



Modélisation multi-échelles de structures hétérogènes aux comportements anélastiques non-linéaires

Damijan Markovic

► To cite this version:

Damijan Markovic. Modélisation multi-échelles de structures hétérogènes aux comportements anélastiques non-linéaires. Matériaux. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2004. Français. NNT : . tel-00133643

HAL Id: tel-00133643

<https://theses.hal.science/tel-00133643>

Submitted on 27 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan
par

Damijan MARKOVIČ

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Sujet de la thèse :
Modélisation multi-échelles de structures hétérogènes aux
comportements anélastiques non-linéaires

Thèse soutenue le 11 Juin 2004 devant le jury composé de :

Pierre Gilormini	Rapporteur
K.C. Park	Rapporteur
Pierre Alart	Président
Carlos A. Felippa	Examineur
Tomaž Rodič	Examineur
Fabrice Gatuingt	Examineur
Adnan Ibrahimbegović	Directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie
(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

D'abord je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Adnan Ibrahimbegovic pour avoir dirigé mes travaux au cours des années de l'élaboration de cette thèse et sa disponibilité permanente. Un grand merci à Tomaž Rodič pour son co-encadrement et surtout pour m'avoir introduit dans le domaine du calcul de structure, dans le cadre du projet de fin d'étude au département de physique à l'Université de Ljubljana.

Je remercie amplement le Ministère slovène de l'Education, de la Science et du Sport et le Ministère français de la Science et de la Technologie pour leurs soutiens financiers pendant les quatre dernières années de mes études et de mes recherches.

Je voudrais également remercier K.C. Park et Pierre Gilormini pour avoir rapporté sur ma thèse. Le premier surtout pour avoir accepté ce rôle, malgré le fait que mon rapport est écrit en français, une langue qu'il apprécie beaucoup, mais laquelle ne lui est pas la plus proche. Je remercie Pierre Alart pour la présidence du jury et puis les examinateurs Carlos A. Felippa et Fabrice Gatuingt pour y avoir participé.

Fabrice, je remercie aussi d'avoir lu et corrigé mon rapport et puis avec Jean-Baptiste, que je remercie également, d'avoir écouté et commenté mon exposé.

Posebej bi se rad zahvalil svojim staršem Violeti in Otu ter stricu Dariu in Riti, da so prišli iz daljne Slovenije oziroma Hrvaške, da bi me podprli v zaključnih pripravah na dokončanje študija. Zahvalil bi se jim ne le, ker so prišli na zagovor, temveč predvsem za njihovo nenehno podporo teh zadnjih dvajset in nekaj let. Zahvala gre meddrugim tudi mojim starim staršem Mariji in Savu.

Je voudrais aussi remercier les thésards et les autres membres du LMT, qui contribuent que ce laboratoire soit un lieu de travail agréable et convivial. Je tiens à remercier notamment Norberto, Hung et Adnan.

Pendant les trois années de thèse j'habitais à la Cité Internationale Universitaire de Paris, où j'ai passé de très beaux moments. Pour cela je remercie surtout les (anciens) résidents du Collège Néerlandais, notamment les habitants du fameux "couloir".

Pour m'accompagner dans la vie, pour la rendre meilleure et plus belle, merci ...

à Sandra

Table des matières

Table des matières	4
1 Introduction	6
1.1 Mise en contexte	6
1.2 Objectifs	8
2 Homogénéisation	11
2.1 Introduction	11
2.2 Approche analytique	13
2.2.1 Homogénéisation asymptotique en élasticité linéaire	13
2.2.2 Théorie du champ moyen en élasticité linéaire	15
2.2.3 Méthode d'analyse de champs de transformation	19
2.3 Approche numérique	22
2.3.1 Echelles complètement séparées	22
2.3.2 Stratégie pour un couplage fort entre les échelles	22
2.4 Conclusion	26
3 Représentation de la microstructure	27
3.1 Introduction	27
3.2 Représentation exacte	28
3.2.1 Introduction	28
3.2.2 Formulation en déplacement	29
3.2.3 Méthode $\bar{B}$	30
3.2.4 Formulation hybride : élément de Pian-Sumihara	32
3.2.5 Tests sur une structure homogène	35
3.2.6 Tests sur une structure hétérogène	36
3.2.7 Conclusion	38
3.3 Modèle macro : formulation en déplacement	39
3.3.1 Introduction	39
3.3.2 Hypothèses de base	41
3.3.3 Plasticité	43
3.3.4 Endommagement	45
3.3.5 Couplage élasto-plastique-endommageable	46
3.3.6 Résolution numérique du problème central	47
3.3.7 Résolution numérique de la plasticité	49

3.3.8	Résolution numérique de l'endommagement	50
3.3.9	Résolution numérique du couplage	51
3.3.10	Identification du modèle couplé	55
3.3.11	Vérification du modèle macro	58
3.3.12	Conclusion	60
3.4	Modèle macro : formulation en contrainte	61
3.4.1	Introduction	61
3.4.2	Formulation thermodynamique modifiée	62
3.4.3	Implantation numérique	64
3.4.4	Vérification du modèle	67
3.5	Représentation structurée	69
3.5.1	Introduction	69
3.5.2	Amélioration de l'intégration numérique	70
3.5.3	Modes incompatibles	72
3.5.4	Modélisation physique d'interface	75
3.5.5	Tests numériques	76
3.6	Conclusion	81
4	Interface micro-macro	84
4.1	Introduction	84
4.2	Formulation variationnelle et algorithme de résolution	85
4.3	Conditions d'interface	90
4.3.1	Introduction	90
4.3.2	Interface en déplacement	90
4.3.3	Interface en effort	92
4.3.4	Analyses sur un domaine micro	94
4.4	Implantation de l'algorithme pour le calcul parallèle	99
4.4.1	Introduction	99
4.4.2	Code d'EF : FEAP	100
4.4.3	Distribution de processus par CTL	102
4.5	Exemples d'analyse micro-macro	103
4.5.1	Introduction	103
4.5.2	Comparaison avec l'analyse entièrement micro	103
4.5.3	Flexion trois points : matériau poreux	107
4.5.4	Approche combinant les modèles micro et macro	110
4.5.5	Comportement aléatoire des phases	112
4.5.6	Vers une stratégie multi-échelle adaptative	115
4.5.7	Conclusion	117
5	Vers l'optimisation de la microstructure et les problèmes inverses	118
6	Conclusion	122
	Bibliographie	125

Chapitre 1

Introduction

1.1 Mise en contexte

Dans de nombreux domaines industriels et scientifiques, notamment dans le génie civil et le génie mécanique, on utilise des matériaux, qui peuvent avoir, à l'échelle de la microstructure, une nature fortement hétérogène vis-à-vis du comportement mécanique. Cette caractéristique peut rendre la prédiction du comportement de la structure soumise aux sollicitations diverses, nécessaire pour une conception durable, assez difficile, voire impossible.

Par exemple, le béton, un matériau couramment utilisé dans le génie civil, a une microstructure, qui ne peut pas être représentée avec moins de trois phases : la matrice cimentaire, les granulats et les pores, chacune obéissant à un comportement mécanique très différent. On trouve beaucoup d'autres exemples dans les industries aérospatiale et automobile, où l'utilisation des matériaux composites deviennent de plus en plus abondantes.

Traditionnellement, l'approche hiérarchique est utilisée pour toute modélisation des structures. Cela comprend la détermination d'une loi de comportement pour chaque sollicitation possible au niveau local, d'un milieu continu, puis l'application de cette loi dans le cadre du calcul de structure, faisant appel le plus souvent à la méthode des éléments finis. La variante la plus directe de l'approche hiérarchique consiste à prédire d'abord les phénomènes les plus pertinents, à les décrire d'une façon paramétrique dans un cadre thermodynamique et enfin à identifier ces paramètres à partir des expériences (voir par exemple [61], [30]). L'avantage de cette approche phénoménologique est son efficacité et la mise en œuvre relativement bien maîtrisée pour beaucoup d'applications. Par contre, un matériau fortement hétérogène exige des modèles phénoménologiques très complexes et souvent difficiles à identifier à partir des essais envisageables.

La famille des méthodes d'homogénéisation s'appuie sur un autre type d'essai supplémentaires aux expériences mécaniques classiques. Il s'agit de la microscopie de tout type (optique, électronique à balayage etc.) avec un but de pouvoir décrire la microstructure le plus précisément possible. L'information extraite des images d'un microscope peut se présenter sous une forme adaptée aux calculs numériques ou bien consister en des données statistiques comme la fraction volumique ou des fonctions

de covariances d'ordre supérieur (voir par exemple [8]), utilisables par des méthodes d'homogénéisation analytique.

Il existe deux groupes principaux pour ces méthodes, le premier étant l'homogénéisation asymptotique (voir par exemple [83], [6]) et le deuxième étant la théorie du champ moyen (voir par exemple [8]). Dans ces deux approches, on fait l'hypothèse que les échelles sont infiniment séparées, mais les formulations sont conceptuellement très différentes. L'approche asymptotique suppose un milieu périodique et considère les champs microscopiques comme des perturbations des champs macroscopiques. La théorie du champ moyen, par contre, est basée sur la notion de VER (volume élémentaire représentatif), dont la taille est supposée infiniment plus grande qu'une hétérogénéité caractéristique et beaucoup plus petite que les dimensions de la structure.

Pour un comportement élastique linéaire, selon l'homogénéisation asymptotique, on obtient d'abord la solution du problème généralisé aux conditions aux limites périodiques, à l'échelle micro, que l'on peut par la suite utiliser pour tout calcul macro. Dans la théorie du champ moyen on a souvent recours à l'équation de Lippman-Schwinger afin de pouvoir obtenir une approximation analytique des champs de déformation et de contrainte dans un VER. La qualité de l'approximation dépend de l'ordre de l'information sur la microstructure utilisée et de la pertinence des hypothèses sur les champs locaux.

Les deux groupes de méthodes d'homogénéisation se sont montrées très efficaces pour un comportement élastique linéaire, mais beaucoup d'entre elles ne sont pas applicables aux comportements anélastiques non-linéaires (voir par exemple [35]). Cela dit, l'homogénéisation en non-linéaire est un domaine de recherche très dynamique et de nombreuses approches nouvelles ont été proposées récemment (voir par exemple [14], [50], [12] ou [71]). La plupart d'entre elles se basent sur la théorie du champ de transformation, initialement proposée dans [20].

Malgré des progrès, les méthodes d'homogénéisation non-linéaires ne sont pas encore capables de permettre une implantation robuste dans le cadre de la méthode des éléments finis, principalement à cause de la complexité des démarches utilisées. Grâce à la croissance continue des performances informatiques, des méthodes d'homogénéisation numérique ont été introduites, où l'approximation analytique des champs locaux est remplacée par une approximation beaucoup plus fine en utilisant des méthodes numériques.

Par ailleurs, les premières approches multi-échelles de l'homogénéisation numérique sont basées sur la théorie asymptotique (voir par exemple [18], [33], [28]). Dans ces simulations des microstructures périodiques, les modèles de la MEF (méthode des éléments finis) micro peuvent être relativement petits et ainsi plus abordables. Une démarche suivant plutôt le principe de la théorie du champ moyen a été proposée dans [27] sous le nom de la MEF², puisqu'elle introduit deux niveaux de calculs de la MEF. Le premier à l'échelle de la structure et le deuxième dans chaque point d'intégration numérique, remplaçant ainsi une loi de comportement classique.

Les méthodes d'homogénéisation analytique ou numérique, basées sur les théories asymptotique et du champ moyen sont a priori limitées aux analyses des problèmes aux échelles complètement séparées. Souvent les applications industrielles ne

permettent pas cette hypothèse. Ceci est particulièrement vrai pour les problèmes du génie civil, où les dimensions des hétérogénéités dans les géomatériaux ne sont pas négligeables par rapport aux dimensions des structures (par exemple la taille des granulats de $\sim 1\text{cm}$ contre la taille d'une éprouvette et/ou d'une structure de $\sim 1\text{m}$). En plus des problèmes classiques où les échelles sont fortement couplées, de nombreux autres exemples émergent avec la tendance croissante d'utilisation de petites structures dans le contexte des nanotechnologies.

Les méthodes de l'homogénéisation numérique pour les échelles seulement partiellement séparées sont conceptuellement très proches des méthodes de décomposition de domaines (voir par exemple [96], [24], [25] ou [1]), où une interface entre deux modèles très différents vis-à-vis de la finesse de description doit être mise en place. En voyant un tel problème multi-échelle en tant que problème de décomposition de domaines, nous pouvons poursuivre deux voies principales. Soit nous résolvons le problème d'une structure hétérogène entièrement à l'échelle micro, mais en introduisant une échelle macro au niveau numérique afin d'accélérer la résolution, comme cela a été abordé dans [24], [57] et [58], soit nous gardons l'esprit de l'homogénéisation et simplifions la résolution en faisant des approximations pertinentes dans la formulation du couplage micro-macro. Notre travail s'inscrit dans le deuxième groupe. A notre avis, les approches du deuxième groupe sont plus intéressantes à poursuivre, grâce au découplage partiel des échelles, qui peut mener à une résolution plus efficace vis-à-vis du coût de calcul que pour des formulations entièrement micro.

1.2 Objectifs

L'approche que nous proposons utilise la méthode des éléments finis à deux niveaux, où chaque élément du maillage macro est représenté par un modèle d'EF micro. Malgré ce double usage de la MEF, la démarche n'est pas similaire à la MEF². Dans notre cas le sous-domaine micro correspond à un élément fini macro entier, et non-pas au point d'intégration comme dans le cadre de la MEF². Des idées proches de la nôtre ont été proposées dans [100] et [34] en utilisant la formulation de l'interface micro-macro en déplacement. L'originalité de notre méthode est dans la formulation de la méthode multi-échelle, suivant le principe variationnel des multiplicateurs de Lagrange localisés (voir par exemple [78], [79]). Ce principe nous permet d'avoir une formulation générale de l'interface micro-macro, de laquelle peuvent être déduites les formulations en déplacement ou en effort (voir [65]).

Nous profitons de la nature locale de la stratégie micro-macro appliquée en utilisant la méthode de résolutions séquentielles (voir [48]), très efficace pour les équations non-linéaires, telles que nous les rencontrons dans les problèmes de plasticité (voir par exemple [47]). Selon l'approche adoptée, les problèmes micro sont indépendants entre eux pour chaque itération sur les variables macro et sont résolus simultanément, dans le cadre de l'architecture parallèle des codes utilisés.

Une autre façon de réduire le coût du calcul dans l'homogénéisation numérique, en dehors d'un mode de résolution du problème multi-échelle performant et adapté

aux ordinateurs multi-processeur, peut porter sur la représentation de la microstructure. Dans le cadre de ce travail, où nous considérons la microstructure du matériau hétérogène relativement importante et modélisable en tant qu'un milieu continu, nous jugeons la MEF comme la plus adéquate pour décrire le comportement microscopique. Néanmoins, selon l'approche classique (voir par exemple [74] ou [11]), un maillage d'EF devrait être conforme avec la géométrie de la microstructure, sans que l'interface entre les phases traverse un élément, ce qui augmente considérablement le nombre de degrés de liberté dans l'analyse lorsque les détails micro deviennent très petits.

Un remède possible à cela serait de renoncer à la conformité du maillage d'EF micro et de ne tenir compte des différentes phases qu'au niveau des points d'intégration. Cette démarche nous permet de réduire considérablement les degrés de libertés du modèle pour une même précision. Pour une MEF standard en déplacement, l'approche de filtrage par points d'intégration est couramment utilisée pour un comportement élastique linéaire (voir par exemple [29], [99]).

Dans ce travail nous étudions l'approche du filtrage par points d'intégration dans le contexte du comportement anélastique et pour les formulations de la MEF en déplacement et en contrainte. Une approche par les modes incompatibles est également proposée afin d'améliorer la cinématique d'un EF hétérogène. D'autres méthodes non-conformes sont proposées dans [4], [38] et [91]. En contraste avec le filtrage par points d'intégration ou des modes incompatibles, dans ces approches des degrés de libertés globales sont rajoutées aux nœuds du maillage d'EF, ce qui augmente plus le coût de calcul que les approches locales étudiées ici.

Malgré les tendances récentes vers des approches multi-échelles numériques, où l'on cherche à avoir une description très fine d'un comportement microscopique, il est évident que ces méthodes ne pourront pas encore faire disparaître les approches plus classiques, celles d'homogénéisation analytique ou les modèles phénoménologique. En fait, il semble peu justifié de chercher à les éliminer complètement. Au contraire, nous pensons que les méthodes de l'homogénéisation numérique peuvent servir effectivement à une meilleure élaboration des modèles macroscopiques par rapport à l'approche habituelle du collage des résultats expérimentaux au niveau de la structure.

Autrement dit, le scénario vers lequel nous orientons notre travail est présenté dans les lignes qui suivent. La tâche qui est souvent la plus difficile dans la modélisation des structures hétérogènes est l'identification des modèles proposés, qui peuvent être très sophistiqués et complexes, à partir d'essais disponibles. Des tests suffisamment maîtrisés, comme la traction simple ou la flexion trois points, ne permettent pas, dans la plupart des cas, d'identifier tous les paramètres d'un modèle macroscopique pertinent. Or, les essais nécessaires risquent d'être indisponibles ou pas assez fiables.

Une piste alternative s'appuie sur les connaissances de la microstructure du matériau utilisé, obtenue par la microscopie. Nous pouvons supposer que le comportement à une échelle inférieure est plus facile à décrire en terme de comportements individuels de différentes phases. De plus, les mécanismes non-linéaires anélastiques à l'échelle microscopique sont activés déjà pour de sollicitations macroscopiquement

homogènes, à cause de l'hétérogénéité locale des contraintes. Donc, en décrivant le matériau à l'échelle micro, nous pourrions identifier des modèles micro à partir d'essais faciles à réaliser, comme la traction simple et/ou la flexion trois points.

Une fois les modèles à l'échelle micro identifiés, l'identification des modèles macroscopiques pourrait être effectuée exclusivement par des essais numériques, qui sont en général capables de fournir beaucoup plus d'information qu'un essai réel. En plus de la capacité des tests numériques à remplacer partiellement les vrais expériences, on pourrait alimenter les méthodes d'homogénéisation par les distributions locales des champs de contrainte ou de déformation. Par exemple, la méthode du champ de transformation non-uniforme s'appuie sur les solutions numériques du champ de déformation plastique (voir [71]).

Un des intérêts principaux de modéliser le couplage entre les différentes échelles d'une structure hétérogène est de pouvoir prédire quelles doivent être les caractéristiques de la microstructure qui rendraient optimal l'usage de la structure. Un début de recherche dans cette direction est présenté.

En résumé, notre travail porte sur les aspects de modélisation numérique dans le cadre de l'homogénéisation pour des problèmes non-linéaires de structures fortement hétérogènes. Nous supposons connaître parfaitement la microstructure du matériau étudié, notamment sa géométrie et le comportement des phases. Nous appliquons une stratégie originale pour la résolution de ce type de problèmes et l'implantons pour une architecture parallèle du code de calcul. Avec le calcul distribué en parallèle, des exemples en $2D$ pour un écart des échelles réalistes sont examinés.

Nous considérons plusieurs représentations différentes de la microstructure par la MEF. En plus, de l'approche "exacte", où le modèle EF doit être conforme aux interfaces entre des phases, nous montrons les avantages des approches structurées, où l'interface est prise en compte à l'intérieur d'un élément fini, ce qui permet une réduction considérable de la taille d'un problème pour la même précision. Nous proposons aussi une approche pour la modélisation macroscopique de ce type des structures, avec un modèle élasto-plastique-endommageable. Dans la formulation présentée, les modèles définis à l'échelle macro et micro peuvent être utilisés dans la même analyse en fonction de la précision exigée dans les différentes zones de la structure.

En restant toujours dans le cadre d'une distribution régulière des hétérogénéités, nous considérons aussi le cas, où le comportement des phases peut être stochastique.

Le document est organisé en six chapitres. Le deuxième porte sur les méthodes d'homogénéisation en général et comment notre travail s'y situe. Dans la troisième partie nous présentons trois possibilités pour représenter une microstructure par la MEF : exacte, macroscopique et structurée. La formulation de l'interface micro-macro plus générale, basée sur le principe des multiplicateurs de Lagrange localisés avec son implantation numérique adaptée pour le calcul sur des ordinateurs aux plusieurs processeurs sont mises en place dans le quatrième chapitre. Les exemples illustrant ces méthodes sont également présentés. Dans le cinquième chapitre nous discutons comment notre approche multi-échelle pourrait être prolongée vers la résolution des problèmes d'optimisation, voire inverses. Les conclusions sont faites dans le chapitre six.

Chapitre 2

Homogénéisation

2.1 Introduction

Si nous voulons prédire un comportement macroscopique d'une structure hétérogène sans directement prendre en compte le comportement microscopique à une échelle inférieure, nous devons avoir recours aux méthodes d'homogénéisation. Ces méthodes nous permettent de ne définir les variables d'état macro qu'en termes de moyennes des variables micro. Par exemple, si les échelles sont très séparées, nous pouvons ainsi obtenir la réponse d'une structure, $\Sigma = \Sigma(E)$, où Σ et E sont les moyennes de la contrainte et de la déformation locale, respectivement.

La qualité d'une réponse homogénéisée dépend surtout de l'information que nous avons sur la microstructure et de l'approximation que nous adoptons pour le comportement micro en lien avec les variables macro. Nous considérons deux classifications principales des méthodes d'homogénéisation. La première est fondée sur la façon d'introduire la notion d'échelles et donne deux groupes : l'homogénéisation asymptotique (voir par exemple [6], [83]) et la théorie du champ moyen (voir par exemple [32], [8]). Dans la première approche on définit le problème d'homogénéisation en terme de théorie de perturbation, qui suppose que le rapport entre les dimensions des échelles va à l'infini et que le milieu est périodique. D'autre part, la théorie du champ moyen est basée sur la notion de VER (volume élémentaire représentatif), dont la taille est supposée infiniment plus grande qu'une hétérogénéité caractéristique et beaucoup plus petite que les dimensions de la structure.

Une autre manière de classifier les méthodes d'homogénéisation s'appuie sur la façon dont on décrit le comportement de la microstructure, soit analytiquement soit numériquement. Les deux démarches sont approximatives, car le plus souvent la solution exacte n'est pas accessible. Parmi les deux, l'approche numérique permet une meilleure approximation due au fait que le modèle peut être très fin. Par contre, le coût du calcul dans le cas de l'approche analytique est généralement beaucoup moins élevé et la méthode ainsi en général mieux adaptée pour l'utilisation avec la MEF (méthode des éléments finis) en calcul de structure. Ces deux approximations du comportement de la microstructure peuvent être appliquées dans le cadre de l'homogénéisation asymptotique ou de la théorie du champ moyen.

L'homogénéisation analytique d'un matériau obéissant à un comportement élas-

tique linéaire est en général très efficace, à condition que l'hypothèse du rapport quasi-infini entre les échelles soit satisfaite et qu'une information suffisante sur la microstructure (par exemple en termes des matrices de covariance) soit disponible. De plus, on arrive souvent à établir des bornes sur la réponse macroscopique.

Lorsque le comportement des constituants de la microstructure est anélastique non-linéaire (par exemple élasto-plastique), le même type de méthodes analytiques d'homogénéisation peut être appliqué. On se heurte, par contre aux plusieurs difficultés. La première vient du fait, que le plus souvent, le comportement anélastique dépend de l'histoire de chargement et la réponse finale doit être intégrée d'une certaine façon à l'aide des réponses intermédiaires. Jusqu'à maintenant, on n'a pas encore trouvé la formulation de la loi constitutive qui garantirait qu'une telle intégration soit toujours satisfaisante. Les différentes approches, incrémentale, tangente, sécante ou affine sont présentées dans le sous-chapitre suivant.

Une fois que le choix de la représentation fait, il n'est pas évident qu'une méthode efficace dans le cas linéaire, le reste pour un comportement non-linéaire. Par exemple, il a été démontré que le modèle auto-cohérent, bien adapté pour l'homogénéisation en linéaire, ne peut pas s'appliquer de la même manière aux comportements non-linéaires (voir [35]).

Malgré les difficultés d'appliquer le savoir faire de l'homogénéisation linéaire au domaine du non-linéaire, des remèdes pertinents ont été proposés récemment (voir par exemple [15], [12], [50] ou [71]). Ces travaux permettent d'obtenir la réponse homogénéisée du matériau composite en termes de relation contrainte-déformation, mais en utilisant pour cela des démarches plutôt complexes et par conséquent plus difficiles à implanter robustement dans un cadre de calcul de structure.

Aucune des méthodes analytiques ne peut être généralisées pour les situations où les échelles d'une structure hétérogènes ne sont pas complètement séparées. Ceci comprend les cas où il y a naturellement un effet d'échelle dû aux tailles importantes des hétérogénéités par rapport à la taille de la structure, ou bien les cas où un effet d'échelle apparaît lors des sollicitations extrêmes et pour des champs de contrainte localement très hétérogènes. Ces situations combinées exigent une stratégie d'homogénéisation numérique où les échelles sont fortement couplées. Une telle stratégie est proposée dans ce travail.

Dans les sous-chapitres suivants nous présentons les idées principales des méthodes d'homogénéisation, analytique et numérique. D'abord nous mettons en avant la différence entre la théorie asymptotique et celle du champ moyen, dans le cadre de l'approche analytique. Les principes des méthodes analytiques servent directement pour la formulation de l'homogénéisation numérique, où les échelles peuvent être complètement ou seulement partiellement séparée. La stratégie proposée ici est basée sur le concept des échelles fortement couplées où l'effet de leur écart ne peut pas être négligé. Dans un premier temps, nous présentons l'idée de base dans le cadre de la formulation en déplacement (chapitre 2.3.2). Une formulation variationnelle plus générale est proposée dans le chapitre 4.

2.2 Approche analytique

2.2.1 Homogénéisation asymptotique en élasticité linéaire

Cette approche d'homogénéisation trouve ces racines dans la communauté des mathématiques appliquées (voir par exemple [83] et [6]), où elle ne considère qu'un comportement linéaire. La théorie de l'homogénéisation asymptotique s'applique surtout au milieu périodique. La microstructure de l'échantillon est par conséquent parfaitement décrite par une cellule élémentaire, bien plus petite que les dimensions de l'échelle macro (voir Figure 2.1). On introduit la notion de deux échelles, telle que entre les coordonnées macro, X , et micro, x , la relation $x = \frac{X}{\epsilon}$ est satisfaite. Le facteur ϵ représente le rapport entre la dimension de la cellule élémentaire et la dimension de l'échelle macro.

Puisque le milieu est périodique, la variation micro du tenseur d'élasticité, C^ϵ , peut s'écrire comme

$$C^\epsilon(X) = C(x), \quad (2.1)$$

où $C(x)$ représente le module élastique en repère global. Suivant la théorie, on estime la variation micro du champ u^ϵ en perturbation singulière,

$$u^\epsilon(X) \approx \sum_{n=0} \epsilon^n u^n(X, x), \quad (2.2)$$

où u^n a la même période que C par rapport à x .

On utilise par la suite cette expansion dans la résolution d'un problème mécanique standard en petites déformations :

– Cinématique

$$\epsilon^\epsilon(X) = \nabla^S u^\epsilon(X)$$

– Equilibre

$$\nabla \cdot \sigma^\epsilon(X) = 0$$

– Loi de comportement

$$\sigma^\epsilon(X) = C^\epsilon(X) \epsilon^\epsilon(X). \quad (2.3)$$

milieu périodique

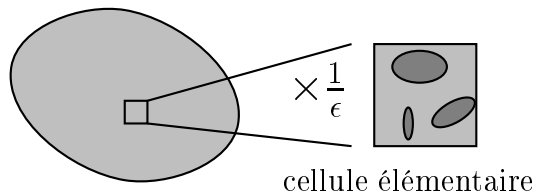


Fig. 2.1 – Milieu hétérogène périodique avec la cellule élémentaire, agrandie par le facteur $\frac{1}{\epsilon}$. Dans la théorie de l'homogénéisation asymptotique on suppose que $\epsilon \rightarrow 0$.

En tenant compte de $\nabla = \nabla_X + \frac{1}{\epsilon} \nabla_x$ et en utilisant (2.2), l'équation (2.3) peuvent s'écrire en terme d' ϵ^n , $n = -2, -1, 0 \dots \infty$,

$$\begin{aligned}
 & \epsilon^{-2} [\nabla_x (C(x) (\nabla_x u^0(X, x)))] \\
 + & \epsilon^{-1} [\nabla_X (C(x) (\nabla_x u^0(X, x))) \\
 + & \nabla_x C(x) (\nabla_X u^0(X, x) + \nabla_x u^1(X, x))] \\
 + & \epsilon^0 [\nabla_X (C(x) (\nabla_X u^0(X, x))) \\
 + & \nabla_x u^1(X, x) + \nabla_x (C(x) (\nabla_X u^1(X, x) + \nabla_x u^2(X, x)))] \\
 + & \dots \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le système (2.4) est en effet infini et on doit supposer que le paramètre ϵ est petit pour pouvoir couper la série après une valeur finie de n . Cette démarche justifie en fait l'adjectif asymptotique dans le nom de la théorie, car elle n'est valable que pour $\epsilon \rightarrow 0$.

Le plus souvent on s'arrête à $n = 0$ et l'on obtient en principe trois équations, parmi lesquelles, celle correspondant à ϵ^{-2} devient satisfaite automatiquement si l'on fait l'hypothèse que (voir par exemple [43]) u^0 n'est que fonction d' X . On suppose en plus que,

$$u^1(X, x) = \chi(x) (\nabla_X u^0(X)), \tag{2.5}$$

où $\chi(x)$ est un tenseur du troisième ordre et périodique par rapport à x . Il peut être déterminé à partir du terme devant ϵ^{-1} dans (2.4) menant à l'équation suivante,

$$\nabla_x (C(x) (\nabla_x \chi(x) + I)) = 0, \tag{2.6}$$

où I est le tenseur unitaire du quatrième ordre. Le champ $\chi(x)$ peut être calculé où approximé analytiquement pour les cas simples ou numériquement avec, par exemple, la méthode des élément finis pour les cas plus généraux. Les conditions aux limites du problème (2.6) sont définis comme périodiques, d'après l'hypothèse de périodicité de $\chi(x)$.

Une fois le champ $\chi(x)$ déterminé on l'utilise dans l'équation provenant du terme ϵ^0 dans (2.4). Au lieu d'écrire cette équation comme telle, on fait d'abord la moyenne sur x , c'est-à-dire sur toute la cellule élémentaire, afin d'annuler les termes dépendants de x , ce qui résulte en équation :

$$\nabla_X (\bar{C}^0 (\nabla_X u^0(X))) = 0. \tag{2.7}$$

Le tenseur $\bar{C}^0$ représente le tenseur élastique homogénéisé, obtenu de la solution micro, (2.6), comme

$$\bar{C}^0 = \frac{1}{V} \int_V C(x) (\nabla_x \chi(x) + I) dV_x. \tag{2.8}$$

En résumé, on résout d'abord l'équation micro, (2.6), avec les conditions aux limites périodiques. Puis, on utilise le champ $\chi(x)$ pour évaluer la raideur homogénéisée, $\bar{C}^0$, qui nous permet de résoudre le problème macro, en (2.7), avec les conditions aux limites correspondantes. Enfin, avec cette solution macro, $u^0(X)$, on peut calculer le champ micro, $u^1(X, x)$, à partir de l'équation (2.5).

Il s'agit alors d'une stratégie multi-échelle efficace et très répandue, mais qui montre clairement ses limites. Par exemple, la théorie est mal adaptée pour les milieux non-périodiques et d'autres démarches que celle présentée ici doivent être effectuées pour ce genre de problèmes (voir par exemple [77]). Egalement, un traitement différent est exigé, si l'on s'intéresse aux solutions homogénéisées près des frontières de la structure (voir par exemple [19]). Une autre limite de la théorie est due à sa nature asymptotique, qui la rend inadaptée pour les cas où les échelles ne peuvent pas être considérées comme infiniment séparées.

2.2.2 Théorie du champ moyen en élasticité linéaire

L'autre approche d'homogénéisation, la théorie du champ moyen est aussi bien répandue comme l'approche asymptotique décrite dans 2.2.1. Bien que les deux méthodes puissent s'utiliser souvent pour le même type de problèmes dans le cadre d'élasticité linéaire, les techniques mathématiques appliquées sont très différentes.

Cette approche est initialement proposée par les mécaniciens (voir par exemple [32]). Une revue récente sur l'état de l'art de ce sujet est présentée dans [8] et [9]. La théorie du champ moyen considère un milieu hétérogène aléatoire et non pas nécessairement périodique. Dans l'approche on suppose, par contre, que le milieu soit statistiquement homogène et qu'il existe un volume élémentaire représentatif (VER).

Le VER doit être suffisamment grand, pour qu'il soit statistiquement représentatif du matériau et contenir, par conséquent, plusieurs micro-hétérogénéités de chaque phase. Sa taille est typiquement beaucoup plus importante que la taille caractéristique des micro-hétérogénéités. Les significations qualitatives de "assez petit" est "assez grand" dépendent, non seulement du matériau étudié, mais aussi des quanti-

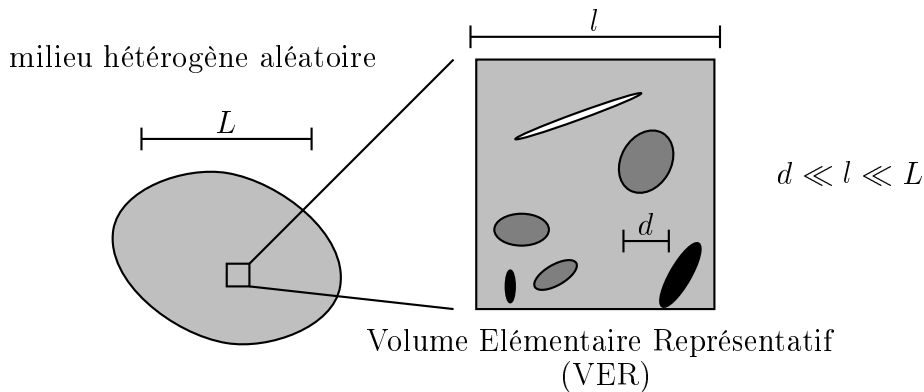


Fig. 2.2 – Milieu hétérogène et son VER. L'hypothèse de la théorie du champ moyen : $d \ll l \ll L$.

tés physiques (ex. : contrainte, énergie) auxquelles on s'intéresse et des chargements auxquels la structure peut être soumise (voir par exemple [54]).

La seconde condition, que doit satisfaire un VER, est qu'il doit être assez petit par rapport à la taille caractéristique de la structure macro. Il est important que les variations des champs de déplacement, déformation ou contrainte soient négligeables sur le domaine du VER.

Une fois le VER choisi, on peut l'utiliser pour déterminer les propriétés effectives, plus particulièrement pour le comportement élastique linéaire, le module effectif, C^{eff} ,

$$\sigma^M = C^{eff} \epsilon^M, \quad (2.9)$$

où σ^M et ϵ^M sont les champs de contrainte et de déformation macroscopique, définis comme la moyenne sur le VER des champs microscopiques, σ^m et ϵ^m :

$$\begin{aligned} \sigma^M &= \frac{1}{V_{ver}} \int_{ver} \sigma^m(x) dV_x \\ \epsilon^M &= \frac{1}{V_{ver}} \int_{ver} \epsilon^m(x) dV_x, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où V_{ver} est la mesure du VER.

Dès que le tenseur homogénéisé, C^{eff} , est connu, il peut être utilisé pour la résolution macro. Ainsi, il joue le même rôle que le module $\bar{C}^0$ dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation asymptotique (voir chapitre 2.2.1).

En faisant appel au lemma de Hill, les définitions (2.10) mènent à une propriété essentielle de la théorie du champ moyen : le travail de déformation est le même dans les représentations micro- et macroscopique. Alors,

$$\frac{1}{V_{ver}} \int_{ver} \sigma^m \epsilon^m dV = \sigma^M \epsilon^M. \quad (2.11)$$

Les conditions pour que (2.11) soit valable sont : l'homogénéité des deux champs, σ^m et ϵ^m , au contour du VER, ∂V_{ver} , puis l'admissibilité cinématique,

$$\exists u^m(x); \quad \epsilon^m = \nabla^S u^m \quad (2.12)$$

et l'admissibilité statique,

$$\nabla \cdot \sigma = 0. \quad (2.13)$$

Dans la construction du lemma (2.11), les variables $\epsilon^m(x)$ et $\sigma^m(x)$ peuvent être complètement indépendantes. Donc, (2.11) est valable pour toute loi de comportement, $\sigma^m(\epsilon^m)$.

Le but d'un processus d'homogénéisation est de calculer la réponse macroscopique d'une structure soumise à un chargement en connaissant le comportement microscopique. On veut déduire, alors, la fonction $\sigma^M(\epsilon^M)$ à partir de $\sigma^m(\epsilon^m)$.

On propose la démarche en trois étapes :

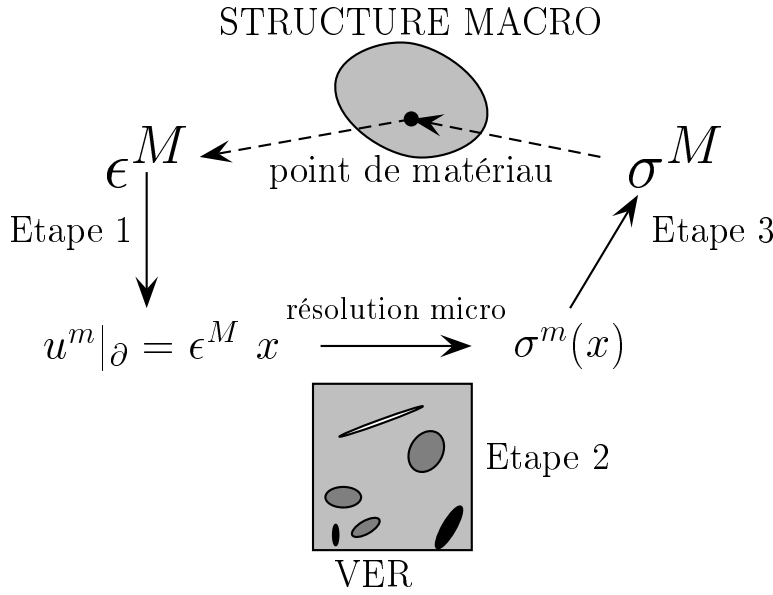


Fig. 2.3 – Schéma d'homogénéisation pour le pilotage en déformation. Le point de matériau correspond à un point d'intégration dans un contexte de calcul numérique.

1. Estimer le déplacement micro sur le contour, ∂V_{ver} , à partir de la déformation macro, $\epsilon^M \rightarrow u^m|_{\partial V_{ver}}$.
2. Résoudre le problème micro, $u^m|_{\partial V_{ver}} \rightarrow \epsilon^m|_{V_{ver}}, \sigma^m|_{V_{ver}}$.
3. Calculer la moyenne (voir (2.10)), $\sigma^m|_{V_{ver}} \rightarrow \sigma^M$.

Dans cette démarche les rôles de σ et de ϵ peuvent être inversés, si notre problème macro est piloté en contrainte et non pas en déformation.

Le point 3 est facile à réaliser, car il suffit d'appliquer la définition (2.10) des champs macro. Dans l'étape 1, par contre, il nous est demandé l'inverse. On doit déterminer le champ micro sur le bord du VER, ∂V_{ver} , en ne connaissant que la moyenne sur V_{ver} . Or, le choix est limité, si l'on veut garder l'équivalence de travail de déformation entre des échelles (voir (2.11)).

Ainsi, on est obligé de choisir les champs homogènes aux limites :

$$u^m|_{\partial V_{ver}} = \epsilon^M x; \quad x \in \partial V_{ver}, \quad (2.14)$$

si piloté en déformation et

$$t^m|_{\partial V_{ver}} = \sigma^M n(x); \quad x \in \partial V_{ver}, \quad (2.15)$$

si piloté en contrainte. Le vecteur t^m est l'effort surfacique sur ∂V_{ver} et $n(x)$ le vecteur normal sur la surface ∂V_{ver} . Dans la littérature on appelle le processus de l'étape 1 la localisation. L'étape 2 du schéma proposé (voir Figure 2.3) correspond à la résolution du problème micro. Puisque il peut être très complexe, le plus souvent non-résolvable analytiquement, on est obligé de faire des approximations afin de le simplifier.

En particulier, l'approximation de Voigt consiste à supposer que la déformation micro est homogène partout et non pas seulement au contours, ∂V_{ver} , $\epsilon^m(x) \equiv \epsilon^M$, $\forall x \in V_{ver}$. Alors,

$$C^{eff} \approx C^{Voigt} = \frac{1}{V_{ver}} \int_{ver} C(x) dV_x \quad (\text{approximation de Voigt}). \quad (2.16)$$

Si, par contre, on suppose que la contrainte est homogène partout, $\sigma^m(x) \equiv \sigma^M$, $\forall x \in V_{ver}$, on obtient l'approximation de Reuss,

$$C^{eff^{-1}} \approx C^{Reuss^{-1}} = \frac{1}{V_{ver}} \int_{ver} C^{-1}(x) dV_x \quad (\text{approximation de Reuss}). \quad (2.17)$$

Evidemment, les deux approximations sont grossières, mais elle restent très utilisées grâce à la facilité de construction et au fait qu'elles représentent les bornes rigoureuses :

$$C^{Reuss} \leq C^{eff} \leq C^{Voigt}, \quad (2.18)$$

où les signes $<$, $>$ sont définis tels que $C^1 < C^2 \Leftrightarrow a C^1 a < a C^2 a$, $\forall a$. Les bornes de Voigt et de Reuss, (2.18), peuvent être déduites à partir du principe d'énergie potentielle minimale (voir par exemple [8]).

D'autres types d'approximation, plus sophistiqués, se basent principalement sur la formulation intégrale du problème mécanique standard (voir les équations dans (2.3)). Si l'on définit la polarisation, τ , comme

$$\tau(x) = [C(x) - C^0] \epsilon(x) \implies \sigma^m(x) = C^0 \epsilon^m(x) + \tau(x) \quad (2.19)$$

et sa moyenne comme

$$\bar{\tau} = \frac{1}{V_{ver}} \int_{V_{ver}} \tau(x) dV_x,$$

l'équation, dite parfois de Lippmann et Schwinger s'écrit comme :

$$\epsilon^m(x) - \epsilon^M = - \int_{V_{ver}} \Gamma^0(x - y) [\tau(y) - \bar{\tau}] dV_y, \quad (2.20)$$

où le tenseur du quatrième ordre, Γ^0 , est l'opérateur de Green modifié en déformation, associé au milieu infini homogène de module C^0 .

La solution de l'équation (2.20) peut être approximée, supposant que la polarisation, $\tau(x)$, est constante par phase. Cette hypothèse est inspirée par le travail d'Eshelby (voir [22] ou [8]), où la solution analytique exacte du problème d'inclusion elliptique dans un milieu infini est présentée.

Dans cette solution, la déformation dans l'inclusion est homogène. Dans un cadre de plusieurs inclusions non-elliptiques dans un milieu fini, l'hypothèse de polarisation constante par phase nous donne une approximation. Sur sa base on peut établir les bornes de Hashin-Shtrikman (voir par exemple [8]), plus étroites que celles de Voigt et Reuss.

Par rapport aux bornes de Voigt et Reuss, qui utilisent l'information du premier ordre sur la microstructure (fraction volumique), les bornes de Hashin-Shtrikman sont du deuxième ordre, parce que l'on a besoin de connaître la covariance de la distribution des phases.

A partir de l'équation (2.20) on peut obtenir de nombreuses estimations en changeant le choix du milieu de référence, caractérisé par le module C^0 . Il se trouve, par exemple, que pour un composite matrice-inclusion, le choix $C^0 = C^{matrice}$ est pertinent (approximation de Mori-Tanaka). D'autre part, pour un polycrystal on obtient de bons résultats avec $C^0 = C^{eff}$ (modèle autocohérent).

En conclusion on peut dire que la théorie du champ moyen est très adaptée pour la plupart des problèmes d'homogénéisation en élasticité linéaire si les échelles sont suffisamment séparées. La méthode est limitée, comme d'ailleurs celle d'homogénéisation asymptotique, pour le cas d'échelles moins séparées et n'est pas capable de capter les effets d'échelles. Elle a donné, par contre, une base pour la méthode d'analyse de champs de transformation, une approche très répandue d'homogénéisation pour le comportement non-linéaire.

2.2.3 Méthode d'analyse de champs de transformation

La méthode a été proposée par Dvorak (voir [20]) et présente une base pour beaucoup d'autres travaux sur l'homogénéisation de comportements anélastiques, notamment en élasto-plasticité. Dans cette approche on suppose que la déformation de transformation (ex. : déformation thermique ou plastique) est homogène par phase. L'idée est similaire à celle présentée dans le cadre de l'homogénéisation linéaire (voir chapitre 2.2.2), où la polarisation due au contraste des phases était considérée constante par phase.

On commence d'abord par écrire la loi de comportement de chaque phase dans la forme

$$\sigma^r(x) = C^r \epsilon^r(x) + \tau^r, \quad (2.21)$$

où l'indice r distingue les différentes phases. Dans un cas de comportement élasto-plastique la polarisation peut s'écrire comme

$$\tau^r(x) = -C^r \epsilon^{p,r}, \quad (2.22)$$

où $\epsilon^{p,r}$ est la déformation plastique dans la phase r . Dans l'approche considérée, C^r , $\epsilon^{p,r}$ et par conséquent, τ^r , sont supposés constants par phase.

