche l'ensemble  $\{X(t + \rho)\}_{X' \in F(X)}$  par l'ensemble  $X(t) + \rho F(X(t))$ .

#### *Méthodes de Runge-Kutta [95, Kutta (1901)][96, Runge (1895)]*

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 crée un point intermédiaire entre deux relevés expérimentaux.

Dans le cas univoque, soit l'équation différentielle  $X' = f(t, X)$ ,

$$X_{n+1} = X_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, X) dt.$$

La méthode de Runge-Kutta approche le développement en série de Taylor de  $f(t, X)$ . Son avantage est de ne pas nécessiter l'évaluation explicite des dérivées de  $f(t, X)$ . L'idée de base est d'utiliser des combinaisons linéaires de valeurs de  $f(t, X)$  pour calculer  $X(t)$ . La méthode d'Euler utilise une seule fonction d'évaluation et peut être considérée comme méthode de Runge-Kutta d'ordre 1. Runge-Kutta d'ordre 2 utilise deux fonctions d'évaluation en  $(t_n, x_n)$  et  $(t_n + \beta_1 \rho, x_n + \beta_2 \rho f(t_n, x_n))$ . Il faut choisir  $\beta_1, \beta_2, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour faire correspondre

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \rho[\alpha_1 f(t_n, X_n) + \alpha_2 f(t_n + \rho\beta_1, X_n + \rho\beta_2 f(t_n, X_n))] \\ &= X_n + \rho[(\alpha_1 + \alpha_2) f(t_n, X_n) + \alpha_2 \rho (\beta_2 f(t_n, X_n) \frac{\partial f}{\partial X}(t_n, X_n) + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, X_n)) + O(\rho^2)] \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec le développement de Taylor

$$X(t_{n+1}) = X_n + \rho[f(t_n, X_n) + f^{(1)}(t_n, X_n) \frac{\rho}{2} + O(\rho^2)]. \quad (3.35)$$

Les coefficients des puissances 1 et 2 de  $\rho$  sont égaux lorsque

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \gamma \\ \alpha_1 &= 1 - \gamma \\ \beta_1 &= \beta_2 = \frac{1}{2\gamma}, \quad \gamma \neq 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'erreur commise est ainsi en  $O(\rho^3)$ .

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 crée trois points intermédiaires entre deux relevés

expérimentaux : quatre termes de gradient sont utilisés pour obtenir une meilleure approximation du comportement de  $f(t, X)$  au voisinage du point intermédiaire :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \frac{1}{5}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= \rho f(t_n, X_n) \quad k_2 = \rho f(t_n + \frac{\rho}{2}, X_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= \rho f(t_n + \frac{\rho}{2}, X_n + \frac{k_2}{2}) \quad k_4 = \rho f(t_n + \rho, X_n + k_3) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ces termes de gradient supplémentaires peuvent facilement être programmés. Cependant, dans le cas multivoque, le temps de calcul croît comme le nombre de contrôles discrétisés à la puissance le nombre de termes de gradient à évaluer. Nous choisissons donc d'utiliser la méthode Runge-kutta d'ordre 2.

Dans le cas multivoque,  $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$  et l'inclusion différentielle  $X' \in F(X)$ , la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 approche l'ensemble  $\{X(t + \rho)\}_{X' \in F(X)}$  par l'ensemble

$$\{X \in \mathbb{R}^n | \exists X_1 \in F(X(t)) \text{ et } \exists X_2 \in F(X(t) + \rho X_1) | X = X(t) + \frac{\rho}{2}[X_1 + X_2]\}.$$

Le système dynamique discret en temps associé est alors

$$\tilde{G}_{ph}^d := 1 + \rho F_\rho + \tilde{d}\mathcal{B}$$

avec

$$F_\rho(X) := \{Y \in \mathbb{R}^n | \exists X_1 \in F(X) \text{ et } \exists X_2 \in F(X + \rho X_1) | Y = \frac{1}{2}[X_1 + X_2]\},$$

et avec  $\tilde{d} \geq (k+1)\alpha(h) + O(\rho^3)$ . Le paragraphe suivant donne un estimateur de  $O(\rho^3)$ .

### Estimation de l'erreur locale des méthodes de Runge-Kutta

Supposons que  $\psi_f(t, X, \rho)$  soit une approximation de  $f(t, X)$  obtenue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre  $p$ . Posons  $X_{n+1} := X_n + \rho\psi_f(t, X(t_n), \rho)$ .

L'erreur locale de troncature en  $t_{n+1}$  est définie par

$$E_{n+1} := X(t_{n+1}) - X_{n+1} = X(t_{n+1}) - X(t_n) - \rho\psi_f(t, X(t_n), \rho).$$

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, cette erreur est en  $O(\rho^{p+1})$ . Il existe donc  $\phi(t_n, X_n)$ , appelée fonction d'erreur principale, telle que :

$$E_{n+1} = \phi(t_n, X(t_n))\rho^{p+1} + O(\rho^{p+2}).$$

Soit  $X_{n+1}^*$  une autre approximation de  $X(t_{n+1})$  en utilisant la même méthode mais avec un pas de  $2\rho$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} X(t_{n+1}) - X_{n+1}^* &= \phi(t_{n-1}, X(t_{n-1}))(2\rho)^{p+1} + O(\rho^{p+2}) \\ &= \phi(t_n, X(t_n))(2\rho)^{p+1} + O(\rho^{p+2}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

D'où,

$$X_{n+1} - X_{n+1}^* = (2^{p+1} - 1)\phi(t_n, X(t_n))\rho^{p+1} + O(\rho^{p+2}).$$

L'erreur de troncature principale locale prise comme un estimateur<sup>9</sup> de l'erreur locale de troncature peut s'exprimer sous la forme :

$$\phi(t_n, X(t_n))\rho^{p+1} = \frac{X_{n+1} - X_{n+1}^*}{2^{p+1} - 1}. \quad (3.39)$$

### 3.3 Utiliser des méthodes de discrimination : les Machines à Vecteurs Supports

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Guillaume Deffuant et Laetitia Chapel<sup>10</sup>. Notre contribution concerne la démonstration de la convergence de l'algorithme utilisant des méthodes de discrimination. Dans cette section, nous reprenons cette démonstration après avoir présenté les motivations de notre démarche. L'article comportant la description de la méthode de discrimination particulière utilisée, les Machines à Vecteurs Supports (SVM), la vérification de la satisfaction des hypothèses du théorème de convergence, ainsi que les mécanismes de sélection des points de l'ensemble d'apprentissage et les résultats obtenus, est reproduit en annexe B. La version de la démonstration de convergence avec méthode de discrimination retenue dans cet article est légèrement différente de celle que nous proposons dans cette section.

#### 3.3.1 Les motivations

Notre objectif est d'étendre le calcul effectif de noyaux de viabilité aux grandes dimensions. Mullon *et al.* (2004) ont proposé d'approcher l'enveloppe convexe du noyau de via-

<sup>9</sup>Il existe également d'autres formules contenant uniquement des évaluations de  $f$  déjà effectuées [97, Scraton (1964)]. Il apparaît que ces estimateurs de l'erreur de troncature locale pour les méthodes de Runge-Kutta soit moyennent cette erreur sur plusieurs pas (mémoire), soit nécessitent des évaluations de fonction supplémentaires [98, Shampine et Watts (1977)].

<sup>10</sup>Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes (LISC), Cemagref, Groupement de Clermont-Ferrand.

bilité par des intersections de demi-espaces [85]. Cette méthode est satisfaisante lorsque le noyau de viabilité est convexe (systèmes linéaires). Nous proposons une approche utilisant des méthodes de discrimination. L'idée est de ne plus être obligé de conserver en mémoire les labels de tous les points de la grille, mais seulement les labels d'une petite partie d'entre eux sélectionnés par la méthode de discrimination pour construire la fonction de discrimination. Le fait d'avoir une expression analytique du noyau courant grâce à une fonction positive à l'intérieur et négative à l'extérieur permet également d'utiliser des techniques standards d'optimisation pour déterminer le contrôle auquel est associé le successeur qui maximise cette fonction. Si la valeur de ce maximum est positive, un successeur au moins appartient au noyau courant et réciproquement. Le gain de temps est sensible lorsque la dimension de l'espace des contrôles augmente.

### 3.3.2 L'algorithme d'approximation du noyau de viabilité discret avec une méthode de discrimination

#### Notations

Soient  $X := \mathbb{R}^n$  et  $G : X \rightsquigarrow X$  une correspondance associée à l'inclusion différentielle discrète :

$$\begin{cases} x^{n+1} & \in G(x^n) \\ x^0 & = x_0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Nous supposons que  $G$  est une correspondance  $\mu$ -Lipschitz à images fermées. L'objectif est d'approcher le noyau de viabilité de  $K$ , sous-ensemble compact de  $\text{Dom}(G)$ , pour la dynamique discrète décrite par  $G$ .

Nous redonnons la définition d'une grille  $X_h$  : un ensemble dénombrable d'éléments de  $X$ , tel que :

$$\forall x \in X, \exists x_h \in X_h \text{ tel que } \|x - x_h\| \leq \beta(h), \quad (3.41)$$

et  $\beta(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

De plus,

$$\forall K \subset X \text{ compact, } X_h \cap K \text{ est un sous-ensemble fini de } X_h. \quad (3.42)$$

Soit  $l : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Nous définissons :

$$\begin{aligned} P(l) & := \{x \in X \text{ tels que } l(x) \geq 0\} \\ N(l) & := \{x \in X \text{ tels que } l(x) < 0\} = \mathcal{C}P(l), \end{aligned} \quad (3.43)$$

avec  $\mathcal{C}E$  désignant le complémentaire dans  $X$  de l'ensemble  $E \subset X$ .

Notons  $P_h(l) := P(l) \cap X_h$  (resp.  $N_h(l) := N(l) \cap X_h$ ), l'ensemble des points de la grille pour lesquels la valeur de  $l$  est positive (resp. strictement négative) :

$$P_h(l) \cup N_h(l) = X_h \text{ et } P_h(l) \cap N_h(l) = \emptyset.$$

Pour  $\lambda \geq 1$ , nous définissons l'ensemble de fonctions  $L_h(P, \lambda)$  par

$$L_h(P, \lambda) = \left\{ l : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} P(l) \text{ est fermé} \\ N(l) \subset N_h(l) + \beta(h)\mathcal{B} \\ \text{et } P(l) \subset P_h(l) + \lambda\beta(h)\mathcal{B} \end{array} \right\}. \quad (3.44)$$

Enfin, notons  $d(E, F)$  la distance entre deux sous-ensembles fermés de  $X$  et  $\mathcal{B}$  est la boule de centre 0 et de rayon 1.

### Définition de l'algorithme d'approximation du noyau de viabilité discret

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes ( $\lambda \geq 1$  est fixé) :

– La première fonction  $l_h^0 \in L_h(P, \lambda)$  est telle que

$$K \subset P(l_h^0) \subset K + (1 + \lambda)\beta(h)\mathcal{B}. \quad (3.45)$$

– Au pas  $n + 1$ , la  $(n + 1)^{\text{ème}}$  fonction  $l_h^{n+1} \in L_h(P, \lambda)$  est choisie telle que :

$$N_h(l_h^{n+1}) = N_h(l_h^n) \cup \{x_h \in P_h(l_h^n) \text{ tels que } d(G(x_h), P(l_h^n)) > \mu\beta(h)\}, \quad (3.46)$$

L'algorithme se termine lorsque les fonctions  $l_h^n$  et  $l_h^{n+1}$  sont telles que :

$$P_h(l_h^{n+1}) = P_h(l_h^n).$$

### Cohérence de l'algorithme

À chaque pas, le sous-ensemble formé des éléments de  $L_h(P, \lambda)$  qui vérifient (3.46) est non vide.

Soit  $P_h$  et  $N_h$  des sous-ensembles de  $X_h$  tels que  $P_h \cup N_h = X_h$  et  $P_h \cap N_h = \emptyset$ , nous remarquons tout d'abord que les fonctions plus proche voisin  $\hat{l}(P_h, N_h) : X \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\begin{cases} \hat{l}(P_h, N_h)(x) := 0 & \text{si } \{x_h \in X_h \mid d(x, x_h) = \min_{y_h \in X_h} d(y_h, x)\} \cap P_h \neq \emptyset \\ \hat{l}(P_h, N_h)(x) := -1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.47)$$

appartiennent à  $L_h(P, \lambda)$  pour  $\lambda \geq 1$ .

**Preuve** — En effet, soient  $\hat{l}$  une fonction de type plus proche voisin et  $(x_n)$  une suite de  $P(\hat{l})$  convergeant vers  $x$ . Supposons que  $x \notin P(\hat{l})$ , alors, d'après la propriété (3.42) de la grille  $X_h$ ,

$$\exists x_h \in N_h(\hat{l}) \text{ tel que } d(x, x_h) = \min_{y_h \in X_h} d(y_h, x)$$

et

$$\exists y_h \in P_h(\hat{l}) \text{ tel que } d(x, y_h) = \min_{z_h \in P_h(\hat{l})} d(z_h, x)$$

avec  $d(y_h, x) = d(x_h, x) + \bar{d}$  et  $\bar{d} > 0$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \geq 0$  tel que  $|x_N - x| \leq \epsilon$ . Soit  $x_{h,N} \in P_h(\hat{l})$  tel que  $d(x_N, x_{h,N}) = \min_{y_h \in X_h} d(y_h, x_N)$ ,

$$\begin{aligned} d(x_{h,N}, x_N) &> d(x_{h,N}, x) - d(x, x_N) \\ &> d(y_h, x) - \epsilon \\ &> d(x_h, x) + \bar{d} - \epsilon \\ &> d(x_h, x_N) + \bar{d} - 2\epsilon. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ainsi, en choisissant  $\epsilon := \bar{d}/2$ ,  $d(x_{h,N}, x_N) > d(x_h, x_N)$  ce qui est une contradiction et donc  $P(\hat{l})$  est fermé.

Soit  $x \in N(\hat{l})$ , il existe  $x_h \in N_h(\hat{l})$  tel que  $d(x, x_h) = \min_{y_h \in X_h} d(y_h, x) \leq \beta(h)$  donc  $N(\hat{l}) \subset N_h(\hat{l}) + \beta(h)\mathcal{B}$ . Même raisonnement pour montrer la propriété  $P(\hat{l}) \subset P_h(\hat{l}) + \lambda\beta(h)\mathcal{B}$ . —

Pour  $n = 0$ , soit  $P_h^0 = (K + \beta(h)\mathcal{B}) \cap X_h$  et  $N_h^0 = X_h \setminus P_h^0$ . D'après la remarque précédente, la fonction plus proche voisin associée aux ensembles  $(P_h^0, N_h^0)$ ,  $\hat{l}(P_h^0, N_h^0)$ , appartient à  $L_h(P, \lambda \geq 1)$ . De plus,  $K \subset P(\hat{l}(P_h^0, N_h^0)) \subset K + 2\beta(h)\mathcal{B}$ . Par conséquent, la fonction  $\hat{l}(P_h^0, N_h^0) \in L_h(P, \lambda \geq 1)$  satisfait (3.45).

Pour  $n > 0$ , soient

$$N_h^n = N_h(l_h^{n-1}) \cup \{x_h \in P_h(l_h^{n-1}) \text{ tels que } d(G(x_h), P(l_h^{n-1})) > \mu\beta(h)\}$$

et

$$P_h^n = X_h \setminus N_h^n,$$

la fonction plus proche voisin associée aux ensembles  $(P_h^n, N_h^n)$ ,  $\hat{l}(P_h^n, N_h^n)$ , appartient à  $L_h(P, \lambda \geq 1)$  et vérifie (3.46). —

### Convergence de l'algorithme

L'algorithme se termine après un nombre fini de pas  $p(h)$ .

D'après la condition (3.46), pour tout  $n$ ,  $N_h(l_h^{n+1}) \supset N_h(l_h^n)$ . Par conséquent,

$$P_h(l_h^{n+1}) \subset P_h(l_h^n) \subset P_h(l_h^0).$$

De plus,  $P_h(l_h^0) \subset (K + (1 + \lambda)\beta(h)\mathcal{B}) \cap X_h$ .  $K$  est compact, donc  $K + (1 + \lambda)\beta(h)\mathcal{B}$  est aussi compact et d'après (3.42),  $P_h(l_h^0)$  est fini. Nous devons donc obtenir après un nombre fini de pas :

$$P_h(l_h^n) = P_h(l_h^{n+1}).$$

Le noyau de viabilité de  $K$  pour  $G$  est contenu dans  $P(l_h^n)$  pour tout  $n$ .

Par définition,  $\text{Viab}_G(K) \subset K$ .

Puisque  $K \subset P(l_h^0)$  d'après (3.45),  $\text{Viab}_G(K) \subset P(l_h^0)$ .

Supposons que  $\text{Viab}_G(K) \subset P(l_h^n)$ .

Considérons  $x \notin P(l_h^{n+1})$ .  $x \in N(l_h^{n+1})$  et à cause de la condition (3.44), il existe  $x_h \in N_h(l_h^{n+1})$  tel que  $\|x - x_h\| < \beta(h)$ .

Par conséquent, puisque  $G$  est  $\mu$ -Lipschitz,  $G(x) \subset G(x_h) + \mu\beta(h)\mathcal{B}$ .

De plus, comme  $x_h \in N_h(l_h^{n+1})$ ,  $d(G(x_h), P(l_h^n)) > \mu\beta(h)$  d'après (3.46).

Ainsi,  $G(x) \cap P(l_h^n) = \emptyset$  et  $G(x) \subset N(l_h^n)$ . Par hypothèse de récurrence, tout point de  $N(l_h^n)$  est non viable, donc tous les successeurs de  $x$  sont non viables et  $x$  est non viable,  $x \notin \text{Viab}_G(K)$ .

$P(l_h^{p(h)})$  est contenu dans le noyau de viabilité de  $K + (1 + 2\lambda)\beta(h)\mathcal{B}$  pour la dynamique  $G + \mu(1 + \lambda)\beta(h)\mathcal{B}$ .

Soit  $G_h : X \rightarrow X$ , tel que  $G_h(x) := G(x) + \mu(1 + \lambda)\beta(h)\mathcal{B}$ .

Considérons un point  $x$  de

$$P(l_h^{p(h)}) \subset P_h(l_h^{p(h)}) + \lambda\beta(h)\mathcal{B} \subset P(l_h^0) + \lambda\beta(h)\mathcal{B} \subset K + (1 + 2\lambda)\beta(h)\mathcal{B}$$

d'après (3.45) et (3.46).

D'après la condition (3.44), il existe un point  $x_h$  de  $P_h(l_h^{p(h)})$  tel que

$$\|x - x_h\| < \lambda\beta(h).$$

Puisque  $x_h \in P_h(l_h^{p(h)})$ ,  $d(G(x_h), P(l_h^{p(h)})) \leq \mu\beta(h)$  d'après (3.46), et par conséquent,  $\exists y^p \in P(l_h^{p(h)})$  et  $\exists y_h \in G(x_h)$  tels que  $\|y^p - y_h\| \leq \mu\beta(h)$ .

Comme  $G$  est  $\mu$ -Lipschitz,  $G(x_h) \subset G(x) + \mu\lambda\beta(h)\mathcal{B}$  et donc,  $\exists y \in G(x)$  tel que

$$\|y_h - y\| \leq \mu\lambda\beta(h).$$

Enfin,  $\|y^p - y\| \leq \mu(\lambda + 1)\beta(h)$  et  $y^p \in G_h(x) \cap P(l_h^{p(h)})$ .

Nous avons montré que pour tout  $x \in P(l_h^{p(h)}) \subset K + (1 + 2\lambda)\beta(h)\mathcal{B}$ ,  $G_h(x) \cap P(l_h^{p(h)}) \neq \emptyset$  et par conséquent,  $P(l_h^{p(h)}) \subset \text{Viab}_{G_h}(K + (1 + 2\lambda)\beta(h)\mathcal{B})$ .

*Conclusion.*

Nous avons montré que  $\text{Viab}_G(K) \subset P(l_h^{p(h)}) \subset \text{Viab}_{G_h}(K + (1 + 2\lambda)\beta(h)\mathcal{B})$ .  
De plus, puisque  $G$  est  $\mu$ -Lipschitz à images fermées,

$$\text{Viab}_{G_h}(K + (1 + 2\lambda)\beta(h)\mathcal{B}) \rightarrow \text{Viab}_G(K)$$

lorsque  $\beta(h) \rightarrow 0$ .

Par conséquent,  $P(l_h^{p(h)}) \rightarrow \text{Viab}_G(K)$  lorsque  $\beta(h) \rightarrow 0$ .

## 3.4 Remplacer l'espace par le temps : l'algorithme de viabilité lourd

Pour traiter des problèmes de dimension supérieure, nous proposons, dans cette section, d'approcher les noyaux de viabilité discrets en temps par l'ensemble des points viables jusqu'à  $T$  fixé. Les coordonnées de ces points sont notées dans un fichier mais n'ont pas besoin d'être conservées en mémoire.

### 3.4.1 Le principe de l'algorithme de viabilité lourd

Cet algorithme est inspiré par le principe d'inertie. Selon ce principe, le contrôle doit rester constant tant que la viabilité du système n'est pas en danger, autrement dit, le contrôle doit rester constant tant que l'état du système appartient à l'intérieur du noyau de viabilité. Lorsque ce contrôle ne permet plus de contenir l'état du système dans le noyau de viabilité, il est remplacé par le contrôle le plus proche appartenant à l'ensemble de régulation afin d'assurer la viabilité du système.

Soient  $X := \mathbb{R}^n$ , nous considérons les inclusions différentielles du type :

$$\begin{cases} x' = f(x, u) \\ u \in U(x), \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $f : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow X$  et  $U : X \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ .

Soit la correspondance  $F$  définie par  $F(x) = \{f(x, u) \mid u \in U(x)\}$ .

Comme dans la section 3.1, pour un  $\rho > 0$  fixé, nous associons à cette inclusion différentielle le schéma explicite de discrétisation d'Euler, et notons  $G_\rho$  la correspondance définie par  $G_\rho = 1 + \rho F$  et  $g_\rho$  la fonction définie par  $g_\rho = 1 + \rho f$  :

$$G_\rho(x) = \{g_\rho(x, u) \mid u \in U(x)\}$$

et le système discret en temps s'écrit :

$$\begin{cases} x^{n+1} &= g_\rho(x^n, u^n) \text{ pour tout } n \geq 0 \\ u^n &\in U(x^n). \end{cases} \quad (3.50)$$

Les ensembles  $U(x)$  sont discrétisés. Soient  $x$  un point de  $K \subset X$  fermé et  $u$  un contrôle appartenant à  $U(x)$ , nous considérons le successeur  $y$  de  $x$  par la dynamique discrète en temps  $g_\rho$ . Si  $y$  appartient à  $K$ , alors nous choisissons parmi les contrôles  $v \in U(y)$  l'un de ceux qui sont les plus proches de  $u$  puis nous appliquons  $g_\rho$  à nouveau. Notons  $z$  le successeur de  $y$  ainsi obtenu. Si  $z$  n'appartient pas à  $K$ , nous remplaçons  $v$  par un autre contrôle de  $U(y)$ , proche de  $v$  et non encore testé puis nous appliquons  $g_\rho$  à nouveau. S'il ne reste plus de contrôle à tester dans  $U(y)$ , c'est le contrôle associé à  $x$  qui est modifié.

Ainsi, les durées de plusieurs évolutions issues de  $x$  et restant dans  $K$  sont évaluées et la plus grande d'entre elles est mémorisée, notons-la  $T$ . Les informations obtenues durant cette phase d'exploration sont des minorants des durées de vie futures maximales de  $x$  et des successeurs appartenant aux évolutions suivies.

En appliquant la dynamique rétrograde  $-G_\rho$  nous obtenons des minorants des durées de vie passées maximales de  $x$  et de ces prédécesseurs mais surtout des minorants des durées de vie futures des prédécesseurs de  $x$ . C'est la phase d'exploitation.

### 3.4.2 La description de l'implémentation de l'algorithme

Le programme que nous avons développé exécute la tâche suivante : créer une base de données contenant des coordonnées de points de l'espace des états, le plus grand des minorants trouvés de leur durée de vie pour la dynamique  $G_\rho$ , ainsi que les contrôles associés à l'évolution correspondant à la plus grande des durées de vie trouvées.

En choisissant pour  $T$  une valeur seuil, ces points peuvent également être classés en viables jusqu'à  $T$  et non viables jusqu'à  $T$ .

#### Les paramètres

Les paramètres sont la dimension de l'espace des états  $X$  ( $xdim$ ), la dimension de l'espace des contrôles  $U$  ( $udim$ ), la valeur seuil de la durée de vie qui sépare les points « viables »,

dans le sens viables jusqu'à  $T$ , des « non viables » ( $T$ ), le pas de temps ( $\rho$ ), le pas d'espace (*precision*), le pas de discrétisation du  $i^{\text{ème}}$  contrôle ( $e_i$ ) et les deux conditions d'arrêt : le nombre d'actions maximal que l'algorithme est autorisé à réaliser (*nombredessais*) et l'objectif, la proportion de points de la grille de pas d'espace *precision* dont le statut (viable ou non viable) doit être déterminé (*pourcentage seuil remplissage*).

### Les entrées

La dynamique n'est pas décrite par l'inclusion différentielle  $F(x, u)$  avec  $u \in U(x)$ , mais par le schéma discret associé  $g_\rho(x, u)$ . La dynamique rétrograde est décrite par  $-g_\rho(x, u)$ . L'ensemble  $K$  est défini par une procédure qui associe à  $x \in X$  la valeur 1 si  $x$  est dans  $K$  et 0 sinon. De même, l'ensemble des contrôles admissibles  $U(x)$  est défini par une procédure qui associe à  $u$  la valeur 1 si  $u$  est dans  $U(x)$  et 0 sinon. À l'initialisation, un  $x$  dans  $K$  et un  $u$  dans  $U(x)$  sont choisis arbitrairement.

### Les structures

Nous avons défini trois structures :

- la structure `listeX` : lors du déroulement de l'algorithme, deux `listeX` sont créés. L'une est une liste qui contient les coordonnées des points viables associés à leur durée de vie maximale (un entier plus grand que  $T$  ou 0 si le point appartient à un cycle) et les contrôles qui permettent d'atteindre cette durée de vie maximale. L'autre est une liste de coordonnées de points non viables associés à leur durée de vie maximale (un entier plus petit que  $T$ ) et les contrôles qui permettent d'atteindre cette durée de vie maximale,
- la structure `trame` est une liste qui contient les informations relatives à l'évolution courante, c'est à dire essentiellement les contrôles déjà testés en chaque point de sa trajectoire,
- la structure `cycles` enregistre les pseudo-cycles (un pseudo-cycle est repéré lorsque deux états du système à deux instants différents sont plus proches que le pas d'espace).

Ces structures échangent des informations :

- une procédure ajoute à la `listeX` des points non viables le dernier point de la trajectoire enregistré dans `trame` dès que les durées de vie de toutes les évolutions discrètes issues de ce point sont calculées et sont plus petites que  $T$ . La même procédure est utilisée pour ajouter à la `listeX` des points viables les successeurs pour la dynamique rétrograde d'un point viable,
- une autre procédure détecte s'il y a des pseudo-cycles dans la trajectoire courante enre-

gistrée dans la structure `trame`. Les cycles éventuels sont mémorisés dans la structure `cycles`.

### Les procédures principales de l'algorithme de viabilité lourd

La procédure `CalculUsuivant` associe à  $x$  et au dernier contrôle testé en ce point le prochain contrôle à tester de la description discrète de  $U(x)$ . Le nombre de contrôles à tester en  $x$  dépend des paramètres  $e_i$  et, suivant le principe d'inertie, le prochain contrôle à tester est le plus proche au sens de la distance associée à la norme  $L^1$  du contrôle testé au pas précédent. Les contrôles discrets issus de  $U(x)$  sont ordonnées par distance associée à la norme  $L^1$  croissante au premier contrôle testé de  $U(x)$ . Ils sont testés dans cet ordre jusqu'à ce que l'un d'entre eux induise une évolution viable sur un pas de temps.

La procédure `UnEssai` calcule les coordonnées du successeur  $y$  du dernier point  $x$  de la trajectoire enregistrée dans la structure `trame`. Si  $y$  appartient à  $K$  et si  $y$  n'a pas encore été listé en tant que point viable ou non viable,  $y$  est ajouté à la structure `trame`. Sinon, le prochain contrôle à tester est calculé. S'il n'y a plus de contrôle à tester,  $x$  est listé en tant que point non viable et supprimé de la structure `trame`. Cette procédure enregistre également la durée de vie maximale et les contrôles associés.

La procédure `UnEssaiInv` est la même que `UnEssai` pour la dynamique rétrograde.

### Les boucles de l'algorithme de viabilité lourd

L'algorithme de viabilité lourd comporte deux boucles : la boucle d'exploration (Fig. 3.10) et la boucle d'exploitation (Fig. 3.11).

La boucle d'exploration est précédée par le choix au hasard d'un  $x$  dans  $K$  et d'un contrôle  $u \in U(x)$ . Dans cette boucle, une action consiste à appliquer la dynamique discrète antérograde au dernier point de la trajectoire enregistré dans la structure `trame`. Le premier contrôle testé est celui qui est le plus proche du contrôle utilisé au pas précédent sur la trajectoire. Si le successeur n'est pas dans  $K$ , le contrôle suivant est testé par ordre de distance associée à la norme  $L^1$  croissante au contrôle initial. La boucle se termine lorsque :

- une évolution d'une durée de vie égale à  $T$  est trouvée,  $x$  est alors déclaré viable,
- un cycle a été détecté, tous les points enregistrés dans la structure `trame` sont alors déclarés viables,

- le nombre d'action autorisé *nombredessais* est atteint,
- toutes les évolutions discrètes issues de  $x$  ont été testées,  $x$  est alors déclaré non viable.

La boucle d'exploitation est activée si la boucle d'exploration précédente a trouvé des points viables. Dans cette boucle, une action consiste à appliquer la dynamique discrète rétrograde aux points viables enregistrés dans la structure `trame` à l'issue de la phase d'exploration. Tous les successeurs pour la dynamique rétrograde des points viables sont déclarés viables. Cette boucle se termine lorsque :

- le nombre d'action autorisé *nombredessais* est atteint,
- toutes les évolutions discrètes issues de tous les points viables ont été testées.

Après une boucle d'exploitation, la performance de l'algorithme est évaluée. La fonction d'évaluation est la proportion de points de la grille de pas d'espace *precision* dont le statut (viable ou non viable) a été déterminé. Si le pourcentage fixé, *pourcentage seuil remplissage* n'est pas atteint, une nouvelle boucle d'exploration commence.

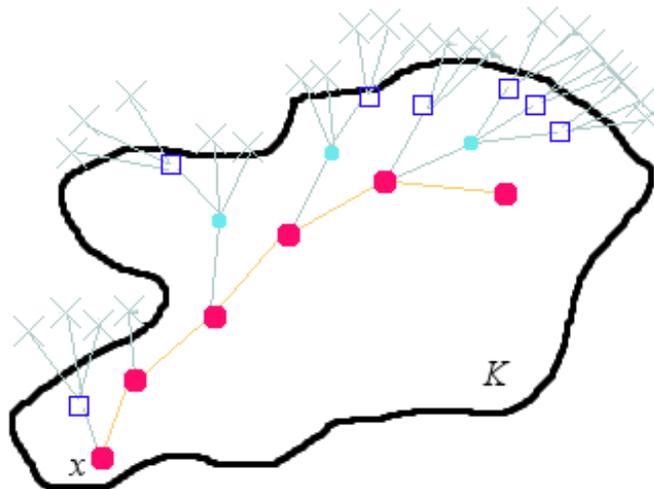


FIG. 3.10 – Algorithme de viabilité lourd - Phase d'exploration. Les coordonnées des points représentés par des grands disques rouges ainsi que les contrôles qui permettent de passer de l'un à l'autre sont enregistrés dans la structure `trame`, ils constituent l'évolution active : cette évolution issue de  $x$  reste dans  $K$  durant 5 pas de temps au moins. Les coordonnées des points représentés par des carrés bleus pleins ou vides sont notés non viables dans la structure `listeX` avec la durée de vie égale à 1 pour les carrés bleus vides et égale à 2 pour les carrés bleus pleins.

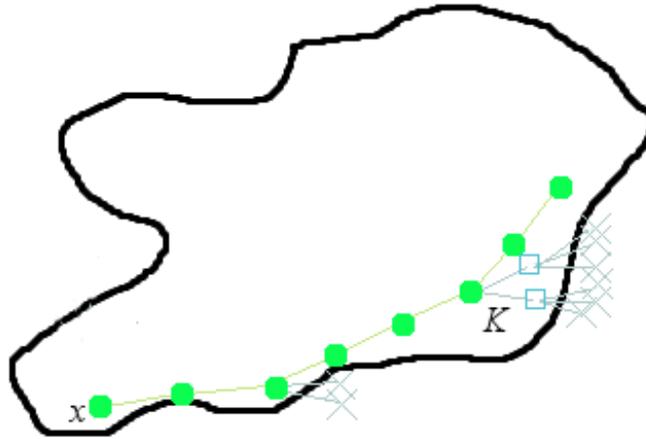


FIG. 3.11 – Algorithme de viabilité lourd - Phase d'exploitation. Si  $x$  est déclaré viable à la suite de la phase d'exploration, la phase d'exploitation va chercher tous ses prédécesseurs pour les déclarer viables également. Les coordonnées des points représentés par des disques pleins verts ainsi que les contrôles qui permettent de passer de l'un à l'autre sont enregistrés dans la structure `trame`, ils constituent l'évolution active qui évolue afin de recenser tous les prédécesseurs de  $x$  appartenant à  $K$ . Les coordonnées des prédécesseurs recensés (points représentés par des carrés vides bleus) sont notés viables dans la structure `listeX`.

### 3.5 Utiliser un schéma anti-diffusif : l'ultra-bee

Olivier Bokanowski<sup>11</sup> et Haasna Zidani<sup>12</sup> ont étudié le schéma numérique anti-diffusif `ultra-bee` pour la résolution des équations de transport. En dimension 1, le créneau est translaté pratiquement sans aucune diffusion : l'erreur ne dépasse pas une maille.

Le noyau de viabilité peut être caractérisé par la fonction valeur d'un problème d'optimisation en horizon infini. Cette fonction valeur étant discontinue puisqu'elle est la fonction caractéristique du noyau de viabilité, les schémas de discrétisation usuels basés sur des techniques d'interpolation ne produisent pas d'approximations précises à cause du phénomène de diffusion.

En collaboration avec Olivier Bokanowski, Haasna Zidani et Rémi Munos<sup>13</sup>, nous avons réalisé des expériences numériques pour comparer les performances de l'algorithme de viabilité avec le schéma de discrétisation d'Euler et le schéma `ultra-bee` appliqué aux équations

<sup>11</sup>Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

<sup>12</sup>Unité de Mathématiques Appliquées, École Nationale Supérieure des Techniques Avancées, Paris.

<sup>13</sup>Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, Paris.

d'Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaites par les fonctions valeurs associées à quatre problèmes de viabilité classiques. Les résultats approchés issus des calculs sont comparés aux résultats exacts. Pour les quatre problèmes, l'erreur commise par le schéma `ultra-bee` est plus faible car le phénomène de diffusion est moindre.

La description du schéma `ultra-bee`, ainsi que les représentations graphiques illustrant les comparaisons entre les performances des schémas de discrétisation d'Euler et `ultra-bee` sont reproduits en annexe C.

### Conclusions

L'algorithme de viabilité de Saint-Pierre (1994) permet d'obtenir une approximation numérique d'un noyau de viabilité pour un système continu en calculant les noyaux discrets finis exacts pour des systèmes dynamiques discrets en temps et en espace associés au système initial.

Cet algorithme se décompose en deux étapes :

- l'approximation du noyau de viabilité du système continu par des noyaux de systèmes discrets,
- puis par des noyaux de systèmes discrets finis.

Le programme développé par Patrick Saint-Pierre réalise deux tâches successivement :

- à grille fixée, calculer le noyau de viabilité exact du système dynamique discret fini associé,
- et passer d'une grille à une grille de pas plus petit pour obtenir une approximation plus fine du noyau réel.

La structure que nous avons implémentée permet une représentation des sous-ensembles finis de la grille plus économe en mémoire qu'un tableau de points, et une allocation dynamique de la mémoire lors du raffinement en particulier. Elle permet également d'effectuer rapidement les opérations sur ces ensembles nécessaires aux calculs de noyaux discrets finis, tests d'appartenance et retraits de points, et au raffinement.

