



HAL
open science

Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide pour des données incertaines

Pierre Feissel

► **To cite this version:**

Pierre Feissel. Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide pour des données incertaines. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2003. Français. NNT: . tel-00132833

HAL Id: tel-00132833

<https://theses.hal.science/tel-00132833>

Submitted on 22 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan
par

Pierre FEISSEL

pour obtenir le grade de
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Sujet de la thèse :
**Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide
pour des données incertaines**

Thèse soutenue le 10 Décembre 2003 devant le jury composé de :

ANDRIEUX STÉPHANE	Rapporteur
CIMETIÈRE ALAIN	Rapporteur
BAPTISTE DIDIER	Président
BOURGEOIS LAURENT	Examineur
GUÉDRA-DEGEORGES DIDIER	Examineur
ALLIX OLIVIER	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie
(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Savoir, c'est vivre,
et maintenir dans l'ignorance,
c'est presque un homicide.

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Ladevèze, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe au sein de son laboratoire.

Mes remerciements sincères vont également à Olivier Allix, pour avoir encadrer ces travaux, et avec qui les échanges ont été aussi enrichissants qu'agréables.

Merci à Didier Guédra-Degeorges et Pascal Thévenet, d'EADS-CCR, d'avoir proposé ce sujet et d'avoir permis qu'il devienne ce qu'il est devenu.

Je tiens à présenter ma gratitude à Didier Baptiste qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. Un respect profond va aux deux rapporteurs qui ont eu la lourde tâche de lire et de juger mon travail. Enfin, les examinateurs me voient reconnaissant de leur participation.

Pour remercier ceux qui ont fait ou font encore l'ambiance et les échanges au laboratoire tout au long de la thèse, la tendance est cette année aux longs discours. Fashion victim un jour, fashion victim toujours, je tâcherai donc de ne pas déroger à la règle. Évidemment, il me semble impossible de remercier tout le monde sur cette page, et le manque de place ou l'oubli pourront avoir bon dos. J'espère que leurs victimes voudront bien m'en excuser dès à présent, ce serait fort aimable. Mon choix est de prendre ici le chemin chronologique de mon passage au *LMT*, en me rendant compte que son visage a bien changé. Ainsi, pour commencer par le début, ce qui semble raisonnable, vu la trame envisagée, je tiens à remercier sincèrement Arnaud Poitou pour m'avoir mené dans ce traquenard de la recherche, avec l'aide de ses complices, Olivier et Pierre, et sans lequel je serais sûrement actuellement en train de me faire passer pour un consultant en stratégie auprès d'un quelconque client. Puis, il y a eu mes camarades de DEA, et leur voiture de kart, qui ont eu l'amabilité de m'accueillir parmi eux malgré mon visa provisoire. Certains d'entre eux ont continué leur thèse au *LMT*, j'aurai l'occasion d'en reparler, d'autres sont allés voir ailleurs si l'herbe y est meilleure, ce qui ne les a pas empêchés de me marquer, tout particulièrement Seb. L'excellent accueil de l'époque est évidemment dû à ceux que je qualifierais dans mon référentiel personnel d'ancienne génération. Les doctorants de l'époque, surtout du secteur, les Rouchy, Cuicui, Nicolas, Arnaud, Fabien, Éric, Stéphane (qui m'a accueilli dans son bureau), Michton (qui m'a initié aux joies du pstops), Seb (que je croyais à l'époque de l'ancienne génération), Riton et autre OSA, dont les conversations scientifiques ont su accompagner ma thèse. Déjà à l'époque, ceux qui semblaient les immuables du laboratoire s'activaient pour faire tourner la boutique. Je pense à Xavier (auquel j'ai eu affaire pour une poignée d'essais), Philippe et Frisou (qui au-delà de son magnifique sceptre, possède un optimisme constructif à la limite de l'immortalité, malgré les gens), Dominique, PAB l'omniscient (qui sait aider tout le monde et notamment les jeunes), Claude toujours accueillant et il serait peut-être temps de mettre un point, car je ne vais pas lister tout le labo non plus, il ne s'agirait pas de souiller plus d'une page. J'en arrive donc à ceux pour lesquels les efforts de mémoire sont moindres, avec la fine équipe du midi mêlant des jeunes et des moins jeunes, grâce auxquels a été découverte la motricité aqueuse des cygnes en papier du pdj. Je me contenterai de quelques big up plus précis, car sinon, on ne va pas s'en sortir : Yann, qui a su me supporter sans jamais lever la main sur moi, Laurent, avec lequel il est somme toute agréable de ne pas parler que science et Delphine, et oui. Et puis, il ne faut pas oublier Olivier, qui nous a tenu informé du déroulement de la grande comédie du monde, Géraldine, qui nous a offert de nombreux sourires, Vincent, Yann c., mais n'insistez pas, je m'arrêterai là. Le secteur structure a été une entité de travail comptant de nombreux jeunes, qui, au-delà de l'entraide pour les petits soucis du quotidien, assurent, pour une bonne part, la bonne ambiance du centre de calcul. Parmi ceux-ci, j'ai déjà parlé des vieux, il me reste à remercier ceux qui le sont devenus, j'entends ma génération, notamment François, toujours là, au propre et au figuré, Vincent, Toto, Gilles et Tessai Taira. Reste enfin ceux qui poussent les précédents dehors, leur avant-garde, avec Jayant, et sa sagesse rougeoyante, David, camarade de l'épopée centralienne, et puis, les tout-jeunots, dont Mathilde, pour toutes ses positives vibes, Emmanuel et Guillaume, qui ont participé à l'aventure shapienne. Et je m'aperçois avec stupeur que je ne m'en suis pas tenu au secteur, malgré ce qui était annoncé, les frontières sont-elles réellement importantes? Avant de mettre un point préfinal, je tiens à remercier également l'ensemble des conversations qui m'ont accepté en leur sein au bar et ailleurs, ainsi que tous leurs protagonistes. Enfin, au travers des âges, comment ne pas remercier tous ceux qui utilisent pour une raison ou une autre des gobelets en plastique ou qui gaspillent le papier comme s'il poussait à la cave et qui ont eu la gentillesse de ne pas comploter un accident sur ma personne pour mon attitude psychorigide à leur égard, dont le seul but est de leur gâcher la vie en espérant qu'ils changent. Finalement, je lève mon verre à l'Homme.

Big up à tous mes homiez.

Table des matières

Introduction	1
1 Simulation du crash des composites	5
1.1 Absorbeur de choc en composite multicouche	6
1.1.1 Problématique de l'absorbeur de choc	6
1.1.2 Essais sur structure	7
1.1.2.1 Différents types d'essais	8
1.1.2.2 Grandeurs étudiées	8
1.1.3 Modélisation et essais matériau	10
1.1.3.1 Modèle statique	11
1.1.3.2 Effets de vitesse pré-pics	12
1.1.3.3 Phénomènes de localisation et comportement post-pic .	15
1.1.3.4 Fragmentation	17
1.1.4 Simulation	17
1.2 Méso-modèle de stratifié à endommagement retardé	18
1.2.1 Modélisation du comportement statique	19
1.2.1.1 Modèle du pli élémentaire	19
1.2.1.2 Modèle de l'interface	21
1.2.2 Effet retard	23
1.3 Conclusion	26
2 Remarques sur l'identification de modèles d'endommagement en dynamique	27
2.1 Identification des paramètres d'effet retard	28
2.1.1 Caractère identifiable : considération énergétique	28
2.1.1.1 Déroulement schématique d'un essai jusqu'à rupture . .	29
2.1.1.2 Densité de dissipation : évaluation	30
2.1.1.3 Estimation de la taille de la zone de localisation : ana-	
lyse unidimensionnelle de propagation d'onde	35
2.1.1.4 Dissipation dans une poutre	38
2.1.2 Influence des paramètres sur les champs aux limites	38
2.2 Identification à partir d'essais hétérogènes et dynamiques	42
2.2.1 Stratégie d'identification : possibilités	42
2.2.1.1 Contexte d'identification	42
2.2.1.2 Utilisation d'une approche inverse	43
2.2.2 Première approche, basée sur l'écart entre solutions	45
2.2.2.1 Problème de base	45
2.2.2.2 Définition d'un écart	46

2.2.2.3	Robustesse vis-à-vis des perturbations de mesure	47
2.3	Conclusion	48
3	Stratégie d'identification et prise en compte des perturbations de mesure	51
3.1	Stratégie d'identification : cas de l'élasticité linéaire	52
3.1.1	Prise en compte des incertitudes de mesure	52
3.1.2	Problème de référence	54
3.1.2.1	Cas général	54
3.1.2.2	Cas unidimensionnel	56
3.1.3	Approche basée sur l'erreur en relation de comportement	57
3.1.3.1	Contexte et philosophie	57
3.1.3.2	Formulation	58
3.1.3.3	Expression du problème de base	60
3.2	Identification sur l'exemple d'une barre homogène	62
3.2.1	Problème de base en $1D$	62
3.2.2	Champs solution, carte de contribution à l'erreur	63
3.2.2.1	Mesures exactes - Module d'Young exact	64
3.2.2.2	Mesures exactes - Module d'Young plus raide	65
3.2.2.3	Mesures perturbées	67
3.2.3	Identification	69
3.2.3.1	Fonction coût	69
3.2.3.2	Gradient	71
3.3	Formulation sans terme de distance aux mesures	73
3.3.1	Formulation	73
3.3.1.1	Motivation	73
3.3.1.2	Formulation du problème d'identification	73
3.3.1.3	Expression du problème de base	74
3.3.2	Illustration : champs solution	75
3.3.2.1	Mesures non perturbées	75
3.3.2.2	Mesures perturbées	76
3.3.3	Fonction coût	77
3.4	Terme de distance aux mesures	77
3.4.1	Choix du poids et valeur relative des termes	78
3.4.2	Stratégie d'identification selon la connaissance des perturbations	79
3.4.2.1	Exemple sur un grand nombre de tirages	79
3.4.2.2	Stratégie vis-à-vis de la connaissance sur les perturbations	80
3.5	Conclusion	81
4	Méthodes de résolution du problème de base	83
4.1	Problème de base	84
4.1.1	Formulation Éléments Finis	84
4.1.1.1	Formulation avec distance aux mesures	84
4.1.1.2	Formulation avec conditions aux limites fortes	86
4.1.2	Problème $0D$	89
4.1.3	Solution analytique et remarques sur le système	91
4.1.3.1	Solution analytique du problème $0D$	91
4.1.3.2	Remarque sur la stabilité du système continu	93

4.2	Méthodes de résolution globales en temps	93
4.2.1	Assemblage d'un schéma temporel	93
4.2.2	Éléments Finis temporels	95
4.2.3	Illustration et commentaires	98
4.3	Méthodes de résolution locales en temps	98
4.3.1	Méthodes itératives	99
4.3.1.1	Différentes possibilités	99
4.3.1.2	Illustration et commentaires	100
4.3.2	Utilisation de la matrice de transition, méthode de gradient	100
4.3.2.1	Principe	100
4.3.2.2	Illustration et commentaires	102
4.3.2.3	Proposition d'amélioration	104
4.3.3	Passage par l'équation de Riccati	105
4.3.3.1	Formalisme de l'automatisme	105
4.3.3.2	Illustration et commentaires	107
4.4	Conclusion	109
5	Vers l'identification de lois d'endommagement	111
5.1	Élasticité hétérogène	112
5.1.1	Problème d'identification	112
5.1.2	Mise en œuvre de l'identification	112
5.1.2.1	Identification dans le cas A	114
5.1.2.2	Identification dans le cas B	115
5.2	Identification de la loi à effet retard	118
5.2.1	Formulation du problème d'identification	118
5.2.1.1	Principe	118
5.2.1.2	Choix de \mathcal{D}	119
5.2.2	Expression du problème de base	120
5.2.2.1	Problème d'identification en $0D$	120
5.2.2.2	Obtention des équations du problème de base	120
5.2.2.3	Particularités selon le choix de \mathcal{D}	121
5.2.3	Piste de résolution et illustration	123
5.2.3.1	Piste de résolution	123
5.2.3.2	Exemple	125
5.3	Conclusion	126
	Conclusion	127

Table des figures

1.1	Tolérance du corps humain au choc	6
1.2	Poutre sinus après un essai de crash	7
1.3	Portique pour essai de crash d'aeronef NASA, [Thornton et Edwards, 1982]	8
1.4	Courbe de réponse globale schématique	9
1.5	Schéma du montage aux barres d'Hopkinson, d'après [Gary et Zhao, 2000]	12
1.6	Effet de vitesse sur composite, d'après [Harding, 1996]	14
1.7	Différentes phases post-pic possibles	15
1.8	Méso-constituants du composite stratifié	19
1.9	Directions d'orthotropie de l'interface interlaminaire	22
1.10	Allure de H en fonction du paramètre a	24
1.11	Courbe contrainte-déformation pour des chargements à différents taux de déformation	25
1.12	Rupture de composite carbone-carbone	25
2.1	Taux de déformation et d'endommagement dans la barre	29
2.2	Temps de rupture en fonction de $\tau_c \dot{\epsilon}$	31
2.3	Taux d'endommagement en fonction des déformations : effet du taux de déformation	33
2.4	Écart relatif entre le temps de rupture et ses approximations	34
2.5	Taux de déformation minimum $\dot{\epsilon}_{mini}$ pour atteindre $\frac{1}{\tau_c}$	34
2.6	Énergie dissipée en fonction de $\tau_c \dot{\epsilon}$	35
2.7	Évolution des fonctions issues de (2.29)	37
2.8	Approximation de l'énergie dans une poutre	38
2.9	Influence de T_c sur la réponse de la barre	39
2.10	Influence de a sur la réponse de la barre	40
2.11	Poutre composite et son chargement	40
2.12	Influence de T_c sur la réponse de la barre composite	41
2.13	Influence de a sur la réponse de la barre composite	41
2.14	Fonction coût selon le type d'écart, méthode issue de [Rota, 1996]	48
3.1	Problème direct 3D associé au problème d'identification	54
3.2	Problème 1D d'identification à partir de conditions aux limites redondantes	56
3.3	Essai numérique	57
3.4	Déplacement u et contrainte σ dans le plan abscisse \times temps	63
3.5	Conditions aux limites en déplacement exactes et perturbées	64
3.6	Champs solution dans le plan abscisse \times temps, $E = 2.E_0$	65
3.7	Carte de contribution à l'erreur, $\mathcal{E}_{t_i,k}$, dans le plan abscisse \times temps	66

3.8	Comparaison des mesures et des conditions aux limites du calcul, $E = 2.E_0$	66
3.9	Contribution à l'erreur \mathcal{E}_k de chaque élément intégrée sur le temps	67
3.10	Contribution à l'erreur \mathcal{E}_k , effet de la fréquence	67
3.11	Déplacement : mesure et conditions aux limites, réalisation de bruit blanc de premier moment nul	68
3.12	Déplacement : mesure et conditions aux limites, réalisation de bruit blanc de premier moment non nul	69
3.13	Fonction coût pour différents niveaux de perturbation	70
3.14	Fonction coût - perturbation : réalisation de bruit blanc uniforme	70
3.15	Calcul du gradient dans le cas $0D$	72
3.16	Problème 1D d'identification à partir de conditions aux limites redondantes	73
3.17	Champs solution dans le plan abscisse \times temps, $E = 2.E_0$	75
3.18	Carte de contribution à l'erreur dans le plan abscisse \times temps	76
3.19	Contribution à l'erreur de chaque élément intégrée sur le temps	76
3.20	Fonction coût g_2 en fonction du module d'Young	77
3.21	Conditions aux limites en déplacement perturbées	80
3.22	Distribution de E identifié (1 200 tirages de bruit blanc gaussien d'écart-type 20%)	81
4.1	Problème $0D$ d'identification à partir de mesures redondantes	89
4.2	Déplacement et multiplicateur par les méthodes globales en temps	99
4.3	Déplacement et multiplicateur par la matrice de transition	102
4.4	Déplacement et multiplicateur par la matrice de transition	102
4.5	Conditionnement de la matrice M_{22} en fonction de N_t	103
4.6	Multiplicateur $\lambda(t)$, pour un temps d'étude $T_{max} = \frac{50}{\sqrt{a.k}}$	105
4.7	Carte de contribution à l'erreur, $E = 2E_0$, 600 pas de temps	108
4.8	Carte de contribution à l'erreur, $E = 2E_0$, 3000 pas de temps	108
4.9	Fonction coût, mesures non perturbées, temps d'étude long	109
5.1	Algorithme d'identification utilisé	113
5.2	Poutre élastique hétérogène par bloc	114
5.3	Identification par blocs, mesures non perturbées	115
5.4	Identification par blocs, mesures perturbées	115
5.5	Champs de module à différentes itérations, mesures non perturbées	116
5.6	Identification par champs, Conditions aux limites reconstruites	117
5.7	champs solution au cours des itérations	125
5.8	Courbe d'identification de a	126

Liste des tableaux

2.1	Propriétés matériau	29
3.1	Quantités fiables et non fiables dans le cas élastique	58
3.2	Les trois méthodes envisageables	79
3.3	Données statistiques sur les modules d'Young identifiés	80
5.1	Quantités fiables et non fiables dans le cas de l'effet retard	118

Introduction

Les composites à fibres longues prennent une part croissante dans les structures aéronautiques, avec l'introduction de ces matériaux dans des parties de plus en plus cruciales des structures, comme la poutre ventrale du prochain A380 d'Airbus. Ce choix de matériau est notamment motivé par le gain de masse totale qu'il génère ou encore leur excellente résistance à la fatigue. Cependant, leur emploi amène de nouvelles difficultés, liées à leur tolérance aux dommages. En effet, un point sensible des structures en composite reste leur tenue au choc, que ce soit pour en déduire leurs propriétés résiduelles après un léger incident, l'effet d'un impact, par exemple d'oiseau ou d'aube de moteur sur l'intégrité de la structure, ou encore l'absorption d'énergie lors d'un crash.

Compte tenu des applications citées plus haut, il est nécessaire d'envisager des modèles permettant de décrire le comportement jusqu'à rupture, ce qui pose encore de grandes difficultés. Il est vrai que les modèles statiques pré-cris ont fait l'objet de nombreuses études et peuvent être considérés comme relativement fiables aujourd'hui, même si leur utilisation à l'échelle d'une structure complète demandera de développer des techniques de résolution adaptées. Ils permettent, d'ores et déjà, des prévisions fines des dommages d'une structure composite, [Allix et al., 2000].

Cependant, il n'en est pas de même de leur extension au comportement dynamique et à la rupture, deux points qui seront nécessaires à des simulations pertinentes de crash ou d'impact. Ce dernier point explique pourquoi un nombre croissant d'études porte sur ces questions pour les composites, [Nemes et Randles, 1994, Harding, 1996, Coutellier et Rozycki, 2000, Johnson et A.K. Pickett, 2001]. Ces difficultés sont notamment dues aux problèmes de caractérisations expérimentales en dynamique qui ne bénéficient pas du même recul que celui qui existe dans le cas des matériaux métalliques, ainsi qu'aux difficultés numériques associées à ce type de problème. De plus, les phénomènes à prendre en compte étant assez fins, l'échelle de description du comportement doit être compatible avec les moyens de calcul tout en conservant une précision suffisante. Un des enjeux de la recherche actuelle est donc l'extension des modèles pour les composites aux sollicitations dynamiques et à la description de la rupture, dans le but d'employer la simulation dans le développement de ces structures, afin de réduire le nombre d'essais.

Dans ce cadre général, l'étude s'appuie plus particulièrement sur l'exemple des absorbeurs de choc en composite développés pour la survie au crash, en particulier utilisés pour les hélicoptères. L'industrie aéronautique est amenée à développer ce type de structure, notamment du fait des normes de sécurité toujours plus contraignantes. Ceci explique donc que les absorbeurs de choc soient l'objet de nombreux travaux et leur développement passe encore principalement par les essais. Dans le cadre de cette application, on retrouve les mêmes difficultés liées à la grande complexité des mécanismes mis en jeu. Celles-

ci sont accrues du fait de la grande sensibilité de la ruine aux défauts et aux conditions expérimentales.

Dans ce contexte, cette étude s'inscrit dans la continuité de travaux antérieurs menés au *LMT-Cachan*. Ceux-ci ont permis de développer des modèles de comportement pour les composites, les mésomodèles de stratifiés [Ladevèze, 1992], qui se placent à l'échelle du pli pour décrire les phénomènes dissipatifs. Ces modèles, qui s'avèrent pertinents en statique, sont utilisés aujourd'hui dans de nombreuses études, par exemple [Phillips et al., 2001, Remmers et de Borst, 2001, Johnson et A.K. Pickett, 2001], et donnent lieu à des simulations de plus en plus complexes. La généralisation de l'utilisation de ces modèles pour le calcul réside tout d'abord dans le choix d'une échelle de description qui est un bon compromis entre description fine des phénomènes et capacité actuelle de calcul. D'autre part, un point-clé des mésomodèles est de posséder une démarche d'identification de leurs paramètres bien établie et raisonnablement simple. Les mésomodèles de stratifiés fournissent donc un modèle statique solide comme point de départ de cette étude. Il reste alors à prendre en compte la description de l'endommagement jusqu'à rupture et des effets de vitesse.

La description de la rupture est un problème délicat et fournit un terrain propice à bon nombre de recherches [Sluys, 1992, de Borst et Muhlhaus, 1992, Espinosa et al., 1998, Oliver et al., 1999]. L'une des difficultés majeures est de réussir à gérer les problèmes de localisation des déformations que l'on rencontre pour des comportements adoucissants et qui demandent une régularisation du problème continu. Les modèles sont alors enrichis avec une complexité variable et de nouveaux paramètres sont ainsi introduits. Leur identification expérimentale soulève de nombreuses questions, comme nous le verrons dans la suite.

Pour les stratifiés, [Ladevèze, 1991] propose une approche basée sur la mésomodélisation à endommagement retardé. L'étude précise de cet effet retard a été menée dans [Allix et Deü, 1997], ce qui a conduit à introduire une vitesse d'endommagement maximale, à rapprocher des vitesses de fissuration bornées. Ainsi modifiés, les mésomodèles de stratifiés permettent donc de décrire la rupture numériquement, de façon tout à fait adaptée à la dynamique et à leur implantation. Ces modèles fournissent donc des éléments de réponse aux questions soulevées précédemment. Partant de cette base, ce travail s'interroge sur les possibilités d'identification de la partie du modèle gérant la rupture, c'est-à-dire des paramètres de retard. Une première démarche d'identification avait été appliquée dans [Allix et Deü, 1997], pour les composites carbone-carbone, en se basant sur des essais de type plaque-plaque.

Ce type d'essai n'est pas imaginable dans le cas des stratifiés, du fait de leur géométrie, et l'idée première de cette étude était de se baser sur des essais de rupture dynamique menés à *EADS-CCR*, afin de caractériser le modèle. Les difficultés rencontrées lors du dépouillement des essais [Feissel, 2000, Thévenet, 2003], liées à la maîtrise des conditions aux limites et accentuées par la rupture, nous ont amenés à pousser la réflexion sur la problématique inhérente à ce type d'identification. Pour cela, plusieurs questions peuvent être soulevées :

- Est-il raisonnable, d'un point de vue théorique, de vouloir identifier le comportement post-pic des composites en dynamique ? (les problèmes sous-jacents étant la

faible durée de la phase post-pic, les phénomènes de localisation qui interviennent sur des zones très fines)

- D'un point de vue pratique, quels essais doivent être utilisés et quelle confiance faut-il accorder aux mesures? Quelle stratégie d'identification est-il possible d'appliquer?

Le fait de vouloir identifier un modèle développé pour gérer la rupture nous oblige à nous baser sur des essais à la fois dynamiques et hétérogènes, ce qui n'autorise pas une approche directe standard, mais dirige plutôt vers des approches inverses, basées sur la comparaison essai-calcul. Le deuxième point mis en avant précédemment souligne l'importance du dialogue entre les essais et le calcul et soulève la question de la prise en compte des données expérimentales dans la démarche. Ainsi, il faut s'interroger sur la confiance à accorder aux différentes quantités tant du point de vue théorique qu'expérimental, ainsi que sur la manière de traduire cette confiance au cours de l'identification.

Sur ce point, il paraissait crucial d'avoir à notre disposition une méthode permettant de traiter des problèmes où l'incertitude sur les données expérimentales joue un rôle central. De nombreuses méthodes sont proposées dans la littérature pour prendre en compte le caractère incertain des données [Andrieux et Voltaire, 1995, Orkisz et Skrzat, 1996, Cimetière et al., 2000, Corigliano et Mariani, 2003]; cependant, le niveau de perturbation qu'elles sont capables de traiter semblait limité par rapport à celui auquel on s'attend à être confronté ici. Le pari de l'étude est donc de mettre l'accent sur cette prise en compte des incertitudes pour des niveaux élevés de perturbation, afin de rechercher une méthode mécanicienne robuste.

Les pistes de réponse qui ont été explorées se basent sur le principe de l'erreur en relation de comportement. Celui-ci, qui est appliqué au domaine de la validation depuis une vingtaine d'années [Ladevèze, 1983], cherche à prendre en compte dans le calcul le caractère fiable des grandeurs qui interviennent de façon naturelle. Ainsi, il sépare dans l'ensemble du problème d'identification les grandeurs théoriques et expérimentales en quantités fiables et non fiables et cherche à tenir compte des connaissances *a priori*. Dans le contexte d'identification qui a été posé ici, le doute portera donc sur le modèle de comportement ainsi que sur l'ensemble des données expérimentales, considérées incertaines. Ceci nous a conduit à utiliser l'erreur en relation de comportement modifiée, jusque là utilisée pour le recalage de structures en vibration, [Ladevèze, 1998]. L'application à nos problèmes de la ligne de pensée développée dans ces travaux conduit à une formulation spécifique, demandant de développer des techniques de résolution différentes.

Le travail reprend donc cette problématique selon l'organisation suivante :

- Le premier chapitre présente le contexte général de l'étude et de la simulation des absorbeurs de choc en composite multicouche. L'accent est finalement mis sur les mésomodèles de stratifiés développés au *LMT-Cachan*.
- Dans un second chapitre, la question de l'identification de modèles de rupture, et plus particulièrement du modèle à effet retard, est abordée. Le premier point étudié est de discuter l'importance de cette partie du comportement dans les essais. Pour cela, une étude théorique est menée sur la dissipation liée à la localisation; elle est comparée aux autres énergies mises en jeu dans un essai simple de traction, pour un modèle unidimensionnel. Cela permet de conclure à l'identifiabilité des paramètres, dans une certaine mesure. Dans un second temps, le choix de la stratégie d'identi-

fi cation est discuté. Celui-ci se porte sur la famille des approches inverses, du fait du caractère hétérogène et dynamique des essais. Une première méthode, basée sur l'écart entre solutions [Rota, 1994], est alors testée sur un exemple en élasticité. Il en ressort un manque de robustesse vis-à-vis des incertitudes de mesure.

- L'échec de cette première méthode dans notre contexte d'identification nous invite, dans un troisième chapitre, à proposer une méthode basée sur l'erreur en relation de comportement [Ladevèze, 1998]. Celle-ci est testée sur les mêmes exemples que précédemment et démontre une grande robustesse. Cette robustesse est alors étudiée en introduisant des stratégies d'identification alternatives.
- La méthode proposée au chapitre précédent présente une grande robustesse en tant que stratégie d'identification. Cependant, elle demande de résoudre des problèmes de propagation d'onde avec conditions initiales et finales. Cela oblige à utiliser des techniques de résolution particulières, qui doivent faire face à des problèmes de stabilité intrinsèques au système à résoudre. Le quatrième chapitre présente donc les différentes méthodes de résolution qui ont été étudiées.
- Dans le dernier chapitre, la discussion s'ouvre sur l'application de la méthode au cas des modèles à effet retard. Une première étape dans ce sens est franchie en traitant l'identification des raideurs d'une poutre élastique hétérogène. Puis, est présentée la démarche d'identification dans le cas de l'effet retard et les questions qu'elle soulève.

Chapitre 1

Simulation du crash des composites

Ce premier chapitre présente le contexte général de l'étude, à savoir les questions soulevées par la simulation du crash des absorbeurs de choc en composite. Après une présentation de ces structures, les principaux types d'essai disponibles pour leur étude sont analysés, ainsi que les grandeurs étudiées et les modèles qu'ils permettent d'identifier. La fin du chapitre s'attarde d'avantage sur la présentation des modèles développés au LMT-Cachan.

Sommaire

1.1	Absorbeur de choc en composite multicouche	6
1.1.1	Problématique de l'absorbeur de choc	6
1.1.2	Essais sur structure	7
1.1.3	Modélisation et essais matériau	10
1.1.4	Simulation	17
1.2	Mésomodèle de stratifié à endommagement retardé	18
1.2.1	Modélisation du comportement statique	19
1.2.2	Effet retard	23
1.3	Conclusion	26

Ce premier chapitre présente la problématique inhérente à la simulation du comportement dynamique jusqu'à rupture des structures en composite. Cette question se pose pour un grand nombre d'applications, la plupart étant reliée au domaine aéronautique. À titre d'exemple, citons l'impact d'oiseau ou encore d'aube de moteur. L'étude se base plus particulièrement sur les absorbeurs de choc en composite, qui ont été le point de départ de l'étude. Après une présentation de ces structures, celles-ci servent de fil conducteur pour aborder les différentes questions liées à l'étude, la modélisation et la simulation de la rupture dynamique des composites.

1.1 Absorbeur de choc en composite multicouche

1.1.1 Problématique de l'absorbeur de choc

Dans le domaine du transport de personnes, les normes de sécurité deviennent de plus en plus strictes, poussant les industriels à développer des structures spécifiques à l'absorption d'énergie lors des crashes. Ces développements ont lieu tant dans le secteur du transport terrestre que dans celui du transport aérien, avec, cependant, des particularités inhérentes à l'orientation de l'impact (en général, horizontal pour un véhicule terrestre et vertical pour un avion). Dans le cadre du transport aérien, le principe de telles structures est de permettre aux passagers de passer de leur vitesse de chute à l'arrêt sans dépasser une accélération qui leur serait fatale. Comme la figure 1.1 le montre, cette accélération admissible dépend de la durée pendant laquelle elle est appliquée, ainsi que de l'orientation de la sollicitation.

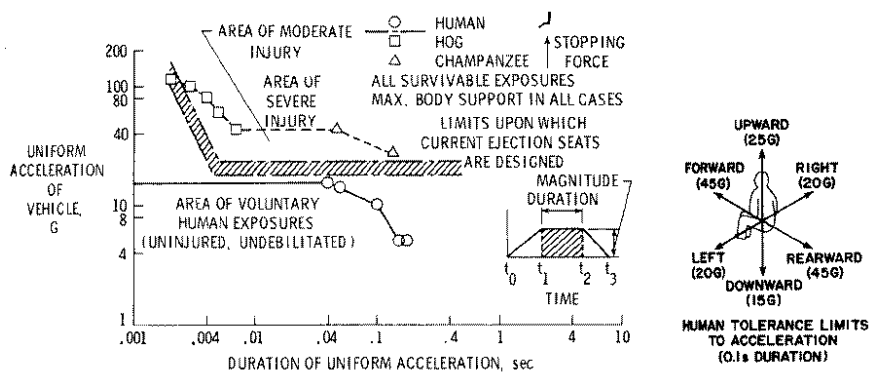


Figure 1.1 – Tolérance du corps humain au choc

On voit tout de suite que ce cahier des charges ne pourra pas être vérifié si la vitesse de chute est trop importante vis-à-vis de la taille de la structure située sous le passager, susceptible de s'écraser afin de permettre la décélération. Ainsi, dans la chaîne qui sépare l'utilisateur du ventre du véhicule, les différents constituants participent à la dissipation de l'énergie du choc. C'est le cas, par exemple, du siège, comme des structures auxquelles on s'intéresse ici, spécialement dédiées à l'absorption du choc, que sont les poutres sinus en composite situées entre la carène et le plancher de l'appareil. Ces poutres, initialement développées pour les hélicoptères, sont constituées d'un empilement de plis à matrice organique comprenant des fibres de carbone et d'aramide, cet empilement formant un

mur vertical de base sinusoïdale afin d'éviter le flambage global. Le choix du composite s'explique par le fait qu'il possède en général une très bonne énergie spécifique (énergie dissipée par unité de masse). La dissipation d'énergie se fait alors par ruine de la structure, contrairement aux structures métalliques où la dissipation est principalement due à la plastification. Par ruine, on entend l'ensemble des mécanismes irréversibles de dégradation, parmi lesquels on trouve principalement la fissuration matricielle, les ruptures de fibre, le délaminage entre plis adjacents, la fragmentation, les frottements. La figure 1.2 donne une idée des processus de ruine, en présentant une poutre sinus après un essai destructif.



Figure 1.2 – Poutre sinus après un essai de crash

L'efficacité de ces poutres va dépendre de la maîtrise du scénario de ruine. En effet, les mécanismes mis en jeu entraînent notamment des phénomènes d'instabilité de la structure, qui, s'ils ne sont pas maîtrisés, peuvent entraîner une rupture localisée de la structure. Dans ce cas, la poutre dissipe très peu d'énergie, puisque une faible part de la structure participe à la dissipation. C'est pourquoi, il est nécessaire d'introduire des défauts lors de la fabrication. Ceux-ci jouent le rôle d'amorce de rupture dans le but de favoriser un mode de ruine progressive, favorable à l'absorption d'énergie. Or ce scénario de ruine, dont la maîtrise constitue un enjeu majeur, dépend fortement du type de défauts introduits, des matériaux et des empilements choisis ainsi que de la géométrie ; il est également fortement sensible au chargement qui malheureusement n'est pas complètement connu.

Ceci met en avant la difficulté de l'étude expérimentale de ce type de structure ainsi que l'intérêt qu'il y aurait à pouvoir simuler le comportement très complexe de ces structures et tester leur aptitude numériquement en fonction des sollicitations. Dans la suite, un certain nombre de moyens d'étude expérimentale est présenté, ainsi que les modélisations possibles et certaines simulations de crash de structures en composite.

1.1.2 Essais sur structure

Les essais sur structure s'intéressent le plus souvent à des informations qualitatives, permettant une meilleure compréhension des phénomènes, ou à des quantités qui restent assez globales. Selon le type d'essai, on recherche également une représentativité des sollicitations par rapport à celles de la situation réelle.

1.1.2.1 Différents types d'essais

Les essais qui sont certainement les plus impressionnants sont les essais sur structure réelle ou sur tronçon de structure à l'échelle 1. Du fait de leur coût non négligeable, ces essais sont assez rares et sont le plus souvent des essais de validation, menés par de grands groupes comme *NASA*, *ONERA*, *EADS*, *DGA*, qui possèdent les moyens d'essai nécessaires. Ces moyens peuvent être des tours de chute ou encore des portiques tels que celui de la *NASA* présenté figure 1.3. Ce sont le plus souvent des essais servant à valider le scénario de rupture, permettant de prendre en compte les effets de structure. Ils sont également utilisés afin d'obtenir des chargements représentatifs, pouvant servir pour les simulations ou pour définir des essais de plus petite taille.

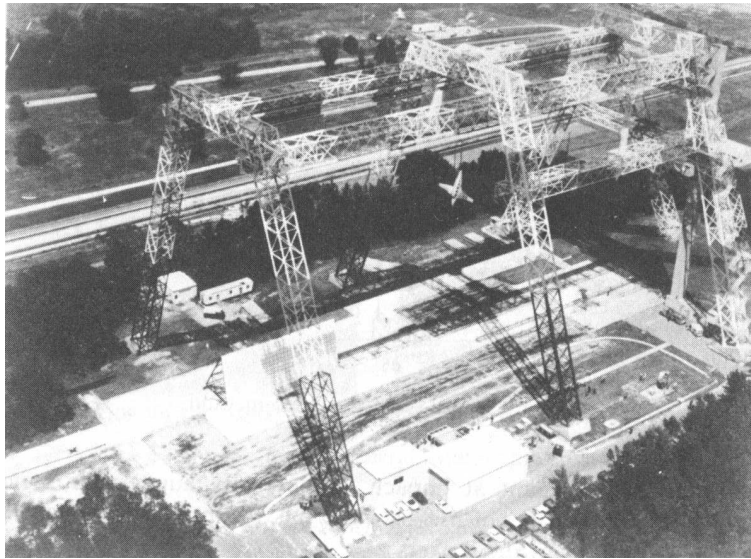


Figure 1.3 – Portique pour essai de crash d'aeronef NASA, [Thornton et Edwards, 1982]

Parmi ces essais de taille plus réduite, on trouve les essais sur éprouvette structurelle, avec notamment les essais sur tube composite qui ont fait l'objet de nombreuses études, dont [Thornton et Edwards, 1982], en statique ou encore [Schmueser et Wickliffe, 1987] en dynamique. Ces essais permettent notamment d'étudier l'influence des matériaux, des empilements et des géométries. On peut également citer les essais sur plaque comme ceux étudiés dans [Daniel et al., 2000].

Enfin, les essais par similitude sur des composants à échelle réduite, comme ceux présentés dans [Simitsev, 2001, Dormegnien et al., 2003], permettent de réduire les coûts expérimentaux. Il s'agit ici de proposer des empilements de plis équivalents à ceux de l'échelle 1. Il faut, pour cela, choisir un critère d'équivalence, comme la proportionnalité de l'énergie dissipée ou de la courbe de réponse globale de la structure. Les mécanismes fins menant à la rupture ne seront donc pas nécessairement les mêmes que ceux mis en jeu à l'échelle 1.

1.1.2.2 Grandeurs étudiées

Les intérêts de ces essais sont multiples : d'une part, ils servent à accroître la compréhension du scénario de ruine, mettant en jeu l'interaction matériau-structure, d'autre part,

ils permettent d'étudier l'influence des différents paramètres sur ce scénario, [Mamalis et al., 1997].

Les grandeurs étudiées pour caractériser l'efficacité de ces structures sont principalement des grandeurs globales de la réponse au choc :

1. L'énergie spécifique :

Il s'agit de l'énergie dissipée par unité de masse. [Schmueser et Wickliffe, 1987] montrent que les tubes composites possèdent de meilleures réponses que les tubes métalliques, notamment les tubes à base de plis à fibres de carbone. De plus, l'énergie spécifique sur un essai dynamique est supérieure à celle de la même structure en statique, du fait notamment des effets d'inertie.

2. La courbe de réponse globale au choc :

Elle représente la force mesurée lors de l'essai en fonction de l'écrasement de la structure. Le scénario de rupture stable comporte trois phases, (figure 1.4), une première d'initiation, où l'effort maximum est atteint et déclenche la rupture, souvent à l'aide d'initiateurs de rupture, une seconde de propagation stable de la ruine au cours de laquelle l'ensemble de la structure dissipe l'énergie au fur et à mesure jusqu'à atteindre la rupture finale. Le caractère progressif de la ruine est mis en évidence par l'évolution de la force d'écrasement, qui peut être caractérisée par son efficacité, définie comme le rapport entre l'amplitude des oscillations autour de sa valeur moyenne et cette valeur moyenne. Ceci montre que la ruine correspond à une succession d'instabilités.

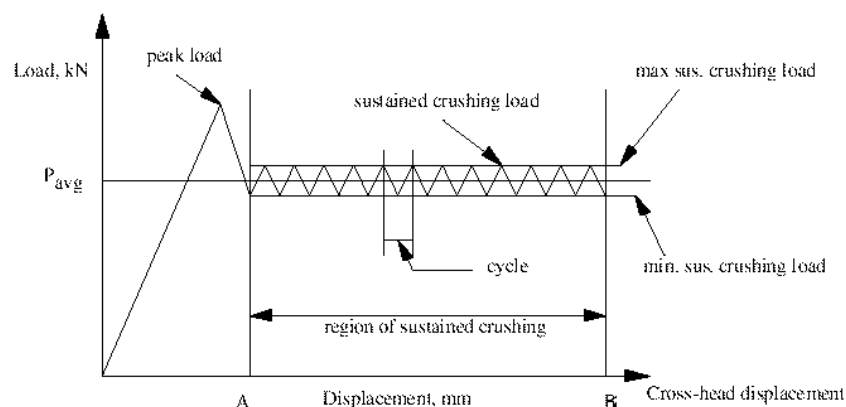


Figure 1.4 – Courbe de réponse globale schématique

3. La description qualitative du scénario de rupture :

Grâce aux études sur les tubes composites, il a été possible de dégager des tendances et de définir les modes de ruine principaux, comme cela est présenté dans [Farley et Jones, 1992]. Farley sépare les scénarios en trois groupes, selon que la ruine est plutôt gouvernée par :

- le cisaillement transverse, donnant lieu à de la fragmentation et qui se retrouve notamment dans les tubes formés de plis à 90° avec des fibres fragiles. La dissipation se fait par rupture des plis et principalement des fibres ;

- l'effeuillage des plis, où une fissuration parallèle aux fibres se propage et où les fibres cassent assez peu. Dans ce cas, la friction entre les plis joue un rôle important dans la dissipation ;
- le flambage local, qui induit du délaminage, et que l'on retrouve pour les tubes possédant des fibres ductiles, comme c'est le cas des fibres aramide.

D'autres modes de ruine sont possibles, qui peuvent être vus comme la superposition de ces modes fondamentaux. Pour ces différents scénarios, les plis carbone, qui possèdent une énergie spécifique élevée dans le cas d'un scénario favorable, sont d'avantage sensibles aux instabilités globales rendant inefficace la structure. De plus, des études comme [Thornton et Edwards, 1982, Wolff, 1991] s'intéressent aux effets de la géométrie des tubes (section circulaire, rectangulaire ou carrée), des séquences d'empilement, ou encore du nombre de plis. Dans [Thornton et Edwards, 1982], les auteurs discutent de la stabilité de la ruine en fonction de ces critères dans le cas statique. Ils mettent notamment en évidence l'apparition de phénomènes de flambage pour les tubes à fibre aramide, conduisant à une rupture prématurée du tube. Ces phénomènes se retrouvent en dynamique, cependant l'effet stabilisant de la sollicitation dynamique peut permettre du micro-flambage et non une rupture catastrophique de la structure.

[Schmueser et Wickliffe, 1987] ont mis en avant les différences de scénario de ruine selon le matériau, en particulier en expliquant que les plis à fibres de Kevlar étaient favorables au micro-flambage, alors que les plis à fibres de carbone consommaient l'énergie par rupture de fibres. Dans le cas de la poutre en composite multicouche étudiée, ce contraste de comportement est utilisé de façon à ce que les plis de Kevlar aient un effet stabilisateur sur la structure. [McCarthy et Wiggenraad, 2001] synthétisent le scénario attendu pour ce type de structure :

- effeuillage ;
- micro-flambage des plis à fibres de Kevlar (stabilisant la structure) ;
- fragmentation des plis carbone, à 0° principalement.

1.1.3 Modélisation et essais matériau

À une échelle inférieure à celle de la structure et du scénario de ruine global, un grand nombre d'études s'intéresse à la description et à la modélisation du comportement matériau, pour l'application au crash. Les points généraux qui sont étudiés et qui peuvent servir à nourrir des modèles fins pour la simulation peuvent être schématiquement classés comme suit :

1. modèle statique, nature du comportement ;
2. effet de vitesse pré-pic ;
3. phénomènes de localisation et comportement post-pic ;
4. fragmentation.

Pour chaque point, nous allons essayer de présenter les caractéristiques du comportement, sa modélisation et sa prise en compte numérique, ainsi que les essais disponibles pour leur étude.

1.1.3.1 Modèle statique

L'étude du comportement des composites en statique a donné lieu à de nombreux travaux depuis une trentaine d'années. C'est donc un domaine très avancé, tant au niveau expérimental qu'au niveau des modèles.

Expérimentalement, les phénomènes qui entrent en jeu lors de la sollicitation de structures composites ont été mis en évidence. Les phénomènes irréversibles, responsables de la dissipation, sont principalement :

- la fissuration matricielle, diffuse ou non ;
- la décohésion fibre matrice ;
- la rupture des fibres ;
- le délaminage entre des plis adjacents.

Ces points ont pu être mis en évidence grâce à des observations expérimentales au cours ou à l'issue d'essais matériau, comme des essais de traction-compression ou des essais DCB. Ces observations sont obtenues à partir de mesures de jauge de déformation ou cellule d'effort pour le comportement homogénéisé, et de mesures plus fines à l'échelle micro, pouvant être des mesures optiques, accessoirement au microscope électronique à balayage, ou encore par des techniques ultrason ou rayon X également utilisées en contrôle non destructif.

Cela se traduit par une réponse homogénéisée non linéaire. Pour la modéliser, l'utilisation de modèles macro s'avère insuffisante si l'on veut décrire avec suffisamment de finesse les phénomènes. Il faut donc se placer à une échelle inférieure où plusieurs approches sont envisageables, selon le choix de l'échelle de description :

1. approche micro et micro-macro : de nombreuses études se basent sur les phénomènes micro pour décrire le comportement des composites. Ces modèles, repris dans [Nairn et Hu, 1994], proposent alors des champs de contraintes micro et décrivent l'évolution de la microfissuration, en se basant sur la mécanique de la rupture. Ils permettent alors de remonter aux échelles supérieures par homogénéisation, comme [Hashin, 1987, Perreux et Oytana, 1993] ;
2. les modèles bi-phase [Pickett et al., 1990, Coutellier et al., 1998], pour lesquels le comportement du pli est vu comme la superposition du comportement des fibres et de la matrice, décrits séparément. Ce type de modèle demande un nombre relativement important de paramètres, même si des démarches simplifiées d'identification ont été proposées [Coutellier et al., 1998]. Ces modèles statiques ont notamment été utilisés dans le cadre de la simulation du crash, voir [Johnson et A.K. Pickett, 2001] ;
3. la mésomodélisation des stratifiés sur laquelle la partie 1.2 reviendra et qui a été développée par Ladevèze, [Ladevèze, 1986, Ladevèze, 1992]. Le choix de l'échelle est celle du pli élémentaire, dans lequel les mécanismes irréversibles sont modélisés par un endommagement constant dans l'épaisseur. Dans cette approche, le délaminage est pris en compte par l'introduction d'une interface interlaminaire, constituant une entité mécanique à part entière. Des études récentes permettent de baser les comportements méso sur les phénomènes micro et de renforcer ainsi les fondements du modèle, [Ladevèze et Lubineau, 2003].

De ces différents modèles, il semble que la tendance actuelle soit à l'emploi des mésomodèles de stratifiés, dont l'usage se retrouve dans un grand nombre d'études [Phil-

lips et al., 2001, Remmers et de Borst, 2001, Johnson et A.K. Pickett, 2001]. Cela s'explique par le fait que les approches micro restent encore trop coûteuses à utiliser numériquement, tandis que les modèles bi-phase possèdent un grand nombre de paramètres, délicat à identifier. De plus, les mésomodèles offrent la possibilité de prendre en compte le délaminage.

1.1.3.2 Effets de vitesse pré-pic

Une fois le comportement statique décrit, il reste à savoir s'il est modifié par des effets de vitesse, pour des sollicitations dynamiques. Ces effets peuvent être séparés en deux groupes :

- les effets de vitesse liés à la viscosité des constituants, pour des taux de déformation faibles, typiques de ceux rencontrés dans le cas du crash ;
- les effets de vitesse liés à la rupture, qui apparaissent pour des taux de déformation beaucoup plus importants.

Ce deuxième type d'effets de vitesse ne jouera pas de rôle dans la phase pré-pic, où les taux de déformation sont guidés par ceux de la sollicitation. Ils devront être pris en compte lors de la description de la phase post-pic. Cette partie n'en traite donc pas.

Dans la gamme de sollicitations typique du crash, le taux de déformation est considéré comme intermédiaire, de l'ordre de $10^2 s^{-1}$. Un grand nombre d'études s'est intéressé aux effets de vitesse dans cette gamme de sollicitations, ce qui a permis de développer des essais spécifiques à cette caractérisation. Ce sont des essais délicats, demandant des moyens d'acquisition spécifiques.

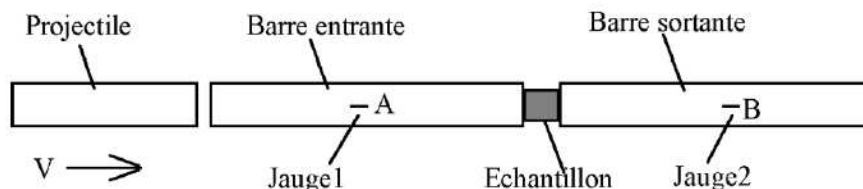


Figure 1.5 – Schéma du montage aux barres d'Hopkinson, d'après [Gary et Zhao, 2000]

Dans ces essais, on retrouve les essais aux barres d'Hopkinson (Split Hopkinson Pressure Bar, *SHPB*), qui sont devenus des essais répandus, notamment pour la compression dynamique, et dont les grands principes et quelques applications sont repris dans [Gary et Zhao, 2000] ; ils ont été appliqués aux composites à fibre de carbone notamment dans [Harding, 1993, Zhao et Gary, 1997, Tsai et Sun, 2002]. Le principe de ces essais est de solliciter l'éprouvette par une onde de choc générée par un impacteur, figure 1.5, les mesures se font alors à l'aide des barres d'entrée et de sortie, dans lesquelles, en considérant le jeu des trajets des ondes, il est possible de remonter à l'état de contrainte et de vitesse sur la frontière de l'éprouvette. Une hypothèse souvent acceptée est de considérer l'éprouvette à l'équilibre, ce qui permet d'obtenir les courbes matériau directement à partir des mesures. Si ce n'est pas le cas, une approche inverse est nécessaire et possible [Rota, 1994]. L'avantage majeur de ce type d'essai réside dans la propreté et la relative richesse des mesures. En revanche, la sollicitation est passive et dépend de la réponse de

l'éprouvette au train d'onde de sollicitation. Il est donc délicat d'imposer, dans ce type d'essai, une vitesse de déformation constante. L'essai dynamique simple sur ce type de machine est l'essai de compression, mais des adaptations de ce montage ont été proposées pour tester les éprouvettes en traction ou en cisaillement.