A l'échelle macro, le comportement correspond à

$$\sigma^M = C^{eff} \epsilon^M + \tau^M. \quad (2.23)$$

C^{eff} est, comme dans les chapitres précédents, le module effectif du milieu élastique, donc au cas où $\epsilon^{p,r} \equiv 0$. Dans ce cas-là on peut également exprimer la déformation micro dans chaque phase avec l'opérateur correspondant de localisation, A^r ,

$$\epsilon^r(x) = A^r(x) \epsilon^M. \quad (2.24)$$

L'opérateur A^r est lui même en général fonction du module effective et des modules de chaque phase. Les tenseurs A^r et C^{eff} sont obtenus en appliquant une méthode d'homogénéisation linéaire de notre choix.

En faisant appel au théorème de réciprocité élastique (voir [21]) et en supposant l'homogénéité des déformations plastiques, l'équation (2.20) peut s'exprimer (voir par exemple [15]) comme,

$$\epsilon^s(x) = A^s(x) \epsilon^M + \sum_r D^{sr}(x) \epsilon^{p,r}, \quad (2.25)$$

où les tenseurs D^{sr} sont les fonctions d'influence qui dépendent de l'opérateur de Green modifié en déformation et de la covariance de la distribution des phases. Le système (2.25) peut être résolu en faisant appel également aux lois d'évolution de chaque phase, $\epsilon^{p,r} = \epsilon^{p,r}(\epsilon^r(\cdot))$ et à la définition de ϵ^M , $\epsilon^M = \sum_r \frac{1}{V_r} \epsilon^r$, V_r étant le volume de la phase r .

On observe que le comportement homogénéisé obtenu du système d'équations dans (2.25) peut s'écrire difficilement dans une forme dense avec une ou deux fonctions seuils et de lois d'évolution correspondantes. Par conséquent, son implantation dans un code de calcul par la méthode des éléments finis est en général plus complexe.

La méthode de champs de transformation est souvent bien représentative de la réponse contrainte-déformation et aussi des distributions locales de contrainte, pourvu que le nombre choisi de phases dans le modèle soit suffisant. Dans la suite on explique brièvement les directions dans lesquelles l'approche d'origine peut être améliorée.

Son hypothèse de base, sur la homogénéité de déformation plastique par phase peut souvent être contestée, car dans une matrice aux inclusions on observe que les déformations anélastiques apparaissent principalement près des frontières entre les phases et sont presque jamais homogènes.

Par exemple, dans [12], les auteurs introduisent formellement plusieurs phases pour la modélisation de la matrice dans la couche très fine autour d'une inclusion, en s'inspirant par l'observation que le champ de contraintes est le plus important près des inclusions. On peut ainsi mieux prendre en compte l'hétérogénéité de la déformation plastique, tout en gardant la même formulation de la méthode. Cette démarche montre effectivement une meilleure performance, mais en augmentant la complexité de la résolution du problème.

L'autre défaut concerne la formulation de la loi de comportement élasto-plastique, dite "élastique"

$$\sigma^r(x) = C^r (\epsilon^r(x) - \epsilon^{p,r}), \quad (2.26)$$

qui se montre "trop raide". D'autres alternatives, proposées dans littérature sont :

- Tangente (voir par exemple [41]), [42])

$$\dot{\sigma}^r(x) = C^{ep,r}(\epsilon^r) \dot{\epsilon}^r(x) \quad (2.27)$$

où $C^{ep,r}$ est le module tangent dans la phase r .

- Sécante (voir par exemple [16], [7])

$$\sigma^r(x) = C^{sec,r}(\epsilon^r) \epsilon^r(x), \quad (2.28)$$

où $C^{sec,r}$ est le module sécant entre le point (σ^r, ϵ^r) et l'origine du repère, $(\sigma^r = 0, \epsilon^r = 0)$.

- Affine (voir par exemple [66]),

$$\sigma^r(x) = C^{ep,r}(\epsilon^r) \epsilon^r(x) + \sigma_0^r, \quad (2.29)$$

où σ_0^r est l'intersection de la tangente dans le point (σ^r, ϵ^r) avec l'axe $\epsilon^r = 0$. Les quatre façons de "linéarisation" du problème d'homogénéisation non linéaire, "élastique", tangente, sécante et affine se suivent chronologiquement et aussi dans le sens d'amélioration de la performance. Les tentatives donnent toutes en général une réponse contrainte-déformation trop raide et restent un champ très actif de recherche.

Par exemple, dans [15] on propose une démarche combinée entre la méthode élastique et tangente. Elle consiste à introduire une correction des tenseurs d'influence (voir l'équation (2.25)),

$$\tilde{D}^{sr} = D^{sr} K^r \quad (2.30)$$

où K^r est le tenseur de correction et la déformation plastique corrigée est égale à

$$\tilde{\epsilon}^{p,r} = K^r \epsilon^{p,r}. \quad (2.31)$$

Les tenseurs K^r sont ensuite déterminés en identifiant les vitesses de déformations locales par la localisation d'après l'approche tangente,

$$\dot{\epsilon}^r = A^r(C^{ep,r}) \dot{\epsilon}^M. \quad (2.32)$$

La méthode donne une meilleure corrélation avec le calcul par la méthode des éléments finis en terme de courbe contrainte-déformation que l'approche classique (voir [15]).

Une autre généralisation de la méthode classique est l'analyse de champs non-uniformes de transformation (voir [71]). Dans cette approche on veut avoir une description plus générale de la déformation anélastique que l'on l'écrit comme

$$\epsilon^a(x) = \sum_{r=1}^M \epsilon^{a,r} \mu^r(x), \quad (2.33)$$

où $\mu^r(x)$ sont les modes de distribution. En prenant les fonctions $\mu^r(x) = 1; x \in V_r$ et $\mu^r(x) = 0; x \in V_{ver} \setminus V_r$, on obtient la représentation de la méthode classique d'analyse de champs de transformation avec les déformations anélastiques constantes par phase. Si l'on était a priori capable d'anticiper quels modes de déformation anélastique allaient être les plus importants, on pourrait les utiliser pour construire des fonctions μ^r plus pertinentes et ainsi améliorer la méthode. Dans [71] on a construit les fonctions μ^r comme les valeurs de déformation plastique obtenues par un calcul d'éléments finis pour un chargement choisi. Deux modes suffisaient déjà pour bien reproduire la courbe contrainte-déformation comparée avec un calcul numérique.

2.3 Approche numérique

2.3.1 Echelles complètement séparées

Si dans l'homogénéisation numérique nous supposons que les échelles sont parfaitement séparées, comme dans l'approche analytique, nous pouvons appliquer une des deux théories, asymptotique ou du champ moyen. Dans le cadre de l'homogénéisation asymptotique nous pouvons déterminer la fonction des modes caractéristiques de déformation (voir l'équation (2.6)), χ , en utilisant une méthode numérique, par exemple la méthode des éléments finis (voir par exemple [28], [93] ou [33]). Le problème micro est ainsi résolu pour des conditions aux limites périodiques.

L'approche numérique qui s'appuie sur la théorie du champ moyen est connue sous le nom de la MEF², puisqu'on introduit un modèle d'éléments finis à chaque échelle, celle de la structure et celle du VER (voir [27], [26]). Alors, la loi de comportement macro d'un modèle classique d'éléments finis est remplacée par un autre modèle d'éléments finis dans chaque point d'intégration. Des conditions aux limites périodiques sont alors utilisées dans le problème micro.

Afin de rendre le calcul numérique dans le cadre de l'homogénéisation, plus efficace une autre méthode que celle d'EF est proposée dans la littérature. Elle est basée sur la transformation rapide de Fourier (voir [72], [73] ou [70]) et a recours à un milieu homogène élastique linéaire, de la même manière que dans la théorie du champ moyen. L'équation intégrale, qui peut se réduire à l'équation de Lippmann-Schwinger (voir le chapitre 2.2.2) pour un comportement élastique, se résout efficacement dans l'espace de Fourier par un schéma itératif.

2.3.2 Stratégie pour un couplage fort entre les échelles

Toutes les approches numérique d'homogénéisation décrites ci-dessus s'appuient sur l'hypothèse des échelles infiniment séparées et utilisent les principes introduits dans l'homogénéisation analytique du milieu périodique ou de l'existence d'un VER (volume élémentaire représentatif). Ces hypothèses ne sont plus valables lorsque les hétérogénéités sont d'une taille non-négligeable (par exemple granulats de $\sim 1\text{cm}$ dans une structure en béton de $\sim 1\text{m}$) et lorsque les gradients locaux de contrainte ne restent plus petits (par exemple près de la rupture). De telles situations extrêmes nous imposent l'utilisation d'une stratégie multi-échelle basée sur un couplage fort entre les échelles, où les vraies dimensions de l'échelle micro sont prises en compte et l'évolution des champs micro est effectuée simultanément que l'évolution des champs macro.

Nous choisissons d'utiliser la MEF (méthode des éléments finis) aussi bien pour modéliser l'échelle macro que pour l'échelle micro. Cette méthode est très bien établie dans le domaine du calcul de structure, donc le choix pour l'échelle macro se justifie naturellement. Vu l'efficacité de la méthode pour un milieu continu, elle devrait être bien adaptée aussi pour une description de la microstructure, supposée être également continu. Ce dernier point ne va pas de soi, mais reste valide dans les cas étudiés ici, où l'échelle micro reste relativement importante. Dans l'approche

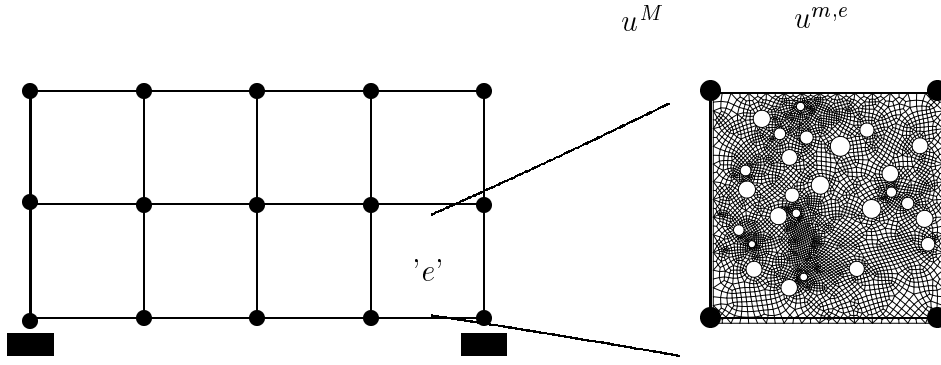


Fig. 2.4 – Un maillage d'EF micro coïncide avec l'élément du maillage macro.

développée, nous pourrions également imaginer d'utiliser une représentation discrète de la microstructure, comme celle dans [46].

L'ingrédient clé dans une telle approche est le couplage entre les deux niveaux de modèles, ce qui est d'ailleurs le cas pour toutes les méthodes d'homogénéisation. Nous présentons la formulation du couplage dans les lignes qui suivent. Nous ne perdons quasiment rien à la généralité en supposant qu'un sous-domaine correspondant à un élément fini d'un maillage macro représente en même temps le domaine du calcul micro (voir la Figure 2.4).

Dans un premier temps nous construisons l'interface sur la base du champ de déplacement uniquement, comme par exemple dans [100] ou [34]. Nous imposons ainsi que le champ de déplacement macro, u^M , et micro, u^m , soient identiques sur la surface d'interface, Γ ,

$$u^M(x) = u^m(x); \quad \forall x \in \Gamma, \quad (2.34)$$

où Γ représente l'espace des interfaces de tous les éléments macro avec les sous-domaines micro. Dans le cas d'une discrétisation linéaire de $u^M(x)$, $x \in \Gamma$, le champ micro u^m est linéaire entre deux nœuds macro adjacents (voir la Figure 2.5).

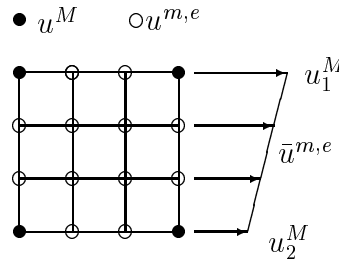


Fig. 2.5 – Dans la formulation de l'interface en déplacement, le champ micro, u^m , est identique au champ macro, u^M , aux limites du sous-domaine. Pour la discrétisation montrée, le sous-domaine micro partage les quatre nœuds aux coins avec le maillage macro.

Afin de résoudre le problème non-linéaire d'EF à deux échelles nous nous inspirons de la méthode séquentielle (voir par exemple [48]), utilisée couramment dans les problèmes de plasticité (voir par exemple [47]). Cette démarche consiste à diviser le problème en une partie locale et une globale de telle manière que nous pouvons les résoudre séparément. D'abord, nous exécutons un processus itératif sur le problème local jusqu'à convergence, tout en supposant les variables globales fixes. Puis, avec les variables locales déterminées, nous effectuons l'itération suivante pour le problème global. Nous arrêtons ce processus itératif global à convergence.

D'abord, nous définissons la solution du problème à l'échelle micro, qui doit satisfaire la condition du minimum du potentiel, Π_u^{mm} ,

$$\Pi_u^{mm}(u^m, u^M) = \int_V \Psi(\epsilon^m) dV - \int_{\partial V} u^m \bar{t} dS, \quad (2.35)$$

où Ψ est l'énergie libre et ϵ^m est le champ de la déformation, $\epsilon^m = \nabla^S u^m$, et $\bar{t}$ les efforts sur le bord. A partir de l'équation (2.35), nous pouvons obtenir la formulation faible, provenant de la condition $\delta \Pi_u^{mm} = 0$, comme

$$\int_V \nabla^S \delta u^m \sigma^m dV - \int_{\partial V} \delta u^m \bar{t} = 0; \quad \forall \delta u^m \quad (2.36)$$

où $\sigma^m = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}$ est la contrainte micro. Nous discrétisons le champ de déplacement par U^m en introduisant le déplacement macro, U^M , comme

$$u^m(x) = \begin{cases} N_\alpha^m(x) U_\alpha^m & ; x \in V \\ N_\alpha^M(x) U_\alpha^M & ; x \in \Gamma \end{cases} \quad (2.37)$$

Nous remarquons que, selon la définition dans (2.37), le champ $u^m(x)$, $x \in \Gamma$ subit une double discrétisation, micro et macro,

$$u^m(x) = N_\alpha^m(x) U_\alpha^m = N_\alpha^M(x) U_\alpha^M; \quad x \in \Gamma, \quad (2.38)$$

où U_α^m sont les valeurs discrètes de l'interpolation micro sur Γ . Evidemment, les valeurs U_α^m et U_α^M ne sont pas indépendantes et on doit pouvoir exprimer les valeurs micro, U_α^m , comme

$$U_\alpha^m = T_{\alpha\beta} U_\beta^M, \quad (2.39)$$

où T est le projecteur entre l'espace macro et micro (voir la Figure 2.5).

Par la suite, nous réécrivons l'équation (2.36) sous une forme discrétisée comme

$$\begin{aligned} R_\alpha^m &:= \int_V B_\alpha^m{}^T \sigma^m dV = 0 \\ R_\alpha^M &:= T_{\alpha\beta}^T \int_{V_\Gamma} B_\beta^m{}^T \sigma^m dV - T_{\alpha\beta}^T \int_{\partial V} N_\beta^M \bar{t} dS = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

où V_Γ dénote le volume des tous les éléments micro qui touchent l'interface Γ .

Les équations dans (2.40) peuvent être résolues par la méthode de Newton, où pour une équation non-linéaire générale, $r_i(y_j) = 0$, on écrit

$$r_i^{(k+1)} \approx r_i^{(k)} + \frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial y_j^{(k)}} \Delta y_j^{(k)} = 0, \quad (2.41)$$

où l'indice (k) dénote la k -ième itération. Nous obtenons ainsi l'approximation de y_i suivante,

$$\begin{aligned} y_i^{(k+1)} &= y_i^{(k)} + \Delta y_i^{(k)} \\ \Delta y_i^{(k)} &= - \left(\frac{\partial r_j^{(k)}}{\partial y_i^{(k)}} \right)^{-1} r_j^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Les étapes (2.41) et (2.42) sont répétées jusqu'à ce que la convergence soit atteinte, $|r_i^{(k)} y_i^{(k)}| < tol$.

Cette démarche, appliquée au système (2.40), mène à résoudre l'équation suivante,

$$\begin{pmatrix} K_{\alpha\beta}^{mm} & K_{\alpha\gamma}^{mM} T_{\gamma\beta} \\ T_{\alpha\gamma}^T K_{\gamma\beta}^{Mm} & T_{\alpha\gamma}^T K_{\gamma\nu}^{MM} T_{\nu\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_{\beta}^m \\ \Delta U_{\beta}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{\alpha}^m \\ -R_{\alpha}^M \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

où les matrices de raideur, K , sont définies comme

$$K_{\alpha\beta}^{(\cdot)} = \int_V B_{\alpha}^m{}^T \frac{\partial \sigma^m}{\partial \epsilon^m} B_{\beta}^m dV, \quad (2.44)$$

$\frac{\partial \sigma^m}{\partial \epsilon^m}$ étant le module tangent cohérent local. Les indices m et M des matrices K désignent les sous-espaces micro de U^m et de U_{Γ}^m , respectivement. Toutes les matrices sont déterminées par l'équation (2.44) en utilisant les composantes correspondantes.

D'après la méthode séquentielle nous résolvons en premier l'équation de l'équilibre micro, c'est-à-dire la première équation dans le système (2.43), pour les valeurs de déplacements macro, U^M , données,

$$K_{\alpha\beta}^{mm} \Delta U_{\beta}^m = -R_{\alpha}^m - K_{\alpha\gamma}^{mM} T_{\gamma\beta} \Delta U_{\beta}^M. \quad (2.45)$$

Parce que l'équation (2.45) n'est pas linéaire ($K^{mm} = K^{mm}(U^m)$) plusieurs itérations sont nécessaires pour converger. Une fois l'équation (2.45) résolue, nous pouvons effectuer l'itération suivante à l'échelle macro, en condensant les variables micro,

$$\underbrace{(T_{\alpha\gamma}^T K_{\gamma\nu}^{MM} T_{\nu\beta} - T_{\alpha\gamma}^T K_{\gamma\nu}^{Mm} K_{\nu\eta}^{mm}{}^{-1} K_{\eta\zeta}^{mM} T_{\zeta\beta})}_{K_{\alpha\beta}^{el}} \Delta U_{\beta}^M = - \underbrace{R_{\alpha}^M}_{R_{\alpha}^{el}}. \quad (2.46)$$

Les termes à droite et à gauche dans l'équation (2.46) représentent la matrice de raideur et le résidu d'un élément macro, respectivement. Les équations globales sont par la suite assemblées et résolues par la procédure standard de la MEF.

2.4 Conclusion

Nous proposons une stratégie multi-échelle applicable aux analyses des structures hétérogènes obéissant à un comportement anélastique non-linéaire. Elle s'inscrit dans le cadre de l'homogénéisation numérique, où les évolutions des champs micro et macro sont modélisés simultanément. Nous couplons les deux échelles de calcul EF non pas au niveau des points d'intégration du modèle macro comme dans l'approche de la MEF², mais au niveau d'un élément entier. Ainsi, la méthode est mieux adaptée pour le traitement des échelles moins séparées. Dans ce chapitre nous définissons l'interface micro-macro en déplacement, or il est connu qu'une telle formulation n'est pas optimale (voir par exemple [96]). Une formulation plus générale, qui permet de définir les conditions d'interface en contrainte est présentée dans le chapitre ??.

L'objectif de l'approche proposée est la modélisation des structures hétérogènes sous sollicitations extrêmes, c'est-à-dire près de la rupture, où les méthodes classiques d'homogénéisation ne sont pas applicables. Néanmoins, elle représente un coût de calcul incomparablement plus élevé par rapport des méthodes basées sur les approximations analytiques. Par conséquent, nous voyons l'homogénéisation numérique comme une approche plus complémentaire que concurrentielle aux méthodes classiques. Par ailleurs, le traitement local de l'analyse micro ne permet de l'utiliser que dans les zones à fort gradient de contrainte. Dans le reste de la structure, les modèles homogénéisés peuvent être utilisés.

Chapitre 3

Représentation de la microstructure

3.1 Introduction

Dans ce travail nous étudions la microstructure du type matrice-inclusion, qui comprend la plupart des matériaux composite utilisés en génie civil et le génie mécanique. En plus, nous nous limitons à ne traiter que les matériaux bi-phasique, ce qui peut déjà permettre de modéliser, par exemple, les composites métalliques, les métaux poreux ou le béton d'une façon simplifiée. Néanmoins, toutes les méthodes numériques abordées sont directement applicables à d'autres types de matériaux multi-phasiques.

Le comportement de la microstructure est décrit dans un régime anélastique, où nous appliquons un modèle élasto-plastique à la matrice et un modèle d'endommagement aux inclusions. L'interface entre les phases est considérée comme parfaite.

Ensuite, nous abordons tout d'abord l'approche dite exacte de la représentation par la méthode des éléments finis, où le maillage est conforme par rapport aux limites des phases et chaque élément contient une seule phase (voir par exemple [94], [11]).

Puisque une telle représentation est très exigeante vis-à-vis de la puissance d'ordinateur, une approche macroscopique est le plus souvent utilisée. Dans cette démarche la réponse de la microstructure est construite par des potentiels thermodynamique et les détails de la microstructure ne sont pas pris en compte (voir par exemple [61]). Nous proposons un modèle couplé pour représenter le comportement d'un composite à matrice plastifiable et inclusions endommageables, qui serait efficacement identifiables à partir des calculs par l'approche exacte et facile à implanter numériquement.

L'utilisation des approches exacte et macroscopique nous laissent deux possibilités : soit on détermine la réponse de la microstructure d'une grande précision mais aussi avec un coût du calcul très élevé, soit nous nous satisfaisons avec une faible précision et profitons de l'efficacité numérique. Néanmoins, nous considérons une troisième possibilité, celle de l'approche structurée, où nous utilisons la méthode d'éléments finis comme dans l'approche exacte, sauf que nous n'exigeons pas cette fois-ci la conformité du maillage par rapport aux phases. Cela nous permet d'avoir des maillages plus grossiers et par conséquent, plus efficaces.

Dans les trois types de représentation de la microstructure nous formulons les

modèles d'élément finis par deux approches : en déplacement et en contrainte (voir par exemple [98]). Nous mettons en avant surtout dans quelles situation l'une est préférable à l'autre.

3.2 Représentation exacte

3.2.1 Introduction

Nous considérons un matériau bi-phasique, constitué d'une matrice avec des inclusions cylindriques. Dans l'approche exacte par la méthode des éléments finis le maillage que nous adoptons est conforme à la microstructure (voir Figure 3.1)

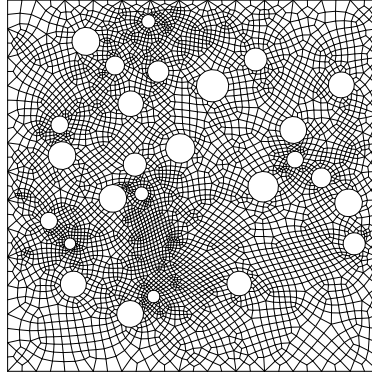


Fig. 3.1 – Un exemple du maillage EF (éléments finis) pour la représentation exacte de la microstructure d'un matériau poreux.

La formulation de la méthode aux éléments finis la plus couramment appliquée s'appuie sur le principe des travaux virtuels, qui résulte de l'approche en déplacement. Le champ de déplacement est dans ce cas le seul à être discrétisé, toutes les autres inconnues, comme par exemple la contrainte ou la déformation, sont exprimées en terme de déplacement. Il a été démontré (voir par exemple [98]) que cette formulation ne permet pas de modéliser un comportement (quasi-)incompressible correctement en utilisant les interpolations du premier ordre, c'est-à-dire en espace C^0 . Puisque le modèle élasto-plastique utilisé appartient au groupe de comportement quasi-incompressible, la formulation originale en déplacement doit être améliorée. Un remède possible est la méthode $\bar{B}$, qui a été introduite en tant qu'une méthode en déplacement avec un ordre réduit de l'intégration numérique et peut être interprétée comme une méthode mixte.

Une approche alternative à celle en déplacement est basée sur la formulation en contrainte de Hellinger-Reisner (voir par exemple [98] ou [3]). Un choix particulier pour l'interpolation des champs de déplacement et de contrainte mène à l'élément de Pian-Sumihara (voir [80]), probablement l'élément le plus performant avec ceux à l'interpolation bi-linéaire de déplacement.

3.2.2 Formulation en déplacement

D'après la démarche classique de la méthode aux éléments finis (voir par exemple [98], [3] ou [45]), nous postulons que la solution au problème mécanique satisfait la condition de minimum d'énergie élastique totale de la structure. Alors, en introduisant le potentiel, Π_d , cela s'écrit formellement comme,

$$u = \{u \in U^*; \inf_{u^* \in U^*} \Pi_d(\nabla^S u^*)\} \quad (3.1)$$

où U^* est l'ensemble de tous les champs de déplacement admissibles, ξ_k l'ensemble des variables internes et le potentiel, Π_d , correspond à

$$\Pi_d = \int_V \Psi(\epsilon, \xi_k) dV - \int_{\partial V} u \bar{t} dS. \quad (3.2)$$

Dans l'approximation des petits déplacement, le champ de déformation est égal à

$$\epsilon = \nabla^S u. \quad (3.3)$$

L'énergie libre est Ψ et $\bar{t}$ est le champ de tractions imposé sur le bord, ∂V .

La condition d'équilibre (3.1) est suffisante seulement dans le cas d'un comportement élastique. Si le comportement est anélastique, nous devons y rajouter les relation de comportement.

Le champ, $u(x, t)$, peut être discrétisé comme

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= N^\alpha(x) U_i^\alpha(t) \\ \implies \epsilon_{ij}(x, t) &= B_{ijk}^\alpha(x) U_k^\alpha(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

où les fonctions de forme sont définies dans un repère de référence, (η_1, η_2, η_3) . Dans nos analyses, bi-dimensionnelle avec l'hypothèse de déformation plane (voir par exemple [98], [45]), nous prenons les fonctions bi-linéaires, définies dans un élément isoparamétrique à 4 nœuds comme,

$$N^{1,2,3,4}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{4}(1 \pm \eta_1)(1 \pm \eta_2). \quad (3.5)$$

Le projecteur entre le champ de déplacement et de déformation, B , est déterminé par

$$B_{ijk}^\alpha = \frac{1}{2} \sum_l \frac{\partial N^\alpha}{\partial \eta_l} \left[\delta_{ik} \left(\frac{\partial N^\beta}{\partial \eta_l} x_j^\beta \right)^{-1} + \delta_{jk} \left(\frac{\partial N^\beta}{\partial \eta_l} x_i^\beta \right)^{-1} \right]. \quad (3.6)$$

Ainsi, nous réécrivons l'expression du potentiel comme,

$$\Pi_d = \int_V \Psi(\epsilon(U_i^\alpha), \xi_k) dV - \int_{\partial V} N^\alpha U_i^\alpha \bar{t}_i dS. \quad (3.7)$$

La condition d'équilibre (3.1) nous impose que $\delta \Pi_d(U_i^\alpha) = 0$, donc

$$\delta U_i^\alpha \left(\int_V B_{kli}^{\alpha T} \sigma_{kl}(U_m^\beta) dV - \int_{\partial V} N^\alpha \bar{t}_i dS \right) = 0 \quad \forall \delta U_i^\alpha, \quad \forall t_n, \quad (3.8)$$

où nous avons tenu compte de la définition $\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}$. Le problème mécanique est complètement défini par l'équation (3.8) et les lois d'évolution locales de variables internes. Ces dernières sont détaillées dans le chapitre 3.3 et peuvent se résumer dans une relation $\sigma = \sigma(\epsilon(t))$, dépendante de la trajectoire $\epsilon(t)$.

L'équation (3.8) peut se résoudre par la méthode de Newton. Nous définissons d'abord le résidu comme,

$$R_{u,i}^\alpha(U_m^\beta) := \int_V B_{kli}^\alpha T \sigma_{kl}(U_m^\beta) dV - \int_{\partial V} N^\alpha \bar{t}_i dS. \quad (3.9)$$

D'après la méthode de Newton, nous écrivons,

$$R_{u,i}^{\alpha,(s+1)} \approx R_{u,i}^{\alpha,(s)} + \frac{\partial R_{u,i}^{\alpha,(s)}}{\partial U_j^{\beta,(s)}} \Delta U_j^{\beta,(s)} = 0, \quad (3.10)$$

où l'exposant (s) signifie la valeur à la s -ième itération et ΔU_i^α la correction des valeurs de déplacement,

$$U_i^{\alpha,(s+1)} = U_i^{\alpha,(s)} + \Delta U_i^{\alpha,(s)}, \quad (3.11)$$

qui est calculée à partir de

$$\Delta U_i^{\alpha,(s)} = - \left(\frac{\partial R_{u,i}^{\alpha,(s)}}{\partial U_j^{\beta,(s)}} \right)^{-1} R_{u,i}^{\alpha,(s)}. \quad (3.12)$$

Le module tangent global, $\frac{\partial R_i^{u,\alpha,(s)}}{\partial U_j^{\beta,(s)}}$, est déterminé par dérivation de l'équation (3.8) par rapport à U_j^β ,

$$\frac{\partial R_i^{u,\alpha,(s)}}{\partial U_j^{\beta,(s)}} = \int_V B_{kli}^\alpha T C_{klmn}^{tan} B_{mnj}^\beta dV, \quad (3.13)$$

où C_{klmn}^{tan} est module tangent local obtenu à partir de la loi de comportement

$$C_{klmn}^{tan} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \epsilon_{mn}}. \quad (3.14)$$

3.2.3 Méthode $\bar{B}$

La formulation décrite ci-dessus est fortement sensible au verrouillage dû à l'adaptation aux comportements quasi-incompressibles (voir par exemple [98] ou [45]). En rajoutant les champs de la partie sphérique de la contrainte et de la déformation, p et θ , respectivement, au champ de déplacement, le problème peut être posé comme

$$(u, p) = \{u \in U^*, p \in P^*, \theta \in \Theta^*; \sup_{(p^* \in P^*)} \inf_{(u^* \in U^*, \theta^* \in \Theta^*)} \Pi_{\bar{B}}(u^*, \theta^*, p^*)\}. \quad (3.15)$$

où le potentiel, $\Pi_{\bar{B}}$, est définie comme

$$\Pi_{\bar{B}} = \int_V (\Psi(\nabla^S u, \theta, \xi_k) - p (\theta - Tr[\nabla^S u])) dV - \int_{\partial V} u \bar{t} dS. \quad (3.16)$$

Le champ de déformation, composé d'une partie déviatorique et sphérique, est égal à

$$\epsilon = Dev[\nabla^S u] + \frac{1}{3}\theta \mathbf{1}. \quad (3.17)$$

L'opérateur $Tr[\cdot]$ donne la trace d'un tenseur d'ordre deux et l'opérateur déviatorique est défini comme $Dev[\cdot] = [\cdot] - \frac{1}{3}Tr[\cdot]\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ représente le tenseur unité d'ordre deux.

Dans l'expression (3.16) nous appliquons la même discrétisation au champ de déplacement, u , que dans (3.4) et supposons les champs, p et θ , constante dans le volume d'élément, V_β , afin d'obtenir

$$\Pi_{\bar{B}} = \int_V (\Psi(\epsilon(U_i^\alpha, \theta), \xi_k) - p^\beta (\theta^\beta - B_{jjk}^\alpha U_k^\alpha)) dV - \int_{\partial V} N^\alpha U_i^\alpha \bar{t}_i dS. \quad (3.18)$$

Puisque le potentiel $\Pi_{\bar{B}}$ doit satisfaire la condition stationnaire (voir l'équation (3.15)), nous imposons $\delta \Pi_{\bar{B}}(U^\alpha, p^\beta, \theta^\beta) = 0$. Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta p^\beta \left(\theta^\beta - U_k^\alpha \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} B_{jjk}^\alpha dV \right) &= 0; \quad \forall \delta p^\beta \\ \delta \theta^\beta \left(\frac{1}{3V_\beta} \int_{V_\beta} Tr[\sigma] dV - p^\beta \right) &= 0; \quad \forall \delta \theta^\beta \\ \delta U_i^\alpha \left(\int_V Dev[B_{kli}^\alpha]^T \sigma_{kl} dV + \sum_\beta \left(\int_{V_\beta} B_{jjk}^\alpha^T dV \right) p^\beta - \int_{\partial V} N^\alpha \bar{t}_i dS \right) &= 0; \quad \forall \delta U_i^\alpha \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le système (3.19) peut se résoudre de la manière suivante. Les p^β et θ^β étant les variables élémentaires, nous pouvons les exprimer en terme de U_k^α comme

$$\begin{aligned} \theta^\beta &= U_k^\alpha \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} B_{jjk}^\alpha dV \\ p^\beta &= \frac{1}{3V_\beta} \int_{V_\beta} Tr[\sigma(U_k^\alpha, \theta^\beta)] dV. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En remplaçant les valeurs obtenues à partir de (3.20) dans la dernière équation du système (3.19), nous obtenons l'expression suivante,

$$\int_V \left(Dev[B_{kli}^{\alpha T}] + \sum_{\beta} \left(\frac{1}{V_{\beta}} \int_{V_{\beta}} B_{jjk}^{\alpha T} dV \right) \right) \sigma(U_m^{\gamma}, \theta^{\beta}) dV - \int_{\partial V} N^{\alpha} \bar{t}_i dS = 0. \quad (3.21)$$

En définissant le projecteur modifié, $\bar{B}$, dans le domaine d'un élément fini comme

$$\bar{B}_{kli}^{\alpha} = Dev[B_{kli}^{\alpha T}] + \frac{1}{V_{\beta}} \int_{V_{\beta}} B_{jjk}^{\alpha T} dV; \quad x \in V_{\beta}, \quad (3.22)$$

nous pouvons réécrire l'équation (3.21) de la manière suivante,

$$\sum_{\beta} \left(\int_{V_{\beta}} \bar{B}_{kli}^{\alpha T} \sigma_{kl}(U_m^{\beta}) dV - \int_{\partial V_{\beta}} N^{\alpha} \bar{t}_i dS \right) = 0. \quad (3.23)$$

La seule différence entre la méthode $\bar{B}$ et la formulation initiale en déplacement se résume au remplacement du projecteur de déformation, B , dans l'équation (3.8) par $\bar{B}$ dans l'équation (3.23). Par conséquent, la méthode de la résolution globale ne change pas du tout.

3.2.4 Formulation hybride : élément de Pian-Sumihara

L'élément de Pian-Sumihara est basé sur la formulation variationnelle en énergie complémentaire de Hellinger-Reisner. Dans un premier temps nous présentons l'approche proposée dans [80], pour un comportement de la forme, $\epsilon = \epsilon(\sigma(t))$, puis nous détaillons la formulation adaptée au comportement élasto-plastique-endommageable dans le chapitre 3.4.

Nous définissons l'énergie complémentaire par rapport à l'énergie libre comme,

$$\chi(\sigma) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \Psi(\epsilon). \quad (3.24)$$

Cela nous permet de poser le problème variationnel suivant,

$$(u, \sigma) = \{u \in U^*, \sigma \in S^*; \sup_{(\sigma^* \in S^*)} \inf_{(u^* \in U^*)} \Pi_{PS}(u^*, \sigma^*)\}, \quad (3.25)$$

où U^* représente l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles et S^* l'espace des champs statiquement admissibles. Le potentiel, Π_{PS} , est défini comme,

$$\Pi_{PS} = \int_V (-\chi(\sigma) + \sigma \nabla^S u) dV - \int_{\partial V} u \bar{t} dS, \quad (3.26)$$

où $\bar{t}$ sont encore les tractions imposées aux limites. Les conditions de l'équation (3.25) mènent à la formulation faible suivante,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^S \delta u \, \sigma \, dV - \int_{\partial V} \delta u \bar{t} \, dS &= 0 \\ \int_V \delta \sigma \left(-\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} + \nabla^S u \right) dV &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La première équation dans (3.27) représente la condition d'équilibre et la deuxième la relation du comportements, $\nabla^S u = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma}$, dans un sens faible.

Le choix fait dans [80] consiste à interpoler le champ, u , avec des fonction bilinéaires, définies sur l'élément isoparamétrique de 4 nœuds, comme dans (3.5),

$$N^{1,2,3,4}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{4}(1 \pm \eta_1)(1 \pm \eta_2). \quad (3.28)$$

Par contre, l'interpolation du champ de contrainte est linéaire à l'intérieure d'un élément et discontinue d'un élément à l'autre. Les fonctions correspondantes, qui garantissent en plus un champ de contrainte statiquement admissible, sont,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda_1 + \lambda_2 \, \eta_2 \\ \sigma_{22} &= \lambda_3 + \lambda_4 \, \eta_1 \\ \sigma_{12} &= \lambda_5. \end{aligned} \quad (3.29)$$

On peut observer que $\text{div}_\eta \sigma = 0$ pour toutes valeurs des paramètres λ_i .

Les contraintes dans l'équation (3.29) sont interpolées dans le repère de référence, (η_1, η_2) et doivent être transformée en repère global, (x_1, x_2) . Cette transformation doit être introduite sous la forme,

$$\sigma(x_1, x_2) = T(\eta_1, \eta_2) \sigma(\eta_1, \eta_2) T^T(\eta_1, \eta_2). \quad (3.30)$$

Cette propriété est nécessaire pour préserver l'admissibilité statique (voir par exemple [45]), c'est-à-dire, pour avoir $\text{div}_\eta \sigma = 0 \rightarrow \text{div}_x \sigma = 0$. Si en plus, nous imposons que les contrainte constantes dans (η_1, η_2) se transforment en constante dans le repère (x_1, x_2) , le tenseur de transformation, T , doit être constant, $T(\eta_1, \eta_2) \equiv T$. Un choix spécifique du tenseur T , qui s'est montré le plus efficace, est le tenseur jacobien calculé au centre de l'élément,

$$T_{ij} = J_{ij}(\eta_1 = 0, \eta_2 = 0) \quad (3.31)$$

où

$$J_{ij}(\eta_1, \eta_2) := \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}. \quad (3.32)$$

Ainsi, la contrainte peut être exprimée comme

$$\sigma = S \, \lambda, \quad (3.33)$$

où

$$S = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^T. \quad (3.34)$$

Les interpolations (3.5) et (3.34) nous permettent de réécrire la formulation faible dans (3.27) comme,

$$\begin{aligned} \delta U_i^\alpha \left(\int_V B_{kli}^{\alpha T} S_{kl}^\gamma \lambda^\gamma dV - \int_{\partial V} N^\alpha \bar{t} dS \right) &= 0 \\ \delta \lambda^\alpha \int_V \left(-S_{kl}^{\alpha T} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma_{kl}} + S_{kl}^{\alpha T} B_{kli}^\gamma U_i^\gamma \right) dV &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nous définissons les résidus, R_u et R_σ ,

$$\begin{aligned} R_{u,i}^\alpha &:= \int_V B_{kli}^{\alpha T} S_{kl}^\gamma \lambda^\gamma dV - \int_{\partial V} N^\alpha \bar{t} dS = 0 \\ R_{\sigma,i}^\alpha &:= \int_V \left(-S_{kl}^{\alpha T} \epsilon_{kl} + S_{kl}^{\alpha T} B_{kli}^\gamma U_i^\gamma \right) dV = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

où nous avons utilisé la définition $\epsilon_{kl} = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma_{kl}}$. Le système d'équations (3.36) est résolu par la méthode de Newton,

$$\begin{pmatrix} 0 & G_i^{\alpha\gamma} \\ G_j^{\beta\nu T} & -H^{\beta\gamma,(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_j^{\nu,(s)} \\ \Delta \lambda^{\gamma,(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_i^{\alpha,(s)} \\ -R_\sigma^{\beta,(s)} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

où

$$\begin{aligned} G_i^{\alpha\gamma} &= \int_V B_{kli}^{\alpha T} S_{kl}^\gamma dV \\ H^{\beta\gamma,(s)} &= \int_V S_{kl}^{\beta T} C_{klmn}^{tan^{-1}} S_{mn}^\gamma \\ C_{klmn}^{tan^{-1}} &= \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \sigma_{mn}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pour résoudre le système (3.37) nous exprimons d'abord la correction de contrainte, $\Delta \lambda$, de la deuxième équation,

$$\Delta \lambda^{\gamma,(s)} = H^{\beta\gamma,(s)-1} \left[G_j^{\beta\nu T} \Delta U_j^{\nu,(s)} + R_\sigma^{\beta,(s)} \right]. \quad (3.39)$$

Puis, nous réécrivons la première équation du système (3.37) comme,

$$\underbrace{\left(G_i^{\beta\nu T} H^{\beta\gamma,(s)-1} G_j^{\beta\nu T} \right)}_{K_{uu}^{el}} \Delta U_j^{\nu,(s)} = - \underbrace{\left(R_i^{\alpha,(s)} + G_i^{\beta\nu T} R_\sigma^{\beta,(s)} \right)}_{R_u^{el}}. \quad (3.40)$$

Dans cette dernière relation on peut reconnaître la matrice de raideur et le vecteur résiduel pour une résolution du champ de déplacement de la même façon que dans le cas de la formulation en déplacement.

3.2.5 Tests sur une structure homogène



Fig. 3.2 – Structure homogène élasto-plastique, encastée dans la direction x du côté gauche et soumise à un gradient d'effort du côté droite.

Afin de comparer les différentes approches par la formulation d'EF, nous considérons un exemple numérique d'une structure rectangulaire soumise à un gradient d'effort d'un côté et encastée dans la direction du chargement de l'autre côté. Le matériau de la structure obéit au comportement élasto-plastique, qui est détaillé dans le chapitre 3.3. Plus particulièrement, nous utilisons le seuil de Von Mises avec écrouissage isotrope. Le seuil de plasticité s'écrit alors comme,

$$\Phi^p(\sigma, q^p) = ||Dev \sigma|| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y - q^p), \quad (3.41)$$

où σ_y est le seuil initial de plasticité et la norme d'un tenseur est définie comme, $||(\cdot)|| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$. L'écrouissage supposé est de la forme suivante,

$$q^p(\xi^p) = \sigma_y + K^p \xi^p + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-b^p \xi^p}), \quad (3.42)$$

où K^p , b^p et σ_y sont les paramètres du modèle. En outre, le comportement élastique est considéré isotrope linéaire, $\sigma = C(\epsilon - \epsilon^p)$ où $C_{ijkl} = 2\mu^e(\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) + K^e\delta_{ij}\delta_{kl}$. Les valeurs des paramètres appliquées sont : $K^e = 3.5 \cdot 10^{10}$, $\mu^e = 1.2 \cdot 10^{10}$, $\sigma_y = 4.0 \cdot 10^7$, $\sigma_\infty = 8.0 \cdot 10^7$, $b^p = 1000$ et $K^p = 1.0 \cdot 10^8$.

D'abord, nous comparons les trois approches, en déplacement, $\bar{B}$ et en contrainte, pour un chargement sous lequel nous restons dans le domaine élastique. Nous appliquons l'effort distribué de la manière linéaire avec les valeurs aux extremes,

$F \rightarrow [-10^6, 10^6]$ (voir Figure 3.2). Puis, nous observons la convergence de la solution en augmentant le nombre d'élément dans un maillage structuré par rapport à l'énergie élastique totale, qui est équivalente au travail externe des efforts,

$$W = \int_V F du^{(elas.)} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon C \epsilon dV. \quad (3.43)$$

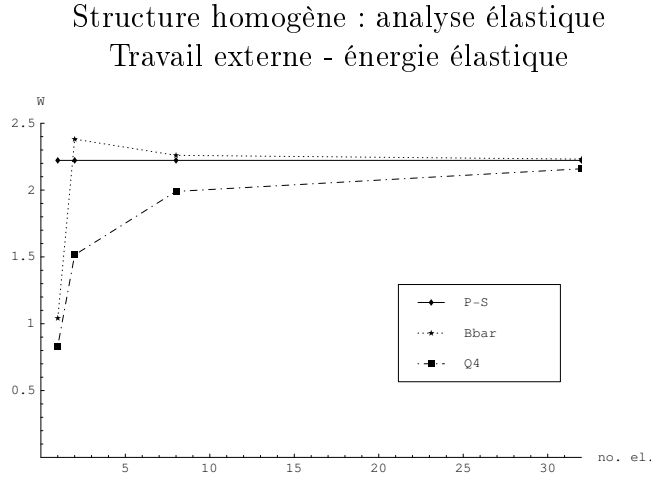


Fig. 3.3 – Convergence de la valeur du travail externe avec l'augmentation du nombre d'éléments. La formulation de Pian-Sumihara (P-S) donne la valeur exacte avec un seul élément. Les deux autres approches, en déplacement (Q4) et $\bar{B}$ (Bbar) convergent plus lentement.

La solution exacte du problème correspond à la variation linéaire du champ de contrainte, donc un seul élément de la formulation de Pian-Sumihara suffit pour le reproduire. Par contre, on a besoin de plusieurs éléments de la formulation en déplacement et de $\bar{B}$ pour converger.