Ces tests d'appartenance concernent les successeurs des points par la dynamique discrète. L'ordre dans lequel ces tests sont effectués peut également permettre de gagner du temps. En effet, le fait de tester en priorité les successeurs d'un point calculés en utilisant des contrôles proches de ceux qui ont permis de trouver un successeur sur la grille pour un point voisin, permet un gain de temps dans les zones où le contrôle viable varie peu. Enfin, l'utilisation d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 permet de réduire la dilatation de la dynamique discrète et donc d'obtenir une approximation plus fine du noyau réel.

Toujours dans la perspective d'étendre le calcul effectif de noyaux de viabilité aux grandes dimensions, l'utilisation de méthodes de discrimination telles les Machines à Vecteurs Supports permet d'économiser de la mémoire. En effet, ces méthodes construisent des fonctions de discrimination qui représentent le noyau courant en ne conservant en mémoire que les labels d'un petit nombre de points.

L'expression analytique du noyau courant fournie par la fonction de discrimination permet, en outre, d'utiliser des techniques standards d'optimisation pour déterminer le contrôle auquel est associé le successeur qui optimise cette fonction, et répondre ainsi plus rapidement à la question de l'existence d'un successeur dans le noyau courant. Le gain de temps est sensible lorsque la dimension de l'espace des contrôles augmente.

Pour traiter des problèmes de grande dimension, une autre idée est de remplacer l'espace par le temps en approchant les noyaux de viabilité discrets en temps par l'ensemble des points viables jusqu'à  $T$  fixé. Les coordonnées de ces points sont notées dans un fichier mais n'ont pas besoin d'être conservées en mémoire. Dans cet algorithme lourd, la durée de vie d'un point est calculée en utilisant des méthodes de tir, le choix des contrôles à chaque pas de temps étant dicté par le principe d'inertie : le contrôle doit rester constant tant que la viabilité du système n'est pas en danger.

En ce qui concerne la diminution du phénomène de diffusion numérique, nous avons observé que l'utilisation du schéma de discrétisation anti-diffusif *ultra-bee* permet d'obtenir des gains en termes de précision de l'approximation.



# Chapitre 4

## Les valeurs de résilience dans des modèles de lacs

Les eaux de surface, lacs, rivières et rivages côtiers, sont indispensables pour la production d'eau potable, l'irrigation, la pêche, certaines productions industrielles et touristiques. Ce sont souvent des lieux riches en biodiversité.

Cependant, la qualité des eaux de surface s'est dégradée au cours des dernières dizaines d'années, augmentant les coûts de traitement, diminuant, par conséquent, la quantité d'eau utilisable, et rendant plus sévères les épisodes de manque d'eau.

L'eutrophisation, c'est à dire l'enrichissement du milieu en nutriments, engendrée par des apports excessifs de phosphates et de nitrates est la cause la plus répandue d'altération de la qualité des eaux de surface<sup>1</sup>. Pour la grande majorité des lacs, l'excès de phosphates est la première cause ; en ce qui concerne les estuaires et les côtes, ce sont plus souvent les nitrates qui ont un rôle déterminant [100, Schindler (1977)].

Dans la première section de ce chapitre, nous définirons et décrirons le phénomène d'eutrophisation des eaux de surface responsable du changement brusque d'un état d'eau claire (état oligotrophique) à un état d'eau trouble (état eutrophique). Nous donnerons ensuite plusieurs exemples de modèles dynamiques issus de la littérature, utilisés pour décrire les mécanismes responsables de l'eutrophisation, pour prédire les seuils de changement brusque d'état et le temps de restauration, ou pour tester des scénarios de gestion.

Dans la section 4.2, nous modéliserons dans le formalisme des inclusions différentielles

<sup>1</sup>50% de la surface des lacs dégradée et 60% de celle des rivières aux États-Unis [99, U.S. EPA (1996)].

l'évolution d'un système composé d'un lac et des populations qui profitent de ses services ou apportent des excès de phosphates par l'intermédiaire de leurs activités agricoles. Nous définirons la propriété dont nous étudierons la résilience face à un certain type de perturbations pour deux indicateurs de coût différents.

Dans le modèle de la section 4.2, une seule variable décrit le cycle de l'élément phosphore dans le lac. Dans la section 4.3, nous augmenterons le réalisme du modèle en ajoutant une variable, la concentration de phosphore à l'état de sédiments dans la vase. Nous évaluerons alors la résilience de la propriété définie dans la section 4.2 face à un autre ensemble de perturbations.

## 4.1 L'eutrophisation des eaux de surface

### 4.1.1 Description du phénomène d'eutrophisation des eaux de surface

#### Définition

À l'origine, l'eutrophisation d'un milieu aquatique, tel que cours d'eau ou mares, désigne simplement son caractère eutrophe<sup>2</sup>, c'est-à-dire riche en éléments nutritifs, initialement sans caractère négatif. Cependant, le terme a été employé à partir des années 1970 pour désigner un enrichissement tel qu'il en résulte des nuisances pour l'écosystème, et donc, pour l'homme. Cette définition usuelle privilégie les conséquences néfastes de l'enrichissement, c'est-à-dire la production d'une biomasse d'algues excessive, voire déséquilibrée du point de vue de la biodiversité, et l'hypoxie<sup>3</sup> plus ou moins sévère qui résulte de la dégradation de cet excès de matière organique.

#### Causes

L'eutrophisation est causée par un excès de nutriments, phosphates et nitrates. Elle est très répandue et se développe dans les eaux de surface du globe [101, Smith (1998)]. Dans les pays développés, la principale source des excédents d'apports de phosphates et nitrates dans les eaux de surface est la pollution diffuse due principalement à l'agriculture, mais également aux activités urbaines, en particulier l'industrie. Les nitrates et les phosphates sont

<sup>2</sup>du grec *Eu*, bien, vrai et *Trophein* nourrir.

<sup>3</sup>Diminution des apports oxygénés.

tous deux nécessaires à l'alimentation des plantes et se retrouvent donc dans la plupart des engrais, et, par la suite, dans les rejets urbains et agricoles. Dans la plupart des cas, les engrais utilisés sur un domaine agricole ne se fixent pas dans le sol mais descendent par infiltration ou écoulement de surface vers les écosystèmes aquatiques – rivières, lacs, baies. Les concentrations excessives de substances nutritives dans ces bassins aquatiques provoquent la prolifération de nappes d'algues.

Contrairement aux sources ponctuelles de pollution comme les stations d'épuration, les rejets dus à la pollution diffuse ne sont pas facilement mesurables et varient fortement au cours du temps en fonction des activités agricoles saisonnières, des événements irréguliers comme les précipitations abondantes ou les grands chantiers de construction [102, Carpenter *et al.* (1998)].

### Conséquences

L'eutrophisation a de nombreux effets négatifs sur les milieux aquatiques. La conséquence la plus visible est la prolifération d'algues et d'herbes aquatiques souvent toxiques. La raréfaction de l'oxygène due à la décomposition des plantes étouffe la vie sous la vase, asphyxiant les poissons. L'eutrophisation est un facteur de perte de biodiversité aquatique [103, Jeppesen *et al.* (1998)] et de pollution de l'eau potable.

La pollution aux nitrates représente une menace directe pour la santé humaine et pour les autres mammifères. Si les phosphates ne sont pas considérés comme directement dangereux pour les humains et les animaux, ils le sont indirectement par la prolifération des algues toxiques qu'ils engendrent.

### Remèdes

Alors que l'excès de nutriments peut provoquer des symptômes d'eutrophisation immédiats, la diminution des apports n'engendre pas toujours une restauration de l'état oligotrophique immédiate et complète : le lac Søbygaard au Danemark n'a pas retrouvé un état d'eau claire 18 ans après la réduction de 80% des apports de phosphates externes [103, Jeppesen *et al.* (1998)].

L'état eutrophique est relativement stable. Les mécanismes qui stabilisent l'état eutrophique sont le recyclage interne des phosphates, la disparition des plantes aquatiques à racines qui déstabilise les sédiments, et les modifications de réseau trophique qui provoquent une di-

minution de la quantité de zooplancton et, par conséquent, une diminution de la capacité de prélèvement des algues nuisibles [104, Carpenter et Cottingham (1997)].

Pour inverser le processus d'eutrophisation, la réduction des apports de phosphates doit être combinée à des interventions supplémentaires qui compensent l'effet « positif » des rétroactions de l'eutrophisation, en diminuant le recyclage par les sédiments, en accélérant la sédimentation ou en augmentant des flux de phosphates hors du lac [105, Osgood (2000)].

Des expériences de restauration ont été menées sur le Lac Dong en Chine, qui est composé de plusieurs sous-lacs. Qiu *et al.* (2001) ont mis en évidence que, dans un sous-lac, la réduction des apports est suffisante pour rétablir l'état oligotrophique lorsque la concentration en phosphates est inférieure à  $0.25 \text{ mg l}^{-1}$ . En revanche, la restauration est impossible sans intervention supplémentaire lorsque la concentration en phosphates est supérieure à  $0.25 \text{ mg l}^{-1}$  [106].

#### 4.1.2 Différents objectifs associés à l'étude du phénomène d'eutrophisation à l'aide de modèles dynamiques

##### Décrire les mécanismes responsables de l'eutrophisation

Les apports extérieurs en phosphates et le recyclage interne déterminent le potentiel de production d'un lac [100, Schindler (1977)]. La composition du réseau trophique, quant à elle, influence la répartition de ces phosphates entre les productions de poissons et d'algues [107, Carpenter et Kitchell (1993)]. Zhang *et al.* (2003) ont développé un modèle structurel du fonctionnement du lac Mogan tenant compte de mécanismes liés à la concentration en phosphates et à la structure du réseau trophique [108].

Lorsque les poissons de grande taille façonnent le réseau trophique de telle sorte que le zooplancton mangeur de phytoplancton est abondant, les excédents en phosphates sont transférés vers les niveaux supérieurs de la chaîne trophique et ne s'accumulent pas dans la biomasse d'algues. En revanche, une activité de pêche trop soutenue diminue la quantité de poissons piscivores. La quantité de poissons planctivores augmente, la quantité de zooplancton diminue et avec elle la capacité d'élimination du phytoplancton. Les phosphates s'accumulent alors, en particulier, dans les algues bleues-vertes.

D'autre part, lorsque la concentration en phosphates est faible, l'activité des bactéries est modérée, leur consommation en oxygène est faible et l'oxygène reste présent en eaux profondes ralentissant le recyclage des phosphates par les sédiments. En revanche, lorsque la

concentration en phosphates augmente, la production augmente, l'oxygène disparaît des eaux profondes favorisant le recyclage par les sédiments, augmentant encore la concentration en phosphates.

Les mécanismes mis en oeuvre dans le modèle LEEDS<sup>4</sup> sont encore plus complexes. Afin d'obtenir des approximations de meilleure qualité des données empiriques, Malmaeus et Håkanson (2004) ont ajouté des compartiments pour le phosphore colloïdal<sup>5</sup>, des modulations saisonnières des débits de sortie, des mécanismes de diffusion des phosphates à partir des zones de sédimentation et un sous-modèle qui traite les matières en suspension [109, Malmaeus et Håkanson (2004)].

### **Prédire les seuils de changement brusque d'état et les temps de restauration de la propriété d'oligotrophie**

Zhang *et al.* (2003) ont utilisé le modèle du lac Mogan [108, Zhang *et al.* (2003)] pour tester les réponses du lac face à des augmentations d'apports de phosphates [110]. Les courbes issues des simulations montrent un changement brusque de l'état oligotrophique à l'état eutrophique pour un taux de phosphates compris entre  $0.16 - 0.25 \text{ mg l}^{-1}$ . Le changement inverse, brusque également, se produit pour une concentration de phosphates de l'ordre de  $0.10 \text{ mg l}^{-1}$ . Les processus d'eutrophisation et de restauration ne suivent pas les mêmes chemins, c'est l'effet hystérésis décrit par Scheffer (1997) [111].

Dans un modèle moins complexe, mais qui incorpore néanmoins les non-linéarités des écosystèmes de lacs tels que les interactions proie-prédateur et le recyclage des nutriments par les sédiments et les consommateurs (poissons et zooplanctons)<sup>6</sup>, Cottingham et Carpenter (1994) analysent les relations entre les apports de nutriments, la longueur de la chaîne trophique et le temps de restauration [113] en utilisant une approche simulation : ils comparent les différences de réponses de deux modèles correspondants à deux types de réseaux trophiques face à trois types de perturbations sous forme d'augmentation d'apports de nutriments de trois intensités différentes.

<sup>4</sup>Lake Eutrophication, Effect, Dose, Sentivity.

<sup>5</sup>Les minéraux colloïdaux sont des particules minérales de toute petite taille, non-dissoutes en suspension dans l'eau. Les minéraux colloïdaux doivent être digérés par des acides afin d'être dissous sous forme ionique directement assimilable.

<sup>6</sup> Vanni et Layne (1997) ont mis en évidence que les poissons et les zooplanctons affectent considérablement les dynamiques des producteurs primaires, les phytoplanctons, non seulement par effets de prédation mais également par les nutriments qu'ils libèrent [112].

### Tester des scénarios de gestion

Pour tester des scénarios de gestion, le système modélisé doit contenir l'environnement, le lac, et les acteurs, industriels, agriculteurs, touristes... Il doit également prendre en compte leurs interactions : les activités humaines causent d'éventuels excédents d'apports de phosphates dans le lac ; l'état du lac à un impact économique du fait des coûts de traitement, et social par l'intermédiaire du cadre de vie et des possibilités de loisirs.

Dans les trois modèles suivants, la dynamique des phosphates est très simplifiée par rapport aux modèles des paragraphes précédents : une variable, la concentration en phosphates dissous ou deux avec la quantité de phosphates dans les sédiments, dont les évolutions sont régies par des équations différentielles. Janssen et Carpenter (1999) considèrent un système composé d'un lac et des agriculteurs qui y apportent des phosphates [73]. Ces agriculteurs décident d'apporter une quantité de phosphates par unité de temps en fonction d'une analyse coût-bénéfice intégrant un coût écologique. En fonction de leurs croyances à propos de l'influence des apports de phosphates sur l'état du lac, certains coefficients associés au coût varient. En montrant les courbes simulées des quantités de phosphates dissous en fonction du temps, les auteurs mettent en évidence les dangers d'un décalage entre dynamiques réelles et croyances. Lorsqu'un processus d'apprentissage existe, les agriculteurs peuvent modifier leurs croyances lorsqu'elles ne correspondent pas à la réalité observée, et les courbes simulées représentant la concentration de phosphates en fonction du temps restent alors bornées.

Ludwig *et al.* (2003) définissent également un coût ayant une composante économique et une composante environnementale afin d'illustrer le compromis à trouver entre production économique et ressources environnementales [114]. L'objectif est de maximiser la somme actualisée en horizon infini, avec comme contraintes les dynamiques des concentrations de phosphates. Par une méthode d'itérations sur les politiques, ils trouvent une solution numérique à ce problème d'optimisation [115].

Janssen (2001) propose un modèle exploratoire<sup>7</sup> intégrant des dynamiques écologiques et sociales [116]. Le modèle décrivant le comportement humain utilise les connaissances produites par la psychologie sociale, c'est un modèle basé sur des règles inspirées par Jager [117]. Le modèle de l'écosystème fait évoluer le stock de phosphates dissous et dans le sol en fonction du comportement des agriculteurs. La première série de simulations permet d'observer le comportement du modèle. Avec la seconde série, l'auteur réalise un test de sensibilité, d'une part, pour savoir comment les paramètres des lois de comportement influencent la valeur d'une fonction objectif moyennée sur un grand nombre de simulations, d'autre part, pour déterminer pour quel montant de taxe cette valeur est optimale.

<sup>7</sup>Les auteurs qualifient leur modèle d'exploratoire car il n'est pas programmé ou testé pour un cas spécifique.

## 4.2 L'évaluation de la résilience dans un modèle simple d'eutrophisation des lacs

Le système étudié est composé d'un lac et des populations qui profitent de ses services ou apportent des excédents de phosphates par l'intermédiaire de leurs activités agricoles. Dans ce modèle simplifié, l'objectif des agriculteurs est d'assurer la rentabilité de leurs exploitations ; du point de vue des gestionnaires du lac, l'objectif est de maintenir le lac dans un état oligotrophique. Pour un gestionnaire de l'ensemble du système, les questions cruciales sont : connaissant la concentration en phosphates et la quantité d'apports, les activités agricoles peuvent-elles rester rentables et le lac peut-il rester dans un état oligotrophique ? Après une perturbation provoquant une brusque augmentation de la concentration en phosphates, le lac est-il condamné à devenir eutrophe ? S'il peut devenir à nouveau oligotrophe, quelles sont les meilleures actions à entreprendre et quel va être le coût en terme de temps de restauration ou de montant de pertes pour les agriculteurs ?

La définition de la résilience que nous avons proposé dans le chapitre 2 permet de répondre à ces questions.

### 4.2.1 Le modèle

#### La dynamique et les contrôles

Pour décrire les dynamiques essentielles responsables de l'eutrophisation des lacs, nous utilisons une version simplifiée du modèle décrit par Carpenter *et al.* (1999) [118], en faisant l'hypothèse que les sédiments sont la principale source de phosphates recyclés (ignorant le recyclage par les consommateurs<sup>8</sup>) :

$$\frac{dP(t)}{dt} = -b.P(t) + L(t) + r.\frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}, \quad (4.1)$$

avec  $P$  la quantité de phosphates (masse ou concentration) dissous dans l'eau,  $L$  les apports de phosphates annuels provenant des activités humaines (masse ou concentration par unité de temps) et  $b$  la proportion de phosphates éliminée à chaque pas de temps. Le taux maximal de recyclage des phosphates (masse ou concentration par unité de temps) est  $r$ . Le recyclage total est supposé être une fonction sigmoïde<sup>9</sup> de  $P$ . La valeur de  $P$  pour laquelle le recyclage atteint la moitié du taux de recyclage maximal est  $m$ .

<sup>8</sup>Poissons et zooplanctons.

<sup>9</sup>fonction à seuil continue comme la tangente hyperbolique.

Carpenter *et al.* (1999) ont utilisé des diagrammes de bifurcation pour définir différents types de lacs en fonction des paramètres du modèle. Ils ont défini un lac réversible comme ayant un seul équilibre stable, cet équilibre stable étant associé à une faible valeur de  $P$ . Les lacs hystérésiques et irréversibles ont trois équilibres dont deux stables (l'un avec une faible valeur de  $P$ , l'autre avec une valeur de  $P$  élevée). La différence entre un lac hystérésique et un lac irréversible est la possibilité de passer de l'équilibre associé à une forte valeur de  $P$  à celui de valeur de  $P$  faible.

Janssen et Carpenter (1999) ont utilisé comme valeurs de paramètres,  $q = 8$ ,  $r = 1$ ,  $m = 1$  et la valeur de  $b$  dépend du type de lac :  $b = 0.4$  pour un lac irréversible,  $b = 0.8$  pour un lac hystérésique, et  $b = 2$  pour un lac réversible. Les diagrammes de bifurcation associés à ces trois ensembles de paramètres sont représentés dans le plan  $(L, P)$  dans la figure 4.1. Lorsque  $b = 2$ , l'équilibre stable reste unique quand  $L$  croît. Cependant, pour  $b = 0.4$  et  $b = 0.8$ , la stabilité de l'équilibre associé à une faible valeur de  $P$  devient précaire lorsque  $L$  se rapproche de  $L_2$  car le domaine d'attraction se rétrécit ; enfin, quand  $L = L_2$ , l'équilibre correspondant à la plus petite valeur de  $P$  disparaît et la concentration en phosphates est attiré par l'équilibre associé à une forte valeur de  $P$ . Une fois que la concentration a atteint cet équilibre, le retour à un équilibre avec faible valeur de  $P$  n'est pas évident : si la valeur de  $L$  est réduite en dessous de  $L_2$ , le système demeure attiré par un équilibre associé à une concentration en phosphates élevée. Pour  $b = 0.8$ , lorsque  $L$  décroît en dessous de  $L_1$ , le système est attiré par l'unique équilibre qui est associé à une concentration en phosphates faible. Ce phénomène inverse ne se produit pas lorsque  $L$  croît à nouveau. Les chemins suivis par l'état du système lorsque  $L$  croît ou décroît ne sont pas identiques, c'est la caractéristique d'un phénomène d'hystérésis. Lorsque  $b = 0.4$ , atteindre l'équilibre associé à une faible concentration en phosphates est impossible car  $L$  est une quantité positive. Le passage à l'équilibre associé à la plus forte concentration en phosphates est irréversible.

En ce qui concerne les dynamiques associées aux apports de phosphates, nous supposons que le gestionnaire peut agir sur leurs variations temporelles,  $dL/dt$ , en votant des lois contraignantes, par exemple. Pour rester simple, nous supposons que la dérivée de  $L$  dépend directement du contrôle  $u$  choisi par le gestionnaire :

$$\frac{dL(t)}{dt} = u. \quad (4.2)$$

Comme les modifications de comportements et les changements de technologies agricoles prennent du temps, nous considérons que les variations temporelles des apports de phosphates dus aux activités agricoles sont bornées. Par conséquent,  $u$  doit appartenir à l'ensemble fermé des contrôles admissibles  $U$  :

$$u \in U := [-VL_{max}, VL_{max}]. \quad (4.3)$$

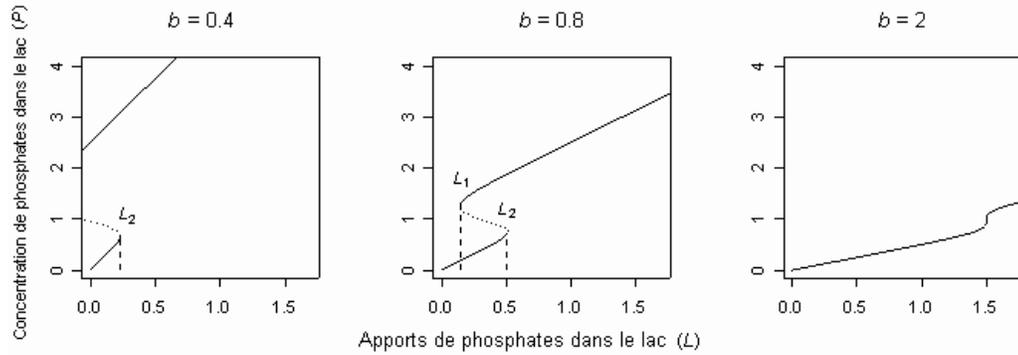


FIG. 4.1 – Diagrammes de bifurcation pour le modèle de lac simplifié en prenant comme valeurs de paramètres  $q = 8$ ,  $r = 1$ ,  $m = 1$ , et  $b = 0.4$  (gauche),  $b = 0.8$  (milieu),  $b = 2$  (droite) (avec  $q$  l'exposant,  $r$  le taux maximal de recyclage,  $m$ , la valeur de  $P$  pour laquelle le recyclage atteint la moitié de sa valeur maximale, et  $b$  la proportion de phosphates perdus à chaque pas de temps). Les courbes pleines représentent le lieu des équilibres stables et les courbes en pointillés les équilibres instables dans le plan  $(L, P)$ .

### Les objectifs, envisagés comme des contraintes sur les états

Les lacs oligotrophes sont caractérisés par de faibles apports en nutriments, un niveau de production de plantes faible ou modéré, de l'eau relativement claire et une valeur économique élevée<sup>10</sup>. Les lacs eutrophes reçoivent d'importants apports de nutriments, la production de plantes est forte, l'eau est trouble avec des problèmes de manque d'oxygène et de toxicité. La valeur des services rendus par de tels écosystèmes est très faible. Le gestionnaire du lac a, par conséquent, comme but de le conserver dans un état oligotrophique. Nous supposons qu'un lac oligotrophe devient eutrophe lorsque la quantité de phosphates dissous dans l'eau croît au-dessus d'un seuil fixé  $P_{max}$ <sup>11</sup>. Par conséquent, l'objectif du gestionnaire du lac est atteint lorsque la variable positive  $P$  satisfait :

$$P \in [0, P_{max}] . \quad (4.4)$$

La propriété d'oligotrophie d'un lac ne dépend certainement pas que de la concentration en phosphates dissous, mais également des phosphates contenus dans la vase ou le sol. Ludwig *et al.* (2003) ont comparé les politiques optimales calculées avec un modèle à une dimension et celles calculées avec un modèle à deux dimensions dans lequel les dynamiques des phosphates dans la vase sont prises en compte [114]. Ils soulignent l'importance de ces dynamiques lorsque l'horizon temporel sur lequel est effectuée l'optimisation est suffisamment long pour que des changements sensibles se produisent. Par souci de simplicité, nous

<sup>10</sup>Réservoirs d'eau potable ou d'irrigation, lieux de tourisme.

<sup>11</sup>Cette hypothèse est cohérente avec les études empiriques décrites dans la section 4.1.

négligeons, dans cette section, les dynamiques des phosphates dans la vase et le sol. Nous ajoutons une variable supplémentaire, la quantité de phosphore à l'état de sédiments dans la vase dans le modèle plus complexe étudié dans la section 4.3.

L'objectif des agriculteurs est la rentabilité de leurs activités. Nous supposons dans ce modèle simple que leur bénéfice dépend linéairement des apports en phosphates. Ainsi, leur objectif est atteint lorsque la valeur des apports de phosphates dépendant des activités humaines est supérieur à un seuil donné,  $L_{min}$ . Nous supposons également qu'un seuil maximal d'apports de phosphates,  $L_{max}$ , est fixé par les institutions ou les parties prenantes. Les activités des agriculteurs sont donc rentables et légales lorsque :

$$L \in [L_{min}, L_{max}] . \quad (4.5)$$

Les équations (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) peuvent être écrites de manière synthétique dans le formalisme des inclusions différentielles en considérant la variable vectorielle  $x(t) := (L(t), P(t))$  appartenant à  $X := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{cases} x'(t) &= (L'(t), P'(t)) = (u(t), -b.P(t) + L(t) + r.\frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}) =: f(x(t), u(t)) \\ u(t) &\in U(x(t)) = U . \end{cases} \quad (4.6)$$

avec comme contraintes

$$x(t) \in K := [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}] . \quad (4.7)$$

$L_{min}$  comme  $P_{max}$  pourraient dépendre de variables socio-économiques dans un modèle plus complexe. Les prendre en compte aboutirait à un ensemble de contraintes  $K$  dont la forme serait plus compliquée qu'un parallélépipède. La même approche pourrait être appliquée, dans la théorie de la viabilité, la seule contrainte imposée sur  $K$  est d'être fermé.

### L'horizon temporel

Dans cette application, nous choisissons pour horizon  $T = \infty$ , ce qui signifie que l'objectif est de conserver la propriété indéfiniment ou, au moins, de la restaurer en temps fini<sup>12</sup>.

<sup>12</sup>Nous pourrions considérer des horizons finis en prenant comme variable  $y(t) = (x(t), \tau(t))$  gouvernée par l'inclusion différentielle (2.23) avec comme ensemble de contraintes  $K \times \mathbb{R}_+$ .

### Les indicateurs de coût

Nous rappelons que ces indicateurs de coût sont utilisés pour évaluer la résilience de la propriété définie par l'ensemble  $K$  qui a pour objet, dans cette application, d'assurer la rentabilité des activités des agriculteurs et garder le lac dans un état oligotrophique. Par conséquent, ces fonctions doivent satisfaire deux conditions sachant que nous considérons un horizon temporel infini : la première, le coût d'une évolution le long de laquelle la propriété est maintenue pour tout  $t \geq 0$  est nul ; la seconde, le coût d'une évolution telle que la propriété n'est pas restaurée est infini. De plus, l'évolution issue de  $x$  de coût minimal est la meilleure évolution à suivre étant donné l'objectif de maintenir la propriété indéfiniment ou au moins de la restaurer en temps fini.

En pratique, les manières d'évaluer le coût d'une évolution  $x(\cdot) = (L(\cdot), P(\cdot))$  satisfaisant (4.6) sont nombreuses et dépendent de la situation et des points de vue.

Si les agriculteurs refusent la moindre perte et si seul le temps mis pour restaurer la propriété d'oligotrophie du lac importe, la valeur du coût est infinie si l'évolution est telle que  $L(t)$  devient strictement inférieur à  $L_{min}$  et est mesurée par le temps passé à l'état eutrophique sinon. Le temps passé par une évolution hors de  $K$  est une fonctionnelle introduite par Doyen et Saint-Pierre (1997) appelée *temps de crise* [87]. L'indicateur de coût  $\gamma$  qui associe à  $x$  le coût minimal sur toutes les évolutions issues de  $x$  est alors défini par :

$$\gamma_{K,T=\infty}(x) := \min_{x(\cdot)} \int_0^{+\infty} \chi(x(\tau)) d\tau \quad (4.8)$$

avec  $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\begin{aligned} \chi(x) &:= +\infty && \text{si } x \in X \setminus H, \\ &:= 1 && \text{si } x \in H \setminus K, \\ &:= 0 && \text{si } x \in K \end{aligned} \quad (4.9)$$

et  $H = \{x = (L, P) \in X \mid L \geq L_{min}\}$ .

Dans le cas du second indicateur de coût, les objectifs des agriculteurs ne prévalent pas totalement sur les objectifs écologiques. La fonction d'évaluation du coût est composée de deux termes : le premier terme qui correspond au coût écologique est le même que pour l'indicateur de coût  $\gamma$  ; le second, qui est un coût économique, mesure la durée de la période de pertes pondérée par la valeur de ces pertes. Le premier terme est multiplié par un facteur  $c_1$ , le second par  $c_2$ . Ces facteurs reflètent le niveau de priorité accordé à chacun des coûts. Contrairement au premier indicateur de coût,  $\gamma$ , le coût d'une évolution qui coupe la droite  $L = L_{min}$  n'est pas infini. La fonction qui associe à  $x$  le coût minimal sur toutes les évolutions

issues de  $x$  est alors  $\lambda$  définie par :

$$\lambda_{K,T=\infty}(x) := \min_{x(\cdot)} \int_0^{+\infty} c_1 \cdot \chi_1(x(\tau)) + c_2 \cdot \chi_2(x(\tau)) d\tau \quad (4.10)$$

avec  $\chi_1, \chi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &:= 1 && \text{si } x \in X \setminus H_1, \\ &:= 0 && \text{si } x \in H_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec  $H_1 := \{x = (L, P) \in X \mid P \leq P_{max}\}$  et

$$\begin{aligned} \chi_2(x) &:= L_{min} - L && \text{si } x \in X \setminus H_2, \\ &:= 0 && \text{si } x \in H_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec  $H_2 := H = \{x = (L, P) \in X \mid L \geq L_{min}\}$ .

Le premier indicateur de coût est égal au second avec  $c_2$  prenant la valeur infinie.

## Les perturbations

Dans ce modèle simple, nous considérons des perturbations  $D_\alpha$  correspondant à une brusque augmentation de la concentration de phosphates dans l'eau du lac. Le scalaire  $\alpha$  représente l'intensité maximale des perturbations envisagées. Une telle perturbation modifie la concentration de phosphates  $P$  mais ne modifie pas les apports externes  $L$ . Si une perturbation se produit lorsque l'état du système est  $x$ , le système va passer à un état  $y$  appartenant à l'ensemble  $D_\alpha(x)$  :

$$D_\alpha(x) := \{y \in X \mid y \in x + \{0\} \times [0, \alpha]\} : . \quad (4.13)$$

### 4.2.2 Les résultats

Dans le cas le plus simple, lorsque l'indicateur de coût est la fonction temps de crise  $\gamma$ , le noyau de viabilité, la fonction indicateur de coût et la résilience peuvent être définis analytiquement et leurs frontières ou courbes de niveau dessinées par intégration numérique d'équations différentielles. En ce qui concerne le deuxième indicateur de coût,  $\lambda$ , nous utilisons les algorithmes décrits dans le chapitre 3 pour calculer des valeurs approchées.

## Noyaux de viabilité

La première question qui se pose est de déterminer si les évolutions satisfaisant (4.6) sont compatibles avec les objectifs représentés par l'ensemble  $K$  (4.7) : assurer la rentabilité

des activités agricoles et conserver le lac dans un état oligotrophique. Autrement dit, notre objectif est de déterminer pour quelles quantités de phosphates dissous dans l'eau et quelles quantités d'apports externes,  $(L, P)$ , appartenant à l'ensemble  $K$ , il existe une évolution issue de  $(L, P)$  restant dans  $K$  indéfiniment. Ces évolutions sont appelées des évolutions viables, les objectifs sont pleinement remplis lorsque de tels évolutions sont suivies. Nous identifions tout d'abord les équilibres viables, puis les niches de viabilité, enfin, nous calculons le noyau de viabilité complet qui est formé de tous les états tels qu'il existe au moins une évolution partant de ces états, satisfaisant (4.6) et restant dans  $K$  indéfiniment<sup>13</sup>.

Les équilibres sont les états tels que  $dL/dt = 0$  et  $dP/dt = 0$ . Ils sont viables lorsqu'ils appartiennent à  $K$ . Par conséquent, le noyau de viabilité de  $K$  contient les états d'équilibre  $x_{eq} = (L_{eq}, P_{eq})$  tels que

$$L_{min} \leq L_{eq} \leq L_{max} \text{ et } 0 \leq P_{eq} \leq L_{max}. \quad (4.14)$$

L'ensemble des équilibres viables correspond à la courbe (EQ) dans la figure 4.2. Les équilibres stables appartiennent à la partie de la courbe tracée d'une ligne continue, les équilibres instables à la partie en pointillés.

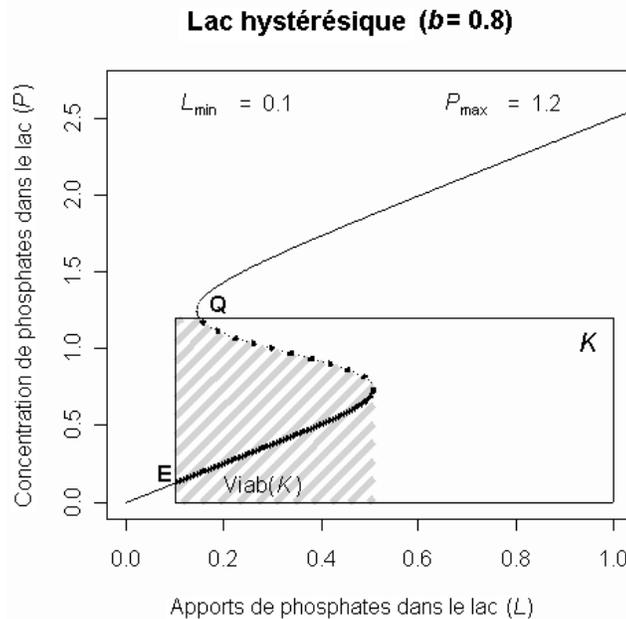


FIG. 4.2 – Les équilibres viables (segment EQ) et, hachurée en gris, la niche de viabilité  $N(0)$  associée au contrôle permanent  $u(t) = 0$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir.  $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 1.2$ .

<sup>13</sup>Le noyau de viabilité est évidemment plus petit que l'ensemble des contraintes  $K$ .

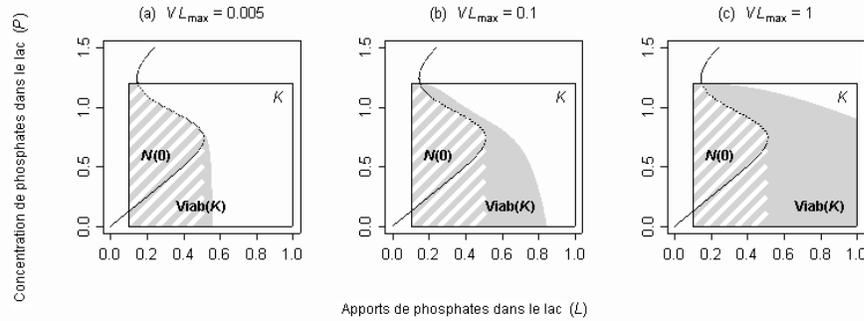


FIG. 4.3 – Noyaux de viabilité pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ). L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir.  $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 1.2$  et  $VL_{max}$  prend des valeurs croissantes.  $Viab(K)$  est colorié en gris clair. La niche de viabilité  $N(0)$ , qui est contenue dans le noyau de viabilité, est hachurée en blanc.