Dans le cas des composites testés en compression, les essais aux barres d'Hopkinson posent un certain nombre de difficultés, du fait des dimensions mêmes de l'éprouvette. En effet, les barres possèdent une section circulaire qui est bien plus importante que celle rectangulaire de l'empilement de plis qui est testé ; typiquement, le diamètre des barres fera 20 mm , tandis que le stratifié aura une section de $20 \times 2\text{ mm}^2$. Ainsi, un grand rapport d'impédance mécanique existe entre les barres et l'éprouvette, ce qui rend le chargement sévère. De plus, comme l'a montré l'étude [Thévenet, 2003], menée sur l'expertise numérique d'un essai type *SHPB*, la transmission des efforts à l'éprouvette via les systèmes d'attache est difficilement modélisable. Il s'avère donc difficile de remonter à ce que voit l'éprouvette à partir des mesures sur les barres. Dès lors, le dépouillement propre de l'essai demande sans doute un passage par un calcul complexe de l'ensemble du moyen d'essai, ce qui retire l'intérêt d'un essai au départ matériau.

Un autre moyen d'essai utilisé est la machine de traction dynamique à vérin hydraulique [Wolff, 1991, Pardo et al., 2000]. Du fait de la mise en charge, il est possible de solliciter l'éprouvette à taux de déformation moyen constant. Les mesures se font en général à l'aide de jauges collées sur l'éprouvette pour les déformations (ou par extensométrie laser), et à l'aide d'une cellule d'effort permettant de remonter aux contraintes. Les mesures sont donc a priori moins fines que pour un essai de type *SHPB*, et l'hypothèse d'homogénéité doit être faite pour dépouiller les essais. Cela demande un travail préalable de dimensionnement des éprouvettes par le calcul pour valider cette homogénéité de l'essai, [Pardo et al., 2002], sans laquelle les courbes obtenues ne sont pas des courbes matériau. Remarquons toutefois que ce montage est en général dédié à des taux de déformation inférieurs à ceux caractéristiques des essais *SHPB*, ainsi l'homogénéité peut s'obtenir plus facilement. D'autres montages peuvent être adaptés sur ce type de machine, comme des essais de flexion trois points [Behler et al., 1990], ou des montages de type *DCB* (Double Cantilever Beam), pouvant servir à caractériser le délaminage.

Des mesures optiques sont également possibles mais demandent l'emploi d'une caméra rapide, encore assez coûteuse. Cependant, elles permettent l'obtention de champs de déformation par corrélation d'images.

Ces essais permettent une observation des phénomènes micro mis en jeu. Une question importante est de savoir si les phénomènes sont changés par rapport au cas statique. Si les mécanismes sont globalement les mêmes, il semble que leur importance respective peut changer [Hug et al., 2003]. Ceci se répercute notamment sur le pas de fissuration. Une manière d'étudier cet état micro est d'utiliser des essais interrompus, comme cela est fait au *LM3* de l'*ENSAM-Paris*, [Pardo et al., 2002]. Ces essais permettent d'étudier des éprouvettes endommagées mais non rompues, ce qui est un point délicat en dynamique. L'idée est de placer en série avec l'éprouvette un fusible mécanique qui rompt à un effort donné et ainsi interrompt le chargement.

Des observations sont également menées sur la réponse globale du matériau, à l'aide de la courbe contrainte-déformation, notamment sur la raideur initiale, la contrainte maximale atteinte ou encore la déformation à rupture. L'effet du taux de déformation sur ces différentes quantités va dépendre des propriétés de la matrice, qui est visqueuse, ainsi

que des fibres dans le cas des fibres de Kevlar ou de verre. En revanche, de possibles effets de structures et d'inertie peuvent entrer en jeu dans ces essais, il est alors nécessaire de les prendre en compte avant de déduire des mesures les effets de vitesse proprement matériaux.

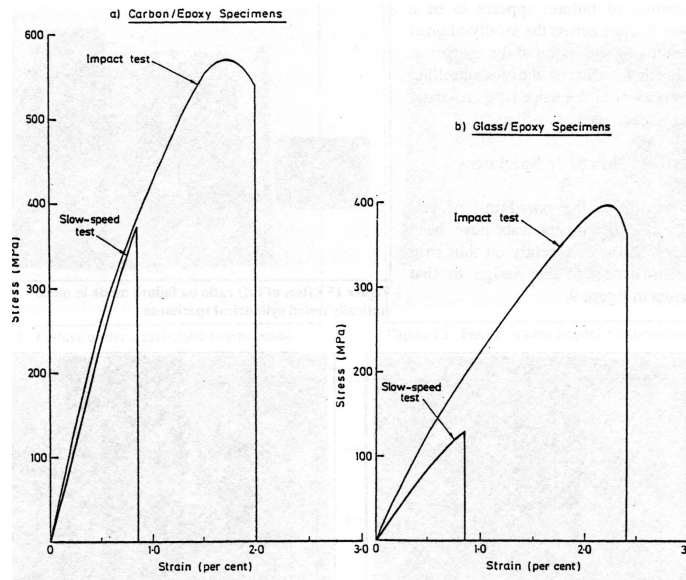


Figure 1.6 – *Effet de vitesse sur composite, d'après [Harding, 1996]*

D'après Harding, [Harding et Li, 1992, Harding, 1996], les effets de vitesse sont assez faibles dans le cas des composites à fibres de carbone, pour les gammes de sollicitations envisagées. La figure 1.6 montre qu'en effet la viscosité est faible et n'induit pas d'augmentation de la raideur initiale entre le statique et le dynamique. En revanche, il semble qu'il y ait une répercussion sur la contrainte et la déformation à rupture. Celle-ci s'explique peut-être par des effets de structure qui retardent la ruine en dynamique. Les changements apparents micro n'ont donc pas l'air d'avoir une répercussion majeure sur le comportement macro. D'autres études comme [Nemes et Randles, 1994] présentent au contraire des effets de vitesse non négligeables pour les plis carbone. Ces conclusions qui semblent contradictoires dépendent, sans doute pour une bonne part, des moyens d'essai utilisés. L'étude des effets de vitesse pour les composites restent donc une question ouverte. Ceci étant, les effets de vitesse sont d'avantage marqués sur les plis à base de fibre de verre ou aramide [Harding, 1993, Pardo et al., 2002] et sont donc mis en évidence plus facilement, du moins qualitativement.

Ces tendances ayant été mises en avant, un certain nombre de modèles, ayant pour but d'être utilisés dans des simulations dynamiques, permettent d'en rendre compte, par l'extension des modèles statiques :

- les modèles dont le but est de rendre compte uniquement de la courbe enveloppe du comportement. Ainsi, un modèle de plasticité de type Johnson-Cook peut être utilisé pour décrire la non-linéarité du comportement ainsi que les effets de vitesse. Un défaut majeur de ce choix, parfois guidé par l'absence d'alternative dans les codes de calcul, est que la dissipation du modèle n'est pas représentative de celle du comportement réel ;

- la prise en compte des effets de vitesse dans les modèles bi-phase ou les mésomodèles a notamment été effectuée dans [Rozycki et Coutellier, 2001, Johnson et A.K. Pickett, 2001]. L'approche, issue des modèles de fluide visqueux, consiste à introduire une fonction de viscosité, dépendant de la vitesse de sollicitation, qui vient modifier les lois d'état et d'évolution du modèle statique.

1.1.3.3 Phénomènes de localisation et comportement post-pic

Les modèles précédents permettent de décrire la dissipation survenant lors de la phase pré-pic du comportement en prenant en compte de possibles effets de vitesse. Cependant, les absorbeurs de choc en composite sont sollicités jusqu'à leur ruine ultime et de plus, la ruine se propage petit à petit dans la structure si le scénario est stable. La simulation de la réponse de ce type de structure demande donc de pouvoir rendre compte du comportement jusqu'à rupture. Or, selon le choix du comportement post-pic, schématiquement représenté figure 1.7, la dissipation et la redistribution des efforts ne sera pas la même. Il est donc important de pouvoir caractériser cette phase du comportement qui semble jouer un rôle prépondérant dans la dissipation.

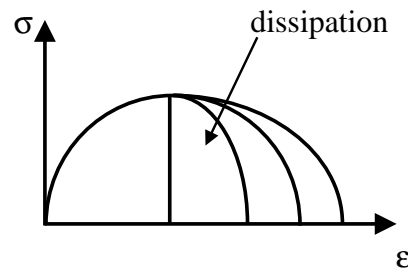


Figure 1.7 – Différentes phases post-pic possibles

Cependant la description du comportement post-pic des composites demeure délicate puisque la rupture entraîne des phénomènes de localisation des déformations et de l'endommagement. Cela signifie qu'après avoir atteint le pic du comportement, les déformations se concentrent dans une bande de faible épaisseur, entraînant la ruine locale, tandis que le reste de la structure a tendance à se décharger. D'un point de vue expérimental, cela correspond à la rupture brutale de l'éprouvette. Ceci signifie notamment que la localisation est un phénomène intrinsèquement dynamique et instable, intervenant sur des temps très courts.

Du point de vue des modèles continus classiques, c'est-à-dire locaux et indépendants du temps, la localisation est caractérisée par des problèmes de bifurcation, c'est-à-dire de perte d'unicité de la solution. Les modèles continus standards permettent de détecter la localisation à partir de critères de bifurcation [Hill, 1962, Benallal et al., 1991]. Pour aller plus loin dans la description du comportement, comme c'est le cas ici, il faut ajouter des ingrédients supplémentaires au modèle, qui reviennent finalement à introduire une longueur caractéristique de localisation.

D'un point de vue numérique, cette perte d'unicité de la solution se traduit par une dépendance de la solution au maillage, dans le cas de simulation jusqu'à rupture employant des modèles continus classiques. Cela signifie que le choix de la solution dépendra du défaut numérique et que la localisation se concentrera dans une zone de largeur de la

taille des éléments. Ainsi, plus la maille sera petite, plus l'énergie dissipée sera faible.

Pour résoudre ce problème, il faut donc intervenir sur le modèle, en introduisant une longueur caractéristique de localisation, soit au niveau du modèle continu, soit au niveau du modèle numérique. Plusieurs démarches sont alors possibles pour régulariser le problème :

1. Modèles à conservation d'énergie : [Bažant et Oh, 1983, Hillerborg et al., 1976]
Cette méthode utilise une dissipation qui dépend de la taille de l'élément dans lequel la localisation a lieu. Ainsi, l'énergie redevient indépendante de la finesse du maillage. Elle agit donc au niveau du modèle numérique et possède des inconvénients de ce fait. Il n'y a pas de réelle justification physique des paramètres, et cette méthode ne fait plus aujourd'hui l'objet de recherches.
2. Modèles non-locaux : [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987]
Les lois d'évolution ne sont plus données uniquement par les variables internes en chaque point, mais dépendent des variables internes dans un voisinage du point. C'est la taille du voisinage qui introduit la longueur caractéristique, nécessaire pour la régularisation, et elle est justifiée par des considérations sur la microstructure. D'un point de vue numérique, il faudra donc prendre en compte plusieurs éléments pour définir les variables en chaque point d'intégration. Une difficulté soulevée par l'emploi de ces modèles concerne les conditions aux limites qui, sans aménagement particulier, comprennent une partie liée aux variables internes.
3. Modèles à gradient : [Lasry et Belytschko, 1988, de Borst et Muhlhaus, 1992]
Il s'agit d'enrichir le modèle continu en faisant intervenir des termes dérivés d'ordre supérieur, soit au niveau des déformations, soit au niveau des variables internes. L'utilisation d'un gradient d'ordre supérieur implique l'introduction d'une longueur caractéristique et de lois de comportement supplémentaires, rendant plus difficile la mise en œuvre ; cela explique que cette approche soit peu utilisée au niveau industriel. De plus, on retrouve les problèmes au bord de la structure, pour la prise en compte des conditions aux limites.
4. Modèles à discontinuité : [Oliver, 1995, Oliver et al., 1999, Jirásek, 2000]
La cinématique du modèle continu est enrichie de façon à introduire des champs de déplacement ou de déformation discontinus. Ainsi, la localisation peut se faire sur des bandes d'épaisseur nulle, et la dépendance au maillage est donc perdue. Ces modèles sont actuellement très étudiés et de plus en plus utilisés pour gérer les problèmes de rupture.
5. Modèles à viscosité : [Needleman, 1988, Sluys, 1992]
Un effet de vitesse est introduit dans les lois d'évolution. Celui-ci, combiné à la propagation des ondes, introduit une longueur caractéristique. Si l'effet de vitesse n'est pas borné, la régularisation du problème n'intervient que pour une gamme de vitesse de déformation.
6. Modèles à effet retard : [Ladevèze, 1991, Allix et Deü, 1997]
Ce modèle fait partie de la famille des modèles à effet de vitesse. Il consiste à introduire une viscosité dans les lois d'évolution de l'endommagement. De plus, une vitesse maximale d'endommagement est introduite, elle permet de régulariser complètement le problème. On retrouve ici l'idée que la propagation de fissure n'est pas un phénomène instantané, mais possède un temps caractéristique qui lui est propre.

Les modèles à viscosité semblent les modèles les plus naturels pour régulariser les problèmes en dynamique. De plus, ils ne nécessitent aucune intervention en profondeur pour leur implantation dans un code de calcul, puisqu'il n'agit que sur la relation de comportement. S'ils sont pertinents, leur utilisation est donc très intéressante dans le cadre de la rupture dynamique des composites.

L'ensemble de ces modèles introduisent de nouveaux paramètres permettant de gérer la taille de localisation. Cependant leur interprétation physique n'est pas nécessairement évidente. Le problème de leur identification reste très largement ouvert.

1.1.3.4 Fragmentation

Une fois la phase post-pic convenablement décrite, il reste à rendre compte de ce qu'il se passe après. Or, lors de l'écrasement d'un absorbeur de choc en composite, une part non négligeable de la dissipation a lieu par frottement entre plis délaminés ou avec les fragments des plis rompus. Cependant, la description de ces phénomènes reste un problème numériquement très délicat. En effet, une approche Éléments Finis simple n'est pas adaptée à la fragmentation, puisque cette dernière demande de pouvoir séparer le maillage en sous-entités. Une première façon de prendre ces phénomènes en compte de façon globale est de conserver un plateau à contrainte non nulle au-delà de la phase post-pic, comme cela est fait dans [McCarthy et Wiggenraad, 2001]. Cette méthode permet de retrouver une dissipation équivalente, mais sa description reste très globale.

Parmi les pistes envisageables pour obtenir une description plus fine, on peut citer les travaux de Hild, qui proposent des critères de fragmentation à partir de modèles continus, [Hild et al., 2003]. Il est alors possible d'introduire des interfaces permettant de gérer la séparation du maillage, comme dans [Espinosa et al., 1998]. On peut enfin imaginer de coupler une approche continue avec une approche discrète ou encore sans maillage pour la description de la rupture, la transition de l'une à l'autre restant à définir. Cependant ces questions restent encore largement ouvertes et dépassent le cadre de cette étude.

1.1.4 Simulation

Le paragraphe précédent a permis de mettre en avant les points qui semblent essentiels pour un modèle matériau, en vue de simuler le comportement au crash d'une structure en composite. Il en résulte que le comportement à utiliser est fortement non-linéaire. Actuellement, tous les points évoqués ne sont pas encore intégrés dans les codes commerciaux dédiés au crash. Plusieurs études ont toutefois permis l'implantation des modèles bi-phases ainsi que des mésomodèles avec effets de vitesse pré-pics dans ces codes, [Rozyczki et Coutellier, 2001, Johnson et A.K. Pickett, 2001, McCarthy et Wiggenraad, 2001].

De tels codes, comme *Radioss*, *PAM-Crash* ou encore *LS-dyna*, utilisent un schéma d'intégration temporelle explicite. En effet, ce type de schéma est particulièrement adapté à la simulation dynamique prenant en compte des non-linéarités géométriques et matériau. L'avantage majeur est l'absence d'assemblage et d'inversion de la matrice de rigidité globale de la structure étudiée, permettant des gains de temps de calcul importants. La contrepartie est la nécessité d'un pas de temps petit, lié à la stabilité conditionnelle du schéma temporel utilisé (condition de Courant). Ceci n'est pas un réel handicap, dans la mesure où les temps caractéristiques du chargement sont du même ordre.

Parmi les études numériques des absorbeurs de choc, [McCarthy et Wiggenraad, 2001]

comparent un essai mené sur une éprouvette structurelle et deux versions de la simulation correspondante, l'une avant l'essai et l'autre en modifiant les paramètres du calcul pour une meilleure corrélation essai-calcul. Le modèle utilisé est le modèle biphasé implanté dans un élément coque multicouche, sans introduire de délaminage. De plus, le modèle possède un plateau après la phase post-pic pour représenter les frottements entre les plis fragmentés. Parmi les corrections nécessaires pour que le calcul représente mieux les essais, les conditions aux limites du calcul ont dû être redéfinies, ce qui met en avant les difficultés à définir les conditions aux limites du calcul *a priori*.

Finalement, les simulations ne sont pas prédictives même si elles permettent de retrouver les réponses globales, une fois celles-ci connues. Elles peuvent être utilisées pour étudier l'influence des paramètres afin d'obtenir des tendances. Cependant, il est difficile de se baser sur elles pour une étude quantitative, ce qui est dû, tout d'abord, à l'utilisation de codes de dynamique explicite qui ne possèdent pas d'estimateur d'erreur et dont il est difficile d'estimer la qualité. D'autre part, les mécanismes mis en jeu expérimentalement sont assez fins et instables, donc très sensibles aux détails de structure et de chargement.

Il apparaît donc qu'il reste de nombreux problèmes à résoudre avant d'aboutir à des simulations réellement représentatives des phénomènes mis en jeu lors du crash des structures composites.

1.2 Méso-modèle de stratifié à endommagement retardé

Jusqu'ici, ce chapitre a présenté la problématique générale des simulations des absorbeurs de choc en composite. Ces simulations posent encore un grand nombre de difficultés et les différents points qui nous semblent nécessaires aux modèles ont été présentés. Il ressort notamment le besoin d'une description suffisamment fine, permettant d'obtenir une dissipation pertinente. La fin de ce chapitre s'attarde plus précisément sur les méso-modèles de stratifié qui ont déjà été introduits au 1.1.3.1. Ces modèles qui sont développés depuis une dizaine d'années présentent un certain nombre d'atouts, ce qui explique leur emploi par de nombreuses équipes, par exemple [Phillips et al., 2001, Remmers et de Borst, 2001, Johnson et A.K. Pickett, 2001]. Le premier est qu'ils permettent d'obtenir des simulations statiques pertinentes, permettant la prédiction des dommages dans des cas raisonnablement complexes, [Allix et al., 2000]. Le second est que leur est associée une démarche d'identification bien établie, pour leur partie statique, à partir d'essais simples.

Le choix du méso-modèle est de se placer à l'échelle du pli, ce qui permet une description suffisamment fine tout en restant compatible avec le calcul de structure. Le modèle présenté ci-dessous prend en compte le comportement statique du stratifié ainsi que les effets de vitesse liés à la rupture, c'est-à-dire qu'il permet de décrire la phase post-pic du comportement de manière objective. En revanche, une possible prise en compte des effets de vitesse pré-pics n'est pas présentée, ceux-ci ne semblant pas majeurs dans le cas des plis à fibre de carbone. Une telle prise en compte, comme cela a été fait dans [Coutellier et Rozycki, 2000], ne pose pas de problème théorique.

1.2.1 Modélisation du comportement statique

La description des stratifiés par les mésomodèles a fait l'objet de nombreuses études [Ladevèze, 1986, Ladevèze, 1992, Allix et al., 2000].

Le choix du mésomodèle est de se placer à l'échelle du pli, dite également échelle méso à laquelle les mécanismes micro de dégradation du composite sont pris en compte par l'introduction de variables d'endommagement. Tout stratifié sera alors modélisé comme un empilement de plis élémentaires et d'interfaces, ces derniers permettant de décrire le délaminage, comme cela est schématisé figure 1.8.

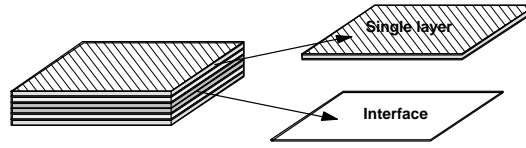


Figure 1.8 – Méso-constituants du composite stratifié

Des études récentes au *LMT-Cachan*, [Ladevèze et Lubineau, 2003], permettent de créer un pont entre les modèles méso et les phénomènes micro.

1.2.1.1 Modèle du pli élémentaire

Chaque pli élémentaire est supposé homogène dans l'épaisseur, et son comportement est décrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. L'état du pli sera donc décrit à l'aide d'un certain nombre de variables internes ou d'état. Typiquement, pour un pli élastique endommageable, l'état est décrit par la déformation ε , par sa variable duale, la contrainte σ , ainsi que par les variables d'endommagement d_i , dont le nombre dépend de la complexité du comportement, et par leur variable duale, les forces thermodynamiques associées Y_i . Il reste alors à définir les relations reliant ces différentes variables. C'est ce qui est fait au travers des lois d'état et d'évolution :

- les lois d'état sont définies à partir du potentiel d'état, qui définit également l'énergie libre :

$$\Psi(\sigma, \{d_i\}), \quad \{d_i\} \text{ étant le vecteur des variables d'endommagement} \quad (1.1)$$

et du potentiel dual défini comme la transformée de Legendre-Fenchel du potentiel d'état :

$$\Psi^*(\varepsilon, \{Y_i\}) = \sup_{\sigma, \{d_i\}} \{ \sigma \cdot \varepsilon + \{d_i\} \cdot \{Y_i\} - \Psi(\sigma, \{d_i\}) \} \quad (1.2)$$

Elles sont alors données par :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(\sigma, \{d_i\}) \\ \{Y_i\} = \frac{\partial \Psi}{\partial \{d_i\}}(\sigma, \{d_i\}) \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \{Y_i\}) \\ \{d_i\} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \{Y_i\}}(\varepsilon, \{Y_i\}) \end{cases} \quad (1.3)$$

- les lois d'évolution sont définies à partir du potentiel de dissipation :

$$\varphi(\{\dot{d}_i\}; \{d_i\}) \quad (1.4)$$

et du potentiel dual défini comme la transformée de Legendre-Fenchel du potentiel d'évolution :

$$\varphi^*(\{Y_i\}; \{d_i\}) = \sup_{\{\dot{d}_i\}} \{ \{\dot{d}_i\} \cdot \{Y_i\} - \varphi(\{\dot{d}_i\}; \{d_i\}) \} \quad (1.5)$$

Les lois d'évolution sont alors données par :

$$\{\dot{d}_i\} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \{Y_i\}}(\{Y_i\}; \{d_i\}) \quad (1.6)$$

Remarque :

On peut noter que la dualité des potentiels de dissipation n'est pas complète du fait de la présence de la variable d comme paramètre de φ et de φ^* . Ceci peut être corrigé en introduisant une variable d'écroutissage supplémentaire comme cela a été fait dans [Douchin, 2000].

La dissipation est alors donnée par :

$$D = \{Y_i\} \cdot \{\dot{d}_i\} \quad (1.7)$$

Ce formalisme général peut s'appliquer au cas des plis unidimensionnels [Ladevèze, 1992], ou des plis tissés [Hochard et al., 2001]. Dans le cas des plis unidirectionnels, les directions 1, 2 et 3 sont définies respectivement comme la direction des fibres, la direction transverse et la direction hors-plan. Des études précédentes ont permis de mettre en avant les points suivants dans la mésomodélisation :

- le comportement diffère en traction et en compression ;
- le rapport $\frac{\nu_{12}}{E_1}$ est quasi-constant ;
- le comportement du pli est identifié sous l'hypothèse des contraintes planes. Le comportement hors plan du pli peut être pris en compte par l'extension tridimensionnelle des lois d'évolution, permettant la prédiction de dommages complexes [Allix et al., 2000].

Ces considérations permettent d'exprimer l'énergie libre comme :

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0 (1-d_1)} + \frac{\phi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+)}{E_1^0} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0 (1-d_2)} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} \right. \\ \left. + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0 (1-d_2)} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} - 2 \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} \sigma_{11} \sigma_{22} - 2 \frac{\nu_{13}^0}{E_1^0} \sigma_{11} \sigma_{33} \right. \\ \left. - 2 \frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0 (1-d_{12})} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0 (1-d_{12})} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0} \right] \quad (1.8) \end{aligned}$$

où :

- d_1 est associé à la rupture de fibres et aux fissurations perpendiculaires aux fibres ;

- d_2 est associé à la fissuration transverse et d_{12} aux dégradations liées au cisaillement, dégradations diffuses des liaisons fibre-matrice ;
- $\langle x \rangle_+$ est la partie positive de x et permet de tenir compte du caractère unilatéral du comportement ;
- ϕ permet de prendre en compte les non-linéarités du comportement des fibres en compression.

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement sont alors :

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial d_1} \Big|_{\sigma} = \frac{\langle \langle \sigma_{11} \rangle_+^2 \rangle}{2E_1^0 (1-d_1)^2} \\ Y_2 = \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial d_2} \Big|_{\sigma} = \frac{\langle \langle \sigma_{22} \rangle_+^2 \rangle}{2E_2^0 (1-d_2)^2} \\ Y_{12} = \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial d_{12}} \Big|_{\sigma} = \frac{\langle \langle \sigma_{12}^2 \rangle \rangle}{2G_{12}^0 (1-d_{12})^2} \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\langle x \rangle$ désigne la valeur moyenne de x dans l'épaisseur d'un pli.

Les lois d'endommagement sont de la forme :

$$\begin{cases} d_1 = f_1(\sqrt{Y_1}) & \text{si } d_1 < 1, \quad d_1 = 1 \text{ sinon} \\ d_2 = f_2(\sqrt{Y_{12} + bY_2}) & \text{si } d_2 < 1, \quad d_2 = 1 \text{ sinon} \\ d_{12} = f_{12}(\sqrt{Y_{12} + bY_2}) & \text{si } d_{12} < 1, \quad d_{12} = 1 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{où } \underline{Y}_i|_t = \sup_{\tau \leq t} Y_i|_{\tau} \quad (1.10)$$

Les fonctions f_i sont identifiées à partir d'essais quasi-statiques avec décharge. Un choix usuel et assez simple est de prendre des fonctions du type :

$$f(\sqrt{Y}) = \left\langle \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right\rangle_+ \quad (1.11)$$

ce qui permet d'introduire un seuil Y_0 , lié à un état initial endommagé, et une force thermodynamique critique Y_c correspondant à la valeur à rupture.

Les lois d'évolution introduites ici présentent un couplage entre les variables d'endommagement de cisaillement et d'endommagement transverse. Ceci s'explique par le fait que le même réseau de fissures intervient dans les deux types d'endommagement.

Le modèle est présenté ici dans le cas d'un comportement élastique endommageable, mais il peut être complété afin de prendre en compte les déformations anélastiques par des variables de type déformation plastique, même si les phénomènes ne sont pas à proprement parler des phénomènes de plasticité.

Enfin, l'identification du mésomodèle se fait à partir de peu d'essais pré-définis de traction ou compression sur des éprouvettes avec des plis d'orientation variée.

1.2.1.2 Modèle de l'interface

Un modèle de la même nature que celui du pli est utilisé pour décrire le comportement de l'interface interlaminaire, [Allix et Ladevèze, 1992]. Ce comportement relie la

contrainte normale au saut de déplacement et permet de rendre compte du délaminage via des variables d'endommagement. En absence d'endommagement, l'interface assure donc la continuité des déplacements. On définit ses directions d'orthotropie, notées N_1 et N_2 , comme les bissectrices des directions des fibres des plis adjacents. La direction N_3 est alors la troisième direction de l'espace, normale aux plis, son orientation définit le pli supérieur indicé '+' et le pli inférieur indicé '-', comme la figure 1.9 l'illustre.

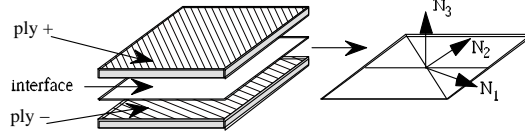


Figure 1.9 – Directions d'orthotropie de l'interface interlaminaire

Le saut de déplacement est défini comme :

$$[[U]] = \underline{U}^+ - \underline{U}^- = [[U_1]]N_1 + [[U_2]]N_2 + [[U_3]]N_3 \quad (1.12)$$

L'interface possède alors la relation de comportement suivante :

$$\sigma \cdot N_3 = K \cdot [[U]] \quad \text{où} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$\Psi(\sigma \cdot N_3, \{d_i\}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0 (1 - d_3)} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{k_1^0 (1 - d_{13})} + \frac{\sigma_{23}^2}{k_2^0 (1 - d_{23})} \right] \quad (1.14)$$

où ont été introduites trois variables d'endommagement associées aux trois modes d'ouverture de fissure selon les directions principales de l'interface. De plus, le caractère unilatéral du mode I est pris en compte par l'introduction d'une énergie différente en traction et en compression.

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement dérivent du potentiel d'état comme suit :

$$\begin{cases} Y_1 = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial d_1} \right|_{\sigma} = \frac{\sigma_{13}^2}{2k_1^0 (1 - d_1)^2} \\ Y_2 = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial d_2} \right|_{\sigma} = \frac{\sigma_{23}^2}{2k_2^0 (1 - d_2)^2} \\ Y_3 = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial d_3} \right|_{\sigma} = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2k_3^0 (1 - d_3)^2} \end{cases} \quad (1.15)$$

Il reste alors à définir les lois d'évolution reliant ces forces thermodynamiques aux variables d'endommagement. Un choix simple permettant une simulation raisonnable des phénomènes de délaminage, utilisé dans [Allix et Ladevèze, 1992], est le suivant :

– la variable pilotant l'évolution des endommagements est donnée par :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_3 + \gamma_1 \underline{Y}_1 + \gamma_2 \underline{Y}_2 \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_i|_t = \sup_{\tau \leq t} Y_i|_{\tau} \quad (1.16)$$

où γ_1 et γ_2 sont deux paramètres de couplage ;

– les lois d'évolution sont alors :

$$\begin{cases} d_3 = d_1 = d_2 = w(\underline{Y}) & \text{si } d < 1 \\ d_3 = d_{13} = d_{23} = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad w(\underline{Y}) = \left\langle \frac{\sqrt{\underline{Y}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right\rangle_+ \quad (1.17)$$

De plus, une procédure d'identification a été proposée dans [Allix et al., 1998], pour un modèle généralisé, développé sur le principe de celui présenté précédemment.

Pour ce qui est des simulations en dynamique, cette partie du modèle a été implantée dans *LS-DYNA* dans [Deü, 1997], où sont présentés notamment des exemples de chargement dynamique de plaques trouées. Cependant, il n'a pas encore été utilisé dans les simulations présentées au 1.1.4, traitant des absorbeurs de choc en composite, y compris dans le cas de l'utilisation du mésomodèle. Ceci est dû au choix d'éléments de type coques multicouche pour représenter la structure, choix qui est fait d'une part, pour des raisons de coût de calcul et, d'autre part, en raison du fait que les codes n'offrent pas nécessairement en standard la possibilité d'introduire des éléments d'interface.

1.2.2 Effet retard

Le mésomodèle statique a été étendu au cas des chargements dynamiques en vue de pouvoir décrire la rupture de manière objective. Il ne s'agit pas de modéliser des effets de vitesse de type visqueux, comme ceux présentés au 1.1.3.2, mais de type effets de vitesse liés à la rupture. Ainsi les lois d'évolution de l'endommagement sont modifiées, ce qui permet de régulariser les problèmes de localisation évoqués au 1.1.3.3. Cette modification a fait l'objet d'études précédentes [Allix et Deü, 1997, Deü, 1997] et est également employée dans [Suffis et al., 2003].

L'introduction de l'effet retard dans le mésomodèle consiste à modifier les lois d'évolution, en cherchant à :

- conserver les lois d'évolution statiques lorsque le chargement est quasi-statique et l'endommagement progressif ;
- introduire une vitesse maximale d'endommagement, à relier aux vitesses bornées de fissuration et qui jouera un rôle lorsque les taux de déformation deviendront importants. Le temps caractéristique associé à cette vitesse maximale, couplé avec la vitesse des ondes dans le milieu, permet d'obtenir une taille de zone de localisation indépendante du maillage.

Afin de ne pas alourdir les notations inutilement, l'effet retard est ici présenté dans le cas unidimensionnel. La loi d'état est alors :

$$\sigma = E^0 (1 - d) \langle \varepsilon \rangle_+ - E^0 \langle -\varepsilon \rangle_+ \quad (1.18)$$

Le modèle est défini par son énergie de déformation Ψ , qui prend en compte le caractère unilatéral de l'endommagement, différenciant le comportement en traction et en compression :

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma \rangle_+^2}{E^0 (1 - d)} + \frac{\langle -\sigma \rangle_+^2}{E^0} \right] \quad (1.19)$$

Le taux de restitution d'énergie associé à d est :

$$Y = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial d} \right|_{\sigma} = \frac{\langle \sigma \rangle_+^2}{2E^0 (1 - d)^2} = \frac{E^0 \langle \varepsilon \rangle_+^2}{2} \quad (1.20)$$

L'évolution de l'endommagement est gouvernée par Y . Typiquement, pour un grand nombre de composites à fibres longues et pour de l'endommagement progressif, la loi d'évolution quasi-statique de l'endommagement est donnée par :

$$\begin{cases} d = \langle f(\sqrt{Y}) \rangle_+ & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{Y} = \sup_{\tau \leq t} Y|_{\tau} \\ f(\sqrt{Y}) = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \end{cases} \quad (1.21)$$

L'introduction de \underline{Y} rend l'endommagement dépendant du maximum du taux de restitution au cours d'un chargement non-monotone.

L'introduction d'un effet retard modifie les lois d'évolution qui s'écrivent alors :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \cdot \left\{ 1 - H \left[\langle f(\sqrt{Y}) - d \rangle_+ \right] \right\} \quad \text{si } d < 1, \quad d = 1 \text{ sinon.} \quad (1.22)$$

où τ_c est un temps caractéristique du modèle et H une fonction à définir.

Dans le cas d'une sollicitation quasi-statique, on souhaite retrouver les lois statiques connues :

$$\dot{d} \simeq 0 \Rightarrow d = f(\sqrt{Y})$$

Cela impose à H de vérifier : $H(0) = 1$. De plus, on suppose que $H' < 0$ et, afin d'assurer $\dot{d}_{max} = 1/\tau_c$, on impose :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$$

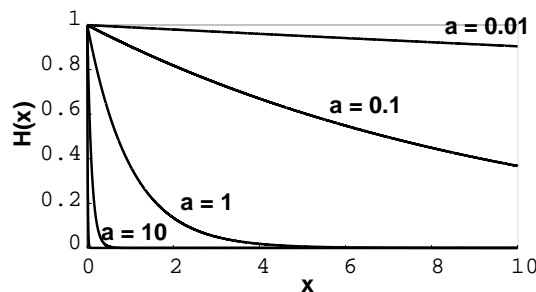


Figure 1.10 – Allure de H en fonction du paramètre a

Il est bon de noter que plus H tend vers 0 rapidement, plus l'effet retard est faible et plus le comportement devient fragile. Un choix simple pour H est le suivant :

$$H(x) = \exp[-a \cdot x] \quad (1.23)$$

Pour cette famille de fonctions, le caractère plus ou moins fragile de l'évolution de l'endommagement dépend donc de a (figure 1.10).

L'effet retard est présenté sur la courbe contrainte-déformation (Figure 1.11), qui représente la réponse matériau. Un accroissement important de la contrainte peut être observé lorsque le taux de déformation augmente. Cependant, il faut bien remarquer que dans la gamme de sollicitation typique du crash, les effets de vitesse sont très limités. Les

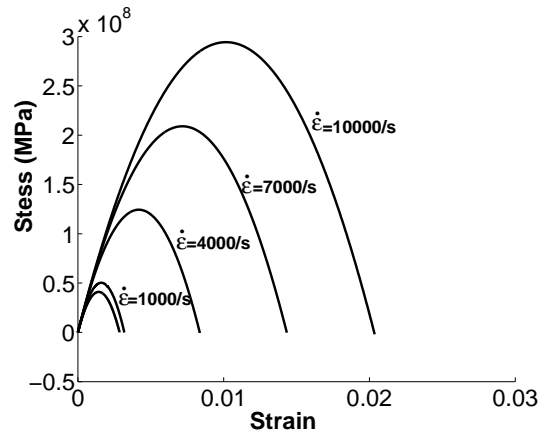
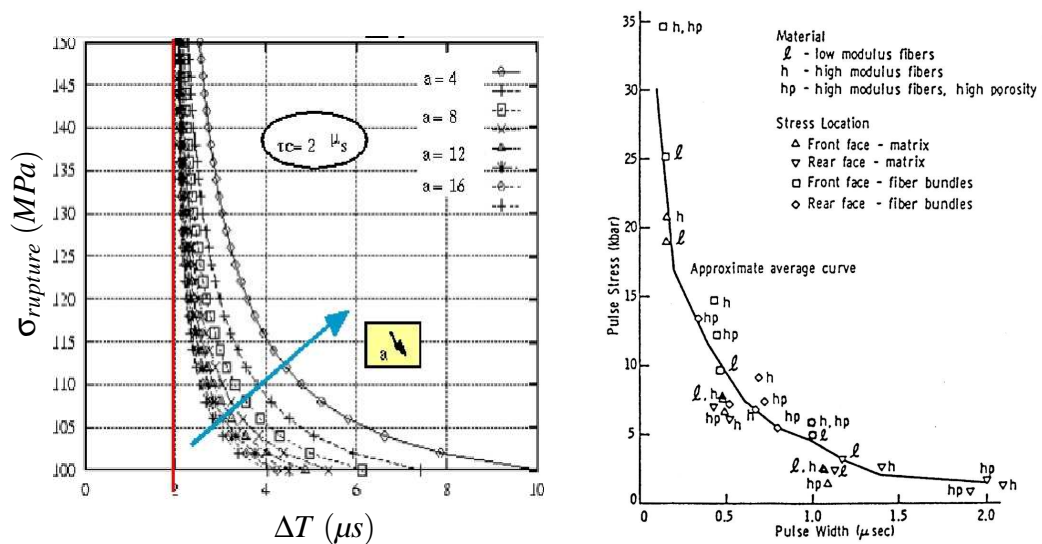


Figure 1.11 – Courbe contrainte-déformation pour des chargements à différents taux de déformation

effets n'interviennent que dans la phase de localisation, lorsque les taux de déformation deviennent localement très importants.

Il est bon de remarquer que la partie post-pic de cette réponse matériau ne peut pas s'obtenir directement sur la courbe de réponse d'une éprouvette, du fait des phénomènes de localisation. Un calcul simple d'une éprouvette en traction quasi-statique jusqu'à rupture en utilisant le mésomodèle à effet retard permet de montrer qu'une réponse matériau de ce type aboutit à une réponse de type rupture brutale au niveau de la réponse globale [Allix et Deü, 1997].



(a) Simulation avec l'effet retard [Allix et Deü, 1997]

(b) Essais plaque-plaque [Goetze et McClintock, 1975]

Figure 1.12 – Rupture de composite carbone-carbone

Enfin, les paramètres de retard peuvent être vus comme des paramètres liés aux ef-

fets de vitesse de rupture, à rapprocher des vitesses bornées de fissuration. Leur identification doit donc se faire sur des essais faisant intervenir ces effets de vitesse, qui apparaissent pour des taux de déformation élevés. Ces effets sont mis en évidence dans [Goeke et McClintock, 1975], sur des essais plaque-plaque pour des composites carbone-carbone. Ainsi, une première démarche d'identification a été mise en œuvre dans [Allix et Deü, 1997, Allix et Sen Gupta, 2002], dans le cas des composites carbone-carbone. Elle se base sur la réponse du modèle à un créneau d'effort, en reliant la contrainte appliquée au temps minimum d'application pour atteindre la rupture. Ces courbes (figure 1.12(a)), qui dépendent des paramètres du modèle peuvent alors être comparées aux courbes expérimentales obtenues grâce aux essais de type plaque-plaque, comme ceux figure 1.12(b) de [Goeke et McClintock, 1975]. On voit sur la figure 1.12(a) que le temps critique τ_c se retrouve au niveau de l'asymptote verticale des courbes, tandis que a gère effectivement bien le caractère fragile du comportement. Ces essais correspondent à des sollicitations extrêmement sévères, avec des taux de déformation bien supérieurs à ceux correspondant aux essais de crash, ce qui rend les effets de vitesse de rupture prépondérants. De tels essais ne sont pas envisageables pour les stratifiés, en raison de la géométrie de ces derniers. La question de l'identification des paramètres de retard dans ce cas n'est donc pas résolue.

1.3 Conclusion

Cette partie a permis de mettre en avant les problématiques de la simulation des absorbeurs de choc en composite multicouche. Afin de garantir un minimum de pertinence, sinon de prédiction, de la part du calcul, les modèles utilisés doivent être suffisamment fins pour rendre compte de la dissipation liée à la ruine de la structure de façon réaliste. Le mésomodèle de stratifié à effet retard permet notamment de décrire convenablement le comportement statique ainsi que la rupture, qui joue un rôle prépondérant dans l'absorption d'énergie. Ce modèle, de plus, est adapté à l'implantation numérique, tant pour le choix de l'échelle de description que pour son objectivité numérique.

La question qui se pose à présent est de savoir comment identifier ce modèle. Il a été vu que des procédures d'identification standards existaient pour la partie statique du modèle. En revanche, l'identification de la loi à effet retard pour les stratifiés reste une question ouverte. La suite de l'étude cherche à apporter des éléments de réponse tout d'abord en essayant de poser le problème de cette identification puis en proposant une stratégie d'identification adaptée.

Chapitre 2

Remarques sur l'identification de modèles d'endommagement jusqu'à rupture en dynamique

Dans ce second chapitre, on pose le problème de l'identification des paramètres associés à l'effet retard du mésomodèle de stratifié. Dans un premier temps, le caractère identifiable du modèle est discuté à partir de considérations analytiques et numériques. Dans un second temps, on présente le contexte d'identification et les méthodes envisageables. Une première méthode basée sur l'écart entre solutions est alors testée sur un exemple numérique.

Sommaire

2.1	Identification des paramètres d'effet retard	28
2.1.1	Caractère identifiable : considération énergétique	28
2.1.2	Influence des paramètres sur les champs aux limites	38
2.2	Identification à partir d'essais hétérogènes et dynamiques	42
2.2.1	Stratégie d'identification : possibilités	42
2.2.2	Première approche, basée sur l'écart entre solutions	45
2.3	Conclusion	48

Le mésomodèle à effet retard a été présenté dans la partie 1.2.1. L'idée qui le sous-tend tient dans l'introduction d'une vitesse maximale d'endommagement qui permet de résoudre les problèmes numériques de dépendance au maillage. De plus, ce temps critique se veut être une caractéristique matériau et non une astuce numérique. Cela suppose donc qu'il puisse être identifié expérimentalement. Or, un obstacle à l'identification pourrait être le fait que les paramètres de l'effet retard n'interviennent que lorsque des phénomènes de localisation liés à l'endommagement apparaissent. Comme la zone de localisation est souvent très petite devant les tailles caractéristiques de l'éprouvette, il n'est pas certain que les mesures expérimentales soient suffisamment sensibles pour permettre une identification de ces paramètres. Cela signifie qu'il faudra probablement développer, d'une part, des essais adaptés à cette identification, de façon que ces phénomènes ne soient pas marginaux et, d'autre part, des méthodes d'identification.

Une démarche d'identification a été mise en œuvre dans [Allix et Deü, 1997, Allix et Sen Gupta, 2002], pour les composites carbone-carbone 3D. Il a été vu dans le chapitre précédent qu'elle se basait sur des essais plaque-plaque qui ne sont pas envisageables pour des stratifiés tels que ceux qui sont étudiés ici. C'est pourquoi, dans la présente étude, on s'interroge sur la possibilité d'identification à partir des essais de caractérisation utilisés pour les applications telles que le crash, par exemple un essai aux barres d'Hopkinson (*SHPB*). Les deux points étudiés dans ce chapitre sont alors :

- dans un premier temps, de savoir si le modèle est identifiable sur ce type d'essai. Pour cela, une étude analytique est menée pour un scénario simplifié d'essai à rupture, dans laquelle sont quantifiées les différentes énergies mises en jeu. Puis, l'influence des paramètres de retard sur les conditions aux limites de l'essai est analysée sur un exemple numérique ;
- dans un second temps, de s'interroger sur les stratégies d'identification envisageables, une fois le cadre d'identification posé. Une première méthode est alors testée sur un exemple numérique.

2.1 Identification des paramètres d'effet retard

2.1.1 Caractère identifiable : considération énergétique

L'idée de cette partie est d'estimer les différentes énergies mises en jeu dans un essai à rupture, du point de vue du modèle, pour avoir une idée du rôle joué par les différents phénomènes. Ainsi, si le modèle est identifiable et qu'il représente bien la réalité, on aura posé certaines frontières pour son identification, [Allix et Feissel, 2003].

L'étude est menée avec le modèle unidimensionnel à effet retard présenté au 1.2.2 avec comme caractéristiques matériau, celles données par le tableau 2.1, qui correspondent à un composite *Sic-MAS* [Deü, 1997]. Ce choix est fait afin de pouvoir effectuer des comparaisons avec des études précédentes, sachant que l'étude simplifiée unidimensionnelle qui est menée sert de première approche.

On peut notamment remarquer que le seuil d'endommagement est pris égal à zéro. Nous verrons que la taille de la zone de localisation est de l'ordre de $\frac{C^0 \tau_c}{a}$, résultat qui avait déjà été mis en avant dans [Deü, 1997]. Ceci nous a conduits à choisir une valeur par défaut de τ_c de $2\mu\text{s}$, afin de retrouver une taille de zone de localisation de l'ordre de l'épaisseur du pli.

Élasticité		Endommagement	
Module d'Young	$E^0 = 57 \text{ GPa}$	Seuil	$Y_0 = 0 \text{ MPa}$
Densité	$\rho^0 = 2280 \text{ kg.m}^{-3}$	Force critique	$Y_c = 0,23 \text{ MPa}$
		Déformation critique	$\epsilon_c = 2,8 \cdot 10^{-3}$
Célérité des ondes	$C^0 = 5000 \text{ m.s}^{-1}$	Constante de retard	$a = 10$
Impédance	$Z^0 = 1,14 \cdot 10^7 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$	Temps critique	$\tau_c = 2 \mu\text{s}$

Tableau 2.1 – Propriétés matériau

2.1.1.1 Déroulement schématique d'un essai jusqu'à rupture

Si l'on considère une poutre soumise à un chargement quasi-statique de traction, l'état est homogène dans toute la poutre au cours du chargement jusqu'au moment où le comportement adoucissant du matériau entraîne une instabilité conduisant à la rupture brutale de la poutre. Cette rupture se fait par localisation des déformations et de l'endommagement dans une petite partie de la structure, le reste de la barre se déchargeant. La réponse globale de la structure est donnée par une courbe de comportement présentant une chute de rigidité soudaine, typique d'un essai mené jusqu'à rupture. À partir du pic, cette réponse n'est plus une réponse matériau, du fait de l'hétérogénéité de l'état dans la poutre. Une telle réponse globale peut alors très bien correspondre à une réponse locale du type loi à effet retard dont les courbes caractéristiques sont données figure 1.11.

Cet exemple permet de montrer que, de manière générale, la structure est soumise à deux régimes distincts :

- en dehors de la zone (spatio-temporelle) de localisation, le taux de déformation est gouverné par le chargement et l'endommagement suit les lois d'évolution statiques ;
- dans la zone de localisation, la rupture étant un phénomène rapide, de forts taux d'endommagement et de déformation sont atteints.

Ce point est confirmé par l'exemple numérique suivant, qui est celui d'une poutre en traction ayant un comportement endommageable à effet retard.

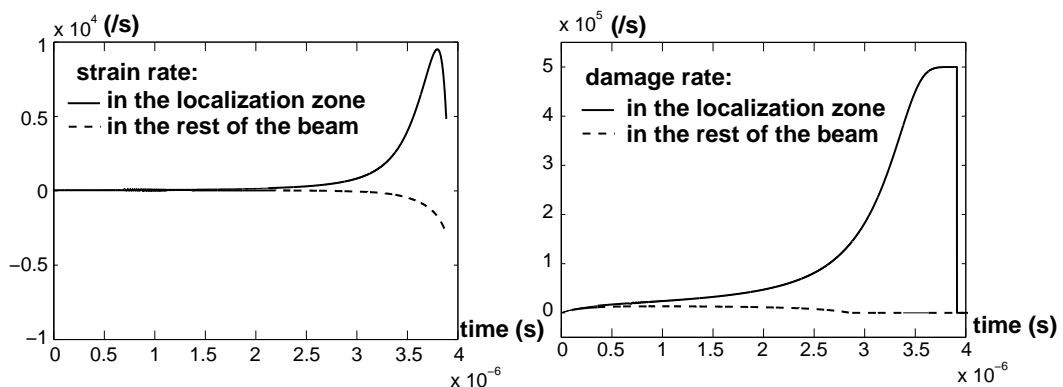


Figure 2.1 – Taux de déformation et d'endommagement dans la barre

Avant localisation, le taux de déformation moyen est de l'ordre de grandeur du paramètre de chargement $\dot{\epsilon}$, et comme $\dot{\epsilon} \ll \frac{1}{\tau_c}$, on retrouve dans la barre le même endommagement que pour la loi statique classique. En revanche, après le pic, l'endommagement

se localise dans une bande de largeur notée h , dans laquelle le taux d'endommagement tend rapidement vers $\frac{1}{\tau_c}$ et où le taux de déformation prend également des valeurs plus importantes.

Cet exemple numérique est fourni par un calcul explicite à partir d'un pré-chargement statique, simulant une barre en traction avec un défaut de rigidité initiale de 1% en son milieu pour initialiser la localisation. Le pré-chargement est choisi de sorte que la localisation apparaisse au bout de quelques pas de temps (environ 1 000). La figure 2.1 compare les taux de déformation et d'endommagement dans la zone de localisation et dans le reste de l'éprouvette.

La zone de localisation étant de petite taille devant la taille de la structure, la question se pose de savoir si des mesures peuvent permettre de caractériser ce qu'il s'y passe. L'idée ici est de dire que cela sera possible si les phénomènes mis en jeu ne sont pas négligeables d'un point de vue énergétique. C'est pourquoi, on souhaite évaluer la dissipation liée à la rupture, et la comparer aux autres énergies mises en jeu. Pour cela, il faut :

- évaluer la densité de dissipation dans cette région ;
- évaluer h , la taille de la zone de localisation.