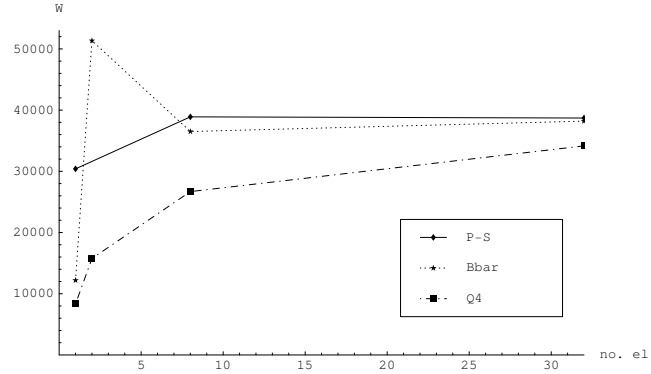
L'avantage de la formulation en contrainte se met encore plus en évidence dans une analyse élasto-plastique. Même si dans ce cas la solution en contrainte n'est plus linéaire, la méthode en contrainte représente mieux la distribution des champs que les deux autres méthodes. Cette fois-ci nous comparons les convergences sur la base de deux quantités, le travail externe et la dissipation plastique, la dernière étant définie dans le chapitre 3.3 comme,

$$\mathcal{D}^p = \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\sigma \dot{\epsilon}^p + q^p \dot{\xi}^p) dV dt. \quad (3.44)$$

3.2.6 Tests sur une structure hétérogène

D'après les tests effectués dans le chapitre 3.2.5 sur une structure homogène la formulation en contrainte de Pian-Sumihara donne une bien meilleure représentation du comportement de la structure soumise à un gradient d'effort (voir Figures 3.2,

Structure homogène : analyse élasto-plastique
Travail externe



Dissipation plastique

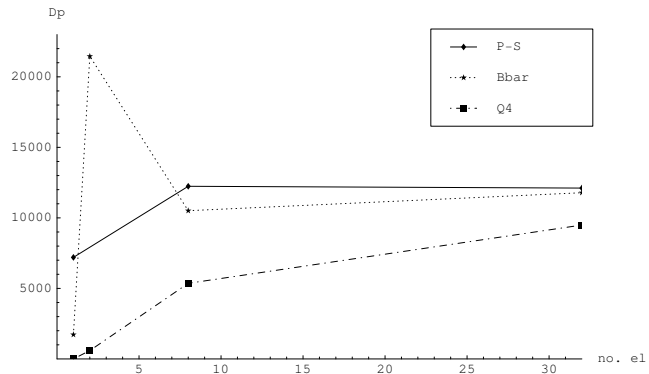


Fig. 3.4 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation avec l’augmentation du nombre d’éléments. La formulation de Pian-Sumihara (P-S) donne un meilleur comportement que les deux autres approches, en déplacement (Q4) et $\bar{B}$ (Bbar).

3.3 et 3.4) que les deux autres approches. Ici nous montrons les résultats d’analyses comparatives d’une structure similaire à celle de Figure 3.2, mais hétérogène (voir Figure 3.5). La non-homogénéité de la microstructure rend le champ de contrainte hétérogène même dans un cas de chargement homogène aux limites. En plus du test avec un gradient d’effort, nous rajoutons un test de traction simple à déplacements imposés.

La résistance attribuée aux inclusions (voir Figure 3.5) est beaucoup moins importante que celle de la matrice et le modèle, par conséquent, correspondrait aux matériaux poreux. Néanmoins, la résistance étant petite, elle n’est pas nulle. Nous la modélisons en élasticité linéaire, avec $K = 2.5 \cdot 10^7$ et $\mu = 1.9 \cdot 10^7$. Les paramètres du modèle élasto-plastique de la matrice sont identiques aux tests du chapitre 3.2.5.

Les analyses sont effectuées pour des différents nombres de degrés de liberté. Le maillage le plus fin et le plus grossier sont montrés Figure 3.6. Les résultats

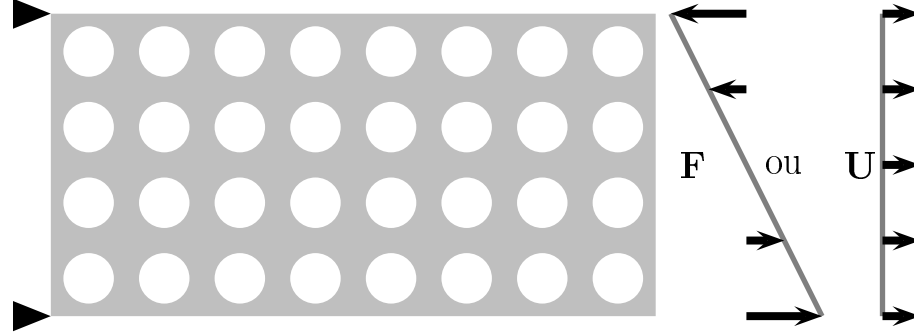


Fig. 3.5 – Structure hétérogène au comportement élasto-plastique, encastrée dans la direction x du côté gauche. Du côté droite elle est soumise à un gradient d'effort $[-F, F]$ ou à un déplacement homogène U .

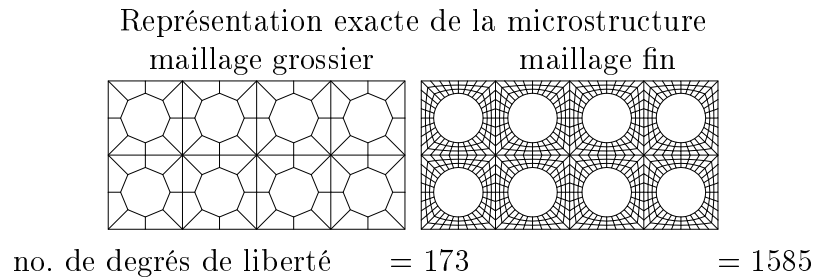


Fig. 3.6 – Maillage le plus grossier et le plus fin utilisés pour les deux tests différents (voir Figure 3.5).

présentés Figure 3.7 montrent que les trois formulations comparées (en contrainte, en déplacement et $\bar{B}$) décrivent bien le test de traction simple même avec un maillage grossier. Par contre, nous observons dans la Figure 3.8 que seule la formulation en contrainte et la méthode $\bar{B}$ garantissent une bonne convergence de la discrétisation dans le cas de gradient d'effort imposé et pas la méthode en déplacement. Ceci est dû probablement à la mauvaise représentation du comportement quasi incompressible, caractéristique reconnue des éléments finis de ce type (voir par exemple [98]).

3.2.7 Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire que dans tous les exemples étudiés, la formulation en contrainte représente mieux la réponse de la structure, qu'elle soit homogène ou hétérogène, surtout pour un chargement non-homogène.

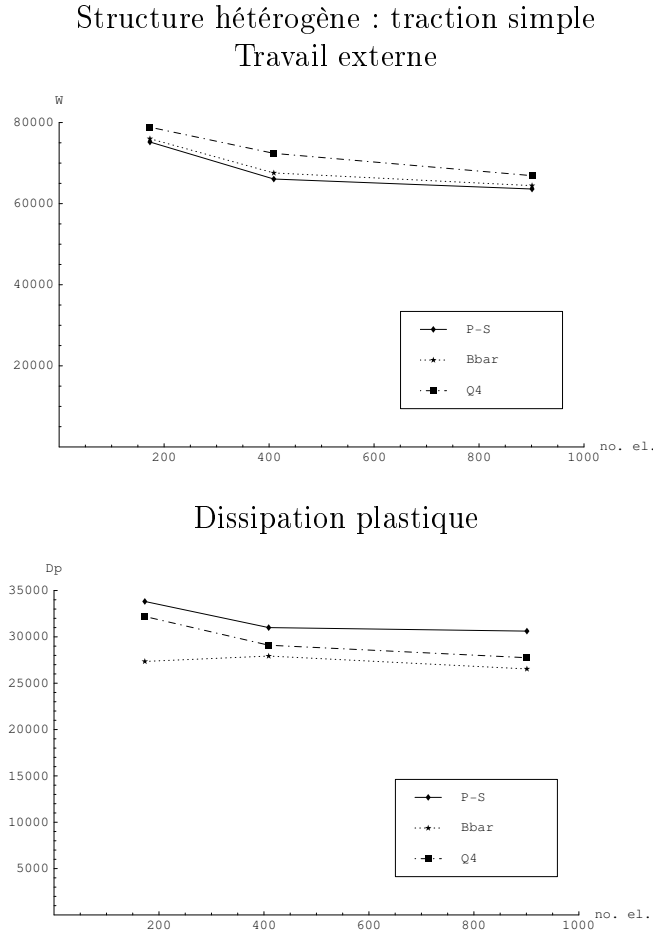


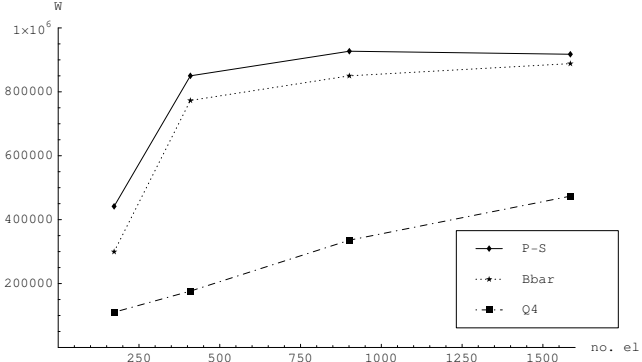
Fig. 3.7 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation avec l’augmentation du nombre d’éléments pour une structure hétérogène (voir Figure 3.5) dans un test de traction simple. Les trois formulations testées, de Pian-Sumihara (P-S), en déplacement (Q4) et $\bar{B}$ (Bbar) donnent des réponses équivalentes. L’avantage de l’élément P-S est moins évident que dans les cas précédents (voir Figure 3.4).

3.3 Modèle macro : formulation en déplacement

3.3.1 Introduction

Dans le chapitre 3.2 nous avons considéré la représentation exacte de la micro-structure, en adoptant un modèle très détaillé et en le résolvant par la méthode des éléments finis. Une telle représentation est capable de prédire le comportement d’un matériau hétérogène d’une manière très précise, mais qui résulte d’une démarche extrêmement coûteuse au niveau du calcul. Dans ce chapitre nous proposons une démarche macroscopique pour la modélisation d’une structure hétérogène, qui engendrerait un moindre coût de calcul et fournirait une bonne représentation de la réponse à l’échelle de la structure.

Structure hétérogène : gradient d'effort Travail externe



Dissipation plastique

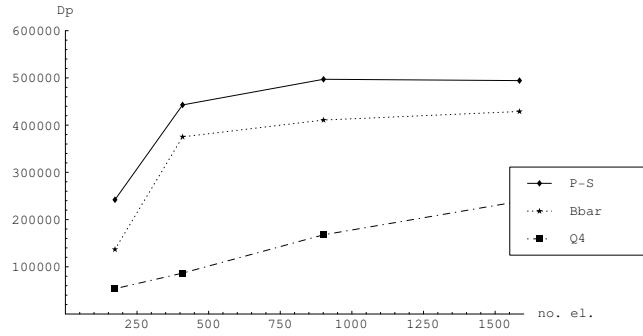


Fig. 3.8 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation avec l'augmentation du nombre d'éléments pour une structure hétérogène (voir Figure 3.5) soumise au gradient d'effort. La qualité des résultats des formulations P-S et $\bar{B}$ sont comparables, tandis que la formulation simple en déplacement ne représente pas le comportement correctement.

Les lois de comportement le plus souvent appliquées à la modélisation de matériaux sont de type plastique ou endommageable. Les modèles de plasticité (voir par exemple [40], [63], [30] ou [84]) avec un critère d'écoulement bien défini pour prendre en compte la déformation plastique, qui ne modifie pas les propriétés élastique ni à chargement ni à décharge, restent les plus applicables pour les représentations des métaux. D'autre part, les modèles d'endommagement (voir [61] ou [55]) avec peuvent représenter d'une manière simplifiée la fissuration des géomatériaux, en prenant en compte la dégradation des propriétés élastiques due à la microfissuration sans déformations anélastiques.

Dans le cas des matériaux hétérogènes, qui sont composés de plusieurs phases parmi lesquelles chacune obéit à un comportement différent, il semble difficile de pouvoir les modéliser soit par la plasticité seule soit par l'endommagement seul. Il a été démontré (voir par exemple [60]) que la validité des ces lois de comportement

de base peut être étendue d'une manière importante en les combinant dans un seul modèle plastique endommageable. Les applications d'une telle approche vont au-delà de ce qui est envisageable par les modèles de base seuls et peuvent s'appliquer, par exemple, aux métaux poreux ([37], [74]), ainsi qu'au béton en compression ([31]). Les approches développées pour coupler les deux lois de comportement (voir par exemple [60], [5] et [85]) consistent à appliquer dans un premier temps le modèle d'endommagement afin de produire une contrainte effective, à partir de laquelle on applique le modèle de plasticité. Ces méthodes restent activement examinées, surtout dans le cadre de la modélisation du béton (voir par exemple [68], [53] ou [64]) et aboutissent à une démarche numériquement plutôt complexe.

Dans [49] nous nous sommes basés sur lesdits développements et nous avons proposé une nouvelle façon de coupler la plasticité et l'endommagement. Ce modèle serait capable de représenter le comportement d'un matériau composé de deux phases, une correspondant plutôt à la plasticité et l'autre à l'endommagement. Le modèle est issu des deux propriétés principales :

- Les deux ingrédients constitutifs sont construits autour d'un critère définissant une certaine déformation anélastique. Pour la plasticité cela ramène à une approche standard sans introduire de notion de contrainte effective, tandis que pour l'endommagement une telle approche est moins habituelle.
- Dans l'implantation numérique les calculs de plasticité et d'endommagement sont réalisés séparément et peuvent éventuellement être adaptés à l'architecture parallèle de logiciels. Un processus itératif est par contre nécessaire pour garantir l'unicité de contraintes.

Dans la suite de ce sous-chapitre nous formulons d'abord le modèle élasto-plastique-endommageable en ayant recours aux démarches thermodynamiques standard. Nous détaillons également l'implantation numérique pour le cas bidimensionnelle dans le cadre de la formulation en déplacement.

3.3.2 Hypothèses de base

Dans le développement du modèle nous nous appuyons sur les hypothèses de : décomposition additive de la déformation, décomposition additive de l'énergie libre, les critères de plasticité et l'endommagement, puis du principe de la dissipation maximale.

La première implique que la déformation totale, ϵ , se décompose en une somme de la déformation élastique, ϵ^e , de la déformation plastique, ϵ^p et de la déformation d'endommagement, ϵ^d :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^d. \quad (3.45)$$

Nous pouvons constater que la notion de la déformation d'endommagement s'introduit rarement dans la littérature, à quelques exceptions (par exemple dans [13] ou [97]), où l'on introduit une décomposition du même type que celle dans l'équation (3.45), mais en terme de vitesse de déformation.

Le second ingrédient du modèle concrète la réponse élastique. Nous écrivons l'énergie libre en tant que la somme des contributions élastique, plastique et endomma-

geable,

$$\Psi(\epsilon, \epsilon^d, D, \xi^d, \epsilon^p, \xi^p) = \Psi^e(\epsilon^e) + \Psi^d(\epsilon^d, D) + \Xi^p(\xi^p) + \Xi^d(\xi^d), \quad (3.46)$$

où,

$$\Psi^e(\epsilon^e) = \frac{1}{2} \epsilon^e C^e \epsilon^e. \quad (3.47)$$

Dans les équations (3.46) et (3.47) C^e dénote le module élastique, ϵ^p et D sont les variables internes de la déformation plastique et la compliance d'endommagement, ξ^p and ξ^d sont les variables d'écrouissage de plasticité et d'endommagement, puis $\Xi^p(\xi^p)$ et $\Xi^d(\xi^d)$ sont les énergies d'écrouissage correspondantes.

Nous pouvons définir l'énergie libre d'endommagement $\Psi^d(\cdot)$ en terme d'énergie complémentaire, supposée avoir une forme quadratique en contrainte :

$$\begin{aligned} \Psi^d(\epsilon^d, D) &:= \sigma \epsilon^d - \chi^d(\sigma, D) \\ \chi^d(\sigma, D) &= \frac{1}{2} \sigma D \sigma. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Le dernier ingrédient de base consiste à déterminer les fonctions de seuil de plasticité, $\Phi^p(\sigma, q^p)$, et d'endommagement, $\Phi^d(\sigma, q^d)$,

$$\begin{aligned} \Phi^p(\sigma, q^p) &= \Phi_\sigma^p(\sigma) - (\sigma_y^p - q^p) \leq 0 \\ \Phi^d(\sigma, q^d) &= \Phi_\sigma^d(\sigma) - (\sigma_f^d - q^d) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

où q^p et q^d sont les variables définissant le phénomène d'écrouissage, σ_y est le seuil d'écoulement et σ_f est le seuil d'endommagement. Les fonctions Φ_σ^p et Φ_σ^d déterminent la forme du domaine élastique et seront précisées lors de la modélisation d'un matériau concret.

Par la suite nous démontrons que le reste des ingrédients du modèle peut être déduit à partir des hypothèses présentées ci-dessus en appliquant simplement les considérations de thermodynamique standard et le principe de la dissipation anélastique maximale. On peut écrire la forme locale du second principe de thermodynamique (par exemple voir [63], [61]), qui dit que la dissipation anélastique totale d'un système isolé est toujours positive ou nulle. Par conséquent, en utilisant les résultats des équations (3.46) à (3.48) nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 \leq \dot{\mathcal{D}} &= \sigma \dot{\epsilon} - \dot{\Psi} \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial \Psi^e}{\partial \epsilon^e} \right) \dot{\epsilon}^e + \overbrace{\sigma \dot{\epsilon}^p - \frac{\partial \Xi^p}{\partial \xi^p} \dot{\xi}^p}^{\dot{\mathcal{D}}^p} + \dot{\sigma} \left(\frac{\partial \chi^d}{\partial \sigma} - \epsilon^d \right) \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial \chi^d}{\partial D} \dot{D} - \frac{\partial \Xi^d}{\partial \xi^d} \dot{\xi}^d}_{\dot{\mathcal{D}}^d}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

où $\mathcal{D}^p$ et $\mathcal{D}^d$ représentent la dissipation de plasticité et d'endommagement, respectivement.

Dans le cas d'un processus élastique, où ni les variables plastiques ni les variables d'endommagement ne changent pas, $\dot{\epsilon}^p = 0$, $\dot{\xi}^p = 0$, $\dot{D} = 0$ et $\dot{\xi}^d = 0$, la dissipation doit être nulle, $\dot{\mathcal{D}}^p = 0$ et $\dot{\mathcal{D}}^d = 0$. Il suit, alors que la contrainte et la déformation d'endommagement peuvent s'exprimer comme

$$\sigma = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \epsilon^e} = C^e \epsilon^e \quad (3.51)$$

$$\epsilon^d = \frac{\partial \chi^d}{\partial \sigma} = D\sigma. \quad (3.52)$$

En supposant que les relations constitutives de la contrainte et de la déformation d'endommagement dans (3.51) et (3.52) restent les mêmes dans un processus anélastique, nous pouvons conclure à partir de l'inégalité (3.50) que

$$0 < \dot{\mathcal{D}} = \underbrace{\sigma \dot{\epsilon}^p + q^p \dot{\xi}^p}_{\dot{\mathcal{D}}^p} + \underbrace{\frac{1}{2} \sigma \dot{D} \sigma + q^d \dot{\xi}^d}_{\dot{\mathcal{D}}^d}, \quad (3.53)$$

où nous avons défini les fonctions d'écrouissage q^p et q^d comme variables adjointes aux variables d'écrouissage ξ^p et ξ^d . Elles sont calculées comme

$$\begin{aligned} q^p(\xi^p) &= -\frac{\partial \Xi^p}{\partial \xi^p} \\ q^d(\xi^d) &= -\frac{\partial \Xi^d}{\partial \xi^d}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.3.3 Plasticité

Dans un processus anélastique où le phénomène de plasticité est activé nous pouvons avoir recours au principe de la dissipation plastique maximale (voir par exemple [40] ou [63]). Ainsi, parmi tous les champs admissibles de contrainte, σ et de fonction d'écrouissage, q^p , on choisit ceux qui rendent la valeur de la dissipation maximale. Cela peut être formulé en terme d'un problème de minimisation sous contrainte et résolu par la méthode de multiplicateurs de Lagrange (voir par exemple [90]),

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma &= ? \\ q^p &= ? \end{aligned} \right\} &\implies \min_{\sigma, q^p: \Phi^p(\sigma, q^p)=0} (-\dot{\mathcal{D}}^p(\sigma, q^p)) \\ &\quad \Downarrow \\ &\min_{\forall \sigma, q^p} (L^p(\sigma, q^p, \dot{\gamma}^p)), \end{aligned} \quad (3.55)$$

où $\dot{\gamma}^p$ est le multiplicateur plastique et

$$L^p = -\dot{\mathcal{D}}^p(\sigma, q^p) + \dot{\gamma}^p \Phi^p(\sigma, q^p). \quad (3.56)$$

Les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker (voir par exemple [90]) pour ce problème s'expriment comme

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial L^p(\sigma, q^p, \dot{\gamma}^p)}{\partial \sigma} &= -\dot{\epsilon}^p + \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \implies \dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \\ 0 = \frac{\partial L^p(\sigma, q^p, \dot{\gamma}^p)}{\partial q^p} &= -\dot{\xi}^p + \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p} \implies \dot{\xi}^p = \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les équations peuvent être interprétées comme les loi d'évolution des variables internes du modèle de plasticité avec le multiplicateur de Lagrange $\dot{\gamma}^p$ comme multiplicateur plastique. En supposant ce dernier égal à zéro dans un processus élastique, la dernière équation de Kuhn-Tucker associée au lagrangien dans (3.55) mène à la forme standard de la condition de charge/décharge et peut être écrite comme

$$\dot{\gamma}^p \geq 0 ; \Phi^p \leq 0 ; \dot{\gamma}^p \Phi^p = 0. \quad (3.58)$$

La valeur positive du multiplicateur plastique peut être obtenue à partir de la condition d'admissibilité plastique, qui s'écrit comme

$$0 = \dot{\Phi}^p = \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p} \dot{q}^p. \quad (3.59)$$

A partir de (3.54) et (3.57) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{q}^p &= \frac{\partial q^p}{\partial \xi^p} \dot{\xi}^p \\ &= -\dot{\gamma}^p \frac{\partial^2 \Xi^p}{\partial \xi^{p2}} \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

et à partir de (3.51) et (3.57) :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= C^e (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d - \dot{\epsilon}^p) \\ &= C^e (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d) - \dot{\gamma}^p C^e \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

En combinant les équations (3.59), (3.60) et (3.61) nous obtenons :

$$\dot{\gamma}^p = \frac{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} C^e (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d)}{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} C^e \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p} \frac{\partial^2 \Xi^p}{\partial \xi^{p2}} \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p}} \quad (3.62)$$

Enfin, en utilisant (3.61) et (3.62) nous déterminons le module tangent élasto-plastique dans le cas où l'endommagement n'est pas activé,

$$\dot{\sigma} = \left[C^e - \frac{C^e \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} C^e}{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} C^e \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p} \frac{\partial^2 \Xi^p}{\partial \xi^{p2}} \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p}} \right] (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d). \quad (3.63)$$

3.3.4 Endommagement

Le modèle d'endommagement peut également être formulé d'une manière équivalente à la formulation de la plasticité, même si cela n'est pas une démarche habituelle (voir par exemple [61] ou [55]). Car, dans le cas où l'endommagement est activé est la plasticité reste inactivée, nous avons recours au principe de la dissipation d'endommagement maximale. De la même manière au traitement de la plasticité, parmi les champs de contrainte et de fonction d'érouissage d'endommagement, on choisit ceux qui rendent la dissipation d'endommagement maximale. Cela peut être formulé en terme d'un problème de minimisation sous contrainte et résolu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = ? \\ q^d = ? \end{array} \right\} \implies \min_{\sigma, q^d: \Phi^d(\sigma, q^d)=0} (-\dot{\mathcal{D}}^d(\sigma, q^d))$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{\forall \sigma, q^d} (L^d(\sigma, q^d), \dot{\gamma}^d), \quad (3.64)$$

où $\dot{\gamma}^d$ est le multiplicateur de Lagrange d'endommagement et

$$L^d = -\dot{\mathcal{D}}^d(\sigma, q^d) + \dot{\gamma}^d \Phi^d(\sigma, q^d). \quad (3.65)$$

Les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker correspondantes au lagrangien d'endommagement sont obtenues comme

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial L^d(\sigma, q^d, \dot{\gamma}^d)}{\partial \sigma} &= -\dot{D}\sigma + \dot{\gamma}^d \frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} \implies \dot{D}\sigma = \dot{\gamma}^d \frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} \\ 0 = \frac{\partial L^d(\sigma, q^d, \dot{\gamma}^d)}{\partial q^d} &= -\dot{\xi}^d + \dot{\gamma}^d \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d} \implies \dot{\xi}^d = \dot{\gamma}^d \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Les équations ci-dessus déterminent les lois d'évolution des variable internes d'endommagement. Elles sont complétées par les conditions de charge/décharge,

$$\dot{\gamma}^d \geq 0 ; \Phi^d \leq 0 ; \dot{\gamma}^d \Phi^d = 0, \quad (3.67)$$

où la valeur zéro est attribuée au multiplicateur, lorsque l'endommagement n'est pas activé. Si l'endommagement est activé, le multiplicateur peut être calculé à partir de la condition d'admissibilité d'endommagement,

$$0 = \dot{\Phi}^d = \frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d} \dot{q}^d. \quad (3.68)$$

A partir des équations (3.54) et (3.66) nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{q}^d &= \frac{\partial q^d}{\partial \xi^d} \dot{\xi}^d \\ &= -\dot{\gamma}^d \frac{\partial^2 \Xi^d}{\partial \xi^{d2}} \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

et à partir de (3.52) et (3.66) nous avons

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= (D^{-1}\dot{\epsilon}^d) \\
 &= D^{-1}\dot{\epsilon}^d - D^{-1}\dot{D}\overbrace{D^{-1}\epsilon^d}^{\sigma} \\
 &= D^{-1}\dot{\epsilon}^d - \dot{\gamma}^d D^{-1}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma},
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

où nous avons utilisé la relation $(\dot{D}^{-1}) = -D^{-1}\dot{D}D^{-1}$. En combinant les équations (3.68), (3.69) et (3.70) nous obtenons :

$$\dot{\gamma}^d = \frac{\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} D^{-1}\dot{\epsilon}^d}{\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} D^{-1}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d} \frac{\partial^2 \Xi^d}{\partial \xi^{d^2}} \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d}}. \tag{3.71}$$

Enfin, en faisant appel aux équations (3.70) et (3.71) nous obtenons le module tangent d'endommagement comme

$$\dot{\sigma} = [D^{-1} - \frac{D^{-1}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma}D^{-1}}{\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma}D^{-1}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d}\frac{\partial^2 \Xi^d}{\partial \xi^{d^2}}\frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d}}]\dot{\epsilon}^d. \tag{3.72}$$

3.3.5 Couplage élasto-plastique-endommageable

Finalement, dans le cas où les deux phénomènes sont activés, nous appliquons le principe de la dissipation maximale à la plasticité et à l'endommagement simultanément, afin de récupérer les équations (3.51), (3.57) et (3.59) pour la plasticité et (3.52), (3.66) et (3.68) pour l'endommagement. En particulier, cela veut dire que nous pouvons écrire deux formes différentes de loi constitutive en vitesse de contrainte, une pour chacun des phénomènes,

$$\dot{\sigma} = C^{ep}(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d), \tag{3.73}$$

où

$$C^{ep} = \begin{cases} C^e & ; \dot{\gamma}^p = 0 \\ C^e - \frac{C^e \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} C^e}{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} C^e \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p} \frac{\partial^2 \Xi^p}{\partial \xi^{p^2}} \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p}} & ; \dot{\gamma}^p > 0 \end{cases} \tag{3.74}$$

et

$$\dot{\sigma} = C^{ed}\dot{\epsilon}^d, \tag{3.75}$$

où

$$C^{ed} = \begin{cases} D^{-1} & ; \dot{\gamma}^d = 0 \\ D^{-1} - \frac{D^{-1}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma}D^{-1}}{\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma}D^{-1}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d}\frac{\partial^2 \Xi^d}{\partial \xi^{d^2}}\frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d}} & ; \dot{\gamma}^d > 0 \end{cases} \tag{3.76}$$

Puis, à partir de l'unicité des contraintes en (3.73) et (3.75), nous obtenons la vitesse de déformation d'endommagement comme

$$C^{ep}(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d) = C^{ed}\dot{\epsilon}^d \implies \dot{\epsilon}^d = [C^{ep} + C^{ed}]^{-1} C^{ep} \dot{\epsilon}. \quad (3.77)$$

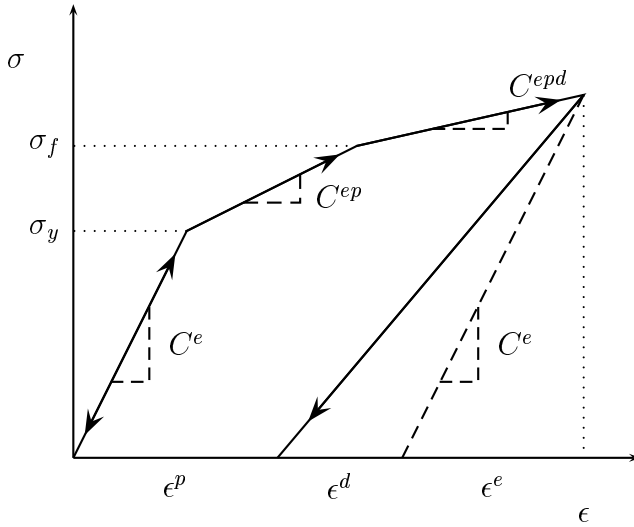


Fig. 3.9 – Courbe $\sigma - \epsilon$ pour le modèle élasto-plastique-endommageable 1D. On atteint d'abord le seuil d'écoulement et puis le seuil d'endommagement. En décharge nous observons deux phénomènes, l'apparition d'une déformation plastique et la dégradation des propriétés élastiques. Nous montrons également graphiquement la représentation graphique de la décomposition de déformations, $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^d$.

En remplaçant le dernier résultat dans (3.75) nous pouvons réécrire l'équation constitutive comme

$$\dot{\sigma} = C^{epd} \dot{\epsilon}, \quad (3.78)$$

où C^{epd} représente le module tangent élasto-plastique-endommageable,

$$C^{epd} = C^{ed}[C^{ep} + C^{ed}]^{-1} C^{ep}. \quad (3.79)$$

3.3.6 Résolution numérique du problème central

Dans cette section nous développons l'implantation du modèle élasto-plastique-endommageable dans le cadre de la méthode incrémentale pour la résolution du schéma implicite d'Euler arrière. Nous présentons ici l'implantation dans le cadre de la formulation en déplacement, voire de la méthode $\bar{B}$, qui sont expliquées dans le

chapitre 3.2.

Problème central du calcul élasto-plastique-endommageable

Etant donné : $\epsilon_n = \epsilon(\cdot, t_n)$, $\epsilon_n^p = \epsilon_n^p(\cdot, t_n)$, $\epsilon_n^d = \epsilon_n^d(\cdot, t_n)$, $\xi_n^p = \xi_n^p(\cdot, t_n)$, $D_n = D(\cdot, t_n)$, $\xi_n^d = \xi_n^d(\cdot, t_n)$, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$

Trouver : ϵ_{n+1} , ϵ_{n+1}^p , ϵ_{n+1}^d , ξ_{n+1}^p , D_{n+1} , ξ_{n+1}^d

Tel que :

$$\begin{aligned} A_{el=1}^{n_{el}} [\mathbf{f}_{n+1}^{el,int} - \mathbf{f}_{n+1}^{el,ext}] &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}_{n+1}^{el,int} &= \int_V \mathbf{B}^{el} \sigma(\epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \xi_{n+1}^p, D_{n+1}, \xi_{n+1}^d, \epsilon_{n+1}^d) dV, \\ \mathbf{f}_{n+1}^{el,ext} &= \int_V \mathbf{N}^{el} b dV + \int_{\partial V} \mathbf{N}^{el} \bar{t} dS, \\ \dot{\gamma}_{n+1}^p &\geq 0, \quad \Phi_{n+1}^p(\sigma_{n+1}, q_{n+1}^p) \leq 0, \quad \dot{\gamma}_{n+1}^p \Phi_{n+1}^p = 0 \\ \dot{\gamma}_{n+1}^d &\geq 0, \quad \Phi_{n+1}^d(\sigma_{n+1}, q_{n+1}^d) \leq 0, \quad \dot{\gamma}_{n+1}^d \Phi_{n+1}^d = 0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Dans l'équation (3.80) la première équation exprime l'équilibre global, tandis que deux autres imposent les admissibilités plastique et endommageable à l'instant t_{n+1} . Le symbole $A_{el=1}^{n_{el}}$ dénote l'assemblage dans le cadre de la méthode des éléments finis, une procédure qui fait la somme de toutes les contributions élémentaires (voir par exemple [3]), $\mathbf{f}_{n+1}^{el,int}$ et $\mathbf{f}_{n+1}^{el,ext}$ représentent les efforts internes et externes de l'élément 'el', $\mathbf{N}^{el}$ est la variation de déplacement et $\mathbf{B}^{el}$ la variation de déformation correspondante. Un rôle essentiel de la méthode des éléments finis est de drastiquement simplifier le problème central en le réduisant aux point d'intégration correspondants, qui sont choisis par rapport au maillage d'éléments finis.

En accord avec la méthode séquentielle (voir par exemple [84]), nous pouvons séparer la résolution des équations d'équilibre par rapport à la résolution locale des admissibilités plastique et endommageable. Les équations d'équilibre sont résolues d'une manière itérative afin de fournir une première estimation du champ de déformation. Si nous utilisons la méthode de Newton, nous aurons besoin de la matrice tangente, où plus précisément, du module tangent élasto-plastique-endommageable (voir par exemple [5]). Néanmoins, cela n'est pas essentiel et de nombreux autres schémas itératifs peuvent être appliqués pour le même but. Pour toute procédure de résolution globale on dénote par $\epsilon_{n+1}^{(i)}$, la meilleure approximations de déformation totale pour un certain point de Gauss à l'instant t_{n+1} dans la i^{eme} itération. Le problème central se réduit alors à la résolution des variables internes satisfaisant l'admissibilité de contrainte satisfaite. Cette résolution est accomplie par un schéma d'itération locale, le compteur noté ' $(k)'$ ', où les deux ingrédient du modèle effectués indépendamment donnent les valeurs des déformations anélastiques, $\epsilon_{n+1}^{p(k)}$ et $\epsilon_{n+1}^{d(k)}$, et de la contrainte correspondante,

$$\sigma_{n+1} = C^e(\epsilon_{n+1}^{(i)} - \epsilon_{n+1}^{p(k)} - \epsilon_{n+1}^{d(k)}). \quad (3.81)$$

Comme il a été déjà dit, les résolutions des parties plastique et endommageable peuvent être effectuées indépendamment aboutissant à deux valeurs de contrainte, σ_{n+1}^p et σ_{n+1}^d , respectivement. À l'étape finale, nous imposons l'unicité des contraintes afin d'obtenir une réponse constitutive unique.

3.3.7 Résolution numérique de la plasticité

Le calcul de la plasticité est effectué par la procédure expliquée dans ce sous-chapitre. En gardant les variables internes d'endommagement fixes et, en particulier, la valeur actuelle de la déformation d'endommagement, $\epsilon_{n+1}^{d(k)}$, figée, nous supposons dans un premier temps que l'incrément reste élastique, ce qui nous permet de calculer l'état test,

$$\sigma_{n+1}^{p,trial} = C^e(\epsilon_{n+1}^{(i)} - \epsilon_n^p - \epsilon_{n+1}^{d(k)}) \quad (3.82)$$

$$q_{n+1}^{p,trial} = q(\xi_n^p). \quad (3.83)$$

Si l'incrément test est plastiquement admissible, c'est-à-dire que

$$\Phi_{n+1}^{p,trial} = \Phi^p(\sigma_{n+1}^{p,trial}, q_{n+1}^{p,trial}) \leq 0,$$

nous concluons que l'incrément total est la solution exacte avec $\dot{\gamma}_{n+1}^p = 0$. Si, par contre, $\Phi_{n+1}^{p,trial} > 0$ on doit corriger la contrainte en trouvant la valeur positive du multiplicateur plastique correspondant à l'admissibilité plastique. Pour cette raison, nous intégrons l'équation d'évolution des variables plastiques par le schéma d'Euler arrière,

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}^p &= \epsilon_n^p + \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}^p} \\ \xi_{n+1}^p &= \xi_n^p + \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial q_{n+1}^p} \\ q_{n+1}^p &= q^p(\xi_{n+1}^p), \end{aligned} \quad (3.84)$$

où

$$\gamma_{n+1}^p = \dot{\gamma}_{n+1}^p \Delta t \quad (3.85)$$

et la valeur correspondante de contrainte,

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^p &= C^e(\epsilon_{n+1}^{(i)} - \epsilon_{n+1}^p - \epsilon_{n+1}^{d(k)}) \\ &= C^e(\epsilon_{n+1}^{(i)} - \epsilon_n^p - \epsilon_{n+1}^{d(k)}) - C^e(\epsilon_{n+1}^p - \epsilon_n^p) \\ &= \sigma_{n+1}^{p,trial} - C^e \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}^p}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

ce qui devrait être examiné pour l'admissibilité plastique,

$$\Phi_{n+1}^p = \Phi^p(\sigma_{n+1}^p, q_{n+1}^p) = 0 . \quad (3.87)$$

En utilisant la fonction seuil de l'équation (3.49) et les équation (3.84) et (3.86), l'équation (3.87) peut être réécrite comme

$$\Phi_{n+1}^p = \Phi_\sigma^p(\sigma_{n+1}) - (\sigma_y^p - q^p(\xi_{n+1}^p)) = 0 . \quad (3.88)$$

Pour une fonction d'écrouissage convexe, nous pouvons toujours résoudre la dernière équation par la méthode de Newton afin de converger vers la valeur de γ_{n+1}^p . Cette équation doit être résolue avec les équations d'évolution,

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}^p &= \epsilon_n^p + \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{\sigma, n+1}^p}{\partial \sigma} \\ \xi_{n+1}^p &= \xi_n^p + \gamma_{n+1}^p \\ \sigma_{n+1}^p &= \sigma_{n+1}^{p, trial} - C^e \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{\sigma, n+1}^p}{\partial \sigma} . \end{aligned} \quad (3.89)$$

3.3.8 Résolution numérique de l'endommagement

Comme dans le cas de la plasticité, nous commençons en supposant que l'incrément est élastique et en gardant les variables internes d'endommagement de l'incrément précédent, ce qui mène à

$$\sigma_{n+1}^{d, trial} = D_n^{-1} \epsilon_{n+1}^{d(k)} \quad (3.90)$$

$$q_{n+1}^{d, trial} = q(\xi_n^d). \quad (3.91)$$

Nous rappelons que la valeur de la déformation d'endommagement à l'instant, t_{n+1} , ϵ_{n+1}^d doit être déterminée par un processus itératif, où pour les calculs de la plasticité et de l'endommagement nous gardons la déformation d'endommagement constante et égale à $\epsilon_{n+1}^{d(k)}$.

Si l'admissibilité d'endommagement de l'incrément test est confirmée avec,

$$\Phi_{n+1}^{d, trial} = \Phi^d(\sigma_{n+1}^{d, trial}, q_{n+1}^{d, trial}) \leq 0 ,$$

l'incrément test est alors la solution exacte avec $\gamma_{n+1}^d = 0$. Si ce n'est pas le cas, on doit calculer la valeur positive correspondante du multiplicateur d'endommagement, qui rétablira l'admissibilité d'endommagement. Plus précisément, en intégrant les lois d'évolution d'endommagement dans (3.64) par le schéma d'Euler arrière nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1}^d &= D_{n+1}^{-1} \epsilon_{n+1}^{d(k)} \\
 &= \sigma_{n+1}^{d,trial} - D_n^{-1} \gamma_{n+1}^d \frac{\partial \Phi_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}^d} \\
 D_{n+1} \sigma_{n+1}^d &= D_n \sigma_{n+1}^d + \gamma_{n+1}^d \frac{\partial \Phi_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}^d} \\
 \xi_{n+1}^d &= \xi_n^d + \gamma_{n+1}^d \frac{\partial \Phi_{n+1}^d}{\partial q_{n+1}^d} \\
 q_{n+1}^d &= q^d(\xi_{n+1}^d).
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

En utilisant la fonction de seuil d'endommagement introduite dans (3.49) et les évolutions ci-dessus dans l'équation (3.92), l'admissibilité d'endommagement peut être imposée comme,

$$\Phi_{n+1}^d = \Phi_{\sigma,n+1}^d(\sigma_{n+1}^d) - (\sigma_f^d - q^d(\xi_{n+1}^d)) = 0. \tag{3.93}$$

La résolution de l'équation (3.93) pour la valeur du multiplicateur d'endommagement, γ_{n+1}^d , s'effectue avec les équations d'évolution d'endommagement dans (3.92) en utilisant la méthode de Newton .

Dans l'équation (3.90) la contrainte test est calculée en supposant que la valeur initiale du tenseur d'endommagement est non-nulle, $D_0 > 0$, afin d'éviter une division par zéro. Avec cette hypothèse nous devons changer la valeur du module élastique en $\tilde{C}^e$, pour que les propriétés élastiques ne changent pas,

$$C^e = (D_0 + \tilde{C}^e)^{-1}. \tag{3.94}$$

Néanmoins, en prenant $D_0 > 0$, nous changeons l'évolution d'écrouissage, puisque $D(\xi^d = 0) > 0$. Alors, D_0 devient un autre paramètre du modèle d'endommagement. Dans nos applications, nous avons choisi $D_0 = C^{e-1}$, ce qui veut dire que le module élastique doit être égal à $\tilde{C}^e = 2C^e$ pour garder les propriétés élastiques désirées.

3.3.9 Résolution numérique du couplage

Les calculs du modèle plastique endommageable décrits précédemment peuvent être effectués complètement indépendamment l'un de l'autre. De plus, ces deux processus numériques pourraient se mettre en œuvre en parallèlement sans aucun échange de données en attribuant à chacun d'eux un processeur d'un ordinateur multi-processeur.

Les résultats finaux produits par les deux parts du modèle doivent être comparés et l'unicité du champ de contrainte doit être imposée,

$$r(\epsilon_{n+1}^{d(k)}) := \sigma_{n+1}^p(\epsilon_{n+1}^{d(k)}) - \sigma_{n+1}^d(\epsilon_{n+1}^{d(k)}) = 0. \tag{3.95}$$

La dernière équation est résolue par un processus itératif, auquel nous fournissons les résultats disponibles des deux parts afin de faire l'itération suivante avec

$$0 = r_{n+1}^{(k)} - C_{n+1}^{ep} \Delta \epsilon_{n+1}^{d(k)} - C_{n+1}^{ed} \Delta \epsilon_{n+1}^{d(k)} \quad (3.96)$$

menant à

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{n+1}^{d(k)} &= (C_{n+1}^{ep} + C_{n+1}^{ed})^{-1} r_{n+1}^{(k)} \\ \epsilon_{n+1}^{d(k+1)} &= \epsilon_{n+1}^{d(k)} + \Delta \epsilon_{n+1}^{d(k)}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Le processus continue ainsi avec la valeur corrigée de la déformation d'endommagement jusqu'à la convergence dans (3.95). Le nombre d'itération dépend principalement du choix de la valeur initiale de la déformation d'endommagement, $\epsilon_{n+1}^{d(k=0)}$. Comme première approximation, on ne devrait pas prendre la dernière valeur convergée, ϵ_n^d , puisque la déformation d'endommagement évolue également dans un processus élastique $\epsilon^d = D\sigma \neq \text{const.}$ même si $D = \text{const.}$ Alors, nous supposons que le processus reste élastique, ce qui signifie que la variable d'endommagement, D , n'évolue pas et la contrainte test est égale à

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + (D_n + C^e)^{-1} (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n). \quad (3.98)$$

Par la relation dans (3.52) la valeur correspondante de la déformation d'endommagement est égale à

$$\epsilon_{n+1}^{d(k=0)} = D_n \sigma_{n+1}^{trial}. \quad (3.99)$$

La valeur ci-dessus est par la suite prise comme valeur initiale du processus itératif pour la déformation d'endommagement, afin de résoudre l'équation non-linéaire (équations de (3.95) à (3.97)).