Les niches de viabilité sont formées des états initiaux d'apports externes en phosphates et de concentration en phosphates dissous tels que l'évolution obtenue en utilisant un contrôle externe permanent  $u(t) = u_0$  reste dans  $K$ . Les équilibres viables appartiennent aux niches de viabilité. Comme  $dL/dt = u_0$  et que  $L(\cdot)$  doit être bornée pour qu'une évolution soit viable, la seule niche de viabilité non vide est celle de  $u_0 = 0$ ,  $N(0)$ .  $u(t) = 0$  implique que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $L(t) = L(0) = L_0$ , et, de plus, que l'évolution de  $P(t)$ , de  $P(0)$  vers  $P_{eq}(L_0)$ , valeur de  $P$  telle que  $(L_0, P)$  est un état d'équilibre, est monotone. Si  $P_{eq}(L_0)$  appartient à  $K$ , l'intersection entre le bassin d'attraction de  $P_{eq}(L_0)$  et  $K$  appartient à  $N(0)$ .  $N(0)$  est la réunion pour  $L_0 = L_{min}$  à  $L_{max}$  de telles intersections. Cette niche de viabilité est hachurée en gris clair dans la figure 4.2.

Dans le cas du noyau de viabilité, contrairement aux niches de viabilité, des régulations à l'aide de modifications des contrôles sont autorisées, augmentant l'ensemble des évolutions possibles. De tels changements sont limités à l'ensemble des contrôles admissibles : l'intensité de la dérivée des apports de phosphates doit être inférieure à  $VL_{max}$ , afin de modéliser la résistance au changement et la rigidité des décisions. Lorsque  $VL_{max}$  tend vers 0, ce qui signifie que les changements d'apports de phosphates tendent vers 0, le noyau de viabilité tend vers la niche de viabilité  $N(0)$  en accord avec les résultats de Carpenter *et al.* (1999) [20]. Une augmentation de  $VL_{max}$  permet une plus forte décroissance des apports de phosphates externes, par conséquent, la surface du noyau de viabilité croît avec  $VL_{max}$  (Fig. 4.3).

Nous pouvons distinguer de manière qualitative trois configurations pour le noyau de viabilité en fonction des paramètres  $(L_{min}, L_{max}, P_{max})$ . Ces trois configurations sont illustrées dans la figure 4.4 pour un lac irréversible, dans la figure 4.5 pour un lac hystérésique et dans la figure 4.6 pour un lac réversible.

**Configuration 1 : viabilité globale.** C'est le cas le plus favorable, le noyau de viabilité est égal à l'ensemble des contraintes,  $\text{Viab}(K) = K$ . Cette situation se produit lorsque  $P_{max}$  est plus grand que toutes les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{max}$ . Cela signifie que, si les apports maximaux de phosphates sont suffisamment faibles, ou, symétriquement, si le seuil d'eutrophisation est suffisamment élevé relativement aux valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{max}$ , une évolution viable existe à partir de tout état appartenant à  $K$ . Cette viabilité globale est représentée dans la figure 4.6 dans le cas d'un lac réversible.

**Configuration 2 : viabilité partielle.** Le noyau de viabilité est un sous-ensemble strict mais non vide de  $K$ . Ce cas se produit lorsque  $P_{max}$  est d'une part, strictement plus petit que la plus grande valeur de  $P$  des équilibres associés à  $L_{max}$  et, d'autre part, plus grand que la plus petite valeur de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ . La courbe  $g$  définit la partie de la frontière du noyau de viabilité qui n'est pas confondue avec celle de  $K$  et correspond à l'évolution satisfaisant  $dL/dt = -VL_{max}$  (Fig. 4.4, Fig. 4.5 et Fig. 4.6). Cette courbe représente les états du système où il est crucial de changer de contrôle et de choisir  $u = -VL_{max}$ , le taux maximal de décroissance des apports de phosphates. L'ensemble  $K \setminus \text{Viab}(K)$  contient les états tels que les quantités de phosphates apportés ou dissous dans l'eau sont suffisamment élevées pour que toute évolution quitte  $K$  en temps fini.

**Configuration 3 : noyau de viabilité vide.** Cette configuration se produit lorsque  $P_{max}$  est strictement plus petit que la plus petite des valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ . En particulier, aucun équilibre n'appartient à  $K$ , puisque tout équilibre de  $K$  appartient à  $\text{Viab}(K)$ . Cette situation est plus courante dans le cas d'un lac irréversible (Fig. 4.4).

Les résultats numériques des paragraphes suivants sont calculés avec les valeurs des paramètres suivantes :  $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$ ,  $VL_{max} = 0.1$  et  $T = \infty$ .

### Les indicateurs de coût

Nous avons constaté dans le paragraphe précédent, l'éventualité de la configuration de viabilité partielle. Partant des états appartenant à  $K \setminus \text{Viab}(K)$ , la dynamique entraîne le système hors de l'ensemble des contraintes en temps fini, quels que soient les contrôles : le lac est condamné à devenir eutrophe ou les bénéfiques sont condamnés à devenir négatifs. La propriété considérée ne peut être maintenue. La question qui se pose alors est de savoir s'il existe une évolution issue de  $x \in K \setminus \text{Viab}(K)$  et un temps  $\mathcal{T}$ , tels que la propriété est restaurée au temps  $\mathcal{T}$  et est maintenue ensuite indéfiniment. Si la réponse est oui, le coût d'une telle évolution est évalué par des fonctions qui mesurent la distance entre cette évolution et

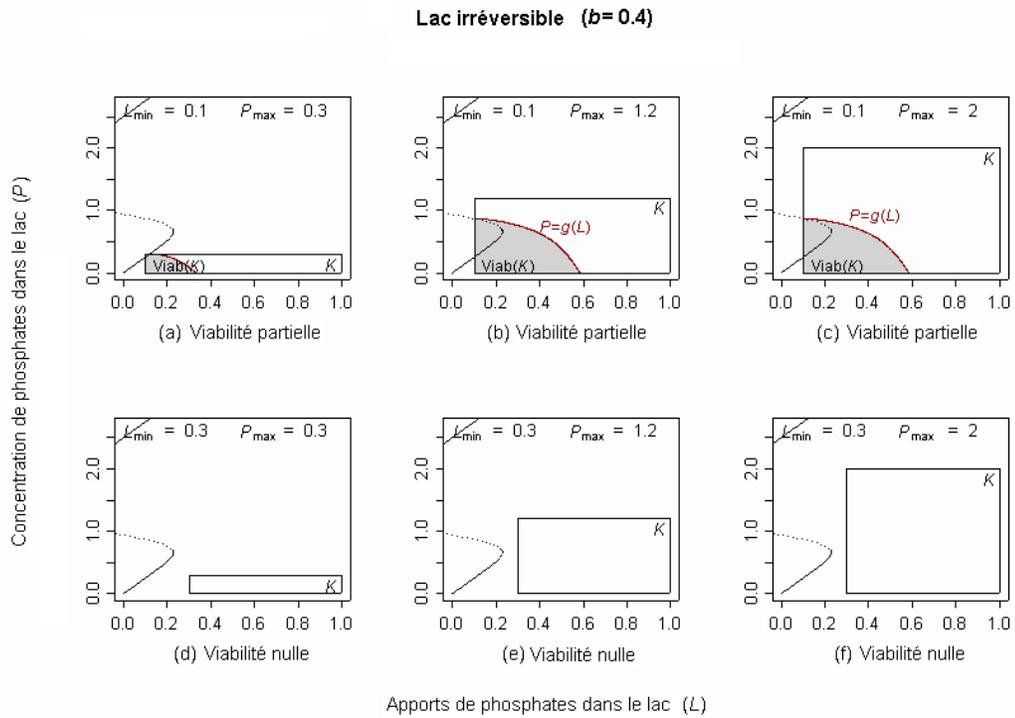


FIG. 4.4 – Noyaux de viabilité pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) pour différentes valeurs de  $(L_{min}, P_{max})$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir et  $Viab(K)$  est colorié en gris clair. ( $V L_{max} = 0.1$ ). Faire varier la paire  $(L_{min}, P_{max})$  modifie la forme du noyau de viabilité : si  $P_{max}$  est strictement plus petit que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ , alors le noyau est vide ; sinon, la forme du noyau dépend des comparaisons entre  $P_{max}$  et les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ . La courbe  $g$  définit la frontière de droite du noyau de viabilité et correspond à une portion de trajectoire d'une évolution satisfaisant  $u(t) = -V L_{max}$ .

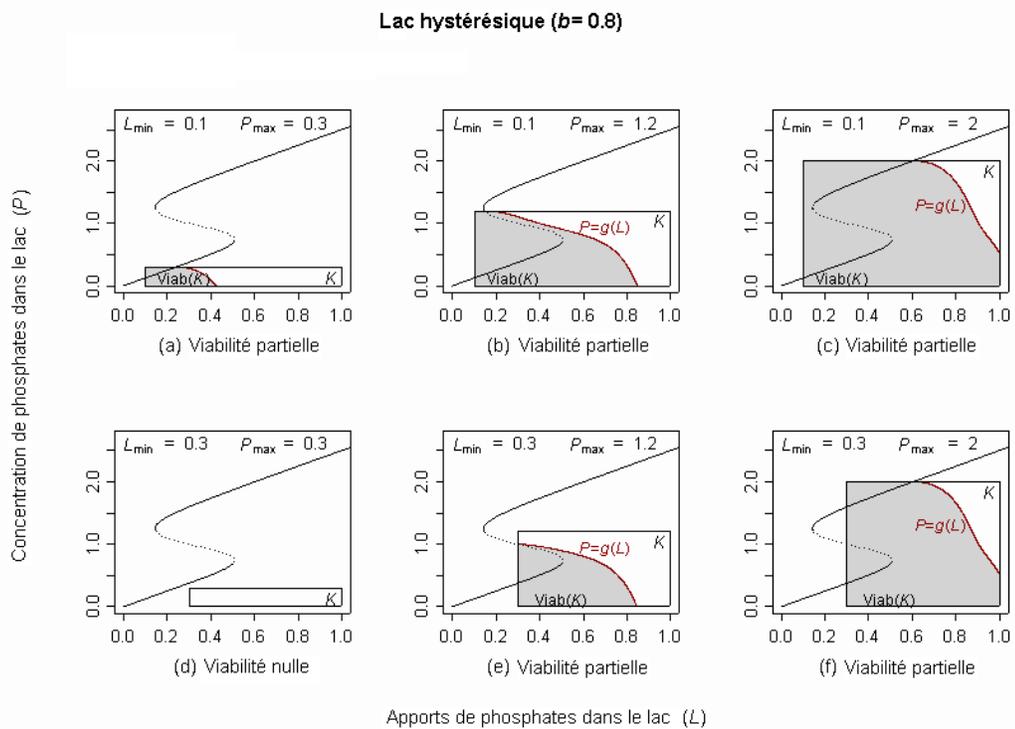


FIG. 4.5 – Noyaux de viabilité pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) pour différentes valeurs de  $(L_{min}, P_{max})$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir et  $Viab(K)$  est colorié en gris clair. ( $V L_{max} = 0.1$ ). Faire varier la paire  $(L_{min}, P_{max})$  modifie la forme du noyau de viabilité : si  $P_{max}$  est strictement plus petit que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ , alors le noyau est vide ; sinon, la forme du noyau dépend des comparaisons entre  $P_{max}$  et les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ . La courbe  $g$  définit la frontière de droite du noyau de viabilité et correspond à une portion de trajectoire d'une évolution satisfaisant  $u(t) = -V L_{max}$ .

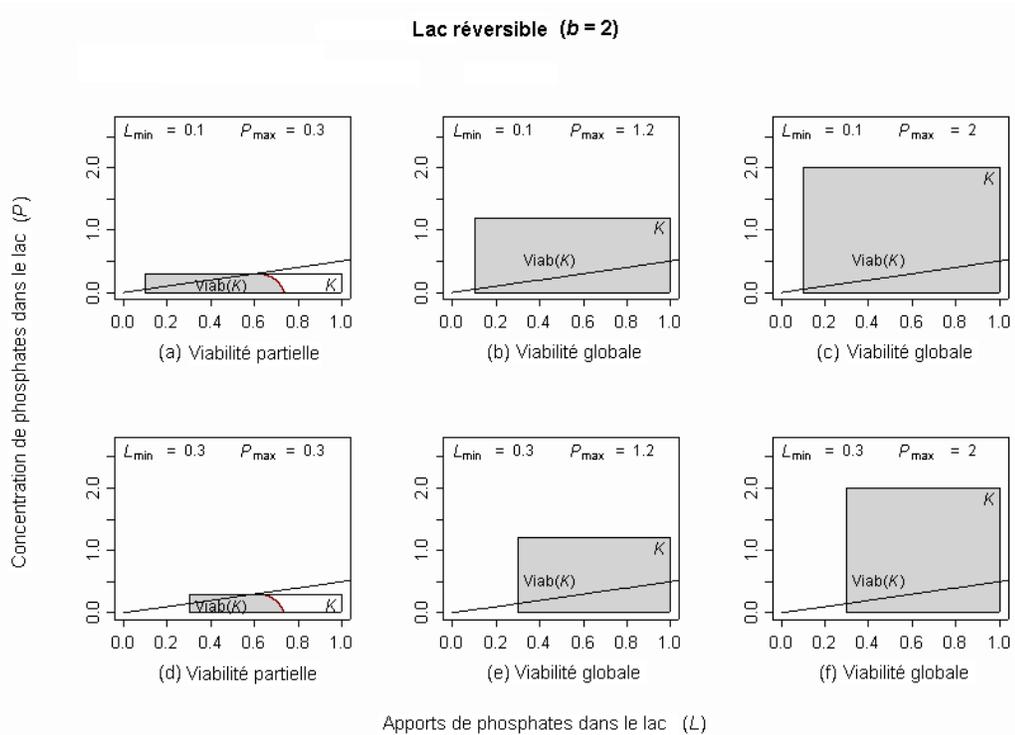


FIG. 4.6 – Noyaux de viabilité pour un lac réversible ( $b = 2$ ) pour différentes valeurs de  $(L_{min}, P_{max})$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir et  $Viab(K)$  est colorié en gris clair. ( $V L_{max} = 0.1$ ). Faire varier la paire  $(L_{min}, P_{max})$  modifie la forme du noyau de viabilité : si  $P_{max}$  est strictement plus petit que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ , alors le noyau est vide ; si  $P_{max}$  est strictement plus grand que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{max}$ , alors le noyau et  $K$  coïncident ; dans les autres cas, la forme du noyau dépend des comparaisons entre  $P_{max}$  et les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ .

une évolution idéale au cours de laquelle la propriété serait toujours vraie (cette évolution idéale est contenue dans  $K$ ). Le coût minimal sur toutes les évolutions issues de  $x$  et satisfaisant (4.6) est la prévision la plus optimiste du coût futur lorsque l'état présent du système est  $x$ . La définition de cet indicateur de coût dépend du point de vue du gestionnaire qui souhaite l'évaluer. Nous avons choisi d'étudier les valeurs de deux indicateurs de coût choisis arbitrairement et définis par les équations (4.8) et (4.10).

**Exemples d'évolutions issues de  $K \setminus \text{Viab}(K)$ .** Les trajectoires représentées sur la figure 4.7 sont issues d'états qui appartiennent à  $K$  mais qui n'appartiennent pas à  $\text{Viab}(K)$ . Elles sont contrôlées par la loi de régulation définie par :

$$\begin{cases} u(t) & := -VL_{max} & \text{si } L(t) > L_{min} \\ & := 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Toutes les évolutions quittent  $K$  tôt ou tard puisque les états initiaux n'appartiennent pas au noyau. Cependant, certaines évolutions atteignent  $\text{Viab}(K)$  en temps fini (Fig. 4.7, lignes continues) et par conséquent leur coût peut être fini. D'autres évolutions convergent vers un équilibre hors de  $K$  (Fig. 4.7a lignes en pointillés), leur coût est infini quel que soit l'indicateur de coût puisque la propriété n'est jamais restaurée.

**Les courbes de niveaux des indicateurs de coût.** Les deux indicateurs de coût divisent l'espace des états,  $X$ , en trois zones :

1. l'ensemble des états pour lesquels la valeur de l'indicateur de coût est nulle (zone colorisée en gris foncé dans les figures 4.8 et 4.9). Cet ensemble est égal à  $\text{Viab}(K)$  pour les deux indicateurs de coût,  $\gamma$  et  $\lambda$ ,
2. l'ensemble des états pour lesquels la valeur de l'indicateur de coût est finie. Dans cette zone les courbes de niveaux dépendent des définitions des indicateurs de coût,
3. l'ensemble des états pour lesquels la valeur de l'indicateur de coût est infinie (par exemple, les états dont les évolutions optimales sont dessinées en pointillés dans la figure 4.7a). Quel que soit l'indicateur de coût, cet ensemble contient les états à partir desquels la propriété est perdue et ne peut être restaurée. Il est hachuré en gris dans les figures 4.8 et 4.9.

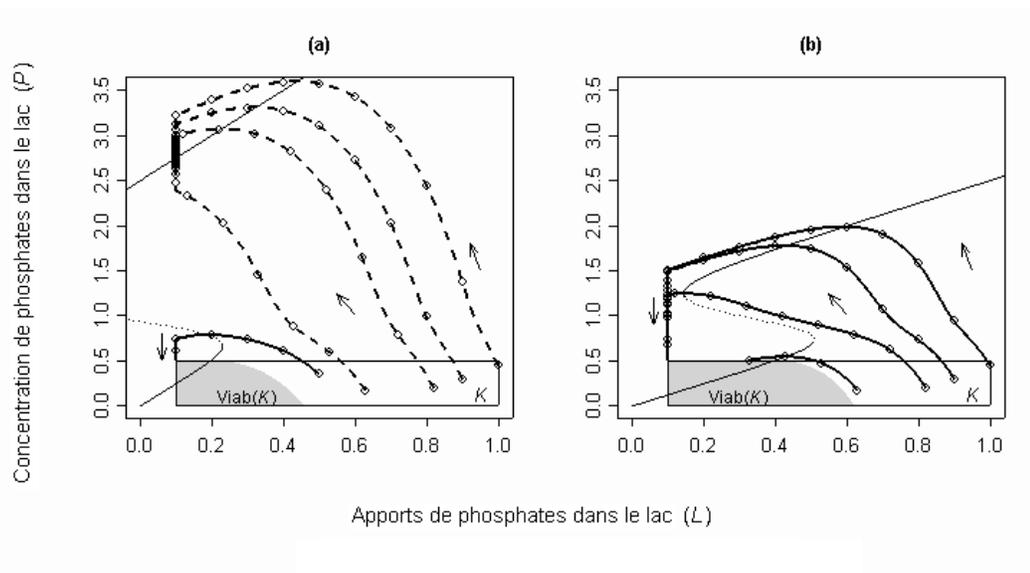


FIG. 4.7 – Évolutions issues d'états non viables et contrôlées par l'équation (4.15) pour (a) un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) et (b) un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ). ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Le temps est indiqué par des cercles dessinés sur la trajectoire à intervalles de temps réguliers. Les flèches indiquent le sens des évolutions. Les évolutions qui atteignent  $Viab(K)$  en temps fini sont tracées en lignes continues, les autres en pointillés. Dans le cas du lac hystérésique (b), toutes les évolutions atteignent  $Viab(K)$  en temps fini, alors que la plupart d'entre elles sont absorbées par un équilibre associé à une forte valeur de  $P$  dans le cas du lac irréversible (a).

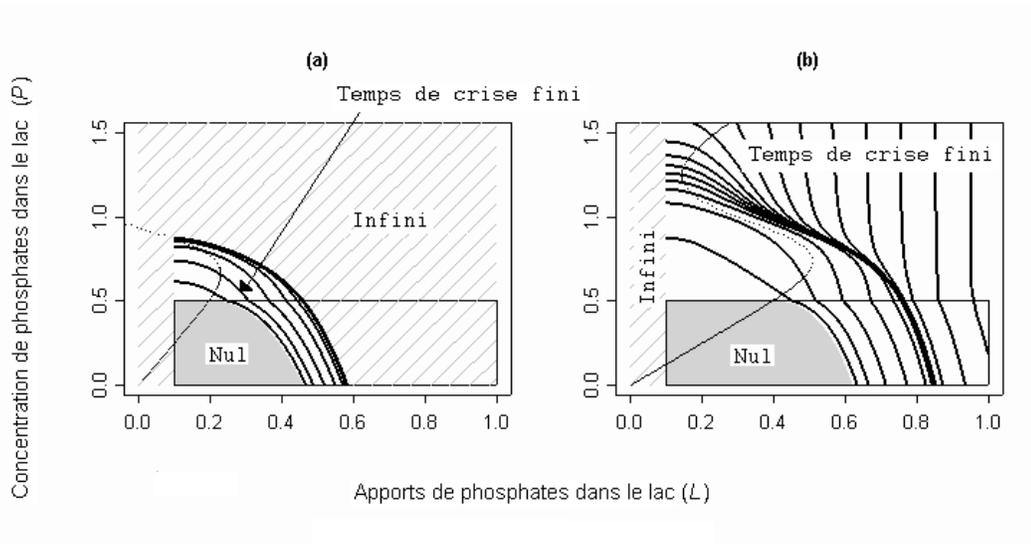


FIG. 4.8 – Lignes de niveau de la fonction temps de crise pour (a) un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) et (b) un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les temps de crise de deux états appartenant à la même ligne continue sont finis et égaux.  $Viab(K)$  (zone en gris clair) et l'ensemble des états pour lesquels le temps de crise est nul coïncident. Le temps de crise est infini pour  $L$  strictement plus petit que  $L_{min}$  dans les deux cas. Dans le cas du lac irréversible (a), l'ensemble des états pour lesquels la valeur de l'indicateur de coût est infinie (zone hachurée), contient strictement l'ensemble  $\{L < L_{min}\}$ , car, à partir de certains états, la propriété représentée par  $K$  ne peut être restaurée.

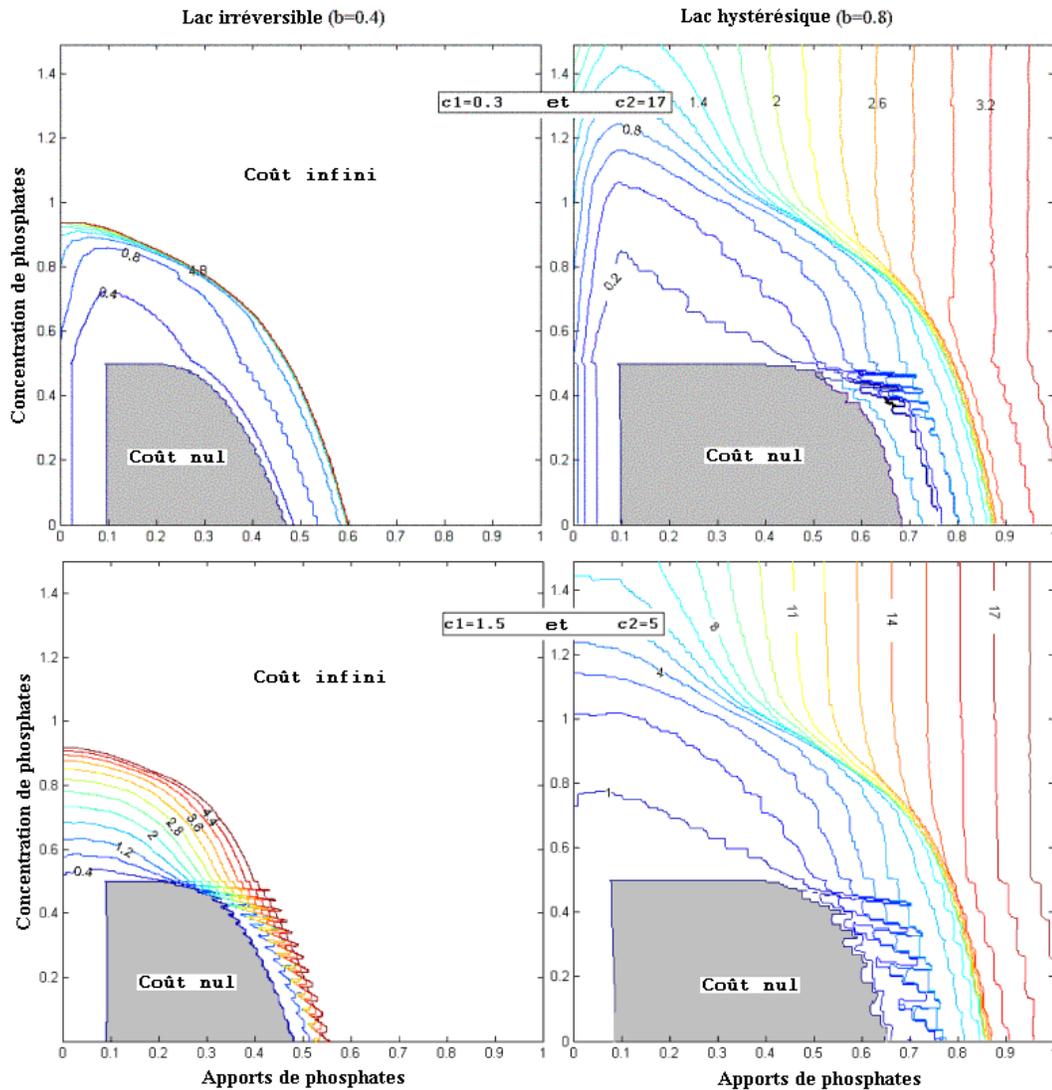


FIG. 4.9 – Lignes de niveau de la fonction indicateur de coût  $\lambda$  pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) (colonne de gauche) et pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) (colonne de droite) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les paramètres de la fonction indicateur de coût  $\lambda$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , valent, respectivement, 0.3 et 17 dans la première rangée, et 1.5 et 5 dans la seconde. Les valeurs des indicateurs de coût de deux états appartenant à la même courbe colorée sont égales.  $Viab(K)$  (zone en gris clair) et l'ensemble des états pour lesquels la valeur de l'indicateur de coût est nulle coïncident. Dans le cas du lac hystérésique (colonne de droite), les valeurs des indicateurs de coût sont finies, alors que les indicateurs de coût prennent la valeur infinie dans le cas du lac irréversible (colonne de gauche).

**L'indicateur de coût  $\gamma$ .** Dans le cas de  $\gamma$ , le temps de crise atteint son minimum pour les évolutions contrôlées par les équations (4.15) représentées dans la figure 4.7.

**Lemme 4.2.2.1** Soit  $x \in K$  et  $x \notin \text{Viab}(K)$ .

Soit  $x_0(\cdot)$ , la trajectoire issue de  $x = (L, P)$  satisfaisant

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= u(t) \in [-VL_{max}, VL_{max}] \\ \frac{dP(t)}{dt} &= -b.P(t) + L(t) + r \cdot \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

et gouvernée par la fonction de contrôle  $u_0(\cdot)$

$$\begin{aligned} u_0(t) &=: -VL_{max} \quad \text{si } L(t) > L_{min} \\ &=: 0 \quad \text{si } L(t) = L_{min}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Soit  $x_1(\cdot)$  une autre trajectoire issue de  $x$  et satisfaisant (4.16), alors

$$\int_0^{+\infty} \chi(x_0(\tau)) d\tau \leq \int_0^{+\infty} \chi(x_1(\tau)) d\tau. \quad (4.18)$$

**Preuve** — Les contraintes imposées sur  $L(t)$  sont  $L(t) \in [L_{min}, L_{max}]$  avec comme dynamique  $dL(t)/dt = u(t)$ . Par conséquent, les contraintes imposées sur  $u(t)$  en fonction de l'état du système  $x(t)$  sont

$$\begin{aligned} u(t) &\geq 0 \quad \text{si } L(t) = L_{min} \\ u(t) &\leq 0 \quad \text{si } L(t) = L_{max}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En outre,  $u(t)$  est bornée,  $u(t) \in [-VL_{max}, VL_{max}]$ .

La fonction de contrôle  $u_0(\cdot)$  satisfait ces contraintes, de plus, quelle que soit la fonction de contrôle,  $u_1(\cdot)$ , satisfaisant ces contraintes,  $u_0(y) \leq u_1(y)$  pour tout  $y \in [L_{min}, L_{max}] \times [0, +\infty]$ .

D'où,

$$\frac{dL_0}{dt}(y) \leq \frac{dL_1}{dt}(y) \quad (4.20)$$

et

$$\frac{dP_0}{dt}(y) \leq \frac{dP_1}{dt}(y) \quad (4.21)$$

pour tout  $y \in [L_{min}, L_{max}] \times [0, +\infty]$ .

Comme  $L_0(0) = L_1(0)$  et  $P_0(0) = P_1(0)$ , pour tout  $t \geq 0$ ,  $L_{min} \leq L_0(t) \leq L_1(t)$  et  $0 \leq P_0(t) \leq P_1(t)$ .

La fonction  $\chi : X = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est définie par

$$\begin{aligned}\chi(x) &:= +\infty && \text{si } x \in X \setminus H, \\ &:= 1 && \text{si } x \in H \setminus K, \\ &:= 0 && \text{si } x \in K\end{aligned}\tag{4.22}$$

avec  $H = \{x = (L, P) \in X \mid L \geq L_{min}\}$  et  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ . Par conséquent, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\chi(x_0(t)) \leq \chi(x_1(t)).\tag{4.23}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \chi(x_0(\tau)) d\tau \leq \int_0^{+\infty} \chi(x_1(\tau)) d\tau.\tag{4.24}$$

La stratégie optimale est de décroître les apports externes de phosphates jusqu'à  $L_{min}$  à la plus grande vitesse possible,  $-VL_{max}$ , puis de les conserver constants à  $L = L_{min}$  puisque que les agriculteurs refusent la moindre perte. Il est important de noter que suivant l'état initial, cette stratégie peut permettre de restaurer la propriété d'oligotrophie (voir les évolutions dessinées en lignes continues dans la figure 4.7) mais peut également échouer (voir les évolutions dessinées en pointillés dans la figure 4.7a). Le temps de crise peut être évalué par intégration numérique le long de telles évolutions. Les lignes de niveau du temps de crise (i.e., les lignes formées des états pour lesquels la valeur du temps de crise est la même) sont dessinées dans la figure 4.8. Les évolutions optimales et les lignes de niveau se confondent à l'intérieur de  $K \setminus \text{Viab}(K)$  puisque le temps de crise mesure le temps passé hors de  $K$ .

**L'indicateur de coût  $\lambda$ .** Dans le cas du second indicateur de coût,  $\lambda$ , nous ne pouvons définir les évolutions optimales analytiquement. Nous utilisons la caractérisation des épigraphes des fonctions indicateurs de coût en terme de noyaux de viabilité d'un système auxiliaire décrite dans la section 2.1 et nous calculons les valeurs approchées de l'indicateur de coût,  $\lambda$ , grâce à l'algorithme de viabilité décrit dans la section 3.1. Nous calculons les valeurs approchées de l'indicateur de coût pour deux ensembles de valeurs de paramètres :  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = 17$ , et  $c_1 = 1.5$ ,  $c_2 = 5$ . Le deuxième ensemble de valeurs donne plus d'importance à l'enjeu écologique relativement à l'enjeu économique que le premier ensemble. Les courbes de niveaux de la fonction indicateur de coût  $\lambda$  sont tracées sur la figure 4.9 et la figure 4.10 représente en trois dimensions le graphe de ces fonctions. Contrairement à l'indicateur de coût  $\gamma$ , la zone  $L < L_{min}$  n'est pas associée à la valeur infinie. La stratégie optimale consiste à diminuer les apports de phosphates jusqu'à  $L_0 < L_{min}$  pour que la propriété d'oligotrophie soit restaurée plus rapidement, puis d'accroître les apports jusqu'à  $L_{min}$  pour que les agriculteurs dégagent à nouveau un bénéfice de leurs activités. La valeur de  $L_0$ , qui dépend

de l'état initial du système, représente le compromis optimal entre enjeux économiques et écologiques : plus l'enjeu écologique est considéré comme important relativement à l'enjeu économique, plus la valeur de  $L_0$  est petite.

### Coût d'une perturbation et résilience

Les indicateurs de coûts associent à un état du système le coût minimal nécessaire pour restaurer la propriété considérée. Lorsqu'une perturbation se produit, le système passe de l'état  $x$  à l'état  $y$ . Le coût minimal associé à  $y$  donne une mesure des dégâts éventuels causés par le saut de  $x$  à  $y$  en terme de capacité à maintenir ou, au moins, à restaurer cette propriété. Les perturbations que nous envisageons sont une augmentation soudaine de la concentration en phosphates dissous. Suivant le principe de précaution, leur coût est le coût maximal engendré par le passage du système de l'état  $x$  à l'état  $y \in D_\alpha$  (4.13). L'inverse de ce coût fournit la mesure de la résilience que nous proposons.

**Coût d'une perturbation.** Dans ce modèle simple, quel que soit  $x$ , l'état du système, et quel que soit l'indicateur de coût,  $\gamma$  ou  $\lambda$ , le coût maximal parmi les perturbations envisagées est causé par le saut d'amplitude maximale  $\alpha$  :

$$C_\gamma(K, \infty)(x, \alpha) = \max_{y \in x + \{0\} \times [0, \alpha]} \gamma_{K, \infty}(y) = \gamma_{K, \infty}(x + (0, \alpha)), \quad (4.25)$$

$$C_\lambda(K, \infty)(x, \alpha) = \max_{y \in x + \{0\} \times [0, \alpha]} \lambda_{K, \infty}(y) = \lambda_{K, \infty}(x + (0, \alpha)). \quad (4.26)$$

**Courbes de niveau de la résilience.** La résilience est définie comme l'inverse du coût des perturbations envisagées et dépend donc de leur intensité,  $\alpha$ , et du choix de l'indicateur de coût,  $\gamma$  ou  $\lambda$ . D'après l'équation (4.25), les valeurs de la résilience sont calculées ainsi :

$$R_\gamma(K, \infty)(x, \alpha) = \frac{1}{\gamma_{K, \infty}(x + (0, \alpha))}, \quad (4.27)$$

$$R_\lambda(K, \infty)(x, \alpha) = \frac{1}{\lambda_{K, \infty}(x + (0, \alpha))}. \quad (4.28)$$

Nous évaluons la résilience pour chacun des indicateurs de coût et pour une valeur de l'intensité maximale des perturbations envisagées. Les courbes de niveau de la résilience sont tracées dans la figure 4.11 pour un lac irréversible et dans la figure 4.12 pour un lac hystérésique.

Les valeurs de la résilience divisent l'espace des états,  $X$ , en trois zones :

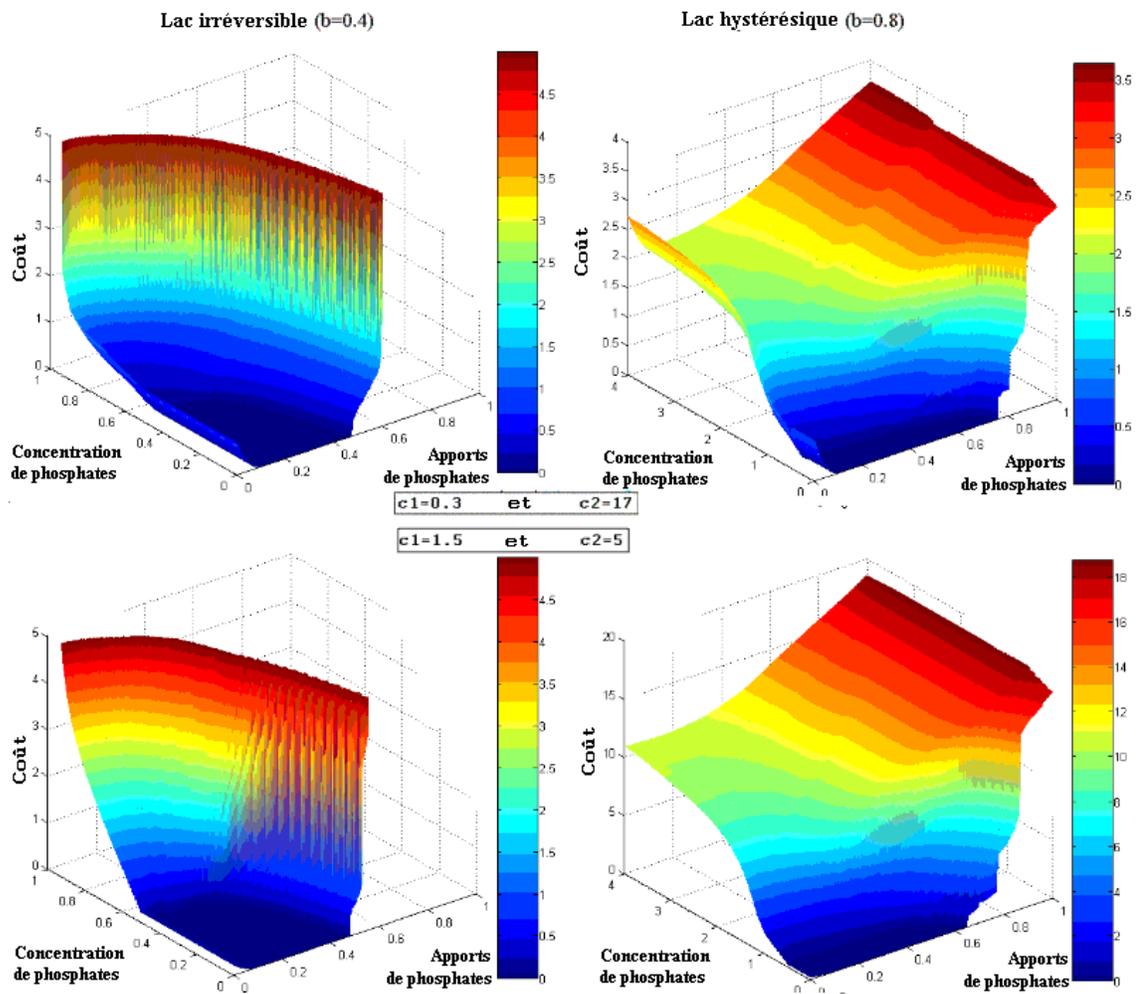


FIG. 4.10 – Graphe de l'indicateur de coût  $\lambda$  pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) (colonne de gauche) et pour un lac hystérétique ( $b = 0.8$ ) (colonne de droite) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les paramètres de la fonction indicateur de coût  $\lambda$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , valent, respectivement, 0.3 et 17 dans la première rangée, et 1.5 et 5 dans la seconde. La valeur de l'indicateur de coût est représentée sur l'axe vertical. En deux points de même coordonnée verticale (couleur identique), la valeur de l'indicateur de coût est la même. Viab( $K$ ) (zone bleu foncé) et l'ensemble des états pour lesquels le temps de crise est nul coïncident. Dans le cas du lac hystérétique (colonne de droite), les valeurs des indicateurs de coût sont finies, alors que les indicateurs de coût prennent la valeur infinie dans le cas du lac irréversible (colonne de gauche).

