Étude du processus de Mumford

Xiaolong Li

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Xiaolong LI

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine : **Mathématiques Appliquées**

Sujet de la thèse : Étude du Processus de Mumford

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 03 mars 2006 devant le jury composé de :

M. Antoine Ayache	Professeur, Université de Lille 1	Rapporteur
M. Stéphane Jaffard	Professeur, Université de Paris 12	Rapporteur
M. Yves Meyer	Professeur émérite, ENS de Cachan	Directeur de thèse
M. Jean-Michel Morel	Professeur, ENS de Cachan	Président du Jury

Centre de Mathématiques et de Leurs Applications
ENS CACHAN / CNRS / UMR 8536
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

souvenir de ma jeunesse en France……

Table des matières

Introduction

B. Mandelbrot fut le premier à s'intéresser aux processus en $\frac{1}{f}$. Il s'agit de processus stationnaires (ou à accroissements stationnaires) dont la puissance spectrale vaut $\frac{c}{|\xi|^\gamma}$ pour un certain exposant $\gamma > 0$. Cette définition pose immédiatement le problème de définir la puissance spectrale d'un processus à accroissements stationnaires. Nous y reviendrons.

Depuis le travail fondateur de B. Mandelbrot, ces processus ont pris une importance croissante et interviennent dans les domaines les plus variés de la science et de la technologie. Citons, en vrac, l'étude de la turbulence développée (ce fut l'une des motivations de B. Mandelbrot), les calculs que nécessitent la QFT (Quantum Field Theory), les signaux de télétrafic informatique, etc.. Nous nous limiterons dans cette thèse au cas gaussien. Alors les processus en $\frac{1}{f}$ sont autosimilaires en loi. C'est à dire que l'on a

$$X(\lambda x, \omega) \sim \lambda^\alpha X(x, \omega), \qquad \forall\, \lambda > 0,$$

où $\gamma = n + 2\alpha$ et où n est la dimension. Voici quelques exemples. Pour le bruit blanc n-dimensionnel, $\alpha = -\frac{n}{2}$ et $\gamma = 0$. Pour le mouvement brownien usuel (en dimension 1), on a $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 2$. En dimension 1, le mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$ peut être défini comme la primitive du bruit brownien fractionnaire $W_H(t)$. Ce dernier est obtenu à partir du bruit blanc en lui appliquant un opérateur d'intégrale (ou de dérivation) fractionnaire.

En dimension supérieure à 1, on ne peut plus procéder ainsi et il convient de définir directement les processus gaussiens en $\frac{1}{f}$. Notre travail a été motivé par l'étude du processus de Mumford. Il s'agit, en dimension 2, d'un processus gaussien dont la puissance spectrale vaut $\frac{c}{|\xi|^2}$. On aura donc $X(\lambda x, \omega) \sim X(x, \omega)$ et cette forme particulière d'invariance d'échelle est le but poursuivi par D. Mumford. En fait les conditions imposées sur le processus de Mumford sont contradictoires. C'est le point de départ de notre travail. En fait le processus de Mumford n'est pas un processus stationnaire, c'est un processus à accroissements stationnaires (théorème 2.11 du chapitre 2). En outre le processus de Mumford n'est pas une fonction aléatoire, c'est une distribution aléatoire (théorème 2.4 du chapitre 2). Enfin la divergence infra-rouge du processus de Mumford ne peut être corrigée à l'aide d'une renormalisation additive conservant l'invariance d'échelle. En d'autres termes, pour définir le processus de Mumford comme une distribution aléatoire, il est nécessaire d'introduire une échelle de coupure (ou, ce qui revient ici au même, une fréquence de coupure) et de traiter différemment les hautes fréquences (c-à-d les petites échelles) et les basses fréquences (c-à-d les grandes échelles). Nous analyserons ce phénomène surprenant avec le plus grand soin. Nous nous proposons de "confiner la brisure d'invariance d'échelle". Cela signifie que nous décomposerons le processus de Mumford (qui n'est pas encore défini) en une composante radiale $X_0(x, \omega)$ et une composante orthogonale aux fonctions radiales $X_1(x, \omega)$. Cette seconde composante ne nécessite aucune renormalisation, possède la propriété d'invariance d'échelle et est donc une distribution aléatoire. La première composante ressemble beaucoup au mouvement brownien (ce point sera précisé au chapitre 5). En tout état de cause, $X_0(x, \omega)$ est une fonction régulière en dehors de l'origine (théorème 3.12 du chapitre 3). Bien entendu $X_0(x, \omega)$ nécessite une renormalisation additive, mais nous nous sommes ici en terrain familier puisque l'expérience acquise sur le mouvement brownien fractionnaire guidera nos pas. Mais il y a une grande différence. En imposant au mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$ la seule condition $B_H(0) = 0$, on élimine la divergence infra-rouge et l'on conserve l'invariance d'échelle. Il n'en est rien pour $X_0(x, \omega)$ à cause de la singularité logarithmique en 0 (théorème 4.1 du chapitre 4). On ne pouvra donc règler la divergence infra-rouge et préserver l'autosimilarité de $X_0(x, \omega)$.

La suite logique de ce travail serait l'élaboration d'algorithmes de performants pour simuler le processus de Mumford. A. Majda et F. Eliott ont réussi à le faire pour le processus gaussien simulant un champ de vitesse à divergence nulle obéissant aux statistiques proposées par A. Kolmogorov en 1941.

Chapitre 1

Préparation

1.1 Processus gaussiens généralisés

Dans le cas discret, la définition d'un processus stationnaire X_k ($k \in \mathbb{Z}$), ne pose aucune difficulté et nous renvoyons aux ouvrages [6], [11], ou [21]. Le cas qui nous intéresse est le cas continu X_t ($t \in \mathbb{R}$). L'exemple qui motive notre étude est celui du bruit blanc dont les trajectoires sont des distributions tempérées. Ce point de vue (distributions aléatoires) est rarement évoqué dans les ouvrages de traitement du signal. Nous en venons maintenant aux définitions d'un processus gaussien généralisé et d'un processus gaussien généralisé stationnaire (ou à accroissements stationnaires).

• Définition des processus gaussiens généralisés

Considérons l'espace produit $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont les éléments sont les suites arbitraires $(\omega_0, \omega_1, \cdots)$ de nombres réels. Dans l'ensemble des parties de Ω, nous considérons les ensembles élémentaires ou pavés qui sont de la forme $E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ où N est un entier positif et E_j ($0 \leq j \leq N$), des parties boréliennes de $\mathbb{R}$. La tribu $\mathcal{T}$ que nous considérons est la plus petite tribu contenant ces pavés. Nous construisons ensuite la loi de probabilité $dP(\omega) = \mu_0 \otimes \mu_1 \otimes \cdots$ sur Ω, où

$$\mu_j(E_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_j} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et

$$[dP(\omega)](E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots) = \mu_0(E_0)\mu_1(E_1) \cdots \mu_N(E_N).$$

Notons simplement Ω est l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ dans la suite de ce texte.

En gros, un processus gaussien généralisé est une fonction $X(x, \omega)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$) telle que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X(x, \omega)$ soit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$ et que, $\langle X(\cdot, \omega), u \rangle = g(\omega)$ soit une v.a. gaussienne centrée quand u appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Commençons par définir un espace de Hilbert gaussien, en distinguant le cas réel ou le cas complexe. Dans le cas réel, il s'agit d'un sous-espace vectoriel fermé $H(\Omega) \subset L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ dont les éléments sont des v.a. gaussiennes centrées. Dans le cas complexe, un espace de Hilbert gaussien $H(\Omega)$ est, par définition, associé à un espace de Hilbert gaussien réel $\widetilde{H}(\Omega) \subset L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$; $g \in H(\Omega)$ si et seulement si la partie réelle g_r et la partie imaginaire g_i de g appartiennent à $\widetilde{H}(\Omega)$. Mais il y a un autre point de vue. Nous définirons un espace de Hilbert gaussien complexe $H(\Omega)$ par les trois conditions suivantes : $H(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, c'est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et enfin tout élément $g \in H(\Omega)$ est une v.a. gaussienne isotrope (la densité de répartition de g dans le plan complexe est $e^{-\frac{|z|^2}{2\sigma}}/\pi\sigma$ pour un certain $\sigma > 0$). Avec la définition de $H(\Omega)$, on peut définir un processus gaussien généralisé.

Définition 1.1. *Un processus gaussien généralisé est, par définition, une application linéaire continue $J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$, où $H(\Omega)$ est un espace de Hilbert gaussien complexe.*

On peut décomposer une telle application J en une combinaison complexe de deux applications linéaires continues $J_r, J_i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$

$$J(u) = J_r(u) + iJ_i(u),$$

avec

$$J_r(u) = \frac{1}{2}\Big(J(u) + \overline{J(\overline{u})}\Big) \qquad \text{et} \qquad J_i(u) = -\frac{i}{2}\Big(J(u) - \overline{J(\overline{u})}\Big).$$

On définit J_r (resp. J_i) est la partie réelle (resp. la partie imaginaire) du processus J. Alors on dit que J est un processus gaussien généralisé réel si $J(u)$ est une v.a. réelle pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeur réelle. Ceci équivaut à $J_i(u) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; dans l'autre cas ($J_i(u) \neq 0$ pour au mois une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), on dit que J est un processus gaussien généralisé complexe ; c'est donc une combinaison complexe des processus gaussiens généralisés réels, car J_r et J_i sont réels.

Théorème 1.2. *Si, avec les notations précédentes, $J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ définit un processus gaussien généralisé. Alors presque sûrement en ω, il existe une distribution tempérée $X(x, \omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait $\langle X(\cdot, \omega), u\rangle = J(u)$.*

Démonstration. Soit $\{g_m(\omega) : \omega \in \Omega,\ m \in \mathbb{N}\}$ une base o.n. de $H(\Omega)$. On a donc, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$J(u) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle S_m, u\rangle g_m(\omega),$$

où $S_m : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ sont les applications linéaires. La continuité de J implique l'existence d'un entier positif N et d'une constante C telle que, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|J(u)\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\sum_{m \in \mathbb{N}} |\langle S_m, u\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C C_N(u), \tag{1.1}$$

où

$$C_N(u) = \sup_{|\alpha| \leq N} \Big\|(1 + |x|)^N \partial^\alpha u(x)\Big\|_{L^\infty}.$$

Il vient $S_m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Maintenant, on se propose d'établir que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\sum g_m(\omega) S_m$ converge au sens des distributions tempérées. Pour ce faire, prenons d'abord une fonction radiale $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 2\pi$, $\widehat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 3\pi$. Définissons ensuite les distributions tempérées $S_{m,1}$ et $S_{m,2}$ par

$$S_{m,1} = \big((1 + |x|^2)^{-N-n} S_m\big) * f \qquad \text{et} \qquad S_{m,2} = (1 + |x|^2)^{-N-n} S_m - S_{m,1}.$$

On va démontrer que

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \|S_{m,1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{m\in\mathbb{N}} \| \wedge^{-N_0} S_{m,2}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{1.2}$$

où $\wedge = \sqrt{-\triangle}$ est l'opérateur de Calderón, N_0 est un entier positif qui est suffisamment grand. Avec ceci

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} g_m(\omega) S_{m,1} \qquad \text{et} \qquad \wedge^{-N_0}\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} g_m(\omega) S_{m,2}\Big)$$

convergent presque sûrement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, d'après le théorème de trois séries (théorème 1.3). Cela implique que $\sum g_m(\omega)S_{m,1}$ converge presque sûrement au sens des distributions tempérées ; et que $\sum g_m(\omega)S_{m,2}$ converge presque sûrement dans $\dot{H}^{-N_0}(\mathbb{R}^n)$ (où $\dot{H}^s$ est l'espace de Sobolev homogène d'exposant s), donc converge presque sûrement au sens des distributions tempérées. Ce qui établit la convergence au sens des distributions tempérées de $(1+|x|^2)^{-N-n}\sum g_m(\omega)S_m$, donc de $\sum g_m(\omega)S_m$.
On commence à démontrer (1.2). Prenons la base o.n. d'ondelettes de Meyer

$$\Big\{\varphi_k(x) = \varphi(x-k),\, \psi^\epsilon_{j,k}(x) = 2^{\frac{nj}{2}}\psi^\epsilon(2^jx-k) : j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^n,\, \epsilon\in\mathbb{I} \triangleq \{0,1\}^n\setminus\{0\}\Big\},$$

où $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ si $|\xi| \le \frac{2\pi}{3}$, $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge \frac{4\pi}{3}$; $\psi^\epsilon\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\widehat{\psi^\epsilon}(\xi) = 0$ si $|\xi| \le \frac{2\pi}{3}$ ou $|\xi| \ge \frac{8\pi}{3}$. Alors pour démontrer (1.2), il suffit d'établir que

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle S_{m,1},\varphi_k\rangle|^2 + \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{\epsilon\in\mathbb{I}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle S_{m,1},\psi^\epsilon_{j,k}\rangle|^2 < \infty \tag{1.3}$$

et

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle \wedge^{-N_0}S_{m,2},\varphi_k\rangle|^2 + \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{\epsilon\in\mathbb{I}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle \wedge^{-N_0}S_{m,2},\psi^\epsilon_{j,k}\rangle|^2 < \infty. \tag{1.4}$$

Commençons par (1.3). En fait, $\widehat{S}_{m,1}(\xi) = 0$ quand $|\xi| \ge 3\pi$; alors il existe un entier positif j_0 tel que, pour tout $j > j_0$

$$\langle S_{m,1},\psi^\epsilon_{j,k}\rangle = 0. \tag{1.5}$$

En utilisant (1.1), pour tout $0\le j\le j_0$, il vient

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle S_{m,1},\psi^\epsilon_{j,k}\rangle|^2 \le C^2\Big(C_N\big((1+|x|^2)^{-N-n}(f*\psi^\epsilon_{j,k})\big)\Big)^2.$$

Remarquons que, pour tout $0\le j\le j_0$ et $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha|\le N$, on a

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha f*\psi^\epsilon_{j,k}(x)| &\le C_0\int \frac{dy}{(1+|y|^2)^{2n}(1+|2^jx-2^jy-k|^2)^n}\\
&\le C_0'\int \frac{dy}{(1+|y|^2)^n\big[(1+|2^jy|^2)(1+|2^jx-2^jy-k|^2)\big]^n}\\
&\le \frac{C_0''}{(1+|2^jx-k|^2)^n},
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Big|(1+|x|)^N\partial^\alpha\big((1+|x|^2)^{-N-n}(f*\psi^\epsilon_{j,k})\big)\Big| \le \frac{C_1}{(1+|x|^2)^n(1+|2^jx-k|^2)^n}.$$

Il vient, pour tout $0 \leq j \leq j_0$ et $k \in \mathbb{Z}^n$

$$C_N\big((1+|x|^2)^{-N-n} f * \psi^\epsilon_{j,k}\big) \leq \frac{C_2}{(1+|k|^2)^n}.$$

Alors on a

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle S_{m,1}, \psi^\epsilon_{j,k}\rangle|^2 \leq \frac{C_3}{(1+|k|^2)^{2n}}. \tag{1.6}$$

De même on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle S_{m,1}, \varphi_k\rangle|^2 \leq \frac{C_4}{(1+|k|^2)^{2n}}. \tag{1.7}$$

Alors on a immédiatement (1.3) d'après (1.5), (1.6) et (1.7).
Il nous reste à démontrer (1.4). Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$\langle \wedge^{-N_0} S_{m,2}, \varphi_k\rangle = 0;$$

il existe un entier positif j_0 tel que, pour tout $j > j_0$

$$\langle \wedge^{-N_0} S_{m,2}, \psi^\epsilon_{j,k}\rangle = \langle (1+|x|^2)^{-N-n} S_m, \wedge^{-N_0}\psi^\epsilon_{j,k}\rangle.$$

Alors (1.4) est une conséquence immédiate des deux estimations suivantes

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{\epsilon\in\mathbb{I}}\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{j(n-2N_0)}|\langle S_{m,1}, \Psi^\epsilon(2^j x-k)\rangle|^2 < \infty \tag{1.8}$$

et

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{\epsilon\in\mathbb{I}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{j(n-2N_0)}|\langle S_m, (1+|x|^2)^{-N-n}\Psi^\epsilon(2^j x-k)\rangle|^2 < \infty, \tag{1.9}$$

où $\Psi^\epsilon = \wedge^{-N_0}\psi^\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En fait, (1.8) est évidente avec la même démonstration de celle du (1.6). De plus, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq N$

$$\Big|(1+|x|)^N \partial^\alpha\big((1+|x|^2)^{-N-n}\Psi^\epsilon(2^j x-k)\big)\Big| \leq C_5 \frac{2^{jN}}{(1+|x|^2)^n(1+|2^j x-k|^2)^n},$$

ce qui implique, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}^n$

$$C_N\big((1+|x|^2)^{-N-n}\Psi^\epsilon(2^j x-k)\big) \leq C_6 \frac{2^{j(N+2n)}}{(1+|k|^2)^n}.$$

Il vient, en utilisant (1.1)

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{j(n-2N_0)}|\langle S_m, (1+|x|^2)^{-N-n}\Psi^\epsilon(2^j x-k)\rangle|^2 \leq C_7 \frac{2^{j(2N+5n-2N_0)}}{(1+|k|^2)^{2n}},$$

ce qui entraîne (1.9) pour un entier N_0 qui est suffisamment grand. □

Nous venons d'utiliser le théorème classique suivant :

Théorème 1.3. *Soient H un espace de Hilbert, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $\sum \|f_j\|_H^2 < \infty$. Soient également $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilité et $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes, centrées et vérifiant $\mathbb{E}\big[|g_j|^2\big] \leq C < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum g_j(\omega) f_j$ converge presque sûrement dans H.*

Passons maintenant à la définition de la covariance d'un processus gaussien généralisé réel $X(x,\omega)$. Formellement, la covariance est donnée par

$$S(x,y) = \mathbb{E}\big[X(x,\omega)X(y,\omega)\big],$$

mais ceci n'a évidemment aucun sens. On corrige cette définition en considérant la forme bilinéaire continue $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ définie par

$$B(u,v) = \mathbb{E}\big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \langle X(\cdot,\omega), v\rangle\big].$$

Cela a un sens puisque $\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \in H(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Le théorème des noyaux de Laurent Schwartz nous apprend qu'il existe une distribution tempérée unique $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que $B(u,v) = \langle S, u \otimes v\rangle$, ou également

$$\mathbb{E}\big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \langle X(\cdot,\omega), v\rangle\big] = \iint S(x,y)u(x)v(y)dxdy, \qquad \forall\, u,v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

On dit alors que la distribution tempérée $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est la covariance du processus gaussien généralisé réel $X(x,\omega)$.

De même, dans le cas complexe, la covariance d'un processus gaussien généralisé complexe $X(x,\omega)$ est définie comme l'unique distribution tempérée $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\mathbb{E}\Big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \overline{\langle X(\cdot,\omega), v\rangle}\Big] = \iint S(x,y)u(x)\overline{v(y)}dxdy, \qquad \forall\, u,v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.11}$$

- **Processus gaussien stationnaire**

Définition 1.4. *On dit que un processus gaussien généralisé $J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ est stationnaire si, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\mathbb{E}\Big[J(u)\overline{J(v)}\Big] = \mathbb{E}\Big[J(u_a)\overline{J(v_a)}\Big],$$

où $u_a(x) = u(x-a)$ et $v_a(x) = v(x-a)$.

Soit $X(x,\omega)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$) la distribution tempérée correspond au J. Alors $X(x,\omega)$ est stationnaire équivaut à l'existence d'une distribution tempérée $\Gamma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $S(x,y) = \Gamma(y-x)$, où S est la covariance de $X(x,\omega)$. Par abus de langage, on dira encore que Γ est la covariance du processus gaussien stationnaire généralisé $X(x,\omega)$. En ce cas, (1.10) et (1.11) deviennent

$$\mathbb{E}\Big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \overline{\langle X(\cdot,\omega), v\rangle}\Big] = \iint \Gamma(y-x)u(x)\overline{v(y)}dxdy, \tag{1.12}$$

pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observons ensuite que, la transformée de Fourier de la covariance Γ d'un processus gaussien stationnaire généralisé est une mesure de Radon positive. Remarquons d'abord que

$$\iint \Gamma(y-x)u(x)\overline{v(y)}dxdy = \langle\, \Gamma * u, \overline{v}\,\rangle = \langle\, \Gamma, \check{u} * \overline{v}\,\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle\, \widehat{\Gamma}, \widehat{u}\overline{\widehat{\overline{v}}}\,\rangle.$$

Prenons alors $u = v$ dans (1.12). Cela nous donne $\langle\, \widehat{\Gamma}, |\widehat{u}|^2\,\rangle \geq 0$ pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors on peut conclure que $\widehat{\Gamma}$ est une distribution positive, donc une mesure de Radon positive. En fait, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, la fonction $\psi_\varepsilon(x) = \big(\varphi(x) + \varepsilon e^{-|x|^2}\big)^{\frac{1}{2}}$ est C^∞ et égale $\sqrt{\varepsilon}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ en dehors le support de φ. Il vient $\psi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et l'on a

$$\langle\, \widehat{\Gamma}, \varphi\,\rangle + \varepsilon\langle\, \widehat{\Gamma}, e^{-|x|^2}\,\rangle = \langle\, \widehat{\Gamma}, \psi_\varepsilon^2\,\rangle \geq 0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Cela implique $\langle\, \widehat{\Gamma}, \varphi\,\rangle \geq 0$. Alors il en résulte que, d'après (1.12)

$$\mathbb{E}\Big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle\overline{\langle X(\cdot,\omega), v\rangle}\Big] = \int \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}d\mu(\xi), \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{1.13}$$

pour une mesure de Radon positive $\mu = (2\pi)^{-n}\widehat{\Gamma}$. On l'appelle la puissance spectrale de $X(x,\omega)$. C'est donc une mesure positive à croissance lente à l'infini. Ceci signifie l'existence d'une constante C et d'un entier N tels que, pour tout $R \geq 0$, on ait

$$\int_{|x|\leq R} d\mu(\xi) \leq C(1+R)^N.$$

Remarquons de plus que, l'identité (1.13) nous amène à nous intéresser à l'opérateur $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ défini par

$$T(\widehat{u}) = \langle X(\cdot,\omega), u\rangle.$$

Alors T se prolonge en une isométrie entre $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ et un sous espace $H_0(\Omega) \subset H(\Omega)$.

Considérons maintenant le problème inverse : supposons donnée une mesure de Radon positive μ, à croissance lente à l'infini, et cherchons à construire un processus gaussien stationnaire généralisé dont μ soit la puissance spectrale. Le théorème de P. Lévy répondrera cette question.

Théorème 1.5. *Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$ et à croissance lente à l'infini. Alors il existe un processus gaussien stationnaire généralisé dont μ est la puissance spectrale.*

Démonstration. Soient $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite o.n. de $H(\Omega)$, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ telle que $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Considérons ensuite les fonctions continues $\varphi_j \in C(\mathbb{R}^n)$ données par $\widehat{\varphi}_j(-\xi) = f_j(\xi)d\mu(\xi)$. Avec ces notations, on définit formellement une application $J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ par

$$J(u) = (2\pi)^n \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega) \int u(x)\varphi_j(x)dx.$$

Ceci définit bien une application linéaire continue puisque l'on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} \left|(2\pi)^n \int u(x)\varphi_j(x)dx\right|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left| \int \widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}_j(-\xi)d\xi\right|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left| \int \widehat{u}(\xi) f_j(\xi)d\mu(\xi)\right|^2 \\
&= \int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu(\xi) \\
&\leq C\big(C_m(u)\big)^2,
\end{aligned}$$

pour une constante C et un entier positif m. Alors le processus gaussien généralisé (la distribution tempérée) correspondant à J est

$$X(x,\omega) = (2\pi)^n \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega)\varphi_j(x),$$

et l'on a évidemment, pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{E}\Big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \overline{\langle X(\cdot,\omega), v\rangle}\Big] = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int \widehat{u}(\xi) f_j(\xi)d\mu(\xi) \overline{\int \widehat{v}(\xi) f_j(\xi)d\mu(\xi)} = \int \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}d\mu(\xi),$$

ce qui démontre $X(x,\omega)$ est stationnaire dont μ est la puissance spectrale. □

Voici un exemple en dimension 1. On pose $\mu = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$. Soit ψ une fonction C^∞ telle que $\psi(x)$ est égale à 1 en 0, nulle hors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. La base o.n. $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ est ici $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Finalement, la fonction φ_k est définie par $\widehat{\varphi}_k(-\xi) = \psi(\xi - k)\mu = \delta_k$ et donc $\varphi_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{2\pi}$. Le processus $X(x,\omega)$ est alors $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} g_k(\omega)e^{-ikx}$.

• Processus gaussien à accroissements stationnaires

L'étude des processus à accroissements stationnaires est, en principe, assez simple dans le cas discret. En effet, une suite X_k $(k \in \mathbb{Z})$, de v.a. est un processus à accroissements stationnaires si $X_{k+1} - X_k = Y_k$ est un processus stationnaire. Un processus à accroissements stationnaires est donc une marche aléatoire $X_k = X_0 + Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{k-1}$, où $X_0(\omega)$ est une v.a. qui ne joue aucun rôle. Dans le cas continu, un processus $X(t,\omega)$ $(t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega)$, est à accroissements stationnaires si et seulement si, pour tout $h > 0$, le processus $X(t+h,\omega) - X(t,\omega)$ est stationnaire. Encore faut-il que l'objet mathématique $X(t,\omega)$ ait un sens. Dans la plupart des ouvrages, ce problème est négligé et il est implicitement supposé que $X(t,\omega)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans ce qui suit, $X(t,\omega)$ sera une distribution aléatoire qui demandera à être reconstruite à partir des accroissements $X(t+h,\omega) - X(t,\omega)$.

L'exemple le plus célèbre d'un processus gaussien à accroissements stationnaires est le mouvement brownien. Il fut découvert expérimentalement par le botaniste R. Brown (1827). Il observa que des grains de pollens en suspension dans l'eau suivaient un mouvement rapide et désordonné. Son étude fut menée à bien par A. Einstein (1905) et le premier modèle mathématique a été propose par R.E.A.C. Paley, N. Wiener et A. Zygmund dans [20].

Un travail très important, dû à G. Matheron[15] nous amène à étudier les processus à accroissements stationnaires en utilisant la dualité avec l'espace vectoriel Λ_0 des sommes finies $\mu = \sum a_k \delta_{x_k}$ vérifiant $\sum a_k = 0$, où δ_{x_k} est la masse de Dirac au point x_k. Mais ce point de vue ne convient pas au cas des processus à accroissements stationnaires dont les trajectoires sont des distributions tempérées. C'est pourquoi nous modifierons le point de vue de Matheron. Nous utiliserons la dualité avec le sous-espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ composé des fonctions d'intégrale nulle. Nous montrerons, en dimension 1, que $X(t,\omega)$ est un processus à accroissements stationnaires si et seulement si $\frac{d}{dt}X(t,\omega) = Y(t,\omega)$ est un processus stationnaire. On retrouve ainsi le lien entre le mouvement brownien et le bruit blanc. En dimension quelconque, on a un résultat analogue en remplaçant $\frac{d}{dt}$ par le gradient.

Comme le signalait B. Picinbono dans [22], la définition de la puissance spectrale d'un processus à accroissements stationnaires est subtile. En fait, G. Matheron résout ce problème dans le remarquable travail [15] dont nous nous inspirerons librement. Signalons cependant que Matheron suppose que les réalisations du processus étudié sont continues. Dès lors, la covariance $S(x,y) = \Gamma(y-x)$ est une fonction continue de x et y. Le cas particulier du mouvement brownien est particulièrement éclairant. Si le mouvement brownien unidimensionnel $B(t,\omega)$ est normalisé par $B(0,\omega) = 0$, on a alors

$$\mathbb{E}\big[B(s,\omega)B(t,\omega)\big] = S(s,t) = |s| + |t| - |s-t|.$$

Bien entendu, $S(s,t)$ n'est pas une fonction de $t-s$, mais

$$\iint S(s,t)\psi_1(s)\psi_2(t)dsdt = -\iint |s-t|\psi_1(s)\psi_2(t)dsdt,$$

si $\int \psi_1(s)ds = \int \psi_2(t)dt = 0$ et $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier, au sens des distributions tempérées de $|t|$ est $\frac{c}{\xi^2}$, où c est une constante. Comme le font les physiciens, nous dirons que $\frac{c}{\xi^2}$ est la puissance spectrale du mouvement brownien sans chercher à prolonger $\frac{c}{\xi^2}$ en la distribution tempérée $c\mathrm{pf}\frac{1}{\xi^2}$. Cet exemple illustre les problèmes que nous rencontrerons dans ce chapitre. Un second exemple qui nous sera utile est celui de la primitive d'ordre $\frac{1}{2}$ du bruit blanc. C'est un processus qui n'est jamais étudié dans la littérature, malgré son intérêt. La puissance spectrale de ce processus est $\frac{c}{|\xi|}$ en dehors de l'origine. La version bi-dimensionnelle de ce processus est le processus de Mumford que nous étudierons en détail au chapitre 2.

On désigne maintenant par $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace composé des fonctions d'intégrale nulle et par $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$ le dual de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, qui s'identifie au quotient $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$. La définition d'un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé $X(x,\omega)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$), qui suit signifie que la seule chose qui ait maintenant un sens est l'intégrale $\langle X(\cdot,\omega), u\rangle$, où $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Ceci a été explicité dans les travaux de W. R. Madych. Cette remarque conduit à la définition suivante.

Définition 1.6. *Un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé est, par définition, une application linéaire continue $J : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tous $u, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\mathbb{E}\Big[J(u)\overline{J(v)}\Big] = \mathbb{E}\Big[J(u_a)\overline{J(v_a)}\Big], \tag{1.14}$$

où $u_a(x) = u(x-a)$ et $v_a(x) = v(x-a)$.

De même que pour le théorème 1.2, on a pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$

$$J(u) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle S_m, u\rangle g_m(\omega),$$

où $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $H(\Omega)$ et où $S_m : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ sont les applications linéaires continues. On désire que la série $\sum g_m(\omega)S_m$ converge au sens des distributions tempérées. Mais ceci ne peut pas avoir lieu, car S_m n'est définie qu'à une constante additive près. En fait, on sait que (a posteriori), la série $\sum g_m(\omega)S_m$ converge presque sûrement dans $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$. Pour résoudre ce problème, prenons d'abord une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \varphi dx = 1$ et définissons les applications linéaires $\widetilde{S}_m : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ par

$$\widetilde{S}_m(u) = S_m(u - \lambda_u\varphi),$$

où λ_u est l'intégrale de u. Alors on a évidemment $\widetilde{S}_m|_{\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)} = S_m$ et la continuité de J implique l'existence d'un entier positif N et d'une constante C telle que, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle \widetilde{S}_m, u\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq CC_N(u - \lambda_u\varphi),$$

ce qui implique qu'il existe un entier $N' = \max(N, n+1)$ et une constante $C' = C'(\varphi)$, telles que

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle \widetilde{S}_m, u\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C'C_N(u).$$

D'après le théorème 1.2, la série $\sum g_m(\omega)\widetilde{S}_m$ converge presque sûrement au sens des distributions tempérées. Notons alors $X(\cdot,\omega) = \sum g_m(\omega)\widetilde{S}_m$, ce qui définit une distribution tempérée telle que pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, on a $\langle X(\cdot,\omega), u\rangle = J(u)$. Considérons ensuite la forme bilinéaire continue $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ définie par

$$B(u,v) = \mathbb{E}\Big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \overline{\langle X(\cdot,\omega), v\rangle}\Big].$$

Alors il existe une distribution tempérée $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\mathbb{E}\Big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \overline{\langle X(\cdot,\omega), v\rangle}\Big] = \iint S(x,y)u(x)\overline{v(y)}dxdy, \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ceci nous donne, pour tous $u, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{E}\Big[J(u)\overline{J(v)}\Big] = \iint S(x,y)u(x)\overline{v(y)}dxdy. \tag{1.15}$$

Maintenant, on va définir la puissance spectrale d'un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé . Le théorème (la définition) qu'on va donner est le suivant.

Théorème 1.7. *1) Soit $J : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé. Alors il existe une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, unique, on la note μ, telle que pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{u}$ nulle au voisinage de 0, on ait*

$$\mathbb{E}\big[|J(u)|^2\big] = \int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu(\xi). \tag{1.16}$$

Cette mesure μ est définie comme la puissance spectrale du processus J.
2) Soit μ la puissance spectrale d'un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé. Alors μ est à croissance lente à l'infini, c'est à dire qu'il existe un entier N et une constante C, telles que pour tout $R \geq 1$

$$\int_{1\leq|\xi|\leq R} d\mu(\xi) \leq CR^N; \tag{1.17}$$

de plus, la mesure μ satisfait

$$\int_{0<|\xi|\leq 1} |\xi|^2 d\mu(\xi) < \infty. \tag{1.18}$$

Démonstration. 1) On commence par considérer la distribution tempérée $\sigma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ définie par $\sigma(\xi,\eta) = (2\pi)^{-n}\widehat{S}(-\xi,\eta)$, où S est donnée dans (1.15). Il vient, pour tous $u, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{E}\Big[J(u)\overline{J(v)}\Big] = \iint \sigma(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta.$$

La condition de la stationnarité (1.14) nous donne que

$$\iint \sigma(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta = \iint \sigma(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}e^{-ia\cdot(\xi-\eta)}d\xi d\eta. \tag{1.19}$$

On intègre (1.19) contre une fonction $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{w}(0) = 1$, alors on a

$$\iint \sigma(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta = \iint \sigma(\xi,\eta)\widehat{w}(\xi-\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta.$$

Ce qui implique

$$\iint \sigma(\xi,\eta)\big(\widetilde{w}(\xi-\eta)-1\big)\widetilde{u}(\xi)\widetilde{v}(\eta)d\xi d\eta = 0,$$

pour tous $\widetilde{w}, \widetilde{u}, \widetilde{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui satisfont $\widetilde{w}(0) = 1$ et $\widetilde{u}(0) = \widetilde{v}(0) = 0$. Alors le support de σ est inclus dans $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, où

$$E_1 = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \xi = 0\},$$

$$E_2 = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \eta = 0\},$$

et

$$E_3 = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \xi = \eta\}.$$

Prenons $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur la boule unité et nulle hors de la boule double. On pose ensuite

$$\theta_\varepsilon(\xi,\eta) = \theta\Big(\frac{\xi}{\varepsilon},\frac{\eta}{\varepsilon}\Big) \qquad \text{et} \qquad \sigma_\varepsilon = \sigma - \theta_\varepsilon\sigma.$$

Alors, par construction, le support de σ_ε est inclus dans $E_1^\varepsilon \cup E_2^\varepsilon \cup E_3^\varepsilon$, où

$$E_j^\varepsilon = E_j \cap \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |\xi|^2 + |\eta|^2 \geq \varepsilon^2\}, \qquad 1 \leq j \leq 3.$$

Ces trois ensembles fermés sont deux à deux disjoints. On a donc $\sigma_\varepsilon = \mu_\varepsilon + \rho_\varepsilon + \tau_\varepsilon$, où le support de μ_ε est inclus dans E_3^ε, celui de ρ_ε est inclus dans E_1^ε et celui de τ_ε est inclus dans E_2^ε. Supposons maintenant que le support de $\widehat{u}$ ne contienne pas 0 et qu'il soit de même pour $\widehat{v}$. Alors on a, dans ces conditions, $\widehat{u}(\xi) = 0$ au voisinage de E_1^ε et $\widehat{v}(\eta) = 0$ au voisinage de E_2^ε. Cela implique

$$\iint \rho_\varepsilon(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta = \iint \tau_\varepsilon(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta = 0.$$

Il vient, quand ε est assez petit

$$\iint \sigma(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta = \iint \sigma_\varepsilon(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta = \iint \mu_\varepsilon(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta. \quad (1.20)$$

On utilise alors le fait fondamental que μ_ε est une distribution de 'simple couche' dont nous rappelons la définition :

Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ une surface compacte (localement définie comme le graphe d'une fonction C^∞ dans des cordonnées adaptées). Soit T une distribution dont le support est inclus dans V. On dit que T est une distribution de simple couche si

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad f|_V = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, f \rangle = 0.$$

En ce cas, il existe une distribution $\nu \in (C_0^\infty(V))^*$ telle que

$$\langle T, f \rangle = \langle \nu, f|_V \rangle. \quad (1.21)$$

Dans (1.21) le membre de gauche se réfère à la dualité entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ tandis que celui de droite se rapporte à la dualité entre $C_0^\infty(V)$ et $(C_0^\infty(V))^*$. Dans l'application que nous intéresse, $m = 2n$ et $V = E_3$. Bien entendu, V n'est pas compacte mais la preuve de (1.21) s'étend immédiatement à ce cas, car V est globalement un graphe. Alors on a, d'après (1.20)

$$\mathbb{E}\Big[J(u)\overline{J(v)}\Big] = \iint \sigma(\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\eta)}d\xi d\eta = \int \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}d\nu_\varepsilon(\xi).$$

Prenons alors $u = v$. Il vient

$$\mathbb{E}\big[|J(u)|^2\big] = \int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\nu_\varepsilon(\xi), \quad (1.22)$$

si ε est assez petit. Donc, il résulte de (1.22) que la limite, au sens de la topologie $\sigma(C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}))$, des distributions ν_ε est une distribution $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ qui est positive sur les fonctions positives. Nous venons d'établir (1.16).