Dans l'équation (3.97) ci-dessus nous avons besoin des valeurs correspondantes des module élasto-plastique et élasto-endommageable, qui peuvent être facilement calculée à partir de (3.89) pour la plasticité et à partir de (3.92) pour l'endommagement, afin d'obtenir

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^p}{\partial (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^d)} := C_{n+1}^{ep} \quad (3.100)$$

$$C_{n+1}^{ep} = \begin{cases} C^e & ; \gamma_{n+1}^p = 0 \\ (C^e + \frac{\partial^2 \Xi_{n+1}^p}{\partial \xi^p{}^2})^{-1} C^e \frac{\partial^2 \Xi_{n+1}^p}{\partial \xi^p{}^2} & ; \gamma_{n+1}^p \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^d}{\partial \epsilon_{n+1}^d} := C_{n+1}^{ed} \quad (3.101)$$

$$C_{n+1}^{ed} = \begin{cases} D_n^{-1} & ; \gamma_{n+1}^d = 0 \\ (D_n^{-1} + \frac{\partial^2 \Xi_{n+1}^d}{\partial \xi^d{}^2})^{-1} D_n^{-1} \frac{\partial^2 \Xi_{n+1}^d}{\partial \xi^d{}^2} & ; \gamma_{n+1}^d \geq 0 \end{cases}.$$

Les valeurs données des modules tangents pour les deux parts du modèle sont utilisées directement pour la construction du module tangent du modèle couplé,

$$C_{n+1}^{ep}(d\epsilon_{n+1} - d\epsilon_{n+1}^d) = C_{n+1}^{ed}d\epsilon_{n+1}^d \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\epsilon_{n+1}^d &= (C_{n+1}^{ep} + C_{n+1}^{ed})^{-1} C_{n+1}^{ep} d\epsilon_{n+1} \\ \Rightarrow d\sigma_{n+1} &= \underbrace{(C_{n+1}^{ep} + C_{n+1}^{ed})^{-1} C_{n+1}^{ep} C_{n+1}^{ed}}_{C_{n+1}^{epd}} d\epsilon_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Le module tangent élasto-plastique-endommageable déterminé dans (3.103) est utilisé pour le calcul de la contribution élémentaire à la matrice de raideur globale, nécessaire pour le schéma itératif de résolution des équations d'équilibre global avec

$$\begin{aligned} A_{el=1}^{n_{el}} [\mathbf{K}_{n+1}^{el,(i)} (\mathbf{d}_{n+1}^{el,(i+1)} - \mathbf{d}_{n+1}^{el,(i)})] &= A_{el=1}^{n_{el}} [\mathbf{f}_{n+1}^{el,ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{el,int}] \\ \mathbf{K}_{n+1}^{el,(i)} &= \int_V \mathbf{B}^{el} C_{n+1}^{epd} \mathbf{B}^{el,T} dV. \end{aligned} \quad (3.104)$$

L'algorithme numérique du modèle
élasto-plastique-endommageable

étant donnée :
 $\epsilon_n^{(i)}, \epsilon_n^p, D_n, \xi_n^p, \xi_n^d$

trouver
 $\sigma_{n+1}^{(i)}, \epsilon_{n+1}^{(i)}, D_{n+1}^{(i)}, \xi_{n+1}^{p(i)}$ et $\xi_{n+1}^{d(i)}$
calcul élastique

$$\sigma_{n+1}^{trial} = C^e(\epsilon_{n+1}^{(i)} - \epsilon_n^p - \epsilon_{n+1}^{d(k=0)})$$

$$\epsilon_{n+1}^{d(k=0)} = \mathbf{D}_n \sigma_{n+1}^{trial}$$

$\epsilon_{n+1}^{d(k)}$
calcul plastique
 $\Phi_{n+1}^{p,trial} = \Phi^p(\sigma_{n+1}^{trial}, q_n^p)$
si $\Phi_{n+1}^{p,trial} \leq 0$:
 $\sigma_{n+1}^p = \sigma_{n+1}^{trial}$
 $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p$
 $\xi_{n+1}^p = \xi_n^p$
 $q_{n+1}^p = q_n^p$
 et sors
si $\Phi_{n+1}^{p,trial} > 0$:
 résoudre
 $\Phi_{n+1}^p(\sigma_{n+1}^p(\gamma_{n+1}^p), q_{n+1}^p(\gamma_{n+1}^p)) = 0$
 où
 $\sigma_{n+1}^p = \sigma_{n+1}^{trial} - C^e \gamma_{n+1}^p \text{signe}(\sigma_{n+1}^{trial})$
 $\xi_{n+1}^p = \xi_n^p + \gamma_{n+1}^p$
 $q_{n+1}^p = q^p(\xi_{n+1}^p)$
 $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \gamma_{n+1}^p \text{signe}(\sigma_{n+1}^{trial})$
 σ_{n+1}^p

$\epsilon_{n+1}^{d(k)}$
calcul endommageable
 $\Phi_{n+1}^{d,trial} = \Phi^d(\sigma_{n+1}^{trial}, q_n^d)$
si $\Phi_{n+1}^{d,trial} \leq 0$:
 $\sigma_{n+1}^d = \sigma_{n+1}^{trial}$
 $D_{n+1} = D_n$
 $\xi_{n+1}^d = \xi_n^d$
 $q_{n+1}^d = q_n^d$
 et sors
si $\Phi_{n+1}^{d,trial} > 0$:
 résoudre
 $\Phi_{n+1}^d(\sigma_{n+1}^d(\gamma_{n+1}^d), q_{n+1}^d(\gamma_{n+1}^d)) = 0$
 où
 $\sigma_{n+1}^d = \sigma_{n+1}^{trial} - D_n^{-1} \gamma_{n+1}^d \text{signe}(\sigma_{n+1}^{trial})$
 $\xi_{n+1}^d = \xi_n^d + \gamma_{n+1}^d$
 $q_{n+1}^d = q^d(\xi_{n+1}^d)$
 $D_{n+1} = D_n + \frac{\gamma_{n+1}^d}{|\sigma_{n+1}^d|}$
 σ_{n+1}^d

Si $\sigma_{n+1}^p \neq \sigma_{n+1}^d$:
correction de $\epsilon_{n+1}^{d(k)}$

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{n+1}^{d(k)} &= (C^{ep} + C^{ed})^{-1}(\sigma_{n+1}^p - \sigma_{n+1}^d) \\ \epsilon_{n+1}^{d(k+1)} &= \epsilon_{n+1}^{d(k)} + \Delta \epsilon_{n+1}^{d(k)} \end{aligned}$$

3.3.10 Identification du modèle couplé

Le modèle élasto-plastique-endommageable développé précédemment peut être identifié dans le cadre d'une résolution par la MEF par rapport d'une représentation exacte (voir chapitre 3.2). Nous traitons un problème d'une structure à deux phase, la matrice obéissant au comportement élasto-plastique et les inclusions cylindriques au comportement endommageable. La fraction volumique des inclusions est de 35%. Les caractéristiques des deux modèles sont les suivantes :

seuil de plasticité

$$\Phi^p(\sigma, q^p) = ||Dev \sigma|| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y - q^p), \quad (3.107)$$

écrouissage plastique

$$q^p(\xi^p) = \sigma_y + K^p \xi^p + (\sigma_{y\infty} - \sigma_y)(1 - e^{-b^p \xi^p}), \quad (3.108)$$

seuil d'endommagement

$$\Phi^d(\sigma, q^d) = \frac{1}{3}Tr \sigma - (\sigma_f - q^d), \quad (3.109)$$

écrouissage d'endommagement

$$q^d(\xi^d) = \sigma_f + K^d \xi^d + (\sigma_{f\infty} - \sigma_f)(1 - e^{-b^d \xi^d}), \quad (3.110)$$

où σ_f , σ_y sont les seuils de plasticité et d'endommagement, respectivement, $\sigma_{y\infty}$, K^p , b^p les paramètres de plasticité et $\sigma_{f\infty}$, K^d , b^d les paramètres d'endommagement.

Remarque 1

Nous remarquons que pour ce choix particulier du seuil d'endommagement dans l'équation (3.109) il est raisonnable que le tenseur d'endommagement, D , adopte la forme suivante,

$$D_{ijkl} = \kappa^d \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (3.111)$$

où le scalaire κ^d est la partie sphérique du tenseur D . Il est défini en utilisant la loi d'évolution de la variable D (voir l'équation (3.66)),

$$\dot{D}_{ijkl} \sigma_{kl} = \frac{1}{3} \dot{\gamma}^d \delta_{ij} \implies \dot{\kappa}^d = \frac{\dot{\gamma}^d}{3Tr \sigma}. \quad (3.112)$$

Ainsi, un matériau avec ce comportement ne peut être endommagé que sur sa partie sphérique et jamais le coefficient de cisaillement, μ , ne peut être dégradé.

Les valeurs supposées de l'ensemble de paramètres sont : $\sigma_y = 4.0 \cdot 10^7$, $\sigma_{y\infty} = 8.0 \cdot 10^7$, $b^p = 1000$ et $K^p = 1.0 \cdot 10^8$, $\sigma_f = 0.5 \cdot 10^7$, $\sigma_{f\infty} = 1.0 \cdot 10^7$, $b^d = 100$ et $K^d = 2.5 \cdot 10^6$. Le comportement élastique de la phase plastifiable est isotrope linéaire avec $K^{ep} = 2.0 \cdot 10^{10}$, $\mu^{ep} = 1.5 \cdot 10^{10}$ et celui de la phase endommageable est $K^{ed} = 1.8 \cdot 10^{10}$, $\mu^{ed} = 1.0 \cdot 10^{10}$.

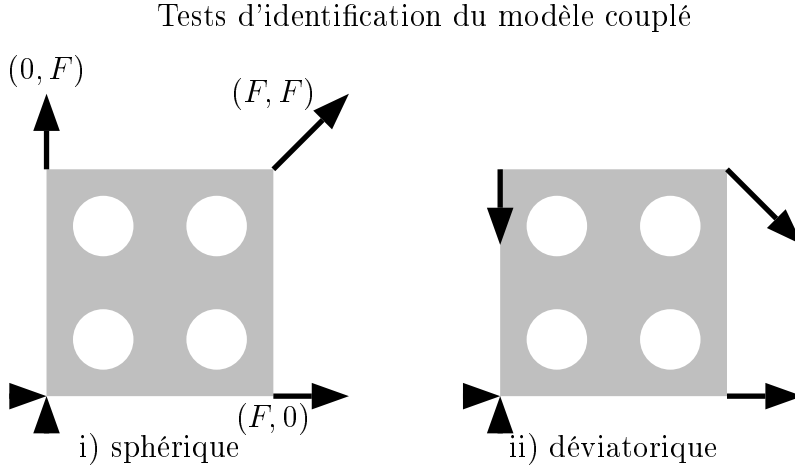


Fig. 3.10 – Tests numériques effectués pour identifier le modèle couplé, élasto-plastique-endommageable. Il s'agit dans les deux cas des conditions aux limites homogènes, i) sphérique et ii) déviatorique.

Puisque les modèles des deux phases sont isotropes, nous supposons la même chose pour le comportement macro, bien que la distribution ne la soit pas tout à fait. Ensuite, nous choisissons deux tests pour identifier le modèle (voir Figure 3.10), sphérique et déviatorique, les deux chargements propres d'un tenseur isotrope symétrique du quatrième ordre. Dans les deux cas, les efforts aux limites sont homogènes.

L'identification est basé sur les valeurs du travail externe, W , de la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$ et de la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$,

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V} F \dot{u} \, dV \, dt \\
 \mathcal{D}^p &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + q^p \dot{\xi}^p) \, dV \, dt \\
 \mathcal{D}^d &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{D}_{ijkl} \sigma_{kl} + q^d \dot{\xi}^d \right) \, dV \, dt,
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

et sur la relation du type effort-déplacement. Le rôle de l'effort dans ce dernier représente une composante des forces imposée, qui est proportionnelle au pseudo-temps, puisque le pilotage est effectué en effort. Par contre, le déplacement est représenté en terme de,

$$U(t) = \frac{1}{t - t_0} \int_{\partial V} F(t) u(t) \, dS, \tag{3.114}$$

où $F(t)$ et $u(t)$ représentent les valeurs des efforts et déplacements aux limites. Nous remarquons que $U(t) \equiv u(t)$ dans un cas unidimensionnel et que la valeur de $U(t)$ représente une sorte de dérivée du travail externe par rapport au temps.

Le modèle plastique avec la fonction seuil définie dans l'équation (3.107) permettra d'identifier les paramètres plastiques indépendamment des paramètres d'endommagement, puisque l'endommagement ne s'active pas dans l'analyse du test déviatorique (voir Figure 3.10 et Tableau 2). Par contre, dans le test sphérique les deux phénomènes s'activent et nous pouvons identifier les paramètres d'endommagement (voir Figure 3.10 et Tableau 1).

Identification avec le test sphérique

type d'analyse	W	$\mathcal{D}^p$	$\mathcal{D}^d$
micro	$1.517 \cdot 10^5$	$0.183 \cdot 10^5$	$0.0169 \cdot 10^5$
macro	$1.710 \cdot 10^5$	$0.106 \cdot 10^5$	$0.0225 \cdot 10^5$

Tableau 1 Comparaison entre le modèle micro (représentation exacte) et le modèle macro (couplage élasto-plastique-endommageable) dans le test sphérique sur les valeurs du travail externe, W , la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$, et la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$.

Identification avec le test déviatorique

type d'analyse	W	$\mathcal{D}^p$	$\mathcal{D}^d$
micro	$1.718 \cdot 10^5$	$0.631 \cdot 10^5$	0.0
macro	$1.743 \cdot 10^5$	$0.660 \cdot 10^5$	0.0

Tableau 2 Comparaison entre le modèle micro (représentation exacte) et le modèle macro (couplage élasto-plastique-endommageable) dans le test déviatorique sur les valeurs du travail externe, W , la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$, et la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$, égale à zéro dans ce cas-là.

Les paramètres du modèle élasto-plastique-endommageable, qui donnent la meilleure correspondance aux calculs micro sur les critères utilisés sont les suivants : $K_{macro}^e = 1.00 \cdot 10^{10}$, $\mu_{macro}^e = 1.30 \cdot 10^{10}$, $\sigma_y^{macro} = 4.00 \cdot 10^7$, $\sigma_{y\infty}^{macro} = 8.00 \cdot 10^7$, $b_{macro}^p = 1800$ et $K_{macro}^p = 1.00 \cdot 10^8$, $\sigma_f^{macro} = 3.00 \cdot 10^7$, $\sigma_{f\infty} = 10.00 \cdot 10^7$, $b_{macro}^d = 400$ et $K_{macro}^d = 5.00 \cdot 10^9$.

Remarque 2

Le modèle macro identifié à partir des essais sur la microstructure n'est pas un modèle homogénéisé dans le sens strict du terme. Ainsi, les deux parties du modèle, la plasticité et l'endommagement, ne prétendent pas de modéliser directement le comportement des phases, plastifiable et endommageable, respectivement. Ces ingrédients représentent plutôt les phénomènes qui résultent de cette hétérogénéité du matériau.

Remarque 3

A partir des paramètres du modèle élasto-plastique-endommageable obtenus, nous pouvons remarquer que dans cet exemple, le comportement plastique est moins couplé avec l'élasticité et l'endommagement que ces derniers deux entre eux. Car, les paramètres plastiques du modèle identifié ne changent guère par rapport aux paramètres définissant le comportement plastique de la matrice. Par contre, nous remarquons que le coefficient effective de compressibilité, K_{macro}^e , dans le régime anélastique ne représente qu'à peu près une moitié de la valeur identifiée dans le régime élastique. Cela s'explique par l'observation, que ce matériau composite obéit à un comportement quasi-linéaire après avoir atteint le seuil d'endommagement. Les effets de l'endommagement ne se montrent au niveau macroscopique que pour un chargement très important.

3.3.11 Vérification du modèle macro

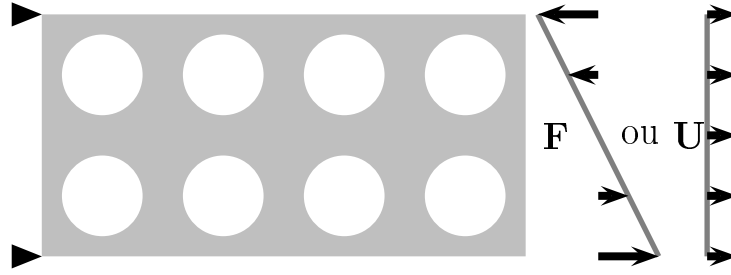


Fig. 3.11 – Structure hétérogène au comportement élasto-plastique, encastrée dans la direction x du côté gauche. Du côté droite elle est soumise à un gradient d'effort $[-F, F]$ ou à un déplacement homogène U .

Dans le chapitre précédent nous avons identifié les paramètres du modèle couplé élasto-plastique-endommageable avec deux tests numériques d'une microstructure à deux phases représentée par un modèle exacte d'éléments finis. L'identification est faite sur la base de deux tests, sphérique et déviatorique.

Par la suite nous comparons ce modèle identifié avec l'approche exacte sur le même type d'essai que dans le chapitre 3.2.6, présenté graphiquement dans la Figure 3.11. Les propriétés de matériau, micro et macro sont égales à celles utilisées dans le chapitre 3.3.10. Le premier test à effectuer est la traction simple, pilotée en déplacement. Cet essai peut être interprété comme une combinaison linéaire du test sphérique et déviatorique. Le bon accord entre le modèle micro et macro n'est pourtant pas garanti à cause du comportement non-linéaire de la structure.

Néanmoins, nous observons Figure 3.12 une bonne correspondance des modèles micro et macro en terme de la courbe effort-déplacement, défini au chapitre 3.3.10.

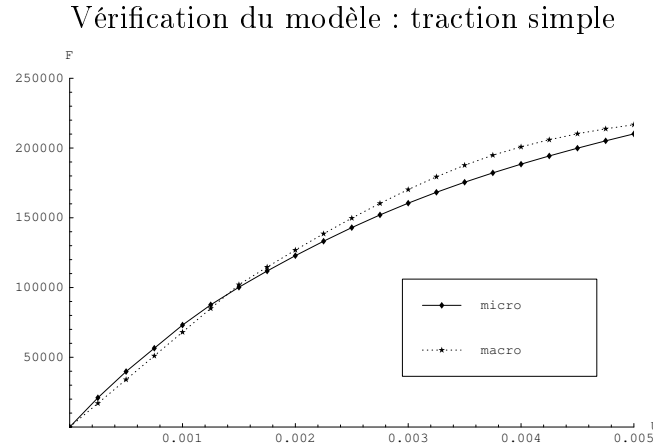


Fig. 3.12 – Réponse du type $F - U$ de l'analyse de la traction simple de la microstructure présenté dans la Figure 3.11 pour un comportement élasto-plastique-endommageable.

Les valeurs du travail externe et des dissipations sont comparées dans le Tableau 3. Pour le modèle macro nous observons une bonne représentation du travail externe et de la dissipation plastique et non pas de la dissipation d'endommagement. Le phénomène d'endommagement dépend évidemment des distributions locales des contraintes, qui ne peuvent pas être bien représentées par le modèle macroscopique.

Vérification : traction simple

type d'analyse	W	$\mathcal{D}^p$	$\mathcal{D}^d$
micro	$1.821 \cdot 10^5$	$0.466 \cdot 10^5$	$0.0164 \cdot 10^5$
macro	$1.880 \cdot 10^5$	$0.466 \cdot 10^5$	$0.0046 \cdot 10^5$

Tableau 3 Comparaison entre le modèle micro (représentation exacte) et le modèle macro (couplage élasto-plastique-endommageable) dans le test de traction simple sur les valeurs du travail externe, W , de la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$, et de la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$.

Dans le deuxième test nous imposons un gradient d'effort (voir Figure 3.11), où les solutions micro et macro sont fortement hétérogènes. Si dans l'analyse de la traction simple, un seul élément dans la représentation macro suffisait, dans l'analyse, où un gradient d'effort est imposé, le nombre d'éléments macro doivent être augmenté (voir la Figure 3.13).

Vérification : gradient d'effort

type d'analyse	W	$\mathcal{D}^p$	$\mathcal{D}^d$
micro(864 el.)	$1.786 \cdot 10^5$	$0.782 \cdot 10^5$	$0.00803 \cdot 10^5$
macro(32 el.)	$0.951 \cdot 10^5$	$0.304 \cdot 10^5$	$0.00333 \cdot 10^5$
macro(128 el.)	$1.154 \cdot 10^5$	$0.632 \cdot 10^5$	$0.00345 \cdot 10^5$
macro(288 el.)	$1.690 \cdot 10^5$	$0.709 \cdot 10^5$	$0.00343 \cdot 10^5$

Tableau 4 Comparaison entre le modèle micro (représentation exacte) et le modèle macro (couplage élasto-plastique-endommageable) pour le gradient d'effort imposé

Vérification du modèle : gradient d'effort

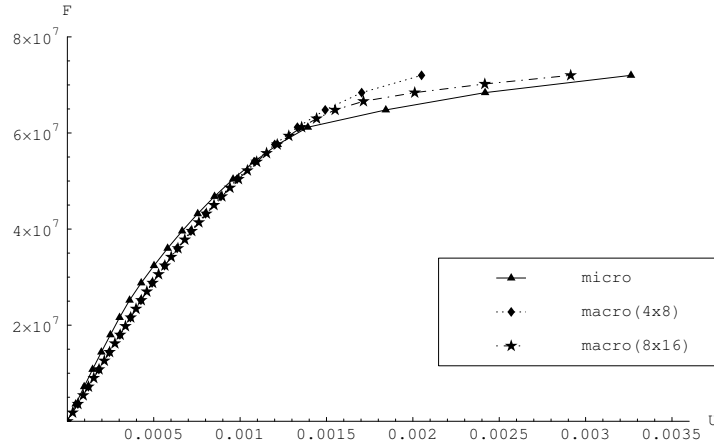


Fig. 3.13 – Réponse du type $F - U$ de l'analyse du gradient d'effort imposé sur la microstructure présenté dans la Figure 3.11 pour un comportement élasto-plastique-endommageable. Les résultats de l'analyse macro sont présentés pour deux maillages de la structure, avec 4×8 (32) éléments et avec 8×16 (288) éléments.

sur les valeurs du travail externe, W , de la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$, et de la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$.

Dans cet essai, où le champ de contrainte est fortement hétérogène, le modèle macro reproduit le comportement de la microstructure aussi bien que dans le cas de la traction simple, à condition qu'un nombre suffisant d'éléments soit utilisé (voir Tableau 4). Nous observons également que le phénomène d'endommagement est aussi mal représenté que dans le cas de la traction simple.

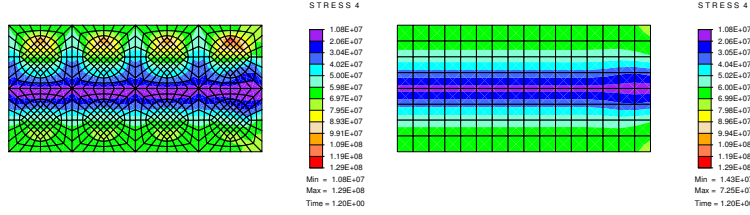
3.3.12 Conclusion

Avec ces essais numériques nous démontrons que le modèle macro peut bien représenter le comportement d'une microstructure, même dans les analyses différentes de celles pour lesquelles il a été identifié. Par contre, ce n'est pas le cas pour tous les aspects considérés. Par exemple, dans nos tests l'endommagement est moins activé que la plasticité et dépend plus des champs locaux. Par conséquent, il est moins bien modélisé par l'approche macro.

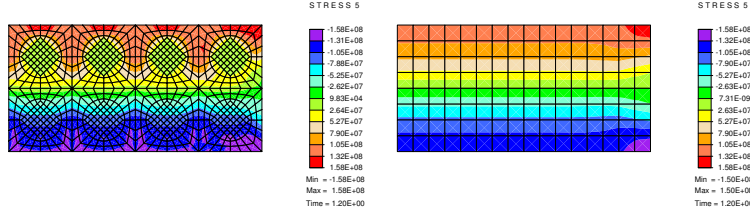
Une autre remarque, que nous pouvons faire concerne l'efficacité par rapport au coût de calcul du modèle macro. Nous avons observé (voir Tableau 4) que pour une bonne représentation du travail externe et de la dissipation plastique, le nombre d'éléments finis doit être assez élevé et garde au mieux un facteur 2 ou 3 par rapport à l'approche exacte, tout en négligeant certains détails du comportement de la microstructure. Pour augmenter l'efficacité de l'approche macro, nous considérons dans le chapitre 3.4, l'implantation en contrainte du modèle élasto-plastique-endommageable.

Vérification du modèle : gradient d'effort

$||Dev \sigma||$



$Tr \sigma$



micro

macro

Fig. 3.14 – Comparaison entre le modèles macro et micro par rapport au champ de contrainte, parties déviatorique et sphérique. La solution est légèrement asymétrique à cause des inclusions, qui ne peuvent s'endommager que dans la partie positive de $Tr \sigma$. En moyenne, le modèle macro décrit bien le champ de contrainte. La très bonne correspondance pour les distributions locales de la contrainte, entre la solution micro et macro, et partiellement due à la symétrie de la microstructure étudiée.

3.4 Modèle macro : formulation en contrainte

3.4.1 Introduction

Dans le chapitre 3.3 nous avons formulé le modèle élasto-plastique-endommageable, où nous nous sommes fortement appuyé sur les modèles "classique" de plasticité (voir par exemple [63]), pour lesquels il existe des implantations numériques très efficaces (voir par exemple [88]). Donc, nous formulons la partie d'endommagement du modèle couplé de la même manière que la plasticité, en introduisant une déformation d'endommagement et une fonction de seuil. Introduit ainsi, l'efficacité de la résolution numérique de l'endommagement devient comparable avec celle de la plasticité.

L'implantation du modèle couplé (3.3) provient du problème d'évolution élasto-plastique-endommageable piloté en déformation. Par conséquent, dans le contexte de la méthode d'éléments finis en déplacement, le chargement et les admissibilités, plastique et endommageable, sont vérifiées indépendamment sur tous les points d'intégration. Dans ce cas-là, la déformation totale et plastique, puis le tenseur d'endommagement sont les variables indépendantes, tandis que la contrainte est une variable dépendante des trois premières.

On a prouvé, par contre, que la performance des éléments finis formulés en contrainte peut être bien supérieure à celle en déplacement pour une analyse élastique linéaire. En particulier, l'élément de Pian-Sumihara montre de bonnes propriétés comme : peu sensible à la distortion du maillage, sans verrouillage pour de comportement quasi-incompressible et très adapté pour les chargements du type flexion. Dans cette approche les déplacements et les contraintes sont interpolés indépendamment en s'appuyant sur la formulation de Hellinger-Reissner. Nous utilisons les même ingrédients thermodynamiques que dans le chapitre 3.3, mais en ayant recours à la formulation variationnelle complémentaire (voir chapitre 3.2).

L'approche adoptée est inspirée par celui de la formulation de l'élasto-plasticité, présentée dans [86]. Dans ce travail les auteurs ont construit un seul potentiel discrétisé en temps amenant au principe d'énergie élastique minimale et au principe de la dissipation plastique maximale simultanément. Comme dans notre cas nous rajoutons le traitement de l'endommagement, la procédure avec un seul potentiel ne peut plus être adoptée. Nous considérons dans les équations provenant du principe de la dissipation de plasticité et d'endommagement comme supplémentaire à la formulation variationnelle. Si nos variables internes, ϵ^p , ξ^p , D , ξ^d , sont vraiment définies localement, la formulation modifiée devient équivalente à celle de [86].

Dans le premier sous-chapitre suivant nous reprenons les ingrédients thermodynamiques du modèle, sur lesquels nous basons l'implantation numérique présentée dans le deuxième sous-chapitre. Enfin nous comparons les deux formulations, en contrainte et en déplacement.

3.4.2 Formulation thermodynamique modifiée

Nous rappelons les lois d'évolution des variables internes, obtenues dans les équations (3.57) et (3.66),
plasticité

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}^p &= \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \\ \dot{\xi}^p &= \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial q^p}\end{aligned}\tag{3.115}$$

endommagement

$$\begin{aligned}\dot{D} &= \dot{\gamma}^d \frac{\partial \Phi^d}{\partial \sigma} \\ \dot{\xi}^d &= \dot{\gamma}^d \frac{\partial \Phi^d}{\partial q^d}\end{aligned}\tag{3.116}$$

et les conditions d'admissibilité de plasticité et d'endommagement,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}^p \Phi^p &= 0; \dot{\gamma}^p \geq 0; \Phi^p \leq 0 \\ \dot{\gamma}^d \Phi^d &= 0; \dot{\gamma}^d \geq 0; \Phi^d \leq 0.\end{aligned}\tag{3.117}$$

Nous reprenons l'expression de l'énergie libre (voir les équations (3.46), (3.47) et (3.48)),

$$\begin{aligned}\Psi(\epsilon, \epsilon^d, D, \xi^d, \epsilon^p, \xi^p) &= \Psi^e(\epsilon^e) + \Psi^d(\epsilon^d, D) + \Xi^p(\xi^p) + \Xi^d(\xi^d) \\ \Psi^e(\epsilon^e) &= \frac{1}{2} \epsilon^e C^e \epsilon^e \\ \Psi^d(\epsilon^d, D) &= \sigma \epsilon^d - \chi^d(\sigma, D),\end{aligned}\tag{3.118}$$

En plus, nous définissons les énergies complémentaires, χ , χ^e et χ^d , comme,

$$\begin{aligned}\chi(\sigma, D) &= \chi^e(\sigma) + \chi^d(\sigma, D) \\ \chi^e(\sigma) &= \sigma \epsilon^e - \Psi^e(\epsilon^e) \\ \chi^d(\sigma, D) &= \frac{1}{2} \sigma D \sigma.\end{aligned}\tag{3.119}$$

Ensuite, nous pouvons écrire le potentiel basé sur l'énergie libre totale en fonction de la contrainte,

$$\Pi_{comp}(u, \sigma) = \int_V (-\chi^e(\sigma) - \chi^d(\sigma, D) + \sigma(\nabla^S u - \epsilon^p)) \, dV - \int_{\partial V} u \bar{t} \, dS. \tag{3.120}$$

Après avoir supposé les lois locales (3.115), (3.116) et (3.117) le potentiel dans l'équation (3.120) n'est plus que la fonction des champs de déplacements et de contraintes.

A partir de la condition d'énergie libre minimale, nous imposons que la solution corresponde au point stationnaire du potentiel, Π_{comp} ,

$$\delta \Pi_{comp} = \frac{\partial \Pi_{comp}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi_{comp}}{\partial \sigma} \delta \sigma = 0; \quad \forall \delta u, \delta \sigma. \tag{3.121}$$

Nous obtenons alors la formulation faible suivante,

$$\begin{aligned}\int_V \nabla^S \delta u \, \sigma \, dV - \int_{\partial V} \delta u \bar{t} \, dS &= 0; \quad \forall \delta u \\ \int_V \delta \sigma [\nabla^S u - \epsilon^p - D \sigma - C^{-1} \sigma] \, dV &= 0; \quad \forall \delta \sigma\end{aligned}\tag{3.122}$$

Nous remarquons que la deuxième équation dans le système (3.122) représente la décomposition de la déformation totale,

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^d. \tag{3.123}$$

3.4.3 Implantation numérique

Nous adoptons l'interpolation des champs u et σ d'après Pian-Sumihara,

$$\begin{aligned} u &= N^\alpha U^\alpha \\ \sigma &= S^\alpha \lambda^\alpha, \end{aligned} \quad (3.124)$$

où les fonction N^α sont bilinéaires et S^α linéaire (pour les détails voir le chapitre 3.2.4).

Du même que dans la formulation en déplacement (voir le chapitre 3.3), les lois d'évolutions, (3.115), (3.116) et (3.117) sont discrétisées par un schéma d'Euler arrière, résultant en,

plasticité

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}^p &= \epsilon_n^p + \Delta t_n \dot{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \xi_{n+1}^p &= \xi_n^p + \Delta t_n \dot{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial q_{n+1}^p} \end{aligned} \quad (3.125)$$

endommagement

$$\begin{aligned} D_{n+1} \sigma_{n+1} &= D_n \sigma_{n+1} + \Delta t_n \dot{\gamma}_{n+1}^d \frac{\partial \Phi_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \xi_{n+1}^d &= \xi_n^d + \Delta t_n \dot{\gamma}_{n+1}^d \end{aligned} \quad (3.126)$$

admissibilité de plasticité et d'endommagement

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{n+1}^p \Phi_{n+1}^p &= 0; \dot{\gamma}^p \geq 0; \Phi^p \leq 0 \\ \dot{\gamma}_{n+1}^d \Phi_{n+1}^d &= 0; \dot{\gamma}^d \geq 0; \Phi^d \leq 0, \end{aligned} \quad (3.127)$$

$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ est l'incrément du pseudo-temps. Dans la suite nous remplaçons, $\gamma_{n+1}^p = \Delta t_n \dot{\gamma}_{n+1}^p$ et $\gamma_{n+1}^d = \Delta t_n \dot{\gamma}_{n+1}^d$.

En réécrivant la formulation faible de l'équation (3.122) sous forme discrétisée et en utilisant (3.125) et (3.126), nous obtenons,

$$\begin{aligned} \int_V B^{\alpha T} S^\beta \lambda_{n+1}^\beta dV - \int_{\partial V} N^\alpha \bar{t} dS &= 0 \\ \int_V S^{\alpha T} \left[B^\beta U_{n+1}^\beta - \epsilon_{n+1}^p - (D_n + C^{-1}) S^\beta \lambda_{n+1}^\beta \right. \\ &\quad \left. - \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}} - \gamma_{n+1}^d \frac{\partial \Phi_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}} \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (3.128)$$

Afin de résoudre le système (3.128), nous définissons les résidus,

$$\begin{aligned}
 R_u^\alpha &= \int_V B^{\alpha T} S^\beta \lambda_{n+1}^\beta dV - \int_{\partial V} N^{\alpha \bar{t}} dS \\
 R_\sigma^\alpha &= E_{n+1}^{t \alpha} - H_n^{\alpha \beta} \lambda_{n+1}^\beta \\
 &\quad - M^{p \alpha}(\lambda_{n+1}^\gamma, \xi_{n+1}^p, \gamma_{n+1}^p) - M^{d \alpha}(\lambda_{n+1}^\gamma, \xi_{n+1}^d, \gamma_{n+1}^d)
 \end{aligned} \tag{3.129}$$

en introduisant les matrices suivantes,

$$\begin{aligned}
 E_{n+1}^{t \alpha} &= \int_V S^{\alpha T} (B^\beta U_{n+1}^\beta - \epsilon_n^p) dV \\
 H_n^{\alpha \beta} &= \int_V S^{\alpha T} (D_n + C^{-1}) S^\beta dV \\
 M^{p \alpha}(\lambda_{n+1}^\gamma, \xi_{n+1}^p, \gamma_{n+1}^p) &= \int_V S^{\alpha T} \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}} dV \\
 M^{d \alpha}(\lambda_{n+1}^\gamma, \xi_{n+1}^d, \gamma_{n+1}^d) &= \int_V S^{\alpha T} \gamma_{n+1}^d \frac{\partial \Phi_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}} dV,
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

E_{n+1}^t est la déformation "test", qui correspond à la déformation totale pour un chargement élastique. Le tenseur $H_n^{\alpha \beta}$ représente la complaisance effective à l'instant t_n et enfin les matrices $M^{p,d \alpha}$ correspondent à la correction de la déformation plastique et d'endommagement, respectivement, si les phénomènes anélastiques sont activés.

L'interpolation choisie dans (3.124) est continue dans l'espace par rapport au champ de déplacement et discontinue entre les éléments par rapport au champ de contrainte. Dans notre méthode de résolution nous séparons alors trois niveaux : global de la (micro)structure, élémentaire et local du point d'intégration. Par la suite nous adoptons une méthode séquentielle, où, à chaque niveau, nous appliquons la méthode de Newton pour résoudre les équations non-linéaires. En particulier, pour chaque itération globale (niveau 1), nous faisons plusieurs itérations dans tout élément (niveau 2) afin de converger. De même, pour chaque itération dans un élément (niveau 2) nous résolvons en plusieurs itérations le problème local. Typiquement, dans un régime non-linéaire nous avons besoin de 3 à 10 itération à chaque étape. Dans la suite, nous détaillons les calculs effectués à chaque niveau.

Calcul local (niveau 3)

Pour U_{n+1}^α et λ_{n+1}^β donnés, trouver les valeurs de γ_{n+1}^p et γ_{n+1}^d

calcul de la plasticité

Si $\Phi^p(\lambda_{n+1}^\gamma, q^p(\xi_{n+1}^p)) < 0$ alors, $\gamma_{n+1}^p = 0$, sinon résoudre,

$$\begin{aligned}
 \xi_{n+1}^p &= \xi_n^p + \gamma_{n+1}^p \frac{\partial \Phi_{n+1}^p}{\partial q_{n+1}^p} \\
 0 &= \Phi^p(\lambda_{n+1}^\gamma, q^p(\xi_{n+1}^p))
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

calcul de l'endommagement

Si $\Phi^d(\lambda_{n+1}^\gamma, q^d(\xi_{n+1}^d)) < 0$ alors, $\gamma_{n+1}^d = 0$, sinon résoudre,

$$\begin{aligned}\xi_{n+1}^d &= \xi_n^d + \gamma_{n+1}^d \frac{\partial \Phi_{n+1}^d}{\partial q_{n+1}^d} \\ 0 &= \Phi^d(\lambda_{n+1}^\gamma, q^d(\xi_{n+1}^d))\end{aligned}\quad (3.132)$$

Les problèmes locaux se résolvent de manière identique à la formulation en déplacement, présentée dans le chapitre 3.3.

Calcul élémentaire (niveau 2)

Pour U_{n+1}^α donné, trouver $\lambda_{n+1}^\beta, \gamma_{n+1}^p, \gamma_{n+1}^d$

Itérer jusqu'à la convergence, $R_\sigma^{\alpha(s)} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha(s)} < tol$

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}^{\alpha(s+1)} &= \lambda_{n+1}^{\alpha(s)} + \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha(s)} \\ \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha(s)} &= - \left(\frac{\partial R_\sigma^{\alpha(s)}}{\partial \lambda_{n+1}^{\beta(s)}} \right)^{-1} R_\sigma^{\beta(s)},\end{aligned}\quad (3.133)$$

où

$$\frac{\partial R_\sigma^{\alpha(s)}}{\partial \lambda_{n+1}^{\beta(s)}} = -H_n^{\alpha\beta} - P_{n+1}^{p\alpha\beta} - P_{n+1}^{d\alpha\beta}, \quad (3.134)$$

où

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{p,d\alpha\beta} &= \int_V S^{\alpha T} \left[\gamma_{n+1}^{p,d} \frac{\partial^2 \Phi_{n+1}^{p,d}}{\partial \sigma_{n+1}^2} - \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}^{p,d}}{\partial q_{n+1}^{p,d}} \right)^{-2} \left(\frac{dq_{n+1}^{p,d}}{d\xi_{n+1}^{p,d}} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi_{n+1}^{p,d}}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{\partial \Phi_{n+1}^{p,d}}{\partial \sigma_{n+1}} \right] S^\beta dV.\end{aligned}\quad (3.135)$$

Calcul global (niveau 1)

Trouver $U_{n+1}^\alpha, \lambda_{n+1}^\beta, \gamma_{n+1}^p, \gamma_{n+1}^d$

Itérer jusqu'à la convergence, $R_\sigma^{\alpha(s)} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha(s)} < tol$

$$\begin{aligned}U_{n+1}^{\alpha(s+1)} &= U_{n+1}^{\alpha(s)} + \Delta U_{n+1}^{\alpha(s)} \\ \left(\frac{\partial R_u^{\alpha(s)}}{\partial U_{n+1}^{\beta(s)}} \right) \Delta U_{n+1}^{\alpha(s)} &= -R_u^{\beta(s)},\end{aligned}\quad (3.136)$$

où

$$\begin{aligned}
 R_u^\alpha(s) &= G^{\alpha\beta T} \lambda^\beta \\
 \frac{\partial R_u^\alpha(s)}{\partial U_{n+1}^\beta(s)} &= G^{\alpha\beta T} \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial U^\gamma} \\
 \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial U^\gamma} &= - \left(\frac{\partial R_\sigma^\beta(s)}{\partial \lambda_{n+1}^\alpha(s)} \right)^{-1} G^{\alpha\gamma} \\
 G^{\alpha\gamma} &= \int_V S^{\alpha T} B^\gamma dV.
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

Ensuite, à partir des équations (3.136) et (3.137) nous obtenons la matrice de raideur et le vecteur de résidu élémentaires, K_{ps}^{el} et R_{ps}^{el} , comme

$$\underbrace{G^{\alpha\beta T} \left(\frac{\partial R_\sigma^\beta(s)}{\partial \lambda_{n+1}^\alpha(s)} \right)^{-1}}_{K_{ps}^{el}} G^{\alpha\gamma} \Delta U_{n+1}^\alpha(s) = \underbrace{R_u^\beta(s)}_{R_{ps}^{el}}. \tag{3.138}$$

En conclusion, nous remarquons que la formulation du modèle couplé élasto-plastique-endommageable, introduite initialement dans le cadre des éléments finis basés en déplacement (voir le chapitre 3.3), se prête très bien à l'implantation de l'approche en contrainte de Pian-Sumihara. D'une part, parce que dans ce modèle couplé, la déformation d'endommagement, qui joue un rôle essentiel, dépend directement de la contrainte, $\epsilon^d = D\sigma$. Si pour la formulation en déformation, un schéma itératif est nécessaire pour la déterminer, cela n'est plus le cas pour la formulation en contrainte. Par contre, pour la formulation en déplacement, la relation de comportement est imposée localement, dans chaque point d'intégration, tandis que dans la formulation en contrainte, elle n'est satisfaite que dans un sens faible au niveau d'un élément.

De plus, le tenseur d'endommagement, D , est directement interprété en tant que la complaisance d'endommagement, et permet d'exprimer la complaisance effective directement comme $C_{eff}^{-1} = C^{-1} + D$.

Evidemment, ces deux avantages de la présente implantation formulation du modèle couplé se rajoutent à l'avantage d'une meilleure performance générale de la méthode d'éléments finis en contrainte, montrée dans les chapitres 3.2.5 et 3.2.6.

3.4.4 Vérification du modèle

Nous reprenons ici les tests numériques que nous avons effectués dans le chapitre 3.3.11 afin de comparer les résultats de l'approche macro en contrainte avec l'approche exacte. Les approches macro en déplacement et en contrainte donnent une réponse de la structure identique avec un seul élément dans le maillage, si les conditions aux limites sont homogènes, comme le sont, par exemple, les tests sphérique, déviatorique et la traction simple. Les paramètres identifiés dans le chapitre 3.3.10 sont donc valables également pour le modèle couplé basé en contrainte.

Vérification du modèle basé en contrainte : gradient d'effort

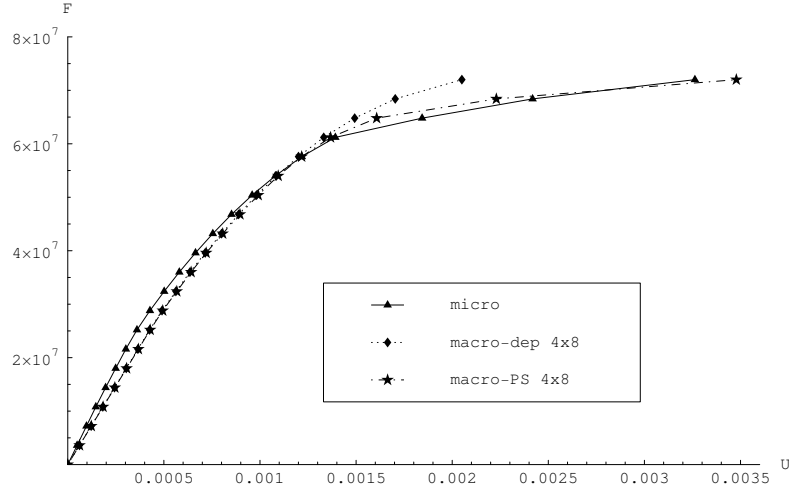


Fig. 3.15 – Réponse du type $F - U$ de l'analyse du gradient d'effort imposé sur la microstructure présenté dans la Figure 3.11 pour un comportement élasto-plastique-endommageable. Les résultats de l'analyse macro sont présentés pour la formulation en déplacement et en contrainte. Le maillage structuré, avec 4×8 (32) éléments est utilisé. L'approche en contrainte s'accorde mieux avec la solution de référence.

Vérification du modèle basé en contrainte : gradient d'effort

type d'analyse	W	$\mathcal{D}^p$	$\mathcal{D}^d$
micro(864 el.)	$1.786 \cdot 10^5$	$0.782 \cdot 10^5$	$0.00803 \cdot 10^5$
macro-dép(32 el.)	$0.951 \cdot 10^5$	$0.304 \cdot 10^5$	$0.00333 \cdot 10^5$
macro-dép(288 el.)	$1.690 \cdot 10^5$	$0.709 \cdot 10^5$	$0.00343 \cdot 10^5$
macro-contr(32 el.)	$1.928 \cdot 10^5$	$0.8623 \cdot 10^5$	$0.00272 \cdot 10^5$
macro-contr(128 el.)	$1.836 \cdot 10^5$	$0.8004 \cdot 10^5$	$0.00323 \cdot 10^5$

Tableau 5 Comparaison entre le modèle micro (représentation exacte) et le modèle macro (couplage élasto-plastique-endommageable), formulé en déplacement ou en contrainte, pour le gradient d'effort imposé. Les valeurs du travail externe, W , de la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$, et de la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$, sont calculées. Le modèle macro en contrainte donne des valeurs plus proches des valeurs de référence que le modèle macro en déplacement.