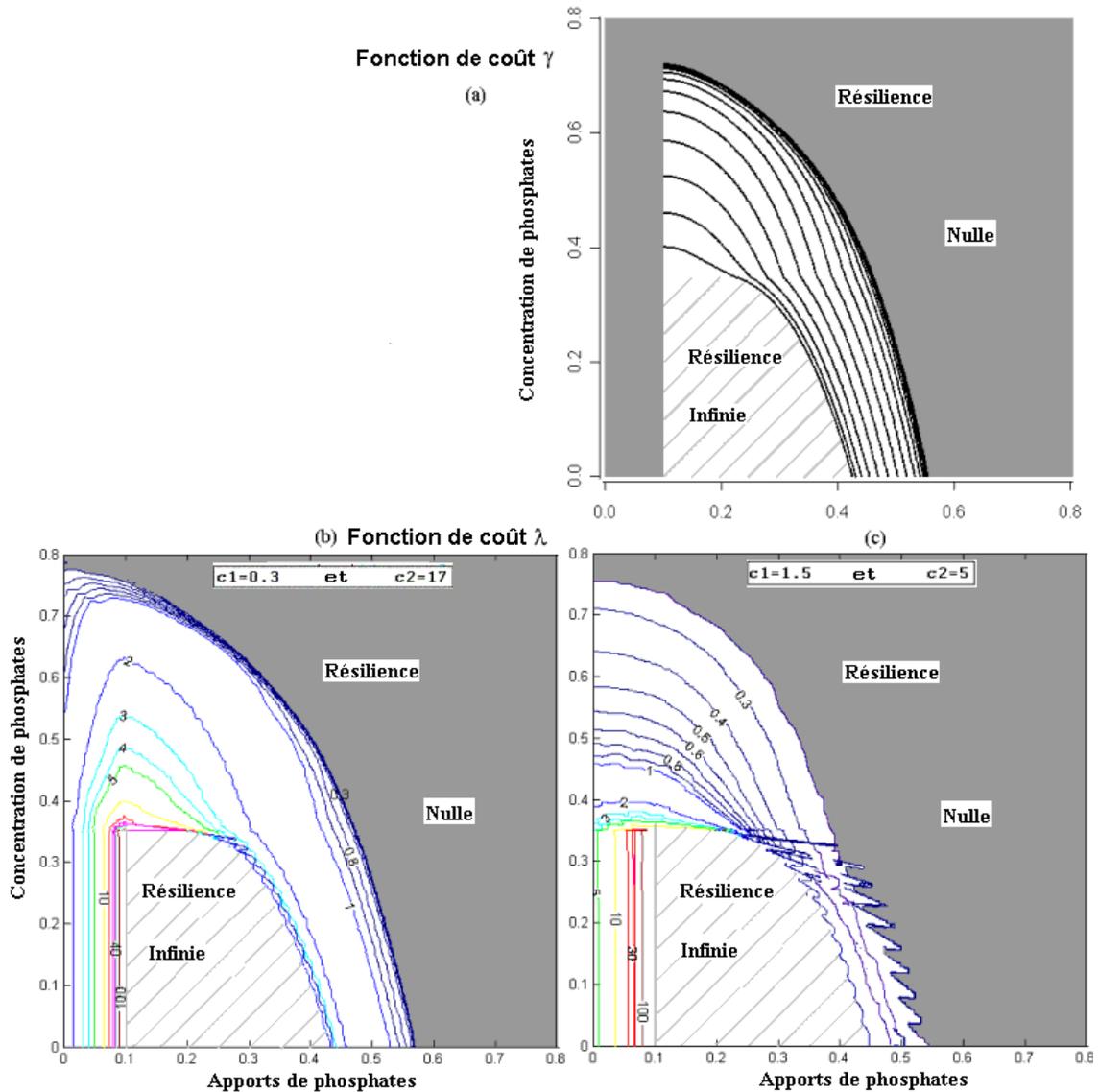


FIG. 4.11 – Lignes de niveau de la résilience pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les indicateurs de coût utilisés pour évaluer la résilience sont  $\gamma$  dans la première ligne et  $\lambda$  dans la seconde. Les perturbations envisagées sont des augmentations brusques de la concentration en phosphates d'intensité maximale  $\alpha = 0.15$ . Les valeurs de résilience de deux états appartenant à la même courbe sont égales. Le sous-ensemble de  $Viab(K)$  pour lequel la résilience est infinie est hachuré en gris clair. L'ensemble de résilience nulle est colorié en gris foncé.

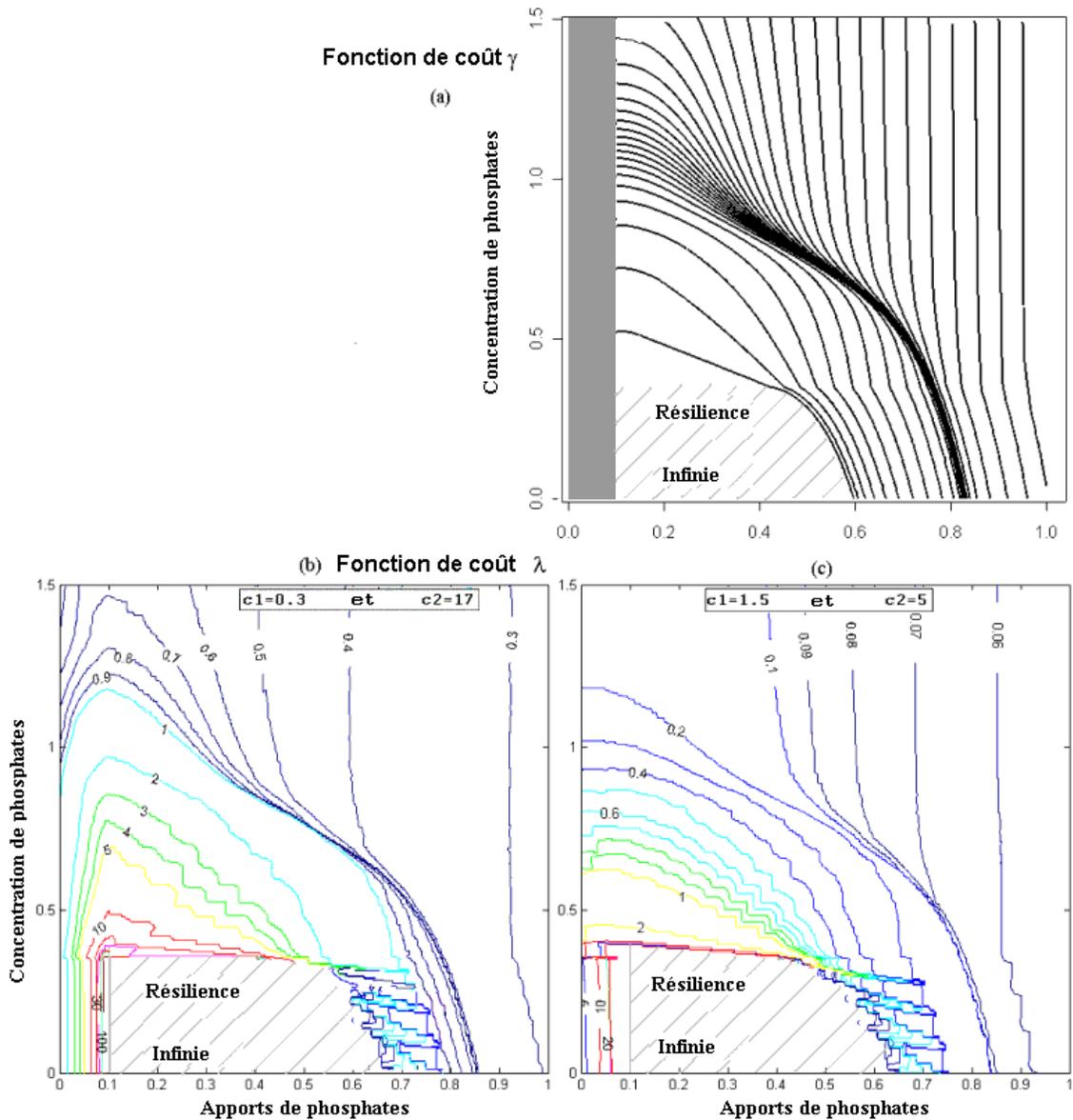


FIG. 4.12 – Lignes de niveau de la résilience pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les indicateurs de coût utilisés pour évaluer la résilience sont  $\gamma$  dans la première ligne et  $\lambda$  dans la seconde. Les perturbations envisagées sont des augmentations brusques de la concentration en phosphates d'intensité maximale  $\alpha = 0.15$ . Les valeurs de résilience de deux états appartenant à la même courbe sont égales. Le sous-ensemble de  $Viab(K)$  pour lequel la résilience est infinie est hachuré en gris clair.

1. les zones rayées en gris clair correspondent à une valeur infinie de la résilience : l'état du système peut rester indéfiniment dans  $\text{Viab}(K)$  même si une des perturbations envisagées se produit,
2. la résilience est finie dans la zone à laquelle appartiennent les courbes de niveau : après une des perturbations envisagées, le lac peut devenir eutrophe, immédiatement ou plus tard. Cependant, l'état oligotrophique peut être restauré en temps fini,
3. la résilience est nulle pour les états appartenant aux zones gris foncé : ces zones sont formées des états à partir desquels une perturbation envisagée peut faire passer le système dans un état tel que la propriété sera certainement perdue et ne pourra être restaurée.

Selon notre définition, les valeurs de la résilience dépendent de :

1. l'état du système : les figures 4.11 et 4.12 montrent les valeurs de la résilience en fonction de l'état du système,
2. les objectifs représentés par l'ensemble  $K$ ,
3. l'intensité des perturbations envisagées : la figure 4.13 représente les valeurs de la résilience au point de coordonnées  $L = 0.2$  et  $P = 0.25$  en fonction de l'intensité maximale des perturbations envisagées. Pour les faibles valeurs de  $\alpha$ , la résilience est infinie, ensuite, lorsque  $\alpha$  croît, la résilience décroît,
4. la manière d'évaluer les coûts, la définition des indicateurs de coût : la comparaison entre les figures 4.11 et 4.12 souligne l'influence du choix de l'indicateur de coût. Deux états peuvent appartenir à la même courbe de niveau de la résilience pour un choix d'indicateur de coût et à des lignes de niveau différentes pour un autre choix. Dans le premier cas, ces états ont la même valeur de résilience, dans le second cas, un état est plus résilient que l'autre,
5. les contrôles admissibles représentés par les ensembles  $(U(x))_{x \in X}$  qui ne varient pas dans les résultats obtenus dans cette sous-section mais dont dépend la forme du noyau de viabilité<sup>14</sup>,
6. et l'horizon temporel.

### 4.3 L'évaluation de la résilience dans un modèle plus complexe d'eutrophisation des lacs

Comme dans la section 4.2, le système étudié est composé d'un lac et des populations qui profitent de ses services ou apportent des excédents de phosphates par l'intermédiaire de leurs activités agricoles. Les agriculteurs ont pour objectif d'assurer la rentabilité de leurs

<sup>14</sup>Voir dans la sous-section 4.2.2 le paragraphe intitulé « Noyaux de viabilité ».

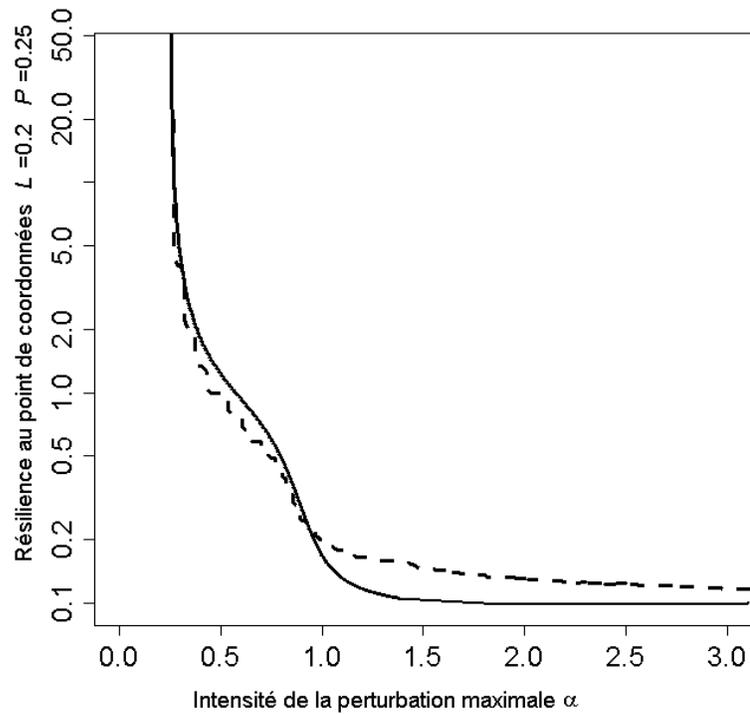


FIG. 4.13 – La résilience de l'état de coordonnées  $L = 0.2$  et  $P = 0.25$  en fonction de l'intensité maximale de la perturbation,  $\alpha$ , pour les deux indicateurs de coût,  $\gamma$  (ligne continue) et  $\lambda$  avec comme valeurs de paramètres  $c_1 = 1.5$  et  $c_2 = 5$  (ligne en pointillés). Le lac est hystérésique ( $b = 0.8$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ).

exploitations ; les gestionnaires du lac veulent le maintenir dans un état oligotrophique. Et, à l'échelle de l'ensemble du système, l'objectif est de maintenir les deux propriétés.

Nous augmentons le réalisme du modèle en ajoutant une variable, la concentration de phosphore à l'état de sédiments dans la vase. Nous conservons les expressions des indicateurs de coût de la section 4.2 et nous évaluons la résilience du système face à un ensemble de perturbations qui agissent sur les deux variables liées au cycle du phosphore dans le lac.

### 4.3.1 La variable supplémentaire : la quantité de phosphore à l'état de sédiments dans la vase

#### La dynamique et les contrôles

Le modèle simple de la section 4.2 ne considère que les dynamiques rapides ; pour augmenter son réalisme, comme Janssen et Carpenter (1999) et Ludwig *et al.* (2003) [73, 114], nous ajoutons la variable  $M$ , quantité de phosphore à l'état de sédiments dans la vase. Une faible proportion ( $k = 0.01$ ) de la quantité de phosphore présent dans la vase se transforme à chaque pas de temps en dépôt souterrain permanent.

Le taux de recyclage des phosphates dépend alors, non seulement de la concentration de phosphates dissous, mais également de la concentration de phosphore à l'état de sédiments dans la vase. Les dynamiques sont décrites ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= -(s + h).P(t) + L(t) + r.M(t) \cdot \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ \frac{dM(t)}{dt} &= -k.M(t) + s.P(t) - r.M(t) \cdot \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

avec  $P$ , la quantité de phosphates (masse ou concentration) dissous dans l'eau,  $L$ , les apports de phosphates annuels provenant des activités humaines (masse ou concentration par unité de temps),  $s$  la proportion de phosphates qui passe à l'état de sédiments à chaque pas de temps et  $h$  la proportion de phosphates évacués à chaque pas de temps. La proportion de phosphates passés à l'état de sédiments ou évacués à chaque pas de temps,  $s + h$ , est égale au paramètre  $b$  du modèle simple.

En ce qui concerne les dynamiques associées aux apports de phosphates, nous supposons, comme dans la section 4.2, que le gestionnaire peut agir sur leurs variations temporelles,  $dL/dt$ , en votant des lois contraignantes, par exemple. Pour rester simple, nous supposons que la dérivée de  $L$  dépend directement du contrôle  $u$  choisi par le gestionnaire :

$$\frac{dL(t)}{dt} = u. \quad (4.30)$$

Comme les modifications de comportements et les changements de technologies agricoles prennent du temps, nous considérons, à nouveau, que les variations temporelles des apports de phosphates dus aux activités agricoles sont bornées :

$$u \in U := [-VL_{max}, VL_{max}]. \quad (4.31)$$

### Les objectifs, envisagés comme des contraintes sur les états

Comme dans la section 4.2, nous supposons qu'un lac oligotrophe devient eutrophe lorsque la quantité de phosphates dissous dans l'eau croît au-dessus d'un seuil fixé  $P_{max}$ . Par conséquent, le lac est dans un état oligotrophique et l'objectif du gestionnaire du lac est atteint lorsque la variable positive  $P$  satisfait :

$$P \in [0, P_{max}]. \quad (4.32)$$

La quantité de phosphore à l'état de sédiments dans la vase n'intervient pas dans la définition de la propriété d'oligotrophie.

L'objectif des agriculteurs est la rentabilité de leurs activités. Nous supposons que leur bénéfice dépend linéairement des apports en phosphates comme dans la section 4.2. Ainsi, leur objectif est atteint lorsque la valeur des apports de phosphates dépendant des activités humaines est supérieure à un seuil donné,  $L_{min}$ . Nous supposons également qu'un seuil maximal d'apports de phosphates,  $L_{max}$ , est fixé par les institutions ou les parties prenantes. Les activités des agriculteurs sont donc rentables et légales lorsque :

$$L \in [L_{min}, L_{max}]. \quad (4.33)$$

Les équations (4.30), (4.31), (4.32) et (4.33) peuvent être écrites de manière synthétique dans le formalisme des inclusions différentielles en considérant la variable vectorielle  $x(t) := (L(t), P(t), M(t))$  appartenant à  $X := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \begin{pmatrix} L'(t) \\ P'(t) \\ M'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ -(s+h).P(t) + L(t) + r.M(t). \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ -k.M(t) + s.P(t) - r.M(t). \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \end{pmatrix}, \quad (4.34) \\ u(t) &\in U(x(t)) = U, \end{aligned}$$

avec comme contraintes

$$x(t) \in K := [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}] \times \mathbb{R}_+. \quad (4.35)$$

### 4.3.2 L'influence de la variable supplémentaire sur les valeurs d'une fonction indicateur de coût en horizon infini

Dans cette sous-section, nous calculons les valeurs approchées de la fonction indicateur de coût  $\gamma$  de la section 4.2 adaptée au modèle complexe et nous soulignons l'influence de la variable supplémentaire, la concentration en phosphore à l'état de sédiments dans la vase.

Nous considérons un lac hystérésique et reprenons les valeurs des paramètres de Janssen et Carpenter (1999) [73] :  $q = 8$ ,  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $s = 0.5$ ,  $h = 0.3$  et  $k = 0.01$ .

#### L'horizon temporel

Nous prenons un horizon temporel infini comme dans la section 4.2 : l'objectif est de conserver la propriété indéfiniment ou de la restaurer en temps fini.

#### La définition de l'indicateur de coût

Nous rappelons que ces indicateurs de coût sont utilisés pour évaluer la résilience de la propriété définie par l'ensemble  $K$  qui, dans cette application, est d'assurer la rentabilité des activités des agriculteurs et garder le lac dans un état oligotrophique. Par conséquent, ces fonctions doivent satisfaire deux conditions sachant que nous considérons un horizon temporel infini : la première, le coût d'une évolution le long de laquelle la propriété est maintenue pour tout  $t \geq 0$  est nul ; la seconde, le coût d'une évolution telle que la propriété n'est pas restaurée est infini. De plus, l'évolution issue de  $x$  de coût minimal est la meilleure évolution à suivre étant donné l'objectif de maintenir la propriété indéfiniment ou, au moins, de la restaurer en temps fini.

Nous adaptons au modèle complexe le premier indicateur de coût défini dans la section 4.2,  $\gamma$  : les agriculteurs refusent la moindre perte et seul importe le temps mis pour restaurer la propriété d'oligotrophie du lac ; la valeur du coût est infinie si l'évolution est telle que  $L(t)$  devient strictement inférieur à  $L_{min}$  et est mesurée par le temps passé à l'état eutrophique sinon. La fonction  $\gamma$  qui associe à  $x$  le coût minimal sur toutes les évolutions issues de  $x$  et satisfaisant (4.34), est définie par :

$$\gamma_{K,T=\infty}(x) := \min_{x(\cdot)} \int_0^{+\infty} \chi(x(\tau)) d\tau \quad (4.36)$$

avec  $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\begin{aligned}\chi(x) &:= +\infty && \text{si } x \in X \setminus H, \\ &:= 1 && \text{si } x \in H \setminus K, \\ &:= 0 && \text{si } x \in K\end{aligned}\tag{4.37}$$

avec  $H = \{x = (L, P, M) \in X \mid L \geq L_{min}\}$  et l'ensemble  $K$  défini par l'équation (4.35).

### Les valeurs de l'indicateur de coût

Nous avons vu dans la sous-section 4.2.2, que des valeurs approchées de la fonction  $\gamma$ , dans le cas du modèle simple, peuvent être déterminées par intégration numérique le long des évolutions optimales. Nous utilisons, dans cette section, la caractérisation de l'épigraphe de la fonction valeur en tant que noyau de viabilité d'un système auxiliaire pour calculer des valeurs approchées de l'indicateur de coût  $\gamma$  adapté au modèle complexe.

D'après les théorèmes de la section 2.1, l'épigraphe de la fonction indicateur de coût  $\gamma$  est le noyau de viabilité de l'ensemble  $\text{Dom}(U) \times \mathbb{R}_+$  pour le système auxiliaire  $(L, P, M, C)$  dont l'évolution est gouvernée par les inclusions différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} L'(t) = u(t) \\ P'(t) = -(s+h).P(t) + L(t) + r.M(t) \cdot \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ M'(t) = -k.M(t) + s.P(t) - r.M(t) \cdot \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \\ C'(t) = \omega(t) \\ u(t) \in U(L(t), P(t), M(t)) := U \\ \omega(t) \in [-1, -\chi_{X \setminus K}(L(t), P(t), M(t))] \end{array} \right. \tag{4.38}$$

Nous avons calculé une approximation de ce noyau en utilisant notre programme de l'algorithme de viabilité décrit dans la section 3.2.

Les graphes de la figure 4.14 représentent les valeurs de l'indicateur de coût dans le plan<sup>15</sup>  $(L, P)$  pour différentes valeurs de  $M$ , la concentration de phosphore à l'état de sédiments dans la vase.

L'allure de la fonction indicateur de coût  $\gamma$  est semblable pour les différentes valeurs de  $M$  aux graphes obtenus pour le modèle simple (Fig. 4.8). Néanmoins, les valeurs dépendent fortement de la variable supplémentaire  $M$  comme le soulignent les graphes de la figure 4.15

<sup>15</sup>Mêmes axes que la figure 4.8 de la section 4.2 qui représente les valeurs de l'indicateur de coût  $\gamma$  dans le cas du modèle d'eutrophisation simple.

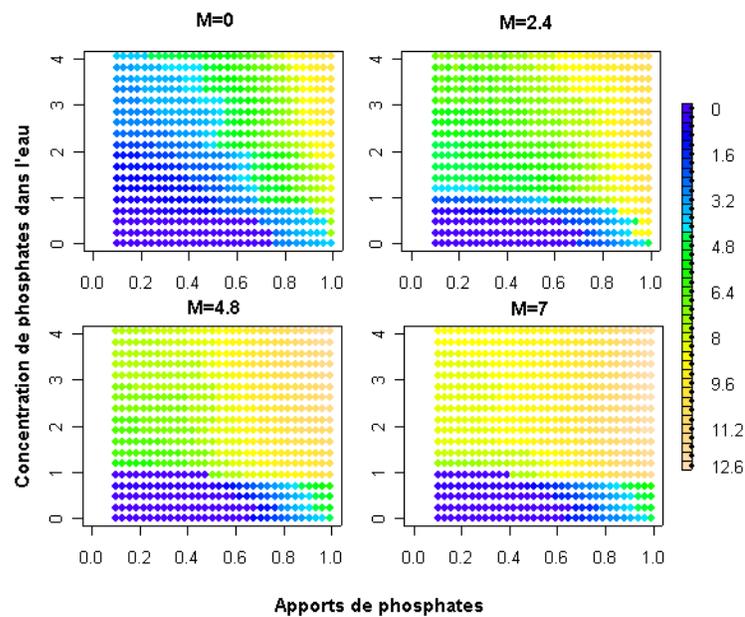


FIG. 4.14 – Les valeurs approchées de l’indicateur de coût obtenues par le calcul du noyau de viabilité du système (4.38). Les quatre graphes représentent quatre coupes réalisées pour quatre valeurs de la concentration en phosphore à l’état de sédiments dans la vase :  $M = 0$ ,  $M = 2.4$ ,  $M = 4.8$  et  $M = 7$  ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ).

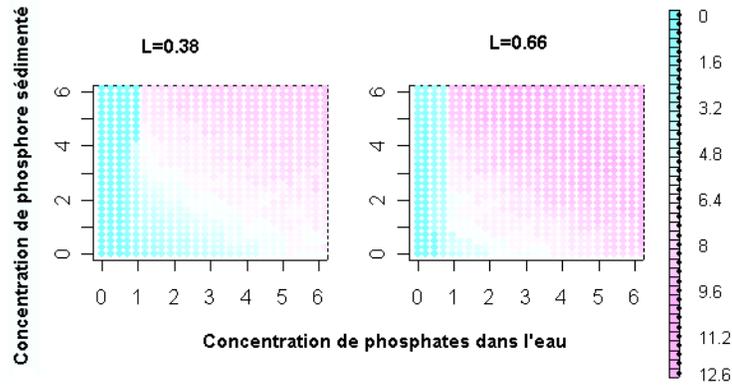


FIG. 4.15 – Les valeurs approchées de l’indicateur de coût obtenues par le calcul du noyau de viabilité du système (4.38). Les deux graphes représentent deux coupes réalisées pour deux valeurs des apports de phosphates :  $L = 0.38$  et  $L = 0.66$  ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $V_{L_{max}} = 0.1$ ).

qui représentent les valeurs de l’indicateur de coût  $\gamma$  dans le plan  $(P, M)$  pour différentes valeurs des apports en phosphates,  $L$ . Nous constatons que la valeur de l’indicateur de coût peut varier du simple au triple en fonction de  $M$  à  $L$  et  $P$  fixés.

### 4.3.3 L’influence de la variable supplémentaire sur les valeurs de la résilience

Les indicateurs de coûts associent à un état du système le coût minimal nécessaire pour restaurer la propriété considérée. Lorsqu’une perturbation se produit, le système passe de l’état  $x$  à l’état  $y$ . Le coût minimal associé à  $y$  donne une mesure des dégâts éventuels causés par le saut de  $x$  à  $y$  en terme de capacité à maintenir ou, au moins, à restaurer cette propriété. L’inverse de ce coût fournit la mesure de la résilience que nous proposons.

#### La définition des perturbations envisagées

Dans ce modèle plus complexe, nous considérons des perturbations  $\hat{D}_{\alpha_1, \alpha_2}$  correspondant à de brusques augmentations de la concentration de phosphates dans l’eau du lac et de phosphore à l’état de sédiments dans la vase.  $\alpha_1$  représente l’intensité maximale de l’augmentation de la concentration de phosphates dans l’eau et  $\alpha_2$  l’intensité maximale de l’augmentation de la concentration de phosphore à l’état de sédiments dans la vase. Une telle perturbation ne modifie pas les apports externes  $L$ . Si une perturbation se produit lorsque l’état du système

est  $x$ , le système va passer à un état  $y$  appartenant à l'ensemble  $\hat{D}_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$  défini par :

$$\hat{D}_{\alpha_1, \alpha_2}(x) := \{y \in X | y \in x + \{0\} \times [0, \alpha_1] \times [0, \alpha_2]\}. \quad (4.39)$$

Dans les calculs qui suivent, les perturbations envisagées sont paramétrées par  $\beta$  et définies à partir des  $\hat{D}_{\alpha_1, \alpha_2}$  :

$$\hat{D}_\beta = \cup_{\alpha_1 + \alpha_2 = \beta} \hat{D}_{\alpha_1, \alpha_2}. \quad (4.40)$$

### Le coût d'une perturbation

Le coût d'une perturbation est le coût maximal parmi les sauts envisagés. Contrairement au cas simple (sous-section 4.2.2), nous ne connaissons pas *a priori* le saut correspondant au coût maximal, dont l'expression, lorsque l'indicateur de coût utilisé est  $\gamma$ , est :

$$C_\gamma(K, \infty)(x, \beta) = \max_{y \in \hat{D}_\beta(x)} \gamma_{K, \infty}(y). \quad (4.41)$$

### Les valeurs de la résilience

La résilience est définie comme l'inverse du coût des perturbations envisagées. D'après l'équation (4.41), les valeurs de la résilience sont calculées ainsi :

$$R_\gamma(K, \infty)(x, \beta) = \frac{1}{C_\gamma(K, \infty)(x, \beta)} \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{\max_{y \in \hat{D}_\beta} \gamma_{K, \infty}(y)}. \quad (4.43)$$

Les graphes de la figure 4.16 représentent les valeurs de la résilience dans le plan  $(P, M)$  pour une valeur de  $L$  fixée.

Contrairement aux résultats de la sous-section 4.2.2, parmi les sauts envisagés, celui dont le coût est maximal, autrement dit celui dont le coût est pris en compte dans le calcul de la résilience, dépend de l'état du système. La figure 4.17 représente dans le plan  $(P, M)$  à  $L$  fixé le saut de coût maximal en fonction de l'état du système.

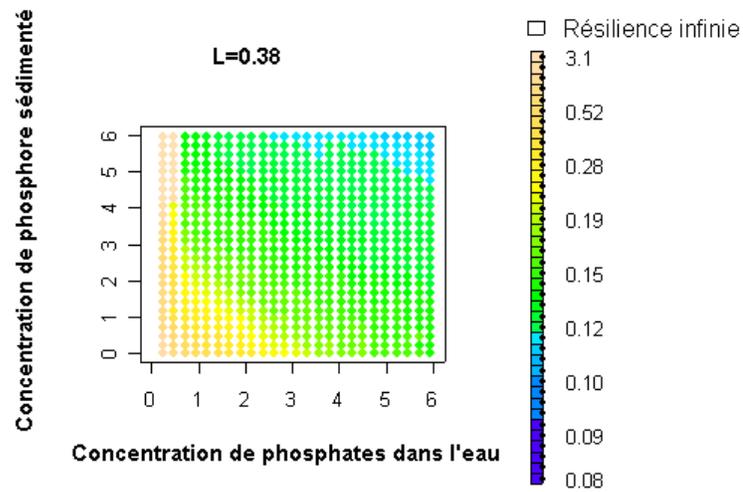


FIG. 4.16 – Les valeurs de la résilience dans le plan  $(P, M)$  pour  $L = 0.38$  fixé et  $\beta = 0.48$  ( $L_{min} = 0.1, L_{max} = 1, P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ).

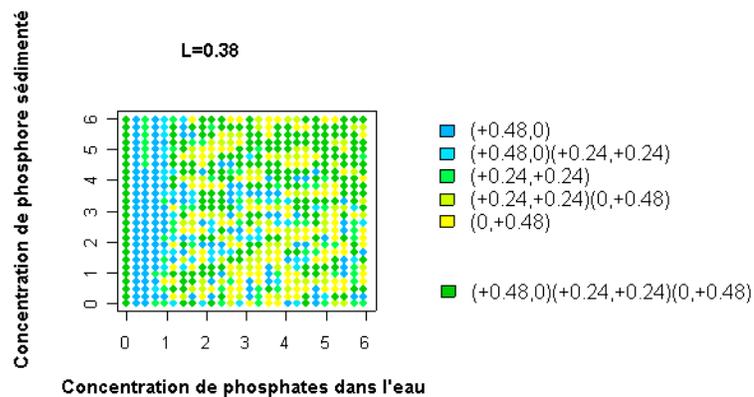


FIG. 4.17 – L'ensemble des perturbations causant le coût maximal en fonction des valeurs de  $P$  et de  $M$ , la valeur de  $L$  étant fixée,  $L = 0.38$ . À chaque couleur correspond l'ensemble des perturbations dont le coût approché est maximal ( $L_{min} = 0.1, L_{max} = 1, P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ).

### Conclusions

L'eutrophisation désigne l'enrichissement en nutriments d'un milieu aquatique, qui provoque la prolifération d'algues toxiques et l'asphyxie des poissons. Dans le cas des lacs, la cause majeure est la pollution diffuse par les phosphates utilisés dans les engrais et pour certaines productions industrielles. Néanmoins, la réduction des apports de phosphates ne suffit pas nécessairement à inverser le phénomène.

Des modèles dynamiques ont été utilisés pour décrire les mécanismes responsables de l'eutrophisation (en particulier le cycle du phosphore dans le lac), prédire les seuils de changement brusque d'un état d'eau claire (oligotrophe) à un état d'eau trouble (eutrophe) ou tester des scénarios de gestion.

Un modèle simplifié de Carpenter *et al.* (1999) décrit les dynamiques essentielles responsables de l'eutrophisation des lacs en prenant explicitement en compte l'effet des actions humaines par l'intermédiaire de la quantité de phosphates apportés [118]. Prenant comme système un lac, les agriculteurs qui le polluent et les populations qui profitent de ses services, nous supposons que le gestionnaire de ce système peut influencer, dans une certaine mesure, par décrets ou incitations économiques, les variations des quantités de phosphates utilisées par les agriculteurs d'une année sur l'autre.

Dans ce système contrôlé à deux variables, les apports en phosphates et la concentration en phosphates dissous, la propriété étudiée comporte deux parties : un lac oligotrophe et des activités agricoles rentables. L'évaluation de la résilience suivant la définition que nous avons proposée au chapitre 2 permet, tout d'abord, de distinguer les états où la propriété étudiée est perdue en temps fini quelles que soient les actions entreprises par le gestionnaire, des états à partir desquels elle peut être maintenue indéfiniment. Ensuite, considérant un ensemble de perturbations envisagées, les valeurs de résilience permettent de distinguer trois ensembles d'états :

- les états pour lesquels la résilience est nulle sont les états à partir desquels au moins une des perturbations envisagées fait passer le système dans un état tel que la propriété va être irrémédiablement perdue,
- les états pour lesquels la résilience est finie strictement positive sont les états à partir desquels certaines perturbations envisagées font passer le système dans un état tel que la propriété va être perdue. Cependant, quelle que soit la perturbation, la propriété peut être restaurée en temps fini. L'inverse de la résilience est une évaluation du pire dommage que ces perturbations peuvent causer en terme de coût de restauration de la propriété considérée,
- les états pour lesquels la résilience est infinie sont les états tels que suite à toute pertur-

bation parmi les perturbations envisagées, la propriété peut être maintenue indéfiniment.

