



HAL
open science

Schémas à deux-grilles pour la résolution du problème de Navier-Stokes instationnaire incompressible

Hyam Abboud

► **To cite this version:**

Hyam Abboud. Schémas à deux-grilles pour la résolution du problème de Navier-Stokes instationnaire incompressible. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI; Université Saint-Joseph, Beyrouth, 2006. Français. NNT: . tel-00132658

HAL Id: tel-00132658

<https://theses.hal.science/tel-00132658>

Submitted on 22 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Schémas à deux grilles pour la résolution du problème de Navier-Stokes instationnaire incompressible

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 03 juillet 2006

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris VI
et
Docteur de l'Université Saint-Joseph – Beyrouth
(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Hyam ABBOUD

Composition du jury

Rapporteurs : Jean-Luc GUERMOND
Raphaële HERBIN

Examineurs : Vivette GIRAULT (Directrice de thèse)
Frédéric HECHT
Charbel KLAIANY
Nabil NASSIF
Toni SAYAH (Directeur de thèse)

Mis en page avec la classe thloria.

*À mon âme-sœur,
ma sœur jumelle Ibtissam,
à mes parents Nadia & Gerges,
avec amour et admiration...*

Remerciements

Au terme de ce voyage au pays des chiffres et des nombres, j'adresse du fond du cœur un mot de remerciements et de reconnaissance à tous ceux qui m'ont accompagnée, de près ou de loin, durant mes trois années de thèse.

Mes premières pensées vont à ma directrice de thèse Vivette Girault. Ces trois années de thèse sous sa direction furent pour moi un vrai enrichissement. Je lui exprime ma profonde gratitude pour m'avoir accordé sa confiance depuis mon stage de DEA et pour m'avoir guidée avec patience, attention et intérêt dans le monde de la recherche. Je la remercie pour sa passion pour son travail, sa présence, sa disponibilité continue et son soutien infaillible. J'ai beaucoup appris à ses côtés, tant au niveau personnel qu'académique. Merci enfin pour ses grandes qualités humaines, pédagogiques et scientifiques.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Toni Sayah d'avoir co-dirigé ma thèse. Sa gentillesse, son caractère chaleureux et ses précieux conseils m'ont donné confiance en moi-même. Sa disponibilité à tous les instants, son dynamisme et les discussions intéressantes que nous avons eues, ont rendu le travail quotidien passionnant et motivant.

Juger un travail de thèse n'est pas chose aisée. Pour cela, je tiens à remercier Jean-Luc Guermond et Raphaële Herbin d'avoir accepté la lourde tâche et le délicat rôle de rapporter sur ma thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail et pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit.

Je tiens à témoigner ma sincère reconnaissance à Frédéric Hecht pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et surtout d'avoir fait le voyage jusqu'à Beyrouth pour assister à ma soutenance. C'est pour moi un grand plaisir que Charbel Klaiany qui m'a toujours soutenue dans mon parcours et Nabil Nassif aient accepté d'être examinateurs dans mon jury de thèse.

J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse en co-tutelle entre le Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL) de l'UPMC et la Faculté des Sciences (FS) de l'USJ. J'aimerais particulièrement remercier les personnes qui ont rendu cette coopération possible notamment le directeur du laboratoire Yvon Maday et les doyens de la faculté Ragi Abou Chacra et Toufic Rizk.

Je suis reconnaissante à Yvon Maday de m'avoir permis de bénéficier des conditions de travail remarquables au sein de son laboratoire et d'avoir suivi avec attention la progression de mon travail. Il a su être à l'écoute de mes préoccupations ; ses conseils et ses encouragements m'ont été précieux. Je le remercie aussi pour sa confiance et l'intérêt qu'il porte à mon égard et à mon avenir. Pour tout cela et aussi pour sa sympathie et son optimisme quotidiens, je lui dis merci !

J'adresse toute ma gratitude au doyen Ragi Abou Chacra. Je lui suis gré de toutes les qualités pédagogiques, humaines et relationnelles apprises à son contact depuis ma première année à la faculté. Je le remercie de m'avoir encouragée à faire ma thèse en co-tutelle et d'avoir fait tout ce qui est en son pouvoir pour mener à bien cette coopération. Merci de la grande confiance et de la "lourde" tâche qu'il m'a accordées en signant la convention de co-tutelle, qui fut la première : j'espère avoir été à la hauteur de ses attentes et de sa confiance. Je n'oublie surtout pas le doyen Toufic Rizk qui a pris la relève depuis septembre 2005 et qui, par son optimisme et ses encouragements, s'est assuré du bon acheminement de ce travail. Merci d'avoir toujours trouvé les mots qu'il faut et pour toutes les pensées attentionnées et encourageantes.

Ce travail de thèse restera pour moi indissociable de l'environnement dans lequel je l'ai mené. Je souhaite témoigner de ma gratitude à tous les membres du LJLL, pour leur présence, leur pensée attentionnée, leurs conseils avisés, leur collaboration, les discussions intéressantes durant les pauses cafés et pour beaucoup d'autres raisons. Merci aux secrétaires du laboratoire et d'ailleurs, Mesdames Danièle Boulic, Liliane Ruprecht, Martine Legras et Luce Loriller pour leur efficacité, leur disponibilité et leur bonne humeur. J'adresse une pensée particulière à Michel Legendre et Antoine Lehyaric et aussi à Christian David pour son sourire, sa disponibilité, sa gentillesse et son amitié. Je le remercie également pour l'impression de ce document.

Je remercie les différents responsables administratifs dans le cadre de la coopération et dans mon projet de recherche (FS5) en particulier Mesdames Sandrine Lemoigne, Isabelle Levisalles et Monsieur Jean-Jacques Roubion à la direction des relations internationales de l'UPMC et Messieurs Toufic Rizk et Richard Maroun successivement délégués de la FS au conseil de la recherche de l'USJ.

Je remercie aussi tous les membres de la FS sans qui la maison ne serait pas aussi chaude et accueillante : Mesdames Juliana Lahoud, Nayla Nasr et Zakielle Makhoul. Je n'oublie pas Georges Raï et le remercie pour sa sympathie et son agréable sourire tout au long de la journée. À Edgar Seif (l'homme de la situation qui a une solution à tout), je dis merci d'avoir été là et toujours disponible, merci pour ton aide précieuse, les heures de discussions et de bonne humeur et pour tes encouragements. Enfin que tout le corps enseignant de la FS de l'USJ trouve ici mes sincères remerciements.

Viennent maintenant les remerciements à ceux qui ont partagé mon quotidien de thésard au LJLL : merci à mes collègues du bureau 3D18 pour leur bonne humeur (Alban(pour ton sourire permanent et ton dynamisme), Sorin, Philippe(pour toutes les discussions amusantes et tes mails permanents quand je suis au Liban), Alexandra(pour ta personnalité spéciale, le shopping et les soirées italiennes), Marcela(pour ton calme, ton amitié et ta joie), Mourad(pour la belle ambiance que tu crées), Mounir, Louis, Thomas, Raphaël, Hamid and at last but not at least Paulo(avec un o;-), pour ta sympathie, ton amitié, nos discussions inter et extra-scientifiques et ta volonté à apprendre le libanais), Rachad(mon "petit" frère...*261non?*, merci pour ta fraternité et notre complicité) et Joëlle(merci tout simplement pour tes valeurs humaines, nos points en commun, ta fraternité et surtout pour le symbole immortel que tu portes en ton nom!) et les autres joyeux thésards du LJLL ; en particulier Martin, Radu, Sever, Karim, Augusto, Jérôme, Driss, Mouna, Benjamin, Vincent, Stéphane, Hoai-Minh et Delphine².

Je n'oublie pas les personnes avec qui j'ai passé de bons moments extra-boulot en particulier et "*sans confusion*" ;-)) Filipa(pour les discussions entre filles dans les escaliers), Marcela & Sever, Nicole(pour la pause thé tous les jours de bonne heure), Jean-François(mon conseiller et partenaire de vin :-)) merci pour tout), Cécile & Sylvain(pour votre gentillesse et bonne humeur), Pascal(pour ta tranquillité et ta serviabilité), Jean-Baptiste(pour notre complicité), Frédéric(prends bien soin de mon ibiscus;-)) and keep smiling), Nicolas(souviens toi que j'ai travaillé sur tes équations N.S!! merci pour ton humour, ta sympathie et tes conseils avisés), Ulrich(pour ta gentillesse et ton grand cœur), Géraldine et une pensée particulière à Laurent : je te remercie pour ton amitié, ta gentillesse, ta disponibilité et ton aide précieuse. Merci à Alex, Laurent, Ulrich et Nicolas pour la relecture de ce manuscrit et pour leurs remarques constructives.

Yo pienso también en mis amigos, amigas y colegas latinos y latinas, en particular, Iria & Hernan(gracias por vuestra formidable y sincera amistad), Tomás(por el iniciación a el arte de origami), Teresa, Wilfredo(gracias por tu invitación a Caracas) y Gustavo.

Une pensée particulière à mes collègues (disiplines confondues) qui ont partagé mon quotidien de thésard à la FS, en particulier, Charbel(merci pour ton amitié, pour les moments partagés à Paris et à Beyrouth), André(pour ton optimisme et dynamisme), Valérie(pour ton sourire), Gihane, Rami, Nadine, Dominique(merci pour tes mots d'encouragement et tes valeurs humaines).

Je profite également de ces quelques lignes de liberté pour saluer et remercier les personnes dont la présence à mes côtés a embelli mes jours, à savoir mes ami(e)s, merci pour leurs sms, coups de fil, mails, cartes postales et sauts à Paris : Rita & Roni(qui ont dépassé le stade de l'amitié), Samer, Roger(team leader), Maya(une amitié qui dure) & Roy, Jony & Anna, Sandy(pour nos années de complicité), Ingmar(pour les heures de chat on msn), Dominique, Carine(pour toutes nos activités, nos voyages et notre amitié) & Mathieu, Hikmat(pour ta joie de vivre et les soirées estivales passées à Marseille durant ma participation au CEM-RACS), Pascale(Paco, merci pour ton accueil à Genève), Nathalie, Jana, Gina. Merci aussi à ceux qui ont fait partie de ma vie à un moment ou à un autre et les remercie pour tout ce que vous m'avez apporté. Merci à Nada(pour ton amitié), Ray(pour ta vivacité) et Joseph(pour tes touchant sms) et j'en oublie.

Merci à Elie pour ta gentillesse, pour les bons moments passés ensemble, pour ton soutien infaillible et tes mots réconfortant et rassurant.

Je termine enfin par ceux que je ne pourrais jamais remercier par des mots : je pense à mes sœurs Marie, Mirna et Carine et les remercie pour la joie et la bonne humeur qu'elles apportent et à mon frère Abdo pour sa vivacité et son dynamisme. Je remercie mes parents Gerges & Nadia pour leur soutien, leurs encouragements et leur amour infini. Que Dieu bénisse ma mère qui est à la gènèse de ce travail.

Enfin, à celle qui, juste par son prénom, m'a donné envie de sourire à la vie et qui me rappelle qu'un sourire *"ne peut s'acheter, ni se prêter, ni se voler..."*, à celle qui a dit un jour *"Il est des gens qui naissent et meurent seuls...Il est des gens qui naissent et vivent à deux...Ils n'ont pas le choix et pas comme ils veulent...Dieu les crée et décide que c'est mieux"*, à ma sœur jumelle Ibtissam ("sourire"), je lui dis : tu es un précieux cadeau de la vie, la force de ma foi, ma complice, mon amie, que la Vierge te bénisse.

Table des matières

Notations xiii

Formulaire d'Analyse Vectorielle xvii

Introduction

1	Équations de Navier-Stokes	3
2	Méthodes numériques générales	5
3	Principaux résultats	7
3.1	Étude d'un schéma à deux grilles d'ordre un en temps	8
3.2	Étude d'un schéma à deux grilles d'ordre deux en temps	12
3.3	Validation numérique des résultats obtenus	15
4	Plan de la thèse	22

Présentation du problème 25

Chapitre 1

Position du problème	27
-----------------------------	-----------

1.1	Introduction	28
1.2	Équations de Navier-Stokes	28
1.3	Formulation variationnelle, existence, unicité et régularité	30
1.4	Méthode à deux grilles	32
1.4.1	Schéma semi-discret en temps	33
1.4.2	Généralités sur la méthode à deux grilles	34
1.4.3	Application à un schéma totalement discret	37

1.4.3.1	Schéma d'ordre un en temps	37
1.4.3.2	Schéma d'ordre deux en temps	38
1.5	Quelques notations	39

Chapitre 2

Rappels sur la méthode des éléments finis pour le problème de Stokes 43

2.1	Le mini-élément \mathbb{P}_1 – bulle $/\mathbb{P}_1$ pour le schéma d'ordre un en temps	45
2.2	L'élément de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ pour le schéma d'ordre deux en temps	51

Schéma d'ordre un en temps 59

Chapitre 3

Problème implicite d'ordre un 61

3.1	Introduction	62
3.2	Résolution de la Première Etape du schéma à deux grilles	62
3.2.1	Erreur de base du problème de Navier-Stokes	62
3.2.2	Quelques estimations d'erreur pour le problème de Stokes	71
3.2.2.1	Estimation en normes $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$	72
3.2.2.2	Argument de dualité	72
3.2.2.3	Erreur en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$	76
3.2.2.4	Estimation d'erreur de la dérivée en temps	81
3.2.3	Application des résultats aux équations de Navier-Stokes	84
3.2.3.1	Application de l'argument de dualité à la contribution linéaire	84
3.2.3.2	Résultat de superconvergence : contribution non-linéaire	85
3.2.4	Une estimation pour la pression	91
3.3	Résolution de la Deuxième Étape du schéma à deux grilles	100
3.3.1	Estimation de la vitesse	101
3.3.2	Estimation de la pression	106

Chapitre 4**Problème d'ordre deux****115**

4.1	Introduction	116
4.2	Existence, unicité et stabilité de la solution de (4.1) – (4.2)	117
4.3	Erreur de base de Navier-Stokes	118
4.4	Quelques estimations du problème de Stokes	124
4.4.1	Estimations $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$	125
4.4.2	Estimation $L^\infty(H^1)$ et estimation $L^2(L^2)$ de la dérivée en temps	126
4.4.3	Argument de dualité	129
4.5	Résultat de superconvergence	134
4.6	Estimations d'erreur de la pression	138
4.7	Estimations d'erreur des deux grilles	144
4.7.1	Estimation de la vitesse	146
4.7.2	Estimation de la pression	149

Implémentation numérique**153****Chapitre 5****Résultats numériques****155**

5.1	Introduction	156
5.2	Résolution du problème d'ordre un en temps	157
5.2.1	Problème de Stokes	157
5.2.1.1	Introduction	157
5.2.1.2	Stabilité du schéma en fonction du temps	157
5.2.1.3	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace	159
5.2.1.4	Autre application	161

5.2.2	Problème de Navier-Stokes	163
5.2.2.1	Introduction	163
5.2.2.2	Consistance du schéma	164
5.2.2.3	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace . .	165
5.2.3	Premier problème à deux grilles	167
5.2.3.1	Introduction	167
5.2.3.2	Stabilité du schéma en fonction du temps	168
5.2.3.3	Consistance du schéma	170
5.2.3.4	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace . .	171
5.2.3.5	Efficacité de la méthode : comparaison en temps de calcul .	173
5.2.4	Deuxième problème à deux grilles	174
5.2.4.1	Introduction	174
5.2.4.2	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace . .	174
5.2.4.3	Comparaison en temps de calcul	176
5.3	Résolution du problème d'ordre deux en temps	176
5.3.1	Introduction	176
5.3.2	Stabilité du schéma en fonction du temps	176
5.3.3	Consistance du schéma	178
5.3.4	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace	179
5.3.5	Efficacité de la méthode : comparaison en temps de calcul	181

Conclusion et perspectives **185**

Conclusion et perspectives **187**

Annexes **189**

Annexe A

Preuves des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution	191
--	------------

A.1 Preuve du théorème d'existence 1.3.1 191

A.2 Preuve du théorème d'unicité 1.3.2 194

Annexe B Équations fondamentales de la dynamique des fluides. Tenseurs de contraintes	197
--	------------

Annexe C Algorithme de résolution et méthode des caractéristiques	199
--	------------

C.1 Méthode de gradient conjugué	199
C.2 Méthode des caractéristiques	200
Index	201

Index	203
--------------	------------

Bibliographie	205
----------------------	------------

Table des figures	209
--------------------------	------------

Liste des tableaux	211
---------------------------	------------

Notations

Nous présentons ici les notations utilisées dans cette thèse.

Les différents corollaires, lemmes, propositions, remarques et théorèmes sont, dans ce mémoire, numérotés dans chaque chapitre de manière séquentielle. Les champs vectoriels seront notés en caractères gras, par exemple, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

Notations générales

- d : dimension de l'espace
- Ω : ouvert borné de \mathbb{R}^d
- $\partial\Omega$: frontière de Ω
- $\vec{\mathbf{n}}$: vecteur normal unité extérieur à $\partial\Omega$
- p, q : pressions (Navier-Stokes et Stokes)
- \mathbf{u}, \mathbf{v} : champs de vecteurs vitesse (Navier-Stokes et Stokes)
- t : temps
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$: produit scalaire de deux vecteurs
- $\nabla \mathbf{v}$: gradient d'un champ de vecteurs \mathbf{v}
- $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ou $\operatorname{div} \mathbf{v}$: divergence d'un champ de vecteurs \mathbf{v}
- $\Delta \mathbf{v}$: laplacien d'un champ de vecteurs \mathbf{v}
- $\frac{d}{dt}$: dérivée par rapport au temps
- p.p. : presque partout
- η : pas d'espace

- κ : élément de la triangulation
 - λ : coordonnée barycentrique
 - ν : viscosité cinématique
 - ρ : masse volumique
 - \mathcal{T} : triangulation
 - ψ : fonction de courant
 - Re : nombre de Reynolds
-

Espaces fonctionnels

Pour plus de détails sur les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev on renvoie le lecteur à [7], [14], [45].

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω
 - $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega)$
 - $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des distributions
 - $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω
 - $H^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega), \quad \nabla \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$
 - $H_0^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0\}$
 - $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$
 - $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
 - $L^p(I; X)$ est l'espace de Lebesgue des fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans X
-

Produits scalaires, normes, produits de dualité

- X' : dual topologique de X

-
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit de dualité X', X

- $\forall \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \quad \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- $\forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega),$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Formulaire d'Analyse Vectorielle

1. $\nabla \times \nabla \Phi = 0$

2. $\nabla \cdot (\nabla \times a) = 0$

3. $\nabla \times (a \times b) = a \nabla \cdot b - b \nabla \cdot a + b \cdot \nabla a - a \cdot \nabla b$

4. $\int_V \nabla \cdot a \, dV = \int_A a \cdot n \, dA$ Green-Ostrogradsky

5. $\int_V \nabla \Phi \, dV = \int_A \Phi n \, dA$

6. $\int_V \nabla \times a \, dV = \int_A n \times a \, dA$

7. $\int_A (\nabla \times a) \cdot n \, dA = \int_C a \, dl$ Stokes

8. $\int_A n \times \nabla \Phi \, dA = \int_C \Phi \, dl$

9. $\int_V (\Phi \Delta \psi - \psi \Delta \Phi) \, dV = \int_A (\Phi \nabla \psi - \psi \nabla \Phi) \cdot n \, dA$ Green

Introduction

1 Équations de Navier-Stokes

Près de deux siècles se sont écoulés depuis que le mathématicien anglais Sir George Gabriel Stokes [62] a clarifié la mise en équations des écoulements de fluides visqueux introduite par le mathématicien et ingénieur français Claude Louis Marie Henry Navier [53] à partir de considérations antérieures établies par le mathématicien suisse Leonhard Euler [25], qui n'avait pas pris en compte, entre autres, les effets de la viscosité.

La mécanique des fluides trouve sa motivation dans des situations très variées issues, par exemple, de l'aéronautique, de la météorologie ou de la géologie. Il importe de comprendre la structure de l'écoulement et d'étudier le comportement du fluide via des variables comme la pression, la vitesse, la température et la masse volumique dans le milieu fluide.

L'étude et la classification des fluides reposent essentiellement sur la loi choisie pour le tenseur T des contraintes sur le fluide qui s'écrit souvent :

$$T(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)I + F(D(\mathbf{x}, t)),$$

où p est la pression eulérienne, I l'opérateur identité, F une fonction tensorielle, $D = (\nabla\phi + \nabla\phi^T)/2$ le tenseur du taux de déformation, et ϕ la déformation du fluide. Toutes les quantités sont évaluées en (\mathbf{x}, t) , où $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ désigne la position et $t \in [0, T]$ représente le temps.

Un fluide en écoulement est *newtonien* lorsque la relation contrainte-taux de déformation est linéaire et isotrope (on peut définir alors le coefficient de viscosité, ou encore la viscosité dynamique, comme le rapport de la contrainte de cisaillement au taux de déformation associé au cisaillement). En terme mathématique, lorsque F est une application linéaire de D , le fluide est dit *newtonien*; dans les autres cas, le fluide est dit *non-newtonien*.

En ne considérant que les fluides newtoniens, la loi de comportement du tenseur T s'écrit :

$$T(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)I + 2\mu D(\mathbf{x}, t),$$

où $\mu > 0$ est la viscosité dynamique du fluide. L'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement nous mène à :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))) - \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

où ρ est la densité du fluide, \mathbf{f} les forces extérieures agissant sur le fluide, \mathbf{u} et p respectivement la vitesse et la pression eulériennes du fluide. L'équation (2) ci-dessus est appelée *équation de Navier-Stokes* si $\mu > 0$ (cas d'un fluide visqueux), ou *équation d'Euler* si $\mu = 0$ (cas d'un fluide parfait).

Si la densité ρ est constante, le fluide est *incompressible* : sa masse spécifique varie faiblement avec la pression ou la température. On a alors,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

On dit qu'un écoulement est *laminaire* lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est *turbulent* lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement. On définit alors le *nombre de Reynolds* par

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu},$$

où \bar{v} est la vitesse moyenne du fluide en écoulement dans un tube de diamètre D . On constate que la transition vers la turbulence s'effectue lorsque $Re \sim 2100$ à 2500 . Pour $Re < 2000$, l'écoulement reste laminaire.

On dit qu'un écoulement est stationnaire si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps. Ainsi la pression p , la vitesse \mathbf{v} , la densité ρ , l'énergie e d'un écoulement stationnaire sont des quantités indépendantes du temps. Un écoulement est dit *instationnaire* si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps. Les écoulements turbulents sont donc par nature instationnaires.

Aujourd'hui encore, de nombreuses questions mathématiques concernant les équations de Navier-Stokes restent ouvertes. Lorsque l'écoulement est incompressible, l'un des problèmes qui demeure non résolu est l'existence de solutions classiques globales de ces équations en trois dimensions d'espace pour des données initiales générales (i.e. pas nécessairement régulières).



FIG. 1 – Claude Navier (1785-1836) et George Gabriel Stokes (1819-1903)

En ce qui concerne les solutions dites faibles des équations de Navier-Stokes incompressibles, concept introduit par le mathématicien français J. Leray, qui en étudia principalement l'existence [41], [42], [43], reste à l'heure actuelle encore totalement ouverte la question de régularité globale et d'unicité. P. Lax présente, dans le recueil des travaux de J. Leray (en 1998), une description de la contribution de ce dernier à la théorie des équations aux dérivées partielles, y compris celle des équations de Navier-Stokes.

Dans les années 40, A.N. Kolmogorov (1941) publie son travail fondamental sur la turbulence et J. von Neumann et ses collaborateurs produisent une nouvelle activité du côté informatique et météorologique. Lorsque l'écoulement est compressible et barotrope, même le problème d'existence de solutions faibles globales en dimension d'espace supérieure ou égale à deux est longtemps resté sans réponse. Il existe une vaste littérature sur cette question dans laquelle de nombreux auteurs, Hoff [35], Matsumura et Nishida [52] et Weigant et Kazhikov [67], pour n'en citer que quelques-uns, ont apporté des réponses partielles sous diverses contraintes plus ou moins restrictives sur les données initiales (régularité, petitesse) ou sur les coefficients de viscosité (dépendance par rapport à la densité). La première approche de ce problème dans toute sa généralité est due à P.-L. Lions [47] dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles en régime isentropique (i.e. lorsque la loi d'état du fluide reliant la pression p à la densité ρ est du type $p(\rho) = a\rho^\gamma$ où a est une constante strictement positive et γ est la constante obtenue par le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant, constante dite adiabatique). Dans ces travaux, P.-L. Lions a présenté une théorie complète permettant d'obtenir des résultats d'existence de solutions faibles globales en d dimensions d'espace ($d \geq 2$) et ce, pour des données initiales générales. Du point de vue mathématique, on ne connaît des solutions analytiques pour le système de Navier-Stokes que dans des cas particuliers (les écoulements de Couette ou de Poiseuille). La théorie mathématique des équations de Navier-Stokes n'est pas encore complète. Il n'existe que des résultats partiels d'existence, unicité, régularité de la solution, différents selon la dimension de l'espace considéré.

Le choix du système de Navier-Stokes comme équations de travail permet d'aborder des problèmes comme le couplage d'inconnues, la non-linéarité et la dépendance en temps. Le caractère non-linéaire du terme de convection qui apparaît dans ces équations est à l'origine des difficultés rencontrées dans la résolution de ce système. Ainsi, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes s'est avérée une alternative prometteuse, qui offre des résultats utiles aux ingénieurs.

Les progrès informatiques réalisés depuis une quinzaine d'années nous ouvrent de nombreux horizons, et nous invitent notamment à trouver des méthodes numériques adaptées à la résolution de problèmes physiques jusqu'alors numériquement insolubles. Le développement de cet ensemble d'outils présente plusieurs facettes, dont l'analyse numérique et l'algorithmique numérique, qui ont toutes le même objectif : estimer une grandeur avec une précision satisfaisante en un temps de calcul minimal. Celui-ci devient en effet rapidement prohibitif dans les domaines dont nous parlons, malgré la puissance des machines de calcul les plus récentes.

2 Méthodes numériques générales

Méthode des Éléments Finis

Nous employons la *méthode des éléments finis* pour la discrétisation en espace de l'équa-

tion de Navier-Stokes. Elle est l'une des nombreuses techniques utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles modélisant des problèmes de la mécanique, de la physique, de la biologie, etc.

Les méthodes des éléments finis ont fait l'objet d'un grand nombre de publications. Elles sont utilisées tant par des ingénieurs que par des mathématiciens dans des domaines extrêmement variés. Les ingénieurs ont réinventé indépendamment la méthode dans les années 50, après avoir été conçue par R. Courant en 1943 mais l'importance de cette contribution est passée inaperçue à cette époque : les premières références généralement citées dans la littérature sont celles d'Argyris (1954-1955), Turner, Clough, Martin & Topp (1956). Le nom de la méthode a été proposé par Clough (1960). On trouve chez Oden [55], Zienkiewicz [71] et dans l'article d'introduction de J.T. Oden [56] l'historique sur le développement de cette méthode du point de vue des ingénieurs. Nous utilisons, dans cette thèse, d'une part les éléments $\mathbb{P}_1 + \text{bulle}/\mathbb{P}_1$ en vitesse-pression (le "mini-élément") (cf. chapitres 2 et 3) et d'autre part les éléments $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ en vitesse-pression (éléments de Taylor-Hood) (cf. chapitres 2 et 4). Le choix du mini-élément est dû au fait que l'élément fini $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ ne satisfait pas la condition inf-sup car l'espace de la vitesse n'est pas assez riche (ou l'espace de la pression est trop riche). L'idée du mini-élément est d'ajouter un degré de liberté à l'intérieur de chaque élément κ de la triangulation \mathcal{T} , pour chaque composante de la vitesse. La condition inf-sup, qui est une condition de compatibilité entre les espaces discrets de l'élément fini de la vitesse et de la pression, est alors vérifiée (cf. Brezzi et Fortin [15], Girault et Raviart [31]).

Discrétisation en temps

La méthode de discrétisation en temps que nous utilisons est celle des *différences finies*. Nous employons d'une part le schéma d'Euler d'ordre 1 (cf. chapitre 3) et d'autre part un schéma d'ordre 2 (cf. chapitre 4).

Une des techniques de résolution des équations non-linéaires est la *méthode des caractéristiques*. Elle est dédiée au traitement du terme non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$; il s'agit du traitement lagrangien de la dérivée totale

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (5)$$

appelée également dérivée particulière (cf. par exemple O. Pironneau [58] et E. Süli [63]).

Nous pouvons parler aussi de la famille des méthodes dites *de projection*, introduites par A.J. Chorin [18], [19] et R. Temam [65], une des approches les plus utilisées pour la discrétisation en temps. Ce sont des méthodes de marche en temps à pas fractionnaires visant à découpler le calcul de la vitesse de celui de la pression, en résolvant dans un premier temps un problème de convection-diffusion tel que la vitesse résultante n'est pas nécessairement à divergence nulle ; puis dans un deuxième temps, celle-ci est projetée sur un espace de fonctions à divergence nulle afin de satisfaire la condition d'incompressibilité. Les variantes de ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : celles basées sur des techniques de correction de la vitesse et celles basées sur des techniques de correction de la pression. Citons par exemple le schéma de projection Lagrange-Galerkin introduit par Y. Achdou et J.-L. Guermond [6], qui fait partie du volet des techniques de correction de la vitesse.

Technique de résolution employée dans cette thèse

L'une des méthodes de résolution des problèmes non-linéaires est *la technique de résolution à deux grilles*. C'est la méthode que nous avons choisie pour résoudre dans cette thèse le problème de Navier-Stokes instationnaire et incompressible.

Elle permet de trouver une approximation de la solution \mathbf{u} d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire au moyen d'un calcul effectué sur deux grilles. L'idée générale consiste à trouver, dans une première étape, une approximation \mathbf{u}_H calculée sur une grille grossière de pas d'espace H et dans une deuxième étape, à discrétiser l'équation aux dérivées partielles sur une grille fine de pas d'espace h en la linéarisant autour de la solution \mathbf{u}_H calculée à la première étape. En notant \mathbf{u}_h^{lin} cette solution, et sous des hypothèses convenables, on peut montrer que si les pas d'espace grossier et fin H et h sont choisis de façon adéquate, alors l'erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{lin}\|$ est du même ordre que $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$, où \mathbf{u}_h n'est autre que l'approximation de l'EDP directement résolue sur la grille fine. Plus précisément, on obtient ce résultat lorsque la contribution de \mathbf{u}_H à l'erreur, dans les termes non-linéaires, est mesurée dans une norme suffisamment moins fine que celle qui correspond à l'opérateur linéaire dominant de l'EDP, pour que cette contribution soit *d'ordre supérieur* à celle de l'opérateur. Cela se produit par exemple si la norme qui correspond à l'opérateur est la norme H^1 et la contribution de \mathbf{u}_H à l'erreur est mesurée en norme L^2 . En général, cet ordre d'erreur supérieur est obtenu par un *argument de dualité*.

Le calcul de \mathbf{u}_H et \mathbf{u}_h^{lin} est moins coûteux que le calcul direct de la solution \mathbf{u}_h . Donc le but de la méthode à deux grilles est de *diminuer le temps de calcul* de la solution de notre problème non-linéaire et donc de gagner en coût de calcul (en taille mémoire et en temps CPU). En ce qui concerne la précision, elle est conservée. En d'autres termes, l'idée de la résolution du problème non-linéaire par une technique à deux grilles est d'accélérer la convergence du schéma. En termes publicitaires, on pourrait ainsi dire que suivre une démarche à deux grilles, c'est faire le choix de la simplicité...

L'idée de cette stratégie à deux grilles n'est pas nouvelle et date d'une quinzaine d'années environ. Elle a été largement appliquée à la résolution d'équations elliptiques semi-linéaires stationnaires, comme par exemple dans les travaux de Xu [70], [69] et Niemistö [54]. Citons les travaux de Layton [40], Layton et Lenferink [39], [38] et Girault et Lions [30] pour le problème de Navier-Stokes stationnaire. En ce qui concerne le problème de Navier-Stokes instationnaire, à notre connaissance, le premier travail est celui de Girault et Lions [29] pour le schéma semi-discret. Le travail de cette thèse est d'appliquer cette technique au problème non-linéaire de Navier-Stokes, totalement discrétisé en temps et en espace.

Cet algorithme à deux grilles est à rapprocher de la méthode de Galerkin non-linéaire (Non-linear Galerkin Method (NLG)) développée par Foias et al. [26], dont on trouve une bonne description dans les travaux de Marion et Temam [49], [51], [50]. Une différence essentielle entre NLG et la méthode à deux grilles est que, dans cette dernière, on calcule d'abord \mathbf{u}_H et ensuite \mathbf{u}_h , i.e. à chaque étape les deux calculs sont découplés, tandis que ce calcul n'est pas découplé dans NLG.

3 Principaux résultats

Ce mémoire contient trois types de résultats :

- des estimations d'erreur de la vitesse et de la pression d'un schéma d'ordre un en temps et en

espace, grâce à un argument de dualité,

- le gain de précision qui apparaît dans des estimations d'erreur de la vitesse et de la pression d'un schéma d'ordre deux en temps et en espace, à l'aide, aussi, d'un argument de dualité,
- la validation numérique des résultats théoriques.

Problème de Navier-Stokes

Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, $\bar{\mathbf{n}}$ la normale unité extérieure et un intervalle de temps $[0, T]$, $T > 0$.

Le mouvement d'un fluide visqueux et incompressible dans Ω est décrit par les équations de Navier-Stokes instationnaires

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (6)$$

avec la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (7)$$

la condition au bord, du type Dirichlet homogène

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (8)$$

et la condition initiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (9)$$

avec les notations habituelles :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \quad \Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

et où les inconnues \mathbf{u} et p désignent respectivement le champ de vitesse et la pression du fluide. Toutes les quantités sont évaluées au point (\mathbf{x}, t) , où $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ désigne la position et $t \in [0, T]$ représente le temps. On suppose que la densité du fluide est constante ($\rho = 1$); \mathbf{f} représente le champ de forces volumiques appliquées au fluide (le champ de gravité par exemple) et ν est la viscosité cinématique.

Le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est le terme de transport (ou de convection), $\nu \Delta \mathbf{u}$ est celui de diffusion dans les équations de Navier-Stokes, ce dernier étant dû à l'existence des interactions au niveau moléculaire entre les particules et se traduisant par une dissipation d'énergie.

3.1 Étude d'un schéma à deux grilles d'ordre un en temps

En dimension trois, V. Girault et J.-L. Lions [29] ont étudié le schéma à deux grilles pour le problème de Navier-Stokes instationnaire semi-discret. On étend cette technique au problème de Navier-Stokes totalement discrétisé en temps et en espace.

Étape 1 Problème non-linéaire sur grille grossière : trouver $(\mathbf{u}_H^{n+1}, p_H^{n+1}) \in X_H \times M_H$,

solution de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_H \in X_H, \quad & \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}_H^n, \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\forall q_H \in M_H, \quad (q_H, \operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0. \quad (11)$$

Étape 2 Problème linéarisé sur grille fine : trouver $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h \times M_h$, solution de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad & \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\ & = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0. \quad (13)$$

Pour $n = 0$, nous démarrons la première étape avec $\mathbf{u}_H = \mathbf{0}$, et la deuxième avec $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$. Pour passer de n à $n + 1$, nous prenons pour \mathbf{u}_h^n dans (10) une restriction de \mathbf{u}_H^n sur la grille grossière, $R(\mathbf{u}_H^n)$, et pour calculer p_h^{n+1} , nous démarrons l'algorithme de découplage par une extension de p_H^{n+1} à la grille fine. Enfin \mathbf{f}^{n+1} utilisée dans (10) et (12) est une approximation adéquate de \mathbf{f} au temps t^{n+1} .

Pour faire cette étude, nous avons fait deux simplifications.

1. Dans les schémas posés sur la grille grossière nous avons stabilisé le terme de convection en le rendant antisymétrique, afin de faciliter les estimations d'erreur, ([2],[4]).
2. Nous avons fait d'abord l'étude de l'erreur du schéma sur la grille grossière pendant tout l'intervalle de temps $[0, T]$. Ensuite, nous avons fait l'étude de l'erreur du schéma linéarisé sur la grille fine, également pendant tout l'intervalle de temps. Cette approche est évidemment plus grossière que celle qui est décrite ci-dessus, et qui est employée dans les essais numériques, mais elle permet néanmoins de démontrer un comportement asymptotique de l'erreur.

Nous notons H et h les pas d'espaces (pour alléger les notations, on remplace H par la lettre η , sauf quand H intervient peu) et nous notons Δt le pas de temps, (\mathbf{u}, p) (resp. $(\mathbf{u}_\eta^n, p_\eta^n)$) la solution du problème exact de Navier-Stokes (resp. du problème discrétisé). Un premier résultat consiste à établir l'estimation d'erreur de base du problème de Navier-Stokes : il représente la convergence standard du schéma d'ordre un en temps et en espace sur la grille grossière dans les normes $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ d'ordre un en temps et en espace.

Théorème 1 *Si la solution de (6)–(9) est assez régulière, nous avons*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \left\| (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq e^{CT} \left(\alpha \eta^2 + \beta (\Delta t)^2 \right), \end{aligned} \quad (14)$$

avec α, β et C , qui dépendent de $\mathbf{u}, \mathbf{u}', p, \nu$, mais pas de η et Δt .