2.1.1.2 Densité de dissipation : évaluation

Pour évaluer la densité de dissipation dans les différentes zones, on part de sa définition sur tout intervalle $[t_1, t_2]$:

$$\omega_d = \int_{t_1}^{t_2} Y \cdot \dot{d} \delta t \quad (2.1)$$

Le scénario de l'essai est celui décrit au 2.1.1.1, où on introduit l'endommagement d_l , correspondant à l'endommagement provoquant la localisation. En pratique, d_l est de l'ordre de 0,5. Hors localisation, l'endommagement suit la loi statique (1.21), avec pour f :

$$f(\sqrt{Y}) = \left(\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{Y_c}} \right)^n = \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_+}{\varepsilon_c} \right)^n \quad \text{avec : } Y_c = \frac{E^0 \varepsilon_c^2}{2} \quad (2.2)$$

où, sauf indication contraire, le paramètre n sera pris égal à 1.

La densité de dissipation, en dehors de la zone de localisation, est donc indépendante du temps et est donnée par :

$$\omega_d^{static} = \int_0^{d_l} Y \delta d = \frac{E^0 \cdot \varepsilon_c^2}{6} \cdot d_l^3 \quad (2.3)$$

Dans la zone de localisation, la densité de dissipation est donnée par :

$$\begin{aligned} \omega_d^{loc} &= \int_{t_l}^{t_l+t_r} \frac{E^0 \cdot \varepsilon^2}{2} \cdot \dot{d} \delta t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_l \text{ l'instant de localisation} \\ t_r \text{ la durée de la rupture} \end{cases} \\ &= \int_0^{t_r} \frac{E^0 \cdot \varepsilon^2}{2} \cdot \dot{d} \delta t \quad \text{en choisissant : } t_l = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cependant, l'histoire de $\varepsilon(t)$ n'est pas connue *a priori*, puisqu'elle dépend du chargement et de la réponse du modèle. Le choix est fait ici de prendre un taux de déformation

constant dans la zone de localisation, ce qui est une hypothèse forte. Elle revient finalement à étudier la réponse du modèle à un chargement à taux de déformation constant et on néglige notamment l'influence du modèle sur le chargement. Le taux de déformation représente le taux de déformation moyen dans la zone de localisation. On considère donc que l'histoire dans la zone de localisation est donnée par :

$$Y(t) = \frac{E^0 \cdot (\varepsilon_l + \dot{\varepsilon}t)^2}{2}$$

Dans ce cas, la densité d'énergie dissipée s'exprime :

$$\omega_d^{loc} = \int_0^{t_r} \frac{E^0}{2} \cdot (\varepsilon_l + \dot{\varepsilon}t)^2 \cdot \dot{d}(t) \delta t = \frac{E^0}{2\dot{\varepsilon}} \int_{\varepsilon_l}^{\varepsilon_r(\dot{\varepsilon})} \varepsilon^2 \cdot \dot{d}(\varepsilon) \delta \varepsilon \quad (2.5)$$

Pour évaluer ω_d^{loc} , il reste donc à évaluer $\dot{\varepsilon}$, ainsi que l'histoire de \dot{d} et le temps à rupture en fonction de $\dot{\varepsilon}$.

Afin d'avoir une première idée de cette dissipation, faisons l'hypothèse que le taux d'endommagement est constant et vaut $\frac{1}{\tau_c}$. Le temps de rupture t_r est alors donné par :

$$t_r = \tau_c \cdot (1 - d_l) \quad (2.6)$$

La figure 2.2 montre que cette estimation n'est valable que pour des taux de déformation suffisamment élevés.

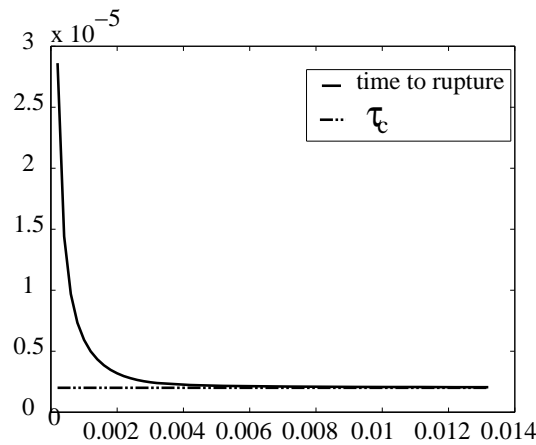


Figure 2.2 – Temps de rupture en fonction de $\tau_c \dot{\varepsilon}$

Estimation du taux de déformation dans la zone de localisation

Il reste à présent à évaluer le taux de déformation dans la zone de localisation c'est-à-dire la valeur à partir de laquelle $\dot{d}(\dot{\varepsilon}) \simeq \frac{1}{\tau_c}$, ou encore la valeur des taux de déformation compatibles avec la localisation.

Connaissant t_r , on peut déterminer $\dot{d}|_{d=1}(\dot{\varepsilon}) = \dot{d}(t_r)$:

$$\dot{d}(t_r) \simeq \frac{1}{\tau_c} \cdot \left\{ 1 - \exp \left(-a \left[\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_c} \cdot t_r - (1 - d_l) \right] \right) \right\} \quad (2.7)$$

On définit alors $\dot{\epsilon}_{mini}$ tel que $\dot{d}(t_r) \geq (1 - \alpha) \frac{1}{\tau_c}$, lorsque $\dot{\epsilon} \geq \dot{\epsilon}_{mini}$. On prendra comme valeur typique, $\alpha = 5.10^{-4}$. Cela permet d'obtenir une valeur de $\dot{\epsilon}_{mini}$ donnée par :

$$\dot{\epsilon}_{mini} = \frac{\epsilon_c}{t_r} \left(1 - \frac{\ln \alpha}{a(1 - d_l)} \right) \quad (2.8)$$

Avec $t_r = \tau_c \cdot (1 - d_l)$, pour avoir $\dot{d}(t_r) \geq \frac{1}{\tau_c} (1 - 3.10^{-4})$, il faut que $\dot{\epsilon}$ vérifie :

$$\tau_c \dot{\epsilon} \geq \epsilon_c \left(1 + \frac{16}{a} \right) \quad (2.9)$$

L'expression (2.7) permet de conclure que le taux de déformation dans la zone de localisation est donné par :

$$\tau_c \dot{\epsilon} = \epsilon_c \left(1 + \frac{16}{a} \right) \simeq 7.10^{-3} \quad (2.10)$$

La figure 2.3 montre que cette approximation est tout à fait satisfaisante, puisqu'elle permet de retrouver l'ordre de grandeur des taux de déformation à partir duquel la vitesse maximale d'endommagement est atteinte.

Estimation de la densité d'énergie dissipée

Ayant une première approximation des différents termes intervenant dans la densité de dissipation (2.4), il est à présent possible d'en donner une estimation dans la zone de localisation :

$$\begin{aligned} \omega_d^{app} &= \frac{E^0}{2 \cdot \tau_c} \cdot \int_0^{\tau_c(1-d_l)} (\epsilon_l + \dot{\epsilon} t)^2 \delta t \\ &= \frac{E^0 \cdot (\dot{\epsilon} \tau_c)^2}{6} \cdot (1 - d_l)^3 \cdot \left\{ 1 + 3 \left(\frac{\epsilon_l}{\dot{\epsilon} \cdot \tau_c (1 - d_l)} \right)^2 + 3 \frac{\epsilon_l}{\dot{\epsilon} \cdot \tau_c (1 - d_l)} \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sachant que $d_l \simeq 0.5$, et que $\dot{\epsilon} \cdot \tau_c$ est donné par (2.10), il est possible d'avoir un ordre de grandeur de ω_d^{app} :

$$\begin{aligned} \omega_d^{app} &\simeq \frac{E^0 \cdot (\dot{\epsilon}_{mini} \tau_c)^2}{48} \cdot \left(1 + 3 \left(\frac{a}{a - 2 \cdot \ln \alpha} + \frac{a^2}{(a - 2 \cdot \ln \alpha)^2} \right) \right) \\ &\simeq \frac{E^0 \cdot (\dot{\epsilon}_{mini} \tau_c)^2}{18} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Validité de l'approximation (2.12)

Afin de valider l'approximation de la densité de dissipation donnée par (2.12), une analyse plus fine est menée, où la vitesse d'endommagement n'est plus supposée constante.

Pour conserver une expression relativement simple, on peut constater que, pour de forts taux de déformation, $d - d_l$ devient négligeable devant $f(\sqrt{Y}) - f(\sqrt{Y_l})$, (pour $n = 1$), ce qui conduit à l'approximation suivante :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \cdot \left\{ 1 - \exp \left[-a, \frac{\epsilon - \epsilon_l}{\epsilon_c} \right] \right\} = \frac{1}{\tau_c} \cdot \left\{ 1 - \exp \left[-a \frac{\dot{\epsilon} t}{\epsilon_c} \right] \right\} \quad (2.13)$$

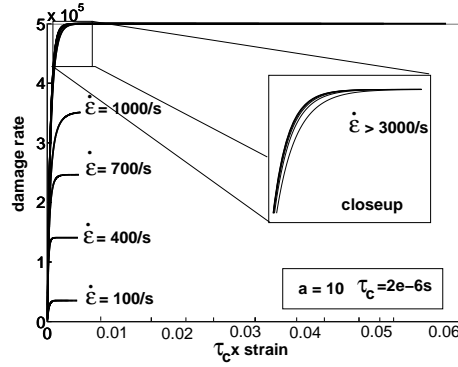


Figure 2.3 – Taux d'endommagement en fonction des déformations : effet du taux de déformation

La figure 2.3 compare cette expression avec l'expression exacte, pour différentes valeurs du taux de déformation. Dans cet exemple, pour un taux de déformation supérieur à 3000 s^{-1} , les deux expressions conduisent pratiquement aux mêmes courbes.

Remarque :

On peut noter que pour des taux de déformation plus faibles, d n'atteint pas la valeur limite $\frac{1}{\tau_c}$.

Il nous faut alors estimer le temps à rupture t_r . L'équation (2.13) intégrée entre 0 et $\varepsilon_r = \dot{\varepsilon} \cdot t_r$ fournit l'expression suivante :

$$1 - d_l = \frac{1}{\dot{\varepsilon} \tau_c} \cdot \left[\dot{\varepsilon} \cdot t_r + \frac{\varepsilon_c}{a} \cdot \left(\exp \left[-a \cdot \frac{\dot{\varepsilon} \cdot t_r}{\varepsilon_c} \right] - 1 \right) \right] \quad (2.14)$$

En notant,

$$t_r = \tau_c \cdot (1 - d_l) (1 + \eta) \quad (2.15)$$

où η est petit devant 1; ceci permet d'approximer l'expression (2.14) par :

$$1 = 1 + \eta + \frac{\varepsilon_c}{a \dot{\varepsilon} \tau_c \cdot (1 - d_l)} \cdot \left[\exp \left[-a \cdot \frac{\dot{\varepsilon} \cdot \tau_c \cdot (1 - d_l)}{\varepsilon_c} \right] \left(1 - a \cdot \frac{\dot{\varepsilon} \cdot \tau_c \cdot (1 - d_l)}{\varepsilon_c} \eta \right) - 1 \right] \quad (2.16)$$

Ce qui permet d'avoir une expression approchée de η , dont on peut encore ne conserver que le terme d'ordre le plus faible :

$$\eta \simeq \frac{\varepsilon_c}{a \tau_c \cdot (1 - d_l) \dot{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad t_r \simeq \tau_c \cdot (1 - d_l) + \frac{\varepsilon_c}{a \dot{\varepsilon}} \quad (2.17)$$

Vérification de la qualité de l'approximation

Les figures 2.2 et 2.4 présentent respectivement la valeur exacte de $t_r(\dot{\varepsilon})$ et l'erreur relative pour t_r évalué par (2.16) ou par son approximation au première ordre (2.17). Pour les valeurs de $\dot{\varepsilon}$ considérées, l'erreur relative est de l'ordre de 1%.

Le taux de déformation dans la zone de localisation peut alors être estimé à partir de (2.8), avec cette expression de t_r .

La figure 2.5 présente la valeur de $\dot{\varepsilon}_{mini}$ en fonction du paramètre de modèle a , pour différentes valeurs de n , exposant de la loi puissance choisie comme loi d'état. Pour $n = 1$,

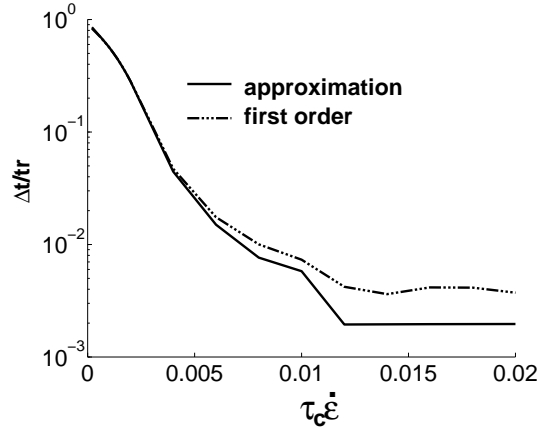


Figure 2.4 – Écart relatif entre le temps de rupture et ses approximations

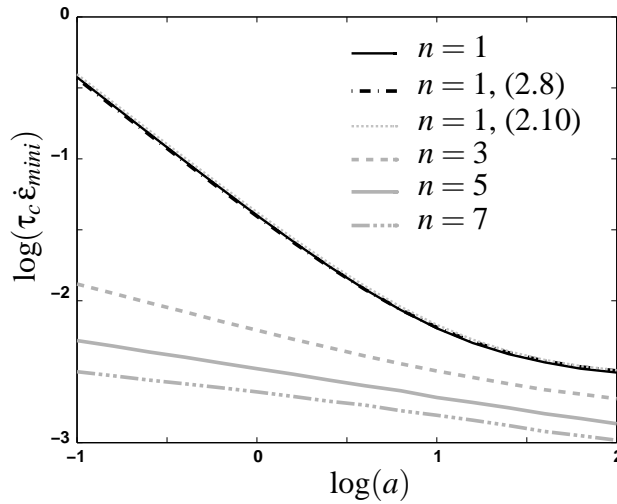


Figure 2.5 – Taux de déformation minimum $\dot{\epsilon}_{mini}$ pour atteindre $\frac{1}{\tau_c}$

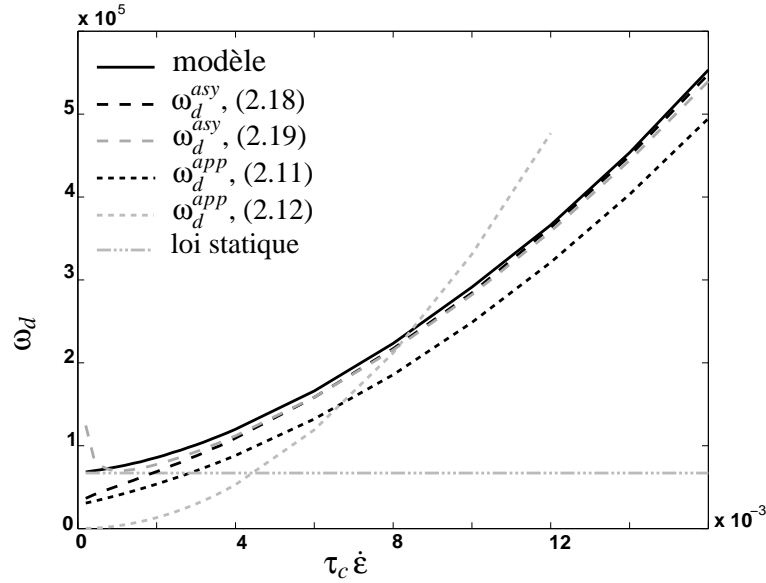
les courbes approchées calculées à partir de (2.8) et de (2.10) sont également tracées sur la figure et sont une bonne approximation de la courbe exacte. Toutefois, le choix de α (ici $1 \cdot 10^{-3}$) influe sur la qualité de l'approximation, sans être néanmoins critique.

Il est alors possible d'obtenir une nouvelle estimation de ω_d . Pour cela, on prend les valeurs déterminées de $\dot{\epsilon}_{mini}$ d'après (2.8), \dot{d} d'après (2.13) et t_r d'après (2.17). Il en découle une forme de ω_d :

$$\omega_d^{asy} = \frac{E^0}{2 \cdot \tau_c} \int_0^{t_r} (\epsilon_l + \dot{\epsilon}t)^2 \delta t - \frac{E^0}{2 \cdot \tau_c} \int_0^{t_r} (\epsilon_l + \dot{\epsilon}t)^2 \exp -a \cdot \frac{\dot{\epsilon}t}{\epsilon_c} \delta t \quad (2.18)$$

En négligeant le second terme et en développant le premier à l'ordre 1 par rapport à η , cette expression peut alors être approximée par :

$$\omega_d^{asy} \simeq \omega_d^{app} + \frac{E^0 \cdot (\dot{\epsilon} \tau_c)^2}{2} \cdot (1 - d_l)^3 \cdot \left(1 + \left(\frac{\epsilon_l}{\dot{\epsilon} \cdot \tau_c (1 - d_l)} \right)^2 + \frac{\epsilon_l}{\dot{\epsilon} \cdot \tau_c (1 - d_l)} \right) \eta \quad (2.19)$$


 Figure 2.6 – Énergie dissipée en fonction de $\tau_c \dot{\varepsilon}$

La figure 2.6 compare la valeur exacte de ω_d et son approximation à partir de (2.11), de (2.18) et de (2.19). On peut également remarquer que la valeur ponctuelle donnée par (2.12) est une bonne approximation de (2.11). Cette dernière expression, relativement simple, sera, par conséquent, retenue pour l'estimation de l'énergie dissipée dans la zone de localisation puisqu'elle fournit une estimation raisonnable de la dissipation pour un coût faible.

2.1.1.3 Estimation de la taille de la zone de localisation : analyse unidimensionnelle de propagation d'onde

Le paragraphe précédent a permis d'estimer la densité de dissipation liée à l'effet retard dans la zone de localisation. Afin de pouvoir calculer l'énergie dissipée, il reste donc à estimer la taille de la zone de localisation. L'approche suivie a notamment été exploitée par [Sluys, 1992] ou [Comi et Perego, 2001] pour d'autres types de modèles ; elle consiste, à partir d'une analyse unidimensionnelle linéarisée, à estimer la longueur caractéristique de concentration d'énergie des solutions.

Considérons une barre de longueur infinie, constituée d'un matériau suivant la loi à effet retard. On suppose que la barre est soumise à un chargement statique uniforme, et on caractérise son état homogène par : $(\underline{d}, \underline{\varepsilon})$, avec $\underline{\varepsilon} = \underline{d}\varepsilon_c$ pour le modèle considéré.

On considère ensuite, comme dans [Sluys, 1992] ou [Comi et Perego, 2001], l'équation constitutive linéarisée autour de l'état de déformation statique $(\underline{\varepsilon}, \underline{d})$:

$$\dot{\sigma}_{,x} = \rho \ddot{v} \quad \text{avec} \quad \dot{\sigma} = E [(1 - \underline{d}) \dot{\varepsilon} - \dot{d} \underline{\varepsilon}] \quad (2.20)$$

et, en notant que $\dot{\varepsilon}_{,x} = v_{,xx}$ (où v est la perturbation en vitesse) :

$$c_0^2 [(1 - \underline{d}) v_{,xx} - \dot{d}_{,x} \underline{\varepsilon}] = \ddot{v} \quad \text{avec} \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.21)$$

En linéarisant la loi d'évolution de l'endommagement près de l'état de chargement statique, on obtient :

$$\ddot{d} = \frac{a}{\tau_c} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_c} - \dot{d} \right) = \frac{1}{T_c} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_c} - \dot{d} \right) \quad \text{avec} \quad T_c = \frac{\tau_c}{a} \quad (2.22)$$

On recherche à présent des perturbations sous forme harmonique :

$$\begin{cases} v = v_0 \exp [i(\omega t - kx)] \\ \dot{d} = \dot{d}_0 \exp [i(\omega t - kx)] \end{cases} \quad (2.23)$$

où k est complexe du fait de la viscosité introduite par l'effet retard.

L'introduction de cette forme de perturbation dans les équations du problème linéarisé, amène au nouveau système :

$$\begin{cases} \left[(1 - \underline{d}) k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} \right] v_0 + [ik\underline{\varepsilon}] \dot{d}_0 = 0 \\ \left[\frac{ik}{T_c \varepsilon_c} \right] v_0 + \left[\frac{1}{T_c} + i\omega \right] \dot{d}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Le système précédent ne possèdera des solutions non-triviales que si son déterminant est nul. Ceci impose que l'équation de dispersion suivante soit vérifiée :

$$(c_0 T_c k)^2 = (T_c \omega)^2 \frac{(1 - 2\underline{d}) + (T_c \omega)^2 (1 - \underline{d}) - i\underline{d} T_c \omega}{(1 - 2\underline{d})^2 + (T_c \omega)^2 (1 - \underline{d})^2} \quad (2.25)$$

Cette expression impose les parties réelles et imaginaires du vecteur d'onde. Dans la suite, on note $\underline{\omega}$ et \underline{k} respectivement la fréquence et le vecteur d'onde adimensionnés :

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= T_c \omega \\ \underline{k} &= c_0 T_c k = \beta + i\alpha \end{aligned} \quad (2.26)$$

où α représente le taux de décroissance de la solution et son inverse la longueur adimensionnée de concentration d'énergie pour un $\underline{\omega}$ donné.

L'équation (2.25) implique :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= P \left(\sqrt{a^2 + b^2} + a \right) \\ \alpha^2 &= P \left(\sqrt{a^2 + b^2} - a \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec :

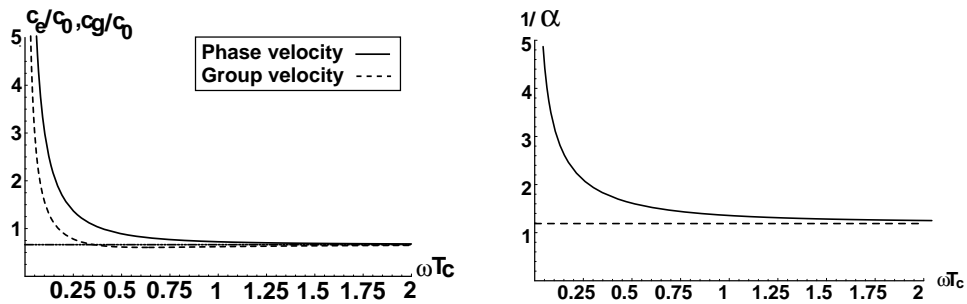
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \frac{\underline{\omega}^2}{(1 - 2\underline{d})^2 + \underline{\omega}^2 (1 - \underline{d})^2} \\ a &= (1 - 2\underline{d}) + \underline{\omega}^2 (1 - \underline{d}) \\ b &= -\underline{d} \underline{\omega} \end{aligned} \quad (2.28)$$

On peut alors en déduire la valeur de la vitesse de phase adimensionnée, c_e , de la vitesse de groupe adimensionnée, c_g , ainsi que la taille de localisation adimensionnée $\frac{1}{\alpha}$

en fonction de $\underline{\omega}$. Enfin, on peut également exprimer leur valeur limite (lorsque $\underline{\omega} \rightarrow \infty$) en fonction de \underline{d} :

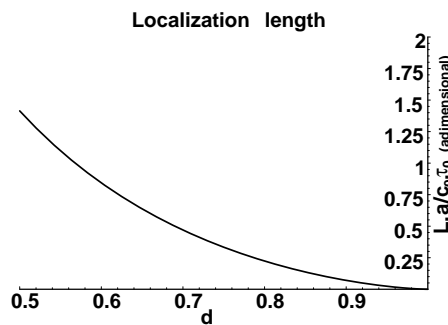
$$\begin{aligned} c_e(\infty) &= c_g(\infty) = \sqrt{1 - \underline{d}} \\ \frac{1}{\alpha(\infty)} &= \frac{2(1 - \underline{d})^{\frac{3}{2}}}{\underline{d}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ces fonctions sont représentées sur les figures 2.7 pour $\underline{d} = 0.6$, qui est une valeur plus importante que la valeur critique dans le cas purement statique, correspondant à un changement de régime.



(a) Vitesse

(b) Longueur de décroissance



(c) Longueur de localisation

Figure 2.7 – Évolution des fonctions issues de (2.29)

Si on applique ces résultats à notre exemple, cela mène à une estimation de la taille de la zone de localisation de :

$$l_c = \sqrt{2} c_0 T_c \simeq 1 \text{ mm} \quad (2.30)$$

Ce développement constitue une première approche, basée sur une analyse à l'ordre 1. Elle s'appuie donc sur l'initialisation de la localisation et, vu ce cadre, ne permet pas de décrire une croissance du taux d'endommagement jusqu'à τ_c . Elle permet toutefois d'avoir une première idée, que des développements futurs pourront compléter, tout comme la démarche numérique présentée dans la suite.

2.1.1.4 Dissipation dans une poutre

Comme il a été vu dans l'exemple de la poutre en quasi-statique, il y a deux zones distinctes dans la structure : la zone de localisation et le reste, qui se comporte à peu près comme en statique. Grâce aux résultats des parties précédentes, il est à présent possible de fournir une évaluation de la part des différentes zones dans la consommation d'énergie, en fonction des paramètres du modèle.

On considérera donc que la dissipation en dehors de la zone de localisation est la même qu'en statique. Puis, pour évaluer la dissipation dans la zone de localisation, on utilise les résultats de la partie 2.1.1.2 qui fournissent la densité d'énergie dissipée et ceux de la partie 2.1.1.3 pour obtenir la taille de la zone de localisation.

Enfin, il faut noter que le taux de déformation n'est élevé, dans cette partie de la barre, qu'à partir du début de la localisation, ce qui correspond à un endommagement critique de $d_l = \frac{1}{2}$ pour nos paramètres. Il faut donc estimer cette dissipation à partir de cet instant critique et non avant.

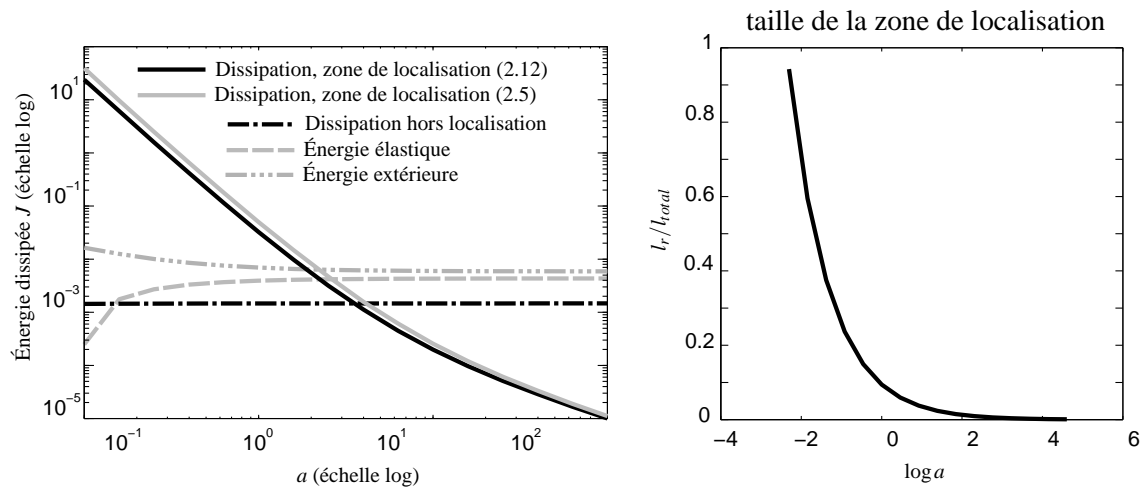


Figure 2.8 – Approximation de l'énergie dans une poutre

Avec ces approximations, la figure 2.8 compare l'ordre de grandeur des différentes énergies en fonction de a pour une poutre de 15 cm de long. Avec le modèle, la dissipation dans la zone de localisation est du même ordre de grandeur que les autres énergies mises en jeu, dans une certaine gamme de valeurs du paramètre a , correspondant aux valeurs usuelles, a entre 1 et 10. Ainsi, cette approche assez simple est encourageante quant au caractère identifiable des paramètres de la loi à effet retard.

2.1.2 Influence des paramètres sur les champs aux limites

Après l'étude sur le modèle théorique du paragraphe précédent, on regarde ici, dans un cas particulier, si la valeur des champs aux limites dépend des paramètres de retard, a et τ_c . Ceci semble un point important si l'identification se base sur des essais type *SHPB* pour lesquels les mesures sont les conditions aux limites de l'éprouvette. Il faut donc être capable de dire, avant de mener l'identification, si les mesures sont suffisamment sensibles aux paramètres recherchés.

Afin de mener cette étude, une démarche numérique est adoptée. Pour celle-ci, on reprend un calcul présenté dans [Deü, 1997], avec les paramètres matériau utilisés précédemment et présentés dans le tableau 2.1. La structure est une barre unidimensionnelle de section $S = 1 \text{ mm}^2$, de longueur $L = 100 \text{ mm}$, sollicitée à ses deux extrémités par des efforts de traction. Ceux-ci sont constitués d'une rampe de chargement, suivie d'un plateau d'effort. Le temps de montée est de $10 \mu\text{s}$ et le plateau est choisi de telle sorte qu'il provoque la rupture au centre de l'éprouvette, $F_{max} = 10^{-3} E^0 S N$. Le temps d'étude total est de $80 \mu\text{s}$. La barre est découpée en 100 éléments linéaires à deux nœuds, de taille égale. Le calcul est mené en utilisant un schéma explicite pour les déplacements, et une théta-méthode, avec $\theta = 0,5$, pour l'intégration du comportement endommageable à effet retard.

Dans la partie précédente, $T_c = \frac{\tau_c}{a}$ était le paramètre permettant de déterminer la taille de localisation. On regardera ici l'influence de a et de T_c sur les conditions aux limites. Pour cela, les efforts étant imposés, plusieurs calculs sont menés pour plusieurs jeux de paramètres matériau différents et les champs aux limites en déplacement obtenus sont comparés.

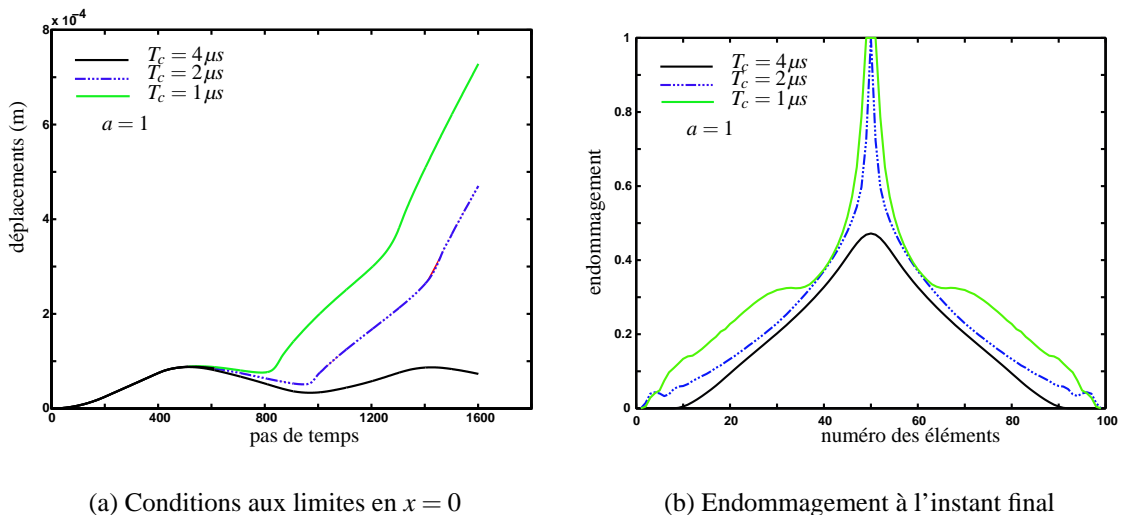


Figure 2.9 – Influence de T_c sur la réponse de la barre

La figure 2.9 présente l'effet du paramètre T_c sur la réponse au chargement. Seuls les déplacements à l'extrémité $x = 0$ sont représentés, ceux à l'extrémité $x = L$ étant similaires, vu la symétrie du problème. On observe une influence du paramètre avant rupture, qui est accentuée après rupture, lorsque les deux morceaux séparés de la barre s'éloignent l'un de l'autre, l'instant de rupture dépendant de T_c . La figure 2.9(b) présente l'état d'endommagement dans la barre à la fin du temps d'étude ; celui-ci dépend également de T_c , comme on pouvait s'y attendre d'après l'étude menée au 2.1.1.3.

La figure 2.10 présente l'influence du paramètre a sur les champs aux limites, le paramètre T_c étant fixé. Là encore, une influence des paramètres peut être remarquée. Cependant, il est intéressant de noter que, pour ce choix de T_c , ce chargement et des valeurs de a inférieures à 10, on observe un phénomène de saturation de l'influence du paramètre a . Cela s'explique en considérant que, pour a petit, il est possible d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 de la loi à effet retard, comme celui effectué au 2.1.1.3.

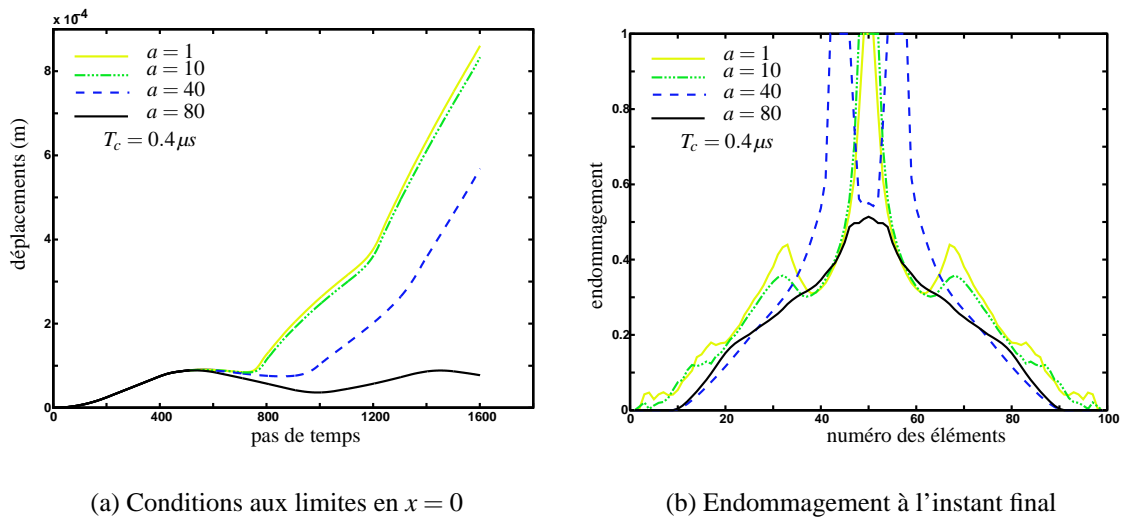


Figure 2.10 – Influence de a sur la réponse de la barre

Dans ce cas, seul le rapport $\frac{a}{\tau_c} = \frac{1}{T_c}$ joue un rôle dans la loi d'évolution de l'effet retard.

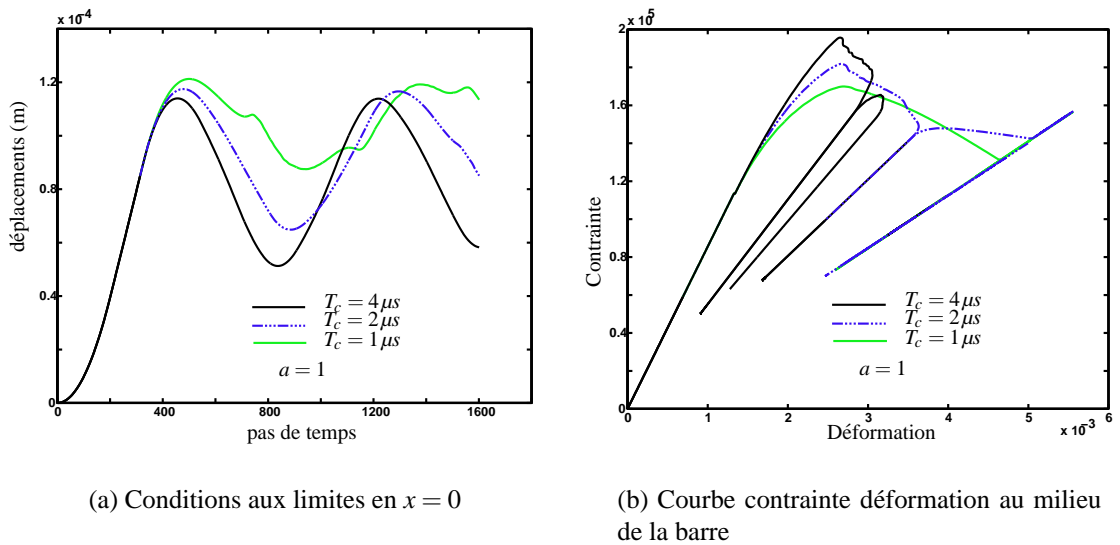
Ce premier exemple a donc montré qu'il était possible d'observer un effet des paramètres de retard sur les champs aux limites de la barre. Cependant, la différence était visible surtout après rupture, lorsque les deux morceaux de la barre se sont séparés. Un deuxième exemple est traité, dans le but de se rapprocher du cadre des composites, de telle sorte que soient évités ces mouvements importants de corps rigide. Pour cela, on considère une barre formée de deux matériaux en parallèle, comme présenté sur la figure 2.11.



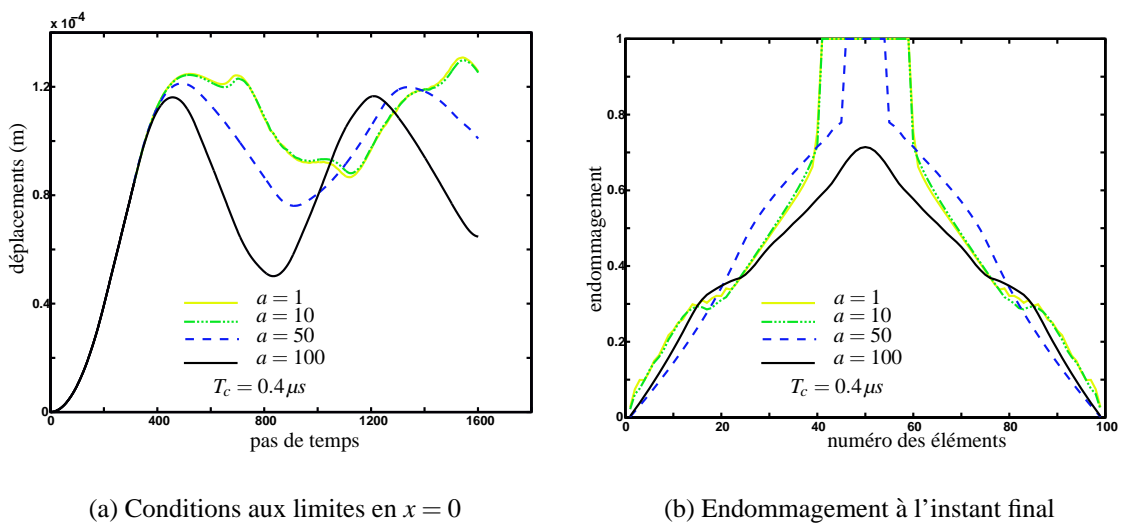
Figure 2.11 – Poutre composite et son chargement

Un des deux matériaux est le même que celui considéré précédemment, le second est un matériau au comportement élastique linéaire simple de module $E^1 = E^0/2$. Le rapport de la section des deux matériaux vaut 1. Cela peut schématiser, dans une première approche, un pli à fibres carbone à 0° entre deux plis à fibres aramide qui maintiennent la structure en place, lorsque le pli central rompt. Afin d'obtenir une rupture au milieu de la barre, le plateau d'effort appliqué est de $F_{max} = 1.3(E^0 + E^1)S10^{-3} N$.

Les figures 2.12 et 2.13 permettent d'aboutir, sur cet exemple, aux mêmes conclusions que sur l'exemple précédent : il est possible d'observer un effet non négligeable des paramètres sur les champs aux limites. De plus, la figure 2.12(b) représente la courbe contrainte-déformation au centre de l'éprouvette ($x = \frac{L}{2}$), là où le pli central rompt. Il est intéressant de voir que le taux de déformation dépendant du chargement et de la réponse de la structure, la réponse est loin de ressembler à une courbe à taux de déformation

Figure 2.12 – Influence de T_c sur la réponse de la barre composite

constant. Ceci peut donner une idée des difficultés qui peuvent survenir pour identifier un modèle visqueux par une approche directe à partir de mesures expérimentales.

Figure 2.13 – Influence de a sur la réponse de la barre composite

Cette étude numérique de l'influence des paramètres de retard sur les champs aux limites a permis de montrer que, sur un cas simple, la modification de la valeur des paramètres avait un impact sur la valeur des champs aux limites. Cela conforte dans l'idée que ce modèle puisse être identifiable. La question qui se pose alors est de savoir si cette influence des paramètres est suffisante dans le contexte incertain dans lequel l'identification devra sans doute se faire. Il est difficile de donner une réponse tranchée, celle-ci dépendant en partie des méthodes envisagées pour trouver les paramètres. Il est toute-

fois probable que ces variations ne soient pas noyées dans les perturbations, d'autant plus que les méthodes qui ont été étudiées au chapitre 3 permettent de bien séparer la partie perturbation de la partie pertinente des mesures.

2.2 Identification à partir d'essais hétérogènes et dynamiques

2.2.1 Stratégie d'identification : possibilités

2.2.1.1 Contexte d'identification

La partie précédente a montré que d'un point de vue théorique, les paramètres de retard intervenaient de façon non réglable dans des essais à rupture. Il faut à présent s'interroger sur la manière dont ces paramètres peuvent être identifiés, et dans cet objectif, définir une démarche d'identification qui associera les essais et la méthode d'identification.

En ce qui concerne les essais, ils doivent évidemment faire intervenir la partie du comportement où l'effet retard entre en jeu. Cela implique donc des essais de rupture entraînant des phénomènes de localisation, ce qui a plusieurs conséquences, à commencer par l'hétérogénéité des essais ainsi que leur caractère dynamique. D'autre part, comme nous y reviendrons au chapitre 3, le caractère brutal de la rupture et les difficultés de dépouillement des essais dynamiques entraînent de grandes incertitudes de mesure. Il faudra donc en tenir compte dans l'approche choisie, ou tout du moins en étudier les effets. Ce sont ces deux points qui motivent la suite du travail, où a été recherchée une stratégie d'identification pour les essais dynamiques dans un contexte de données expérimentales incertaines.

Le caractère dynamique et hétérogène des essais interdit d'avoir une approche classique où il est possible de considérer que les mesures globales fournies par l'expérience permettent d'obtenir directement la courbe de réponse matériau, comme c'est le cas sur un essai de traction simple. De manière générale, lorsque les essais ne sont plus homogènes, les approches directes ne sont guère possibles, car elles demandent le plus souvent une connaissance forte de l'état de contrainte, afin de le relier à l'état de déformation. Cette connaissance peut être analytique. Citons, toutefois, la méthode des champs virtuels [Grédiac, 1996] qui propose une méthode directe pour les essais hétérogènes à partir de mesures de champs de déplacement ou de déformation, obtenues, par exemple, par méthode optique [Berthaud et al., 2001]. Cette méthode se base sur le principe des puissances virtuelles, où elle injecte les mesures dans les champs réels et choisit judicieusement les champs virtuels de façon à obtenir des équations sur les paramètres à identifier. Une extension de cette méthode vers le cas de l'endommagement des composites est proposée dans [Chalal et al., 2003]. De plus, nous n'avons pas connaissance de son extension au cas de la dynamique transitoire.

Les approches directes ayant été écartées, il reste alors les approches inverses, qui vont utiliser la comparaison entre essai et calcul.

2.2.1.2 Utilisation d'une approche inverse

Un problème inverse peut se définir comme un problème où sont recherchées des quantités permettant de définir le problème direct correspondant. A titre d'exemple, il peut s'agir de la recherche :

- de conditions aux limites manquantes sur un bord inaccessible à la mesure ;
- de fissures dans un milieu, ce qui revient à rechercher la frontière du domaine ;
- ou encore de la relation de comportement.

C'est cette recherche de paramètres matériau qui va nous intéresser ici. Elle est possible du fait d'une certaine redondance des données expérimentales vis-à-vis du problème direct, comme la mesure des efforts et des déplacements sur une même partie de la frontière. Cela signifie que le problème direct avec un jeu de quantités candidates à la solution du problème inverse devient, en général, mal posé.

En définitive, tout problème d'identification peut être vu comme un problème inverse et les approches dites directes le sont dans la mesure où elles résolvent de façon triviale, ou tout du moins analytique, le problème inverse. À titre d'exemple, dans l'essai de traction simple, les hypothèses communément admises sur l'état de contrainte homogène permettent une connaissance analytique de la contrainte et de la déformation dans l'éprouvette, ce qui permet d'obtenir directement la courbe de comportement matériau, à partir des mesures.

On peut formaliser la démarche inverse, comme cela est fait dans [Bui, 1993, Andrieux, 2001]. Ayant un modèle physique dépendant d'un certain nombre de paramètres x , appartenant à un espace X , on cherche à trouver les paramètres de X , tels que la réponse du modèle corresponde à la réponse expérimentale. Celle-ci est déterminée par les mesures et données expérimentales que l'on peut regrouper dans d , élément de l'ensemble des données expérimentales D . Le problème inverse est alors :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } d \in D, \text{ trouver } x \in X \text{ tel que :} \\ A(x) = d, \quad A \text{ représentant la réponse du modèle} \end{array} \quad (2.31)$$

Ce problème peut être mal posé, dans un premier temps du fait qu'il n'est pas certain qu'il existe des paramètres du modèle permettant d'obtenir les mesures expérimentales, ce qui s'exprime par : $d \notin A(X)$. Ceci peut être dû, par exemple, à une trop grande pauvreté du modèle qui n'est pas capable de représenter les phénomènes physiques ou à de possibles perturbations sur les mesures. C'est pourquoi, le problème inverse consistera le plus souvent à rechercher non pas les paramètres qui vérifient exactement (2.31), mais ceux qui vérifient au mieux cette relation. Ceci peut s'exprimer :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } d \in D, \text{ trouver } x \in X \text{ tel que :} \\ x = \underset{x' \in X}{\text{Arg min}} \|A(x') - d\| \end{array} \quad (2.32)$$

C'est encore trouver le jeu de données expérimentales compatibles avec le modèle, $A(x)$, le plus proche des mesures au sens d'une certaine norme. Remarquons que le problème inverse ne se met pas nécessairement sous cette forme. Plus généralement, il fait intervenir une fonction implicite du modèle et des données, du type $\|A(x,d)\|$.

Pour pouvoir résoudre le problème (2.32), que l'on prendra comme définition du problème inverse, il reste à définir $\|\bullet\|$ et $A(\bullet)$.

On peut citer, à titre d'exemple, comme dans [Andrieux, 2001], les problèmes inverses basés sur une fonctionnelle des moindres carrés, où il est possible d'écrire le problème inverse sous la forme (2.32). Le plus souvent A sera défini à l'aide d'un problème direct basé sur le modèle et ses paramètres, ainsi que sur une partie des données expérimentales redondantes. On compare alors les données expérimentales restantes à leur équivalent obtenu par la résolution du problème direct, grâce à une norme à choisir. Une autre famille de fonctions coût est la famille des fonctionnelles de Kohn-Vogelius, initialement appliquées au cas de la thermique [Kohn et Vogelius, 1984]. Dans ce cas, A est défini de façon implicite en séparant les données expérimentales et les champs du problème direct en deux espaces duaux, dépendant des paramètres du modèle. On cherche alors les paramètres du modèle du problème direct qui minimisent une certaine distance entre ces deux espaces. D'un point de vue pratique, ces paramètres sont trouvés en estimant la fonctionnelle à partir d'éléments successifs des deux espaces duaux, jusqu'à trouver ceux qui minimisent la distance.

D'un point de vue pratique, l'identification par approche inverse de paramètres matériau peut encore être schématisée par deux étapes :

1. définition du problème de base : à partir des données expérimentales, on définit un ou plusieurs calculs pour un jeu de paramètres donné ;
2. minimisation d'une fonction coût : à partir des champs solution des problèmes de base, une fonction coût des paramètres matériau est définie. Les paramètres identifiés sont ceux qui minimisent cette fonction coût.

Les deux étapes sont en fait très liées, la définition de la fonction coût influençant le choix du problème de base. D'ailleurs, on peut remarquer que le découpage en deux étapes proposé ici ne correspond pas à celui qui est fait dans (2.32) entre $\|\bullet\|$ et $A(\bullet)$.

Remarque :

L'identification par approche inverse variationnelle directe, comme celle présentée ici, étant un problème de minimisation de fonction positive, il admet toujours au moins une solution. Cependant celle-ci n'est pas forcément unique et de plus, elle fournit une solution même si le modèle dont les paramètres sont recherchés n'est pas du tout réaliste. Il peut donc être intéressant d'utiliser une méthode capable de quantifier l'erreur qui est faite sur le modèle.

Une partie importante de l'identification inverse revient donc à chercher le minimum d'une fonction coût. Les algorithmes permettant cette minimisation peuvent se classer en deux grandes familles :

- Les algorithmes exploratoires, parmi lesquels les algorithmes génétiques, [Goldberg, 1989] :

Il s'agit d'obtenir le minimum en évaluant la fonction coût en un grand nombre de points. En fin d'algorithme, on garde le meilleur candidat à la minimisation. Afin de limiter le nombre d'évaluations, la technique des algorithmes génétiques revient à faire évoluer une population de jeux de paramètres selon des critères issus de la sélection naturelle. Le critère de performances des individus étant donné par la fonction coût, on itère sur la population les opérations suivantes : disparition d'une

partie de la population par pression sélective, croisement et reproduction des survivants avec possibilités de mutation pour permettre d'explorer des zones nouvelles de l'espace des paramètres et permettre une diversité suffisante. L'avantage de ces algorithmes est qu'ils permettent de trouver plusieurs minima locaux, s'il y en a, mais demeurent assez coûteux puisqu'ils demandent un grand nombre de calculs.

– Les algorithmes de descente :

Il s'agit, partant d'un jeu de paramètres de descendre le long de la nappe de la fonction coût, de façon à en trouver le minimum ; cela revient d'une certaine façon à estimer son gradient. Pour cela, de nombreuses méthodes existent (méthode du simplexe, méthode de Newton, méthode du gradient conjugué, méthode de l'état adjoint, [Andrieux, 2001]). L'avantage de ce type de méthodes est le coût de calcul relativement limité. Cependant, le risque est d'obtenir un minimum local, dépendant du choix du premier point. C'est pourquoi, certaines méthodes couplent les deux approches, exploratoire dans un premier temps, puis de descente une fois que le bon minimum est sélectionné.