L'évaluation de la résilience dans un modèle plus complexe comportant une variable supplémentaire, la quantité de phosphore à l'état de sédiments dans la vase, montre ensuite, d'une part, l'influence de cette variable sur les valeurs de la résilience et d'autre part, l'efficacité de notre implémentation de l'algorithme de viabilité.

Notre définition de la résilience prend en compte tous les paramètres utilisés dans la définition conceptuelle de Holling. En outre, associée à l'algorithme de viabilité, elle est opérationnelle.

# Chapitre 5

## Conclusion

Le développement durable dont l'objectif est de répondre « aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs »<sup>1</sup>, implique des actions aux niveaux économique, social et politique. Les contributions scientifiques peuvent être fondamentales pour informer, poser les problèmes et évaluer les implications de différents scénarios. En particulier, la création d'indicateurs liés au développement durable est à l'intersection de deux problématiques scientifiques, construire des outils d'aide à la gestion et formaliser les concepts liés à la durabilité. Nous avons consacré notre thèse à l'étude de l'un de ces concepts, la résilience, dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux.

En confrontant les définitions conceptuelles et opérationnelles existantes, nous avons identifié certaines limites et précisé la spécificité de notre travail : proposer une définition de la résilience générale, dans le cadre de modèles de systèmes écologiques et sociaux qui tiennent compte de nos ignorances sur leur fonctionnement, et compatible avec la définition conceptuelle de Holling.

Nous avons présenté le cadre théorique de notre étude, la théorie de la viabilité, en justifiant ce choix. Nous avons ensuite montré comment une définition de la résilience compatible avec l'interprétation de Holling peut s'exprimer comme inverse d'un indicateur de coût associé aux perturbations. Nous avons souligné le fait que ces indicateurs de coûts peuvent être caractérisés à l'aide de noyaux de viabilité ou de noyaux discriminants, concepts fondamentaux de la théorie de la viabilité.

L'approximation numérique de ces noyaux est essentielle pour évaluer la résilience suivant la définition que nous avons proposée. Nous avons décrit les améliorations apportées à l'algorithme de viabilité ainsi que les variantes aux développements desquelles nous avons collaboré.

Enfin, nous avons calculé les valeurs de résilience dans des modèles d'eutrophisation de lacs

<sup>1</sup>Madame Gro Harlem Brundtland, ancien Premier Ministre de Norvège (1987).

afin d'illustrer nos propos.

Ce travail peut suggérer plusieurs recherches futures. Nous distinguons trois directions : augmenter le réalisme du modèle d'eutrophisation des lacs, approfondir l'étude de la définition de la résilience proposée, étendre la méthode suivie à d'autres concepts essentiels de l'écologie.

## 5.1 Bilan de la recherche

Une grande part des théories de l'écologie se focalisent sur les comportements asymptotiques [119, Hastings *et al.* (1993)][120, Ludwig *et al.* (1993)] et le point de vue statique a inspiré de nombreuses définitions opérationnelles de la résilience : Neubert et Caswell (1997) proposent deux indices pour mesurer l'étendue et la durée des régimes transitoires causés par une petite perturbation subie par un système à l'équilibre [61]; dans le cas des modèles individus-centrés ou des automates cellulaires, la résilience est évaluée par simulation comme inverse du temps nécessaire pour retrouver un certain pourcentage des biomasses initiales après différents types de perturbations [24, Matsinos et Troumbis (2002)][64, Ortiz et Wolff (2002)].

Cependant, les dynamiques non linéaires sont très utilisées dans les modèles d'écosystèmes et les non linéarités peuvent provoquer des comportements transitoires de forte intensité et de longue durée. La résilience concerne davantage les événements loin de l'équilibre [55, Holling (1973)]. Dans cette perspective, van Coller (1997) et Ludwig *et al.* (1997) mettent l'accent sur les frontières des bassins d'attraction : ils évaluent la résilience en terme de distance aux points de bifurcation [72, van Coller (1997)] et de taille de bassins d'attraction [70, Ludwig *et al.* (1997)]. Leur approche convient aux modèles dynamiques décrits par des équations différentielles. Dans notre travail, nous sommes allée plus loin en prenant en compte nos ignorances sur les dynamiques du système et l'existence de contrôles permettant d'influencer ces dynamiques.

Nous avons proposé une formulation mathématique de la résilience dans le formalisme de la théorie de la viabilité. L'objectif principal de cette nouvelle approche est de fournir une définition de la résilience qui prenne en compte la diversité des dynamiques du système et qui soit compatible avec l'interprétation de Holling.

Dans un premier temps, nous avons décrit cette diversité des dynamiques du système en autorisant plusieurs vitesses dépendant du contrôle choisi à chaque instant. Une propriété du système étant spécifiée, nous avons interprété l'ensemble des états qui possèdent cette propriété comme l'ensemble de contraintes dans lequel la trajectoire d'une évolution doit être contenue pour que la propriété soit maintenue durant la période temporelle choisie. Contrairement au point de vue statique, nous avons mis l'accent sur la notion d'évolution pour définir

la résilience du système concernant cette propriété : pour chaque état du système, nous avons considéré l'ensemble des évolutions issues de cet état et associées à des fonctions de contrôle admissibles. À chaque évolution, nous avons associé un coût qui représente la distance à une évolution idéale au cours de laquelle la propriété serait conservée. Ce coût est nul si la propriété est conservée le long de la trajectoire, positif si cette propriété est perdue puis retrouvée et infini si la propriété ne peut être restaurée avant l'horizon temporel fixé. Nous avons évalué les éventuels dommages causés par une perturbation comme le coût minimal sur toutes les évolutions issues de l'état du système après cette perturbation. Lorsque les perturbations envisagées sont définies en chaque état du système par un ensemble d'états atteignables, nous avons retenu le pire des cas et la valeur de la résilience du système en un état est l'inverse du coût maximal sur l'ensemble des perturbations envisagées à partir de cet état.

Dans un second temps, nous avons pris en compte nos ignorances sur les dynamiques du système en associant à un état du système et à des contrôles un ensemble de valeurs possibles des vitesses. Nous avons, ensuite, repris la même démarche pour définir la résilience dans ce cas plus général.

Nous avons insisté sur le fait que les théorèmes développés dans le cadre de la théorie de la viabilité permettent de caractériser les épigraphes des fonctions indicateurs de coût, utilisées pour définir la résilience, comme noyaux de viabilité ou noyaux discriminants.

Comme la résilience se caractérise à l'aide du concept de noyau de viabilité, elle bénéficie de ses propriétés mathématiques et se calcule à l'aide de l'algorithme correspondant. Nous avons décrit cet algorithme, puis proposé plusieurs pistes d'amélioration. Pour gagner de la mémoire ou du temps afin de traiter des problèmes de plus grande dimension, nous avons exploré trois voies : nous avons, d'une part, modifié la structure implémentée, d'autre part, nous avons collaboré à l'élaboration d'un algorithme utilisant des méthodes de discrimination pour définir un ensemble plutôt qu'un tableau de point, enfin, nous nous sommes inspirée des méthodes de tir pour approcher le noyau par l'ensemble des points viables au moins jusqu'à un temps seuil. En ce qui concerne la diminution du phénomène de diffusion numérique, nous avons collaboré à des travaux qui ont permis d'obtenir des gains en termes de précision de l'approximation par l'utilisation d'un schéma anti-diffusif.

Dans un modèle classique simplifié du phénomène d'eutrophisation des lacs, nous avons calculé des valeurs de la résilience afin de montrer, qu'associée à l'algorithme de viabilité, notre définition est opérationnelle. Cette étude nous a permis, en outre, de souligner le fait que notre définition prend en compte tous les paramètres utilisés dans la définition conceptuelle de la résilience de Holling : l'état du système, les objectifs (la propriété qui doit être conservée), les types de perturbations envisagés, le coût associé à la restauration de cette propriété, les contrôles disponibles et l'horizon temporel considéré [57, Carpenter *et al.* (2001)]. Le modèle est trop simplifié pour représenter précisément le processus complexe d'eutrophisation. L'étude de la résilience dans un modèle plus complexe comportant une variable

supplémentaire a ensuite montré, d'une part, l'efficacité de notre implémentation de l'algorithme de viabilité et d'autre part, l'influence de cette variable sur les valeurs de la résilience.

## 5.2 Perspectives

### 5.2.1 Augmenter le réalisme du modèle d'eutrophisation des lacs

Le modèle que nous avons étudié au chapitre 4 est basé sur plusieurs hypothèses simplificatrices. Certaines d'entre elles ont été posées dans le but de présenter un modèle simple pour mettre en valeur la définition de la résilience et peuvent être affaiblies facilement lorsque la théorie de la viabilité permet des contraintes moins fortes. Nous avons supposé que la propriété d'oligotrophie d'un lac dépend uniquement de la concentration de phosphates dissous et que les bénéfices des agriculteurs dépendent linéairement des apports de phosphates. Ainsi, l'ensemble des contraintes est un rectangle. Un modèle plus réaliste mériterait d'être construit en tenant compte des dynamiques du phosphore dans la vase et le sol, et de variables socio-économiques dont les bénéfices des agriculteurs pourraient dépendre. Dans ce modèle plus complexe, la forme de l'ensemble des contraintes, moins régulière probablement, serait décrite par des conditions imposées non seulement sur les apports de phosphates et leur concentration dans l'eau, mais également sur les autres variables. Néanmoins, la même approche pourrait être appliquée car, dans la théorie de la viabilité, la seule hypothèse imposée sur cet ensemble est d'être fermé.

Les fonctions indicateurs de coût que nous avons utilisées sont également excessivement simples. Cependant, si seuls les indicateurs de coût très simples peuvent être étudiés analytiquement, la caractérisation de leur épigraphe en tant que noyau de viabilité permet de les évaluer dans les cas plus complexes. En effet, les hypothèses imposées sur ces fonctions sont très faibles<sup>2</sup>.

Enfin, nous avons décrit les dynamiques du phosphore en utilisant des équations issues de travaux existants avec des valeurs de paramètres fixées. Or, il est très difficile d'obtenir des estimations précises de ces paramètres [114, Ludwig *et al.* (2003)]. Par conséquent, les évolutions sur lesquelles nous avons basé notre définition de la résilience risquent d'être biaisées. Au lieu de donner des valeurs fixes à ces paramètres, il serait plus réaliste de supposer que leur valeur est comprise entre deux bornes. Ainsi, la réponse du système à un contrôle ne serait plus déterministe mais multivoque ce qui pourrait être interprété comme un

<sup>2</sup>La continuité n'est pas nécessaire, seule la semi-continuité est prescrite, voir les théorèmes de la section 2.1.

jeu dynamique et la résilience évaluée par l'intermédiaire de noyaux discriminants<sup>3</sup>.

## 5.2.2 Approfondir l'étude de la définition de la résilience proposée

Dans notre formulation mathématique de la définition de la résilience, l'ensemble des contraintes ne dépend pas du temps. Or, la propriété dont nous souhaitons évaluer la résilience pourrait dépendre du temps comme par exemple, obtenir des bénéfices croissants. L'évolution devrait alors appartenir à un ensemble de contraintes dépendant du temps pour que la propriété soit conservée. Dans des cas simples comme les bénéfices croissants, il est facile de modifier la dynamique pour revenir au cas d'un ensemble de contraintes constant. Cependant, dans les cas plus complexes, lorsque la dépendance temporelle ne peut être supprimée, l'évaluation de la résilience nécessiterait l'utilisation d'outils d'analyse d'équations mutationnelles [121, Aubin (1999)].

D'autre part, de nombreuses études empiriques et théoriques en écologie portent sur la façon dont la résilience est affectée par les caractéristiques des écosystèmes comme les flux d'énergie [60, DeAngelis (1980)], les apports ou le cycle des nutriments [122, Steinman *et al.* (1991)], la longueur de la chaîne trophique [113, Cottingham et Carpenter (1994)], et la connectivité du réseau trophique [123, Armstrong (1982)]. Il serait intéressant d'étudier comment ces propriétés modifient les valeurs de la résilience calculées en utilisant notre définition.

Nos résultats concernent la définition mathématique de la résilience et son calcul à partir de modèles de systèmes écologiques et sociaux. La comparaison entre les évolutions calculées et des historiques de données empiriques pourrait constituer une autre manière de valider un modèle. Ainsi, les concepts mathématiques et les outils issus de la théorie de la viabilité permettraient de construire de meilleurs modèles.

En outre, nos résultats pourraient avoir des implications sur les études empiriques. Notre approche permet d'obtenir les contrôles qui doivent être utilisés pour suivre l'évolution de coût minimal. Il serait intéressant de tester ces contrôles sur des écosystèmes réels.

Notre définition de la résilience comme celle des bassins d'attraction [57, Carpenter *et al.* (2001)] ne correspond à aucune mesure empirique. L'étude de la résilience dans des modèles pourrait avoir comme objectif de mettre en évidence des variables évoluant de façon monotone avec la résilience et pouvant être mesurées en pratique.

Les études de terrain étant difficiles et coûteuses, une autre utilisation intéressante du calcul de la résilience dans des modèles serait de comparer différents indices pour différents types

<sup>3</sup>selon la définition proposée dans la deuxième partie de la section 2.1.

de perturbations et de suggérer les études de terrain critiques.

### **5.2.3 Étendre l'approche suivie à d'autres concepts essentiels de l'écologie**

De façon très schématique, durant ce travail de thèse, nous avons considéré qu'un système écologique et social est composé d'entités dont les dynamiques autonomes sont influencées par leurs interactions. Dans une perspective de contrôle, connaissant les effets des actions envisagées, le but de l'étude est de déterminer quelles sont les meilleures stratégies en fonction d'un critère à optimiser ou quelles sont celles qui satisfont certaines conditions. Dans une perspective de compréhension du fonctionnement du système, l'objectif peut être de déterminer les propriétés globales induites par une structure d'interactions.

Si un système écologique et social peut être vu comme gouverné par des dynamiques locales et soumis à des contraintes ou à des mesures globales, la théorie de la viabilité, qui développe des outils pour étudier la compatibilité entre dynamiques locales et contraintes globales, est adaptée à son analyse. Nous pensons, par conséquent, que l'approche que nous avons suivie peut être fructueuse pour répondre à d'autres problèmes posés par la gestion des systèmes écologiques et sociaux. Nous distinguons trois pistes qui pourraient mériter d'être explorées : proposer des définitions formelles d'autres concepts majeurs de l'écologie comme la maturité ; étant données des dynamiques locales et des structures d'interactions, évaluer ces propriétés globales ; et, plus éloigné du travail que nous avons réalisé mais empruntant le même point de vue, proposer des explications de certaines formes d'interactions locales par la nécessité de satisfaire des contraintes globales et le hasard d'une réalisation parmi l'ensemble des structures satisfaisant ces contraintes.

# Bibliographie

- [1] H. BLUTSEIN, « A forgotten pioneer of sustainability », *Journal of Cleaner Production*, vol. 11, 339–341, 2003.
- [2] R. CARSON, *Silent Spring*, Houghton Mifflin, Boston, 1962.
- [3] M. BURNET, « Biology and the Appreciation of Life », in A. B. Corporation (dir.), *Boyer Lecture*, 1966.
- [4] D. H. MEADOWS, D. L. MEADOWS, J. RANDERS & W. W. BEHRENS III, *The Limits to Growth : a Report for the Club of Rome's Project on the Predicament of Mankind*, Universe Books, New York, 1972.
- [5] R. CLARKE & L. TIMBERLAKE, *Stockholm Plus Ten : Promises, Promises ? The Decade since the 1972 UN Environment Conference*, International Institute for Environment and Development (IIED), London, 1982.
- [6] G. H. BRUNDTLAND, *Our Common Future. [The Brundtland Report]*, UN World Commission on Environment and Development, Oxford : Oxford University Press, 1987.
- [7] G. SEYFANG, « Environmental mega-conferences—from Stockholm to Johannesburg and beyond », *Global Environmental Change*, vol. 13, 223–228, 2003.
- [8] R. GIBSON, « Should environmentalists pursue sustainable development ? », *Probe Post*, pages 22–25, 1991.
- [9] D. MEBRATU, « Sustainability and sustainable development : historical and conceptual review », *Environmental Impact Assessment Review*, vol. 18, 493–520, 1998.
- [10] F. HIRSCH, *Social Limits to Growth*, Harvard University Press, Cambridge, 1976.
- [11] J. ROBINSON & A. MENDIS, *Industrial Ecology : Implications for Canada in the 21st Century*, A. DALE, R. COTE & J. TANSEY (dir.), chap. Opportunity or illusion ? : on the vexed promise of industrial ecology, UBC Press, Vancouver, 2003.
- [12] J. ROBINSON, « Squaring the circle ? Some thoughts on the idea of sustainable development », *Ecological Economics* 48 (2004) 369– 384, vol. 48, 369–384, 2004.
- [13] A. P. CASTRO, « Sustainable agriculture or sustained error ? The case of cotton in Kirinyaga, Kenya », *World Development*, vol. 26, n° 9, 1719–1731, 1998.

- [14] J.-L. MALO, *Encyclopédie du Management*, chap. “Tableau de bord”, pages 923–939, Vuibert, 1992.
- [15] D. BESSIRE & THE CRI(COLLECTIVE FOR RESEARCH ON INTANGIBLES), « French tableau de bord versus american balanced scorecard : misery and glory of metaphors », in M. F. S. of Business & Management (dir.), *The Sixth Interdisciplinary Perspectives on Accounting Conference*, UMIST/University of Manchester, 9-12th July 2000.
- [16] P. NIVEN, *Balanced Scoreboard : Step-by-Step for Government and Nonprofit Agencies*, J. Wiley, Hoboken, NJ, 2003.
- [17] M. LEROY, *Le Tableau de Bord au Service de l'Entreprise*, “Schémacolor”, Les Editions d'Organisation, 3<sup>e</sup> édition, 1998.
- [18] J. SULZER, *Comment construire les tableaux de bord : les objectifs et les méthodes d'élaboration*, Dunod, 2<sup>nd</sup>e édition, 1985.
- [19] J. WEBER, *Gestion des ressources renouvelables : fondements théoriques d'un programme de recherche*, 21 p., Cirad Green, Paris, 1995.
- [20] S. CARPENTER, J. LUDWIG & W. BROCK, « Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change », *Ecological Applications*, vol. 9, 751–771, 1999.
- [21] D. W. HILBERT, N. ROULET & T. MOORE, « Modelling and analysis of peatlands as dynamical systems », vol. 88, n° 2, 230–242, 2000.
- [22] S. ALONZO, « State-dependent habitat selection games between predators and prey : the importance of behavioral interactions and expected lifetime reproductive success », *Evolutionary Ecology Research*, vol. 4, 759–778, 2002.
- [23] F. MISSFELDT, « Game-theoretic modelling of transboundary pollution », *Journal of Economic Surveys*, vol. 13, n° 3, 287–321, 1999.
- [24] Y. G. MATSINOS & A. Y. TROUMBIS, « Modeling competition, dispersal and effects of disturbance in the dynamics of a grassland community using a cellular automaton », *Ecological Modelling*, vol. 149, 71–83, 2002.
- [25] W. SU, M. BROWN & B. MACKEY, « Agent-based dynamic modelling of forest ecosystems at the Warra LTER Site », *Tasforests*, vol. 13, n° 1, 129–140, 2001.
- [26] C. CASTELLANO, M. MARSILI & A. VESPIGNANI, « Nonequilibrium phase transition in a model for social influence », *Physical Review Letters*, vol. 85, n° 16, 3536–3539, 2000.
- [27] R. AXELROD, « The dissemination of culture : a model with local convergence and global polarization », *Journal of Conflict Resolution*, vol. 41, 203–226, 1997.
- [28] S. MARTIN, G. DEFFUANT, J.-P. NADAL & G. WEISBUCH, *Comparing the binary opinion vector version of the BC model with different approximating aggregated dynamics*, M2M Workshop, 2004.

- [29] M. EDWARDS, S. HUET, F. GOREAUD & G. DEFFUANT, « Comparing an individual-based model of behaviour diffusion with its mean field aggregate approximation », *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, vol. 6, n° 4, 2003.
- [30] H. I. FREEDMAN & P. WALTMAN, « Mathematical analysis of some three species food chains », *Mathematical Biosciences*, vol. 33, 257–276, 1977.
- [31] P. SCHUSTER, K. SIGMUND & R. WOLFF, « Dynamical systems under constant organization 3 : Cooperative and competitive behavior of hypercycles », *Journal of Differential Equations*, vol. 32, 357–368, 1979.
- [32] G. BUTLER, H. FREEDMAN & P. WALTMAN, « Persistence in dynamical systems », *Journal of Differential Equations*, vol. 63, 255–263, 1986.
- [33] H. FREEDMAN & P. WALTMAN, « Persistence in models of three interacting predator-prey populations », *Mathematical Biosciences*, vol. 68, 213–231, 1984.
- [34] F. JORDÁN, I. SCHEURING & I. MOLNÁR, « Persistence and flow reliability in simple food webs », *Ecological Modelling*, vol. 161, 117–124, 2003.
- [35] V. A. A. JANSEN & K. SIGMUND, « Shaken not stirred : on permanence in ecological communities », *Theoretical Population Biology*, vol. 54, n° 3, 195–201, 1998.
- [36] M. SCHEFFER, S. HOSPER, M. MAIJER, B. MOSS & E. JEPPESEN, « Alternative equilibria in shallow lakes », *Trends in Ecological Evolution*, vol. 8, n° 8, 275–279, 1993.
- [37] K. LOENARDSSON, « Multiple density dependence in two sub-population of the amphipod *Monoporeia affinis* : a potential for alternative equilibria », *Oecologia*, vol. 97, 26–34, 1994.
- [38] R. MAY, « Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states », *Nature*, vol. 269, 471–477, 1977.
- [39] C. WISSEL, « A universal law of the characteristic return time near thresholds », *Oecologia*, vol. 65, 101–107, 1984.
- [40] L. BOTSFORD, J. CASTILLA & C. PETERSON, « The management of fisheries and marine ecosystems », *Science*, vol. 277, 509–515, 1997.
- [41] S. WEISNER, J. STRAND & H. SANDSTEN, « Mechanisms regulating abundance of submerged vegetation in shallow eutrophic lakes », *Oecologia*, vol. 109, 592–599, 1997.
- [42] C. HOLLING, *The Resilience of Terrestrial Ecosystems : Local Surprise and Global Change*, W. CLARK & R. MUND (dir.), chap. Sustainable development of the biosphere, Cambridge University Press, UK, 1986.
- [43] W. ARON & S. SMITH, « Ship canals and aquatic systems », *Science*, vol. 174, 13–20, 1971.
- [44] C. DARWIN, *On the Origin of Species by Means of Natural Selection or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*, Harvard University, Cambridge (MA), [reprinted 1964] édition, 1859.

- [45] R. MACARTHUR, « Fluctuations of animal populations and a measure of community stability », *Ecology*, vol. 36, 533–536, 1955.
- [46] R. MAY, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University, Princeton (NJ), 1973.
- [47] D. TILMAN, « Biodiversity : population versus ecosystem stability », *Ecology*, vol. 77, 350–363, 1996.
- [48] D. TILMAN, D. WEDIN & J. KNOPS, « Productivity and sustainability influenced by biodiversity in grassland ecosystems », *Nature*, vol. 379, 718–720, 1996.
- [49] J. LAWTON, « What do species do in ecosystems ? », *Oikos*, vol. 71, 367–374, 1994.
- [50] P. EHRLICH & A. EHRLICH, *Extinction : the Causes and Consequences of the Disappearance of Species*, Random House, New York, 1981.
- [51] B. WALKER, « Biological diversity and ecological redundancy », *Conservation Biology*, vol. 6, 18–23, 1992.
- [52] D. TILMAN & J. DOWNING, « Biodiversity and stability in grasslands », *Nature*, vol. 367, 363–365, 1994.
- [53] S. PIMM, « The complexity and stability of ecosystems », *Nature*, vol. 307, 321–326, 1984.
- [54] C. HOLLING, *Engineering within Ecological Constraints*, P. SCHULZE (dir.), chap. Engineering resilience vs. ecological, pages 31–43, National Academy Press-Washington (DC), 1996.
- [55] C. HOLLING, « Resilience and stability of ecological systems », *Annual Review of Ecology and Systematics*, vol. 4, 1–24, 1973.
- [56] S. LEVIN, S. BARRETT, S. ANIYAR, W. BAUMOL, C. BLISS, B. BOLIN, P. DASGUPTA, P. EHRLICH, C. FOLFE, I.-M. GREN, C. HOLLING, A.-M. JANSSON, B.-O. JANSSON, D. MARTIN, K.-G. MÄLER, C. PERRINGS & E. SHESHINSKY, « Resilience in natural and socioeconomic systems », *Environment and Development Economics*, vol. 3, n° 2, 222–235, 1998.
- [57] S. CARPENTER, B. WALKER, J. ANDERIES & N. ABEL, « From metaphor to measurement : resilience of what to what ? », *Ecosystems*, vol. 4, 765–781, 2001.
- [58] G. PETERSON, C. ALLEN & C. HOLLING, « Ecological resilience, biodiversity, and scale », *Ecosystems*, vol. 1, 6–18, 1998.
- [59] S. PIMM & J. LAWTON, « Number of trophic levels in ecological communities », *Nature*, vol. 268, 329–331, 1977.
- [60] D. DEANGELIS, « Energy flow, nutrient cycling, and ecosystem resilience », *Ecology*, vol. 61, n° 4, 764–771, 1980.
- [61] M. NEUBERT & H. CASWELL, « Alternatives to resilience for measuring the responses of ecological systems to perturbations », *Ecology*, vol. 78, n° 3, 653–665, 1997.

- [62] M. WOLFF, « A trophic model for Tongoy Bay - a system exposed to suspended scallop culture (Northern Chile) », *Journal of Experimental Marine Biology and Ecology*, vol. 182, 149–168, 1994.
- [63] C. WALTERS, V. CHRISTENSEN & D. PAULY, « Structuring dynamic models of exploited ecosystems from trophic mass-balance assessments », *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, vol. 7, 139–172, 1997.
- [64] M. ORTIZ & M. WOLFF, « Dynamical simulation of mass-balance trophic models for benthic communities of north-central Chile : assessment of resilience time under alternative management scenarios », *Ecological Modelling*, vol. 148, 277–291, 2002.
- [65] H. PÉREZ-ESPAÑA & F. ARREGUÍN-SÁNCHEZ, « An inverse relationship between stability and maturity in models of aquatic ecosystems », *Ecological Modelling*, vol. 145, 189–196, 2001.
- [66] J. LUDWIG, M. COUGHENOUR, A. LIEDLOFF & R. DYER, « Spatial modelling and landscape characterization », *Environment International*, vol. 27, 167–172, 2001.
- [67] M. COUGHENOUR, *Ecological Indicators, Vol. I.*, D. MCKENZIE, D. HYATT & V. McDONALD (dir.), chap. Spatial modeling and landscape characterization of an African pastoral ecosystem : a prototype model and its potential use for monitoring drought., pages 787–810, Elsevier Applied Science, London and New York, 1992.
- [68] J. BEDDINGTON, C. FREE & J. LAWTON, « Concepts of stability and resilience in predator-prey models », *Journal of Animal Ecology*, vol. 45, 791–816, 1976.
- [69] D. WOLLKIND, J. COLLINGS & J. LOGAN, « Metastability in a temperature-dependent model system for predator-prey mite outbreak interactions on fruit trees », *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 50, n° 4, 379–409, 1988.
- [70] J. LUDWIG, B. WALKER & C. HOLLING, « Sustainability, stability and resilience », *Conservation Ecology*, vol. 1, n° 1, 7, 1997.
- [71] J. COLLINGS & D. WOLLKIND, « A global analysis of a temperature-dependent model system for a mite predator-prey interaction », *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 50, n° 5, 1348–1372, 1990.
- [72] L. VAN COLLER, « Automated techniques for the qualitative analysis of ecological models : continuous models », *Conservation Ecology*, vol. 1, n° 1, 5, 1997.
- [73] M. A. JANSSEN & S. R. CARPENTER, « Managing the resilience of lakes : a multi-agent modeling approach », *Conservation Ecology*, vol. 3, n° 2, 15, 1999.
- [74] A. IVES, « Measuring resilience in stochastic systems », *Ecological Monographs*, vol. 65, n° 2, 217–233, 1995.
- [75] C. LIN XU & Z. ZHEN LI, « Stochastic ecosystem resilience and productivity : seeking a relationship », *Ecological modelling*, vol. 156, 143–152, 2002.

- [76] W. BROCK, K.-G. MÄLER & C. PERRINGS, *Panarchy : Understanding Transformations in Human and Natural Systems*, L. GUNDERSON & C. HOLLING (dir.), chap. Resilience and sustainability : the economic analysis of nonlinear dynamic systems, pages 419–438, Island Press, Washington, 2002.
- [77] N. BONNEUIL, « Making ecosystem models viable », *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 65, 1081–1094, 2003.
- [78] J. BENGTSSON, « Disturbance and resilience in soil animal communities », *European Journal of Soil Biology*, vol. 38, 119–125, 2002.
- [79] P. SAINT-PIERRE, « Approximation of viability kernel », *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 29, 187–209, 1994.
- [80] J.-P. AUBIN, *Viability Theory*, Birkhäuser, 1991.
- [81] J.-P. AUBIN, N. BONNEUIL, F. MAURIN & P. SAINT-PIERRE, « Viability of pay-as-you-go systems », *Journal of Evolutionary Economics*, vol. 11, 555–571, 2001.
- [82] N. BONNEUIL & K. MÜLLERS, « Viable populations in a prey-predator system », *Journal of Mathematical Biology*, vol. 35, 261–293, 1997.
- [83] J.-P. AUBIN & K. SIGMUND, « Permanence and viability », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 22, 203–209, 1988.
- [84] C. BÉNÉ, L. DOYEN & D. GABAY, « A viability analysis for a bio-economic model », *Ecological Economics*, vol. 36, 385–396, 2001.
- [85] C. MULLON, P. CURY & L. SHANNON, « Viability model of trophic interactions in marine ecosystems », *Natural Resources Modelling*, vol. 17, n° 1, 27–58, 2004.
- [86] J.-P. AUBIN & H. FRANKOWSKA, « The viability kernel algorithm for computing value functions of infinite horizon optimal control problems », *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 201, 555–576, 1996.
- [87] L. DOYEN & P. SAINT-PIERRE, « Scale of viability and minimal time of crisis », *Journal of Set-Valued Analysis*, vol. 5, 227–246, 1997.
- [88] J.-P. AUBIN, *Dynamic Economic Theory : A Viability Approach*, Springer-Verlag, 1997.
- [89] J.-P. AUBIN & H. FRANKOWSKA, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
- [90] P. CARDALIAGUET, *Domaines discriminants en jeux différentiels*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Dauphine, 1994.
- [91] P. CARDALIAGUET, M. QUINCAMPOIX & P. SAINT-PIERRE, *Stochastic and Differential Games : Theory and Numerical Methods*, M. BARDI, T. RAGHAVAN & T. PARTHASARATHY (dir.), chap. Numerical analysis for optimal control and differential games, pages 177–247, Annals of the International Society of Dynamic Games, Birkhäuser, 1999.

- [92] M. QUINCAMPOIX & P. SAINT-PIERRE, « An algorithm for viability kernels in Hölderian case : approximation by discrete dynamical systems », *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, vol. 5, 1–13, 1995.
- [93] S. MARTIN, « The cost of restoration as a way of defining resilience : a viability approach applied to a model of lake eutrophication », *Ecology and Society*, vol. 9, n° 2, 8, 2004. {[Http://www.ecologyandsociety.org/vol9/iss2/art8/](http://www.ecologyandsociety.org/vol9/iss2/art8/)}
- [94] N. B. N. & P. SAINT-PIERRE, « Population viability in three trophic-level food chains », *Applied Mathematics and Computation*, page (à paraître), 2005.
- [95] M. KUTTA, « Beitrag zur näherungsweise Integration oder Differentialgleichungen », *Zeit. Math. u. Phys.*, vol. 46, 435–453, 1901.
- [96] C. RUNGE, « Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen », *Math. Annalen*, vol. 46, 167–178, 1895.
- [97] R. E. SCRATON, « Estimation of the truncation error in RK and allied processes », *Comput. J.*, vol. 7, 246–248, 1964.
- [98] L. SHAMPINE & H. WATTS, *Part I. Mathematical Software III*, J. RICE (dir.), chap. The art of writing a Runge-Kutta code, pages 257–275, Academic Press, Orlando, Fla., 1977.
- [99] U. E. U. E. P. AGENCY), « Environmental indicators of water quality in the United States », Rapport technique EPA 841-R-96-002, USEPA, Office of Water(4503F), U.S. Government Printing Office, Wasington DC, USA, 1996.
- [100] D. SCHINDLER, « Evolution of phosphorus limitation in lakes », *Science*, vol. 195, 260–262, 1977.
- [101] V. SMITH, *Successes, Limitations and Frontiers of Ecosystem Science*, M. PACE & P. GROFFMAN (dir.), chap. Cultural eutrophication of inland, estuarine and coastal waters, pages 7–49, Springer-Verlag, New-York, USA, 1998.
- [102] S. CARPENTER, N. E. CARACO, D. CORRELL, R. HOWARTH, A. SHARPLEY & V. SMITH, « Nonpoint pollution of surface waters with phosphorus and nitrogen », *Ecological Applications*, vol. 8, n° 3, 559–568, 1998. {[Http://esa.sdsc.edu/](http://esa.sdsc.edu/)}
- [103] E. JEPPESEN, M. SØNDERGAARD, J. JENSEN, E. MORTENSEN, A.-M. HANSEN & T. JØRGENSEN, « Major perturbation in biological structure and dynamics of a shallow hypertrophic lake following a reduction in sewage loading : an 18-year study in Lake Søbygaard, Denmark », *Ecosystem*, vol. 1, 250–267, 1998.
- [104] S. CARPENTER & K. L. COTTINGHAM, « Resilience and restoration of lakes », *Conservation Ecology*, vol. 1, n° 1, 2, 1997. {[Http://www.consecol.org/vol1/iss1/art2/](http://www.consecol.org/vol1/iss1/art2/)}
- [105] R. OSGOOD, « Lake sensitivity to phosphorus changes », *Lake Line*, vol. 20, n° 3, 9–11, 2000.

- [106] D. QIU, Z. WU, B. LIU, J. DENG, G. FU & F. HE, « The restoration of aquatic macrophytes for improving water quality in a hypertrophic shallow lake in Hubei Province, China », *Ecological Engineering*, vol. 18, 147–156, 2001.
- [107] S. CARPENTER & J. KITCHELL, *The Trophic Cascade in Lakes*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.
- [108] J. ZHANG, S. JØRGENSEN, C. TAN & M. BEKLIOGLU, « A structurally dynamic modeling - lake Mogan as a case study », *Ecological Modelling*, vol. 164, 103–120, 2003.
- [109] J. M. MALMAEUS & L. HÄKANSON, « Development of a lake eutrophication model », *Ecological Modelling*, vol. 171, n° 1-2, 35–63, 2004.
- [110] J. ZHANG, S. E. JØRGENSEN, M. BEKLIOGLU & O. INCE, « Hysteresis in vegetation shift - lake Mogan prognoses », *Ecological Modelling*, vol. 164, 227–238, 2003.
- [111] M. SCHEFFER, *Ecology of Shallow Lakes*, Chapman and Hall, London, 1997.
- [112] M. VANNI & C. LAYNE, « Nutrient recycling and herbivory as mechanisms in the », .
- [113] K. L. COTTINGHAM & S. R. CARPENTER, « Predictive indices of ecosystem resilience in models of north temperate lakes », *Ecology*, vol. 75, n° 7, 2127–2138, 1994.
- [114] D. LUDWIG, S. CARPENTER & W. BROCK, « Optimal phosphorus loading for a potentially eutrophic lake », *Ecological Applications*, vol. 13, n° 4, 1135–1152, 2003.
- [115] C. CLARK & M. MANGEL, *Dynamic State Variable Models in Ecology*, Oxford University Press, New York, Oxford, 2000.
- [116] M. A. JANSSEN, « An exploratory integrated model to assess management of lake eutrophication », *Ecological modelling*, vol. 140, 111–124, 2001.
- [117] W. JAGER, M. JANSSEN & C. VLEK, « Consumers in a commons dilemma. Testing the behavioural rules of simulated consumers », COV report 99-01, Center for Environment and Traffic Psychology, University of Groningen, Groningen, 1999.
- [118] S. CARPENTER, W. A. BROCK & P. C. HANSON, « Ecological and social dynamics in simple models of ecosystem management », *Conservation Ecology*, vol. 3, 4, 1999. {[Http://www.consecol.org/vol3/iss2/art4/index.html](http://www.consecol.org/vol3/iss2/art4/index.html).}
- [119] A. HASTINGS, C. L. HOM, S. ELLNER, P. TURCHIN & H. C. J. GODFRAY, « Chaos in ecology : is Mother Nature a strange attractor ? », *Annual Reviews of Ecology and Systematics*, vol. 24, 1–33, 1993.
- [120] D. LUDWIG, R. HILBORN & C. WALTERS, « Uncertainty, resource exploitation, and conservation : lessons from history », *Science*, vol. 260, 17–36, 1993.
- [121] J.-P. AUBIN, *Mutational and Morphological Analysis*, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser, 1999.
- [122] A. STEINMAN, P. J. MULHOLLAND, A. V. PALUMBO, T. F. FLUM & D. L. DEANGELIS, « Resilience of lotic ecosystems to a light-elimination disturbance », *Ecology*, vol. 72, 1299–1313, 1991.