L'estimation d'erreur d'ordre deux dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est basée sur un argument de dualité pour le problème de Stokes dépendant du temps. Pour cela, nous introduisons un problème de Stokes rétrograde semi-discret pour lequel nous établissons les estimations a priori suivantes :

Lemme 2 *La solution \mathbf{w}^n , $0 \leq n \leq N$, du problème de Stokes rétrograde vérifie les estimations a priori suivantes :*

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{3} S_2}{\sqrt{\nu}} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (15)$$

où S_2 est la constante de l'inégalité de Poincaré et

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \sqrt{\nu} |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{3} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Si de plus Ω est convexe, alors $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2$, $\lambda^n \in H^1(\Omega)$ et

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t (|\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2) \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (17)$$

avec une constante C indépendante de Δt et de η .

Ces estimations a priori du problème de Stokes rétrograde et l'argument de dualité nous permettent d'établir l'estimation d'erreur de la vitesse en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ pour le problème de Stokes :

Théorème 3 *Si Ω est convexe, $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$, $\mathbf{g}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$, alors il existe une constante C , qui dépend des normes de \mathbf{g}, \mathbf{g}' et $\mathbf{g}(0)$ mais indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t). \quad (18)$$

En particulier, si $\Delta t = O(\eta^2)$, alors

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^2. \quad (19)$$

En imposant $\Delta t = O(\eta^2)$ i.e. le pas de temps Δt est exactement du même ordre que le carré du

pas d'espace η , (cf. (19)), nous obtenons que l'erreur du problème Stokes est d'ordre deux. Cette hypothèse est une partie de celle que nous utilisons plus loin : il existe deux constantes α et γ , positives, indépendantes de Δt et η telles que :

$$\alpha\eta^2 \leq \Delta t \leq \gamma\eta^2. \quad (20)$$

Ce théorème est appliqué à la contribution linéaire de l'erreur de la solution du problème de Navier-Stokes et un résultat de superconvergence est prouvé pour la contribution non-linéaire dans le

Théorème 4 *Si la solution de (6)–(9) est assez régulière, on a*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t). \end{aligned} \quad (21)$$

En combinant les résultats des théorèmes 3 et 4, nous obtenons une estimation d'erreur d'ordre deux de la solution du problème de Navier-Stokes en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$.

L'estimation d'erreur de la pression sur la grille grossière achève l'étude de la première étape du schéma à deux grilles. Nous déduisons une estimation d'ordre 1 de la pression en restreignant un peu la triangulation.

Théorème 5 *Sous certaines hypothèses vérifiées par la triangulation \mathcal{T}_η , il existe une constante C indépendante de η et Δt telle que*

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}). \quad (22)$$

Si la condition (20) est vérifiée alors

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta. \quad (23)$$

Une fois que l'erreur d'approximation est estimée sur la grille grossière, on étudie l'erreur d'approximation sur la grille fine. Les ordres de convergence de la vitesse et de la pression sont respectivement donnés par le

Théorème 6 *Supposons que Ω est convexe. Si la solution de (6)–(9) est assez régulière, la solution (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) sur la grille fine satisfait l'estimation d'erreur suivante :*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(H^2 + h + \Delta t). \end{aligned} \quad (24)$$

De plus,

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h + H^2 + \Delta t), \quad (25)$$

avec des constantes C indépendantes de h, H et Δt .

Si H et Δt vérifient (20) et si on a, pour $\alpha', \gamma' > 0$,

$$\alpha' H^2 \leq h \leq \gamma' H^2, \quad (26)$$

alors les relations (24) et (25) permettent d'affirmer que l'erreur de la solution calculée par notre schéma à deux grilles est de l'ordre de h .

3.2 Étude d'un schéma à deux grilles d'ordre deux en temps

Dans le but de gagner en ordre de convergence, nous avons utilisé un schéma à deux grilles d'ordre deux en espace et en temps pour le problème de Navier-Stokes ([1]) que nous présentons :

Étape 1 Problème non-linéaire sur grille grossière : trouver $(\mathbf{u}_H^{n+1}, p_H^{n+1}) \in X_H \times M_H$, solution de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_H \in X_H, \quad & \frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{u}_H^{n+1} - 4\mathbf{u}_H^n + \mathbf{u}_H^{n-1}, \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) \\ & + \frac{1}{2} (\text{div } \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) - (p_H^{n+1}, \text{div } \mathbf{v}_H) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\forall q_H \in M_H, \quad (q_H, \text{div } \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0. \quad (28)$$

Nous complétons ces équations par les conditions initiales suivantes : on pose $\mathbf{u}_H^0 = \mathbf{0}$ et on calcule \mathbf{u}_H^1 par une itération du schéma d'Euler, qui correspond à la résolution de (10) pour $n = 0$.

Étape 2 Problème linéarisé sur grille fine : trouver $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h \times M_h$, solution de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad & \frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\ & - (p_h^{n+1}, \text{div } \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0. \quad (30)$$

De même, nous complétons ces équations en posant $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$ et en calculant \mathbf{u}_h^1 par une itération du schéma d'Euler, lequel correspond à la résolution de (12) pour $n = 0$.

Après avoir montré l'existence, l'unicité et la stabilité du schéma, nous établissons l'estimation d'erreur de base du problème de Navier-Stokes.

Théorème 7 *Si la solution de (6)–(9) est assez régulière, il existe une constante C indépendante de η et Δt telle que*

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2), \end{aligned} \quad (31)$$

où

$$\delta^2 \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{n+1} - 2\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n-1}. \quad (32)$$

Afin d'établir l'estimation d'erreur de la vitesse en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$, nous introduisons un problème de Stokes rétrograde semi-discret d'ordre deux en temps pour lequel nous établissons les estimations suivantes :

Lemme 8 *La solution $\mathbf{w}^n, 0 \leq n \leq N$, du problème de Stokes rétrograde vérifie les estimations a priori suivantes :*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2\mathbf{w}^{n-1} - \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2\nu} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sum_{n=1}^{N+1} \|\delta^2 \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sqrt{\frac{2S_2}{\nu}} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (33)$$

où S_2 est la constante de Poincaré et

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\nu}{2}} \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\frac{\nu}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N+1} |\delta^2 \mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{\nu}{2}} \sup_{0 \leq n \leq N} |2\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N+1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Si de plus Ω est convexe, alors pour $0 \leq n \leq N$, $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2, \lambda^n \in H^1(\Omega)$ et

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left(|\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (35)$$

avec C une constante indépendante de Δt et de η .

Par un argument de dualité, ces estimations a priori de la solution du problème de Stokes rétrograde nous permettent d'établir l'estimation d'erreur de la solution du problème de Stokes en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$.

Théorème 9 *Si Ω est convexe, $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2, \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^2), \mathbf{v}' \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2), \mathbf{v}^{(3)} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $q \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$, alors il existe une constante C , qui dépend des normes de $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}^{(3)}$ et q , mais indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2). \quad (36)$$

En particulier, s'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que

$$(\Delta t)^2 \leq \alpha \eta^3, \quad (37)$$

alors

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^3. \quad (38)$$

Avec l'hypothèse (37), nous obtenons pour le problème de Stokes, une erreur d'ordre η^3 .

Pour estimer l'erreur de la solution du problème de Navier-Stokes, nous la divisons en deux contributions, l'une linéaire contrôlée grâce au précédent théorème et l'autre non-linéaire que l'on estime par un résultat de superconvergence.

Théorème 10 *Si la solution de (6)–(9) est assez régulière, on a*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n) - (\mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{u}_\eta^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (39)$$

En combinant les résultats des théorèmes 9 et 10, et sous l'hypothèse (37), nous obtenons une erreur d'ordre trois pour la solution des équations de Navier-Stokes en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$:

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^3. \quad (40)$$

Par un raisonnement semblable à celui du schéma d'ordre un en temps, nous estimons l'erreur de la pression calculée sur la grille grossière. Nous pouvons, par la suite, étudier le schéma sur la grille fine. Nous établissons alors l'estimation d'erreur de la vitesse et de la pression et nous obtenons :

Théorème 11 *Sous les hypothèses du théorème 10, la solution (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) sur la grille fine satisfait l'estimation d'erreur suivante :*

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}(t^{n-1}))\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^N \|\delta^2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^N \Delta t |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C(H^3 + h^2 + (\Delta t)^2 + H(\Delta t)^2), \end{aligned} \quad (41)$$

et

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|p(t^n) - p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^2), \quad (42)$$

avec C une constante indépendante de h, H et Δt .

S'il existe deux constantes α'' et γ'' , positives, indépendantes de h et H telles que :

$$\alpha'' H^3 \leq h^2 \leq \gamma'' H^3, \quad (43)$$

alors $C(H^3 + h^2 + (\Delta t)^2 + H(\Delta t)^2) \leq Ch^2$ (cf. (41)), et $C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^2) \leq Ch^2$ (cf. (42)) : ceci implique que l'erreur de la solution calculée sur la grille fine est d'ordre h^2 .

3.3 Validation numérique des résultats obtenus

Après avoir établi les estimations d'erreur théoriques des schémas à deux grilles d'ordre un et deux en temps, nous avons implémenté numériquement des schémas.

Pour l'ordre un en temps, on utilise le mini-élément : dans chaque triangle, on approche chaque composante de la vitesse par un polynôme de \mathbb{P}_1 plus une *bulle* et on approche la pression par un polynôme de \mathbb{P}_1 . Pour l'ordre deux en temps, on utilise les éléments finis de Taylor-Hood : on approche chaque composante de la vitesse par un polynôme de \mathbb{P}_2 et la pression par un polynôme de \mathbb{P}_1 . Le développement informatique des méthodes se fait à l'aide du logiciel *FreeFem++*¹, créé et développé par F. Hecht, O. Pironneau et K. Ohtsuka. Les essais numériques ont été faits sur une géométrie simple, le carré. La solution théorique est $(\mathbf{u}, p) = (\text{rot } \boldsymbol{\psi}, p)$ où $\boldsymbol{\psi}$ et p sont les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(t, x, y) &= te^{-t^2(x+y)} y^2 (1-y)^2 \sin^2(\pi x), \\ p(t, x, y) &= te^{-t} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y). \end{aligned}$$

Cette solution analytique vérifie la condition initiale, la condition au bord ainsi que la condition d'incompressibilité.

Pour la résolution du schéma d'ordre un en temps, il est plus intéressant d'effectuer la comparaison du temps de calcul des schémas suivants :

1. Résoudre en premier lieu le problème de Navier-Stokes linéarisé en temps, puis injecter la solution trouvée \mathbf{u}_H^{n+1} dans les équations sur la grille fine pour résoudre le problème linéarisé.
2. Résoudre le problème de Navier-Stokes sur le maillage fin avec un schéma linéarisé en temps.

C'est donc une comparaison entre un schéma linéarisé en espace et un autre linéarisé en temps. Le premier schéma que nous étudions est le suivant :

Sur la grille grossière, nous résolvons le problème :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}_H^n, \mathbf{v}_H) + \nu (\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^n \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) + \frac{1}{2} (\text{div } \mathbf{u}_H^n, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) \\ - (p_H^{n+1}, \text{div } \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H \rangle, \\ (q_H, \text{div } \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

¹<http://www.freefem.org>

puis, sur la grille fine, nous résolvons un problème linéarisé autour de la solution trouvée à l'étape précédente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\ (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}) &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Nous vérifions d'abord la stabilité et la consistance de notre schéma. Pour le calcul des estimations d'erreur, nous avons pris, par la suite, $N_g = 4, 6, 8$ et 10 , $N_f = N_g^2$, $T = 1$ et le nombre d'itérations $nbiter = T \times N_f$. Les courbes relatives aux estimations d'erreur de la vitesse et celle relative à la pression ont été étudiées : en échelle logarithmique, la pente de la courbe représentant l'erreur en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est de l'ordre de 1.1958 et celle en norme $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ est 1.327 et celle de la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ est de l'ordre de 1.8814. Les graphes 2, 3 et 4 représentent ces erreurs à h variable et $\Delta t = h = H^2$ en fonction du pas d'espace.

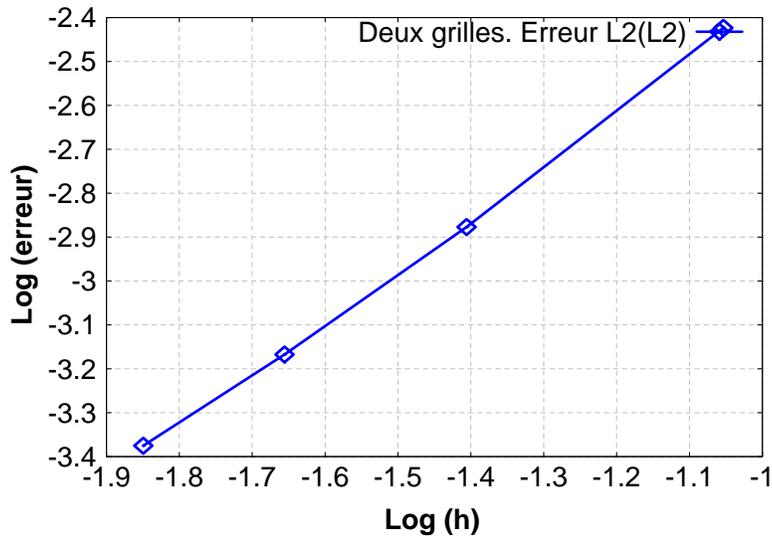
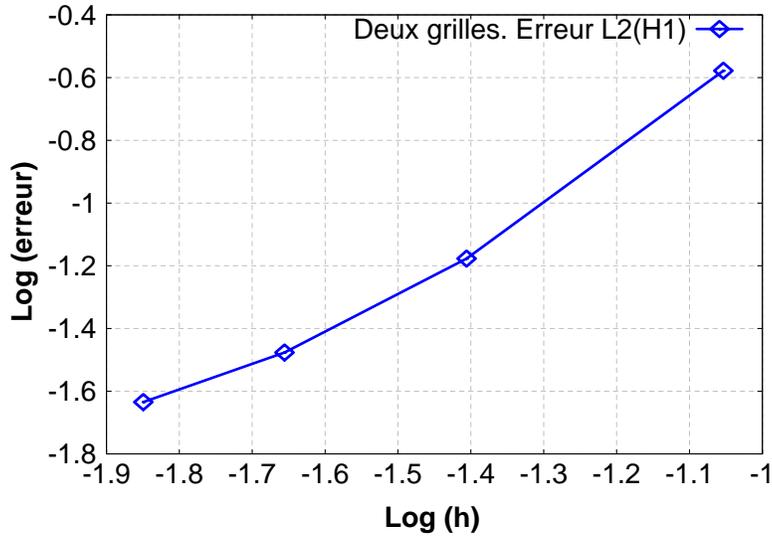
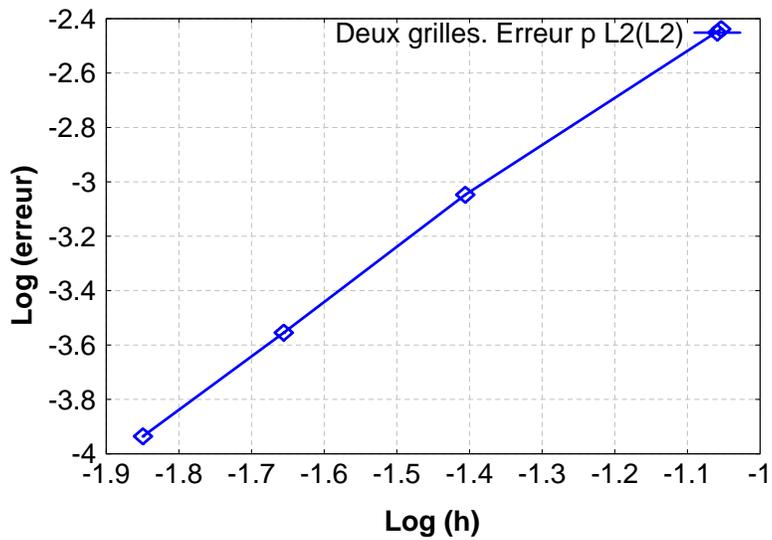


FIG. 2 – Erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.

FIG. 3 – Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.FIG. 4 – Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème à deux grilles d'ordre 1.

Pour l'amélioration de la méthode à deux grilles, on résout le même schéma sur la grille grossière et pour la résolution numérique du problème linéarisé sur la grille fine, nous pouvons appliquer aussi la méthode des caractéristiques qui fait gagner davantage en temps de calcul car la matrice sera symétrique définie positive et on ne cherche pas à assembler le terme $\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}$. Les caractéristiques sont calculées sur les \mathbf{u}_H^{n+1} trouvées à l'étape précédente, c'est-à-dire à l'étape grossière. Dans ce cas de résolution, on espère gagner encore plus de temps de calcul. Nous résolvons donc le problème (44) par une méthode linéaire ou par la méthode des carac-

téristiques et (45) par la méthode des caractéristiques. Les essais numériques qui ont été faits correspondent à des maillages grossiers contenant $N_g = 4, \dots, 9$ points par arête du domaine et donc le maillage fin en contient $N_f = N_g^2$.

Nous récupérons ainsi les graphes d'erreur à h variable et $\Delta t = h = H^2$ en fonction du pas d'espace. Les pentes des courbes obtenues pour la vitesse en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et pour la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ sont respectivement 1.1832, 1.3569 et 1.7741, ce qui confirme les résultats théoriques.

Comparaison en temps de calcul

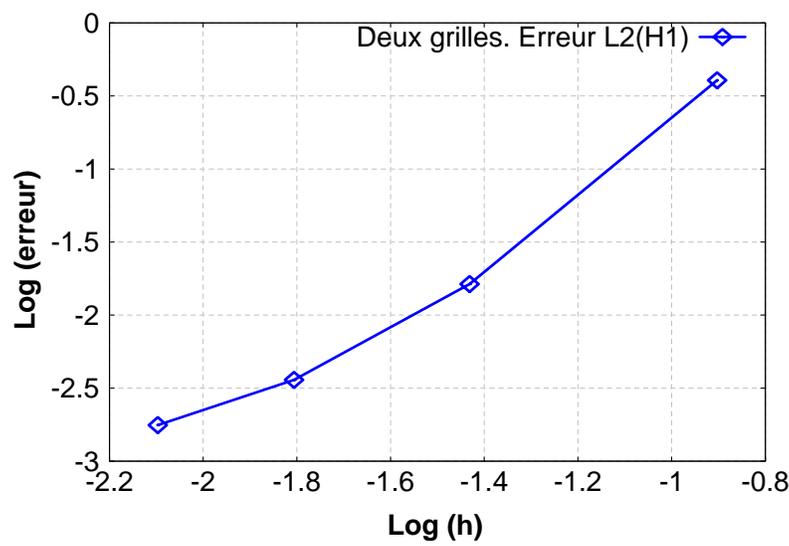
Nous pouvons ainsi faire, dans le tableau 1, la comparaison en temps de calcul entre la résolution du problème non-linéaire sur une grille fine seulement et la résolution par la technique à deux grilles. Nous collectons les temps de calcul obtenus sur la grille fine dans le premier essai numérique, et nous remarquons que le gain en temps de calcul par la méthode des caractéristiques est plus intéressant : nous marquons par une étoile le cas où la technique de résolution ne nous fait pas gagner en temps de calcul.

$N_g \times N_g$ points	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
t_{1G} (en sec.)	85.63	236.46	597.94	1475.75	3265.38
t_{2G} (1 ^{ère} résolution) (en sec.)	86.54	233.16	576.89	1403.93	3083.30
$\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	*	1.39	3.52	4.86	5.57
t_{2G} (2 ^{ème} résolution) (en sec.)	59.05	138.844	409.047	1061.16	2448.34
$\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	45	41.2	31.5	28.09	25.02

TAB. 1 – Comparaison en temps CPU du 1^{er} et 2^{ème} schémas d'ordre 1 en temps.

Dans certains exemples pratiques, l'ordre un en temps ne suffit pas. Il faut donc se baser sur des schémas d'ordre supérieur, en l'occurrence d'ordre deux dans notre cas. Dans cette dernière section, nous présentons des résultats numériques du problème à deux grilles où chaque étape est d'ordre deux en temps (27)–(30). Là aussi, nous montrons la stabilité du schéma ainsi que la consistance. Nous passons alors à la vérification des estimations d'erreur. Nous avons considéré les cas où $N_g = 4, 9, 16$ et 25 avec $N_f^2 = N_g^3$, $T = 1$ et $nbiter = T \times N_f$.

Les courbes relatives aux estimations d'erreur de la vitesse et celle relative à la pression ont été étudiées : en échelle logarithmique, la pente de la courbe représentant l'erreur en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est de l'ordre de 2.9674 et celle en norme $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ est 1.9769 et celle de la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ est de l'ordre de 2.0199. Les graphes 5, 6 et 7 représentent ces erreurs à h variable et $(\Delta t)^2 = h^2 = H^3$ en fonction du pas d'espace.

FIG. 5 – Erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.FIG. 6 – Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.

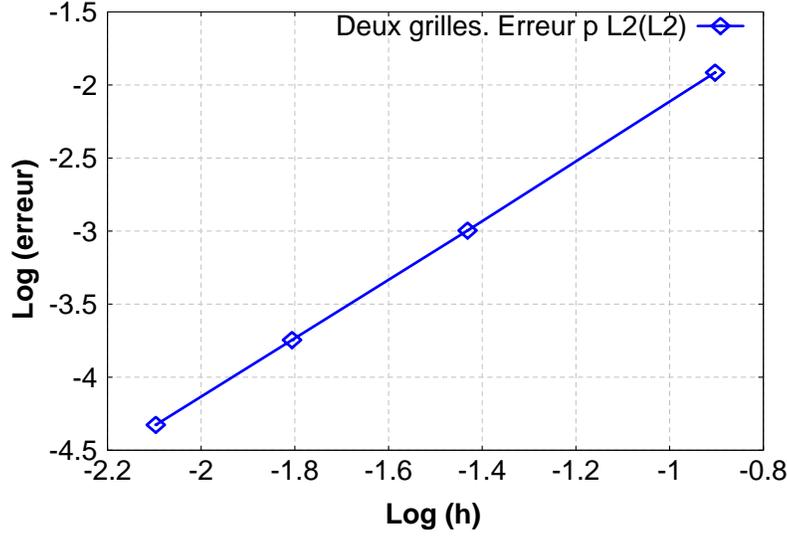


FIG. 7 – Erreur $L^2_{t,x}$ de la pression problème à deux grilles d'ordre 2.

Le but de la méthode à deux grilles est le gain en temps de calcul : en notant respectivement N_g et N_f le nombre de points sur le côté du carré du maillage grossier respectivement du maillage fin, nous avons effectué les tests suivants : $N_g = 4, 9, 16$ et 25 et avec $N_f^2 = N_g^3$ et nous avons comparé les temps de calcul. En notant t_{2G} et t_{1G} respectivement les temps de calcul de la résolution par la méthode à deux grilles et la résolution sur une seule grille, nous obtenons le tableau 2 :

$N_f \times N_f$ points	8×8	27×27	64×64	125×125
t_{1G} en secondes	7.25	304.953	13346.01	363402.083
t_{2G} en secondes	4.89	196.25	7340.34	174433
$\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	32.5	35.64	45	52

TAB. 2 – Comparaison en temps de calcul CPU du schéma d'ordre 2 en temps.

Nous remarquons donc que le coût de calcul par la technique à deux grilles de la solution du problème de Navier-Stokes est réduit par rapport à celui de la résolution du problème non-linéaire sur une seule grille. Ce gain en temps de calcul est énorme, comparé à celui du schéma d'ordre un en temps.

Nous comparons aussi les erreurs des deux méthodes et nous obtenons le même ordre de convergence. Les graphes suivants représentent respectivement l'erreur de la vitesse en normes $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ de la pression, en fonction du pas d'espace.

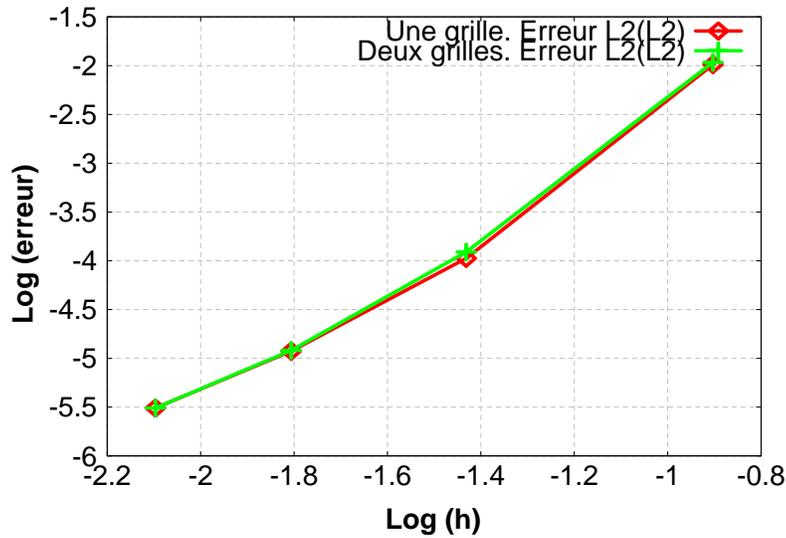


FIG. 8 – Erreurs $L^2_{t,x}$ de la vitesse des problèmes d'ordre 2 à une et à deux grilles.

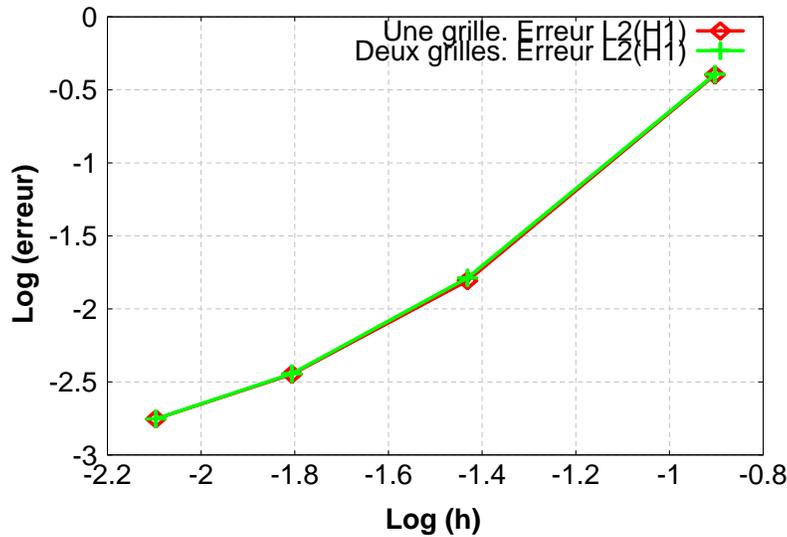


FIG. 9 – Erreurs $L^2_t(H^1_x)$ de la vitesse des problèmes d'ordre 2 à une et à deux grilles.

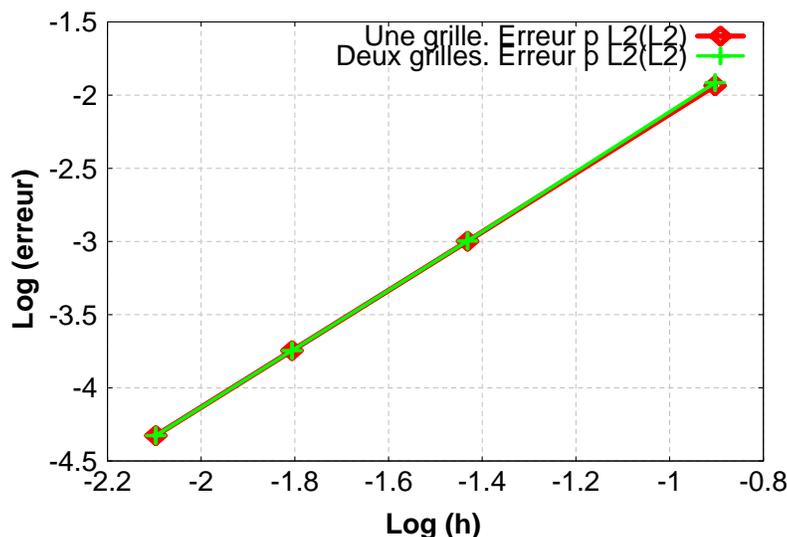


FIG. 10 – Erreurs $L^2_{t,x}$ de la pression des problèmes d'ordre 2 à une et à deux grilles.

Nous constatons donc que les erreurs sont comparables. Ainsi avec le gain en temps de calcul, notre technique de résolution à deux grilles conserve bien les ordres de convergence.

4 Plan de la thèse

Ce mémoire de thèse comporte cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous introduisons le problème non-linéaire de Navier-Stokes, établissons sa formulation variationnelle et rappelons les résultats d'existence, d'unicité et de régularité de sa solution dans un espace de dimension 2 ou 3. Nous exposons, par la suite, la méthode à deux grilles sur un schéma semi-discret en temps et présentons quelques généralités de cette technique. Nous terminons par une extension de la stratégie de résolution à deux grilles à une discrétisation totale en espace et en temps et ceci en proposant nos algorithmes de résolution d'ordre un en temps et d'ordre deux en temps.

Quelques rappels sur la méthode des éléments finis pour le problème de Stokes font l'objet du deuxième chapitre. Nous nous plaçons dans le cas de discrétisation dans un espace de fonctions continues et nous utilisons d'abord le mini-élément (élément fini d'ordre un en espace) et ensuite l'élément de Taylor-Hood (élément fini d'ordre deux en espace).

Nous étudions par la suite un schéma à deux grilles d'ordre un en temps. L'objectif du troisième chapitre est d'estimer l'erreur sur la vitesse et la pression, solution du premier problème à deux grilles d'ordre un temps. On commence par étudier une estimation de base du problème de Navier-Stokes, estimation de la solution de la première étape de l'algorithme, c'est-à-dire du schéma non-linéaire résolu sur la grille grossière. Nous introduisons ensuite le problème de Stokes

sur lequel est basé l'argument de dualité que nous trouvons. Nous estimons aussi l'erreur de la solution du problème de Stokes. Le but étant l'estimation d'erreur de la solution du problème de Navier-Stokes et non de la solution du problème de Stokes, on est amené à décomposer cette première erreur en deux contributions, l'une linéaire et l'autre non-linéaire. Un résultat de superconvergence est démontré pour l'erreur de cette dernière. Des estimations d'erreur de la pression sur la grille grossière achèvent l'étude de la première étape de la méthode à deux grilles. Nous pouvons par la suite établir l'erreur sur la vitesse de la deuxième étape de notre technique ainsi que l'erreur sur la pression.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions un schéma à deux grilles d'ordre deux en temps. Une estimation de base de la solution du problème de Navier-Stokes, un argument de dualité et un résultat de superconvergence font, entre autres, une partie des résultats obtenus dans ce chapitre. Les estimations obtenues sont similaires à celles du troisième chapitre mais plus fortes, vu qu'on améliore la régularité de notre solution. On gagne ainsi en ordre de convergence en temps.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous présentons les résultats numériques des schémas d'ordre un et deux en temps. Nous montrons aussi un gain en temps de calcul et prouvons que la résolution du problème non-linéaire par la méthode à deux grilles réduit la complexité du problème et rapporte un gain en coût de calcul.

Présentation du problème

Chapitre 1

Position du problème

Sommaire

1.1	Introduction	28
1.2	Équations de Navier-Stokes	28
1.3	Formulation variationnelle, existence, unicité et régularité . . .	30
1.4	Méthode à deux grilles	32
1.4.1	Schéma semi-discret en temps	33
1.4.2	Généralités sur la méthode à deux grilles	34
1.4.3	Application à un schéma totalement discret	37
1.4.3.1	Schéma d'ordre un en temps	37
1.4.3.2	Schéma d'ordre deux en temps	38
1.5	Quelques notations	39

1.1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes gouvernent les écoulements incompressibles newtoniens comme l'eau, l'huile, l'air, etc. sous des conditions générales.

Elles apparaissent dans l'étude de plusieurs phénomènes importants, par exemple, dans le domaine des sciences aéronautiques, météorologiques, thermo-hydrauliques et dans l'industrie du pétrole.

Du point de vue mécanique, ces équations sont essentiellement les équations les plus simples décrivant l'écoulement d'un fluide. Mais du point de vue mathématique, elles sont difficiles, à cause de leur non-linéarité et de leur contrainte d'incompressibilité.

1.2 Équations de Navier-Stokes

Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, $\vec{\mathbf{n}}$ la normale unité extérieure et un intervalle de temps $[0, T]$, $T > 0$.

Le mouvement d'un fluide visqueux et incompressible dans Ω est décrit par les équations de Navier-Stokes instationnaires :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (1.1)$$

avec la condition d'incompressibilité :

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (1.2)$$

la condition au bord, du type Dirichlet homogène :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (1.3)$$

et la condition initiale :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.4)$$

Nous adoptons les notations habituelles : $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$, $\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial^2 x_i}$ et $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

Les inconnues \mathbf{u} et p désignent respectivement le champ de vitesse et la pression du fluide. Toutes les quantités sont évaluées au point (\mathbf{x}, t) , où $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ désigne la position et $t \in [0, T]$ représente le temps. On suppose que la densité du fluide est constante ($\rho = 1$) ; \mathbf{f} représente le champ de forces volumiques appliquées au fluide (le champ de gravité par exemple) et ν est la viscosité cinématique.

Le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est le terme de transport (ou de convection), $\nu \Delta \mathbf{u}$ est celui de diffusion dans les équations de Navier-Stokes, ce dernier étant dû à l'existence des interactions au niveau moléculaire entre les particules et se traduisant par une dissipation d'énergie.

Remarque 1.2.1 *L'équation (1.1) est une adaptation de la loi de Newton $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ au contexte de l'hydrodynamique, elle représente la conservation des moments. L'équation (1.2) est celle de continuité et assure la conservation de la masse (voir [22]).*

Pour avoir une solution, on complète les équations (1.1) et (1.2) par des conditions aux limites (1.3) et une condition initiale (1.4).

Remarque 1.2.2 *Les termes sources, la condition initiale et les données au bord ne peuvent pas être totalement indépendants. Toutes ces données doivent être compatibles entre elles. Par exemple, la condition initiale doit être à divergence nulle pour vérifier la condition d'incompressibilité.*

Remarque 1.2.3 *Dans ce cadre, la pression n'a plus sa signification thermodynamique habituelle. Aucune condition initiale n'est imposée sur la pression. Son rôle est comparable à un multiplicateur de Lagrange qui assure à tout instant que la contrainte d'incompressibilité est satisfaite.*

Notons aussi que la réponse du fluide aux forces extérieures dépend de deux phénomènes de nature différente :

- l'effet d'entraînement du fluide par son propre mouvement (l'effet d'inertie),
- la friction entre les éléments de fluide voisins qui se déplacent à des vitesses différentes.

L'effet du premier phénomène aura tendance à dominer l'évolution du fluide lorsqu'il se déplace à grande vitesse et la friction est d'autant plus importante que la viscosité du fluide est grande.

L'importance relative de ces deux effets détermine le régime dans lequel se trouve le fluide : elle est caractérisée par un paramètre de contrôle appelé le nombre de Reynolds, qui, dans le cas des équations de Navier-Stokes adimensionnées, est proportionnel à l'inverse de la viscosité :

$$Re \approx 1/\nu.$$

◇ Si Re est grand, les effets d'inertie dominant, c'est le cas le plus fréquent. Le fluide se retrouve ainsi dans un état où il s'écoule rapidement et la viscosité n'est pas suffisamment importante pour éliminer ou même diminuer les variations spatiales de la vitesse. On dit dans ce cas que le fluide est dans un régime turbulent.

◇ Au contraire, si Re est petit, alors les effets de viscosité dominant les effets d'inertie et le fluide tend rapidement vers un état sans grande inhomogénéité spatiale, et donc très régulier. Cette situation correspond au régime laminaire.

1.3 Formulation variationnelle, existence, unicité et régularité

Pour résoudre le problème (1.1)-(1.4), nous introduisons les espaces suivants :

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \},$$

$$V = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \},$$

$$H = \{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \},$$

où $H(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}$.

On sait (cf. Lions [44], Temam [64], Girault et Raviart [31]) que \mathcal{V} est dense dans V pour la norme de $H^1(\Omega)^d$ et \mathcal{V} est dense dans H pour la norme de $L^2(\Omega)^d$. En ce qui concerne les données, nous supposons que :

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^d), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{u}_0 \in H. \quad (1.6)$$

Le théorème suivant donne un résultat d'existence.

Théorème 1.3.1 (existence) *Soit la dimension $d = 2$ ou 3 et soit $T < \infty$. Pour \mathbf{f} donné dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^d)$, \mathbf{u}_0 donné dans H et $\nu > 0$ donné, il existe au moins une solution de (1.1)-(1.4) $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ et $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L_0^2(\Omega))$, dual de $W_0^{1, 1}(0, T; L_0^2(\Omega))$. Si $d = 2$, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, T]; H)$ et si $d = 3$, \mathbf{u} est continue de $[0, T]$ dans H muni de la topologie faible de $L^2(\Omega)^3$.*

De plus, $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ appartient à $L^2(0, T; V')$ si $d = 2$ ou $L^{4/3}(0, T; V')$ si $d = 3$.