On peut enfin citer les algorithmes basés sur les surfaces de réponse. Il s'agit, à partir de l'évaluation de la fonction coût en quelques points et d'une forme supposée régulière et connue analytiquement de celle-ci, d'obtenir le jeu de paramètres minimisant la fonctionnelle pour cette forme régulière. Il est alors possible d'itérer l'opération autour du point obtenu, ou de la coupler à une méthode de descente.

2.2.2 Première approche, basée sur l'écart entre solutions

L'effet retard n'intervenant dans le comportement que lors des phases de localisation et de ruine, les essais sur lesquels peut se baser son identification doivent faire intervenir le phénomène de rupture. Si l'on souhaite une analyse fine de ces phénomènes, il faudra prendre en compte leur caractère dynamique. Le paragraphe 2.2.1 a permis de mettre en avant les points clefs de la stratégie d'identification des paramètres de l'effet retard :

1. une approche inverse pour des essais hétérogènes en dynamique transitoire ;
2. du fait des difficultés expérimentales, une prise en compte des incertitudes sur les mesures.

Pour le premier point, la méthode proposée dans [Rota, 1994] semble tout à fait adaptée. Afin de la confronter au second point et pour la présenter dans un cadre simple, elle est ici illustrée sur le cas simple d'un essai sur une barre élastique homogène dont on cherche à identifier le module d'Young, problème qui sera présenté plus en détail au 3.1.2.2. Les mesures sont les efforts et les déplacements aux deux extrémités (figure 3.2). Cela peut correspondre aux mesures issues d'un essai aux barres d'Hopkinson, considéré comme unidimensionnel. La méthode et ses fondements théoriques étant largement développés dans [Rota, 1996], on se contentera, ici, d'en donner le principe dans le cas particulier étudié.

2.2.2.1 Problème de base

On considère le problème mécanique défini par la figure 3.2. Il existe toute une partie de la frontière comprenant des données redondantes. Le problème ainsi défini est un problème de mécanique mal posé puisqu'il n'admet une solution que si les conditions aux

limites duales sont compatibles avec le comportement. Cela signifie que, sauf cas particulier, ce problème n'admet pas de solution. C'est pourquoi, à partir du problème de départ, sont redéfinis deux problèmes duaux qui ne reprennent qu'une des deux conditions aux limites par extrémité. Typiquement, on choisit un problème en déplacement et un en effort. Ceci aboutit à deux solutions, l'une dite Statiquement Admissible (SA), puisqu'elle vérifie les conditions aux limites en effort, et une Cinématiquement Admissible (CA), vérifiant les conditions aux limites en déplacement. Si les paramètres matériau du calcul correspondent à ceux de l'expérience, les solutions des deux problèmes seront identiques (deux problèmes duaux l'un de l'autre, le passage des conditions aux limites de l'un à celles de l'autre se faisant par la transformée de Dirichlet-Neumann (DN), ou son inverse (ND)). Si les paramètres matériau diffèrent, ces solutions ne seront pas les mêmes, et il est alors possible de définir un écart entre ces solutions qui quantifie la qualité de la relation de comportement. L'identification consiste alors à minimiser cet écart par rapport aux paramètres matériau.

2.2.2.2 Définition d'un écart

Il reste encore à choisir un écart entre les solutions des deux calculs, S_{SA} et S_{CA} , ce qui peut dépendre de différents paramètres, notamment du type de loi de comportement que l'on cherche à identifier. Un écart doit vérifier les propriétés suivantes :

- $e(S_{SA}, S_{CA}) = e(S_{CA}, S_{SA})$ (symétrie)
- $e(S_{SA}, S_{CA}) \geq 0$ (positivité)
- $e(S_{SA}, S_{CA}) = 0 \Rightarrow S_{SA} \equiv S_{CA}$

Dans le cas élastique, on peut citer :

- Écart quadratique sur les conditions aux limites :

C'est le plus simple, qui compare les conditions aux limites du calcul avec celles de l'expérience :

$$\Delta q_t = \| F_{SA} - F_{CA} \|^2 + \| U_{SA} - U_{CA} \|^2$$

- Écart au sens de Drucker :

Il ne convient que pour des matériaux stable au sens de Drucker, [Drucker, 1964], sans quoi sa positivité n'est pas assurée.

$$D_{xt} = \int_0^t (\sigma_{SA} - \sigma_{CA}) : (\dot{\epsilon}_{SA} - \dot{\epsilon}_{CA}) dt$$

- Écart en Relation de Comportement :

Il utilise le potentiel d'état thermodynamique qui définit la relation de comportement. Celui-ci doit alors être un potentiel convexe pour que les résultats suivants soient valables. Dans le cas de l'élasticité, celui-ci est donné par :

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T K^{-1} \sigma, \quad \text{avec } K \text{ le tenseur élastique} \quad (2.33)$$

La transformée de Legendre-Fenchel de Ψ est alors définie par :

$$\begin{aligned} \Psi^*(\epsilon) &= \sigma^T \epsilon - \Psi(\sigma) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^T K \epsilon \end{aligned} \quad (2.34)$$

L'inégalité de Legendre-Fenchel assure alors la positivité du résidu de Legendre-Fenchel défini par :

$$\eta_{\Psi}(\sigma, \varepsilon) = \Psi(\sigma) + \Psi^*(\varepsilon) - \langle \sigma, \varepsilon \rangle$$

où $\langle \sigma, \varepsilon \rangle$ est le produit scalaire associé à l'énergie élastique.

Notons que c'est sur cette même propriété du résidu de Legendre-Fenchel que la stratégie d'identification présentée au chapitre 3 se basera. On définit alors l'écart par :

$$\Delta_{xt}^{\Psi} = \eta_{\Psi}(\sigma_{CA}, \varepsilon_{SA}) + \eta_{\Psi}(\sigma_{SA}, \varepsilon_{CA})$$

De plus, en faisant l'hypothèse que les calculs fournissent des solutions exactes (au sens de la précision de l'identification), on remarque que :

$$\eta_{\Psi}(\sigma_{CA}, \varepsilon_{CA}) = 0$$

$$\eta_{\Psi}(\sigma_{SA}, \varepsilon_{SA}) = 0$$

On peut alors montrer que l'écart s'écrit encore :

$$\Delta_{xt}^{\Psi} = (\sigma_{CA} - \sigma_{SA}) \cdot (\varepsilon_{CA} - \varepsilon_{SA})$$

Pour chaque écart, on vient de définir la contribution instantanée et locale. Il sera utile de définir, la contribution instantanée de l'ensemble du volume puis l'écart sur l'ensemble de l'intervalle de temps. Celui-ci peut être choisi comme le Sup ou l'intégrale sur le temps.

On peut remarquer que cette méthode s'étend simplement au cas des comportements non-linéaires, puisqu'il suffit de définir un écart adapté, les calculs pour résoudre les problèmes de base restant des simulations standards. Dans notre cas, pour l'identification de l'effet retard, l'écart au sens de Drucker ne conviendrait pas, à cause du caractère adoucissant de la phase post-pic. En revanche, l'écart quadratique ou un écart basé sur les résidus de Legendre-Fenchel des lois d'évolution sont envisageables.

2.2.2.3 Robustesse vis-à-vis des perturbations de mesure

La méthode présentée dans le paragraphe précédent impose de manière forte les mesures comme conditions aux limites du calcul. On peut alors se demander si cela ne risque pas de créer une incompatibilité des conditions aux limites duales non pas due à la relation de comportement mais simplement à l'incompatibilité des perturbations en déplacement avec celles en effort. Ceci pourrait alors perturber le processus d'identification.

Afin d'étudier ce point, la méthode a été testée avec des conditions aux limites successivement exactes et perturbées. Pour cela, on prend comme exemple le cas d'une poutre élastique encastrée à l'un de ses bords et subissant une sollicitation de type demi-sinus en effort à son autre extrémité, représentée figure 3.2. Afin de simuler les mesures exactes, on effectue un premier calcul avec ces conditions aux limites, duquel on ressort les efforts et les déplacements au bord. On peut ensuite, perturber les mesures, par exemple par des fonctions sinus de fréquence plus haute ou encore des réalisations de bruit blanc.

La figure 2.14 présente la valeur de la fonction coût en fonction du module d'Young adimensionné à identifier. Elle présente le cas des mesures non perturbées et celui des mesures perturbées. Dans chacun des cas, sont représentées les fonctionnelles de type écart quadratique et écart en relation de comportement. Elle montre bien que la méthode

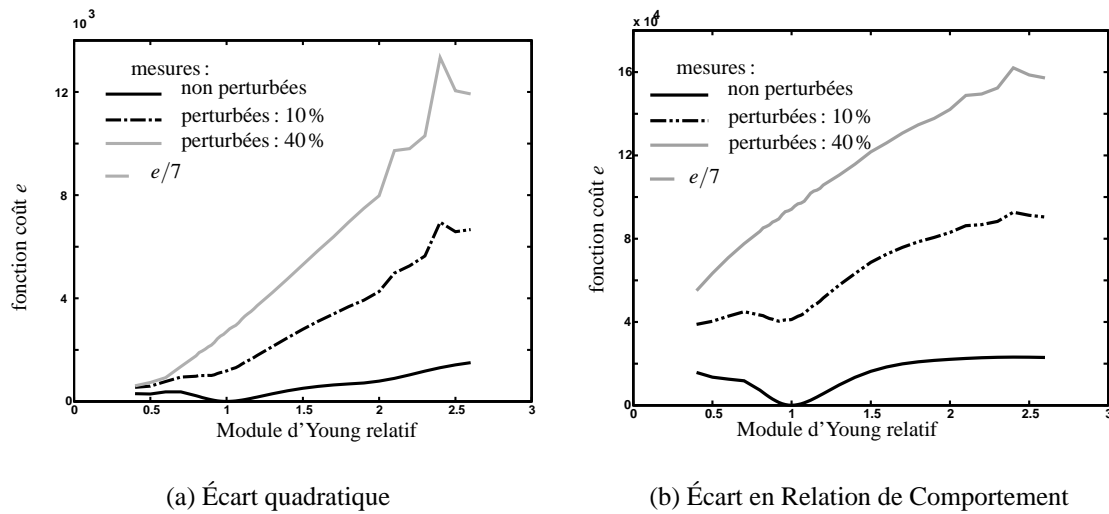


Figure 2.14 – Fonction coût selon le type d'écart, méthode issue de [Rota, 1996]

est efficace pour des mesures non perturbées. En revanche, elle semble mettre en exergue les limites de la méthode pour des mesures fortement perturbées. Des études de cas intermédiaires en terme d'amplitude relative de perturbation indique que pour le type de perturbation choisi, l'identification devient impossible au-delà de 10% de perturbation.

On peut tenter de l'expliquer par le fait que, la relation de comportement étant vérifiée de manière forte dans les deux calculs, les perturbations ont une certaine influence sur les champs au cœur de la barre. Ainsi, l'écart entre les calculs est artificiellement important, du fait de l'incompatibilité des perturbations des conditions aux limites avec la relation de comportement.

Cette illustration nous conforte dans l'idée que la perturbation doit être prise en compte d'une manière ou d'une autre dans la formulation.

Bilan sur la méthode :

Cette étude a permis de confirmer l'aptitude de la méthode pour l'identification dans le cas de mesures certaines ou faiblement perturbées. On peut remarquer également la relative facilité de mise en œuvre, puisqu'elle ne fait appel qu'à des calculs standards. En revanche, l'exemple a mis en avant les lacunes de la méthode lorsqu'elle est confrontée à des perturbations de mesures importantes. Ceci peut trouver son origine dans le fait que, d'une part, aucun traitement particulier n'est prévu pour prendre en compte les incertitudes. D'autre part, on effectue deux calculs séparément, cette séparation étant arbitraire, quant au choix des conditions aux limites que l'on conserve dans chaque calcul.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de dresser un tableau de la problématique liée à l'identification des paramètres du modèle à effet retard à partir d'essais. Dans un premier temps, il a été possible de donner des limites à l'identification des paramètres du point de vue du modèle.

Dans un second temps, les possibilités pour le choix d'une méthode d'identification

ont été discutées, et une première méthode, issue de [Rota, 1996], a été testée sur un exemple simple. Il ressort de ce premier exemple, que cette approche est tout à fait adaptée dans le cas d'essais bien maîtrisés, où les perturbations sur les mesures ne sont pas trop importantes. En revanche, dans le cas de mesures perturbées, comme on s'attend à en avoir dans les essais d'identification des paramètres de retard, la méthode est mise en défaut. Dans le prochain chapitre, nous tentons d'apporter une réponse à ce problème en proposant une méthode qui prend en compte le caractère incertain des mesures.

Chapitre 3

Stratégie d'identification et prise en compte des perturbations de mesure

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle stratégie d'identification, basée sur les principes de l'erreur en relation de comportement et prenant en compte les incertitudes sur les mesures. Tout d'abord présentée dans le cas général, elle est ensuite étudiée dans le cas d'une barre élastique sollicitée en dynamique. Sur cet exemple, nous étudions notamment la robustesse vis-à-vis des perturbations.

Sommaire

3.1	Stratégie d'identification : cas de l'élasticité linéaire	52
3.1.1	Prise en compte des incertitudes de mesure	52
3.1.2	Problème de référence	54
3.1.3	Approche basée sur l'erreur en relation de comportement	57
3.2	Identification sur l'exemple d'une barre homogène	62
3.2.1	Problème de base en $1D$	62
3.2.2	Champs solution, carte de contribution à l'erreur	63
3.2.3	Identification	69
3.3	Formulation sans terme de distance aux mesures	73
3.3.1	Formulation	73
3.3.2	Illustration : champs solution	75
3.3.3	Fonction coût	77
3.4	Terme de distance aux mesures	77
3.4.1	Choix du poids et valeur relative des termes	78
3.4.2	Stratégie d'identification selon la connaissance des perturbations	79
3.5	Conclusion	81

3.1 Stratégie d'identification : cas de l'élasticité linéaire

La méthode mise en œuvre au 2.2.2 était une première approche inverse susceptible de s'appliquer à l'identification de loi de endommagement jusqu'à rupture. Un exemple simple a montré que l'absence de prise en compte des perturbations rend cette méthode insuffisamment robuste pour les perturbations de mesures très importantes auxquelles on s'attend. Après une brève étude des possibilités de prise en compte des incertitudes, une nouvelle méthode basée sur l'erreur en relation de comportement est proposée.

3.1.1 Prise en compte des incertitudes de mesure

De façon générale, les problèmes inverses sont des problèmes qui peuvent être très sensibles aux perturbations des données expérimentales. C'est pourquoi de nombreuses techniques existent pour essayer de régulariser ces problèmes. Malgré tout, beaucoup de ces méthodes fonctionnent pour des niveaux de perturbations assez limités. Un des problèmes, dans le contexte dans lequel nous nous sommes placés, est le manque d'information sur l'amplitude des perturbations, qui est *a priori* très élevée.

Ayant cela à l'esprit, un certain nombre de démarches offertes par la littérature sont regardées.

Une première approche, qui est sans doute la plus simple, consiste à agir directement sur les mesures par des techniques du traitement du signal, afin de filtrer les perturbations. Ces méthodes sont notamment efficaces dans le cas où les perturbations proviennent d'un bruit non corrélé et d'amplitude raisonnable. Il faut de plus pouvoir caractériser le bruit correctement pour le traiter efficacement.

Une voie différente consiste à imposer fortement la régularité sur les champs ou les propriétés recherchés, par des méthodes de troncature. Il s'agit, en fait, de réduire l'espace de recherche, en en proposant une base de taille limitée. C'est notamment ce qui est proposé dans [Rota, 1996], pour traiter les perturbations des conditions aux limites.

Cependant, ces deux types de méthodes ont une efficacité limitée, car elles ne changent pas la nature du problème inverse, qui reste sensible aux perturbations ; elles essayent juste d'éliminer les perturbations. Loins d'être inutiles, ces méthodes ne seront sans doute pas suffisantes.

Ce premier jeu de méthodes agit, finalement, en amont du problème d'identification, sans modifier la démarche en tant que telle. Pour gagner en efficacité, il faut sans doute intégrer cette prise en compte du caractère perturbé de certaines données dans la stratégie d'identification, cela dans l'espoir que les améliorations apportées aux mesures seront en meilleur accord avec le problème à traiter.

C'est notamment ce qui est fait dans les formulations basées sur le filtre de Kalman. Celui-ci est une approche basée sur des principes probabilistes, et plus particulièrement sur les propriétés du meilleur estimateur [Kalman, 1960]. Il permet, en enrichissant les données expérimentales au fur et à mesure du processus, de déterminer l'état d'un système ou les paramètres qui le régissent. La prise en compte des incertitudes se fait donc par une approche statistique, et la méthode fournit notamment une mesure de l'incertitude sur l'estimation des paramètres identifiés, grâce à la matrice de covariance de ceux-ci. Cette méthode, initialement prévue pour les systèmes linéaires, a été étendue au cas des

problèmes non-linéaires. Une présentation de cette extension est notamment reprise dans [Corigliano et al., 2000], où une mise en œuvre numérique de la méthode est proposée. La démarche a récemment été étudiée dans [Corigliano et Mariani, 2003], dans le cadre de l'impact dynamique.

Une autre approche de régularisation du problème d'identification est celle de Tikhonov, [Tikhonov et Arsenin, 1977]. Elle consiste à venir ajouter un terme dit de régularisation à la fonctionnelle qui doit être minimisée, dans les approches inverses variationnelles. Ce terme est typiquement une distance à une valeur raisonnable des quantités recherchées ou un terme imposant une certaine régularité, par exemple, la norme de la dérivée des champs recherchés. En conséquence de l'ajout de ce terme, les solutions en absence de perturbations sont d'autant changées que l'on donne de l'importance au terme de régularisation. La minimisation de deux termes simultanément pose donc la question d'une pondération judicieuse de chaque terme par rapport à l'autre. Plusieurs critères de choix de ce poids existent, repris dans [Bui, 1993, Andrieux, 2001], qui se basent sur une connaissance *a priori* des amplitudes de perturbations. Ceci est, dans le cadre que l'on s'est fixé, un problème puisque cette connaissance *a priori* n'est pas accessible. De plus, ce type d'approche donne de bons résultats tant que les perturbations ne sont pas trop importantes.

Si on essaye de dresser un bilan sur ces deux méthodes, elles permettent, pour des perturbations raisonnables, d'obtenir des solutions régularisées et pertinentes. Elles agissent donc sur les sorties du problème d'identification. Notre problème, pour appliquer ces méthodes, est qu'il n'est pas possible, dans notre contexte d'identification, de définir un problème à partir de mesures ou de données fiables, c'est-à-dire que d'une certaine façon les entrées du problème d'identification sont toutes non fiables. Or ce sont bien elles que nous aimerions régulariser pour qu'elles ne perturbent pas le processus d'identification, sachant qu'un filtrage s'avérerait insuffisant.

Certains travaux proposent de traiter le caractère incertain des données du problème, en cherchant à l'intégrer à la démarche. Citons tout d'abord [Andrieux et Voltaire, 1995], qui proposent une régularisation au sens de Tikhonov dans une première étape du problème d'identification. L'intérêt principal est de pouvoir imposer des conditions aux limites plus régulières dans la suite.

Dans ce même esprit, les travaux présentés dans [Cimetière et al., 2000, Delvare et al., 2003] n'imposent pas de manière forte les mesures perturbées aux calculs nécessaires à l'approche inverse. D'autre part, une régularisation supplémentaire est possible grâce à une démarche itérative de minimisation de problèmes successifs, dont le comportement est sain. Ces applications portent sur le problème de Cauchy, où les conditions aux limites sur une partie de la frontière sont recherchées. La démarche revient à rechercher une suite de champs solution qui vérifieront fortement les équations d'équilibre (ici, $\Delta u = 0$) et qui minimiseront une erreur formée d'une distance aux conditions aux limites expérimentales et d'un terme évanescent lié à la stratégie itérative. Ce terme est une distance entre les champs recherchés et les champs solution de l'étape précédente. Il permet à l'algorithme de converger sainement vers la solution du problème sans second terme, qui reste un problème régularisé vis-à-vis des mesures. À notre connaissance, la méthode n'a pas été étendue à des problèmes en dynamique.

Dans [Magiera et al., 1996, Orkisz et Skrzat, 1996], les auteurs proposent une démarche d'identification de champs de contraintes résiduelles, dans laquelle ils cherchent à minimiser une fonctionnelle comprenant deux termes, l'un représentant l'expérience et l'autre

la théorie. L'ensemble des données expérimentales peut être pris en compte dans un seul calcul, ce qui semble un point important pour la réussite de la méthode. Un soin particulier est apporté au choix du poids du terme expérimental devant le terme théorique. Il est choisi le plus petit possible tout en vérifiant que la distance entre les mesures et les quantités obtenues correspondantes ne dépasse pas les marges de précision expérimentales, déterminées au préalable.

L'ensemble de ces méthodes cherche à traiter les perturbations au cours de l'identification. Certaines méthodes demandent de connaître *a priori* les caractéristiques du bruit, mais l'idée qui semble ressortir est que, pour être efficace, il faut redéfinir le problème d'identification en intégrant la prise en compte des incertitudes dans la démarche, avant même tout traitement explicite des incertitudes de mesures. De plus, [Orkisz et Skrzat, 1996] insistent sur l'importance de la prise en compte de l'ensemble des données expérimentales en une seule fois dans la démarche.

Ces idées se retrouveront dans les travaux présentés dans la suite, grâce au concept d'erreur en relation de comportement qui met justement l'accent sur la séparation des grandeurs entre quantités fiables et non fiables, avant d'englober toute l'information dans la définition d'un unique problème.

3.1.2 Problème de référence

3.1.2.1 Cas général

Afin de proposer une première mise en œuvre des méthodes, dans un cadre d'étude simplifié, on se propose de se placer dans la problématique d'identification inverse suivante :

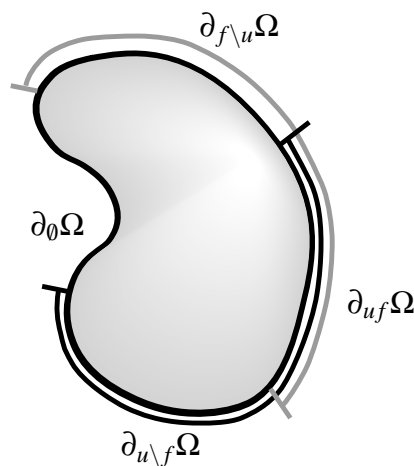


Figure 3.1 – Problème direct 3D associé au problème d'identification

On considère une structure dont le comportement est élastique linéaire, homogène ou non, et dont on cherche à identifier les caractéristiques matériau. L'identification se fait sur le problème suivant : la structure est soumise à un chargement dynamique transitoire et les déplacements et les efforts sont connus sur deux parties non disjointes de la frontière, à chaque instant. Pour définir le problème direct correspondant, schématisé figure 3.1, on

a donc sur la frontière à chaque instant :

- sur $\partial_u \Omega = \partial_{u \setminus f} \Omega \cup \partial_{uf} \Omega$, déplacements imposés.
- sur $\partial_f \Omega = \partial_{f \setminus u} \Omega \cup \partial_{uf} \Omega$, forces imposées.
- en notant que : $\partial_{uf} \Omega = \partial_u \Omega \cap \partial_f \Omega$ n'est pas vide.

Remarque :

Ce problème direct est, en règle générale, mal posé pour au moins deux raisons :

- la redondance des conditions aux limites sur une partie de la frontière, $\partial_{uf} \Omega$ a pour conséquence, le plus souvent, la non existence de la solution, à moins que les conditions aux limites redondantes soient compatibles avec la relation de comportement. Pour illustration, cette compatibilité signifie que les déplacements imposés correspondent aux déplacements obtenus par la résolution du problème où ne sont conservés sur $\partial_{uf} \Omega$ que les efforts ;
- l'absence de conditions aux limites sur une partie de la frontière $\partial_\theta \Omega$ peut avoir pour conséquence, la non-unicité de la solution. Ce sera le cas, notamment si $\partial_{uf} \Omega = \emptyset$, puisqu'alors toute condition aux limites en effort ou en déplacement imposée sur $\partial_\theta \Omega$ complète le problème en un problème bien posé qui admet une unique solution. La prise en compte de cette partie de la frontière est donc un problème délicat et il existe des méthodes afin de compléter les conditions aux limites manquantes de façon optimale vis-à-vis d'un certain critère. De façon générale, on essaye de limiter cette partie de la frontière sans information, car elle rend plus délicat le problème d'identification, en appauvrissant les incompatibilités des conditions aux limites redondantes.

Dans le cas général où coexistent les parties de la frontière $\partial_{uf} \Omega$ et $\partial_\theta \Omega$, il semble délicat de dire laquelle des deux parties rend le problème mal posé. Ce que l'on peut toutefois dire, c'est que si $\partial_\theta \Omega$ rend le problème mal posé pour une famille de comportement, alors les données expérimentales ne permettront pas d'identifier la relation de comportement de façon unique. Dans les exemples d'identification traités dans la suite, $\partial_\theta \Omega$ n'existe pas.

On peut noter que ce cadre ne prend pas en compte les mesures de champs de déplacement qui se développent beaucoup actuellement. Ce choix est fait, d'une part, pour fixer un cadre simple d'identification et, d'autre part, parce qu'il semble que d'un point de vue Éléments Finis, il n'y a pas de réelle différence entre des mesures de frontière ou dans le volume (même si les données expérimentales dans le cas de mesures de champs sont beaucoup plus riches). De plus, comme il a été dit l'acquisition d'images en dynamique rapide pour reconstruire des champs de déplacement est encore un point délicat.

Ce problème direct modélise donc l'expérience à partir de laquelle on cherchera à identifier les paramètres de la relation de comportement. *A priori*, le matériau de la structure n'a pas de raison d'être homogène, et on peut vouloir chercher à identifier un champ de propriété. Cela donne lieu en général à des problèmes d'identification mal posés, notamment dans le cas statique [Andrieux, 2001], et il faut, en général, imposer des connaissances supplémentaires sur le champ de propriété, afin de réduire le nombre de paramètres à identifier, ce qui peut permettre d'obtenir un problème d'identification à solution unique,

même s'il peut conserver des minima locaux. Cette question de l'identification de structure hétérogène sera abordée au chapitre 5.

Dans les premiers exemples, on se basera sur le cas unidimensionnel présenté ci-dessous au 3.1.2.2, où la structure est homogène et où les mesures sont suffisantes pour permettre l'identification en absence de perturbation.

3.1.2.2 Cas unidimensionnel

La plupart des illustrations de la méthode présentée ici et de celle présentée au 2.2.2 traite de l'exemple unidimensionnel présenté ci-après.

La structure étudiée est une barre de longueur L , dirigée selon l'axe x , sollicitée en traction-compression à ses extrémités et libre d'effort linéique.

Les mesures expérimentales sont du type de celles que l'on obtient lors d'un essai aux barres d'Hopkinson, il s'agit donc des efforts et des déplacements aux deux extrémités de la barre, d'abscisse $x = 0$ et $x = L$. En reprenant les notations de la figure 3.1, on a donc :

- $\partial_{uf}\Omega = \{x = 0, x = L\}$;
- $\partial_{u \setminus f}\Omega = \emptyset$;
- $\partial_{f \setminus u}\Omega = \emptyset$;
- $\partial_{\theta}\Omega = \emptyset$.

Le problème direct modélisant l'essai est représenté figure 3.2.

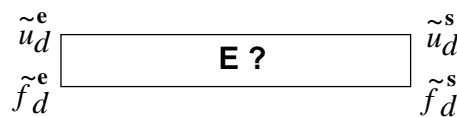


Figure 3.2 – Problème 1D d'identification à partir de conditions aux limites redondantes

Les équations du problème direct sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équilibre : } \rho \cdot \ddot{u} - \sigma_{,x} = 0 \\ \text{Relation de comportement : } \sigma = E \cdot u_{,x} \\ \text{Conditions aux limites : } u(0,t) = \tilde{u}_0, \quad u(L,t) = \tilde{u}_L \\ \qquad \qquad \qquad \sigma(0,t) \cdot S = -\tilde{F}_0, \quad \sigma(L,t) \cdot S = \tilde{F}_L \\ \text{Conditions initiales : } u(x,0) = u_0, \quad \dot{u}(x,0) = \dot{u}_0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Mesures expérimentales :

Afin de disposer de mesures expérimentales pour appliquer les différentes stratégies d'identification, une simulation numérique du problème direct (3.1) est effectuée avec un paramètre matériau de référence E_0 , que l'on cherchera à identifier par la suite. La barre est, comme l'indique la figure 3.3, encastée à l'une de ses extrémités et sollicitée à l'autre. Un calcul Éléments Finis est mené en utilisant un schéma temporel explicite. À la fin de la simulation, les efforts et les déplacements aux deux extrémités de l'éprouvette sont récupérés. Puis, il est possible de rajouter des perturbations à ces conditions aux limites « exactes », par exemple en y ajoutant une réalisation de bruit blanc gaussien ou encore

un sinus de fréquence élevée, dont on pourra faire varier l'amplitude. Pour quantifier le niveau des perturbations, plusieurs possibilités s'offrent à nous :

- l'ordre de grandeur des mesures peut être quantifié par la valeur maximale de chaque quantité, par sa moyenne ou encore sa moyenne quadratique ;
- l'ordre de grandeur des perturbations peut de la même façon être qualifié par son amplitude (valeur maximale ou pic à pic) ou son écart-type.

On choisit ici de prendre le rapport de l'amplitude au sens de la valeur maximale de la perturbation sur la valeur maximale du signal perturbé (pour l'encastrement, on conserve la valeur maximale des conditions aux limites de l'autre extrémité pour définir l'amplitude des perturbations, sans quoi celles-ci seraient nulles).

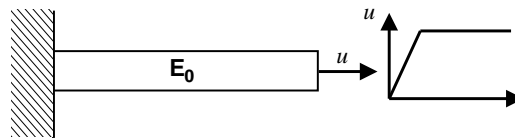


Figure 3.3 – Essai numérique

3.1.3 Approche basée sur l'erreur en relation de comportement

Ayant fixé le cadre d'identification dans lequel on souhaite travailler, il est possible à présent de présenter la méthode qui a été employée ici.

3.1.3.1 Contexte et philosophie

La méthode présentée dans la suite se base sur le concept d'erreur en relation de comportement, développé par Ladevèze, qui est appliqué au domaine de la validation depuis 1983 [Ladevèze, 1983]. L'approche a été tout d'abord appliquée au recalage de structures en dynamique vibratoire, sur la base de l'analyse modale, afin de corriger les erreurs de masse et de raideur des modèles [Ladevèze et al., 1994]. Puis elle a été étendue au recalage de l'amortissement et des non-linéarités dans les structures ou les liaisons, [Chouaki et al., 1998]. Enfin, de récents travaux ont permis d'appliquer la démarche en vue du contrôle actif de structures contenant des éléments piezo-électriques, tant en régime modal que transitoire, [Formosa, 2002]. De plus, la prise en compte des incertitudes a été introduite dans le problème de recalage, conduisant ainsi au concept d'erreur en relation de comportement modifiée, [Deraemaeker et al., 2002].

Par ailleurs, on peut noter que le concept d'erreur en relation de comportement a également été appliqué au domaine de la vérification, pour l'estimation *a posteriori* de la qualité des calculs. Ceci a donné lieu à de nombreux travaux dont certains ont pris en compte le modèle à effet retard [Ladevèze et al., 1999].

L'idée maîtresse de l'erreur en relation de comportement est de considérer l'ensemble des données du problème, tant théoriques qu'expérimentales et de séparer les quantités fiables des quantités non fiables, afin de développer la démarche à partir de cette séparation. Il semble donc que cette stratégie soit applicable dans notre contexte d'identification.

3.1.3.2 Formulation

On peut dès à présent remarquer que la redondance des conditions aux limites rend le problème de la figure 3.1 mal posé, c'est-à-dire qu'en règle générale il n'admet pas de solution. En fait, il n'en admettra une que lorsque la loi de comportement sera compatible avec les conditions aux limites. L'identification va, en fait, se baser sur une quantification de cette non-compatibilité des paramètres vis-à-vis des conditions aux limites pour les identifier. Afin de pouvoir définir le problème de base nécessaire à l'approche inverse, il faut relâcher un certain nombre d'équations du problème de référence tel qu'il est posé au 3.1.2.1. Dans la méthode présentée au 2.2.2, le choix était fait de relâcher un certain nombre de conditions aux limites dans chaque problème de façon à le rendre bien posé. Ici, le parti pris de l'erreur en relation de comportement est de séparer les quantités en quantités fiables et quantités non fiables, et de relâcher les quantités non fiables pour simplement les vérifier au mieux. Dans notre cas, la séparation est la suivante :

Fiable	Non fiable
Équilibre : $\rho \cdot \ddot{u} - \text{div} \sigma = 0$	Relation de comportement : $\sigma = E \cdot \varepsilon$
Conditions initiales : $u(x,0) = u_0$ $\dot{u}(x,0) = \dot{u}_0$	Conditions aux limites : \tilde{u}_d et \tilde{f}_d

Tableau 3.1 – Quantités fiables et non fiables dans le cas élastique

Le problème de base devient donc :

<p>Trouver les champs u, σ, u_d, f_d minimisant :</p> $J(\sigma, u, u_d, f_d) = \int_0^T \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma - E \cdot \varepsilon) \cdot E^{-1} \cdot (\sigma - E \cdot \varepsilon) + \int_{\partial\Omega_f} d_f(f_d, \tilde{f}_d) + \int_{\partial\Omega_u} d_u(u_d, \tilde{u}_d)$ <p>sous les contraintes :</p> $u \in \mathcal{U}_{Ad}(u_d), \quad \sigma \in \mathcal{D}_{Ad}(f_d, u) \quad (3.2)$
--

où les espaces introduits sont définis par :

- $\mathcal{U}_{Ad}(u_d) = \left\{ u \in H^1(\Omega) / u = u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \text{ et } u|_{t=0} = u_0, \dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0 \right\}$; on dira encore que u est CA, c'est-à-dire Cinématiquement Admissible ;
- $\mathcal{D}_{Ad}(f_d, u) = \left\{ \sigma \in H_{\text{div}}(\Omega) / \sigma \cdot n = f_d \text{ sur } \partial\Omega_f, \quad \rho \cdot \ddot{u} - \text{div} \sigma = 0 \text{ sur } \Omega \right\}$; on dira encore que σ est DA, c'est-à-dire Dynamiquement Admissible ; de plus, les champs u et σ devant vérifier l'équilibre dynamique, ils sont liés.

D'autre part, d_f représente une distance entre les mesures \tilde{f}_d et les conditions aux limites du calcul f_d . Typiquement, on prendra :

$$d_f(f_d, \tilde{f}_d) = \frac{B}{2} \cdot (f_d - \tilde{f}_d)^2$$

d_u est défini de façon analogue :

$$d_u(u_d, \tilde{u}_d) = \frac{A}{2} \cdot (u_d - \tilde{u}_d)^2$$

A et B jouent un rôle de pondération entre le terme d'erreur en relation de comportement portant sur le modèle et le terme d'erreur sur les mesures. On verra au 3.4.1, comment ces poids sont choisis. Une définition plus générale des distances aux mesures est également possible, permettant de définir une distance plus globale entre les conditions aux limites et les mesures. Cela peut permettre notamment de ne pas imposer cette minimisation en chaque point, mais d'introduire une certaine régularité des conditions aux limites. Ainsi, il est possible de définir la norme sur les efforts ou les déplacements à l'aide d'une norme H^1 ou L^2 , basées respectivement sur l'énergie de déformation et l'énergie cinétique des prolongements dans Ω des conditions aux limites. Pour cela, on pourra se référer, par exemple, aux travaux menés en recalage, [Barthe et al., 2003].

Remarque :

- Si la zone mixte de la frontière n'existe pas, c'est-à-dire si $\partial_{uf}\Omega = \emptyset$, et que les mesures sont exactes la formulation retombe sur une formulation classique. De même, si les conditions aux limites duales sur $\partial_{uf}\Omega$ sont compatibles avec les relations de comportement. On remarque alors que le minimum prend pour valeur zéro, ce qui signifie que la relation de comportement est vérifiée.
- En revanche, si la frontière mixte n'est pas de mesure nulle, ce problème possède une solution alors que le problème classique est mal posé. Si, de plus, l'incompatibilité des mesures vis-à-vis des relations de comportement est due au bruit sur les mesures, celle-ci pourra être estompée grâce au second terme.
- Pour la zone $\partial_0\Omega$, on peut remarquer que les conditions aux limites solution du problème minimisent l'erreur en relation de comportement, et ainsi ne sont pas quelconques. Cependant, l'influence de cette partie de la frontière n'a pas été étudiée dans la suite, puisqu'elle n'apparaît pas dans les exemples traités.

Une fois le problème de base déterminé, il reste à définir une fonction coût pour évaluer la qualité des paramètres matériau. On a vu que la fonctionnelle utilisée pour le problème de base fournissait une évaluation de la qualité de la relation de comportement choisie. Il semble donc justifié de conserver la même fonctionnelle pour l'identification des paramètres matériau. La formulation de l'identification revient donc à :

$$\min_E J(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E), E) \quad (3.3)$$

où la fonctionnelle J est définie dans (3.2). On note encore :

$$g(E) = J(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E), E) \quad (3.4)$$

avec $(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E))$, solution de (3.2) :

$$(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E)) = \underset{\substack{u \in \mathcal{U}_{Ad}(u_d) \\ \sigma \in \mathcal{D}_{Ad}(f_d, u) \\ u_d, f_d}}{\text{Arg min}} J(\sigma, u, u_d, f_d, E) \quad (3.5)$$

On peut donc voir le problème globalement comme :

$$\begin{aligned} \min_{E, u_d, f_d} \quad & J(\sigma, u, u_d, f_d, E) \\ u \in \quad & \mathcal{U}_{Ad}(u_d) \\ \sigma \in \quad & \mathcal{D}_{Ad}(f_d, u) \end{aligned} \quad (3.6)$$

D'un point de vue pratique, cette dernière forme du problème n'est sans doute pas exploitable, puisqu'exprimer la stationnarité de cette fonctionnelle d'un bloc conduirait à un problème fortement non linéaire. En revanche, il est tout à fait envisageable de procéder en deux étapes comme annoncé précédemment, avec un calcul de base servant pour évaluer la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser.

Remarque :

Cette formulation possède des similitudes avec une formulation utilisant une fonction coût de Kohn-Vogelius. Ceci étant, deux différences majeures existent : tout d'abord, du fait de l'équilibre, un couplage existe entre les déplacements et les contraintes, ainsi, le découplage en un problème sur l'espace $\mathcal{U}_{Ad}(u_d)$ et un sur l'espace $\mathcal{D}_{Ad}(f_d, u)$ n'est pas possible. De plus, un terme de distance aux mesures a été introduit ici pour prendre en compte les incertitudes expérimentales.

3.1.3.3 Expression du problème de base

La première étape pour appliquer la stratégie d'identification est donc d'exprimer le problème de base (3.2) puis de le résoudre. Ce problème étant un problème de minimisation sous contrainte, on introduit le Lagrangien suivant, avec un multiplicateur pour chacune des contraintes :

$$\begin{aligned} L(\sigma, u, u_d, f_d, u^*, \lambda, \mu, E) = & J(\sigma, u, u_d, f_d, E) - \int_0^T \int_{\partial_u \Omega} (u - u_d) \cdot \lambda \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} (\rho \cdot \ddot{u} - \text{div} \sigma) \cdot u^* - \int_0^T \int_{\partial_f \Omega} (\sigma \cdot n - f_d) \cdot \mu \end{aligned} \quad (3.7)$$

Afin d'obtenir le système différentiel que doivent vérifier les champs solution, on exprime la stationnarité de L :

$$\delta L = 0 \quad (3.8)$$

avec δL qui a pour expression :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^T \int_{\Omega} \delta \sigma \cdot E^{-1} \cdot (\sigma - E \cdot \varepsilon(u + u^*)) + \int_{\partial \Omega} \delta \sigma \cdot n u^* - \int_{\partial_f \Omega} \delta \sigma \cdot n \mu \\ & - \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \varepsilon(\delta u) \cdot (\sigma - E \cdot \varepsilon(u)) + \delta \ddot{u} \rho u^* + \int_{\partial \Omega_u} \delta u \cdot \lambda \right\} \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \delta u^* \cdot (\rho \ddot{u} - \text{div} \sigma) \\ & + \int_0^T \left\{ \int_{\partial_f \Omega} \delta f_d \cdot \left(\mu + \frac{\partial d_f}{\partial f_d} \right) + \int_{\partial_u \Omega} \delta u_d \cdot \left(\lambda + \frac{\partial d_u}{\partial u_d} \right) \right\} \\ & - \int_0^T \left\{ \int_{\partial_f \Omega} \delta \mu (\sigma \cdot n - f_d) + \int_{\partial_u \Omega} \delta \lambda (u - u_d) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ce qui permet d'obtenir la forme forte des équations à vérifier suivante en injectant (3.9) dans (3.8), et après intégration par partie sur le temps du terme en $\delta \dot{u}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur } \Omega, \\ \quad \sigma = E.\varepsilon(u + u^*) \\ \quad \rho \ddot{u} - \text{div} E.\varepsilon(u + u^*) = 0 \\ \quad \rho \ddot{u}^* - \text{div} E.\varepsilon(u^*) = 0 \\ \quad \text{conditions initiales : } u(x,0) = u_0, \quad \dot{u}(x,0) = \dot{u}_0 \\ \quad \text{conditions finales : } \dot{u}^*(x,T) = 0, \quad \ddot{u}^*(x,T) = 0 \\ \text{Sur } \partial_f \Omega, \\ \quad \mu = u^* \\ \quad \sigma.n = f_d \\ \quad \mu + \frac{\partial d_f}{\partial f_d}(f_d) = 0 \\ \text{Sur } \partial \Omega \setminus \partial_f \Omega, \\ \quad u^* = 0 \\ \text{Sur } \partial_u \Omega, \\ \quad \lambda + (\sigma - E\varepsilon(u)).n = 0 \\ \quad u = u_d \\ \quad \lambda + \frac{\partial d_u}{\partial u_d}(u_d) = 0 \\ \text{Sur } \partial \Omega \setminus \partial_u \Omega, \\ \quad (\sigma - E\varepsilon(u)).n = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

En ne conservant que les champs u et u^* , le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur } \Omega, \\ \quad \rho \ddot{u} - \text{div} E.\varepsilon(u + u^*) = 0 \quad + \text{conditions initiales en } u \\ \quad \rho \ddot{u}^* - \text{div} E.\varepsilon(u^*) = 0 \quad + \text{conditions finales en } u^* \\ \text{Sur } \partial_{uf} \Omega, \\ \quad -E\varepsilon(u^*).n + \frac{\partial d_u}{\partial u_d}(u_d) = 0 \\ \quad u^* + \frac{\partial d_f}{\partial f_d}(E.\varepsilon(u + u^*).n) = 0 \\ \text{Sur } \partial_{u \setminus f} \Omega, \\ \quad -E\varepsilon(u^*).n + \frac{\partial d_u}{\partial u_d}(u_d) = 0 \\ \quad u^* = 0 \\ \text{Sur } \partial_{f \setminus u} \Omega, \\ \quad u^* + \frac{\partial d_f}{\partial f_d}(E.\varepsilon(u + u^*).n) = 0 \\ \quad E\varepsilon(u^*).n = 0 \\ \text{Sur } \partial_\emptyset \Omega, \\ \quad u^* = 0 \\ \quad E\varepsilon(u^*).n = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où la partition de la frontière est celle de la figure 3.1.

Le système à résoudre est donc un système couplé de propagation d'onde, dans lequel le champ u doit vérifier des conditions initiales et le champ u^* , des conditions finales. Il s'agit donc d'un problème couplant un problème direct et le problème adjoint associé. Toutefois, contrairement à ce qui est fait lorsque le problème adjoint est introduit, en vue du calcul du gradient d'une fonction coût, une fois le problème direct défini [Andrieux, 2001, Bonnet et al., 2002], le problème direct ne peut pas être résolu avant le problème adjoint. Il ne suffit donc pas de résoudre deux problèmes successivement. Les méthodes de résolution classiques utilisant un schéma incrémental en temps ne pourront donc pas être appliquées directement pour obtenir les solutions numériquement. Le chapitre 4 est consacré aux différentes méthodes qui ont été envisagées. La difficulté majeure réside dans le fait que le problème adjoint et le problème direct doivent être résolus en

même temps. De plus, dans le cas d'une formulation pour un comportement non linéaire, l'équivalent du problème adjoint ne sera pas un problème linéarisé, comme c'est le cas dans l'application de la méthode de l'état adjoint.

3.2 Identification sur l'exemple d'une barre homogène

3.2.1 Problème de base en 1D

La stratégie d'identification a été présentée dans le cas général au 3.1.3, elle est ici précisée dans le cas unidimensionnel présenté au 3.1.2.2. Le problème d'identification est donc la recherche du module d'Young de la barre à partir des mesures d'effort et de déplacement à ses extrémités. Le problème de base se pose donc comme :

Trouver les champs u, σ, u_d, f_d minimisant :

$$J(\sigma, u, u_d, f_d) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \int_0^L E^{-1} (\sigma - E \cdot u_{,x})^2 dx + A \cdot \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L + B \cdot \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L \right\}$$

sous les contraintes:

$$u \in \mathcal{U}_{Ad}(u_d), \quad \sigma \in \mathcal{D}_{Ad}(f_d, u) \quad (3.12)$$

où, pour toute fonction f , $\left| f(x) \right|_0^L = f(0) + f(L)$.

De façon analogue à ce qui a été fait dans le cas 3D, les équations que doivent vérifier les champs solution du problème de base sont obtenues en introduisant un Lagrangien dont on exprime la stationnarité. Cela permet d'aboutir au système suivant dont on donne la forme forte et la forme faible :

1. Forme forte

Sur $]0, L[$:

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot (u_{,x} + u^*_{,x}) \\ \rho \cdot \ddot{u} - E \cdot u_{,xx} - E \cdot u^*_{,xx} = 0 \\ \rho \cdot \ddot{u}^* - E \cdot u^*_{,xx} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \left| E \cdot (u_{,x} + u^*_{,x}) n - \frac{1}{B} u^* \right|_{0,L} = \left| \tilde{f}_d \right|_{0,L} & \text{où : } n(0) = -1 \text{ et } n(L) = 1 \\ \left| u - \frac{E}{A} u^*_{,x} \right|_{0,L} = \left| \tilde{u}_d \right|_{0,L} \end{cases} \quad (3.14)$$

2. Forme faible

$$\begin{cases} \int_0^L (\rho \cdot \ddot{u} \delta u^* + E \cdot (u_{,x} + u^*_{,x}) \delta u^*_{,x}) dx - \left| \left(\tilde{f}_d - \frac{u^*}{B} \right) \delta u^* \right|_0^L = 0 \\ \int_0^L (\rho \cdot \ddot{u}^* \delta u + E \cdot u^*_{,x} \delta u_{,x}) dx - \left| A \cdot (u - \tilde{u}_d) \delta u \right|_0^L = 0 \\ \sigma = E \cdot (u_{,x} + u^*_{,x}) \end{cases} \quad (3.15)$$

avec, dans les deux cas, les conditions initiales et finales en temps :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0 & \text{et} & \dot{u}(x,0) = \dot{u}_0 \\ u^*(x,T) = u_T^* & \text{et} & \dot{u}^*(x,T) = \dot{u}_T^* \end{cases} \quad (3.16)$$

La forme faible du problème servira lors de la résolution du problème par une méthode numérique. Pour cela, le choix est fait d'utiliser une méthode Éléments Finis pour laquelle il est nécessaire d'avoir une forme faible des équations d'équilibre. Celle-ci est donc obtenue en ne conservant sous forme faible que les deux équations d'équilibre du système de départ provenant de la stationnarité de L . L'élimination des autres inconnues se fait en utilisant la forme forte des autres équations.

Une fois le problème de base pour un paramètre fixé défini, l'étape d'identification se fait à nouveau par :

$$E = \underset{E'}{\text{Arg min}} J(\sigma(E'), u(E'), u_d(E'), f_d(E'), E') \quad (3.17)$$

où le quadruplet $(\sigma(E'), u(E'), u_d(E'), f_d(E'))$ est solution de (3.12) pour E' .

Dans la suite, la méthode est tout d'abord illustrée en présentant les champs solution du problème de base dans différents cas de figure, puis l'identification en elle-même est étudiée ainsi que sa robustesse vis-à-vis des perturbations sur les conditions aux limites.

3.2.2 Champs solution, carte de contribution à l'erreur

Le problème de base peut être résolu numériquement, comme cela est expliqué au chapitre 4. Il faut toutefois remarquer que cette résolution n'est pas triviale du fait des conditions initiales et finales à prendre en compte lors de la résolution du système couplé. On présente ici les champs solution du problème de base (3.12), dans différents cas de figure, selon le module d'Young utilisé et les perturbations sur les mesures.

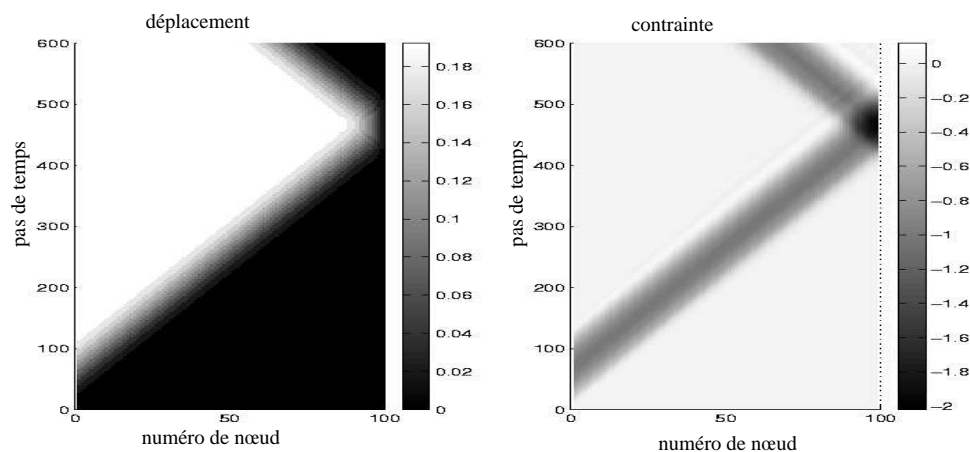


Figure 3.4 – Déplacement u et contrainte σ dans le plan abscisse \times temps

Les mesures sont fabriquées à partir du calcul direct défini au 3.1.2.2, avec un module d'Young de référence E_0 . Des perturbations peuvent être ajoutées afin de tester la robustesse de la méthode (figure 3.5).