- [123] R. ARMSTRONG, « The effects of connectivity on community stability », *American naturalist*, vol. 120, 391–402, 1982.



# Annexe A

## Une variante du théorème de convergence

Soient  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $G : X \rightsquigarrow X$  une correspondance  $k$ -Lipschitz, nous considérons l'inclusion différentielle discrète :

$$x^{n+1} \in G(x^n) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Soit  $X_h$  une grille de pas  $h$  avec  $\alpha(h)$  vérifiant (3.18) et (3.19).

En reprenant la démonstration du théorème 3.1.3.2, nous cherchons à déterminer, dans le cas où  $G$  est Lipschitz, quelles sont les conditions sur  $r$  pour que les noyaux de viabilité discrets finis de l'extension de taille  $r$  de  $G$  projetée sur  $X_h$ ,  $G_h^r : X_h \rightsquigarrow X_h$ , définie par

$$G_h^r(x_h) := (G(x_h) + r\mathcal{B}) \cap X_h$$

convergent vers le noyau de viabilité de  $G$ .

**Lemme A.0.3.1** *Soit  $G : X \rightsquigarrow X$  une correspondance  $k$ -Lipschitz. Soit  $r \geq (k + 1)\alpha(h)$ . Soit  $G^r : X \rightsquigarrow X$  une extension de  $G$  :*

$$\forall x \in X, G^r(x) := G(x) + r\mathcal{B}.$$

*Considérons  $G_h^r : X_h \rightsquigarrow X_h$  la projection de  $G^r$  sur  $X_h$  :*

$$G_h^r(x_h) := G^r(x_h) \cap X_h, \quad \forall x_h \in X_h.$$

*Alors, à toute solution  $\vec{\xi} := (\xi^n)_n \in \vec{S}_G(\xi^0)$  du système dynamique discret :*

$$\xi^{n+1} \in G(\xi^n), \quad \forall n \geq 0 \tag{A.1}$$

nous pouvons associer une solution  $\vec{\xi}_h := (\xi_h^n)_n \in \vec{S}_{G_h^r}(\xi_h^0)$  du système dynamique discret fini :

$$\xi_h^{n+1} \in G_h^r(\xi_h^n), \forall n \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

telle que

$$\|\xi_h^n - \xi^n\| \leq \frac{r}{k+1}, \forall n \geq 0. \quad (\text{A.3})$$

**Preuve** — Soit  $\xi^0 \in X$  et  $\vec{\xi} \in \vec{S}_G(\xi^0)$ . D'après la définition de  $\alpha(h)$ , puisque  $r \geq (k+1)\alpha(h)$ ,  $\exists \xi_h^0 \in (\{\xi^0\} + \frac{r}{k+1}\mathcal{B}) \cap X_h$ . Supposons que nous avons trouvé une suite  $\xi_h^k$  vérifiant (A.2) et (A.3) jusqu'à  $k = n$ .

Puisque  $G$  est  $k$ -Lipschitz,

$$G(\xi^n) \subset G(\xi_h^n) + k\|\xi^n - \xi_h^n\|\mathcal{B}.$$

$\xi^{n+1} \in G(\xi^n)$  et d'après la définition de  $\alpha(h)$ ,

$$\exists \xi_h^{n+1} \text{ tel que } \|\xi_h^{n+1} - \xi^{n+1}\| \leq \alpha(h) \leq \frac{r}{k+1}.$$

De plus,

$$\xi_h^{n+1} \in G(\xi^n) + \alpha(h)\mathcal{B} \subset G(\xi_h^n) + (k\|\xi^n - \xi_h^n\| + \alpha(h))\mathcal{B} \subset G^r(\xi_h^n).$$

donc,  $\xi_h^{n+1} \in G^r(\xi_h^n) \cap X_h$ . —

Saint-Pierre a montré que lorsque la propriété suivante est vraie,

$$\forall \xi \in G(x), \exists \xi_h \in G(x) \cap X_h \text{ such that } \|\xi - \xi_h\| \leq \frac{r}{k} \quad (\text{A.4})$$

$r \geq k\alpha(h)$  suffit [79, Saint-Pierre (1994)].

Nous déduisons le résultat suivant,

**Corollaire A.0.3.1** Soit  $G : X \rightsquigarrow X$  une correspondance  $k$ -Lipschitz. Soit  $K$  un sous-ensemble fermé de  $X$ , alors, pour tout  $r \geq (k+1)\alpha(h)$  :

$$\text{Viab}_G(K) \subset \text{Viab}_{G_h^r}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) + \frac{r}{k+1}\mathcal{B}.$$

**Preuve** — Soit  $\xi^0 \in \text{Viab}_G(K)$ , il existe  $\vec{\xi} \in \vec{S}_G(\xi^0)$  viable dans  $K$ . D'après le lemme A.0.3.1,  $\exists \xi_h^0 \in K_h^{\frac{r}{k+1}}$  et  $\vec{\xi}_h \in \vec{S}_{G_h^r}(\xi_h^0)$  tels que  $\|\xi_h^n - \xi^n\| \leq \frac{r}{k+1}, \forall n \geq 0$ . Par conséquent,

$\forall n \geq 0, \xi_h^n \in (K_h^{\frac{r}{k+1}})$  donc  $\xi_h^0$  appartient à  $\text{Viab}_{G_h^r}(K_h^{\frac{r}{k+1}})$ . Et puisque  $\|\xi^0 - \xi_h^0\| \leq \frac{r}{k+1}$ , alors

$$\text{Viab}_G(K) \subset \text{Viab}_{G_h^r}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) + \frac{r}{k+1}\mathcal{B}.$$

—

La preuve du théorème qui suit nécessite le lemme suivant démontré dans [79, Saint-Pierre (1994)].

**Lemme A.0.3.2** *Pour tout sous-ensemble fermé  $D \subset X$ , et pour toutes suite décroissante de sous-ensembles fermés  $D_\rho$  telle que  $D = \bigcap_{\rho>0} D_\rho$  :*

$$D = \limsup_{\rho, h \rightarrow 0} ((D_\rho + \alpha(h)\mathcal{B}) \cap X_h). \quad (\text{A.5})$$

*Si  $D$  vérifie la propriété :  $\forall x \in D, \exists x_h \in D \cap X_h : \|x - x_h\| \leq \alpha(h)$ , alors*

$$D = \limsup_{h \rightarrow 0} (D \cap X_h). \quad (\text{A.6})$$

**Théorème A.0.3.1** *Soit  $F : X \rightsquigarrow X$  une correspondance Marchaud et  $l$ -Lipschitz,  $K$  un sous-ensemble fermé de  $\text{Dom}(F)$  vérifiant :*

$$M := \sup_{x \in K} \sup_{y \in F(x)} \|y\| < \infty. \quad (\text{A.7})$$

*Soit  $G_\rho := \mathbf{1} + \rho F$ ,  $\Gamma_\rho := \mathbf{1} + \rho F + \frac{Ml}{2}\rho^2\mathcal{B}$ , notons  $k = 1 + \rho l$  la constante de Lipschitz de  $G_\rho$ .*

*Soit  $h > 0$ ,  $X_h$  une grille de  $X$  et  $\alpha(h)$  vérifiant (3.18) et (3.19).*

*Supposons que  $r$  et  $h$  sont choisis tels que :*

$$\alpha(h)(k+1) \leq r. \quad (\text{A.8})$$

*Soit  $d > 0$  vérifiant*

$$d = r + \frac{Ml}{2}\rho^2. \quad (\text{A.9})$$

*Soit  $G_\rho^d : X \rightarrow X$  et  $G_{\rho h}^d : X_h \rightarrow X_h$  définis par :*

$$G_\rho^d(x) := G_\rho(x) + d\mathcal{B},$$

$$G_{\rho h}^d(x_h) := G_{\rho}^d(x_h) \cap X_h,$$

Alors :

$$\text{Limsup}_{d, \frac{d}{\rho} \rightarrow 0} \text{Viab}_{G_{\rho h}^d}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) = \text{Viab}_F(K). \quad (\text{A.10})$$

**Preuve** — D'après le théorème 3.1.2.2,

$$\text{Viab}_F(K) = \text{Limsup}_{\rho \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_{\rho}}(K).$$

Pour montrer l'égalité (A.10), nous appliquons le corollaire A.0.3.1 avec  $\Gamma_{\rho}$  de constante de Lipschitz  $k$  avec  $r \geq (k+1)\alpha(h)$  et nous obtenons :

$$\text{Viab}_{\Gamma_{\rho}}(K) \subset \text{Viab}_{\Gamma_{\rho h}^r}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) + \frac{r}{k+1} \mathcal{B},$$

ce qui implique que

$$\text{Viab}_F(K) \subset \text{Limsup}_{\rho \rightarrow 0} \left( \text{Viab}_{\Gamma_{\rho h}^r}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) + \frac{r}{k+1} \mathcal{B} \right)$$

et alors, avec la contrainte  $(k+1)\alpha(h) \leq r$ ,

$$\text{Viab}_F(K) \subset \text{Limsup}_{\rho, r \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_{\rho h}^r}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) = \text{Limsup}_{\rho, r \rightarrow 0} \text{Viab}_{G_{\rho h}^{r + \frac{Ml\rho^2}{2}}}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) \quad (\text{A.11})$$

enfin, avec les contraintes  $d = r + \frac{Ml}{2}\rho^2$  et  $(k+1)\alpha(h) \leq r$ ,

$$\text{Viab}_F(K) \subset \text{Limsup}_{d \rightarrow 0} \text{Viab}_{G_{\rho h}^d}(K_h^{\frac{r}{k+1}}). \quad (\text{A.12})$$

Pour montrer l'inclusion inverse nous observons que

$$G_{\rho h}^d = \mathbf{1} + \rho F + d\mathcal{B}$$

et alors,

$$\text{Graph} \left( \frac{G_{\rho h}^d - \mathbf{1}}{\rho} \right) \subset \text{Graph}(F) + \left( \frac{d}{\rho} \right) \mathcal{B}.$$

Le théorème de convergence 3.1.2.1 implique que :

$$\text{Limsup}_{\frac{d}{\rho} \rightarrow 0} \text{Viab}_{G_{\rho h}^d}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) \subset \text{Viab}_F(K),$$

et avec (A.12) nous avons montré l'égalité :

$$\text{Limsup}_{d, \frac{d}{\rho} \rightarrow 0} \text{Viab}_{G_{\rho h}^d}(K_h^{\frac{r}{k+1}}) = \text{Viab}_F(K),$$

avec les contraintes  $d = r + \frac{Ml}{2}\rho^2$  et  $(k + 1)\alpha(h) \leq r$ . —

**Remarque** — Saint-Pierre a montré que si  $\alpha(h) \leq \frac{Ml}{2}\rho^2$  alors la contrainte  $r \geq k\alpha(h)$  suffit. Il se place dans cette hypothèse dans l'énoncé du théorème 3.1.2.2, et prend comme cas particulier de notre variante  $d = 2Ml\rho^2$ .



## **Annexe B**

### **Approximation de noyaux de viabilité avec des SVMs**



# Approximating Viability Kernels with Support Vector Machines

Guillaume Deffuant, Sophie Martin and Laetitia Chapel

Cemagref  
Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes,  
24, avenue des Landais,  
F-63172 Aubière Cedex, France

**Abstract.** Approximating viability kernels is a particularly attractive approach to control complex dynamical systems. However, its practical use with the currently existing algorithms is limited because the result is a set of points which can be huge, without a synthetic definition. We study the possibility to use a learning method to approximate the viability kernel, which yields an analytical definition of the kernel approximation. This gives more possibilities, in particular to use fast optimisation methods to find the best control at each time step. We establish the mathematical conditions that such a learning method should fulfill to guarantee the convergence to the actual viability kernel. We show that support vector machines (SVMs) with a gaussian kernel are particularly appropriate in this context, and enable to compute optimal controls in large dimension control spaces.

## 1 Introduction

The viability theory [1] aims at controlling dynamical systems, generally non-deterministic, with the goal to maintain them inside a given set of admissible states  $K$ , here called the viability constraint set. Such a problem is frequent in ecology or economics, where the systems die or badly deteriorate when they leave some regions of the state space. For instance Béné et al. studied the management of a renewable resource as a viability problem in [3]. They pointed out irreversible overexploitation configurations related to the resource extinction. Mullan et al. proposed a viability model of the trophic interactions in marine ecosystems in [8]. Bonneuil studied the conditions the prey-predator dynamics must satisfy to avoid the extension of one or the other species as a viability problem [4].

The main concepts of the viability theory are:

- *Viable state*: A state is called *viable* if there exists at least one control function for which the whole trajectory from this state remains in  $K$  indefinitely.
- *Viability kernel*: The set of all viable states is called the *viability kernel* and is denoted  $\text{Viab}(K)$ .

Aubin [1] proved the viability theorems which enable to determine viable states, without considering the combinatorial exploration of control actions series. These theorems also provide the control functions that maintain viability.

Saint-Pierre proposed a practical algorithm [11] which is based on these theorems and computes the exact discrete viability kernel of the approximated discrete problem defined on a grid. It is very fast but its result is the set of points of the grid that are viable, which is not very convenient to manipulate. Moreover, the use of such sets in the algorithm prevents from using standard optimisation methods to compute the controls. When the control space is of high dimension, the exhaustive search is impossible, making the use of this algorithm impossible.

Our aim is to use an explicit analytical expression of the viability kernel approximation, in order to make it possible to use standard optimisation methods to compute the control. To achieve this aim, we propose to use a learning procedure which provides an analytical approximation of the set of viable points. We establish the mathematical conditions that the learning procedure should fulfill in order to guarantee the convergence to the actual viability kernel.

We consider the support vector machines (SVMs) as a particularly relevant learning procedure in this context [12, 13, 6]. We propose some first experiments of the method on a simple dynamical system representing the evolution of a population on a limited space. The first results show that the approximations of the viability kernels are very good in low dimensions and provide a very convenient controller. We show on the example of [8] that the method can deal with high dimensional control spaces.

We present the main concepts of the viability theory and the current viability kernel approximation algorithm in Sect. 2. In Sect. 3, we express a new algorithm of viability kernel approximation, using a learning method, and we state the conditions that such a learning method should fulfill. In Sect. 4, we consider the use of SVMs and report the results of a set of experiments on different dimensions. Finally, we discuss the results and draw some perspectives in Sect. 5.

## 2 Viability Theory and Viability Kernel Approximation

### 2.1 Viability Theory

The viability theory considers a dynamical system defined by its state  $\mathbf{x}(t)$  and assumes that its evolution can be modified by a control  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \varphi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t) \in U(\mathbf{x}(t)) \end{cases} . \quad (1)$$

We suppose  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ . The set of available controls depends on the state,  $\mathbf{u}(t)$  is chosen in a subset  $U(\mathbf{x}(t)) \subset \mathbb{R}^q$ .

Aubin [1] defines the concept of *viable state* in a viability constraint set  $K \subset \mathbb{R}^n$ , as a state  $\mathbf{x}_0$  from which there exists at least one trajectory  $\mathbf{x}(t)$  satisfying (1) which remains in  $K$  indefinitely:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \forall t \geq 0, \mathbf{x}(t) \in K \end{cases} . \quad (2)$$

The viability control problem is therefore to determine a control function  $t \rightarrow \mathbf{u}(t)$  which enables to keep the state of the system in  $K$  indefinitely. Such

a control function is called a viable solution to the viability problem at the considered initial state.

The subset  $\text{Viab}(K)$  of all viable states  $x_0 \in K$  is called the *viability kernel* of  $K$ . Viability kernels have interesting properties: equilibria, trajectories of periodic solutions, limit sets and attractors, if any, are all contained in the viability kernel. Moreover, it is shown that the viability kernel is instrumental to define viable control policies. The simplest rule is to apply any control while the next time step is anticipated in the kernel, and to choose the first control which keeps the system in the viability kernel otherwise (we are sure that at least one exists). This procedure guarantees that the trajectory always remains in  $K$  from any state of  $\text{Viab}(K)$ . We can easily derive more sophisticated control policies if the distance of state to the boundary of the viability kernel can be computed.

The main task to solve a viability problem is therefore to determine its viability kernel. The viability theorems enable to determine viable states without considering the combinatorial exploration of control actions series over time. These theorems hold true for a large class of systems, called Marchaud systems: beyond imposing some weak technical conditions, the only severe restriction is that, for each state  $\mathbf{x}$ , the set of velocities  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  when  $\mathbf{u}$  ranges over  $U(\mathbf{x})$  is convex. In general, there are no explicit formulas providing the viability kernel. In practise, algorithms designed in [11] allow us to compute approximations of viability kernels (see also [10]), and are based on the viability theorems.

## 2.2 Approximation of a Viability Kernel using a space and time discrete dynamical system

Saint-Pierre associates with the dynamical system (1) a discrete dynamical system defined on a finite grid. Let  $X_h$  be a grid of step  $h$  defined on  $X$ , and  $K_h = X_h \cap K$  the discrete approximation of  $K$ . The finite discrete dynamical system defined by the finite set-valued map  $G_h : X_h \rightarrow X_h$  is

$$\mathbf{x}_h^{j+1} \in G_h(\mathbf{x}_h^j) \text{ for all } j \geq 0 . \quad (3)$$

We do not detail the transformation from (1) to (3), we just stress that the set of possible controls  $U(\mathbf{x}(t))$  is incorporated into the set-valued map  $G_h$ .

The viability kernel of the finite discrete dynamical system is the set of all  $\mathbf{x}_h^0 \in X_h$  such that there exists at least one sequence  $(\mathbf{x}_h^j)_j$  starting at  $\mathbf{x}_h^0$ , satisfying (3) and:

$$\forall j \geq 0, \mathbf{x}_h^j \in K_h . \quad (4)$$

Saint-Pierre considers the sequence  $(K_h^n)_n$  (with  $K_h^0 = K_h$ ) defined as follows:

$$K_h^{n+1} := \{\mathbf{x} \in K_h^n \text{ such that: } G_h(\mathbf{x}) \cap K_h^n \neq \emptyset\}. \quad (5)$$

He proves that  $\text{Viab}_{G_h}(K_h) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_h^n$ . Moreover, there exists a finite integer  $p$  such that  $\text{Viab}_{G_h}(K_h) = K_h^p$ . The finite discrete viability kernel is therefore easy to compute.

This gives the practical method for computing the viability kernel of the discrete approximation: beginning with  $K_h$ , the algorithm eliminates at each step all the points of the grid for which none is in the current  $K_h^n$  at the next time step.

Saint-Pierre [11] next shows that under some conditions on  $\varphi$  the finite discrete viability kernel tends to the viability kernel of the initial viability problem when the step of the grid tends to 0.

The algorithm is very fast, but at each step it manipulates discrete sets of points, which prevents from using standard optimisation methods to find a control value which keep the system in the current approximation of the kernel. Our aim is to explore if a learning method providing an analytical approximation of the discrete set could be used to solve this problem.

### 3 Approximating a viability kernel with a learning method

#### 3.1 Notations

We consider a given time interval  $dt$ , and we define the set-valued map  $G : X \rightsquigarrow X$  :

$$G(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}).dt \text{ for } \mathbf{u} \in U(\mathbf{x})\}. \quad (6)$$

associated with the discrete differential inclusion :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{n+1} \in G(\mathbf{x}^n) \\ \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (7)$$

We suppose that  $G$  is  $\mu$ -Lipschitz with closed images.

Let  $K$  be a compact subset of  $X$ , we would like to approximate the viability kernel  $\text{Viab}_G(K)$  of  $K$  under the discrete dynamical system (7). We define a grid  $K_h$  as a finite set of elements of  $K$ , such that:

$$\forall \mathbf{x} \in K, \exists \mathbf{x}_h \in K_h \text{ such that } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_h\| < \beta(h), \quad (8)$$

and  $\beta(h) \rightarrow 0$  when  $h \rightarrow 0$ . Such a grid exists since  $K$  is compact.

At each step  $n$ , we define a function  $V^n : K_h \rightarrow \{-1; 1\}$  which associates the label -1 to the points of the grid which neatly (precised later) go out of the current approximation of the kernel with any value of  $\mathbf{u}$ , and +1 to the others. We associate with the function  $V^n$ , the two following subsets of  $K_h$ :

$$V_+^n(K_h) = \{\mathbf{x}_h \in K_h \text{ such that } V^n(\mathbf{x}_h) = +1\}, \quad (9)$$

$$V_-^n(K_h) = \{\mathbf{x}_h \in K_h \text{ such that } V^n(\mathbf{x}_h) = -1\}. \quad (10)$$

At each step, we have  $V_+^n(K_h) \cup V_-^n(K_h) = K_h$ . We use a learning algorithm  $L$ , which, given the grid and the associated labels, provides a function  $\hat{V}^n : K \rightarrow$

$\{-1, 1\}$ , which is an approximation of function  $V^n$ , obtained from the values of  $V^n$  on the grid. We define, similarly:

$$\hat{V}_+^n(K) = \left\{ \mathbf{x} \in K \text{ such that } \hat{V}^n(\mathbf{x}) = +1 \right\}, \quad (11)$$

$$\hat{V}_-^n(K) = \left\{ \mathbf{x} \in K \text{ such that } \hat{V}^n(\mathbf{x}) = -1 \right\}. \quad (12)$$

and

$$\hat{V}_+^n(K_h) = \hat{V}_+^n(K) \cap K_h, \quad (13)$$

$$\hat{V}_-^n(K_h) = \hat{V}_-^n(K) \cap K_h. \quad (14)$$

$$(15)$$

We suppose that  $\hat{V}_+^n(K)$  is a closed set. This hypothesis is not restrictive because if it is not the case, the set can be replaced by its closure without consequence.

At each step  $n$ , we have  $\hat{V}_+^n \cup \hat{V}_-^n = K$ . Moreover, we complete functions  $\hat{V}^n$  on the global state space  $X$ :

$$\forall n > 0, \forall \mathbf{x} \in X, \text{ if } \mathbf{x} \notin K, \hat{V}^n(\mathbf{x}) = -1. \quad (16)$$

We denote  $d(E, F)$  the distance between two closed subsets  $E$  and  $F$ , and  $\mathbf{B}$  is the ball of center  $\theta$  and radius 1.

### 3.2 Definition of the viability kernel approximating algorithm

The main difference with the method of Saint-Pierre is that we do not use the map  $G_h$ , we only discretise the dynamical system in time (with map  $G$ ), not in the state space. The steps of the algorithm are the following:

- We initialise the function  $\hat{V}^0$ :

$$\forall \mathbf{x} \in K, \hat{V}^0(\mathbf{x}) = +1. \quad (17)$$

- At step  $n+1$ , we define the function  $V^{n+1}$ , from the current approximation of the kernel ( $\hat{V}_+^n(K)$ ):

$$\forall \mathbf{x}_h \in K_h, \text{ if } d(G(\mathbf{x}_h), \hat{V}_+^n(K)) > \mu\beta(h), V^{n+1}(\mathbf{x}_h) = -1 \quad (18)$$

$$\text{otherwise, } V^{n+1}(\mathbf{x}_h) = +1. \quad (19)$$

- We run the learning procedure  $L$  on the learning set:

$$S_h^{n+1} = \{ (\mathbf{x}_h, V^{n+1}(\mathbf{x}_h)), \mathbf{x}_h \in K_h \}. \quad (20)$$

We obtain function  $\hat{V}^{n+1}$ .

- The algorithm stops when  $V_-^{n+1}(K_h) = \hat{V}_-^n(K_h)$ .

Moreover, we suppose that the learning procedure satisfies the following conditions at each step  $n$ :

1.  $\hat{V}_-^n(K_h) = V_-^n(K_h)$ , which means that the learning procedure makes no mistake on the learning set.
2. If  $V_+^{n+1}(K_h) \subset \hat{V}_+^n(K_h)$ , then  $\hat{V}_+^{n+1}(K) \subset \hat{V}_+^n(K)$ .
3.  $\hat{V}_-^n(K) \subset (V_-^n(K_h) + \beta(h)\mathbf{B})$ .
4. There exists a real  $\lambda > 0$  such that for all  $n$ ,  $\hat{V}_+^n(K) \subset (V_+^n(K_h) + \lambda\beta(h)\mathbf{B})$ .

### 3.3 Convergence of the algorithm

*The algorithm stops after a finite number of steps  $p$ .*

We have  $\hat{V}_-^0(K_h) \subset V_-^1(K_h)$  because  $\hat{V}_-^0 = \emptyset$ . Suppose  $\hat{V}_-^{n-1}(K_h) \subset V_-^n(K_h)$ , which implies  $\hat{V}_-^{n-1}(K_h) \subset \hat{V}_-^n(K_h)$ , because of condition 1, and then  $\hat{V}_+^n(K) \subset \hat{V}_+^{n-1}(K)$ . By definition of the algorithm, we have:

$$\forall \mathbf{x}_h \in \hat{V}_-^n(K_h), d(G(\mathbf{x}_h), \hat{V}_+^{n-1}(K)) > \mu\beta(h). \quad (21)$$

Therefore,

$$\forall \mathbf{x}_h \in \hat{V}_-^n(K_h), d(G(\mathbf{x}_h), \hat{V}_+^n(K)) > \mu\beta(h). \quad (22)$$

Hence,  $\hat{V}_-^n(K_h) \subset V_-^{n+1}(K_h)$ . Because  $K_h$  is finite, we shall get, after a finite number of steps  $p$ ,  $V_-^{p+1}(K_h) = \hat{V}_-^p(K_h)$ .

*For all  $n$ , the viability kernel of  $K$  under  $G$  is included in  $\hat{V}_+^n(K)$ .*

We have  $\text{Viab}_G(K) \subset K = \hat{V}_+^0(K)$ . Suppose that  $\text{Viab}_G(K) \subset \hat{V}_+^n(K)$ . Consider  $\mathbf{x} \in \hat{V}_-^{n+1}(K)$ . Because of condition 3, we have:

$$\exists \mathbf{x}_h \in \hat{V}_-^{n+1}(K_h) \text{ such that } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_h\| \leq \beta(h). \quad (23)$$

with  $d(G(\mathbf{x}_h), \hat{V}_+^n(K)) > \mu\beta(h)$ .

Because  $G$  is  $\mu$ -Lipschitz:

$$G(\mathbf{x}) \subset (G(\mathbf{x}_h) + \mu\beta(h)\mathbf{B}). \quad (24)$$

Therefore,  $G(\mathbf{x}) \cap \hat{V}_+^n(K) = \emptyset$  and we have  $G(\mathbf{x}) \subset \hat{V}_-^n(K)$ . By hypothesis, any point of  $\hat{V}_-^n(K)$  is not viable, therefore  $\mathbf{x}$  is not viable, because all its successors are not viable. Therefore  $\hat{V}_-^{n+1}(K) \cap \text{Viab}_G(K) = \emptyset$ .

*$\hat{V}_+^p(K)$  is included in the viability kernel of  $K$  under  $G + \mu(1 + \lambda)\beta(h)\mathbf{B}$ .*

Let  $G_h : X \rightarrow X$ , such that  $G_h(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) + \mu(1 + \lambda)\beta(h)\mathbf{B}$ .  $G_h$  has closed images. Consider a point  $\mathbf{x}$  of  $\hat{V}_+^p(K)$ . Because of condition 4:

$$\exists \mathbf{x}_h \in \hat{V}_+^p(K_h) \text{ such that } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_h\| \leq \lambda\beta(h). \quad (25)$$

Since ,  $V_+^{p+1}(K_h) = \hat{V}_+^p(K_h)$ ,  $\mathbf{x}_h \in V_+^{p+1}(K_h)$  and, by definition of the algorithm,  $d(G(\mathbf{x}_h), \hat{V}_+^p(K)) \leq \mu\beta(h)$ . Because  $G$  is  $\mu$ -Lipschitz:

$$d(G(\mathbf{x}), \hat{V}_+^p(K)) \leq \mu(1 + \lambda)\beta(h). \quad (26)$$

This implies that  $G_h(\mathbf{x}) \cap \hat{V}_+^p(K) \neq \emptyset$ . Therefore  $\hat{V}_+^p(K)$  is a discrete viability domain under the discrete dynamical system associated with  $G_h$ . Since  $\hat{V}_+^p(K) \subset K$ ,  $\hat{V}_+^p(K) \subset \text{Viab}_{G_h}(K)$ .

*Conclusion.*

Since  $G$  is  $\mu$ -Lipschitz and  $K$  is compact,

$$\text{Viab}_G(K) = \bigcap_{h>0} \text{Viab}_{G_h}(K).$$

For all  $h > 0$ ,  $\text{Viab}_G(K) \subset \hat{V}_+^{p(h)}(K) \subset \text{Viab}_{G_h}(K)$ . Therefore,

$$\text{Viab}_G(K) = \bigcap_{h>0} \hat{V}_+^{p(h)}(K).$$

### 3.4 An example of learning algorithm satisfying the conditions: the nearest neighbour

It is important to check that the conditions we identified are not too strong, and that some learning procedure satisfy them. We consider the learning procedure which associates to any point  $\mathbf{x} \in K$  the label of the nearest point of the learning set. More precisely, for  $n > 0$ :

$$\forall \mathbf{x} \in K, \text{ if } (\text{argmin}_{\mathbf{x}_h \in K_h} \|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}\|) \cap \hat{V}_+^n(K_h) \neq \emptyset, \hat{V}^n(\mathbf{x}) = +1, \quad (27)$$

$$\text{otherwise, } \hat{V}^n(\mathbf{x}) = -1. \quad (28)$$

We recall that  $\hat{V}^0$  is initialised as stated in the first step of the algorithm. This learning procedure obviously verifies conditions 1 and 2. Moreover, with this learning algorithm, we obviously have for  $n > 0$ :

$$\forall \mathbf{x} \in \hat{V}_+^n(K), \exists \mathbf{x}_h \in V_+^n(K_h), \text{ such that } \|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}\| \leq \beta(h), \quad (29)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \hat{V}_-^n(K), \exists \mathbf{x}_h \in V_-^n(K_h), \text{ such that } \|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}\| \leq \beta(h). \quad (30)$$

Therefore, conditions 3 and 4 are verified with  $\lambda = 1$ . Therefore there exists at least one learning procedure satisfying the conditions. By the way, the result obtained by this procedure should be very similar to the one obtained with Saint-Pierre's method.

Our goal is to use learning algorithms which provide a more compact (analytical) definition of functions  $\hat{V}^n$ , in order to use this definition to improve the algorithm. This is why we considered the SVMs.

## 4 SVMs to approximate viability kernels

### 4.1 Presentation of SVMs

We rapidly recall some important features of the SVMs. For more details, see for instance [6].

We consider a set of examples  $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$ , where  $\mathbf{x}_i$  is a real vector, and  $y_i \in \{-1, 1\}$ .

SVMs define separations between the examples of each label. To introduce some non-linearity in the separating function, we project the examples into a feature space, through a function  $\psi$  (if  $\psi(\mathbf{x})$  denotes the projection of  $\mathbf{x}$  into the feature space). Fortunately, this function need not to be explicit, the kernel  $k$  defining a scalar product in the of two projections into the feature space, is sufficient to make all computations. Pay attention that the term kernel is here used in a very different meaning than in the concept of the viability kernel. If  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the scalar product of two points of the feature space, then  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y}) \rangle$ . The SVM is obtained by solving the following problem in an extended feature space (the slack variables  $\xi_i$  are added to treat non separable sets):

$$\begin{cases} \min_{(\mathbf{w}, b, \xi)} \frac{1}{2} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle + C \sum_{i=1}^N \xi_i \\ y_i \cdot (\langle \mathbf{w}, \psi(\mathbf{x}_i) \rangle + b) \geq 1 - \xi_i, 1 \leq i \leq N, \\ \xi_i \geq 0, 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (31)$$

The resolution of the quadratic problem defines the function  $f$  :

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \psi(\mathbf{x}) \rangle + b = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b \quad (32)$$

$$\text{with } \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq N. \quad (33)$$

The points  $\mathbf{x}_i$  such that  $\alpha_i > 0$  are the support vectors. They are sufficient to define the function. When  $k$  is non linear, the resulting function is also non linear. It is particularly relevant in our context to use a gaussian kernel  $k$ :

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\right). \quad (34)$$

The practical use of SVM with a gaussian kernel requires to define the values of two parameters:  $C$  and  $\lambda$ .

### 4.2 Fulfilment of the theorem conditions

With a Gaussian kernel, there exists some values of  $\sigma$  and  $C$  such that condition 1 is fulfilled. The reason is that the sample is projected into a feature space which is of infinite dimension, in which any set of point is linearly separable. The other conditions are less direct to establish. However, we can compare the gaussian SVM with the nearest neighbour algorithm, because it is easy to check that the

nearest neighbour verifies conditions 1 to 4. When  $\lambda$  increases, the result of function  $f$  tends to be close to the label of the nearest support vector. In effect, when  $\lambda$  is high, the contribution of the closest support vector becomes highly dominant even if the difference with the second closest is small. Therefore, the SVM selects a subset of points (the support vectors) and then applies a function which is very close to associating the label of the nearest support vector. Supposing that the parameters are chosen to fulfill condition 1, the obtained function can be considered as a regularised approximation of the nearest neighbours taken on all the points of the grid. The fulfilment of the theorem conditions are therefore related to the regularity of the boundary generated by the SVM.

### 4.3 Optimizing the control by a gradient ascent

The use of the SVM enables to compute an optimal controls because we have an analytical expression of the function which defines the current approximation of the viability kernel. Supposing that the value of the SVM function  $f$  are positive inside this current approximation of the viability kernel, and negative outside, we will look for the control maximising this function. Moreover, the same method can be applied in order to optimise several steps of control.

#### One time step optimisation.

Let us first define function  $G(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (f(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt). \quad (35)$$

We define the optimal control as the value  $\mathbf{u}^*$  which maximises the SVM function  $f(G(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$  :

$$\mathbf{u}^* = \max_{\mathbf{u} \in U(\mathbf{x})} (G(\mathbf{x}, \mathbf{u})). \quad (36)$$

To find  $\mathbf{u}^*$ , we use an iterative method, the gradient ascent procedure. We construct a sequence of vectors  $\mathbf{u}^{(k)}$ , defined as follows :

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \eta \frac{\partial f(G(\mathbf{x}, \mathbf{u}^k))}{\partial \mathbf{u}}. \quad (37)$$

Parameter  $\eta$  rules the magnitude of the change at each iteration. We use notations supposing that  $\mathbf{u}$  is scalar to simplify the presentation, but the method is of course applicable for  $\mathbf{u}$  of any dimension.

The derivative of the function  $f(G(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$  with respect to  $\mathbf{u}$  is given by :

$$\frac{\partial f(G(\mathbf{x}, \mathbf{u}))}{\partial \mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{x}} f(G(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} dt. \quad (38)$$

If we suppose that function  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  is differentiable, then this can be computed.

**Optimisation on several time steps.**

This method also opens the possibility to find a sequence of optimal controls on several time steps in a reasonable computational time. We consider the trajectory from a point  $\mathbf{x}_0$ . We first define the sequences of controls :

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{u}_1), \mathbf{V}_2 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \dots, \mathbf{V}_n = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n). \quad (39)$$

For a sequence of control, the point reached by the trajectory is given by:

$$G_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_1) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1), \quad (40)$$

$$G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1}) = G(G_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_n), \mathbf{u}_{n+1}). \quad (41)$$

The optimal set of controls  $\mathbf{V}_{n+1}^*$  is the one solving the following problem :

$$\max_{\mathbf{V}_{n+1}} (f(G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1}))). \quad (42)$$

The expression of the derivative of  $f(G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1}))$  with respect to  $\mathbf{u}_l$  is similar to the case of one time step:

$$\frac{\partial f(G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1}))}{\partial \mathbf{u}_l} = \nabla_{\mathbf{x}} f(G_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_n), \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \frac{\partial G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_l}. \quad (43)$$

The derivative of  $G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1})$  with respect to  $\mathbf{u}_l$  can be obtained iteratively:

$$\frac{G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_l} = \nabla_{\mathbf{x}} G(G_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_n), \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \frac{\partial G_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_n)}{\partial \mathbf{u}_l}, \text{ for } l \leq n, \quad (44)$$

$$\frac{G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_l} = \frac{\partial G(G_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_n), \mathbf{u}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_{n+1}}, \text{ for } l = n + 1, \quad (45)$$

$$\frac{G_{n+1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_l} = 0, \text{ for } l > n + 1. \quad (46)$$

This enables to apply the gradient ascent method to find the optimal set of controls on the trajectory.