✓ Preuve. La démonstration est classique et nous ne la donnons pas explicitement. En voici quelques idées : construction d'une solution discrète $\mathbf{u}_m(t)$ par une méthode de Galerkin, estimations, passage à la limite, voir par exemple Lions [44], Temam [64] ou Girault et Raviart [31]. ■

Au cours de la démonstration, on montre que la vitesse limite $\mathbf{u}(t)$ est solution de la formulation variationnelle suivante, dans $L^2(0, T)$ si $d = 2$ ou $L^{4/3}(0, T)$ si $d = 3$:

$$\forall \mathbf{v} \in V, \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle. \quad (1.7)$$

En posant $X = H_0^1(\Omega)^2$ et en nommant M l'espace des pressions à moyenne nulle, c'est-à-dire :

$$M = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

la formulation (1.7) est équivalente à chercher \mathbf{u} satisfaisant :

$$\forall \mathbf{v} \in X, \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - (p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \text{p.p. dans }]0, T], \quad (1.8)$$

$$\forall q \in M, (q, \operatorname{div} \mathbf{u}(t)) = 0 \quad \text{p.p. dans }]0, T], \quad (1.9)$$

et $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Le théorème suivant donne un résultat d'unicité en dimension $d = 2$:

Théorème 1.3.2 (unicité) *Si $d = 2$, le problème (1.7) a une unique solution \mathbf{u} telle que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.*

La démonstration est classique (cf. par exemple, Girault et Raviart [31]). Elle est basée sur l'estimation suivante, valable en dimension $d = 2$:

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}. \quad (1.10)$$

Remarque 1.3.3 *En dimension $d = 3$, le théorème 1.3.2 est une question ouverte.*

Comme par la suite nous nous intéresserons à la discrétisation du problème de Navier-Stokes en dimension $d = 2$, à partir de maintenant, nous nous restreignons à la dimension 2.

Montrons que si les données sont "plus régulières", et toujours dans le cas de la dimension 2, la solution est plus régulière.

Théorème 1.3.4 *Nous supposons que le domaine Ω est un polygone, \mathbf{f} et \mathbf{u}_0 sont donnés avec*

$$\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2), \quad \mathbf{f}(0) \in L^2(\Omega)^2, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \Delta \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^2. \quad (1.12)$$

Alors, la solution \mathbf{u} du problème (1.7) vérifie

$$\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad (1.13)$$

et

$$\mathbf{u} \in H^1(0, T; V). \quad (1.14)$$

✓ Preuve. Esquissons la démonstration. Nous avons, d'une part :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \leq \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

d'où,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds. \quad (1.15)$$

D'autre part, formellement (mais tout ce qui suit peut être justifié par la méthode de Galerkin) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nu \Delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \nabla \mathbf{u} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}.$$

Donc en utilisant (1.10),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \left\| \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\rangle \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \nu \left\| \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\nu \left\| \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\nu} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

On utilise (1.15), on applique le lemme de Gronwall, et on obtient :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^s \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \exp \left(\frac{2}{\nu^2} (\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^s \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2) \right).$$

Au temps $t = 0$, on a grâce à (1.11) :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu(\Delta \mathbf{u}(0), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0)) + (\mathbf{u}(0) \cdot \nabla \mathbf{u}(0), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0)) = (\mathbf{f}(0), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0)).$$

d'où,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\nu \|\Delta \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}(0)\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Comme $\Delta \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^2$ et $\mathbf{u}_0|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, si Ω est un polygone, on a $\mathbf{u}_0 \in W^{2,4/3}(\Omega)^2$ (cf. Grisvard [33]). Donc $\nabla \mathbf{u}_0 \in L^4(\Omega)^2$ et $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^2$. ■

Le théorème suivant améliore ces résultats lorsque \mathbf{f} est plus régulière.

Théorème 1.3.5 *On fait les hypothèses du théorème 1.3.4.*

1. Si $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega)^2)$, alors

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2), \quad \mathbf{u} \in L^2(0, T; W^{2,4/3}(\Omega)^2) \quad \text{et} \quad p \in L^2(0, T; W^{1,4/3}(\Omega)).$$

Si en plus Ω est convexe et $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$, alors

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2) \quad \text{et} \quad p \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

2. De même, si $\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; L^{4/3}(\Omega)^2)$ alors

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; W^{2,4/3}(\Omega)^2) \quad \text{et} \quad p \in L^\infty(0, T; W^{1,4/3}(\Omega)).$$

Si de plus Ω est convexe et $\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$, alors

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2) \quad \text{et} \quad p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)).$$

✓ Preuve. Donnons les grandes lignes de la démonstration : Nous avons

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

Comme $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$, alors $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^{4/3}(\Omega)^2)$ et donc $\mathbf{u} \in L^2(0, T; W^{2,4/3}(\Omega)^2)$ et $p \in L^2(0, T; W^{1,4/3}(\Omega))$ (cf. Grisvard [33]). Ceci entraîne en particulier que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; W^{1,4}(\Omega)^2)$ et comme $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^2)$ alors $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$.

Si Ω est plus régulier et si \mathbf{f} est mieux que $L^{4/3}(\Omega)^2$, alors on gagne de la régularité en espace et on peut aller jusqu'à $H^2(\Omega)^2$ si Ω est convexe.

On raisonne de même pour le deuxième point du théorème. ■

1.4 Méthode à deux grilles

On suppose désormais que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , polygonal et connexe. De plus, pour simplifier l'analyse, on suppose que la vitesse initiale est nulle :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}.$$

Il est commode d'exposer d'abord la méthode à deux grilles sur un schéma semi-discret en temps et ensuite de l'étendre à une discrétisation totale en espace et en temps.

1.4.1 Schéma semi-discret en temps

Nous considérons ici un schéma semi-discret en temps, c'est-à-dire seulement discrétisé en espace. Soit $\eta > 0$ un paramètre de discrétisation en espace, \mathcal{T}_η une triangulation de $\overline{\Omega}$ et X_η et M_η des espaces d'éléments finis approchant respectivement $H_0^1(\Omega)^2$ et $L_0^2(\Omega)$. On définit une approximation V_η de V par :

$$V_\eta = \left\{ \mathbf{v}_\eta \in X_\eta; \forall q_\eta \in M_\eta, \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) q_\eta d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Il est bien connu qu'en raison de la contrainte d'incompressibilité, X_η et M_η ne peuvent être quelconques, même si chacun a une bonne précision. En effet, ils doivent vérifier une condition de compatibilité convenable, la condition "inf-sup" de Babuška-Brezzi (cf. [11], [16]) :

$$\inf_{q_\eta \in M_\eta} \sup_{\mathbf{v}_\eta \in X_\eta} \frac{\int_\Omega q_\eta (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) d\mathbf{x}}{\|q_\eta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}_\eta\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta^*, \quad (1.16)$$

où $\beta^* > 0$ est indépendante de η .

On suppose donc dans cette partie, que X_η et M_η vérifient la condition (1.16). Par ailleurs, en général, les fonctions de V_η ne sont pas à divergence nulle. Ceci rend le terme non linéaire plus difficile à estimer car on perd la propriété d'antisymétrie :

$$\forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0. \quad (1.17)$$

D'un point de vue numérique, l'expérience montre que la perte d'antisymétrie ne nuit pas à la précision (cf. Gunzburger [34]). De plus, si on n'impose pas explicitement l'antisymétrie, le schéma est souvent moins coûteux. Cependant, pour faire l'analyse numérique, il est beaucoup plus facile d'antisymétriser le terme de convection en lui ajoutant le terme consistant (cf. Temam [64]) :

$$\frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u}. \quad (1.18)$$

En vue des tests numériques, nous avons donc fait deux études : l'une avec le terme (1.18) et l'autre sans le terme (1.18). Néanmoins, dans un premier temps, nous présentons les schémas sans le terme (1.18).

La semi-discrétisation de (1.7) revient à : chercher $\mathbf{u}_\eta \in \mathcal{C}^0([0, T]; V_\eta)$ satisfaisant :

$$\forall \mathbf{v}_\eta \in V_\eta, (\mathbf{u}'_\eta(t), \mathbf{v}_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{u}_\eta(t), \nabla \mathbf{v}_\eta) + (\mathbf{u}_\eta(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}_\eta) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_\eta \rangle \quad \text{dans }]0, T], \quad (1.19)$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{0}. \quad (1.20)$$

Grâce à la condition (1.16), on retrouve une pression discrète à partir de (1.19) et (1.19) équivaut à : chercher $\mathbf{u}_\eta \in \mathcal{C}^0([0, T]; X_\eta)$, $p_\eta \in \mathcal{C}^0([0, T]; M_\eta)$ tels que :

$$\forall \mathbf{v}_\eta \in X_\eta,$$

$$(\mathbf{u}'_\eta(t), \mathbf{v}_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{u}_\eta(t), \nabla \mathbf{v}_\eta) + (\mathbf{u}_\eta(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}_\eta) - (p_\eta(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_\eta \rangle \quad \text{dans }]0, T], \quad (1.21)$$

$\forall q_\eta \in M_\eta,$

$$(q_\eta, \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta(t)) = 0 \quad \text{dans }]0, T], \quad (1.22)$$

et

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{0}. \quad (1.23)$$

1.4.2 Généralités sur la méthode à deux grilles

On veut trouver une approximation de la solution u d'une équation aux dérivées partielles (appelée EDP) non-linéaire au moyen d'une méthode à deux grilles. L'idée générale est la suivante :

1. Dans une première étape, on trouve une approximation u_H calculée sur une grille grossière de pas H .
2. Dans une deuxième étape, on discrétise l'EDP (Équations aux Dérivées Partielles) sur une grille fine de pas h , mais on la linéarise "autour" de la solution u_H calculée à la première étape. On note u_h^{lin} cette solution.

Sous des hypothèses relativement générales, on peut montrer que si les pas d'espace grossier et fin H et h sont choisis de façon adéquate, alors l'erreur $\|u - u_h^{lin}\|$ est du même ordre que $\|u - u_h\|$, où u_h n'est autre que l'approximation de l'EDP directement résolue sur la grille fine. Plus précisément, on obtient ce résultat lorsque la contribution de u_H à l'erreur, dans les termes non-linéaires, est mesurée dans une norme suffisamment moins fine que celle qui correspond à l'opérateur de l'EDP, pour que cette contribution soit *d'ordre supérieur* à celle de l'opérateur. Ceci se produit par exemple si la norme qui correspond à l'opérateur est la norme H^1 et la contribution de u_H à l'erreur est mesurée en norme L^2 . En général cet ordre d'erreur supérieur est obtenu par un *argument de dualité*.

Le calcul de u_H et u_h^{lin} est moins coûteux que le calcul direct de la solution u_h . Donc le but de la méthode à deux grilles est de diminuer le temps de calcul de la solution de notre problème non-linéaire.

L'idée de cette stratégie à deux grilles n'est pas nouvelle et date d'une quinzaine d'années environ. Elle a été largement appliquée à la résolution d'équations elliptiques semi-linéaires stationnaires, comme par exemple dans les travaux de Xu [69], [70] et Niemistö [54]. Citons les travaux de Layton [40], Layton et Lenferink [38], [39] et Girault et Lions [30] pour le problème de Navier-Stokes stationnaire. En ce qui concerne le problème de Navier-Stokes instationnaire, à notre connaissance, le premier travail est celui de Girault et Lions [29] pour le schéma semi-discret (1.21)–(1.23). Voici le détail du schéma :

Étape 1 Problème non-linéaire sur grille grossière : trouver $(\mathbf{u}_H, p_H) \in X_H \times M_H$, pour tout $t \in [0, T]$, solution de :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_H \in X_H, \quad (\mathbf{u}'_H(t), \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla \mathbf{u}_H(t), \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_H(t), \mathbf{v}_H) \\ - (p_H(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_H \rangle, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\forall q_H \in M_H, (q_H, \operatorname{div} \mathbf{u}_H(t)) = 0, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{u}_H(\cdot, 0) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \quad (1.26)$$

Étape 2 Problème linéarisé sur grille fine : trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$, pour tout $t \in [0, T]$, solution de :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, (\mathbf{u}'_h(t), \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_H(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h) - (p_h(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\ = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h \rangle, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\forall q_h \in M_h, (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h(t)) = 0, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{u}_h(\cdot, 0) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \quad (1.29)$$

Cet algorithme est à rapprocher de la méthode de Galerkin non-linéaire² développée par Foias et al. [26] et dont on trouve une description dans les travaux de Marion et Temam [49], [50], [51]. Une différence essentielle entre NLG et la méthode à deux grilles est que, dans cette dernière on calcule d'abord \mathbf{u}_H et ensuite \mathbf{u}_h , i.e. à chaque étape les deux calculs sont découplés, tandis que ce calcul n'est pas découplé dans NLG.

Pour comparer, voyons la méthode NLG décrite par Ait Ou Amni et Marion [8] pour le problème de Navier-Stokes en dimension deux, avec une condition initiale non-homogène $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, basée sur un espace X_H de grille grossière et un espace X_h de grille fine. Les auteurs introduisent X_h^H , complémentaire de l'orthogonal pour la norme L^2 de X_H dans X_h :

$$X_h = X_H \oplus X_h^H,$$

ils définissent la forme bilinéaire :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}),$$

et la forme trilinéaire anti-symétrique :

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v})).$$

Leur schéma est le suivant :

NLG - Étape préliminaire. Résoudre (1.1)– (1.4) jusqu'à un instant t_0 donné par une méthode de Galerkin classique semi-discrète avec les espaces (X_h, M_h) ; soit (\mathbf{u}_h, p_h) la solution.

NLG - Étapes Une et Deux. Pour $t \geq t_0$, trouver $\mathbf{v}_H \in X_H, \mathbf{w}_h \in X_h^H$ et $p_h \in M_h$ solution du système couplé :

$$\forall \varphi \in X_H, (\mathbf{v}'_H, \varphi) + a(\mathbf{v}_H + \mathbf{w}_h, \varphi) + c(\mathbf{v}_H + \mathbf{w}_h; \mathbf{v}_H, \varphi) + c(\mathbf{v}_H; \mathbf{w}_h, \varphi) - (p_h, \operatorname{div} \varphi) = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle, \quad (1.30)$$

²Nonlinear Galerkin Method (NLG)

$$\forall \chi \in X_h^H, a(\mathbf{v}_H + \mathbf{w}_h, \chi) + c(\mathbf{v}_H; \mathbf{v}_H, \chi) - (p_h, \operatorname{div} \chi) = (\mathbf{f}, \chi), \quad (1.31)$$

$$\forall q \in M_h, (\operatorname{div}(\mathbf{v}_H + \mathbf{w}_h), q) = 0, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{v}_H(t_0) = P_H(\mathbf{u}_h(t_0)), \quad (1.33)$$

où P_H est la projection orthogonale pour la norme L^2 sur X_H . Notons que (1.30) et (1.31) sont couplées et c'est pour cette raison que nous ne dissociions pas les deux étapes.

Pour $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^2 \cap V$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ indépendant de t , et (X_h, M_h) couple stable d'espaces d'éléments finis sur une triangulation uniformément régulière, Ait Ou Amni et Marion ont prouvé que :

$$\forall t \geq t_0, \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq k(t)(H^2 + h),$$

$$\forall t > t_0, \|p(t) - p_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \tau(t)^{-1/2} k(t)(H^2 + h),$$

où $\tau(t) = t - t_0$ et $k(t)$ est une fonction continue de t pour $t > 0$ (qui dépend de \mathbf{u}_0). Ainsi, en dimension deux, l'erreur de ce schéma est de l'ordre de h , avec $h = H^2$, résultat similaire au théorème 24.1, p. 648, de [49].

Il est aussi intéressant de comparer avec la méthode de post-traitement³ de Garcia-Archilla et Titi [28] pour les équations elliptiques semi-linéaires en dimension quelconque. En terme d'opérateurs, soient A l'opérateur linéaire elliptique de l'équation et F l'opérateur non-linéaire :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} + \nu A \mathbf{u} + F(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

L'opérateur F est soit de la forme $F(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u})$ pour une fonction g à valeurs réelles, soit de la forme

$$F(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}) + \mathbf{b}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (1.34)$$

où \mathbf{b} est une fonction à valeurs vectorielles. Soit S_H un espace de fonctions continues d'éléments finis sur une grille grossière. Le schéma est alors :

PP - Première Étape. Trouver \mathbf{u}_H à valeurs dans S_H , pour tout $t \in [0, T]$ solution de l'équation elliptique non-linéaire

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_H + \nu A_H \mathbf{u}_H + P_H(F(\mathbf{u}_H)) = 0, \quad \mathbf{u}_H(0) = R_H(\mathbf{u}_0), \quad (1.35)$$

où P_H et R_H sont respectivement les opérateurs de projection orthogonale de L^2 et H_0^1 sur S_H . Bien que nous utilisons la même notation de P_H que dans la méthode NLG, l'opérateur P_H n'est pas le même ici car les fonctions de S_H sont à valeurs vectorielles.

³Post-Processing Method (PP)

PP - Deuxième Étape. Trouver \tilde{u} solution de l'équation elliptique linéaire :

$$\nu A\tilde{u} = -\frac{d}{dt}\mathbf{u}_H(T) - F(\mathbf{u}_H(T)), \quad (1.36)$$

où \tilde{u} est approchée sur une grille fine appropriée. Il y a des similitudes entre (1.30)–(1.31) et (1.35)–(1.36), mais le grand avantage de l'approche PP est que les équations (1.35) et (1.36) sont découplées.

Garcia-Archilla et Titi ont ainsi montré que, quand F est de la forme (1.34), pour tout H suffisamment petit, si les fonctions de S_H sont des polynômes de degré $r \geq 2$ sur une triangulation uniformément régulière, l'approximation \tilde{u} obtenue par PP satisfait l'estimation d'erreur

$$\|u(T) - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq CH^{r+1}|\log(H)|.$$

Quand \tilde{u} est approchée par des polynômes de degré r sur un espace de grille fine, $\tilde{u}_h \in S_h$, l'erreur $\|u(T) - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$ est de l'ordre de h^r ce qui donne $h^r = H^{r+1}|\log(H)|$. Ainsi, si $r = 2$, les pas d'espace h et H sont liés par la relation

$$h = H^{3/2}|\log(H)|^{1/2}.$$

Si on appliquait ce schéma aux équations de Navier-Stokes, la première étape correspondrait à une formulation sans la pression i.e. posée dans V_H et la deuxième serait de trouver $\tilde{\mathbf{u}}_h(T) \in V_h$ telle que

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h, \nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h(T), \nabla \mathbf{v}_h) = -(\mathbf{u}_H(T) \cdot \nabla \mathbf{u}_H(T), \mathbf{v}_h) - (\mathbf{u}'_H(T), \mathbf{v}_h) + (\mathbf{f}(T), \mathbf{v}_h). \quad (1.37)$$

1.4.3 Application à un schéma totalement discret

Dans cette section, nous introduisons les schémas à deux grilles pour l'approximation de (1.21)–(1.23) que nous allons étudier dans les chapitres suivants.

À notre connaissance, les schémas à deux grilles décrits ci-dessous n'ont pas été appliqués auparavant au problème de Navier-Stokes totalement discret. Nous allons les étudier en détail dans les chapitres suivants. L'idée de la méthode est semblable à celle appliquée au problème semi-discret. Dans la première étape, le problème non-linéaire est discrétisé en espace et en temps sur une grille grossière de pas d'espace H avec un pas de temps Δt . Puis, dans la deuxième étape le problème est discrétisé en espace sur une grille fine de pas d'espace h , avec le même pas de temps, autour de la vitesse \mathbf{u}_H calculée à l'étape précédente.

Supposons que \mathbf{u}_h^n a été calculée, nous posons $\mathbf{u}_H^n = R(\mathbf{u}_h^n)$, où R est une restriction adéquate de X_h dans X_H et nous proposons ci-après les algorithmes à deux grilles.

1.4.3.1 Schéma d'ordre un en temps

Le premier schéma, étudié dans le chapitre 3, est d'ordre un en temps. C'est un exemple simple dans lequel les deux étapes utilisent le même pas de temps et sont toutes les deux d'ordre un en temps. La dérivée $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est approchée par le quotient différentiel d'ordre Δt :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^{n+1}) = \frac{\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n)}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (1.38)$$

Ses équations, pour chaque $n \geq 0$ sont :

Étape 1 Problème non-linéaire sur grille grossière : trouver $(\mathbf{u}_H^{n+1}, p_H^{n+1}) \in X_H \times M_H$, solution de :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_H \in X_H, \quad & \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}_H^n, \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H \rangle, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\forall q_H \in M_H, \quad (q_H, \operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0. \quad (1.40)$$

Étape 2 Problème linéarisé sur grille fine : trouver $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h \times M_h$, solution de :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad & \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\ & = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0. \quad (1.42)$$

Pour $n = 0$, nous démarrons la première étape avec $\mathbf{u}_H = \mathbf{0}$, et la deuxième avec $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$. Pour passer de n à $n+1$, nous prenons pour \mathbf{u}_H^n dans (1.39) une restriction de \mathbf{u}_h^n sur la grille grossière, $R(\mathbf{u}_h^n)$, et pour calculer p_h^{n+1} , nous démarrons l'algorithme de découplage par une extension de p_H^{n+1} à la grille fine. Enfin \mathbf{f}^{n+1} utilisée dans (1.39) et (1.41) est une approximation adéquate de \mathbf{f} au temps t^{n+1} .

Remarque 1.4.1 *Notons que le terme de convection dans (1.39) est stabilisé pour qu'il soit anti-symétrique afin de simplifier l'analyse de l'erreur. En pratique, il n'est pas souvent stabilisé. C'est le cas des essais numériques présentés dans le dernier chapitre. Nous renvoyons à [29] pour l'analyse numérique du schéma semi-discret non stabilisé. Nous pouvons aussi linéariser la première étape en prenant le terme non-linéaire au temps n (au lieu de $n+1$). Ceci demande une condition CFL, mais comme $\Delta t \ll H$, cette condition est généralement vérifiée.*

1.4.3.2 Schéma d'ordre deux en temps

Dans certains exemples pratiques, l'ordre un en temps ne suffit pas. Nous présentons donc (dans le chapitre 4) un schéma où chaque étape est d'ordre deux. La dérivée $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est approchée par le quotient différentiel d'ordre $O((\Delta t)^2)$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^{n+1}) = \frac{3\mathbf{u}(t^{n+1}) - 4\mathbf{u}(t^n) + \mathbf{u}(t^{n-1})}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2). \quad (1.43)$$

Ses équations, pour chaque $n \geq 1$, sont :

Étape 1 Problème non-linéaire sur grille grossière : trouver $(\mathbf{u}_H^{n+1}, p_H^{n+1}) \in X_H \times M_H$, solution de :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_H \in X_H, \quad & \frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_H^{n+1} - 4\mathbf{u}_H^n + \mathbf{u}_H^{n-1}, \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H \rangle, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\forall q_H \in M_H, \quad (q_H, \operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0. \quad (1.45)$$

Nous complétons ces équations par les conditions initiales suivantes : $\mathbf{u}_H^0 = \mathbf{0}$ et \mathbf{u}_H^1 qui est calculé par une itération du schéma d'Euler, qui correspond à la résolution de (1.39) pour $n = 0$.

Sur la grille fine, on utilise aussi un problème d'ordre deux en temps :

Étape 2 Problème linéarisé sur grille fine : trouver $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h \times M_h$, solution de :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad & \frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\ & - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle, \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0. \quad (1.47)$$

De même, nous complétons ces équations par les conditions initiales $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$ et \mathbf{u}_h^1 qui est calculé par une itération du schéma d'Euler, qui correspond à la résolution de (1.41) pour $n = 0$. Concernant l'algorithme de résolution de (1.44)–(1.47), il est exactement le même que celui de (1.39)–(1.42) énoncé précédemment.

1.5 Quelques notations

Pour fixer les idées, nous donnons ici les notations en dimension 2. Comme d'habitude, il est commode de considérer des fonctions définies sur un intervalle de temps $]a, b[$ à valeurs dans un espace fonctionnel X . Plus précisément, soit $\|\cdot\|_X$ la norme associée à X ; alors pour tout r , $1 \leq r \leq \infty$, nous définissons :

$$L^r(a, b; X) = \left\{ f \text{ mesurable dans }]a, b[; \int_a^b \|f(t)\|_X^r dt < \infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^r(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^r dt \right)^{1/r},$$

avec les modifications habituelles si $r = \infty$. C'est un espace de Banach si X est un espace de Banach. Ici, X est généralement un espace de Sobolev, tel que :

$$W^{m,r}(\Omega) = \{v \in L^r(\Omega); \partial^k v \in L^r(\Omega), \forall |k| \leq m\},$$

où $k = (k_1, k_2)$ est un couple d'entiers non-négatifs, $|k| = k_1 + k_2$ et

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}.$$

Cet espace est muni de la semi-norme :

$$|v|_{W^{m,r}(\Omega)} = \left[\sum_{|k|=m} \int_{\Omega} |\partial^k v|^r d\mathbf{x} \right]^{1/r},$$

et est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{W^{m,r}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq |k| \leq m} |v|_{W^{k,r}(\Omega)}^r d\mathbf{x} \right]^{1/r}.$$

Quand $r = 2$, cet espace est l'espace de Hilbert $H^m(\Omega)$. En particulier, le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ est indiqué par (\cdot, \cdot) . De même, $L^2(a, b; H^m(\Omega))$ est un espace de Hilbert et en particulier $L^2(a, b; L^2(\Omega))$ coïncide avec $L^2(\Omega \times]a, b[)$. Nous pouvons étendre la définition de ces espaces aux vecteurs, avec la même notation, mais avec les modifications suivantes pour les normes dans les espaces non hilbertiens. Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$; alors nous posons :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^r(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|^r d\mathbf{x} \right]^{1/r},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme vectorielle euclidienne. De même pour un tenseur T ,

$$\|T\|_{L^r(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \|T(\mathbf{x})\|^r d\mathbf{x} \right]^{1/r},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de Frobenius.

Pour imposer la valeur nulle au bord, nous définissons :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

et son espace dual $H^{-1}(\Omega)$. Rappelons les injections de Sobolev : en dimension deux, pour tout nombre réel $1 \leq r < \infty$, il existe une constante S_r telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^r(\Omega)} \leq S_r |v|_{H^1(\Omega)}, \quad (1.48)$$

où,

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.49)$$

Quand $r = 2$, (1.48) se réduit à l'inégalité de Poincaré et S_2 est la constante de Poincaré. En raison de l'inégalité de Poincaré, la semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$. Dans toute la suite, nous munissons $H_0^1(\Omega)$ de cette norme et nous l'utilisons pour définir la norme duale :

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{H^1(\Omega)}},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Dans le calcul, on utilisera souvent l'analogie discret suivant du lemme de Gronwall :

Lemme 1.5.1 (de Gronwall, discret) Soient $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ trois suites de nombres positifs. Supposons que $(c_n)_{n \geq 0}$ soit monotone croissante,

$$a_0 + b_0 \leq c_0,$$

et qu'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1, a_n + b_n \leq c_n + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} a_m. \quad (1.50)$$

Alors ces suites vérifient la majoration

$$\forall n \geq 0, a_n + b_n \leq c_n e^{n\lambda}.$$

✓ Preuve. On montre par récurrence que

$$\forall n \geq 0, a_n + b_n \leq c_n (1 + \lambda)^n, \quad (1.51)$$

et le lemme découle de l'estimation $(1 + \lambda)^n \leq e^{n\lambda}$. ■

Ce lemme est une version discrète du lemme de Gronwall :

Lemme 1.5.2 (de Gronwall) Soit k une fonction intégrable et positive presque partout sur l'intervalle $]0, T[$. Soit $C \geq 0$ une constante et $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, T])$ une fonction vérifiant l'inégalité :

$$\forall t \in [0, T], 0 \leq \varphi(t) \leq C + \int_0^t k(s) \varphi(s) ds. \quad (1.52)$$

Alors, φ est majorée par :

$$\forall t \in [0, T], \varphi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right). \quad (1.53)$$

Chapitre 2

Rappels sur la méthode des éléments finis pour le problème de Stokes

Sommaire

2.1	Le mini-élément \mathbb{P}_1 -bulle / \mathbb{P}_1 pour le schéma d'ordre un en temps	45
2.2	L'élément de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ pour le schéma d'ordre deux en temps	51

Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons la méthode des éléments finis. Le but de ce chapitre est de rappeler brièvement les points essentiels de cette méthode.

La méthode des éléments finis (MEF) est une des nombreuses techniques utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles qui modélisent des problèmes de la mécanique, de la physique, de la biologie, etc.

Les méthodes des éléments finis ont fait l'objet d'un grand nombre de publications que nous ne recenserons pas ici (voir l'introduction de J.T. Oden [56]). Elles sont utilisées tant par des ingénieurs que par des mathématiciens dans des domaines extrêmement variés. La MEF a été conçue par R. Courant en 1943, mais l'importance de cette contribution est passée inaperçue à cette époque. Puis les ingénieurs ont réinventé indépendamment la méthode dans les années 50 : les premières références généralement citées dans la littérature sont celles d'Argyris (1954-1955), Turner, Clough, Martin & Topp (1956). Le nom de la méthode a été proposé par Clough (1960). On trouve dans Oden [55], Zienkiewicz [71] et dans l'article d'introduction de J.T. Oden [56] l'historique sur le développement de cette méthode du point de vue des ingénieurs.

Dans la méthode des éléments finis, on met d'abord le problème sous forme variationnelle posée dans des espaces bien choisis. Puis la méthode repose essentiellement sur l'approximation des fonctions de ces espaces par des fonctions dont la restriction à chaque élément d'une triangulation du domaine de calcul est un polynôme, de bas degré en général.

Leur utilisation est plus coûteuse que la méthode des différences finies, mais elles ont le grand avantage de traiter facilement n'importe quel type de géométrie bi- ou tri-dimensionnelle.

Définition 2.0.3 Soit Ω un domaine du plan, de frontière polygonale. Une triangulation de $\overline{\Omega}$ est un ensemble fini \mathcal{T}_η de triangles κ de $\overline{\Omega}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i)

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}_\eta} \kappa,$$

(ii) l'intersection de deux éléments distincts de \mathcal{T}_η est soit vide, soit un sommet, soit un côté.

On note que les éléments κ de \mathcal{T}_η forment une partition de $\overline{\Omega}$ sans recouvrement car l'intersection des intérieurs de deux éléments distincts est vide.

Pour $\kappa \in \mathcal{T}_\eta$, soient η_κ le diamètre de κ et ρ_κ le diamètre du cercle inscrit dans κ . Il est d'usage que l'indice η de \mathcal{T}_η représente le maximum des $\eta_\kappa, \kappa \in \mathcal{T}_\eta$.

Définition 2.0.4 Une famille de triangulations $(\mathcal{T}_\eta)_\eta$ est dite régulière (cf. Ciarlet [20]) s'il existe une constante positive σ indépendante de η telle que :

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \quad \frac{\eta_\kappa}{\rho_\kappa} = \sigma_\kappa \leq \sigma.$$

Rappelons que $(\kappa, P_\kappa, \Sigma_\kappa)$ est un élément fini de Lagrange si P_κ est un sous-espace de dimension n de $\mathcal{C}^\infty(\kappa)$, Σ_κ est un ensemble de n formes linéaires indépendantes $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ définies sur un espace $D \supset P_\kappa$, et Σ_κ est unisolvant sur P_κ , i.e. pour tout (c_1, \dots, c_n) , il existe un unique $p \in P_\kappa$ tel que :

$$\xi_i(p) = c_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

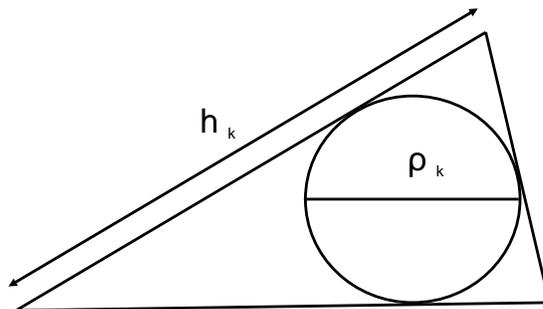


FIG. 2.1 – Exemple des quantités ρ_κ et η_κ .

L'unisolvence permet d'associer à $(\kappa, P_\kappa, \Sigma_\kappa)$ un opérateur d'interpolation $\pi_\kappa : D \mapsto P_\kappa$ défini pour tout v appartenant à D par :

$$\xi_i(\pi_\kappa(v)) = \xi_i(v), \quad 1 \leq i \leq n.$$

D'autre part, elle permet de définir les fonctions de base φ_i , pour $1 \leq i \leq n$ par : φ_i est l'unique fonction de P_κ qui vérifie

$$\xi_i(\varphi_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

où $\delta_{..}$ désigne le symbole de Krönecker.

On s'intéresse à la discrétisation des équations de Navier-Stokes (1.1)–(1.4), en dimension 2, par la méthode des éléments finis. On dispose pour cela de plusieurs types d'approximation. Par exemple, la pression n'étant pas continue, on peut discrétiser dans un espace de fonctions discontinues ou continues. Nous nous plaçons dans ce deuxième cas et nous utilisons d'abord le mini-élément, c'est-à-dire pression \mathbb{P}_1 et vitesse \mathbb{P}_1+ bulle, et ensuite l'élément de Taylor-Hood, c'est-à-dire pression \mathbb{P}_1 et vitesse \mathbb{P}_2 . Dans les deux cas, la pression est continue.

2.1 Le mini-élément \mathbb{P}_1 – bulle / \mathbb{P}_1 pour le schéma d'ordre un en temps

On sait que l'élément $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ (i.e vitesse \mathbb{P}_1 continue, pression \mathbb{P}_1 continue) ne satisfait pas la condition inf-sup (1.16) car l'espace de la vitesse n'est pas assez riche (ou l'espace de la pression

est trop riche). Pour contourner cette difficulté, il suffit d'élargir l'espace de la vitesse. L'idée du mini-élément est d'ajouter un degré de liberté à l'intérieur de chaque élément κ , pour chaque composante de la vitesse.

Plus précisément, soit κ un triangle de \mathcal{T}_η de sommets $a_i, 1 \leq i \leq 3$, et soient $\lambda_i, 1 \leq i \leq 3$, les coordonnées barycentriques associées aux sommets a_i . On note $b_\kappa \in \mathbb{P}_3$ la fonction bulle :

$$b_\kappa(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x),$$

qui s'annule sur $\partial\kappa$. Alors, dans κ , on approche la vitesse dans l'espace :

$$\mathcal{P}(\kappa) = [\mathbb{P}_1 \oplus Vect(b_\kappa)]^2, \quad (2.1)$$

qui est de dimension 8. Les degrés de liberté de chaque composante de la vitesse sont :

$$\{f \mapsto f(a_i); 1 \leq i \leq 3\} \cup \left\{ f \mapsto \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa f(x) d\mathbf{x} \right\},$$

soit un total de 8 degrés de liberté puisque la vitesse a deux composantes. Enfin, comme la pression est continue, nous prenons pour degrés de liberté ses valeurs aux sommets a_i :

$$\{f \mapsto f(a_i); 1 \leq i \leq 3\}.$$

Ainsi, il y a un total de 11 degrés de liberté dans chaque κ pour la vitesse et la pression. Globalement dans tout le domaine, il y a 2 degrés de liberté dans chaque triangle κ , 3 degrés de liberté à chaque sommet intérieur et 1 degré de liberté à chaque sommet de la frontière $\partial\Omega$.

En résumé, avec le mini-élément, on choisit

$$X_\eta = \{ \mathbf{v}_\eta \in C^0(\overline{\Omega})^2; \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \mathbf{v}_{\eta|\kappa} \in \mathcal{P}(\kappa), \mathbf{v}_{\eta|\partial\Omega} = \mathbf{0} \}, \quad (2.2)$$

$$M_\eta = \left\{ q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, q_{\eta|\kappa} \in \mathbb{P}_1, \int_\Omega q_\eta d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (2.3)$$

La condition inf-sup, qui est vraiment une condition de compatibilité entre ces deux espaces discrets, doit être vérifiée. Le lemme suivant, dû à Fortin [27] et qui est énoncé dans un cadre abstrait, donne une technique pour la vérifier. Le cadre est : X et M sont deux espaces de Hilbert et b une forme bilinéaire et continue sur $X \times M$.

Lemme 2.1.1 *On suppose que la condition suivante est vérifiée avec une constante $\beta > 0$:*

$$\forall q \in M, \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_X} \geq \beta \|q\|_M. \quad (2.4)$$

Alors le problème discret vérifie une condition inf-sup discrète avec une constante $\beta^ > 0$, indépendante de η ,*

$$\forall q_\eta \in M_\eta, \sup_{\mathbf{v}_\eta \in X_\eta} \frac{b(\mathbf{v}_\eta, q_\eta)}{\|\mathbf{v}_\eta\|_{X_\eta}} \geq \beta^* \|q_\eta\|_{M_\eta} \quad (2.5)$$

si et seulement s'il existe un opérateur de restriction $\Pi_\eta \in \mathcal{L}(X; X_\eta)$ et une constante C , indépendante de η , tels que :

$$\forall \mathbf{v} \in X, \|\Pi_\eta \mathbf{v}\|_X \leq C \|\mathbf{v}\|_X, \quad (2.6)$$

$$\forall q_\eta \in M_\eta, b(\Pi_\eta \mathbf{v} - \mathbf{v}, q_\eta) = 0. \quad (2.7)$$

✓ Preuve. Rappelons ici la démonstration. Supposons qu'il existe Π_η vérifiant (2.6) et (2.7). Alors,

$$\begin{aligned} \forall q_\eta \in M_\eta, \sup_{\mathbf{v}_\eta \in X_\eta} \frac{b(\mathbf{v}_\eta, q_\eta)}{\|\mathbf{v}_\eta\|_X} &\geq \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\Pi_\eta \mathbf{v}, q_\eta)}{\|\Pi_\eta \mathbf{v}\|_X} \\ &\geq \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, q_\eta)}{\|\Pi_\eta \mathbf{v}\|_X} \\ &\geq \frac{1}{C} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, q_\eta)}{\|\mathbf{v}\|_X} \geq \frac{\beta}{C} \|q_\eta\|_M. \end{aligned}$$

Donc (2.5) a lieu avec $\beta^* = \frac{\beta}{C}$.