Il reste à comparer les formulations en déplacement et en contrainte sur l'analyse de la structure soumise au gradient d'effort (voir les Figures 3.5 dans le chapitre 3.2.6 ou 3.11 dans le chapitre 3.3.11), où le champ de contrainte est hétérogène aussi à l'échelle macro. Dans le diagramme (3.15) nous observons que l'approche macro en contrainte reproduit beaucoup mieux la réponse du type effort-déplacement, défini dans l'équation (3.114) (chapitre 3.3.10), pour le même maillage. Une conclusion similaire peut être obtenue à partir du Tableau 5 par rapport aux valeurs du travail externe et de la dissipation plastique. Puisque dans cette analyse le phénomène d'endommagement est très local il est mal représenté par les deux approches macro.

3.5 Représentation structurée

3.5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons une représentation alternative à la représentation exacte, considéré dans le chapitre 3.2. Le modèle macro formulé en déplacement ou en contrainte (chapitres 3.3 et 3.4) ne peut pas être utilisé lorsque les échelles sont fortement couplées. Il est possible, par contre, de reproduire de telle manière un comportement macroscopique assez précisément.

L'inconvénient majeur de la représentation exacte réside dans la nécessité d'avoir un maillage EF conforme à la microstructure et que chaque élément du maillage contienne au maximum une seule phase. Or, une microstructure peut être très complexe avec des phases de tailles caractéristiques assez différentes, on heurte alors aux trois problèmes : i) l'élaboration d'un maillage adéquat est une tâche difficile, surtout en $3D$, ii) dans les zones où les détails de la microstructure sont petits les éléments finis risquent d'avoir des formes distordues menant à un mauvais conditionnement numérique et iii) le nombre de degrés de libertés minimal est très élevé, ainsi que le coût de calcul. Les deux premiers points peuvent être remédiés par des éléments finis non-conformes, où une frontière de phases peut traverser un tel élément.

Une telle approche est traitée dans [38] et [39]. En résumé, les auteurs y introduisent des doubles nœuds pour l'interpolation des déplacements dans les éléments où passe la frontière entre les phases. Ces degrés de libertés supplémentaires sont rajoutées afin d'imposer les conditions de continuité de déplacements et de tractions sur les interfaces. Ensuite, tous les degrés de liberté, les "primaires" et les "doublées" sont résolus simultanément.

La deuxième approche est la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), où également les nœuds sont enrichis par les degrés de libertés supplémentaires. La méthode a initialement été introduite pour les problèmes de propagation de fissures ([4]) et adaptée plus tard pour la représentation d'une microstructure à plusieurs phases (e.g. see [91]).

Les démarches que nous utilisons dans ce travail sont de nature locale pour le traitement des interfaces entre les phases. Plus précisément, le maillage EF est toujours structuré sans aucune augmentation de degrés de libertés nodaux. La variante la plus simple consiste à tenir compte des différents matériaux à l'intérieur d'un élément seulement au niveau de points d'intégration. Cette approche est couramment utilisée surtout pour un comportement linéaire (voir par exemple [99], [29]). Nous l'utilisons avec les deux formulations, en déplacement et en contrainte.

Afin d'améliorer le traitement local des hétérogénéités nous appliquons la méthode des modes incompatibles, où le champ de déplacement est amélioré localement au niveau élémentaire sans exiger de continuité entre les éléments (voir [95]). Une telle interpolation du champ de déplacement permet d'avoir des discontinuités locales en déformation.

3.5.2 Amélioration de l'intégration numérique

Le schéma d'intégration numérique le plus efficace dans le contexte de la MEF et la quadrature de Gauss (voir par exemple [45]), d'où le nom point de Gauss. Ce schéma fournit un nombre de point d'intégration minimal pour une précision donnée. L'ordre de schéma de Gauss est défini par rapport à la variation polynomial des termes sous l'intégrale, qui sont attendus pour une interpolation de champ choisie. Par exemple, pour un élément à 4 nœuds avec une interpolation bi-linéaire du champ de déplacement, on choisit 2×2 points de Gauss par élément, parce que pour un comportement constitutif linéaire l'ordre polynomial des termes sous les intégrales ne dépasse jamais 2. Pour un comportement non-linéaire cette quadrature n'est plus exacte, mais reste le plus souvent une approximation suffisante.

En principe, dans la formulation de la MEF, telle qu'elle est présentée dans le chapitre 3.2 (approche en déplacement ou en contrainte), il n'y a aucune obligation que les propriétés mécaniques soient homogènes à l'intérieure d'un élément. Elles peuvent varier d'un point d'intégration à l'autre et la solution doit converger lorsque la taille d'éléments tend vers zéro, comme dans le cas des éléments aux propriétés homogènes. Ce qui est certain est la différence dans la qualité du résultat par rapport à une taille d'élément donnée, puisque les interfaces entre les phases ne sont pas modélisées de la même manière dans les deux approches, exacte et structurée.

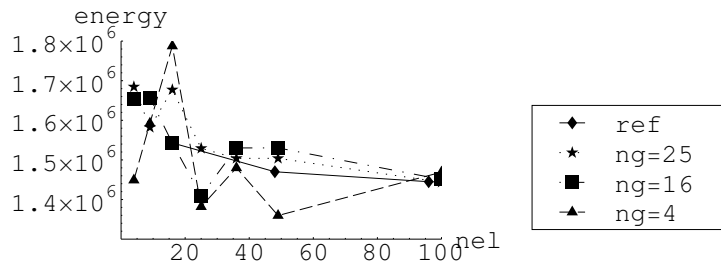


Fig. 3.16 – Energie élastique pour des nombres d'éléments différents dans un maillage structuré. Nous utilisons les quadratures de Gauss 2×2 , 4×4 et 5×5 . Tous convergent vers la même valeur que l'approche exacte de référence. Nous utiliserons 5×5 dans la suite.

Dans un élément aux propriétés hétérogènes, les champs de déplacement et de contrainte vont subir une variation intra-élément plus importante que dans un élément aux propriétés homogènes. Par conséquent, une quadrature d'ordre supérieure à 2×2 doit être utilisée. Nous considérons deux possibilité pour l'augmenter. La première consiste à simplement augmenter l'ordre polynomial à $n \times n$, où $n > 2$. En faisant des tests, nous avons établi que la solution se stabilise, si nous prenons $n = 5$. Les analyses ont été faites sur une structure hétérogène soumise à un gradient d'effort avec un nombre différent d'éléments dans un maillage structuré et un nombre différent de points de Gauss par élément pour chaque maillage. Les résultats sont montrés dans la Figure 3.16 et confirment que la quadrature 5×5 est nécessaire pour

que la convergence de la valeur d'énergie par rapport au raffinement de maillage soit atteinte.

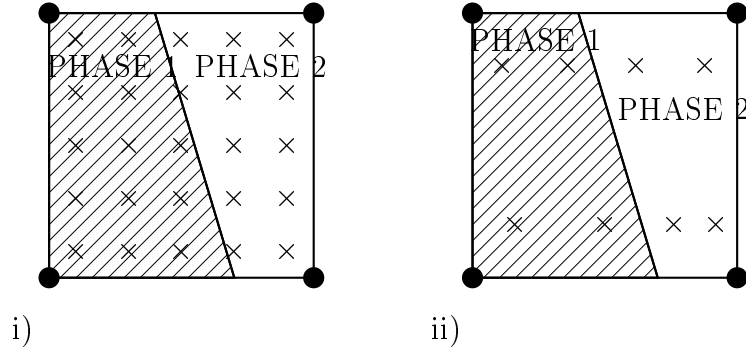


Fig. 3.17 – Deux façon d'améliorer l'intégration numérique : i) augmentation de l'ordre de la quadrature de Gauss (5×5) et ii) décomposition de l'éléments en deux (ou au maximum en trois) parties.

Cette approche est très facile à utiliser, puisque on connaît la quadrature a priori et il suffit de déterminer les propriétés correspondantes pour chaque point. Nous remarquons, par contre, que nos termes sous les intégrales n'augmentent pas vraiment leur ordre polynomial dans le cas des éléments hétérogènes. Leur ordre reste localement exactement le même, sauf que le saut en propriétés résulte dans un saut dans la fonction sous l'intégrale.

Dans la deuxième approche, nous découpons chaque élément hétérogène en plusieurs sous-domaines et appliquons la quadrature 2×2 à chaque sous-domaine. Ainsi, nous économisons dans le nombre de point de Gauss et par conséquent dans le nombre de calculs locaux. Par contre, la quadrature dans cette approche n'est pas connue a priori et doit être déterminée pour chaque élément séparément.

Nous supposons qu'il y a au plus une interface par élément, qui est déterminée par le lieu où elle coupe les deux faces. En trouvant ces deux points d'intersection l'interface est supposée droite dans l'espace de référence dans le cadre d'élément isoparamétrique. Avec une telle interface l'élément est découpé en deux sous-domaines, en deux quadrilatères ou en un triangle et un pentagone. Dans le dernier cas, le pentagone est encore découpé en un triangle et un quadrilatère. De cette manière, nous obtenons deux, voire trois sous-domaines, tous triangles ou quadrilatères. Ensuite, les points de Gauss de l'élément entier seront assemblés à partir de tous les deux (trois) parties, où pour chaque sous-domaine une procédure de la quadrature de Gauss simple (2×2) est appliquées. Ainsi, nous nous trouvons avec 8 (2 sous-domaines) ou 12 (3 sous-domaines) points de Gauss au lieu de 25 utilisés dans l'approche d'augmentation d'ordre de quadrature, tout en gardant une précision similaire. Les deux approchées sont illustrées dans la Figure 3.17.

3.5.3 Modes incompatibles

Dans le chapitre précédent nous améliorons la performance d'un élément fini aux propriétés de matériau hétérogènes en augmentant le nombre de points de Gauss afin de mieux prendre en compte les hétérogénéités des champs de déplacements et de contraintes, tout en gardant les mêmes interpolations. Par la suite, nous considérons l'approche où nous enrichissons en plus les fonctions d'interpolation du champ de déplacement, pour qu'il soit plus correctement représenté dans chacune des phases, au sein d'un élément.

Cette enrichissement du champ de déplacement se met en place localement par l'approche des modes incompatibles (voir par exemple [98], [95] ou [87]). Nous pouvons l'obtenir à partir de la formulation variationnelle de Hu-Washizu,

$$\Pi_{MI}(u, \epsilon, \sigma) = \int_V \Psi(\epsilon, \xi_k) dV - \int_V \sigma(\epsilon - \nabla^S u) dV - \int_{\partial V} u \bar{t} dS \rightarrow stat, \quad (3.139)$$

où u , ϵ et σ sont les champs indépendants, ξ_k représentent l'ensemble des variables internes (plastiques et/ou endommageables) et $\bar{t}$ les tractions aux limites. Le champ de déformation ϵ peut être réécrit en définissant le déplacement incompatible, $\tilde{u}$,

$$\epsilon = \nabla^S(u + \tilde{u}), \quad (3.140)$$

où la partie compatible, u , sera interpolé d'une manière continue entre différents éléments et la partie incompatible, $\tilde{u}$, sera interpolé localement et indépendamment dans chaque élément. Le potentiel dans l'équation (3.139) devient,

$$\Pi_{MI}(u, \tilde{u}, \sigma) = \int_V \Psi(\nabla^S(u + \tilde{u}), \xi_k) dV - \int_V \sigma \nabla^S \tilde{u} dV - \int_{\partial V} u \bar{t} dS \rightarrow stat. \quad (3.141)$$

La formulation faible provenant de l'équation (3.141), en imposant $\delta \Pi_{MI} = 0$, s'écrit comme,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^S \delta u \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} dV - \int_{\partial V} \delta u \bar{t} dS &= 0; \quad \forall \delta u \\ \int_V \nabla^S \delta \tilde{u} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} - \sigma \right] dV &= 0; \quad \forall \delta \tilde{u} \\ \int_V \delta \sigma \nabla^S \tilde{u} dV &= 0; \quad \forall \delta \sigma. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Nous discrétisons les champs, u , $\tilde{u}$ et σ comme,

$$\begin{aligned} u_i &= N^\alpha U_i^\alpha \rightarrow \epsilon_{ij} = B_{ijk}^\alpha U_k^\alpha \\ \tilde{u}_i &= \tilde{N}^\alpha \tilde{U}_i^\alpha \rightarrow \tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{B}_{ijk}^\alpha \tilde{U}_k^\alpha \\ \sigma_{ij} &= P_{ij}^\alpha s^\alpha. \end{aligned} \quad (3.143)$$

De façon courante dans la formulation de la méthode des modes incompatibles, nous choisissons les fonctions d'interpolation de déformation incompatible, $\tilde{B}^\alpha$, et de contrainte, P^β , orthogonale,

$$\int_V P_{kl}^\beta \tilde{B}_{kli}^\alpha dV = 0; \forall \alpha, \beta, i. \quad (3.144)$$

Ce choix simplifie le système (3.142),

$$\begin{aligned} \int_V B_{kli}^\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{kl}} dV - \int_{\partial V} N^\alpha \bar{t} dS &= 0 \\ \int_V \tilde{B}_{kli}^\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{kl}} dV &= 0. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Nous remarquons que dans le système (3.145) il y a une équation de moins que dans (3.142) et que les variables de contrainte, s^α , n'apparaissent pas du tout. Alors, le champ de contrainte n'est pas calculé explicitement. Il peut être estimé dans l'étape de post-traitement avec la méthode des moindres carrés ou autre (voir [95] ou [87]).

Le choix habituel est de prendre des fonctions de forme du champ de contrainte, P_{ij}^α , constante dans le volume d'un élément fini, V_α ,

$$P_{ij}^\alpha(x) = 1; x \in V_\alpha \forall \alpha. \quad (3.146)$$

La condition d'orthogonalité devient alors

$$\int_{V_\beta} \tilde{B}_{kli}^\alpha dV = 0; \forall \alpha, \beta, i. \quad (3.147)$$

Autrement dit, la propriété (3.147) nous garantit de passer le "patch" test (voir par exemple [98]).

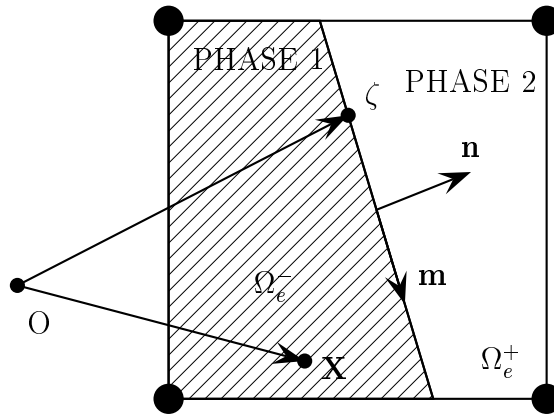


Fig. 3.18 – L'interface entre deux phase, qui découpe un élément de maillage structuré.

Avec ce cadre de la formulation de la méthode des modes incompatibles, nous pouvons construire un champ de déplacement localement amélioré, afin de mieux décrire l'interface entre deux phases à l'intérieure d'un élément (voir la Figure 3.18). Nous enrichissons le champ de déplacement avec,

$$\tilde{u} = \tilde{U}_n \hat{n} + \tilde{U}_m \hat{m}, \quad (3.148)$$

où

$$\hat{n}_i(x) = \begin{cases} \theta n_i [n \cdot (x - \zeta)] & ; n \cdot (x - \zeta) \geq 0 \\ (1 - \theta) n_i [n \cdot (x - \zeta)] & ; n \cdot (x - \zeta) < 0 \end{cases} \quad (3.149)$$

ζ est le vecteur position sur l'interface et θ est un paramètre déterminé plus bas par la condition (3.147). Puis, la déformation correspondante s'écrit comme,

$$\tilde{\epsilon}(x) = \tilde{U}_n \begin{cases} \theta n \otimes n & ; n \cdot (x - \zeta) \geq 0 \\ (1 - \theta) n \otimes n & ; n \cdot (x - \zeta) < 0 \end{cases} \quad (3.150)$$

$$+ \frac{1}{2} \tilde{U}_m \begin{cases} \theta (n \otimes m + m \otimes n) & ; n \cdot (x - \zeta) \geq 0 \\ (1 - \theta) (n \otimes m + m \otimes n) & ; n \cdot (x - \zeta) < 0 \end{cases} . \quad (3.151)$$

Ensuite nous appliquons la condition d'orthogonalité (3.147), qui nous donne la valeur du paramètre θ ,

$$\int_{V_e} \tilde{\epsilon} dV = 0 \implies \theta = \frac{V_e^-}{V_e}; \quad V_e = V_e^+ + V_e^-, \quad (3.152)$$

où V_e est le volume total de l'élément et V_e^- la partie du volume du côté "négatif" de l'interface (voir la Figure 3.18).

Avec ce choix d'enrichissement du champ de déplacement, le système (3.145) est résolu par la méthode de Newton, où nous définissons les résidus comme,

$$R_u(U^\gamma, \tilde{U}^\beta) := \int_V B_{kli}^{\alpha T} \sigma_{kl}^\epsilon(U^\gamma, \tilde{U}^\beta) dV - \int_{\partial V} N^{\alpha \bar{t}} dS = 0 \quad (3.153)$$

$$\tilde{R}_u(U^\gamma, \tilde{U}^\beta) := \int_V \tilde{B}_{kli}^{\alpha T} \sigma_{kl}^\epsilon(U^\gamma, \tilde{U}^\beta) dV = 0, \quad (3.154)$$

où $\sigma_{ij}^\epsilon = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}}$. Nous résolvons d'abord l'équation (3.154) pour les valeurs, $\tilde{U}^\gamma$, U^γ données. Puis, nous pouvons résoudre l'équation globale (3.153) comme pour une formulation en déplacement standard. La matrice de raideur est obtenue par condensation statique, comme dans le cas de l'approche en contrainte de Pian-Sumihara (voir le chapitre 3.2.4). Ici nous avons 2 degrés de liberté par élément, correspondant aux modes incompatible et dans la formulation basée en contrainte nous avons 5 degrés de libertés par élément pour le champ de contrainte, mais la démarche utilisée pour la résolution est la même.

	<i>exacte</i>	<i>p.d.G en dp.</i>	<i>p.d.G en contr.</i>	<i>m.inc.</i>
C	$\epsilon_{mi}^1 _{\Gamma} = \epsilon_{mi}^2 _{\Gamma}$ $\epsilon_{ni}^1 _{\Gamma} \neq \epsilon_{ni}^2 _{\Gamma}$ $\sigma_{ij}^1 \hat{m}_j _{\Gamma} \neq \sigma_{ij}^2 \hat{m}_j _{\Gamma}$	$\epsilon_{mi}^1 _{\Gamma} = \epsilon_{mi}^2 _{\Gamma}$ $\sigma_{ij}^1 \hat{m}_j _{\Gamma} \neq \sigma_{ij}^2 \hat{m}_j _{\Gamma}$	$\epsilon_{ni}^1 _{\Gamma} \neq \epsilon_{ni}^2 _{\Gamma}$ $\sigma_{ij}^1 \hat{n}_j _{\Gamma} = \sigma_{ij}^2 \hat{n}_j _{\Gamma}$	$\epsilon_{mi}^1 _{\Gamma} = \epsilon_{mi}^2 _{\Gamma}$ $\epsilon_{ni}^1 _{\Gamma} \neq \epsilon_{ni}^2 _{\Gamma}$ $\sigma_{ij}^1 \hat{m}_j _{\Gamma} \neq \sigma_{ij}^2 \hat{m}_j _{\Gamma}$
I	$\sigma_{ij}^1 \hat{n}_j _{\Gamma} \neq \sigma_{ij}^2 \hat{n}_j _{\Gamma}$	$\epsilon_{ni}^1 _{\Gamma} = \epsilon_{ni}^2 _{\Gamma}$ $\sigma_{ij}^1 \hat{n}_j _{\Gamma} \neq \sigma_{ij}^2 \hat{n}_j _{\Gamma}$	$\epsilon_{mi}^1 _{\Gamma} \neq \epsilon_{mi}^2 _{\Gamma}$ $\sigma_{ij}^1 \hat{m}_j _{\Gamma} = \sigma_{ij}^2 \hat{m}_j _{\Gamma}$	$\sigma_{ij}^1 \hat{n}_j _{\Gamma} \neq \sigma_{ij}^2 \hat{n}_j _{\Gamma}$

Tableau 6 Les conditions d'interface correct (C) ou incorrect (I) pour les différents types de représentations de la microstructure : exacte, filtrage par points de Gauss en déplacement (p.d.G en dép.), filtrage par points de Gauss en contrainte (p.d.G en contr.) et les modes incompatibles (m.inc.).

3.5.4 Modélisation physique d'interface

Nous utilisons trois approches structurées : filtrage par points de Gauss - en déplacement, filtrage par points de Gauss - en contrainte et par les modes incompatibles. Les trois méthodes modélisent l'interface entre les phases différemment entre elles et aussi par rapport à l'approche exacte (voir le chapitre 3.2), qui nous servira de référence.

Dans le cas d'une interface à l'adhérence parfaite, où les surfaces des deux phase en contact ne bougent pas l'une par rapport à l'autre, nous devons imposer les conditions à l'interface suivantes,

$$\begin{aligned}
 u^1|_{\Gamma} &= u^2|_{\Gamma} \implies \epsilon_{mi}^1|_{\Gamma} = \epsilon_{mi}^2|_{\Gamma} \\
 \sigma_{ij}^1 \hat{n}_j|_{\Gamma} &= \sigma_{ij}^2 \hat{n}_j|_{\Gamma},
 \end{aligned} \tag{3.155}$$

où Γ représente la surface d'interface, $\hat{n}$ son vecteur normal, l'index m la composante dans la direction tangentielle et l'index i une composante quelconque. Si les continuité sur certaines composantes de déformation et de contrainte, dans (3.155), doivent être vérifiées, les autres, en général, ne doivent pas l'être,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ni}^1|_{\Gamma} &\neq \epsilon_{ni}^2|_{\Gamma} \\
 \sigma_{ij}^1 \hat{m}_j|_{\Gamma} &\neq \sigma_{ij}^2 \hat{m}_j|_{\Gamma},
 \end{aligned} \tag{3.156}$$

où $\hat{m}$ est le vecteur tangentielle sur la surface d'interface et l'index n signifie la composante dans la direction normale. Le signe $\neq$ dans (3.156) signifie : "pas égal en général" et non pas "jamais égal".

Les conditions physiques dans (3.155) et (3.156) ne sont tout à fait vraies pour chacune des approches numériques utilisées ici. Nous précisons exactement quelles sont les conditions d'interface respectées Tableau 6.

Remarque

La description physique de l'interface des différentes représentations de la microstructure est seulement un critère de comparaison possible. Elle met bien en évidence la différence entre l'approche en déplacement et en contrainte, où les modes de continuité et discontinuité sont exactement inversés. Par contre, selon ce critère on ne voit pas la différence entre l'approche exacte et celle des modes incompatibles, même si elle n'est pas négligeable. En réalité, le champ de contrainte dans les deux phases n'est pas aussi indépendant dans l'approche des modes incompatibles qu'il est dans l'approche exacte, à cause de la condition d'orthogonalité (équation (3.147)).

3.5.5 Tests numériques

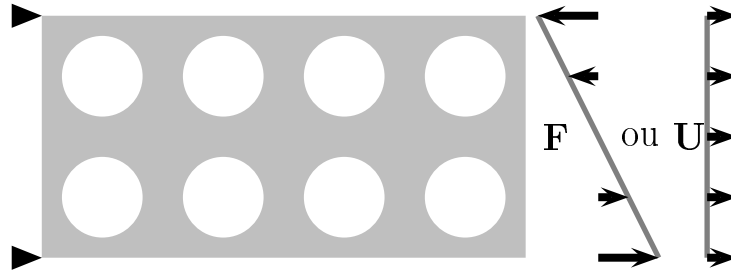


Fig. 3.19 – Structure hétérogène au comportement élasto-plastique, encastree dans la direction x du côté gauche. Du côté droite elle est soumise à un gradient d'effort $[-F, F]$ ou à un déplacement homogène U .

Afin de comparer les approches nous faisons le même type de tests, traction simple et gradient d'effort imposée, que dans le chapitre 3.2 (voir la Figure 3.19). Dans tous les essais nous supposons un comportement élasto-plastique de la matrice et changeons les propriétés des inclusions : faible raideur (quasi-vide), très raide (quasi-rigide) et endommageable. Les détails des comportements de la matrice et des inclusions, sont présentés dans le chapitre 3.3.10. Les méthodes sont comparées sur la base du travail externe, W , de la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$ et de la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$,

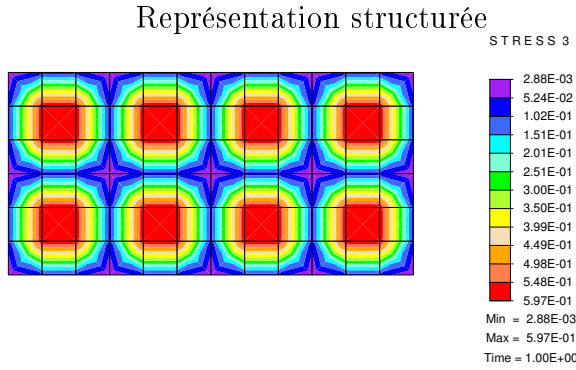
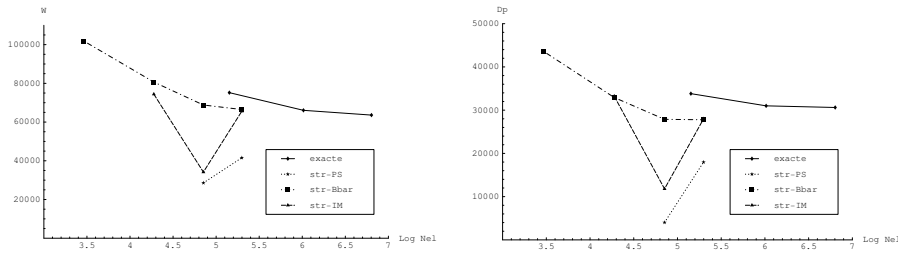


Fig. 3.20 – Microstructure, identique à celle de la Figure 3.19, filtrée à travers les points de Gauss par l’approche structurée. La valeur affichée est égale à 1 si le point est dans l’inclusion, et 0 dans la matrice.

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V} F \dot{u} dV dt \\
 \mathcal{D}^p &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + q^p \dot{\xi}^p) dV dt \\
 \mathcal{D}^d &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{D}_{ijkl} \sigma_{kl} + q^d \dot{\xi}^d \right) dV dt.
 \end{aligned} \tag{3.157}$$

Matrice quasi-poreuse : traction simple



Travail externe

Dissipation plastique

Fig. 3.21 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation plastique avec l’augmentation du nombre d’éléments (échelle logarithmique) pour une structure hétérogène (voir Figure 3.19) dans un test de traction simple. Nous comparons les quatre représentations : exacte, structurée en déplacement (str-Bbar), en contrainte (str-PS) et modes incompatibles (str-IM). La méthode $\bar{B}$ est la seule à s’approcher de la représentation exacte.

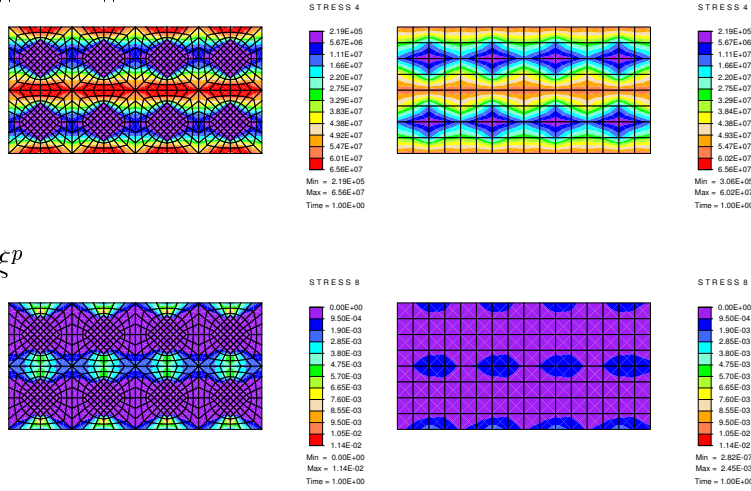
L’intérêt principal des méthodes structurées (voir la Figure 3.20) est de fournir de descriptions raisonnables du comportement d’une microstructure, avec moins de degrés de libertés que dans l’approche exacte. Pour le démontrer nous présentons les

convergences des valeurs énergétiques (travail externe et dissipations anélastiques) en raffinant les maillages, en nous intéressant surtout aux maillage structurés plus grossiers qu'un maillage exacte.

Matrice quasi-poreuse

Matrice quasi-poreuse : traction simple

$||Dev \sigma||$



exacte

structurée ($\bar{B}$)

Fig. 3.22 – Contrainte déviatorique et variable d'écrouissage plastique, ξ^p , dans la représentation exacte et structurée en déplacement. Globalement, la représentation structurée s'accorde avec l'approche exacte, mais ne capte pas aussi bien les champs locaux.

Nous considérons d'abord une matrice au comportement élasto-plastique contenant des inclusions élastiques avec une faible valeur du module de Young. Les paramètres de comportement de la matrice sont $K^e = 3.5 \cdot 10^{10}$, $\mu^e = 1.2 \cdot 10^{10}$, $\sigma_y = 4.0 \cdot 10^7$, $\sigma_\infty = 8.0 \cdot 10^7$, $b^p = 1000$ et $K^p = 1.0 \cdot 10^8$ et des inclusions, $K^e = 2.5 \cdot 10^7$, $\mu^e = 1.88 \cdot 10^7$ (pour les définitions des paramètres voir le chapitre 3.3.10).

Dans la Figure 3.21 nous présentons les calculs des quantités énergétiques pour les maillages différents. Parce que le nombre d'éléments dans la représentation structurée est beaucoup plus petit, nous utilisons l'échelle logarithmique en l'abscisse du diagramme. C'est la méthode $\bar{B}$ qui s'approche le plus des résultats obtenus par la représentation exacte. Les champs de contrainte déviatorique et de variables d'écrouissage plastique sont présentés dans la Figure 3.22. Le même type de résultats que pour la traction simple sont présentés pour un gradient d'effort imposé, dans les Figures (3.23) et (3.24).

Matrice aux inclusions quasi-rigides

Matrice quasi-poreuse : gradient d'effort imposé
Travail externe

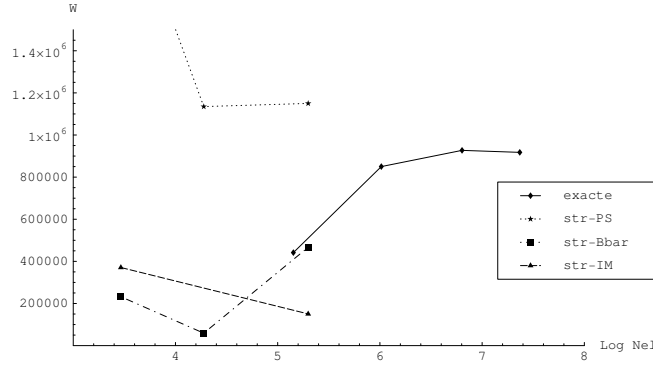
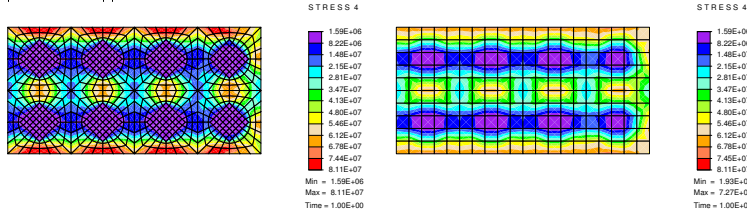


Fig. 3.23 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation plastique avec l'augmentation du nombre d'éléments (échelle logarithmique) pour une structure hétérogène (voir Figure 3.19) soumise à un gradient d'effort imposé. Nous comparons les quatres représentations : exacte, structurée en déplacement (str-Bbar), en contrainte (str-PS) et modes incompatibles (str-IM). La méthode $\bar{B}$ est la seule à s'approcher de la représentation exacte.

Matrice quasi-poreuse : gradient d'effort imposé
 $||Dev \sigma||$



exacte

structurée ($\bar{B}$)

Fig. 3.24 – Distribution de la contrainte déviatorique et de la zone plastifié pour un gradient d'effort imposé.

Dans cet exemple nous utilisons le même comportement pour la matrice que dans le cas précédent et un comportement isotrope élastique pour les inclusions, avec $K^e = 2.5 \cdot 10^{13}$, $\mu^e = 1.88 \cdot 10^{13}$. A partir de la Figure 3.25 nous concluons que l'approche structurée en contrainte est la seule à être cohérente avec l'approche exacte et, en plus, avec un facteur ~ 5 de degrés de libertés en moins. Le même accord est retrouvé pour le gradient d'effort imposé (Figure 3.26). Les valeurs de la contrainte déviatorique et de la variable d'écrouissage plastique sont présentées dans la Figure 3.27.

Matrice aux inclusions endommageables

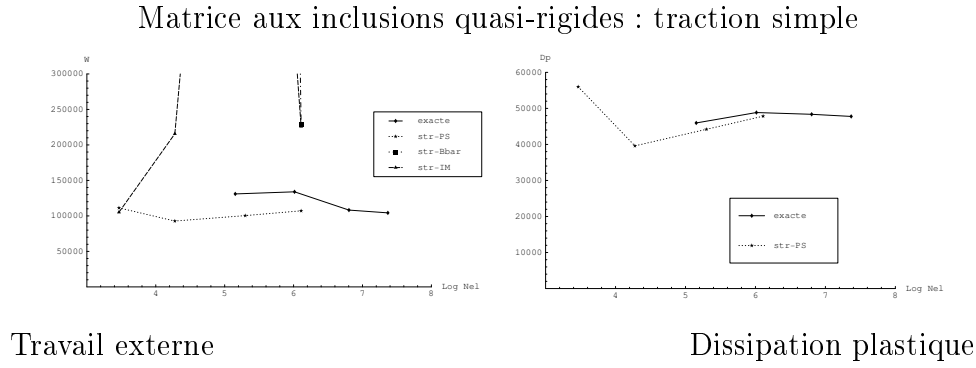


Fig. 3.25 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation plastique avec l’augmentation du nombre d’éléments (échelle logarithmique) pour une structure hétérogène (voir Figure 3.19) dans un test de traction simple. Nous comparons les quatre représentations : exacte, structurée en déplacement (str-Bbar), en contrainte (str-PS) et modes incompatibles (str-IM). La méthode en contrainte (str-PS) est la seule à s’approcher à la représentation exacte.

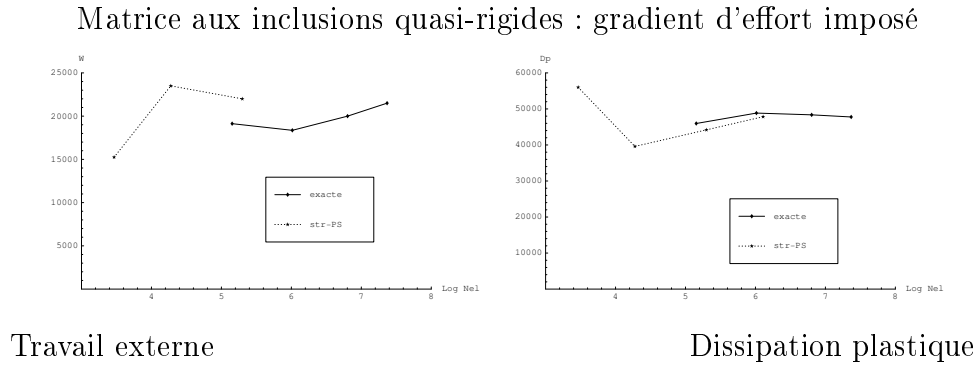
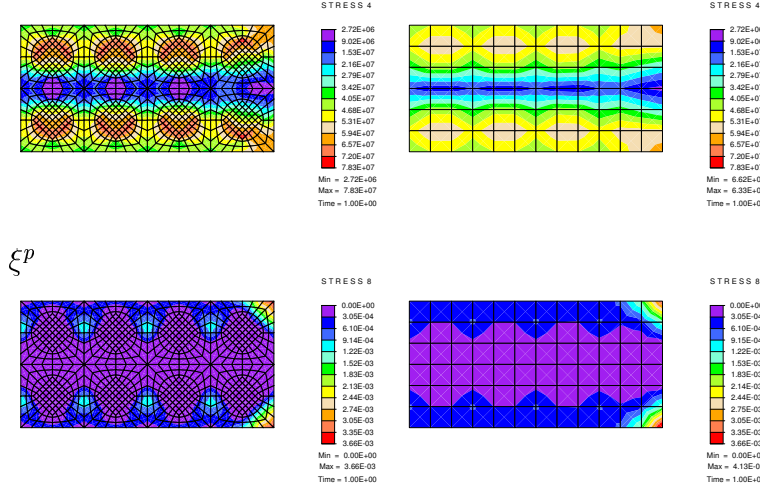


Fig. 3.26 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation plastique avec l’augmentation du nombre d’éléments (échelle logarithmique) pour une structure hétérogène (voir Figure 3.19) soumise à un gradient d’effort imposé. La méthode en contrainte (str-PS) est la seule à s’approcher à la représentation exacte.

Nous considérons ici que les inclusions ont un comportement endommageable, avec les paramètres suivants $K^e = 1.8 \cdot 10^{10}$, $\mu^e = 1.0 \cdot 10^{10}$, $\sigma_f = 0.5 \cdot 10^7$, $\sigma_{f\infty} = 1.0 \cdot 10^7$, $b^d = 100$ et $K^d = 2.5 \cdot 10^6$. Les résultats des tests sont montrés dans les Figures 3.28, 3.29 et 3.30. Une courbe du type effort-déplacement (défini dans le chapitre 3.3.10) pour un comportement d’endommagement sans écrouissage ($\sigma_f = \sigma_{f\infty} = 0.5 \cdot 10^7$) est présentée Figure 3.31.

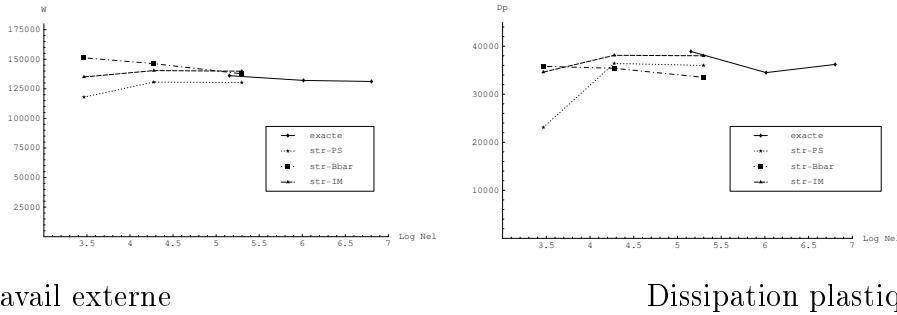
Matrice aux inclusions quasi-rigides : gradient d'effort imposé
 $||Dev \sigma||$



exacte structurée (P-S)

Fig. 3.27 – La distribution de la contrainte déviatorique et de la zone plastifié pour un gradient d'effort imposé.

Matrice aux inclusions endommageables : traction simple



Travail externe

Dissipation plastique

Fig. 3.28 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation plastique avec l'augmentation du nombre d'éléments (échelle logarithmique) pour une structure hétérogène (voir Figure 3.19) dans un test de traction simple. Nous comparons les quatre représentations : exacte, structurée en déplacement (str-Bbar), en contrainte (str-PS) et modes incompatibles (str-IM). Toutes les approches structurées donnent de bon résultats, particulièrement la méthode en contrainte (str-PS).

3.6 Conclusion

Nous considérons trois types de représentation de la microstructure : exacte, structurée et macroscopique. La première est la plus robuste et peut être utilisée pour la modélisation de tous les types de matériau composite étudiés ici (matrice quasi-poreuse, matrice aux inclusions quasi-rigides et matrice aux inclusions endommageables). Or, le prix d'une telle représentation est la difficulté de mailler des

Matrice aux inclusions endommageables : gradient d'effort imposé

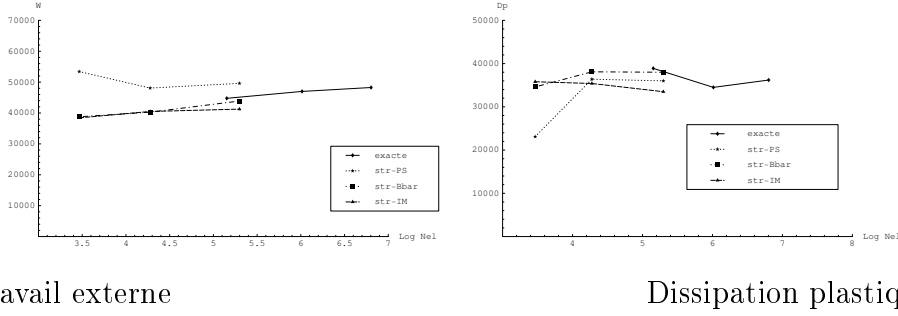


Fig. 3.29 – Convergence de la valeur du travail externe et de la dissipation plastique avec l'augmentation du nombre d'éléments (échelle logarithmique) pour une structure hétérogène (voir Figure 3.19) soumise à un gradient d'effort imposé. Toutes les approches structurées donnent de bon résultats, particulièrement la méthode en contrainte (str-PS).

Matrice aux inclusions endommageables : gradient d'effort imposé

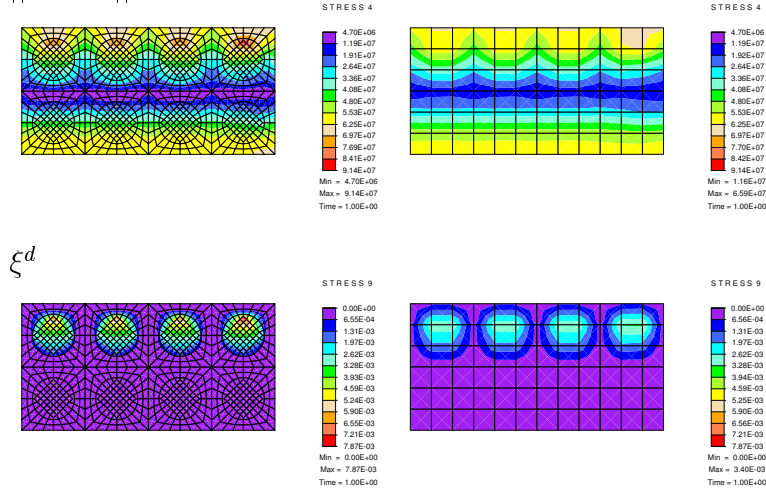
 $||Dev \sigma||$


Fig. 3.30 – La distribution de la contrainte déviatorique et de la zone endommagée pour un gradient d'effort imposé.

microstructures complexes et surtout le coût du calcul correspondant très élevé.

L'approche structurée est une très bonne alternative et peut, pour la même qualité des résultats, réduire le nombre de degrés de libertés nécessaires pour un facteur ~ 5 . Nous comparons trois représentations structurées : filtrage par points de Gauss en déplacement, filtrage par points de Gauss en contrainte et modes incompatibles. Parmi ces trois aucune n'est supérieure aux autres pour tout type de microstructure. Par exemple, l'approche du filtrage par points de Gauss en contrainte est la plus

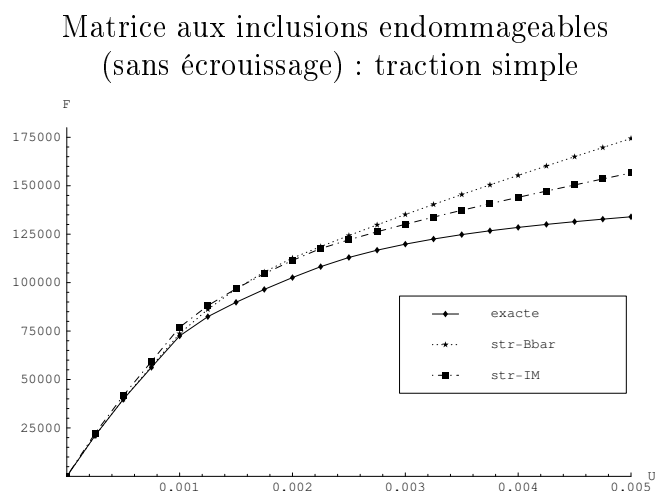


Fig. 3.31 – Diagramme effort-déplacement d’une analyse de la traction simple de la structure hétérogène, composée de la matrice obéissant un comportement élasto-plastique parfait et des inclusions parfaitement endommageables.

performante pour les microstructures où le champ de contrainte est assez régulier (matrice aux inclusions quasi-rigides ou endommageables) et quand l’écrouissage des comportements plastiques et endommageables est non-zéro. Pour la modélisation d’une matrice quasi-poreuse, le filtrage par point de Gauss en déplacement (méthode $\bar{B}$) est le plus performant et la méthode des modes incompatibles la plus comparable avec l’approche exacte pour des comportements anélastiques au faible écouissage.

Le modèle couplé élasto-plastique-endommageable est capable de représenter le comportement macroscopique d’une (micro-)structure, mais reste limité au niveau de la modélisation des phénomènes locaux. Il est particulièrement efficace dans la formulation en contrainte où il permet de décrire une réponse macroscopique avec un petit nombre de degrés de libertés.

Chapitre 4

Interface micro-macro

4.1 Introduction

Dans le chapitre 2.3.2 nous proposons une méthode de décomposition des échelles, où dans le cadre de la MEF à l'échelle d'une structure, nous introduisons un deuxième niveau du modèle EF afin de mieux représenter la microstructure par les approches considérées dans le chapitre 3. Cette stratégie permet de modéliser des structures hétérogènes, où les échelles sont fortement couplées.