2) Remarquons que, d'après (1.16), on a, pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{u}$ nulle au voisinage de 0

$$\Big(\int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu(\xi)\Big)^{\frac{1}{2}} = \|J(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C C_N(u) \leq C' C_{N'}(\widehat{u}),$$

ceci entraîne immédiatement que μ est à croissance lente à l'infini. Il nous reste à démontrer (1.18). En fait, pour tout j entre 1 et n, définissons le processus dérivé $\partial_j J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ par $\partial_j J(u) = -J(\partial_j u)$. Alors on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{E}\Big[\partial_j J(u)\overline{\partial_j J(v)}\Big] = \mathbb{E}\Big[\partial_j J(u_a)\overline{\partial_j J(v_a)}\Big],$$

cela implique $\partial_j J$ est un processus gaussien stationnaire généralisé. Appelons alors μ_j sa puissance spectrale. Donc on a, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{u}$ nulle au voisinage de 0

$$\int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu_j(\xi) = \mathbb{E}\big[|\partial_j J(u)|^2\big] = \mathbb{E}\big[|J(\partial_j u)|^2\big] = \int |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi_j^2 d\mu(\xi),$$

il vient : $\mu_j = \xi_j^2 \mu$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Donc on a

$$\int_{0<|\xi|\leq 1} |\xi|^2 d\mu(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \int_{0<|\xi|\leq 1} d\mu_j(\xi) \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{|\xi|\leq 1} d\mu_j(\xi).$$

Ce qui entraîne immédiatement (1.18), car μ_j est une mesure de Radon. On termine la démonstration. $\square$

Dans 1) du théorème 1.7, on ne considère que les fonctions $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{u}$ nulle au voisinage de 0. Cela suffit à déterminer la puissance spectrale μ, mais (1.16) n'est pas vraie pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Dans [15], G. Matheron introduit la notion de dérive (drift) d'un processus à accroissements stationnaires. Cette dérive est une fonction affine à coefficients aléatoires. La covariance de la dérive est un polynôme de degré inférieur ou égale à 2 et la puissance spectrale correspondante est une somme de dérivées de la masse de Dirac en 0. Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 1.8. *Soit $J : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé. Alors il existe une mesure de Radon μ positive sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et une matrice hermitienne positive $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, telles que pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$\mathbb{E}\big[|J(u)|^2\big] = \int_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu(\xi) + \nabla\widehat{u}(0)^t \cdot A \cdot \overline{\nabla\widehat{u}(0)}. \tag{1.23}$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, définissons une application linéaire continue $J_{\triangle_x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ par $J_{\triangle_x}(u) = -J(x \cdot \nabla u)$, où ∇u est le gradient de u. Il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{E}\Big[J_{\triangle_x}(u)\overline{J_{\triangle_x}(v)}\Big] = \mathbb{E}\Big[J_{\triangle_x}(u_a)\overline{J_{\triangle_x}(v_a)}\Big].$$

Donc $J_{\triangle_x}$ est stationnaire. Appelons μ_x la puissance spectrale de $J_{\triangle_x}$. Alors pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{u}$ nulle au voisinage de 0, on a

$$\int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu_x(\xi) = \mathbb{E}\big[|J_{\triangle_x}(u)|^2\big] = \mathbb{E}\big[|J(x \cdot \nabla u)|^2\big] = \int |\widehat{u}(\xi)|^2 |x \cdot \xi|^2 d\mu(\xi).$$

Il vient donc : $\mu_x = |x \cdot \xi|^2 \mu$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Mais on a, pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{j_1,j_2=1}^{n} x_{j_1}\overline{x_{j_2}}\mathbb{E}\Big[J(\partial_{j_1}u)\overline{J(\partial_{j_2}v)}\Big] = \mathbb{E}\Big[J_{\triangle_x}(u)\overline{J_{\triangle_x}(v)}\Big] = \int \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\mu_x(\xi),$$

qui implique

$$\sum_{j_1,j_2=1}^{n} x_{j_1}\overline{x_{j_2}}\mathbb{E}\Big[J(\partial_{j_1}u)\overline{J(\partial_{j_2}v)}\Big] = \int_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} |x \cdot \xi|^2 d\mu(\xi) + \mu_x(\{0\})\widehat{u}(0)\overline{\widehat{v}(0)}.$$

Alors il existe des constantes C_{j_1,j_2} telles que

$$\mathbb{E}\Big[J(\partial_{j_1}u)\overline{J(\partial_{j_2}v)}\Big] = \int_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} \xi_{j_1}\xi_{j_2} d\mu(\xi) + C_{j_1,j_2}\widehat{u}(0)\overline{\widehat{v}(0)}.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $u = \partial_1 u_1 + \cdots + \partial_n u_n$ dans (1.23). $\square$

En sens inverse, montrons que la donnée d'une mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, qui satisfait (1.18) et à croissance lente à l'infini permet de définir un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé. En fait, la construction d'un tel processus est identique à ce qu'on a fait dans le théorème 1.5 pour les processus stationnaires. On le répète ici. Soient $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite o.n. de $H(\Omega)$ et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ telle que $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{f_j}$ soit nulle au voisinage de 0. Définissons alors une application $J : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ par

$$J(u) = (2\pi)^n \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega) \int u(x)\varphi_j(x)dx,$$

où les fonctions $\varphi_j \in C(\mathbb{R}^n)$ est déterminées par $\widehat{\varphi}_j(-\xi) = f_j(\xi)d\mu(\xi)$. Ceci définit bien un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé puisque l'on a (en considérant la condition (1.18) et la croissance de μ à l'infini), pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left|(2\pi)^n \int u(x)\varphi_j(x)dx\right|^2 = \int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu(\xi) \le C\big(C_N(u)\big)^2;$$

et que, pour tous $u, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{E}\Big[J(u)\overline{J(v)}\Big] = \int \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}d\mu(\xi) = \int \widehat{u_a}(\xi)\overline{\widehat{v_a}(\xi)}d\mu(\xi) = \mathbb{E}\Big[J(u_a)\overline{J(v_a)}\Big].$$

De plus, si la mesure μ est localement finie

$$\int_{0<|\xi|\le 1} d\mu(\xi) < \infty,$$

alors le processus qu'on vient de définir est, en fait, un processus stationnaire.

La méthode la plus simple de la construction d'un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé, en dimension 1, consiste à observer que la dérivée d'un processus gaussien à accroissements stationnaires est stationnaire. Si maintenant μ est la puissance spectrale du processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé $X(x,\omega)$, celle du processus $\frac{d}{dx}X(x,\omega)$ est $\xi^2 d\mu(\xi)$. On est, en quelque sorte, ramené au cas précédent. Voici une illustration. On cherche à construire un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé dont la puissance spectrale soit $\mu = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{2^j}$ (en ce cas, $\int_{|\xi|\le 1} d\mu(\xi) = \infty$). On emploie la méthode précédente. Le processus stationnaire que l'on va d'abord calculer aura pour puissance spectrale $\nu = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j}\delta_{2^j}$. Prenons une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\psi(x)$ est égale à 1 en 1, nulle hors de $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. La base o.n. $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n, d\nu)$ est alors $\{2^{-j}\psi(2^{-j}x) : j \in \mathbb{Z}\}$. Donc, la fonction φ_j est déterminée par $\widehat{\varphi}_j(-\xi) = 2^{-j}\psi(2^{-j}\xi)\nu = 2^j\delta_{2^j}$ ou encore $\varphi_j(x) = \frac{2^j}{2\pi}e^{-i2^j x}$. Finalement, le processus stationnaire est

$$\frac{d}{dx}X(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j(\omega)2^j e^{-i2^j x}.$$

Cette série dérivée converge au sens des distributions tempérées. On en déduit formellement

$$X(x,\omega) = i\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j(\omega)e^{-i2^j x},$$

où cette fois-ci, la composante infra-rouge $\sum_{j<0} \cdot$ diverge. On a besoin et on peut faire une renormalisation additive sur ce processus selon le procédé qu'on a fait au début de cette sous-section. Prenons alors une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \varphi dx = 1$, considérons ensuite une distribution tempérée S_j définie par

$$\langle S_j, u\rangle = \langle e^{-i2^j x}, u - \lambda_u \varphi\rangle,$$

où λ_u est l'intégrale de u. Il vient $S_j = e^{-i2^j x} - \widehat{\varphi}(2^j)$, alors on a une renormalisation additive de $X(x,\omega)$ en écrivant

$$X^r(x,\omega) = i \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j(\omega)\big(e^{-i2^j x} - \widehat{\varphi}(2^j)\big).$$

Ce processus converge presque sûrement au sens des distributions tempérées et l'on a $\langle X(\cdot,\omega), u\rangle = \langle X^r(\cdot,\omega), u\rangle$ pour tout $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Remarquons que, le choix de φ étant par ailleurs arbitraire, la seule condition sur φ est $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Alors on peut prendre $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ si $|\xi| \le \frac{1}{2}$ et $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge 1$, ce qui implique

$$X^r(x,\omega) = i \sum_{j<0} g_j(\omega)(e^{-i2^j x} - 1) + i \sum_{j\ge 0} g_j(\omega) e^{-i2^j x}.$$

- **Processus gaussien à accroissements d'ordre supérieur stationnaires**

Dans cette sous-section, on fait une brève présentation des processus gaussiens généralisés à accroissements d'ordre supérieur stationnaires. Cela généralise la définition des processus gaussiens à accroissements stationnaires généralisés . Ici encore nous suivons le travail fondamental de G. Matheron, à ceci près que nous remplaçons l'espace vectoriel Λ_k $(k \in \mathbb{N})$ utilisé par Matheron par l'espace $\mathcal{S}_k$ que nous définissons maintenant

$$\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int x^\alpha u(x) dx = 0,\ \forall\, |\alpha| \le k \Big\}.$$

Alors la définition des processus gaussiens à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisés est la suivante.

Définition 1.9. *Un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé est, par définition, une application linéaire continue $J : \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tous $u, v \in \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\mathbb{E}\Big[J(u)\overline{J(v)}\Big] = \mathbb{E}\Big[J(u_a)\overline{J(v_a)}\Big],$$

où $u_a(x) = u(x-a)$ et $v_a(x) = v(x-a)$.

Remarquons que, avec cette définition, on peut considérer un processus gaussien stationnaire généralisé comme un processus gaussien à 0-accroissements stationnaires généralisé si on suppose $\mathcal{S}_{-1}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; et que, un processus gaussien à accroissements stationnaires généralisé est un processus gaussien à 1-accroissements stationnaires généralisé. De plus, il est clair que, un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé est à $(k'+1)$-accroissements stationnaires si $k' > k$.

Voici quelque théorèmes.

Théorème 1.10. *Soit $J : \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé. Alors presque sûrement en ω, il existe une distribution tempérée $X(x,\omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout $u \in \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n)$, on ait $\langle X(\cdot,\omega), u\rangle = J(u)$.*

Démonstration. Nous savons que

$$J(u) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle S_m, u\rangle g_m(\omega),$$

où $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $H(\Omega)$ et où $S_m : \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ sont les applications linéaires continues. Prenons une suite de fonctions $\{\varphi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq k\}$ telle que

$$\varphi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad \int x^\beta \varphi_\alpha(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta = \alpha, \\ 0 & \text{si} \quad \beta \neq \alpha,\ |\beta| \leq k. \end{cases}$$

Par exemple, on peut prendre $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\varphi}_\alpha(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\varphi(\xi)$, où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi = 1$ au voisinage de 0. Définissons ensuite des distributions tempérées $\widetilde{S}_m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\widetilde{S}_m(u) = S_m\Big(u - \sum_{|\alpha|\leq k} \lambda_u^\alpha \varphi_\alpha\Big), \qquad \lambda_u^\alpha = \int x^\alpha u(x)dx.$$

Alors, le processus $X(x,\omega) \triangleq \sum g_m(\omega)\widetilde{S}_m$ converge presque sûrement au sens des distributions tempérées et l'on a $\langle X(\cdot,\omega), u\rangle = J(u)$, pour tout $u \in \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n)$. □

Théorème 1.11. *1) Soit $J : \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé. Alors il existe une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, unique, notée μ, telle que pour tout $u \in \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{u}$ nulle au voisinage de 0, on ait*

$$\mathbb{E}\big[|J(u)|^2\big] = \int |\widehat{u}(\xi)|^2 d\mu(\xi).$$

Cette mesure μ est définie comme la puissance spectrale du processus J.
2) Soit μ la puissance spectrale d'un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé. Alors μ est à croissance lente à l'infini, c'est à dire qu'il existe un entier N et une constante C, telles que pour tout $R \geq 1$

$$\int_{1\leq|\xi|\leq R} d\mu(\xi) \leq CR^N;$$

de plus, la mesure μ satisfait

$$\int_{0<|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k+2} d\mu(\xi) < \infty.$$

Théorème 1.12. *Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et à croissance lente à l'infini, telle que*

$$\int_{0<|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k+2} d\mu(\xi) < \infty$$

pour un entier positif $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé dont μ est la puissance spectrale. De plus, si la mesure μ satisfait

$$\int_{0<|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k} d\mu(\xi) < \infty,$$

alors ce processus est à k-accroissements stationnaires.

Maintenant, quelque notations. Soit $J : \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé. Pour tout j entre 1 et n, définissons le processus dérivé $\partial_j J : \mathcal{S}_{k-1}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ par $\partial_j J(u) = -J(\partial_j u)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, définissons le processus accroissement $\triangle_a J : \mathcal{S}_{k-1}(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ par $\triangle_a J(u) = J(u - u_a)$. Avec ces notations, on a le théorème suivant.

Théorème 1.13. *Soient $k > 0$ et $J : \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^n) \mapsto H(\Omega)$ un processus gaussien à $(k+1)$-accroissements stationnaires généralisé dont μ est la puissance spectrale. Alors on a*
1) $\partial_j J$ est un processus gaussien à k-accroissements stationnaires généralisé dont $\xi_j^2 \mu$ est la puissance spectrale.
2) $\triangle_a J$ est un processus gaussien à k-accroissements stationnaires généralisé dont $|1 - e^{-ia\xi}|^2 \mu$ est la puissance spectrale.

Si on considère le cas $k = 0$ dans le théorème 1.13, $\xi_j^2 \mu$ coicide la puissance spectrale de $\partial_j J$ (il est stationnaire, donc sa puissance spectrale est définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier) sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, de même pour le processus $\triangle_a J$.

Avant de finir cette sous-section, cherchons le processus gaussien généralisé de dimention n (stationnaire, à accroissements stationnaires ou à accroissements d'ordre supérieur stationnaires) dont la puissance spectrale est $d\mu(\xi) = |\xi|^{-2s} d\xi$, où $s \in \mathbb{R}$. Prenons la base o.n. d'ondelettes de Meyer

$$\left\{ \psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{nj}{2}} \psi(2^j x - k) : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\widehat{\psi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$ ou $|\xi| \geq \frac{8\pi}{3}$. Alors

$$\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi|^s \widehat{\psi}_{j,k}(-\xi) : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

est une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Considérons ensuite les fonctions $\varphi_{j,k}$ déterminées par

$$\widehat{\varphi}_{j,k}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi|^s \widehat{\psi}_{j,k}(\xi) d\mu(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi|^{-s} \widehat{\psi}_{j,k}(\xi),$$

il vient

$$\varphi_{j,k}(x) = \frac{2^{j(\frac{n}{2}-s)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \Psi_s(2^j x - k),$$

où $\Psi_s = \wedge^{-s} \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nous écrirons, pour alléger les notations, Ψ au lieu de Ψ_s. Définissons formellement

$$X(x,\omega) = (2\pi)^n \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g_{j,k}(\omega) \varphi_{j,k}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} 2^{j(\frac{n}{2}-s)} g_{j,k}(\omega) \Psi(2^j x - k),$$

où $\{g_{j,k} : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{Z}^n\}$ est une suite o.n. de $H(\Omega)$. Remarquons que μ est une mesure de Radon à croissance lente à l'infini et que $\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2m+2} d\mu(\xi) < \infty$ si et seulement si $s < m + \frac{n}{2} + 1$. Alors d'après le théorème 1.12, on sait que le processus $X(x,\omega)$ est stationnaire si $s < \frac{n}{2}$, ou à $(m+1)$-accroissements stationnaires si $m + \frac{n}{2} \leq s < m + \frac{n}{2} + 1$. Quand $s \geq \frac{n}{2}$, la composante infra-rouge $\sum_{j<0} \cdot$ du processus $X(x,\omega)$ diverge. On en fera une renormalisation additive selon le théorème 1.10. Soit maintenant $m+\frac{n}{2} \leq s < m+\frac{n}{2}+1$. Prenons d'abord une suite de fonctions

$$\{\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m\}$$

telle que

$$\widehat{\phi}_\alpha(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\phi(\xi),$$

où $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\phi = 1$ au voisinage de 0. Cherchons ensuite des distributions tempérées $S_{j,k} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$S_{j,k}(u) = \Big\langle \Psi(2^j x - k), u - \sum_{|\alpha|\leq m} \lambda_u^\alpha \phi_\alpha \Big\rangle, \qquad \lambda_u^\alpha = \int x^\alpha u(x)dx.$$

Ceci équivaut à

$$S_{j,k} = \Psi(2^j x - k) - \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \Psi(2^j x - k), \phi_\alpha\rangle x^\alpha.$$

On a donc une renormalisation additive de $X(x,\omega)$ en écrivant

$$X^r(x,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{j(\frac{n}{2}-s)} g_{j,k}(\omega) S_{j,k}.$$

Remarquons qu'il existe deux entiers $j_0 < j_1$ tels que

$$\langle \Psi(2^j x - k), \phi_\alpha\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j > j_1, \\ \frac{2^{j|\alpha|}}{\alpha!}\partial^\alpha \Psi(-k) & \text{si} \quad j < j_0. \end{cases}$$

Ceci implique $S_{j,k} = \Psi(2^j x - k)$ pour tout $j > j_1$, et que pour tout $j < j_0$

$$S_{j,k} = \Psi(2^j x - k) - \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha \Psi(-k)(2^j x)^\alpha.$$

On a obtenu une renormalisation additive de la composante infra-rouge.

• Indépendance et l'équivalence des processus gaussiens généralisés

Dans cette sous-section, on va définir l'indépendance et l'équivalence des processus gaussiens généralisés. C'est une généralisation des définitions usuelles en théorie des processus.

Soient $X(x,\omega)$ et $Y(x,\omega)$ deux processus gaussiens généralisés. On dit qu'ils sont indépendants si pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles, les deux v.a. $\langle X(\cdot,\omega), u\rangle$ et $\langle Y(\cdot,\omega), v\rangle$ sont indépendants. Cela équivaut à

$$\mathbb{E}\Big[\langle X(\cdot,\omega), u\rangle \overline{\langle Y(\cdot,\omega), v\rangle}\Big] = 0,$$

pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Soient $X(x,\omega)$ et $Y(x,\omega)$ deux processus gaussiens généralisés réels. On dit qu'ils sont statistiquement équivalents si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mesurable et bornée, on a

$$\int_\Omega f\big(\langle X(\cdot,\omega), u\rangle\big) dP(\omega) = \int_\Omega f\big(\langle Y(\cdot,\omega), u\rangle\big) dP(\omega),$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles.

Quand $X(x,\omega)$ et $Y(x,\omega)$ sont deux processus aléatoires généralisés complexes. On dit qu'ils sont statistiquements équivalents si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, mesurable et bornée, on a

$$\int_\Omega f\big(\langle X_r(\cdot,\omega),u\rangle, \langle X_i(\cdot,\omega),u\rangle\big)dP(\omega) = \int_\Omega f\big(\langle Y_r(\cdot,\omega),u\rangle, \langle Y_i(\cdot,\omega),u\rangle\big)dP(\omega).$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles, où X_r et Y_r sont les parties réelles de X et Y, X_i et Y_i sont leurs parties imaginaires.

Notons simplement $X(x,\omega) \sim Y(x,\omega)$ pour signifier qu'ils sont équivalents. Remarquons que, en fait, $X(x,\omega) \sim Y(x,\omega)$ équivaut à

$$\|\langle X(\cdot,\omega),u\rangle\|^2_{L^2(H(\Omega))} = \|\langle Y(\cdot,\omega),u\rangle\|^2_{L^2(H(\Omega))},$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles. En effet, dans le cas gaussien, les moments d'ordre supérieur se calculent à partir des moments d'ordre deux.

• Processus de Mumford

Le processus de Mumford bidimensionnel réel est un processus gaussien réel à accroissements stationnaires généralisé qui a été introduit par Mumford et Gidas, en vue de modéliser de certaines images naturelles, comme les nuages. Nous nous proposons d'étudier la généralisation d'un tel processus. Autrement dit, on s'intéresse à chercher les processus gaussiens généralisés (stationnaire, à accroissements stationnaires ou à accroissements d'ordre supérieur stationnaires) $X(x,\omega)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$) de sorte que l'on ait

1) auto-similarité : $\quad X(\lambda x,\omega) \sim \lambda^\alpha X(x,\omega), \qquad \forall\, \lambda > 0,$

2) invariance par rotation : $\quad X(Ax,\omega) \sim X(x,\omega), \qquad \forall\, A \in SO(n,\mathbb{R}),$

où α est un nombre réel donné. Ce processus est défini, dans le domaine de Fourier par

$$\widehat{X}(\xi,\omega) = C_\alpha \frac{Z(\xi,\omega)}{|\xi|^{\frac{n}{2}+\alpha}}, \tag{1.24}$$

où $Z(\xi,\omega)$ est le bruit blanc complexe de dimension n.

Le but de notre travail est de donner un sens à (1.24) et d'étudier les propriétés de ce processus. En fait, nous avons déjà démontré que (1.24) définit presque sûrement en ω, une distribution tempérée quand $\alpha < 0$, et que le processus ainsi défini est stationnaire, auto-similaire d'indice α et invariant par rotation. Quand $\alpha \geq 0$, il y a une divergence infa-rouge et il n'existe pas de processus stationnaire qui vérifie les propriétés précédentes. En fait, (1.24) définit un processus à accroissements stationnaires, quand α est entre 0 et 1. Pour tout $\alpha \geq 0$, nous avons utilisé une renormalisation additive pour régler cette divergence. Après la renormalisation, le processus ainsi défini perd la propriété d'auto-similarité (modulo un polynôme d'après le changement d'échelle dyadique). Le cas $\alpha = 0$ auquel nous nous intéressons particulièrement est le processus de Mumford. De plus, si $0 < \alpha < 1$, ce processus a une et une seule réalisation qui soit auto-similaire d'indice α. L'exemple le plus célèbre est celui du mouvement brownien unidimensionnel en imposant la condition nulle en l'origine.

La méthode d'étude du processus de Mumford que nous proposons est très originale. On le décompose en la somme d'une partie radiale et d'une partie orthogonale. Le but de la thèse est d'établir que la partie radiale est beaucoup plus régulière que prévu et que la partie orthogonale ne présente plus de divergence infra-rouge. Ce type d'analyse convient à des situations très variées, tant déterministes que stochastiques.

1.2 Le bruit blanc

Il y a deux sortes de bruits blancs, l'un est le bruit blanc à valeurs réelles, l'autre est le bruit blanc complexe. Commençons par le bruit blanc réel $Z(x,\omega)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$). C'est un processus gaussien stationnaire réel généralisé dont la covariance est $\Gamma = \delta_0$, où δ_0 est la masse de Dirac en 0. Revenons à la définition du processus gaussien stationnaire généralisé dans (1.12). Le bruit blanc réel $Z(x,\omega)$ vérifie donc

$$\mathbb{E}\big[\langle Z(\cdot,\omega),u\rangle\langle Z(\cdot,\omega),v\rangle\big] = \int u(x)v(x)dx,$$

pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles.

Cette définition nous indique que, l'opérateur $T(u) = \langle Z(\cdot,\omega),u\rangle$ établit une isométrie entre deux espaces de Hilbert réels $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $H_0(\Omega)$, où $H_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert gaussien réel. Ceci entraîne immédiatement la représentation générale (théorème de Paul Lévy) du bruit blanc réel

$$Z(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega)f_j(x), \tag{1.25}$$

où $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $H_0(\Omega)$, donc une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ d'après le lemme 1.14 qui suivra cette démonstration ; $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles. Rappelons ici que la série (1.25) converge au sens des distributions tempérées d'après le théorème 1.2 ; ou dans [17], les auteurs ont démontré sa convergence au sens des distributions.

Lemme 1.14. *Soit $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale des v.a. gaussiennes réelles centrées, alors ces variables aléatoires sont indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

La base o.n. $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ utilisée dans (1.25) est par ailleurs arbitraire. Changer de base o.n. conduira à un processus équivalent. En fait, il est clair que, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles, $\|\langle Z(\cdot,\omega),u\rangle\|^2_{L^2(H(\Omega))}=\|u\|^2_{L^2}$, ce qui démontre l'équivalence du processus (1.25) sous le changement de base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Passons maintenant aux bruits blancs complexes. C'est une combinaison complexe des bruits blancs réels. Plus précisemnt, il est défini par

$$Z(x,\omega) = X(x,\omega) + iY(x,\omega), \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ \omega \in \Omega) \tag{1.26}$$

où $X(x,\omega)$ et $Y(x,\omega)$ sont deux bruits blancs réels indépendants.

La représentation générale du bruit blanc complexe est quasiment identique que celle du bruit blanc réel dans (1.25). En fait, le bruit blanc complexe $Z(x,\omega)$ vérifie

$$\mathbb{E}\Big[\langle Z(\cdot,\omega),u\rangle\overline{\langle Z(\cdot,\omega),v\rangle}\Big] = 2\int u(x)\overline{v(x)}dx, \tag{1.27}$$

pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. À cet effet, l'opérateur

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle Z(\cdot,\omega), u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle X(\cdot,\omega), u\rangle + i\langle Y(\cdot,\omega), u\rangle\Big)$$

établit une isométrie entre deux espaces d'Hilbert complexes $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $H_0(\Omega)$, où $H_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert dont les éléments sont des v.a. gaussiennes complexes centrées. Alors ce qui nous donne la représentation générale du bruit blanc complexe en invoquant le lemme 1.14

$$Z(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega) f_j(x), \tag{1.28}$$

où $g_j(\omega) = g_{j,1}(\omega) + i g_{j,2}(\omega)$, $(g_{j,1}, g_{j,2})_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a., i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ (on l'appelle de nouveau, $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a., i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes) ; $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles ou complexes.

Peu d'auteurs ont observé qu'il existe des représentations du bruit blanc pour lesquelles $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$. On a, en effet :

Théorème 1.15. *Soient $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles ; $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*
1) $\sum g_j(\omega) f_j(x) = Z(x,\omega)$ est le bruit blanc réel ;
2) $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un frame exact au sens que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|f\|^2_{L^2} = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle f, f_j\rangle|^2.$$

Dans le cas complexe. Soient $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$; $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes. Alors $\sum g_j(\omega) f_j(x)$ est le bruit blanc complexe si et seulement si $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un frame exact.

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'il y a énormément de frames exacts et peu de bases o.n.. Voici un exemple. On appelle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction portée par $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, comprise entre 0 et 1 et vérifiant

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \big(\varphi(x+2l\pi)\big)^2 = 1.$$

Alors les fonctions

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{kx}{2}} \varphi(x+2l\pi) \qquad (k, l \in \mathbb{Z})$$

forment un frame exact. Donc le bruit blanc complexe unidimensionnel peut s'écrire

$$Z(x,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} g_{k,l}(\omega) e^{i\frac{kx}{2}} \varphi(x+2l\pi);$$

et le bruit blanc réel unidimensionnel s'écrit de façon similaire sous la forme

$$Z(x,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Big(g^1_{k,l}(\omega)\cos\frac{kx}{2} + g^2_{k,l}(\omega)\sin\frac{kx}{2}\Big)\varphi(x+2l\pi).$$

Remarquons que, pratiquement, on peut définir directement le bruit blanc complexe par (1.28), car on peut démontrer que, d'après (1.28) et en utilisant le théorème 1.15, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont deux bruits blancs réels indépendants.

D'après la représentation générale du bruit blanc complexe (1.28), on a immédiatement le théorème suivant.

Théorème 1.16. *La transformation de Fourier du bruit blanc complexe est encore le bruit blanc complexe à une constante multiplicative près.*

On considère dans la suite que le bruit blanc complexe sauf mention contraire. La raison pour cela est que la transformation de Fourier du bruit blanc réel n'est plus le bruit blanc réel, et que l'on espère définir le processus de Mumford dans le domaine direct ainsi que dans le domaine de Fourier en utilisant le bruit blanc et la transformation de Fourier du bruit blanc. En fait, dans le chapitre 2, on définit d'abord le processus de Mumford complexe, ensuite on peut démontrer que le processus de Mumford réel est la partie réelle du processus de Mumford complexe. On verra que tous les propriétés qu'on va donner sur le processus de Mumford complexe sont aussi vrais sur le processus de Mumford réel. Pratiquement, on a besoin de simuler le processus de Mumford réel, en particulier dans le cas bidimensionnel.

Avant finir cette section, on va décomposer le bruit blanc en somme d'une partie radiale et d'une partie orthogonale, ce qui sert comme une préparation d'étude du processus de Mumford. On verra que, la partie orthogonale du processus de Mumford est automatiquement une distribution tempérée. C'est la partie radiale du processus de Mumford qui a besoin d'une renormalisation.

Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution tempérée. La partie radiale de S, notée S_0, est définie par les deux conditions : $\langle S_0, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle$ pour toutes les fonctions radiales $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\langle S_0, \varphi\rangle = 0$ pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui orthogonales aux fonctions radiales. Alors S_0 peut se définir par

$$\langle S_0, \varphi\rangle = \Big\langle S, \int_{SO(n,\mathbb{R})} \varphi(Ax)d\rho(A)\Big\rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

où $d\rho$ est la mesure de Haar sur le groupe $SO(n,\mathbb{R})$. La partie orthogonale S_1 de S est donc $S - S_0$.

Mais dans notre problème, la partie radiale du bruit blanc peut clairement se définir en utilisant la représentation générale du bruit blanc (1.25) ou (1.28). Considérons d'abord le cas réel. En suivant P. Lévy, le bruit blanc réel est défini par une isométrie J entre deux espaces de Hilbert réels $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $H_0(\Omega)$, où $H_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert gaussien réel. Si F un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (espace réel), alors $J(F) \subset H_0(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H_0(\Omega)$. Soit $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base o.n. de $J(F)$. Alors $f_j = J^{-1}(g_j)$ est une base o.n. de F. Le bruit blanc confiné dans F est ainsi défini par la restriction de J à F, ou bien par

$$Z_F(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega) f_j(x). \tag{1.29}$$

On dit que $Z_F(x,\omega)$ est la projection du bruit blanc réel en F. Remarquons que la série (1.29) définit bien un processus gaussien généralisé puisque pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\langle Z_F(\cdot,\omega), u\rangle\|^2_{L^2(H(\Omega))} = \|P_F(u)\|^2_{L^2} \leq C(C_N(u))^2,$$

où $P_F : L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$ est la projection orthogonale sur F. Donc la série (1.29) converge presque sûrement au sens des distributions tempérées. De plus, la définition (1.29) ne dépend pas de choix de base o.n..

Considérons ensuite la projection $Z_F(x,\omega)$ du bruit blanc complexe en le sous-espace fermé $F \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ (espace complexe). Imposerons ici la condition suivante sur F

$$f \in F \qquad \Rightarrow \qquad \overline{f} \in F. \tag{1.30}$$

Notons par $\widetilde{F} = \{Re(f) : f \in F\} = \{Im(f) : f \in F\}$, alors la condition (1.30) assure que $\widetilde{F}$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (espace réel). De même comme la définition du bruit blanc complexe, $Z_F(x,\omega)$ est définit par

$$Z_F(x,\omega) = X_{\widetilde{F}}(x,\omega) + iY_{\widetilde{F}}(x,\omega),$$

où $X_{\widetilde{F}}(x,\omega)$ et $Y_{\widetilde{F}}(x,\omega)$ sont deux restrictions du bruit blanc réel en $\widetilde{F}$ indépendantes. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base o.n. de F à valeurs réelles ou complexes, alors on a immédaitement

$$Z_F(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega) f_j(x),$$

où $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a., i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes.

Maintenant, la définition de la partie radiale du bruit blanc est claire. Considérons alors le bruit blanc complexe. Notons par $H_0(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions radiales (rappelons que une fonction f est radiale si $f = f \circ A$ pour tout $A \in SO(n,\mathbb{R})$), $H_1(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions orthogonales aux fonctions radiales. Alors $L^2(\mathbb{R}^n) = H_0(\mathbb{R}^n) \oplus H_1(\mathbb{R}^n)$ et les deux espaces $H_0(\mathbb{R}^n)$ et $H_1(\mathbb{R}^n)$ vérifient (1.30). Soient $(f_{j,0})_{j\in\mathbb{N}}$ une base o.n. de $H_0(\mathbb{R}^n)$, $(f_{j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ une base o.n. de $H_1(\mathbb{R}^n)$ et $(g_{j,0},\, g_{j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes. Alors la partie radiale $Z_0(x,\omega)$ du bruit blanc complexe $Z(x,\omega)$ est donnée par

$$Z_0(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_{j,0}(\omega) f_{j,0}(x); \tag{1.31}$$

de même pour la partie orthogonale

$$Z_1(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_{j,1}(\omega) f_{j,1}(x). \tag{1.32}$$

On répète ici que, $Z_0(x,\omega)$ et $Z_1(x,\omega)$ sont les distributions tempérées et la partie réelle (resp. imaginaire) de la partie radiale du bruit blanc complexe est la partie radiale du bruit blanc réel, de même pour la partie orthongonale du bruit blanc complexe. De plus, les définitions (1.31) et (1.32) ne dépendent pas de choix de base o.n..

Une dernière remarque. On sait que

$$\left\{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \widehat{f}_{j,0} : j \in \mathbb{N}\right\}$$

est aussi une base o.n. de $H_0(\mathbb{R}^n)$. Alors la transformée de Fourier de la partie radiale du bruit blanc est encore la partie radiale du bruit blanc à une constante multiplicative près. De même pour la partie orthogonale.