Réciproquement, supposons que la condition (2.5) est vérifiée. On définit l'opérateur $B_\eta \in \mathcal{L}(X_\eta; M'_\eta)$ par

$$\forall \mathbf{v}_\eta \in X_\eta, \forall q_\eta \in M_\eta, \langle B_\eta \mathbf{v}_\eta, q_\eta \rangle = b(\mathbf{v}_\eta, q_\eta).$$

D'après le théorème de Babuška-Brezzi, on sait que B_η est un isomorphisme de V_η^\perp sur M'_η et avec la même constante β^* :

$$\forall \mathbf{v}_\eta \in V_\eta^\perp, \|B_\eta \mathbf{v}_\eta\|_{M'_\eta} \geq \beta^* \|\mathbf{v}_\eta\|_X.$$

Maintenant, soit $\mathbf{v} \in X$ quelconque. Il existe un unique $\mathbf{v}_\eta \in V_\eta^\perp$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall q_\eta \in M_\eta, b(\mathbf{v}_\eta, q_\eta) &= b(\mathbf{v}, q_\eta), \\ \|\mathbf{v}_\eta\|_X &\leq \frac{1}{\beta^*} \|B_\eta \mathbf{v}_\eta\|_{M'_\eta} \leq \frac{1}{\beta^*} \sup_{q_\eta \in M_\eta} \frac{b(\mathbf{v}, q_\eta)}{\|q_\eta\|_M} \leq \frac{\|b\|}{\beta^*} \|\mathbf{v}\|_X, \end{aligned}$$

où $\|b\|$ désigne la norme de la forme bilinéaire b .

Comme l'application $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_\eta$ est linéaire, on pose $\Pi_\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\eta$; alors $\Pi_\eta \in \mathcal{L}(X; X_\eta)$ et Π_η vérifie (2.5) et (2.7) avec $C = \frac{\|b\|}{\beta^*}$. ■

Nous allons utiliser ce lemme pour démontrer le :

Théorème 2.1.2 *Soient les espaces X_η et M_η définis par (2.2) et (2.3) respectivement. Si la famille de triangulation $(\mathcal{T}_\eta)_{\eta>0}$ est régulière, il existe une constante β^* , indépendante de η , telle que :*

$$\forall q_\eta \in M_\eta, \sup_{\mathbf{v}_\eta \in X_\eta} \frac{-\int_\Omega q_\eta (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) d\mathbf{x}}{|\mathbf{v}_\eta|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta^* \|q_\eta\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.8)$$

En effet, pour montrer la condition inf-sup (2.8), il est commode de construire un opérateur d'approximation local Π_κ dans chaque κ à partir d'un opérateur de régularisation R_η . Ainsi l'opérateur Π_κ est défini par :

$$\Pi_\kappa(\mathbf{v}) = R_\eta(\mathbf{v}) + \mathbf{c} b_\kappa,$$

où le vecteur constant \mathbf{c} est choisi pour que

$$\int_{\kappa} (\Pi_{\kappa}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_{\eta}, \quad (2.9)$$

c'est-à-dire,

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\int_{\kappa} b_{\kappa} d\mathbf{x}} \int_{\kappa} (\mathbf{v} - R_{\eta}(\mathbf{v})) d\mathbf{x}. \quad (2.10)$$

Ensuite on définit l'opérateur global d'interpolation $\Pi_{\eta} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2; X_{\eta})$ par :

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}_{\eta}, \quad \Pi_{\eta}(\mathbf{v})|_{\kappa} = \Pi_{\kappa}(\mathbf{v}).$$

Dans la démonstration de la proposition 2.1.4, nous verrons que cette condition locale (2.9) entraîne que :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\Pi_{\eta}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) q_{\eta} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_{\eta} \in M_{\eta}. \quad (2.11)$$

Maintenant, tout dépend du choix de l'opérateur de régularisation R_{η} . Choisissons par exemple un opérateur quasi-local R_{η} tel que celui de Scott et Zhang [61].

Si la triangulation \mathcal{T}_{η} est régulière, cet opérateur vérifie en dimension $d = 2$ ou 3 , $R_{\eta} \in \mathcal{L}(W_0^{1,p}(\Omega); \Theta_{\eta})$, où

$$\Theta_{\eta} = \{\theta_{\eta} \in C^0(\overline{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_{\eta}, \theta_{\eta}|_{\kappa} \in \mathbb{P}_1, \theta_{\eta}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$\forall \kappa \in \mathcal{T}_{\eta}$,

$$\forall \mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega), |R_{\eta}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|_{W^{1,p}(\kappa)} \leq C |\mathbf{v}|_{W^{1,p}(\Delta_{\kappa})}, \quad (2.12)$$

où Δ_{κ} est la réunion de κ et tous ses voisins, i.e. tous les $\kappa' \in \mathcal{T}_{\eta}$ tels que $\overline{\kappa} \cap \overline{\kappa'} \neq \emptyset$,

$$\forall \mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), |R_{\eta}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|_{W^{2,p}(\kappa)} \leq C \eta |\mathbf{v}|_{W^{2,p}(\Delta_{\kappa})}, \quad (2.13)$$

$$\forall \mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega), \|R_{\eta}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\|_{L^q(\kappa)} \leq C \eta^{1-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} |\mathbf{v}|_{W^{1,p}(\Delta_{\kappa})}, \quad (2.14)$$

pour tout $q \geq 1$ tel que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Par exemple, si $d = 2, p = 2$ et $q = 4$, (2.14) entraîne :

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \|R_{\eta}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\|_{L^4(\kappa)} \leq C \eta^{1/2} |\mathbf{v}|_{H^1(\Delta_{\kappa})}.$$

On peut montrer que si la famille de triangulations est régulière, alors chaque Δ_{κ} a au maximum L_1 éléments et un même élément ne peut appartenir au maximum qu'à L_2 réunions Δ_{κ} , où L_1 et L_2 sont des entiers indépendants de η .

Remarque 2.1.3 Avec ce choix, l'opérateur Π_{η} est quasi-local en ce sens que si le support de \mathbf{v} est contenu dans un ouvert \mathcal{O} , alors le support de $\Pi_{\eta}(\mathbf{v})$ est contenu dans un ouvert \mathcal{O}_{η} tel que la distance entre \mathcal{O} et \mathcal{O}_{η} , $d(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\eta})$ est de l'ordre de η . En effet, on observe d'après (2.12) que dans un élément κ , $R_{\eta}(\mathbf{v})$ ne fait intervenir que les valeurs de \mathbf{v} dans Δ_{κ} , et on observe d'après (3.31) qu'il en est de même pour la correction $\mathbf{c} b_{\kappa}$.

Avec ce choix de R_{η} , nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.1.4 *Si la famille de triangulations \mathcal{T}_η est régulière et si l'opérateur Π_η est défini comme ci-dessus à partir de l'opérateur R_η de Scott et Zhang, alors l'opérateur $\Pi_\eta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2; X_\eta)$ défini ci-dessus vérifie :*

$$\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, |\Pi_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\kappa)} \leq C|\mathbf{v}|_{H^1(\Delta_\kappa)}, \quad (2.15)$$

avec une constante C indépendante de η et de κ . De plus, on a toujours (2.11) :

$$\forall q_\eta \in M_\eta, \int_\Omega q_\eta \operatorname{div}(\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0.$$

Preuve. Nous remarquons que, comme $q_\eta \in H^1(\Omega)$ et $\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$\begin{aligned} - \int_\Omega q_\eta \operatorname{div}(\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) d\mathbf{x} &= \int_\Omega \nabla q_\eta \cdot (\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_\eta} \int_\kappa \nabla q_\eta \cdot (\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car, dans chaque κ , $\nabla q_\eta \in \mathbb{P}_0^2$.

Pour montrer (2.15), on va estimer $|\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|_{H^1(\kappa)}$. Grâce au support de b_κ , on a :

$$|\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|_{H^1(\kappa)} \leq |R_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|_{H^1(\kappa)} + \|\mathbf{c}\| |b_\kappa|_{H^1(\kappa)}.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} |b_\kappa|_{H^1(\kappa)} &\leq \widehat{C}_1 |\det(B_\kappa)|^{1/2} \|B_\kappa^{-1}\| |\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \widehat{\lambda}_3|_{H^1(\widehat{\kappa})} \\ &\leq \widehat{C}_2 |\det(B_\kappa)|^{1/2} \|B_\kappa^{-1}\|, \end{aligned}$$

car $|\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \widehat{\lambda}_3|_{H^1(\widehat{\kappa})}$ est une constante qui ne dépend que de $\widehat{\kappa}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}\| &= \frac{1}{\int_\kappa b_\kappa d\mathbf{x}} \left\| \int_\kappa (\mathbf{v} - R_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \right\| = \frac{|\widehat{\kappa}|}{|\kappa| \int_{\widehat{\kappa}} \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \widehat{\lambda}_3 d\widehat{\mathbf{x}}} \left\| \int_\kappa (\mathbf{v} - R_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \right\| \\ &\leq \frac{|\widehat{\kappa}|}{|\kappa| \int_{\widehat{\kappa}} \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \widehat{\lambda}_3 d\widehat{\mathbf{x}}} |\kappa|^{1/2} \left(\int_\kappa \|\mathbf{v} - R_\eta(\mathbf{v})\|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &\leq \widehat{C}_3 \frac{1}{|\kappa|^{1/2}} \|\mathbf{v} - R_\eta \mathbf{v}\|_{L^2(\kappa)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathbf{c}\| |b_\kappa|_{H^1(\kappa)} \leq \widehat{C}_4 \|B_\kappa^{-1}\| \|\mathbf{v} - R_\eta(\mathbf{v})\|_{L^2(\kappa)},$$

et grâce à la régularité de \mathcal{T}_η , nous avons :

$$|\Pi_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|_{H^1(\kappa)} \leq |R_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|_{H^1(\kappa)} + \frac{\widehat{C}_5}{\rho_\kappa} \|\mathbf{v} - R_\eta(\mathbf{v})\|_{L^2(\kappa)} \leq \widehat{C}_6 |\mathbf{v}|_{H^1(\Delta_\kappa)}. \blacksquare$$

Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème 2.1.2 :

✓ *Preuve du théorème 2.1.2.* La régularité de \mathcal{T}_η et (2.15) entraînent que Π_η vérifie (2.6) dans $X = H_0^1(\Omega)^2$. Nous avons vu que Π_η vérifie (2.11). Enfin, la condition (2.4) est vérifiée :

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2} \frac{-\int_\Omega q(\operatorname{div} \mathbf{v}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc toutes les hypothèses du lemme 2.1.1 sont vérifiées ; donc (2.8) est vérifiée. ■

Si nous approchons V par :

$$V_\eta = \{\mathbf{v}_\eta \in X_\eta ; \forall q_\eta \in M_\eta, \int_\Omega q_\eta \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta d\mathbf{x} = 0\}, \quad (2.16)$$

alors $\Pi_\eta \in \mathcal{L}(V; V_\eta)$.

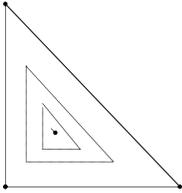
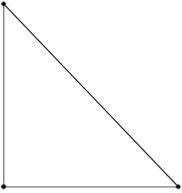
Vitesse	Pression
$\mathbb{P}_1 + \text{"bulle"}$	\mathbb{P}_1
	

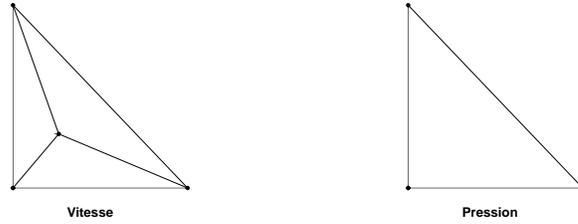
FIG. 2.2 – Représentation du mini-élément, l'élément fini \mathbb{P}_1 -bulle / \mathbb{P}_1 . Les degrés de liberté de la vitesse figurent dans la première colonne. Quelques isobares de la fonction bulle sont dessinées. Les degrés de liberté de la pression figurent dans la deuxième colonne.

Remarque 2.1.5 *L'idée d'utiliser des fonctions bulles a été introduite par Crouzeix et Raviart [23]. L'analyse du mini-élément \mathbb{P}_1 -bulle / \mathbb{P}_1 est due à Arnold, Brezzi, et Fortin [9].*

Remarque 2.1.6 *On peut remplacer la "bulle" par une fonction nulle sur $\partial\kappa$ affine par morceaux sur trois triangles internes à chaque κ obtenu en divisant celui-ci par son centre (cf. Fig. 2.3) ; on obtient les mêmes résultats de convergence.*

Comme M_η contient tous les polynômes de degré zéro dans chaque κ , on peut redéfinir facilement l'opérateur de Scott et Zhang pour qu'il appartienne à $\mathcal{L}(L_0^2(\Omega); M_\eta)$, notons-le r_η . Alors pour tout nombre réel $s \in [0, 1]$, on a :

$$\forall q \in H^s(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \|r_\eta(q) - q\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta^s |q|_{H^s(\Omega)}. \quad (2.17)$$


 FIG. 2.3 – Un autre élément fini \mathbb{P}_1 -bulle / \mathbb{P}_1 .

Remarque 2.1.7 Notons que V_η n'est pas un sous-espace de V , car M_η ne contient pas assez de fonctions pour imposer la divergence nulle.

2.2 L'élément de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ pour le schéma d'ordre deux en temps

On considère maintenant une approximation plus précise de la vitesse. On suppose toujours que le domaine est polygonal et que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_\eta)_{\eta>0}$ est régulière. On garde l'approximation \mathbb{P}_1 continue pour la pression, mais nous approchons la vitesse par des polynômes de \mathbb{P}_2 . Nous utilisons donc l'élément fini de Taylor-Hood. On définit alors :

$$X_\eta = \{ \mathbf{v}_\eta \in C^0(\overline{\Omega})^2; \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \mathbf{v}_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_2, \mathbf{v}_\eta|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \}, \quad (2.18)$$

$$M_\eta = \left\{ q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, q_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_1, \int_\Omega q_\eta d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (2.19)$$

Montrons que ces espaces d'approximation satisfont la condition inf-sup. Construisons d'abord un opérateur intermédiaire, disons $P_\eta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2; X_\eta)$ qui vérifie :

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta \int_\kappa \operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x} = 0, \quad (2.20)$$

ainsi qu'une propriété d'approximation dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), |\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\kappa)} \leq C \sigma_\kappa^l h_\kappa^{1-l} |\mathbf{v}|_{H^1(\Delta\kappa)}, \quad (2.21)$$

où $l = 0$ ou 1 . Pour définir P_η , remarquons que si, sur chaque côté f de κ , on a :

$$\int_f (\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})) ds = \mathbf{0},$$

alors P_η vérifie (2.20). Donc, il suffit que :

$$\int_f P_\eta(\mathbf{v}) ds = \int_f \mathbf{v} ds. \quad (2.22)$$

Or on observe qu'il est possible de construire l'opérateur R_η de Scott et Zhang pour que (2.22) soit vérifiée. Donc il suffit de prendre $P_\eta = R_\eta$ et dans ce cas, on a en plus (2.21). Pour définir $P_\eta(\mathbf{v})$, on a besoin des valeurs de \mathbf{v} dans une région plus grande que κ car \mathbf{v} n'est pas continue, en particulier aux sommets de κ .

La condition (2.20) nous permet de nous restreindre à l'espace :

$$\tilde{X}_\eta = \{\mathbf{v}_\eta \in X_\eta; \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \int_\kappa \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta d\mathbf{x} = 0\},$$

et de lui associer l'espace des pressions discrètes à moyenne nulle dans κ :

$$\tilde{M}_\eta = \{\tau(q_\eta); q_\eta \in M_\eta\}, \text{ où } \forall \kappa \in \mathcal{T}_\eta, \tau_\eta(q_\eta)|_\kappa = q_\eta - \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa q_\eta d\mathbf{x}.$$

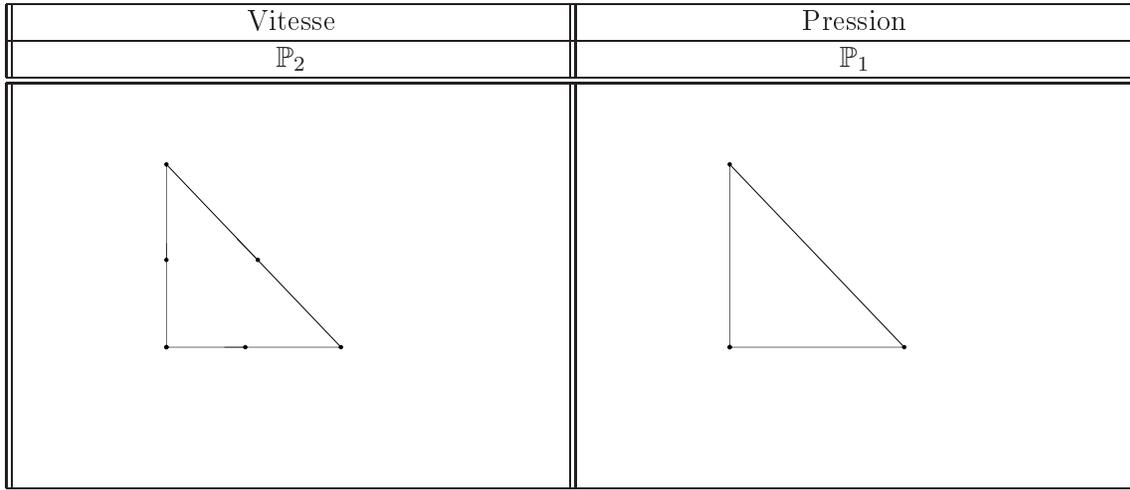


FIG. 2.4 – Représentation de l'élément fini $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$.

Maintenant, soit $\{a_i; 1 \leq i \leq N\}$ l'ensemble des sommets de \mathcal{T}_η *intérieurs* à Ω et soit Ω_i l'ensemble des éléments κ de \mathcal{T}_η qui ont en commun le sommet a_i . On les appelle macros-éléments. On peut toujours trouver un sous-ensemble des $\{a_i\}$, disons renumérotés de 1 à R , tel que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^R \Omega_i.$$

Au besoin, on peut prendre $R = N$, le nombre des sommets intérieurs.

On veut énoncer une condition inf-sup sur chaque Ω_i . Pour cela, on définit les espaces locaux

suivants sur Ω_i :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_\eta(\Omega_i) &= \{\mathbf{v}_\eta \in \tilde{X}_\eta; \text{support}(\mathbf{v}_\eta) \subset \Omega_i\} \subset H_0^1(\Omega_i)^2, \\ \tilde{M}_\eta(\Omega_i) &= \{\tilde{q}_\eta|_{\Omega_i}; \tilde{q}_\eta \in \tilde{M}_\eta\} \subset L_0^2(\Omega_i), \\ \tilde{V}_\eta(\Omega_i) &= \{\mathbf{v}_\eta \in \tilde{X}_\eta(\Omega_i); \forall q_\eta \in \tilde{M}_\eta(\Omega_i), \int_{\Omega_i} q_\eta \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta d\mathbf{x} = 0\}, \\ \tilde{V}_\eta^\perp(\Omega_i) &= \{\mathbf{v}_\eta \in \tilde{X}_\eta(\Omega_i); \forall \mathbf{w}_\eta \in \tilde{V}_\eta(\Omega_i), \int_{\Omega_i} \nabla \mathbf{v}_\eta : \nabla \mathbf{w}_\eta d\mathbf{x} = 0\}.\end{aligned}$$

Sur ces espaces locaux, on définit la condition inf-sup locale suivante : il existe une constante $\lambda^* > 0$, indépendante de η , telle que pour $1 \leq i \leq R$,

$$\inf_{q_\eta \in \tilde{M}_\eta(\Omega_i)} \sup_{\mathbf{v}_\eta \in \tilde{X}_\eta(\Omega_i)} \frac{-\int_{\Omega_i} q_\eta \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta d\mathbf{x}}{|\mathbf{v}_\eta|_{H^1(\Omega_i)} \|q_\eta\|_{L^2(\Omega_i)}} \geq \lambda^*. \quad (2.23)$$

L'ensemble $\{\Omega_i; 1 \leq i \leq k\}$ n'est pas forcément une partition de Ω . On en déduit une partition de Ω de la façon suivante : à chaque Ω_i , on associe Δ_i ainsi :

$$\Delta_1 = \Omega_1, \quad \Delta_2 = \text{réunion des } \kappa \in \Omega_2 \text{ tels que } \kappa \notin \Delta_1,$$

(éventuellement $\Delta_2 = \emptyset$). Par récurrence, nous construisons

$$\Delta_{k+1} = \text{réunion des } \kappa \in \Omega_{k+1} \text{ tels que } \kappa \notin \cup_{j=1}^k \Delta_j,$$

(éventuellement, $\Delta_{k+1} = \emptyset$).

Remarquons que $\Omega = \cup_{i=1}^R \Delta_i$,

$$\Delta_k = \{\kappa \in \Omega_k; \kappa \notin \Delta_j, k \neq j\} \text{ et } \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset, \quad \forall j \neq k.$$

Si la condition (2.23) est vérifiée sur tous les macros-éléments, alors on construit un opérateur Π_η en corrigeant P_η ainsi :

$$\Pi_\eta(\mathbf{v}) = P_\eta(\mathbf{v}) + \mathbf{c}_\eta(\mathbf{v}),$$

où

$$\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^R \mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}),$$

et $\mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}) \in \tilde{V}_\eta^\perp(\Omega_i)$, prolongée par zéro hors de Ω_i , est solution de :

$$\forall q_\eta \in \tilde{M}_\eta(\Omega_i), \int_{\Omega_i} q_\eta \operatorname{div} \mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_i} q_\eta \operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x}. \quad (2.24)$$

L'existence et l'unicité de $\mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}) \in \tilde{V}_\eta^\perp(\Omega_i)$ est assurée par (2.23) et on a :

$$|\mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega_i)} \leq \frac{1}{\lambda^*} \|\operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v}))\|_{L^2(\Delta_i)}. \quad (2.25)$$

Remarquons que si Δ_i est vide, alors $\mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Il est clair que $\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v}) \in \tilde{X}_\eta$ et il existe une constante C telle que :

$$|\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\lambda^\star} \|\operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En effet, comme $\Omega = \cup_{i=1}^R \Omega_i$,

$$|\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^R |\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega_i)}^2 \leq \sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^R |\mathbf{c}_{\eta,j}(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega_i)} \right)^2.$$

Comme \mathcal{T}_η est régulière, le nombre d'indices j tels que $\Omega_j \cap \Omega_i \neq \emptyset$ est borné par une constante, notée L , indépendante de η, i et j . Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^R L \sum_{j=1}^R |\mathbf{c}_{\eta,j}(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega_i)}^2 \leq \sum_{i=1}^R L \sum_{\substack{j=1 \\ \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset}}^R |\mathbf{c}_{\eta,j}(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega_i \cap \Omega_j)}^2$$

et dans la somme intérieure, il y a au plus L termes. Alors, d'après (2.25),

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq L \sum_{i=1}^R \frac{1}{\lambda^\star} \sum_{\substack{j=1 \\ \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset}}^R \|\operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta \mathbf{v})\|_{L^2(\Delta_j)}^2 \\ &\leq L^2 \sum_{i=1}^R \frac{1}{\lambda^\star} \|\operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta \mathbf{v})\|_{L^2(\Delta_i)}^2 \\ &\leq \frac{L^2}{\lambda^\star} \|\operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{2.26}$$

d'où le résultat avec $C = L^2$.

Il faut vérifier aussi que :

$$\forall q_\eta \in \tilde{M}_\eta, \int_{\Omega} q_\eta \operatorname{div} \mathbf{c}_\eta(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q_\eta \operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x}. \tag{2.27}$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q_\eta \operatorname{div} \mathbf{c}_\eta(\mathbf{v}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} q_\eta \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^R \mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^R \int_{\Omega_i} q_\eta \operatorname{div} \mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad \text{grâce au support de } \mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{i=1}^R \int_{\Delta_i} q_\eta \operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \quad \text{par (2.24)} \\ &= \int_{\Omega} q_\eta \operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

De plus, (2.21) et (2.26) entraînent que :

$$|\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{L}{\sqrt{\lambda^\star}} |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.28}$$

avec une constante C qui ne dépend pas de η . Enfin, $\Pi_\eta(\mathbf{v})$ vérifie (2.7). En effet, tout $q_\eta \in M_\eta$ s'écrit, dans chaque κ ,

$$q_\eta = \tilde{q}_\eta + \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa q_\eta d\mathbf{x},$$

avec $\tilde{q}_\eta \in \tilde{M}_\eta$. D'une part, (2.27) entraîne que :

$$\int_\Omega \tilde{q}_\eta \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x} = 0,$$

et d'autre part, d'après le choix de P_η et \tilde{X}_η , on a, dans chaque κ ,

$$\int_\kappa \operatorname{div}(\mathbf{v} - P_\eta(\mathbf{v})) d\mathbf{x} = 0, \quad \int_\kappa \operatorname{div} \mathbf{c}_\eta(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0.$$

Pour chaque i , l'application $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v})$ définie par (2.24) est linéaire car $\mathbf{c}_{\eta,i}(\mathbf{v})$ est déterminé de manière unique et le second membre de (2.24) dépend linéairement de \mathbf{v} . Donc on a bien $\Pi_\eta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^d; X_\eta)$, et d'après (2.21) et (2.28), on a :

$$|\Pi_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)} \leq |P_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{c}_\eta(\mathbf{v})|_{H^1(\Omega)} \leq C|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)},$$

avec une autre constante C qui dépend de λ^* mais pas de η . En conclusion, Π_η vérifie (2.6) et (2.7) et le lemme 2.1.1 implique la condition inf-sup.

Girault et Raviart ont démontré la condition locale (2.23), [31], et nous la reproduisons ici par souci de clarté.

Soit J le nombre d'éléments κ de Ω_i et numérotons les avec un indice $j = 0, \dots, J$ tels que κ_j soit adjacent à κ_{j-1} et κ_{j+1} et $\kappa_0 = \kappa_J$, comme dans la figure 2.5.

C'est-à-dire

$$\Omega_i = \cup_{j=1}^J \kappa_j.$$

Nous notons par κ'_j le côté commun à κ_j et κ_{j+1} , par α_j son milieu et a_i le sommet commun à tous les κ_j dans Ω_i . On associe à Ω_i l'élément de référence :

$$\hat{\Omega} = \cup_{j=1}^J \hat{\kappa}_j,$$

à travers la fonction continue, affine par morceaux F_i définie par :

$$F_i(\hat{\kappa}_j) = \kappa_j, \quad F_i(\hat{\mathbf{x}}) = B_j \hat{\mathbf{x}} + b_j, \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\kappa}_j.$$

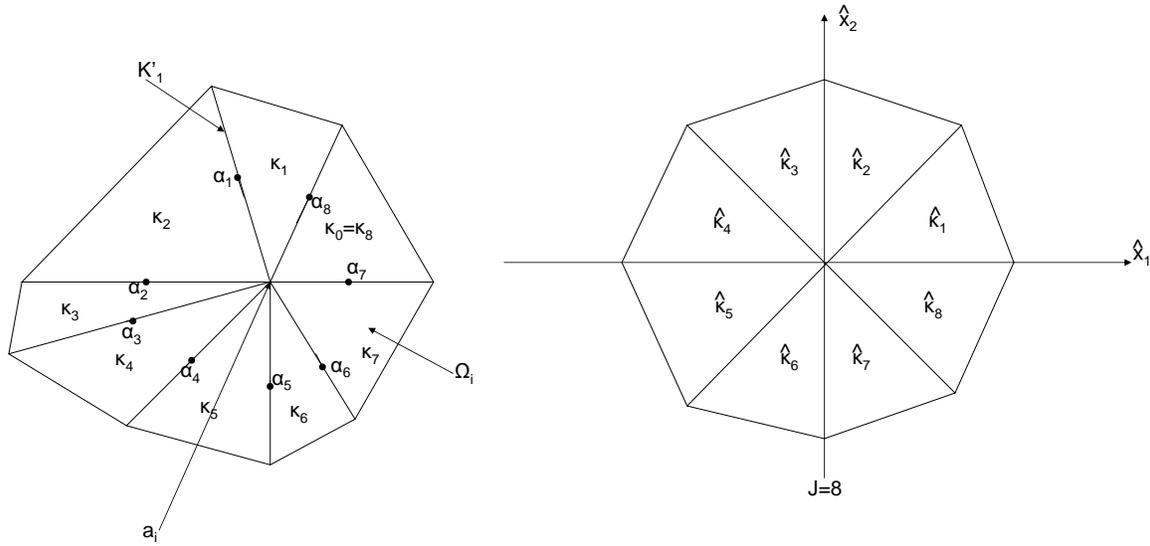
Comme la triangulation est régulière, il existe une constante I indépendante de i telle que $J \leq I$, et par conséquent il existe au maximum I différents ensembles de référence $\hat{\Omega}$.

Soient $q_\eta \in \tilde{M}_\eta(\Omega_i)$ et \mathbf{v}_η une fonction de $\tilde{X}_\eta(\Omega_i)$ qui satisfait $\mathbf{v}_\eta(a_i) = \mathbf{0}$. Comme \mathbf{v}_η s'annule sur $\partial\Omega_i$ et $q_\eta \in H^1(\Omega_i)$, on a :

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta \cdot q_\eta d\mathbf{x} = - \sum_{j=1}^J \int_{\kappa_j} \mathbf{v}_\eta \cdot \nabla q_\eta d\mathbf{x}.$$

Notons que chaque composante v de \mathbf{v}_η est un polynôme de \mathbb{P}_2 sur κ_j qui s'annule sur les sommets de κ_j . Par conséquent, on a la formule de quadrature suivante :

$$\int_{\kappa_j} v d\mathbf{x} = \frac{|\kappa_j|}{3} \{v(\alpha_j) + v(\alpha_{j-1})\}.$$


 FIG. 2.5 – Ensemble Ω_i des éléments κ de \mathcal{T}_η .

Comme ∇q_η est constant sur chaque κ_j (supposons $\nabla q_\eta|_{\kappa_j} = \mathbf{g}_j$), la formule de quadrature entraîne que :

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta \cdot q_\eta d\mathbf{x} = -\frac{1}{3} \sum_{j=1}^J |\kappa_j| \{v(\alpha_j) + v(\alpha_{j-1})\} \cdot \mathbf{g}_j. \quad (2.29)$$

Remarquons aussi que $\partial q_\eta / \partial \tau$ est continu aux frontières inter-éléments, ce qui nous emmène à faire le choix

$$v(\alpha_j) = -(\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{t}_j) \mathbf{t}_j = -(\mathbf{g}_{j+1} \cdot \mathbf{t}_j) \mathbf{t}_j,$$

avec \mathbf{t}_j est le vecteur tangent, extérieur à Ω_i , à κ'_j . Nous avons donc

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta \cdot q_\eta d\mathbf{x} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^J |\kappa_j| \{(\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{t}_j)^2 + (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{t}_{j-1})^2\}.$$

D'après Babuška et al. [10], $\mathbf{g} \cdot \mathbf{t}$ est conservée par transformation affine, et on a :

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta \cdot q_\eta d\mathbf{x} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^J |\kappa_j| \{(\widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{t}}_j)^2 + (\widehat{\mathbf{g}}_j \cdot \widehat{\mathbf{t}}_{j-1})^2\}.$$

Chaque $\{\widehat{\mathbf{t}}_{j-1}, \widehat{\mathbf{t}}_j\}$ est une base sur l'espace de référence. L'application $g \mapsto \{(g \cdot \widehat{\mathbf{t}}_{j-1})^2 + (g \cdot \widehat{\mathbf{t}}_j)^2\}^{1/2}$ est équivalente à la norme euclidienne sur l'espace de référence. D'où, vu que

$$|\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}^2 = |\widehat{\kappa}_j| \|\widehat{g}_j\|^2,$$

il existe une constante $\widehat{C}_1 > 0$ telle que :

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta \cdot q_\eta d\mathbf{x} \geq \widehat{C}_1 \sum_{j=1}^J |\kappa_j| |\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}^2. \quad (2.30)$$

Maintenant, nous avons d'un côté, d'après la définition de \mathbf{v}_η ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_\eta\|_{L^2(\kappa_j)}^2 &\leq \widehat{C}_2 |\kappa_j| \{ \|\mathbf{v}(\alpha_{j-1})\|^2 + \|\mathbf{v}(\alpha_j)\|^2 \} \\ &\leq \widehat{C}_3 |\kappa_j| [\eta_{\kappa_j} |\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}]^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_\eta|_{H^1(\kappa_j)}^2 &\leq \widehat{C}_4 [\|B_j^{-1}\| \|\mathbf{v}_\eta\|_{L^2(\kappa_j)}]^2 \\ &\leq \widehat{C}_5 |\kappa_j| [\sigma_{\kappa_j} |\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}]^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

D'après (2.30), (2.32) et la régularité de \mathcal{T}_η , on a

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta \cdot q_\eta d\mathbf{x} \geq \widehat{C}_6 (1/\sigma) |\mathbf{v}_\eta|_{H^1(\Omega_i)} \left\{ \sum_{j=1}^J |\kappa_j| |\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.33)$$

Il reste donc à démontrer que :

$$\left\{ \sum_{j=1}^J |\kappa_j| |\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}^2 \right\}^{1/2} \geq \widehat{C} \|q\|_{L^2(\Omega_i)}, \quad \forall q \in H^1(\Omega_i) \cap L_0^2(\Omega_i).$$

Remplaçons $q \in H^1(\Omega_i) \cap L_0^2(\Omega_i)$ par \bar{q} avec

$$\widehat{\bar{q}} = \widehat{q} - \frac{1}{|\widehat{\Omega}|} \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{q} d\widehat{\mathbf{x}}.$$

Ainsi, q et \bar{q} diffèrent par une constante et on a :

$$\|q\|_{L^2(\Omega_i)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q + c\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega_i)}.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \sum_{j=1}^J |\kappa_j| \|\widehat{\bar{q}}\|_{L^2(\kappa_j)}^2 \\ &\leq \widehat{C}_7 \sup_{1 \leq j \leq J} (\eta_{\kappa_j}^2) |\widehat{\bar{q}}|_{H^1(\widehat{\Omega})}^2 \quad \text{avec } \widehat{\bar{q}} \in H^1(\widehat{\Omega}) \cap L_0^2(\widehat{\Omega}). \\ &\leq \widehat{C}_8 \left\{ \sup_{1 \leq j \leq J} (\eta_{\kappa_j}^2) / \inf_{1 \leq j \leq J} (\rho_{\kappa_j}^2) \right\} \sum_{j=1}^J |\kappa_j| |\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\{ \sum_{j=1}^J |\kappa_j| |\widehat{q}|_{H^1(\widehat{\kappa}_j)}^2 \right\}^{1/2} \geq (\widehat{C}_9 / \sigma_i) \|q\|_{L^2(\Omega_i)}, \quad (2.34)$$

avec

$$\sigma_i = \sup_{1 \leq j \leq J} (\eta_{\kappa_j}) / \inf_{1 \leq j \leq J} (\rho_{\kappa_j}).$$

Ainsi, (2.23) découle de ce qui précède et de la triangulation \mathcal{T}_η (cf. [13]), on a :

$$\sigma_i \leq \widehat{C} \sigma. \quad (2.35)$$

■

De la condition inf-sup locale (2.23) découle la condition globale (2.8). Pour la démonstration de la condition inf-sup globale, nous renvoyons le lecteur à [66].

Remarque 2.2.1 *Les détails et la construction de la démonstration de la condition inf-sup locale a été introduite par M. Bercovier et O. Pironneau [12] pour établir une forme faible de la condition inf-sup (2.8). La démonstration est simple mais longue car on travaille sur un domaine de référence constitué de plusieurs triangles de référence à la place d'un seul triangle de référence. Le point crucial de la preuve est le choix particulier de \mathbf{v} aux points milieu des segments intérieurs.*

Remarque 2.2.2 *Notre étude repose sur l'utilisation de deux types d'éléments finis continus : le mini-élément et l'élément fini de Taylor-Hood. Il serait intéressant de voir ce qui se passe dans le cas de l'utilisation d'autres types d'éléments-finis comme par exemple, les éléments finis discontinus, l'élément fini de Crouzeix-Raviart, etc...*

Schéma d'ordre un en temps

Chapitre 3

Problème implicite d'ordre un

Sommaire

3.1	Introduction	62
3.2	Résolution de la Première Etape du schéma à deux grilles	62
3.2.1	Erreur de base du problème de Navier-Stokes	62
3.2.2	Quelques estimations d'erreur pour le problème de Stokes	71
3.2.2.1	Estimation en normes $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$	72
3.2.2.2	Argument de dualité	72
3.2.2.3	Erreur en norme $L^2(\Omega \times]0, T[)^2$	76
3.2.2.4	Estimation d'erreur de la dérivée en temps	81
3.2.3	Application des résultats aux équations de Navier-Stokes	84
3.2.3.1	Application de l'argument de dualité à la contribution linéaire	84
3.2.3.2	Résultat de superconvergence : contribution non-linéaire	85
3.2.4	Une estimation pour la pression	91
3.3	Résolution de la Deuxième Étape du schéma à deux grilles	100
3.3.1	Estimation de la vitesse	101
3.3.2	Estimation de la pression	106

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'estimer l'erreur sur la vitesse et la pression, solution du problème à deux grilles d'ordre un en temps (1.39)–(1.42). Le calcul de cette estimation d'erreur nécessite plusieurs calculs intermédiaires. Nous procédons de la manière suivante. On commence par étudier une estimation de la solution de la première étape c'est-à-dire la solution du schéma non-linéaire résolu sur la grille grossière. Cette estimation de base du problème de Navier-Stokes est établie dans la section 3.2.1.