Pour une formulation des modèles d'EF macro et micro en déplacement, une interface micro-macro en déplacement est la plus facile à mettre en place, ce qui est détaillé dans le chapitre 2.3. Néanmoins, une telle décomposition de domaines (échelles) n'est pas optimale (voir par exemple [96]) dans la mesure où elle rend le modèle trop raide en terme de comportement effort-déplacement et conduit à une faible convergence.

Une façon de remédier à ce défaut consiste à introduire les interfaces en tant que des entités à part, ayant attribuées leurs propres interpolations de déplacements et d'efforts. Dans les travaux [57], [62], [58] et [76], par exemple, les auteurs proposent une formulation assez générale de ce type d'interface, permettant une attribution de loi constitutive à l'interface elle-même. Cette approche a été introduite dans le cadre multi-échelle de comportements (visco)élastiques linéaires et fait appel à la méthode LATIN (voir par exemple [56]) pour la résolution des équations.

Une interface entre les sous-domaines peut être définie à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, qui établissent une continuité dans un sens faible des déplacements entre deux sous-domaines adjacents (voir par exemple [24], [23]). Dans un cadre d'une analyse multi-échelle, les auteurs dans [81] introduisent les multiplicateurs de Lagrange au niveau macro, qui relient des sous-domaines micro ayant des maillages conformes ou non-conformes. Ces multiplicateurs sont ainsi résolus globalement, avec les valeurs de déplacements micro et macro par une méthode itérative.

Dans ce travail nous utilisons la formulation des multiplicateurs de Lagrange localisés, une méthode présentée dans [78], [79]. L'idée de base consiste à introduire l'interface comme un cadre, où le champ de déplacement serait considéré séparément des champs dans les sous-domaines. Puis, nous définissons les multiplicateurs de Lagrange locaux reliant chaque sous-domaine avec ce cadre.

Dans notre application de ce principe, le cadre correspond à l'échelle macro, couplée avec les sous-domaines micro par les multiplicateurs de Lagrange. Dans cette formulation les conditions d'interface dépendent essentiellement du choix de l'espace d'interpolation des multiplicateurs de Lagrange. Nous montrons qu'un choix particulier peut mener à une définition d'interface en déplacement, équivalente à celle présentée dans le chapitre 2.3, et qu'une interface en effort peut également être construite du même principe.

Une interface en déplacement ou en effort impose naturellement les CAL (conditions aux limites) de l'analyse micro en déplacement ou en effort. Dans le cas d'une analyse effectuée sur un VER (volume élémentaire représentative, voir le chapitre 2), la réponse macro doit, par définition, être insensible au type des CAL. Par contre, si le volume étudié est plus petit qu'un VER, le type des CAL peut influencer la réponse et une certaine hiérarchie des bornes peut être établie (voir par exemple [44], [52], [51]). Cet aspect est considéré ici dans le cadre de l'analyse multi-échelle.

A cause du coût de calcul très élevé dans la méthode multi-échelle proposée, l'implantation avec un algorithme parallélisable est primordiale. Nous avons implanté le modèle micro-macro en utilisant le code CTL (Communication Template Library), développé à l'Université de Braunschweig en Allemagne en le couplant avec le logiciel d'EF, FEAP (Finite Element Analysis Program), développé à l'Université de Californie, Berkeley (Etats Unis), que nous utilisons pour les analyses micro et macro.

Un avantage important de notre stratégie d'homogénéisation par rapport aux autres stratégies proposées dans la littérature, concerne le fait, que la structure de la résolution d'EF macro reste la même que dans la MEF classique, sans aspect multi-échelle. L'enrichissement par le modèle micro se met en place au niveau d'un EF et l'architecture globale du code, concernant principalement l'assemblage des matrices et la résolution des équations n'a pas besoin d'être modifiée. Par conséquent, il est très facile d'utiliser dans une analyse simultanément les modèles classiques basés sur une loi de comportement homogénéisée et la représentation par un maillage d'EF micro.

Cette partie est organisée de la manière suivante. D'abord nous développons la formulation variationnelle et nous proposons la méthode de résolution. Ensuite, nous comparons les réponses macro des deux types de CAL pour une microstructure donnée. Des analyses numériques différentes sont présentées. D'abord pour une petite structure, où la solution micro est accessible, puis nous simulons un essai de flexion trois points pour un rapport réaliste entre les phases. Nous comparons les résultats surtout sur la base des différentes discrétisations micro et macro, puis l'effet du type d'interface, en déplacement et en contrainte. Les effets des propriétés aléatoires des phases sont également étudiés.

4.2 Formulation variationnelle et algorithme de résolution

Afin de formuler le couplage entre les échelles nous utilisons le cadre variationnel des multiplicateurs de Lagrange localisés (voir [78], [79]). Le maillage macro d'EF

assume le rôle du cadre lié aux sous-domaines micro par les multiplicateur de Lagrange correspondants. Les variables d'états contiennent les champs de déplacement micro, u^m , et macro, u^M , comme aussi l'ensemble des variables internes micro, ξ^m , et éventuellement des variables macro, ξ^M , si l'approche multi-échelle est combinée avec de modèles macroscopiques classiques. Dans le cas général, l'énergie libre du système peut s'écrire comme,

$$\begin{aligned} \Pi(u^M, u^m, \xi^m) &:= \Pi^M(u^M, \xi^M) + \Pi^m(u^m, \xi^m) \\ &+ \Pi^{interface}(u^M, u^m) + \Pi^{ext}(u^M, u^m) \quad \mapsto \text{stationnaire.}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où Π^M est l'énergie libre de la partie du modèle définie seulement à l'échelle macro, Π^m est l'énergie libre des sous-domaines micro, $\Pi^{interface}$ est l'énergie définie sur la surface de l'interface entre les deux échelles et Π^{ext} est l'énergie des effort externes. Nous supposons que les effort externes n'interviennent qu'au niveau macroscopique et que la structure entière est divisée en sous-domaines micro. Ces hypothèses n'influencent guère la généralité de la procédure. Ainsi, nous pouvons écrire,

$$\Pi^M(u^M, \xi^M) = 0 ; \quad \Pi^{ext}(u^M) = - \int_{\partial\Omega_\sigma} u^M \cdot \bar{t} \, dS - \int_{\Omega} u^M \cdot b \, dV. \quad (4.2)$$

On peut alors obtenir une forme explicite de l'expression correspondante à l'énergie libre,

$$\Pi^m = \int_{\Omega^m} \psi^m(\epsilon^m, \xi^m) \, dV ; \quad \epsilon^m = \nabla^s u^m \quad (4.3)$$

où $\psi^m(\cdot)$ est la densité de l'énergie libre et ∇^s l'opérateur différentiel déterminant le champ de déformation à partir des déplacements. Enfin, nous donnons la forme explicite de la condition d'interface par,

$$\Pi^{interface} = \int_{\Gamma} \lambda \cdot (u^M - u^m) \, dS, \quad (4.4)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange, le champ dual du déplacement, qui doit assurer la compatibilité dans un sens faible des déplacements micro et macro.

Nous obtenons la formulation faible, si nous avons recours à la condition d'optimalité dans l'équation (4.1), tout en gardant les variables internes, ξ^m , fixes. Alors, $\delta\Pi(u^m, u^M, \xi^m)|_{\xi^m=const.} = 0$, nous donne trois groupes d'équations l'équilibre micro :

$$\int_{\Omega^m} (\delta\epsilon^m \sigma^m - \delta u^m b) \, dV + \int_{\Gamma} \delta u^m \lambda \, dS = 0 \quad (4.5)$$

la compatibilité micro-macro en déplacement :

$$\int_{\Gamma} \delta\lambda (u^m - u^M) \, dS = 0 \quad (4.6)$$

et l'équilibre macro :

$$\int_{\partial\Omega_\sigma} \delta u^M \bar{t} \, dS + \int_\Gamma \delta u^M \lambda \, dS = 0, \quad (4.7)$$

qui sont complétées par les lois d'évolutions des variables internes, en utilisant le schéma d'intégration temporelle d'Euler arrière,

$$\dot{\xi}^m = f(\sigma^m, q^m) \mapsto \xi_{n+1}^m = \xi_n^m + f(\sigma_{n+1}^m, q_{n+1}^m). \quad (4.8)$$

Nous faisons remarquer que les lois de comportement considérées dans le chapitre 3 peuvent être présentées de la même manière.

Les équations (4.5) - (4.8) définissent entièrement le problème mécanique non-linéaire et mènent à la solution en terme des trois champs de u^M , λ et u^m . Nous les discrétisons dans le cadre de la MEF comme,

$$u^M \approx N^M U^M \quad (4.9)$$

$$\lambda \approx N^\lambda \Lambda \quad (4.10)$$

$$u^m \approx N^m U^m, \quad (4.11)$$

qui permettent par la suite de réécrire le système (4.5) - (4.7) comme,

$$\begin{aligned} R_m &:= \int_{\Omega^m} (B^{mT} \sigma^m(U^m) - N^m f) \, dV + \Lambda \int_\Gamma N^m N^\lambda \, dS = 0 \\ R_\lambda &:= \int_\Gamma N^\lambda (N^m U^m - N^M U^M) \, dS = 0 \\ R_M &:= \int_{\partial\Omega_\sigma} N^M t \, dS + \Lambda \int_\Gamma N^M N^\lambda \, dS = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où le projecteur de la déformation micro est défini comme,

$$B_{ijk}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N^m}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial N^m}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) \implies \hat{\epsilon}_{ij}^m = B_{ijk}^m U_k^m, \quad (4.13)$$

l'approximation du champ de déformation étant, $\hat{\epsilon}^m(U^m) = \epsilon^m|_{u^m \rightarrow N^m U^m}$.

Le système des équations dans (4.12) est non-linéaire. Nous choisissons de le résoudre par la méthode de Newton, qui exige la linéarisation des équations suivantes,

$$R_{(\cdot)}^{(k+1)} \approx R_{(\cdot)}^{(k)} + \frac{\partial R_{(\cdot)}^{(k)}}{\partial \eta_i} \Delta \eta_i, \quad (4.14)$$

où l'indice (k) dénote la valeur à la k -ième itération et η_i la séquence des variables indépendantes. En appliquant cette opération, le système (4.12) devient,

$$\begin{pmatrix} D^{(k)} & E & 0 \\ E^T & 0 & -F \\ 0 & -F^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_m^{(k)} \\ \Delta \Lambda^{(k)} \\ \Delta U_M^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_m^{(k)} \\ -R_\lambda^{(k)} \\ -R_M^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

où les tenseurs E et F définissent la projection entre le champ des multiplicateurs de Lagrange et les champs des déplacement micro et macro, respectivement. $D^{(k)}$ signifie la valeur de la raideur micro à la k -ième itération. Ils sont calculés comme,

$$E = \int_{\Gamma} N_m N_{\lambda} dS \quad (4.16)$$

$$F = \int_{\Gamma} N_{\lambda} N_M dS \quad (4.17)$$

$$D^{(k)} = \int_{\Omega^m} B^{mT} C(U^m)^{(k)} B^m dV, \quad (4.18)$$

la relation de comportement locale linéarisée à l'échelle micro étant,

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}. \quad (4.19)$$

Nous résolvons le système (4.15) par l'élimination de Gauss, en commençant d'abord par les valeurs de ΔU^m , puis $\Delta \Lambda$, et en calculant à la fin ΔU^M . Dans l'élimination des variables ΔU^m et $\Delta \Lambda$ nous utilisons la méthode séquentielle (voir 2.3.2), c'est-à-dire que nous atteignons la convergence à chaque niveau.

Ici, nous considérons trois types de variables (U_m , Λ et U_M) et nous avons donc trois niveaux dans le processus de la méthode séquentielle. En choisissant $l_{max} = m_{max} = 1$ ci-dessous, la procédure dégénère dans l'élimination de Gauss simple. Dans notre implantation nous choisissons de converger à valeur fixe du déplacement macro sur les déplacement micro et les multiplicateurs de Lagrange, avant de continuer sur une prochaine itération.

L'algorithme est implanté de la manière suivante,

DO $k = 1 \dots convergence$

$$F^T D_{\lambda}^{(k)-1} F \Delta U_M^{(k)} = -\tilde{R}_M^{(k)}$$

$$D_{\lambda}^{(k)} = E^T D^{(k)-1} E$$

$$\tilde{R}_M^{(k)} = R_M^{(k)} + F^T D_{\lambda}^{(k)-1} R_{\lambda}^{(k)} - F^T D_{\lambda}^{(k)-1} E^T D^{(k)-1} R_m^{(k)}$$

$$\implies U_M^{(k+1)} = U_M^{(k)} + \Delta U_M^{(k)}$$

DO $l = 1 \dots l_{max}$ ou convergence ($U_M^{(k+1)}$ fixe)

$$(E^T D^{(k,l)-1} E) \Delta \Lambda^{(k,l)} = -\tilde{R}_{\lambda}^{(k,l)};$$

$$\tilde{R}_{\lambda}^{(k,l)} = -R_{\lambda}^{(k,l)} + E^T D^{(k,l)-1} R_m^{(k,l)} + F U_M^{(k)}$$

$$\implies \Lambda^{(k,l+1)} = \Lambda^{(k,l)} + \Delta \Lambda^{(k,l)}$$

DO $m = 1 \dots m_{max}$ ou convergence ($U_M^{(k+1)}$ et $\Lambda^{(k,l+1)}$ fixes)

$$D^{(k,l,m)} \Delta U_m^{(k,l,m)} = -\tilde{R}_m^{(k,l,m)};$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_m^{(k,l,m)} &= R_m^{(k,l,m)} + E\Lambda^{(k,l)} \\ \implies U_m^{(k,l,m+1)} &= U_m^{(k,l,m)} + \Delta U_m^{(k,l,m)}\end{aligned}$$

ENDDO m

ENDDO l

ENDDO k

Remarque 1

L'élimination de Gauss n'est pas la seule possibilité pour résoudre le système linéaire dans (4.15), car, l'élimination de Gauss n'est généralement pas bien adaptée à la résolution des systèmes avec un nombre important de zéros sur la diagonale, ce qui pourrait arriver dans notre système. Dans ce cas-là la procédure mènerait à la résolution de matrices grandes et pleines, la rendant ainsi inefficace. Pour ce type de problème un algorithme du type Uzawa, par exemple, serait mieux adapté (voir par exemple [10]). Néanmoins, dans notre cas, le nombre d'équations micro est bien supérieur au nombre d'équations de compatibilité. Par conséquent, la matrice dans la résolution de $\Delta\Lambda$ sera pleine, mais pas du tout grande. Par ailleurs, l'élimination des déplacements micro s'effectue efficacement, puisque la matrice D , obtenue de l'analyse d'EF micro, est creuse et déjà LU -décomposée.

Le plus haut niveau des processus itératifs est équivalent au processus itératif globale de la MEF non-linéaire classique. La seule différence est due à la façon dont nous calculons le vecteur de résidu et la matrice de raideur au niveau d'un élément. Au lieu de les déterminer par l'intégration numérique avec la quadrature de Gauss en utilisant une loi de comportement, ils sont obtenus par l'analyse d'EF micro. Pour le processus global (macro) le résidu et la matrice de raideur sont calculés comme

$$\begin{aligned}R^{el} &= F^T \Lambda \\ K^{el} &= F^T D_\lambda^{(k)-1} F.\end{aligned}\tag{4.20}$$

A partir de 4.20 le vecteur de résidu et la matrice de raideur globaux se construisent suivant l'assemblage classique d'EF, $\bigcup_{el=1}^{N_{el}}$, comme

$$\begin{aligned}K^{macro} &= \bigcup_{el=1}^{N_{el}} K^{el} \\ R^{macro} &= \bigcup_{el=1}^{N_{el}} R^{el},\end{aligned}\tag{4.21}$$

permettant ainsi de garder la forme standard de résolution, ayant pour chaque itération macro et pour chaque incrément de pseudo-temps, le système suivant à résoudre,

$$K_n^{macro(k)} \Delta U_n^{M(k)} = -R_n^{macro}.\tag{4.22}$$

L'algorithme de résolution proposé ci-dessus est très facile à adapter pour un calcul parallèle. Son aspect parallélisable est présenté par le schéma dans la Figure 4.1.

4.3 Conditions d'interface

4.3.1 Introduction

Dans le chapitre 4.2 nous formulons le cadre variationnel et l'algorithme de résolution de la méthode multi-échelle pour une discrétisation quelconque des champs de déplacements, u^m , u^M , et des multiplicateurs de Lagrange, λ . Dans toutes les analyses nous utilisons les éléments finis isoparamétriques à quatre nœuds, comme dans le chapitre 3, pour les déplacements micro et macro,

$$N_{1,2,3,4}^{m,M}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{4}(1 \pm \eta_1)(1 \pm \eta_2), \quad (4.23)$$

où η_i sont les coordonnées dans le repère de référence. Nous observons que pour une sous-structuration micro les fonctions N^M sont linéaires sur les interfaces Γ .

Le choix de l'espace d'interpolation des multiplicateurs, λ , est en principe assez libre, mais détermine, par contre, complètement la nature de l'interface. La seule vraie contrainte est celle issue de l'équation (4.12) à la condition que la valeur discrète de Λ n'ait pas de modes à l'énergie nulle. En terme mathématique, cela s'écrit comme

$$Ker(E) \cap Ker(F^T) = \emptyset, \quad (4.24)$$

où $Ker(\cdot)$ signifie le noyau d'un opérateur linéaire. Il serait également raisonnable d'imposer,

$$Ker(E) = \emptyset, \quad (4.25)$$

puisque une interpolation des multiplicateurs de Lagrange d'ordre supérieur à l'ordre d'interpolation des déplacements micro ne pourraient pas augmenter la précision. Cela est analogue au principe de la limitation de Fraeijs de Veubeke (voir par exemple [17]).

Dans la suite nous considérons deux cas extrêmes pour l'interpolation des multiplicateurs de Lagrange. Nous utilisons, d'abord, les fonctions d'interpolation d'ordre maximal, ce qui mène à l'interface en déplacement, complètement équivalente à celle présentée dans le chapitre 2.3.2 et puis les fonctions d'ordre minimal, menant à l'interface en effort.

4.3.2 Interface en déplacement

Dans le cas spécial de l'interface en déplacement, la relation entre les déplacements micro et macro peut être obtenue directement sans devoir déterminer les valeurs des multiplicateurs de Lagrange correspondants. Formellement, ce résultat

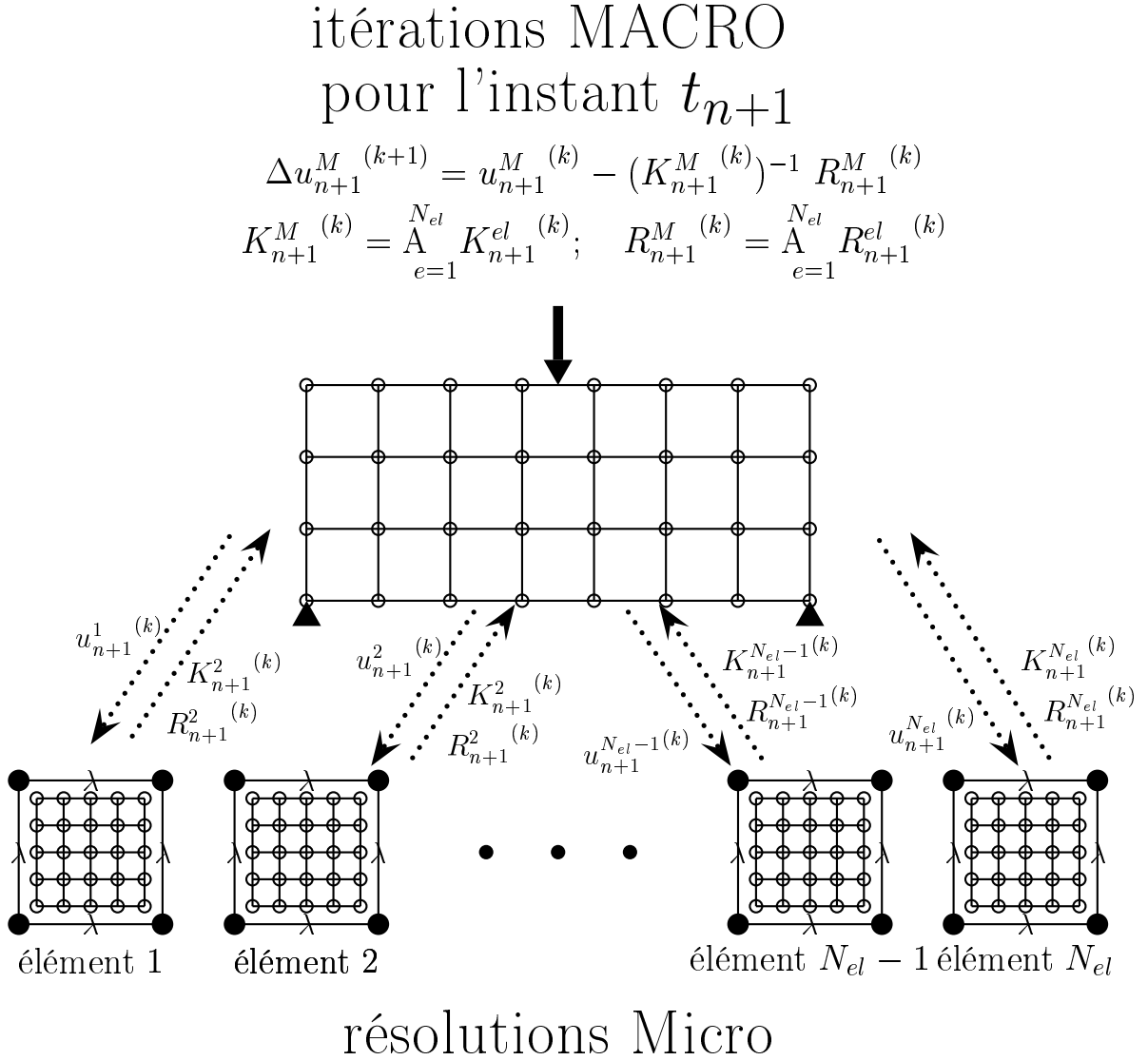


Fig. 4.1 – Schéma de l'algorithme micro-macro. Au niveau supérieur, la résolution et l'assemblage standard d'EF sont utilisés. Les résidus et les raiders élémentaires, K^{el} et R^{el} , respectivement, sont obtenus à travers le niveau inférieur d'EF. Les deux modèles, macro et micro, communiquent par les champs : i) u^{el} de macro à micro et ii) K^{el} , R^{el} de micro à macro. Le processus itératif s'exécute à chaque instant, t_n .

est obtenu en utilisant les fonctions de Dirac, $\delta(\cdot)$, pour l'interpolation du champ de multiplicateurs, λ , comme

$$N_\lambda^\alpha = \Lambda_\alpha \delta(r - r_\alpha); \quad \forall r_\alpha \in \partial\Gamma^{el}, \quad (4.26)$$

où r_i est la position du i -ième nœud sur la surface d'interface, Γ^{el} , correspondant au el -ième élément macro. En remplaçant cette approximation dans l'équation de la compatibilité micro-macro, dans (4.6), nous obtenons,

$$0 = \int_{\Gamma^{el}} \delta(r - r_\alpha) (u^m - u^M) dS = \underbrace{u^m(r_\alpha)}_{U_\alpha^m} - \underbrace{u^M(r_\alpha)}_{\sum_b N_b^M(r_\alpha) U_b^M}, \quad (4.27)$$

une relation identique à l'hypothèse initiale, (2.34), de la première formulation de l'interface en déplacement (voir le chapitre 2.3.2). Nous obtenons la même relation entre les valeurs discrètes de déplacements micro et macro à travers le projecteur, T , dans l'équation (2.39),

$$U_{\Gamma\alpha}^m = T_{\alpha\beta} U_\beta^M. \quad (4.28)$$

Pour cet exemple d'interpolation des multiplicateurs de Lagrange, il est mieux d'utiliser le mode de résolution, proposé dans le chapitre 2.3.2, que celui pour une interpolation générale, présenté dans le chapitre 4.2.

4.3.3 Interface en effort

Dans le cas particulier de l'interface en effort, c'est d'après l'échelle macro que nous choisissons l'espace des interpolations. Par exemple, dans un cas $2D$ avec des éléments macro à 4 nœuds, nous avons au total 8 degrés de liberté et, par conséquent, le même nombre de paramètres pour les multiplicateurs de Lagrange. Néanmoins, en imposant la condition d'équilibre, tous ne sont pas indépendants. Avec trois équations pour un cas $2D$, il n'en reste que cinq. L'idée mise en avant dans [65] consiste à utiliser le choix optimal des variations des multiplicateurs de Lagrange, équivalent à l'interpolation de contraintes de Pian-Sumihara (voir par exemple [80]), considéré dans le chapitre 3,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Lambda_1 + y\Lambda_2 \\ \sigma_{yy} &= \Lambda_3 + x\Lambda_4 \\ \sigma_{xy} \equiv \sigma_{yx} &= \Lambda_5. \end{aligned} \quad (4.29)$$

L'argument pour ce choix est lié au fait que l'élément de Pian-Sumihara est le plus performant $2D$ éléments quadrilatère bilinéaire, et que l'interpolation dans 4.29 est juste pour le cas traité ici. De plus, le champ de contrainte est auto-équilibré, avec $\text{div } \sigma = 0$. La variation correspondante des multiplicateurs de Lagrange sur la surface de l'interface, Γ , peut être déterminée en exploitant le principe de Cauchy comme,

$$\lambda = -\sigma \cdot n, \quad (4.30)$$

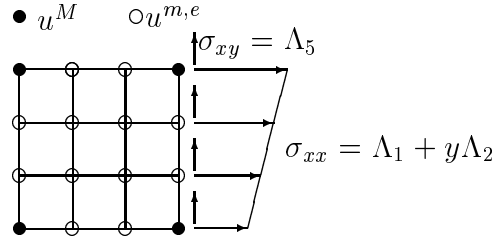


Fig. 4.2 – Pour l’interface en effort, la compatibilité des déplacements micro et macro est assurée dans le sens faible, par les multiplicateurs de Lagrange, Λ , qui rendent la variation des contraintes, σ_{xx} ou σ_{yy} , linéaires le long des bords, et σ_{xy} constante.

où n est le vecteur d’unité, normal à la surface Γ . Une variation type est présentée dans la Figure 4.2.

Dans le cas de l’interface formulée en effort, où le problème micro est piloté entièrement en contrainte, il s’agit en réalité d’une structure flottante. Ce genre de situations est souvent rencontré pour des analyses d’interactions fluide-structure et représente une tâche non-triviale. Par contre, dans notre cas le remède n’est pas compliqué, puisque les MCR (modes de corps rigide) à l’échelle micro dépendent directement des MCR macro, qui eux sont normalement nuls pour le type d’exemples considérés ici.

Décomposons formellement les champs des déplacements des MCR, $\alpha_j^{(\cdot)}$, et la partie déformée, $d_j^{(\cdot)}$, comme

$$u_i^m = d_i^m + R_{ij}\alpha_j^m \quad (4.31)$$

$$u_i^M = d_i^M + R_{ij}\alpha_j^M, \quad (4.32)$$

où R est le tenseur des MCR. Afin de rendre la décomposition unique, nous imposons la condition d’orthogonalité (voir par exemple [79]) comme,

$$\int_V d_i R_{ij} dV = 0. \quad (4.33)$$

Cette décomposition est seulement formelle et n’affecte pas l’implantation de l’algorithme. En fait, d’une manière analogue, nous pouvons utiliser le même tenseur, R , pour décomposer les effort, λ , comme,

$$\lambda_i = \chi_i + R_{ij}A_j, \quad (4.34)$$

où A_j sont les paramètres de la partie équilibrée des efforts, analogues aux paramètres des MCR. De la même façon χ_i signifie la partie déformable des efforts.

Comme nous l’avons déjà fait remarquer, l’interpolation dans (4.29) présente les variations des efforts appliqués dans l’analyse micro a priori équilibrées. Donc, pour ce cas-là $\lambda \equiv \chi$ et $A \equiv 0$ sont vrais pour tout ensemble des paramètres, $\forall \Lambda$. En

remplaçant cette décomposition dans l'équation de la compatibilité micro-macro, (4.6), nous obtenons,

$$\int_{\Gamma} \delta \lambda (u^m - u^M) dS = \int_{\Gamma} \delta \lambda (d^m - d^M) dS = 0, \quad (4.35)$$

et pour l'équivalent de la forme de l'orthogonalité dans (4.33), la relation suivante,

$$\int_V \chi_i R_{ij} dV = 0. \quad (4.36)$$

Les MCR dans chaque sous-domaine micro devraient être égaux aux MCR macro de l'élément fini correspondant. En réalité, les MCR micro nous intéressent rarement, puisque les champs les plus importants d'une analyse, comme la contrainte ou la déformation, n'en dépendent pas. Ainsi, nous pouvons fixer dans une analyse micro trois MRC indépendant de la façon quelconque. Dans nos analyses, nous fixons les déplacements complètement d'un nœud et d'un autre juste dans une direction, x ou y .

4.3.4 Analyses sur un domaine micro

Dans ce sous-chapitre nous nous interrogeons sur la façon dont la taille de l'échantillon et les conditions d'interface supposées, influencent sur la réponse d'un sous-domaine micro pour une microstructure régulière donnée (voir la Figure 4.3). Les quantités observées dans les réponses sont le travail externe et la dissipation plastique (voir la définition dans le chapitre 3.2.5). Nous considérons un élément macro à 4 nœuds avec les valeurs nodales de déplacement complètement imposées. Ces valeurs définissent les CAL (condition aux limites) micro à travers l'interface, basée soit en déplacement soit en effort.

Nous utilisons trois types de conditions nodales (voir la Figure 4.4),

i) sphérique

$$u_x^2 = u_x^3 = u_y^3 = u_y^4 = u \text{ \& } u_x^1 = u_y^1 = u_x^2 = u_y^4 = 0, \quad (4.37)$$

ii) déviatorique

$$u_x^2 = u_x^3 = -u_y^3 = -u_y^4 = u \text{ \& } u_x^1 = u_y^1 = u_y^2 = u_x^4 = 0, \quad (4.38)$$

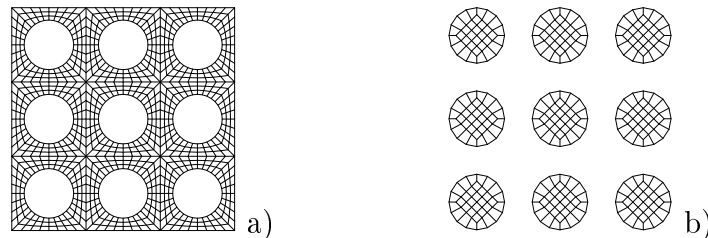


Fig. 4.3 – Type de modèle EF utilisé pour la microstructure régulière : a) la matrice et b) l'inclusion.

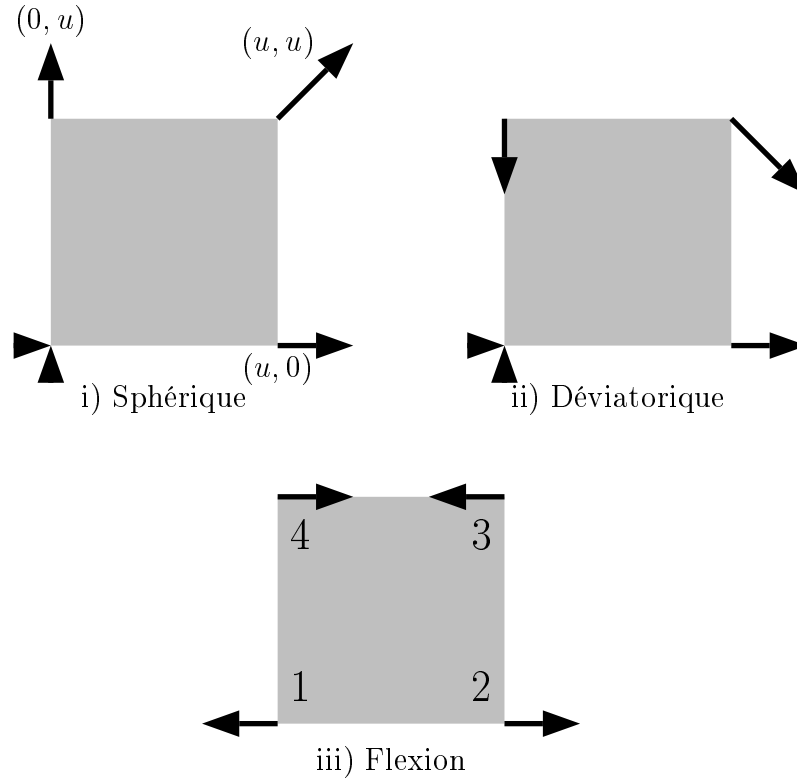


Fig. 4.4 – Trois types des conditions aux limites, imposées à un élément macro. La numérotation des définitions de chargement, (4.37) - (4.39), est indiquée sur l'élément en bas.

et iii) flexion

$$-u_x^1 = u_x^2 = -u_x^3 = u_x^4 = u \text{ \& } u_y^1 = u_y^2 = u_y^3 = u_y^4 = 0, \quad (4.39)$$

où les exposants 1, 2, 3, 4, dénotent les nœuds (Figure 4.4), les indices x, y les composantes dans ces directions et u le paramètre de l'amplitude des déplacements.

Dans le cas du chargement sphérique en $2D$, exemple montré dans la Figure 4.4, la composante déviatorique de la moyenne de la déformation n'est pas égale à zéro, puisque dans l'approximation de la déformation plane, $\epsilon_{33} = 0$ et donc pour $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq 0$, $dev \epsilon = \epsilon - \frac{1}{3}tr \epsilon \neq 0$.

Pour une microstructure élastique isotrope les chargements sphérique et déviatorique définiraient complètement une réponse mécanique pour tout autre chargement homogène. Puisque dans notre cas le comportement n'est pas élastique, nous rajoutons un troisième test, du type flexion. Pour ce dernier, les CAL ne sont pas homogènes, ce qui est plus représentatif d'un chargement général auquel un élément fini peut être soumis dans une analyse de structure.

Figure 4.5 nous présentons les courbes effort-déplacement ($F - U$), où U est l'amplitude du déplacement imposé et F l'effort correspondant. Nous considérons

les vides et les inclusions dures dans la matrice élasto-plastique (voir la Figure 4.3) dans un échantillon carré de 1×1 à 8×8 inclusions.

Un comportement particulier est observé pour le test déviatorique sur le composite aux inclusions dures, qui est dû au rangement régulier des hétérogénéités et au choix du modèle de Von Mises pour la matrice, dont le seuil n'affecte que la partie déviatorique de la contrainte. Malgré la plastification de la matrice, le comportement macro reste quasi-élastique. Dans la distribution des contraintes nous observons, que la partie déviatorique est plus importante dans les inclusions et la partie sphérique dans la matrice. Dans ce cas, la réponse ne dépend pas du type d'interface.

Néanmoins, dans les tests déviatorique et sphérique, où les CAL sont homogènes, les résultats s'accordent bien avec les prédictions théoriques sur les bornes supérieures et inférieures, établies d'abord pour un comportement élastique linéaire (voir [44]) et vérifiées numériquement après pour le comportement élasto-plastique (voir par exemple [52], [51]). Dans [44] l'auteur a démontré que la réponse élastique globale en tant qu'un module élastique, C , obéit à l'hierarchie de bornes suivante,

$$C_s^{app}(V') \leq C_s^{app}(V) \leq C^{eff} \leq C_d^{app}(V) \leq C_d^{app}(V'); \quad V' \subseteq V, \quad (4.40)$$

où $C_s^{app}(V)$ signifie la raideur apparente, obtenue sur le volume V avec les CAL homogènes en contrainte et $C_d^{app}(V)$ avec les CAL homogènes en déplacement (déformation). D'après ces résultats théoriques, la raideur apparente pour les CAL en effort représente la borne supérieure de la raideur effective défini sur un VER (volume élémentaire représentatif). De même, la raideur apparente pour les CAL en déplacement représente la borne inférieure. L'écart entre les bornes supérieures et inférieures converge vers zéro lorsque la taille de l'échantillon tend vers le VER et les raideurs apparentes supérieure et inférieure vers la raideur effective.

Même si les bornes étaient initialement établies pour le comportement élastique linéaire (voir [44]), elles sont confirmées pour un comportement élasto-plastique sous les CAL homogènes, en déplacement ou/et en effort. Dans ces deux types d'études (voir par exemple [52], [51]), les auteurs se sont principalement intéressés à l'estimation du module macro effectif, utilisé dans le cadre de l'homogénéisation classique (voir par exemple [8]), où la variation des champs macroscopiques est toujours supposée nulle sur l'échantillon microscopique considéré. Cette première partie d'analyse permettant de valider les résultats théoriques sur les bornes pour les CAL homogènes, en déplacement ou en effort, la deuxième partie porte sur les CAL non-homogènes du type flexion, où les résultats classiques sur les bornes ne s'appliquent plus, mais où notre modèle n'a pas du tout besoin d'être modifié par rapport au cas homogène.

Plus précisément, dans la stratégie de l'homogénéisation numérique proposée ici, la variation des contraintes et des déformations n'est pas forcément nulle sur l'élément représentant la microstructure. Ce genre de bornes n'est alors plus applicable pour les CAL de type flexion, que nous utilisons ici (voir la Figure 4.6). Dans ce cas particulier, les moyennes de la déformation et de la contrainte dans le volume sont nulles et la réponse $F - U$ ne concerne que les gradients des deux champs, de déplacement et d'effort. Une convergence de la réponse macro est également observée en

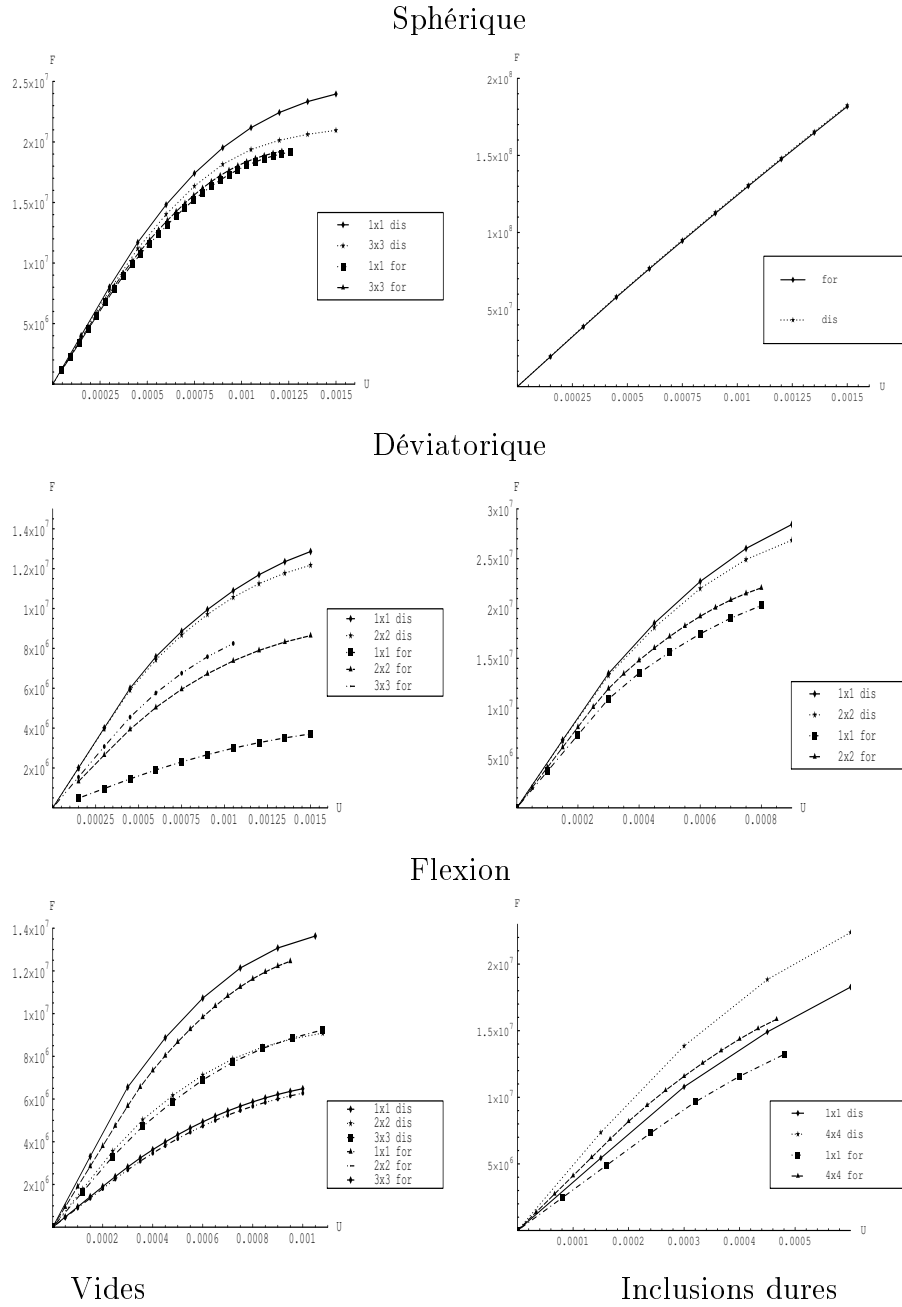


Fig. 4.5 – $F-U$ diagrammes pour la matrice avec les vides (à gauche) et les inclusions dures (à droite). Trois types de conditions aux limites sont imposées : sphérique (en haut), déviatorique (au milieu) et flexion (en bas). Pour chacun, nous comparons les formulations de l'interface, en déplacement (disp b.i.) et en effort (force b.i.) pour de tailles différentes de la microstructure encadrée.

augmentant le nombre d'inclusions. Par contre, les bornes de même type que celles dans (4.40) ne sont pas applicables. Cela veut dire, que la réponse par l'interface en déplacement n'est pas toujours plus raide que la réponse par l'interface en effort, comme pour les CAL homogènes, mais qu'en augmentant le nombre d'inclusions par cellule, nous obtenons une réponse unique pour les deux types d'interface.

VIDES

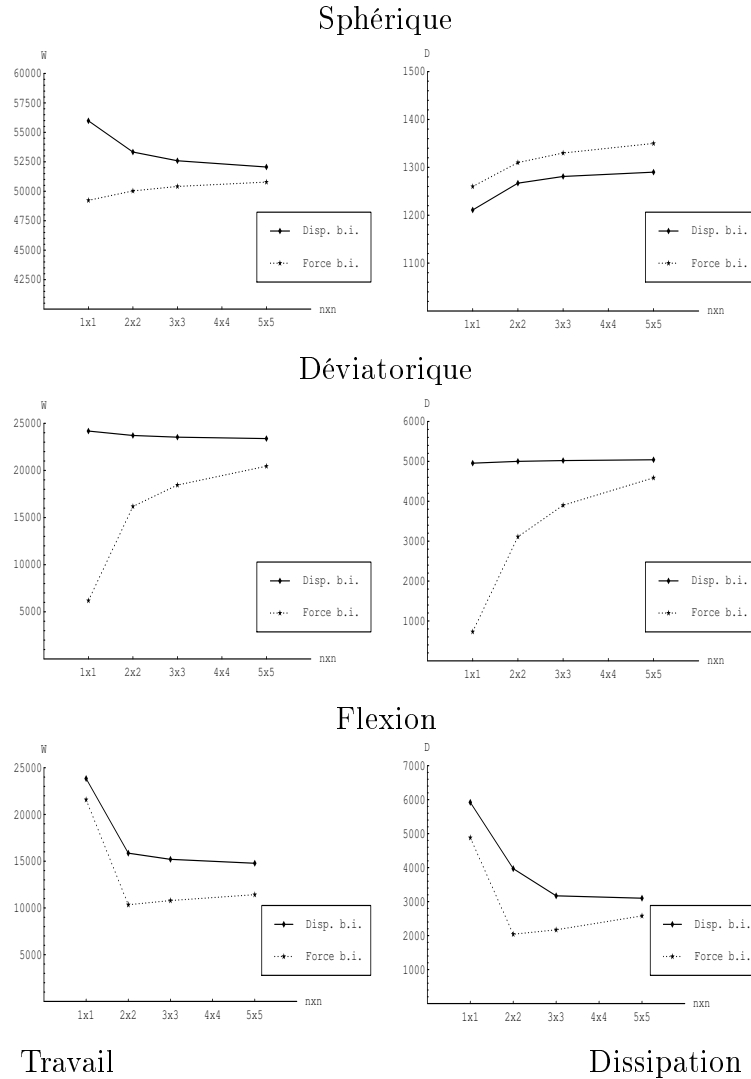


Fig. 4.6 – Taux de convergence du travail externe et de la dissipation en augmentant le nombre des inclusion par échantillon pour la matrice poreuse.

Le taux de convergence du travail externe et de la dissipation plastique par rapport à l'augmentation du nombre des inclusions dans l'élément macro sont présentés dans les Figures 4.6 (vides) et 4.7 (inclusions dures). Nous observons que, dans tous les cas, les deux types de CAL convergent vers la même valeur du travail externe et de la dissipation plastique.