1.3 Fonctions radiales

Pour nous préparer à l'étude de la régularité de la partie radiale du processus de Mumford, nous allons étudier une situation déterministe présentant les mêmes difficultés. On sait que la transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ n'est généralement qu'une fonction continue, mais quand f est une fonction radiale, on démontrera dans cette section que la transformation de Fourier de f a plus de régularité. C'est, par ailleurs, un résultat classique[9]. Dans les chapitres suivants, on verra que, la partie radiale du bruit blanc et du processus de Mumford ont la même propriété.

Le théorème principal est le suivant.

Théorème 1.17. *Soient $n \geq 2$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale. Alors la fonction $\widehat{f}$ appartient à $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, où C^s est l'espace de Hölder non homogène d'exposant s.*

En fait, dans ce théorème, quand n est un entier impair, on peut démontrer plus précisément que la fonction $\widehat{f}$ est de classe $C^{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ au sens usuel.

Pour démontrer ce théorème, on introduit d'abord la décomposition de Littlewood-Paley. On part d'une fonction radiale $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; $\widehat{\varphi}(\xi)$ est une fonction décroissante de $|\xi|$ et supportée par $|\xi| \leq 1$; $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq \frac{1}{2}$. Posons $\psi(x) = 2^n\varphi(2x) - \varphi(x)$; alors $\widehat{\psi}(\xi)$ est supportée par $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ et prend ses valeurs entre 0 et 1. Pour toute distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit

$$S_0(f) = f * \varphi, \qquad \text{et} \qquad \Delta_j(f) = f * \psi_j, \quad j \geq 0,$$

où

$$\psi_j(x) = 2^{nj}\psi(2^j x), \qquad j \geq 0.$$

Alors $S_0(f)$ et les $\Delta_j(f)$ sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et on a la convergence au sens des distributions tempérées

$$f = S_0(f) + \sum_{j \geq 0} \Delta_j(f).$$

On donne ensuite la définition de l'espace de Hölder non homogène $C^s(\mathbb{R}^n)$ quand s est positif. Si $0 < s < 1$, $C^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$ et vérifiant

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^s, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si $s = 1$, $C^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas l'espace des fonctions continûment dérivables au sens usuel, mais un ensemble plus gros. Par définition, $C^1(\mathbb{R}^n)$ est la classe de Zygmund définie par les deux conditions suivantes : f est continue et bornée et il existe une constante C telle que

$$|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)| \leq C|y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si $m < s \leq m + 1$, $C^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^m au sens usuel, et que toutes les dérivées $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \leq m$, appartiennent à $C^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

Plus généralement, en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley. Quand s est un réel quelconque, une distribution tempérée $f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ est caractérisée par

$$\|S_0(f)\|_{L^\infty} \leq C, \qquad \text{et} \qquad \|\Delta_j(f)\|_{L^\infty} \leq C2^{-js}, \quad \forall\, j \geq 0.$$

Maintenant, on donne la définition de la fonction de Bessel[1],[23] $J_\nu(z)$ d'ordre $\nu \in \mathbb{C}$; elle joue un rôle essentiel dans l'étude des fonctions radiales et est une solution de l'équation différentielle du seconde ordre suivante

$$z^2\frac{d^2f}{dz^2}+z\frac{df}{dz}+(z^2-\nu^2)f=0.$$

Plus précisement, elle est donné par

$$J_\nu(z)=\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z^2}{4})^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)},\qquad z\in\mathbb{C},\ \nu\neq-1,-2,\cdots,$$

et

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z),\qquad z\in\mathbb{C},\ n=1,2,\cdots.$$

On prend la notation $J_s(\lambda)$ dans la suite de ce texte pour signifier que l'indice s est un réel et que la variable λ est réelle et positive, ceci est le cas qu'on a besoin.

On utilisera les lemmes classiques suivants.

Lemme 1.18. *Soit $s>-\frac{1}{2}$, alors on a*

$$J_s(\lambda)=\frac{(\frac{\lambda}{2})^s}{\sqrt{\pi}\Gamma(s+\frac{1}{2})}\int_0^\pi\cos(\lambda\cos\theta)(\sin\theta)^{2s}d\theta=\frac{(\frac{\lambda}{2})^s}{\sqrt{\pi}\Gamma(s+\frac{1}{2})}\int_0^\pi e^{-i\lambda\cos\theta}(\sin\theta)^{2s}d\theta.$$

Lemme 1.19. *Il existe deux fonctions R_0 et R_1 telles que*

$$J_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos(\lambda-\frac{s\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+R_0(\lambda),$$

et

$$J_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos(\lambda-\frac{s\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+\frac{1-4s^2}{4\sqrt{2\pi}\lambda^{\frac{3}{2}}}\sin(\lambda-\frac{s\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+R_1(\lambda),$$

où R_0, R_1 et leurs dérivées vérifient

$$R_0^{(n)}(\lambda)\underset{\lambda\to\infty}{=}O(\lambda^{-\frac{3}{2}})\qquad et\qquad R_1^{(n)}(\lambda)\underset{\lambda\to\infty}{=}O(\lambda^{-\frac{5}{2}}),\qquad\forall\, n\geq0.$$

Remarque 1.20. *1) On a besoin dans la suite des propriétés de la fonction de Bessel $J_s(\lambda)$ en 0 ainsi qu'à l'infini. Le comportement de la fonction $J_s(\lambda)$ quand $\lambda\to0$ est simple. En fait on a*

$$\lim_{\lambda\downarrow0}\frac{J_s(\lambda)}{\lambda^s}=\frac{1}{2^s\Gamma(s+1)}.$$

2) Le lemme 1.19 donne une représentation asymptotique à l'ordre 0 et 1 pour la fonction de Bessel $J_s(\lambda)$ quand $\lambda\to\infty$. En fait, on sait plus généralement qu'il existe une suite de constante $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de fonction $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$J_s(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}C_m\frac{\cos(\lambda-\frac{s+m}{2}\pi-\frac{\pi}{4})}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}+R_n(\lambda),\tag{1.33}$$

où, plus précisement, les constantes C_m sont données par

$$C_m = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \big(4s^2 - (2k+1)^2\big)}{m! 8^m},$$

et le terme d'erreur satisfait

$$R_n^{(l)}(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} O(\lambda^{-n-\frac{3}{2}}), \qquad \forall\, l \geq 0.$$

3) On intéresse à la fonction de Bessel d'ordre $s = \frac{n-2}{2}$, où $n \geq 2$ est un entier. Alors s soit un entier, soit un demi-entier selon que n est pair ou impair. Indiquons ici que, quand s est un entier, alors dans la formule asymptotique (1.33), toutes les constantes C_n sont non nulles. Quand s est un demi-entier, la formule asymptotique (1.33) est une somme finie, dont le terme d'erreur est nul à partir de certain rang. Plus précisement, soit $k \in \mathbb{N}$; alors il existe une suite de constantes $(C_n)_{0\leq n\leq k}$ telles que

$$J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda) = \sum_{m=0}^{k} C_m \frac{\cos(\lambda - \frac{k+m+1}{2}\pi)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{1.34}$$

En particulier, on a

$$J_{\frac{1}{2}}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \sin\lambda.$$

Lemme 1.21. *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une constante $d_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$ telle que*

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-ix\cdot\sigma} d\sigma = d_n \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n-2}{2}}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

où $J_{\frac{n-2}{2}}$ est la fonction de Bessel d'ordre $\frac{n-2}{2}$.

Ce lemme nous donne la formule suivante qui établit une liaison entre la fonction de Bessel et la transformation de Fourier d'une fonction radiale.

Lemme 1.22. *[26] Pour toute fonction radiale $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Il existe une constante*

$$d_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

telle que

$$\widehat{f}(\xi) = d_n \int_0^\infty \Big(\int_0^\pi e^{-ir|\xi|\cos\theta} (\sin\theta)^{n-2} d\theta \Big) f(r) r^{n-1} dr.$$

Il en découle que

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r|\xi|)}{(r|\xi|)^{\frac{n-2}{2}}} f(r) r^{n-1} dr,$$

où $J_{\frac{n-2}{2}}$ est la fonction de Bessel d'ordre $\frac{n-2}{2}$.

Lemme 1.23. *Soient $s > 0$ et $g \in L^1(1, \infty)$. Posons*

$$h(\xi) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^s} e^{-ir\xi} dr, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Alors la fonction h est de classe $C^s(\mathbb{R})$.

Démonstration. La preuve se fait en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley. D'abord, on a

$$\|S_0(h)\|_{L^\infty} = \|h * \varphi\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1(1,\infty)} \|\varphi\|_{L^1}.$$

De plus

$$\Delta_j(h)(x) = h * \psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}} h(y) \psi_j(x-y) dy = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^s} \Big(\int_{\mathbb{R}} \psi_j(x-y) e^{-iry} dy \Big) dr,$$

qui implique

$$\Delta_j(h)(x) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^s} e^{-irx} \widehat{\psi}(2^{-j} r) dr,$$

d'où

$$|\Delta_j(h)(x)| \leq \int_1^\infty \frac{|g(r)|}{r^s} \widehat{\psi}(2^{-j} r) dr \leq \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} \frac{|g(r)|}{r^s} dr \leq \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} \frac{|g(r)|}{2^{(j-1)s}} dr \leq 2^s \|g\|_{L^1(1,\infty)} 2^{-js}.$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Le lemme 1.23 reste vrai si on considère cette fois-ci

$$h(\xi) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^s} e^{ir\xi} dr, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ce qui nous donne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.24. *Soient $s > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g \in L^1(1, \infty)$. Posons*

$$h(\xi) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^s} \cos(r\xi + \alpha) dr.$$

Alors la fonction h est de classe $C^s(\mathbb{R})$.

Lemme 1.25. *Soient $s > 0$ et $s \notin \mathbb{N}$, h une fonction de classe $C^s_{loc}(]0, \infty[)$. Définissons une fonction radiale H de dimension $n \geq 2$ par*

$$H(x) = h(|x|), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Alors la fonction H appartient à $C^s_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Démonstration. On va utiliser directement la définition de l'espace de Hölder pour démontrer ce lemme. Soit $m < s < m+1$, où m est un entier positif. Prenons une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = 0$ quand $x \leq \varepsilon$, où ε est un réel strictement positif. Notons par $\widetilde{h}(x) = h(x)\varphi(x)$ et $\widetilde{H}(x) = H(x)\varphi(|x|)$. On obtient donc que $\widetilde{H}(x) = \widetilde{h}(|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que la fonction $\widetilde{h}$ est de classe $C^s(\mathbb{R})$. Alors il suffit de démontrer que la fonction $\widetilde{H}$ appartient à $C^s(\mathbb{R}^n)$. Remarquons d'abord que, la fonction $\widetilde{H}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ et que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\big|\widetilde{H}(x)-\widetilde{H}(y)\big| = \big|\widetilde{h}(|x|)-\widetilde{h}(|y|)\big| \le C\big||x|-|y|\big|^{s-m} \le C|x-y|^{s-m}.$$

Ceci implique que $\widetilde{H}$ appartient à $C^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. De plus, on peut démontrer par récurrence que, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n\backslash\{0\}$, $|\alpha|\le m$, la dérivée de la fonction $\widetilde{H}$ de l'ordre α peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^\alpha \widetilde{H}}{\partial x^\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{|\alpha|}\sum_{j=1}^{2|\alpha|-1}\sum_{|\beta|\le j} C_{k,j,\beta}\widetilde{h}^{(k)}(|x|)\frac{x^\beta}{|x|^j},$$

où $C_{k,j,\beta}$ sont les constantes qui ne dépendent que de α. Alors il suffit de démontrer que, pour tout $k\in\{1,2,\cdots,m\}$ et $|\beta|\le j$, la fonction

$$f_{k,j,\beta}(x) \triangleq \widetilde{h}^{(k)}(|x|)\frac{x^\beta}{|x|^j}, \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

est de classe $C^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. Remarquons d'abord que $f_{k,j,\beta}(x)=0$ quand $|x|\le\varepsilon$. Alors $f_{k,j,\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. De plus on a, pour tout $|x|\ge\varepsilon$

$$|f_{k,j,\beta}(x)| \le \frac{\|\widetilde{h}^{(k)}\|_{L^\infty}}{|x|^{j-|\beta|}} \le \frac{\|\widetilde{h}^{(k)}\|_{L^\infty}}{\varepsilon^{j-|\beta|}},$$

qui implique qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^n$. Il reste à donner la majoration sur le module de continuité de la fonction $f_{k,j,\beta}$. Remarquons que, pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$ et $k\in\{1,2,\cdots,m\}$, on a

$$\big|\widetilde{h}^{(k)}(|x|)-\widetilde{h}^{(k)}(|y|)\big| \le C\big||x|-|y|\big|^{s-m} \le C|x-y|^{s-m}.$$

Ceci nous donne, pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x|,|y|\ge\varepsilon$ et $|x-y|<1$

$$\begin{aligned}
|f_{k,j,\beta}(x)-f_{k,j,\beta}(y)| &\le \left|\Big(\widetilde{h}^{(k)}(|x|)-\widetilde{h}^{(k)}(|y|)\Big)\frac{x^\beta}{|x|^j}\right| + \left|\widetilde{h}^{(k)}(|y|)\Big(\frac{x^\beta}{|x|^j}-\frac{y^\beta}{|y|^j}\Big)\right| \\
&\le C\frac{|x-y|^{s-m}}{\varepsilon^{j-|\beta|}} + \|\widetilde{h}^{(k)}\|_{L^\infty}\left|\frac{x^\beta}{|x|^j}-\frac{y^\beta}{|y|^j}\right|.
\end{aligned}$$

Supposons sans perdre la généralité que $|y|\le|x|$ et écrivons sous la convention $x^\beta = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{|\beta|}}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{x^\beta}{|x|^j}-\frac{y^\beta}{|y|^j}\Big| &= \Big|\sum_{l=0}^{|\beta|-1}\frac{y_{i_1}\cdots y_{i_l}(x_{i_{l+1}}-y_{i_{l+1}})x_{i_{l+2}}\cdots x_{i_{|\beta|}}}{|x|^j} + \frac{y^\beta}{|x|^j}-\frac{y^\beta}{|y|^j}\Big| \\
&\le \sum_{l=0}^{|\beta|-1}\frac{|y|^l|x|^{|\beta|-l-1}}{|x|^j}|x_{i_{l+1}}-y_{i_{l+1}}| + |y|^{|\beta|}\frac{\big||x|^j-|y|^j\big|}{|x|^j|y|^j} \\
&\le \sum_{l=0}^{|\beta|-1}\frac{|x|^l|x|^{|\beta|-l-1}}{|x|^j}|x-y| + \frac{\big||x|-|y|\big|\sum_{l=0}^{l=j-1}|x|^l|y|^{j-1-l}}{|x|^j|y|^{j-|\beta|}} \\
&\le \frac{|\beta|}{|x|^{j+1-|\beta|}}|x-y| + \frac{j}{|x||y|^{j-|\beta|}}\big||x|-|y|\big| \\
&\le \frac{|\beta|}{\varepsilon^{j+1-|\beta|}}|x-y| + \frac{j}{\varepsilon^{j+1-|\beta|}}|x-y| \\
&\le C'|x-y|^{s-m},
\end{aligned}$$

qui implique que, d'après les deux inégalités précédents

$$|f_{k,j,\beta}(x) - f_{k,j,\beta}(y)| \leq C''|x-y|^{s-m}, \qquad \forall\, |x|, |y| \geq \varepsilon.$$

Pour l'autre cas, quand $|x| \geq \varepsilon$ et $|y| \leq \varepsilon$, on a

$$|f_{k,j,\beta}(x) - f_{k,j,\beta}(y)| = \left|\Big(\widetilde{h}^{(k)}(|x|) - \widetilde{h}^{(k)}(|y|)\Big)\frac{x^\beta}{|x|^j}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon^{j-|\beta|}}|x-y|^{s-m},$$

ce qui démontre la fonction $f_{k,j,\beta}$ appartient à $C^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

La réciproque de ce lemme est vraie. C'est-à-dire que. Si la fonction H est de classe $C^s_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, alors $h \in C^s_{loc}(\,]0,\infty[\,)$. Ce résultat est immédiatement du fait que

$$\widetilde{h}^{(k)}(x) = \frac{\partial^k}{\partial_1^k}\widetilde{H}(x, 0, \cdots, 0),$$

où les fonctions $\widetilde{h}$ et $\widetilde{H}$ ont la même signification à celles dans la preuve du lemme 1.25. On généralisera ce résultat dans le chapitre 3.

• Démonstration du théorème 1.17

Démonstration. Selon le lemme 1.22, on peut décomposer $\widehat{f}(\xi)$ en une somme de deux fonctions

$$\widehat{f}(\xi) = d_n(f_1(\xi) + f_2(\xi)),$$

où

$$f_1(\xi) = \int_0^1 g(r)\Big(\int_0^\pi e^{-ir|\xi|\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}d\theta\Big)dr,$$

$$f_2(\xi) = \int_1^\infty g(r)\Big(\int_0^\pi e^{-ir|\xi|\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}d\theta\Big)dr = \frac{C}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}\int_1^\infty \frac{g(r)}{r^{\frac{n-2}{2}}}J_{\frac{n-2}{2}}(r|\xi|)dr,$$

avec

$$g(r) = r^{n-1}f(r) \in L^1(0,\infty) \qquad \text{et} \qquad C = 2^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2}).$$

Constatons que $f_1(\xi)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, donc il suffit de traiter la fonction $f_2(\xi)$.
1) Quand n est un entier paire, en utilisant le lemme 1.19, on a

$$f_2(\xi) = \frac{C}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi|\xi|}}H_1(\xi) + H_2(\xi)\Big),$$

où

$$H_1(\xi) = h_1(|\xi|) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}}\cos(r|\xi| - \frac{n-1}{4}\pi)dr,$$

$$H_2(\xi) = h_2(|\xi|) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^{\frac{n-2}{2}}}R_0(r|\xi|)dr.$$

Le corollaire 1.24 implique que h_1 est de classe $C^{\frac{n-1}{2}}_{loc}(\,]0,\infty[\,)$; donc H_1 est de clasee $C^{\frac{n-1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ d'après le lemme 1.25. De plus, remarquons que

$$R_0^{(m)}(\lambda) =_{\lambda\to\infty} O(\lambda^{-\frac{3}{2}}), \qquad \forall\, m \geq 0.$$

Alors on a, au sens usuel, $h_2 \in C^{\frac{n}{2}}(\,]0,\infty[\,)$; il en résulte que H_2 appartient à $C^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ au sens usuel, et est donc de classe de Hölder $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.
2) Quand n est un entier impair, alors d'après la remarque 1.20, il existe une suite de constantes $(C_m)_{0\leq m\leq \frac{n-3}{2}}$ telle que

$$f_2(\xi) = \sum_{m=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{C_m}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+m}} H_m(\xi),$$

où

$$H_m(\xi) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^{\frac{n-1}{2}+m}} \cos(r|\xi| - \frac{n-1+2m}{4}\pi)dr,$$

qui est de classe $C^{\frac{n-1}{2}+m}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ au sens usuel. Cela termine la démonstration. □

En utilisant la remarque 1.20 et le lemme 1.22, on peut décomposer la transformation de Fourier d'une fonction radiale de dimension $n \geq 2$ en une somme de fonctions de régularité croissante

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{m=0}^{k} C_m \frac{f_m(\xi)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+m}} + \widetilde{f}_k(\xi),$$

où

$$f_m(\xi) = \int_1^\infty \frac{g(r)}{r^{\frac{n-1}{2}+m}} \cos(r|\xi| - \alpha_m)dr \qquad \Big(g(r) = r^{n-1}f(r) \quad \text{et} \quad \alpha_m = \frac{n-1+2m}{4}\pi\Big)$$

est une fonction de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+m}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, et que la fonction $\widetilde{f}_k(\xi)$ est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+k+1}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.
On considère maintenant f_m comme une fonction unidimensionnelle, alors on a

$$\frac{d}{dR} f_m(R) = f_{m-1}(R).$$

Il en est de même pour la partie radiale du processus de Mumford, comme on le verra au chapitre 4.

Chapitre 2

Le processus de Mumford

Le processus de Mumford fait partie des processus à accroissements stationnaires que nous avons étudiés dans le premier chapitre. Le processus de Mumford bidimensionnel réel est un processus gaussien à accroissements stationaires qui a été introduit par Mumford et Gidas[19], en vue de modélisation de certaines images naturelles, comme des nuages.

Dans ce chapitre, on rappelle d'abord la définition du processus de Mumford complexe de dimension $n \geq 2$ et on le décompose en une partie radiale et une partie orthogonale. Ensuite, on fait la renormalisation additive de la partie radiale. Après cette renormalisation, le processus de Mumford converge au sens des distributions tempérées. En fait, la partie orthogonale est automatiquement une distribution tempérée. C'est la partie radiale qui a besoin d'une renormalisation.

Alors on peut étudier le processus de Mumford réel qui est la partie réelle du processus de Mumford complexe. Toutes les propriétés du processus de Mumford complexe se conservent dans le cas réel.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous revenons au problème de la renormalisation des "processus en $\frac{1}{f}$" (cf. [2], [3]) qui présentent une divergence infra-rouge. Dans le premier chapitre nous avons donné une approche très générale. Le prix à payer est qu'il faut renormaliser tous les termes "basse-fréquence". Ici, au contraire, nous souhaitons "confiner" la divergence infra-rouge en ne corrigeant que très peu de termes. Les termes corrigés dans notre nouvelle renormalisation seront les termes de "basse-fréquence" et "invariants par rotation". Le rôle des rotations est ici surprenant mais s'explique a posteriori par les deux remarques suivantes. La première est que le bruit blanc est invariant par rotation (au sens de l'invariance en loi). La seconde est que l'opérateur de Calderón $\wedge = \sqrt{-\triangle}$ qui est utilisé pour définir le processus de Mumford est aussi invariant par rotation.

Le processus de Mumford complexe de dimension $n \geq 2$: $X(x, \omega)$, $(x \in \mathbb{R}^n,\ \omega \in \Omega)$, formellement est défini par

$$X(x, \omega) = \wedge^{-\frac{n}{2}} Z(x, \omega), \tag{2.1}$$

où $\wedge = \sqrt{-\triangle}$ est l'opérateur de Calderón, et où $Z(x, \omega)$ est le bruit blanc complexe de dimension n. Alors on a formellement dans le domaine de Fourier

$$\widehat{X}(\xi, \omega) = \frac{\widehat{Z}(\xi, \omega)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}.$$

Remarquons que $\widehat{Z}(\xi,\omega)$ est encore le bruit blanc complexe de dimension n (à une constante multiplicative près). Donc ceci nous donne

$$\widehat{X}(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{Z(\xi,\omega)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.2}$$

On sait que (a posteriori), le produit entre $Z(\xi,\omega)$ et $|\xi|^{-\frac{n}{2}}$ n'est pas une distribution tempérée. Ce produit n'a aucun sens. En revanche, pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{Z(\xi,\omega)}{(\varepsilon^2+|\xi|^2)^{\frac{n}{4}}}$ a un sens et notre propos sera de savoir si

$$\widehat{X_\varepsilon}(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{Z(\xi,\omega)}{(\varepsilon^2+|\xi|^2)^{\frac{n}{4}}}$$

converge au sens des distributions tempérées quand ε tend vers 0. Nous verrons qu'il existe des constantes $C(\varepsilon)$ telles que $X_\varepsilon(x,\omega) - C(\varepsilon)$ converge au sens des distributions tempérées quand ε tend vers 0. Bien entendu, on peut ajouter à $C(\varepsilon)$ une constante ne dépendant pas de ε et $X(x,\omega)$ ne sera donc défini que modulo une constante arbitraire.

On décompose le processus de Mumford en une partie radiale et une partie orthogonale en utilisant les mêmes notations que pour le bruit blanc. Soient $Z_0(x,\omega)$ la partie radiale du bruit blanc de dimension n et $Z_1(x,\omega)$ la partie orthogonale. Remarquons que la transformation de Fourier de la partie radiale (resp. orthogonale) du bruit blanc est encore la partie radiale (resp. orthogonale) du bruit blanc à une constante multiplicative près. Donc on peut définir la partie radiale $X_0(x,\omega)$ et la partie orthogonale $X_1(x,\omega)$ du processus de Mumford de façon équivalente, dans le domaine direct ou le domaine de Fourier par

$$X_0(x,\omega) = \wedge^{-\frac{n}{2}} Z_0(x,\omega) \qquad \text{ou} \qquad \widehat{X}_0(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{Z_0(\xi,\omega)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}, \tag{2.3}$$

et

$$X_1(x,\omega) = \wedge^{-\frac{n}{2}} Z_1(x,\omega) \qquad \text{ou} \qquad \widehat{X}_1(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{Z_1(\xi,\omega)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.4}$$

On démontrera dans la section suivante, que la partie orthogonale $X_1(x,\omega)$ est automatiquement une distribution tempérée. C'est la partie radiale $X_0(x,\omega)$ qui a besoin d'une renormalisation additive.

D'après la définition du processus de Mumford dans le domaine de Fourier donnée par (2.2) et la représentation générale du bruit blanc donnée par (1.28), on a formellement une représentation générale du processus de Mumford dans le domaine de Fourier

$$\widehat{X}(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(\omega) \frac{f_j(\xi)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}, \tag{2.5}$$

où $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le choix de la base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$ joue un rôle essentiel dans le problème de la convergence. La norme de ξ qui apparait dans la définition du processus de Mumford nous incite à prendre une base définie en cordonneés polaires ; autrement dit : une base adaptée à notre problème.

On introduit d'abord les harmoniques sphériques[12], [18], [26] de dimension $n \geq 2$.

Soit $l \in \mathbb{N}$. Notons par $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})$ l'espace des harmoniques sphériques de degrée l. Alors on sait que $L^2(\mathbb{S}^{n-1}) = \bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})$ et

$$N_l \triangleq dim\Big(\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})\Big) = C_{n+l-1}^{n-1} - C_{n+l-3}^{n-1}.$$

Soit de plus

$$\big\{Y_{l,m}(\sigma) : \sigma \in \mathbb{S}^{n-1},\, m \in \mathbb{I}_l \triangleq \{1, 2, \cdots, N_l\}\big\}$$

une base o.n. de $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})$. Alors on a

$$\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m} = \lambda_l Y_{l,m}, \qquad \lambda_l = -l(l+n-2), \tag{2.6}$$

où $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami qu'on va définir ci-dessous.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, considérons le changement de variable en cordonnées polaires

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& r\cos\theta_1, \\ x_2 &=& r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ && \cdots\cdots \\ x_{n-1} &=& r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\phi, \\ x_n &=& r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\phi, \end{array}$$

où $r = |x|$, $\theta_j \in [0, \pi]$ $(1 \leq j \leq n-2)$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. Alors l'opérateur Laplacien $\triangle$ se calcule dans la cordonnée polaire

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}}{r^2}.$$

Il vient donc

$$\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} = r^2\triangle - r^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big) - (n-1)r\frac{\partial}{\partial r}, \tag{2.7}$$

ou en fonction de $(\theta_1, \cdots, \theta_{n-2}, \phi)$

$$\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} = \frac{1}{\sin^{n-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big(\sin^{n-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^{n-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\Big(\sin^{n-3}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\Big)$$
$$+ \cdots\cdots + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Remarque 2.1. *1) En particulier, $\mathcal{H}_0(\mathbb{S}^{n-1})$ est le sous-espace de $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ engendré par $Y_{0,0}(\sigma) = \big(m(\mathbb{S}^{n-1})\big)^{-\frac{1}{2}}$. Rappelons ici que, la superficie de $\mathbb{S}^{n-1}$ est $m(\mathbb{S}^{n-1}) = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.*
2) Quand $n = 2$. On a pour $l \geq 1$, $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^1)$ est le sous-espace de $L^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par

$$\Big\{\frac{e^{il\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-il\theta}}{\sqrt{2\pi}} : \theta \in [0, 2\pi]\Big\}.$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami est $\triangle_{\mathbb{S}^1} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.
3) Quand $n = 3$. Suivons les notations des physiciens. On a

$$\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2) = Vect\big\{Y_l^m(\sigma) : -l \leq m \leq l\big\},$$

où

$$Y_l^m(\sigma) = c_l^m P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi},$$

avec

$$\sigma = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta), \qquad \theta \in [0,\pi], \qquad \phi \in [0, 2\pi],$$

$$c_l^m = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}},$$

et les fonctions P_l^m *sont les polynômes associées de Legendre*

$$P_l^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}}\big(P_l(t)\big), \qquad P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l.$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami est

$$\triangle_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Prenons la base de Malvar-Wilson[13]

$$\{w_{j,k}(r) : r > 0,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\},$$

qui est une base o.n. de $L^2(0,\infty)$ et donnée par

$$w_{j,k}(r) = 2^{\frac{j}{2}} w(2^j r)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^j r], \tag{2.8}$$

où w est une fonction C^∞, supportée par $[\frac{1}{3}, 3]$, et vérifie certaines conditions fonctionnelles. Alors à partir de la base de Malvar-Wilson, on construit une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n, dx) = L^2(\,]0,\infty[\times\mathbb{S}^{n-1}, r^{n-1}drd\sigma)$ par

$$w_{j,k,l,m}(x) = \frac{w_{j,k}(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}} Y_{l,m}(\sigma), \tag{2.9}$$

où

$$j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{I}_l \qquad \text{et} \qquad x = r\sigma.$$

Ceci nous donne, en utilisant cette base dans le domaine de Fourier

$$\widehat{X}(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}, \tag{2.10}$$

où les v.a. $g_{j,k,l,m}$ sont i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes.

Avant commencer à donner les formules explicites sur la partie radiale et la partie orthogonale du processus de Mumford, on énonce d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Soit* $W_d(\mathbb{R}^n)$ *(*$d \in \mathbb{N}$*) le sous-espace fermé de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *engendré par la suite orthogonale*

$$\big\{w_{j,k,l,m}(x) : x \in \mathbb{R}^n,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N},\ 0 \le l \le d,\ m \in \mathbb{I}_l\big\}.$$

Alors $W_d(\mathbb{R}^n)$ *est invariant par conjugaison et par la transformation de Fourier.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $f, g \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ et que $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} f = \lambda_l f$, $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} g = \lambda_l' g$, $l \neq l'$, où $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami et λ_l, λ_l' sont les différents valeurs propres de $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}$, alors on a

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\sigma)g(\sigma)d\sigma = 0,$$

car l'opérateur de Laplace-Beltrami $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est auto-adjoint sur $\mathbb{S}^{n-1}$.
Commençons la démonstration. On sait que $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{Y_{l,m}} = \overline{\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}} = \lambda_l \overline{Y_{l,m}}$, ce qui nous donne immédiatement

$$\langle \overline{w_{j,k,l,m}}, w_{j',k',l',m'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \qquad \text{quand } l \neq l'.$$

D'où $\overline{w_{j,k,l,m}} \in W_d(\mathbb{R}^n)$ pour tout $0 \leq l \leq d$. Alors on a évidemment $\overline{f} \in W_d(\mathbb{R}^n)$ pour tout $f \in W_d(\mathbb{R}^n)$. On démontre ensuite que $W_d(\mathbb{R}^n)$ est invariant par la transformation de Fourier. Pour cela, il suffit de démontrer

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}_{j,k,l,m}(\xi)\overline{w_{j',k',l',m'}(\xi)}d\xi = 0 \qquad \text{quand } l \neq l'.$$

En fait, ceci est une conséquence évidente da la propriété suivante

$$\left\langle \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)e^{i\lambda\sigma\cdot\sigma'}d\sigma, Y_{l',m'}(\sigma') \right\rangle_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} = 0, \qquad l \neq l',\ \lambda \in \mathbb{R},$$

mais ceci est un donné par le théorème suivant. □

Théorème 2.3. *(Formule de Funk-Hecke) Soient $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})$ l'espace des harmoniques sphériques de degré $l \in \mathbb{N}$. Alors pour toutes les fonctions $Y_l(\sigma) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})$ et pour tout $\sigma' \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\sigma\cdot\sigma')Y_l(\sigma)d\sigma = C(l,f)Y_l(\sigma'),$$

où $C(l,f)$ est une constante et qui est donnée par

$$C(l,f) = \frac{(-1)^l \pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{l-1}\Gamma(l+\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^{1} f(t)\frac{d^l}{dt^l}(1-t^2)^{l+\frac{n-3}{2}}dt.$$

Revenons à la définiton de la partie radiale et la partie orthogonale du processus de Mumford dans (2.3) et (2.4). On sait que

$$\{w_{j,k,0,0}(x) : x \in \mathbb{R}^n,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$$

est une base o.n. de $H_0(\mathbb{R}^n) = W_0(\mathbb{R}^n)$ et

$$\{w_{j,k,l,m}(x) : x \in \mathbb{R}^n,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{I}_l\}$$

est une base o.n. de $H_1(\mathbb{R}^n) = W_0(\mathbb{R}^n)^\perp$. Alors $X_0(x,\omega)$ et $X_1(x,\omega)$ s'écrivent dans le domaine de Fourier en utilisant la base de Malvar-Wilson

$$\widehat{X}_0(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega)\frac{w_{j,k,0,0}(\xi)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}, \tag{2.11}$$

$$\widehat{X}_1(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}^*} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.12}$$

Remarquons ici que, les trois formules (2.10), (2.11) et (2.12) restent encore formelles pour le moment.

2.2 Réalisation du processus de Mumford

L'objectif de cette section est de donner une renormalisation additive pour que les séries (2.11) et (2.12) convergent au sens des distributions tempérées. En fait, on se propose de démontrer la convergence ou d'effectuer la réalisation sur le processus $\frac{Z(\xi,\omega)}{|\xi|^s}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, où $Z(\xi, \omega)$ est le bruit blanc complexe de dimension $n \geq 2$. On énonce d'abord le théorème principal et on donne les détails de la renormalisation dans la suite de cette section.

Théorème 2.4. *Presque sûrement en ω, la partie orthogonale du processus de Mumford est une distribution tempérée. Après une renormalisation additive, la partie radiale est aussi une distribution tempérée.*

On démontrera la convergence dans le domaine de Fourier en utilisant la base de Malvar-Wilson et les formules (2.11), (2.12). En fait, les six propositions suivantes 2.5 $\sim$ 2.10 entraînent immédiatement le théorème 2.4 et la réalisation du processus $\frac{Z(\xi,\omega)}{|\xi|^s}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Leurs démonstrations se trouvent dans la section suivante.

Dans la suite de cette section, les fonctions $w_{j,k,l,m}$ sont la base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$ qu'on a définie dans (2.9) et les v.a. $g_{j,k,l,m}$ sont i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes.

Définissons tout d'abord une fonction $C^{\alpha}_{j,k,l,m}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\sigma^{\alpha} d\sigma \int_0^{\infty} w_{j,k}(r) r^{|\alpha|+\frac{n-1}{2}-s} dr, \tag{2.13}$$

où $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{I}_l$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Indiquons ici que, la fonction x^{α} est un polynôme homogène de degré $|\alpha|$. Alors $\sigma^{\alpha} \in \bigoplus_{l=0}^{|\alpha|} \mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})$, ce qui implique

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\sigma^{\alpha} d\sigma = 0, \qquad \forall\, l > |\alpha|.$$

D'où

$$C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s) = 0, \qquad \forall\, l > |\alpha|. \tag{2.14}$$

Commençons à énoncer les propositions suivantes.

Proposition 2.5. *Presque sûrement en ω, la demi-série*

$$T^{-}_{0,s}(\xi,\omega) = \sum_{j<0} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega) \frac{w_{j,k,0,0}(\xi)}{|\xi|^s}$$

converge au sens des distributions tempérées pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.6. *Presque sûrement en ω, la demi-série*

$$T^{+}_{0,s}(\xi,\omega) = \sum_{j\geq 0} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega) \frac{w_{j,k,0,0}(\xi)}{|\xi|^s}$$

converge au sens des distributions tempérées pour tout $s < \frac{n}{2}$.