La question fondamentale dans l'analyse de l'algorithme à deux grilles est d'établir une estimation d'erreur d'ordre deux en espace et en temps de la vitesse du problème de Stokes évolutif (3.10)–(3.13) dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$. Ceci se fait au moyen d'un argument de dualité. On a aussi besoin d'estimer l'erreur de la vitesse de (3.10)–(3.13) dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$, ce qui se fait en même temps que l'erreur sur le quotient différentiel dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$. Il faut aussi estimer l'erreur de la dérivée en temps de la solution du problème de Stokes et ceci en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$. Enfin, pour passer du problème de Stokes à celui de Navier-Stokes, on décompose l'erreur $\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_\eta^n$ en deux contributions, l'une linéaire $\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n$ et l'autre non-linéaire $\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n$. Plus précisément, le résultat principal, qui est celui du calcul de l'erreur en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$, sera appliqué à la contribution linéaire $\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n$ où \mathbf{v}_η^n est la solution du schéma auxiliaire (3.14)–(3.16) avec pour second membre $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Puis il est complété par un résultat de superconvergence appliqué à la contribution non-linéaire $\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n$: une estimation qui montre que \mathbf{v}_η^n est très proche de \mathbf{u}_η^n . Une fois les estimations d'erreur sur la vitesse de la grille grossière calculées, on pourra établir une estimation d'erreur de la pression toujours sur la grille grossière. Enfin, nous utilisons les résultats précédents avec $\eta = H$ pour pouvoir établir l'erreur sur la vitesse de la deuxième étape ainsi que l'erreur sur la pression $p(t^n) - p_h^n$.

Pour simplifier, nous faisons d'abord l'analyse du schéma (1.39)–(1.40) pour $0 \leq n \leq N$ et ensuite celle de (1.41)–(1.42) pour $0 \leq n \leq N$, sans tenir compte du fait qu'en pratique les deux étapes sont intercalées, ce qui produit des résultats plus précis que ceux annoncés par l'analyse. Ici aussi, pour simplifier, nous désignons le paramètre de discrétisation par η .

3.2 Résolution de la Première Etape du schéma à deux grilles

3.2.1 Erreur de base du problème de Navier-Stokes

Dans cette section, nous établissons une estimation de l'erreur des équations de Navier-Stokes en normes $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$. Ici, X_η et M_η sont les espaces définis par (2.2) et (2.3). Approchons $\mathbf{f}(t^{n+1})$ par la moyenne :

$$\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.1)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous utilisons la formule bien connue suivante :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^d, d = 2, 3$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx.$$

On en déduit

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx \right|$$

et on traite séparément ces deux termes.

Remarque 3.2.1 Dans la suite de ce chapitre, dans le cas où on a, par exemple,

$$\|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{v}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 + C_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on écrit,

$$\|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{v}_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$C_2 \Delta t \|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_2 \Delta t \|\mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C_2 \Delta t \|\mathbf{v}_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On suppose que Δt est assez petit pour que $2C_2 \Delta t \leq 1$ (par exemple).

Il reste donc

$$\|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-2} \|\mathbf{v}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 + 3C_2 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et on applique le lemme de Gronwall classique (lemme 1.5.1).

On peut aussi garder le terme $\|\mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2$ multiplié par un facteur $\alpha < 1$, en prenant Δt un peu plus petit.

La première estimation d'erreur est donnée par le :

Théorème 3.2.2 A chaque pas de temps, (1.39)–(1.40) admet une solution \mathbf{u}_η^{n+1} qui est unique si Δt est suffisamment petit.

Sous les hypothèses $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)$, $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, il existe des constantes α, β, C et $k_0 > 0$, qui dépendent de $\mathbf{u}, \mathbf{u}', p, \nu$, mais indépendantes de η et Δt , telles que la solution des équations (1.39)–(1.40) satisfait l'estimation pour $\Delta t \leq k_0$:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \left\| (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq e^{CT} \left(\alpha \eta^2 + \beta (\Delta t)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

✓ *Preuve.* La démonstration n'est pas originale mais nous la donnons en détail dans un souci d'exhaustivité. Nous procédons en 4 étapes :

Étape préliminaire. L'existence d'une solution découle facilement de l'antisymétrie du terme non-linéaire et du théorème du point fixe de Brouwer. L'unicité pour Δt assez petit découle du lemme de Gronwall, appliqué avec la remarque 3.2.1.

Étape 1. Remarquons que l'opérateur d'approximation P_η défini dans [30] satisfait $(P_\eta(\mathbf{u}))' = P_\eta(\mathbf{u}')$. En prenant le produit scalaire de (1.1) par une fonction test $\mathbf{v}_\eta \in V_\eta$ et en intégrant l'équation entre t^n et t^{n+1} , nous obtenons, en notant que $\operatorname{div} \mathbf{u}(t) = 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n), \mathbf{v}_\eta) + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}_\eta) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_\eta) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_\eta) dt - \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\operatorname{div} \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_\eta) dt. \end{aligned}$$

La différence entre cette dernière équation et (1.39) nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} ((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{v}_\eta) + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t)), \nabla \mathbf{v}_\eta) dt \\ & - (p_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_\eta \right) dt - \left(\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{v}_\eta \right). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{v}_\eta \in V_\eta$, le terme $(p_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta)$ s'annule. En insérant $P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})$ dans les deux premiers termes de l'égalité, en choisissant comme fonction test $\mathbf{v}_\eta = \mathbf{v}_\eta^{n+1} = \mathbf{u}_\eta^{n+1} - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \in V_\eta$, en remarquant que $(r_\eta p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 0$ et en multipliant l'équation par le pas de temps, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n, \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = ((\mathbf{u}(t^{n+1}) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}(t^n) - P_\eta \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ & + \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(t) - r_\eta p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) dt \\ & + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t) - \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt. \end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$(a - b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + (a - b)^2), \quad (3.3)$$

et en sommant l'équation de $n = 0$ à $m - 1$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{v}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{v}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= \sum_{n=0}^{m-1} \left\{ \left((\mathbf{u}(t^{n+1}) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}(t^n) - P_\eta \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) \right. \\
 & \quad + \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(t) - r_\eta p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) dt \\
 & \quad \left. + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t) - \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right\}. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Étape 2. Nous traitons maintenant le premier terme non-linéaire (celui de la divergence sera similaire) :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} \\
 &= (\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) + P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) \\
 & \quad + \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla (P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Étape 3. Nous étudions les majorations des termes du second membre de l'équation (3.4).

Sous-étape 3.1. Nous étudions les trois premiers termes du second membre.

- En posant $\mathbf{g}(t) = \mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)$, le premier terme est traité comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \left((\mathbf{u}(t^{n+1}) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}(t^n) - P_\eta \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) \right| \\
 & \leq \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{g}(t^{n+1}) - \mathbf{g}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq \sum_{n=0}^{m-1} C_\eta \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
 & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{m-1} C^2 \eta^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 & \leq \frac{C^2 \eta^2}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon_1 S_2}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

où S_2 est la constante de l'inégalité de Poincaré.

- Pour le calcul du second terme, nous intercalons $P_\eta \mathbf{u}(t)$ et nous obtenons deux expressions que nous traitons séparément.

1. La première est traitée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)), \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \frac{\nu}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \\
 & \leq \frac{\nu}{2} \left\{ \frac{C \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2}{\varepsilon_2} \eta^2 + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\},
 \end{aligned}$$

2. La deuxième est traitée comme suit. Sachant que :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} P_\eta(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1})) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} P_\eta \mathbf{u}'(\tau)(\tau - t^n) d\tau, \quad (3.6)$$

nous avons,

$$\begin{aligned}
 & \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla P_\eta(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla \int_t^{t^{n+1}} P_\eta \mathbf{u}'(\tau) d\tau, \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \nu C \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} (\tau - t^n) d\tau \\
 & \leq \frac{C\nu}{\sqrt{3}} \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} (\Delta t)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \\
 & \leq \frac{C\nu}{2\sqrt{3}\varepsilon_3} \Delta t^2 \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\nu}{2\sqrt{3}} \varepsilon_3 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

• Le troisième terme, qui correspond à la pression, est majoré de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(p(t) - r_\eta p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \left(\sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|p(t) - r_\eta p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{1}{2\varepsilon_4} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|p(t) - r_\eta p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\varepsilon_4}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \leq \frac{C \|p\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2}{2\varepsilon_4} \eta^2 + \frac{\varepsilon_4}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Sous-étape 3.2. Nous étudions maintenant les différents termes provenant du terme non-linéaire et du terme de stabilisation. Nous intercalons $P_\eta \mathbf{u}(t)$ et nous obtenons trois termes que nous allons étudier de la manière suivante :

• Calcul du premier terme. Il est composé de deux parties.

En posant $C_1 = \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)}$ et en appliquant les relations (1.48) et

$$\|\mathbf{g}\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla \mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \quad (3.7)$$

la première partie est comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} dt \\ & \leq \frac{C_1 S_4^2}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_5} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \varepsilon_5 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \\ & \leq \frac{C_1 S_4^2}{2} \left\{ \frac{C}{\varepsilon_5} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 \eta^2 + \varepsilon_5 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

et le terme correspondant à la divergence est :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\operatorname{div}(\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)) \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\ & \leq \frac{S_4}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} dt \\ & \leq \frac{S_4^2 C_1}{4} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_6} \eta^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_6 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Et la deuxième partie est comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(P_\eta(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|P_\eta(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1}))\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} dt \\ & \leq S_4^2 C_1 \sum_{n=0}^{m-1} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)} (\tau - t^n) d\tau \\ & \leq \frac{S_4^2 C_1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t^{3/2} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C_1 S_4^2}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{\varepsilon_7} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_7 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

et son analogue en divergence est tel que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\operatorname{div}(P_\eta(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1}))), \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)} (\tau - t^n) \|\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} d\tau \\
 & \leq \frac{C_1 S_4^2}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} (\Delta t)^{3/2} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2}, \\
 & \leq \frac{S_4^2 C_1}{4\sqrt{3}} \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{\varepsilon_8} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_8 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

• Calcul du deuxième terme. En remarquant que :

$$\|P_\eta \mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} \leq C C_1,$$

et en posant $C_2 = C C_1$, on donne une majoration de ce deuxième terme :

$$\begin{aligned}
 & \left| - \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq 2^{1/2} C_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \\
 & \leq \frac{2^{1/2} C_2}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\{ \varepsilon_9 |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_9} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\},
 \end{aligned}$$

et son analogue en divergence est tel que :

$$\begin{aligned}
 & \left| - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} dt \\
 & \leq \frac{2^{1/4} S_4 C_2}{4} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{10}} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_{10}}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\delta |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

• Calcul du troisième terme. On procède pour ce terme, de la même façon que pour la majoration du premier terme.

On contrôle la première partie comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq S_4^2 \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} dt \\
 & \leq \frac{S_4^2 C_2}{2} \left\{ \frac{C}{\varepsilon_{11}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 \eta^2 + \varepsilon_{11} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\},
 \end{aligned}$$

et sa partie analogue en divergence est telle que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\operatorname{div}(P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}))(\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \frac{S_4^2}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(t^{n+1}) - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{u}(t) - P_\eta \mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} dt \\
 & \leq \frac{S_4^2 C}{2} C_1 \eta \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(t)|_{H^2(\Omega)} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} dt \\
 & \leq \frac{S_4^2 C_1}{2} \left(\frac{\eta^4}{\varepsilon_{12}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_{12} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, on se sert de (3.6) :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla P_\eta (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \left| - \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, P_\eta (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \right) dt \right| \\
 & \leq S_4 \sum_{n=0}^{m-1} \|P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)} (\tau - t^n) d\tau \\
 & \leq \frac{S_4^2 C_2 C}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{\varepsilon_{13}} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_{13} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\},
 \end{aligned}$$

et son analogue est tel que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\operatorname{div}(P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) P_\eta (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) dt \right| \\
 & \leq \frac{S_4^2 C}{2} \sup_n |\mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)} (\tau - t^n) |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} d\tau \\
 & \leq \frac{S_4^2 C}{2\sqrt{3}} C_2 \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} (\Delta t)^{3/2} |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2} \right\} \\
 & \leq \frac{S_4^2 C_2 C}{4\sqrt{3}} \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{\varepsilon_{14}} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_{14} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Étape 4. Après un choix convenable adéquat des ε_i , $i = 1, \dots, 14$ et δ , l'équation (3.4) devient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{v}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{v}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C_\star + C \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

avec $C_\star = \alpha \eta^2 + \beta (\Delta t)^2$, où α et β sont des constantes dépendantes de \mathbf{u} , p , ν , mais indépendantes de η et Δt .

Ainsi nous obtenons le résultat en appliquant le lemme de Gronwall discret pour Δt assez petit, selon la remarque 3.2.1, et en faisant varier m .

Par la suite, le résultat final découle de ces majorations :

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \Delta t). \end{aligned}$$

■

En utilisant le résultat précédent avec les propriétés de l'opérateur P_η et en appliquant une inégalité triangulaire, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.3 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.2, il existe une constante $C(\mathbf{u}, p, \nu)$ indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \nu \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\mathbf{u}, p, \nu)(\eta^2 + (\Delta t)^2). \end{aligned}$$

La propriété suivante de la solution de (1.39)–(1.40) est une simple conséquence du précédent corollaire.

Corollaire 3.2.4 *En plus des hypothèses du théorème 3.2.2, nous supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de η et Δt telle que $\Delta t \geq \alpha \eta^2$. Alors il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)} \leq C. \quad (3.8)$$

✓ Preuve. Le théorème 3.2.2 entraîne en particulier

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \Delta t),$$

ceci implique :

$$|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{C} \frac{(\eta + \Delta t)}{\sqrt{\Delta t}} \leq \sqrt{C} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\Delta t} \right), \quad 0 \leq n \leq N,$$

d'où

$$|\mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)} \leq |\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{C} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\Delta t} \right) + C_1,$$

où $C_1 = \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)}$.

■

Remarque 3.2.5 L'hypothèse $\Delta t \geq \alpha\eta^2$ est une partie de l'hypothèse que nous utilisons plus loin : il existe deux constantes α et γ , positives, indépendantes de Δt et η , telles que :

$$\alpha\eta^2 \leq \Delta t \leq \gamma\eta^2, \quad (3.9)$$

i.e. Δt est exactement du même ordre que η^2 , i.e. $\Delta t = O(\eta^2)$.

3.2.2 Quelques estimations d'erreur pour le problème de Stokes

L'erreur d'estimation d'ordre deux dans $L^2(\Omega \times]0, T[)^2$, que nous voulons calculer dans ce qui suit, est basée sur un argument de dualité pour le problème de Stokes dépendant du temps :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla q(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.13)$$

Le premier lemme porte sur la régularité de la solution.

Lemme 3.2.6 Si $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T[)^2$, alors la solution (\mathbf{v}, q) du problème de Stokes (3.10)–(3.13) vérifie

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T; W^{2,4/3}(\Omega)^2) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2), \quad \mathbf{v}' \in L^2(\Omega \times]0, T[)^2 \quad \text{et} \quad q \in L^2(0, T; W^{1,4/3}(\Omega)).$$

Si Ω est convexe, alors

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2) \quad \text{et} \quad q \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Finalement, sans l'hypothèse de la convexité, si $\mathbf{g} \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$, alors

$$\mathbf{v}' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^2).$$

✓ Preuve. La démonstration est basée sur des résultats de Temam [65] et de Grisvard [33]. ■

Nous discrétisons (3.10)–(3.13) par le schéma de l'Étape 1 d'ordre un en temps (1.39)–(1.40) sans le terme non-linéaire : trouver $(\mathbf{v}_\eta^{n+1}, q_\eta^{n+1}) \in X_\eta \times M_\eta$, solution de :

$$\forall \mathbf{z}_\eta \in X_\eta, \quad \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n, \mathbf{z}_\eta) + \nu(\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{z}_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{z}_\eta) = (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{z}_\eta), \quad (3.14)$$

$$\forall \lambda_\eta \in M_\eta, \quad (\lambda_\eta, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{v}_\eta^0 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \quad (3.16)$$

où $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et \mathbf{g}^{n+1} est défini par :

$$\mathbf{g}^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) dt, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

C'est un problème linéaire, il admet une unique solution sur l'intervalle $[0, T]$ qui satisfait l'estimation d'erreur suivante.

3.2.2.1 Estimation en normes $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$

Lemme 3.2.7 *Soient $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$, $\mathbf{g}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$, $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$ et supposons que Ω est un convexe. Soient (\mathbf{v}, q) et $(\mathbf{v}_\eta, q_\eta)$ les solutions respectives de (3.10)–(3.13) et (3.14)–(3.16). Alors, il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(t^{n+1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C(\eta + \Delta t) \left(\|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2 + \|\mathbf{g}'\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)} + \|\mathbf{g}(0)\|_{L^2(\Omega)^2} \right). \end{aligned}$$

✓ *Preuve.* La démonstration est plus simple que celle du théorème 3.2.2 car le terme de convection est absent.

Sous l'hypothèse de la convexité, on utilise la régularité $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)$ et $q \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

De plus, comme $\mathbf{g}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$, nous avons $\mathbf{v}' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$. ■

Remarque 3.2.8 *Pour démontrer le lemme 3.2.7, il n'est pas nécessaire de restreindre Δt (comme dans l'énoncé du théorème 3.2.2) car on n'a pas besoin du lemme de Gronwall.*

3.2.2.2 Argument de dualité

Dans le but de démontrer un théorème qui établit que l'erreur satisfait une estimation d'ordre deux en espace et un en temps, en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$, nous utilisons un argument de dualité [68] qui est basé sur le problème de Stokes rétrograde suivant :

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n) + \nu \Delta \mathbf{w}^n - \nabla \lambda^n = \mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n) \quad \text{dans } \Omega, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}^n = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{w}^n|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.20)$$

Pour tout n , ce problème de Stokes admet une unique solution $\mathbf{w}^n \in H_0^1(\Omega)^2$, $\lambda^n \in L_0^2(\Omega)$, [31], [65].

Le problème (3.17)–(3.19) s'écrit sous forme variationnelle :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n, \mathbf{z}) - \nu(\nabla \mathbf{w}^n, \nabla \mathbf{z}) + (\lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{z}) &= (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n), \mathbf{z}), \\ \operatorname{div} \mathbf{w}^n &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nous établissons dans le lemme suivant quelques estimations *a priori* de la vitesse \mathbf{w}^n du problème de Stokes rétrograde semi-discret (3.17)–(3.20).

Lemme 3.2.9 *La solution \mathbf{w}^n , $0 \leq n \leq N$, du problème (3.17)–(3.20) vérifie les estimations a priori suivantes :*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^N \|\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ \leq \frac{\sqrt{3}S_2}{\sqrt{\nu}} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

où S_2 est la constante de l'inégalité de Poincaré et

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \sqrt{\nu} |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^N |\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ \leq \sqrt{3} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

✓ Preuve.

(i) Prenons, en premier lieu, comme fonction test $\mathbf{z} = \mathbf{w}^n$ dans (3.21). En utilisant (3.18), nous avons :

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n, \mathbf{w}^n) - \nu |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 = (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n), \mathbf{w}^n).$$

En utilisant la formule (3.3) et en changeant de signe, nous obtenons,

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{w}^n\|^2 - \|\mathbf{w}^{n+1}\|^2 + \|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 = (\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n, \mathbf{w}^n).$$

D'où, en multipliant l'équation par le pas de temps Δt et en sommant de i à N , nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=i}^N \left(\|\mathbf{w}^n\|^2 - \|\mathbf{w}^{n+1}\|^2 + \|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \sum_{n=i}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \\ = \sum_{n=i}^N \Delta t (\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n, \mathbf{w}^n). \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{w}^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=i}^N \|\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \sum_{j=i}^N \Delta t |\mathbf{w}^j|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} S_2 \left(\varepsilon \sum_{j=i}^N \Delta t |\mathbf{w}^j|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=i}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^j) - \mathbf{v}_\eta^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

où S_2 est la constante de Poincaré. Nous choisissons $\varepsilon > 0$ de façon à garder $\frac{\nu}{2} \sum_{j=i}^N \Delta t |\mathbf{w}^j|_{H^1(\Omega)}^2$

c'est à dire $\varepsilon = \frac{\nu}{S_2}$. Nous avons donc l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{w}^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=i}^N \|\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{j=i}^N \Delta t |\mathbf{w}^j|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{S_2^2}{\nu} \sum_{j=i}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^j) - \mathbf{v}_\eta^j\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^N \|\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ \leq \frac{\sqrt{3} S_2}{\sqrt{\nu}} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

(ii) Prenons maintenant la fonction test $\mathbf{z} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1})$ dans (3.21). Nous avons :

$$-\left\| \frac{\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu \left(\nabla \mathbf{w}^n, \nabla \left(\frac{\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}}{\Delta t} \right) \right) = \left(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n), \frac{\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}}{\Delta t} \right),$$

d'où en changeant de signe et en sommant :

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{n=i}^N \left(\|\nabla \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ \leq \sum_{n=i}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Alors les mêmes calculs que précédemment nous donnent :

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \left(\|\nabla \mathbf{w}^i\|^2 + \sum_{j=i}^N |\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\ \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon \sum_{j=i}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^j) - \mathbf{v}_\eta^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=i}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Nous choisissons $\varepsilon = 1$ de façon à garder $\frac{1}{2} \sum_{j=i}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}}{\Delta t} \right\|_{H^1(\Omega)}^2$.

Nous avons donc la relation suivante :

$$\sum_{j=i}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{w}^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{j=i}^N |\mathbf{w}^j - \mathbf{w}^{j+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{j=i}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^j) - \mathbf{v}_\eta^j\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \sqrt{\nu} |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^N |\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ \leq \sqrt{3} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

■

De plus, nous avons le

Corollaire 3.2.10 *Si Ω est convexe, alors $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2$, $\lambda^n \in H^1(\Omega)$ et*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t (|\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2) \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.24)$$

avec une constante C indépendante de Δt et de η .

✓ Preuve.

Nous avons pour chaque n , $0 \leq n \leq N$,

$$-\nu \Delta \mathbf{w}^n + \nabla \lambda^n = \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n).$$

C'est un problème de Stokes et nous venons de voir que le second membre est borné dans $L^2(\Omega)^2$. Donc, si Ω est un convexe, nous savons [33] que $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2$ et $\lambda^n \in H^1(\Omega)$, avec

$$\|\mathbf{w}^n\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (3.25)$$

En prenant le carré de (3.25), en multipliant ses deux membres par Δt , en sommant sur n et en utilisant (3.23), on trouve (3.24), avec une constante qui ne dépend que de ν et Ω . ■

3.2.2.3 Erreur en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$

Voici l'argument de dualité qui nous permet d'établir l'estimation d'erreur de la vitesse en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$, avec les estimations a priori du problème de Stokes rétrograde.

Théorème 3.2.11 *On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de η et Δt , telle que $\Delta t \geq \alpha \eta^2$. Si Ω est convexe, $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$, $\mathbf{g}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$, alors il existe une constante C , qui dépend des normes de \mathbf{g}, \mathbf{g}' et $\mathbf{g}(0)$ mais indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t). \quad (3.26)$$

En particulier, si (3.9) a lieu, alors

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^2. \quad (3.27)$$

✓ Preuve. On procède en 5 étapes :

Étape 1. Posons $\mathbf{e}^n = \mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)$, prenons pour fonction test \mathbf{e}^n dans (3.21) et sommons de $n = 0$ à N . Nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^N \left[\left(\frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t}, \mathbf{e}^n \right) - \nu (\nabla \mathbf{w}^n, \nabla \mathbf{e}^n) + (\lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n) \right] = \sum_{n=0}^N \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.28)$$

Or

$$\sum_{n=0}^N (a^{n+1} - a^n) b^n = a^{N+1} b^N - a^0 b^0 + \sum_{n=0}^{N-1} a^{n+1} (b^n - b^{n+1}), \quad (3.29)$$

et

$$\sum_{n=0}^N (\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n, \mathbf{e}^n) = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1})$$

car $\mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{e}^0 = \mathbf{0}$. Ceci implique que :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{w}^{n+1}, \frac{\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}}{\Delta t} \right) - \nu \sum_{n=0}^N (\nabla \mathbf{w}^n, \nabla \mathbf{e}^n) + \sum_{n=0}^N (\lambda^n - r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n) = \sum_{n=0}^N \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

car $(r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n) = (r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^n) - (r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{v}(t^n)) = 0$ grâce à la condition d'incompressibilité, exacte et discrète.

Donc, en multipliant l'équation par Δt , nous trouvons

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}) - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla \mathbf{w}^n, \nabla \mathbf{e}^n) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^N \Delta t (\lambda^n - r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n) \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} (P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}) \quad (3.30) \\
 &\quad - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}), \nabla \mathbf{e}^n) - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^n) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^N \Delta t (\lambda^n - r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n).
 \end{aligned}$$

Étape 2. En soustrayant l'égalité (3.10) intégrée entre t^n et t^{n+1} de (3.14), nous obtenons, pour tout $\varphi_\eta \in V_\eta$,

$$(\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n, \varphi_\eta) = -\nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds - \int_{t^n}^{t^{n+1}} (q(s) - r_\eta q(s), \operatorname{div} \varphi_\eta) ds.$$

Ainsi en prenant $\varphi_\eta = P_\eta \mathbf{w}^{n+1}$, l'équation (3.30) devient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(s)), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (q(s) - r_\eta q(s), \operatorname{div} P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds \\
 &\quad - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}), \nabla \mathbf{e}^n) - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla (\mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1}), \nabla \mathbf{e}^n) \\
 &\quad - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^n) + \sum_{n=0}^N \Delta t (\lambda^n - r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n).
 \end{aligned}$$

Étape 3. Nous allons traiter respectivement les deux termes suivants :

$$\nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(s)), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds.$$

- Le calcul du premier terme est le suivant :

$$\sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^n) = \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1})) + \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^{n+1}).$$

En appliquant la formule (3.29), on a :

$$\sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1})) = \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta (\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n), \nabla \mathbf{e}^n),$$

car $\mathbf{e}^0 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{0}$; donc

$$\nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^n) = \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta (\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n), \nabla \mathbf{e}^n) + \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^{n+1}).$$

- Celui du deuxième est :

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(s)), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla \mathbf{e}^{n+1}, \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds \\ &+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla (\mathbf{v}(t^{n+1}) - \mathbf{v}(s)), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds. \end{aligned}$$

En utilisant (3.6), nous obtenons :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla (\mathbf{v}(t^{n+1}) - \mathbf{v}(s)) ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) \nabla \mathbf{v}'(\tau) d\tau,$$

d'où l'expression du deuxième terme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(s)), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds &= \sum_{n=0}^{N-1} \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla \mathbf{e}^{n+1}, \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) ds \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) (\nabla \mathbf{v}'(\tau), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) d\tau. \end{aligned}$$

Étape 4. En tenant compte de ces nouvelles expressions et en effectuant les simplifications nécessaires, l'équation (3.30) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\
 & \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} \nu \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) (\nabla \mathbf{v}'(\tau), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) d\tau \\
 & - \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla (P_\eta \mathbf{w}^n - \mathbf{w}^n), \nabla \mathbf{e}^n) + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (q(s) - r_\eta q(s), \operatorname{div}(P_\eta \mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1})) ds \\
 & + \sum_{n=0}^N \Delta t (\lambda^n - r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n).
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Étape 5. Majorons chaque terme du second membre de (3.31).

- En tenant compte de (3.24) et d'après le lemme 3.2.7, il existe une constante C , dépendant de la norme de \mathbf{g}, \mathbf{g}' et $\mathbf{g}(0)$ et non de η et Δt , telle que le premier terme se majore ainsi :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq C \frac{\eta^2}{\sqrt{\Delta t}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{w}^{n+1}\|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{C\eta^2(\eta + \Delta t)}{\sqrt{\Delta t}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- Pour le calcul du deuxième terme, nous procédons comme suit. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
 & \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) (\nabla \mathbf{v}'(\tau), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) d\tau \\
 & \leq \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) \|\nabla \mathbf{v}'(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
 & \leq \|\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n)^2 d\tau \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\nabla \mathbf{v}'(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{(\Delta t)^{3/2}}{\sqrt{3}} \|\mathbf{v}'\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; H^1(\Omega)^2)} \|\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

D'où, d'après (3.22),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) (\nabla \mathbf{v}'(\tau), \nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) d\tau \\
 & \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{N-1} (\Delta t)^{3/2} \|\mathbf{v}'\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; H^1(\Omega)^2)} \|\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq C \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} \|\mathbf{v}'\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

• D'après le lemme 3.2.7 et l'équation (3.24), le troisième terme est majoré comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \nu \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |P_\eta \mathbf{w}^n - \mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{e}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \nu \eta \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{e}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C \nu \eta (\eta + \Delta t) \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

• Les termes relatifs aux pressions sont majorés comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\lambda^n - r_\eta \lambda^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{e}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \eta \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{e}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C \eta (\eta + \Delta t) \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|q - r_\eta q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |P_\eta \mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C \eta \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|q - r_\eta q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}^{n+1}|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C \eta \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|q - r_\eta q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C \eta^2 \|q\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

En utilisant toutes ces estimations, (3.30) est majorée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \left[\frac{C \eta^2 (\eta + \Delta t)}{\sqrt{\Delta t}} + C(\nu + 1) \eta (\eta + \Delta t) + \frac{C \Delta t}{\sqrt{3}} \|\mathbf{v}'\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)} \right. \\
 & \quad \left. + \eta^2 \|q\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \right] \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Donc nous avons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} &\leq C \left[\frac{\eta^2(\eta + \Delta t)}{\sqrt{\Delta t}} + (\nu + 1)\eta(\eta + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} \|\mathbf{v}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)} \right. \\ &\quad \left. + \eta^2 \|q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \right] \\ &\leq C(\eta^2 + \Delta t), \end{aligned}$$

puisque $\Delta t \geq \alpha\eta^2$.

Si (3.9) a lieu, nous obtenons une estimation d'ordre deux en espace c'est-à-dire que :

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^2. \quad (3.32)$$

■

3.2.2.4 Estimation d'erreur de la dérivée en temps

On cherche maintenant à obtenir une estimation de l'erreur en norme $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$. La démonstration utilise la variante de la projection de Stokes suivante :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{u}, p) \in V \times L_0^2(\Omega), \quad S_\eta(\mathbf{u}) \in V_\eta \quad \text{est défini par} \\ \forall \mathbf{v}_\eta \in V_\eta, \quad \nu(\nabla(S_\eta(\mathbf{u}) - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_\eta) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta). \end{aligned} \quad (3.33)$$

La quantité $S_\eta(\mathbf{u})$ est clairement définie de façon unique par (\mathbf{u}, p) (nous n'indiquerons pas la dépendance en p pour simplifier les notations). L'opérateur S_η vérifie les inégalités suivantes :

Lemme 3.2.12 *Soit $(\mathbf{u}, p) \in V \times L_0^2(\Omega)$. Alors $S_\eta(\mathbf{u})$ définie par (3.33) satisfait*

$$|S_\eta(\mathbf{u}) - \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)} \leq 2|P_\eta(\mathbf{u}) - \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\nu} \|r_\eta(p) - p\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.34)$$

Si, de plus, Ω est convexe, il existe une constante C , indépendante de η , telle que :

$$\|S_\eta(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta(|S_\eta(\mathbf{u}) - \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)} + \|r_\eta(p) - p\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.35)$$

✓ Preuve. En effet, (3.33) permet d'écrire, pour tout $\mathbf{v}_\eta \in V_\eta$,

$$\nu(\nabla(S_\eta \mathbf{u} - P_\eta \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_\eta) = -\nu(\nabla(P_\eta \mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_\eta) - (p - r_\eta p, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta).$$

Donc, en posant $\mathbf{v}_\eta = S_\eta \mathbf{u} - P_\eta \mathbf{u}$, nous obtenons l'inégalité

$$|S_\eta \mathbf{u} - P_\eta \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |P_\eta \mathbf{u} - \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)} |S_\eta \mathbf{u} - P_\eta \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\nu} \|p - r_\eta p\|_{L^2(\Omega)} |S_\eta \mathbf{u} - P_\eta \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)},$$

d'où (3.34). L'inégalité (3.35) s'obtient par un argument de dualité. ■

Nous avons alors le résultat suivant :

Lemme 3.2.13 *Sous les hypothèses du lemme 3.2.7 et si $q' \in L^2(\Omega \times]0, T[)$, il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

✓ Preuve. La démonstration s'effectue en trois étapes.

Étape 1. En retranchant les équations totalement discrètes des équations continues du problème de Stokes, en utilisant le fait que $S_\eta \mathbf{v}'(s) = (S_\eta \mathbf{v}(s))'$ et en posant $\mathbf{v}_\eta^n - S_\eta \mathbf{v}(t^n) = \mathbf{e}_\eta^n$, nous obtenons, pour tout $\varphi_\eta \in V_\eta$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n, \varphi_\eta) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{v}'(s) - S_\eta \mathbf{v}'(s), \varphi_\eta) ds + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (q(s), \operatorname{div} \varphi_\eta) ds = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n, \varphi_\eta) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{v}'(s) - S_\eta \mathbf{v}'(s), \varphi_\eta) ds \\ & + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{v}(s) - \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds \quad (3.37) \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (q(s), \operatorname{div} \varphi_\eta) ds = 0. \end{aligned}$$

Nous avons, d'après la définition de S_η ,

$$\frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{v}(s) - \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds = -\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (q(s), \operatorname{div} \varphi_\eta) ds.$$

Alors l'équation (3.37) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n, \varphi_\eta) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{v}'(s) - S_\eta \mathbf{v}'(s), \varphi_\eta) ds + \nu (\nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \nabla \varphi_\eta) \\ & + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{v}(t^{n+1}) - S_\eta \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds = 0. \end{aligned}$$

Étape 2. Calculons le terme $\frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{v}(t^{n+1}) - S_\eta \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds$. On a

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} (S_\eta \mathbf{v}(t^{n+1}) - S_\eta \mathbf{v}(s)) ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} S_\eta \mathbf{v}'(\tau) (\tau - t^n) d\tau.$$

$$\text{Alors } \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{v}(t^{n+1}) - S_\eta \mathbf{v}(s)), \nabla \varphi_\eta) ds = \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla S_\eta \mathbf{v}'(s), \nabla \varphi_\eta)(s - t^n) ds.$$

Par suite, l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n, \varphi_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \nabla \varphi_\eta) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{v}'(s) - S_\eta \mathbf{v}'(s), \varphi_\eta) ds - \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla S_\eta \mathbf{v}'(s), \nabla \varphi_\eta)(s - t^n) ds. \end{aligned}$$

En prenant pour fonction test la fonction $\varphi_\eta = \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t}$, en multipliant l'équation par le pas de temps, en la sommant de $n = 0$ à $m - 1$ et en appliquant (3.3) au premier membre, nous obtenons alors la relation :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \left(\|\nabla \mathbf{e}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla \mathbf{e}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla(\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{v}'(s) - S_\eta \mathbf{v}'(s), \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t}) ds - \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla S_\eta \mathbf{v}'(s), \nabla(\frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t}))(s - t^n) ds. \end{aligned}$$

Étape 3. Le second membre de cette dernière équation est majoré par :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m-1} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{v}' - S_\eta \mathbf{v}'\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\ &+ \nu \sum_{n=0}^{m-1} \left| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right|_{H^1(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |S_\eta \mathbf{v}'|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n)^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{v}' - S_\eta \mathbf{v}'\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \left| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right|_{H^1(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |S_\eta \mathbf{v}'|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} (\Delta t)^{3/2} \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{v}' - S_\eta \mathbf{v}'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\nu \Delta t}{2\sqrt{3}\varepsilon_2} \|S_\eta \mathbf{v}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\nu \varepsilon_2}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} |\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Mais (3.35) appliquée à \mathbf{v}' donne p.p. sur $]0, T[$

$$\|S_\eta \mathbf{v}' - \mathbf{v}'\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta(|\mathbf{v}'|_{H^1(\Omega)} + \|q'\|_{L^2(\Omega)}).$$

Donc en choisissant convenablement ε_1 et ε_2 , nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{e}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu \|\nabla \mathbf{e}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla(\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\eta^2 \left(\|\mathbf{v}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \|q'\|_{L^2(\Omega \times]0,T])}^2 \right) + C' \Delta t \|S_\eta \mathbf{v}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}. \end{aligned}$$

Ainsi, (3.36) s'obtient par une inégalité triangulaire, en appliquant le résultat précédent ainsi que les propriétés de l'opérateur S_η . \blacksquare

L'hypothèse de régularité sur q' dans le lemme 3.2.13 peut être obtenue par exemple dans les circonstances décrites dans le :

Lemme 3.2.14 *Si $\mathbf{g} \in H^1(0,T;L^2(\Omega)^2)$ et $\mathbf{g}(0) \in V$, alors $q' \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Omega)/\mathbb{R})$. Si en plus, Ω est convexe, alors $q' \in L^2(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$.*

La démonstration est basée sur une méthode de Galerkin. On pourra, par exemple, consulter [30].

3.2.3 Application des résultats aux équations de Navier-Stokes

Dans cette section, nous allons établir une estimation d'erreur d'ordre deux pour la norme L^2 en temps et en espace de $\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})$, erreur sur la vitesse du problème de Navier-Stokes. Pour cela, nous divisons l'erreur en deux contributions, l'une linéaire et l'autre non-linéaire. La contribution linéaire, qui n'est autre que la solution discrète de la partie de Stokes dans (1.1), est estimée par le théorème 3.2.11. Puis nous démontrons un résultat de *superconvergence* pour l'erreur de la partie non-linéaire.