La figure 3.4 présente les champs de déplacement et de contrainte du calcul fournissant les mesures. Dans le plan $x \times t$, on observe l'onde de la sollicitation du bord $x = 0$ se propager dans la barre et se réfléchir sur l'encastrement, en $x = L$.

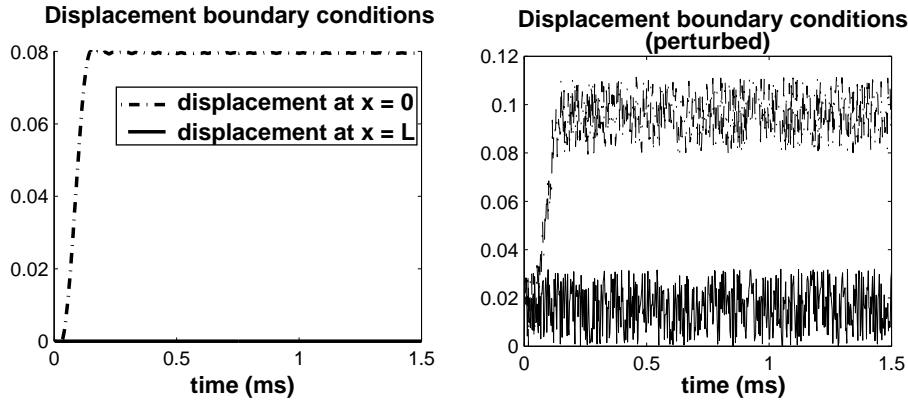


Figure 3.5 – Conditions aux limites en déplacement exactes et perturbées

3.2.2.1 Mesures exactes - Module d'Young exact

La résolution du problème de base (3.12) dans le cas de mesures exactes et du module d'Young de référence, c'est-à-dire celui qui a servi à fabriquer les mesures fournit les champs solution du calcul représentant l'expérience. En effet, les champs de ce calcul vérifient exactement la relation de comportement et les conditions aux limites. Ils sont, de plus, bien cinématiquement et dynamiquement admissibles et vérifient l'équilibre. Ainsi la fonctionnelle définie dans (3.12) évaluée à ces champs a une valeur nulle, cela correspond donc bien au minimum (la fonctionnelle étant positive ou nulle). On a donc bien exhibé les champs solution. Il reste à remarquer que, comme $\sigma = E \varepsilon(u + u^*)$, u^* est identiquement nul (il correspond à un mouvement de corps rigide, qui sera déterminé par ses conditions finales nulles et l'équation d'évolution).

Remarque :

Il peut être bon de préciser ici la notion de mesure exacte au sens numérique. En effet, la résolution du problème de base se faisant numériquement, des mesures correspondant à la solution analytique du problème de référence conduisent à un champ u^* non nul, c'est-à-dire à une valeur non nulle de la fonction coût. Cela peut s'interpréter comme une erreur de résolution du problème de base, liée à la discrétisation. Cependant, les mesures étant fabriquées par un calcul direct, on raisonne finalement sur le problème d'identification discrétisé et on s'attend à trouver un champ u^* nul. Ceci est vrai si on prend garde aux points suivants pour les conditions aux limites, notamment dans le cas de l'utilisation d'un schéma d'intégration explicite où les masses ont été concentrées aux nœuds. Tout d'abord, les masses étant concentrées aux nœuds, il en résulte dans le cas 1D que la frontière du domaine n'est pas de masse nulle.

Ainsi, l'équilibre avec les forces extérieures ne sera pas $\sigma.n = F_{ext}$, n étant la normale sortante à la barre, mais,

$$\sigma.n + m.\ddot{u} = F_{ext}, \quad \text{où } m \text{ est la masse du nœud frontière} \quad (3.18)$$

Il faut donc en tenir compte lorsque l'on récupère les mesures du calcul de référence et également lorsque l'on reconstruit les conditions aux limites obtenues par la résolution du problème de base.

D'autre part, si des schémas temporels différents sont utilisés pour fabriquer les mesures et résoudre le problème de base, cela génèrera également une erreur.

Toutefois, ces erreurs restent très faibles si on les compare à celles générées par une erreur de module ou une réelle perturbation de mesure.

3.2.2.2 Mesures exactes - Module d'Young plus raide

Dans le cas de mesures exactes mais d'un module d'Young E plus raide que E_0 , les conditions aux limites ne sont plus compatibles avec la relation de comportement. Cette non-compatibilité se comprend puisque, la vitesse des ondes dans la barre étant supérieure ici à celle de la barre de référence, les conditions aux limites en vis-à-vis le long du trajet des ondes ne se correspondent plus. Il ne sera donc pas possible de vérifier exactement les conditions aux limites et la relation de comportement. Le minimum de la fonctionnelle de (3.12) ne sera donc pas nul. Les champs solution sont présentés figure 3.6.

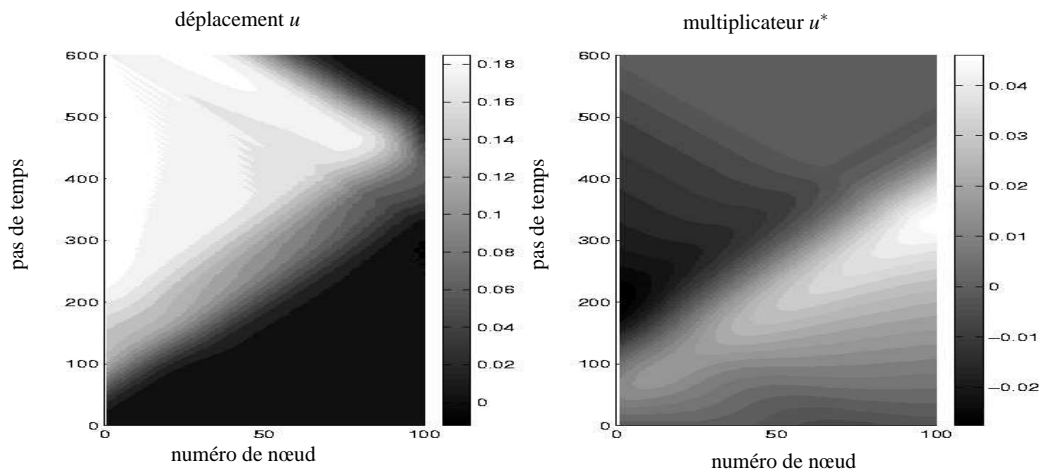


Figure 3.6 – Champs solution dans le plan abscisse \times temps, $E = 2.E_0$

Il est alors possible d'étudier la carte de contribution à l'erreur représentée figure 3.7. Le champ $E\varepsilon(u^*)$ représentant l'erreur en relation de comportement, on définit les contributions à l'erreur suivantes :

- Contribution à l'erreur instantanée de l'élément k :

$$\mathcal{E}_{t_i,k} = \frac{1}{\Delta t l_e} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_k \varepsilon(u^*)^T E \varepsilon(u^*) dx dt \quad (3.19)$$

– Contribution à l'erreur intégrée sur le temps de l'élément k :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{T l_e} \int_0^T \int_k \varepsilon(u^*)^T E \varepsilon(u^*) dx dt \quad (3.20)$$

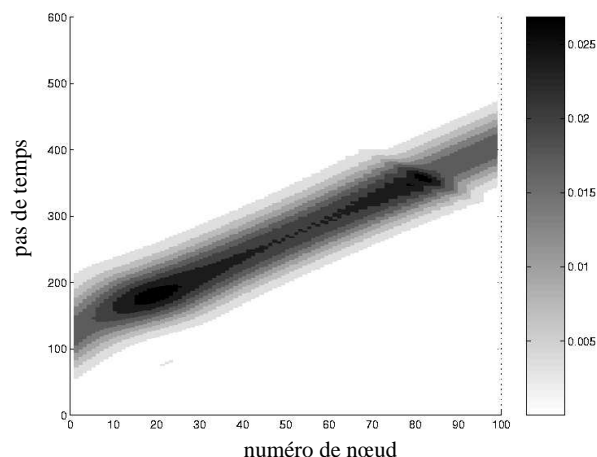


Figure 3.7 – Carte de contribution à l'erreur, $\mathcal{E}_{t_i,k}$, dans le plan abscisse \times temps

La figure 3.7 présente le champ $\mathcal{E}_{t_i,k}$, dans le plan espace \times temps. On voit clairement que la relation de comportement a été relâchée le long des trajets des ondes, du fait des conditions aux limites incompatibles. De plus, le temps d'étude étant assez court (moins de deux allers d'onde dans la structure), on remarque que la contribution à l'erreur devient plus faible aux extrémités, notamment vers $x = L$. Cela s'explique de la façon suivante : par chaque point du plan $x \times t$ passe une onde dans le sens des x croissants et une onde dans le sens des x décroissants. Pour les points où l'erreur est plus faible, une seule de ces deux ondes met en vis-à-vis des conditions aux limites incompatibles, puisque le temps d'étude s'arrête avant que l'information n'arrive à l'autre extrémité.

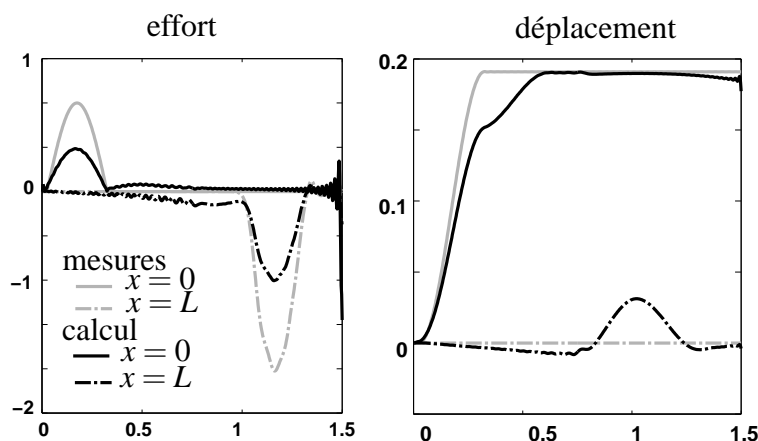


Figure 3.8 – Comparaison des mesures et des conditions aux limites du calcul, $E = 2.E_0$

Enfin, les conditions aux limites obtenues par la résolution du problème de base diffèrent des mesures, comme le montre la figure 3.8. Une partie de l'incompatibilité

entre les conditions aux limites et la relation de comportement a donc été prise en compte dans le second terme de l'erreur.

3.2.2.3 Mesures perturbées

Module d'Young exact

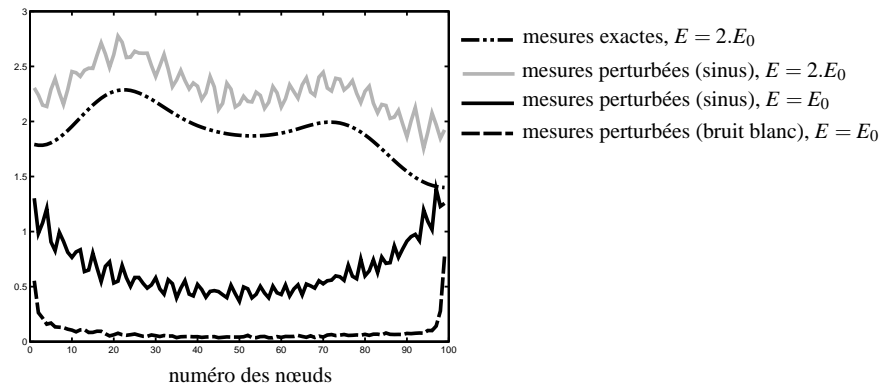


Figure 3.9 – Contribution à l'erreur \mathcal{E}_k de chaque élément intégrée sur le temps

Dans le cas des mesures perturbées et pour un module d'Young correspondant au module d'Young de référence, la figure 3.9 donne la distribution de la contribution à l'erreur pour différents types de perturbation. On peut remarquer que pour une perturbation de type réalisation de bruit blanc, d'amplitude 10%, la contribution à l'erreur est localisée aux extrémités de la barre. En revanche ce n'est pas le cas pour une perturbation de type sinusoïdale, d'amplitude 20%, ce qui peut s'expliquer, d'une part, par le niveau plus élevé des perturbations et, d'autre part, par le fait que son contenu fréquentiel est d'avantage basse fréquence, ce qui correspond à de plus grandes longueurs d'onde.

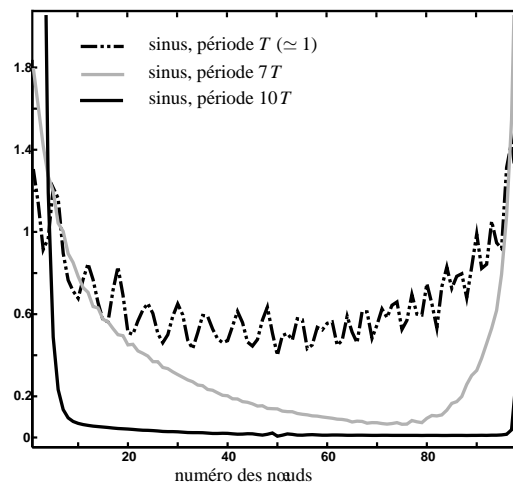


Figure 3.10 – Contribution à l'erreur \mathcal{E}_k , effet de la fréquence

Ce point est confi rmé par l'exemple de la figure 3.10 qui présente la contribution de chaque élément à l'erreur pour des perturbations sinusoïdales d'amplitude 20% de la

valeur maximale, de fréquences différentes. Toutefois, il est intéressant de noter que la méthode ne propage pas systématiquement les perturbations dans les champs au cœur de la structure.

La comparaison des conditions aux limites du calcul avec les mesures permet de mettre en avant le rôle du second terme de l'erreur en relation de comportement modifiée. Dans le cas d'une réalisation de bruit blanc uniforme de moyenne nulle pour perturber chacune des conditions aux limites, les conditions aux limites en effort n'ont pas été représentées car elles sont superposables avec les mesures à 10^{-3} près. Ceci peut s'expliquer en considérant que les contraintes apparaissent dans le système régissant le problème de base uniquement à l'ordre zéro en temps, contrairement aux déplacements pour lesquels intervient la dérivée temporelle d'ordre deux.

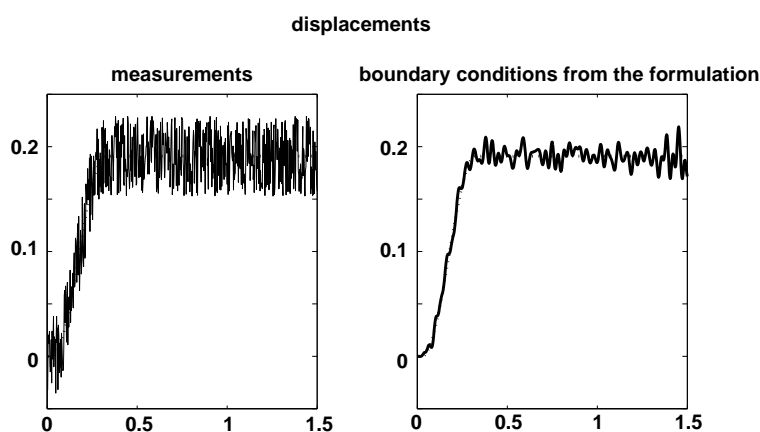


Figure 3.11 – *Déplacement : mesure et conditions aux limites, réalisation de bruit blanc de premier moment nul*

Ainsi, les déplacements ont d'avantage tendance à être lissés. C'est effectivement ce que l'on observe sur la figure 3.11, où les conditions aux limites en déplacement diffèrent notablement des mesures, et ont été lissées par la formulation. On peut noter, de plus, que la différence de lissage entre effort et déplacement au bord va avoir une répercussion sur les champs à l'intérieur de la poutre, et donc introduire une erreur en relation de comportement liée aux perturbations sur les mesures (on peut toutefois remarquer que cette erreur n'a pas de raison d'être plus importante que si les conditions aux limites étaient toutes perturbées comme les mesures).

Enfin, dans le cas d'une perturbation de type bruit blanc de moyenne non nulle, il est intéressant de constater que toutes les conditions aux limites diffèrent des mesures. Ainsi la figure 3.12 présente les déplacements au bord de l'éprouvette, en comparant les mesures, les conditions aux limites de la formulation et les conditions aux limites qui ont servi à créer les mesures (calcul de référence).

Remarque :

Dans le cas de la résolution du problème de base avec le module d'Young E_0 de référence et des mesures perturbées, les champs solution diffèrent des champs exacts, qui ont servi à fabriquer les mesures et qui représentent donc les champs expérimentaux. En effet, pour ces champs-là, l'erreur en relation de comportement est nulle et toute l'erreur est concentrée sur les termes de distance aux mesures. Dans le cas de perturbations importantes, la somme de ces deux termes est supérieure à la valeur obtenue par la fonction coût aux champs solution du problème de base. Il ne s'agit donc pas du minimum.

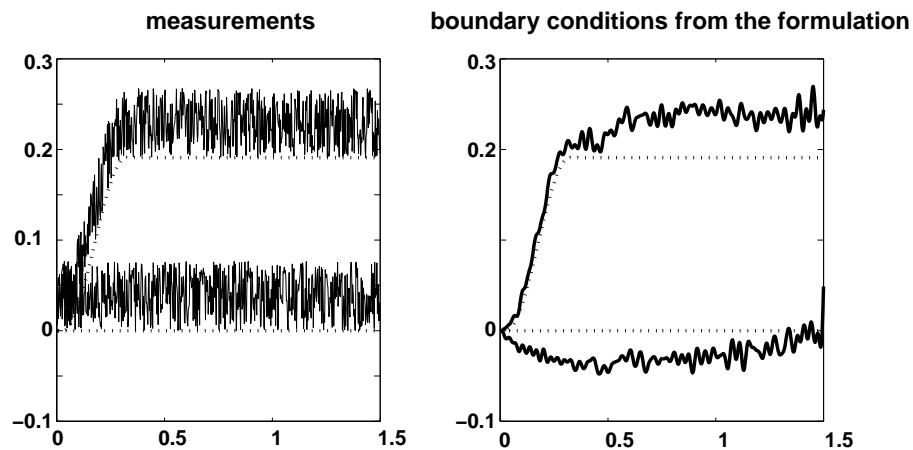


Figure 3.12 – Déplacement : mesure et conditions aux limites, réalisation de bruit blanc de premier moment non nul

Module d'Young plus raide

Dans le cas d'un module d'Young différent de E_0 et de mesures perturbées, les champs solution sont qualitativement la superposition des deux cas pris séparément, (figure 3.9).

3.2.3 Identification

3.2.3.1 Fonction coût

La partie 3.2.2 vient de présenter les champs solution du problème de base (3.12), dans certains cas particuliers, afin de voir l'influence du module d'Young choisi et des perturbations sur les conditions aux limites. Il est possible à partir de ces champs d'évaluer la fonction coût que l'on cherche à minimiser pour l'étape d'identification (3.17).

Pour cela, le problème de base est résolu numériquement pour tout un jeu de paramètres matériau, ce qui permet de représenter la fonction coût qui ne dépend ici que d'une seule variable. Il est donc aisé à partir de sa représentation graphique d'obtenir la valeur de son minimum. Afin de tester la robustesse de la méthode, ceci est effectué pour des mesures perturbées à différents niveaux. La figure 3.13 présente les courbes d'identification pour les mêmes perturbations que celles utilisées pour tester la méthode présentée au 2.2.2 (figure 2.14). Le module d'Young identifié correspondant au minimum

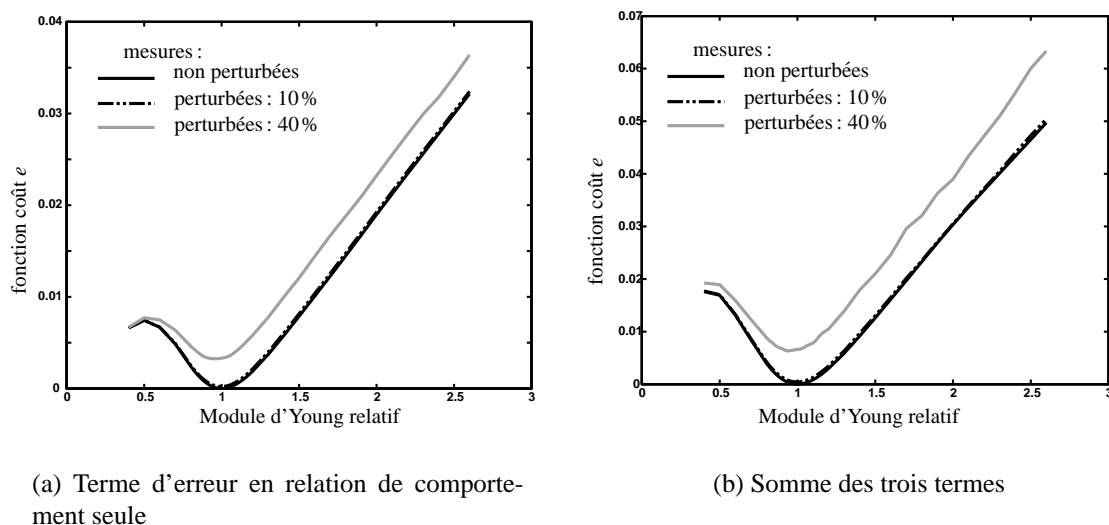


Figure 3.13 – Fonction coût pour différents niveaux de perturbation

de la courbe d'identification, dans les trois cas, la méthode permet d'obtenir une identification de bonne qualité (moins de 3% d'écart). Ceci met donc en avant la robustesse de la méthode.

La figure 3.14 présente le terme d'erreur en relation de comportement seule, ainsi que celui de distance aux déplacements mesurés, dans le cas d'une perturbation par des réalisations de bruit blanc uniforme à différentes amplitudes. On peut remarquer que les perturbations ont très peu d'influence sur la valeur du terme d'erreur en relation de comportement, ce qui est en accord avec les observations faites sur la figure 3.9.

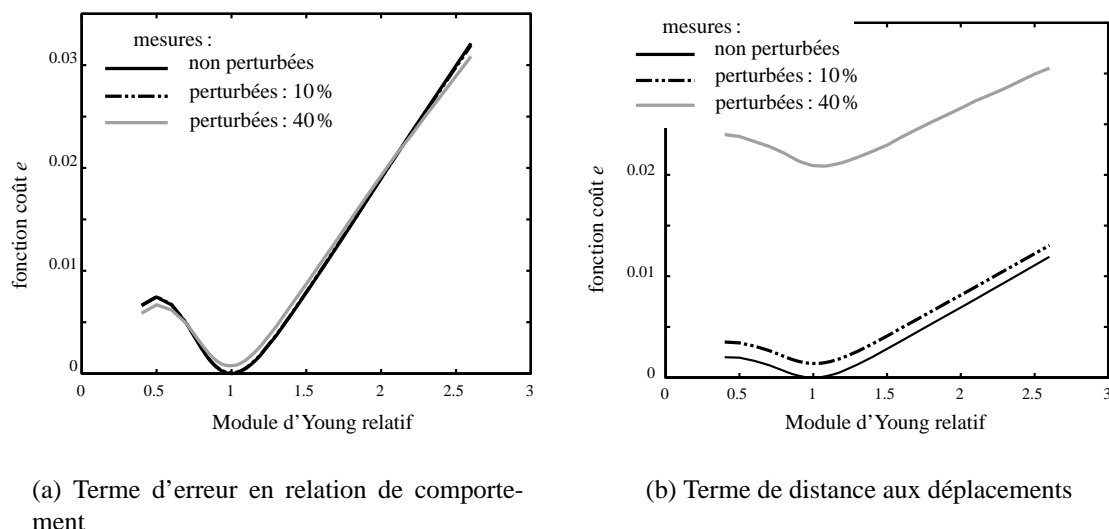


Figure 3.14 – Fonction coût - perturbation : réalisation de bruit blanc uniforme

En revanche, comme il avait déjà été remarqué, le terme de distance aux déplacements

mesurés est le plus affecté par les perturbations. Enfin, les trois termes sont du même ordre de grandeur, en moyenne sur l'ensemble de la courbe, ce qui s'avère assez sain. Il n'a pas été précisé comment le poids entre les différents termes de la fonction coût, déterminé par les constantes A et B dans (3.12), a été choisi. L'étude du choix de ce poids sera détaillée au 3.4.1, précisons ici qu'afin d'obtenir des termes de même ordre, les différents termes ont été adimensionnés par l'ordre de grandeur des termes dont ils sont la différence.

Remarque :

Sur la courbe du terme d'erreur en relation de comportement seule (figure 3.13-(a)), on peut observer pour des modules d'Young faible que les valeurs ont tendance à diminuer, ce qui se traduit par une perte de convexité de la fonction coût et l'obtention d'un autre minimum pour E tendant vers 0. Ceci s'explique par le fait que, le module d'Young diminuant, la célérité des ondes dans le milieu, elle aussi, diminue. Or, le temps d'étude est le même pour tous les calculs (utilisation des mêmes mesures) et est assez faible, puisqu'il correspond à moins d'un aller et retour d'onde dans la structure pour le module d'Young de référence. En conséquence, plus le module est faible, moins l'information des conditions aux limites d'une extrémité n'a le temps d'arriver à l'autre extrémité, ce qui a pour conséquence de diminuer l'incompatibilité des mesures et donc d'appauvrir les données expérimentales vis-à-vis de l'identification. L'étude sur des temps plus long permet de se débarrasser de ce problème, en enrichissant les mesures, comme ce sera illustré au 4.3.3.2.

3.2.3.2 Gradient

L'utilisation de la même fonctionnelle pour la définition du problème de base et pour l'étape d'identification permet une estimation immédiate du gradient à partir des champs solution du problème de base. L'étape d'identification revient à la minimisation suivante :

$$\min_E J(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E), E) \quad (3.21)$$

où J est défini dans (3.2). On note encore :

$$g(E) = J(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E), E) \quad (3.22)$$

avec $(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E))$ solution de (3.2).

En remarquant que :

$$L(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E), u^*(E), \lambda(E), \mu(E), E) = g(E) \quad (3.23)$$

où L est le Lagrangien introduit dans (3.7).

Le gradient de g dans la direction q sera donné par :

$$Dg(E) \cdot q = \frac{\partial L}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial E} \cdot q + \frac{\partial L}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial E} \cdot q + \frac{\partial L}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial E} \cdot q + \frac{\partial L}{\partial u_d} \cdot \frac{\partial u_d}{\partial E} \cdot q + \frac{\partial L}{\partial f_d} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial E} \cdot q + \frac{\partial L}{\partial E} \cdot q \quad (3.24)$$

De plus, $(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E))$ étant solution de (3.2), on remarque que :

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u^*} = \frac{\partial L}{\partial u_d} = \frac{\partial L}{\partial f_d} = 0$$

Remarque :

La notation $\frac{\partial L}{\partial E}$ est abusive, les différentes quantités n'ayant pas la même dimension.

D'où une expression plus simple du gradient :

$$Dg(E).q = \frac{\partial L}{\partial E} \cdot q \quad (3.25)$$

où le terme de droite est une dérivée partielle d'une fonction de variables indépendantes, qu'il est donc possible d'exprimer de manière analytique relativement simplement, pour ensuite l'évaluer à partir des champs solution du problème de base. Ceci peut notamment servir si l'algorithme de minimisation de la fonction coût d'identification est un algorithme de descente, comme un algorithme de type Newton.

Cette remarque sur le calcul du gradient de la fonction coût sera mise en œuvre au 5.1, dans le cas de l'identification d'une distribution de module d'Young dans une barre hétérogène.

Une illustration du calcul du gradient est donnée figure 3.15, dans le cas $0D$ qui sera présenté au 4.1.2, c'est-à-dire pour l'identification de la raideur d'un système masse ressort dont on mesure les déplacements et les efforts appliqués.

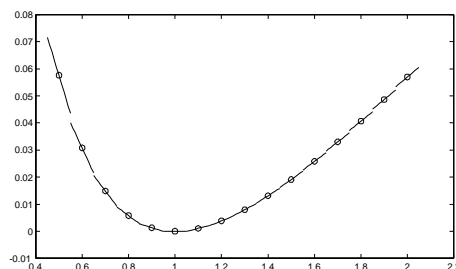


Figure 3.15 – Calcul du gradient dans le cas $0D$

L'exemple de la figure 3.15 montre que l'évaluation numérique du gradient donnée par la formule (3.25) en est une bonne estimation. En effet, chaque segment a pour pente la valeur du gradient estimé de la fonctionnelle au point.

De ces premiers exemples, il ressort que la méthode s'avère très robuste vis-à-vis des incertitudes de mesures. Ceci trouve sans doute son explication dans l'introduction d'un terme de distance entre les mesures et les conditions aux limites du calcul, qui permet de régulariser celles-ci. La suite de ce chapitre étudie plus précisément ce terme, et son rôle dans la robustesse de la méthode.

3.3 Formulation sans terme de distance aux mesures

3.3.1 Formulation

3.3.1.1 Motivation

Les exemples précédents ont montré que la méthode proposée permettait l'identification dans des cas où la méthode présentée au 2.2.2 n'aboutissait à aucun résultat pertinent. Afin de comprendre cette différence de comportement entre les deux méthodes, notons les particularités de la seconde méthode par rapport à la première :

- tout d'abord, les incertitudes sur les mesures ont été prises en compte en introduisant un terme de distance entre mesures et conditions aux limites du calcul. Cela a pour effet de régulariser les conditions aux limites ;
- de plus, la méthode basée sur l'erreur en relation de comportement traite toute l'information expérimentale en un seul problème, et il n'est pas nécessaire de faire un choix arbitraire parmi les conditions aux limites pour définir deux problèmes disjoints.

Les méthodes différant à deux points de vue, il peut être intéressant de faire la part des deux spécifiés dans la robustesse de la méthode. Pour cela, cette partie étudie une formulation basée sur l'erreur en relation de comportement, où n'est pas introduit un terme de distance aux mesures expérimentales. Celles-ci seront donc imposées de manière forte au calcul.

3.3.1.2 Formulation du problème d'identification

On considère toujours le même problème unidimensionnel d'identification à partir de mesures redondantes au bord d'une poutre :

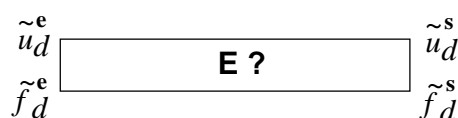


Figure 3.16 – Problème 1D d'identification à partir de conditions aux limites redondantes

On reprend la même formulation qu'au 3.2, mais en imposant de manière forte les conditions aux limites mesurées. Ainsi, lors de la définition du nouveau problème de base, seule l'erreur en relation de comportement doit être minimisée, les autres relations étant vérifiées exactement. Ceci amène donc à la formulation du problème suivant :

Trouver les champs u, σ minimisant :

$$J_2(\sigma, u) = \int_0^T \frac{1}{2} \int_0^L (\sigma - E \cdot u_{,x}) \cdot E^{-1} \cdot (\sigma - E \cdot u_{,x}) \quad (3.26)$$

sous les contraintes:

$$u \in \mathcal{U}_{Ad}(\tilde{u}_d), \quad \sigma \in \mathcal{D}_{Ad}(\tilde{f}_d, u) \quad (3.27)$$

Le problème d'identification s'exprime alors sous la forme :

$$\min_E g_2(E) = \min_E J_2(\sigma(E), u(E)) \quad (3.28)$$

où $(\sigma(E), u(E))$ est solution de (3.26-3.27).

3.3.1.3 Expression du problème de base

On cherche à résoudre (3.26-3.27), qui est un problème de minimisation sous contrainte. Comme précédemment, afin de prendre en compte les contraintes, on introduit trois multiplicateurs de Lagrange λ , μ et u^* et ainsi le Lagrangien L , défini par :

$$L = \int_0^t \left\{ \int_0^L \frac{1}{2E} (\sigma - E.u_{,x})^2 - (\rho.\ddot{u} - \sigma_{,x}) . u^* - \left| (u - u_d) . \lambda \right|_0^L - \left| (\sigma.n - F_d) . \mu \right|_0^L \right\} \quad (3.29)$$

où n est la normale sortante à la poutre.

La minimisation sous contraintes revient alors à la stationnarité du Lagrangien (3.29). On exprime donc la stationnarité de ce Lagrangien qui, comme pour la formulation avec le second terme 3.2, permet d'aboutir à un système d'équations différentielles que doivent vérifier les champs solution :

$$\begin{aligned} \delta L = \int_0^L \frac{1}{E} (\sigma - E.u_{,x}) . (\delta\sigma - E.\delta u_{,x}) - \int_0^L (\rho.\ddot{u} - \sigma_{,x}) . \delta u^* + (\rho.\delta\ddot{u} - \delta\sigma_{,x}) . u^* \\ - \left| (u - u_d) . \delta\lambda \right|_0^L - \left| \delta u . \lambda \right|_0^L - \left| (\sigma.n - F_d) . \delta\mu \right|_0^L - \left| \delta\sigma . \mu \right|_0^L \end{aligned} \quad (3.30)$$

où l'intégration sur le temps est sous-entendue afin de ne pas alourdir les écritures.

Afin de faire disparaître les termes dérivés des différentielles, on effectue les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^L (\sigma - E.u_{,x}) . \delta u_{,x} &= \left[(\sigma - E.u_{,x}) . \delta u \right]_0^L - \int_0^L (\sigma_{,x} - E.u_{,xx}) . \delta u \\ \int_0^t \rho \delta \ddot{u} u^* &= \left[\rho \delta \dot{u} u^* \right]_0^t - \left[\rho \delta u \dot{u}^* \right]_0^t + \int_0^t \rho \delta u \ddot{u}^* \\ \int_0^L \delta \sigma_{,x} u^* &= \left[\delta \sigma u^* \right]_0^L - \int_0^L \delta \sigma u^*_{,x} \end{aligned} \quad (3.31)$$

La nullité de la différentielle du Lagrangien permet d'écrire à chaque instant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L (\rho.\ddot{u}^* - \sigma_{,x} + E.u_{,xx}) \delta u dx + \left| ((\sigma - E.u_{,x}).n + \lambda) \delta u \right|_0^L = 0 \\ \int_0^L (\sigma - E.u_{,x} - E.u^*_{,x}) \delta \sigma dx + \left| (u^* + \mu) \delta \sigma \right|_0^L = 0 \\ \int_0^L (\rho.\ddot{u} - \sigma_{,x}) \delta u^* dx = 0 \\ \left| (\sigma - F_d) \delta \mu \right|_0^L = 0 \\ \left| (u - u_d) \delta \lambda \right|_0^L = 0 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Avec des conditions initiales et finales similaires à celles déjà obtenues :

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0, & \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \\ u^*(t=T_f) = 0, & \dot{u}^*(t=T_f) = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Pour le problème continu, le système (3.32) peut s'écrire de manière locale :
Sur $]0,L[$,

$$\begin{cases} \sigma = E.(u_{,x} + u^*_{,x}) \\ \rho.\ddot{u} - E.(u_{,xx} + u^*_{,xx}) = 0 \\ \rho.\ddot{u}^* - E.(u^*_{,xx}) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

En 0,

$$\begin{cases} u(0) = \tilde{u}_{d0} \\ E.(u_{,x} + u^*_{,x})(0) = -\frac{1}{S} \tilde{f}_{d0} \end{cases} \quad (3.35)$$

En L ,

$$\begin{cases} u(L) = \tilde{u}_{dL} \\ E.(u_{,x} + u^*_{,x})(L) = \frac{1}{S} \tilde{f}_{dL} \end{cases} \quad (3.36)$$

En revanche, pour obtenir la formulation Éléments Finis du problème, il faut repartir de la formulation faible obtenue au départ. En effet, dans ce cas, le découplage entre les termes de bord et les termes intérieurs relatifs à la même différentielle (par exemple, δu) n'est plus possible, comme on le verra au 4.1.1.2.

3.3.2 Illustration : champs solution

3.3.2.1 Mesures non perturbées

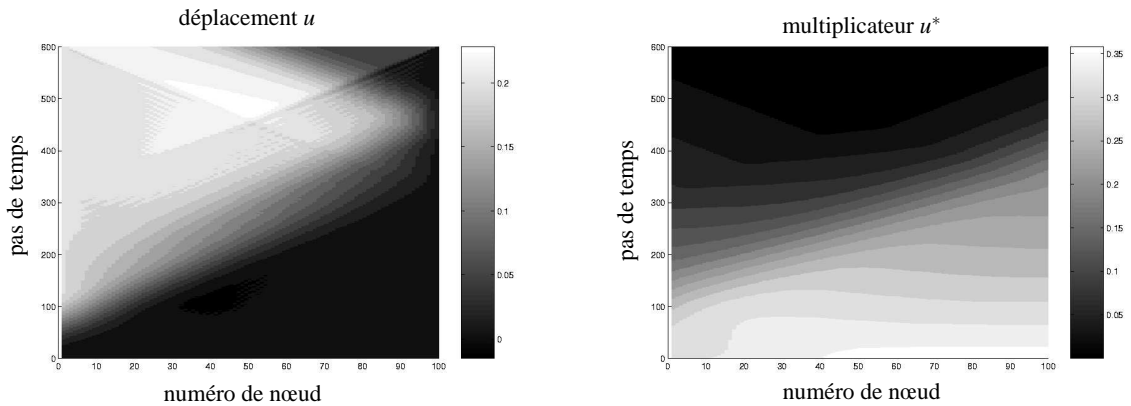


Figure 3.17 – Champs solution dans le plan abscisse \times temps, $E = 2.E_0$

Comme dans le cas de la formulation avec second membre, pour des mesures non perturbées et un module d'Young exact ($E = E_0$), les champs solution du problème de base vérifient exactement la relation de comportement. Ainsi, les contraintes et déplacements correspondent aux champs du calcul de référence ayant servi à fabriquer les mesures. Le champ du multiplicateur u^* est donc identiquement nul, ce qui se traduit numériquement par des valeurs de l'ordre de 10^{-15} .

Lorsque le module d'Young est différent de E_0 , le multiplicateur u^* n'est plus nul et la relation de comportement n'est plus exactement vérifiée. La figure 3.17 présente les champs u et u^* dans le cas où $E = 2.E_0$. On peut remarquer une similitude avec les champs obtenus dans le cas de la formulation avec terme de distance aux mesures ; cependant, il ne s'agit pas des mêmes champs, puisqu'ils vérifient exactement les conditions aux limites. Une conséquence de cela est qu'ils vont également vérifier moins bien la relation de comportement (sinon, ils seraient solution du problème de base (3.12)). La figure 3.18 présente la contribution à l'erreur en fonction du pas de temps et de l'élément. On retrouve ici également une erreur principalement le long des trajets des ondes qui mettent en vis-à-vis des conditions aux limites incompatibles.

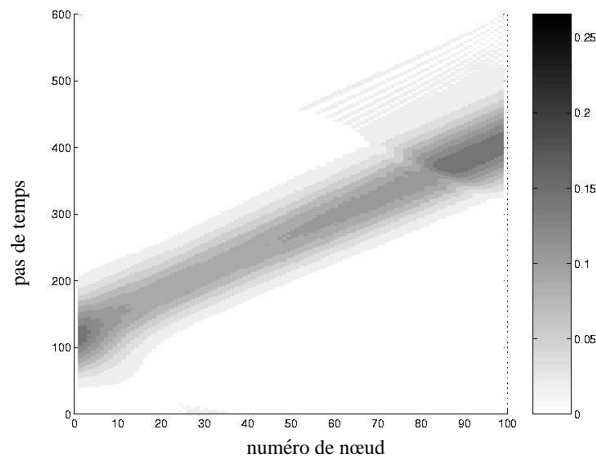


Figure 3.18 – Carte de contribution à l'erreur dans le plan abscisse \times temps

3.3.2.2 Mesures perturbées

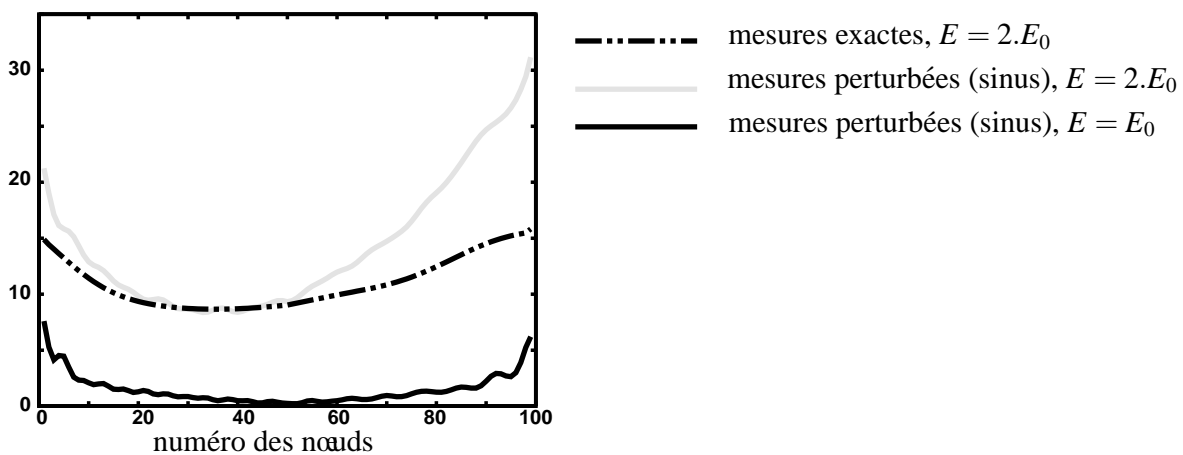


Figure 3.19 – Contribution à l'erreur de chaque élément intégrée sur le temps

La figure 3.19 présente la contribution de chaque élément intégrée sur le temps, dans différents cas. Les perturbations sont de type sinusoïdal de fréquence élevée, d'amplitude

20% de la valeur maximale de chaque signal perturbé. Il s'agit donc de perturbations qui ne sont pas trop fortes comparées aux perturbations sinusoïdales utilisées pour la figure 3.7.

Dans le cas où le module d'Young est exact, on retrouve le fait que les erreurs sont principalement sur le bord de l'éprouvette, proche des perturbations. En revanche, pour un module d'Young plus raide, le champ d'erreur est d'avantage perturbé que dans le cas de la formulation avec terme de distance aux mesures. La méthode provoque donc une plus grande pollution des champs à cœur par les perturbations de mesures.

3.3.3 Fonction coût

À partir des champs solution du problème de base (3.26-3.27), il est possible de tracer la fonction coût g_2 définie par (3.28) pour des mesures perturbées à différents niveaux, afin de tester la robustesse de la méthode.

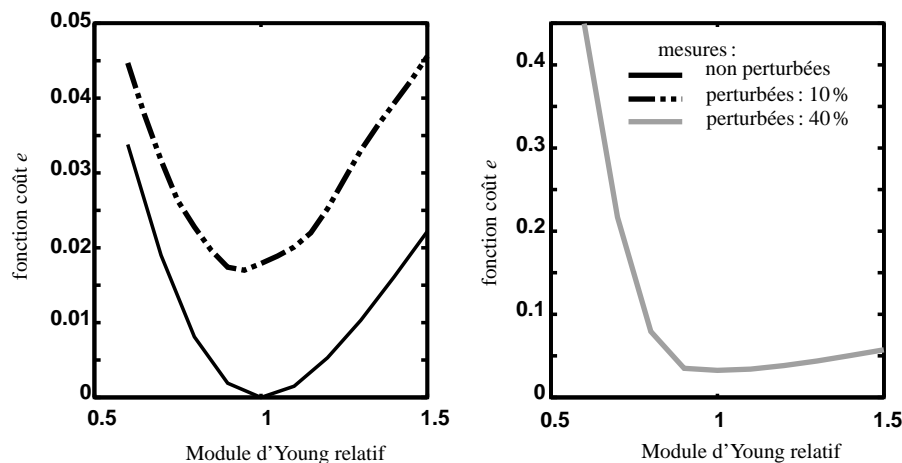


Figure 3.20 – Fonction coût g_2 en fonction du module d'Young

Les courbes d'identification sont présentées figure 3.20. En l'absence de perturbation, l'identification mène à des résultats tout aussi pertinents que ceux obtenus par la méthode avec distance aux mesures. Ceci s'avère sain, puisque dans ce cas, le doute porté sur les mesures n'est pas justifié. Pour des niveaux de perturbation relativement faible, la méthode continue à être pertinente. En revanche, pour des niveaux de perturbation élevés, la fonction coût aboutit à une erreur plus importante et la courbe d'identification possède un minimum moins marqué. Cependant, on peut remarquer que pour cette méthode, la fonction coût possède une convexité plus marquée que celle proposée au 2.2.2. Ainsi, il semble que la prise en compte de l'ensemble des données expérimentales en un seul calcul contribue à la robustesse de la méthode.

3.4 Terme de distance aux mesures

La partie précédente a montré que la prise en compte de toute l'information expérimentale en un seul calcul n'est pas suffisante pour traiter l'identification dans le cas de mesures fortement perturbées. C'est dans ce cas que l'introduction du terme de distance entre les

conditions aux limites et les mesures trouve tout son intérêt. Le problème de minimisation (3.12) devient alors la minimisation d'une somme de deux termes, le choix de la pondération de chacun des termes intervient alors selon l'importance et la confiance que l'on accorde aux différentes quantités.

3.4.1 Choix du poids et valeur relative des termes

Le terme de distance aux mesures peut être vu comme un terme de régularisation. Cependant, il est nécessaire à la définition du problème, sans quoi, les conditions aux limites ne sont pas définies et la résolution du problème aboutit à des champs identiquement nuls qui minimisent l'erreur en relation de comportement en l'annulant. Toutefois, comme dans le cas de la régularisation, le choix du poids entre les différents termes de la fonctionnelle que l'on minimise dépend de la confiance que l'on accorde respectivement au modèle et aux mesures. Ainsi, pour un poids élevé sur le terme de distance aux mesures, une grande confiance est attribuée aux mesures et les champs solution les vérifieront d'autant mieux que le poids est important. À l'extrême, pour un poids infini, on retrouve la formulation sans terme de distance aux mesures, celles-ci étant vérifiées exactement. À l'inverse, plus le poids sur les mesures est faible, plus on autorise les conditions aux limites à s'écarter des mesures. Dans le cas d'un poids sur les mesures qui tend vers 0, les champs solution vérifient exactement le modèle et ne sont pas influencés par les mesures. Dans notre cas, comme le problème sans mesures ne possède pas de conditions aux limites, on retrouve effectivement des champs identiquement nuls, qui n'ont que très peu de pertinence. Il faut donc déterminer un poids intermédiaire entre ces deux valeurs extrêmes, pour que la stratégie d'identification donne de bons résultats.

La première idée pour choisir le poids des différents termes est de les adimensionner par l'ordre de grandeur des quantités qu'ils font intervenir. D'un point de vue pratique, les termes de distance aux mesures sont donc divisés par l'intégrale sur le temps des mesures respectives, et le terme d'erreur en relation de comportement par l'intégrale sur le temps de l'énergie élastique du problème de référence. Dans le cas d'un essai réel, où il n'est pas possible d'avoir accès aux champs de contrainte et déplacement expérimentaux, ce poids peut très bien s'obtenir à partir d'un calcul utilisant certaines mesures comme conditions aux limites.

À partir de cette pondération de départ, il est possible de choisir une pondération supplémentaire plus adaptée au cas étudié, dans la mesure où il est possible de quantifier les niveaux d'erreur attendus sur le modèle et les mesures. Des techniques de choix de pondération dans le cas de la régularisation de Tikhonov sont alors applicables, [Bui, 1993, Andrieux, 2001]. Dans [Barthe et al., 2003], les auteurs se basent sur une approche probabiliste [Tarantola, 1987] pour déterminer les poids optimaux. Leur conclusion, dans le cadre du recalage en vibration, est que le choix du poids adimensionné sans modification supplémentaire est un bon compromis, la méthode étant alors sensible aux deux termes de l'erreur, qui sont alors du même ordre.

Dans notre cas, la connaissance sur les niveaux d'erreur étant difficilement quantifiable, le choix d'un poids adimensionné semble le plus raisonnable. Dans l'exemple qui suit, deux poids différents sont testés, dans le cas de perturbations fortes, pour discuter la pertinence de ce choix.

3.4.2 Stratégie d'identification selon la connaissance des perturbations

L'étude de la formulation utilisant l'erreur en relation de comportement sans second terme a introduit deux nouvelles fonctionnelles, J_2 et g_2 , dans (3.26) et (3.28). Or, le problème de base et le choix de la fonctionnelle étant en partie indépendants, on peut très bien imaginer une méthode où le terme de distance est présent dans le problème de base mais non dans la fonction coût servant à l'identification, ceci d'autant plus que c'est *a priori* le premier terme d'erreur en relation de comportement qui donne une estimation de la qualité du modèle. Finalement, trois méthodes sont donc à notre disposition (tableau 3.2).

Méthode	A	B	C
Fonctionnelle du problème de base	J	J_2	J
Fonction coût d'identification	g	g_2	g_2

Tableau 3.2 – Les trois méthodes envisageables

Les méthodes notées A et B dans le tableau 3.2 correspondent aux deux méthodes déjà étudiées au 3.2 et au 3.3. La troisième méthode, notée C , possède donc le même problème de base que la première, permettant de régulariser les conditions aux limites et la même fonction coût que la deuxième, qui mesure *a priori* la qualité du modèle. L'exemple qui suit tente d'étudier la pertinence de cette troisième méthode, comme cela avait été fait dans [Feissel et al., 2003].

3.4.2.1 Exemple sur un grand nombre de tirages

La méthode B n'étant pas adaptée au cas des mesures perturbées, on souhaite comparer les méthodes A et C quant à leur efficacité face aux perturbations de mesure. Afin de pouvoir effectuer cette comparaison sans se limiter à un cas particulier pouvant être arbitrairement plus favorable à l'une ou l'autre des méthodes, on veut qualifier les méthodes par leur réponse à un bruit blanc gaussien servant pour perturber les mesures. Ce bruit étant décrit par sa densité de probabilité, la réponse de chaque méthode sera également une densité de probabilité, qui correspondra à la distribution des modules d'Young identifiés. Afin d'obtenir cette densité de probabilité, on utilise une méthode de Monte-Carlo, c'est-à-dire que l'on applique les deux stratégies d'identification à un grand nombre de cas pour chacun desquels les perturbations correspondent à une réalisation du bruit blanc décrivant les perturbations. Ainsi la distribution de modules d'Young identifiés sur l'ensemble des tirages donne une estimation de la réponse de la méthode, en terme de densité de probabilité.