Proposition 2.7. *Soit $\frac{n}{2}+d \leq s < \frac{n}{2}+d+1$, où d est un entier positif. Posons*

$$T^{+}_{0,s}(\xi,\omega) = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega)\Big(\frac{w_{j,k,0,0}(\xi)}{|\xi|^s} - \sum_{|\alpha|\leq d} C^{\alpha}_{j,k,0,0}(s)\partial^{\alpha}\delta_0\Big),$$

où les constantes $C^{\alpha}_{j,k,0,0}(s)$ sont données dans (2.13). Alors ω-presque sûrement, $T_s(\xi,\omega)$ est une distribution tempérée.

Proposition 2.8. *Presque sûrement en ω, la demi-série*

$$T^{-}_{1,s}(\xi,\omega) = \sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}$$

converge au sens des distributions tempérées pour tout $s\in\mathbb{R}$.

Proposition 2.9. *Presque sûrement en ω, la demi-série*

$$T^{+}_{1,s}(\xi,\omega) = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}$$

converge au sens des distributions tempérées pour tout $s<\frac{n}{2}$.

Proposition 2.10. *Soit $\frac{n}{2}+d \leq s < \frac{n}{2}+d+1$, où d est un entier positif. Posons*

$$T^{+}_{1,s}(\xi,\omega) = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)\Big(\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s} - \sum_{|\alpha|\leq d} C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)\partial^{\alpha}\delta_0\Big),$$

où les constantes $C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)$ sont données dans (2.13). Alors ω-presque sûrement, $T_s(\xi,\omega)$ est une distribution tempérée.

Compte tenu les deux propositions 2.5 et 2.7 (en prenant $s=\frac{n}{2}$), on a réalisé la renormalisation additive sur la partie radiale du processus de Mumford. En outre, d'après (2.14), on a $C^{0}_{j,k,l,m}(\frac{n}{2})=0$ quand $l>0$. Alors la partie orthogonale du processus de Mumford est automatiquement une distribution tempérée d'après les propositions 2.8 et 2.10 (en prenant $s=\frac{n}{2}$). On l'énonce maintenant comme un théorème dans le domaine direct.

On donne d'abord quelques notations. Soit

$$\{f_{j,k,l,m} : j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N},\ l\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{I}_l\}$$

la base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\widehat{f}_{j,k,l,m}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w_{j,k,l,m}(\xi).$$

Alors la fonction $\widetilde{f}_{j,k,l,m} = \wedge^{-\frac{n}{2}} f_{j,k,l,m}$ satisfait

$$\widetilde{f}_{j,k,l,m}(x) = \widetilde{f}_{0,k,l,m}(2^{-j}x).$$

Notons simplement $h_{k,l,m}(x) = \widetilde{f}_{0,k,l,m}(x)$. Alors elle est déterminé dans le domaine de Fourier par

$$\widehat{h}_{k,l,m}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} Y_{l,m}(\sigma) \frac{w(r)}{r^{n-\frac{1}{2}}} \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r], \qquad \xi = r\sigma. \tag{2.15}$$

On observe que

$$\widetilde{f}_{j,k,l,m}(x) = h_{k,l,m}(2^{-j}x).$$

On observe aussi que la fonction $h_{k,l,m}$ est de classe de Schwartz, et que

$$\partial^\alpha h_{k,l,m}(0) = 0, \qquad \forall\, |\alpha| < l.$$

Théorème 2.11. *Notons par*

$$X_0^r(x,\omega) = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega)\Big(h_{k,0,0}(2^{-j}x) - c_k\Big) + \sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega) h_{k,0,0}(2^{-j}x),$$

et

$$X_1(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) h_{k,l,m}(2^{-j}x),$$

où les fonctions $h_{k,l,m}$ sont données dans (2.15) et où

$$c_k = \Big(\frac{m(\mathbb{S}^{n-1})}{(2\pi)^n}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{w(r)}{\sqrt{r}} \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr = h_{k,0,0}(0).$$

Alors ω-presque sûrement, $X_0^r(x,\omega)$ et $X_1(x,\omega)$ sont des distributions tempérées. $X_0^r(x,\omega)$ est la renormalisation additive de la partie radiale du processus de Mumford, et la renormalisation additive du processus de Mumford est $X^r(x,\omega) = X_0^r(x,\omega) + X_1(x,\omega)$. En outre, $X^r(x,\omega)$ est un processus gaussien à accroissements stationnaires, invariant par rotation et pour tout $j\in\mathbb{Z}$, il existe une v.a. $C_j(\omega)$ telle que

$$X^r(2^j x,\omega) \sim X^r(x,\omega) + C_j(\omega).$$

D'après ce théorème, on sait que le processus de Mumford converge dans $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$ et le rôle de la renormalisation est d'assurer la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En outre, la partie qu'on a renormalisée est divergente. Notons d'abord

$$g_j(\omega) = \frac{1}{\|c\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k g_{j,k,0,0}(\omega), \qquad \forall\, j\in\mathbb{N},$$

où

$$\|c\|_{l^2} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} (c_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes. Avec cette notation, la partie qu'on a renormalisée devient

$$\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k g_{j,k,0,0}(\omega) = \|c\|_{l^2} \sum_{j\geq 0} g_j(\omega).$$

Ceci implique sa divergence en utilisant le théorème suivant de P. Lévy.

Théorème 2.12. *Posons* $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} g_j(\omega)$, *où* $(g_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a., i.i.d. de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$. *Alors* ω*-presque sûrement*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{\sqrt{2n\log n}} = 1.$$

Compte tenu les propositions 2.5 $\sim$ 2.10, la propriété (2.14) et la représentation générale du bruit blanc $Z(\xi,\omega)$ de dimension $n \geq 2$ dans (1.28), on a le théorème suivant, qui démontre la convergence du processus $\frac{Z(\xi,\omega)}{|\xi|^s}$ quand $s < \frac{n}{2}$ et donne sa réalisation quand $s \geq \frac{n}{2}$.

Théorème 2.13. *Considérons le bruit blanc* $Z(\xi,\omega)$ *de dimension* $n \geq 2$ *et sa représentation dans la base de Malvar-Wilson*

$$Z(\xi,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) w_{j,k,l,m}(\xi).$$

1) Soit $s < \frac{n}{2}$. *Alors presque sûrement en* ω, *la série*

$$\frac{Z(\xi,\omega)}{|\xi|^s} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) \frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}$$

converge au sens des distributions tempérées.
2) Soit $\frac{n}{2} + d \leq s < \frac{n}{2} + d + 1$, *où* d *est un entier positif. Alors presque sûrement en* ω, *la série*

$$\sum_{j<0} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) \frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s} + \sum_{j\geq 0} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l>d} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) \frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}$$

$$+ \sum_{j\geq 0} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l=0}^{d} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) \Big(\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s} - \sum_{l\leq|\alpha|\leq d} C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s) \partial^{\alpha} \delta_0 \Big)$$

converge au sens des distributions tempérées, où les constantes $C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)$ *sont données dans (2.13). Ce qui donne une réalisation du processus* $\frac{Z(\xi,\omega)}{|\xi|^s}$ *quand* $s \geq \frac{n}{2}$.

La renormalisation qu'on a fait dans 2) de ce théorème n'est pas triviale. En fait, quand $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est fixé

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} |C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)|^2 \\
= \; & \frac{1}{(\alpha!)^2} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\sigma^{\alpha} d\sigma \Big)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\int_0^{\infty} w_{j,k}(r) r^{|\alpha|+\frac{n-1}{2}-s} dr \Big)^2 \\
= \; & 2^{2j(s-\frac{n}{2}-|\alpha|)} \frac{\|\sigma^{\alpha}\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}}{(\alpha!)^2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\int_0^{\infty} r^{|\alpha|+\frac{n-1}{2}-s} w(r) \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r] dr \Big)^2.
\end{aligned}$$

Alors il existe une constante $C_{\alpha}(s) > 0$ telle que

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} |C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = C_{\alpha}(s) 2^{j(s-\frac{n}{2}-|\alpha|)}.$$

Il en résulte que, la série

$$\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)g_{j,k,l,m}(\omega) = C_\alpha(s)\sum_{j\geq 0} 2^{j(s-\frac{n}{2}-|\alpha|)}g_j(\omega),$$

diverge presque sûrement puisque $s-\frac{n}{2}-|\alpha|\geq s-\frac{n}{2}-d\geq 0$.

Avant finir cette section, on parle quelque mots sur le processus de Mumford réel. Il est défini par $X(x,\omega)=\wedge^{-\frac{n}{2}}Z(x,\omega)$, où $Z(x,\omega)$ est le bruit blanc réel de dimension n. Remarquons que le bruit blanc complexe est une combinaison complexe des bruits blancs réels et que $\wedge^{-\frac{n}{2}}f$ est réelle si f est une fonction réelle. Alors le processus de Mumford réel est la partie réelle du processus de Mumford complexe, ainsi que sa partie radiale ou orthogonale. Donc l'étude du processus de Mumford réel se ramème à l'étude du processus de Mumford complexe, et que tous les propriétés (convergence, régularité, etc...) du processus de Mumford complexe se transmettent au cas réel.

2.3 Démonstration de la convergence

On démontre les six propositions 2.5 $\sim$ 2.10 dans cette section. Établissons d'abord quelque lemmes. Le lemme suivant donne une estimation uniforme sur une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ce lemme joue un rôle central tout au long de notre problème.

Lemme 2.14. *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors il existe une v.a. $C(\omega)$ qui est presque sûrement finie telle que*

$$|g_n(\omega)|\leq C(\omega)\sqrt{\log(n+2)}.$$

Ce lemme est optimal puisque on peut démontrer une propriété plus forte. En fait on a ω-presque sûrement

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|g_n(\omega)|}{\sqrt{2\log n}}=1.$$

Dans notre problème, on considère très souvent une suite de v.a. indexées par $\mathbb{Z}^m$. Par exemple, une suite de v.a. $\{g_{j,k}(\omega):\omega\in\Omega,\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\}$, i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors on peut réordonner cette suite en une suite $\{g_n(\omega):\omega\in\Omega,\ n\in\mathbb{N}\}$ de sorte que n soit de l'ordre de grandeur $(1+|j|+k)^2$. Ceci nous donne, d'après le lemme précédent

$$|g_{j,k}(\omega)|\leq C(\omega)\sqrt{\log(2+|j|+k)}.$$

En outre, dans tous les lemmes ou les théorèmes qu'on va démontrer dans ce texte, on utilisera systématiquement la formulation : "on a ω-presque sûrement...", pour signifier qui'il existe un ensemble Ω_0 de probabilité nulle tel que la propriété soit vraie si $\omega\notin\Omega_0$. On indique que cet ensemble Ω_0 ne dépend que des v.a., et non pas les autres paramètres. De plus, si on dit "il existe une v.a. $C(\omega)$ ($C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ ou $D(\omega)$ etc.) telle que...", cela signifie qu'elle est presque sûrement finie si $\omega\notin\Omega_0$.

Pour tout $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha\in\mathbb{N}^n/\{0\}$, on définit deux fonctions C^∞

$$\varphi_\alpha(x)=\int_0^1(1-t)^{|\alpha|-1}\partial^\alpha\varphi(tx)dt \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\varphi}_\alpha(x)=x^\alpha\varphi_\alpha(x). \tag{2.16}$$

Avec les deux fonctions, la formule de Taylor d'ordre d de la fonction φ devient

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\le d} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0) + \sum_{|\alpha|=d+1} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\varphi_\alpha(x) = \sum_{|\alpha|\le d} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0) + \sum_{|\alpha|=d+1} \frac{\widetilde{\varphi}_\alpha(x)}{\alpha!}.$$

Lemme 2.15. *Soient n_1 et n_2 deux entiers positifs tels que $n_2 \ge 1$. Alors il existe une constante $C = C(n_1, n_2)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left|\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\varphi(r\sigma)\big)\right| \le CC_{2n_2+n_1+n_0}(\varphi)r^{-n_0-n_1}, \qquad \forall\, r > 0,$$

où

$$C_m(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le m} \Big\{(1+|x|)^m|\partial^\alpha\varphi(x)|\Big\},$$

et $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami qu'on a définit en (2.7).

Démonstration. On démontre d'abord par récurrence que, pour tout $n_2 \in \mathbb{N}^*$, il existe des constantes $C_{\alpha,\beta}$ qui ne dépendent que de n_2 et telles que

$$(\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\varphi(x) = \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le 2n_2} C_{\alpha,\beta}x^\alpha \frac{\partial^\beta\varphi}{\partial x^\beta}(x). \tag{2.17}$$

En fait, d'après la définition de l'opérateur de Laplace-Beltrami en (2.7), (2.17) est évident quand $n_2 = 1$ puisque

$$\begin{aligned}\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}} &= \sum x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \sum x_ix_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} - (n-1)\sum x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i\neq j} x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \sum_{i\neq j} x_ix_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} - (n-1)\sum x_i\frac{\partial}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Remarquons que, quand $i \neq j$, on a

$$x_ix_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} = x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \qquad \text{et} \qquad x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Big),$$

Alors il suffit de démontrer que, pour tout $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ et α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $1 \le |\alpha| = |\beta| \le 2n_2$, le terme suivant

$$x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(x^\alpha\frac{\partial^\beta\varphi}{\partial x^\beta}(x)\Big)$$

est de la combinaision linéaire des fonctions

$$x^{\alpha'}\frac{\partial^{\beta'}\varphi}{\partial x^{\beta'}}(x), \qquad 1 \le |\alpha'| = |\beta'| \le 2n_2 + 1.$$

Ceci est aussi évident, alors (2.17) est prouvé. Remarquons de plus que, pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$

$$r^{n_1+1}\frac{\partial^{n_1+1}}{\partial r^{n_1+1}} = r\frac{\partial}{r^{n_1}\partial r}\Big(\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}\Big) - r^{n_1}\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}.$$

Alors en utilisant (2.17), on a pour $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}^*$, il existe des constantes $C'_{\alpha,\beta}$ qui ne dépendent que de n_1, n_2 et telles que

$$r^{n_1}\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\varphi(x)\big) = \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le 2n_2+n_1} C'_{\alpha,\beta}x^\alpha\frac{\partial^\beta\varphi}{\partial x^\beta}(x).$$

Qui implique qu'il existe une constante $C = C(n_1, n_2)$ telle que

$$r^{n_1}\Big|\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\varphi(r\sigma)\big)\Big| \le C\sum_{1\le|\beta|\le 2n_2+n_1} r^{|\beta|}\Big|\frac{\partial^\beta\varphi}{\partial x^\beta}(x)\Big|, \qquad (x = r\sigma).$$

Alors on a, pour $n_0 \in \mathbb{N}$

$$r^{n_0+n_1}\Big|\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\varphi(r\sigma)\big)\Big| \le C\sum_{1\le|\beta|\le 2n_2+n_1} r^{n_0+|\beta|}\Big|\frac{\partial^\beta\varphi}{\partial x^\beta}(x)\Big| \le C'C_{2n_2+n_1+n_0}(\varphi).$$

Cela termine la démonstration. □

Lemme 2.16. *Soient n_1 et n_2 deux entiers positifs, $\alpha \in \mathbb{N}^n\backslash\{0\}$. Alors il existe une constante $C = C(n_1, n_2, \alpha)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\Big|\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\widetilde{\varphi}_\alpha(r\sigma)\big)\Big| \le CC_{|\alpha|+2n_2+n_1}(\varphi)r^{|\alpha|-n_1},$$

où la fonction $\widetilde{\varphi}_\alpha$ est donnée dans (2.16).

Démonstration. Encore une fois, on peut démontrer par récurrence que, pour tout $n_2 \in \mathbb{N}$, il existe des constantes C_β qui ne dépendent que de n_2 et telles que

$$(\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\widetilde{\varphi}_\alpha(x) = \sum_{|\alpha|\le|\beta|=|\gamma|\le|\alpha|+2n_2} C_{\beta,\gamma}\int_0^1(1-t)^{|\alpha|-1}t^{|\gamma|-|\alpha|}x^\beta\partial^\gamma\varphi(tx)dt.$$

Alors pour n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $C'_{\beta,\gamma}$ qui ne dépendent que de n_1, n_2 et telles que

$$r^{n_1}\frac{\partial^{n_1}}{\partial r^{n_1}}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^{n_2}\varphi(r\sigma)\big) = \sum_{|\alpha|\le|\beta|=|\gamma|\le|\alpha|+2n_2+n_1} C_{\beta,\gamma}\int_0^1(1-t)^{|\alpha|-1}t^{|\gamma|-|\alpha|}x^\beta\partial^\gamma\varphi(tx)dt.$$

En particulier

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1(1-t)^{|\alpha|-1}t^{|\gamma|-|\alpha|}x^\beta\partial^\gamma\varphi(tx)dt\Big| &\le \int_0^1 t^{|\gamma|-|\alpha|}|x^\beta\partial^\gamma\varphi(tx)|dt\\ &\le |x|^{|\alpha|}\int_0^1|tx|^{|\gamma|-|\alpha|}|\partial^\gamma\varphi(tx)|dt\\ &\le |x|^{|\alpha|}C_{|\alpha|+2n_2+n_1}(\varphi).\end{aligned}$$

Ceci entraîne immédiatement la démonstration. □

• Démonstration de la proposition 2.5

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle T_{0,s}^{-}(\xi,\omega), \varphi(\xi)\rangle = Y_{0,0}(\sigma)\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega)I_{j,k}(\varphi),$$

où

$$I_{j,k}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{j,k}(|\xi|)}{|\xi|^{s+\frac{n-1}{2}}}\varphi(\xi)d\xi = 2^{j(s+1-\frac{n}{2})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{j,k}(\sigma)d\sigma,$$

avec

$$J_{j,k}(\sigma) = \int_0^\infty \widetilde{w}(2^j r)\varphi(r\sigma)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^j r]dr, \qquad \widetilde{w}(r) = r^{\frac{n-1}{2}-s}w(r).$$

Faisons l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} J_{j,k}(\sigma) = -\frac{1}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2 2^{2j}}\int_0^\infty &\Big(2^{2j}\widetilde{w}''(2^j r)\varphi(r\sigma) + 2\cdot 2^j\widetilde{w}'(2^j r)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r\sigma) \\ &+\widetilde{w}(2^j r)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}(r\sigma)\Big)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Remarquons que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r\sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(r\sigma) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}(r\sigma) = \sum_{i,j=1}^n \sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(r\sigma).$$

Prenons alors un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \frac{n}{2} - s$, donc il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned} |\varphi(r\sigma)| &\le CC_m(\varphi)r^{-m} \le CC_{m+2}(\varphi)r^{-m}, \\ \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r\sigma)\Big| &\le CC_{m+1}(\varphi)r^{-m-1} \le CC_{m+2}(\varphi)r^{-m-1}, \\ \Big|\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}(r\sigma)\Big| &\le CC_{m+2}(\varphi)r^{-m-2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que, d'après (2.18)

$$|J_{j,k}(\sigma)| \le \frac{CC_{m+2}(\varphi)}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2 2^{2j}}\int_0^\infty \Big(2^{2j}\frac{|\widetilde{w}''(2^j r)|}{r^m} + 2\cdot 2^j\frac{|\widetilde{w}'(2^j r)|}{r^{m+1}} + \frac{|\widetilde{w}(2^j r)|}{r^{m+2}}\Big)dr = C'C_{m+2}(\varphi)\frac{2^{j(m-1)}}{(k+\frac{1}{2})^2},$$

qui implique

$$|I_{j,k}(\varphi)| \le C''C_{m+2}(\varphi)\frac{2^{j(m+s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2}. \tag{2.19}$$

À la fin on a, en se servant le lemme fondamental 2.14 et l'estimation (2.19)

$$\begin{aligned} \sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_{j,k,0,0}(\omega)||I_{j,k}(\varphi)| &\le C(\omega)\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\log(2+|j|+k)}|I_{j,k}(\varphi)| \\ &\le C(\omega)\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{1+|j|}\sqrt{1+k}|I_{j,k}(\varphi)| \\ &\le C(\omega)C''C_{m+2}(\varphi)\sum_{j<0}\sqrt{1+|j|}2^{j(m+s-\frac{n}{2})}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{1+k}}{(k+\frac{1}{2})^2} \\ &= D(\omega)C_{m+2}(\varphi), \end{aligned}$$

où $D(\omega)$ est une v.a. qui est presque sûrement finie. Ce qui démontre la convergence au sens des distributions tempérées de processus $T_{0,s}^{-}(\xi,\omega)$. □

• Démonstration de la proposition 2.6

Démonstration. Avec la même signification de $J_{j,k}(\sigma)$ dans la démonstration précédente, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T^+_{0,s}(\xi,\omega), \varphi(\xi)\rangle = Y_{0,0}(\sigma)\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega)2^{j(s+1-\frac{n}{2})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{j,k}(\sigma)d\sigma.$$

Cette fois-ci, (2.18) nous donne que

$$|J_{j,k}(\sigma)| \leq \frac{CC_2(\varphi)}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2 2^{2j}}\int_0^\infty \Big(2^{2j}|\widetilde{w}''(2^jr)|+2\cdot 2^j\frac{|\widetilde{w}'(2^jr)|}{r}+\frac{|\widetilde{w}(2^jr)|}{r^2}\Big)dr = C'C_2(\varphi)\frac{2^{-j}}{(k+\frac{1}{2})^2}.$$

Alors on a

$$\big|\langle T^+_{0,s}(\xi,\omega), \varphi(\xi)\rangle\big| \leq C''C_2(\varphi)\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^{j(s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2}|g_{j,k,0,0}(\omega)|.$$

Ce qui entraîne immédiatement la convergence au sens des distributions tempérées de processus $T^+_{0,s}(\xi,\omega)$ grâce au lemme fondamendal 2.14. □

• Démonstration de la proposition 2.7

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle T^+_{0,s}(\xi,\omega), \varphi(\xi)\rangle = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega)I_{j,k}(\varphi), \tag{2.20}$$

où

$$\begin{aligned}
I_{j,k}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{w_{j,k,0,0}(\xi)}{|\xi|^s}\varphi(\xi)d\xi - \sum_{|\alpha|\leq d}(-1)^{|\alpha|}C^\alpha_{j,k,0,0}(s)\partial^\alpha\varphi(0)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{w_{j,k,0,0}(\xi)}{|\xi|^s}\Big(\varphi(\xi)-\sum_{|\alpha|\leq d}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0)\Big)d\xi\\
&= \sum_{|\alpha|=d+1}\frac{1}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{w_{j,k,0,0}(\xi)}{|\xi|^s}\xi^\alpha\varphi_\alpha(\xi)d\xi\\
&= \sum_{|\alpha|=d+1}\frac{Y_{0,0}(\sigma)}{\alpha!}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma^\alpha J^\alpha_{j,k}(\sigma)d\sigma,
\end{aligned}$$

avec

$$\varphi_\alpha(\xi) = \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1}\partial^\alpha\varphi(t\xi)dt$$

et

$$J^\alpha_{j,k}(\sigma) = 2^{j(s+1-\frac{n}{2}-|\alpha|)}\int_0^\infty \widetilde{w}(2^jr)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^jr]\varphi_\alpha(r\sigma)dr, \qquad \widetilde{w}(r) = r^{|\alpha|+\frac{n-1}{2}-s}w(r).$$

Remarquons que

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial r}(r\sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i\int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1}t(\partial_i\partial^\alpha\varphi)(tr\sigma)dt,$$

$$\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r^2}(r\sigma) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i\sigma_j \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} t^2 (\partial_i\partial_j\partial^\alpha\varphi)(tr\sigma)dt.$$

Alors il existe une constante C telle que

$$|\varphi_\alpha(r\sigma)|,\ r\Big|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial r}(r\sigma)\Big|,\ r^2\Big|\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r^2}(r\sigma)\Big| \ \le\ CC_{|\alpha|+2}(\varphi).$$

Ceci nous donne, en faisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned} |J_{j,k}^\alpha(\sigma)| &\le CC_{|\alpha|+2}(\varphi)\frac{2^{j(s-1-\frac{n}{2}-|\alpha|)}}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2}\int_0^\infty \Big(2^{2j}|\widetilde{w}''(2^jr)| + 2\cdot 2^j\frac{|\widetilde{w}'(2^jr)|}{r} + \frac{|\widetilde{w}(2^jr)|}{r^2}\Big)dr \\ &= C'C_{|\alpha|+2}(\varphi)\frac{2^{j(s-\frac{n}{2}-|\alpha|)}}{(k+\frac{1}{2})^2}. \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$|I_{j,k}(\varphi)| \le \sum_{|\alpha|=d+1}\frac{Y_{0,0}(\sigma)}{\alpha!}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|J_{j,k}^\alpha(\sigma)|d\sigma \le C''C_{d+3}(\varphi)\frac{2^{j(s-\frac{n}{2}-d-1)}}{(k+\frac{1}{2})^2}. \tag{2.21}$$

Pour conclure, il suffit d'invoquer le lemme fondamendal 2.14 et (2.20), (2.21). □

• Démonstration de la proposition 2.8

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle T_{1,s}^-(\xi,\omega),\varphi(\xi)\rangle = \sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)I_{j,k,l,m}(\varphi),$$

où

$$I_{j,k,l,m}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}\varphi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\varphi(r\sigma)d\sigma\int_0^\infty w_{j,k}(r)r^{\frac{n-1}{2}-s}dr.$$

Remarquons que l'opérateur $\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est auto-adjoint sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Alors d'après (2.6) on a

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\varphi(r\sigma)d\sigma = \frac{1}{\lambda_l}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}Y_{l,m}(\sigma)\varphi(r\sigma)d\sigma = \frac{1}{\lambda_l}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\big(\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(r\sigma)\big)d\sigma.$$

On répète n-fois cette opération et on obtient

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\varphi(r\sigma)d\sigma = \frac{1}{(\lambda_l)^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^n\varphi(r\sigma)\big)d\sigma.$$

Il en résulte que

$$I_{j,k,l,m}(\varphi) = \frac{2^{j(s+1-\frac{n}{2})}}{(\lambda_l)^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)J_{j,k,l,m}(\sigma)d\sigma, \tag{2.22}$$

où

$$J_{j,k,l,m}(\sigma) = \int_0^\infty \widetilde{w}(2^jr)\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^n\varphi(r\sigma)\big)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^jr]dr, \qquad \widetilde{w}(r) = r^{\frac{n-1}{2}-s}w(r).$$

On choit un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \frac{n}{2} - s$ et prenons $(n_0, n_1, n_2) = (m, 0, n)$, $(m, 1, n)$ ou $(m, 2, n)$ respectivement dans le lemme 2.15, alors il existe une constante C telle que

$$\Big|(\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^n \varphi(r\sigma)\Big| \leq CC_{2n+m}(\varphi) r^{-m} \leq CC_{2n+m+2}(\varphi) r^{-m},$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial r}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^n \varphi(r\sigma)\big)\Big| \leq CC_{2n+m+1}(\varphi) r^{-m-1} \leq CC_{2n+m+2}(\varphi) r^{-m-1},$$

$$\Big|\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^n \varphi(r\sigma)\big)\Big| \leq CC_{2n+m+2}(\varphi) r^{-m-2},$$

Ceci nous donne, en faisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned}
|J_{j,k,l,m}(\sigma)| &\leq CC_{2n+m+2}(\varphi) \frac{1}{\pi^2 (k+\frac{1}{2})^2 2^{2j}} \int_0^\infty \Big(2^{2j} \frac{|\widetilde{w}''(2^j r)|}{r^m} + 2 \cdot 2^j \frac{|\widetilde{w}'(2^j r)|}{r^{m+1}} + \frac{|\widetilde{w}(2^j r)|}{r^{m+2}}\Big) dr \\
&= C' C_{2n+m+2}(\varphi) \frac{2^{j(m-1)}}{(k+\frac{1}{2})^2}.
\end{aligned}$$

Avec cette inégalité et (2.22), on a

$$\begin{aligned}
|I_{j,k,l,m}(\varphi)| &\leq C' C_{2n+m+2}(\varphi) \frac{2^{j(m+s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2 |\lambda_l|^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |Y_{l,m}(\sigma)| d\sigma \\
&\leq C' C_{2n+m+2}(\varphi) \frac{2^{j(m+s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2 |\lambda_l|^n} \Big(m(\mathbb{S}^{n-1})\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |Y_{l,m}(\sigma)|^2 d\sigma\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= C'' C_{2n+m+2}(\varphi) \frac{2^{j(m+s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2 |\lambda_l|^n}.
\end{aligned}$$

Enfin, en remarquons que $|\lambda_l| \geq l^2$, on a l'estimation de $I_{j,k,l,m}(\varphi)$

$$|I_{j,k,l,m}(\varphi)| \leq C'' C_{2n+m+2}(\varphi) \frac{2^{j(m+s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2 l^{2n}}. \tag{2.23}$$

On donne ensuite les estimations de $g_{j,k,l,m}(\omega)$ en utilisant le lemme fondamental 2.14. En fait, remarquons que le dimension de $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^{n-1})$ satisfaite $N_l = C_{n+l-1}^{n-1} - C_{n+l-3}^{n-1} = O(l^{n-2})$, or

$$\begin{aligned}
|g_{j,k,l,m}(\omega)| &\leq C(\omega)\sqrt{\log(2+|j|+k+l+m)} \\
&\leq C'(\omega)\sqrt{\log(2+|j|)}\sqrt{\log(2+k)}\sqrt{\log(2+l)}.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne, en invoquant (2.23)

$$\begin{aligned}
&\sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} |g_{j,k,l,m}(\omega)||I_{j,k,l,m}(\varphi)| \\
\leq\ & C'' C_{2n+m+2}(\varphi) C'(\omega) \sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} \frac{2^{j(m+s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2 l^{2n}} \sqrt{\log(2+|j|)}\sqrt{\log(2+k)}\sqrt{\log(2+l)} \\
=\ & C'' C_{2n+m+2}(\varphi) C'(\omega) \sum_{j<0} 2^{j(m+s-\frac{n}{2})}\sqrt{\log(2+|j|)} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{\log(2+k)}}{(k+\frac{1}{2})^2} \sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{N_l\sqrt{\log(2+l)}}{l^{2n}} \\
=\ & D(\omega) C_{2n+m+2}(\varphi),
\end{aligned}$$

où $D(\omega)$ est une v.a. qui est presque sûrement finie. Ce qui entraîne la convergence au sens des distributions tempérées de processus $T_{1,s}^-(\xi, \omega)$. $\square$

• Démonstration de la proposition 2.9

Démonstration. Avec la même signification de $J_{j,k,l,m}(\sigma)$ dans la démonstration précédente, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T^+_{1,s}(\xi,\omega), \varphi(\xi)\rangle = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)\frac{2^{j(s+1-\frac{n}{2})}}{(\lambda_l)^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)J_{j,k,l,m}(\sigma)d\sigma.$$

Cette fois-ci, le lemme 2.17 nous donne que

$$\begin{aligned}|J_{j,k,l,m}(\sigma)| &\leq CC_{2n+2}(\varphi)\frac{1}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2 2^{2j}}\int_0^\infty \Big(2^{2j}|\widetilde{w}''(2^jr)| + 2\cdot 2^j\frac{|\widetilde{w}'(2^jr)|}{r} + \frac{|\widetilde{w}(2^jr)|}{r^2}\Big)dr\\ &= C'C_{2n+2}(\varphi)\frac{2^{-j}}{(k+\frac{1}{2})^2}.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\big|\langle T^+_{1,s}(\xi,\omega), \varphi(\xi)\rangle\big| \leq C''C_{2n+2}(\varphi)\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l}\frac{2^{j(s-\frac{n}{2})}}{(k+\frac{1}{2})^2 l^{2n}}|g_{j,k,l,m}(\omega)|.$$

Ce qui entraîne immédiatement la convergence au sens des distributions tempérées de processus $T^+_{1,s}(\xi,\omega)$ en invoquant le lemme fondamendal 2.14. □

• Démonstration de la proposition 2.10

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle T^+_{1,s}(\xi,\omega), \varphi(\xi)\rangle = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)I_{j,k,l,m}(\varphi),$$

où

$$\begin{aligned}I_{j,k,l,m}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}\varphi(\xi)d\xi - \sum_{|\alpha|\leq d}(-1)^{|\alpha|}C^\alpha_{j,k,l,m}\partial^\alpha\varphi(0)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}\Big(\varphi(\xi) - \sum_{|\alpha|\leq d}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0)\Big)d\xi\\ &= \sum_{|\alpha|=d+1}\frac{1}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{w_{j,k,l,m}(\xi)}{|\xi|^s}\widetilde{\varphi}_\alpha(\xi)d\xi,\\ &= \sum_{|\alpha|=d+1}\frac{2^{j(s+1-\frac{n}{2})}}{\alpha!(\lambda_l)^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)J^\alpha_{j,k,l,m}(\sigma)d\sigma\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(\xi) = \xi^\alpha\int_0^1(1-t)^{|\alpha|-1}\partial^\alpha\varphi(t\xi)dt,$$

et

$$J^\alpha_{j,k,l,m}(\sigma) = \int_0^\infty \widetilde{w}(2^jr)\big((\triangle_{\mathbb{S}^{n-1}})^n\widetilde{\varphi}_\alpha(r\sigma)\big)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^jr]dr, \qquad \widetilde{w}(r) = r^{\frac{n-1}{2}-s}w(r).$$

Alors en utilisant le lemme 2.16 en prenant $n_2 = n$, $n_1 = 0, 1, 2$ respectivement et par l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} |J^{\alpha}_{j,k,l,m}(\sigma)| &\leq C\frac{C_{|\alpha|+2n+2}(\varphi)}{2^{2j}(k+\frac{1}{2})^2}\int_0^{\infty}\left(2^{2j}|\widetilde{w}''(2^j r)|r^{|\alpha|} + 2\cdot 2^j|\widetilde{w}'(2^j r)|r^{|\alpha|-1} + |\widetilde{w}(2^j r)|r^{|\alpha|-2}\right)dr \\ &= C'\frac{2^{-j(1+|\alpha|)}}{(k+\frac{1}{2})^2}C_{|\alpha|+2n+2}(\varphi). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$|I_{j,k,l,m}(\varphi)| \leq C''\frac{2^{j(s-\frac{n}{2}-d-1)}}{(k+\frac{1}{2})^2 l^{2n}}C_{d+2n+3}(\varphi).$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Chapitre 3

Régularité du processus de Mumford

Dans ce chapitre, on étudira d'abord la régularité du bruit blanc sous les différents normes, cela donne immédiatement la régularité du processus de Mumford.

3.1 Régularité du bruit blanc

Avant d'énoncer les théorèmes, on rappelle d'abord les définitions de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ et de l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, qui décrivent la régularité sous les différents normes. On va étudier ensuite l'appartenance du bruit blanc à aux espaces de Hölder, de Sobolev et de Besov.

Soit $s \in \mathbb{R}$; l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est composé des distributions tempérées f qui satisfont

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Remarquons que l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

Soient $p, q \in [1, \infty]$ et $s \in \mathbb{R}$; l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est composé des distributions tempérées f qui satisfont

$$S_0(f) \in L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad \|\Delta_j(f)\|_{L^p} \leq \varepsilon_j 2^{-js}, \quad \forall\, j \geq 0,$$

où $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^q(\mathbb{N})$. L'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

Rappelons qu'on a $H^s(\mathbb{R}^n) = B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ et $C^s(\mathbb{R}^n) = B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Le théorème suivant bien connu décrit la régularité du bruit blanc. On verra que, le bruit blanc est un objet fractal, l'exposant $s = -\frac{n}{2} - \varepsilon$ servant à mesurer la régularité ne dépend pas des exposants p et q.