3.2.3.1 Application de l'argument de dualité à la contribution linéaire

Plus précisément, soit $\mathbf{v}_\eta^n \in V_\eta$ définie par :

$$\forall \mathbf{w}_\eta \in V_\eta, \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n, \mathbf{w}_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{w}_\eta) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{f}(s) - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{w}_\eta) ds. \quad (3.38)$$

Alors, \mathbf{v}_η^{n+1} satisfait (3.14) avec la donnée $(\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{w}_\eta) = \left(\mathbf{f}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{w}_\eta \right)$ et le théorème 3.2.11 admet le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.15 *On suppose que \mathbf{u} vérifie les hypothèses du théorème 3.2.2, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times]0,T])^2$, $\mathbf{f}' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)$, $\mathbf{f}(0) \in L^2(\Omega)^2$ et Ω est convexe. Alors*

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t). \quad (3.39)$$

où C dépend de $\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}(0)$ et de \mathbf{u}, \mathbf{u}' et $\mathbf{u}(0)$, mais ne dépend pas de η^2 et Δt .

✓ *Preuve.* Il suffit de prendre $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(s) - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s)$ presque partout sur $]0, T[$. Les hypothèses sur \mathbf{f} et \mathbf{u} donnent immédiatement que $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$, $\mathbf{g}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$ et $\mathbf{g}(0) \in L^2(\Omega)^2$. Alors le résultat découle immédiatement du théorème 3.2.11. ■

De même, le lemme 3.2.13 admet le

Corollaire 3.2.16 *Sous les hypothèses du corollaire 3.2.15 et si $p' \in L^2(\Omega \times]0, T[)$, il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \sqrt{\nu} |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (3.40)$$

$$+ \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}),$$

où C dépend de $\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}(0)$, de $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}(0)$ et p' , mais ne dépend ni de Δt , ni de η .

3.2.3.2 Résultat de superconvergence : contribution non-linéaire

Nous démontrons le résultat de superconvergence suivant :

Théorème 3.2.17 *Sous les hypothèses du corollaire 3.2.16 et si $\mathbf{u} \in C^0(0, T; W^{1,4}(\Omega)^2)$, il existe une constante $k_0 > 0$ telle que pour $\Delta t \leq k_0$, on a :*

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (3.41)$$

$$+ \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t).$$

✓ *Preuve.* On procède en cinq étapes :

Étape 1. D'une part, comme ci-dessus, nous prenons pour second membre dans l'équation de Stokes (3.10)–(3.13) la fonction :

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(s) - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s).$$

\mathbf{u} est ainsi la solution du problème (3.10)–(3.13) et nous l'approchons par (3.14)–(3.16) :

$$\forall \varphi_\eta \in V_\eta, \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^n, \varphi_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla \varphi_\eta) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{f}(s) - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \varphi_\eta) ds.$$

D'autre part, \mathbf{u}_η^{n+1} est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} & \forall \varphi_\eta \in V_\eta, \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^n, \varphi_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \nabla \varphi_\eta) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{f}(s), \varphi_\eta) ds - \left[(\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta) \right]. \end{aligned}$$

D'où, en retranchant ces deux équations, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n), \varphi_\eta) + \nu (\nabla(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}), \nabla \varphi_\eta) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[(\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \varphi_\eta) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Étape 2. On s'intéresse au terme $\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} &= (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) + \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \\ &\quad + \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}. \end{aligned}$$

Le terme de la deuxième ligne s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) &= (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} + \mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ &\quad + (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \\ &\quad + (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) \\ &\quad + \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})). \end{aligned}$$

Étape 3. Calculons les termes du second membre de (3.42) et établissons l'équation générale.

• Calcul du premier terme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \varphi_\eta) ds &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \varphi_\eta \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s)), \varphi_\eta) ds + ((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta) \\ &\quad + (\mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^{n+1}), \varphi_\eta) + ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \varphi_\eta) \\ &\quad + ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \varphi_\eta) + (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \varphi_\eta). \end{aligned}$$

• Calcul du second terme :

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta) &= (\operatorname{div} (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^{n+1}), \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta) + (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}, (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \cdot \varphi_\eta) \\ &\quad + (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \varphi_\eta) + (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \varphi_\eta) \\ &\quad + (\operatorname{div} \mathbf{u}(t^{n+1}), (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \varphi_\eta), \end{aligned}$$

dont le dernier terme s'annule.

Avec ces deux calculs, nous multiplions (3.42) par Δt , sommons de $n = 0$ à $m - 1$ et prenons pour fonction test $\varphi_\eta = \varphi_\eta^{n+1} = \mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{m-1} (\varphi_\eta^{n+1} - \varphi_\eta^n, \varphi_\eta^{n+1}) + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 &= \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} ((\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \varphi_\eta^{n+1}) ds \\
 &+ \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s)), \varphi_\eta^{n+1}) ds \\
 &- \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\{ (\varphi_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \varphi_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \right\} \\
 &- \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\{ (\mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \varphi_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \right\} \\
 &+ \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\{ ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \varphi_\eta^{n+1}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \right\} \\
 &+ \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\{ ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \varphi_\eta^{n+1}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \right\} \\
 &+ \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \varphi_\eta^{n+1}).
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Étape 4. Nous allons traiter maintenant les différents termes du second membre de (3.43). Le quatrième terme du second membre s'annule grâce au fait que $(\mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \varphi_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1}) = -\frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta^{n+1})$.

• Puisque $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, le premier terme est majoré ainsi. En posant $C_0 = \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;L^4(\Omega)^2)}$ et $\tilde{C} = \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega)^2)}$,

$$\sum_{n=0}^{m-1} \left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} ((\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \varphi_\eta^{n+1}) ds \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{m-1} \left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} - \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s) \right) \cdot \nabla \varphi_\eta^{n+1}, \mathbf{u}(s) \right) ds \Big| \\
 &= \sum_{n=0}^{m-1} \left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_s^{t^{n+1}} \mathbf{u}'(\tau) d\tau \cdot \nabla \varphi_\eta^{n+1}, \mathbf{u}(s) \right) ds \right| = \sum_{n=0}^{m-1} \left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}'(\tau) \nabla \varphi_\eta^{n+1}, \int_{t^n}^\tau \mathbf{u}(s) ds d\tau \right) \right| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla \varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{L^4(\Omega)} \left(\int_{t^n}^\tau \|\mathbf{u}(s)\|_{L^4(\Omega)}^2 ds \right) d\tau \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla \varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(t^n, t^{n+1}; L^4(\Omega)^2)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{L^4(\Omega)} d\tau \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla \varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(t^n, t^{n+1}; L^4(\Omega)^2)} \frac{(\Delta t)^{3/2}}{\sqrt{3}} \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; L^4(\Omega)^2)} \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^2)} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^4(\Omega)^2)} \Delta t \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

qui finalement sera majoré de la façon suivante :

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s) \right) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \varphi_\eta^{n+1} \right) ds \Big| \leq \frac{C_0}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{\tilde{C}^2}{\varepsilon_0} (\Delta t)^2 + \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.$$

• Le second terme a la même majoration car

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s)), \varphi_\eta^{n+1} \right) ds \right| \\
 &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \varphi_\eta^{n+1}, \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(s) \right) ds \right| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla \varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^2)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n) \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{L^4(\Omega)} d\tau \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^2)} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^4(\Omega)^2)} \Delta t \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{C_0}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{\tilde{C}^2}{\varepsilon_1} (\Delta t)^2 + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

• Pour majorer le troisième terme, nous le décomposons en deux parties que nous traitons séparément.

∞ Pour la première, on a, en posant $C_1 = \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}$ et en appliquant (3.7),

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\varphi_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1} \right) \right| &\leq 2^{1/2} C_1 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq \frac{C_1}{\sqrt{2}} \left\{ \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

◇ Pour la deuxième partie, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right) \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{L^4(\Omega)} \left\| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right\|_{L^4(\Omega)} \\
 & \leq \frac{2^{1/4} S_4}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)} \left| \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)} \left\| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \\
 & \leq \frac{2^{1/4} S_4 C_1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)}^{3/2} \left\| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\
 & \leq \frac{2^{1/4} S_4 C_1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\frac{3\varepsilon_3^{4/3}}{4} \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3^4} \left\| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

• Pour le calcul du cinquième terme, nous appliquons les lemmes 3.2.7 et 3.2.13. Les deux termes se traitent de la même façon. Le premier donne

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right) \right| \\
 & \leq S_4^2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\sup_n \left| \mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \right|_{H^1(\Omega)} \right) \left| \mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \right|_{H^1(\Omega)} \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)} \\
 & \leq S_4^2 C (\eta + \Delta t) (\eta + \sqrt{\Delta t}) \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{S_4^2}{2} \left\{ \frac{C^2}{\varepsilon_4} (\eta^4 + (\Delta t)^3 + \eta^2 \Delta t) + \varepsilon_4 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Et le deuxième donne

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right) \right| \\
 & \leq \frac{S_4^2}{4} \left\{ \frac{C^2}{\varepsilon_5} (\eta^4 + (\Delta t)^3 + \eta^2 \Delta t) + \varepsilon_5 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left| \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

• Pour le sixième terme, on utilise la formule bien connue :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} dx &= - \int_{\Omega} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{u}(t^{n+1}) dx.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Donc le sixième terme se ramène à :

$$\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\{ \left((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} \right) - \left((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}(t^{n+1}) \right) \right\}.$$

1. Pour la première partie, on utilise le théorème 3.2.11 et on pose $C_2 = \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega)^2)}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \varphi_\eta^{n+1} \right) \right| \\ & \leq S_4 C_2 (\eta^2 + \Delta t) \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{S_4 C_2}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_6} (\eta^4 + (\Delta t)^2) + \varepsilon_6 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

2. De même pour la deuxième partie, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \varphi_\eta^{n+1}, \mathbf{u}(t^{n+1}) \right) \right| \\ & \leq \frac{C_2}{2} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C_2}{4} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_7} (\eta^4 + (\Delta t)^2) + \varepsilon_7 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

- Enfin, comme $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, le dernier terme se ramène au terme ci-dessus et donc on a la majoration :

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \varphi_\eta^{n+1} \right) \right| \leq \frac{C_2}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_8} (\eta^4 + (\Delta t)^2) + \varepsilon_8 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.$$

Ainsi, l'équation (3.43) devient, pour tout m , $1 \leq m \leq N$,

$$\frac{1}{2} \|\varphi_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \|\varphi_\eta^{n+1} - \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq A + B + C,$$

où

$$\begin{aligned} A & \leq C(\eta^4 + (\Delta t)^2), \quad B = \gamma_1 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad C = \gamma_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2, \\ \gamma_1 & = \gamma(C_0, C_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5, \delta_1), \quad \gamma_2 = \gamma(S_4, C_1, C_2, C_3, \varepsilon_i, i = 2, \dots, 6, \delta_1). \end{aligned}$$

Étape 5. Nous choisissons convenablement les ε_i et nous appliquons le lemme de Gronwall avec la remarque 3.2.1. L'équation (3.43) devient :

$$\begin{aligned} \|\varphi_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\varphi_\eta^{n+1} - \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq e^{Cm\Delta t} (\eta^4 + (\Delta t)^2) \\ & \leq e^{CT} (\eta^4 + (\Delta t)^2). \end{aligned}$$

D'où le résultat final :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\varphi_\eta^{n+1} - \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ \leq C(\eta^2 + \Delta t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le corollaire 3.2.15 et le théorème 3.2.17 nous donnent alors

Corollaire 3.2.18 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.17, nous avons, pour $\Delta t \leq k_0$:*

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + \Delta t). \quad (3.45)$$

✓ *Preuve.* Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire au terme $\|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et d'appliquer le résultat du corollaire 3.2.15 au premier terme du second membre et celui du théorème 3.2.17 au second. ■

3.2.4 Une estimation pour la pression

Les résultats obtenus précédemment sur la vitesse nous permettent d'établir une erreur d'estimation de la pression. Pour mesurer l'erreur sur la pression, on a le

Lemme 3.2.19 *En plus des hypothèses du corollaire 3.2.4, on suppose que $p' \in L^2(\Omega \times]0, T[)$. Alors $(\mathbf{u}(t^{n+1}), p(t^{n+1}))$ et $(\mathbf{u}_\eta^{n+1}, p_\eta^{n+1})$ les solutions respectives de (1.1)–(1.4) et (1.39)–(1.40), satisfont :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta^*} \left\{ C_1(\eta + \Delta t) + C_2 \Delta t \|p'\|_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \right. \\ & \left. + C_3 \eta \|p\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

où β^* est la constante de la condition inf-sup (1.16) et les coefficients $C_i, 1 \leq i \leq 3$, sont indépendants de η et Δt .

✓ *Preuve.* Nous prenons la différence de l'équation (1.1) intégrée entre t^n et t^{n+1} et l'équation (1.39) multipliées par une fonction test \mathbf{w}_η^{n+1} , nous insérons $r_\eta p(s)$ et $r_\eta p(t^{n+1})$ avec, bien évidemment, le terme source vérifiant (3.1) et

$$\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) = (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} + \mathbf{u}(s) \cdot \nabla (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)).$$

Nous sommions le résultat de $n = 0$ à $N - 1$ et nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) + \nu \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds \\
 & \quad + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)), \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) \right\} ds \\
 & \quad + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)), \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(r_\eta p(s) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds \\
 & \quad + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(p(s) - r_\eta p(s), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

D'après la condition inf-sup (1.16), pour chaque $q_\eta \in M_\eta$,

$$\exists \mathbf{w}_\eta \in V_\eta^\perp; (\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta, q_\eta) = \|q_\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbf{w}_\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta^\star} \|q_\eta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dans notre cas, $q_\eta = p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1})$. Dans ce qui suit, nous étudions, comme précédemment, les termes du second membre.

- Pour le premier terme, on écrit

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) \right| \\
 & \leq S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- Comme $\mathbf{w}_\eta^{n+1} \in V_\eta^\perp$, on a $(\nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \nabla P_\eta \mathbf{u}(s)) = 0$ pour tout s et le second terme est ainsi contrôlé :

$$\begin{aligned}
 & \left| \nu \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds \right| = \left| \nu \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(P_\eta \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds \right| \\
 & \leq \nu \left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_\eta \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C_1 \eta \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- Pour les troisième et quatrième termes, on utilise la formule (3.44) qui donne ici :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)), \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) \right\} ds \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) - \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right) \right\} ds \right| \\
 &\leq S_4^2 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} ds \\
 &\leq S_4^2 \sup_n |\mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \\
 &\leq C_2(\eta + \Delta t) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- Le cinquième terme s'écrit :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla (\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)), \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds \right| = \left| - \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s) \right) ds \right|$$

et donc se majore comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &\leq S_4^2 (\sup_s \|\mathbf{u}(s)\|_{H^1(\Omega)}) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq C_3(\eta + \Delta t) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- Pour le sixième terme, sachant que r_η est stable en norme L^2 , on a

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(r_\eta p(s) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) ds \right| \\
 &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|p(s) - p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{t^n}^{\tau} \|p'(\tau)\|_{L^2(\Omega)} ds \right) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\
 &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} \|\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n)^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \|p'(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{C \Delta t}{\sqrt{3}} \|p'\|_{L^2(\Omega \times]0, T])} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

• Pour le septième terme, enfin, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(s) - r_\eta p(s), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds \right| \\
 & \leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|p(s) - r_\eta p(s)\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 & \leq \sum_{n=0}^{N-1} C\eta \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |p(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\
 & \leq C\eta \|p\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

L'égalité (3.47) devient

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta^*} \left\{ (C_1 + C_2 + C_3)(\eta + \Delta t) + C_4 \Delta t \|p'\|_{L^2(\Omega \times]0,T])} \right. \\
 & \left. + S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + C\eta \|p\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \right\}.
 \end{aligned}$$

Le résultat cherché découle de cette inégalité. \blacksquare

Nous devons estimer $\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$. Or, pour majorer convenablement cette expression, nous avons besoin que $\sup_n \|\mathbf{u}_\eta^n\|_{L^\infty(\Omega)}$ soit uniformément borné. Comme nous sommes en dimension deux, il suffit que $\sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{W^{1,r}(\Omega)}$ soit uniformément borné pour un réel $r > 2$. Cette estimation peut être obtenue à partir des résultats précédents au moyen d'une inégalité inverse, qui demande sur \mathcal{T}_η une hypothèse de régularité plus forte que celle de la régularité (cf. définition 2.0.4). Par exemple, si on choisit, pour fixer les idées, $r = \frac{5}{2}$, alors nous faisons l'hypothèse suivante : il existe une constante $\tilde{\tau}$ indépendante de η et Δt telle que :

$$\rho_{\min} \geq \tilde{\tau} \eta^5, \quad \text{où } \rho_{\min} = \inf_{\kappa \in \mathcal{T}_\eta} \rho_\kappa. \quad (3.48)$$

Cette hypothèse est peu contraignante. Nous l'utiliserons plus loin pour montrer que $\sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)}$ est uniformément borné.

Auparavant, nous démontrons le

Lemme 3.2.20 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.17, on a*

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\frac{\eta^2}{\sqrt{\Delta t}} + \sqrt{\Delta t} \right). \quad (3.49)$$

✓ *Preuve.* La majoration (3.41) entraîne en particulier :

$$\begin{aligned}
 \forall n, 1 \leq n \leq N, |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq \frac{1}{\Delta t} (\eta^4 + (\Delta t)^2) \\
 & \leq \frac{\eta^4}{\Delta t} + \Delta t,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 3.2.21 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.17 et si \mathcal{T}_η vérifie (3.9) et (3.48), il existe une constante C qui ne dépend pas de η et Δt , telle que :*

$$\sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq C. \quad (3.50)$$

✓ *Preuve.* Nous écrivons :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} &\leq |\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} + |\mathbf{v}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)} + |P_\eta \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \\ &\quad + |\mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Considérons un élément κ . Comme $\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n$ appartient à un espace de dimension finie dans l'élément de référence $\widehat{\kappa}$ où toutes les normes sont équivalentes, nous pouvons écrire :

$$\|\nabla(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n)\|_{L^{5/2}(\kappa)} \leq C|\kappa|^{2/5} \left\| \widehat{\nabla \mathbf{u}_\eta^n} - \widehat{\nabla \mathbf{v}_\eta^n} \right\|_{L^2(\widehat{\kappa})},$$

où C désigne des constantes indépendantes de η et Δt . Donc, en revenant à κ , on a :

$$\|\nabla(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n)\|_{L^{5/2}(\kappa)} \leq C|\kappa|^{2/5-1/2} \|\nabla(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n)\|_{L^2(\kappa)}.$$

En sommant sur tous les éléments κ de la triangulation \mathcal{T}_η et en appliquant l'inégalité de Jensen, nous obtenons l'inégalité inverse

$$|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq \frac{C}{\rho_{\min}^{1/5}} |\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}.$$

De même,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)} &\leq \frac{C}{\rho_{\min}^{1/5}} |\mathbf{v}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C\rho_{\min}^{-1/5} \left(|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{u}(t^n) - P_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} &\leq C\rho_{\min}^{-1/5} \left(|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{u}(t^n) - P_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\quad + |P_\eta \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)} + |\mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.2.20 et (3.9), nous avons :

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^n|_{H^1(\Omega)} \leq C\eta.$$

De même, le corollaire 3.2.16 donne :

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \leq C\eta.$$

Les résultats d'approximation (2.12) donnent :

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{u}(t^n) - P_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \leq C\eta.$$

Enfin, le fait que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0(0, T; W^{1,r}(\Omega)^2)$ entraîne en particulier que :

$$\sup_{0 \leq n \leq N} (|P_\eta \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)} + |\mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,5/2}(\Omega)}) \leq C.$$

Ainsi nous obtenons le résultat. ■

On a donc que \mathbf{u}_η^n est borné dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et aussi dans $L^\infty(0, T; W^{1,5/2}(\Omega)^2)$. Comme $W^{1,5/2}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ alors \mathbf{u}_η^n est borné dans $L^\infty(\Omega \times]0, T])^2$.

Revenons à l'estimation d'erreur de la dérivée en temps de la vitesse en norme L^2 .

Lemme 3.2.22 *Sous les hypothèses du lemme 3.2.21, il existe une constante $C = C(\mathbf{u}, \mathbf{u}', p', \nu)$ qui ne dépend pas de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

✓ Preuve. On procède en trois étapes.

Étape 1. On se base sur l'équation (3.47) en prenant $\mathbf{w}_\eta^{n+1} \in V_\eta$ et en insérant $r_\eta p(s)$ et $S_\eta(\mathbf{u}') = (S_\eta(\mathbf{u}))'$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} ((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{w}_\eta^{n+1}) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}'(s) - S_\eta \mathbf{u}'(s), \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds \\ & + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{w}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right) ds \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(s), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds = 0. \end{aligned}$$

Or par définition de l'opérateur S_η , nous avons :

$$\forall \mathbf{w}_\eta \in V_\eta, \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(s), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} ((\mathbf{u}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{w}_\eta^{n+1}) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}'(s) - S_\eta \mathbf{u}'(s), \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds \\
 & + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}) ds + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(S_\eta \mathbf{u}'(s)), \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1})(s - t^n) ds \\
 & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{w}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right) ds = 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\mathbf{e}_\eta^n = \mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)$, en prenant la fonction test $\mathbf{w}_\eta^{n+1} = \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t}$ et en sommant l'équation de $n = 0$ à $m - 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{e}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{e}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla(\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & = \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \left(\mathbf{u}'(s) - S_\eta \mathbf{u}'(s), \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) - \nu \left(\nabla S_\eta \mathbf{u}'(s), \nabla \left(\frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) \right) (s - t^n) \right\} ds \\
 & - \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s)) + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) \right) ds. \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Étape 2. Nous allons étudier dans ce qui suit les différents termes du second membre de (3.52).

• En utilisant le lemme 3.2.12, on contrôle le premier terme. En effet,

$$\int_0^T \|\mathbf{u}'(s) - S_\eta \mathbf{u}'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^T C\eta^2 (\|\mathbf{u}'(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}'(s) - S_\eta \mathbf{u}'(s), \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) ds \right| \\
 & \leq \left(\int_0^T \|\mathbf{u}'(s) - S_\eta \mathbf{u}'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{C\eta^2}{2\varepsilon_0} \left(\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \|p'\|_{L^2(\Omega \times]0,T[)}^2 \right) + \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

• On donne maintenant une majoration du second terme. En posant $\widehat{C} = \|S_\eta \mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
 & \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla S_\eta \mathbf{u}'(s), \nabla \left(\frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) \right) (s - t^n) ds \right| \\
 & \leq \nu \sum_{n=0}^{m-1} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{H^1(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |S_\eta \mathbf{u}'(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n)^2 ds \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{\nu \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{3}} \|S_\eta \mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)} \left(\sum_{n=0}^{m-1} (\Delta t)^2 \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{\widehat{C}^2 \nu \Delta t}{2\sqrt{3}\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1 \nu}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} |\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

• Pour traiter le troisième terme, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \\
 & = \mathbf{u}(s) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) + (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} + \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \mathbf{u}_\eta^{n+1}.
 \end{aligned}$$

1. La première partie est traitée comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}), \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) ds \right| \\
 & \leq \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^\infty(\Omega)} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 & \leq \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0,T])^2}}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 & \leq \frac{C \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0,T])^2}}{2} \left(\frac{C'}{\varepsilon_2} (\eta^2 + (\Delta t)^2) + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

2. Pour traiter la deuxième partie, on remarque que :

$$\begin{aligned}
 \left\| (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} & \leq |\mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^{10}(\Omega)} \\
 & \leq S_{10} |\mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{W^{1,5/2}(\Omega)} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right) ds \right| \\
 & \leq \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} S_{10} \|\nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^{5/2}(\Omega)} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 & \leq \left(\frac{C}{2} + S_{10} \right) \sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 & \leq C'' \left(\frac{C'}{\varepsilon_3} (\eta^2 + (\Delta t)^2) + \varepsilon_3 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Donc en posant $C_1 = \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0, T])^2}$, le troisième terme est alors majoré par :

$$\left(\frac{C_1 C'}{2\varepsilon_2} + \frac{C'' C'}{\varepsilon_3} \right) (\eta^2 + (\Delta t)^2) + \left(\frac{C_1 \varepsilon_2}{2} + C'' \varepsilon_3 \right) \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Étape 3. Donc, après un choix adéquat des ε_i , la relation (3.52) entraîne :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{e}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \nu \|\nabla \mathbf{e}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla (\mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C(\mathbf{u}, \mathbf{u}', p', \nu) (\Delta t + \eta^2).
 \end{aligned}$$

Or $\mathbf{e}_\eta^0 = \mathbf{0}$ (il suffit de définir $S_\eta \mathbf{u}^0$ avec p nul), alors

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\
 & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |(\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}).
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Finalement, le résultat (3.51) est obtenu par une inégalité triangulaire et en utilisant les propriétés de l'opérateur S_η (cf. (3.34) et (3.35)) :

$$|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \leq |\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} + |S_\eta \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)},$$

et

$$\begin{aligned}
 |S_\eta \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} & \leq 2|P_\eta \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\nu} \|r_\eta p(t^n) - p(t^n)\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq C\eta \{ \|\mathbf{u}\|_{C^0(0, T; H^2(\Omega)^2)} + \|p\|_{C^0(0, T; H^1(\Omega))} \}.
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne le quotient différentiel, on remarque que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq 2 \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + 2 \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (S_\eta \mathbf{u}'(s) - \mathbf{u}'(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (S_\eta \mathbf{u}'(s) - \mathbf{u}'(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|S_\eta \mathbf{u}'(s) - \mathbf{u}'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \leq C^2 \eta^2 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ |P_\eta \mathbf{u}'(s) - \mathbf{u}'(s)|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_\eta p'(s) - p'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} ds \\
 & \leq C^2 \eta^2 \{ \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \|p'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \},
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

et le résultat découle de (3.53) et (3.54). ■

De ces trois lemmes, nous déduisons une estimation d'ordre un de la pression.

Théorème 3.2.23 *Sous les hypothèses du lemme 3.2.21, il existe une constante C indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta + \sqrt{\Delta t}). \tag{3.55}$$

Si (3.9) est vérifié alors

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta. \tag{3.56}$$

3.3 Résolution de la Deuxième Étape du schéma à deux grilles

Dans cette section, notre but est d'estimer l'erreur de la solution de la deuxième étape du schéma à deux grilles (1.12)–(1.17). Nous pouvons directement estimer l'erreur de l'**Étape 2** ; mais comme nous allons utiliser la relation du corollaire 3.2.18 pour $\eta = H$, nous allons avoir besoin des hypothèses du théorème 3.2.17 (qui à son tour utilise celles du corollaire 3.2.16).

3.3.1 Estimation de la vitesse

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)^2) \cap C^0(0, T; W^{1,4}(\Omega)^2),$$

$$\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2), \quad p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad p' \in L^2(\Omega \times]0, T[), \quad \mathbf{f} \in L^2(\Omega \times]0, T[)^2,$$

$\mathbf{f}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$, $\mathbf{f}(0) \in L^2(\Omega)^2$ et Ω convexe, alors la solution $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ de l'**Étape 2** satisfait l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(H^2 + h + \Delta t), \end{aligned} \quad (3.57)$$

avec C une constante indépendante de h, H et Δt .

✓ Preuve. On procède en trois étapes.

Étape 1. Retranchons les équations vérifiées par les solutions exacte et discrète sur la grille fine :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}'(s), \mathbf{v}_h) ds + \frac{\nu}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{v}_h) ds - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{f}(s), \mathbf{v}_h) ds - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{v}_h) ds, \end{aligned} \quad (3.58)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (f(s), \mathbf{v}_h) ds - (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Prenons comme fonction test $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h^{n+1} - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})$ et sommions l'équation résultante de $n = 0$ à $m - 1$, nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{v}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ = \sum_{n=0}^{m-1} ((\mathbf{u}(t^{n+1}) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}(t^n) - P_h \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{v}_h^{n+1}) \\ + \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (r_h p(s) - p(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h^{n+1}) ds + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{v}_h^{n+1}) ds \\ + \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^{n+1}) ds \end{aligned} \quad (3.60)$$

avec $\|\mathbf{u}_h^0 - P_h \mathbf{u}(t^0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$.

Étape 2. Dans ce qui suit, nous donnons une majoration de chacun des termes du second membre. Le calcul des trois premiers termes du second membre s'effectue de la même façon que celui effectué dans le théorème 3.2.2.

- Celui du premier est le suivant, pour tout $\varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \left((\mathbf{u}(t^{n+1}) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}(t^n) - P_h \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{m-1} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}'(\tau) - P_h \mathbf{u}'(\tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \right) \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{Ch^2}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- Le deuxième terme du second membre est traité de la façon suivante, pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(r_h p(s) - p(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|r_h p(s) - p(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{C}{2\varepsilon_2} h^2 \|p\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- Pour le calcul du troisième terme, nous le décomposons en deux parties que nous traitons séparément :

$$\begin{aligned} \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds &= \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \\ &+ \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(P_h \mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds. \end{aligned}$$

1. La première partie se calcule comme suit, pour tout $\varepsilon_3 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\ & \leq \frac{\nu}{2\varepsilon_3} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{\nu\varepsilon_3}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{C\nu}{2\varepsilon_3} h^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{\nu\varepsilon_3}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

2. Comme P_h est stable en norme H^1 , la seconde partie se calcule comme suit, pour tout

$\varepsilon_4 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla(P_h \mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\
 & \leq \nu \sum_{n=0}^{m-1} |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_h \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (\tau - t^n)^2 d\tau \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{C\nu(\Delta t)^2}{2\sqrt{3}\varepsilon_4} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\nu\varepsilon_4}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \leq \frac{\nu(\Delta t)^2}{2\sqrt{3}\varepsilon_4} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\nu\varepsilon_4}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

• Pour estimer le terme non-linéaire dans le second membre :

$$\sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds,$$

nous écrivons :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} &= (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) + \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})) \\
 &\quad - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h^{n+1} - (\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{v}_h^{n+1},
 \end{aligned}$$

et nous traitons les quatre composantes de ce terme non-linéaire séparément.

1. Remarquons que le troisième élément s'annule :

$$\sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds = 0.$$

2. Nous donnons une majoration du premier terme, pour tout $\varepsilon_5 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\
 &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}'(\tau) \cdot \int_{t^n}^{\tau} \nabla \mathbf{u}(s) ds, \mathbf{v}_h^{n+1} \right) d\tau \right| \\
 &\quad + S_4 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega)^2)} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq S_4 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega)^2)} \left\{ C\Delta t \|\mathbf{u}'\|_{L^2(\Omega \times]0,T])^2} + C(H^2 + \Delta t) \right\} \\
 &\quad \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{S_4}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega)^2)} \left(\frac{C}{\varepsilon_5} ((\Delta t)^2 + H^4) + \varepsilon_5 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right),
 \end{aligned}$$

où la constante C dépend de $\|\mathbf{u}'\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2}$.

3. Nous décomposons le second terme en deux parties que nous calculons successivement :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla(\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla(\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(s)), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \\ &+ \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla P_h(\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds. \end{aligned}$$

(a) Le premier terme est tel que, pour tout $\varepsilon_6 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla(\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(s)), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\ & \leq S_4 \sup_n \|\mathbf{u}_H^n\|_{L^4(\Omega)} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(s)|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)} ds \\ & \leq \frac{S_4^2 (\sup_n |\mathbf{u}_H^n|_{H^1(\Omega)})}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_6} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(s) - P_h \mathbf{u}(s)|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \varepsilon_6 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \\ & \leq \frac{S_4^2 (\sup_n |\mathbf{u}_H^n|_{H^1(\Omega)})}{2} \left\{ \frac{C}{\varepsilon_6} h^2 + \varepsilon_6 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

où la constante C dépend de $\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)}$.

(b) Le second terme est traité comme suit, pour tout $\varepsilon_7 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}_H^n \cdot \nabla P_h(\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\ & \leq S_4^2 (\sup_n |\mathbf{u}_H^n|_{H^1(\Omega)}) \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |P_h \mathbf{u}'(\tau)|_{H^1(\Omega)} (\tau - t^n) |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)} d\tau \\ & \leq \frac{S_4^2 (\sup_n |\mathbf{u}_H^n|_{H^1(\Omega)})}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)}^2}{\varepsilon_7} (\Delta t)^2 + \varepsilon_7 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

4. Finalement, le quatrième terme du second membre est comme suit. En utilisant (3.8), on

a, pour tout $\varepsilon_8 > 0, \delta > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{v}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^{n+1} \right) ds \right| \\
 & \leq 2^{1/4} S_4 \sup_n |\mathbf{u}_H^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^{3/2} \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\
 & \leq \frac{S_4 C}{2^{3/4}} \left\{ \varepsilon_8 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_8} \left(\delta \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Étape 3. Ainsi, en regroupant toutes ces estimations, l'équation (3.60) est majorée par :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{v}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \leq \xi + \gamma_1 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \gamma_2 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

où $\xi = \xi(h^2, H^4, (\Delta t)^2)$, γ_1 est une constante dont la valeur peut être prescrite en ajustant les ε_i, δ et $i = 1, \dots, 8$.

Donc, après avoir choisi les ε_i et δ de façon à ce que $\gamma_1 = \frac{\nu}{2}$ et γ_2 dépend de γ_1 et en appliquant le lemme de Gronwall avec la remarque 3.2.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{v}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \leq e^{Cm\Delta t} C(h^2 + H^4 + (\Delta t)^2) \\
 & \leq e^{CT} C(h^2 + H^4 + (\Delta t)^2) \\
 & \leq C(h^2 + H^4 + (\Delta t)^2).
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

D'où finalement le résultat :

$$\begin{aligned}
 & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_h^{n+1} - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \quad + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}_h^{n+1} - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h + H^2 + (\Delta t)).
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

et (3.57) s'obtient par une inégalité triangulaire et par l'application de propriétés de l'opérateur P_h . ■

Maintenant, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.3.2 *Il existe deux constantes $\alpha', \gamma' > 0$ indépendantes de Δt et h telles que*

$$\alpha' H^2 \leq h \leq \gamma' H^2, \tag{3.64}$$

i.e. h est exactement du même ordre que H^2 .

Ainsi, si $\Delta t, h$ et H vérifient (3.9) et (3.64), alors,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch. \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.3.2 Estimation de la pression

Finalement, nous traitons l'erreur de la pression du schéma à deux grilles. Comme dans la section précédente, la pression satisfait le

Lemme 3.3.3 *Sous les hypothèses des théorèmes 3.2.17 et 3.3.1, $(\mathbf{u}(t^{n+1}), p(t^{n+1}))$ et $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$, solutions respectives de (1.1)–(1.4) et (1.41)–(1.42). Nous avons :*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p_h^{n+1} - r_h p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta^*} \left\{ C(H^2 + h + \Delta t) \right. \\ \left. + S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

où β^* est la constante de la condition inf-sup (1.16) et la constante C est indépendante de H, h et Δt , mais dépend de $\mathbf{u}, \mathbf{u}', p$ et p' .

✓ *Preuve.* En procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme 3.2.19, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p_h^{n+1} - r_h p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_h^{n+1}) ds &= \sum_{n=0}^{N-1} ((\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{w}_h^{n+1}) \\ + \nu \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(s)), \nabla \mathbf{w}_h^{n+1}) ds &+ \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{w}_h^{n+1}) ds \\ + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (r_h p(s) - r_h p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_h^{n+1}) ds &+ \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (p(s) - r_h p(s), \operatorname{div} \mathbf{w}_h^{n+1}) ds. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ainsi, les premier, deuxième, quatrième et cinquième termes du second membre correspondent respectivement aux premier, deuxième, cinquième et sixième termes du second membre de l'équation (3.47) dans la preuve du lemme 3.2.19. Donc la seule différence concerne le terme non-linéaire. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} &= (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) + (\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h^{n+1}) \\ &\quad + \mathbf{u}(s) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h^{n+1}) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{w}_h^{n+1} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\{ \left\| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \mathbf{u}(s) \right\|_{W^{1,4}(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \left(\left\| \mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(s) \right\|_{L^4(\Omega)} + \left\| \mathbf{u}(s) \right\|_{L^4(\Omega)} \right) \left\| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)} \right\} \left\| \mathbf{w}_h^{n+1} \right\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous traitons maintenant séparément ces deux termes qui composent le terme non-linéaire. Le premier est donc :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \mathbf{w}_h^{n+1} \right) ds \right| \\ & \leq S_4 \left(\sup_s \left\| \mathbf{u}(s) \right\|_{W^{1,4}(\Omega)} \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \mathbf{w}_h^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq (C_1 \Delta t \left\| \mathbf{u}' \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2 + C(H^2 + \Delta t) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \mathbf{w}_h^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par un calcul similaire au précédent, la contribution du second terme est :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(s)) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h^{n+1}) + \mathbf{u}(s) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h^{n+1}), \mathbf{w}_h^{n+1} \right) ds \right| \\ & \leq S_4 \left(\sup_n \left\| \mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(s) \right\|_{L^4(\Omega)} + \sup_s \left\| \mathbf{u}(s) \right\|_{L^4(\Omega)} \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\ & \quad \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \mathbf{w}_h^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_2 (H^2 + \Delta t + h) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \mathbf{w}_h^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| p_h^{n+1} - r_h p(t^{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left\{ S_2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right\}^{1/2} \\ & \quad + C_1 (H^2 + \Delta t) + C_2 (\Delta t + h) + C_3 \Delta t \left\| p' \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T]) + C_4 h \left\| p \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \left. \right\} \\ & \quad \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \mathbf{w}_h \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

et le résultat final découle de la condition inf-sup (1.16). \blacksquare

Nous avons besoin d'estimer $\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$. Pour cela, nous établissons le

Lemme 3.3.4 *Sous les hypothèses des théorèmes 3.2.17 et 3.3.1, et si $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega \times]0, T[)^2$, $\Delta \mathbf{u}' \in L^2(\Omega \times]0, T[)^2$ et $\nabla p' \in L^2(\Omega \times]0, T[)$, il existe une constante C indépendante de H, h et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\ & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h + H^2 + \Delta t). \end{aligned} \quad (3.68)$$

✓ Preuve.