La première et la troisième méthode sont donc testées sur l'exemple de la barre encastrée, déjà présenté figure 3.2. Les perturbations sont créées en effectuant un tirage de bruit blanc gaussien d'écart type 20% de l'amplitude maximale pour chaque condition aux limites (et pour chaque piquet de temps), figure 3.21. Cette perturbation étant importante, on peut se poser la question du choix du poids. Pour chaque tirage, on identifie le module d'Young par la méthode A et la méthode C , et pour deux poids différents, un poids de 1 puis de 0,1 devant les distances aux mesures, une fois les termes adimensionnés.

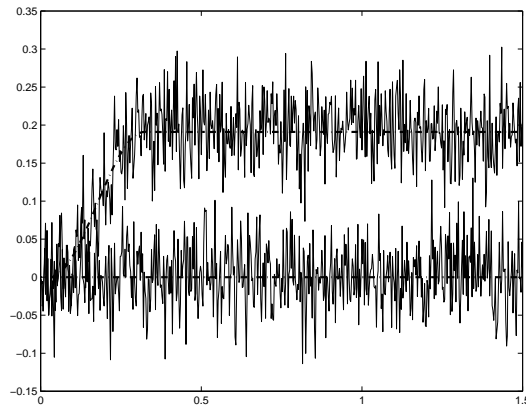


Figure 3.21 – Conditions aux limites en déplacement perturbées

Les figures 3.22 (a) et 3.22 (b) présentent la distribution de modules d'Young identifiés pour 1200 tirages de perturbations. Le tableau 3.3 reprend la valeur moyenne et la variance de ces distributions. Ceci permet de montrer que les méthodes sont robustes, puisque la moyenne est proche du module d'Young de référence, avec un léger biais et que l'écart type ne dépasse pas 2,8% dans le cas le plus défavorable. On remarque également que la méthode A est améliorée par un choix judicieux du poids entre les différents termes de la fonction coût. De plus, la méthode C se montre meilleure que la méthode A dans le premier cas, et semble assez peu affectée par le choix du poids.

Poids	1		1/10	
Méthode	A	C	A	C
moyenne	0,987	0.997	0,998	0.999
variance	$6,7 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$1,69 \cdot 10^{-4}$	$9,34 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3.3 – Données statistiques sur les modules d'Young identifiés

3.4.2.2 Stratégie vis-à-vis de la connaissance sur les perturbations

Cet exemple permet de mettre en avant deux points. Tout d'abord, il confirme que le choix du poids entre les différents termes influence l'efficacité de la méthode. De plus, choisir d'effectuer la minimisation sur la fonction coût sans distance aux mesures donne de bons résultats, et ce avec une plus grande liberté sur le choix du poids. Cette tendance demanderait à être confirmée sur d'autres exemples, cependant, cette méthode hybride reste une option intéressante dans le cas où le niveau de perturbation est difficilement quantifiable. Il faut toutefois noter que le choix de minimiser g_2 plutôt que g , à partir de champs solution du problème de base utilisant J ne permet pas d'obtenir une expression analytique du gradient directement.

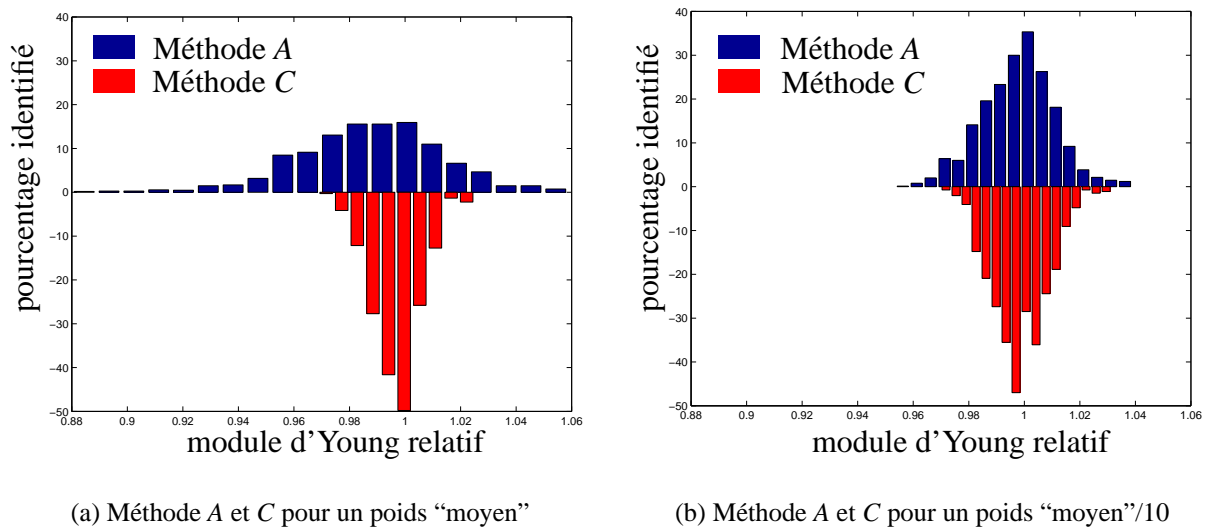


Figure 3.22 – Distribution de E identifié (1200 tirages de bruit blanc gaussien d'écart-type 20%)

3.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté la méthode développée dans ce travail. Après une présentation théorique dans le cas général, la méthode a été appliquée au problème d'identification du module d'Young d'une barre sollicitée en dynamique transitoire, sur des exemples numériques. L'étude de l'influence des perturbations sur les mesures a permis de mettre en avant la grande robustesse de la méthode. Dans un second temps, certaines variantes de la méthode ont été étudiées, afin de mieux l'appréhender. Ceci a permis de montrer que les deux ingrédients rendant la méthode robuste sont la prise en compte de toute l'information expérimentale en un calcul et l'introduction d'une distance entre les mesures et les conditions aux limites du calcul. Enfin, la question du choix du poids entre les termes d'erreur en relation de comportement et de distance aux mesures a été abordée. Cela a permis de montrer son influence et il a été proposé des guides pour ce choix. Une méthode d'identification alternative a notamment été mise en avant.

Chapitre 4

Méthodes de résolution du problème de base

Dans ce quatrième chapitre, on s'intéresse à la résolution du problème de base de la méthode d'identification étudiée au chapitre précédent. Les méthodes étudiées doivent notamment prendre en compte la présence simultanée de conditions initiales et finales. Plusieurs voies ont été explorées. D'une part, des approches globales en temps, permettant de résoudre le problème complet sur le temps. D'autre part, des méthodes locales cherchant à compléter les conditions initiales manquantes. Enfin, une méthode basée sur des techniques de l'automatique et sur la résolution de l'équation de Riccati a été appliquée.

Sommaire

4.1	Problème de base	84
4.1.1	Formulation Éléments Finis	84
4.1.2	Problème $0D$	89
4.1.3	Solution analytique et remarques sur le système	91
4.2	Méthodes de résolution globales en temps	93
4.2.1	Assemblage d'un schéma temporel	93
4.2.2	Éléments Finis temporels	95
4.2.3	Illustration et commentaires	98
4.3	Méthodes de résolution locales en temps	98
4.3.1	Méthodes itératives	99
4.3.2	Utilisation de la matrice de transition, méthode de gradient	100
4.3.3	Passage par l'équation de Riccati	105
4.4	Conclusion	109

Dans ce chapitre, la résolution numérique du problème de base de la stratégie d'identification présentée au 3.1.3 est abordée. Comme il a été vu, la résolution de ce problème aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles en espace et en temps qui possède des conditions initiales et finales en temps. Cela empêche d'utiliser une méthode de résolution classique en temps, c'est-à-dire incrémentale, sans travail préalable. Diverses méthodes ont été étudiées. Afin de résoudre le problème numériquement, une première étape est de le discrétiser, tant en espace qu'en temps.

4.1 Problème de base

4.1.1 Formulation Éléments Finis

La difficulté majeure de la résolution du problème de base réside dans la présence de conditions initiales et finales en temps, le problème en espace restant relativement banal. Une discrétisation Éléments Finis du problème en espace a donc été effectuée, en partant de la formulation faible du problème. Pour cela, la barre de longueur L est discrétisée en N_e éléments de longueur notée l_e .

4.1.1.1 Formulation avec distance aux mesures

L'expression du problème sous forme Éléments Finis consiste à projeter la forme faible des équations d'équilibre sur un espace Éléments Finis où les champs de déplacement sont donnés sous la forme :

$$\begin{cases} u(x) = [\Phi(x)]U \\ u^*(x) = [\Phi(x)]U^* \end{cases}$$

où $[\Phi(x)]$ est la matrice des fonctions de forme et U et U^* les vecteurs des inconnues nodales, associés aux champs u et u^* .

On introduit également la matrice $[B(x)]$ telle que :

$$\varepsilon(u(x)) = [B(x)]U$$

La forme faible du système donnée par (3.15) s'écrit alors sur l'espace Éléments Finis :

$$\begin{cases} \int_0^L \left(\delta U^{*T} [\Phi(x)]^T \rho [\Phi(x)] \dot{U} + \delta U^{*T} [B(x)]^T E [B(x)] (U + U^*) \right) dx \\ \quad - \delta U^{*T} \left(\tilde{F}_d - \frac{1}{B} \Pi U^* \right) = 0 \\ \int_0^L \left(\delta U^T [\Phi(x)]^T \rho [\Phi(x)] \dot{U}^* + \delta U^T [B(x)]^T E [B(x)] U^* \right) dx = A \cdot \delta U^T \left(\Pi U - \tilde{U}_d \right) \\ \sigma = E \cdot [B(x)] (U + U^*) \end{cases} \quad (4.1)$$

cela, pour tout t , avec toujours les conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} U(0) = U_0 & \dot{U}(0) = \dot{U}_0 \\ U^*(T) = 0 & \dot{U}^*(T) = 0 \end{cases}$$

où on aura posé :

$$\Pi U = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ U_{N_e} \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_d = \begin{bmatrix} \tilde{u}_d|_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \tilde{u}_d|_L \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{F}_d = \begin{bmatrix} \tilde{f}_d|_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \tilde{f}_d|_L \end{bmatrix}$$

On note à présent :

$$[M] = \int_0^L [\Phi(x)]^T \rho [\Phi(x)] dx \quad \text{et} \quad [K] = \int_0^L [B(x)]^T E [B(x)] dx$$

Le système devient, en l'écrivant sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{U}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & K + \frac{1}{B}\Pi \\ -A\Pi & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_d \\ -A\Pi\tilde{U}_d \end{bmatrix}$$

Remarque :

Cette forme du problème peut s'obtenir en traitant directement le problème discrétisé d'identification suivant :

$$\begin{aligned} \min_{U, V, F} \quad & \frac{1}{2}(U - V)^T K (U - V) + \frac{\alpha}{2}(\Pi_u U - \tilde{U}_d)^2 + \frac{\beta}{2}(\Pi_f F - \tilde{F}_d)^2 \\ & M.\ddot{U} + K.V = F \end{aligned} \tag{4.2}$$

où V est le vecteur des degrés de liberté du champ de déplacement v tel que $\sigma = E.\varepsilon(v)$.

Afin de rendre la présentation des méthodes de résolution homogène sur les différents exemples, on note encore :

$$[M_a] = - \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K & K + \frac{1}{B}\Pi \\ -A\Pi & K \end{bmatrix}, \quad [S_a] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{F}_d \\ -A\Pi\tilde{U}_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [X] = \begin{bmatrix} U \\ U^* \end{bmatrix}$$

Le système s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{X} = M_a.X + S_a \tag{4.3}$$

avec les conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} X^{(1)}(0) = X_d^{(1)} & \dot{X}^{(1)}(0) = \dot{X}_0^{(1)} \\ X^{(2)}(T) = 0 & \dot{X}^{(2)}(T) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

où,

$$[X] = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad X^{(1)} = U \quad \text{et} \quad X^{(2)} = U^* \tag{4.5}$$

Une fois cette forme discrète en espace écrite, il restera pour résoudre numériquement à effectuer une discrétisation du problème en temps, avec deux possibilités : utiliser une approche Éléments Finis ou introduire un schéma d'intégration numérique reliant les grandeurs aux piquets de temps de la discrétisation.

4.1.1.2 Formulation avec conditions aux limites fortes

De la même manière, il est possible d'exprimer la formulation Éléments Finis du problème de base associé à la méthode étudiée au 3.3. Pour cela, la démarche utilisée est de partir du système (3.32), dans le but d'obtenir des équations d'évolution de u et u^* au sens des Éléments Finis. Dans un premier temps, on élimine donc σ des équations, grâce à la forme locale de la deuxième équation du système (3.32) :

$$\sigma = E.(u_{,x} + u_{,x}^*) \quad (4.6)$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \int_0^L (\rho.\ddot{u}^* - E.u_{,xx}^*) \delta u dx + \left[(E.u_{,x}^* + \lambda) \delta u \right]_0^L = 0 \\ \int_0^L (\rho.\ddot{u} - E.(u_{,xx} + u_{,xx}^*)) \delta u^* dx = 0 \\ \left[(E.(u_{,x} + u_{,x}^*) - F_d) \delta u \right]_0^L = 0 \\ \left[(u - u_d) \delta \lambda \right]_0^L = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

que l'on remet sous la forme suivante par intégration par partie, en injectant la troisième équation dans la seconde :

$$\begin{cases} \int_0^L (\rho.\ddot{u}^* \delta u + \delta u_{,x} E.u_{,x}^*) dx + \left[\lambda \delta u \right]_0^L = 0 \\ \int_0^L (\rho.\ddot{u} \delta u^* + \delta u_{,x}^* E.(u_{,x} + u_{,x}^*)) dx = \left[F_d \delta u^* \right]_0^L \\ \left[(u - u_d) \delta \lambda \right]_0^L = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Afin d'utiliser le même formalisme pour tous les exemples, on peut mettre ces équations sous forme matricielle avant de les projeter sur l'espace Éléments Finis :

$$\begin{cases} \int_0^L \left(\rho \cdot \begin{bmatrix} \delta u^* \\ \delta u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta u_{,x}^* \\ \delta u_{,x} \end{bmatrix} H \cdot \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,x}^* \end{bmatrix} \right) dx = \left[\begin{bmatrix} \delta u^* \\ \delta u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_d \\ \lambda \end{bmatrix} \right]_0^L \\ \left[(u - u_d) \delta \lambda \right]_0^L = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

avec : $H = \begin{bmatrix} E & E \\ 0 & E \end{bmatrix}$

On peut à présent exprimer cette relation au sens des Éléments Finis. On note X , le vecteur des inconnues nodales, défini comme :

$$X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1^* \\ \dots \\ u_{N_e} \\ u_{N_e}^* \end{bmatrix}$$

où N_e est le nombre de nœuds. On obtient donc :

$$M.\ddot{X} + K.X = S$$

$$\text{Avec, } M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2.m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 2.m & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

où, $m = \frac{\rho \cdot S \cdot l_e}{2}$ est la masse d'un demi-élément, que l'on concentre aux nœuds

$$\text{et, } K = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} H & -H & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -H & 2.H & -H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -H & 2.H & -H \\ 0 & \dots & 0 & 0 & H & H \end{bmatrix} \quad \text{et, } S = \begin{bmatrix} F_d(0) \\ \lambda(0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ F_d(L) \\ \lambda(L) \end{bmatrix}$$

Il reste encore à vérifier que $u_1 = u_d(0)$ et $u_{N_e} = u_d(L)$.

A priori, les degrés de déplacement imposé peuvent être pris en compte en introduisant des multiplicateurs de Lagrange relatifs à cette liaison. Il faudrait alors modifier le vecteur inconnu en augmentant sa taille. De la même façon, λ devrait aussi figurer dans le vecteur inconnu. Compte-tenu du fait que l'on veut conserver un cadre de présentation et de résolution unique pour tous les exemples, ceci semble compliquer la démarche. Le maillage étant simple et les nœuds à degrés de liberté (*ddl*) imposés étant ainsi facilement identifiables, on a préféré éliminer les *ddl*s imposés du vecteur inconnu, ainsi que les équations faisant intervenir λ . Celles-ci seront remplacées par les relations de conditions aux limites, *a priori* :

$$\begin{cases} u_1 = u_{d_0} \\ u_{N_e} = u_{d_L} \\ \frac{E}{l_e} \cdot (u_2 - u_{d_0} + u_2^* - u_1^*) = -\frac{1}{S} F_{d_0} \\ \frac{E}{l_e} \cdot (u_{d_L} - u_{N_e-1} + u_{N_e}^* - u_{N_e-1}^*) = \frac{1}{S} F_{d_L} \end{cases} \quad (4.10)$$

Cependant, on peut remarquer que, du fait de la formulation Éléments Finis, la frontière du domaine possède une masse, ainsi son équilibre n'est pas $\sigma \cdot n = F_{ext}$ mais $m \cdot \ddot{u} + \sigma \cdot n = F_{ext}$. Cela revient, en fait, à remplacer les deux dernières équations de (4.10) par les équations d'évolution de \ddot{u}_1 et \ddot{u}_{N_e} qui ont été éliminées du système. Ainsi, toutes les équations se retrouvent bien dans la formulation.

On va donc définir le vecteur \tilde{X} des *ddl*s intérieurs à la poutre par la relation :

$$X = \tilde{X} + Y \quad \text{où : } Y = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1^* \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ u_{N_e} \\ u_{N_e}^* \end{bmatrix}$$

Remarque :

\tilde{X} comporte des zéros aux *ddl*s imposés, simplement par commodité d'écriture.

4. Méthodes de résolution du problème de base

On définit également les matrices de taille $2.N_e \times 2.N_e$ dans lesquelles les deux premières lignes et les deux dernières sont remplacées par des zéros, \tilde{K} , et $\tilde{M}_a = M^{-1} \cdot \tilde{K}$.

Le système peut donc s'écrire à présent :

$$\begin{cases} X = \tilde{X} + Y \\ Y = D \cdot \tilde{X} + Y_d \quad \text{si } t < T \\ Y(T) = Y_d(T) \\ \ddot{\tilde{X}} = \tilde{M}_a \cdot X \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\text{avec, } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et, } Y_d = \begin{bmatrix} u_{d0} \\ \frac{l_e}{E}(F_{d0} - m\ddot{u}_{d0}) - u_{d0} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ u_{dL} \\ \frac{l_e}{E}(F_{dL} - m\ddot{u}_{dL}) - u_{dL} \end{bmatrix}$$

Cette forme est utilisable directement pour un schéma explicite :

$$\begin{cases} X_n = \tilde{X}_n + Y_n \\ Y_n = D \cdot \tilde{X}_n + Y_{d_n} \quad \text{si } n < N_t \\ Y_{N_t} = Y_{d_{N_t}} \\ \ddot{\tilde{X}}_n = \tilde{M}_a \cdot X_n \\ \tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n + \Delta t \dot{\tilde{X}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\tilde{X}}_n \\ \dot{\tilde{X}}_{n+1} = \dot{\tilde{X}}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\tilde{X}}_n + \ddot{\tilde{X}}_{n+1}) \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour conserver le formalisme commun aux différents problèmes, on peut encore mettre le système sous la forme :

$$\ddot{\tilde{X}} = M_a \cdot \tilde{X} + S_a, \quad \text{avec } M_a = \tilde{M}_a \cdot (Id + D) \quad \text{et } S_a = \tilde{M}_a \cdot Y_d \quad (4.13)$$

Afin d'exprimer les conditions initiales et finales simplement, les *ddl*s sont réordonnés par permutation circulaire, de façon à regrouper ceux relatifs au champ u , d'une part, et ceux relatifs au champ u^* , d'autre part. Les mêmes permutations circulaires doivent être effectuées sur les différentes matrices introduites. Cela permet d'obtenir des conditions initiales et finales du type :

$$\begin{cases} \tilde{X}^{\textcircled{1}}(0) = \tilde{X}_0^{\textcircled{1}} & \dot{\tilde{X}}^{\textcircled{1}}(0) = \dot{\tilde{X}}_0^{\textcircled{1}} \\ \tilde{X}^{\textcircled{2}}(T) = 0 & \dot{\tilde{X}}^{\textcircled{2}}(T) = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Finalement, le système est bien sous le formalisme commun qui sera utilisé lors de la présentation des méthodes de résolution.

Remarque :

- Cette méthode introduit les termes de vitesse dans le vecteur d'état et nécessite l'accélération relative aux déplacements imposés, elle demande donc de dériver les mesures par rapport au temps. La méthode de résolution risque donc de poser des problèmes pour des mesures fortement perturbées. Néanmoins dans les exemples qui suivent, il ne semble pas que ces problèmes aient été rencontrés.
- Le passage à la forme faible doit se faire avec prudence, si l'on part de la forme forte. En effet, celle-ci possède des équations à l'intérieur du domaine et des conditions aux limites sur la frontière du domaine. Cependant, pour introduire les termes de bord en partant de la forme faible de l'équilibre (équations intérieures), il faut injecter dans chaque équation, les conditions aux limites correspondant à la même différentielle dans δL . Si ceci n'est pas respecté, lors du passage à la formulation Éléments Finis, le problème à résoudre ne sera pas le bon, car termes de frontière et termes intérieurs interviennent de façon similaire et on ne peut pas les dissocier comme dans le cas continu (c'est-à-dire que les contributions liées au champ test δu , par exemple, du terme de bord et du terme intérieur de l'élément de bord interviennent au même endroit dans les matrices du problème).

4.1.2 Problème 0D

Afin d'illustrer la méthode de résolution, un cas simple a également été traité sur l'exemple d'une masse attachée à un ressort, figure 4.1.

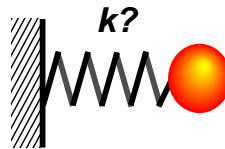


Figure 4.1 – Problème 0D d'identification à partir de mesures redondantes

Les équations régissant le système sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} + a.y = f(t) \\ y = k.x \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (\text{conditions initiales}) \end{cases}$$

Dans un premier temps, on considère que la fonction f est nulle et que l'on a accès aux mesures de x et de y . Celles-ci, notées respectivement \tilde{x} et \tilde{y} , peuvent être perturbées. Le problème d'identification est alors la recherche de la raideur k du ressort qui correspond aux mesures. De manière analogue à ce qui a été fait dans le cas du problème volumique, on introduit une formulation où l'on recherche le minimum de l'erreur en relation de

comportement associée à ce problème sans second membre :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & \frac{1}{2.k} \cdot (k.x - y)^2 + d_x(x, \tilde{x}) + d_y(y, \tilde{y}) \\ & \ddot{x} + a.y = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Typiquement, on prendra pour les distances aux mesures :

$$d_x = \frac{\alpha.k}{2} \cdot (x - \tilde{x})^2 \quad (4.16)$$

$$d_y = \frac{\beta}{2.k} \cdot (y - \tilde{y})^2 \quad (4.17)$$

où α et β sont des coefficients permettant de choisir la pondération des différents termes.

Il faut, en fait, choisir une formulation sur l'ensemble de l'intervalle de temps. Pour cela, on a le choix, entre autres, entre prendre le Sup ou l'intégrale sur le temps. Le Sup pouvant poser des problèmes lors de la différenciation, le choix se porte plutôt vers l'intégrale sur le temps. Le problème est donc :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & \int_0^t \left(\frac{1}{2.k} \cdot (k.x - y)^2 + d_x(x, \tilde{x}) + d_y(y, \tilde{y}) \right) dt \\ & \ddot{x} + a.y = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\text{que l'on note: } I(x,y) \quad (4.19)$$

Comme dans le cas 3D, la recherche du minimum sous contrainte de I revient à la recherche du point de stationnarité d'une nouvelle fonctionnelle L où les contraintes disparaissent en introduisant le multiplicateur de Lagrange λ :

$$L(x,y,\lambda) = I(x,y) - \int_0^t \lambda \cdot (\ddot{x} + a.y) \quad (4.20)$$

L'expression de la stationnarité de L ($\delta L = 0$) permet d'aboutir au système suivant, après intégration par partie :

$$\begin{cases} k \cdot (1 + \alpha) \cdot x - y - \ddot{\lambda} = k \cdot \alpha \cdot \tilde{x} \\ -x + \frac{1+\beta}{k} \cdot y - a \cdot \lambda = \frac{1}{k} \beta \cdot \tilde{y} \\ \ddot{x} + a.y = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

avec les conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} x(0) = x_0, & \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \\ \lambda(T) = 0, & \dot{\lambda}(T) = 0. \end{cases}$$

Remarque :

- Pour $\alpha = \beta = 0$, on retrouve la solution classique et λ est identiquement nul.
- Il en est de même si les mesures sont exactes et que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

On introduit les nouvelles constantes suivantes :

$$A = (1 + \alpha).k \quad ; \quad B = \frac{1 + \beta}{k}$$

$$\tilde{X} = \alpha.k.\tilde{x} \quad ; \quad \tilde{Y} = \frac{\beta}{k}.\tilde{y}$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} A.x - y - \ddot{\lambda} = \tilde{X} \\ -x + B.y - a.\lambda = \tilde{Y} \\ \ddot{x} + a.y = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

qui peut encore se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} + a.y = 0 \\ \ddot{\lambda} + \left(\frac{1}{B} - A\right).x + \frac{a}{B}.\lambda = -\left(\tilde{X} + \frac{1}{B}.\tilde{Y}\right) \\ \ddot{x} + \frac{a}{B}.x + \frac{a^2}{B}.\lambda = -\frac{a}{B}.\tilde{Y} \end{cases} \quad (4.23)$$

en conservant toujours les mêmes conditions initiales et finales.

En notant $X = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$, le système s'écrit :

$$\ddot{X} + K_a.X = S_a \quad (4.24)$$

avec :

$$K_a = \begin{bmatrix} \frac{a}{B} & \frac{a^2}{B} \\ \left(\frac{1}{B} - A\right) & \frac{a}{B} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S_a = - \begin{bmatrix} \frac{a}{B}.\tilde{Y} \\ \tilde{X} + \frac{1}{B}.\tilde{Y} \end{bmatrix}$$

En posant $X^{①} = x$ et $X^{②} = \lambda$, on obtient les conditions aux limites en temps :

$$\begin{cases} X^{①}(0) = X_d^{①} & \dot{X}^{①}(0) = \dot{X}_0^{①} \\ X^{②}(T) = 0 & \dot{X}^{②}(T) = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Les méthodes seront illustrées sur l'un ou l'autre des problèmes, dans le cadre général donné par l'équation (4.3), le formalisme restant le même, les scalaires étant changés par des vecteurs.

4.1.3 Solution analytique et remarques sur le système

4.1.3.1 Solution analytique du problème 0D

Le système d'équations linéaires avec second membre à coefficients constants, (4.23), possède une solution analytique qu'il est possible d'expliciter à partir de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière obtenue par variation de la constante.

– Équation homogène associée :

Le couple (x, λ) est cherché sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \cdot e^{s.t}$$

Pour être solution, s doit vérifier :

$$\det(K_a + s^2 Id) = 0 \quad (4.26)$$

qui a pour solution :

$$s = \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot \left(\xi_s \cdot \xi_D \cdot \frac{\omega}{2.D} + i \cdot \xi_D \cdot D \right) \quad (4.27)$$

avec,

$$\omega = \sqrt{A.B - 1}, \quad D = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \omega}}{2}}, \quad (\xi_s, \xi_D) \in \{-1, 1\}^2$$

On prend pour valeur des ξ_i ($i \in \{s, D\}$), pour les quatre racines de l'équation :

$$\begin{vmatrix} \xi_s & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \xi_D & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

De plus, p et q sont liés par une relation linéaire traduisant l'appartenance du vecteur $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ au noyau de $K_a + s^2 Id$.

- Une solution particulière, obtenue par la méthode de la variation de la constante est donnée par :

$$\begin{cases} x_0(t) = - \int_0^t \int_0^\tau \frac{a}{B} \cdot \tilde{Y}(\delta) \cdot e^{\sqrt{\frac{a}{B}} \cdot \frac{\omega}{2.D} \cdot (\delta + t - 2.\tau)} \cdot \cos \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot (\delta + t - 2.\tau) d\delta d\tau \\ \lambda_0 = - \int_t^T \int_\tau^T \left(\tilde{X} + \frac{\tilde{Y}}{B} \right) (\delta) \cdot e^{\sqrt{\frac{a}{B}} \cdot \frac{\omega}{2.D} \cdot (\delta + t - 2.\tau)} \cdot \cos \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot (\delta + t - 2.\tau) d\delta d\tau \end{cases}$$

La solution générale est finalement donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = x_0(t) + e^{-\sqrt{\frac{a}{B}} \cdot \frac{\omega}{2.D} \cdot t} \cdot \left(p_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t + p_2 \cdot \sin \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t \right) \\ \quad + e^{\sqrt{\frac{a}{B}} \cdot \frac{\omega}{2.D} \cdot t} \cdot \left(p_3 \cdot \cos \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t + p_4 \cdot \sin \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t \right) \\ \lambda(t) = \lambda_0(t) + e^{-\sqrt{\frac{a}{B}} \cdot \frac{\omega}{2.D} \cdot t} \cdot \left(q_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t + q_2 \cdot \sin \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t \right) \\ \quad + e^{\sqrt{\frac{a}{B}} \cdot \frac{\omega}{2.D} \cdot t} \cdot \left(q_3 \cdot \cos \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t + q_4 \cdot \sin \sqrt{\frac{a}{B}} \cdot D \cdot t \right) \end{cases} \quad (4.28)$$

avec les quatre relations entre les coefficients :

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{a}{\omega} \cdot q_2 & p_2 &= \frac{a}{\omega} \cdot q_1 \\ p_3 &= \frac{a}{\omega} \cdot q_4 & p_4 &= -\frac{a}{\omega} \cdot q_3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour des conditions initiales ou finales données, il est possible de déterminer analytiquement la solution.

D'un point de vue pratique, la solution analytique sera calculée par intégration numérique des différents termes qui la composent. Elle permettra d'avoir une solution de référence pour valider les différentes méthodes numériques, dans le cas de l'étude du système masse-ressort.

4.1.3.2 Remarque sur la stabilité du système continu

L'expression analytique de la solution du problème de base en $0D$ donnée par (4.28) comprend des termes exponentiels positifs et négatifs, tant pour x que pour λ . Ceci signifie que le système est instable aussi bien dans le sens des temps croissants que dans le sens des temps rétrogrades. Même si les solutions physiques du problème restent bornées, cela pose un problème dans la résolution numérique, qui risque d'être très sensible aux perturbations sur les conditions initiales et finales.

Ceci s'observe également dans le cas du problème de base en $1D$. Il s'agit en fait d'une caractéristique du problème.

4.2 Méthodes de résolution globales en temps

Afin de résoudre le problème en temps avec ses conditions initiales et finales (4.3), une première famille de méthodes consiste à considérer le temps de façon analogue à l'espace pour lequel il est usuel d'avoir des conditions aux limites à toutes les extrémités du domaine d'étude. La méthode consiste alors à assembler le problème sur l'ensemble du temps, et à inverser la matrice obtenue pour aboutir à la solution. Différentes manières d'opérer pour obtenir la matrice assemblée ont été étudiées, soit en assemblant un schéma aux différences finies, soit en utilisant une formulation Éléments Finis en temps.

4.2.1 Assemblage d'un schéma temporel

On se donne le système d'équations (4.3) en X , avec ses conditions initiales et finales (4.4), ainsi qu'un schéma d'intégration numérique sur le temps.

Premier cas : schéma explicite

Prenons pour commencer un schéma d'intégration de type explicite, différences centrées ; ce choix se justifie par l'application que l'on veut faire de la méthode générale à la dynamique transitoire. En discrétisant l'intervalle de temps, il est possible d'exprimer, à chaque piquet de temps, le système d'équations. On remplace alors, dans celui-ci, les dérivées temporelles par leur expression en fonction des variables au pas de temps et aux

Deuxième cas : schéma de Newmark quelconque

On peut faire la même chose avec un autre schéma, comme un schéma implicite que l'on ne cherche pas à inverser. Pour cela, on enrichit le vecteur d'état à chaque instant, en y ajoutant les quantités dérivées.

Ainsi, on part toujours du système (4.3) à chaque pas de temps, et on utilise à présent un schéma de type Newmark quelconque. Afin de prendre en compte le caractère rétrograde de l'évolution de $X^{(2)}$, un schéma rétrograde lui sera appliqué, reliant le pas $n-1$ au pas n , de manière analogue au schéma direct entre $n+1$ et n .

Le schéma direct est, pour $X^{(1)}$:

$$\begin{aligned} X_{n+1}^{(1)} &= X_n^{(1)} + \Delta t \cdot \dot{X}_n^{(1)} + \frac{\Delta t^2}{2} \left((1 - 2\beta) \cdot \ddot{X}_n^{(1)} + 2\beta \cdot \ddot{X}_{n+1}^{(1)} \right) \\ \dot{X}_{n+1}^{(1)} &= \dot{X}_n^{(1)} + \Delta t \cdot \left((1 - \gamma) \cdot \ddot{X}_n^{(1)} + \gamma \cdot \ddot{X}_{n+1}^{(1)} \right) \end{aligned}$$

Le schéma rétrograde pour $X^{(2)}$ est similaire, et cela permet encore d'écrire pour $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$:

$$\begin{aligned} G_{(1)} \cdot Z_{n+1}^{(1)} + H_{(1)} \cdot Z_n^{(1)} &= \underline{0} \\ G_{(2)} \cdot Z_n^{(2)} + H_{(2)} \cdot Z_{n+1}^{(2)} &= \underline{0} \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} G_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \cdot \Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma \cdot \Delta t \end{bmatrix} & H_{(1)} &= \begin{bmatrix} -1 & -\Delta t & -\frac{\Delta t^2}{2} \cdot (1 - 2\beta) \\ 0 & -1 & -\Delta t \cdot (1 - \gamma) \end{bmatrix} & Z_n^{(1)} &= \begin{bmatrix} X_n^{(1)} \\ \dot{X}_n^{(1)} \\ \ddot{X}_n^{(1)} \end{bmatrix} \\ G_{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \cdot \Delta t^2 \\ 0 & 1 & \gamma \cdot \Delta t \end{bmatrix} & H_{(2)} &= \begin{bmatrix} -1 & \Delta t & -\frac{\Delta t^2}{2} \cdot (1 - 2\beta) \\ 0 & -1 & -\Delta t \cdot (1 - \gamma) \end{bmatrix} & Z_n^{(2)} &= \begin{bmatrix} X_n^{(2)} \\ \dot{X}_n^{(2)} \\ \ddot{X}_n^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, en posant $T_n = \begin{bmatrix} X_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} \end{bmatrix}$ et en prenant en compte l'équation d'équilibre (4.3), on obtient une relation du type :

$$I \cdot T_{n-1} + J \cdot T_n + K \cdot T_{n+1} = S_n \quad (4.36)$$

où l'on peut préciser les matrices. Comme cela a été fait pour le schéma explicite, il reste alors à assembler sur le temps puis à remplacer les termes de bord pour prendre en compte les conditions initiales et finales.

La résolution se fait alors par inversion de la matrice globale sur le temps.

4.2.2 Éléments Finis temporels

Une autre méthode pour résoudre cette équation globalement en temps consiste à utiliser des Éléments Finis temporels, c'est-à-dire à faire du problème une formulation faible sur l'ensemble de l'intervalle et à choisir une approximation des différentes quantités entre les piquets de temps. D'autres auteurs ont appliqué cette méthode pour résoudre des

problèmes similaires [Constantinescu et al., 2003]. Le choix s'est porté sur l'approximation linéaire. Il faut, de plus, une formulation qui permette de prendre en compte les conditions initiales et finales, équivalents temporels des conditions aux limites des Éléments Finis en espace. On remarque ici qu'il y a des conditions initiales en X et \dot{X} au même instant, ce qui serait l'équivalent de conditions aux limites en effort et en déplacement sur la même partie de la frontière. Pour permettre toutefois, de prendre en compte ces conditions aux limites et de formuler le problème, on va choisir un vecteur d'état dans lequel apparaîtront les quantités et leur dérivée temporelle d'ordre 1, dont l'approximation sera également linéaire, ce qui est possible du fait de la formulation faible.

Le système à résoudre est donc du premier ordre et s'exprime :

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = M_a \cdot X + S_a \end{cases} \quad (4.37)$$

avec les conditions aux limites en temps :

$$\begin{cases} X^{(1)}(0) = X_d^{(1)} & V^{(1)}(0) = \dot{X}_d^{(1)} \\ X^{(2)}(T) = 0 & V^{(2)}(T) = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

On pose donc:

$$T = \begin{bmatrix} V \\ X \end{bmatrix}$$

qui va vérifier l'équation :

$$M_0 \cdot \dot{T} + K_0 \cdot T = B_0 \quad (4.39)$$

avec,

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ Id & 0 \end{bmatrix} \quad K_0 = - \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & M_a \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ S_a \end{bmatrix}$$

En intégrant l'équation (4.39) entre deux piquets de temps, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} (M_0 \cdot \dot{T} + K_0 \cdot T - B_0) \cdot V^* = 0 \quad (4.40)$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} V^* \cdot M_0 \cdot \dot{T} + \int_{t_1}^{t_2} (K_0 \cdot T - B_0) \cdot V^* = 0 \quad (4.41)$$

avec une approximation pour chaque quantité du type :

$$U(t) = U_1 \cdot \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) + U_2 \cdot \frac{t}{\Delta t}$$

On a pour le premier terme :

$$\int_{t_1}^{t_2} V^* \cdot M_0 \cdot \dot{T} = \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -M_0 & M_0 \\ -M_0 & M_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

et pour le second :

$$\int_{t_1}^{t_2} (K_0 \cdot T - B_0) \cdot V^* = \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 \cdot K_0 & K_0 \\ K_0 & 2 \cdot K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 \cdot Id & Id \\ Id & 2 \cdot Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{01} \\ B_{02} \end{bmatrix} \right)$$

Remarque :

Notons que cette équation n'est pas symétrique en V et T .

Finalement, on a sur chaque élément, une relation du type :

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} D_e \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} C_e \begin{bmatrix} B_{01} \\ B_{02} \end{bmatrix}$$

avec,

$$D_e = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -M_0 & M_0 \\ -M_0 & M_0 \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2.K_0 & K_0 \\ K_0 & 2.K_0 \end{bmatrix} \quad C_e = \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2.Id & Id \\ Id & 2.Id \end{bmatrix}$$

En introduisant pour chaque quantité le vecteur assemblé sur le temps :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_{N_t} \end{bmatrix}$$

On obtient la formulation assemblée sur le temps :

$$\underline{V}^* . D . \underline{T} = \underline{V}^* . C . \underline{B}_0 \quad (4.42)$$

où D est la matrice assemblée sur le temps.

Enfin, il reste à prendre en compte les conditions initiales et finales. Pour cela, il faut remarquer que les vecteurs V^* de départ appartiennent à un espace équivalent au cinématiquement admissible à 0 des Éléments Finis en espace, c'est-à-dire que leurs coordonnées sont nulles là où les variables correspondantes sont imposées. D'un point de vue discret, cela signifie que $V_{\textcircled{1}1}^* = V_{\textcircled{3}1}^* = 0$ et que $V_{\textcircled{2}N_t} = V_{\textcircled{4}N_t}^* = 0$, en ayant noté :

$$T = \begin{bmatrix} T_{\textcircled{1}} \\ T_{\textcircled{2}} \\ T_{\textcircled{3}} \\ T_{\textcircled{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{\textcircled{1}} \\ V^{\textcircled{2}} \\ X^{\textcircled{1}} \\ X^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V^* = \begin{bmatrix} V_{\textcircled{1}}^* \\ V_{\textcircled{2}}^* \\ V_{\textcircled{3}}^* \\ V_{\textcircled{4}}^* \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Il est donc possible de remplacer ces lignes dans le système par des lignes du type :

$$\begin{cases} T_{\textcircled{3}1} = X_d^{\textcircled{1}} & T_{\textcircled{1}1} = \dot{X}_d^{\textcircled{1}} \\ T_{\textcircled{4}N_t} = 0 & T_{\textcircled{2}N_t} = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

On obtient finalement un système à résoudre, du type :

$$D . \underline{X} = B$$

Cette formulation donne de bons résultats, comme on le verra au 4.2.3. Cependant, elle rajoute une dimension supplémentaire au problème Éléments Finis, donc augmente d'autant la matrice du système. Pour un problème sur un domaine 3D, on récupère donc une matrice équivalente à un problème 4D, qui peut vite devenir de très grande taille et poser de lourds problèmes numériques.

Remarque :

Numériquement, on observe une équivalence des résultats entre la méthode des Éléments Finis temporels et celle qui utilise un schéma explicite assemblé sur le temps. Cela peut se comprendre si l'on exprime l'accélération au piquet de temps par les deux schémas ; on s'aperçoit que l'on retombe sur la même approximation. Cette équivalence a été mise en avant, par exemple, dans [Gravouil, 2000]. Cependant, on peut remarquer qu'elle n'est valable qu'aux piquets de temps, puisque les Éléments Finis fournissent une fonction du temps prenant des valeurs en chaque instant, alors que l'utilisation d'un schéma d'intégration se contente de valeurs aux piquets de temps.

4.2.3 Illustration et commentaires

Les différentes méthodes sont illustrées sur l'exemple 0D du système masse-ressort de la partie 4.1.2. Le système à résoudre est alors le système (4.23). On prendra comme mesures, des mesures non perturbées, données par la solution analytique de l'équation régissant le système masse ressort, pour des raideur et masse de référence, respectivement k_0 et a_0 . Ainsi, les mesures seront données par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], \\ \tilde{x}(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ \tilde{y}(t) = k_0 \tilde{x}(t) \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{k_0 a_0} \end{cases} \quad (4.45)$$

On prendra pour valeur : $k_0 = 1$, $a_0 = 1$, $x_0 = 1$ et $\dot{x}_0 = 0$. La résolution est faite par les deux méthodes présentées : Éléments Finis temporels et assemblage d'un schéma explicite sur le temps. Les deux méthodes étant équivalentes, elles donnent bien les mêmes résultats.

La figure 4.2 présente les champs x et λ , pour $k = k_0$, et un temps d'étude $T = \frac{10}{\omega_0}$, pour 600 pas de temps. On sait que la solution analytique, dans ce cas, correspond à λ identiquement nul et $x = \tilde{x}$. L'erreur est donc raisonnable. La méthode donne une précision comparable dans le cas d'une raideur k différente ou de mesures perturbées.

La méthode permet donc bien de trouver une solution approchée du problème. Cependant, comme il a été remarqué plus haut sa mise en œuvre numérique est un peu lourde, même si la matrice en temps a une petite largeur de bande (chaque pas de temps n'est relié qu'à ses voisins). De plus, le passage à des problèmes non-linéaires, comme ceux qui nous intéressent à terme, n'est pas évident, puisque la dépendance à l'histoire des variables internes aboutit à un problème largement non local en temps.

4.3 Méthodes de résolution locales en temps

La partie précédente a proposé des méthodes globales en temps pour résoudre le problème de base. Cela a l'avantage de prendre en compte les conditions initiales et finales de façon naturelle. Toutefois, d'un point de vue pratique, cela peut conduire à devoir inverser des matrices de taille importante, puisque cela revient à rajouter une dimension au problème. De plus, l'extension au cas non linéaire semble poser des difficultés, puisque

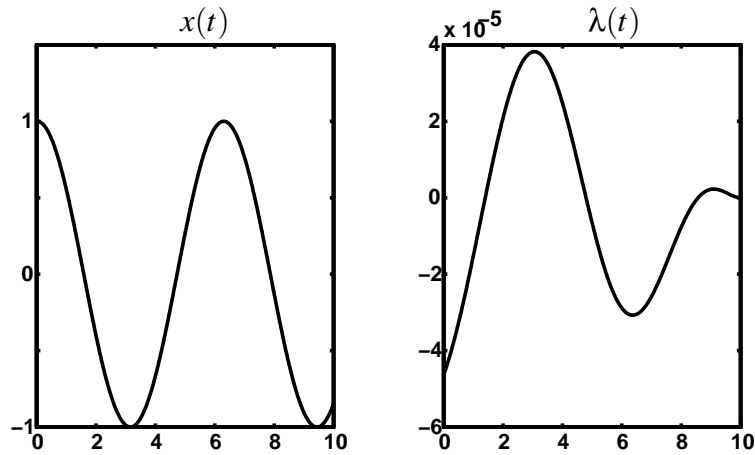


Figure 4.2 – Déplacement et multiplicateur par les méthodes globales en temps

la dépendance du comportement au passé conduit à des problèmes fortement non-locaux. C'est pourquoi des méthodes locales en temps ont également été étudiées. Celles-ci vont utiliser un schéma incrémental en temps, qu'il faudra adapter pour prendre en compte conditions initiales et finales. Cette adaptation peut se faire de deux manières :

1. en traitant successivement des problèmes directs et rétrogrades en temps, pour lesquels les conditions initiales sont connues ;
2. en estimant les conditions initiales manquantes avant d'appliquer le schéma temporel.

4.3.1 Méthodes itératives

Le système (4.3) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}^{\textcircled{1}} \\ \ddot{X}^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{a11} & M_{a12} \\ M_{a21} & M_{a22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X^{\textcircled{1}} \\ X^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_a^{\textcircled{1}} \\ S_a^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

avec les conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} X^{\textcircled{1}}(0) = X_d^{\textcircled{1}} & \dot{X}^{\textcircled{1}}(0) = \dot{X}_0^{\textcircled{1}} \\ X^{\textcircled{2}}(T) = 0 & \dot{X}^{\textcircled{2}}(T) = 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

4.3.1.1 Différentes possibilités

Il est possible de résoudre le problème (4.46)-(4.47) de façon itérative en parcourant le temps successivement dans le sens direct et dans le sens rétrograde, en utilisant les résultats du calcul précédent. Il est possible de procéder de deux manières :

1. en résolvant l'ensemble du système (4.46), successivement dans le sens direct, puis dans le sens rétrograde. Dans ce cas, les conditions initiales (ou finales) manquantes sont déterminées par la valeur au dernier pas de temps du calcul précédent, qui s'effectuait dans le sens inverse. En itérant, on espère converger vers les bonnes conditions initiales et finales, donc vers les bons champs solution. Le couplage entre le problème direct et rétrograde ne se fait donc que par les conditions initiales et finales. Il faut initialiser les conditions initiales pour le premier calcul, par exemple en

prenant des valeurs nulles pour $X^{(2)}(0)$ et $\dot{X}^{(2)}(0)$, correspondant à celles nécessaires pour que la relation de comportement soit vérifiée ;

2. en résolvant l'équation relative à l'évolution de $X^{(1)}$ dans le sens direct, puisqu'elle possède ses conditions initiales, et l'équation relative à l'évolution de $X^{(2)}$ dans le sens rétrograde. Pour chaque résolution, le champ qui n'est pas calculé est passé au second membre du système et prend les valeurs qui ont été trouvées lors de la résolution précédente de son problème d'évolution. Là encore, l'initialisation peut se faire avec un champ $X^{(2)}$, par exemple nul en tout point et à chaque instant, dans l'équation d'évolution de $X^{(1)}$.

Ces deux méthodes étant des méthodes itératives, il faut choisir un critère de convergence, par exemple l'erreur faite sur les conditions initiales et finales connues ou bien la variation des champs d'une itération à la suivante.

D'autre part, le système (4.46), écrit sous cette forme, peut être vu comme un problème couplé, liant un problème direct en temps à un problème rétrograde en temps. Il pourrait donc être envisageable d'utiliser des méthodes de résolution globales en temps traitant de problèmes couplés, comme c'est le cas de la version multiphysique de la méthode *LATIN*, [Dureisseix et al., 2003]. Cependant, cette piste n'a pas été mise en pratique, car elle ne prend pas en compte le caractère instable du système couplé, et elle aboutirait sans doute également à des phénomènes de résonance entre les équations, comme cela est expliqué ci-dessous.

4.3.1.2 Illustration et commentaires

Ces deux méthodes ont été testées sur les mêmes exemples que les autres. Cependant, les résultats ne sont pas présentés ici puisqu'il s'avère que ces méthodes ne convergeaient pas. Ceci s'explique par la présence d'exponentielles croissantes dans les solutions du système homogène associé à (4.3). Ceci tant dans le sens des temps croissants (exponentielles positives) que dans le sens des temps décroissants (exponentielles négatives). Ces exponentielles sont alors excitées lorsque l'on n'est pas sur la solution physique exacte, les itérations ne stabilisant pas ce problème.

Une autre interprétation de l'échec de la seconde méthode est la suivante : on résout deux problèmes couplés, qui font intervenir la même matrice ($M_{a11} = M_{a22}$), donc les mêmes fréquences propres. Ainsi, il peut très bien apparaître des phénomènes de résonance, lorsque les solutions de l'une passent au second membre de l'autre. Ainsi, de façon itérative, le système finit par exploser.

4.3.2 Utilisation de la matrice de transition, méthode de gradient

4.3.2.1 Principe

On se propose ici de résoudre le système (4.3) en X , en construisant une approximation de sa matrice de transition à partir d'un schéma d'intégration de type explicite, puis en résolvant le système qui relie les conditions initiales aux conditions finales afin de déterminer les conditions initiales manquantes en $X^{(2)}$. Une fois celles-ci déterminées, il est possible de reconstruire par un calcul direct la solution sur l'ensemble de l'intervalle de temps, en utilisant le schéma choisi. C'est une méthode numériquement beaucoup plus légère que celles assemblées sur le temps. Toutefois, elle risque de présenter une plus

grande sensibilité à la précision numérique.

Dans le cas du choix d'un schéma temporel explicite, le système est celui donné par (4.29).