Théorème 3.1. *Soit $Z(x, \omega)$ le bruit blanc complexe de dimension n. Alors ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$Z(x, \omega) \in C^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad Z(x, \omega) \in H^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Plus généralement, pour tout $p, q \in [1, \infty]$, on a

$$Z(x, \omega) \in (B_{p,q}^{-\frac{n}{2}-\varepsilon})_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Ce théorème est aussi vrai pour le bruit blanc réel, grâce au fait que la partie réelle du bruit blanc complexe est le bruit blanc réel et à la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Pour tout $p, q \in [1, \infty]$ et $s \in \mathbb{R}$*

$$f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Re(f) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad et \quad Im(f) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que dans la décomposition de Littlewood-Paley, les fonctions φ et ψ sont réelles puisque $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ sont réelles et radiales. □

Le théorème 3.1 est optimal en deux aspects. D'une part, on ne peut pas obtenir la régularité globale du bruit blanc. C'est à dire que, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$, on n'a pas ω-presque sûrement

$$Z(x, \omega) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

D'autre part, pour tout $p, q \in [1, \infty]$, on n'a pas ω-presque sûrement

$$Z(x, \omega) \in (B_{p,q}^{-\frac{n}{2}})_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

La preuve du théorème 3.1 est simple, qui est une conséquence directe de la représentation générale du bruit blanc (1.28) et du théorème suivant, en invoquant le lemme 2.14. Pour le démontrer, il suffit de prendre la base d'ondelettes de Daubechies[7],[8].

Théorème 3.3. [16] *Soient*

$$\left\{\varphi_k(x) = \varphi(x-k),\, \psi_{j,k}^{\epsilon}(x) = 2^{\frac{nj}{2}}\psi^{\epsilon}(2^j x - k) : j \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{Z}^n,\, \epsilon \in \mathbb{I} \triangleq \{0,1\}^n/\{0\}\right\}$$

une base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui ont les moments nuls jusqu'à l'ordre r, s un nombres réel tel que $-r < s < r$ et $p, q \in [1, \infty]$. Notons les coefficients d'ondelettes d'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre inférieur à r par

$$\beta_k = \langle f, \varphi_k\rangle \qquad et \qquad \alpha_{j,k}^{\epsilon} = \langle f, \psi_{j,k}^{\epsilon}\rangle.$$

Alors on a
1) f appartient à $C^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$|\beta_k| \leq C, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n,$$

et

$$|\alpha_{j,k}^{\epsilon}| \leq C 2^{-\frac{nj}{2}} 2^{-js}, \qquad \forall\, \epsilon \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}^n,$$

où C est une constante.
2) f appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\beta_k|^2 + \sum_{\epsilon \in \mathbb{I}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} 2^{2js} |\alpha_{j,k}^{\epsilon}|^2 < \infty.$$

3) plus généralement, f appartient à $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\beta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

et

$$\sum_{\epsilon \in \mathbb{I}} 2^{js} 2^{nj(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_{j,k}^{\epsilon}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon_j \in l^q(\mathbb{N}).$$

3.2 Régularité de la partie radiale du bruit blanc

Le théorème suivant est le théorème principal de cette section. On observera que la dimension n n'intervient pas dans cette régularité et que ce théorème est optimal pour l'exposant de la régularité $s = -\frac{1}{2} - \varepsilon$.

Théorème 3.4. *Soit $Z_0(x,\omega)$ la partie radiale du bruit blanc complexe de dimension $n \geq 2$. Alors ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$Z_0(x,\omega) \in (B_{p,q}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$$

Considérons la représentation de $Z_0(x,\omega)$ sous la base de Malvar-Wilson, on a

$$Z_0(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) w_{j,k,0,0}(x) = \frac{\left(m(\mathbb{S}^{n-1})\right)^{-\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) w_{j,k}(|x|). \tag{3.1}$$

Ceci implique

$$Z_0(x,\omega) = \frac{\left(m(\mathbb{S}^{n-1})\right)^{-\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} Y(|x|,\omega),$$

où Y est le bruit blanc complexe unidimensionnel. Alors la régularité de $Z_0(x,\omega)$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ se ramène à la régularité du bruit blanc complexe unidimensionnel sur $]0,\infty[$. Établissons le théorème suivant, qui entraîne immédiatement le théorème 3.4.

Théorème 3.5. *Soit $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution à support compact, nulle au voisinage de 0. Supposons que F est radiale. On définit la méridienne de F par $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, f paire et $f(|x|) = F(x)$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $p,q \in [1,\infty]$, on a*

$$F \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Prenons une partition de l'unité C^∞ de $\mathbb{S}^{n-1}$: $1 = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N$, où la fonction τ_j est supportée par une boule de $\mathbb{S}^{n-1}$ qui est définie par

$$\Sigma_j = \{\sigma \in \mathbb{S}^{n-1} : |\sigma - \sigma_j| \leq 1\}.$$

On prolonge les τ_j en des fonctions homogènes de degré 0. On écrit ensuite $F = F\tau_1 + F\tau_2 + \cdots + F\tau_N$. Soient deux réels $0 < R_- < R_+$ tels que

$$\mathrm{supp} F \subset \{x \in \mathbb{R}^n : R_- \leq |x| \leq R_+\}.$$

Prenons un C^∞-difféomorphisme $\Phi_j : \Sigma_j \mapsto C$, où C est un cube de $\mathbb{R}^{n-1}$. Définissons ensuite un C^∞-difféomorphisme $\widetilde{\Phi}_j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tel que $\widetilde{\Phi}_j(r\sigma) = (r, \Phi_j(\sigma))$ pour tout $r \in [R_-, R_+]$ et $\sigma \in \Sigma_j$. Considérons la distribution $F_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ donnée par $F_j = F\tau_j \circ \widetilde{\Phi}_j^{-1}$. Alors F_j est supportée par $[R_-, R_+] \times C$ et on a

$$F \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_j \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}) \quad (1 \leq j \leq n).$$

Remarquons qu'il existe une fonction non identiquement nulle $\widetilde{\tau}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, nulle au voisinage de 0, telle que pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$F_j(x) = f(x_1)\widetilde{\tau}_j(x_2, \cdots, x_n).$$

Alors pour démontrer ce théorème, il suffit d'établir que

$$f(x_1)g(x_2, \cdots, x_n) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}),$$

pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ non identiquement nulle. Pour cela, il suffit de calculer les coefficients d'ondelettes et d'utiliser le théorème 3.3. $\square$

3.3 Régularité de la partie radiale du bruit blanc sous la norme L^2

On a déjà démontré dans la section précédente que

$$Z_0(x,\omega) \in H_{loc}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}),$$

Ceci est une conséquence directe du théorème 3.4. En fait, on peut démontrer que la régularité de la partie radiale du bruit blanc complexe ne pose pas de problème en l'origine. Établissons le théorème suivant.

Théorème 3.6. *Soit $Z_0(x,\omega)$ la partie radiale du bruit blanc complexe de dimension $n \geq 2$. Alors ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$Z_0(x,\omega) \in H_{loc}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

Pour le démontrer, on donne d'abord les deux lemmes suivants.

Lemme 3.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{\log(k+2)}}{1+|\lambda-\pi(k+\frac{1}{2})|^2} \leq C\big(1+\log(\lambda+1)\big), \qquad \forall\, \lambda \geq 0.$$

Lemme 3.8. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{\log(k+2)}\Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\cos(\lambda r+\alpha)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr\Big| \leq CC_2(\widehat{f})\big(1+\log(\lambda+1)\big).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\cos(\lambda r+\alpha)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr \\
= \;& \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\big(e^{i(\lambda r+\alpha)}+e^{-i(\lambda r+\alpha)}\big)\big(e^{i\pi(k+\frac{1}{2})r}+e^{-i\pi(k+\frac{1}{2})r}\big)dr \\
= \;& \frac{1}{4}\Big(e^{-i\alpha}\widehat{f}\big(\lambda\pm\pi(k+\frac{1}{2})\big)+e^{i\alpha}\widehat{f}\big(-\lambda\pm\pi(k+\frac{1}{2})\big)\Big),
\end{aligned}$$

ceci implique

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\cos(\lambda r+\alpha)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr\Big| \\
\leq \;& \frac{1}{4}\Big(\big|\widehat{f}\big(\lambda\pm\pi(k+\frac{1}{2})\big)\big|+\big|\widehat{f}\big(-\lambda\pm\pi(k+\frac{1}{2})\big)\big|\Big) \\
\leq \;& \frac{C_2(\widehat{f})}{2}\Big(\frac{1}{1+\big|\lambda+\pi(k+\frac{1}{2})\big|^2}+\frac{1}{1+\big|\lambda-\pi(k+\frac{1}{2})\big|^2}\Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\cos(\lambda r+\alpha)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr\Big| \leq \frac{C_2(\widehat{f})}{1+\big|\lambda-\pi(k+\frac{1}{2})\big|^2}. \tag{3.2}$$

Alors la démonstration s'achève immédiatement avec (3.2) et le lemme 3.7. □

• Démonstration du théorème 3.6

Démonstration. Revenons à (3.1). Indiquons que la fonction $w_{j,k}(r)$ est supportée par $[\frac{2^{-j}}{3}, 3\cdot 2^{-j}]$. Alors il suffit de démontrer que pour tout $j_0 < 0$, on a ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$

$$Y(x,\omega) \triangleq \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\frac{w_{j,k}(|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \ \in\ H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

Notons d'abord

$$f_{j,k}(x) = \frac{w_{j,k}(|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{3.3}$$

Alors avec cette notation

$$Y(x,\omega) = \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) f_{j,k}(x) \qquad \text{et} \qquad \widehat{Y}(\xi,\omega) = \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\widehat{f}_{j,k}(\xi).$$

En utilisant le lemme 1.22, on a

$$\widehat{f}_{j,k}(\xi) = 2^{-j}\frac{d_n}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^\infty \widetilde{w}(r) J_{\frac{n-2}{2}}(2^{-j}r|\xi|)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr, \tag{3.4}$$

où $\widetilde{w}(r) = \sqrt{r}w(r)$ et $J_{\frac{n-2}{2}}$ est la fonction de Bessel d'ordre $\frac{n-2}{2}$.
On va donner une estimation de $|\widehat{Y}(\xi,\omega)|$ selon $|\xi| \leq 1$ ou $|\xi| > 1$.
i) estimation de $|\widehat{Y}(\xi,\omega)|$ pour $|\xi| \leq 1$
Par l'intégration par partie, (3.4) devient

$$\widehat{f}_{j,k}(\xi) = -2^{-j}\frac{d_n}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}\pi^2(k+\frac{1}{2})^2}\int_0^\infty \Big(\widetilde{w}''(r)J_{\frac{n-2}{2}}(2^{-j}r|\xi|) + 2\cdot 2^{-j}|\xi|\widetilde{w}'(r)J'_{\frac{n-2}{2}}(2^{-j}r|\xi|)$$

$$+2^{-2j}|\xi|^2\widetilde{w}(r)J''_{\frac{n-2}{2}}(2^{-j}r|\xi|)\Big)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr. \tag{3.5}$$

Remarquons que, d'après le lemme 1.18, les trois fonctions suivantes

$$J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda), \quad \lambda J'_{\frac{n-2}{2}}(\lambda), \quad \text{et} \quad \lambda^2 J''_{\frac{n-2}{2}}(\lambda)$$

sont bornées sur $]0,a]$, où $a > 0$ est un réel quelconque. Alors on peut en déduire qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout $j \geq j_0$, $k \in \mathbb{N}$ et $|\xi| \leq 1$, on a

$$|\widehat{f}_{j,k}(\xi)| \leq C_1\frac{2^{-j}}{(k+\frac{1}{2})^2|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{3.6}$$

Ceci implique que, en utilisant le lemme fondamental 2.14, pour $|\xi| \leq 1$

$$|\widehat{Y}(\xi,\omega)| \leq \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{j,k}(\omega)||\widehat{f}_{j,k}(\xi)| \leq \frac{C_1C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}\sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\log(2+|j|+k)}\frac{2^{-j}}{(k+\frac{1}{2})^2} = \frac{C_1(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{3.7}$$

où $C_1(\omega)$ est une v.a. qui est presque sûrement finie.
ii) estimation de $|\widehat{Y}(\xi,\omega)|$ pour $|\xi| > 1$
Quand $|\xi| > 1$, prenons un entier positif j^* tel que $2^{j^*} < |\xi| \leq 2^{j^*+1}$.

Remarquons que (3.6) est encore vraie quand $j > j^*$ d'après (3.5), puisque en ce cas on a : $2^{-j}|\xi| \leq 1$. Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{j>j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_{j,k}(\omega)||\widehat{f}_{j,k}(\xi)| &\leq \frac{C_1C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}\sum_{j>j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{\log(2+j+k)}\frac{2^{-j}}{(k+\frac{1}{2})^2} \\
&\leq \frac{C_1C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}2^{-j^*}\sqrt{\log(2+j^*)}\sum_{j>j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{1+j-j^*+k}\frac{2^{-j+j^*}}{(k+\frac{1}{2})^2} \\
&\leq \frac{C_1C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}2^{-j^*}\sqrt{\log(2+j^*)}\sum_{j'>0}\sqrt{1+j'}2^{-j'}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{1+k}}{(k+\frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{C_1'C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}2^{-j^*}\sqrt{\log(2+j^*)}.
\end{aligned}$$

Alors il existe une une v.a. $C_2(\omega)$ qui est presque sûrement finie et qui ne dépent pas de j^*, telle que

$$\sum_{j>j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_{j,k}(\omega)||\widehat{f}_{j,k}(\xi)| \leq C_2(\omega)\frac{\log(1+|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}, \qquad 2^{j^*} < |\xi| \leq 2^{j^*+1}. \tag{3.8}$$

Maintenant, il reste à estimer la série

$$\sum_{j=j_0}^{j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_{j,k}(\omega)||\widehat{f}_{j,k}(\xi)|,$$

quand $2^{j^*} < |\xi| \leq 2^{j^*+1}$. Revenons à (3.4), on constate que $2^{-j}|\xi| \in [1, 2^{j^*+1-j_0}]$ quand j est entre j_0 et j^*. Alors on va utiliser le lemme 1.19 pour estimer cette série. En fait, on a une fonction $R(\lambda)$ et une constante C_2 telles que

$$J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos(\lambda-\alpha_n) + \frac{1-(n-2)^2}{4\sqrt{2\pi}\lambda^{\frac{3}{2}}}\sin(\lambda-\alpha_n) + R(\lambda), \qquad \alpha_n = \frac{n-1}{4}\pi, \tag{3.9}$$

avec

$$|R(\lambda)|,\ |R'(\lambda)|,\ |R''(\lambda)| \leq C_2\lambda^{-\frac{5}{2}}, \qquad \forall\,\lambda \geq \frac{1}{3}. \tag{3.10}$$

Alors, en utilisant (3.9), (3.4) devient

$$\widehat{f}_{j,k}(\xi) = I^1_{j,k}(\xi) + I^2_{j,k}(\xi) + I^3_{j,k}(\xi),$$

où

$$I^1_{j,k}(\xi) = d_n'\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^\infty w(r)\cos(2^{-j}|\xi|r-\alpha_n)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr, \quad d_n' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}d_n;$$

$$I^2_{j,k}(\xi) = d_n''\frac{2^{\frac{j}{2}}}{|\xi|^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty \frac{w(r)}{r}\sin(2^{-j}|\xi|r-\alpha_n)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr, \quad d_n'' = \frac{1-(n-2)^2}{4\sqrt{2\pi}}d_n;$$

$$I^3_{j,k}(\xi) = d_n\frac{2^{-j}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^\infty \widetilde{w}(r)R(2^{-j}|\xi|r)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr.$$

Ceci implique

$$\sum_{j=j_0}^{j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{j,k}(\omega)||\widehat{f}_{j,k}(\xi)| \leq 2C(\omega)\sum_{i=1,2,3}\sum_{j=j_0}^{j^*}\sqrt{\log(2+|j|)}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\log(2+k)}|I^i_{j,k}(\xi)|. \quad (3.11)$$

D'après le lemme 3.8, il existe une constante C_3 telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\log(2+k)}|I^1_{j,k}(\xi)| \leq C_3\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\Big(1+\log(1+2^{-j}|\xi|)\Big), \quad (3.12)$$

et

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\log(2+k)}|I^2_{j,k}(\xi)| \leq C_3\frac{2^{\frac{j}{2}}}{|\xi|^{\frac{n+1}{2}}}\Big(1+\log(1+2^{-j}|\xi|)\Big). \quad (3.13)$$

On commence à estimer $I^3_{j,k}(\xi)$. En fait on a, en utilisant l'intégration par partie et (3.10), il existe une constante C'_3 telle que

$$|I^3_{j,k}(\xi)| \leq C'_3\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{(k+\frac{1}{2})^2|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\Big(\frac{2^{2j}}{|\xi|^2}+\frac{2^j}{|\xi|}+1\Big). \quad (3.14)$$

On sait que $2^{j^*} < |\xi| \leq 2^{j^*+1}$ et que l'indice j est entre j_0 et j^*, alors $2^j < |\xi|$. Donc (3.14) devient

$$|I^3_{j,k}(\xi)| \leq 3C'_3\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{(k+\frac{1}{2})^2|\xi|^{\frac{n-1}{2}}},$$

qui implique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\log(2+k)}|I^3_{j,k}(\xi)| \leq 3C'_3\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{\log(2+k)}}{(k+\frac{1}{2})^2} = C''_3\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (3.15)$$

Ceci nous donne, d'après (3.11), (3.12), (3.13) et (3.15) en prennant $C_4 = \max\{C_3, C''_3\}$

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_0}^{j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{j,k}(\omega)||\widehat{f}_{j,k}(\xi)| &\leq \frac{C_4C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\sum_{i=1,2,3}\sum_{j=j_0}^{j^*}2^{-\frac{j}{2}}\sqrt{\log(2+|j|)}\Big(1+\log(1+2^{-j}|\xi|)\Big)\\ &\leq 3\frac{C_4C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\Big(1+\log(1+2^{-j_0}|\xi|)\Big)\sum_{j=j_0}^{j^*}2^{-\frac{j}{2}}\sqrt{\log(2+|j|)}\\ &\leq 3\frac{C_4C(\omega)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\Big(1-j_0\log 2+\log(1+|\xi|)\Big)\sum_{j=j_0}^{\infty}2^{-\frac{j}{2}}\sqrt{\log(2+|j|)}.\end{aligned}$$

Alors il existe une v.a. $C'_2(\omega)$ qui est presque sûrement finie et qui ne dépent pas de j^*, telle que

$$\sum_{j=j_0}^{j^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{j,k}(\omega)||\widehat{f}_{j,k}(\xi)| \leq C'_2(\omega)\frac{\log(1+|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}, \qquad 2^{j^*} < |\xi| \leq 2^{j^*+1}. \quad (3.16)$$

Compte tenu de (3.8) et (3.16), on arrive à l'estimation de $\widehat{Y}(\xi,\omega)$ pour $|\xi| > 1$

$$|\widehat{Y}(\xi,\omega)| \leq C_3(\omega)\frac{\log(1+|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}, \quad (3.17)$$

où la v.a. $C_3(\omega)$ est presque sûrement finie.
iii) conclusion
D'après (3.7) et (3.17), on a pour $s < -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{Y}(\xi,\omega)|^2 d\xi \\
\leq\ & (C_1(\omega))^2 \int_{|\xi|\leq 1} \frac{(1+|\xi|^2)^s}{|\xi|^{n-2}} d\xi + (C_3(\omega))^2 \int_{|\xi|>1} (1+|\xi|^2)^s \frac{\log^2(1+|\xi|)}{|\xi|^{n-1}} d\xi \\
=\ & m(\mathbb{S}^{n-1}) \Big((C_1(\omega))^2 \int_0^1 r(1+r^2)^s dr + (C_3(\omega))^2 \int_1^\infty (1+r^2)^s \log^2(1+r) dr \Big) \\
<\ & \infty.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne $Y(x,\omega) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s < -\frac{1}{2}$. □

On démontre dans la suite que, la partie radiale du bruit blanc complexe n'appartient pas globalement à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. La preuve se fait en utilisant la base de Haar. Notre intérêt est que cette méthode fournit une démonstration d'un résultat bien connu : le bruit blanc n'est pas localement carée-intégrable. Plus généralement, on peut démontrer que, presque sûrement en ω

$$\int_{a<|x|<b} f(x) |Z(x,\omega)|^2 dx = \infty,$$

où $0 < a < b$ sont deux nombres réels et $f(x)$ est une fonction continue et strictement positive sur le compact $\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq |x| \leq b\}$.

Théorème 3.9. *Soit $Z_0(x,\omega)$ la partie radiale du bruit blanc complexe de dimension $n \geq 2$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, on n'a pas ω-presque sûrement*

$$Z_0(x,\omega) \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

On donne d'abord une base o.n. de $L^2(0,\infty)$ construite en utilisant la base de Haar.

Lemme 3.10. *Soient*

$$h_0 = \mathbf{1}_{[1,2]}, \qquad h = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]},$$

et

$$h_{j,0}(r) = 2^{\frac{j}{2}} h_0(2^j r), \qquad j \in \mathbb{Z},$$

$$h_{j,k}(r) = 2^{\frac{j}{2}} h(2^j r - k), \qquad j \in \mathbb{Z},\ k \geq 1.$$

Alors $\{h_{j,k}(r) : r \geq 0,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ est une base o.n. de $L^2(0,\infty)$.

• Démonstration du théorème 3.9

Démonstration. Supposons par absurde que, il existe un réel s tel que, ω-presque sûrement

$$Z_0(x,\omega) \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Ceci implique

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{Z}_0(\xi,\omega)|^2 d\xi < \infty.$$

On sait que la transformation de Fourier de la partie radiale du bruit blanc complexe est encore la partie radiale du bruit blanc complexe, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |Z_0(\xi,\omega)|^2 d\xi < \infty. \tag{3.18}$$

D'après la définition de $Z_0(\xi,\omega)$ dans (1.31) et le lemme 3.10, on a

$$Z_0(\xi,\omega) = \big(m(\mathbb{S}^{n-1})\big)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) \frac{h_{j,k}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Alors avec cette représentation, (3.18) devient

$$\int_0^\infty (1+r^2)^s \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr < \infty.$$

Il en résulte que, pour tout $0<a<b<\infty$, ω-presque sûrement

$$\int_a^b \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr < \infty. \tag{3.19}$$

On verra dans la suite, (3.19) entraînera une contradiction. Prenons $(j_0,k_0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{supp} h_{j_0,k_0} \subset [a,b]$ et définissons

$$\mathbb{I}_1 = \{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N} : \mathrm{supp} h_{j,k} \subset \mathrm{supp} h_{j_0,k_0}\},$$

$$\mathbb{I}_2 = \{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N} : \mathrm{supp} h_{j_0,k_0} \subset \mathrm{supp} h_{j,k} \quad \text{ou} \quad \mathrm{supp} h_{j_0,k_0} \cap \mathrm{supp} h_{j,k} = \emptyset\},$$

alors évidemment $|\mathbb{I}_1| = \infty$ et $\mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I}_2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Remarquons que, pour tout $(j,k)\in\mathbb{I}_1$ et $(j',k')\in\mathbb{I}_2$, on a

$$\int_a^b h_{j,k}(r) h_{j',k'}(r) dr = 0,$$

qui nous donne

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr &= \int_a^b \Big| \sum_{(j,k)\in\mathbb{I}_1} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr + \int_a^b \Big| \sum_{(j,k)\in\mathbb{I}_2} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr \\
&\quad +2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{I}_1,(j',k')\in\mathbb{I}_2} g_{j,k}(\omega)\overline{g_{j',k'}(\omega)} \int_a^b h_{j,k}(r) h_{j',k'}(r) dr \\
&= \int_a^b \Big| \sum_{(j,k)\in\mathbb{I}_1} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr + \int_a^b \Big| \sum_{(j,k)\in\mathbb{I}_2} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr.
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_a^b \Big| \sum_{(j,k)\in\mathbb{I}_1} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr \le \int_a^b \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) h_{j,k}(r) \Big|^2 dr < \infty.$$

Ceci entraîne immédiatement

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{I}_1} |g_{j,k}(\omega)|^2 < \infty,$$

qui est une contradiction. $\square$

3.4 Régularité du processus de Mumford et de sa partie radiale

Dans cette section, on va donner les résultats sur la régularité du processus de Mumford et de sa partie radiale. Voici les trois théorèmes.

Théorème 3.11. *Soit $X^r(x,\omega)$ la renormalisation additive du processus de Mumford de dimension n. Alors ω-presque sûrement, pour tout $p,q \in [1,\infty]$ et tout $\varepsilon > 0$*

$$X^r(x,\omega) \in (B^{-\varepsilon}_{p,q})_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 3.12. *Soit $X^r_0(x,\omega)$ la renormalisation additive de la partie radiale du processus de Mumford de dimension n. Alors ω-presque sûrement, pour tout $p,q \in [1,\infty]$ et tout $\varepsilon > 0$*

$$X^r_0(x,\omega) \in (B^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}_{p,q})_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$$

Théorème 3.13. *Soit $X^r_0(x,\omega)$ la renormalisation additive de la partie radiale du processus de Mumford de dimension n. Alors ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$X^r_0(x,\omega) \in H^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Les démonstrations des trois théorèmes sont rendues triviale grâce à la régularité du bruit blanc complexe et en utilisant la version locale du théorème classique 3.14 qui suit et porte sur les opérateurs pseudo-différentiels classiques (à la Hörmander). On donne d'abord certaines définitions.

On dit qu'une fonction $a(x,\xi) \in \mathcal{S}^m_{1,0}$, si $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, et il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Un élément $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$ est appelé un symbole d'ordre m. Alors $Op(\mathcal{S}^m_{1,0})$ est composé des opérateurs pseudo-différentiels T dont le symbole $a(x,\xi)$ appartient à $\mathcal{S}^m_{1,0}$.

Avec ces notations, on a le théorème suivant[4], [24].

Théorème 3.14. *On suppose $T \in Op(\mathcal{S}^m_{1,0})$. Soit f une distribution tempéré de dimension n qui appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$. Alors $Tf \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.*

On donne ensuite la version locale de ce théorème.

Théorème 3.15. *On suppose $T \in Op(\mathcal{S}^m_{1,0})$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une distribution tempéré de dimension n qui appartient à $H^s_{loc}(\Omega)$. Alors $Tf \in H^{s-m}_{loc}(\Omega)$.*

Démonstration. La preuve se fait sur le fait que le nouyeau-distribution $K(x,y)$ de T est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - D$ où D est la diagonale.
Soient $x_0 \in \Omega$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi = 1$ sur $|x - x_0| < 2\rho$. Alors $\varphi f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $(1-\varphi)f = 0$ sur $|x - x_0| < 2\rho$. Notons par B la boule ouverte $|x - x_0| < \rho$ et $\widetilde{B}$ la boule double $|x - x_0| < 2\rho$. On pose

$$g = \varphi f \qquad \text{et} \qquad h = (1-\varphi)f$$

et l'on a $f = g + h$. Le théorème 3.14 implique $Tg \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ puisque $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Maintenant, si $x \in B$, il vient

$$Th(x) = \int K(x,y)h(y)dy,$$

où $K \in C^\infty(B \times \widetilde{B}^c)$. Il en résulte que $Th \in C^\infty(B)$ et ce théorème est prouvé. □

Le théorème 3.14 est aussi vrai si on remplace l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ par l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$[24]. Le théorème 3.15 est donc aussi vrai sur l'espace de Besov $(B^s_{p,q})_{loc}(\Omega)$ avec la même démonstration. On ne démontre que le théorème 3.13, les démonstrations de deux autre théorèmes 3.11 et 3.12 sont identiques.

• Démonstration du théorème 3.13

Démonstration. Prenons une décomposition de l'identité : $\varphi_0 + \varphi_1 = 1$, où φ_0 et φ_1 sont deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et que $\varphi_0(\xi) = 1$ si $|\xi| \le 1$, $\varphi_0(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge 2$. Au vu la renormalisation qu'on a faite sur $X_0(x,\omega)$, on a

$$\widehat{X}^r_0(\xi,\omega) = \varphi_0(\xi)\widehat{X}^r_0(\xi,\omega) + \frac{\varphi_1(\xi)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}\widehat{Z}_0(\xi,\omega),$$

qui implique

$$X^r_0(x,\omega) = Y(x,\omega) + TZ_0(x,\omega),$$

où $\widehat{Y}(\xi,\omega) = \varphi_0(\xi)\widehat{X}^r_0(\xi,\omega)$ et que le symbole de T est

$$a(\xi) = \frac{\varphi_1(\xi)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}.$$

Remarquons que $Y(x,\omega)$ est une fonction C^∞ et le symbole $a \in \mathcal{S}^{-\frac{n}{2}}_{1,0}$, alors on achève la démonstration en uitilisant le théorème 3.15. □

Les trois théorèmes 3.11, 3.12 et 3.13 sont optimals pour l'exposant de la régularité. Voici une brève illustration sur l'optimalité du théorème 3.13, il en est de même pour les deux autres théorèmes.

On va démontrer qu'il existe une fonction $\widetilde{Y}(x,\omega) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et un opérateur $\widetilde{T} \in Op(\mathcal{S}^{\frac{n}{2}}_{1,0})$ telles que

$$Z_0(x,\omega) = \widetilde{Y}(x,\omega) + \widetilde{T}X^r_0(x,\omega). \tag{3.20}$$

En fait, prenons deux décompositions de l'identité : $\varphi_0 + \varphi_1 = 1$ et $\widetilde{\varphi}_0 + \widetilde{\varphi}_1 = 1$, où φ_0 et φ_1 sont deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et que $\varphi_0(\xi) = 1$ si $|\xi| \le 1$, $\varphi_0(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge 2$; et où $\widetilde{\varphi}_0$ et $\widetilde{\varphi}_1$ sont aussi C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et que $\widetilde{\varphi}_0(\xi) = 1$ si $|\xi| \le 2$, $\widetilde{\varphi}_0(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge 3$. Alors on a

$$\widehat{X}^r_0(\xi,\omega) = \varphi_0(\xi)\widehat{X}^r_0(\xi,\omega) + \frac{\varphi_1(\xi)}{|\xi|^{\frac{n}{2}}}\widehat{Z}_0(\xi,\omega),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\widehat{Z}_0(\xi,\omega) &= \widetilde{\varphi}_0(\xi)\widehat{Z}_0(\xi,\omega) + \widetilde{\varphi}_1(\xi)\varphi_1(\xi)\widehat{Z}_0(\xi,\omega) \\
&= \widetilde{\varphi}_0(\xi)\widehat{Z}_0(\xi,\omega) + \widetilde{\varphi}_1(\xi)|\xi|^{\frac{n}{2}}\left(\widehat{X}_0^r(\xi,\omega) - \varphi_0(\xi)\widehat{X}_0^r(\xi,\omega)\right) \\
&= \widetilde{\varphi}_0(\xi)\widehat{Z}_0(\xi,\omega) + \widetilde{\varphi}_1(\xi)|\xi|^{\frac{n}{2}}\widehat{X}_0^r(\xi,\omega).
\end{aligned}$$

Ceci entraîne immédiatement (3.20). L'optimalité du théorème 3.13 est alors une conséquence immédiate de (3.20) et l'optimalité de $Z_0(x,\omega)$ (théorème 3.4).

Chapitre 4

Étude de la partie radiale du processus de Mumford

Dans le chapitre précédent, on a vu que la partie radiale du processus de Mumford de dimention n est de classe $C^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}$ sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ qui ne contient pas l'origine. C'est une fonction régulière en dehors de l'origine. Alors naturellement, on se pose le problème suivant : quelle est la nature de la partie radiale du processus de Mumford en l'origine ? On répondra à cette question dans ce chapitre et on verra que la partie radiale du processus de Mumford a une singularité logarithmique en 0 et à l'infini. Ensuite, on va donner un développement asymptotique de la partie radiale du processus de Mumford ; on retrouvera la régularité $C^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}$ avec ce développement.

Dans ce chapitre, on notera simplement la partie radiale du processus de Mumford et la partie radiale du bruit blanc complexe par $X_0(R,\omega)$ et $Z_0(R,\omega)$ respectivement, comme s'il s'agissait de fonctions unidimensionnelles.

4.1 Comportement en 0 et à ∞

On donne tout d'abord le théorème principal de cette section.

Théorème 4.1. *Soit $X_0^r(R,\omega)$ la renormalisation additive de la partie radiale du processus de Mumford de dimension n. Alors il existe une constante $C>0$ et une fonction $F(R,\omega)$ telles que, pour tout $R>0$*

$$X_0^r(R,\omega) = F(R,\omega) + C\sum_{j=j_0}^{-1} g_j(\omega),$$

avec

$$|F(R,\omega)| \leq D(\omega)\sqrt{\log\left(|j_0|+2\right)},$$

où $j_0 = [\log_2 R]$, qui est le plus grand entier inférieur ou égal à $\log_2 R$, $(g_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes, et où $D(\omega)$ est une v.a. qui est p.s. finie.

Remarque 4.2. *1) Dans ce théorème, si $j_0 \geq 0$, la somme $\sum_{j=j_0}^{-1} g_j(\omega)$ signifie $\Big(-\sum_{j=-1}^{j_0} g_j(\omega)\Big)$.*
2) Le théorème 2.12 nous donne que, pour une suite de v.a. $(g_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Il existe une v.a. $m^*(\omega)$ et une suite de v.a. $(m_i(\omega))_{i\geq 0}$ qui prennent ces valeurs dans $\mathbb{N}$, et que quand ω est fixé, la suite $(m_i(\omega))_{i\geq 0}$ est strictement croissante, telles que presque sûrement en ω

$$\Big|\sum_{j=0}^{m} g_j(\omega)\Big| \leq \frac{3}{2}\sqrt{2m\log m}, \qquad \forall\, m \geq m^*(\omega),$$

et

$$\Big|\sum_{j=0}^{m_i(\omega)} g_j(\omega)\Big| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2m_i(\omega)\log m_i(\omega)}, \qquad \forall\, i \geq 0.$$

Ceci implique, en invoquant le théorème 4.1, l'existence de deux réels $0 < R_0(\omega) < R_1(\omega)$ et deux sous suites strictement croissantes $(m_i^+(\omega))_{i\geq 0}$ et $(m_i^-(\omega))_{i\geq 0}$ de $\mathbb{N}$, telles qu'on a ω-presque sûrement
i) pour tout $R \leq R_0(\omega)$ ou $R \geq R_1(\omega)$, on a

$$|X_0^r(R,\omega)| \leq 3C\sqrt{|j_0|\log(|j_0|+2)};$$

ii) pour tout $R \in \Big(\bigcup_{i\geq 0}[2^{-m_i^-(\omega)}, 2^{-m_i^-(\omega)+1}]\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\geq 0}[2^{m_i^+(\omega)}, 2^{m_i^+(\omega)+1}]\Big)$, on a

$$|X_0^r(R,\omega)| \geq \frac{C}{2}\sqrt{|j_0|\log(|j_0|+2)},$$

où $j_0 = [\log_2 R]$. Alors on sait que la partie radiale du processus de Mumford a une singularité logarithmique en 0 ainsi qu'à l'infini.
3) Soit $p \in [1,\infty[$. L'estimation précédente nous donne que, ω-presque sûrement

$$X_0^r(x,\omega) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

mais $X_0^r(x,\omega)$ n'est pas une fonction bornée autour de l'origine.
4) De plus, soit $p \in [1,\infty]$, alors ω-presque sûrement : $X_0^r(x,\omega) \notin L^p(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique, pour tout $s > 0$ et $p, q \in [1,\infty]$

$$X_0^r(x,\omega) \notin B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

La démonstration du théorème 4.1 est basée sur le théorème suivant.

Théorème 4.3. *Soit $X_0(R,\omega)$ la partie radiale du processus de Mumford de dimension n. Alors on a, pour tout $R > 0$*

$$X_0(R,\omega) = \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}} r^{\frac{n}{2}-1} Z_0(r,\omega)dr,$$

où $Z_0(r,\omega)$ est la partie radiale du bruit blanc complexe de dimension n et où $J_{\frac{n-2}{2}}$ est la fonction de Bessel d'ordre $\frac{n-2}{2}$.