Nous procédons comme dans la preuve du lemme 3.3.3, en insérant $S_h \mathbf{u}(t^{n+1})$, en posant $\mathbf{w}_h^n = \mathbf{u}_h^n - S_h \mathbf{u}(t^n)$ et en prenant

$$\mathbf{v}_h^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n) = \frac{1}{\Delta t} ((\mathbf{u}_h^{n+1} - S_h \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - S_h \mathbf{u}(t^n))).$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta t)^2} \|\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{\Delta t} (\nabla \mathbf{w}_h^{n+1}, \nabla (\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n)) \\ & = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left((S_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (S_h \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n)), \mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n \right) \\ & \quad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\nu}{(\Delta t)^2} \left(\nabla (S_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - S_h \mathbf{u}(s)), \nabla (\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n) \right) ds \\ & \quad + \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n \right) ds. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Alors nous multiplions (3.69) par Δt , nous la sommes de $n = 0$ à $m - 1$ et nous obtenons pour premier membre

$$\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla (\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \left(\|\nabla \mathbf{w}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla \mathbf{w}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Le second membre correspondant est composé de six termes que nous traitons dans ce qui suit.

- Le premier terme du second membre donne, pour tout $\varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\frac{(S_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (S_h \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t}, \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{(S_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (S_h \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{Ch^2}{\varepsilon_1} \left(\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \|p'\|_{L^2(\Omega \times]0,T])}^2 \right) + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

- Nous traitons maintenant le deuxième terme. Pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla \left(\int_s^{t^{n+1}} \frac{d}{d\tau} (S_h(\mathbf{u})) d\tau \right), \nabla \left(\frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right) ds \right| \\
 & = \left| \nu \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla S_h \mathbf{u}'(s), \nabla \left(\frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right) (s - t^n) ds \right| \\
 & = \nu \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla \mathbf{u}'(s), \nabla \left(\frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right) (s - t^n) ds \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(p'(s), \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right) (s - t^n) ds \right| \\
 & \leq \nu \left| \sum_{n=0}^{m-1} - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\Delta \mathbf{u}'(s), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) (s - t^n) ds \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla p'(s), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) (s - t^n) ds \right| \\
 & \leq \frac{\nu(\Delta t)^{3/2}}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\{ \|\Delta \mathbf{u}'\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; L^2(\Omega)^2)} + \|\nabla p'\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; L^2(\Omega))} \right\} \\
 & \leq \frac{C\nu(\Delta t)^2}{2\sqrt{3}\varepsilon_2} \left(\|\Delta \mathbf{u}'\|_{L^2(\Omega \times]0,T])^2} + \|\nabla p'\|_{L^2(\Omega \times]0,T])} \right) + \frac{\varepsilon_2 \nu}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

- Le troisième terme se calcule de la manière suivante : En supposant que $\|\nabla \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$,

pour tout $\varepsilon_3 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right| \\ & \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0, T])^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_3} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon_3 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq \frac{C}{2\varepsilon_3} (H^4 + (\Delta t)^2) + \frac{C\varepsilon_3}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

• Le quatrième terme est le suivant, pour tout $\varepsilon_4 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sup_n \|\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

or, $\|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ et on a montré que $\|\mathbf{u}_H^n\|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq C$ donc $\|\mathbf{u}_H^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$. Et on vient de montrer que $\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = O(H^2 + h + \Delta t)$. On applique directement ce résultat et on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon_4} C (H^4 + h^2 + (\Delta t)^2) + \frac{\varepsilon_4}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

• Le cinquième terme se calcule de la même façon, pour tout $\varepsilon_5 > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right| \\ & \leq \frac{C(\sup_n \|\mathbf{u}(t^n)\|_{L^\infty(\Omega)})}{2\varepsilon_5} (H^2 + h + \Delta t)^2 + \frac{\varepsilon_5}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

• Le dernier terme est décomposé en deux parties. En effet, il s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(s) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) ds \right| \\ & = \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) + \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) ds \right| \end{aligned}$$

1. La première partie s'écrit, pour tout $\varepsilon_6 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left((\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(s), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) ds \right| \\
 &= \left| - \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\left(\int_{t^n}^{\tau} \mathbf{u}'(\tau) \cdot \nabla \mathbf{u}(s) ds \right) d\tau, \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) \right| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sup_{\tau} \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{L^4(\Omega)} \right) \frac{2}{3} (\Delta t)^{3/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; L^4(\Omega)^2)} \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \frac{2}{3} \|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^2)} \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} (\Delta t)^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; L^4(\Omega))} \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(t^n, t^{n+1}; L^2(\Omega)^2)} \\
 &\leq \frac{\|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^2)}}{3\varepsilon_6} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(0, T; L^4(\Omega)^2)}^2 (\Delta t)^2 + \varepsilon_6 \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

2. La deuxième partie du dernier terme s'écrit, pour tout $\varepsilon_7 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right) ds \right| \\
 &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0, T[)} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 ds \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0, T[)} \left\{ \frac{\varepsilon_7}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{2\varepsilon_7} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en regroupant ces résultats, nous choisissons les ε_i de façon à simplifier l'équation. Elle devient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla (\mathbf{w}_h^{n+1} - \mathbf{w}_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \left(\|\nabla \mathbf{w}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla \mathbf{w}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 &\leq C(H^4 + h^2 + (\Delta t)^2),
 \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{w}_h^n = \mathbf{u}_h^n - S_h \mathbf{u}(t^n).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{(\mathbf{u}_h^{n+1} - S_h \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - S_h \mathbf{u}(t^n))}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_h^n - S_h \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\
 &+ \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |(\mathbf{u}_h^{n+1} - S_h \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{u}_h^n - S_h \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(H^2 + h + \Delta t).
 \end{aligned}$$

et pour obtenir le résultat demandé, il suffit d'appliquer une inégalité triangulaire ainsi que les propriétés de l'opérateur S_h . \blacksquare

Ces deux lemmes entraînent directement le théorème suivant.

Théorème 3.3.5 *Sous les hypothèses*

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2), \mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2), p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$p' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \mathbf{f} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2, \mathbf{f}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2), \mathbf{f}(0) \in L^2(\Omega)^2$$

et Ω convexe, nous avons

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h + H^2 + \Delta t), \quad (3.70)$$

avec C une constante indépendante de h, H et Δt .

Remarque 3.3.6 *Comme conséquence, si h, H et Δt vérifient (3.9) et (3.64), alors*

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch. \quad (3.71)$$

Schéma d'ordre deux en temps

Chapitre 4

Problème d'ordre deux

Sommaire

4.1	Introduction	116
4.2	Existence, unicité et stabilité de la solution de (4.1) – (4.2)	117
4.3	Erreur de base de Navier-Stokes	118
4.4	Quelques estimations du problème de Stokes	124
4.4.1	Estimations $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$	125
4.4.2	Estimation $L^\infty(H^1)$ et estimation $L^2(L^2)$ de la dérivée en temps	126
4.4.3	Argument de dualité	129
4.5	Résultat de superconvergence	134
4.6	Estimations d'erreur de la pression	138
4.7	Estimations d'erreur des deux grilles	144
4.7.1	Estimation de la vitesse	146
4.7.2	Estimation de la pression	149

4.1 Introduction

On considère dans ce chapitre une approximation plus précise de la vitesse : nous utilisons alors l'élément fini de Taylor-Hood. Les espaces de l'élément fini donnés par (2.18) et (2.19) satisfont la condition inf-sup. Nous traitons un schéma à deux grilles d'ordre deux en temps composé d'une étape non-linéaire sur la grille grossière et d'une autre étape linéarisée autour de la solution grossière sur la grille fine avec le même pas de temps Δt . Le but est de gagner en ordre de convergence de l'erreur totale du schéma ainsi qu'en complexité. Nous rappelons donc le schéma traité, pour $1 \leq n \leq N - 1$:

Étape 1 Problème non-linéaire sur grille grossière : trouver $(\mathbf{u}_H^{n+1}, p_H^{n+1}) \in X_H \times M_H$, solution de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_H \in X_H, \quad & \frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_H^{n+1} - 4\mathbf{u}_H^n + \mathbf{u}_H^{n-1}, \mathbf{v}_H) + \nu(\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \mathbf{v}_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_H) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\forall q_H \in M_H, \quad (q_H, \operatorname{div} \mathbf{u}_H^{n+1}) = 0. \quad (4.2)$$

Nous complétons ces équations par les conditions initiales suivantes : on pose $\mathbf{u}_H^0 = \mathbf{0}$ et on calcule \mathbf{u}_H^1 par une itération du schéma d'Euler, qui correspond à la résolution de (1.39) pour $n = 0$.

Étape 2 Problème linéarisé sur grille fine : trouver $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h \times M_h$, solution de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad & \frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\ & - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0. \quad (4.4)$$

De même, nous complétons ces équations en posant $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$ et en calculant \mathbf{u}_h^1 par une itération du schéma d'Euler, lequel correspond à la résolution de (1.41) pour $n = 0$.

Dans ce chapitre, nous supposons que \mathbf{f} est continue par rapport au temps et nous prenons $\mathbf{f}^n = \mathbf{f}(t^n), 0 \leq n \leq N$.

Comme dans le chapitre précédent, pour simplifier, nous faisons d'abord l'analyse du schéma (4.1)–(4.2) pour $1 \leq n \leq N - 1$ et ensuite celle de (4.3)–(4.4) pour $1 \leq n \leq N - 1$, sans tenir compte du fait qu'en pratique les deux étapes sont intercalées, ce qui produit des résultats plus précis que ceux annoncés par l'analyse. Ici aussi, pour simplifier, nous appelons η le paramètre de discrétisation dans l'Étape 1.

Les résultats de ce chapitre sont basés sur l'identité :

$$2(\mathbf{a}^{n+1}, 3\mathbf{a}^{n+1} - 4\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n-1}) = |\mathbf{a}^{n+1}|^2 + |2\mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n|^2 + |\delta^2 \mathbf{a}^n|^2 - |\mathbf{a}^n|^2 - |2\mathbf{a}^n - \mathbf{a}^{n-1}|^2 \quad (4.5)$$

en notant

$$\delta^2 a^n = a^{n+1} - 2a^n + a^{n-1}. \quad (4.6)$$

4.2 Existence, unicité et stabilité de la solution de (4.1) – (4.2)

Lemme 4.2.1 (stabilité) *Soit \mathbf{u}_η^{n+1} une solution de (4.1)–(4.2) avec pour données initiales \mathbf{u}_η^0 et $\mathbf{u}_\eta^1 \in V_\eta$; on a*

$$\begin{aligned} & \sup_{2 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{2 \leq n \leq N} \|2\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2\nu} \left(\sum_{n=2}^N \Delta t \|\nabla \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2 \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\frac{2S_2^2}{\nu} \sum_{n=2}^N \Delta t \|\mathbf{f}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_\eta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

✓ *Preuve.* Prenons le produit scalaire de (4.1) par $4\Delta t \mathbf{u}_\eta^{n+1}$, utilisons la relation (4.5) et sommons le résultat sur $1 \leq n \leq m-1$, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{u}_\eta^m - \mathbf{u}_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \sum_{n=2}^m \Delta t \|\nabla \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} \|\delta^2 \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{2S_2^2}{\nu} \sum_{n=2}^m \Delta t \|\mathbf{f}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_\eta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

La stabilité du schéma (4.1)–(4.2) découle de l'estimation a priori suivante :

Lemme 4.2.2 *Le schéma (4.1)–(4.2) admet une solution pour tout $\nu > 0$, toutes fonctions initiales $\mathbf{u}_\eta^0, \mathbf{u}_\eta^1 \in V_\eta$ et toute donnée $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega)^2)$. La solution est unique pour Δt assez petit.*

✓ *Preuve.* Pour chaque $n, 1 \leq n \leq N-1$, le problème (4.1)–(4.2) est un système carré d'équations algébriques non-linéaires en dimension finie. Grâce à l'anti-symétrisation du terme non-linéaire, on montre facilement, par le théorème du point fixe de Brouwer et la condition inf-sup, que pour chaque $n, 1 \leq n \leq N-1$, le problème admet au moins une solution $(\mathbf{u}_\eta^n, p_\eta^n)$. Pour l'unicité, on considère deux solutions $(\mathbf{u}_\eta^{(1)}, p_\eta^{(1)})$ et $(\mathbf{u}_\eta^{(2)}, p_\eta^{(2)})$. Leur différence $(\mathbf{w}_\eta^n, p_\eta^n)$ vérifie :

$$\begin{aligned} & \forall \mathbf{v}_\eta \in V_\eta, \frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{w}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{w}_\eta^n + \mathbf{w}_\eta^{n-1}, \mathbf{v}_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_\eta) + (\mathbf{w}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{(1)n+1}, \mathbf{v}_\eta) \\ & + (\mathbf{u}_\eta^{(2)n+1} \cdot \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \mathbf{v}_\eta) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{(1)n+1} \cdot \mathbf{v}_\eta) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{(2)n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{v}_\eta) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité (4.5), le choix de $\mathbf{v}_\eta = \mathbf{w}_\eta^{n+1}$ donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta t} \left(\|\mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{w}_\eta^{n+1} - \mathbf{w}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta^2 \mathbf{w}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{w}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|2\mathbf{w}_\eta^n - \mathbf{w}_\eta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + \nu \|\mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|\mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^4(\Omega)}^2 |\mathbf{u}_\eta^{(1)n+1}|_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2} |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{w}_\eta^{n+1}\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{u}_\eta^{(1)n+1}\|_{L^4(\Omega)} \leq 0. \end{aligned}$$

Comme toutes les normes sont équivalentes (dimension finie), en sommant l'inégalité précédente de $n = 1$ à $m - 1$, en utilisant le lemme 4.2.2 et en tenant compte du fait que $\mathbf{w}_\eta^0 = \mathbf{w}_\eta^1 = \mathbf{0}$, on trouve une inégalité de la forme :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=2}^m \Delta t \|\mathbf{w}_\eta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} \|\delta^2 \mathbf{w}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{w}_\eta^m - \mathbf{w}_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C \Delta t \sum_{n=1}^m \|\mathbf{w}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

où la constante C dépend de η mais pas de Δt . Pour le dernier terme de la somme du second membre, on écrit :

$$\mathbf{w}_\eta^m = \delta^2 \mathbf{w}_\eta^{m-1} + 2\mathbf{w}_\eta^{m-1} - \mathbf{w}_\eta^{m-2}.$$

Il vient alors

$$\|\mathbf{w}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left(\|\delta^2 \mathbf{w}_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{w}_\eta^{m-1} - \mathbf{w}_\eta^{m-2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

et pour Δt assez petit, le terme

$$2C \Delta t \left(\|\delta^2 \mathbf{w}_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{w}_\eta^{m-1} - \mathbf{w}_\eta^{m-2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

peut être contrôlé à l'aide des termes correspondants du premier membre.

Grâce au lemme de Gronwall, on obtient $\mathbf{w}_\eta^n = \mathbf{0}$, $2 \leq n \leq N$. Ensuite, la condition inf-sup entraîne que $p_\eta^n = 0$, $2 \leq n \leq N$. \blacksquare

4.3 Erreur de base de Navier-Stokes

Dans cette section, nous établissons une estimation de l'erreur des équations de Navier-Stokes en normes $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$. Ici, X_η et M_η sont les espaces définis par (2.18) et (2.19). Les hypothèses de régularité sont fortes et nous supposons que le problème de Navier-Stokes a une solution assez régulière pour que les estimations d'erreur soient valables.

Théorème 4.3.1 *Sous les hypothèses $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^2)$, $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)$, $\mathbf{u}^{(3)} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $p \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$, il existe une constante C indépendante de η et Δt et une constante $k_0 > 0$, indépendante de η telle que, pour tout $\Delta t \leq k_0$,*

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}_\eta^{n+1} - P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

✓ Preuve. Nous procédons en trois étapes :

Étape 1. Posons

$$\mathbf{v}_\eta^n = \mathbf{u}_\eta^n - P_\eta \mathbf{u}(t^n) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}_\eta^n = P_\eta \mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}(t^n), \quad 0 \leq n \leq N.$$

D'un côté, (4.1) donne :

$$\begin{aligned} & 2(3\mathbf{v}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{v}_\eta^n + \mathbf{v}_\eta^{n-1}, \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + 4\nu\Delta t(\nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + 4\Delta t(\mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ & + 2\Delta t(\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + 2(3\boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} - 4\boldsymbol{\varphi}_\eta^n + \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n-1}, \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ & + 2(3\mathbf{u}(t^{n+1}) - 4\mathbf{u}(t^n) + \mathbf{u}(t^{n-1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 4\Delta t(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_\eta^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

D'un autre côté, prenons l'équation (1.1) à l'instant t^{n+1} :

$$\begin{aligned} & 4\Delta t(\mathbf{u}'(t^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + 4\nu\Delta t(\nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + 4\Delta t(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ & + 4\Delta t(p(t^{n+1}) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 4\Delta t(\mathbf{f}(t^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Or la formule de Taylor avec reste intégral nous donne :

$$\left| \mathbf{u}'(t + \Delta t) - \frac{3\mathbf{u}(t + \Delta t) - 4\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - \Delta t)}{2\Delta t} \right| \leq \frac{(\Delta t)^{3/2}}{2\sqrt{3}} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(t - \Delta t; t + \Delta t)}. \quad (4.11)$$

La relation (4.10) entraîne que :

$$\begin{aligned} & 2(3\mathbf{u}(t^{n+1}) - 4\mathbf{u}(t^n) + \mathbf{u}(t^{n-1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + 4\nu\Delta t(\nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ & + 4\Delta t(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + 4\Delta t(p(t^{n+1}) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ & - 4\Delta t(\mathbf{f}(t^{n+1}), \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = R_1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

$$|R_1| \leq 4\Delta t \frac{(\Delta t)^{3/2}}{2\sqrt{3}} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(t^{n-1}; t^{n+1})} \left\| \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, en soustrayant (4.12) de (4.9) et en sommant pour $1 \leq n \leq m-1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{v}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{v}_\eta^m - \mathbf{v}_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} \|\delta^2 \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \leq \left(\|\mathbf{v}_\eta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{v}_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 \left| \sum_{n=1}^{m-1} (3\boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} - 4\boldsymbol{\varphi}_\eta^n + \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n-1}, \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right| \\
 & \quad + 4\nu \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\nabla \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right| + 4 \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (p(t^{n+1}) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right| \\
 & \quad + 4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \frac{(\Delta t)^{3/2}}{2\sqrt{3}} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(t^{n-1}; t^{n+1})} \left\| \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \quad + 4 \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{v}_\eta^{n+1}) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right|.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Étape 2. Nous notons $((secmb)_i)_{1 \leq i \leq 7}$, les termes du second membre de l'inéquation (4.13) que nous allons traiter successivement.

Sous-étape 2.1. Nous étudions les termes linéaires.

• Pour traiter le deuxième terme, nous avons :

$$\frac{3\boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} - 4\boldsymbol{\varphi}_\eta^n + \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n-1}}{2\Delta t} = P_\eta \mathbf{u}'(t^{n+1}) - \mathbf{u}'(t^{n+1}) + R_2,$$

avec

$$|R_2| \leq \frac{(\Delta t)^{3/2}}{2\sqrt{3}} \left\| P_\eta \mathbf{u}^{(3)} - \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(t^{n-1}; t^{n+1})}.$$

D'où, en supposant que P_η peut être défini pour être stable en norme L^2 (ce qui a été fait par Girault et Lions [29]), nous avons :

$$\begin{aligned}
 |(secmb)_2| & = \left| 4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\frac{3\boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1} - 4\boldsymbol{\varphi}_\eta^n + \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n-1}}{2\Delta t}, \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right) \right| \\
 & \leq C \left[\eta^2 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{u}'(t^{n+1})|_{H^2(\Omega)} \left\| \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} + (\Delta t)^2 \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2} \left(\sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right] \\
 & \leq C S_2 \left[T^{1/2} \eta^2 \left\| \mathbf{u}' \right\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2)} + (\Delta t)^2 \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2} \right] \left(\sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{C\eta^4}{2\varepsilon_2} \left\| \mathbf{u}' \right\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{C(\Delta t)^4}{2\varepsilon_2} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

- Le troisième est tel que :

$$\begin{aligned} |(secmb)_3| &= \left| 4\nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\nabla \varphi_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right| \\ &\leq \frac{2C\nu\eta^4}{\varepsilon_3} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega)^2)}^2 + 2\nu\varepsilon_3 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- Le quatrième est borné de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |(secmb)_4| &= \left| 4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (p(t^{n+1}) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right| \\ &\leq \frac{2C\eta^4}{\varepsilon_4} \|p\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + 2\varepsilon_4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- Nous étudions le cinquième terme :

$$\begin{aligned} |(secmb)_5| &= 4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \frac{(\Delta t)^{3/2}}{2\sqrt{3}} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(t^{n-1}, t^{n+1})} \left\| \mathbf{v}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{(\Delta t)^4 S_2^2}{3\varepsilon_5} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])}^2 + \varepsilon_5 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- Nous démontrons que le premier terme est du même ordre dans la proposition 4.3.2 qui suit.

Sous-étape 2.2. Nous étudions les termes non-linéaires et de stabilisation. Ils se traitent de la même manière. Nous avons :

$$\begin{aligned} &(-\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) + \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{v}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \\ &= -(\mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1}) - (\varphi_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \varphi_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1}) - (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1}). \end{aligned}$$

Le terme de stabilisation s'écrit de manière analogue. Ainsi, le terme $(secmb)_6 + (secmb)_7$ se décompose en trois termes $((secmb)_{67}).j$, $j = 1, 2, 3$ qui sont bornés en fonction des données du problème. En effet, soit :

$$C_1 = \sup_n |\mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)},$$

alors, en utilisant d'une part (3.44) et d'autre part

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} |((secmb)_{67}).1| &= \left| 4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right) \right| \\ &\leq \frac{3S_4 C_1 \sqrt{2}}{2\varepsilon_6^4} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{9S_4 C_1 \varepsilon_6^{4/3}}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |((secmb)_{67}).2| &= \left| 4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left((\varphi_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \varphi_\eta^{n+1}, P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \mathbf{v}_\eta^{n+1}) \right) \right| \\
 &\leq 3S_4^2 C C_1 \left\{ \frac{\eta^4}{\varepsilon_7} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_7 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |((secmb)_{67}).3| &= \left| 4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1} \right) \right| \\
 &\leq \frac{S_4^2 C_1}{2} \left\{ \frac{C^2 \eta^4}{\varepsilon_8} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega)^2)}^2 + \varepsilon_8 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Étape 3. Ainsi, avec un choix convenable des ε_i , (4.13) devient :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{v}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{v}_\eta^m - \mathbf{v}_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} \|\delta^2 \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 \leq \alpha (\Delta t)^4 + \beta \eta^4 + \xi \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

où α, β et ξ ne dépendent ni de Δt , ni de η .

Pour appliquer le lemme de Gronwall discret, on procède comme dans la démonstration du lemme 4.2.2, i.e. on écrit :

$$\|\mathbf{v}_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left(\|\delta^2 \mathbf{v}_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{v}_\eta^{m-1} - \mathbf{v}_\eta^{m-2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Alors, on suppose que Δt est assez petit pour que $2\Delta t\xi \leq \frac{1}{2}$ (par exemple) et nous obtenons le résultat recherché :

$$\begin{aligned}
 \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}_\eta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2 \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \alpha' (\Delta t)^2 + \beta' \eta^2. \quad \blacksquare
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Proposition 4.3.2 *Sous les hypothèses $\mathbf{u}'' \in C^0(0, T; L^2(\Omega)^2)$, $\mathbf{u}(\Delta t) \in H^3(\Omega)^2$ et $p(\Delta t) \in H^2(\Omega)$, l'erreur de la solution calculée par une itération du schéma d'Euler ($\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t), p_\eta^1 - p(\Delta t)$) vérifie les estimations suivantes, pour $\Delta t \leq k_0 > 0$ assez petit,*

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu \Delta t}{2} |\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 \leq \frac{(\Delta t)^4}{4} \|\mathbf{u}''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + C(\Delta t) \eta^4 \left(|\mathbf{u}(\Delta t)|_{H^3(\Omega)}^2 + |p(\Delta t)|_{H^2(\Omega)}^2 \right) + C\eta^6 |\mathbf{u}(\Delta t)|_{H^3(\Omega)}^2,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

et

$$(\Delta t)^{1/2} \|r_\eta p(\Delta t) - p_\eta^1\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left((\Delta t)^{3/2} + \eta^2 + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}} \right). \quad (4.18)$$

✓ Preuve. Remarquons d'abord que, grâce aux hypothèses de régularité sur \mathbf{u} , il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\Delta t) - \Delta t \mathbf{u}'(\Delta t) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \mathbf{u}''(\theta \Delta t).$$

Donc

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}'(\Delta t) - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{u}''(\theta \Delta t),$$

et \mathbf{u}_η^1 vérifie l'équation d'erreur :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_\eta \in V_\eta, \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t), \mathbf{v}_\eta) + \nu (\nabla (\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)), \nabla \mathbf{v}_\eta) &= \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{u}''(\theta \Delta t), \mathbf{v}_\eta) \\ - (p(\Delta t) - r_\eta p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) + (\mathbf{u}(\Delta t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_\eta^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{v}_\eta) &- \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^1 \cdot \mathbf{v}_\eta). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Intercalons $P_\eta \mathbf{u}(\Delta t)$ dans cette équation et posons

$$\mathbf{v}_\eta = \mathbf{v}_\eta^1 = \mathbf{u}_\eta^1 - P_\eta \mathbf{u}(\Delta t) \text{ et } \varphi_\eta^1 = P_\eta \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}(\Delta t) :$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{v}_\eta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\mathbf{v}_\eta^1\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{u}''(\theta \Delta t), \mathbf{v}_\eta^1) + (r_\eta p(\Delta t) - p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^1) - (\mathbf{v}_\eta^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{v}_\eta^1) \\ - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^1 \cdot \mathbf{v}_\eta^1) - (\varphi_\eta^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{v}_\eta^1) &- \frac{1}{2} (\operatorname{div} \varphi_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^1 \cdot \mathbf{v}_\eta^1) - (\mathbf{u}(\Delta t) \cdot \nabla \varphi_\eta^1, \mathbf{v}_\eta^1) \\ - \frac{1}{\Delta t} (\varphi_\eta^1, \mathbf{v}_\eta^1) - \nu (\nabla \varphi_\eta^1, \nabla \mathbf{v}_\eta^1). \end{aligned} \quad (4.20)$$

En tenant compte de l'erreur d'approximation de P_η , on trouve facilement (4.17).

En ce qui concerne la pression, on intercale $r_\eta p(\Delta t)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} (r_\eta p(\Delta t) - p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) + (p_\eta^1 - r_\eta p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) \\ = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t), \mathbf{v}_\eta) + \nu (\nabla (\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)), \nabla \mathbf{v}_\eta) - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{u}''(\theta \Delta t), \mathbf{v}_\eta) \\ - (\mathbf{u}(\Delta t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_\eta^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{v}_\eta) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^1, \mathbf{u}_\eta^1 \cdot \mathbf{v}_\eta). \end{aligned} \quad (4.21)$$

D'après la condition inf-sup (1.16), il existe $\mathbf{v}_\eta \in V_\eta^\perp$ telle que :

$$(p_\eta^1 - r_\eta p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta) = \|p_\eta^1 - r_\eta p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et

$$\|\mathbf{v}_\eta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta^\star} \|p_\eta^1 - r_\eta p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)}, \text{ avec } \beta^\star > 0 \text{ indépendante de } \eta.$$

Donc en appliquant (4.17) :

$$\begin{aligned}
 (\Delta t)^{1/2} \|p_\eta^1 - r_\eta p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{(\Delta t)^{1/2}}{\beta^\star} \left(\|r_\eta p(\Delta t) - p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{S_2}{\Delta t} \|\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \nu |P_\eta \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} + \frac{S_2}{2}(\Delta t) \|\mathbf{u}''(\theta \Delta t)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + S_4^2 (|\mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} + \frac{3}{2} |\mathbf{u}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}) |\mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} \right) \\
 &\leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}).
 \end{aligned}$$

■

Le théorème 4.3.1 admet comme conséquence :

Corollaire 4.3.3 *Sous les hypothèses conjuguées du théorème 4.3.1 et de la proposition 4.3.2, nous avons*

$$\begin{aligned}
 \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^N \Delta t |\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

✓ Preuve. Il suffit d'appliquer une inégalité triangulaire à (4.8), de substituer (4.17) et d'utiliser les propriétés de l'opérateur P_η . ■

4.4 Quelques estimations du problème de Stokes

L'estimation d'erreur d'ordre 2 en temps dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$, que nous voulons calculer dans ce qui suit, est basée sur un argument de dualité pour le problème de Stokes dépendant du temps (3.10)–(3.13).

Nous discrétisons (3.10)–(3.13) par le schéma de l'**Étape** 1 d'ordre deux en temps (4.1)–(4.2) sans le terme non-linéaire, pour $1 \leq n \leq N - 1$: trouver $(\mathbf{v}_\eta^{n+1}, q_\eta^{n+1}) \in X_\eta \times M_\eta$, solution de

$$\forall \mathbf{z}_\eta \in X_\eta, \quad \frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{v}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{v}_\eta^n + \mathbf{v}_\eta^{n-1}, \mathbf{z}_\eta) + \nu (\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{z}_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{z}_\eta) = (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{z}_\eta), \tag{4.23}$$

$$\forall \lambda_\eta \in M_\eta, \quad (\lambda_\eta, \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1}) = 0. \tag{4.24}$$

Ces équations sont complétées par des conditions initiales analogues à celles adoptées pour le

problème de Navier-Stokes.

Nous utilisons, parfois, dans la suite de ce chapitre, l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.4.1 *Il existe deux constantes α' et γ' , positives, indépendantes de Δt et η telles que*

$$\alpha' \eta^3 \leq (\Delta t)^2 \leq \gamma' \eta^3, \quad (4.25)$$

i.e. $(\Delta t)^2$ est exactement du même ordre que η^3 .

4.4.1 Estimations $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$

Le problème (4.23)–(4.24) est linéaire et admet une unique solution grâce à la condition inf-sup (1.16), sans restriction sur Δt . Nous établissons une estimation de l'erreur des équations de Stokes en norme $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$, sans restriction sur Δt car le problème est linéaire.

En ce qui concerne la valeur de démarrage \mathbf{v}_η^1 , on montre comme dans le problème de Navier-Stokes, et plus simplement que : si $\mathbf{v}(\Delta t) \in H^3(\Omega)^2$, $q(\Delta t) \in H^2(\Omega)$ et $\mathbf{v}'' \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^2)$, alors

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{v}(\Delta t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \Delta t \left\| \mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{v}(\Delta t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{(\Delta t)^4}{2} \left\| \mathbf{v}'' \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)}^2 + C(\Delta t) \eta^4 \left(\left\| \mathbf{v}(\Delta t) \right\|_{H^3(\Omega)}^2 + \left\| q(\Delta t) \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) + C\eta^6 \left\| \mathbf{v}(\Delta t) \right\|_{H^3(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ensuite, dans le cas général, nous avons le résultat suivant. La démonstration est semblable à celle du théorème 4.3.1 mais elle est plus simple car le terme de convection est absent.

Proposition 4.4.2 *Soient (\mathbf{v}, q) et $(\mathbf{v}_\eta^{n+1}, q_\eta^{n+1})$ les solutions respectives de (3.10)–(3.13) et (4.23)–(4.24). En plus des hypothèses précédentes, on suppose que \mathbf{g} est assez régulière en espace et en temps, $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^2)$, $\mathbf{v}' \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)$, $\mathbf{v}^{(3)} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $q \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que*

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq n \leq N} \left\| \mathbf{v}_\eta^n - P_\eta \mathbf{v}(t^n) \right\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \left\| 2(\mathbf{v}_\eta^n - P_\eta \mathbf{v}(t^n)) - (\mathbf{v}_\eta^{n-1} - P_\eta \mathbf{v}(t^{n-1})) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left\| \delta^2(\mathbf{v}_\eta^n - P_\eta \mathbf{v}(t^n)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^N \Delta t \left\| \mathbf{v}_\eta^n - P_\eta \mathbf{v}(t^n) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

De cette proposition découle :

Corollaire 4.4.3 *Sous les hypothèses de la proposition 4.4.2, il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que*

$$\begin{aligned}
 & \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)) - (\mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{v}(t^{n-1}))\|_{L^2(\Omega)} \\
 & + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^N \Delta t |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Preuve. (4.28) s'obtient par simple application d'une inégalité triangulaire et des propriétés de l'opérateur P_η . \blacksquare

4.4.2 Estimation $L^\infty(H^1)$ et estimation $L^2(L^2)$ de la dérivée en temps

L'erreur satisfait aussi une estimation dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$. La démonstration utilise la variante de la projection de Stokes (3.33) introduite dans le chapitre 3 ainsi que les inégalités (3.34) et (3.35) vérifiées par la projection.