Cela permet d'établir une relation de récurrence :

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ \dot{X}_{n+1} \end{bmatrix} = K_a \cdot \begin{bmatrix} X_n \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} + R_n \quad (4.48)$$

avec,

$$\begin{cases} K_a = \begin{bmatrix} Id + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot M_a & \Delta t \cdot Id \\ \frac{\Delta t}{2} \left(2 \cdot M_a + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot M_a^2 \right) & Id + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot M_a \end{bmatrix} \\ R_n = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \cdot S_{a_n} \\ \frac{\Delta t}{2} \left(Id + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot M_a \right) S_{a_n} + \frac{\Delta t}{2} \cdot S_{a_{n+1}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.49)$$

En posant $T_n = \begin{bmatrix} X_n \\ \dot{X}_n \end{bmatrix}$, on obtient par récurrence :

$$T_n = K_a^{n-1} \cdot T_1 + \sum_{i=1}^n K_a^{i-1} R_{n-i}, \quad \text{en convenant que : } R_0 = 0 \quad (4.50)$$

En notant :

$$M = K_a^{N_t-1} \quad \text{et} \quad R_T = \sum_{i=1}^{N_t} K_a^{i-1} R_{N_t-i} \quad (4.51)$$

La relation reliant valeurs initiales et valeurs finales s'écrit :

$$\begin{bmatrix} X_{N_t}^{(1)} \\ \dot{X}_{N_t}^{(1)} \\ X_{N_t}^{(2)} \\ \dot{X}_{N_t}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ \dot{X}_1^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ \dot{X}_1^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{T_1} \\ R_{T_2} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

dont on déduit,

$$\begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ \dot{X}_1^{(2)} \end{bmatrix} = M_{22}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} X_{N_t}^{(2)} \\ \dot{X}_{N_t}^{(2)} \end{bmatrix} - M_{21} \cdot \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ \dot{X}_1^{(1)} \end{bmatrix} - R_{T_2} \right) \quad (4.53)$$

Cette relation permet bien d'obtenir une relation entre l'état à l'instant initial et celui à l'instant final. On peut donc en déduire la valeur de $X^{(2)}$ et $\dot{X}^{(2)}$ pour $t = 0$, puisque l'on a quatre équations à quatre inconnues.

Cette méthode peut encore être vue comme une méthode de gradient reliant les conditions initiales manquantes aux conditions finales données. Dans le cas présent, le système étant linéaire, la méthode converge en une itération, et on a directement les conditions initiales manquantes.

Remarque :

Cette méthode a également été appliquée pour un schéma de Newmark quelconque. Pour cela, partant d'un schéma quelconque, il suffit de remettre le système sous la forme du système (4.48). Cela suppose d'inverser une partie du système discrétisé en temps au préalable, ce qui ne se fait pas usuellement avec un schéma de Newmark implicite (autre que différences centrées).

4.3.2.2 Illustration et commentaires

La méthode est illustrée sur le même exemple que les méthodes précédentes, c'est-à-dire sur la résolution du problème de base pour le système masse-ressort, avec des mesures non perturbées et la bonne raideur de ressort $k = k_0$.

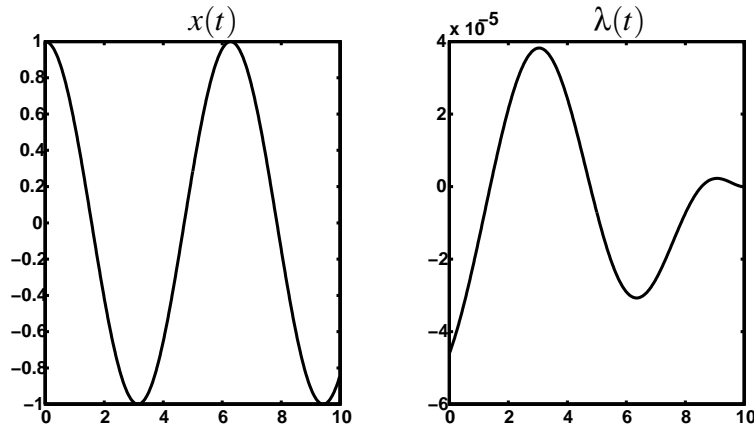


Figure 4.3 – Déplacement et multiplicateur par la matrice de transition

La figure 4.3 présente les solutions $x(t)$ et $\lambda(t)$, pour un temps d'étude $T = 10/\omega_0$, pour une discrétisation avec 600 pas de temps. On peut remarquer que le résultat obtenu est tout à fait similaire à celui obtenu avec les méthodes globales en temps, notamment pour ce qui est de l'ordre de grandeur de λ . Cependant, cette méthode est beaucoup plus rapide. La figure 4.4 présente le résultat de la résolution par la méthode basée sur la matrice de transition pour un temps de calcul à peu près équivalent à celui que nécessite la première méthode avec 600 pas de temps. On voit alors que la précision est améliorée.

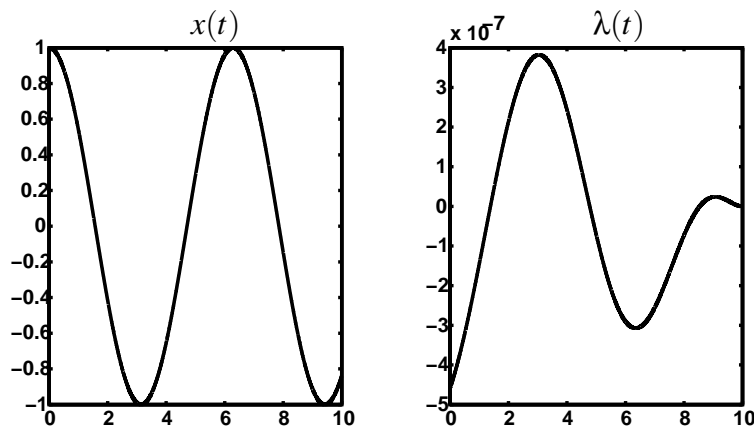


Figure 4.4 – Déplacement et multiplicateur par la matrice de transition

Enfin, il est intéressant de constater que le multiplicateur n'est pas identiquement nul, contrairement à ce qu'il devrait être s'il s'agissait de la solution exacte. Ceci est évidemment dû à la discrétisation du problème, mais il est intéressant de noter qu'en mettant des mesures exactes au sens du schéma numérique (c'est-à-dire fabriquées en utilisant

le même schéma en temps), on retrouve un multiplicateur numériquement nul (son ordre de grandeur est de 10^{-15}).

La méthode permet donc de résoudre le problème de base, sur des temps courts. Cependant, pour des temps d'étude trop longs, la méthode explose. Ceci est encore dû à la présence d'exponentielles croissantes parmi les solutions du système homogène associé à (4.3). En conséquence, les erreurs d'évaluation des conditions initiales manquantes sont amplifiées sur ces modes. Ainsi, même avec une erreur de l'ordre de 10^{-15} au départ, ce qui semble déjà bon numériquement, pour un temps d'étude suffisant, les champs solution vont exploser.

D'un point de vue discret, cela se traduit par une matrice de récurrence entre les pas n et $n + 1$ qui possède des valeurs propres à la fois supérieures et inférieures à 1. Ceci a pour conséquence que le conditionnement des matrices M et M_{22} de (4.52) est d'autant plus mauvais que N_t est grand. Ainsi, cela risque d'ajouter des problèmes pour l'inversion numérique de M_{22} , qui vont donc dégrader la précision des conditions initiales estimées et dégrader d'autant la méthode de résolution.

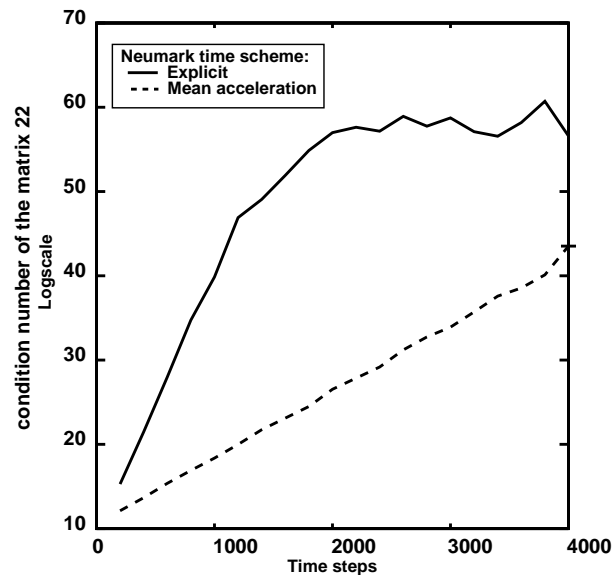


Figure 4.5 – Conditionnement de la matrice M_{22} en fonction de N_t

Toutefois, la stabilité du système discret dépend en partie du choix du schéma d'intégration. Si les considérations sur le système continu fournissent un temps d'étude maximum théorique, le temps d'étude numérique sera inférieur. On peut, toutefois, l'améliorer en changeant de schéma. La figure 4.5 présente le conditionnement de la matrice M_{22} en fonction du nombre de pas de temps, la taille des pas de temps étant constante, pour le schéma aux différences centrées et celui de l'accélération moyenne. Ceci confirme que la stabilité de la méthode est améliorée dans le second cas.

Cette dernière méthode est donc intéressante d'une part, pour sa relative simplicité et son extension aux problèmes Éléments Finis de grande taille et d'autre part, du fait qu'elle pourrait s'étendre au cas non-linéaire dès lors qu'elle est vue comme une méthode de gradient. Toutefois, sa limitation majeure demeure, comme pour les autres méthodes, la limitation du temps d'étude, du fait de la présence d'exponentielles croissantes parmi

les solutions. Le paragraphe suivant propose une amélioration de la méthode dans le cas OD permettant de ne traiter que des problèmes stables.

4.3.2.3 Proposition d'amélioration

Afin d'améliorer la méthode précédente, on s'inspire de ce qui a été fait dans [Vaughan, 1969], où l'auteur propose une méthode robuste pour la résolution de l'équation transitoire de Riccati associée à un problème de contrôle optimal linéaire, de façon analytique. Ici, on applique la même démarche, mais dans le cas discret. L'idée est de ne traiter que des systèmes qui ne possèdent pas d'exponentielle croissante parmi les solutions du système homogène associé. Il faut donc changer de base, pour séparer les exponentielles croissantes des exponentielles décroissantes et traiter les premières de façon étrograde et les secondes de façon directe. D'un point de vue pratique, on part de (4.48), que l'on réordonne de façon à l'avoir sous la forme :

$$\begin{bmatrix} T_{n+1}^{(1)} \\ T_{n+1}^{(2)} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} T_n^{(2)} \\ T_n^{(1)} \end{bmatrix} + B_n \quad \text{avec :} \quad T^{(1)} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \dot{X}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^{(2)} = \begin{bmatrix} X^{(2)} \\ \dot{X}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

où A et B_n correspondent respectivement à K_a et R_n réordonnés.

Puis A est diagonalisé de telle sorte que soient séparées les valeurs propres dont la partie réelle est plus grande que 1, des autres :

$$A = W \cdot D \cdot W^{-1} \quad \text{avec :} \quad D = \begin{bmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{bmatrix} \quad \text{où } Re(D_+) > 1 \text{ et } Re(D_-) < 1 \quad (4.55)$$

où on a introduit la matrice de changement de base W et où $Re(x)$ représente la partie réelle de x .

En posant $\begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} T^{(1)} \\ T^{(2)} \end{bmatrix}$, dans la nouvelle base, on a :

$$\begin{bmatrix} V_{n+1} \\ \Delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ \Delta_n \end{bmatrix} + W^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B_n^+ \\ B_n^- \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

que l'on réécrit de la façon suivante, en passant les équations instables en sens direct, dans le sens des temps rétrogrades :

$$\begin{bmatrix} V_n \\ \Delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_+^{-1} & 0 \\ 0 & D_- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ \Delta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_n^+ \\ S_n^- \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} V_n = D_+^{-1} \cdot V_{n+1} + S_n^+ \\ \Delta_{n+1} = D_- \cdot \Delta_n + S_n^- \end{cases} \quad (4.58)$$

Ce système ne possède plus de valeur propre menant à des termes divergeants. Il reste toutefois à déterminer les conditions initiales de ce système, à savoir V_{N_t} et Δ_0 . Pour cela, on dispose des conditions initiales en $T^{(1)}$ et finales en $T^{(2)}$, que l'on peut exprimer dans la nouvelle base. Puis, pour avoir le bon nombre d'équations, on complète avec les relations entre conditions initiales et finales des deux équations de (4.58) :

$$\begin{cases} T_1^{(1)} = W_{11} \cdot V_1 + W_{12} \cdot \Delta_1 \\ T_{N_t}^{(2)} = W_{21} \cdot V_{N_t} + W_{22} \cdot \Delta_{N_t} \\ V_1 = D_+^{-N_t+1} \cdot V_{N_t} + D_1 \\ \Delta_{N_t} = D_-^{N_t-1} \cdot \Delta_1 + D_2 \end{cases} \quad (4.59)$$

où D_1 et D_2 sont fonctions de D_+ , D_- , S_+ et S_-

Il est alors possible, à partir de ce système, de déterminer les conditions initiales manquantes puis de résoudre le système (4.58) directement.

Cette méthode est illustrée sur le problème de base, dans le cas du système masse-ressort. Il est résolu pour des mesures exactes au sens numérique, en prenant comme raideur k , celle de référence, notée k_0 , ayant servi à fabriquer les mesures. On s'attend donc à obtenir un multiplicateur λ identiquement nul. Pour que la méthode présente un intérêt, le temps d'étude est choisi relativement long, $T_{max} = \frac{50}{\sqrt{a.k}}$, de telle sorte que les autres méthodes ne permettent pas de résoudre le système. La figure 4.6 présente, tout d'abord, le multiplicateur obtenu par la méthode telle qu'elle a été exposée. Il est alors de l'ordre de 10^{-15} , et peut donc être considéré comme numériquement nul. La figure 4.6 présente également le calcul du multiplicateur, en utilisant le même système (4.58), mais en choisissant les conditions initiales égales à 0. L'idée est de dire que le système traitant des solutions homogènes décroissantes, l'influence des conditions initiales devrait se cantonner aux extrémités de l'intervalle d'étude, si celui-ci est assez grand. C'est bien ce que l'on observe, même s'il faudrait des temps d'étude plus longs pour que cette méthode soit réellement pertinente.

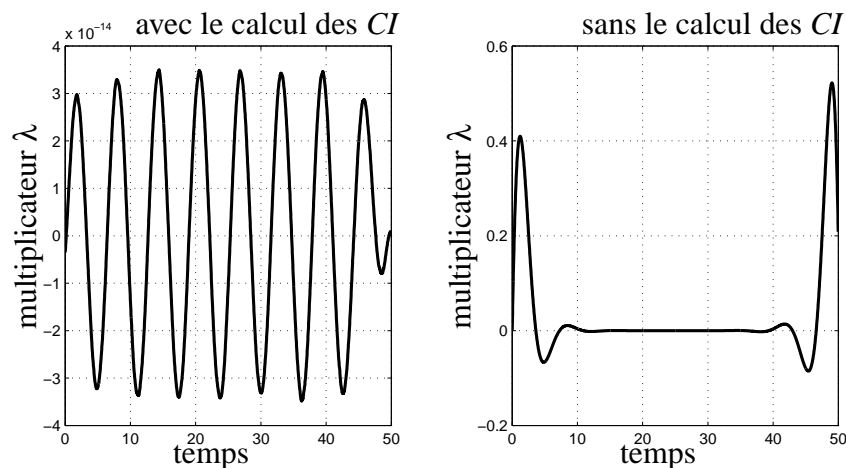


Figure 4.6 – Multiplicateur $\lambda(t)$, pour un temps d'étude $T_{max} = \frac{50}{\sqrt{a.k}}$

Cette méthode suppose que l'on puisse diagonaliser la matrice de récurrence, notée ici A . Dans le cas $0D$, c'est bien le cas, en revanche, ce n'est plus vrai dans le cas unidimensionnel. Il faudrait alors réfléchir à une extension de la méthode pour des matrices non diagonalisables, qui permette de séparer la partie stable de la partie instable du système (l'utilisation de la réduite de Jordan serait une possibilité si elle s'avérait robuste numériquement).

4.3.3 Passage par l'équation de Riccati

4.3.3.1 Formalisme de l'automatisme

Lors de travaux précédents au *LMT-Cachan* sur le recalage de structures actives [Formosa, 2002], des problèmes similaires à (4.3)-(4.4) ont dû être résolus. L'approche alors choisie est de reformuler le problème comme un problème de contrôle optimal [Lions,

1968, Bourgeois, 1998]. Il s'agit dans un premier temps de réécrire le problème sous forme de système d'état. Le choix qui est fait est de partir du problème d'identification exprimé sous forme discrète en espace (4.2).

Ainsi, on cherche à mettre le problème (4.2) sous la forme générique d'un problème de poursuite suivante :

Trouver (q, e) sur $[0, T]$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{q} = Aq + Ge + Bu \\ y = Cq \end{cases} \quad (4.60)$$

qui minimise :

$$\frac{1}{2} \int_0^T e^T R e + \varepsilon Q \varepsilon \quad (4.61)$$

où, dans le formalisme de l'automatique, A est la matrice d'état, B et G les matrices d'entrée, C la matrice d'observation, u et e les vecteurs de commande d'excitation, q le vecteur d'état, et $\varepsilon = y - \tilde{y}$, le vecteur d'écart. Notons que, vu leur sens dans le problème qui est traité, G est également notée matrice d'incertitude, et e le vecteur d'erreur, dans [Formosa, 2002].

Afin d'obtenir cette forme pour le système, on pose donc :

$$\begin{cases} q = \begin{bmatrix} U \\ \dot{U} \end{bmatrix}, & e = \begin{bmatrix} V - U \\ \Pi F - \tilde{F}_d \end{bmatrix}, & u = [\tilde{F}_d], \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}, & B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}\Pi^T \end{bmatrix}, & C = [\Pi \ 0], \\ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K & M^{-1}\Pi^T \end{bmatrix}, & R = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & BId_2 \end{bmatrix}, & Q = [AId_2] \end{cases}$$

Mis sous la forme (4.60)-(4.61), le problème revient à un problème de recherche de commande optimale à critère quadratique [Lions, 1968]. On peut alors montrer que la commande optimale est donnée par :

$$\hat{e} = R^{-1} G^T \lambda \quad (4.62)$$

Le système optimal étant gouverné par les équations :

$$\begin{cases} \dot{q} = Aq + GR^{-1}G^T\lambda + Bu \\ \dot{\lambda} = C^TQCq - A^T\lambda - C^TQ\tilde{y} \end{cases} \quad (4.63)$$

avec les conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} q(0) = 0 \\ \lambda(T) = 0 \end{cases}$$

Remarque :

On peut noter que le système obtenu est le même que celui obtenu par la différenciation de L (3.8), avec d'autres notations et en ayant ramené le problème à un système d'ordre 1. Ceci est fait de façon à retrouver le formalisme habituel de l'automatique, de façon à appliquer les méthodes de ce domaine sans travail supplémentaire, notamment en utilisant les outils de la toolbox *Simulink* de *Matlab*.

Afin de pouvoir découpler l'équation directe de l'équation rétrograde, le changement de variable suivant est fait :

$$\lambda(t) = K(t).q(t) + d(t) \quad (4.64)$$

Puis on injecte cette forme de λ dans le système (4.63). On a alors trois équations pour quatre inconnues. On rajoute donc une équation en choisissant K de telle sorte que les autres équations d'évolution soient découplées. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \lambda(t) = K(t).q(t) + d(t) \\ \dot{q} - [A + GR^{-1}G^TK]q - GR^{-1}G^Td - Bu = 0 \\ \dot{d} + [KGR^{-1}G^T + A^T]d + KBu + C^TQ\tilde{y} = 0 \\ \dot{K} + KA + A^TK + KGR^{-1}G^TK - C^TQC = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

avec les conditions initiales et finales : $q(0) = 0$, $d(T) = 0$ et $K(T) = 0$.

La dernière équation correspond à une équation matricielle de Riccati. Pour résoudre le système il faut commencer par résoudre cette équation matricielle, puis, connaissant K , l'équation d'évolution de d se résout directement. Enfin, on peut finir par la résolution de l'équation d'évolution de q . À partir des solutions, on peut alors reconstruire, la commande optimale, puis les quantités qui nous intéressent du problème de départ.

La résolution de l'équation de Riccati a fait l'objet de nombreux travaux. Si le temps d'étude T est suffisamment long, il est possible de faire l'hypothèse que la matrice K est constante, il suffit alors de résoudre l'équation algébrique de Riccati :

$$KA + A^TK + KGR^{-1}G^TK - C^TQC = 0 \quad (4.66)$$

Les deux autres équations d'évolution du système (4.65) sont alors à coefficients constants, ce qui facilite la mise en œuvre de leur résolution. C'est cette méthode qui a été utilisée, pour résoudre le problème de base sur des temps plus longs, comme cela a été fait dans [Formosa, 2002].

Remarque :

Notons que c'est la matrice $K(0)$ qui a été calculée dans la méthode utilisant la matrice de transition du système (c'est d'ailleurs une autre façon d'aboutir aux équations (4.65)). Le fait que la méthode présentée ici fonctionne est lié au fait que l'on suppose K constant, on évite donc ainsi les problèmes d'évolution instable. D'ailleurs, [Vaughan, 1969], utilisé pour améliorer la méthode basée sur la matrice de transition, propose une méthode initialement prévue pour résoudre l'équation d'évolution de Riccati.

4.3.3.2 Illustration et commentaires

La méthode est appliquée au même exemple unidimensionnel d'une barre encastrée à un bord et sollicitée en dynamique par un demi-sinus en effort. On cherche toujours à identifier le module d'Young de la barre, cette fois, sur des temps d'étude plus longs. Ainsi, c'est cette méthode qui est la plus adaptée pour résoudre le problème de base.

La figure 4.7 donne la carte de contribution à l'erreur dans le plan espace-temps, pour un module $E = 2.E_0$, et pour 600 pas de temps. Pour ce temps court, on peut effectuer une comparaison avec les résultats obtenus par la méthode basée sur la matrice de transition, figure 3.7. Du fait de l'approximation supposant la matrice K constante, les champs sont

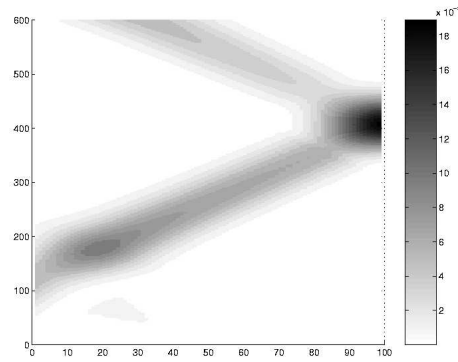
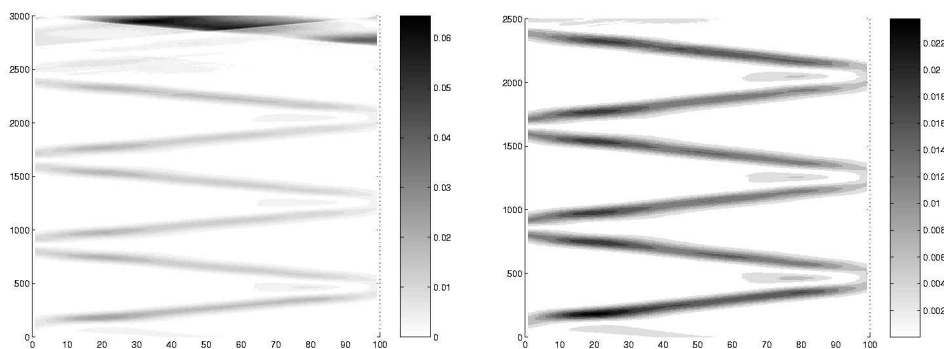


Figure 4.7 – Carte de contribution à l'erreur, $E = 2E_0$, 600 pas de temps



(a) Temps d'étude complet

(b) 2500 premiers pas de temps

Figure 4.8 – Carte de contribution à l'erreur, $E = 2E_0$, 3000 pas de temps

mauvais sur les derniers pas de temps, et en conséquence ne vérifient pas les conditions finales imposées. Pour des temps d'étude plus longs, comme l'exemple à 3000 pas de temps de la figure 4.8 correspondant à 7 allers d'onde dans la structure, ce problème persiste mais devient relativement moins important. Pour le calcul de l'erreur, il est donc possible de tronquer les champs avant la fin de l'intervalle d'étude pour éviter une contribution incohérente à l'erreur. Cependant, si le temps d'étude est suffisant, cette contribution reste faible par rapport à celle des autres instants. Si cette méthode n'est pas satisfaisante, il doit être possible de coupler cette méthode de résolution avec une réanalyse locale aux instants finaux, à l'aide d'une méthode permettant la vérification des conditions finales. Sur ces exemples encore, l'erreur se trouve le long des trajets des ondes mettant en vis-à-vis des conditions aux limites incompatibles.

La figure 4.9 montre alors la courbe d'identification tracée à partir de mesures sur l'intervalle d'étude précédent, la fonction coût étant évaluée par la méthode présentée ici (les autres ne permettant de toute façon pas de résoudre le problème). Il est intéressant de noter que, les mesures étant plus riches, la courbe ne rechute pas pour les modules faibles, comme elle le faisait sur des temps d'étude courts. D'autre part, on peut remarquer que la courbe d'erreur en relation de comportement présente une allure très saine pour l'identification, remettant en avant la question du choix de la fonction coût.

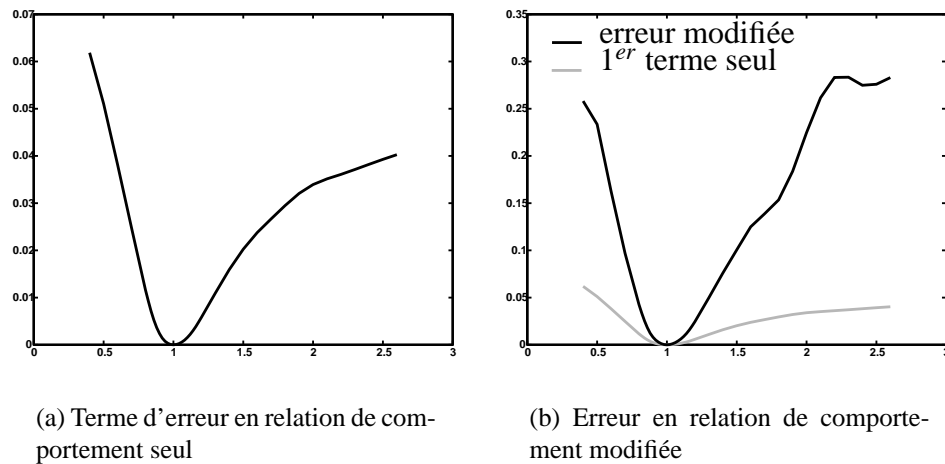


Figure 4.9 – Fonction coût, mesures non perturbées, temps d'étude long

4.4 Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé à la résolution du problème de base de la stratégie d'identification présentée au chapitre 3. La particularité de ce problème de base est qu'il possède des conditions initiales et finales à prendre en compte lors de la résolution du problème couplé. Plusieurs méthodes ont été testées dans deux grandes familles, les méthodes globales et les méthodes locales en temps. Il est apparu une difficulté lors de la résolution par toutes ces méthodes, liée à la présence d'exponentielles croissantes parmi les solutions de l'équation homogène associée au problème de base. Ainsi, les méthodes locales itératives se sont avérées instables, tandis que le domaine de validité des autres méthodes est limité à des temps d'étude courts. Une dernière méthode basée sur des techniques de contrôle optimal a enfin été testée. Elle donne de bons résultats si le temps d'étude est assez long, sans quoi les hypothèses simplificatrices de résolution entache la solution d'erreur.

La question de l'extension au cas non-linéaire a également dû être gardée à l'esprit, puisque l'intérêt de cette stratégie d'identification réside dans son application à des comportements plus complexes que l'élasticité linéaire. Dans ce contexte, la méthode basée sur la matrice de transition du système semble la plus facilement étendable au cas non-linéaire, tandis que l'extension de celle basée sur l'équation de Riccati associée au problème de base demande d'étudier le contrôle optimal dans des cas fortement non-linéaires.

Chapitre 5

Vers l'identification de lois d'endommagement

Dans ce dernier chapitre, des extensions vers l'identification des paramètres d'effet retard sont proposées. Il est composé de deux volets. Dans un premier temps, l'application de la méthode précédente au cas d'une poutre hétérogène est proposée. Elle permet la mise en œuvre du calcul du gradient. Dans un second temps, la démarche envisagée pour l'identification des paramètres de retard est présentée sur l'exemple d'un système masse-ressort. Les difficultés rencontrées sont notamment mises en avant.

Sommaire

5.1	Élasticité hétérogène	112
5.1.1	Problème d'identification	112
5.1.2	Mise en œuvre de l'identification	112
5.2	Identification de la loi à effet retard	118
5.2.1	Formulation du problème d'identification	118
5.2.2	Expression du problème de base	120
5.2.3	Piste de résolution et illustration	123
5.3	Conclusion	126

Les chapitres précédents ont présenté la stratégie d'identification envisagée dans ce travail pour prendre en compte les incertitudes des données expérimentales. Elle a été appliquée au cas simple de l'identification du module d'une barre homogène et s'est avérée très robuste sur les exemples numériques traités.

Ceci étant, cette problématique d'identification en dynamique pour des données incertaines était motivée par l'identification de modèles d'endommagement jusqu'à rupture pour la simulation du crash des composites. L'objet de ce chapitre est d'examiner les difficultés inhérentes à des problèmes plus complexes, afin de se rapprocher du problème qui nous intéresse à terme. C'est pourquoi ce chapitre propose deux extensions de la méthode.

La première consiste à traiter le cas d'une barre élastique dont les propriétés ne sont pas homogènes. Cela constitue un premier pas vers les essais fortement hétérogènes que sont les essais à rupture. De plus, cet exemple permet une mise en œuvre de l'estimation du gradient, utile pour l'identification de modèles comportant plusieurs paramètres.

La seconde discute la démarche à adopter pour l'identification de l'effet retard en conservant l'esprit de la méthode. Un premier exemple *0D* est traité, qui permet de mettre en avant les difficultés inhérentes à cette extension et notamment la prise en compte de conditions finales pour résoudre un système non-linéaire.

5.1 Élasticité hétérogène

5.1.1 Problème d'identification

Cette partie s'intéresse à l'identification des propriétés matériau d'une barre hétérogène sollicitée en dynamique transitoire. Le cadre d'identification est le même que précédemment, les mesures sont les déplacements et les efforts aux deux extrémités de la barre. On se base sur cette redondance pour permettre l'identification. Dans ce cadre général, on peut dissocier deux cas de figure pour l'identification :

- **Cas A :** la distribution géométrique des propriétés est connue et on cherche uniquement la valeur des propriétés. Cette hypothèse assez forte permet de faciliter l'identification qui ne se fait que sur un nombre réduit de paramètres.
- **Cas B :** Aucune hypothèse sur la distribution de propriété n'est faite, un champ de propriété $E(x)$ est donc *a priori* recherché. En statique, ce problème est mal posé, car il admet une infinité de solutions [Andrieux, 2001]. En dynamique, le problème subsiste, mais, du fait de la propagation des ondes, d'avantage d'information est ramenée sur les frontières, ce qui facilite l'identification. La richesse des mesures vis-à-vis de l'identification dépendra de la durée du temps d'observation d'une part, et d'autre part, du contenu fréquentiel de la sollicitation. Ainsi, pour une longueur d'onde donnée, on ne peut pas descendre au-dessous d'une certaine taille d'hétérogénéité. Cette question de l'identifiabilité n'a pas été d'avantage regardée d'un point de vue théorique. De plus, on se contentera ici de champs de propriétés discrétisés, la taille de l'hétérogénéité étant alors donnée par la taille de maille.

5.1.2 Mise en œuvre de l'identification

Dans les deux cas (A et B), la stratégie d'identification appliquée est celle présentée au chapitre 3. La résolution du problème de base se fait de la même manière que précédem-

ment, simplement en utilisant dans les calculs des propriétés élastiques définies par élément. De la même façon, l'étape d'identification se fait par minimisation de l'erreur en relation de comportement modifiée par rapport à l'ensemble des paramètres à identifier. On note $E(x)$ le champ de paramètres à identifier. Selon le cas de figure (A ou B), E est constant par intervalle ou est fonction de la variable d'espace.

Afin de trouver la solution de ce problème de minimisation, une mise en œuvre simple de la méthode est proposée qui utilise l'estimation du gradient à partir de son expression analytique donnée par (3.25). Pour cela, on utilise un algorithme de descente à pas constant, utilisant l'estimation du gradient. L'algorithme est loin d'être efficace, mais il s'agit d'une première mise en œuvre. La démarche suivie est schématisée sur la figure 5.1.

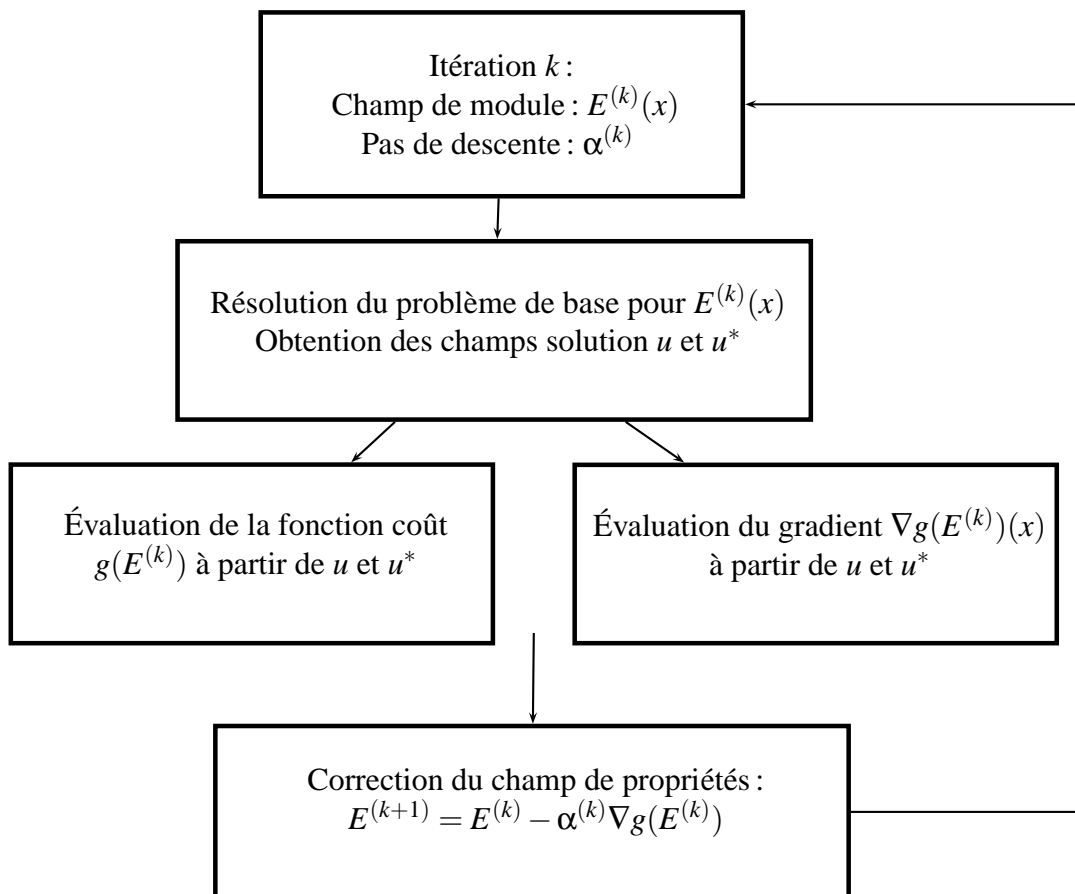


Figure 5.1 – Algorithme d'identification utilisé

Compte tenu de la forme de la fonction coût dans le cas unidimensionnel, le gradient

a pour expression :

$$\begin{aligned}
 Dg(E)(\delta E) &= \frac{\partial L}{\partial E}(\delta E) \\
 &= \frac{\partial J}{\partial E}(\delta E) \\
 &= \int_0^T \int_0^L \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{E^{-1}}{2} (\sigma - E \cdot u_{,x})^2 \right) \delta E \, dx \, dt \\
 &= - \int_0^T \int_0^L \frac{u_{,x}^*}{2} (u_{,x}^* + 2u_{,x}) \delta E \, dx \, dt
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.2.1 Identification dans le cas A

Dans le cas de l'identification de champs de propriétés dont on connaît la distribution spatiale, il est nécessaire d'avoir accès au gradient relatif au paramètre de chaque zone. Celui-ci est donné par :

$$\begin{aligned}
 Dg(E)(\delta E) &= \sum_i \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega_i} \frac{(-u_{,x}^*)}{2} (u_{,x}^* + 2u_{,x}) \, dx \, dt}_{\nabla g_i(E)} \delta E_i \\
 &= \sum_i \nabla g_i(E) \delta E_i
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

où : $\Omega_i = \{x \in [0, L] / E(x) = E_i\}$ avec E_i constant



Figure 5.2 – Poutre élastique hétérogène par bloc

La méthode est alors mise en œuvre sur l'exemple d'une poutre formée de quatre parties de taille égale, et de module d'Young différent, comme représenté figure 5.2. Les mesures expérimentales sont fabriquées à partir d'un calcul direct sur cette barre. Celle-ci est encastree à l'extrémité correspondant au module E_4 . Un effort formé d'un demi-sinus est imposé à l'autre extrémité, comme c'était le cas dans les exemples précédents, schématisés figure 3.3.

Les résultats d'identification sont présentés figure 5.3. La figure 5.3-(a) présente la valeur du module des quatre parties au cours des itérations. On peut observer deux phases dans la convergence, qui correspondent à deux pas de descente différents. La convergence devenant trop lente, le pas a effectivement été réduit. La figure 5.3-(b) illustre la convergence en traçant la restriction à l'espace $E_3 \times E_4$ de la courbe de la fonction coût au cours des itérations. Il est alors clair que la lenteur de convergence avant la réduction du pas de descente est à associer à un pas trop grand qui fait osciller d'un côté à l'autre de la vallée de la nappe d'identification. Une partie de celle-ci est tracée à proximité du minimum. La méthode permet bien de retrouver les modules recherchés.

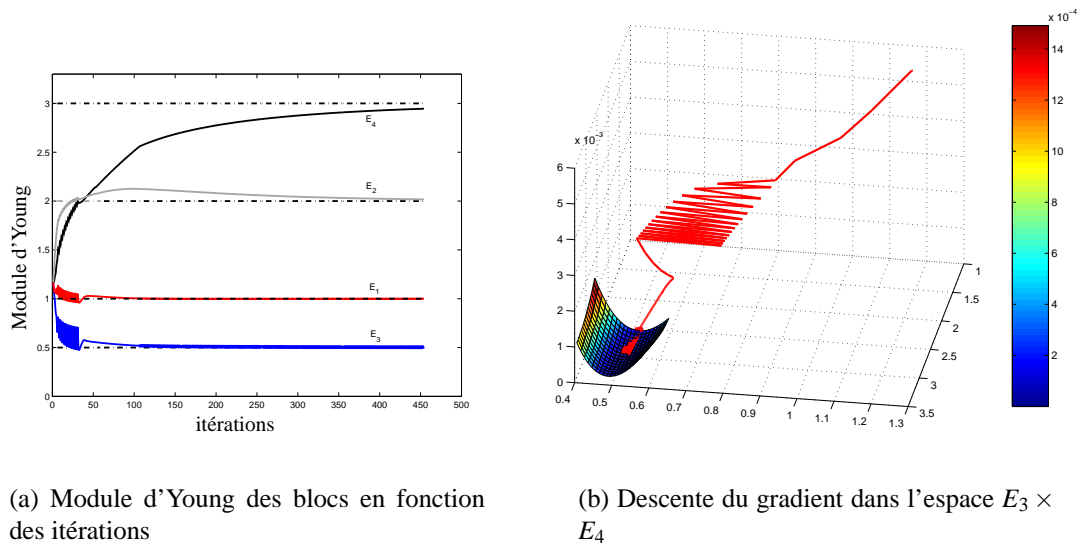


Figure 5.3 – Identification par blocs, mesures non perturbées

Un deuxième exemple est traité avec des mesures perturbées par une réalisation de bruit blanc uniforme d'amplitude 5%. À la fin du processus d'identification, l'erreur faite sur les modules identifiés est faible, comme on peut le voir figure 5.4.

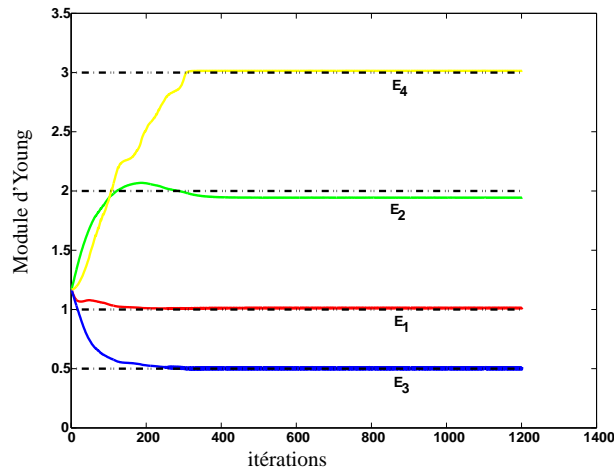


Figure 5.4 – Identification par blocs, mesures perturbées

5.1.2.2 Identification dans le cas B

La méthode est ici mise en œuvre dans le cas où on ne suppose rien sur la distribution spatiale des propriétés élastiques. L'expression du gradient est alors donnée par :

$$\nabla g(E)(x) = \int_0^T \frac{(-u_{,x}^*)}{2} (u_{,x}^* + 2u_{,x}) dt \quad (5.3)$$

L'exemple est le même que précédemment, et l'algorithme de descente à pas constant est à nouveau appliqué en partant d'un champ de propriétés homogène tel que la célérité moyenne soit conservée. Ce champ correspond à celui qui serait trouvé, en supposant la barre homogène, lors de l'étape d'identification. Le champ de propriétés à différentes itérations est présenté figure 5.5.

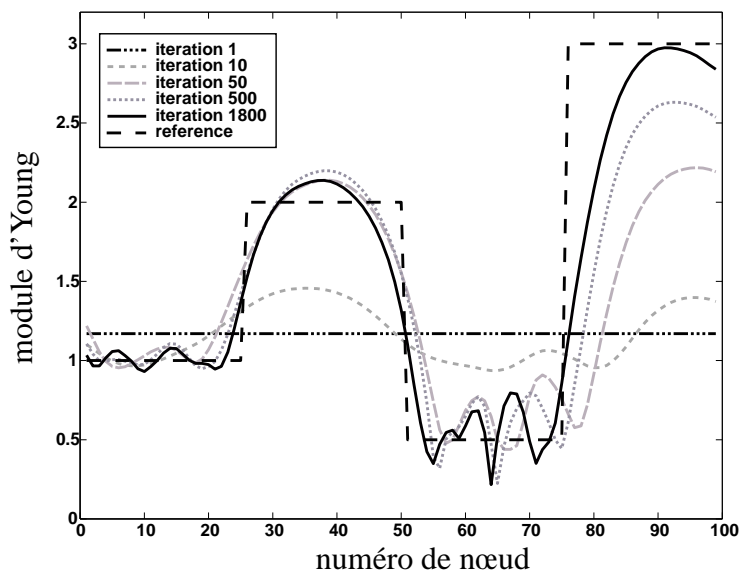


Figure 5.5 – Champs de module à différentes itérations, mesures non perturbées

À la fin du processus d'identification, la distribution ne correspond pas à la distribution exacte, mais en possède l'allure. Notons que la minimisation est stoppée avant d'être arrivée au minimum. Cependant, la figure 5.6 représente les conditions aux limites obtenues par le calcul servant à fabriquer les conditions aux limites, avec les propriétés matériau obtenues au cours de l'identification. On remarque donc que l'encastrement et la sollicitation en effort à l'autre extrémité correspondent aux mesures. Les deux conditions aux limites restantes, permettent d'avoir une idée sur l'incompatibilité des mesures avec les paramètres obtenus. Ainsi, à la fin du processus d'identification, il ne reste plus guère d'incompatibilité.

Cela signifie donc, que la méthode a convergé vers une solution du problème, mais que celui-ci est mal posé et possède plusieurs solutions. Pour améliorer l'identification, il faudrait donc enrichir les mesures, par exemple en augmentant la taille de l'intervalle d'étude ou en changeant de type de chargement. Enfin, on peut remarquer que c'est E_4 qui est le plus difficilement identifiable, ce qui s'explique par le fait que la zone de la poutre correspondant à ce paramètre se trouve du côté de l'encastrement. Elle est donc la moins sollicitée par le chargement.

Sur cet exemple, on voit donc que l'identification d'un champ de propriétés est effectivement un problème délicat, de part la nature même du problème. Ce type de problème inverse a, en général, besoin d'être régularisé, pour parvenir à une solution acceptable. Ceci peut se faire en rajoutant de la connaissance *a priori*, par exemple sur la distribution spatiale des propriétés ou lors de la démarche de minimisation, en minimisant par rapport

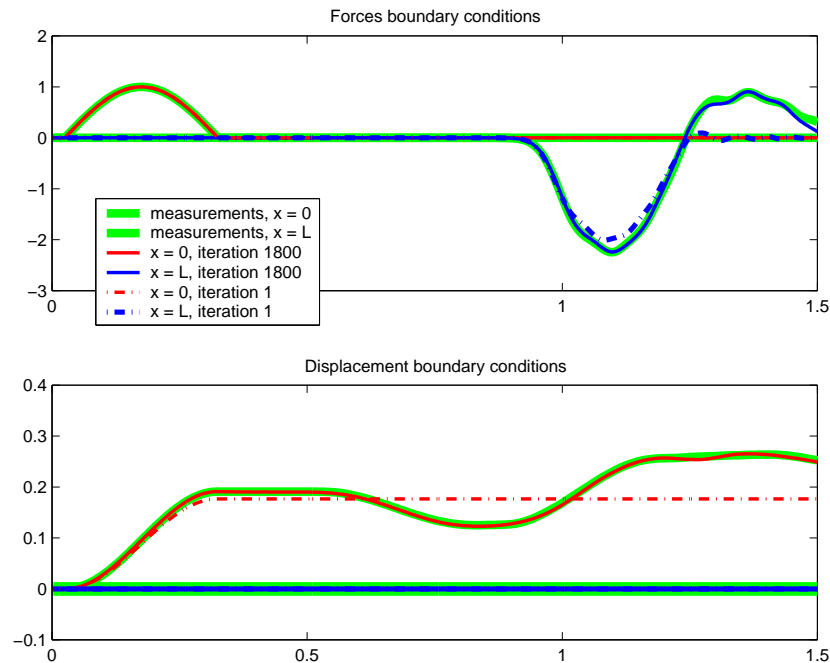


Figure 5.6 – *Identification par champs, Conditions aux limites reconstruites*

à un nombre réduit de paramètres à la fois, pour faciliter l'identification. Deux possibilités viennent alors à l'esprit :

- utiliser la démarche de minimisation employée pour le recalage de structures complexes avec l'erreur en relation de comportement, [Ladevèze, 1998]. Il s'agit de se baser sur la carte des contributions à l'erreur, et commencer par corriger les zones les plus fausses. Le danger d'une telle méthode dans le cas de la dynamique transitoire est que l'erreur se propage le long des trajets des ondes, ainsi, des zones pouvant être justes peuvent contribuer à l'erreur du fait de la pollution ;
- partir de la remarque suivante : pour une barre formée de deux parties, chacune d'un module d'Young donné, l'identification en supposant que le module est homogène dans toute la barre aboutit à un module d'Young homogénéisé, tel que la vitesse des ondes sur l'ensemble de la barre soit conservée. Ainsi, on peut imaginer une technique itérative basée sur une dichotomie de la barre, partant d'une barre homogène, que l'on coupe plusieurs fois en deux. À chaque nouvelle découpe, l'identification se fait en initialisant avec les valeurs trouvées à l'itération précédente. On peut imaginer doubler le nombre de paramètres par rapport auquel la minimisation est faite ou bien n'identifier que les deux nouveaux paramètres de chaque tronçon, les autres étant constants.

Cette partie a permis d'exploiter l'expression que l'on a du gradient pour l'appliquer à un problème d'identification. Sur cet exemple simple, mais déjà plus riche que les précédents, la méthode semble se comporter tout à fait sagement vis-à-vis des perturbations de mesure. De plus, la mise en œuvre du calcul du gradient ne pose aucune difficulté, une fois le problème de base résolu. Il peut donc servir facilement pour des algorithmes

de descente plus complexes qu'une descente à pas constant. Ces différents points positifs encouragent à vouloir l'étendre au cas des comportements non-linéaires.

5.2 Identification de la loi à effet retard

5.2.1 Formulation du problème d'identification

5.2.1.1 Principe

Le passage de la stratégie à l'identification de l'effet retard du mésomodèle de stratifié demande de reprendre la démarche en tenant compte des spécificités du problème. L'idée maîtresse de l'erreur en relation de comportement est de séparer les quantités qui définissent le problème d'identification en deux groupes, un groupe fiable et un groupe non fiable. Dans le cas présent, il est clair que les équations d'équilibre continuent d'appartenir au groupe fiable tandis que les mesures, très incertaines, ne quittent pas le groupe des quantités non fiables. En revanche, la discussion est nécessaire pour les relations de comportement. En effet, le but de la démarche est d'identifier les paramètres d'effet retard à partir d'un essai propice à cette identification. Cela signifie notamment que les relations de comportement statiques ont été identifiées sur des essais au préalable, et que l'on peut donc les considérer comme acquises pour l'identification de la deuxième partie du modèle. Les lois d'évolution, qui font intervenir l'effet retard, quant à elles, seront à mettre dans le groupe non fiable. Ainsi, il en résulte la partition suivante des quantités :

Fiable	Non fiable
Équilibre : $\rho \cdot \ddot{u} - \text{div} \sigma = 0$	Loi d'évolution : $\dot{d} = f \left(\langle \frac{Y - Y_0}{Y_c - Y_0} - d^2 \rangle_+ \right)$
Conditions initiales : u_0, \dot{u}_0	Mesures : \tilde{u}_d et \tilde{f}_d
Loi d'état : $\sigma = E \cdot (1 - d) \cdot \varepsilon$ $Y = \frac{E \cdot \varepsilon^2}{2}$	

Tableau 5.1 – Quantités fiables et non fiables dans le cas de l'effet retard

Remarque :

Les lois d'évolution diffèrent de celles qui avaient été données au 1.2.2. Ce choix a été fait afin d'avoir une expression plus simple des potentiels de dissipation, comme cela avait été fait dans [Douchin, 2000]. Ceux-ci pourront jouer un rôle dans l'expression du problème de base pour l'identification.