Démonstration. Soit $\{f_{j,k} : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N}\}$ une base o.n. de $H_0(\mathbb{R}^n)$ (sous espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui se compose par les fonctions radiales), telle que

$$\widehat{f}_{j,k}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w_{j,k,0,0}(\xi),$$

où $\{w_{j,k,0,0} : j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ est la base o.n. de $H_0(\mathbb{R}^n)$ qu'on a définie dans (2.9). Alors on a la représentation de $X_0(x,\omega)$ en considérant sa définition (2.3) dans le domaine direct

$$X_0(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\widetilde{f}_{j,k}(x), \tag{4.1}$$

où $\widetilde{f}_{j,k} = \wedge^{\frac{n}{2}} f_{j,k}$. Remarquons que $\widetilde{f}_{j,k}$ est une fonction de classe de Schwartz ; alors on a, en utilisant la formule d'inversion de Fourier

$$\widetilde{f}_{j,k}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\widetilde{f}}_{j,k}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{ix\cdot r\sigma}d\sigma \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}-1}w_{j,k,0,0}(r)dr,$$

qui implique, d'après le lemme 1.21

$$\widetilde{f}_{j,k}(x) = \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r|x|)}{(r|x|)^{\frac{n-2}{2}}} r^{\frac{n}{2}-1}w_{j,k,0,0}(r)dr. \tag{4.2}$$

La démonstration s'achève facilement avec (4.1) et (4.2). $\square$

Avec ce théorème, la motivation et la démonstration du théorème 4.1 sont évidentes.

On suppose que $j_0 = [\log_2 R]$; cela équivaut à $2^{j_0} \le R < 2^{j_0+1}$. Considérons alors la définition de la partie radiale du bruit blanc complexe dans (1.31) en prennant la base de Malvar-Wilson (2.9)

$$Z_0(r,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)w_{j,k,0,0}(r) = \left(m(\mathbb{S}^{n-1})\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\frac{w_{j,k}(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Ceci nous donne une décomposition de $X_0(R,\omega)$, en utilisant le théorème 4.3

$$X_0(R,\omega) = X_{0,1}(R,\omega) + X_{0,2}(R,\omega),$$

où

$$X_{0,1}(R,\omega) = \left(m(\mathbb{S}^{n-1})\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j\ge j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}}\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr,$$

$$X_{0,2}(R,\omega) = \left(m(\mathbb{S}^{n-1})\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j< j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}}\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr.$$

Remarquons que la fonction $w_{j,k}(r)$ est supportée par $[\frac{2^{-j}}{3}, 3\cdot 2^{-j}]$; alors quand $j \ge j_0$ et $j \to \infty$, dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}}\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr,$$

la fonction de Bessel est évaluée sur l'intervalle $Rr \in [\frac{2^{j_0-j}}{3}, 6\cdot 2^{j_0-j}] \subset]0,6]$, et $Rr \to 0$. De plus, d'après le lemme 1.18

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda)}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{\int_0^\pi (\sin\theta)^{n-2}d\theta}{2^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{m(\mathbb{S}^{n-1})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}},$$

ceci nous incite, à décomposer $X_{0,1}(R,\omega)$ en deux parties

$$X_{0,1}(R,\omega) = X^1_{0,1}(R,\omega) + X^2_{0,1}(R,\omega),$$

où
$$X^1_{0,1}(R,\omega)=\Big(\frac{m(\mathbb{S}^{n-1})}{(2\pi)^n}\Big)^{\frac12}\sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr,$$
et
$$\begin{aligned}
&X^2_{0,1}(R,\omega)\\
=\ &\big(m(\mathbb{S}^{n-1})\big)^{-\frac12}\sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty\Big(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}}-\frac{\int_0^\pi(\sin\theta)^{n-2}d\theta}{2^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\Big)\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr\\
=\ &\frac{\big(m(\mathbb{S}^{n-1})\big)^{-\frac12}}{2^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty\Big(\int_0^\pi\Big(\cos(\lambda\cos\theta)-1\Big)(\sin\theta)^{n-2}d\theta\Big)\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr.
\end{aligned}$$
Suivons les notations du théorème 2.11 qui est la renormalisation de la partie radiale du processus de Mumford, on a
$$X^1_{0,1}(R,\omega)=\sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}c_kg_{j,k}(\omega)=\|c\|_{l^2}\sum_{j\geq j_0}g_j(\omega),$$
où, on répète ici
$$c_k=\Big(\frac{m(\mathbb{S}^{n-1})}{(2\pi)^n}\Big)^{\frac12}\int_0^\infty\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr=\Big(\frac{m(\mathbb{S}^{n-1})}{(2\pi)^n}\Big)^{\frac12}\int_0^\infty\frac{w(r)}{\sqrt{r}}\cos{[\pi(k+\frac12)r]}dr,$$
et
$$g_j(\omega)=\frac{1}{\|c\|_{l^2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}c_kg_{j,k}(\omega),\qquad j\in\mathbb{Z}.$$
On démontre ensuite que, les deux fonctions $X^2_{0,1}(R,\omega)$ et $X_{0,2}(R,\omega)$ sont ω-presque sûrement finies pour tout $R>0$ et relativement petites par rapport à $X^1_{0,1}(R,\omega)$ qui a besoin d'une renormalisation évidente. Établissons les lemmes suivants.

Lemme 4.4. *Soient $R>0$, $j_0=[\log_2 R]$. Alors la série*
$$\sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty f(rR)\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr,$$
où
$$f(\lambda)=\int_0^\pi\Big(\cos(\lambda\cos\theta)-1\Big)(\sin\theta)^{n-2}d\theta,$$
est ω-presque sûrement absolument convergente pour tout $R>0$. Notons sa somme par $G_1(R,\omega)$. Alors il existe une v.a. $D_1(\omega)$ qui est p.s. finie, telle que
$$|G_1(R,\omega)|\leq D_1(\omega)\sqrt{\log{(|j_0|+2)}}.$$

Lemme 4.5. *Soient $R>0$, $j_0=[\log_2 R]$. Alors la série*
$$\sum_{j<j_0}\sum_{k\in\mathbb{N}}g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}}\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr$$
est ω-presque sûrement absolument convergente pour tout $R>0$. Notons sa somme par $G_2(R,\omega)$. Alors il existe une v.a. $D_2(\omega)$ qui est p.s. finie, telle que
$$|G_2(R,\omega)|\leq D_2(\omega)\sqrt{\log{(|j_0|+2)}}.$$

Avec les deux lemmes précédents et la décomposition

$$X_0 = X_{0,1}^1 + X_{0,1}^2 + X_{0,2} = X_{0,1}^1 + C_1 G_1 + C_2 G_2 = \|c\|_{l^2} \sum_{j \geq j_0} g_j(\omega) + C_1 G_1 + C_2 G_2.$$

On voit que la partie radiale du processus de Mumford est une somme de variables aléatoires gaussiennes modulo une erreur qui est relativement petite. On enlève alors la somme infinie $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(\omega)$ qui est divergente, on a immédiatement la renormalisation additive de $X_0(R, \omega)$, qui est de la forme suivante

$$X_0^r(R, \omega) = C_1 G_1(R, \omega) + C_2 G_2(R, \omega) + C_0 \sum_{j=j_0}^{-1} g_j(\omega), \tag{4.3}$$

où les trois constantes C_0, C_1 et C_2 sont strictement positives. Remarquons que la renormalisation qu'on fait ici est tout à fait la même que celle utilisée dans le théorème 2.11. Enfin, le théorème 4.1 est une conséquence immédiate des lemmes 4.4, 4.5 et du (4.3). Il nous reste à démontrer les deux lemmes 4.4 et 4.5.

• Démonstration du lemme 4.4

Démonstration. Supposons $\widetilde{w}(r) = \frac{w(r)}{\sqrt{r}}$. Alors on a, en utilisant une intégration par parties

$$\int_0^\infty f(rR) \frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}} dr = -\frac{1}{\pi^2 (k+\frac{1}{2})^2} \int_0^\infty \Big(\widetilde{w}''(r) f(2^{-j}Rr) + 2 \cdot 2^{-j} R \widetilde{w}'(r) f'(2^{-j}Rr)$$
$$+ 2^{-2j} R^2 \widetilde{w}(r) f''(2^{-j}Rr) \Big) \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r] dr. \tag{4.4}$$

Remarquons que

$$f(\lambda) = -2 \int_0^\pi \sin^2\Big(\frac{\lambda \cos\theta}{2}\Big) (\sin\theta)^{n-2} d\theta,$$

d'où

$$|f(\lambda)| \leq \frac{\pi}{2} \lambda^2, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

De plus, on a facilement

$$|f'(\lambda)|, |f''(\lambda)| \leq \pi, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

Indiquons ici que quand $j \geq j_0$ on a : $2^{-j} R \leq 2^{-j} 2^{j_0+1} \leq 2$. Alors il nous donne, d'après les estimations ci-dessus et (4.4), pour tout $j \geq j_0$

$$\Big| \int_0^\infty f(rR) \frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}} dr \Big| \leq C \frac{2^{-j+j_0}}{(k+\frac{1}{2})^2},$$

qui implique

$$\begin{aligned} |G_1(R,\omega)| &\leq CC(\omega) \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\log(2+|j|+k)} \frac{2^{-j+j_0}}{(k+\frac{1}{2})^2} \\ &\leq C_1(\omega) \sqrt{\log(2+|j_0|)} \sum_{j \geq j_0} \sqrt{1+|j-j_0|} 2^{-j+j_0} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{\log(2+k)}}{(k+\frac{1}{2})^2} \\ &= C_2(\omega) \sqrt{\log(2+|j_0|)}. \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration. □

• Démonstration du lemme 4.5

Démonstration. Remarquons d'abord que $2^{j_0} \leq R < 2^{j_0+1}$ et que la fonction $w_{j,k}(r)$ est supportée par $[\frac{2^{-j}}{3}, 3 \cdot 2^{-j}]$. Alors quand $j < j_0$, on a $Rr \in [\frac{2^{j_0-j}}{3}, 6 \cdot 2^{j_0-j}] \subset [\frac{2}{3}, \infty[$. On va utiliser la représentation asymptotique de la fonction de Bessel à l'infini pour estimer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}} dr.$$

En fait, il existe deux constantes C_1, C_2 et une fonction $\widetilde{R}$ telles que

$$J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda) = C_1 \frac{\cos(\lambda - \alpha)}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + C_2 \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + \widetilde{R}(\lambda), \qquad \alpha = \frac{n-1}{4}\pi,$$

et les fonctions $\widetilde{R}(\lambda)$, $\widetilde{R}'(\lambda)$ et $\widetilde{R}''(\lambda)$ sont de $O(\lambda^{-\frac{5}{2}})$ quand $\lambda \to \infty$. Alors cela nous donne une décomposition de $G_2(R, \omega)$

$$G_2(R,\omega) = C_1 G_{2,1}(R,\omega) + C_2 G_{2,2}(R,\omega) + G_{2,3}(R,\omega), \tag{4.5}$$

où

$$G_{2,1}(R,\omega) = \sum_{j<j_0} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) \Big(\frac{2^j}{R}\Big)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty \frac{w(r)}{r^{\frac{n}{2}}} \cos(2^{-j}Rr - \alpha) \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r] dr,$$

$$G_{2,2}(R,\omega) = \sum_{j<j_0} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) \Big(\frac{2^j}{R}\Big)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^\infty \frac{w(r)}{r^{\frac{n}{2}+1}} \sin(2^{-j}Rr - \alpha) \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r] dr,$$

et

$$G_{2,3}(R,\omega) = \sum_{j<j_0} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) \Big(\frac{2^j}{R}\Big)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty \frac{w(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}} \widetilde{R}(2^{-j}Rr) \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r] dr.$$

Indiquons ici que $\frac{2^j}{R} \leq 2^{j-j_0}$ et $\frac{R}{2^j} \leq 2^{j_0-j+1}$. Alors en utilisant le lemme 3.8, on obtient

$$\begin{aligned}
|G_{2,1}(R,\omega)| &\leq C(\omega)\sqrt{\log(2+|j_0|)} \sum_{j<j_0} \sqrt{1+|j-j_0|}(2^{j-j_0})^{\frac{n-1}{2}} \\
&\qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{\log(2+k)} \Big| \int_0^\infty \frac{w(r)}{r^{\frac{n}{2}}} \cos(2^{-j}Rr - \alpha) \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r] dr \Big| \\
&\leq CC(\omega)\sqrt{\log(2+|j_0|)} \sum_{j<j_0} \sqrt{1+|j-j_0|}(2^{j-j_0})^{\frac{n-1}{2}} \big(1+\log(2^{-j}R+1)\big) \\
&\leq CC(\omega)\sqrt{\log(2+|j_0|)} \sum_{s>0} \sqrt{1+s}\big(1+\log(2^{s+1}+1)\big) 2^{-\frac{n-1}{2}s},
\end{aligned}$$

qui implique l'existence d'une v.a. $C_1(\omega)$ qui est p.s. finie, telle que

$$|G_{2,1}(R,\omega)| \leq C_1(\omega)\sqrt{\log(2+|j_0|)}. \tag{4.6}$$

De même, il existe une v.a. $C_2(\omega)$ qui est p.s. finie, telle que

$$|G_{2,2}(R,\omega)| \leq C_2(\omega)\sqrt{\log(2+|j_0|)}. \tag{4.7}$$

Il nous reste à estimer la fonction $G_{2,3}(R,\omega)$. En fait, les fonctions $\widetilde{R}(\lambda)$, $\widetilde{R}'(\lambda)$ et $\widetilde{R}''(\lambda)$ sont de $O(\lambda^{-\frac{5}{2}})$, alors il en résulte que, d'après l'intégration par partie

$$\Big|\int_0^\infty \frac{w(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}}\widetilde{R}(2^{-j}Rr)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr\Big| \leq \frac{C'}{(k+\frac{1}{2})^2}\Big(\frac{2^j}{R}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

qui implique

$$\begin{aligned} |G_{2,3}(R,\omega)| &\leq C'C(\omega)\sqrt{\log(2+|j_0|)}\sum_{j<j_0}\sqrt{1+|j-j_0|}(2^{j-j_0})^{\frac{n-1}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{\log(2+k)}}{(k+\frac{1}{2})^2} \\ &= C_3(\omega)\sqrt{\log(2+|j_0|)}. \end{aligned}$$

La démonstration s'achève immédiatement avec (4.5), (4.6), (4.7) et cette estimation. □

4.2 Développement asymptotique

Revenons à la fin du chapitre 1. On voit que, en utilisant la représentation asymptotique de la fonction de Bessel, on peut développer la transformation de Fourier d'une fonction radiale en une somme de fonctions de régularités croissantes. En fait, on peut utiliser la même méthode pour obtenir un théorème analogue sur la partie radiale du processus de Mumford. Avec ce théorème, on redémontrera que la partie radiale du processus de Mumford de dimention n est de classe $C^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}$ sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ qui ne contient pas l'origine.

Maintenant, quelque notations. Soient $n \geq 2$ un entier, $\{g_{j,k} : j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$ une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes et $\{w_{j,k} : j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ la base de Malvar-Wilson de $L^2(0,\infty)$. On définit une fonction sur $\mathbb{R}$

$$A(R,\omega) = \sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty \frac{\cos(rR-\frac{n-1}{4}\pi)}{r^{\frac{n}{2}}}w_{j,k}(r)dr. \tag{4.8}$$

On verra que, cette série (p.s. en ω) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, et la fonction ainsi définie est une distribution tempérée et à la fois de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R})$. Définissons de plus une suite de constante $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par

$$C_m = (-1)^m\big(m(\mathbb{S}^{n-1})\big)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\prod_{k=0}^{m-1}\big((n-2)^2-(2k+1)^2\big)}{m!8^m}. \tag{4.9}$$

On énonce ensuite le théorème principal de cette section.

Théorème 4.6. *Soit $X_0^r(R,\omega)$ la renormalisation additive de la partie radiale du processus de Mumford de dimension n. Alors il existe deux suites de fonction*

$$\big\{F_m(R,\omega) : R \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}\big\} \qquad et \qquad \big\{\widetilde{F}_m(R,\omega) : R \in]0,\infty[\,,\ m \in \mathbb{N}\big\}$$

telles que, pour tout $l \geq 1$

$$X_0^r(R,\omega) = \sum_{m=0}^{l}\frac{C_m}{R^{\frac{n-1}{2}+m}}F_m(R,\omega) + \widetilde{F}_l(R,\omega), \qquad \forall\, R > 0,$$

avec

$$F_0(R,\omega) = A(R,\omega) \qquad et \qquad F'_{m+1}(R,\omega) = F_m(R,\omega) \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

où $A(R,\omega)$ et C_m sont données dans (4.8) et (4.9) ; et que ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $F_m(R,\omega)$ est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+m-\varepsilon}(\mathbb{R})$, la fonction $\widetilde{F}_l(R,\omega)$ est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+l+1-\varepsilon}(\,]0,\infty[\,)$.

Remarquons d'abord que, dans ce théorème, les constantes C_m viennent la représentation asymptotique de la fonction de Bessel $J_{\frac{n-2}{2}}$. Alors quand n est un entier pair, les constantes C_m sont non nulles pour tout $m \in \mathbb{N}$. Mais quand n est un entier impaire, les constantes C_m sont nulles à partir de certaine rang. Plus précisement, $C_m = 0$ pour tout $m \geq \frac{n-1}{2}$. Donc ce développement asymptotique de la partie radiale du processus de Mumford est une somme finie. Par exemple, quand $n = 3$, on se trouvera dans la suite de cette section

$$X_0^r(R,\omega) = \frac{C}{R} A(R,\omega) + G(R,\omega),$$

où C est une constante non nulle, $G(R,\omega)$ est C^∞ sur $]0,\infty[$, et où

$$A(R,\omega) = \sum_{j\leq -1} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) \int_0^\infty \frac{\sin(rR)}{r^{\frac{3}{2}}} w_{j,k}(r) dr,$$

qui est de classe $C_{loc}^{1-\varepsilon}(\mathbb{R})$.

Remarquons de plus que, la fonction $F_m(R,\omega)$ appartient à $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+m-\varepsilon}(\,]0,\infty[\,)$. Cela implique qu'elle est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+m-\varepsilon}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ en tant qu'une fonction radiale n-dimensionnelle. Qui nous donne que, la partie radiale du processus de Mumford est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. Ceci est une autre démonstration de la régularité de la partie radiale du processus de Mumford.

On commence la démonstration. Suivons le théorème 4.3 et la renormalisation additive qu'on a faite. On décompose d'abord $X_0^r(R,\omega)$ en deux parties

$$X_0^r(R,\omega) = \big(m(\mathbb{S}^{n-1})\big)^{-\frac{1}{2}} \Big(X_{0,1}(R,\omega) + X_{0,2}(R,\omega)\Big),$$

où

$$X_{0,1}(R,\omega) = \sum_{j\leq -1} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(rR)}{(rR)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}} dr,$$

$$X_{0,2}(R,\omega) = \sum_{j\geq 0} \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) \int_0^\infty f(rR) \frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}} dr, \tag{4.10}$$

avec

$$f(\lambda) = \int_0^\pi \Big(\cos(\lambda\cos\theta) - 1\Big)(\sin\theta)^{n-2} d\theta.$$

On décompose de plus $X_{0,1}(R,\omega)$ en utilisant la formule asymptotique de la fonction de Bessel dans la remarque 1.20

$$X_{0,1}(R,\omega) = \sum_{m=0}^{l} \frac{C_m}{R^{\frac{n-1}{2}+m}} F_m(R,\omega) + \frac{\widetilde{F}_l(R,\omega)}{R^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{4.11}$$

où

$$F_m(R,\omega) = \sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty \frac{\cos(rR-\alpha_m)}{r^{\frac{n}{2}+m}} w_{j,k}(r)dr, \qquad \alpha_m = \frac{n-1+2m}{4}\pi, \quad (4.12)$$

$$\widetilde{F}_l(R,\omega) = \sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty \widetilde{R}_l(rR)\frac{w_{j,k}(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}}dr, \qquad (4.13)$$

et répétons ici

$$\widetilde{R}_l^{(s)}(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} O(\lambda^{-l-\frac{3}{2}}), \qquad \forall\, s\geq 0. \qquad (4.14)$$

Enfin, on a la décomposition dont on a besoin sur $X_0^r(R,\omega)$

$$X_0^r(R,\omega) = \big(m(\mathbb{S}^{n-1})\big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{m=0}^{l}\frac{C_m}{R^{\frac{n-1}{2}+m}}F_m(R,\omega) + \frac{\widetilde{F}_l(R,\omega)}{R^{\frac{n-2}{2}}} + X_{0,2}(R,\omega)\Big).$$

Alors on a immédiatement le théorème 4.6 d'après cette décomposition et les lemmes suivants.

Lemme 4.7. *P.s. en ω, la série (4.10) est uniformément convergente sur tout compact de $]0,\infty[$, et sa somme $X_{0,2}(R,\omega)$ est C^∞ sur $]0,\infty[$.*

Lemme 4.8. *P.s. en ω, la série (4.13) est uniformément convergente sur tout compact de $]0,\infty[$, et sa somme $\widetilde{F}_l(R,\omega)$ est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+l+1-\varepsilon}(\,]0,\infty[\,)$ pour tout $\varepsilon>0$.*

Dans la suite de cette section, on considère $F_m(R,\omega)$ qui est donnée dans (4.12) comme une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Lemme 4.9. *P.s. en ω, la série (4.12) est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$, et sa somme $F_m(R,\omega)$ est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+m-\varepsilon}(\mathbb{R})$ pour tout $\varepsilon>0$. De plus, on a*

$$\frac{d}{dt}F_{m+1}(R,\omega) = F_m(R,\omega).$$

La démonstration du lemme 4.7 est simple. Revenons à la définition de $X_{0,2}(R,\omega)$ dans (4.10). On remarque d'abord que pour tout $\lambda>0$, on a

$$|f(\lambda)|\leq \frac{\pi}{2}\lambda^2, \qquad \text{et} \qquad |f^{(m)}(\lambda)|\leq\pi, \quad \forall\, m>0.$$

Alors en utilisant une intégration par parties, on obtient que pour tout compact K de $]0,\infty[$, il existe une suite de constante $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\Big|\int_0^\infty f(rR)\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr\Big| \leq D_0\frac{2^{-j}}{(k+\frac{1}{2})^2}, \qquad \forall\, R\in K.$$

et que pour tout $m\geq 1$

$$\Big|\frac{d^m}{dR^m}\Big(\int_0^\infty f(rR)\frac{w_{j,k}(r)}{\sqrt{r}}dr\Big)\Big| \leq D_m\frac{2^{-mj}}{(k+\frac{1}{2})^2}, \qquad \forall\, R\in K.$$

Ceci nous donne immédiatement la régularité C^∞ de $X_{0,2}(R,\omega)$.

La démonstration du lemme 4.8 est simple aussi. En fait, d'après la propriété (4.14), pour tout compact K de $]0,\infty[$, il existe une suite de constante $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $m\in\mathbb{N}$

$$\Big|\frac{d^m}{dR^m}\Big(\int_0^\infty \widetilde{R}_l(rR)\frac{w_{j,k}(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}}dr\Big)\Big| \leq D_m\frac{2^{j(\frac{n-3}{2}+l-m)}}{(k+\frac{1}{2})^2}, \qquad \forall\, R\in K.$$

Il en résulte que $\widetilde{F}_l(R,\omega)$ est de classe $C^{[\frac{n}{2}]+l-2}$ sur K au sens usuel. Mais on voit que, d'après la décomposition de $X_{0,1}(R,\omega)$ dans (4.11), on a

$$\widetilde{F}_l(R,\omega) = \sum_{m=l+1}^{l'}\frac{C_m}{R^{\frac{1}{2}+m}}F_m(R,\omega)+\widetilde{F}_{l'}(R,\omega),$$

ce qui démontre le lemme 4.8 en prennant $l'=l+3$ et en utilisant le lemme 4.9.

Il nous reste à démontrer le lemme 4.9. Répétons d'abord l'estimation (3.2) dans la démonstration du lemme 3.8 : pour tout $\lambda>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\cos(\lambda r+\alpha)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr\Big| \leq \frac{C_2(\widehat{f})}{1+\big|\lambda-\pi(k+\frac{1}{2})\big|^2}.$$

Avec cette estimation, on a une suite de constante $(D_{m'})_{m'\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $m'\in\mathbb{N}$

$$\Big|\frac{d^{m'}}{dR^{m'}}\int_0^\infty\frac{\cos(rR-\alpha_m)}{r^{\frac{n}{2}+m}}w_{j,k}(r)dr\Big| \leq D_{m'}\frac{2^{j(\frac{n-1}{2}+m-m')}}{1+\big|2^{-j}|R|-\pi(k+\frac{1}{2})\big|^2}.$$

De plus, en utilisant le lemme 3.7, pour tout $s>0$ et tout compact $K\subset\mathbb{R}$, il exsite une v.a. $C_{s,K}(\omega)$ qui est p.s. finie, telle que

$$\Big|\sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{j,k}(\omega)|\frac{2^{js}}{1+\big|2^{-j}|R|-\pi(k+\frac{1}{2})\big|^2}\Big| \leq C_{s,K}(\omega), \qquad \forall\, R\in K.$$

Ceci démontre que, presque sûrement en ω, la fonction $F_m(R,\omega)$ est de classe $C^{[\frac{n}{2}]+m-1}$ sur tout compact de $\mathbb{R}$ au sens usuel et à la fois une distribution tempérée, et qu'on a évidemment $\frac{d}{dt}F_{m+1}(R,\omega)=F_m(R,\omega)$ en dérivant terme par terme.

On démontre ensuite $F_m(R,\omega)$ est de classe $C_{loc}^{\frac{n-1}{2}+m-\varepsilon}(\mathbb{R})$ pour tout $\varepsilon>0$. On prolonge d'abord $w_{j,k}(r)$ en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant $w_{j,k}(r)=0$ pour $r\leq 0$ et on définit

$$Y(r,\omega) = \sum_{j\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}(\omega)w_{j,k}(r).$$

Remarquons que $Y(r,\omega)$ est une distribution tempérée de dimension 1 et supportée par $[\frac{2}{3},\infty[$; il en est de même pour $Y_s(r,\omega)\triangleq\frac{Y(r,\omega)}{r^s}$, où $s\in\mathbb{R}$. De plus, la distribution tempérée $Y(r,\omega)+Y(-r,\omega)$ est le bruit blanc complexe modulo une distribution tempérée à support compact. De même pour $Y(r,\omega)-Y(-r,\omega)$. Alors il existe une distribution tempérée T à support compact, telle que

$$Y(r,\omega) = Z^1(r,\omega)+Z^2(r,\omega)+T(r,\omega),$$

où $Z^1(r,\omega)$ et $Z^2(r,\omega)$ sont deux bruits blancs complexes unidimensionnels. Donc on a, p.s. en ω, $\widehat{Y}(R,\omega)$ est de classe $C^{s'}_{loc}(\mathbb{R})$ pour tout $s' < -\frac{1}{2}$. Revenons à la définition de la fonction $F_m(R,\omega)$ en (4.12) et posons $s = \frac{n}{2} + m$. Alors on a

$$F_m(R,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_s(r,\omega)\cos(rR - \alpha_m)dr,$$

qui implique

$$F_m(R,\omega) = \frac{e^{i\alpha_m}}{2}\widehat{Y}_s(R,\omega) + \frac{e^{-i\alpha_m}}{2}\widehat{Y}_s(-R,\omega),$$

d'où

$$F_m(R,\omega) = \frac{e^{i\alpha_m}}{2} \wedge^{-s} \widehat{Y}(R,\omega) + \frac{e^{-i\alpha_m}}{2} \wedge^{-s} \widehat{Y}(-R,\omega).$$

Il en résulte que

$$\widehat{Y}(R,\omega) \in C^{s'}_{loc}(\mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \qquad F_m(R,\omega) \in C^{s'+s}_{loc}(\mathbb{R}).$$

On termine la démonstration du lemme 4.9.

Chapitre 5

Le développement asymptotique de la partie radiale du processus de Mumford bidimensionnel

Le théorème 4.3 joue un rôle essentiel dans l'étude de la partie radiale du processus de Mumford $X_0(x,\omega)$. Il vient de la défintion de $X_0(x,\omega)$ dans le domaine de Fourier en utilisant la base de Malvar-Wilson.

Dans ce chapitre, on se restreint à étudier la partie radiale du processus de Mumford bidimensionnel, en établissant une liaison avec le mouvement brownien. Cette fois-ci, on prend la base de Malvar-Wilson dans le domaine direct, ce qui donne une représentation de $X_0(x,\omega)$ sans invoquer la fonction de Bessel. Avec cette représentation, on retrouve la même résultat de celle du théorème 4.6 où $F_0(R,\omega)$ devient le mouvement brownien. Ceci nous donne une autre piste pour étudier la partie radiale du processus de Mumford ainsi que les fonctions ou les processus de type radial.

5.1 Énoncé du théorème principal

On donne d'abord le théorème principal de ce chapitre. On rappelle ici le mouvement brownien complexe est la combinaison complexe des mouvements browniens réels indépendants en imposant la condition d'être nul en 0.

Théorème 5.1. *Soit $X_0^r(x,\omega)$ la renormalisation additive de la partie radiale du processus de Mumford bidimensionnel. Alors $X_0^r(x,\omega)$ est aussi radiale, et il existe une suite de constantes $(C_k)_{k\geq 0}$ et une suite de fonctions $(G_k(R,\omega))_{k\geq 0}$ où la fonction $G_k(R,\omega)$ est ω-presque sûrement de la classe $C_{loc}^{k+\frac{3}{2}-\varepsilon}(\,]0,\infty[\,)$ pour tout $\varepsilon > 0$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $R > 0$*

$$X_0^r(R,\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{R^{k+\frac{1}{2}}} B_k(R,\omega) + G_n(R,\omega),$$

où $B_k(R,\omega)$ est la k-ième de primitive du mouvement brownien complexe.

Comme une préparation, établissons d'abord le théorème suivant.

Théorème 5.2. *Soit $X_0(x,\omega)$ la partie radiale du processus de Mumford de dimension n. Alors $X_0(x,\omega)$ est aussi radiale, et il existe une constante $C_n > 0$ telle que*

$$X_0(R,\omega) = \frac{C_n}{R^{\frac{n}{4}}} \int_0^\infty G_n\Big(\frac{2Rr}{R^2+r^2}\Big) r^{\frac{3}{4}n-1} Z_0(r,\omega)dr,$$

où

$$G_n(\lambda) = \lambda^{\frac{n}{4}} \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{n-2}}{(1-\lambda\cos\theta)^{\frac{n}{4}}} d\theta, \tag{5.1}$$

et $Z_0(r,\omega)$ est la partie radiale du bruit blanc complexe de dimension n.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition de $X_0(x,\omega)$ dans le domain direct (2.3) en utilisant la base de Malvar-Wilson et le lemme suivant.

Lemme 5.3. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale. Alors $\widetilde{f} = \wedge^{-\frac{n}{2}} f$ l'est aussi. De plus, il existe une constante $C_n > 0$ telle que*

$$\widetilde{f}(R) = \frac{C_n}{R^{\frac{n}{4}}} \int_0^\infty G_n\Big(\frac{2Rr}{R^2+r^2}\Big) r^{\frac{3}{4}n-1} f(r)dr,$$

où la fonction G_n est donnée dans (5.1).

Démonstration. Par la définition de $\wedge^{-\frac{n}{2}}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\widetilde{f}(x) = C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{\frac{n}{2}}} dy = C \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|x-r\sigma|^{\frac{n}{2}}} d\sigma \int_0^\infty r^{n-1} f(r)dr.$$

Prenons une rotation $A \in SO(n,\mathbb{R})$ telle que $Ax = (R, 0, \cdots, 0)$, où $R = |x|$. Alors cela nous donne, après un changement de variables en cordonnées polaires

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|x-r\sigma|^{\frac{n}{2}}} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|Ax-r\sigma|^{\frac{n}{2}}} d\sigma = C' \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{n-2}}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{\frac{n}{4}}} d\theta.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|x-r\sigma|^{\frac{n}{2}}} d\sigma = \frac{C'}{(2Rr)^{\frac{n}{4}}} G_n\Big(\frac{2Rr}{R^2+r^2}\Big),$$

où C' est une constante strictement positive, ce qui achève la démonstration. □

On voit que, d'après le theorème 5.2, l'étude de $X_0(x,\omega)$ se ramène à étudier les propriétés de la fonction $G_n(\lambda)$. Dans ce chapitre, on se restreint à considérer le cas bidimensionnel. Remarquons que, la fonction $G_2(\lambda)$ a une singularité quand $\lambda \to 1$. Dans la section suivante, on va préciser la singularité de $G_2(\lambda)$ en $\lambda = 1$ et on va donner aussi le comportement de $G_2(\lambda)$ quand $\lambda \to 0$. Notons simplement dans la suite

$$H(\lambda) = G_2(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1-\lambda\cos\theta}}. \tag{5.2}$$

5.2 Propriétés de $H(\lambda)$

Voici les deux propositions qui donnent le comportement de la fonction $H(\lambda)$ quand $\lambda \to 1$ ainsi que $\lambda \to 0$.

Proposition 5.4. *Soit $H(\lambda)$ la fonction qu'on a définie dans (5.2). Alors il existe deux fonctions $u(\lambda)$ et $v(\lambda)$ telles que*
1) $H(\lambda) = u(\lambda)\log(1-\lambda) + v(\lambda), \qquad \forall \lambda \in]\frac{1}{3}, 1[$,
2) $u(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3}, \infty[$,
3) $v(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3}, 1]$.

Proposition 5.5. *Soit $H(\lambda)$ la fonction qu'on a définie dans (5.2). Alors il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1 telle que*

$$H(\lambda) = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^{\frac{1}{2}+2n},$$

pour tout $\lambda \in [0, 1[$. Plus précisement, les a_n sont données par $a_n = \pi 2^{-6n} C_{2n}^n C_{4n}^{2n}$.

Avant de démontrer la proposition 5.4, on établira d'abord les lemmes suivant.

Lemme 5.6. *Soit $\varepsilon^2 = \frac{1-\lambda}{2\lambda}$. Posons*

$$h_n(\lambda) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}} dx, \qquad n \geq 0,$$

Alors pour tout $\lambda \in [0, 1[$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} h_n(\lambda)$ converge, et on a $H(\lambda) = \sqrt{2} \sum\limits_{n\geq 0} h_n(\lambda)$.