**Particular case of the first iteration of the global algorithm, and when the trajectory is outside  $\mathbf{K}$ .**

At the first iteration of the algorithm, we do not have any SVM function, we take the controls which allows to go the most inside the viability constraint set. Therefore, instead of considering the function  $f$  of the SVM, we consider the following one:

$$f_K(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{C}\|^2. \quad (47)$$

Where  $\mathbf{C}$  is the center of the constraint set  $K$ , which is supposed to be the intersection of a set of hyperplanes. Moreover, we also consider this function as soon as the trajectory is outside  $K$ . For, the SVM is constrained only by its support vectors which are located inside  $K$ , and outside  $K$ , the direction defined by its gradient is not relevant.

## 5 Experiments

We use the Sequential Minimal Optimization algorithm, which has the good property to require a memory space which grows linearly with the sample size [9].

### 5.1 Example in Dimension 2 : Simplified Model of Population Growth on a Limited Space

The state  $x(t)$  of the system represents a population, which grows or diminishes with the evolution rate  $u(t)$ . The population must remain in an interval  $K = [a, b]$ , with  $a > 0$ . The dynamical system was studied by Maltus and later on by Verhulst, and then redeveloped by Aubin [2] with an inertia bound. The inertia bound  $c$  limits the modification of the evolution rate at each time step. The system in discrete time defined by a time interval  $dt$  can be written as follows:

$$x(t + dt) = x(t) + x(t)u(t)dt \quad (48)$$

$$|u(t + dt) - u(t)| \leq cdt . \quad (49)$$

In this system, the control  $u(t)$  is also considered as a component of the state of the system, because it rules the admissible controls at the next step, therefore the problem has two dimensions. We suppose that we always have:  $u(t) \in [d, e]$ . It is possible to derive analytically the viability kernel of this problem [2], it has the following expression:

$$\text{Viab}(K) = \left\{ (x, u) \text{ such that: } \begin{array}{l} x \in [a, b] \text{ and} \\ u \in \left[ -\sqrt{2c \log\left(\frac{b}{x}\right)}, \sqrt{2c \log\left(\frac{x}{a}\right)} \right] \end{array} \right\} . \quad (50)$$

## 6 Discussion

We demonstrated that it is possible to approximate viability kernels using a learning method. The first advantage to get an analytical expression of the viability kernel is that it allows one to compute optimal controls in reasonable computational time by a gradient ascent. The first tests based on SVMs are promising, although we did not manage to automatise procedures which guarantee that the SVM fulfils the requirements of the theorem. In the future, we intend to study procedures of progressive refinement of the grid, exploiting the properties of SVMs.

*Acknowledgments:* The authors are grateful to I. Alvarez, J.P. Aubin, N. Bonneuil, C. Mullon and P. Saint-Pierre for useful discussions.

## References

1. Aubin, J.P.: Viability theory. Birkhäuser (1991)
2. Aubin, J.P.: Elements of Viability theory for the Analysis of Dynamic Economics. Ecole thématique du CNRS "Economie Cognitive". (2002)
3. Béné, C., Doyen, L., Gabay, D.: A viability analysis for a bio-economic model. *Ecological Economics* **36** (2001) 385–396
4. Bonneuil, N.: Making ecosystem models viable. *Bulletin of Mathematical Biology* **65** (2003) 1081–1094
5. Campbell, C., Cristianini, N., Smola, A.: Query Learning with Large Margin Classifiers. 17<sup>th</sup> conference on Machine Learning.
6. Cristianini, N, Shawe-Taylor, J.: Support Vector Machines and other kernel-based learning methods. Cambridge University Press (2000)
7. Dietterich, T., Wang, X.: Batch Value Function Approximation via Support Vectors. NIPS (2001)
8. Mullen, C., Curry, P., Shannon, L.: Viability Model of Trophic Interactions in Marine Ecosystems. to appear in *Natural Resource Modelling*.
9. Platt, J.: Fast Training of Support Vector Machines using Sequential Minimal Optimization. (2000).
10. Quincampoix, M., Saint-Pierre, P.: An algorithm for viability kernels in Hölderian case: approximation by discrete dynamical systems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* **5** (1995) 1–13
11. Saint-Pierre, P.: Approximation of viability kernel. *Appl. Math. Optim.* **29** (1994) 187–209
12. Vapnik, V.: *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer Verlag (1995)
13. Vapnik, V.: *Statistical Learning Theory*. Wiley (1998)

## **Annexe C**

### **Un schéma anti-diffusif pour les problèmes de viabilité**



# An anti-diffusive scheme for viability problems

OLIVIER BOKANOWSKI<sup>\*</sup>, SOPHIE MARTIN<sup>†</sup>, REMI MUNOS<sup>‡</sup>, HASNAA ZIDANI<sup>§</sup>

## Abstract

This paper is concerned with numerical approximation of viability kernels. We use a characterization of the viability kernel by the value function of an optimal control problem. Since this value function is discontinuous, usual discretization schemes (such as finite differences) provide poor approximation quality because of numerical diffusion.

We investigate the use of the *ultra-bee scheme* for its anti-diffusive property in the transport of discontinuous functions. Numerical experiments, compared with the viability algorithm [8], show the relevance of this scheme for computing viability kernels and capture basins on several benchmark problems.

## 1 Introduction

We consider a control system, defined by the dynamics

$$\dot{y} = f(y, u), \quad u \in U(y) \quad (1a)$$

$$y(0) = x_0 \quad (1b)$$

where  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $U(y)$  is a compact subset in  $\mathbb{R}^m$ . We write  $F$  the set-valued map  $F(x) = \{f(x, u), u \in U(x)\}$ .

Following Aubin [2], we say that a trajectory  $y(t)$  is *viable* in a *constrained set*  $K \in \mathbb{R}^n$  if it remains in  $K$  forever:

$$\exists u(\cdot), \forall t \geq 0, y(t) \in K \quad (2)$$

The *Viability Kernel* of  $K$  under  $F$ , denoted by  $\text{Viab}_F(K)$ , is defined as the set of points  $x_0$  from which can start a viable solution, i.e.,

$$\text{Viab}_F(K) := \{x_0 \in K, \exists u(\cdot), \forall t \geq 0, y(t) \in K\} \quad (3)$$

<sup>\*</sup>Lab. Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 175 Rue Chevaleret 75013 Paris, France. Email: boka@math.jussieu.fr

<sup>†</sup>Lab. d'ingénierie et des systèmes complexes, Cemagref, 24 av. des Landais, BP 50085, 63172 Aubière Cedex, France. Email: sophie.martin@clermont.cemagref.fr

<sup>‡</sup>Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

<sup>§</sup>ENSTA, UMA, 32 Boulevard Victor, 75739 Paris Cedex 15, France. Email: zidani@ensta.fr

The viability kernel may be characterized in diverse ways through tangential conditions thanks to the viability theorems (under usual assumption, e.g. that  $F$  is a Marchaud Map or  $F$  is Lipschitz [2]). We recall that  $F$  is said to be Marchaud if it is upper semi-continuous, convex compact valued, and if  $\exists c \geq 0, \forall x, u, \|f(x, u)\| \leq c(\|x\| + 1)$ .

The viability kernel algorithm, proposed by Saint-Pierre [8] computes for a given grid  $G_h$ , a discrete viability kernel (of the discretized  $K \cap G_h$  under a time-discretized and augmented dynamics) that converges to the viability kernel  $\text{Viab}_F(K)$  when the grid resolution  $h$  tends to 0.

We first characterize the viability kernel by the infinite time limit of the value function of an evolutionary control problem.

This value function being discontinuous, usual discretization schemes such as those based on interpolation techniques (as Semi-Lagrangian, finite differences) fail to provide accurate approximations because of numerical diffusion.

Here, we propose to use the anti-diffusive *Ultra-bee scheme* extended to the resolution of Hamilton-Jacobi-Bellman equations [3], which we believe is particularly relevant to the specific shape of the value functions derived from viability problems.

So far, no convergence proof for this scheme is available. However, the numerical experiments tested on several benchmark problems and compared to Saint-Pierre's algorithm are very encouraging, in terms of the approximation error.

Extension to the computation of the *capture basin* of a target  $C \subset K$  (defined as the set of initial states  $x_0 \in K$  such that  $C$  is reached in finite time before possibly leaving  $K$  by at least one trajectory  $y(\cdot)$ ) is also treated and illustrated.

The paper is organized as follows. In section 2, we define value functions related to the above problems, and give Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations satisfied by these value functions. In section 3, we recall the Ultra-bee scheme adapted to treat HJB equations, and also define an Ultra-bee scheme for computing a capture basin. In section 4 we compare on various examples the numerical results given by the Ultra-Bee scheme and by the viability algorithm. We also thank deeply P. Saint-Pierre for allowing us to use his code.

For sake of completeness we also recall the viability algorithm in an appendix.

## 2 Statement of the problem and basic results

Let  $K$  be a compact subset of  $\mathbb{R}^n$  and  $U$  a compact subset of  $\mathbb{R}^p$ . Let  $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  be a bounded continuous map. In the sequel, we suppose that  $f$  is locally Lipschitz continuous with respect to  $x$  uniformly in  $u$ .

### 2.1 Viability kernel

For any measurable control, we denote  $y_x(t)$  the trajectory satisfying

$$\dot{y}_x = f(y_x, u) \quad u \in U(y) \tag{4a}$$

$$y_x(0) = x \tag{4b}$$

In view of the constraint given by (2), we set the following optimal control problem

$$(\mathcal{P}_x) \quad \min \{0, \exists u(\cdot), y_x(t) \in K \text{ for all } t > 0, \}$$

We define the value function associated to this problem by

$$\mathcal{V}(x) := \text{Inf}(\mathcal{P}_x)$$

where the value of  $\mathcal{V}(x)$  is supposed to be  $+\infty$  if the set of constraints is empty. Of course we thus have that  $\mathcal{V}(x) = +\infty$  if  $x \notin K$ . Also, we have

$$\mathcal{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists u(\cdot), \forall t > 0, y_x(t) \in K \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then the Viability Kernel is given by

$$\text{Viab}(K) = \{x, \mathcal{V}(x) = 0\} = \{x, \exists u(\cdot), y_x(t) \in K \forall t \geq 0\}.$$

For each  $T > 0$ , we introduce now the following optimal control problem:

$$(\mathcal{P}_{\tau,x}) \quad \min \{0, y_{\tau,x}(t) \in K \text{ for all } t \in [\tau, T]\}$$

where  $y_{\tau,x}$  is a solution of

$$\dot{y}_{\tau,x} = f(y_{\tau,x}, u) \quad u \in U(y) \tag{5a}$$

$$y_{\tau,x}(\tau) = x \tag{5b}$$

and we define also the value function associated to this problem by

$$V(T - \tau, x) = \min(\mathcal{P}_{\tau,x}).$$

We see that

$$V(T, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists u(\cdot), \forall t \in [0, T], y_{\tau,x}(t) \in K \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Lemma 2.1.** *For every  $x \in K$ ,  $V(T, x)$  converges towards  $\mathcal{V}(x)$  as  $T \rightarrow +\infty$ .*

*Proof.* We first remark that  $T \rightarrow V(T, x)$  is non-decreasing. Indeed, suppose  $T < T'$ . If  $V(T, x) = \infty$ , for any control  $u(\cdot)$ , there exists  $t \leq T$  such that  $y_x(t) \notin K$ . Since also  $t \leq T'$ , we obtain  $V(T', x) = \infty$ . If  $V(T, x) = 0$ , there is nothing to prove. Hence we have  $V(T, x) \leq V(T', x)$  in all cases.

Now if  $\mathcal{V}(x) = \infty$ , there exists  $T_1 > 0$  such that  $y_x(T_1) \notin K$ . Hence,  $V(T_1, x) = \infty$ , and this implies that  $V(T, x) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$  using the non-decreasing property. If otherwise  $\mathcal{V}(x) = 0$ , then  $\exists u(\cdot), \forall t \geq 0, y_x(t) \in K$ , and  $V(T, x) = 0$  for all  $T > 0$ . Hence also  $V(T, x) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ .  $\square$

We then have the following (which proof is left to the reader):

**Lemma 2.2.** *Let  $\Omega_T := \{x, V(T, x) = 0\}$ . Then we have*

(i)  $\Omega_{T'} \subset \Omega_T \subset K$ , for every  $T' \geq T \geq 0$ ,

(ii)  $\bigcap_{T \rightarrow +\infty} \Omega_T = \text{Viab}_K$ .

Now we propose to compute  $\Omega_T$  for  $T$  large enough, and to approximate  $\text{Viab}_K$  by  $\Omega_T$ . We thus look for an approximation for  $V(\cdot, T)$  in  $K$ . We know that the function  $V$  satisfies an HJB equation of the following form:

$$V_t - \min_{u \in U} (f(x, u) \cdot \nabla_x V) = 0, \quad t > 0, x \in K \quad (6a)$$

$$V(0, x) = 0, \quad x \in K \quad (6b)$$

$$V(t, x) = +\infty, \quad t > 0, x \notin K \quad (6c)$$

If one of the two following assumptions are satisfied

(i)  $\exists \alpha > 0, \forall x \in \partial K, \exists u \in U, \eta_x \cdot f(x, u) < -\alpha$

(ii) For all  $x \in K, A(x) := \{u, y_x \in K\} \neq \emptyset$

then  $V$  is a continuous viscosity solution in  $K$ . Here, however, the assumptions (i) or (ii) are not necessarily satisfied, since it would imply that  $\text{Viab}_F(K) = K$ . Hence in general the function  $V$  is not continuous. It is shown to be a solution of (6) in a particular sense given by Frankowska in [5]. In this paper, we propose to compute the function  $V$  by using the so called ‘‘Ultra-bee’’ scheme [4, 3] for the discretisation of (6).

The discretisation of equation (6) will be studied in section 3.

## 2.2 Capture basin

Let the target  $C$  be a subset of  $\mathbb{R}^n$ . The subset of initial states  $x \in K$  such that  $C$  is reached in finite time before possibly leaving  $K$  by at least one trajectory  $y_x(\cdot)$  is called the **capture basin** of  $C$  in  $K$  and denoted  $\text{Capt}_F(C)$ .

Let us introduce the set-valued map  $F_C$  which coincides with  $F$  outside  $C$ , equals to 0 inside  $C$  and equals to the convex hull of  $\{0\} \cup F(x)$  on  $\partial C$ . If  $K$  is a repeller for  $F$  (i.e.  $\text{Viab}_F(K) = \emptyset$ ) then  $\text{Capt}_F(C) = \text{Viab}_{F_C}(K)$ . Otherwise we have in general  $\text{Viab}_{F_C}(K) = \text{Capt}_F(C) \cup \text{Viab}_F(K)$ .

For our purpose, let  $T > 0$ . Let  $f_C$  be following dynamic:

$$f_C(x, u, v) = \begin{cases} f(x, u) & \text{if } x \in K \setminus C, \text{ and for } u \in U, \\ v f(x, u) & \text{for } x \in \partial C, u \in U, \text{ and } v \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

so that any absolutely continuous solution of the differential inclusion  $\dot{y} \in F_C(y)$  corresponds also to the solution of  $\dot{y} = f_C(y, u, v)$  for a given  $(u, v) \in L^\infty([0, T], U \times \{0, 1\})$ . Let  $\vartheta_T(t, x)$  be defined by

$$\vartheta_T(t, x) := \begin{cases} 0 & \text{if there exists } \tau \in [t, T] \text{ and } y_{t,x} \text{ a solution of the dynamic } F \text{ on } [t, \tau] \\ & \text{s.t. } y_{t,x}(\tau) \in C \text{ and } y_{t,x}(s) \in K \forall s \in [t, \tau] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

and let the capture basin before time  $T$  be

$$Capt_F(C; T) := \{x \in K, \quad \vartheta_T(0, x) = 0\}.$$

In particular,  $T \rightarrow Capt_F(C; T)$  is increasing for the inclusion, and  $\lim_{T \rightarrow \infty} Capt_F(C; T) = Capt_F(C)$ .

In order to approximate  $Capt_F(C; T)$ , let also  $\varphi_T(t, x)$  be defined as follows:

$$\varphi_T(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{if there exists } y_{t,x} \text{ a solution of the dynamic } f_C \text{ on } [t, T] \\ & \text{s.t. } y_{t,x}(T) \in C \text{ and } y_{t,x}(s) \in K \forall s \in [t, T] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

It is not difficult to obtain (assuming  $F(x, U)$  convex for all  $x$ ), the identity of the above value functions:

$$\vartheta_T(t, x) = \varphi_T(t, x).$$

In particular we can state a dynamic programming principle (for  $t + \Delta t \leq T$ )

$$\varphi_T(t, x) = \min_{u \in U, v \in \{0,1\}} \varphi_T(t + \Delta t, y_{t,x}(t + \Delta t)), \quad (7)$$

where  $y_{t,x}$  are solutions of  $(f_C)$ . The final condition is

$$\varphi_T(T, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in C \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

The last equation (7) will be discretized in the next section.

### 3 Ultra-bee scheme

In order to present the Ultra-bee (UB) scheme for the HJB equation (6) in space dimension 2, we proceed in three steps: we first present the UB scheme for linear advection in 1d, then in 2d, and finally in 2d for the HJB equation. For practical purpose, the  $+\infty$  value can be replaced by  $+1$ , and in particular the condition (6c) can be replaced by

$$V(t, x) = +1 \quad \text{if } x \notin K. \quad (9)$$

*UB scheme for 1d linear advection.* We consider the discretisation of

$$\begin{cases} v_t + f(x) v_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases} \quad (10)$$

where  $x \rightarrow f(x)$  is lipschitz-continuous, and the initial condition  $v_0$  is assumed in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Let  $(x_j)$  such that  $x_{j+1} - x_j = \Delta x$  and  $t_n = n\Delta t$  be uniform space and time discretisations, where  $\Delta x, \Delta t$  are the mesh sizes. Let  $V_j^n$  denotes a numerical approximation to the solution  $v(t_n, x_j)$ , The UB scheme for (10) takes the following form:

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + f(x_j) \frac{V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L} - V_{j-\frac{1}{2}}^{n,R}}{\Delta x} = 0, \quad (11)$$

with the initialization:

$$V_j^0 := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v_0(x) dx, \quad (12)$$

where  $x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{\Delta x}{2}$ . Here  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L}$  and  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,R}$  are numerical *fluxes* that will be defined below. We write (11) in the equivalent non-conservative form:

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \nu_j \left( V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L} - V_{j-\frac{1}{2}}^{n,R} \right), \quad (13)$$

where

$$\nu_j := \frac{\Delta t}{\Delta x} f(x_j)$$

is a “local CFL” number. We assume that  $|\nu_j| \leq 1 \forall j$ . In the case  $\nu_j = 0$ , we thus consider  $V_j^{n+1} = V_j^n$ , and the fluxes  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,R/L}$  need not to be defined.

We first set

$$\text{if } \nu_j > 0, \quad \begin{cases} b_j^+ := \max(V_j^n, V_{j-1}^n) + \frac{1}{\nu_j} (V_j^n - \max(V_j^n, V_{j-1}^n)), \\ B_j^+ := \min(V_j^n, V_{j-1}^n) + \frac{1}{\nu_j} (V_j^n - \min(V_j^n, V_{j-1}^n)). \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{if } \nu_j < 0, \quad \begin{cases} b_j^- := \max(V_j^n, V_{j+1}^n) + \frac{1}{|\nu_j|} (V_j^n - \max(V_j^n, V_{j+1}^n)), \\ B_j^- := \min(V_j^n, V_{j+1}^n) + \frac{1}{|\nu_j|} (V_j^n - \min(V_j^n, V_{j+1}^n)), \end{cases} \quad (15)$$

Now, we define the “fluxes”  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L}$  and  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,R}$  as follows (see [3])

- If  $\nu_j > 0$  then define  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L} := \min(\max(V_{j+1}^n, b_j^+), B_j^+)$ ;
- If  $\nu_j < 0$  then define  $V_{j-\frac{1}{2}}^{n,R} := \min(\max(V_{j-1}^n, b_j^-), B_j^-)$ .
- If  $\nu_j \leq 0$  and  $\nu_{j+1} \geq 0$ , then define

$$V_{j+\frac{1}{2}}^{n,R} := V_{j+1}^n \quad \text{and} \quad V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L} := V_j^n. \quad (16)$$

- If  $\nu_j \nu_{j+1} > 0$ , then define  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,R} := V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L}$  (if  $\nu_j > 0$ ) or  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L} := V_{j+\frac{1}{2}}^{n,R}$  (if  $\nu_{j+1} < 0$ ).

For stability and convergence properties of this scheme, we refer to [3]. Note that in the case  $\nu_j > 0 \forall j$ , we have  $V_{j+\frac{1}{2}}^{n,R} = V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L}$  and thus, denoting  $V_{j+\frac{1}{2}}^n = V_{j+\frac{1}{2}}^{n,L}$ , the scheme (13) takes the more simple form

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \nu_j \left( V_{j+\frac{1}{2}}^n - V_{j-\frac{1}{2}}^n \right).$$

*UB scheme for 2d linear advection.* Now we consider the equation

$$v_t + f_1(x, y)v_x + f_2(x, y)v_y = 0. \quad (17)$$

$$v(0, x, y) = v_0(x, y) \quad (18)$$

We consider a cartesian mesh  $(x_j, y_k)$  with constant mesh sizes  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  and  $y_{j+1} - y_j = \Delta y$ , and assume the CFL condition

$$\max_{i,j} \left( \max \left( |f_1(x_i, y_j)| \frac{\Delta x}{\Delta t}, |f_2(x_i, y_j)| \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \right) \leq 1. \quad (19)$$

The UB scheme (13) is extended to (17) by using simply a Trotter splitting (see [6]). The initialization step is

$$V_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_i \times J_j} v_0(x, y) \, dx \, dy \quad (20)$$

where  $I_i = [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}]$  and  $J_j = [y_j - \frac{\Delta y}{2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}]$ . Then we first compute  $(V_{i,j}^{n,1})$  from  $(V_{i,j}^0)$  by solving one time step of the UB scheme in the  $x$  direction for

$$v_t + f_1(x, y) v_x = 0$$

for each given  $y = y_j$ . Finally we obtain  $(V_{i,j}^{n+1})$  from  $(V_{i,j}^{n,1})$  by solving one time step of the UB scheme in the  $y$  direction for

$$v_t + f_2(x, y) v_y = 0$$

for each given  $x = x_i$ . The CFL condition (19) is natural because here we consider a Trotter splitting. Also, for boundary conditions we choose the value  $V_{i,j}^n = 1$  if  $(x_i, y_j) \notin K$  as in (9).

F. Lagoutière [6] proved the very interesting property that the UB scheme advects exactly a particular class of step functions, in the case of constant advection. For instance, for 2-dimensional problems, let  $u_0$  such that  $V_{i,j}^0$  initialized as in (20) belongs to the following space  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} := \{(V_{i,j}), \forall (a, b) \in \{0, 1, 2\}, V_{3i+a, 3j+b} = V_{i,j}\}.$$

Consider the UB scheme for  $v_t + f \cdot \nabla v = 0$  where  $f = (f_1, f_2) = \text{const}$  is a constant advection vector of  $\mathbb{R}^2$ . Then, assuming the CFL condition  $\max(|f_1| \frac{\Delta x}{\Delta t}, |f_2| \frac{\Delta y}{\Delta t}) \leq 1$ , we have  $\forall i, j$  and  $n \geq 0$ :

$$V_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_i \times J_j} v(t, x) \, dx$$

where  $v(t, x) = v_0(x - ft)$  is the exact solution (see also [6] for more general functions that are exactly advected).

It is this exact transportation property, which corresponds to an "antidissipative" behavior of the UB scheme, which motivates us for using it in front propagation problems such as (6). It is also numerically observed that if  $V_{i,j}^0$  does not belong to the class  $\mathcal{S}$ , then  $V_{i,j}^n$  tends to be very close to a function space such as  $\mathcal{S}$  after a few time

steps. We refer to Désprès and Lagoutière[4] for other interesting properties of the UB scheme.

*HJB-UB scheme.* We now consider the discretisation of an HJB equation of the form:

$$v_t + \max_{u \in U(x,y)} (g(x,y,u) \cdot \nabla v) = 0, \quad t > 0, (x,y) \in K \quad (21)$$

(Considering (1), we would take  $g(x,y,u) = -f(x,y,u)$ ).

We assume the CFL condition (19). The initialization of  $V_{i,j}^0$  is done as in (20). At time  $t = t_n$ , for a given  $(x_i, y_j)$  we consider  $(u_k)_{k=1, \dots, N}$  a given discretization of the admissible set  $U(x_i, y_j)$ . We denote by  $V_{i,j}^{n+1}(u)$  the UB scheme obtained from  $(V_{i,j}^n)$  by using the advection  $f(\cdot, u)$ , i.e., one time step of the UB scheme of

$$v_t + g(x,y,u) \cdot \nabla v = 0.$$

Then the HJB scheme is given by

$$V_{i,j}^{n+1} = \min_{u_k} \left( V_{i,j}^{n+1}(u_k) \right). \quad (22)$$

(the max in (21) becomes a min in (22) because of a change of signs). We refer to [3] for first applications of the “Ultra-bee” scheme to the resolution of HJB equations with discontinuous initial data. The scheme seems well adapted to treat discontinuous solutions and in particular when the value function takes only two values (0 and 1). However, presently we do not have a convergence proof of the HJB-UB scheme for (21).

*HJB-UB scheme for the computation of a viable capture basin.*

The algorithm for computing a viable capture bassin (for a given target  $C$ ) is the following in the 2d setting. The boundary condition is always

$$V(t, x, y) = 1, \quad (x, y) \notin K.$$

The initial condition is

$$V(0, x, y) = 1_{K \setminus C}(x, y), \quad (x, y) \in K,$$

i.e. the value function is 0 on  $C$  only.

For the discretisation, let  $\rho := \|(\Delta x, \Delta y)\|_2$ , and  $C_\rho := \{(x, y) \in K, d((x, y), K \setminus C) \geq \rho\}$  where  $d$  is the Euclidian distance. Then we consider for  $u \in U(x, y)$  and  $v \in \{0, 1\}$  the following approximation  $f_\rho$  of the dynamic  $f_C$  (as in Sec.2.2):

$$f_\rho(x, y, u, v) := \begin{cases} f(x, y, u) & \text{if } (x, y) \in K \setminus C, \\ v f(x, y, u) & \text{if } (x, y) \in C \setminus C_\rho, \\ 0 & \text{if } (x, y) \in C_\rho. \end{cases} \quad (23)$$

The aim is to discretize, for a given  $T > 0$ ,  $V(t, x) := \varphi_T(T - t, x)$  where  $\varphi_T$  obeys eq.(7). Note that we deduce from (7) a dynamic programming principle for  $V$ :

$$V(t + \Delta t, x) = \min_{u \in U, v \in \{0,1\}} V(t, y_{t,x}(t + \Delta t)), \quad (24)$$

where  $y = y_{t,x}$  is the solution of  $y(t) = x$  and  $\dot{y} = f_C(y, u(s), v(s))$  on  $[t, t + \Delta t]$ . In the case we have a given control  $(u(s), v(s))$  for  $s \in [t, t + \Delta t]$ , the solution is  $V(t + \Delta t, x) = V(t, y_{t,x}(t + \Delta t))$  at time  $t_{n+1} = t + \Delta t$ . It is thus approximated by the UB scheme by a value denoted  $V_{i,j}^{n+1,U^B}(u, v)$ , obtained from the values  $V_{i,j}^n$  at time  $t = t_n$  (in the cell centered in  $(x_i, y_j)$ ). Hence we propose the following scheme:

$$V_{i,j}^{n+1} = \min_{u_k, v \in \{0,1\}} \left( V_{i,j}^{n+1}(u_k, v) \right). \quad (25)$$

(where  $(u_k)_{k=1,\dots,N}$  is a given discretization of the set  $U$ ).

Note in fact that this scheme corresponds exactly to the HJB-UB scheme applied to the following "formal" HJB equation:

$$v_t + \max_{u \in U(x,y), v \in \{0,1\}} (f_\rho(x, y, u, v) \cdot \nabla v) = 0, \quad t > 0, (x, y) \in K. \quad (26)$$

*Stopping criteria.* For the computation of a viability kernel or a viable caputre basin using the UB scheme, the principle is to evolve in time (using a time step  $\Delta t > 0$  satisfying the CFL condition 19), and to stop the scheme when the values  $V_{i,j}^n$  are numerically converging. In practice, for the first two tests of the following section, the UB scheme is stopped when the quantity  $\|V^n - V^{n-1}\|_{L^1} := \Delta x \Delta y \sum_{i,j} |V_{i,j}^n - V_{i,j}^{n-1}|$  satisfies:

$$\|V^n - V^{n-1}\|_{L^1} \leq 10^{-4}.$$

## 4 Numerical tests

In the following numerical tests, for the viability algorithm, we have used the basic version as presented in [8].

**Example 1 (consummation problem)** We consider the problem of computing the viability kernel for:

$$\dot{x}(t) = x(t) - y(t), \quad (27a)$$

$$\dot{y}(t) \in [-c, c], \quad (27b)$$

with  $c = 1/2$ , and the constraints  $x(t) \in [0, 2]$  and  $y(t) \in [0, 3]$ . This corresponds to a consummation problem [8, 2]. Hence here  $K := [0, 2] \times [0, 3]$  and the corresponding time dependant 2d HJB problem is

$$V_t + \max_{u=\pm c} (-f(x, y, u) \cdot \nabla v) = 0, \quad \forall t > 0, \forall (x, y) \in K,$$

$$V(0, x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in K,$$

$$V(t, x, y) = 1, \quad \forall (x, y) \notin K, t \geq 0,$$

where  $f(x, y, u) = \begin{pmatrix} x - y \\ u \end{pmatrix}$ . We have replaced the  $+\infty$  value by 1 for commodity, and still have  $\Omega_t = \{x, V(t, x) = 0\}$ .

We have plotted in Fig. 1 the results given by P. Saint-Pierre algorithm and by the HJB-UB scheme, for various mesh size ( $P_x = P_y = 50$  and  $100$ ). For the UB scheme we have used time steps  $\Delta t \simeq 0.013$  and  $0.007$  respectively, and stopped the computation at time  $t_n = n\Delta t = 5$  approximately. We have also used  $N_u = 2$  ( $u \in \{-c, c\}$ ). The black lines delimit the border of the exact solution.

Note that P. Saint-Pierre algorithm computes values 0 or 1. In our algorithm, we compute values which are 0 or 1, or some intermediary value. The intermediary values are observed to be always on a "frontier" which bandwidth is about one or two mesh size. The error on this frontier is not diffused by the scheme (to the contrary to most numerical methods as Semi-Lagrangian or finite difference methods), but stays well localised in a small bandwidth.

In Fig. 1 and the following, the small black square regions represent the computed viability kernel (or capture basin).

For the UB scheme, the black square regions are associated with the points where  $0 \leq V_{ij}^n \leq \epsilon$  with  $\epsilon = 10^{-10}$  (the points from which we should be able to reach the target in time lesser than or equal to  $t_n$ ); the grey points represents the mesh box with an intermediary value of  $V_{ij}^n$  between 0 (black) and 1 (white). More precisely, these boxes are represented if  $\epsilon \leq V_{ij}^n \leq 1 - \epsilon$ . This correspond to mesh boxes where the discontinuity is detected.

**Example 2 (Zermelo problem).** In this example, we compute the viable capture basin for a "Zermelo Problem":

$$\dot{x}(t) = 1 - ay(t)^2 + u \cos(\theta), \quad (28a)$$

$$\dot{y}(t) = u \sin(\theta) \quad (28b)$$

in the domain  $(x, y) \in K := [-6, 2] \times [-2, 2]$ , and for controls  $0 \leq u \leq u_{max} := 0.44$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ , with  $a = 0.1$ . The target is chosen here as the ball  $C := B(0, r)$  with  $r = 0.44$ .

Patrick Saint-Pierre (see [9] in this case) and UB schemes are compared in Fig.2, with  $P_x = P_y = 100$ . For the UB scheme, we have used  $N_u = 20$  points and  $dt \simeq 0.019$ . the stopping criteria was  $\|V^n - V^{n-1}\|_{L^1} \leq 10^{-4}$ , which gave a stopping time  $t \simeq 7$ .

The circle delimits the border of the target, and the black lines also delimit the exact viable capture basin (we have computed the limit trajectories by using the Pontryagin Principle, see Bryson and Ho [1]).

Note that a good preliminary approximation is also obtained by the UB scheme even with a small number of mesh points. For instance in Fig.3 we have used  $P_x = P_y = 20$  (with same number of controls, and  $\Delta t \simeq 0.27$ ).

**Example 3.** In this example, we compute the "capture bassin" for the following 2d rotational dynamic:

$$f(x, y, u) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

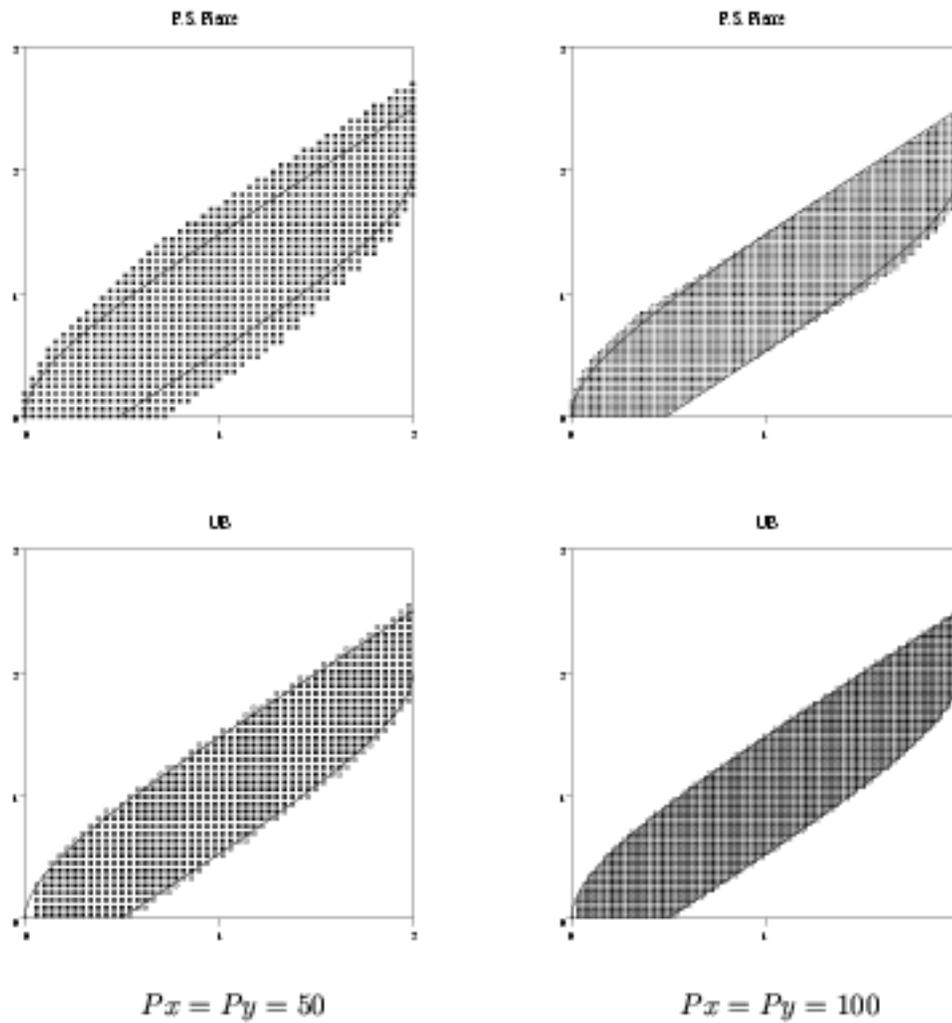


Figure 1: Comparison of P. Saint-Pierre algorithm and the UB scheme for the consumption problem

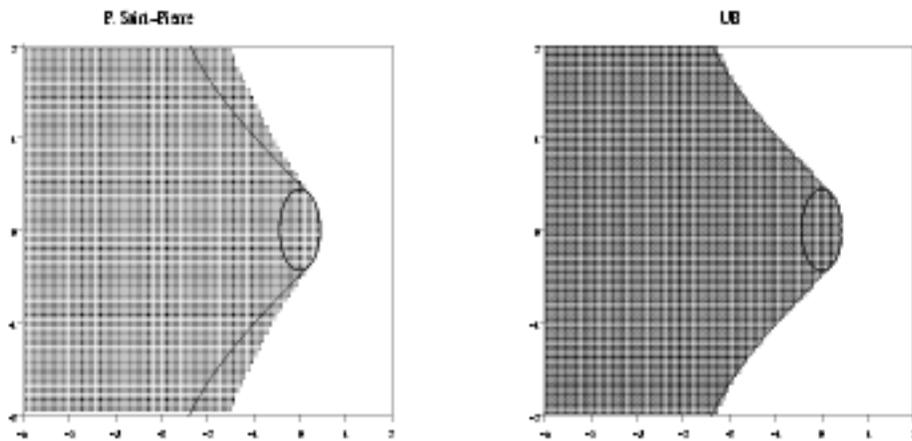


Figure 2: Approximation of the viable capture basin for the Zermelo problem,  $P_x = P_y = 100$

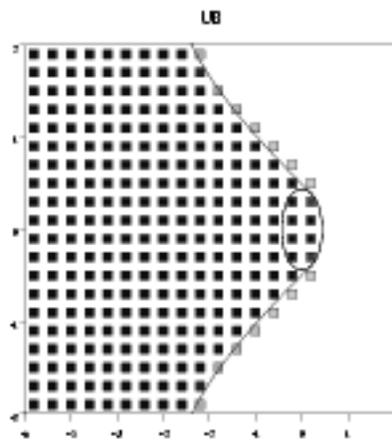


Figure 3: Zermelo problem,  $P_x = P_y = 20$

on the domain  $K = [-1, 1]^2$ . The target is the ball centered in  $(0.5, 0)$  and of radius 0.2, i.e.,

$$C := \{(x, y) \in K, (x - 0.5)^2 + y^2 \leq 0.2^2\}.$$

Note that in the dynamic  $f$  there is no dependency over a control  $u$ ; however, the UB scheme does use a dynamic that depend of a control  $v$  as in (23) (hence in practice we have  $N_u = 2$ ).