Cela conduit à définir un nouveau problème de base :

<p>Trouver les champs $u, \sigma, d, Y, u_d, f_d$ minimisant :</p> $J(\sigma, u, d, Y, u_d, f_d) = \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{d}, Y, d) + \int_{\partial\Omega_f} d_f(f_d, \tilde{f}_d) + \int_{\partial\Omega_u} d_u(u_d, \tilde{u}_d)$ <p>sous les contraintes :</p> $u \in \mathcal{U}_{Ad}(u_d), \quad \sigma \in \mathcal{D}_{Ad}(f_d, u), \quad \sigma = E \cdot (1 - d) \varepsilon, \quad Y = \frac{E \cdot \varepsilon(u)^2}{2} \quad (5.4)$
--

où $\mathcal{D}(\dot{d}, Y, d)$ est une distance entre le taux d'endommagement et les lois d'évolution.

5.2.1.2 Choix de \mathcal{D}

Résidu de Legendre-Fenchel

Pour choisir \mathcal{D} , une première possibilité est de se baser sur les potentiels de dissipation associés aux lois d'évolution, comme cela a été fait dans le cadre de l'estimation d'erreur dans [Ladevèze et al., 1999].

Les potentiels de dissipation φ et φ^* sont alors définis par :

$$\varphi^*(Y, d) = \delta_{d < 1} \cdot \int_0^{Y - Y_0 - d^2(Y_c - Y_0)} f \left(\left\langle \frac{Y'}{Y_c - Y_0} \right\rangle_+ \right) dY' \quad (5.5)$$

et,

$$\varphi(\dot{d}, d) = \Psi_{\dot{d} \in [0, \dot{d}_{max}]} + \dot{d} \cdot \Psi_{d < 1} + \dot{d} \cdot Y_1(\dot{d}) - \varphi^*(Y_1(\dot{d}), d) \quad (5.6)$$

avec,

$$Y_1(\dot{d}) = Y_0 + (Y_c - Y_0)(f^{-1}(\dot{d}) + d^2)$$

et où $\delta_{d \in V}$ est la fonction caractéristique de V et $\Psi_{x \in V}$ est la fonction indicatrice du convexe V .

Le résidu de Legendre Fenchel associé aux lois d'évolution, η_φ , est alors défini par :

$$\eta_\varphi(\dot{d}, Y, d) = \varphi(\dot{d}, d) + \varphi^*(Y, d) - Y \cdot \dot{d} \quad (5.7)$$

Une propriété importante de ce résidu est qu'il est toujours positif, il convient donc pour être utilisé pour \mathcal{D} .

Moindre carrés

Un choix plus simple, mais dont le contenu mécanique est moindre, consiste à prendre pour \mathcal{D} une distance quadratique entre le taux d'endommagement et la loi d'évolution qui lui est associée. Dans ce cas, \mathcal{D} est donné par :

$$\mathcal{D}(\dot{d}, Y, d) = \frac{1}{2} (\dot{d} - \dot{D}(Y, d))^2 \quad (5.8)$$

où la fonction \dot{D} est définie par :

$$\dot{D}(Y, d) = f \left(\left\langle \frac{Y - Y_0}{Y_c - Y_0} - d^2 \right\rangle_+ \right)$$

Dans le choix de \mathcal{D} sous forme d'un moindre carré, il faut toutefois modifier le problème de base, pour prendre en compte deux points qui semblent importants : d'une part, l'endommagement ne peut que croître, d'autre part, l'endommagement ne peut pas dépasser 1. Ainsi, il faut rajouter dans les contraintes de minimisation :

$$\begin{cases} \dot{d} \geq 0 \\ \dot{d} \leq 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

5.2.2 Expression du problème de base

5.2.2.1 Problème d'identification en 0D

On considère ici l'exemple 0D d'un système masse-ressort endommageable. Les équations qui régissent le système sont :

équilibre :	$\ddot{x} + a.y = g(t)$	(5.10)
conditions initiales :	$x(0), \dot{x}(0), d(0)$	
loi d'état :	$y = k.(1 - d).x$ $Y = \frac{k.x^2}{2}$	
loi d'évolution :	$\dot{d} = \dot{D}(Y,d) \quad \text{si } d < 1$ $\dot{d} = 0 \quad \text{si } d = 1$	
mesures :	$\tilde{x}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}(t)$	

avec,

$$\dot{D}(Y,d) = f \left(\left\langle \frac{Y - Y_0}{Y_c - Y_0} - d^2 \right\rangle_+ \right)$$

Pour la stratégie d'identification, le problème de base nécessaire à l'évaluation de la fonction coût, dans ce cas, est :

Trouver les champs x, y, d, Y minimisant :

$$J(x,y,d,Y) = \int_0^T \left(\mathcal{D}(\dot{d}, Y, d) + \frac{A}{2}(x - \tilde{x})^2 + \frac{B}{2}(y - \tilde{y})^2 \right) dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} y = k.(1 - d).x \\ Y = \frac{k.x^2}{2} \\ \ddot{x} + a.y = g(t) \quad + \text{ Conditions Initiales} \end{cases} \quad (5.11)$$

5.2.2.2 Obtention des équations du problème de base

Pour trouver les équations qui régissent le problème de minimisation sous contraintes (5.11), on introduit des multiplicateurs de Lagrange pour les contraintes, définissant ainsi un Lagrangien L :

$$L = \mathcal{D}(\dot{d}, Y, d) + \frac{A}{2}(x - \tilde{x})^2 + \frac{B}{2}(y - \tilde{y})^2 - \alpha(y - k.(1 - d).x) - \beta \left(Y - \frac{k.x^2}{2} \right) - \lambda(\ddot{x} + a.y - g(t)) \quad (5.12)$$

où l'intégrale sur le temps est sous-entendue afin de ne pas alourdir l'écriture.

La minimisation sous contraintes devient alors équivalente à la stationnarité de L . On exprime donc la différentielle de L :

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} \delta \dot{d} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial d} \delta d + A(x - \tilde{x}) \delta x + B(y - \tilde{y}) \delta y \\ & - \delta \alpha (y - k.(1 - d).x) - \delta \beta \left(Y - \frac{k.x^2}{2} \right) - \delta \lambda (\ddot{x} + a.y - g(t)) \\ & - \alpha (\delta y - k.(1 - d) \delta x + k.x \delta d) \\ & - \beta (\delta Y - k.x \delta x) \\ & - \lambda (\delta \ddot{x} + a \delta y) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Il reste à transformer les termes faisant intervenir des différentielles de dérivées temporelles :

$$\int_0^T \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} \delta \dot{d} dt = \left[\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} \delta d \right]_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} \right) \delta d dt$$

et,

$$\int_0^T \lambda \delta \ddot{x} dt = [\lambda \delta \dot{x}]_0^T - [\dot{\lambda} \delta x]_0^T + \int_0^T \ddot{\lambda} \delta x dt$$

Ainsi, la stationnarité de L , $\delta L = 0$ aboutit au système :

$$\begin{cases} \delta d : & -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial d} - k \alpha x = 0 \\ \delta Y : & \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial Y} - \beta = 0 \\ \delta x : & A(x - \bar{x}) + k \cdot (1 - d) \cdot \alpha + k \beta x - \ddot{\lambda} = 0 \\ \delta y : & B \cdot (y - \bar{y}) - \alpha - a \cdot \lambda = 0 \\ \delta \alpha : & y = k \cdot (1 - d) \cdot x \\ \delta \beta : & Y = \frac{k \cdot x^2}{2} \\ \delta \lambda : & \ddot{x} + a \cdot y = g(t) \end{cases} \quad (5.14)$$

ce qui peut encore s'écrire, en éliminant les inconnues α et β :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial d} - k(B(y - \bar{y}) - a \cdot \lambda) x = 0 \\ \ddot{\lambda} = A(x - \bar{x}) + k \cdot (1 - d) \cdot (B(y - \bar{y}) - a \cdot \lambda) + k \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial Y} x \\ \ddot{x} + a \cdot y = g(t) \\ Y = \frac{k \cdot x^2}{2} \\ y = k \cdot (1 - d) \cdot x \end{cases} \quad (5.15)$$

avec les conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} x(0) = x_0, & \dot{x}(0) = \dot{x}_0, & d(0) = d_0 \\ \lambda(T) = 0, & \dot{\lambda}(T) = 0, & \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

5.2.2.3 Particularités selon le choix de \mathcal{D}

Précisons ici les différents termes faisant intervenir \mathcal{D} , selon le choix qui en est fait.

Résidu de Legendre-Fenchel :

Il reste à exprimer les dérivées du résidu de Legendre-Fenchel η_φ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_\varphi}{\partial d} = \frac{\partial \varphi}{\partial d} - Y \\ \frac{\partial \eta_\varphi}{\partial Y} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} - d \\ \frac{\partial \eta_\varphi}{\partial d} = \frac{\partial \varphi}{\partial d} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial d} \end{cases} \quad (5.17)$$

η_φ s'exprime :

$$\eta_\varphi = \varphi^*(Y, d) - \varphi^*(Y_1(\dot{d}), d) + \dot{d} \cdot (Y_1(\dot{d}) - Y) + \Psi_{d \in [0, \dot{d}_{max}]} + \dot{d} \Psi_{d < 1} \quad (5.18)$$

Il reste alors trois quantités à préciser :

$$\frac{\partial \eta_\phi}{\partial Y} = \dot{D}(Y, d) - \dot{d} \quad \text{avec,} \quad \dot{D}(Y, d) = f \left(\left\langle \frac{Y - Y_0}{Y_c - Y_0} - d^2 \right\rangle_+ \right) \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \eta_\phi}{\partial \dot{d}} = -\frac{\partial Y_1}{\partial \dot{d}} \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} (Y_1(\dot{d}), d) + Y_1(\dot{d}) - Y + \dot{d} \cdot \frac{\partial Y_1}{\partial \dot{d}} + \partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \geq 0} + \partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \leq \dot{d}_{max}} + \Psi_{d < 1} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \eta_\phi}{\partial d} = \frac{\partial \phi^*}{\partial d} (Y, d) - \frac{\partial \phi^*}{\partial d} (Y_1(\dot{d}), d) + \dot{d} \cdot \frac{\partial Y_1}{\partial d} - \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} (Y_1(\dot{d}), d) \cdot \frac{\partial Y_1}{\partial d} \quad (5.21)$$

De plus, on a :

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} (Y_1(\dot{d}), d) = \dot{d} \quad (5.22)$$

On en déduit donc les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_\phi}{\partial \dot{d}} &= Y_1(\dot{d}) - Y + \partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \geq 0} + \partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \leq \dot{d}_{max}} + \Psi_{d < 1} \\ \frac{\partial \eta_\phi}{\partial d} &= 2 \cdot d \cdot (Y_c - Y_0) (\dot{d} - \dot{D}(Y, d)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

On peut encore préciser l'expression des sous-différentielles $\partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \geq 0}$ et $\partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \leq \dot{d}_{max}}$.
Dans le cas général, de l'indicatrice d'un convexe V défini par :

$$V = \{x / f(x) \leq 0\}$$

on a :

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi_V &= 0 \quad \text{si } f(x) < 0 \quad \text{ou si } f(x) = 0 \text{ et } \dot{f}(x) < 0 \\ \exists \dot{\lambda} \geq 0 / \quad \partial_x \Psi_V &= \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{si } f(x) = 0 \text{ et } \dot{f}(x) = 0 \end{aligned}$$

Dans notre cas, les expressions deviennent donc :

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \geq 0} &= 0 \quad \text{si } \dot{d} > 0 \quad \text{ou si } \dot{d} = 0, \ddot{d} > 0 \\ &= -I \quad \text{si } \dot{d} = 0, \ddot{d} = 0, \text{ avec } I > 0 \\ \partial_{\dot{d}} \Psi_{\dot{d} \leq \dot{d}_{max}} &= 0 \quad \text{si } \dot{d} < \dot{d}_{max} \quad \text{ou si } \dot{d} = \dot{d}_{max}, \ddot{d} < 0 \\ &= J \quad \text{si } \dot{d} = \dot{d}_{max}, \ddot{d} = 0, \text{ avec } J > 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

En posant alors $Y_2 = Y_1 - I + J$, on obtient le système suivant pour $d < 1$:

$$\begin{cases} \dot{d} = \dot{D}(Y_2, d) \\ \dot{Y}_2 = \dot{Y} + 2 \cdot d \cdot (Y_c - Y_0) (\dot{d} - \dot{D}(Y, d)) - k(B(y - \bar{y}) - a \cdot \lambda) \cdot x \\ \dot{\lambda} = A(x - \bar{x}) + k \cdot (1 - d) \cdot (B(y - \bar{y}) - a \cdot \lambda) + k(\dot{D}(Y, d) - \dot{d}) \cdot x \\ \ddot{x} + a \cdot y = g(t) \\ Y = \frac{k \cdot x^2}{2} \\ y = k \cdot (1 - d) \cdot x \end{cases} \quad (5.25)$$

Moindre carrés :

Dans ce cas, il faut rajouter des multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte les deux contraintes supplémentaires (5.9). Ces multiplicateurs, notés γ et μ , sont positifs.

Il reste alors à préciser l'expression des dérivées partielles de \mathcal{D} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} = \dot{d} - \dot{D}(Y, d) \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial d} = -(\dot{d} - \dot{D}(Y, d)) \frac{\partial \dot{D}}{\partial d} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial Y} = -(\dot{d} - \dot{D}(Y, d)) \frac{\partial \dot{D}}{\partial Y} \end{cases} \quad (5.26)$$

où $\frac{\partial \dot{D}}{\partial d}$ et $\frac{\partial \dot{D}}{\partial Y}$ s'expriment facilement à partir de \dot{D} , avec deux cas, selon le signe de $\frac{Y-Y_0}{Y_c-Y_0} - d^2$.

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{d} - \frac{\partial \dot{D}}{\partial Y} \dot{Y} - \frac{\partial \dot{D}}{\partial d} \dot{D} + k(B(y - \bar{y}) - a.\lambda)x - \dot{\gamma} - \mu = 0 \\ \gamma \dot{d} = 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \dot{d} \geq 0 \\ \mu(1 - d) = 0, \quad \mu \geq 0, \quad d \leq 1 \\ \ddot{\lambda} = A(x - \bar{x}) + k.(1 - d).(B(y - \bar{y}) - a.\lambda) + k \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial Y} x \\ \ddot{x} + a.y = g(t) \\ Y = \frac{k.x^2}{2} \\ y = k.(1 - d).x \end{cases} \quad (5.27)$$

avec toujours les mêmes conditions initiales et finales (5.16).

5.2.3 Piste de résolution et illustration**5.2.3.1 Piste de résolution**

Les systèmes (5.25) et (5.27) qui viennent d'être explicités possèdent, comme c'était le cas en élasticité des conditions initiales et finales. Une difficulté supplémentaire réside dans le fait que les systèmes sont, de plus, fortement non-linéaires. Cela a pour conséquence que les méthodes développées dans le cas linéaire, sont, pour la plupart, non exploitables directement ici. Il reste la méthode basée sur la matrice de transition qu'il est possible d'étendre au cas non-linéaire, dès lors qu'elle est vue comme une méthode de gradient. Cette méthode est donc explicitée sur un exemple simple dans la suite.

On se donne donc le problème suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} + k.(1 - d).x = f(t) \\ d = \inf \left(1, \sup \frac{(x - x_s)_+}{x_c - x_s} \right) \end{cases} \quad (5.28)$$

avec les conditions initiales et finales : $x_0 = x(0)$ et $\dot{x}_T = \dot{x}(T)$.

Après avoir choisi un schéma temporel, on souhaite calculer la solution en parcourant le temps uniquement dans le sens direct. Pour cela, on choisit une méthode itérative, où

ayant une condition initiale en \dot{x} on cherche à la corriger selon la valeur que l'on trouve pour la condition finale en \dot{x} . On cherche donc à relier la correction à faire $\delta\dot{x}(0)$ à l'erreur faite au calcul précédent, $\delta\dot{x}(T) = \dot{x}(T) - \dot{x}_T$

Dans un premier temps, on ramène le problème à un problème du premier ordre en introduisant λ tel que $\lambda = \dot{x}$ et le vecteur inconnu :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Puis, on choisit un schéma de type Euler, du premier ordre, et on réécrit le problème discrétisé en temps, décrit par la relation de récurrence entre deux pas consécutifs :

$$X_{n+1} = A_n \cdot X_n + B_n \quad \text{avec:} \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t \cdot k \cdot (1 - d_n) & 1 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

et $B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t \cdot f_n \end{pmatrix}$

Il est alors possible de différencier cette relation :

$$\delta X_{n+1} = \delta A_n \cdot X_n + A_n \cdot \delta X_n + \underbrace{\delta B_n}_{=0} \quad (5.30)$$

Compte tenu de la forme de A_n , on peut encore mettre cette relation sous la forme :

$$\delta X_{n+1} = C_n \cdot \delta X_n \quad \text{avec} \quad C_n = A_n + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta t \cdot k \cdot \frac{\partial d}{\partial x} \cdot x_n & 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Ainsi, par récurrence, on exprime la différentielle au temps final en fonction de celle au temps initial :

$$\delta X_{N_T} = C \cdot \delta X_0 \quad \text{avec} \quad C = \prod_{j=0}^{N_T-1} C_j \quad (5.32)$$

Enfin, on exprime la correction en $\lambda(0)$ à effectuer à partir de l'erreur faite, en notant que $x(0)$ étant imposé, il en résulte que : $\delta x(0) = 0$. D'où la correction :

$$\delta\lambda(0) = \frac{\lambda_T - \lambda(T)}{C_{22}} \quad (5.33)$$

On fait donc un nouveau calcul en initialisant $\lambda(0)$ avec :

$$\lambda^{(i+1)}(0) = \lambda^{(i)}(0) + \delta\lambda^{(i)}(0) \quad (5.34)$$

La méthode de gradient est alors illustrée sur ce cas simple, pour lequel on initialise $\dot{x}(0)$ avec une valeur ne conduisant pas à celle attendue au temps final. On observe sur l'exemple qu'il suffit de quatre itérations pour converger vers la solution recherchée. Ceci montre la faisabilité de la méthode. Cependant, dans certains cas, le système d'équations (5.28), avec ses conditions initiales et finales, ne possède pas nécessairement une unique solution. On peut donc soulever la même question dans le cas des systèmes que l'on cherche à résoudre, (5.25) et (5.27). Ce problème est à associer au changement d'équation différentielle qui survient lorsque $d = 1$. Outre ces problèmes d'unicité de la solution du

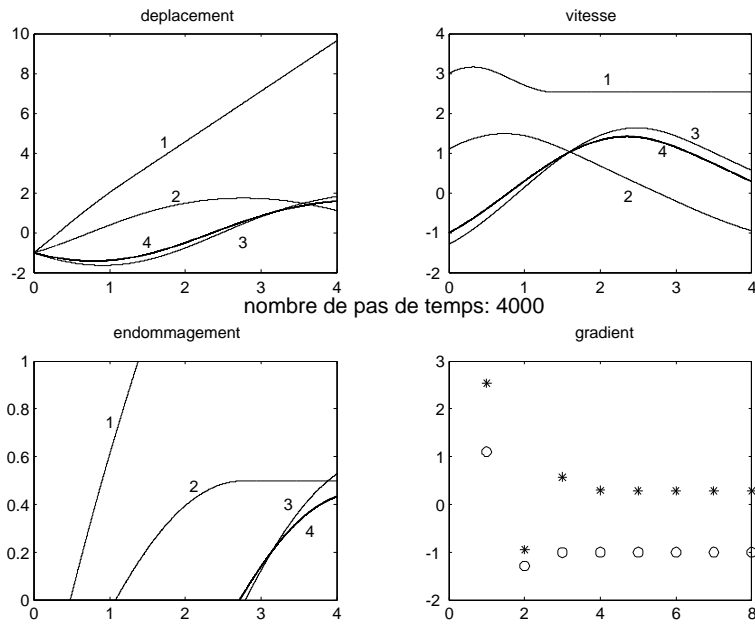


Figure 5.7 – champs solution au cours des itérations

problème, ce premier exemple nous encourage à appliquer la méthode à la résolution du problème de base (5.11).

L'application de cette méthode à la résolution du problème de base pour une fonction \mathcal{D} de type moindre carré, a été effectuée. Dans ce cas, le problème à résoudre est plus complexe que (5.28). Cela amène donc de nouvelles difficultés. La méthode converge dans certains cas vers les bonnes conditions initiales, mais non systématiquement. Des problèmes proviennent notamment du fait que la nappe des conditions finales en fonction des conditions initiales n'est pas convexe. Dans ce cas, une méthode de gradient n'est pas suffisante. La compréhension de la méthode et du problème à résoudre doit donc être poursuivie.

5.2.3.2 Exemple

Il ressort du paragraphe précédent que la méthode imaginée pour résoudre le problème n'a pas pu être mise en place dans ce travail. Toutefois, il peut être intéressant de tester la méthode d'identification sur un premier exemple. Comme aucune méthode de résolution du problème de base raisonnable en non-linéaire n'a été développée dans ce travail, le problème de base est résolu par un algorithme exploratoire. Afin de tracer la courbe d'identification présentée figure 5.8, le problème de base, pour une distance aux lois d'évolution du type moindre carrés, est résolu de la façon suivante :

- pour chaque jeu de paramètres matériau, le système (5.27) est résolu en faisant varier les conditions initiales manquantes dans un intervalle ;
- puis, à partir de l'ensemble de ces solutions, il est possible de choisir celle qui minimise la fonction coût qui définit le problème de base ;
- la fonction coût est alors évaluée en cette solution, ce qui permet d'évaluer la qualité des paramètres.

Numériquement, on observe que la solution obtenue selon ce critère n'est pas celle qui minimise la distance aux conditions finales. Cela met en avant les difficultés numériques rencontrées et pose la question de la caractérisation la plus pertinente de la solution du problème de base.

La figure 5.8 présente l'allure de l'erreur en relation de comportement pour des mesures non perturbées fabriquées par un calcul direct de (5.10) avec des paramètres de référence a_0 et k_0 . La courbe est tracée en fonction de $\frac{a}{a_0}$, avec $k = k_0$. L'identification par minimisation de la fonction coût mène donc au bon paramètre. La méthode paraît donc assez saine.

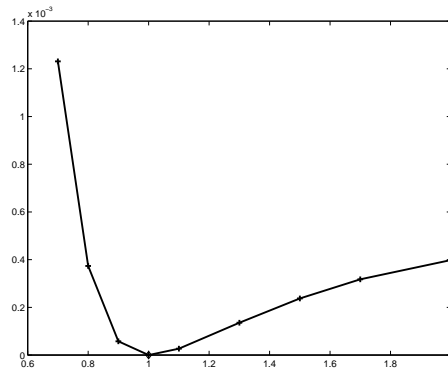


Figure 5.8 – Courbe d'identification de a

5.3 Conclusion

Ce chapitre a proposé deux extensions de la méthode, afin de se rapprocher des objectifs premiers de l'étude. Dans un premier temps, l'étude de l'identification d'une barre élastique hétérogène a confirmé les performances de la stratégie d'identification. De plus, elle a permis de mettre en œuvre l'estimation directe à partir des champs solution du problème de base du gradient de la fonction coût. Dans un second temps, la discussion a porté sur l'application de la méthode au cas de l'effet retard, en s'appuyant sur l'exemple d'un système masse-ressort. Cela a permis de faire ressortir un certain nombre de difficultés inhérentes à la formulation. D'un point de vue pratique, la plus grande difficulté demeure la résolution du problème de base qui, dans ce cas, possède des conditions initiales et finales, tout en étant fortement non linéaire. Malgré cet obstacle majeur, un premier résultat d'identification a été présenté, afin de vérifier la pertinence de la méthode.

Conclusion

Ce travail est parti d'une étude sur les absorbeurs de choc en composite, où il s'agissait, dans un premier temps, d'identifier les effets de vitesse de rupture à partir d'essais menés à *EADS-CCR*. L'objectif d'*EADS* à terme est l'implantation de modèles pertinents et bien identifiés dans des codes de dynamique pour être à même de diminuer les coûts liés à la conception des absorbeurs de choc en composite.

Cependant, les efforts mis en œuvre pour le dépouillement des essais, utilisant des barres d'Hopkinson courtes, dans [Feissel, 2000], ont montré les difficultés d'obtenir des mesures fiables. La question était alors de savoir s'il serait possible de tirer parti de ces essais pour l'identification qui nous intéressait. Ce constat a donné naissance à la question centrale de ce travail :

Est-il possible d'identifier le comportement dynamique d'un matériau en présence de données très incertaines ?

La thèse que nous avons suivie est qu'il était possible d'aboutir à des méthodes très robustes à partir d'une formulation traitant globalement l'ensemble des informations et en relâchant totalement les conditions aux limites incertaines.

Cette thèse a été inspirée par les travaux sur le recalage de modèles dynamiques en vibration, ce qui nous a naturellement conduits à vouloir étendre la démarche de l'erreur en relation de comportement [Ladevèze, 1983] au problème traité. Cette extension possède certaines spécificités, notamment le fait que toutes les données du problème sont incertaines. De plus, l'application non pas en vibration mais en dynamique transitoire amène des problèmes peu regardés jusque là en recalage. Avant d'appliquer la démarche au cas fortement non-linéaire de l'identification des paramètres de l'effet retard, il nous a semblé important de comprendre le comportement de la méthode sur un exemple académique. Cela a permis de vérifier la pertinence de la méthode et d'appréhender les problèmes qu'elle pose.

L'exemple de l'identification du module d'une barre élastique homogène a permis de montrer que la démarche répondait à la question de départ. L'étape suivante a été de l'appliquer au cas d'une barre hétérogène. L'identification se fait alors par rapport à plusieurs paramètres, ce qui a permis la mise en œuvre du calcul direct du gradient de la fonction coût.

Finalement, la méthode proposée est effectivement très robuste et ce travail a permis de souligner les deux raisons principales de cette robustesse :

- la méthode traite l'ensemble des données expérimentales en un seul calcul ;
- une distance entre les conditions aux limites du calcul et les mesures expérimentales est introduite ; elle permet une régularisation des données numériques, au travers d'un filtre mécanique.

Cependant, cette robustesse de la stratégie d'identification s'accompagne d'un manque de robustesse numérique des techniques de résolution. Ceci est dû, même en élasticité, à la confrontation à des problèmes nouveaux pour nous de propagation d'onde comportant des conditions initiales et finales. Le choix a été fait d'envisager des techniques de résolution dans l'optique de leur extension au cas non-linéaire. En particulier, les Éléments Finites temporels, qui permettent de traiter le problème en élasticité, ont été abandonnés car ils conduisent à des problèmes très fortement non-locaux pour l'endommagement. Cette étude a permis d'aboutir à des résultats intéressants. Cependant, la compréhension complète des difficultés n'est probablement pas suffisante pour les résoudre, et des travaux en cours permettront sans doute de consolider ces méthodes et de les étendre aux problèmes non-linéaires, où beaucoup reste à faire.

En outre, ce travail a suivi la démarche adoptée, en s'y tenant et sans prendre en compte d'autres techniques susceptibles de gérer les incertitudes. Ce choix a été fait pour bien cerner les potentiels de la stratégie, avant de la coupler à d'autres méthodes. À présent que sa compréhension est avancée, l'étude de son couplage avec d'autres techniques de filtrage des perturbations, comme les filtres de Kalman, est envisageable, afin de voir s'il est possible d'en accroître encore les performances.

Finalement, c'est évidemment un regret que la méthode n'ait pas pu être appliquée à un essai réel pour fournir les paramètres de retard recherchés. Cependant, la route est encore un peu longue avant d'en arriver là. On se sera toutefois posé la question de l'extension de la méthode à ce cadre, d'une part, en posant des gardes-fous quant à l'identification des modèles et, d'autre part, en vérifiant dans une première application, encore une fois très académique, la pertinence de la méthode. Celle-ci s'avère très certainement prometteuse.

Bibliographie

- [Allix et Deü, 1997] O. Allix et J.F. Deü (1997). Delay-damage modeling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45:29–46.
- [Allix et Feissel, 2003] O. Allix et P. Feissel (2003). A delay-damage meso modeling of laminates under dynamic loading: basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, 81(12):1177–1191.
- [Allix et al., 2000] O. Allix, D. Guédrá-Degeorges, S. Guinard, et A. Vinet (2000). Analyse de la tenue aux impacts à faible vitesse énergie et faible énergie des stratifiés composites par la mécanique de l'endommagement. *Mécanique et Industrie*, 1:27–35.
- [Allix et Ladevèze, 1992] O. Allix et P. Ladevèze (1992). Interlaminar interface modeling for the prediction of laminate delamination. *Composite Structures*, 22:235–242.
- [Allix et al., 1998] O. Allix, D. Lévêque, et L. Perret (1998). Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composite Science and Technology*, 58:671–678.
- [Allix et Sen Gupta, 2002] O. Allix et J. Sen Gupta (2002). Fracture prediction of 3d c/c material under impact. In IACM, editor, *5th World Congress on Computational Mechanics*, pages cd–rom.
- [Andrieux, 2001] S. Andrieux (2001). Méthodes et techniques de résolution de quelques problèmes inverses. In *Notes de cours, D.E.A Techniques Avancées en Calcul des Structures*, École Polytechnique.
- [Andrieux et Voldoire, 1995] S. Andrieux et F. Voldoire (1995). Stress identification in steam generator tubes from profile measurements. *Nuclear Engineering and Design*, 158(2-3):417–427.
- [Barthe et al., 2003] D. Barthe, A. Deraemaeker, et P. Ladeveze (2003). Validation of dynamics models with uncertainties based on the constitutive relation error. In *Complas VII - 7th International Conference on Computational Plasticity, Barcelone (Espagne)*, pages cd–rom. CIMNE.
- [Bažant et Oh, 1983] Z.P. Bažant et B.H. Oh (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16:155–177.
- [Behler et al., 1990] F.J. Behler, S. Sikorski, et E. Staskewitsch (1990). Impact behavior of carbon fibre reinforced composites under bend loading conditions. In San Diego CA, editor, *International Conference on Shock-Wave and High Strain Rate Phenomena in Materials*.
- [Benallal et al., 1991] A. Benallal, R. Billardon, et G. Geymonat (1991). Bifurcation and localization in rate-independent materials. some general considerations. In Q.S.

- Nguyen, editor, *Bifurcation and stability of dissipative systems*, pages 1–44. Springer Verlag.
- [Berthaud et al., 2001] Y. Berthaud, M. Cottron, J.-C. Dupré, F. Morestin, J.-J. Orteu, et V. Valle (2001). In *Photomécanique*. GAMAC.
- [Bonnet et al., 2002] M. Bonnet, T. Burczyski, et M. Nowakowski (2002). Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal crack using bie and adjoint variable approach. *International Journal of Solids and Structures*, 39(9):2365–2385.
- [Bourgeois, 1998] L. Bourgeois (1998). *Contrôle optimal et problèmes inverses en plasticité*. Thèse de doctorat, École Polytechnique.
- [Bui, 1993] H.D. Bui (1993). *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*. Eyrolles.
- [Chalal et al., 2003] H. Chalal, F. Meraghni, F. Pierron, et M. Grédiac (2003). Identification directe d'un modèle d'endommagement de matériaux composites à partir de champs cinématiques par la méthode des champs. In Y. Rémond et J. Lamon, editors, *Comptes rendus des Treizièmes Journées Nationales sur les Composites*, volume 1, pages 483–492. AMAC.
- [Chouaki et al., 1998] A. Chouaki, P. Ladeveze, et L. Proslie (1998). Updating structural dynamic models with emphasis on the damping properties. *AIAA journal*, 36(6):1094–1099.
- [Cimetière et al., 2000] A. Cimetière, F. Delvare, et Frédéric Pons (2000). Une méthode inverse à régularisation évanescence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 328(9):639–644.
- [Comi et Perego, 2001] C. Comi et U. Perego (2001). Symmetric and non-symmetric non-local damage formulations: an assessment of merits. ECCM 2001.
- [Constantinescu et al., 2003] A. Constantinescu, D. Ivaldi, et C. Stolz (2003). Identification du chargement thermique transitoire par contrôle optimal. In M. Potier-Ferry, M. Bonnet, et A. Bignonnet, editors, *actes du sixième colloque national en calcul des structures*, volume 1, pages 185–192. CSMA.
- [Corigliano et Mariani, 2003] A. Corigliano et S. Mariani (2003). The extended kalman filter for model identification in impact dynamics. In *VII International Conference on Computational Plasticity*. E. Oñate and D.R.J. Owen.
- [Corigliano et al., 2000] A. Corigliano, S. Mariani, et B. Orsatti (2000). Identification of guron-tvergaard material model parameters via kalman filtering technique. i. theory. *International journal of fracture*, 104(4):349–373.
- [Coutellier et al., 1998] D. Coutellier, C. Gauthier, P. Rozycki, et Y. Ravalard (1998). Simulation numérique du comportement en traction de multicouches multi-matériaux dans un code explicite. *European journal of mechanical and environmental engineering*, 43(2):51–60.
- [Coutellier et Rozycki, 2000] D. Coutellier et P. Rozycki (2000). Multi-layered multi-material finite element for crashworthiness studies. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 31(8):841–851.
- [Daniel et al., 2000] L. Daniel, P. J. Hogg, et P. T. Curtis (2000). The crush behaviour of carbon fibre angle-ply reinforcement and the effect of interlaminar shear strength on energy absorption capability. *Composites Part B: Engineering*, 31(5):435–440.

- [de Borst et Muhlhaus, 1992] R. de Borst et H. Muhlhaus (1992). Gradient dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, 35:521–540.
- [Delvare et al., 2003] F. Delvare, A. Cimetière, et F. Pons (2003). Une méthode inverse itérative d'ordre 1. In M. Potier-Ferry, M. Bonnet, et A. Bignonnet, editors, *actes du sixième colloque national en calcul des structures*, volume 1, pages 145–152. CSMA.
- [Deraemaeker et al., 2002] A. Deraemaeker, P. Ladevèze, et Ph. Leconte (2002). Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(21-22):2427–2444.
- [Deü, 1997] J.-F. Deü (1997). *Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique: apports des méso-modèles avec endommagement retardé*. rapport de thèse, LMT-ENS Cachan.
- [Dormegnien et al., 2003] D. Dormegnien, D. Coutellier, D. Delsart, E. Deletombe, et D. Ravalard (2003). Analyse des effets d'échelles sur le comportement de structures composites. *Mécanique & Industries*, 4(1):7–15.
- [Douchin, 2000] B. Douchin (2000). *Stratégie de calcul robuste et adaptativité pour la simulation de l'endommagement et de la rupture des structures composites stratifiées*. rapport de thèse, LMT-ENS Cachan.
- [Drucker, 1964] D.-C. Drucker (1964). On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Journal de Mécanique*, 3,2:235–249.
- [Dureisseix et al., 2003] D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron, et B. Schrefler (2003). A computational strategy for multiphysics problems involving multiscale aspects. In *Complas VII - 7th International Conference on Computational Plasticity, Barcelone (Espagne)*. CIMNE.
- [Espinosa et al., 1998] H.D. Espinosa, P.D. Zavattieri, et S.K. Dwivedi (1998). A finite deformation continuum/discrete model for the description of fragmentation and damage in brittle materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46:1909–1942.
- [Farley et Jones, 1992] G.L. Farley et R.M. Jones (1992). Crushing characteristics of continuous fiber-reinforced composite tubes. *Journal of Composite Materials*, 26(1):37–50.
- [Feissel, 2000] P. Feissel (2000). *Etude d'un essai de compression dynamique sur composites à fibre carbone/Kevlar*. rapport de DEA, LMT-ENS Cachan.
- [Feissel et al., 2003] P. Feissel, O. Allix, et P. Thévenet (2003). Stratégie d'identification basée sur l'erreur en relation de comportement dans le cas d'essais aux conditions aux limites incertaines en dynamique transitoire. In *6^e Colloque National en Calcul des Structures*, Giens.
- [Formosa, 2002] F. Formosa (2002). *Contribution à l'amélioration de la modélisation des structures légères en vue de leur contrôle actif*. rapport de thèse, LMT-ENS Cachan.
- [Gary et Zhao, 2000] Gérard Gary et Han Zhao (2000). étude expérimentale du comportement dynamique des matériaux. *Mécanique & Industries*, 1(1):15–26.
- [Goeke et McClintock, 1975] E.C. Goeke et F.A. McClintock (1975). Fracture of graphite composites under shock loading. *Journal of Applied Physics*, 46:4671–4673.

- [Goldberg, 1989] D.E. Goldberg (1989). Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. In *Artificial Intelligence*. Addison-Wesley.
- [Gravouil, 2000] A. Gravouil (2000). *Méthode multi-échelle en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures*. rapport de thèse, LMT-ENS Cachan.
- [Grédiac, 1996] M. Grédiac (1996). On the direct determination of invariant parameters governing anisotropic plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 33(27):3969–3982.
- [Harding, 1993] J. Harding (1993). Effect of strain rate and specimen geometry on the compressive strength of woven glass-reinforced epoxy laminates. *Composites*, 24(4):323–332.
- [Harding, 1996] J. Harding (1996). Impact damage in composite materials. In Dymat-ENSTA M.10, editor, *Lecture Notes for the Stage de Formation Continue*.
- [Harding et Li, 1992] J. Harding et Y.L. Li (1992). Determination of interlaminar shear strength for glass/epoxy and carbon/epoxy laminates at impact rates of strain. *Composites Science and Technology*, 45(2):161–171.
- [Hashin, 1987] Z. Hashin (1987). Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. *Journal of Applied Mechanics*, 54:872–879.
- [Hild et al., 2003] F. Hild, C. Denoual, P. Forquin, et X. Brajer (2003). On the probabilistic-deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials. *Computers and Structures*, 81(12):1241–1253.
- [Hill, 1962] R. Hill (1962). Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids.*, 10:1–16.
- [Hillerborg et al., 1976] A. Hillerborg, M. Modeer, et P.E Petersson (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782.
- [Hochard et al., 2001] Ch. Hochard, P.-A. Aubourg, et J.-P. Charles (2001). Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2):221–230.
- [Hug et al., 2003] G. Hug, D. Baptiste, J. Fitoussi, et P. Thévenet (2003). Analyse de l'endommagement dans des stratifiés carbone/epoxy soumis à un chargement de traction à vitesse élevée. In Y. Rémond et J. Lamon, editors, *Comptes rendus des Treizièmes Journées Nationales sur les Composites*, volume 1, pages 513–521. AMAC.
- [Jirásek, 2000] M. Jirásek (2000). Comparative study on elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 188:307–330.
- [Johnson et A.K. Pickett, 2001] A.F. Johnson et P. Rozycki A.K. Pickett (2001). Computational methods for predicting impact damage in composite structures. *Composites Science and Technology*, 61:2183–2192.
- [Kalman, 1960] R.E. Kalman (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME J. Basic Engineering*, 82:35–45.
- [Kohn et Vogelius, 1984] R.V. Kohn et M. Vogelius (1984). Determining conductivity by measurements at boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37:289.
- [Ladevèze, 1983] P. Ladevèze (1983). Recalage de modélisations des structures complexes. Technical Report 33.11.01.4, Aérospatiale, Les Mureaux.

-
- [Ladevèze, 1986] P. Ladevèze (1986). Sur la mécanique de l'endommagement des composites. In *Comptes-rendus des cinquèmes Journées Nationales des Composites*, pages 607–622. Dvorak G.J.
- [Ladevèze, 1991] P. Ladevèze (1991). About a damage mechanics approach. In London, editor, *Mechanics and mechanisms of damage in composites and multimaterial*. Baptiste D.
- [Ladevèze, 1992] P. Ladevèze (1992). A damage computational method for composite structures. *J. Computer and Structure*, 44(1/2):79–87.
- [Ladevèze, 1998] P. Ladevèze (1998). A modelling error estimator for dynamical structural model updating. In Elsevier, editor, *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*. P. Ladevèze, J.T. Oden eds.
- [Ladevèze et Lubineau, 2003] P. Ladevèze et G. Lubineau (2003). On a damage meso-model for laminates: micromechanics basis and improvement. *Mechanics of Materials*, 35(8):763–775.
- [Ladevèze et al., 1999] P. Ladevèze, N. Moës, et B. Douchin (1999). Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 176:247–264.
- [Ladevèze et al., 1994] P. Ladevèze, M. Reynier, et N.M.M. Maia (1994). Error on the constitutive relation in dynamics. In M. Tanaka & al. H.D. Bui, editor, *Inverse problems in Engineering*, pages 251–256.
- [Lasry et Belytschko, 1988] D. Lasry et T. Belytschko (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24:581–597.
- [Lions, 1968] J.L. Lions (1968). In DUNOD, editor, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*.
- [Magiera et al., 1996] J. Magiera, J. Orkisz, et W. Karmowski (1996). Reconstruction of residual stresses in railroad rails from measurements made on vertical and oblique slices. *Wear*, 191(1-2):78–89.
- [Mamalis et al., 1997] A.G. Mamalis, M. Robinson, D.E. Manolakos, G.A. Demosthenous, M.B. Ioannidis, et J. Carruthers (1997). Crashworthy of composite material structures. *Composite structures*, 37(2):109–134.
- [McCarthy et Wiggeraad, 2001] M.A. McCarthy et J.F.M. Wiggeraad (2001). Numerical investigation of a crash test of composite helicopter subfloor structure. *Composite structures*, 51:345–359.
- [Nairn et Hu, 1994] J. Nairn et S. Hu (1994). Matrix microcracking. In *Damage mechanics of composite materials*, pages 187–243. Taljera.
- [Needleman, 1988] A. Needleman (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *CMAME*, 67:69–85.
- [Nemes et Randles, 1994] J. A. Nemes et P. W. Randles (1994). Constitutive modeling of high strain-rate deformation and spall fracture of graphite/peek composites. *Mechanics of Materials*, 19(1):1–14.
- [Oliver, 1995] J. Oliver (1995). Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics. In *Fourth International Conference On Computational Plasticity*, pages 455–480.

- [Oliver et al., 1999] J. Oliver, M. Cervera, et O. Manzoli (1999). Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 15:319–351.
- [Orkisz et Skrzat, 1996] J. Orkisz et A. Skrzat (1996). Reconstruction of residual stresses in railroad vehicle wheels based on enhanced saw cut measurements, formulation and benchmark tests. *Wear*, 191(1-2):188–198.
- [Pardo et al., 2000] S. Pardo, D. Baptiste, F. Décobert, J. Fitoussi, et R. Joannic (2000). Comportement en traction dynamique d'un composite quasiunidirectionnel de verre e/polyester. In *comptes rendus des douzièmes Journées Nationales sur les Composites*, volume 1, pages 183–192. AMAC.
- [Pardo et al., 2002] S. Pardo, D. Baptiste, F. Décobert, J. Fitoussi, et R. Joannic (2002). Tensile dynamic behaviour of a quasi-unidirectional e-glass/polyester composite. *Composites Science and Technology*, 62(4):579–584.
- [Perreux et Oytana, 1993] D. Perreux et C. Oytana (1993). Continuum damage mechanics for microcracked composites. *Composites Engineering*, 3(2):115–122.
- [Phillips et al., 2001] E.A. Phillips, C.T. Herakovich, et L.L. Graham (2001). Damage development in composites with large stress gradients. *Composites Science and Technology*, 61(15):2169–2182.
- [Pickett et al., 1990] A. K. Pickett, E. Haug, et J. Rückert (1990). A fracture damaging law suitable for anisotropic short fibre/matrix materials in an explicit finite element code. *Composites*, 21(4):297–304.
- [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] G. Pijaudier-Cabot et Z.P. Bažant (1987). Non-local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113:1512–1533.
- [Remmers et de Borst, 2001] J. J. C. Remmers et R. de Borst (2001). Delamination buckling of fibre-metal laminates. *Composites Science and Technology*, 61(15):2207–2213.
- [Rota, 1994] L. Rota (1994). An inverse approach for identification of dynamic constitutive equations. In Bui et Tanaka, editors, *ISIP 94: Second international symposium on Inverse problems in engineering Mechanics. Paris, 2-4 Nov 1994*, pages 157–164. Balkema.
- [Rota, 1996] L. Rota (1996). *Application de méthodes inverses au dépouillement de l'essai aux barres d'Hopkinson*. rapport de thèse, LMS–Ecole polytechnique.
- [Rozycki et Coutellier, 2001] P. Rozycki et D. Coutellier (2001). Sensibilité à la vitesse de déformation des matériaux composites unidirectionnels. In *actes du cinquième colloque national en calcul des structures*, volume 1, pages 401–408.
- [Schmueser et Wickliffe, 1987] D.W. Schmueser et L.E. Wickliffe (1987). Impact energy absorption of continuous fibre composite tubes. *Transactions of the Asme*, 109:72–77.
- [Simites, 2001] G.J. Simites (2001). Structural similitude for flat laminated surfaces. *Composite Structures*, 51(2):191–194.
- [Sluys, 1992] L.J. Sluys (1992). *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*. Phd thesis, Delft University.
- [Suffis et al., 2003] A. Suffis, T.A.A. Lubrecht, et A. Combescure (2003). Damage model with delay effect: Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14):3463–3476.
- [Tarantola, 1987] A. Tarantola (1987). In *Inverse problem theory*. Elsevier, Amsterdam.

- [Thévenet, 2003] P. Thévenet (2003). Modélisation et simulation de la compression et du cisaillement dynamique d'une éprouvette composite avec radioss. Rapport 2003-27056/1-DCR/SE, EADS.
- [Thornton et Edwards, 1982] P.H. Thornton et P.J Edwards (1982). Energy absorption in composite tubes. *Journal of Composite Material*, 16(6):521–545.
- [Tikhonov et Arsenin, 1977] A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin (1977). In *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston and Sons.
- [Tsai et Sun, 2002] J. Tsai et C.T. Sun (2002). Constitutive model for high strain rate response of polymeric composites. *Composites Science and Technology*, 62:1289–1297.
- [Vaughan, 1969] D.R. Vaughan (1969). A negative exponential solution for the matrix Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1:72–75.
- [Wolff, 1991] C. Wolff (1991). *Approche thermodynamique et modélisation du comportement en absorption d'énergie de tubes composites*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- [Zhao et Gary, 1997] H. Zhao et G. Gary (1997). An experimental investigation of compressive failure strength of fibre-reinforcement polymer-matrix composite plates under impact loading. *Composites Science and Technology*, 57(3):287–292.

Résumé

La simulation dynamique des structures composites jusqu'à rupture pose des difficultés liées à la description fine des phénomènes de ruine, notamment numériquement et demande donc d'utiliser des modèles adaptés.

Cette étude s'appuie sur des travaux antérieurs menés au *LMT-Cachan*, qui ont permis de développer des modèles pragmatiques, les mésomodèles d'endommagement, permettant de rendre compte du comportement complexe de structures composites en statique, ainsi qu'en dynamique par l'introduction de lois d'évolution permettant une description objective de la rupture, les lois à effet retard.

L'objet de ce travail est de discuter l'identification de ces paramètres de retard, cette dernière soulevant la problématique plus générale de la prise en compte de conditions expérimentales fortement incertaines.

Cette étude a donc pour but de développer une méthode d'identification inverse à partir d'essais en dynamique transitoire. La stratégie envisagée cherche à prendre en compte le caractère incertain des mesures, dès sa formulation. Elle se base sur le principe d'erreur en relation de comportement et a été développée, dans un premier temps, pour des comportements élastiques. Cela amène à résoudre des problèmes dynamiques non standards et a conduit à mettre en œuvre des méthodes de résolution adaptées. L'étude a permis de mettre en avant les points clés de la robustesse de la méthode face aux incertitudes de mesure.

Mots-clés : Dynamique transitoire, identification inverse, composites, incertitudes de mesure

Abstract :

The dynamic simulation of composite structures up to rupture is still a challenging task and leads to unsolved problems when dealing with the description of the phenomena responsible of the dissipation, in particular numerically. This involves the use of suited models.

This study is prolonging previous works led in *LMT-Cachan*, that allowed to develop pragmatic models, the damage mesomodels, which are able to describe the static behaviour of composite structures under complex loadings. In dynamics, the introduction of modified evolution laws, the delay effect laws, leads to an objective description of the rupture.

The aim of this work is to discuss the identification of these delay parameters, leading to the more general problem of the taking into account of corrupted experimental datas.

This study focusses on the development of an inverse identification strategy from transient dynamic tests. The proposed method takes into account the uncertainty of the measurements from the very beginning of the formulation. It is based on the error on constitutive relation principle and has first been developed for elastic behaviour. The method involves the resolution of non standard dynamic problems and dedicated methods have been studied. The study pointed out the key points of the robustness of the method, with respect to the uncertainties.

Key words : Transient Dynamics, inverse identification, composites, corrupted measurements

La simulation dynamique des structures composites jusqu'à rupture pose des défis, notamment numériques. Dans ce cadre, les mésomodèles d'endommagement ont été développés au LMT-Cachan, tant en statique qu'en dynamique, par l'introduction de lois à effet retard pour la description objective de la rupture.

Ce travail discute l'identification de ces paramètres de retard, soulevant ainsi le problème de la prise en compte de conditions expérimentales fortement incertaines. Cette étude propose une méthode d'identification inverse à partir d'essais en dynamique transitoire, basée sur le principe d'erreur en relation de comportement. Elle a été développée, dans un premier temps, en élasticité. Cela amène à résoudre des problèmes dynamiques non standards demandant des méthodes de résolution adaptées. L'étude a permis de mettre en avant les points clés de la robustesse de la méthode face aux incertitudes de mesure.

Abstract :

The dynamic simulation of composite structures up to rupture is still a challenging task. In this context, the damage mesomodels have been developed in LMT-Cachan, both in static and dynamics by introducing delay effect laws, leading to an objective description of rupture. This work discusses the identification of these delay parameters, leading to the more general problem of the taking into account of corrupted experimental datas. This study focusses on the development of an inverse identification strategy from transient dynamic tests. The proposed method takes into account the uncertainty of the measurements from the very beginning of the formulation. It is based on the error on constitutive relation principle and has first been developed for elastic behaviour. The method involves the resolution of non standard dynamic problems and dedicated methods have been studied. The study pointed out the key points of the robustness of the method, with respect to the uncertainties.

Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide
pour des données incertaines

Towards an identification strategy in transient dynamics
for uncertain datas

transient dynamics
inverse identification
composites
corrupted measurements
dynamique transitoire
identification inverse
composites
incertitudes de mesure