Démonstration. Remarquons que $1 - \lambda\cos\theta = 2\lambda\big(\varepsilon^2 + (\sin\frac{\theta}{2})^2\big)$. Donc

$$H(\lambda) = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2\theta}}.$$

Prenons $\theta = \arcsin x$, il vient

$$H(\lambda) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

On sait que, pour tout $x \in [0, 1[$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^{2n},$$

ceci entraîne immédiatemment la conclusion d'après le théorème de Beppo-Lévi. $\square$

Lemme 5.7. *Pour tout $n \geq 0$, il existe une fonction $\widetilde{h}_n(\lambda)$, C^∞ sur $]0, \infty[$, telle que*

$$h_n(\lambda) = \widetilde{h}_n(\lambda) + (-1)^{n+1} \frac{(C_{2n}^n)^2}{2^{4n+1}} \Big(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\Big)^n \log(1-\lambda), \qquad \forall \lambda \in [0, 1[.$$

Démonstration. Évidemment, d'après la définition de $h_n(\lambda)$ dans le lemme précédent

$$h_n(\lambda) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}} dx = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \varepsilon^{2n} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{y^{2n}}{\sqrt{1+y^2}} dy.$$

On fait le changement de variable $z = \log(y + \sqrt{y^2+1})$, qui nous donne

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{y^{2n}}{\sqrt{1+y^2}} dy = \int_0^{\log\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon}\right)} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^{2n} dz = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k \int_0^{\log\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon}\right)} e^{(2k-2n)z} dz,$$

ceci implique

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{y^{2n}}{\sqrt{1+y^2}} dy \\
= \;& \frac{1}{2^{2n}} \Big[(-1)^n C_{2n}^n \log\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k \int_0^{\log(\frac{1+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon})} \left(e^{(2k-2n)z} + e^{(2n-2k)z}\right) dz \Big] \\
= \;& \frac{1}{2^{2n}} \Big[(-1)^n C_{2n}^n \log\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k \Big[\frac{(\frac{1+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon})^{2n-2k} - (\frac{1-\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon})^{2n-2k}}{2n-2k} \Big].
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{2n} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{y^{2n}}{\sqrt{1+y^2}} dy \;=\;& (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \varepsilon^{2n} \log\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon}\right) + \\
& \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{C_{2n}^k}{2n-2k} \varepsilon^{2k} \Big[(1+\sqrt{\varepsilon^2+1})^{2n-2k} - (1-\sqrt{\varepsilon^2+1})^{2n-2k} \Big].
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon^2 = \frac{1-\lambda}{2\lambda}$, on a enfin

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{2n} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{y^{2n}}{\sqrt{1+y^2}} dy \\
= \;& (-1)^{n+1} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}} \left(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\right)^n \log(1-\lambda) + (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \left(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\right)^n \log(\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{2\lambda}) \\
& + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{C_{2n}^k}{2n-2k} \left(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\right)^{2k} \Big[\frac{(\sqrt{2\lambda} + \sqrt{1+\lambda})^{2n-2k} - (\sqrt{2\lambda} - \sqrt{1+\lambda})^{2n-2k}}{(2\lambda)^{n-k}} \Big] \\
= \;& (-1)^{n+1} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}} \left(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\right)^n \log(1-\lambda) + f(\lambda),
\end{aligned}$$

où $f(\lambda)$ est une fonction C^∞ sur $]0, \infty[$. Le lemme est prouvé. □

Lemme 5.8. *Notons* $H_n(\lambda) = \sum_{k \geq n} h_k(\lambda)$. *Alors il existe une fonction positive* $f_n \in L^1(0,1)$, *telle que*

$$H_n(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}} f_n(x) dx, \qquad \varepsilon^2 = \frac{1-\lambda}{2\lambda}.$$

Démonstration. D'après la définition de $h_n(\lambda)$ dans le lemme 5.6, on a

$$H_n(\lambda) = \sum_{k\geq n} \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{\varepsilon^2+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{\varepsilon^2+x^2}} f_n(x)dx,$$

où

$$f_n(x) = \sum_{k\geq n} \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} x^{2k-2n}.$$

Alors il suffit de démontrer que $f_n \in L^1(0,1)$. En fait on a

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{k\geq n} \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \int_0^1 x^{2k-2n}dx = \sum_{k\geq n} \frac{2^{-2k}C_{2k}^k}{2k-2n+1} < \infty,$$

car $2^{-2k}C_{2k}^k \sim (\pi k)^{-\frac{1}{2}}$. □

• Démonstration de la proposition 5.4

Démonstration. Posons

$$\widetilde{u}(\lambda) = \sqrt{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{(C_{2n}^n)^2}{2^{4n+1}}\lambda^n.$$

Alors $\widetilde{u}(\lambda)$ est une série entière de rayon de convergence 1. Soit $u(\lambda) = \widetilde{u}\big(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\big)$ et $v(\lambda) = H(\lambda) - u(\lambda)\log(1-\lambda)$. Alors, quand $\lambda \in]\frac{1}{3},\infty[$, on a $|\frac{1-\lambda}{2\lambda}| < 1$, donc $u(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3},\infty[$. Par conséquence, $v(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3},1[$. Alors il suffit de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v^{(n)}(\lambda)$ peut se prolonger en une fonction continue sur $]\frac{1}{3},1]$. En fait, d'après le lemme 5.7, on a

$$\begin{aligned} v(\lambda) &= \sqrt{2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} h_k(\lambda) + H_n(\lambda) - \log(1-\lambda)\sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1}\frac{(C_{2k}^k)^2}{2^{4k+1}}\Big(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\Big)^k\Big) \\ &= \sqrt{2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\Big(h_k(\lambda) - \log(1-\lambda)(-1)^{k+1}\frac{(C_{2k}^k)^2}{2^{4k+1}}\Big(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\Big)^k\Big) + H_n(\lambda) \\ &\qquad - \log(1-\lambda)\sum_{k\geq n}(-1)^{k+1}\frac{(C_{2k}^k)^2}{2^{4k+1}}\Big(\frac{1-\lambda}{2\lambda}\Big)^k\Big) \\ &= \sqrt{2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{h}_k(\lambda) + H_n(\lambda) - (1-\lambda)^n\log(1-\lambda)\sum_{k\geq n}(-1)^{k+1}\frac{(C_{2k}^k)^2}{2^{4k+1}}\cdot\frac{(1-\lambda)^{k-n}}{(2\lambda)^k}\Big). \end{aligned}$$

D'où

$$v(\lambda) = \sqrt{2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{h}_k(\lambda) + H_n(\lambda) - (1-\lambda)^n\log(1-\lambda)g(\lambda)\Big),$$

où les fonctions $\widetilde{h}_k(\lambda)$ sont C^∞ sur $]0,\infty[$, la fonction $g(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3},\infty[$, et la fonction $H_n(\lambda)$ est donnée dans le lemme précédent. Or

$$\lim_{\lambda\uparrow 1}\Big[(1-\lambda)^n\log(1-\lambda)\Big]^{(k)} = 0, \qquad \forall\, k \in \{0,1,...,n-1\}.$$

Alors il reste à démontrer que, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $H_n^{(k)}(\lambda)$ est une fonction continue sur $]\frac{1}{3}, 1]$. En fait, d'après le lemme 5.8, on peut démontrer par récurrence (en k) que, $\forall\, k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, il exsite des polynômes P_0, P_1, ... , P_k tels que

$$H_n^{(k)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} P_j(\lambda^{-\frac{1}{2}}) \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(\varepsilon^2 + x^2)^{\frac{1}{2}+j}} f_n(x) dx.$$

Mais $\varepsilon^2 = \frac{1-\lambda}{2\lambda}$, donc il suffit de vérifier quand $\varepsilon^2 = 0$, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{(\varepsilon^2 + x^2)^{\frac{1}{2}+j}} f_n(x) dx = \int_0^1 x^{2n-2j-1} f_n(x) dx$$

est finie. Ceci est une conséquence immédiate du fait que $f_n \in L^1(0,1)$ et que $j \leq k \leq n-1$. $\square$

• **Démonstration de la proposition 5.5**

Démonstration. Remarquons que, quand $\lambda \in [0, 1[$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \cos\theta}} = \sum_{n \geq 0} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \lambda^n \cos^n \theta,$$

et que la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \lambda^n$ converge. Alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$H(\lambda) = \sqrt{\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \lambda^n \int_0^{\pi} \cos^n \theta d\theta = \sqrt{\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{C_{4n}^{2n}}{2^{4n}} \lambda^{2n} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \sum_{n \geq 0} a_n \lambda^{\frac{1}{2}+2n}.$$

On indique que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est 1. $\square$

5.3 Schéma de la démonstration du théorème principal

Soit $X_0(x, \omega)$ la partie radiale du processus de Mumford bidimensionnel. Alors le théorème 5.2 nous donne que

$$X_0(R, \omega) = \frac{C}{\sqrt{R}} \int_0^{\infty} H\Big(\frac{2Rr}{R^2 + r^2}\Big) Y(r, \omega) dr, \tag{5.3}$$

où

$$Y(r, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) w_{j,k}(r) \tag{5.4}$$

est le bruit blanc complexe sur $[0, \infty[$ et où la fonction H est donnée dans (5.2), $C > 0$ est une constante. Ceci implique que $X_0(R, \omega)$ est l'intégrale du produit du bruit blanc sur $[0, \infty[$ avec $H\big(\frac{2Rr}{R^2+r^2}\big)$, vue comme une fonction de $r > 0$. De plus, on sait que $H(\lambda)$ a une singularité logarithmique quand $\lambda = 1$, qui correspond à $r = R$. Alors on va découper cette l'intégration en trois partie : $[0, aR]$, $[aR, bR]$ et $[bR, \infty[$, où $0 < a < 1 < b$. On utilisera la proposition 5.4 pour traiter l'intégration sur $[aR, bR]$, et la proposition 5.5 pour traiter les autre deux intégrations.

Prenons la partition de l'identité

$$\varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda) = 1, \tag{5.5}$$

où les fonctions $\varphi_1(\lambda)$ et $\varphi_2(\lambda)$ sont C^∞ et telles que

$$\operatorname{supp}\varphi_1 \subset \big[\frac{1}{2}, \infty\big[, \qquad \operatorname{supp}\varphi_2 \subset \big] - \infty, \frac{2}{3}\big].$$

Alors d'après (5.3), on a

$$X_0(R,\omega) = \frac{C}{\sqrt{R}} \int_0^\infty \varphi_1(\lambda)H(\lambda)Y(r,\omega)dr + \frac{C}{\sqrt{R}} \int_0^\infty \varphi_2(\lambda)H(\lambda)Y(r,\omega)dr, \qquad \lambda = \frac{2Rr}{R^2+r^2}.$$

Avec cette décomposition et les notations précédentes, le théorème 5.1 est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes.

Proposition 5.9. *Après la renormalisation additive, ω-presque sûrement*

$$\frac{C}{\sqrt{R}} \int_0^\infty \varphi_2(\lambda)H(\lambda)Y(r,\omega)dr, \qquad \lambda = \frac{2Rr}{R^2+r^2},$$

est une fonction C^∞ pour $R > 0$.

Proposition 5.10. *Il existe une suite de constantes $(C_k)_{k\geq 0}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $R > 0$*

$$\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)H(\lambda)Y(r,\omega)dr = \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{R^k} B_k(R,\omega) + G_n(R,\omega), \qquad \lambda = \frac{2Rr}{R^2+r^2},$$

où $B_k(R,\omega)$ est la k-ième primitive du mouvement brownien complexe et où la fonction $G_n(R,\omega)$ est ω-presque sûrement de classe $C^{n+\frac{3}{2}-\varepsilon}(\,]0,\infty[\,)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On le démonstrera dans les sections suivantes. Avant de finir cette section, on donne un lemme qui va être utilisé partout dans les sections suivantes, dont la démonstration est triviale.

Lemme 5.11. *Soient $0 < a < b$ et $\big\{F_{j,k}(R) : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N},\, R \in]a,b[\big\}$ un esemble des fonctions C^∞, $\{g_{j,k} : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N}\}$ une suite de v.a., i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes. Alors on a les propriétés suivantes.*
1) Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe deux constantes $C_m > 0$ et $\alpha_m > 0$, telles que pour tout $j \geq j_0$, $k \geq 0$ et $R \in]a,b[$

$$|F_{j,k}^{(m)}(R)| \leq C_m \frac{2^{-j\alpha_m}}{(k+\frac{1}{2})^2}.$$

Alors ω-presque sûrement

$$\sum_{j\geq j_0} \sum_{k\geq 0} g_{j,k}(\omega)F_{j,k}(R)$$

est une fonction C^∞ pour $R \in]a,b[$.
2) Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe deux constantes $C_m > 0$ et $\alpha_m > 0$, telles que pour tout $j \leq j_0$, $k \geq 0$ et $R \in]a,b[$

$$|F_{j,k}^{(m)}(R)| \leq C_m \frac{2^{j\alpha_m}}{(k+\frac{1}{2})^2}.$$

Alors ω-presque sûrement

$$\sum_{j \leq j_0} \sum_{k \geq 0} g_{j,k}(\omega) F_{j,k}(R)$$

est une fonction C^∞ pour $R \in]a,b[$.
3) Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_m > 0$, telle que pour tout $j_1 \leq j \leq j_2$, $k \geq 0$ et $R \in]a,b[$

$$|F_{j,k}^{(m)}(R)| \leq \frac{C_m}{(k+\frac{1}{2})^2}.$$

Alors ω-presque sûrement

$$\sum_{j_1 \leq j \leq j_2} \sum_{k \geq 0} g_{j,k}(\omega) F_{j,k}(R)$$

est une fonction C^∞ pour $R \in]a,b[$.

5.4 Démonstration de la proposition 5.9

D'abord, on donne quelques notations

$$Y^+(r,\omega) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) w_{j,k}(r), \tag{5.6}$$

$$Y^-(r,\omega) = \sum_{j < 0} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) w_{j,k}(r), \tag{5.7}$$

et

$$Y_{j_1,j_2}(r,\omega) = \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{k \in \mathbb{N}} g_{j,k}(\omega) w_{j,k}(r). \tag{5.8}$$

On a évidemment, $Y(r,\omega) = Y^+(r,\omega) + Y^-(r,\omega)$, $Y^+(r,\omega)$ et $Y^-(r,\omega)$ est alors une décomposition de $Y(r,\omega)$ qu'on a défini dans (5.4).

On donne ensuite le schéma de la démonstration.

D'après la proposition 5.5, il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1, telle que

$$H(\lambda) = \sum_{n \geq 0} a_n \lambda^{\frac{1}{2}+2n}, \qquad \forall\, \lambda \in [0,1[.$$

Rappelons ensuite que $\varphi_2(\lambda)$ est nulle au voisinage de 1. Alors, en utilisant les notations qu'on vient de définir, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{\sqrt{R}}\int_0^\infty \varphi_2(\lambda)H(\lambda)Y(r,\omega)dr\\
=\ &\frac{C}{\sqrt{R}}\int_0^\infty \varphi_2(\lambda)H(\lambda)Y^+(r,\omega)dr+\frac{C}{\sqrt{R}}\int_0^\infty \varphi_2(\lambda)H(\lambda)Y^-(r,\omega)dr\\
=\ &\frac{C}{\sqrt{R}}\int_0^\infty \Big(\sum_{n\geq 0}a_n\lambda^{\frac{1}{2}+2n}\Big)\varphi_2(\lambda)Y^+(r,\omega)dr+\frac{C}{\sqrt{R}}\int_0^\infty \Big(\sum_{n\geq 1}a_n\lambda^{\frac{1}{2}+2n}\Big)\varphi_2(\lambda)Y^-(r,\omega)dr\\
&+\frac{a_0C}{\sqrt{R}}\int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_2(\lambda)Y^-(r,\omega)dr\\
=\ &\sqrt{2}C\int_0^\infty r^{\frac{1}{2}}\frac{f^+(\lambda)}{(R^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}Y^+(r,\omega)dr+2^{\frac{5}{2}}CR^2\int_0^\infty r^{\frac{5}{2}}\frac{f^-(\lambda)}{(R^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}Y^-(r,\omega)dr\\
&+\sqrt{2}a_0C\int_0^\infty \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R^2+r^2}}\varphi_2(\lambda)Y^-(r,\omega)dr
\end{aligned}$$

où

$$f^+(\lambda)=\Big(\sum_{n\geq 0}a_n\lambda^{2n}\Big)\varphi_2(\lambda)\qquad \text{et}\qquad f^-(\lambda)=\Big(\sum_{n\geq 0}a_{n+1}\lambda^{2n}\Big)\varphi_2(\lambda)$$

sont deux fonctions C^∞ sur $]-1,\infty[$.

Remarquons que l'intégration

$$\int_0^\infty \frac{Y^-(r,\omega)}{\sqrt{r}}dr=\sum_{j\leq -1}\sum_{k\geq 0}g_{j,k}(\omega)\int_0^\infty \frac{w(r)}{\sqrt{r}}\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr$$

est divergente. Ceci implique que l'intégration

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R^2+r^2}}\varphi_2(\lambda)Y^-(r,\omega)dr$$

diverge aussi, car

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R^2+r^2}}\varphi_2(\lambda)\sim\frac{1}{\sqrt{r}},\qquad r\to\infty.$$

Donc elle est la partie qui doit être renormalisée.

On résume la discussion précédente. La proposition 5.9 est une conséquence des trois lemmes suivants.

Lemme 5.12. *Soit $f(\lambda)$ une fonction C^∞ sur $]-1,\infty[$. Alors ω-presque sûrement*

$$\widetilde{F}(R,\omega)\triangleq\int_0^\infty r^{\frac{1}{2}}\frac{f(\lambda)}{(R^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}Y^+(r,\omega)dr,\qquad \lambda=\frac{2Rr}{R^2+r^2},$$

est une fonction C^∞ pour $R>0$, où la fonction $Y^+(r,\omega)$ est donnée par (5.6).

Lemme 5.13. *Soit $f(\lambda)$ une fonction C^∞ sur $]-1,\infty[$, alors ω-presque sûrement*

$$\widetilde{F}(R,\omega)\triangleq\int_0^\infty r^{\frac{5}{2}}\frac{f(\lambda)}{(R^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}Y^-(r,\omega)dr,\qquad \lambda=\frac{2Rr}{R^2+r^2}.$$

est une fonction C^∞ pour $R>0$, où la fonction $Y^-(r,\omega)$ est donnée par (5.7).

Lemme 5.14. *ω-presque sûrement*

$$\widetilde{F}(R,\omega) \triangleq \int_0^\infty \Big(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R^2+r^2}}\varphi_2(\lambda) - \frac{1}{\sqrt{r}}\Big)Y^-(r,\omega)dr, \qquad \lambda = \frac{2Rr}{R^2+r^2}.$$

est une fonction C^∞ pour $R>0$, où la fonction $Y^-(r,\omega)$ est donnée par (5.7).

Il nous reste à démontrer les trois lemmes précédents. Pour cela, on commence par établir les lemmes 5.15 - 5.18.

Lemme 5.15. *Soit $F(R,r)$ une fonction C^∞ pour $R,r>0$. Alors ω-presque sûrement, pour tout j_1, $j_2 \in \mathbb{Z}$, $j_1 < j_2$, la fonction*

$$\widetilde{F}(R,\omega) \triangleq \int_0^\infty F(R,r)Y_{j_1,j_2}(r,\omega)dr$$

est C^∞ pour $R>0$, où la fonction $Y_{j_1,j_2}(r,\omega)$ est donnée par (5.8).

Démonstration. On démontre que $\widetilde{F}(R,\omega)$ est C^∞ pour $R \in]a,b[$, où $0<a<b$ sont deux nombres réels. Remarquons que

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \sum_{j_1 \le j \le j_2} \sum_{k\ge 0} g_{j,k}(\omega)F_{j,k}(R), \tag{5.9}$$

où

$$F_{j,k}(R) = \int_0^\infty F(R,r)2^{\frac{j}{2}}w(2^jr)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^jr]dr.$$

Alors on a l'estimation suivante de $F_{j,k}(R)$

$$|F_{j,k}(R)| \le \frac{1}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2}\int_0^\infty \Big|2^{\frac{j}{2}}w''(2^jr)F(R,r) + 2\cdot 2^{-\frac{j}{2}}w'(2^jr)\frac{\partial F}{\partial r}(R,r)$$
$$+2^{-\frac{3j}{2}}w(2^jr)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(R,r)\Big|dr. \tag{5.10}$$

Or, $w(r)$ est une fonction C^∞ et supportée par $[\frac{1}{3},3]$. Alors dans (5.10), on intègre r sur un compact de $]0,\infty[$, pour tout j qui est entre j_1 et j_2. Donc il existe une constante C_0 telle que

$$|F_{j,k}(R)| \le \frac{C_0}{(k+\frac{1}{2})^2}, \qquad \forall\, j_1 \le j \le j_2,\ k\ge 0,\ R \in]a,b[. \tag{5.11}$$

De même, pour tout $m \ge 1$, il existe une constante $C_m > 0$, telle que

$$|F^{(m)}_{j,k}(R)| \le \frac{C_m}{(k+\frac{1}{2})^2}, \qquad \forall\, j_1 \le j \le j_2,\ k\ge 0,\ R \in]a,b[. \tag{5.12}$$

Donc $\widetilde{F}(R,\omega)$ est C^∞ sur $]a,b[$ d'après le lemme 5.11 et (5.9), (5.11), (5.12). $\square$

Lemme 5.16. *Soit $F(R,r)$ une fonction C^∞ pour $R,r>0$. Supposons qu'il existe deux constantes $0<\lambda_1<\lambda_2$ telles que*

$$\text{supp}F \subset \{R>0, r>0 : \lambda_1 \leq \frac{r}{R} \leq \lambda_2\}.$$

Alors ω-presque sûrement, pour tout $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}\cup\{\infty,-\infty\}$, $j_1<j_2$, la fonction

$$\widetilde{F}(R,\omega) \triangleq \int_0^\infty F(R,r)Y_{j_1,j_2}(r,\omega)dr$$

est C^∞ pour $R>0$, où la fonction $Y_{j_1,j_2}(r,\omega)$ est donnée par (5.8).

Démonstration. Quand R est dans un compact de $]0,\infty[$, alors il existe deux entiers j_1^* et j_2^* tels que

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \sum_{j_1^*\leq j\leq j_2^*}\sum_{k\geq 0} g_{j,k}(\omega)F_{j,k}(R),$$

où

$$F_{j,k}(R) = \int_0^\infty F(R,r)2^{\frac{j}{2}}w(2^jr)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^jr]dr.$$

Alors ce lemme est une conséquence du lemme précédent. □

Lemme 5.17. *Soient $0<a<b$, $j_0\in\mathbb{Z}$ et $F(R,r)$ une fonction C^∞ pour $R,r>0$. Supposons que pour tout $n_1,n_2\geq 0$, il existe une constante C_{n_1,n_2} telle que*

$$\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\Big| \leq C_{n_1,n_2}, \qquad \forall\, R\in\,]a,b[,\ r<3\cdot 2^{-j_0}. \tag{5.13}$$

Alors ω-presque sûrement, pour tout $\alpha\geq 0$, la fonction

$$\widetilde{F}(R,\omega) \triangleq \int_0^\infty r^\alpha F(R,r)Y_{j_0,\infty}(r,\omega)dr.$$

est C^∞ sur $]a,b[$, où la fonction $Y_{j_0,\infty}(r,\omega)$ est donnée dans (5.8).

Démonstration. Remarquons que

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\geq 0} g_{j,k}(\omega)F_{j,k}(R), \tag{5.14}$$

où

$$F_{j,k}(R) = 2^{\frac{j}{2}-j\alpha}\int_0^\infty F(R,r)\widetilde{w}(2^jr)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^jr]dr, \qquad \widetilde{w}(r)=r^\alpha w(r).$$

Ceci implique, en utilisant une intégration par parties et (5.13), l'existence d'une constante C, telle que pour tout $j\geq j_0$, $k\geq 0$ et $R\in\,]a,b[$, on ait

$$|F_{j,k}(R)| \leq \frac{2^{\frac{j}{2}-j\alpha}}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2}\int_{\frac{2^{-j}}{3}}^{3\cdot 2^{-j}} Cdr \leq C_0\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{(k+\frac{1}{2})^2}. \tag{5.15}$$

De même, pour tout $m\geq 1$, il existe une constante C_m, telle que pour tout $j\geq j_0$, $k\geq 0$ et $R\in\,]a,b[$, on ait

$$|F_{j,k}^{(m)}(R)| \leq C_m\frac{2^{-\frac{j}{2}}}{(k+\frac{1}{2})^2}. \tag{5.16}$$

Alors $\widetilde{F}(R,\omega)$ est C^∞ sur $]a,b[$ d'après le lemme 5.11 et (5.14), (5.15), (5.16). □

Lemme 5.18. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > \frac{1}{2}$, $0 < a < b$, $j_0 \in \mathbb{Z}$ et $F(R,r)$ une fonction C^∞ pour $R, r > 0$. Supposons que pour tout $n_1, n_2 \geq 0$, il existe une constante C_{n_1,n_2} telle que*

$$\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\Big| \leq \frac{C_{n_1,n_2}}{r^{\alpha+\beta+n_2}}, \qquad \forall\, R \in]a,b[,\ r > \frac{2^{-j_0}}{3}. \tag{5.17}$$

Alors ω-presque sûrement, la fonction

$$\widetilde{F}(R,\omega) \triangleq \int_0^\infty r^\alpha F(R,r)Y^-(r,\omega)dr.$$

est C^∞ sur $]a,b[$, où la fonction $Y^-(r,\omega)$ est donnée dans (5.7).

Démonstration. De même, on a

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \sum_{j\leq j_0}\sum_{k\geq 0} g_{j,k}(\omega)F_{j,k}(R). \tag{5.18}$$

où

$$F_{j,k}(R) = 2^{\frac{j}{2}-j\alpha}\int_0^\infty F(R,r)\widetilde{w}(2^j r)\cos[\pi(k+\frac{1}{2})2^j r]dr, \qquad \widetilde{w}(r) = r^\alpha w(r).$$

Ceci implique, en utilisant une intégration par parties et (5.17), l'existence d'une constante C, telle que pour tout $j \leq j_0$, $k \geq 0$ et $R \in]a,b[$, on a

$$|F_{j,k}(R)| \leq \frac{C}{(k+\frac{1}{2})^2}\int_{\frac{2^{-j}}{3}}^{3\cdot 2^{-j}}\Big(\frac{2^{\frac{j}{2}-j\alpha}}{r^{\alpha+\beta}} + \frac{2^{-\frac{j}{2}-j\alpha}}{r^{\alpha+\beta+1}} + \frac{2^{-\frac{3j}{2}-j\alpha}}{r^{\alpha+\beta+2}}\Big)dr = C_0\frac{2^{(\beta-\frac{1}{2})j}}{(k+\frac{1}{2})^2}. \tag{5.19}$$

De même, pour tout $m \geq 1$, il existe une constante C_m, telle que pour tout $j \leq j_0$, $k \geq 0$ et $R \in]a,b[$, on a

$$|F_{j,k}^{(m)}(R)| \leq C_m\frac{2^{(\beta-\frac{1}{2})j}}{(k+\frac{1}{2})^2}. \tag{5.20}$$

Alors $\widetilde{F}(R,\omega)$ est C^∞ sur $]a,b[$ d'après le lemme 5.11 et (5.18), (5.19), (5.20). □

• Démonstration du lemme 5.12

Démonstration. Posons

$$F(R,r) = \frac{f(\lambda)}{(R^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Alors on a

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \int_0^\infty r^{\frac{1}{2}}F(R,r)Y^+(r,\omega)dr.$$

On va utiliser le lemme 5.17 à démontrer que $\widetilde{F}(R,\omega)$ est une fonction C^∞ pour $R > 0$. Pour cela, il suffit pour estimmer les dérivées de $F(R,r)$. En fait, pour tout $n_1, n_2 \geq 0$, il existe une suite de polynômes $P_0, P_1, ..., P_{n_1+n_2}$, telle que

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r) = \frac{\sum_{l=0}^{n_1+n_2} f^{(l)}(\lambda)P_l(R,r)}{(R^2+r^2)^{\frac{1}{2}+2n_1+2n_2}}.$$

Prenons $0 < a < b$ et supposons que

$$c_l = \sup\Big\{|f^{(l)}(\lambda)P_l(R,r)| : \lambda \in [0,1], R \in]a,b[, r \in]0,3[\Big\}.$$

Alors on a, pour tout $R \in]a, b[$ et $r \in]0, 3[$

$$\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\Big| \leq \frac{\sum_{l=0}^{n_1+n_2} c_l}{a^{1+4n_1+4n_2}}.$$

Ce qui entraîne immédiatement, en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ dans le lemme 5.17, $\widetilde{F}(R,\omega)$ est C^∞ sur $]a, b[$. □

• Démonstration du lemme 5.13

Démonstration. Posons

$$F(R,r) = \frac{f(\lambda)}{(R^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Alors on a

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \int_0^\infty r^{\frac{5}{2}} F(R,r) Y^+(r,\omega) dr.$$

Cette fois-ci, on va utiliser le lemme 5.18 pour démontrer que $\widetilde{F}(R,\omega)$ est C^∞ pour $R > 0$. Encore une fois, on va estimmer les dérivées de $F(R,r)$. En fait, pour tout $n_1, n_2 \geq 0$, il existe une suite de polynômes $P_0, P_1, ..., P_{n_1+n_2}$, telle que

$$\begin{array}{ll} 1) & deg_r(P_l(R,r)) \leq 4n_1 + 3n_2, \\ 2) & \dfrac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r) = \dfrac{\sum_{l=0}^{n_1+n_2} f^{(l)}(\lambda)P_l(R,r)}{(R^2+r^2)^{\frac{5}{2}+2n_1+2n_2}}. \end{array}$$

Prenons $0 < a < b$ et supposons que

$$c_l = \sup\Big\{|f^{(l)}(\lambda)| : \lambda \in [0,1]\Big\}.$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} r^{5+n_2}\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\Big| &\leq r^{5+n_2}\frac{\sum_{l=0}^{n_1+n_2} c_l(\lambda)|P_l(R,r)|}{(R^2+r^2)^{\frac{5}{2}+2n_1+2n_2}} \\ &\leq r^{5+n_2}\frac{\sum_{l=0}^{n_1+n_2} c_l(\lambda)|P_l(R,r)|}{(r^2)^{\frac{5}{2}+2n_1+2n_2}} \\ &= \sum_{l=0}^{n_1+n_2} c_l(\lambda)\frac{|P_l(R,r)|}{r^{4n_1+3n_2}} \end{aligned}$$

Or, $deg_r(P_l(R,r)) \leq 4n_1 + 3n_2$. Alors il existe une constante c_l^* telle que, pour tout $R \in]a, b[$ et $r \geq \frac{2}{3}$

$$\frac{|P_l(R,r)|}{r^{4n_1+3n_2}} \leq c_l^*,$$

qui implique, d'après les deux inégalités précédents

$$\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\Big| \leq \frac{\sum_{l=0}^{n_1+n_2} c_l c_l^*}{r^{5+n_2}}, \qquad \forall\, R \in]a,b[,\ r \geq \frac{2}{3}.$$

Ceci entraîne immédiatement, en prenant $\alpha = \beta = \frac{5}{2}$ dans le lemme 5.18, que $\widetilde{F}(R,\omega)$ est C^∞ sur $]a, b[$. □

• **Démonstration du lemme 5.14**

Démonstration. Remarquons que

$$\int_0^\infty \Big(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R^2+r^2}}\varphi_2(\lambda)-\frac{1}{\sqrt{r}}\Big)Y^-(r,\omega)dr=\int_0^\infty \Big(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{r}}\Big)Y^-(r,\omega)dr$$
$$-\int_0^\infty \frac{\sqrt{r}\varphi_1(\lambda)}{\sqrt{R^2+r^2}}Y^-(r,\omega)dr.$$

D'où

$$\widetilde{F}(R,\omega)=\widetilde{F}_1(R,\omega)-\widetilde{F}_2(R,\omega),$$

où

$$\widetilde{F}_1(R,\omega)=\int_0^\infty F_1(R,r)Y^-(r,\omega)dr \qquad \text{et} \qquad \widetilde{F}_2(R,\omega)=\int_0^\infty F_2(R,r)Y^-(r,\omega)dr,$$

avec

$$F_1(R,r)=\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2}}-\frac{1}{r} \qquad \text{et} \qquad F_2(R,r)=\frac{\sqrt{r}\varphi_1(\lambda)}{\sqrt{R^2+r^2}}.$$

La fonction $\varphi_1(\lambda)$ est supportée par $\lambda \geq \frac{1}{2}$, alors on a

$$\text{supp}F_2\subset\{R>0,r>0:\lambda=\frac{2Rr}{R^2+r^2}\geq\frac{1}{2}\}=\{R>0,r>0:2-\sqrt{3}\leq\frac{r}{R}\leq 2+\sqrt{3}\}.$$

Donc, d'après le lemme 5.16, ω-presque sûrement, $\widetilde{F}_2(R,\omega)$ est une fonction C^∞ pour $R>0$. Alors il suffit de démontrer que $\widetilde{F}_1(R,\omega)$ est C^∞. En fait on a

$$F_1(R,r)=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{R^2}{(tR^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dt.$$

Alors pour tout $n_1,n_2\geq 0$, il existe un polynôme $P_{n_1,n_2}(R,r,t)$, telle que

1) $deg_r(P_{n_1,n_2})\leq 2n_1+n_2$,

2) $\displaystyle\frac{\partial^{n_1+n_2}F_1}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)=\int_0^1\frac{P_{n_1,n_2}(R,r,t)}{(tR^2+r^2)^{\frac{3}{2}+n_1+n_2}}dt.$

Cela implique l'existence d'une constante C_{n_1,n_2} telle que, pour tout $R\in]a,b[$ et $r\geq\frac{2}{3}$

$$\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2}F_1}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\Big|\leq\frac{C_{n_1,n_2}}{r^{3+n_2}}.$$

Ce qui entraîne immédiatement que, en prenant $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{5}{2}$ dans le lemme 5.18, $\widetilde{F}_1(R,\omega)$ est C^∞ sur $]a,b[$. □

5.5 Démonstration de la proposition 5.10

D'après la proposition 5.4, il existe deux fonctions $u(\lambda)$ et $v(\lambda)$ telles que
1) $H(\lambda)=u(\lambda)\log(1-\lambda)+v(\lambda),\forall\,\lambda\in]\frac{1}{3},1[$.
2) $u(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3},\infty[$.
3) $v(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3},1[$ et $\forall\,n\geq 0$, $v^{(n)}(\lambda)$ est continue sur $]\frac{1}{3},1]$.

Revenons à la partition de l'identité qu'on a donnée dans (5.5). On a

$$\varphi_1(\lambda)H(\lambda) = \varphi_1(\lambda)u(\lambda)\log(1-\lambda) + \varphi_1(\lambda)v(\lambda) = \widetilde{u}(\lambda)\log(1-\lambda) + \widetilde{v}(\lambda),$$

où $\widetilde{u}(\lambda) = \varphi_1(\lambda)u(\lambda)$ est C^∞ sur $]0,\infty[$ et supportée par $[\frac{1}{2},\infty[$; $\widetilde{v}(\lambda) = \varphi_1(\lambda)v(\lambda)$ est C^∞ sur $]0,1[$, supportée par $[\frac{1}{2},1]$ et pour tout $n \geq 0$, $\widetilde{v}^{(n)}(\lambda)$ est continue sur $]\frac{1}{3},1]$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)H(\lambda)Y(r,\omega)dr &= \int_0^\infty \Big(\widetilde{u}(\lambda)\log(1-\lambda) + \widetilde{v}(\lambda)\Big)Y(r,\omega)dr \\
&= \int_0^\infty \Big(\widetilde{u}(\lambda)\log(1-\frac{2Rr}{R^2+r^2}) + \widetilde{v}(\lambda)\Big)Y(r,\omega)dr \\
&= 2\widetilde{F}_1(R,\omega) - \widetilde{F}_2(R,\omega) + \widetilde{F}_3(R,\omega),
\end{aligned}$$

où

$$\widetilde{F}_1(R,\omega) = \int_0^\infty \widetilde{u}(\lambda)\log|R-r|Y(r,\omega)dr,$$

$$\widetilde{F}_2(R,\omega) = \int_0^\infty \widetilde{u}(\lambda)\log(R^2+r^2)Y(r,\omega)dr,$$

$$\widetilde{F}_3(R,\omega) = \int_0^\infty \widetilde{v}(\lambda)Y(r,\omega)dr.$$

Remarquons que $\widetilde{u}(\lambda)\log(R^2+r^2)$ est une fonction C^∞ pour $R, r > 0$ et supportée par

$$\{R > 0, r > 0 : 2-\sqrt{3} \leq \frac{r}{R} \leq 2+\sqrt{3}\}.$$

Alors le lemme 5.16 nous donne que, ω-presque sûrement, $\widetilde{F}_2(R,\omega)$ est C^∞ pour $R > 0$. De plus, avec la même méthode de la démonstration que celle du lemme 5.16, on peut démontrer que, p.s. en ω, $\widetilde{F}_3(R,\omega)$ est aussi C^∞ pour $R > 0$. Donc, pour finir la démonstration de la proposition 5.10, il suffit de démontrer que la fonction $\widetilde{F}_1(R,\omega)$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$\widetilde{F}_1(R,\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{R^k} B_k(R,\omega) + G_n(R,\omega), \qquad \forall\, R > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.21}$$

où $B_k(R,\omega)$ est la k-ième de primitive du mouvement brownien complexe, et la fonction $G_n(R,\omega)$ est ω-presque sûrement de classe $C^{n+\frac{3}{2}-\varepsilon}(\,]0,\infty[\,)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On va établir d'abord une série de lemmes. Dans la suite de cette section, les fonctions $Y(r,\omega)$, $Y^+(r,\omega)$, $Y^-(r,\omega)$ et $Y_{j_1,j_2}(r,\omega)$ sont données dans (5.4), (5.6), (5.7) et (5.8) respectivement, et les fonctions $\varphi_1(\lambda)$ et $\varphi_2(\lambda)$ sont celles dans la partition de l'idendité (5.5).