INCLUSIONS DURES

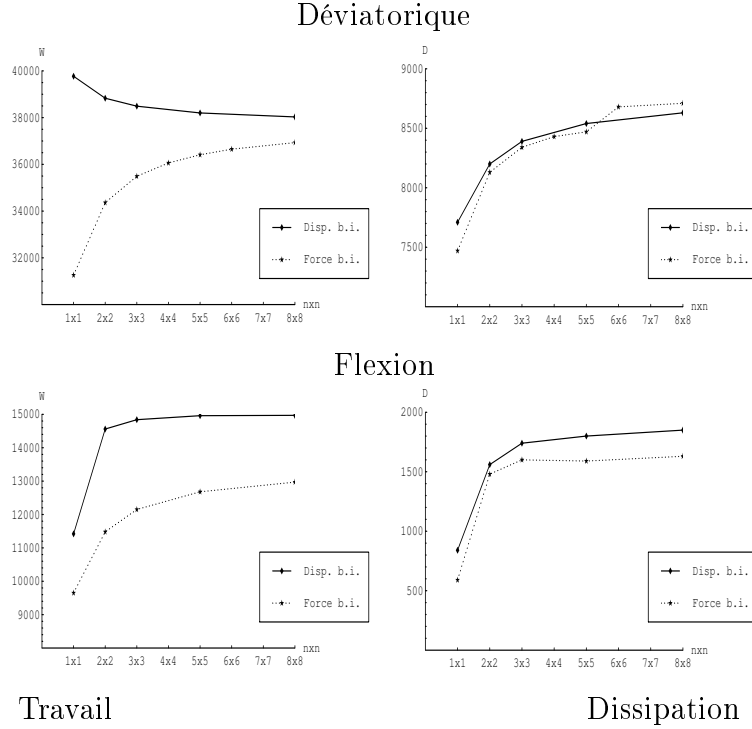


Fig. 4.7 – Taux de convergence du travail externe et de la dissipation en augmentant le nombre des inclusion par échantillon pour la matrice avec inclusions dures.

4.4 Implantation de l'algorithme pour le calcul parallèle

4.4.1 Introduction

L'algorithme que nous proposons dans le chapitre 4.2 pour la résolution des problèmes multi-échelle est très bien adapté à une architecture parallélisable du code de calcul. Cette propriété souhaitable provient de la séparation des échelles et de la localisation des analyses sur les sous-domaines micro.

Par l'approche séquentielle, nous résolvons les équations micro en gardant les variables macro fixes et puis nous corrigeons ces dernières en utilisant les solutions micro, ces deux étapes étant alternées jusqu'à convergence. Dans l'étape macro, toutes les variables sont couplées entre elles et nous choisissons de les résoudre monolithiquement par élimination de Gauss. Par contre, l'étape micro consiste en plusieurs analyses indépendantes, dont le nombre est exactement égal au nombre d'éléments macro. Elles peuvent alors être résolues simultanément sur plusieurs processeurs.

Pour les analyses EF nous utilisons le logiciel FEAP (Finite Element Analysis Program), développé à l'Université de Californie, Berkeley, Etats-Unis. Ce code est un code d'EF classique et ne permet pas a priori de réaliser des analyses multi-échelle comme celle, que nous proposons dans ce travail. Des points importants sur des aspects nécessaires à l'implantation sont mis en avant dans le sous-chapitre suivant.

Les deux instances de FEAP, micro et macro, qui se trouvent normalement sur deux processeurs différents, sont liées à travers l'interface CTL (Communication Template Library). Ce logiciel gère toute la communication entre l'instance de FEAP macro et les instances de FEAP micro, connectés à travers un réseau informatique. Le code CTL est développé à l'Université de Braunschweig, en Allemagne.

L'architecture du calcul, correspondant exactement à l'algorithme de résolution (voir la Figure 4.1) est présentée schématiquement dans la Figure 4.8.

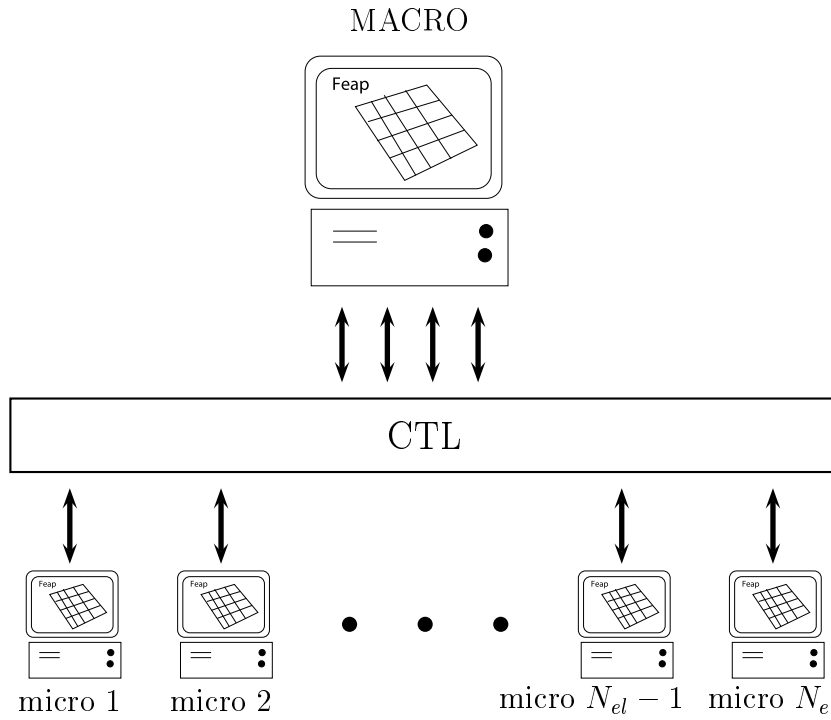


Fig. 4.8 – Schéma de la distribution des tâches micro sur les différents processeurs. La bibliothèque CTL gère la communication entre l'instance du code FEAP macro et les instances FEAP micro.

4.4.2 Code d'EF : FEAP

Le logiciel d'EF FEAP (Finite Element Analysis Program) est désigné principalement pour une utilisation dans la recherche, ou/et dans les applications, où on a besoin de modifications fréquentes afin d'aborder un domaine de problèmes nouveaux (voir [92]). Il permet de définir un modèle d'EF, la construction d'algorithmes de résolution, le post-traitement numérique et graphique des résultats. L'étape de la résolution est construite en utilisant le concept du langage de commandes, permettant à l'utilisateur d'adapter la stratégie de la résolution à ses besoins. Ce code donne la possibilité de définir des nouvelles définitions de lois de comportement, de formulations d'éléments et aussi de rajouter nos propres instructions au langage de commandes.

Ci-dessous nous présentons le contenu de la partie sur l'algorithme de résolution d'un fichier de données type pour le FEAP macro. La communication avec les processus FEAP micro se met en place à travers les instructions : "sznj,,dt" copie la valeur de l'incrément du temps, "sznj,,tim" incrémente le temps et "sznj" lance les calculs en parallèle avec les valeurs U^M actuelles. Cette dernière instruction permet la parallélisation. Une fois les calculs lancés, les résultats sont attendus au niveau de la sous-routine définissant l'élément fini, lors de l'assemblage des vecteurs de résidu et des matrices de raideur par l'instruction "tang,,1".

algorithme de résolution : FEAP MACRO

```

dt,, $\Delta t$  . . . définition de l'incrément de (pseudo)temps
sznj,,dt . . . transmission de l'incrément aux FEAP micro
loop,, $N_{Tinc}$  . . . boucle sur les incréments de temps
    time . . . incrémentation du temps
    sznj,,tim . . . incrémentation du temps sur les FEAP micro
    loop,, $M_{M\ iter}$  . . . itérations macro
        sznj . . . lancer les calculs sur les FEAP micro en parallèle  $\Rightarrow U_{n+1}^M$ 
        tang,,1 . . . récupérer les résultats micro  $\Leftarrow R_{n+1}^{el}, K_{n+1}^{el}$ 
                    et correction de  $U_{n+1}^M$  par la méthode de Newton
    next . . . fin des itérations macro
next . . . fin des incrémentations de temps

```

Dans chaque processus micro nous résolvons le problème d'EF pour les valeurs nodales données de l'élément correspondant. La partie la plus importante à rajouter au FEAP de base était la couche du calcul des multiplicateurs de Lagrange, Λ . L'algorithme de résolution micro pour le FEAP est présenté ci-dessous. Les instructions rajoutées sont les suivantes : "zace" attribue la mémoire aux tableaux concernant des multiplicateur de Lagrange, "lagm,mae" et "lagm,maf" assemblent les projecteurs E et F (voir l'équation (4.18)), "lagm,tan" construit la matrice tangente, "lagm,for" forme le résidu à partir des déplacements macro, U^M , appartenant aux nœuds de l'élément correspondant et "lagm,sol" corrige la valeur de Λ par la méthode de Newton. L'instruction "expo" communique le résultat en terme des valeurs du résidu et de la raideur, $R_{n+1}^{el}, K_{n+1}^{el}$, au FEAP macro à travers l'interface CTL.

algorithme de résolution : FEAP micro

```

zace . . . attribution de la mémoire aux champs rajoutés
lagm,mae . . . assemblage de la matrice de projection  $E$ , l'équation (4.18)
lagm,maf . . . assemblage de la matrice de projection  $F$ , l'équation (4.18)
loop,, $M_\lambda iter$  . . . itérations de compatibilité micro-macro
    inpu . . . définir les CAL en effort avec les valeurs,  $\Lambda_{n+1}$ 
    loop,, $M_m iter$  . . . itération micro
        tang,,1 . . . correction de  $U_{n+1}^m$  par la méthode de Newton
    next . . . fin des itérations micro
    lagm,tan . . . construction de la matrice tangente,  $D_\lambda^{(k)}$ 
    lagm,for . . . construction du résidu,  $\tilde{R}_\lambda^{(k)} \leftarrow U_{n+1}^M$ 
    lagm,sol . . . correction de  $\Lambda_{n+1}$  par la méthode de Newton
next . . . fin des itérations de compatibilité
expo . . . sortir le résidu et la raideur  $\Rightarrow R_{n+1}^{el}, K_{n+1}^{el}$ 

```

Nous rappelons que dans le cas de l'interface en déplacement, la résolution des multiplicateurs de Lagrange n'est pas nécessaire. Le problème micro est dans ce cas-là complètement déterminé par les déplacements macro, U^M . Ainsi, la couche de l'itération de compatibilité disparaît entièrement du schéma ci-dessus. Par contre, nous devons formuler la condensation statique des degrés de libertés micro dans l'instruction "expo".

4.4.3 Distribution de processus par CTL

CTL (Communication Template Library) est l'outil informatique permettant de réaliser la communication entre le processus FEAP macro et les processus FEAP micro (voir [75]). C'est un environnement de programmation qui sert aux applications du calcul distribué dans un sens général. Il permet de définir une nouvelle instance de simulation sans devoir changer ni recompiler la bibliothèque. Le code est basé sur l'allocation dynamique des sous-routines. Ces sous-routines sont déclarées en avance en gardant une forme assez générale pour permettre des applications très diverses. De cette manière l'instance du FEAP macro peut appeler les sous-routines définies dans CTL sans vraiment savoir ce qui se cache derrière. Ces sous-routines doivent être définies au niveau du FEAP micro et peuvent être changées et recompilées indépendamment du FEAP macro.

Les aspects de la communication par le réseau de différents processus sur les différents processeurs (ordinateurs) sont complètement cachés à l'utilisateur. Plusieurs protocoles de communication comme MPI, PVM où la prise direct, peuvent être utilisés.

4.5 Exemples d'analyse micro-macro

4.5.1 Introduction

Dans cette partie nous étudions plusieurs exemples d'analyse multi-échelle. D'abord, nous examinons la précision de notre approche pour chacune de formulation de l'interface dans un problème suffisamment petit, où la solution complètement micro est accessible. Des exemples plus grands sont abordés par la résolution micro-macro simulant une flexion trois points dans le domaine non-linéaire. Dans ces exemples, le rapport entre la dimension de la structure et celle de l'inclusion est ~ 100 et peut correspondre aux cas réels (par exemple, une structure en béton de $1m$ et la taille du granulat de $1cm$).

Dans toutes les analyses nous nous restreignons aux matériaux à une micro-structure biphasique régulière. La matrice obéit toujours au comportement élasto-plastique de Von Mises, les types de comportement des inclusions sont : i) élastique isotrope, faible raideur, ii) élastique isotrope, très raide et iii) endommageable.

Dans l'analyse de l'essai de flexion trois points pour une matrice élasto-plastique contenant des inclusions endommageables, nous proposons de combiner le modèle macroscopique introduit dans le chapitre 3.3, identifié dans le chapitre 3.3.10 et reformulé en contrainte en 3.4

Afin d'observer la sensibilité de la réponse de la structure à la nature aléatoire des comportements des phases, nous faisons une analyse Monte-Carlo en supposant une distribution Gaussienne des seuils de plasticité dans la matrice et d'endommagement dans les inclusions.

4.5.2 Comparaison avec l'analyse entièrement micro

Nous examinons l'approche multi-échelle proposée sur une structure hétérogène simple, montrée Figure 4.9. La structure est complètement encastree d'un côté et soumise aux déplacements ou aux efforts imposés de l'autre côté.

Puisque l'échantillon contient un nombre relativement modeste d'inclusions, nous pouvons utiliser le modèle d'EF micro sur la structure entière afin de comparer ces résultats avec ceux obtenus par la stratégie micro-macro en prenant des maillages macro différents. Nous utilisons trois maillages macro : 2×1 , 4×2 et 8×4 , qui correspondent aux nombres d'inclusions par élément macro suivants : 4×4 , 2×2 et 1×1 (voir la Figure 4.15).

La réponse des différentes approches est comparée sur la base du travail externe et de la dissipation plastique, comme dans le sous-chapitre précédent. D'abord nous faisons des tests sur une matrice quasi-poreuse, où les inclusions ont une très faible raideur. Les résultats pour ce matériau sont montrés Figure 4.12 pour les CAL en déplacement et pour les CAL en effort. Pour ce dernier cas, les distributions de la contrainte déviatorique sont présentées dans la Figure 4.11. Les mêmes tests sont évalués pour la matrice avec inclusions dures et les résultats présentés Figure 4.13.

Globalement tous les modèles micro-macro s'approchent des valeurs de référence, calculées avec le modèle micro complet. La seule exception concerne l'interface en

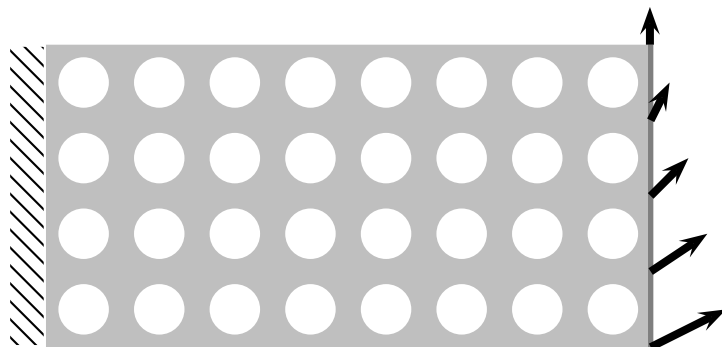


Fig. 4.9 – Structure hétérogène avec les CAL distribuées linéairement sur le bord à droite et complètement encastree à gauche. Les deux cas, déplacement imposé et de l'effort imposé, sont considérés dans l'analyse.

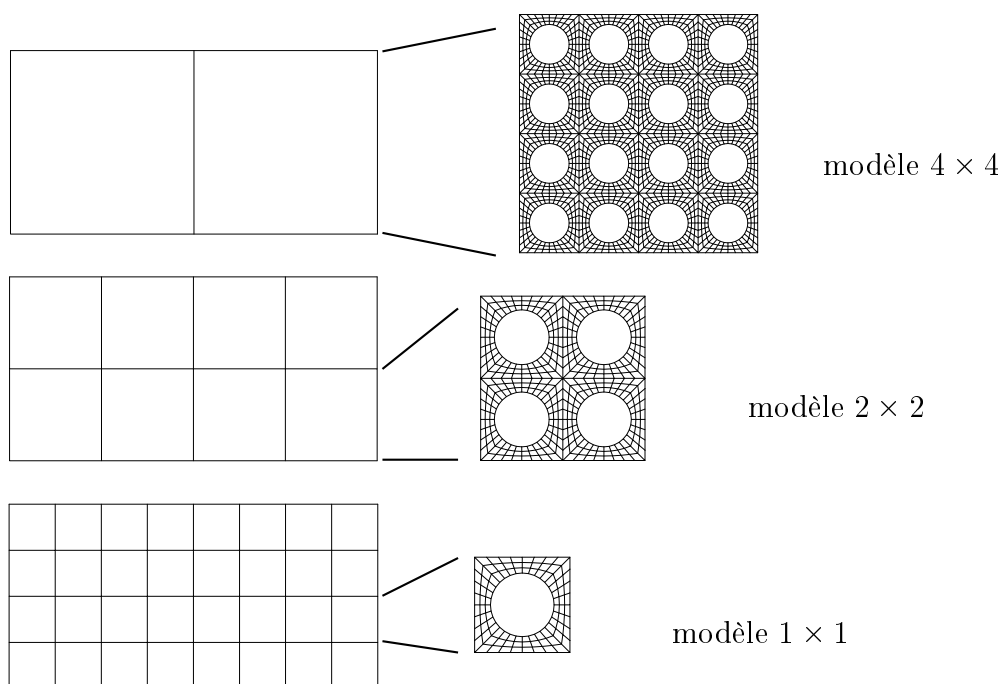


Fig. 4.10 – Trois types différents de modèles d'EF macro pour la même structure : 1×1 , 2×2 , 4×4 .

effort pour une seule inclusion (1×1) dans un élément macro. Cela n'est pas surprenant, car déjà dans les tests avec un seul domaine micro, ce modèle illustre un comportement beaucoup plus souple que les autres.

Néanmoins, il est remarquable que dans toutes les situations considérées, l'inter-

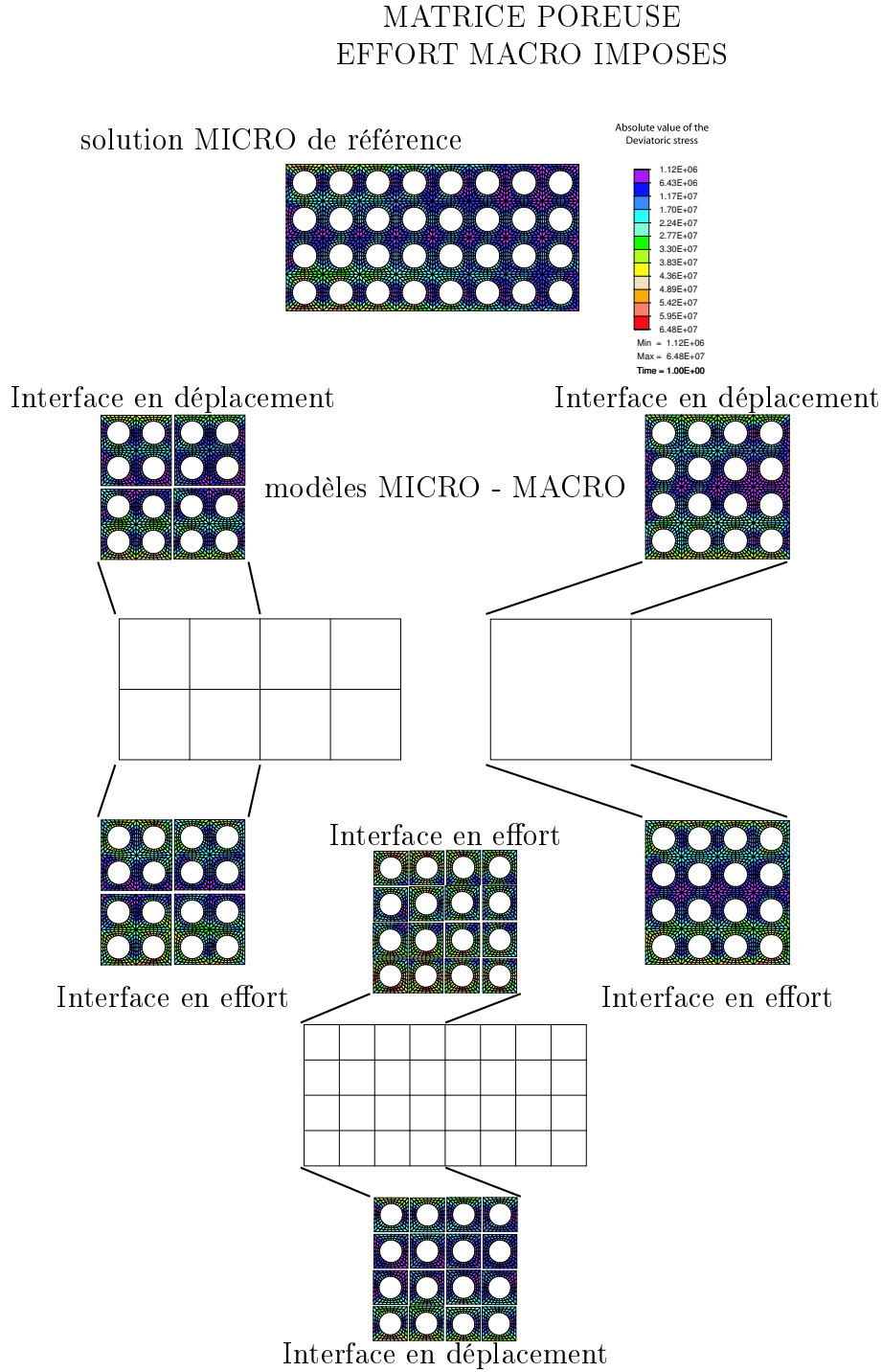


Fig. 4.11 – Isovaleurs de la contrainte effective, $\sqrt{dev\sigma : dev\sigma}$. Nous comparons la solution micro de référence avec les solutions micro-macro avec 1×1 , 2×2 et 4×4 inclusions par un élément macro pour les deux types d'interface, en déplacement ou en contrainte.

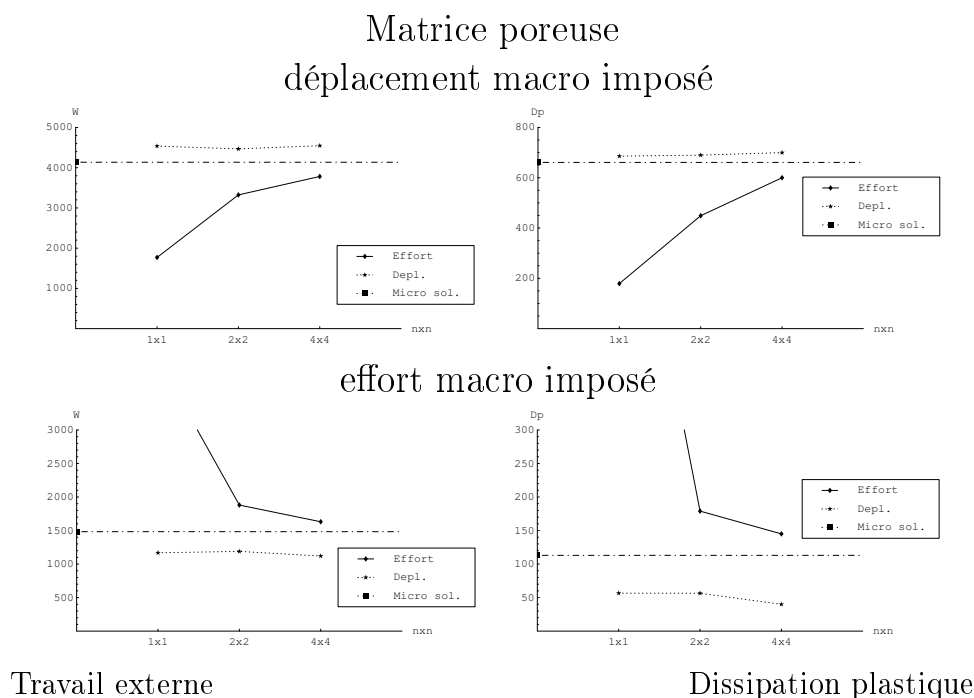


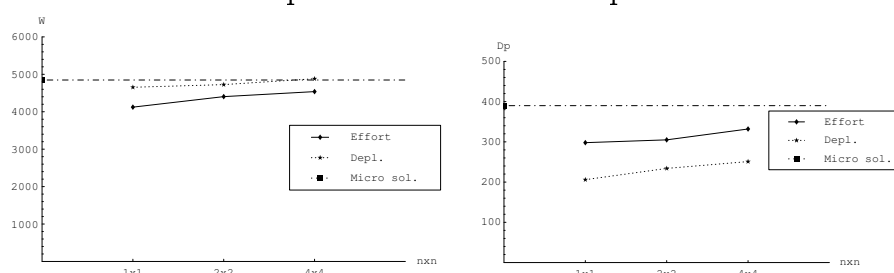
Fig. 4.12 – Valeurs du travail externe et de la dissipation plastique pour les différentes discrétisations micro-macro, comparées avec la solution entièrement micro. L'élément macro contient 1×1 , 2×2 ou 4×4 inclusions.

face en effort correspond à une sorte de borne inférieure et l'interface en déplacement à une borne supérieure par rapport au travail externe. Cette propriété est caractéristique aussi par rapport à la dissipation plastique, mais seulement pour la matrice poreuse.

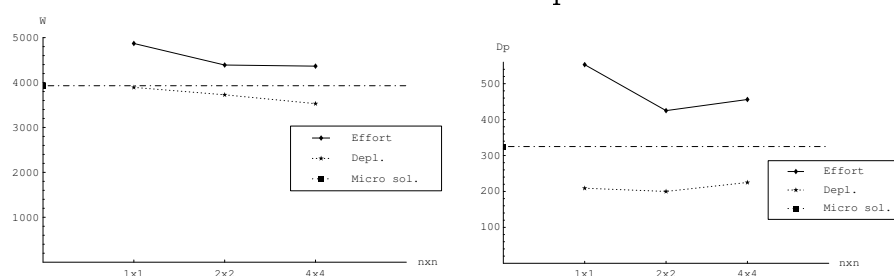
De plus nous pouvons remarquer que l'interface en déplacement rend le modèle moins sensible à la taille du sous-domaine micro, mais en même temps donne un résultat beaucoup moins précis que l'interface en effort pour certaines situations, comme celle de la matrice avec inclusions dures soumise aux efforts imposés, où la dissipation est mal représentée (voir la Figure 4.13).

Dans toutes les analyses nous observons la convergence quadratique pour un incrément de pseudo-temps suffisamment petit, typique pour la méthode de Newton que nous utilisons. Des taux de convergence caractéristiques de nos analyses sont présentés dans le Tableau 7.

Matrice avec inclusions quasi-rigides déplacement macro imposé



effort macro imposé



Travail externe

Dissipation plastique

Fig. 4.13 – Valeurs du travail externe et de la dissipation plastique pour les différentes discrétisations micro-macro, comparées avec la solution entièrement micro. L'élément macro contient 1×1 , 2×2 ou 4×4 inclusions.

Macro iter.	Energie du résidu Macro	Micro iter.	Energie du résidu micro
1	1.96×10^6	1	4.34×10^4
		2	6.70×10^0
		3	3.16×10^{-7}
		4	8.19×10^{-22}
2	2.11×10^4	1	1.55×10^6
		2	2.30×10^0
		3	7.53×10^{-3}
		4	1.86×10^{-14}
3	8.61×10^0	1	9.34×10^3
		2	2.61×10^{-3}
		3	6.94×10^{-14}
		4	6.06×10^0
4	7.75×10^{-6}	1	1.93×10^{-10}
		2	6.22×10^{-3}
		3	2.80×10^{-6}
		4	5.54×10^{-20}
5	7.45×10^{-17}	1	6.22×10^{-3}
		2	2.80×10^{-6}
		3	5.54×10^{-20}
		4	5.54×10^{-20}

Tableau 7. Taux de convergence global et local pour l'analyse micro-macro en élasto-plasticité pour un essai de la flexion trois points.

4.5.3 Flexion trois points : matériau poreux

Nous considérons dans cette partie une structure hétérogène du même type que celle présentés dans la partie précédente, mais avec un écart entre les échelles beaucoup plus grand (voir la Figure 4.14). Dans cet exemple nous supposons un rapport entre la dimension de la structure et la taille de l'inclusion d'environ ~ 100 , ce qui

est proche d'un cas réel (par exemple, une structure de $1m$ et la taille du granulat $1cm$). Afin de pouvoir décrire le comportement d'une telle structure à l'échelle fine, nous avons besoin d'au moins 500 000 degrés de liberté (voir la Figure 4.15). Les calculs aussi gros sont difficilement réalisable sur un seul processeur. Dans nos analyses nous utilisons 10 processeurs Pentium III ou IV sous la plateforme Linux. Le temps d'utilisateur correspondant à une telle analyse est de 3 – 4 heures.

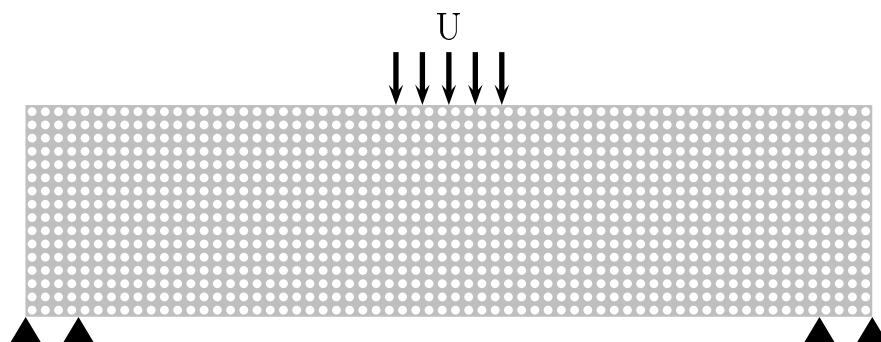


Fig. 4.14 – Structure hétérogène dans un essai de la flexion trois points, piloté en déplacement.

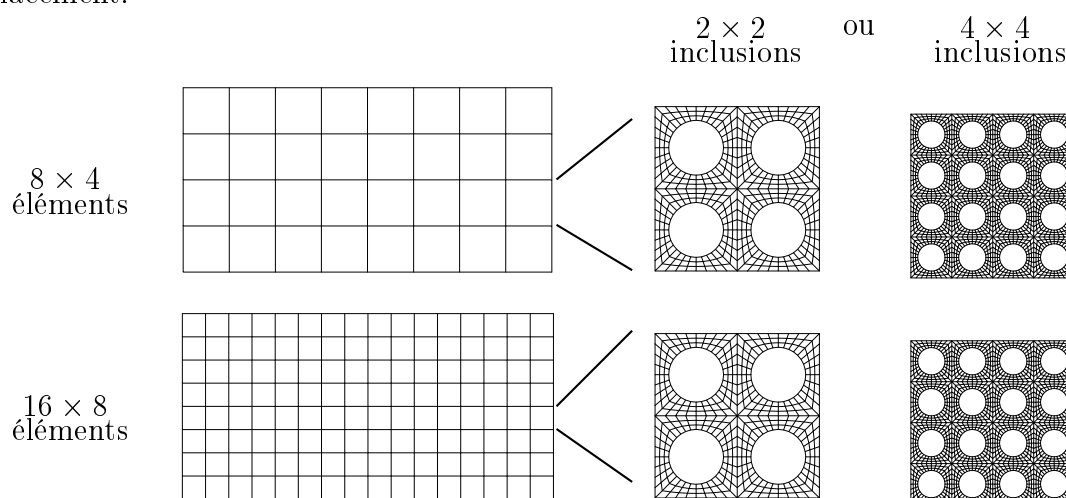


Fig. 4.15 – Trois types différents de modèles d'EF macro pour la même structure : 1×1 , 2×2 , 4×4 .

Nous étudions d'abord une structure à matrice quasi-poreuse pour des combinaisons différentes des maillages macro et des tailles d'inclusions. La structure est soumise à une flexion trois points, où le déplacement imposé est reparti sur une longueur représentant un huitième de la longueur totale (voir la Figure 4.14). Elle est modélisée par 8×4 ou 16×8 éléments finis macro. Dans chaque élément macro nous représentons la microstructure régulière par 1×1 , 2×2 ou 4×4 inclusions (voir la Figure 4.15).

D'après les résultats obtenus sur un seul domaine micro (dans le chapitre 4.3.4), les réponses doivent converger pour un maillage macro donné pour les deux types d'interfaces. D'autre part, le raffinement du maillage macro en gardant le même nombre d'inclusions dans chaque maille, doit aussi mener à une meilleure convergence par rapport aux quantités observées. Par conséquent, en combinant les deux raffinements du modèle, les deux types d'interfaces convergeraient également. Par contre, en changeant la taille de la maille macro et le nombre d'inclusion correspondant indépendamment, on ne résout plus le même problème mécanique, où les dimensions de la structure et des inclusions sont fixes. Néanmoins, cette analyse sert à vérifier si la convergence est obtenue comme attendue et quel type d'interface converge le mieux.

Matrice quasi-poreuse : flexion 3 points

type d'interface	no. d'él. macro	no. d'inclusions	W	$\mathcal{D}^p$
dép	8×4	1×1	$4.261 \cdot 10^4$	$2.565 \cdot 10^4$
dép	8×4	2×2	$3.813 \cdot 10^4$	$2.222 \cdot 10^4$
eff	8×4	4×4	$3.090 \cdot 10^4$	$1.799 \cdot 10^4$
eff	16×8	4×4	$2.968 \cdot 10^4$	$1.695 \cdot 10^4$
eff	8×4	2×2	$2.835 \cdot 10^4$	$1.617 \cdot 10^4$
eff	8×4	1×1	$2.171 \cdot 10^4$	$0.961 \cdot 10^4$

Tableau 8. Valeurs du travail externe et de la dissipation plastique pour des maillages macro, 8×4 et 16×8 , avec un nombre différent d'inclusions par maille, 1×1 , 2×2 et 4×4 .

Les valeurs du travail externe et de la dissipation plastique, obtenues par de différents modèles macro et micro sont présentés dans le Tableau 8. Dans ces résultats, les valeurs obtenues par l'interface en déplacement sont strictement supérieures aux résultats obtenus par l'interface en effort. Nous pouvons aussi en conclure un meilleur taux de convergence pour l'interface en effort. De plus, nous avons remarqué que la résolution des équations non-linéaires par la méthode de Newton (voir le chapitre 4.2) dans le cas de l'interface en déplacement convergeait moins bien et exigeait un incrément de temps à peu près deux fois plus petit.

Dans la Figure 4.16, nous présentons la convergence du raffinement des modèles macro et micro par rapport au comportement effort-déplacement, les valeurs de l'effort, F , et du déplacement, U , étant définis en fonction des moyennes sur la surface des déplacements imposés (voir la Figure 4.14).

Figure 4.17 nous présentons le même genre de courbes, $F - U$, pour ses modèles différents, les dimensions de la structure et de la taille des inclusions étant données, c'est-à-dire pour 16×32 inclusions dans la structure. Nous observons une importante influence du maillage macro. En prenant compte des résultats sur la convergence des réponses en fonctions du nombre d'inclusions par élément macro (voir le chapitre 4.3.4), où nous avons constaté que la qualité du résultat n'est pas très différente si l'on prend 2×2 ou 4×4 inclusions par élément macro, les résultats Figure 4.17 sont plutôt en faveur du maillage macro avec 16×8 éléments. Il semble que le maillage avec 8×4 éléments ne représente pas suffisamment bien les variations des champs à

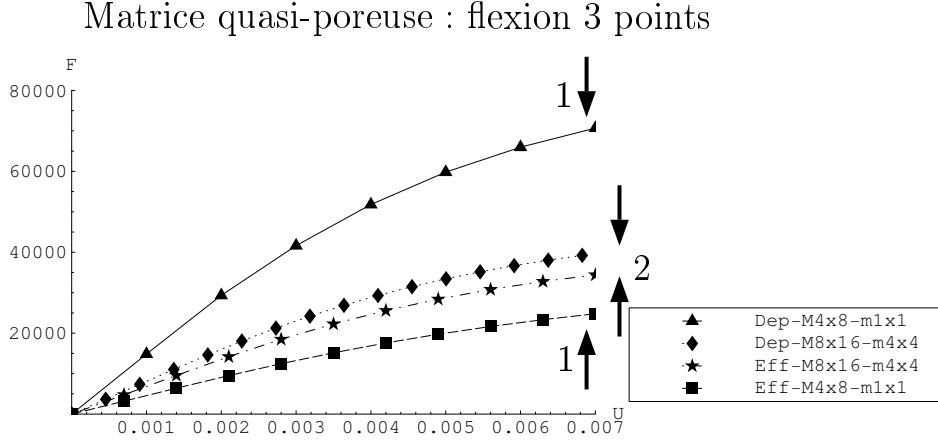


Fig. 4.16 – Convergence des courbes effort-déplacement en raffinant le maillage macro et en diminuant la taille des inclusions. Les résultats sur deux bornes sont pratiquement convergés pour le maillage raffiné. Les bornes supérieure (formulation en déplacement) et inférieure (formulation en effort) désignées par les flèches 1 correspondent au maillage macro de 8×4 éléments avec 1×1 inclusion par élément et celle désignées par les flèches 2 au maillage macro de 16×8 éléments avec 4×4 inclusions par élément.

l'échelle macro. Néanmoins, lors du calcul micro-macro on devrait s'assurer que les modèles aux échelles macro et micro soient assez fins.

4.5.4 Approche combinant les modèles micro et macro

Nous reprenons l'exemple étudié dans la partie 4.5.3 et remplaçons les pores par des inclusions endommageables, en gardant la même géométrie de la microstructure (voir la Figure 4.14), discrétisée de manière identique (voir la Figure 4.15). Les propriétés des phases sont supposées les mêmes que dans le chapitre 3.3.10, où nous avons identifié le modèle macroscopique pour ce type de microstructure. Le comportement du modèle macroscopique, déjà vérifié dans les chapitres 3.3.11 et 3.4.4, peut ainsi être testé pour un essai de flexion trois points.

D'abord, dans la Figure 4.19, nous traçons la courbe $F - U$ pour le problème avec 16×32 inclusions, appliquant des maillages macro, 8×4 (4×4 inclusions par maille) et 16×8 (2×2 inclusions par maille). Contrairement à ce que nous avons trouvé pour la matrice quasi-poreuse (voir la Figure 4.17, la réponse $F - U$ pour ce type de matériau dépend moins du maillage macro. Cela est surtout valable pour l'interface en effort, qui est presque insensible au maillage macro utilisé. Alors, nous pouvons supposer qu'elle donne le résultat exacte.

Les approches micro-macro, en déplacement et en effort, nous permettent de tes-

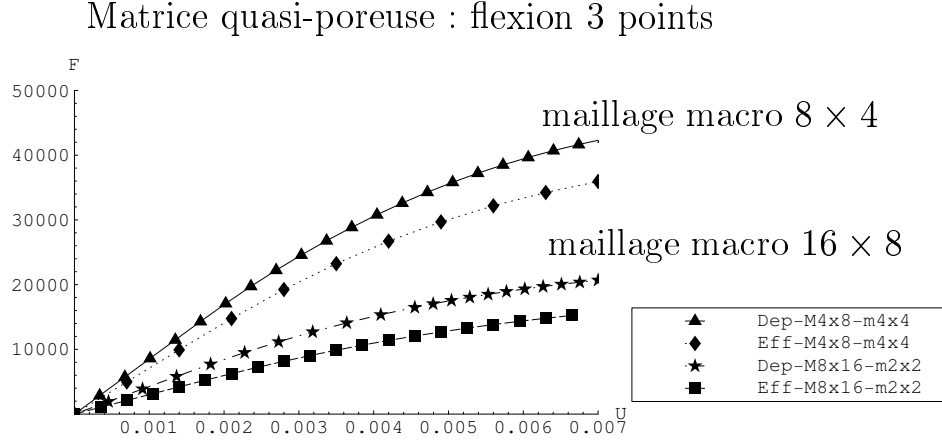


Fig. 4.17 – Comparaison des courbes effort-déplacement pour des maillages macro et des tailles d'inclusions différents. Chaque courbe appartient à une solution du même problème mécanique, avec 16×32 inclusions dans la structure (voir la Figure 4.14). Les deux maillages macro avec 8×4 et 16×8 éléments donnent une réponse assez différente.

ter la précision du modèle macroscopique, qui est identifié au chapitre 3.3.10, pour l'essai de flexion trois points. Nous pouvons utiliser le modèle macro dans la structure entière ou seulement dans une partie, en gardant une représentation fine de la microstructure seulement dans les zones à fort gradient des contraintes. L'approche combinant la représentation micro et macro est présentée schématiquement Figure 4.21.

Par rapport à la courbe effort-déplacement Figure 4.20, les valeurs du travail externe et de la dissipation plastique, nous observons une très bonne correspondance avec les résultats de l'approche micro-macro en effort. Un désaccord des deux approches est trouvé par rapport à la méthode multi-échelle en déplacement. Néanmoins, à partir du fait que la réponse de l'approche micro-macro est quasiment insensible au choix du maillage macro, nous estimons que la solution multi-échelle en effort est plus précise. En gardant l'approche par l'interface en effort dans les parties de la structure, où on attend une accentuation des phénomènes anélastiques, tout en gardant le modèle macro ailleurs, la réponse est presque identique à celle avec une représentation micro partout.

Dans le Tableau 9 nous pouvons établir que le modèle macro représente mal le phénomène d'endommagement, ce qui a déjà été observé dans les chapitres 3.3.10, 3.3.11 et 3.4.4. Cela est vrai aussi, mais moins, pour le modèle combinant les représentations micro et macro (voir la Figure 4.21). Evidemment, la structure s'endommage aussi dans les régions, où le gradient macroscopique de la contrainte est relativement faible, mais en gardant un comportement macro quasi-linéaire.

Matrice quasi-poreuse : flexion 3 points

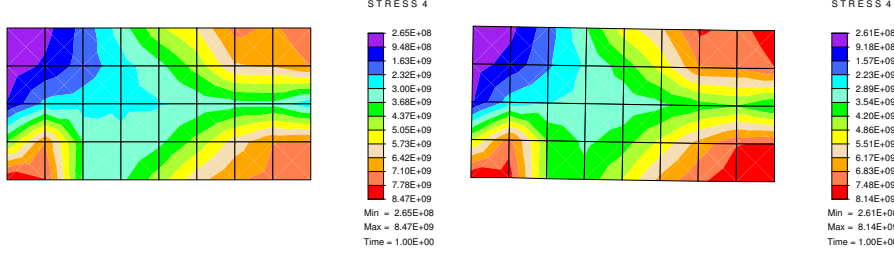


Fig. 4.18 – Isovaleurs de la partie déviatorique de la contrainte pour le même maillage macro et deux compositions différentes de la microstructure, 2×2 inclusions (à gauche) et 4×4 inclusions (à droite).

Matrice avec inclusions endommageables : flexion 3 points

modèle	W	$\mathcal{D}^p$	$\mathcal{D}^d$
Dép	$1.053 \cdot 10^5$	$0.419 \cdot 10^5$	180
Eff	$0.996 \cdot 10^5$	$0.458 \cdot 10^5$	183
Eff-Mac	$0.990 \cdot 10^5$	$0.453 \cdot 10^5$	131
Mac	$0.931 \cdot 10^5$	$0.396 \cdot 10^5$	94

Tableau 9. Comparaison des valeurs du travail externe, de la dissipation plastique et de la dissipation d'endommagement, obtenues par les modèles : i) micro-macro en déplacement (Dép) ii) micro-macro en effort (Eff) iii) macro (Mac) et iv) macro combiné avec micro-macro (Eff-Mac).

4.5.5 Comportement aléatoire des phases

Dans cette partie nous faisons des tests de flexion trois points d'une manière similaire aux analyses précédentes, sauf que nous introduisons un aspect aléatoire pour les comportements de la matrice et des inclusions. L'objectif de cet exemple est d'estimer l'influence d'un comportement aléatoire sur la réponse de la structure en terme de travail externe, de la dissipation plastique et de la dissipation d'endommagement. Nous effectuons les analyses avec la méthode micro-macro à interface en effort. L'approche structurée du filtrage par points de Gauss en contrainte (voir le chapitre 3.5) est choisie pour la représentation du comportement micro (voir la Figure 4.22). Cette approche est la plus efficace pour ce type de matériaux.