In Fig.4 we compare the P. Saint-Pierre and UB schemes at time  $t = \pi$  (half a turn), with  $P_x = P_y = 100$  (and  $\Delta t = 0.02$ ) and  $P_x = P_y = 200$  (and  $\Delta t = 0.01$ ). The small circle delimits the target and the black line represents the border of the exact solution. In Fig.5 we show the results with the UB scheme at time  $t = 10\pi$  (five turns), with  $P_x = P_y = 50$  and  $P_x = P_y = 100$  ( $\Delta t = 0.04$  and  $\Delta t = 0.02$  resp.). We see that the UB scheme present no visible diffusion, even on a long time period, whereas the P. Saint Pierre scheme - not shown for the case  $t = 10\pi$  - has a tendency to diffuse more and more with time.

This example well illustrates the problem of diffusion of some schemes. A diffusive algorithm is going to create more and more errors as we go far from the target (or as time goes on). However the anti-diffusive scheme well approximates the viable capture basin even for long time as illustrated in Fig.5. (We have used  $P_x = P_y = 25, 50$  and 100 with  $\Delta t = 0.077, 0.038$  and 0.019 resp.)

**Example 4.** In this example we compute the viable capture basin for the following target problem

$$f(x, y, u) = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix},$$

on a domain  $K = [-1, 1]^2$ , with control  $u \in [-1, 1]$ . The target is a “thin target”  $C := (0, 0)$ . Numerically, the mesh for the UB scheme is chosen so that  $(0, 0)$  be the center of a mesh box of size  $(\Delta x, \Delta y)$ , and the initial data is  $V_{i,j} = 0$  if  $(x_i, y_j) = (0, 0)$  and  $V_{i,j} = 1$  otherwise (this corresponds to take  $v_0(x, y) = 1_{|x| \leq \Delta x/2, |y| \leq \Delta y/2}$ ). We also choose, for numerical reasons, to discretise the problem with three controls  $u \in \{-1, 0, 1\}$ .

The results are given in Fig.6. As before, we obtain a small error and a small diffusion with the UB scheme, compared with Saint-Pierre’s algorithm.

**Acknowledgments.** The authors wish to thank P. Saint Pierre for useful discussions and for help using his code.

## A Patrick Saint Pierre Algorithm

The aim of Saint-Pierre [8] is to determine the viability kernel in a constructive way by using discrete approximation. Quincampoix and Saint-Pierre studied the case of a Hölderian differential inclusion [7]. They approximate this kernel by kernels of discrete dynamical systems and then by finite kernels of finite discrete dynamical systems.

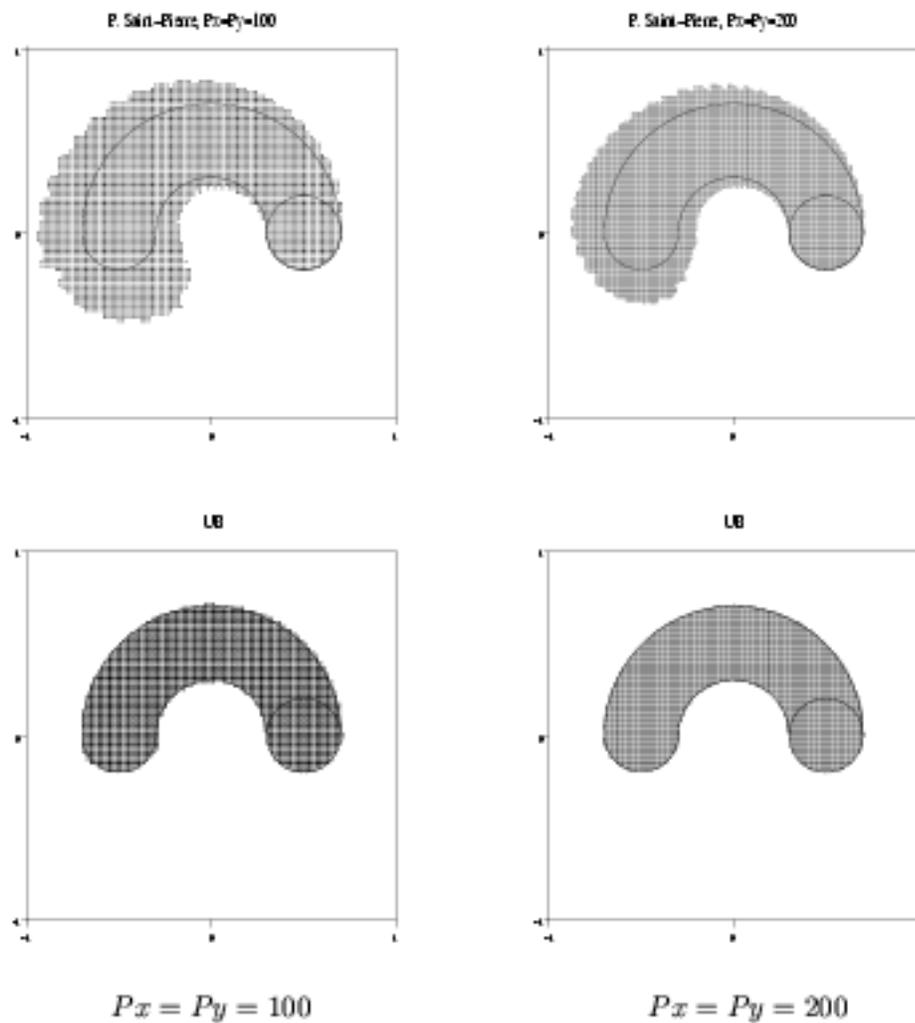
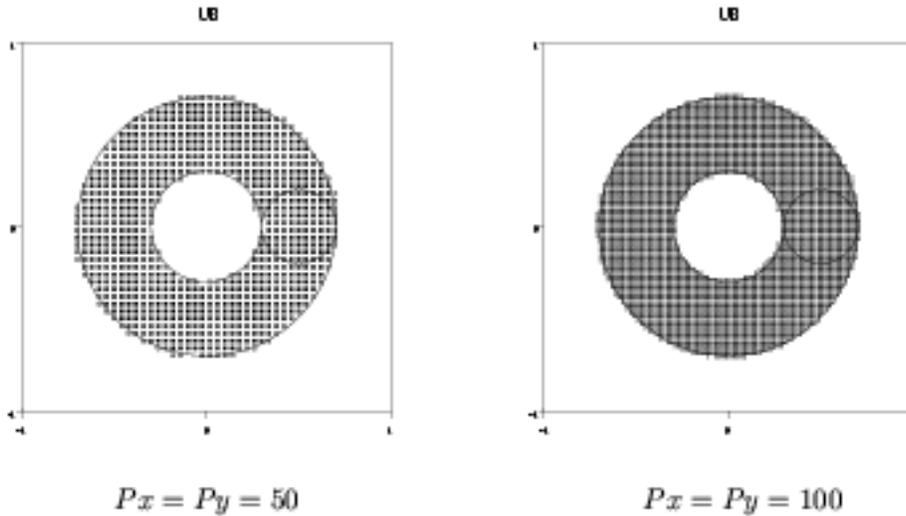


Figure 4: points that can reach the target in time  $t \leq \pi$

Figure 5: points that can reach the target in time  $t \leq 10\pi$  (UB scheme)

### A.1 Introduction and Notations.

Let  $X$  a finite-dimensional vector space and let  $K$  be a compact subset of  $X$ . We consider the differential inclusion:

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x) & \text{for almost all } t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in K, \end{cases} \quad (29)$$

where  $F$  is a Marchaud map defined from  $X$  to  $X$ .

With this inclusion, for a fixed  $\rho > 0$ , we associate the discrete explicit scheme:

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} - x^n}{\rho} \in F(x^n) & \text{for all } n \geq 1, \\ x^0 = x_0 \in K. \end{cases} \quad (30)$$

We denote by  $G_\rho$  the set-valued map  $G_\rho = 1 + \rho F$  and the system (30) can be rewritten as follows:

$$x^{n+1} \in G_\rho(x^n) \text{ for all } n \geq 0. \quad (31)$$

The viability kernel of  $K$  under  $F$  is the subset of all elements  $x_0 \in K$  such that at least a viable solution starting at  $x_0$  exists [2]. We denote it  $\text{Viab}_F(K)$ . As far as the discrete dynamical system associated with  $G$  is concerned, we denote the discrete viability kernel of  $K$  under  $G$   $\text{Viab}_G(K)$ .

### A.2 Approximation by Kernels of Discrete Dynamical Systems

Saint-Pierre [8] first addresses the problem of the approximation of kernels of discrete dynamical systems. Under some assumptions, Saint-Pierre [8] proves that, if the se-

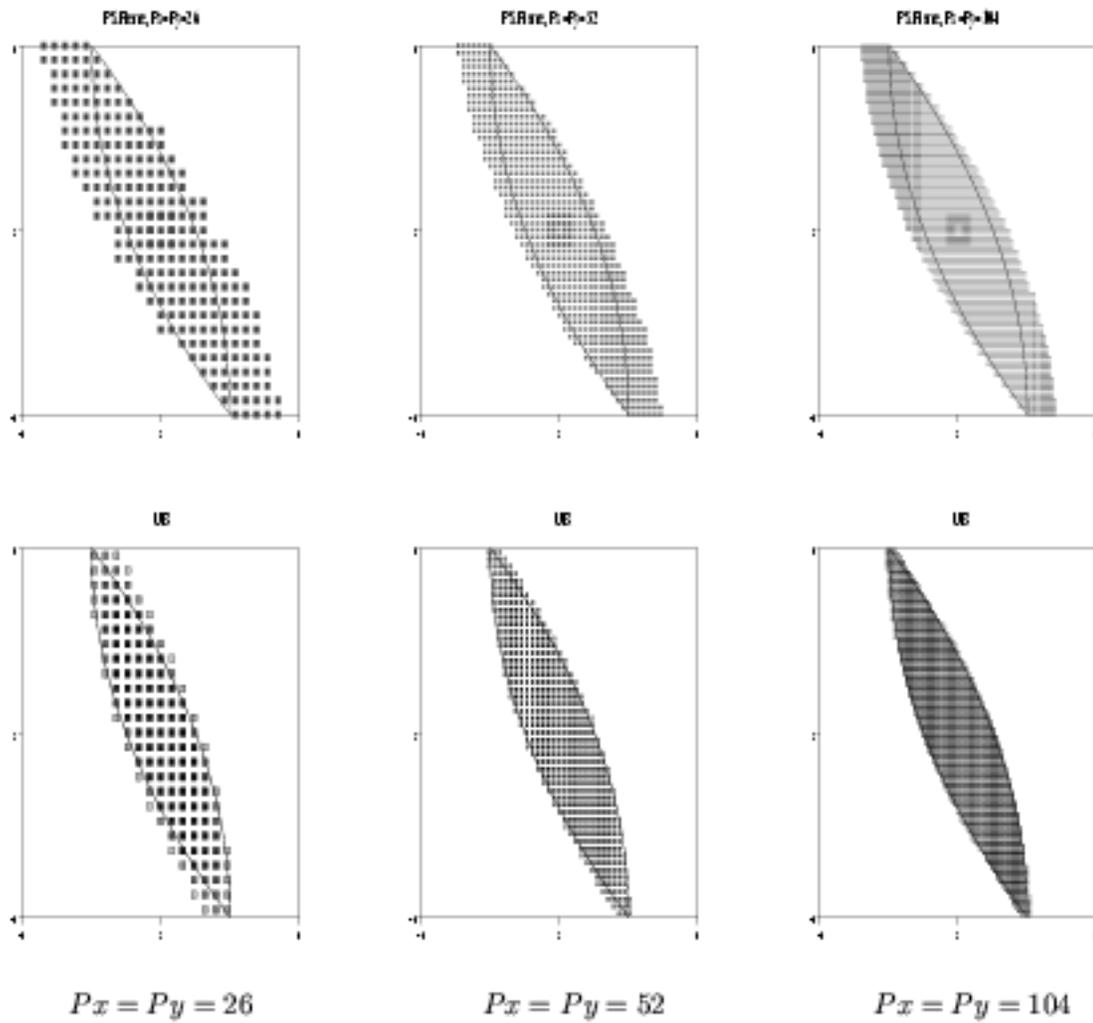


Figure 6: Cible problem, points that can reach the target in time  $t \leq 1$

quence  $(K^n)_n$  (with  $K^0 = K$ ) is defined as follows:

$$K^{n+1} := \{x \in K^n \text{ such that: } G(x) \cap K^n \neq \emptyset\} \quad (32)$$

then  $\text{Viab}_G(K) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K^n$ .

He next proves the convergence of the following approximation process:

**Theorem A.1.** *Let  $F$  be a Marchaud and  $\ell$ -Lipschitz set-valued map and  $K$  a closed subset of  $X$  such that  $M := \sup_{x \in K} \sup_{y \in F(x)} \|y\| < +\infty$ .*

*Consider  $F_\rho := F + \frac{M\ell}{2}\rho B$  and  $\Gamma_\rho := 1 + F_\rho$ . Then*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{Viab}_{\Gamma_\rho}(K) = \text{Viab}_F(K). \quad (33)$$

### A.3 Approximation by Finite Set-Valued Maps

With any  $h \in R$  we associate  $X_h$  a countable subset of  $X$  for instance a grid with step  $h$ . Let  $G_h : X_h \rightarrow X_h$  a finite set-valued map and a subset  $K_h \subset \text{Dom}(G_h)$ . The finite dynamical system associated with  $G_h$  is

$$x_h^{n+1} \in G_h(x_h^n) \text{ for all } n \geq 0. \quad (34)$$

Saint-Pierre first remarks that, if the sequence  $(K_h^n)_n$  (with  $K_h^0 = K_h$ ) is defined as follows:

$$K_h^{n+1} := \{x \in K_h^n \text{ such that: } G_h(x) \cap K_h^n \neq \emptyset\} \quad (35)$$

then  $\text{Viab}_{G_h}(K_h) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_h^n$ . Moreover, there exist  $p$  finite such that  $\text{Viab}_{G_h}(K_h) = K_h^p$ .

Let  $G^\tau : X \rightarrow X$  such that  $\forall x \in X, G^\tau(x) = G(x) + \tau B$ . The following proposition links finite discrete viability kernels and discrete viability kernels:

**Proposition A.1.** *Let  $G : X \rightarrow X$  be an upper semicontinuous set-valued map with closed values and  $K$  a closed subset of  $\text{Dom}(G)$ . Let  $\tau > 0$  be such that for all  $x \in \text{Dom}(G^\tau) \cap X_h, G^\tau(x) \cap X_h \neq \emptyset$ , then*

$$\text{Viab}_{G^\tau}(K_h) \subset \text{Viab}_{G^\tau}(K) \cap X_h$$

Furthermore, for a good choice of  $\tau$ , these sets coincide.

Gathering the preceding results Saint-Pierre proves the following convergence properties of approximations of viability kernel of  $K$  under  $F$  with finite viability kernels computable in a finite number of steps:

$$\limsup_{\rho, h \rightarrow 0} \text{Viab}_{G_{\rho h}^{M\ell\rho^2}}(K_h^{M\ell\rho^2}) = \text{Viab}_F(K)$$

with  $G_\rho^{2Mt\rho^2} : X \rightarrow X$  and  $G_{\rho h}^{2Mt\rho^2} : X_h \rightarrow X_h$  defined as follows :

$$G_\rho^{2Mt\rho^2} := x + \rho F(x) + 2M\ell\rho^2 \mathcal{B}$$

$$G_{\rho h}^{2Mt\rho^2} := G_\rho^{2Mt\rho^2} \cap X_h.$$

$$K_h^{Mt\rho^2} := (K + M\ell\rho^2) \cap X_h.$$

This viability kernel algorithm allows to compute the exact discrete and finite viability kernel of the associated discrete problem defined on a finite grid. It is very fast but very greedy for memory.

## References

- [1] Bryson A.E. and Ho Y.C. *Applied optimal control*. Hemisphere Publishing, New-York, 1975.
- [2] J.P. Aubin. *Viability theory*. Birkhäuser, 1991.
- [3] O. Bokanowski and H. Zidani. Anti-dissipative schemes for advection and application to hamilton-jacobi-bellman equations. *Inria Report*, RR-5337, 2004.
- [4] B. Després and F. Lagoutière. Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *J. Sci. Comput.*, 16:479–524, 2001.
- [5] Hélène Frankowska and Sławomir Plaskacz. Semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with degenerate state constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, 251(2):818–838, 2000.
- [6] F. Lagoutière. PhD thesis, University of Paris VI, Paris, 2000.
- [7] M. Quincampoix and P. Saint-Pierre. An algorithm for viability kernels in hölderian case: approximation by discrete dynamical systems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 5:1–13, 1995.
- [8] P. Saint-Pierre. Approximation of viability kernel. *Appl. Math. Optim.*, 29:187–209, 1994.
- [9] Patrick Saint-Pierre. Viable capture basin for studying differential and hybrid games: application to finance. *Int. Game Theory Rev.*, 6(1):109–136, 2004.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le développement durable et la résilience</b>	<b>3</b>
1.1	Le développement durable : une ambition de gestion . . . . .	4
1.1.1	Historique . . . . .	4
1.1.2	Inquiétudes et critiques . . . . .	6
1.1.3	Science et durabilité . . . . .	7
1.2	Construire des outils d'aide à la gestion . . . . .	8
1.2.1	Construire des outils de compréhension et de prévision . . . . .	9
1.2.2	Modéliser les systèmes écologiques et sociaux . . . . .	9
1.3	Formaliser les concepts liés à la durabilité . . . . .	11
1.3.1	Formaliser le concept de stabilité . . . . .	12
1.3.2	Formaliser le concept de résilience . . . . .	13
1.4	Revue des définitions de la résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux . . . . .	14
1.4.1	Définitions opérationnelles issues de la définition de Pimm . . . . .	14
1.4.2	Définitions opérationnelles issues de la définition de Holling . . . . .	16
1.4.3	Limites . . . . .	17
1.5	Objectif de la thèse . . . . .	19
1.6	Démarche . . . . .	20
<b>2</b>	<b>La résilience dans le formalisme de la viabilité</b>	<b>21</b>
2.1	La théorie de la viabilité . . . . .	21
2.1.1	Un formalisme adapté à la modélisation de systèmes écologiques et sociaux . . . . .	21
2.1.2	Plusieurs applications issues de la littérature . . . . .	22
2.1.3	Des concepts et théorèmes principaux utiles pour notre définition de la résilience . . . . .	23
2.2	La définition de la résilience . . . . .	34
2.2.1	Les conditions de compatibilité avec la définition conceptuelle de Holling . . . . .	34
2.2.2	La formulation mathématique dans le cas d'un système contrôlé . . . . .	36
2.2.3	La formulation mathématique dans le cas d'un jeu dynamique . . . . .	42

<b>3</b>	<b>Les algorithmes de calcul de noyaux de viabilité</b>	<b>49</b>
3.1	L'algorithme de viabilité de Saint-Pierre . . . . .	50
3.1.1	Problème posé . . . . .	50
3.1.2	Théorèmes de convergence des approximations par des noyaux de viabilité de systèmes dynamiques discrets en temps . . . . .	51
3.1.3	Théorèmes de convergence des approximations par des noyaux de viabilité de systèmes dynamiques discrets finis . . . . .	54
3.1.4	Processus de construction des noyaux de viabilité approchés . . . . .	56
3.1.5	Description schématique du fonctionnement du programme implémenté à partir de cet algorithme . . . . .	57
3.1.6	Limites . . . . .	58
3.2	Améliorer l'implémentation de l'algorithme de viabilité . . . . .	58
3.2.1	Remplacer le tableau de points par une structure plus économe en mémoire . . . . .	60
3.2.2	Garder en mémoire les derniers contrôles viables . . . . .	69
3.2.3	Utiliser le schéma numérique de Runge-Kutta . . . . .	72
3.3	Utiliser des méthodes de discrimination : les Machines à Vecteurs Supports . . . . .	75
3.3.1	Les motivations . . . . .	75
3.3.2	L'algorithme d'approximation du noyau de viabilité discret avec une méthode de discrimination . . . . .	76
3.4	Remplacer l'espace par le temps : l'algorithme de viabilité lourd . . . . .	80
3.4.1	Le principe de l'algorithme de viabilité lourd . . . . .	80
3.4.2	La description de l'implémentation de l'algorithme . . . . .	81
3.5	Utiliser un schéma anti-diffusif : l'ultra-bee . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Les valeurs de résilience dans des modèles de lacs</b>	<b>89</b>
4.1	L'eutrophisation des eaux de surface . . . . .	90
4.1.1	Description du phénomène d'eutrophisation des eaux de surface . . . . .	90
4.1.2	Différents objectifs associés à l'étude du phénomène d'eutrophisation à l'aide de modèles dynamiques . . . . .	92
4.2	L'évaluation de la résilience dans un modèle simple d'eutrophisation des lacs . . . . .	95
4.2.1	Le modèle . . . . .	95
4.2.2	Les résultats . . . . .	100
4.3	L'évaluation de la résilience dans un modèle plus complexe d'eutrophisation des lacs . . . . .	117
4.3.1	La variable supplémentaire : la quantité de phosphore à l'état de sédiments dans la vase . . . . .	119
4.3.2	L'influence de la variable supplémentaire sur les valeurs d'une fonction indicateur de coût en horizon infini . . . . .	121
4.3.3	L'influence de la variable supplémentaire sur les valeurs de la résilience . . . . .	124

<b>5 Conclusion</b>	<b>129</b>
5.1 Bilan de la recherche . . . . .	130
5.2 Perspectives . . . . .	132
5.2.1 Augmenter le réalisme du modèle d'eutrophisation des lacs . . . . .	132
5.2.2 Approfondir l'étude de la définition de la résilience proposée . . . . .	133
5.2.3 Étendre l'approche suivie à d'autres concepts essentiels de l'écologie	134
Bibliographie . . . . .	135
<b>A Une variante du théorème de convergence</b>	<b>145</b>
<b>B Approximation de noyaux de viabilité avec des SVMs</b>	<b>151</b>
<b>C Un schéma anti-diffusif pour les problèmes de viabilité</b>	<b>165</b>



# Table des figures

2.1	L'épigraphe de la fonction étendue $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est colorié en gris dans la figure de gauche. L'hypographe de la fonction étendue $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est colorié en gris dans la figure de droite. . . . .	27
3.1	Initialisation : les points de la grille appartenant à $D_1^0$ sont représentés par des carrés pleins. . . . .	59
3.2	Une étape du calcul de noyau de viabilité discret fini : passage de $D_1^n$ représenté par les carrés pleins et les carrés vides à $D_1^{n+1}$ composé uniquement des carrés pleins. Les points représentés par des carrés vides comme le point $x$ , dont les successeurs sont entourés par des cercles, n'ont pas de successeur parmi les points de $D_1^n$ . . . . .	59
3.3	Raffinement : passage de $D_1^\infty$ représenté par les grands carrés pleins à $D_2^0$ composé des points représentés par les carrés pleins petits et grands. . . . .	60
3.4	Recouvrement de $M^3$ par des cubes. . . . .	63
3.5	Numérotation des sommets d'un cube. . . . .	63
3.6	Nombre d'octets nécessaires au codage en fonction de la longueur de la suite avec une échelle logarithmique. En pointillés rouges, le codage classique. En courbes pleines noires, le codage que nous proposons : chaque courbe correspond à une valeur du nombre de composantes connexes de l'ensemble des 1. . . . .	64
3.7	Schéma de la structure en dimension $n$ . . . . .	65
3.8	Dédoublément des hypercubes de dimension 3 successivement dans les trois dimensions. Le nombre de cubes est multiplié par $2^3$ . . . . .	67
3.9	Dédoublément des hypercubes de dimension 3 dans la direction $j$ . Représentés par des carrés pleins, les sommets dont les chaînes binaires associées sont conservées, en carrés vides, ceux dont les chaînes binaires associées doivent être créées. . . . .	68

3.10 Algorithme de viabilité lourd - Phase d'exploration. Les coordonnées des points représentés par des grands disques rouges ainsi que les contrôles qui permettent de passer de l'un à l'autre sont enregistrés dans la structure `trame`, ils constituent l'évolution active : cette évolution issue de  $x$  reste dans  $K$  durant 5 pas de temps au moins. Les coordonnées des points représentés par des carrés bleus pleins ou vides sont notés non viables dans la structure `listeX` avec la durée de vie égale à 1 pour les carrés bleus vides et égale à 2 pour les carrés bleus pleins. . . . . 84

3.11 Algorithme de viabilité lourd - Phase d'exploitation. Si  $x$  est déclaré viable à la suite de la phase d'exploration, la phase d'exploitation va chercher tous ses prédécesseurs pour les déclarer viables également. Les coordonnées des points représentés par des disques pleins verts ainsi que les contrôles qui permettent de passer de l'un à l'autre sont enregistrés dans la structure `trame`, ils constituent l'évolution active qui évolue afin de recenser tous les prédécesseurs de  $x$  appartenant à  $K$ . Les coordonnées des prédécesseurs recensés (points représentés par des carrés vides bleus) sont notés viables dans la structure `listeX`. . . . . 85

4.1 Diagrammes de bifurcation pour le modèle de lac simplifié en prenant comme valeurs de paramètres  $q = 8$ ,  $r = 1$ ,  $m = 1$ , et  $b = 0.4$  (gauche),  $b = 0.8$  (milieu),  $b = 2$  (droite) (avec  $q$  l'exposant,  $r$  le taux maximal de recyclage,  $m$ , la valeur de  $P$  pour laquelle le recyclage atteint la moitié de sa valeur maximale, et  $b$  la proportion de phosphates perdus à chaque pas de temps). Les courbes pleines représentent le lieu des équilibres stables et les courbes en pointillés les équilibres instables dans le plan  $(L, P)$ . . . . . 97

4.2 Les équilibres viables (segment EQ) et, hachurée en gris, la niche de viabilité  $N(0)$  associée au contrôle permanent  $u(t) = 0$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir.  $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 1.2$ . . . . . 101

4.3 Noyaux de viabilité pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ). L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir.  $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 1.2$  et  $V L_{max}$  prend des valeurs croissantes.  $Viab(K)$  est colorié en gris clair. La niche de viabilité  $N(0)$ , qui est contenue dans le noyau de viabilité, est hachurée en blanc. . . . . 102

- 4.4 Noyaux de viabilité pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) pour différentes valeurs de  $(L_{min}, P_{max})$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir et  $\text{Viab}(K)$  est colorié en gris clair. ( $VL_{max} = 0.1$ ). Faire varier la paire  $(L_{min}, P_{max})$  modifie la forme du noyau de viabilité : si  $P_{max}$  est strictement plus petit que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ , alors le noyau est vide ; sinon, la forme du noyau dépend des comparaisons entre  $P_{max}$  et les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ . La courbe  $g$  définit la frontière de droite du noyau de viabilité et correspond à une portion de trajectoire d'une évolution satisfaisant  $u(t) = -VL_{max}$ . . . . . 104
- 4.5 Noyaux de viabilité pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) pour différentes valeurs de  $(L_{min}, P_{max})$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir et  $\text{Viab}(K)$  est colorié en gris clair. ( $VL_{max} = 0.1$ ). Faire varier la paire  $(L_{min}, P_{max})$  modifie la forme du noyau de viabilité : si  $P_{max}$  est strictement plus petit que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ , alors le noyau est vide ; sinon, la forme du noyau dépend des comparaisons entre  $P_{max}$  et les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ . La courbe  $g$  définit la frontière de droite du noyau de viabilité et correspond à une portion de trajectoire d'une évolution satisfaisant  $u(t) = -VL_{max}$ . . . . . 105
- 4.6 Noyaux de viabilité pour un lac réversible ( $b = 2$ ) pour différentes valeurs de  $(L_{min}, P_{max})$ . L'ensemble des contraintes,  $K = [L_{min}, L_{max}] \times [0, P_{max}]$ , est entouré par un rectangle noir et  $\text{Viab}(K)$  est colorié en gris clair. ( $VL_{max} = 0.1$ ). Faire varier la paire  $(L_{min}, P_{max})$  modifie la forme du noyau de viabilité : si  $P_{max}$  est strictement plus petit que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ , alors le noyau est vide ; si  $P_{max}$  est strictement plus grand que les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{max}$ , alors le noyau et  $K$  coïncident ; dans les autres cas, la forme du noyau dépend des comparaisons entre  $P_{max}$  et les valeurs de  $P$  des équilibres associés à  $L_{min}$ . . . . . 106
- 4.7 Évolutions issues d'états non viables et contrôlées par l'équation (4.15) pour (a) un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) et (b) un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ). ( $L_{min} = 0.1, L_{max} = 1, P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Le temps est indiqué par des cercles dessinés sur la trajectoire à intervalles de temps réguliers. Les flèches indiquent le sens des évolutions. Les évolutions qui atteignent  $\text{Viab}(K)$  en temps fini sont tracées en lignes continues, les autres en pointillés. Dans le cas du lac hystérésique (b), toutes les évolutions atteignent  $\text{Viab}(K)$  en temps fini, alors que la plupart d'entre elles sont absorbées par un équilibre associé à une forte valeur de  $P$  dans le cas du lac irréversible (a). . . . . 108

- 4.8 Lignes de niveau de la fonction temps de crise pour (a) un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) et (b) un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les temps de crise de deux états appartenant à la même ligne continue sont finis et égaux.  $Viab(K)$  (zone en gris clair) et l'ensemble des états pour lesquels le temps de crise est nul coïncident. Le temps de crise est infini pour  $L$  strictement plus petit que  $L_{min}$  dans les deux cas. Dans le cas du lac irréversible (a), l'ensemble des états pour lesquels la valeur de l'indicateur de coût est infinie (zone hachurée), contient strictement l'ensemble  $\{L < L_{min}\}$ , car, à partir de certains états, la propriété représentée par  $K$  ne peut être restaurée. . . . . 109
- 4.9 Lignes de niveau de la fonction indicateur de coût  $\lambda$  pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) (colonne de gauche) et pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) (colonne de droite) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les paramètres de la fonction indicateur de coût  $\lambda$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , valent, respectivement, 0.3 et 17 dans la première rangée, et 1.5 et 5 dans la seconde. Les valeurs des indicateurs de coût de deux états appartenant à la même courbe colorée sont égales.  $Viab(K)$  (zone en gris clair) et l'ensemble des états pour lesquels la valeur de l'indicateur de coût est nulle coïncident. Dans le cas du lac hystérésique (colonne de droite), les valeurs des indicateurs de coût sont finies, alors que les indicateurs de coût prennent la valeur infinie dans le cas du lac irréversible (colonne de gauche). . . . . 110
- 4.10 Graphe de l'indicateur de coût  $\lambda$  pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) (colonne de gauche) et pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) (colonne de droite) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les paramètres de la fonction indicateur de coût  $\lambda$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , valent, respectivement, 0.3 et 17 dans la première rangée, et 1.5 et 5 dans la seconde. La valeur de l'indicateur de coût est représentée sur l'axe vertical. En deux points de même coordonnée verticale (couleur identique), la valeur de l'indicateur de coût est la même.  $Viab(K)$  (zone bleu foncé) et l'ensemble des états pour lesquels le temps de crise est nul coïncident. Dans le cas du lac hystérésique (colonne de droite), les valeurs des indicateurs de coût sont finies, alors que les indicateurs de coût prennent la valeur infinie dans le cas du lac irréversible (colonne de gauche). 114
- 4.11 Lignes de niveau de la résilience pour un lac irréversible ( $b = 0.4$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les indicateurs de coût utilisés pour évaluer la résilience sont  $\gamma$  dans la première ligne et  $\lambda$  dans la seconde. Les perturbations envisagées sont des augmentations brusques de la concentration en phosphates d'intensité maximale  $\alpha = 0.15$ . Les valeurs de résilience de deux états appartenant à la même courbe sont égales. Le sous-ensemble de  $Viab(K)$  pour lequel la résilience est infinie est hachuré en gris clair. L'ensemble de résilience nulle est colorié en gris foncé. . . . . 115

4.12 Lignes de niveau de la résilience pour un lac hystérésique ( $b = 0.8$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). Les indicateurs de coût utilisés pour évaluer la résilience sont  $\gamma$  dans la première ligne et  $\lambda$  dans la seconde. Les perturbations envisagées sont des augmentations brusques de la concentration en phosphates d'intensité maximale  $\alpha = 0.15$ . Les valeurs de résilience de deux états appartenant à la même courbe sont égales. Le sous-ensemble de  $Viab(K)$  pour lequel la résilience est infinie est hachuré en gris clair. . . . . 116

4.13 La résilience de l'état de coordonnées  $L = 0.2$  et  $P = 0.25$  en fonction de l'intensité maximale de la perturbation,  $\alpha$ , pour les deux indicateurs de coût,  $\gamma$  (ligne continue) et  $\lambda$  avec comme valeurs de paramètres  $c_1 = 1.5$  et  $c_2 = 5$  (ligne en pointillés). Le lac est hystérésique ( $b = 0.8$ ) ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). . . . . 118

4.14 Les valeurs approchées de l'indicateur de coût obtenues par le calcul du noyau de viabilité du système (4.38). Les quatre graphes représentent quatre coupes réalisées pour quatre valeurs de la concentration en phosphore à l'état de sédiments dans la vase :  $M = 0$ ,  $M = 2.4$ ,  $M = 4.8$  et  $M = 7$  ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). . . . . 123

4.15 Les valeurs approchées de l'indicateur de coût obtenues par le calcul du noyau de viabilité du système (4.38). Les deux graphes représentent deux coupes réalisées pour deux valeurs des apports de phosphates :  $L = 0.38$  et  $L = 0.66$  ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). . . . . 124

4.16 Les valeurs de la résilience dans le plan  $(P, M)$  pour  $L = 0.38$  fixé et  $\beta = 0.48$  ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). . . . . 126

4.17 L'ensemble des perturbations causant le coût maximal en fonction des valeurs de  $P$  et de  $M$ , la valeur de  $L$  étant fixée,  $L = 0.38$ . À chaque couleur correspond l'ensemble des perturbations dont le coût approché est maximal ( $L_{min} = 0.1$ ,  $L_{max} = 1$ ,  $P_{max} = 0.5$  et  $VL_{max} = 0.1$ ). . . . . 126