Lemme 5.19. *Soit $f(R,r) = (R-r)^n \log|R-r|$. Alors pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1+n_2 \leq n-1$, la dérivée*

$$\frac{\partial^{n_1+n_2} f}{\partial R^{n_1} \partial r^{n_2}}$$

existe et qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Lemme 5.20. *Soit une fonction $F(R,r)$ qui satisfait*
1) Il existe deux constantes $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ telles que

$$\mathrm{supp} F \subset \{R > 0, r > 0 : \lambda_1 \le \frac{r}{R} \le \lambda_2\}.$$

2) Les dérivées

$$\frac{\partial^{n_1+n_2} f}{\partial R^{n_1} \partial r^{n_2}}$$

existent et sont continues pour $0 \le n_1 \le n$, $0 \le n_2 \le 2$, où $n \ge 1$ est un entier.
Alors ω-presque sûrement

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \int_0^\infty F(R,r) Y(r,\omega) dr$$

est une fonction C^{n-1} au sens usuel pour $R > 0$.

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 5.16. Avec les deux lemmes précédents, on a immédiatement le lemme suivant.

Lemme 5.21. *Soit $F(R,r)$ une fonction C^∞ telle qu'il existe deux constantes $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ satisfaisant*

$$\mathrm{supp} F \subset \{R > 0, r > 0 : \lambda_1 \le \frac{r}{R} \le \lambda_2\}$$

Alors ω-presque sûrement

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \int_0^\infty (R-r)^n \log|R-r| F(R,r) Y(r,\omega) dr$$

est une fonction C^{n-4} au sens usuels pour $R > 0$.

Lemme 5.22. *P.s. en ω, la fonction*

$$\widetilde{F}(R,\omega) = \int_0^\infty \frac{Y(r,\omega)}{R+r} dr$$

est C^∞ pour $R > 0$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\widetilde{F}(R,\omega) = \widetilde{F}^+(R,\omega) + \widetilde{F}^-(R,\omega)$, où

$$\widetilde{F}^+(R,\omega) = \int_0^\infty F(R,r) Y^+(r,\omega) dr,$$

$$\widetilde{F}^-(R,\omega) = \int_0^\infty F(R,r) Y^-(r,\omega) dr,$$

avec

$$F(R,r) = \frac{1}{R+r}.$$

On démontre que les deux fonctions $\widetilde{F}^+(R,\omega)$ et $\widetilde{F}^-(R,\omega)$ sont C^∞ pour $R > 0$. En fait, pour tous $n_1, n_2 \ge 0$, il existe une constante C_{n_1,n_2}, telle que

$$\frac{\partial^{n_1+n_2} F}{\partial R^{n_1} \partial r^{n_2}}(R,r) = \frac{C_{n_1,n_2}}{(R+r)^{n_1+n_2+1}}.$$

Prenons $0 < a < b$, alors il existe une constante $C^*_{n_1,n_2}$ telle que, pour tout $R \in]a, b[$ et $r \leq 3$

$$\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2} F}{\partial R^{n_1} \partial r^{n_2}}(R, r)\Big| \leq C^*_{n_1,n_2}. \tag{5.22}$$

De plus, on a pour tout $R \in]a, b[$ et $r \geq \frac{2}{3}$

$$\Big|\frac{\partial^{n_1+n_2} F}{\partial R^{n_1} \partial r^{n_2}}(R, r)\Big| \leq \frac{C_{n_1,n_2}}{r^{n_1+n_2+1}} \leq \frac{(\frac{3}{2})^{n_1} C_{n_1,n_2}}{r^{n_2+1}}. \tag{5.23}$$

Alors d'après le lemme 5.17 (en prenant $\alpha = 0$) et (5.22), $\widetilde{F}^+(R, \omega)$ est C^∞ sur $]a, b[$. De même, d'après le lemme 5.18 (en prenant $\alpha = 0, \beta = 1$) et (5.23), $\widetilde{F}^+(R, \omega)$ est aussi C^∞ sur $]a, b[$. □

Lemme 5.23. *P.s. en ω, la fonction*

$$\widetilde{F}(R, \omega) = \int_0^\infty \frac{\varphi_2(\lambda)}{R - r} Y(r, \omega) dr$$

est C^∞ pour $R > 0$.

Démonstration. Posons

$$F(R, r) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{R - r},$$

d'où

$$\widetilde{F}(R, \omega) = \int_0^\infty F(R, r) Y(r, \omega) dr.$$

Indiquons ici que $F(R, r)$ est C^∞ pour $R, r > 0$ puisque $\varphi_2(\lambda)$ est nulle au voisinage de 1. Prenons $0 < a < b$, et deux entiers $j_1 < j_2$, tels que

$$\text{supp} Y_{-\infty, j_1-1} \subset [2b, \infty[\qquad \text{et} \qquad \text{supp} Y_{j_2+1,\infty} \subset [0, \frac{a}{2}].$$

On décompose $\widetilde{F}(R, \omega)$ en une somme de trois fonctions

$$\widetilde{F}(R, \omega) = \widetilde{F}^-(R, \omega) + \widetilde{F}_{j_1,j_2}(R, \omega) + \widetilde{F}^+(R, \omega),$$

où

$$\widetilde{F}^-(R, \omega) = \int_0^\infty F(R, r) Y_{-\infty, j_1-1}(r, \omega) dr,$$

$$\widetilde{F}_{j_1,j_2}(R, \omega) = \int_0^\infty F(R, r) Y_{j_1,j_2}(r, \omega) dr,$$

$$\widetilde{F}^+(R, \omega) = \int_0^\infty F(R, r) Y_{j_2+1,\infty}(r, \omega) dr.$$

On démontre que les trois fonctions $\widetilde{F}^-(R, \omega)$, $\widetilde{F}_{j_1,j_2}(R, \omega)$ et $\widetilde{F}^+(R, \omega)$ sont C^∞ pour $R \in]a, b[$. Remarquons d'abord que, d'après le lemme 5.15, $\widetilde{F}_{j_1,j_2}(R, \omega)$ est ω-presque sûrement C^∞ pour $R > 0$. De plus, pour tout $n_1, n_2 \geq 0$, il existe une suite de polynômes $P_0, P_1, ..., P_{n_1+n_2}$, telle que

1) $deg_r(P_l(R, r)) \leq 5n_1 + 4n_2$,

2) $\displaystyle \frac{\partial^{n_1+n_2} F}{\partial R^{n_1} \partial r^{n_2}}(R, r) = \frac{\sum_{l=0}^{n_1+n_2} v^{(l)}(\lambda) P_l(R, r)}{(R - r)^{n_1+n_2+1} (R^2 + r^2)^{2n_1+2n_2}}.$

Alors il existe deux constantes C_{n_1,n_2} et $C^*_{n_1,n_2}$ telles que

$$\left|\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\right| \leq C_{n_1,n_2}, \qquad \forall\, R\in]a,b[,\ r<\frac{a}{2},$$

$$\left|\frac{\partial^{n_1+n_2}F}{\partial R^{n_1}\partial r^{n_2}}(R,r)\right| \leq \frac{C^*_{n_1,n_2}}{r^{1+n_2}}, \qquad \forall\, R\in]a,b[,\ r>2b.$$

Il en résulte que, $\widetilde{F}^-(R,\omega)$ et $\widetilde{F}^+(R,\omega)$ sont C^∞ pour $R\in]a,b[$ d'après le lemme 5.18 et le lemme 5.17. □

Lemme 5.24. *Posons*

$$Y_n(R,\omega)=\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)(R-r)^n\log|R-r|Y(r,\omega)dr.$$

Alors il existe une suite de fonctions $(f_n(R,\omega))_{n\geq 0}$, C^∞ pour $R>0$, telles que

$$Y_n(R,\omega)=n!B_n(R,\omega)+f_n(R,\omega),$$

où $B_n(R,\omega)$ est la n-ième de primitive du mouvement brownien complexe.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence en n. Définissons d'abord pour $r<0$

$$Y(r,\omega)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} w_{j,k}(-r)g^*_{j,k}(\omega),$$

où $\{g^*_{j,k} : j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\}$ sont i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes. Remarquons que l'ensemble $\{w_{j,k}(r),\ w_{j,k}(-r) : r>0,\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\}$ forme une base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors $Y(r,\omega)$ qu'on vient de définir est le bruit blanc complexe sur $\mathbb{R}$.
1) Quand $n=0$, on calcule la dérivée de $Y_0(R,\omega)$ par rapport à la variable R.

$$\begin{aligned}
\frac{dY_0}{dR}(R,\omega) &= \int_0^\infty \varphi_1'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial R}\log|R-r|Y(r,\omega)dr+\int_0^\infty \frac{\varphi_1(\lambda)}{R-r}Y(r,\omega)dr\\
&= F_1(R,\omega)+\int_0^\infty \frac{Y(r,\omega)}{R-r}dr-\int_0^\infty\frac{\varphi_2(\lambda)}{R-r}Y(r,\omega)dr\\
&= F_1(R,\omega)+\int_{-\infty}^\infty \frac{Y(r,\omega)}{R-r}dr-\int_{-\infty}^0 \frac{Y(r,\omega)}{R-r}dr-\int_0^\infty\frac{\varphi_2(\lambda)}{R-r}Y(r,\omega)dr\\
&= F_1(R,\omega)+\int_{-\infty}^\infty \frac{Y(r,\omega)}{R-r}dr-\int_0^\infty \frac{Y(r,\omega)}{R+r}dr-\int_0^\infty\frac{\varphi_2(\lambda)}{R-r}Y(r,\omega)dr.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{dY_0}{dR}(R,\omega)=F_1(R,\omega)+F_2(R,\omega)+F_3(R,\omega)+F_4(R,\omega). \tag{5.24}$$

où

$$F_1(R,\omega)=\int_0^\infty \varphi_1'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial R}\log|R-r|Y(r,\omega)dr,$$

$$F_2(R,\omega)=\int_{-\infty}^\infty \frac{Y(r,\omega)}{R-r}dr,$$

$$F_3(R,\omega)=\int_0^\infty \frac{Y(r,\omega)}{R+r}dr,$$

$$F_4(R,\omega) = \int_0^\infty \frac{\varphi_2(\lambda)}{R-r} Y(r,\omega)dr.$$

Remarquons que $F_2(R,\omega)$ est la transformée de Hilbert d'un bruit blanc complexe. Alors elle est encore un bruit blanc complexe. De plus, $\varphi_1'(\lambda) = 0$ si $\lambda \geq \frac{2}{3}$ ou $\lambda \leq \frac{1}{2}$. Alors la fonction $\varphi_1'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial R}\log|R-r|$ est C^∞ pour $R, r > 0$, donc $F_1(R,\omega)$ est C^∞ pour $R > 0$ d'après le lemme 5.16. À la fin, d'après le lemme 5.22 et 5.23, on sait que $F_3(R,\omega)$ et $F_4(R,\omega)$ sont C^∞ pour $R > 0$. Il en résulte que, d'après (5.24)

$$\frac{dY_0}{dR}(R,\omega) = Y(R,\omega) + f(R,\omega),$$

où $Y(R,\omega)$ est le bruit blanc complexe et $f(R,\omega)$ est une fonction C^∞. Donc,

$$Y_0(R,\omega) = B(R,\omega) + F(R,\omega), \tag{5.25}$$

où $B(R,\omega)$ est le mouvement brownien complexe et $F(R,\omega)$ est une fonction C^∞. Ceci démontre le lemme dans le cas $n = 0$.

2) Maintenant, on calcule la dérivée de $Y_n(R,\omega)$ quand $n > 0$.

$$\frac{dY_n}{dR}(R,\omega) = \int_0^\infty \varphi_1'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial R}(R-r)^n \log|R-r|Y(r,\omega)dr$$
$$+n\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)(R-r)^{n-1}\log|R-r|Y(r,\omega)dr + \int_0^\infty \varphi_1(\lambda)(R-r)^{n-1}Y(r,\omega)dr,$$

qui implique

$$\frac{dY_n}{dR}(R,\omega) = F(R,\omega) + nY_{n-1}(R,\omega). \tag{5.26}$$

où

$$F(R,\omega) = \int_0^\infty \varphi_1'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial R}(R-r)^n \log|R-r|Y(r,\omega)dr + \int_0^\infty \varphi_1(\lambda)(R-r)^{n-1}Y(r,\omega)dr.$$

Encore une fois, en utilisant le lemme 5.16, on sait que $F(R,\omega)$ est C^∞ pour $R > 0$. Alors on achève la démonstration d'après (5.25) et (5.26). $\square$

• Démonstration de (5.21)

Démonstration. Notons d'abord

$$f\Big(\frac{r}{R}\Big) = u(\lambda) = u\Big(\frac{2}{\frac{r}{R}+\frac{R}{r}}\Big). \tag{5.27}$$

On sait que $u(\lambda)$ est C^∞ sur $]\frac{1}{3},\infty[$, donc $f(x)$ est C^∞ sur $]3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}[$. En particulier, il existe des constantes c_0, c_1, ... , c_n et une fonction $f_n(x)$ qui est C^∞, telles que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(1-x)^k + (1-x)^{n+1}f_n(x), \qquad \forall\, x \in]3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}[.$$

Alors on a

$$\widetilde{u}(\lambda) = \varphi_1(\lambda)u(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k\varphi_1(\lambda)\Big(1-\frac{r}{R}\Big)^k + \Big(1-\frac{r}{R}\Big)^{n+1}\varphi_1(\lambda)f_n\Big(\frac{r}{R}\Big).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1(R,\omega) &= \int_0^\infty \widetilde{u}(\lambda)\log|R-r|Y(r,\omega)dr \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{R^k}\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)(R-r)^k\log|R-r|Y(r,\omega)dr \\
&\quad +\frac{1}{R^{n+1}}\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)f_n\Big(\frac{r}{R}\Big)(R-r)^{n+1}\log|R-r|Y(r,\omega)dr.
\end{aligned}$$

Il en résulte que, en utilisant le lemme 5.24

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1(R,\omega) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{R^k}Y_k(R,\omega)+G_n(R,\omega) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k!c_k}{R^k}B_k(R,\omega)+\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{R^k}f_k(R,\omega)+G_n^*(R,\omega).
\end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\widetilde{F}_1(R,\omega)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!c_k}{R^k}B_k(R,\omega)+G_n(R,\omega),$$

où

$$G_n^*(R,\omega)=\frac{1}{R^{n+1}}\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)f_n\Big(\frac{r}{R}\Big)(R-r)^{n+1}\log|R-r|Y(r,\omega)dr,$$

et

$$G_n(R,\omega)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{R^k}f_k(R,\omega)+G_n^*(R,\omega).$$

En voit le support de $\varphi_1(\lambda)$ et par la définition de $f_n(x)$, on sait que $\varphi_1(\lambda)f_n\big(\frac{r}{R}\big)$ est une fonction C^∞ pour $R, r>0$. Donc, en utilisant le lemme 5.21, on sait que la fonction $G_n^*(R,\omega)$ est de classe C^{n-3} au sens usuels pour $R>0$. De plus, on a

$$G_n(R,\omega)=\sum_{k=n+1}^{n+k'}\frac{k!c_k}{R^k}B_k(R,\omega)+G_{n+k'}^*(R,\omega).$$

On sait que $B_k(R,\omega)$ est de classe $C_{loc}^{k+\frac{1}{2}-\varepsilon}(]0,\infty[)$, $G_{n+k'}^*(R,\omega)$ est de classe $C^{n+k'-3}$ au sens usuel pour $R>0$. Prenons $k'=5$, alors $G_n(R,\omega)$ est de classe $C^{n+\frac{3}{2}-\varepsilon}(]0,\infty[)$ pour tout $\varepsilon>0$. On a enfin démontré (5.21). □

On constate que, dans le théorème 5.1.

1) Les constantes C_k ne dépendent pas de choix de u et v.

2) $C_1=0$ puisque $f(\dfrac{1}{x})=f(x)$, alors $f'(1)=0$, où f est définie dans (5.27).

Chapitre 6

Conclusion et discussion

À cette occasion, on résume notre travail et on généralise le processus de Mumford. Tout d'abord, on définit formellement le processus de Mumford généralisé de dimension $n \geq 2$ et d'ordre $s \in \mathbb{R}$: $X^s(x, \omega)$, ($x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$) par

$$X^s(x, \omega) = \wedge^{-s} Z(x, \omega),$$

ou dans le domain de Fourier, de façon équivalente

$$\widehat{X}^s(\xi, \omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{Z(\xi, \omega)}{|\xi|^s},$$

où $\wedge = \sqrt{-\triangle}$ est l'opérateur de Calderón, et où $Z(x, \omega)$ est le bruit blanc complexe de dimension n. Alors on a évidemment $X^0(x, \omega) = Z(x, \omega)$ et que $X^{\frac{n}{2}}(x, \omega)$ est le processus de Mumford qu'on a défini dans les chapitres précédents. Revenons au théorème 2.13, qui nous donne que, en utilisant la base de Malvar-Wilson, le processus $X^s(x, \omega)$ n'a pas de divergence infra-rouge quand $s < \frac{n}{2}$, il est ω-presque sûrement une distribution tempérée et qu'on a réalisé sa renormalisation additive dans le cas $s \geq \frac{n}{2}$.

Avant donner les détails de la renormalisation additive, on donne d'abord quelque notations. Considérons la base de Malvar-Wilson $(w_{j,k,l,m})$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ qu'on a définie dans (2.9). Soient d un entier positif et $W_d(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par la suite orthogonale

$$\{w_{j,k,l,m} : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N},\, 0 \leq l \leq d,\, m \in \mathbb{I}_l\}; \tag{6.1}$$

alors (6.1) est une base o.n. de $W_d(\mathbb{R}^n)$ et

$$\{w_{j,k,l,m} : j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N},\, l > d,\, m \in \mathbb{I}_l\}$$

est une base o.n. de $W_d(\mathbb{R}^n)^\perp$. Remarquons que, les deux espaces $W_d(\mathbb{R}^n)$ et $W_d(\mathbb{R}^n)^\perp$ sont invariants par conjugaison (lemme 2.2). Alors on peut définir les projections du bruit blanc complexe $Z(x, \omega)$ de dimension n en les sous-espaces fermés $W_d(\mathbb{R}^n)$ et $W_d(\mathbb{R}^n)^\perp$ par

$$Z_{W_d}(x, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{N}} g_{j,0}(\omega) f_{j,0}(x),$$

et

$$Z_{W_d^\perp}(\xi, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{N}} g_{j,1}(\omega) f_{j,1}(x),$$

où $(g_{j,0},\, g_{j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes, $(f_{j,0})_{j\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $W_d(\mathbb{R}^n)$ et $(f_{j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ est une base o.n. de $W_d(\mathbb{R}^n)^\perp$. Remarquons que, les deux processus qu'on a définis convergent au sens des distributions tempérées et les définitions ne dépendent pas de choix de base o.n. ; changer de base o.n. conduira à un processus statistiquement équivalent. De plus, on sait que les deux espaces $W_d(\mathbb{R}^n)$ et $W_d(\mathbb{R}^n)^\perp$ sont invariants par la transformation de Fourier. Alors la transformée de Fourier du processus $Z_{W_d}(x,\omega)$ (resp. $Z_{W_d^\perp}(x,\omega)$) est statistiquement équivalent au processus $Z_{W_d}(x,\omega)$ (resp. $Z_{W_d^\perp}(x,\omega)$) à une constante multiplicative près.

Soit maitenant $\frac{n}{2}+d \le s < \frac{n}{2}+d+1$, où d est un entier positif, on décompose le processus $X^s(x,\omega)$ en deux partie $X^s(x,\omega) = X_0^s(x,\omega) + X_1^s(x,\omega)$, où les deux processus $X_0^s(x,\omega)$ et $X_1^s(x,\omega)$ sont définis de façon équivalente, dans le domaine direct ou le domaine de Fourier, par

$$X_0^s(x,\omega) = \wedge^{-s} Z_{W_d}(x,\omega) \qquad \text{ou} \qquad \widehat{X}_0^s(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{Z_{W_d}(\xi,\omega)}{|\xi|^s},$$

et

$$X_1^s(x,\omega) = \wedge^{-s} Z_{W_d^\perp}(x,\omega) \qquad \text{ou} \qquad \widehat{X}_1^s(\xi,\omega) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{Z_{W_d^\perp}(\xi,\omega)}{|\xi|^s}.$$

Avec cette décomposition, on sait que, d'après le théorème 2.13, la partie $X_1^s(x,\omega)$ est automatiquement une distribution tempérée ; la renormalisation additive (ou la divergence infra-rouge) se porte sur la partie $X_0^s(x,\omega)$. Remarquons que cette décomposition coincide avec celle qu'on a faite sur le processus de Mumford ($s=\frac{n}{2}$). En ce cas, $X_0^s(x,\omega)$ (resp. $X_1^s(x,\omega)$) est la partie radiale (resp. orthogonale) du processus de Mumford.

On donne ensuite quelques notations.

Soit $\{f_{j,k,l,m} : j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{N},\, l\in\mathbb{N},\, m\in\mathbb{I}_l\}$ la base o.n. de $L^2(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\widehat{f}_{j,k,l,m}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w_{j,k,l,m}(\xi).$$

Alors la fonction $\widetilde{f}^s_{j,k,l,m} = \wedge^{-s} f_{j,k,l,m}$ $(s\in\mathbb{R})$ satisfait

$$\widetilde{f}^s_{j,k,l,m}(x) = 2^{j(s-\frac{n}{2})} \widetilde{f}^s_{0,k,l,m}(2^{-j}x).$$

Notons simplement $h^s_{k,l,m}(x) = \widetilde{f}^s_{0,k,l,m}(x)$. Alors elle est déterminé dans le domaine de Fourier par

$$\widehat{h}^s_{k,l,m}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} Y_{l,m}(\sigma) \frac{w(r)}{r^{s+\frac{n-1}{2}}} \cos[\pi(k+\frac{1}{2})r], \qquad \xi = r\sigma.$$

On observe que

$$\widetilde{f}^s_{j,k,l,m}(x) = 2^{j(s-\frac{n}{2})} h^s_{k,l,m}(2^{-j}x).$$

Les théorèmes sur la renormalisation additive et sur la régularité qu'on a obtenus sont les suivants.

Théorème 6.1. *Avec les notations précédentes, on a les résultats suivants.*
1) Soit $s<\frac{n}{2}$. Alors presque sûrement en ω, la série

$$X^s(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) 2^{j(s-\frac{n}{2})} h^s_{k,l,m}(2^{-j}x)$$

converge au sens des distributions tempérées. En outre, le processus $X^s(x,\omega)$ est un processus gaussien stationnaire, invariant par rotation et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$X^s(2^j x,\omega) \sim 2^{j(s-\frac{n}{2})} X^s(x,\omega).$$

2) Soit $\frac{n}{2}+d \le s < \frac{n}{2}+d+1$, où d est un entier positif. Notons par

$$X_0^{s,r}(x,\omega) = \sum_{j<0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l=0}^{d}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) 2^{j(s-\frac{n}{2})} h^s_{k,l,m}(2^{-j}x)$$

$$+\sum_{j\ge 0}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l=0}^{d}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega)\Big(2^{j(s-\frac{n}{2})} h^s_{k,l,m}(2^{-j}x) - \sum_{l\le|\alpha|\le d}(-i)^{|\alpha|}\frac{C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}x^{\alpha}\Big)$$

et

$$X_1^s(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l>d}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) 2^{j(s-\frac{n}{2})} h^s_{k,l,m}(2^{-j}x),$$

où les constantes $C^{\alpha}_{j,k,l,m}(s)$ sont données dans (2.13). Alors ω-presque sûrement, $X_0^{s,r}(x,\omega)$ et $X_1^s(x,\omega)$ sont des distributions tempérées. $X_0^{s,r}(x,\omega)$ est la renormalisation additive de la partie $X_0^s(x,\omega)$ du processus de Mumford généralisé, et la renormalisation additive du processus de Mumford généralisé est $X^{s,r}(x,\omega) = X_0^{s,r}(x,\omega) + X_1^s(x,\omega)$. En outre, $X^{s,r}(x,\omega)$ est un processus gaussien à $(d+1)$-accroissements stationnaires, invariant par rotation et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, il existe une suite de v.a. $\{C^s_{j,\alpha}(\omega) : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \le d\}$ telle que

$$X^{s,r}(2^j x,\omega) \sim 2^{j(s-\frac{n}{2})}\Big(X^{s,r}(x,\omega) + \sum_{|\alpha|\le d} C^s_{j,\alpha}(\omega) x^{\alpha}\Big).$$

Pratiquement, on utilise encore les notations $X^s(x,\omega)$ et $X_0^s(x,\omega)$ dans la suite de ce chapitre, en prenant en compte la renormalisation additive pour le cas $s \ge \frac{n}{2}$. Elle n'a aucun sens si on décompose le processus $X^s(x,\omega)$ en somme de deux parties $X^s(x,\omega) = X_0^s(x,\omega) + X_1^s(x,\omega)$ dans le cas $s < \frac{n}{2}$.

Théorème 6.2. *Soit $X^s(x,\omega)$ le processus de Mumford généralisé de dimension $n \ge 2$ et d'ordre $s \in \mathbb{R}$. Alors ω-presque sûrement, pour tout $p,q \in [1,\infty]$ et pour tout $\varepsilon > 0$*

$$X^s(x,\omega) \in (B^{s-\frac{n}{2}-\varepsilon}_{p,q})_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

La démonstration de ce théorème est identique que celle de la régulaité du processus de Mumford (section 3.5). De plus, ce théorème est optimal pour l'exposant de la régularité, il n'est pas vrai quand $\varepsilon = 0$, car l'optimalité de la régulaité du bruit blanc (théorème 3.1).

Théorème 6.3. *Soit $X_0^s(x,\omega)$ la partie qu'on a définie du processus de Mumford généralisé de dimension $n \ge 2$ et d'ordre $s \ge \frac{n}{2}$. Alors ω-presque sûrement, pour tout $p,q \in [1,\infty]$ et pour tout $\varepsilon > 0$*

$$X_0^s(x,\omega) \in (B^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}_{p,q})_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}).$$

De même, la démonstration de ce théorème est aussi identique que celle de la régulaité du processus de Mumford (section 3.5). Le seul point qu'on va indiquer est ce que, si $\frac{n}{2} + d \leq s < \frac{n}{2} + d + 1$, où d est un entier positif. Alors on a

$$\widehat{X}_0^s(\xi, \omega)|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = \frac{C}{|\xi|^s} \sum_{l=0}^{d} \sum_{m \in \mathbb{I}_l} Y_{l,m}(\sigma) \widehat{Z}_0^{l,m}(\xi, \omega), \tag{6.2}$$

où C est une constante non nulle et où les processus $Z_0^{l,m}(x, \omega)$ sont les parties radiales du bruit blanc complexe de dimension n indépendantes. Ceci établit immédiatement la régularité de $X_0^s(x, \omega)$, en invoquant la régularité de la partie radiale du bruit blanc (théorème 3.4). Ce théorème est optimal pour l'exposant de la régularité dans le cas $s \in [\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1[$ puisqu'on a, en ce cas

$$\widehat{X}_0^s(\xi, \omega)|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = \frac{C}{|\xi|^s} \widehat{Z}_0(\xi, \omega),$$

où C est une constante non nulle et où $Z_0(x, \omega)$ est la partie radiale du bruit blanc complexe de dimension n. Mais on n'arrive pas l'optimalité de la régularité de $X_0^s(x, \omega)$ dans le cas $s \geq \frac{n}{2} + 1$, car il y a au moins 2 termes dans la somme (6.2) (il y a qu'un seul terme dans le cas $s \in [\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1[$). Notre méthode ne suffit pas d'établir l'optimalité de la régularité de $X_0^s(x, \omega)$ en ce cas $s \geq \frac{n}{2} + 1$.

Répétons ici que, l'exposant de la régulaité des processus $X^s(x, \omega)$ et $X_0^s(x, \omega)$ ne dépend pas des exposants p et q. Alors ils sont des objets fractals. De plus, la partie $X_0^s(x, \omega)$ de ces processus est beaucoup plus régulière que le processus. La partie $X_1^s(x, \omega)$ a donc la même régularité locale que le processus.

Le dernier résultat qu'on va donner est la considération sur la régularité du processus $X_0^s(x, \omega)$ en l'origine. On restreint au cas $s \in [\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1[$, il s'agit d'un processus à accroissements stationnaires. Établissons d'abord le lemme suivant qui est trivial.

Lemme 6.4. *Soient $X_0^s(x, \omega)$ la partie qu'on a définie du processus de Mumford généralisé de dimension $n \geq 2$ et d'ordre $s \in [\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1[$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et deux nombres réels $p, q \in [1, \infty]$. Alors $X_0^s(x, \omega)$ appartient à l'espace $(B_{p,q}^t)_{loc}(\Omega)$ si et seulement si pour tout $s' \in [\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1[$, $X_0^{s'}(x, \omega)$ appartient à l'espace $(B_{p,q}^{t+s'-s})_{loc}(\Omega)$, où t est un nombre réel quelquonque.*

Avec la même méthode qu'on a utilisé dans la démonstration du théorème 4.1. On peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.5. *Soient $X_0^s(x, \omega)$ la partie qu'on a définie du processus de Mumford généralisé de dimension $n \geq 2$ et d'ordre $s \in]\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1[$. Alors $X_0^s(x, \omega)$ est une fonction continue radiale et il existe une constante $C > 0$ et une fonction $F(x, \omega)$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

$$X_0^s(x, \omega) = F(x, \omega) + C \sum_{j=j_0}^{-1} 2^{j(s - \frac{n}{2})} g_j(\omega),$$

avec

$$|F(x, \omega)| \leq D(\omega) 2^{j_0(s - \frac{n}{2})} \sqrt{\log(|j_0| + 2)},$$

où $j_0 = [\log_2 |x|]$, qui est le plus grand entier inférieur ou égal à $\log_2 |x|$, $(g_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite de v.a., i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ à valeurs complexes, et où $D(\omega)$ est une v.a. qui est p.s. finie.

Ce théorème nous donne que

$$X_0^s(x,\omega) \in C^0_{loc}(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\, s \in \left]\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right[.$$

Cela implique, en invoquant le lemme 6.4, pour tout $s' \in [\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1[$

$$X_0^{s'}(x,\omega) \in C^{s'-s}_{loc}(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\, s \in \left]\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right[.$$

Il vient, ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$

$$X_0^s(x,\omega) \in C^{s-\frac{n}{2}-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\, s \in \left[\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right[.$$

On sait que la partie radiale du processus de Mumford $X_0^{\frac{n}{2}}(x,\omega)$ n'est pas une fonction bornée autour de l'origine. Alors on a, ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$

$$X_0^s(x,\omega) \notin C^{s-\frac{n}{2}+\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\, s \in \left[\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right[.$$

Mais on sait pas cela est vari ou non quand $\varepsilon = 0$.

D'après le théorèm 6.5, quand $s \in]\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1[$, notons de nouveau

$$\widetilde{X}_0^s(x,\omega) = X_0^s(x,\omega) - X_0^s(0,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k,0,0}(\omega)\Big(2^{j(s-\frac{n}{2})} h^s_{k,0,0}(2^{-j}x) - \frac{C^0_{j,k,0,0}(s)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\Big)$$

et

$$\widetilde{X}^s(x,\omega) = \widetilde{X}_0^s(x,\omega) + X_1^s(x,\omega),$$

Alors ω-presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{X}^s(x,\omega) \in C^{s-\frac{n}{2}-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, $\widetilde{X}^s(x,\omega)$ est ω-presque sûrement continue. En outre, $\widetilde{X}^s(x,\omega)$ est un processus gaussien à accroissements stationnaires, invariant par rotation et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\widetilde{X}^s(2^j x,\omega) \sim 2^{j(s-\frac{n}{2})}\widetilde{X}^s(x,\omega).$$

Plus précisement, on a

$$\widetilde{X}^s(x,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{I}_l} g_{j,k,l,m}(\omega) 2^{j(s-\frac{n}{2})}\widetilde{h}^s_{k,l,m}(2^{-j}x),$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{h}^s_{k,l,m}(x) &= h^s_{k,l,m}(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)d\sigma \int_0^\infty w(r) r^{\frac{n-1}{2}-s}\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{l,m}(\sigma)(e^{ix\cdot r\sigma}-1)d\sigma \int_0^\infty w(r) r^{\frac{n-1}{2}-s}\cos[\pi(k+\frac{1}{2})r]dr.\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.* New York NY Dover, 1972.

[2] Patrice Abry. *Ondelettes et Turbulence - Multirésolutions, Algorithmes de Décomposition, Invariance d'Echelle et Signaux de Pression.* Paris Diderot, 1997.

[3] Patrice Abry, Paulo Gonçalvès and Jacques Lévy Véhel. *Fractales, Ondelettes et Lois d'échelle.* Paris Hermès, 2001.

[4] Serge Alinhac and Patrick Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* Paris InterEditions. Ed. du CNRS, 1991.

[5] Bradley Alpert. *Sparse representation of smooth linear operators.* Yale University, 1990.

[6] Leo Breiman. *Probability.* Philadelphia PA Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM, 1992.

[7] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math*, **41**(1988), 909-996.

[8] Ingrid Daubechies. *Ten lectures on wavelets.* Philadelphia PA Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM, 1992.

[9] Michel Gatesoupe. Sur les transformées de Fourier radiales. *Mémoires de la SMF*, **28**(1971), 3-133.

[10] Izrail' Moiseevich Gel'fand and Naum Jakovlevich Vilenkin. *Les Distributions. T. 4 : applications de l'analyse harmonique.* Paris Dunod, 1967.

[11] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *Probability and random processes.* Oxford Univ. Press, 1992.

[12] Helmut Groemer. *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics.* Cambridge University Press, 1996.

[13] Stéphane Jaffard, Yves Meyer and Robert D. Ryan. *Wavelets.* Philadelphia PA Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM, 2001.

[14] Jean-Pierre Kahane. *Some random series of functions.* Cambridge University Press, 1985 2nd ed.

[15] Georges Matheron. The intrinsic random functions and their applications. *Adv. Appl. Prob.* **5**(1973), 439-468.

[16] Yves Meyer. *Ondelettes et opérateurs I.* Paris Hermann, 1990.

[17] Yves Meyer, Fabrice Sellan, and Murad S. Taqqu. Wavelets, generalized white noise and fractional integration : the synthesis of fractional Brownian motion. *J. Fourier Anal. Appl.* **5(5)**(1999), 465-494.

[18] Claus Müller. *Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces.* Springer, 1998.

[19] David Mumford and Basilis Gidas. Stochastic models of generic images. *Quarterly Appl. Math.* **59**(2001), 85-111.

[20] R.E.A.C Paley, N. Wiener and A. Zygmund. Notes on random functions. *Math. Zeitschrift* **37**(1933), 647-668.

[21] Athanasios Papoulis. *Probability, random variables and stochastic processes.* McGraw Hill, 4th ed., 2002.

[22] Bernard Picinbono. *Signaux aléatoires. Tome 2, fonctions aléatoires et modèles avec problèmes résolus.* Paris Dunod. 1993.

[23] Laurent Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Paris Hermann, 1965 2e éd..

[24] Elias M. Stein. *Harmonic Analysis.* Princeton University Press, 1993.

[25] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, 1970.

[26] Elias M. Stein. and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, 1971.

[27] Béatrice Vedel. *Thèse de doctorat.* Université de Picardie-Jules Verne.

[28] Béatrice Vedel. *Bases d'ondelettes adaptées au règlement de la divergence infra-rouge.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005), 163-168.