Dans le comportement des phases, seuls les seuils sont considérés comme aléatoires. Nous supposons que leur distribution suit une répartition Gaussienne avec $\frac{Var_{\sigma_y}}{\langle \sigma_y \rangle} = \frac{Var_{\sigma_f}}{\langle \sigma_f \rangle} = 0.2$, où $Var(\cdot)$ signifie l'écart type et $\langle \cdot \rangle$ la moyenne des seuils, cette dernière étant égale aux valeurs utilisées dans le sous-chapitre précédent. De plus, nous supposons que les valeurs de saturation dépendent directement des seuils initiaux, $\sigma_{y\infty} = 2\sigma_y$ et $\sigma_{f\infty} = 2\sigma_f$. Les variables stochastiques σ_y et σ_f sont considérées comme parfaitement corrélées à l'intérieur d'une cellule, ce qui veut dire que le seuil de la plasticité y est le même partout et le seuil d'endommagement le même dans toutes les inclusions, lui aussi. Par contre, les paramètres d'une cellule sont

Matrice avec inclusions endommageables : flexion 3 points

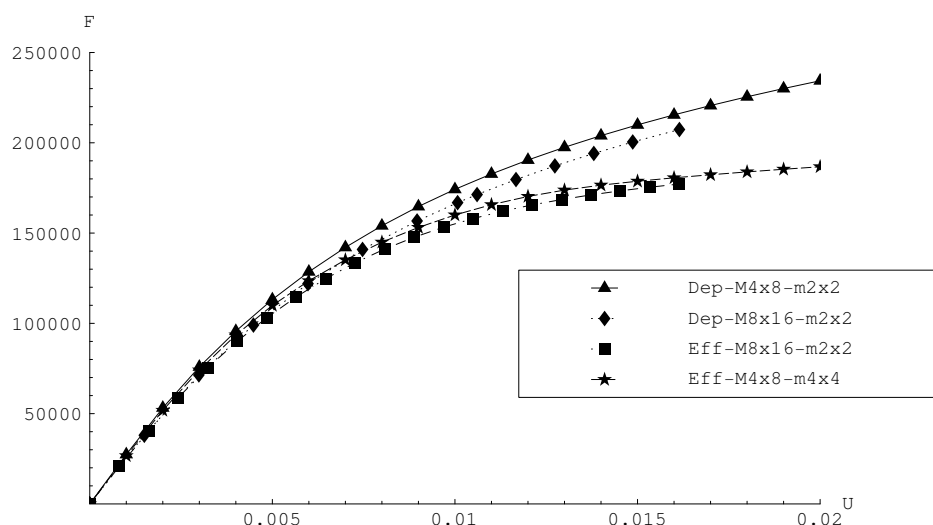


Fig. 4.19 – Comparaison des courbes effort-déplacement pour les maillages macro et les tailles des inclusions différents. Chaque courbe appartient à une solution du même problème mécanique, avec 16×32 inclusions dans la structure (voir la Figure 4.14).

Matrice avec inclusions endommageables : flexion 3 points

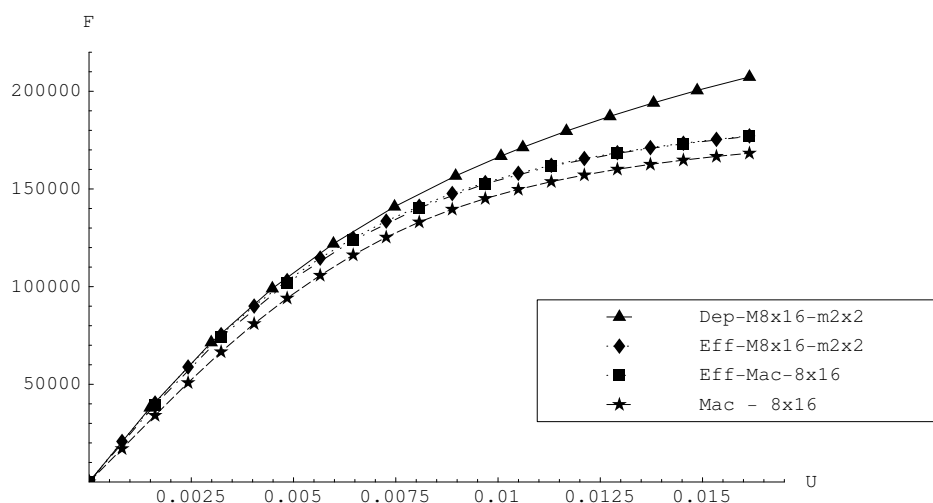


Fig. 4.20 – Comparaison des courbes effort-déplacement pour les modèles : i) micro-macro en déplacement (Dep) ii) micro-macro en effort (Eff) iii) macro (Mac) et iv) macro combiné avec micro-macro (Eff-Mac).

complètement decorrélés avec les paramètres des cellules voisines.

Nous avons fait 105 analyses de l'essai de flexion trois points, dont les résultats sont présentés dans le Tableau 10 en terme de distributions probabilistes des quantités observées. Malgré un écart type relatif important des seuils ($= 20\%$), les

Matrice avec inclusions endommageables : flexion 3 points

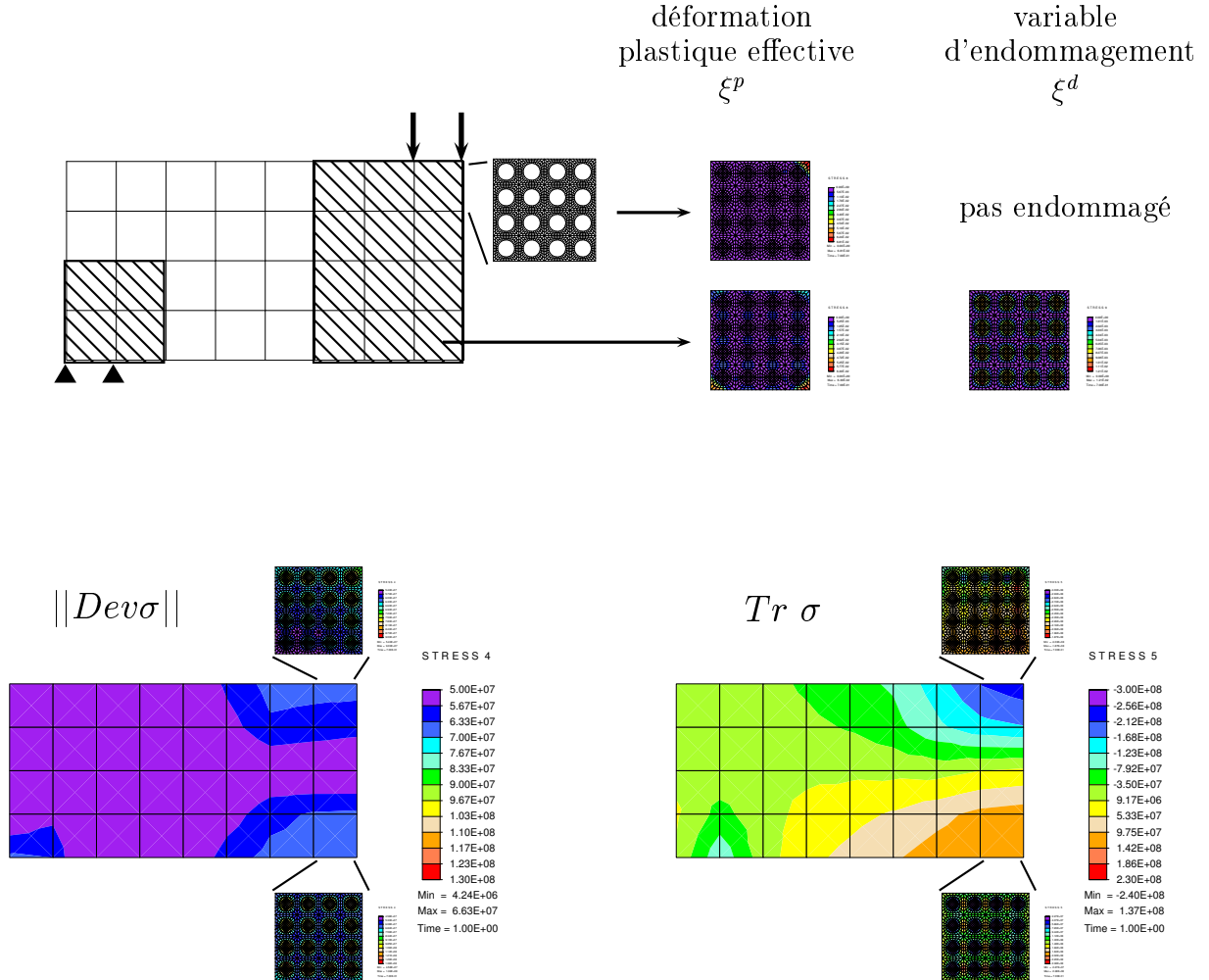


Fig. 4.21 – Modélisation d'une structure hétérogène par un modèle combinant les représentations microscopique et macroscopique. Dans les zones à fort gradient de contrainte (la région rayée) nous introduisons un maillage fin tenant compte de la microstructure exacte. Ailleurs, nous appliquons le modèle élasto-plastique-endommageable présenté au chapitre 3. Les solutions locales dans les deux éléments sont comparées avec les champs moyennés dans toute la structure. De plus, les zones les plus plastifiées et endommagées sont montrées dans les deux éléments choisis. Dans l'élément sollicité principalement en compression l'endommagement n'est pas activé.

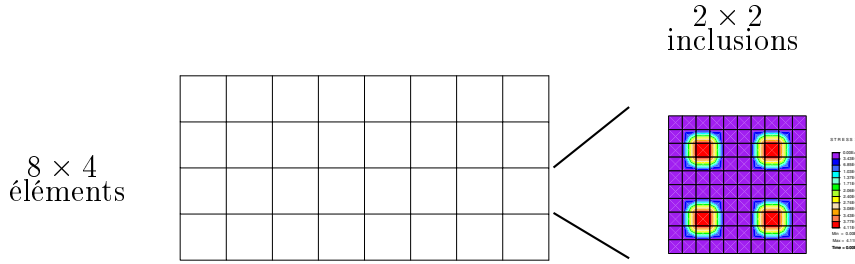


Fig. 4.22 – Modèle pour la structure hétérogène, où les seuils anélastiques des phases, plastique et endommageable, sont aléatoires et obéissent à une distribution Gaussienne. La microstructure est représentée par le modèle structuré du filtrage par points de Gauss en contrainte (voir le chapitre 3.5). 2×2 inclusions sont considérées dans chaque élément macro.

résultats ont un écart type beaucoup plus petit (4% pour le travail externe et la dissipation plastique et 10% pour la dissipation d'endommagement). De plus, le pic de la distribution correspond à peu près à la moyenne, qui elle-même s'accorde bien avec les valeurs obtenues par les moyennes de la distribution des paramètres.

Nous pouvons alors conclure que la nature stochastique des seuils anélastiques des différentes phases influence relativement peu les quantités énergétiques observées.

Etude probabiliste : flexion 3 points

moment statistique	W	$\mathcal{D}^p$	$\mathcal{D}^d$
$\langle \cdot \rangle$	$0.995 \cdot 10^5$	$0.472 \cdot 10^5$	207
$\frac{Var(\cdot)}{\langle \cdot \rangle}$	0.042	0.043	0.097

Tableau 10. Valeurs de la moyenne, $\langle \cdot \rangle$ et de l'écart type relatif, $\frac{Var(\cdot)}{\langle \cdot \rangle}$, pour le travail externe, W , la dissipation plastique, $\mathcal{D}^p$, et la dissipation d'endommagement, $\mathcal{D}^d$. Les valeurs correspondent bien aux valeurs obtenues par la moyenne des paramètres de seuils : $W = 0.990 \cdot 10^5$, $\mathcal{D}^p = 0.456 \cdot 10^5$ et $\mathcal{D}^d = 204$.

4.5.6 Vers une stratégie multi-échelle adaptative

Le principe variationnel utilisé dans la formulation de l'interface entre les échelles (voir la partie 4.2) laisse en principe beaucoup de liberté dans le choix de l'espace d'interpolation des multiplicateurs de Lagrange. Nous considérons dans la partie 4.3 les deux cas extrêmes, la formulation en déplacement et la formulation en effort.

Les exemples numériques présentés dans le sous-chapitre 4.5 nous apprennent qu'aucun des deux choix n'est meilleur que l'autre pour toutes les situations, de comportement des phases et des CAL macro différents, si les phénomènes fortement anélastiques sont activés. Toutefois, cela s'explique bien parce que chaque approche, en déplacement ou en effort, part de l'hypothèse qu'un des champs est linéaire par segment sur la surface de l'interface, que ce soit le déplacement ou l'effort. Ces hypothèses sont en général fausses et cela dépend fortement de la situation particulière si l'un est plus justifié que l'autre. Par exemple, pour le test de flexion trois

Distribution probabiliste pour la flexion trois points

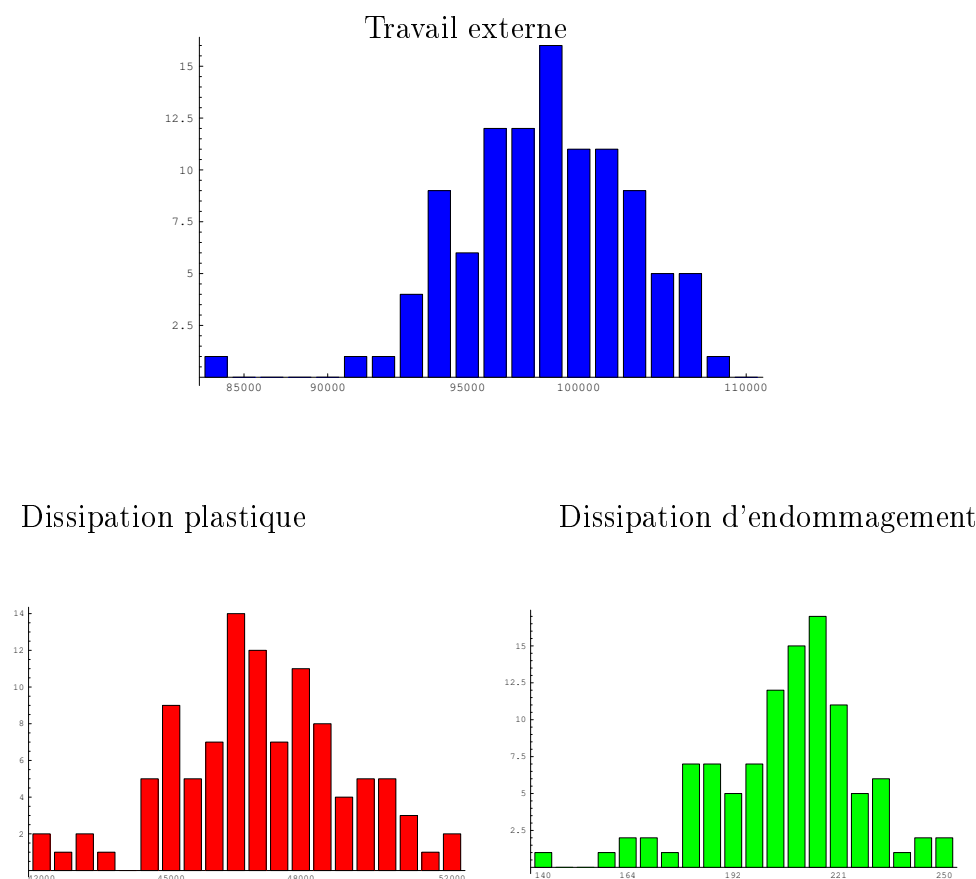


Fig. 4.23 – Distributions du travail externe, de la dissipation plastique et de la dissipation d'endommagement pour une distribution Gaussienne des seuils anélastiques.

points, l'interface en effort semble mieux adaptée, mais l'interface en déplacement peut dominer un exemple où les CAL macro sont différents.

Néanmoins, les deux hypothèses ne sont pas tout à fait symétriques, puisque dans l'interface en effort, les efforts sont effectivement linéaires sur le bord, mais ils ne sont pas forcément continus d'un sous-domaine micro à l'autre. Ils le sont, par contre, dans les situations des distributions de contrainte linéaires, voire constantes. En même temps la continuité dans le sens faible des déplacements est établie. Alors que dans l'autre formulation de l'interface, les déplacements sont linéaires au bord d'un sous-domaine et continues par rapport au sous-domaine voisin, mais aucune

condition soutenant la continuité des efforts n'est mise en place et cette formulation n'est pas capable de représenter les champs de contrainte linéaires ou constants d'une manière exacte. La différence entre la formulation en déplacement et en effort est similaire à celle entre la formulation d'un élément fini en déplacement et en contrainte dans le cadre de la MEF classique (voir le chapitre 3).

Cependant, nous pensons que la formulation de l'interface micro-macro peut être améliorée en trouvant une bonne alternative entre l'approche en déplacement et en effort. D'une part une amélioration pourrait être envisagée en restant dans le même cadre de la discrétisation des modèles EF micro et macro. Nous pourrions remplacer le principe des multiplicateurs de Lagrange par une approche, qui serait conceptuellement similaire à la méthode de Lagrangien augmenté (voir par exemple [2]). Ceci permettrait de retenir à la fois une hypothèse sur le champ de déplacement et sur le champ de contrainte pour ainsi construire une meilleur couplage entre les échelles.

Une autre piste serait de raffiner le maillage macro en gardant le même modèle micro. Ainsi, on augmenterait le nombre de nœuds par élément macro. Cette démarche rendrait possible une modélisation adaptative automatique. Nous avons remarqué que déjà dans la forme actuelle, les deux formulations représentent une sorte de bornes supérieure et inférieure et ainsi directement une estimation de l'erreur. Il serait convenable d'approfondir cet aspect de façon théorique, en s'appuyant sur les travaux d'estimateur d'erreur dans le cadre plus classique de la MEF (voir par exemple [89], [59]).

4.5.7 Conclusion

Dans cette partie nous avons formulé une interface micro-macro en s'appuyant sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange localisés (voir [78], [79]). Ce cadre nous permet de définir des différents types d'interface micro-macro. En identifiant la discrétisation des champs micro avec l'interpolations des multiplicateurs de Lagrange, nous aboutissons à la formulation en déplacement, équivalente à celle introduite directement dans le chapitre 2.3.

D'autre part, en interpolant les multiplicateurs de Lagrange comme les déplacements macro, nous obtenons l'interface en effort. En général, nous ne sommes pas capables de dire a priori laquelle des deux formulations, en déplacement ou en effort, est la mieux adaptée pour un problème donné. Néanmoins, la formulation en effort est toujours plus performante pour des maillages macro plus grossiers et des gradients de contrainte plus importants, comme pour un essai de flexion trois points. A notre avis, une approche augmentant la performance en combinant la formulation en déplacement et en effort peut être mise en place. Nous proposons quelques réflexions sur une méthode adaptative automatique dans le sous-chapitre 4.5.6.

Un des avantages essentiels de notre stratégie multi-échelle est l'aspect parallélisable de l'algorithme de résolution utilisé. Ainsi, l'implantation pour un calcul distribué en parallèle peut se faire d'une manière relativement facile et sert pour les analyses micro-macro de structures avec un rapport réaliste entre les échelles.

Chapitre 5

Vers l'optimisation de la microstructure et les problèmes inverses

Dans ce travail nous développons une approche multi-échelle qui permet de prendre directement en compte le couplage entre deux échelles, au niveau de la structure et au niveau des hétérogénéités. La compréhension de l'interaction entre ces échelles peut être intéressante pour deux types d'application.

D'une part, à partir de l'information sur le comportement macroscopique nous pouvons déduire les modes de comportement à l'échelle de la microstructure. En connaissant ce comportement micro, nous maîtriserions les réponses macroscopiques des structures fabriquées du même matériau pour une gamme plus large de sollicitations.

D'autre part, en connaissant les comportements de différentes phases à l'échelle de la microstructure, nous pourrions nous intéresser à sa géométrie et à la distribution afin d'obtenir le comportement désiré pour la structure à l'échelle macroscopique.

Toutefois, étant tous deux identifiés comme un problème inverse et comme un problème d'optimisation, les deux cas présentent un problème très similaire du point de vue de la formulation et des méthodes de résolution correspondantes (voir par exemple [82], [36]). Par exemple, nous pouvons définir les deux cas en terme de la minimisation d'une fonction coût, $\mathcal{J}(\cdot)$, sous les contraintes, $G(\cdot) = 0$, comme

$$d = \{d^*; \min_{G(\cdot)=0} \mathcal{J}(d^*, \cdot)\}, \quad (5.1)$$

où d désigne les paramètres à optimiser, qui pourrait représenter les paramètres de comportement des phases dans le cas des problèmes inverses ou les paramètres de forme dans un cas de l'optimisation des formes d'inclusions. Nous présentons ici le début d'un travail pour ce dernier cas, où une forme elliptique des inclusions est supposée (voir la Figure 5.1).

Les contraintes du problème de l'optimisation dans l'équation (5.1), $G(\cdot)$, désignent les équations du problème mécanique, c'est-à-dire les équations d'équilibre, de compatibilité micro-macro et des lois d'évolutions de la plasticité et/ou de l'endommagement. Dans la suite, nous nous restreignons au comportement élasto-plastique,

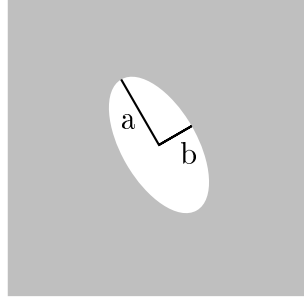


Fig. 5.1 – Cellule type représentant la microstructure. Les longueurs axiales de l'ellipse, a et b , comme aussi l'angle de rotation de l'ellipse peuvent représenter les paramètres de forme dans un problème d'optimisation.

ce qui ne nuit pas énormément à la généralité de la démarche. Cela peut s'écrire,

$$G(d; u^M, u^m, \xi^p, \epsilon^p) \rightarrow \begin{pmatrix} \text{div } \sigma(u^m, \epsilon^p) = 0; \sigma \cdot n|_{\partial} = \bar{t} \\ u^M = u^m \\ \Phi(\sigma, q^p) \dot{\gamma}^p = 0 \\ \dot{\xi}^p - \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi}{\partial q^p} = 0 \\ \dot{\epsilon}^p - \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

où nous supposons également que $\sigma(\epsilon, \epsilon^p) = C(\epsilon - \epsilon^p)$ et $\epsilon = \nabla^S u^m$, C étant le module élastique.

Ensuite, nous définissons le problème contraint dans l'équation (5.1) en tant qu'un problème sans contraintes par la méthode de Lagrange. Cette approche est, par exemple, utilisée dans [69] seulement pour le calcul des sensibilités et non pas pour la définition du problème d'optimisation. Alors, nous formulons le problème comme,

$$\mathcal{L} := \int_0^T \int_{\Omega} [\mathcal{J}(d; \cdot) + \lambda(x, t) \cdot G(d; u, \xi^p, \epsilon^p)] dV dt = \text{stat}, \quad (5.3)$$

où les multiplicateurs de Lagrange sont,

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{eq} \\ \lambda^{mmm} \\ \lambda_p \\ \lambda_{\xi} \\ \lambda_{\epsilon^p} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Nous imaginons la forme précise de la fonction coût, correspondant à la dissipation plastique. On pourrait chercher alors la forme optimale des inclusions pour que la

dissipation plastique soit minimale. Par exemple,

$$\mathcal{J}(\sigma, \xi^p, \dot{\xi}^p, \dot{\epsilon}^p) = \sigma \dot{\epsilon}^p + q^p(\xi^p) \dot{\xi}^p. \quad (5.5)$$

La formulation faible provenant de l'équation (5.3) peut se diviser en trois groupes,

Equations d'équilibre, micro et macro

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla^S \delta \lambda_{eq} \sigma(u, \epsilon^p) dV - \int_{\partial\Omega} \delta \lambda_{eq} t^{ext} dS \right) dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Gamma} \delta \lambda^{mm} (u^M - u^m) dS dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \lambda_p \Phi(\sigma, q^p) \dot{\gamma}^p dV dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \lambda_{\xi} \left(\dot{\xi}^p - \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi}{\partial q^p} \right) dV dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \lambda_{\epsilon^p} \left(\dot{\epsilon}^p - \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) dV dt &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Conditions sur les variables d'état

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ - \int_{\Gamma} \delta u^m \lambda^{mm} dS + \int_{\Omega} \delta u^m \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \sigma} + \nabla^S \lambda_{eq} \right. \right. & (5.7) \\ \left. \left. + \dot{\gamma}^p \left(\lambda_p \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} - \lambda_{\xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^p \partial \sigma} - \lambda_{\epsilon^p} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} \right) \right] \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial u} dV \right\} dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Gamma} \delta u^M \lambda^{mm} dS dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \xi^p \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi^p} + \left(\lambda_p \frac{\partial \Phi}{\partial q^p} - \lambda_{\xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^{p2}} - \lambda_{\epsilon^p} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma \partial q^p} \right) \dot{\gamma}^p \frac{dq^p}{d\xi^p} \right] dV dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \epsilon^p \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon^p} + \nabla^S \lambda_{eq} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon^p} \right] dV dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \dot{\xi}^p \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\xi}^p} + \lambda_{\xi} \right] dV dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}^p \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\epsilon}^p} + \lambda_{\epsilon^p} \right] dV dt &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \dot{\gamma}^p \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\gamma}^p} + \lambda_p \Phi - \lambda_{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial q^p} - \lambda_{\epsilon^p} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] dV dt &= 0 \end{aligned}$$

Conditions sur les paramètres de forme

$$\delta d \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial d} + \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \sigma} + \nabla^S \lambda_{eq} + \lambda_p \dot{\gamma}^p \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} - \lambda_{\xi} \dot{\gamma}^p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^p \partial \sigma} \right. \right. \quad (5.8)$$

$$\left. \left. - \lambda_{\epsilon^p} \dot{\gamma}^p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial d} + \frac{\partial(\nabla^S \lambda_{eq})}{\partial d} \sigma \right] dV \, dt = 0$$

Nous envisageons de résoudre le système ci-dessus de la manière suivante. Le premier groupe dans (5.7) représente les équations d'équilibre d'un problème mécanique, et peut être résolu comme dans le chapitre 4. Le deuxième groupe dans (5.8) est un système linéaire pour les variables λ , qui peuvent être déterminées, une fois les équations d'équilibre résolues. L'équation (5.9) serait la dernière à résoudre et fournirait les valeurs optimales des paramètres de forme.

Chapitre 6

Conclusion

Le présent travail est mis dans le contexte de la modélisation des structures hétérogènes, où les échelles de la structure et des hétérogénéités sont fortement couplées. Les approches classiques d'homogénéisation analytique (voir par exemple [8]) ou phénoménologique (voir par exemple [61]) y sont mal adaptées, lorsque les échelles ne sont pas complètement séparées et/ou le comportement est fortement non-linéaire. Or, les analyses dans ces situations sont indispensables pour comprendre le comportement des structures sous les sollicitations extrêmes, pouvant mener jusqu'à la rupture, afin de permettre une conception durable, imposant une maîtrise raffinée du comportement non-linéaire (par exemple l'espacement des fissures). Dans ce travail nous avons réussi à apporter des clarifications sur les aspects pertinents à la formulation théorique et à la modélisation numérique de ce genre de problèmes.

Les démarches et les avantages principaux de la stratégie multi-échelle proposée sont expliqués ci-dessous.

- D'une part, dans la formulation proposée, nous réduisons le modèle par rapport à la formulation entièrement microscopique. D'autre part, cette réduction se fait à travers les conditions linéaires soit en déplacement soit en effort et non pas à travers les conditions d'interface constantes du champ de déformation, comme dans [27]. Cet enrichissement de l'interface permet de modéliser un couplage fort entre les échelles et nous ne suivons pas l'hypothèse habituelle selon laquelle les échelles sont infiniment séparées, ce qui permet la modélisation des structures hétérogènes soumises aux sollicitations extrêmes.
- La formulation variationnelle originale du problème, faisant appel à la méthode des multiplicateurs de Lagrange localisés (voir [78], [79]), permet la définition d'une interface micro-macro en déplacement ou en effort. De plus, elle représente une base formelle, sur laquelle on pourrait développer une stratégie adaptative de modèles et améliorer ainsi l'approximation de l'homogénéisation numérique pour chaque problème particulier.
- L'algorithme de résolution appliqué est très bien adapté pour exploiter l'architecture de logiciels de calcul distribué en parallèle sur plusieurs processeurs. Alors, nous utilisons cette approche multi-échelle avec une représentation très fine de la microstructure pour des analyses de structures avec un écart réaliste entre les échelles.

-
- L’implantation de la méthode ne modifie pas l’architecture globale des codes de calcul EF. A la différence de la plupart des autres approches de l’homogénéisation numérique, la nôtre permet une implantation relativement facile pour tous les codes EF classiques.
 - Notre méthode est beaucoup mieux adaptée pour les problèmes non-linéaires, où les échelles sont fortement couplées, que les approches classiques d’homogénéisation. Néanmoins, ces dernières peuvent être utilisées dans les parties de la structure, où les gradients de contraintes restent modestes. On peut ainsi construire pour un essai complexe une stratégie micro-macro, capable de profiter des avantages des deux approches, qui sont la précision de la représentation micro et l’efficacité des modèles macroscopiques, dans une même analyse.

Nous démontrons l’efficacité de la méthode en considérant un exemple de la flexion trois points, où l’écart supposé entre les échelles vaut ~ 100 , ce qui est réaliste pour de nombreuses applications (par exemple, une éprouvette en béton de $\sim 1m$ contient de granulats $\sim 1cm$). Parmi les deux formulations possibles de l’interface, qui ont été étudiées, celle en effort paraît un meilleur choix par rapport à la formulation en déplacement. Toutefois, cela n’est pas valable dans toutes les situations et, à notre avis, une approche adaptative basée sur le même principe variationnel devrait être mise en place.

En plus du développement de la stratégie micro-macro, l’autre aspect important dans ce travail concerne la représentation de la microstructure, qui peut être divisée en deux groupes : l’approche exacte et l’approche structurée.

- Approche exacte
 - Dans l’approche exacte le maillage EF est conforme à la microstructure dans la mesure où l’interface entre les phases ne traverse aucun élément (voir par exemple [74], [11]). Cette approche est classique et donc bien maîtrisée. Alors, deux formulations variationnelles de la MEF, en déplacement et en contrainte, sont comparées. Dans le contexte de l’interpolation bilinéaire des éléments finis 2D, nous démontrons une forte supériorité de la formulation en contrainte.
 - Néanmoins, pour une microstructure complexe avec de détails relativement petits, la génération du maillage peut être difficile et même avec un mailleur très puissant, le nombre de degrés de liberté risque d’être plus grand que ce que l’on pouvait souhaiter. Voilà, qui peut motiver l’étude des approches alternatives.
- Approche structurée
 - Une approche alternative à l’approche exacte, consiste à utiliser un maillage EF structuré, qui n’est pas forcément conforme à la microstructure et permet que l’interface entre les phases traverse des éléments finis.
 - Dans le cadre de l’approche structurée nous nous intéressons surtout aux approches locales, où l’on n’augmente pas le nombre de degrés de libertés globales.
 - Une approche locale possible est le filtrage par points de Gauss, dans les deux formulations EF, en déplacement et en contrainte. Dans ce cadre, la

formulation en déplacement est plus souvent appliquée (voir par exemple [99], [29]). Or, nous démontrons que la formulation en contrainte donne de meilleurs résultats dans la plupart des cas. Par contre, elle n'est pas bien adaptée aux matériaux poreux, n'étant pas capable de modéliser la contrainte nulle dans les pores.

- La méthode en déplacement peut être améliorée par la technique de modes incompatibles, où la cinématique d'un élément est localement enrichie, pour qu'elle puisse mieux représenter l'interface entre les phases. L'approche par des modes incompatibles est considérablement plus performante que l'approche en déplacement simple.

Afin d'avoir un rôle actif par rapport à la conception d'un matériau réel, notre modèle multi-échelle devrait être étendu dans deux directions : calcul probabiliste et problème d'optimisation.

- Dans ce travail, nous émettons l'hypothèse, que la microstructure est parfaitement connue. Cela peut être valable pour des matériaux où les procédés de fabrication sont parfaitement maîtrisés. Or, cette hypothèse se justifie assez rarement dans les applications du génie civil, où la distribution des phases dans le matériau est très aléatoire. Il serait plus convenable d'utiliser les approches probabilistes dans la description de la microstructure et aussi dans sa modélisation. Néanmoins, pour la plupart des méthodes probabilistes (voir par exemple [67]) la résolution de la partie mécanique ne changent pas. Donc, les approches de la modélisation développées ici pourraient être étendues dans le cadre des méthodes des éléments finis stochastiques. Nous introduisons un aspect aléatoire à travers les seuils anélastiques des différentes phases, en supposant la géométrie de la microstructure déterministe.
- En ce qui concerne les perspectives envisagées, nous avons présenté le début du travail sur l'extension vers les problèmes d'optimisation. Ce type d'analyse est nécessaire pour les identifications des paramètres du comportement de la microstructure à partir des essais macroscopiques et aussi pour la recherche d'une microstructure qui rendrait optimal le fonctionnement de la structure.

Bibliographie

- [1] P. Alart, M. Barboteu, P. Le Tallec, and M. Vidrscu. Méthode de schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non symétriques. C.R. Acad. Sci. Series I - Math., 331 (5) :399–404, 2000.
- [2] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg, 92 :353–375, 1991.
- [3] J.L. Batoz and G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis. vol I Solides élastiques. Hermes Science, 1990.
- [4] T. Belytschko, N. Moes, S. Usui, and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. Int. J. Numer. Methods Eng., 50, 2001.
- [5] A. Benallal, R. Billardon, and L. Doghri. An integration algorithm and the corresponding tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. Commun. Numer. Methods Eng., 4 :731–740, 1988.
- [6] A. Benssousan, J.L. Lions, and G. Papanicoulau. Asymptotic analysis for periodic structures. North Holland, Amsterdam, 1978.
- [7] M. Berveiller and A. Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystal. J.Mech.Phys.Solids, 6 :325–344, 1979.
- [8] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. Homogénéisation en mécanique des matériaux, volume I & II. Hermes-Science, Paris.
- [9] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. Homogénéisation en mécanique des matériaux 2. Hermes-Science, Paris, 2001.
- [10] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, and A.T. Vassilev. Uzawa type algorithms for nonsymmetric saddle point problems. Math.Comp., 69 :667–689, 2000.
- [11] J.R. Brockenbrough, S. Suresh, and H.A. Wienecke. Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers : geometrical effects of fiber distribution and shape. Acta metall.mater., 39(5) :735–752, 1991.
- [12] V.A. Buryachenko, F.G. Rammerstorfer, and A.F. Plankensteiner. A local theory of elastoplastic deformation of two-phase metal matrix random structure composites. J.Appl.Mech., 69 :489–496, 2002.
- [13] I. Carol and K. Willam. Application of analytical solutions in elasto-plasticity to localization analysis of damage models. In Proceedings COMPLAS 5 Computational Plasticity, pages 714–719, Barcelona, (eds. D.R.J. Owen et al.), 1997. Pineridge Press, Swansea.

- [14] P. Ponte Castaneda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : i-theory, ii-applications. *J.Mech.Phys. Solids*, 50 :737–782, 2002.
- [15] J.L. Chaboche, S. Kruch, J.F. Maire, and T. Potter. Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites. *Int.J. of Plasticity*, 17 :411–439, 2001.
- [16] T. Chu and Z. Hashin. Plastic behavior of composites and porous media under isotropic stress. *Int.J.Engng.Sci.*, 9 :971–994, 1971.
- [17] B. Fraeijs de Veubeke. Upper and lower bounds in matrix structural analysis. *AGARDograph*, 72 :165, 1964.
- [18] F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut, and F. Léné. Homogenization and damage for composite structures. *Int.J.Numer.Methods Eng.*, 27 :285–298, 1989.
- [19] H. Dumontet. Study of a boundary layer problem in elastic composite. *Math.Model.Numer.Anal.*, 20 :265–286, 1986.
- [20] G. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proc.R.Soc.Lond. A*, 437 :311–327, 1992.
- [21] G. Dvorak and Y. Benveniste. On transformation strains and uniform fields in multiple elastic media. *Proc.R.Soc.Lond. A*, 437 :291–310, 1992.
- [22] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc.R.Soc.Lond. A*, 421 :376–396, 1957.
- [23] C. Farhat, K. Pierson, and M. Lesoinne. The second generation feti methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 184 :333–374, 2000.
- [24] C. Farhat and F.X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int.J.Numer.Methods Eng.*, 32 :1205–1227, 1991.
- [25] C. Felippa, K.C. Park, and C. Farhat. Partitioned analysis of coupled systems. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 190 (24-25) :3247–3270, 2001.
- [26] F. Feyel. A multilevel finite element method (fe^2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 192 :3233–3244, 2003.
- [27] F. Feyel and J.L. Chaboche. fe^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behavior of long fibre sic/ti composite materials. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 183 :309–330, 2000.
- [28] J. Fish, K. Shek, M. Pandheeradi, and M.S. Shephard. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : theory and practice. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 148 :53–73, 1997.
- [29] S. Forest, G. Cailletaud, D. Jeulin, F. Feyel, I. Gaillet V. Mounoury, and S. Quilici. Elements of microstructural mechanics. *Mecanique et Industrie*, 3 :439–456, 2002.

- [30] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. Comportement mécanique des matériaux : élasticité et plasticité. Hermes, Paris, 1995.
- [31] F. Gatuingt. Prédiction de la rupture des ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 1999.
- [32] P. Germain, Q.S. Nguyen, and P. Suquet. Continuum thermodynamics. J. Appl. Mech., 50, 1983.
- [33] S. Ghosh, K. Lee, and S. Moorthy. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method. Int.J. Solids Struct., 32 :27–62, 1995.
- [34] S. Ghosh, K. Lee, and P. Raghavan. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. Int.J. Solids Struct., 38 :2335–2385, 2001.
- [35] P. Gilormini. A shortcoming of the classical non-linear extension of the self-consistent model. C.R. Acad. Sci. Paris, 320 (116) :115–122, 1995.
- [36] I. Gresovnik. A General Purpose Computational Shell for Solving Inverse and Optimisation Problems - Applications to Metal Forming Processes. Thèse de doctorat, University of Wales Swansea, U.K., disponible sur l'internet à <http://www.c3m.si/inverse/doc/phd/index.html>, 2000.
- [37] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i - yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. Eng. Mater. Tech., 99 :2–15, 1977.
- [38] A. Hansbo and P. Hansbo. An unfitted finite element method, based on nietzsche's method, for elliptic interface problems. Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg, 191 (47-48), 2002.
- [39] A. Hansbo and P. Hansbo. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg, in press (available online), 2004.
- [40] R. Hill. Mathematical theory of Plasticity. Oxford University Press, 1950.
- [41] R. Hill. Continuum micro-mechanics of elasto-plastic polycrystals. J.Mech.Phys.Solids, 13 :89–101, 1965.
- [42] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. J.Mech.Phys.Solids, 13 :213–222, 1965.
- [43] M. Hori and S. Nemat-Nasser. On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids. Mech. Mat., 31 :667–682, 1999.
- [44] C. Huet. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. J.Mech.Phys.Solids, 38 :813–841, 1990.
- [45] T.J.R. Hughes. The Finite Element Method. Dover publications, Inc., Mineola, New York, 2000.
- [46] A. Ibrahimbegovic and A. Delaplace. Microscale and mesoscale discrete models for dynamic fracture of structures built of brittle materials. Comp. Struct., 81 :1255–1265, 2003.

- [47] A. Ibrahimbegovic, F. Gharzeddine, and L. Chorfi. Classical plasticity and viscoplasticity models reformulated : theoretical and numerical implementation. *Int. J.Numer. Methods Eng.*, 42 :1499–1535, 1999.
- [48] A. Ibrahimbegovic and D. Markovic. Strong coupling methods in multiphase and multiscale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 192 :3089–3107, 2003.
- [49] A. Ibrahimbegovic, D. Markovic, and F. Gatuingt. Constitutive model of coupled damage-plasticity and its finite element implementation. *European J. Finite Elem.*, 12-4 :381–405, 2003.
- [50] M. Idiart and P. Ponte Castaneda. Field fluctuations and macroscopic properties for nonlinear composites, *journal* =.
- [51] M. Jiang, I. Jasiuk, and M. Ostoja-Starzewski. Apparent elastic and elastoplastic behavior of periodic composites. *Int.J. Solids Struct.*, 39 :199–212, 2002.
- [52] M. Jiang, M. Ostoja-Starzewski, and I. Jasiuk. Scale-dependent bounds on effective elastoplastic response of random composites. *J.Mech.Phys. Solids*, 49 :655–673, 2001.
- [53] M. Johansson, R. Mahnken, and K. Runesson. Efficient integration technique for generalized viscoplasticity coupled to damage. *Int.J.Numer.Methods Eng.*, 44 :1727–1747, 1999.
- [54] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int.J. Solids Struct.*, 40 :3647–3679, 2003.
- [55] D. Krajcinovic. *Damage Mechanics*. North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [56] P. Ladevèze. *Non-linear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer-Verlag, 1988.
- [57] P. Ladevèze, O. Loiseau, and D. Dureisseix. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *Int.J.Numer.Meth.Engng*, 52 :121–138, 2001.
- [58] P. Ladevèze and A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 192 :3061–3087, 2003.
- [59] F. Larsson, P. Hansbo, and K. Runesson. Strategies for computing goal-oriented a posteriori error measures in non-linear elasticity. *Int.J.Numer.Methods Eng.*, 55 :879–894, 2002.
- [60] J. Lemaître. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods Appl. Mech. Eng.*, 51 :31–49, 1985.
- [61] J. Lemaître and J.L. Chaboche. *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod, Paris, 1988.
- [62] O. Loiseau. Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2001.

- [63] J. Lubliner. Plasticity Theory. MacMillan, New York, 1990.
- [64] R. Mahnken, D. Tihomirov, and E. Stein. Implicit integration scheme and its consistent linearization for an elastoplastic-damage model with application to concrete. *Comput. Struct.*, 75 :135–143, 2000.
- [65] D. Markovic and A. Ibrahimbegovic. On micro-macro interface conditions for micro-scale based fem for inelastic behavior of heterogeneous materials. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, in press, 2004.
- [66] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, and A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of non linear composites and polycrystals. *J.Mech.Phys.Solids*, 48, 2000.
- [67] H. G. Matthies, C.E. Brenner, C.G. Bucher, and C.G. Soares. Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - stochastic finite elements. *Struct. Safety*, 19, 1997.
- [68] G. Meschke, R. Lackner, and H.A. Mang. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 42 :703–721, 1998.
- [69] P. Michaleris, D.A. Tortorelli, and C.A. Vidal. Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *Int. J.Numer. Methods Eng.*, 37 :2417–2499, 1994.
- [70] J.C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast. *Int.J.Numer.Meth.Engng*, 52 :139–160, 2001.
- [71] J.C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis. *Int.J.Solids Struct.* (special issue), 40, 2003.
- [72] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 318 :1417–1423, 1994.
- [73] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 157 :69–94, 1998.
- [74] A. Needleman and V. Tvergaard. An analysis of ductile rupture in notched bar. *J. Mech. Phys. Solids*, 32 :461–469, 1984.
- [75] R. Niekamp. A remote interface definition for simulation codes for C/Fortran binding. Communication privée, Institut du calcul scientifique, Université technique de Braunschweig, Allemagne, 2003.
- [76] A. Nouy. Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2003.
- [77] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev, and G.A. Yosifian. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. North-Holland, New York, 1992.
- [78] K.C. Park and C.A. Felippa. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *Int.J.Numer.Meth.Engng*, 47 :395–418, 2000.

- [79] K.C. Park, C.A. Felippa, and G. Rebel. A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *Int.J.Numer.Meth.Engng*, 53 :2117–2142, 2002.
- [80] T.H.H. Pian and K. Sumihara. Rational approach for assumed stress finite elements. *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, 20 :1685–1638, 1984.
- [81] P. Raghavan and S. Ghosh. Concurrent multi-scale analysis of elastic composites by a multi-level computational model. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 193 :497–538, 2004.
- [82] T. Rodic and I. Gresovnik. A computer system for solving inverse and optimization problems. *Eng. comput.*, 15 (7) :893–907, 1998.
- [83] E. Sanchez-Palencia. Non homogeneous media and vibration theory. Lecture notes in Physics, volume 127. Springer, Berlin, 1980.
- [84] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, Berlin, 1998.
- [85] J.C. Simo and W. Ju. Stress and strain based continuum damage model-i. formulation, ii. computational aspects. *Int. J. Solids Struct.*, 23 :821–869, 1987.
- [86] J.C. Simo, J.G. Kennedy, and R.L. Taylor. Complementary mixed finite element formulations for elastoplasticity. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 74 :277–206, 1989.
- [87] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, 29 :1595–1638, 1990.
- [88] J.C. Simo and R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 48 :101–118, 1985.
- [89] E. Stein and S. Ohnibus. Coupled model- and solution-adaptivity in the finite-element method. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 150, 1997.
- [90] G. Strang. *Introduction to Applied Mathematics*. Addison-Wesley, 1986.
- [91] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moes, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in extended finite element method. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 190, 2001.
- [92] R.L. Taylor. FEAP - User manual. www.uc.ce.edu/~rlt, 2004.
- [93] K. Terada and N. Kikuchi. Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches. *Int. J. Solids Struct.*, 37 :2285–2311, 2000.
- [94] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall. Mater.*, 32 :157–169, 1984.
- [95] E.L. Wilson and A. Ibrahimbegovic. Use of incompatible modes for the calculation of element stiffnesses or stresses. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7 :229–241, 1990.

- [96] B. Wohlmuth. Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [97] S. Yazdani and H.L. Schreyer. Combined plasticity and damage mechanics model for plain concrete. *ASCE J. Engng. Mech.*, 116 :1435–1450, 1990.
- [98] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume I, II & III. Butterworth Heineman, Oxford, 2000.
- [99] T.I. Zohdi, M. Kachanov, and I. Sevostianov. On perfectly plastic flow in porous material. *Int.Jour. of Plas.*, 18(12) :1649–1659, 2002.
- [100] T.I. Zohdi, P. Wriggers, and C. Huet. On perfectly plastic flow in porous material. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg.*, 190 :5639–5656, 2001.