Pour simplifier, nous introduisons la notation suivante :

$$\delta^1 a^n = \frac{3a^{n+1} - 4a^n + a^{n-1}}{2\Delta t}. \tag{4.29}$$

Nous avons le

Lemme 4.4.4 *En sus des hypothèses de la proposition 4.4.2, on suppose que $\mathbf{v}' \in \mathcal{C}^0(0, T; H^2(\Omega)^2)$, $\mathbf{v}'' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$, $\mathbf{v}^{(3)} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$, $q' \in \mathcal{C}^0(0, T; H^1(\Omega))$ et $q'' \in L^2(\Omega \times]0, T])$. Alors, si Ω est convexe, il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1(\mathbf{v}_\eta^n - S_\eta \mathbf{v}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_\eta^n - S_\eta \mathbf{v}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\
 & + \sup_{1 \leq n \leq N-1} |2(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - S_\eta \mathbf{v}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - S_\eta \mathbf{v}(t^n))|_{H^1(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2(\mathbf{v}_\eta^n - S_\eta \mathbf{v}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Preuve. Nous posons :

$$\varphi(t) = \mathbf{v}(t) - S_\eta \mathbf{v}(t), \varphi_\eta^i = \varphi(t^i) \text{ et } \mathbf{e}_\eta^i = \mathbf{v}_\eta^i - S_\eta \mathbf{v}(t^i).$$

D'un côté, (4.23) donne :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{3\mathbf{e}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{e}_\eta^n + \mathbf{e}_\eta^{n-1}}{2\Delta t}, \mathbf{z}_\eta \right) + \nu(\nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{z}_\eta) \\
 &= (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{z}_\eta) + (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{z}_\eta) - \nu(\nabla(S_\eta \mathbf{v}(t^{n+1}) - \mathbf{v}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{z}_\eta) + \left(\frac{3\varphi_\eta^{n+1} - 4\varphi_\eta^n + \varphi_\eta^{n-1}}{2\Delta t}, \mathbf{z}_\eta \right) \\
 & \quad - \left(\frac{3\mathbf{v}(t^{n+1}) - 4\mathbf{v}(t^n) + \mathbf{v}(t^{n-1})}{2\Delta t}, \mathbf{z}_\eta \right) + \nu(\nabla \mathbf{v}(t^{n+1}), \nabla \mathbf{z}_\eta),
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

avec

$$\forall \mathbf{z}_\eta \in V_\eta, \nu(\nabla(S_\eta \mathbf{v}(t^{n+1}) - \mathbf{v}(t^{n+1})), \nabla \mathbf{z}_\eta) = - (q(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{z}_\eta).$$

Donc, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral (4.11), il reste :

$$\forall \mathbf{z}_\eta \in V_\eta, \quad (\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n, \mathbf{z}_\eta) + \nu(\nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{z}_\eta) = (\delta^1 \varphi_\eta^n, \mathbf{z}_\eta) + R_3, \tag{4.32}$$

où

$$|R_3| \leq \frac{(\Delta t)^{3/2}}{2\sqrt{3}} \left\| \mathbf{v}^{(3)} \right\|_{L^2(t^{n-1}, t^{n+1}; L^2(\Omega)^2)} \|\mathbf{z}_\eta\|_{L^2(\Omega)}.$$

En prenant le produit scalaire par $\mathbf{z}_\eta = \mathbf{z}_\eta^{n+1} = \frac{3\mathbf{e}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{e}_\eta^n + \mathbf{e}_\eta^{n-1}}{2\Delta t}$ et en sommant sur $1 \leq n \leq m-1$, (4.32) devient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{z}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{4} \left(|\mathbf{e}_\eta^m|_{H^1(\Omega)}^2 + |2\mathbf{e}_\eta^m - \mathbf{e}_\eta^{m-1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} |\delta^2 \mathbf{e}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
 & \quad \left. - |\mathbf{e}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 - |2\mathbf{e}_\eta^1 - \mathbf{e}_\eta^0|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\
 & \leq \left[\left(\sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\Delta t)^2 \left\| \mathbf{v}^{(3)} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)} \right] \left(\sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{z}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, ceci donne, puisque $\mathbf{e}_\eta^0 = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{z}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{4} \left(|\mathbf{e}_\eta^m|_{H^1(\Omega)}^2 + |2\mathbf{e}_\eta^m - \mathbf{e}_\eta^{m-1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} |\delta^2 \mathbf{e}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\
 & \leq \frac{5\nu}{4} |\mathbf{e}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{(\Delta t)^4}{3} \left\| \mathbf{v}^{(3)} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Calculons le troisième terme du second membre. On a, d'après la formule de Taylor avec reste

intégral,

$$\left| \frac{1}{2\Delta t} [3\varphi_\eta^{n+1} - 4\varphi_\eta^n + \varphi_\eta^{n-1}] - \varphi'(t^{n+1}) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} (\Delta t)^{1/2} \|\varphi''\|_{L^2(t^{n-1}; t^{n+1})}, \quad (4.35)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\varphi'(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4}{3} (\Delta t)^2 \|\varphi''\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2}. \quad (4.36)$$

Rappelons que d'une part,

$$\|S_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|P_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\nu} \|r_\eta(q) - q\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.37)$$

et d'autre part, si Ω est convexe, alors :

$$\|S_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta \left(\|S_\eta(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} + \|r_\eta(q) - q\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (4.38)$$

Donc, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$\|\varphi''(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|S_\eta'' \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|S_\eta(\mathbf{v}''(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta \left(\|\mathbf{v}''(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|q''(t)\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

grâce à la stabilité de P_η et r_η . De même,

$$\|\varphi'(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)} = \|S_\eta(\mathbf{v}'(t^{n+1})) - \mathbf{v}'(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta^2 \left(\|\mathbf{v}'(t^{n+1})\|_{H^2(\Omega)} + \|q'(t^{n+1})\|_{H^1(\Omega)} \right),$$

grâce aux propriétés d'approximation de P_η et r_η . En utilisant ces deux inégalités dans (4.36), on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\eta^4 \left(\|\mathbf{v}'\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2)}^2 + \|q'\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + C(\Delta t)^2 \eta^2 \left(\|\mathbf{v}''\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)}^2 + \|q''\|_{L^2(\Omega \times]0, T])}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ainsi l'inéquation (4.34) devient, pour $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \frac{3\mathbf{e}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{e}_\eta^n + \mathbf{e}_\eta^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \nu \sum_{n=1}^{m-1} |\delta^2 \mathbf{e}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}^2 + |\mathbf{e}_\eta^m|_{H^1(\Omega)}^2 + |2\mathbf{e}_\eta^m - \mathbf{e}_\eta^{m-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C|\mathbf{e}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 + A\eta^4 + B(\Delta t)^4 \\ &\leq A'\eta^4 + B'(\Delta t)^3 + \frac{\eta^6}{\Delta t} \quad (\text{d'après le résultat (4.26)}). \end{aligned}$$

Le résultat (4.30) découle de ce qui précède et d'une deuxième application de (4.26). ■

Théorème 4.4.5 *Sous les hypothèses du lemme 4.4.4, il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\ & + \sup_{1 \leq n \leq N-1} |2(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n))|_{H^1(\Omega)} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (4.40) \\ & \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}). \end{aligned}$$

✓ *Preuve.* Il suffit d'appliquer une inégalité triangulaire à (4.30) ainsi que les propriétés des opérateurs S_η et P_η . ■

Corollaire 4.4.6 *Sous les hypothèses du lemme 4.4.4 et du théorème 4.4.5, on a*

$$\sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}). \quad (4.41)$$

4.4.3 Argument de dualité

Nous introduisons le problème de Stokes rétrograde d'ordre deux en temps suivant :

$$-\frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \Delta \mathbf{w}^{n-1} - \nabla \lambda^{n-1} = \mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{v}(t^{n-1}) \quad \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq n \leq N+1, \quad (4.42)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}^{n-1} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq n \leq N+1, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{w}^{n-1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad 1 \leq n \leq N+1, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{w}^{N+2} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.45)$$

Pour tout $n, 0 \leq n \leq N$, ce problème de Stokes admet une unique solution :

$$\mathbf{w}^n \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \lambda^n \in L_0^2(\Omega).$$

Le problème (4.42)–(4.45) s'écrit sous forme variationnelle : $\forall \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$-\frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}, \mathbf{z}) - \nu (\nabla \mathbf{w}^{n-1}, \nabla \mathbf{z}) + (\lambda^{n-1}, \operatorname{div} \mathbf{z}) = (\mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{v}(t^{n-1}), \mathbf{z}), \quad (4.46)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}^{n-1} = 0.$$

Nous établissons dans le lemme suivant quelques estimations a priori de la vitesse \mathbf{w}^n du problème de Stokes rétrograde (4.42)–(4.45).

Lemme 4.4.7 *La solution \mathbf{w}^n , $0 \leq n \leq N$, du problème (4.42)–(4.45) vérifie les estimations a priori suivantes :*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N+1} \|2\mathbf{w}^{n-1} - \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2\nu} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ + \sum_{n=1}^{N+1} \|\delta^2 \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sqrt{\frac{2S_2}{\nu}} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

où S_2 est la constante de Poincaré et

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\nu}{2}} \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\frac{\nu}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N+1} |\delta^2 \mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{\nu}{2}} \sup_{0 \leq n \leq N} |2\mathbf{w}^n - \mathbf{w}^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \\ + \left(\sum_{n=1}^{N+1} \Delta t \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

✓ *Preuve.* (i) Prenons la fonction test $\mathbf{z} = 4\Delta t \mathbf{w}^{n-1}$, et sommons l'équation (4.42) de $n = m + 1$ à $N + 1$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{w}^m - \mathbf{w}^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\nu \sum_{n=m}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=m+1}^{N+1} \|\delta^2 \mathbf{w}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=m}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\varepsilon S_2 \sum_{n=m}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

d'où le premier résultat du lemme avec le choix de $\varepsilon = \frac{\nu}{S_2}$.

(ii) Pour la deuxième estimation, il suffit de prendre la fonction test $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t}$, sommer l'équation résultant de $n = m + 1$ à $N + 1$ et choisir $\varepsilon = \frac{1}{2\Delta t}$. ■

De plus, nous avons le :

Lemme 4.4.8 *Si Ω est convexe, alors pour tout $0 \leq n \leq N$, on a $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2$, $\lambda^n \in H^1(\Omega)$ et*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \left(|\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 + |\lambda^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}(t^n) - \mathbf{v}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (4.49)$$

avec C une constante indépendante de Δt et de η .

✓ *Preuve.* Nous avons, pour chaque n , $1 \leq n \leq N + 1$,

$$-\nu \Delta \mathbf{w}^{n-1} + \nabla \lambda^{n-1} = -\frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} + (\mathbf{v}(t^{n-1}) - \mathbf{v}_\eta^{n-1}).$$

C'est un problème de Stokes et nous venons de voir que le second membre appartient à $L^2(\Omega)^2$ et satisfait une borne convenable. Donc, si Ω est convexe, nous savons que, pour $0 \leq n \leq N$, $\mathbf{w}^n \in H^2(\Omega)^2$ et $\lambda^n \in H^1(\Omega)$, avec :

$$|\mathbf{w}^{n-1}|_{H^2(\Omega)} + |\lambda^{n-1}|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{v}(t^{n-1}) - \mathbf{v}_\eta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (4.50)$$

où la constante C ne dépend que de Ω et ν .

En prenant le carré de (4.50), en la multipliant par Δt de part et d'autre, en sommant de $n = 1$ à $N+1$ et en utilisant (4.48), on trouve (4.49), avec une constante qui ne dépend que de ν et Ω . ■

Théorème 4.4.9 *Si Ω est convexe, $\mathbf{g} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$, $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^2)$, $q \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$, $\mathbf{v}' \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)$ et $\mathbf{v}^{(3)} \in L^2(\Omega \times]0, T])^2$, alors il existe une constante C , qui dépend des normes de $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}^{(3)}$ et q , mais indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2). \quad (4.51)$$

En particulier, si $(\Delta t)^2 = O(\eta^3)$ (i.e. si la deuxième inégalité de (4.25) a lieu), alors

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^3. \quad (4.52)$$

✓ Preuve. On procède en trois étapes :

Étape 1. Prenons le produit scalaire de (4.42) par $\mathbf{e}^{n-1} = \mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{v}(t^{n-1})$ et sommons le résultat de $n = 1$ à $n = N+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}, \mathbf{e}^{n-1}) - \nu \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t (\nabla \mathbf{w}^{n-1}, \nabla \mathbf{e}^{n-1}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t (\lambda^{n-1}, \operatorname{div} \mathbf{e}^{n-1}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

En effectuant une intégration par parties discrète dans le premier terme du second membre de l'équation précédente, nous avons, après les simplifications dues au fait que $\mathbf{w}^{N+1} = \mathbf{w}^{N+2} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{e}^0 = \mathbf{0}$,

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (\mathbf{w}^{n+1} - 4\mathbf{w}^n + 3\mathbf{w}^{n-1}, \mathbf{e}^{n-1}) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (3\mathbf{e}^{n+1} - 4\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{w}^{n+1}) - \frac{3}{2} (\mathbf{w}^1, \mathbf{e}^1).$$

Ainsi, (4.53) devient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (3\mathbf{e}^{n+1} - 4\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}, P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) - \nu \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n-1}, \nabla \mathbf{e}^{n-1}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (3\mathbf{e}^{n+1} - 4\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) - \nu \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t (\nabla(\mathbf{w}^{n-1} - P_\eta \mathbf{w}^{n-1}), \nabla \mathbf{e}^{n-1}) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t (\lambda^{n-1} - r_\eta \lambda^{n-1}, \operatorname{div} \mathbf{e}^{n-1}) - \frac{3}{2} (\mathbf{w}^1, \mathbf{e}^1).
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

En traitant les deux premiers termes du second membre de (4.54), cette dernière s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (3\mathbf{e}^{n+1} - 4\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}, P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) - \nu \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^{n+1}) \\
 &\quad - \nu \Delta t (\nabla \mathbf{e}^1, \nabla P_\eta \mathbf{w}^1) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} (3\mathbf{e}^{n+1} - 4\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1})
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$-\nu \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t (\nabla(\mathbf{w}^{n-1} - P_\eta \mathbf{w}^{n-1}), \nabla \mathbf{e}^{n-1}) + \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t (\lambda^{n-1} - r_\eta \lambda^{n-1}, \operatorname{div} \mathbf{e}^{n-1}) - \frac{3}{2} (\mathbf{w}^1, \mathbf{e}^1).$$

Étape 2. Étudions les différents termes du second membre de cette équation.

• Les deux premiers termes deviennent :

$$\begin{aligned}
 &\left| -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (3\mathbf{e}^{n+1} - 4\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}, P_\eta \mathbf{w}^{n+1}) - \nu \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\nabla P_\eta \mathbf{w}^{n+1}, \nabla \mathbf{e}^{n+1}) \right| \\
 &\leq \left| \sum_{n=1}^N \Delta t (q(t^{n+1}) - r_\eta q(t^{n+1}), \operatorname{div}(P_\eta \mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1})) \right| \\
 &\quad + \frac{P}{\sqrt{3}} (\Delta t)^2 \left\| \mathbf{v}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |P_\eta \mathbf{w}^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \left[C\eta^3 \|q\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \frac{P}{\sqrt{3}} (\Delta t)^2 \left\| \mathbf{v}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2} \right] \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- Le quatrième est :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^{N+1} \Delta t \left(\frac{3\mathbf{e}^{n+1} - 4\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}}{2\Delta t}, \mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1} \right) \right| \\
 & \leq \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{w}^{n+1} - P_\eta \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C\eta^2((\Delta t)^{3/2} + \eta^2) \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- En appliquant le corollaire 4.4.3, le cinquième et sixième termes sont tels que :

$$\begin{aligned}
 \left| \nu \sum_{n=0}^N \Delta t (\nabla(\mathbf{w}^n - P_\eta \mathbf{w}^n), \nabla \mathbf{e}^n) \right| & \leq C\eta \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{e}^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^N \Delta t |\mathbf{w}^n|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C\eta((\Delta t)^2 + \eta^2) \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

et

$$\left| \sum_{n=0}^N \Delta t (\lambda^n - r_\eta \lambda^n, \operatorname{div} \mathbf{e}^n) \right| \leq C\eta((\Delta t)^2 + \eta^2) \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

- Il nous reste à étudier le troisième et le dernier terme. Ils s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{2}(\mathbf{w}^1, \mathbf{e}^1) - \nu \Delta t (\nabla \mathbf{e}^1, \nabla P_\eta \mathbf{w}^1) & = -\frac{3}{2}(\mathbf{w}^1 - P_\eta \mathbf{w}^1, \mathbf{e}^1) - \frac{3}{2}[(P_\eta \mathbf{w}^1, \mathbf{e}^1) \\
 & \quad + \nu \Delta t (\nabla \mathbf{e}^1, \nabla P_\eta \mathbf{w}^1)] + \frac{1}{2} \nu \Delta t (\nabla \mathbf{e}^1, \nabla P_\eta \mathbf{w}^1).
 \end{aligned}$$

Considérons le terme entre crochets de la relation précédente. En écrivant l'équation vérifiée par l'erreur au temps t^1 , il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$(\mathbf{e}^1, P_\eta \mathbf{w}^1) + \nu \Delta t (\nabla \mathbf{e}^1, \nabla P_\eta \mathbf{w}^1) = \Delta t (r_\eta q(\Delta t) - q(\Delta t), \operatorname{div} P_\eta \mathbf{w}^1) - \frac{(\Delta t)^2}{2} (\mathbf{v}''(\theta \Delta t), P_\eta \mathbf{w}^1),$$

donc

$$\begin{aligned}
 & \left| (\mathbf{e}^1, P_\eta \mathbf{w}^1) + \nu \Delta t (\nabla \mathbf{e}^1, \nabla P_\eta \mathbf{w}^1) \right| \\
 & \leq C \left[(\Delta t) \eta^2 |q(\Delta t)|_{H^2(\Omega)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \|\mathbf{v}''\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)} \right] \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant le premier terme. En utilisant (4.26), il est majoré par :

$$\begin{aligned}
 \left| (\mathbf{w}^1 - P_\eta \mathbf{w}^1, \mathbf{e}^1) \right| & \leq C\eta \left[(\Delta t)^{1/2} \eta^2 (|q(\Delta t)|_{H^2(\Omega)}^2 + |\mathbf{v}(\Delta t)|_{H^3(\Omega)}^2)^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(\Delta t)^2}{2} \|\mathbf{v}''\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)} + \eta^3 |\mathbf{v}(\Delta t)|_{H^3(\Omega)} \right] \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

- De même, le dernier terme est majoré par (4.26).

Étape 3. Ainsi, regroupant tous ces résultats, on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + \eta^4 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2).$$

Par conséquent, si l'hypothèse (4.25) est vérifiée, alors ■

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{v}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^3.$$

4.5 Résultat de superconvergence

Dans cette section, nous allons établir une estimation d'erreur d'ordre deux pour la norme L^2 de $\mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})$. Pour cela, comme pour le problème d'ordre un en temps, nous divisons l'erreur en deux contributions, l'une linéaire et l'autre non-linéaire. La contribution linéaire, qui n'est autre que la solution discrète de la partie de Stokes dans (1.1), est estimée par le théorème 4.4.9. Puis, nous démontrons un résultat de "superconvergence" pour l'erreur de la partie non-linéaire.

Plus précisément, soit $\mathbf{v}_\eta^{n+1} \in V_\eta$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w}_\eta \in V_\eta, \quad & \frac{(3\mathbf{v}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{v}_\eta^n + \mathbf{v}_\eta^{n-1}, \mathbf{w}_\eta)}{2\Delta t} + \nu(\nabla \mathbf{v}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{w}_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta) \\ & = (\mathbf{f}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{w}_\eta). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Alors, \mathbf{v}_η^{n+1} satisfait (4.23) avec la donnée $(\mathbf{g}(t^{n+1}), \mathbf{w}_\eta) = (\mathbf{f}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{w}_\eta)$ et le théorème 4.4.9 admet le

Corollaire 4.5.1 *On suppose que \mathbf{u} vérifie les hypothèses sur \mathbf{v} dans l'énoncé du théorème 4.4.9, que Ω est convexe et que $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega)^2)$. Alors*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2), \quad (4.57)$$

où C ne dépend ni de η ni de Δt .

De même, le théorème 4.4.5 admet la conséquence suivante :

Corollaire 4.5.2 *En sus des hypothèses du corollaire 4.5.1, on suppose que $p' \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Alors il existe une constante C , indépendante de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sup_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\ & + \sup_{0 \leq n \leq N-1} |2(\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) - (\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

La contribution non-linéaire vérifie l'estimation d'erreur suivante :

Théorème 4.5.3 *En sus des hypothèses du corollaire 4.5.2, on suppose que $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; W^{1,4}(\Omega)^2)$. On a :*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n) - (\mathbf{v}_\eta^{n-1} - \mathbf{u}_\eta^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{v}_\eta^n - \mathbf{u}_\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (4.59)$$

✓ Preuve. On procède en quatre étapes :

Étape 1. On soustrait l'équation (4.1) de (4.23) et on pose $\varphi_\eta^i = \mathbf{v}_\eta^i - \mathbf{u}_\eta^i$. Le terme non-linéaire passe au second membre et s'écrit :

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) \\ & = -\varphi_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \varphi_\eta^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \mathbf{v}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \varphi_\eta^{n+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v}_\eta^{n+1} \varphi_\eta^{n+1} \\ & \quad + (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) + \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \\ & \quad + (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) + \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \mathbf{u}(t^{n+1}) \\ & \quad + \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})). \end{aligned}$$

En multipliant par φ_η^{n+1} et en sommant de $n = 1$ à $n = m - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} (\varphi_\eta^{n+1}, 3\varphi_\eta^{n+1} - 4\varphi_\eta^n + \varphi_\eta^{n-1}) + \nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & = \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\{ (-\varphi_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \varphi_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \right\} \\ & \quad + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \varphi_\eta^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\{ ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}))), \varphi_\eta^{n+1} \right\} \\
 & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \Big\} \\
 & + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\{ ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1})), \varphi_\eta^{n+1} \right\} \\
 & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \Big\}.
 \end{aligned}$$

Le premier membre de (4.60) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \|\varphi_\eta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|\varphi_\eta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|2\varphi_\eta^m - \varphi_\eta^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|2\varphi_\eta^1 - \varphi_\eta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{m-1} \|\delta^2 \varphi_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Étape 2. On étudie maintenant les termes du second membre de (4.60) notés $((secmb)_i)_{1 \leq i \leq 4}$.

• En posant

$$C_1 = \sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{H^1(\Omega)},$$

(on remarque que cette quantité est bornée grâce à (4.8) et la première partie de (4.25)), le premier est tel que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\{ (-\varphi_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \varphi_\eta^{n+1}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \varphi_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \varphi_\eta^{n+1}) \right\} \right| \\
 & \leq \frac{C_1}{2} \left\{ (\sqrt{2}\varepsilon_1 + \frac{2^{1/4} 3 S_4 \varepsilon_2^{4/3}}{8}) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon_1} + \frac{2^{1/4} S_4}{8\varepsilon_2^4} \right) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\varphi_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

• En posant $C_3 = \sup_n \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)}$ et d'après le corollaire 4.5.1, le deuxième terme est borné par :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}))), \varphi_\eta^{n+1} \right| \\
 & \leq \frac{C_3}{2\varepsilon_3} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_3 \varepsilon_3}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \leq \frac{CC_3}{2\varepsilon_3} (\eta^6 + (\Delta t)^4 + (\Delta t)^4 \eta^2) + \frac{C_3 \varepsilon_3}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\varphi_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

- D'après les corollaires 4.4.3 et 4.5.2, le troisième terme est tel que :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\{ ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}) \right\} \right| \\ & \leq \frac{CS_4^2}{2\varepsilon_4} (\eta^8 + (\Delta t)^7 + (\Delta t)^3 \eta^4) + \frac{3S_4^2 \varepsilon_4}{4} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- Les deux derniers termes se traitent ensemble grâce à la formule (3.44) :

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}) \\ & = \frac{1}{2} ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}) - \frac{1}{2} ((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}(t^{n+1})). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Donc, en posant $C_2 = \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{u}(t^{n+1})|_{W^{1,4}(\Omega)}$, on trouve :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(((\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{v}_\eta^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}) \right) \right| \\ & \leq \frac{C(C_2 S_4 + C_3)}{4\varepsilon_5} (\eta^6 + (\Delta t)^4 + \eta^2 (\Delta t)^4) + \frac{(S_4 C_2 + C_3) \varepsilon_5}{4} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\boldsymbol{\varphi}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Étape 3. Il faut estimer la première valeur $\boldsymbol{\varphi}_\eta^1$. Elle vérifie, puisque $\mathbf{v}_\eta^0 = \mathbf{u}_\eta^0 = \mathbf{0}$,

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\eta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \Delta t |\boldsymbol{\varphi}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 = \Delta t \left| (\mathbf{u}_\eta^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t) \cdot \mathbf{u}(\Delta t), \boldsymbol{\varphi}_\eta^1) \right|.$$

Le terme non-linéaire a la même décomposition que dans le cas général. Donc le premier groupe de terme non-linéaire est majoré par :

$$\frac{C_1}{2} \left\{ (\sqrt{2} \varepsilon_6 + \frac{2^{1/4} 3 S_4 \varepsilon_7^{4/3}}{8}) \Delta t |\boldsymbol{\varphi}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon_6} + \frac{2^{1/4} S_4}{8 \varepsilon_7^4} \right) \Delta t \|\boldsymbol{\varphi}_\eta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\},$$

et si Δt est assez petit, on peut choisir ε_6 et ε_7 pour que ces deux termes soient absorbés par ceux du premier membre.

Le deuxième groupe fait intervenir :

$$\Delta t \|\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(t^1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\eta^6 + (\Delta t)^4).$$

Le troisième groupe fait intervenir :

$$\begin{aligned} & \Delta t |\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^4(\Omega)} |\boldsymbol{\varphi}_\eta^1|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{2} (\varepsilon_8 \Delta t |\boldsymbol{\varphi}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_8} \Delta t |\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)}^3 \|\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta t |\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C(\eta^4 + (\Delta t)^4), \\ \|\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(\eta^2 + (\Delta t)^2), \\ |\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} &\leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Delta t |\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^4(\Omega)} |\varphi_\eta^1|_{H^1(\Omega)} \\ \leq \frac{1}{2}(\varepsilon_8 \Delta t |\varphi_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_8} C(\eta^8 + \eta^6 (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^9}{\sqrt{\Delta t}} + \eta^4 (\Delta t)^{7/2}).\end{aligned}$$

Quant au dernier groupe, il fait intervenir

$$\Delta t \|\mathbf{v}_\eta^1 - \mathbf{u}(t^1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\eta^6 + (\Delta t)^4).$$

Étape 4. On termine la preuve avec un choix adéquat des ε_i et en appliquant le lemme de Gronwall. ■

En combinant les résultats du corollaire 4.5.1 et du théorème 4.5.3, on trouve le

Corollaire 4.5.4 *Sous les hypothèses du théorème 4.5.3, nous avons :*

$$\left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2), \quad (4.62)$$

où C est une constante indépendante de η et Δt .

En particulier, sous l'hypothèse (4.25) on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C\eta^3. \quad (4.63)$$

✓ Preuve. La démonstration est immédiate d'après le corollaire 4.5.1 et le théorème 4.5.3. ■

4.6 Estimations d'erreur de la pression

Les résultats de la section précédente nous permettent d'établir une estimation d'erreur de la pression. Pour mesurer l'erreur sur la pression, on a le résultat suivant :

Lemme 4.6.1 *On fait les hypothèses du théorème 4.3.1. Alors $(\mathbf{u}(t^{n+1}), p(t^{n+1}))$ et $(\mathbf{u}_\eta^{n+1}, p_\eta^{n+1})$, solutions respectives de (1.1)–(1.4) et (4.1)–(4.2) vérifient :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{\beta^\star} \left\{ C_1(\eta^2 + (\Delta t)^2) + C_2(\Delta t)^2 \|\mathbf{u}^{(3)}\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2} + C_3 \eta^2 \|p\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \right. \\ & \quad \left. + S_2 \left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|\delta^1(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

où β^\star est la constante de la condition inf-sup (1.16) et les coefficients $C_i, 1 \leq i \leq 3$, sont indépendants de η et Δt .

✓ Preuve. En faisant la différence des termes non-linéaires et en posant $\mathbf{e}_\eta^i = \mathbf{u}_\eta^i - \mathbf{u}(t^i)$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \\ & = -\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1} - \mathbf{e}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{e}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc pour toute suite $\mathbf{w}_\eta^n \in X_\eta$ et d'après la formule de Taylor avec reste intégral (4.11),

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}) = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \left(\frac{3\mathbf{e}_\eta^{n+1} - 4\mathbf{e}_\eta^n + \mathbf{e}_\eta^{n-1}}{2\Delta t}, \mathbf{w}_\eta^{n+1} \right) \\ & + \nu \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}) + \sum_{n=1}^{N-1} R_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \left\{ (\mathbf{e}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{e}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (p(t^{n+1}) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}). \end{aligned}$$

D'après la condition inf-sup (1.16), pour tout $q_\eta \in M_\eta$,

$$\exists \mathbf{w}_\eta \in V_\eta^\perp; (\operatorname{div} \mathbf{w}_\eta, q_\eta) = \|q_\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbf{w}_\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta^\star} \|q_\eta\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dans notre cas, $q_\eta = p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1})$. Ainsi le premier membre de l'équation précédente s'écrit

$$\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p_\eta^{n+1} - r_\eta p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Les termes du second membre sont majorés comme suit :

- Le premier est tel que :

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right| \leq S_2 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

- Comme $\mathbf{w}_\eta^{n+1} \in V_\eta^\perp$ et comme $(\nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \nabla P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1})) = 0$, le second terme est tel que :

$$\begin{aligned} & \left| \nu \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right| \\ & \leq \nu \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |P_\eta \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_1 (\eta^2 + (\Delta t)^2) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- Le troisième s'écrit :

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} R_1 \right| \leq C_2 (\Delta t)^2 \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

- Le quatrième s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{e}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right| \\ & \leq S_4^2 (\sup_t |\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{e}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_3 (\eta^2 + (\Delta t)^2) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- Le cinquième est majoré comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \left\{ (\mathbf{e}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{e}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right\} \right| \\ & = \frac{1}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\{ (\mathbf{e}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \mathbf{w}_\eta^{n+1}) - (\mathbf{e}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{w}_\eta^{n+1}, \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \right\} \right| \\ & \leq S_4^2 (\sup |\mathbf{u}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{e}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_4 (\eta^2 + (\Delta t)^2) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- Et le dernier est tel que :

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (p(t^{n+1}) - r_\eta p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_\eta^{n+1}) \right| \\
& \leq \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - r_\eta p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
& \leq C_5 \eta^2 \|p\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_\eta^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Le résultat final découle de la condition inf-sup et des majorations précédentes. \blacksquare

Ici aussi, \mathbf{u}_η^n est borné dans $L^\infty(0, T; W^{1,5/2}(\Omega)^2)$ (d'après le lemme 3.2.21), si \mathcal{T}_η vérifie (3.48) et si (4.25) a lieu :

$$\sup_n |\mathbf{u}_\eta^n|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \leq C.$$

Lemme 4.6.2 *Sous les hypothèses du théorème 4.5.3, il existe une constante $C = C(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}^{(3)})$ qui ne dépend pas de η et Δt , telle que :*

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\
& + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} |2(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_\eta^{n-1} - \mathbf{u}(t^{n-1}))|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2(\mathbf{u}_\eta^n - \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
& \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}).
\end{aligned} \tag{4.65}$$

\checkmark *Preuve.* On procède en trois étapes. Les étapes de la démonstration sont similaires à celles du lemme 4.6.1.

Étape 1. On a, à partir des équations (4.1) et (1.39), en posant $\mathbf{e}_\eta^i = \mathbf{u}_\eta^i - S_\eta \mathbf{u}(t^i)$, $\varphi_\eta^i = \mathbf{u}(t^i) - S_\eta \mathbf{u}(t^i)$ et en prenant la fonction test $\mathbf{w}_\eta = \mathbf{w}_\eta^{n+1} = \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} (|\mathbf{e}_\eta^m|_{H^1(\Omega)}^2 - |\mathbf{e}_\eta^1|_{H^1(\Omega)}^2 + |2\mathbf{e}_\eta^m - \mathbf{e}_\eta^{m-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
& - |2\mathbf{e}_\eta^1 - \mathbf{e}_\eta^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{m-1} |\delta^2 \mathbf{e}_\eta^n|_{H^1(\Omega)}^2) \\
& \leq \nu \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\nabla \varphi_\eta^{n+1}, \nabla \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n) \right| + \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (p(t^{n+1}), \operatorname{div} \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n) \right| + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\delta^1 \varphi_\eta^n, \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n) + \sum_{n=1}^{m-1} R_1 \\
& + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\{ (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n) \right\},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \mathbf{u}_\eta^{n+1} \\ &= \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) + (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \mathbf{u}_\eta^{n+1}. \end{aligned}$$

Étape 2. Étude des termes du second membre de l'équation précédente.

- La somme du premier et du deuxième termes du second membre est nulle, d'après la définition de l'opérateur de projection de Stokes S_η . Il reste donc à étudier les trois autres termes.
- En effectuant le même calcul que (4.39), le troisième est tel que :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^m \Delta t (\delta^1 \boldsymbol{\varphi}_\eta^n, \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n) \right| \leq \frac{C}{2\varepsilon_1} \left\{ \eta^4 (\|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 + \|p'\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2) \right. \\ & \left. + (\Delta t)^2 \eta^2 (\|\mathbf{u}''\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \|p''\|_{L^2(\Omega \times]0,T])}^2) \right\} + \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- Le quatrième s'écrit :

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} R_1 \right| \leq \frac{C(\Delta t)^4}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{u}^{(3)}\|_{L^2(\Omega \times]0,T])}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- Pour le dernier terme, nous le décomposons en deux parties.

1. La première partie est traitée comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}), \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right) \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \|\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0,T])}^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_3} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \varepsilon_3 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq \frac{C \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0,T])}^2}{2} \left(\frac{C'}{\varepsilon_3} (\eta^4 + (\Delta t)^4) + \varepsilon_3 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

2. Pour traiter la deuxième partie, on remarque que :

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} & \leq \|\mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{L^{10}(\Omega)} \\ & \leq S_{10} \|\mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\left(\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right) \cdot \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\operatorname{div}(\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1}) \mathbf{u}_\eta^{n+1}, \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right) \right| \\
 & \leq \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t S_{10} \left\| \nabla \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{L^{5/2}(\Omega)} \left\| \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq \left(\frac{C}{2} + S_{10} \right) \sup_n \left\| \mathbf{u}_\eta^n \right\|_{W^{1,5/2}(\Omega)} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_\eta^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq C'' \left(\frac{C'}{\varepsilon_4} (\eta^4 + (\Delta t)^4) + \varepsilon_4 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Donc en posant $C_1 = \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega \times]0, T])^2}$, le troisième terme est alors majoré par :

$$\left(\frac{C_1 C'}{2\varepsilon_3} + \frac{C'' C'}{\varepsilon_4} \right) (\eta^4 + (\Delta t)^4) + \left(\frac{C_1 \varepsilon_3}{2} + C'' \varepsilon_4 \right) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Enfin les données initiales sont majorées par la proposition 4.3.2.

Étape 3. Ainsi avec un choix convenable des $\varepsilon_i, i = 1, \dots, 4$, l'équation devient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \delta^1 \mathbf{e}_\eta^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \left\| \mathbf{e}_\eta^m \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \nu \left\| 2\mathbf{e}_\eta^m - \mathbf{e}_\eta^{m-1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \quad + \nu \sum_{n=1}^{m-1} \left\| \delta^2 \mathbf{e}_\eta^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B\eta^4 + D(\Delta t)^3 + C \frac{\eta^6}{\Delta t}.
 \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left\| \delta^1(\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} \left\| \mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n) \right\|_{H^1(\Omega)} \\
 & \quad + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} \left\| 2(\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_\eta^{n-1} - S_\eta \mathbf{u}(t^{n-1})) \right\|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left\| \delta^2(\mathbf{u}_\eta^n - S_\eta \mathbf{u}(t^n)) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}).
 \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (4.65) s'obtient par une inégalité triangulaire et par application des inégalités vérifiées par l'opérateur S_η (cf. la fin de la démonstration du lemme 3.2.22). \blacksquare

De ces deux lemmes, nous déduisons une estimation de la pression.

Théorème 4.6.3 *Sous les hypothèses du lemme 4.6.1, il existe une constante C indépendante de η et Δt , telle que*

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|p(t^n) - p_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{\eta^3}{\sqrt{\Delta t}}). \quad (4.66)$$

4.7 Estimations d'erreur des deux grilles

Dans cette section, notre but est d'estimer l'erreur de la solution de la deuxième étape du schéma à deux grilles (4.1)–(4.4).

Nous allons estimer en premier l'erreur initiale.

Proposition 4.7.1 *L'erreur de la solution calculée par une itération du schéma d'Euler $(\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t), p_h^1 - p(\Delta t))$ vérifie les estimations suivantes, pour $\Delta t \leq k_0 > 0$ assez petit,*

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu \Delta t}{2} |\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(H^6 + h^4 + (\Delta t)^4), \quad (4.67)$$

et

$$(\Delta t)^{1/2} \|p(\Delta t) - p_h^1\|_{L^2(\Omega)} \leq C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^{3/2}). \quad (4.68)$$

✓ Preuve. L'équation d'erreur est semblable à celle de (4.17).

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in V_h, (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t), \mathbf{v}_h) + \nu \Delta t (\nabla(\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t)), \nabla \mathbf{v}_h) &= \frac{(\Delta t)^2}{2} (\mathbf{u}''(\theta \Delta t), \mathbf{v}_h) \\ -\Delta t (p(\Delta t) - r_h p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + \Delta t (\mathbf{u}(\Delta t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (4.69)$$

En posant $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^1 = P_h \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_h^1$ et $\varphi_h^1 = P_h \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}(\Delta t)$, le terme non-linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u}(\Delta t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h) \\ &= ((\mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t), \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_H^1 \cdot \nabla (\mathbf{u}(\Delta t) - P_h \mathbf{u}(\Delta t)), \mathbf{v}_h) \\ &\quad + ((\mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1) \cdot \nabla (\mathbf{u}_h^1 - P_h \mathbf{u}(\Delta t)), \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}(\Delta t) \cdot \nabla (P_h \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_h^1), \mathbf{v}_h) \\ &= ((\mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t), \mathbf{v}_h) - (\mathbf{u}_H^1 \cdot \nabla \varphi_h^1, \mathbf{v}_h) - ((\mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1) \cdot \nabla \mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Nous avons donc trois contributions du terme non-linéaire. Pour le premier terme, on écrit :

$$\begin{aligned}
 & \Delta t \left| ((\mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t), \mathbf{v}_h^1) \right| \\
 & \leq S_4 |\mathbf{v}_h^1|_{H^1(\Omega)} \sup_t |\mathbf{u}(\Delta t)|_{W^{1,4}(\Omega)} \Delta t \|\mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon_1 \Delta t |\mathbf{v}_h^1|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} C^2 \Delta t (H^6 + (\Delta t)^4 + (\Delta t) H^4) \right).
 \end{aligned}$$

Pour le second terme, on sait que $\|\mathbf{u}_H^1\|_{L^4(\Omega)}$ est borné et on écrit :

$$\begin{aligned}
 \Delta t \left| (\mathbf{u}_H^1 \cdot \nabla \varphi_h^1, \mathbf{v}_h^1) \right| & \leq S_4 \Delta t |\mathbf{v}_h^1|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_H^1\|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{u}(\Delta t) - P_H \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} \\
 & \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon_2 \Delta t |\mathbf{v}_h^1|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{\varepsilon_2} (\Delta t) h^4 \right).
 \end{aligned}$$

Enfin, le troisième s'écrit :

$$\Delta t \left| ((\mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1) \cdot \nabla \mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^1) \right| \leq \Delta t \widehat{C} H^{1-\varepsilon} |\mathbf{v}_h^1|_{H^1(\Omega)}^2 |\mathbf{u}_H^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)},$$

avec

$$|\mathbf{u}_H^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} \leq C((\Delta t)^{3/2} + H^2 + \frac{H^3}{\sqrt{\Delta t}}),$$

donc pour H (donc aussi Δt) assez petit, ce terme est absorbé par le premier membre. Il reste les termes linéaires ; on reprend l'équation d'erreur (4.69) et on intercale $P_h \mathbf{u}(\Delta t)$:

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{v}_h^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \Delta t |\mathbf{v}_h^1|_{H^1(\Omega)}^2 \\
 & \leq \left| (\varphi_h^1, \mathbf{v}_h^1) \right| + \nu \Delta t \left| (\nabla \varphi_h^1, \nabla \mathbf{v}_h^1) \right| + \frac{(\Delta t)^2}{2} \sup \|\mathbf{u}''\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h^1\|_{L^2(\Omega)} \\
 & \quad + \Delta t \|p(\Delta t) - r_h p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{v}_h^1|_{H^1(\Omega)} + \text{termes non-linéaires.}
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

En tenant compte de l'erreur d'approximation de P_h et r_h , on trouve facilement (4.67).

En ce qui concerne la pression, on intercale $r_h p(\Delta t)$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \Delta t (r_h p(\Delta t) - p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + \Delta t (p_h^1 - r_h p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\
 & = (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t), \mathbf{v}_h) + \nu \Delta t (\nabla (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t)), \nabla \mathbf{v}_h) - \frac{(\Delta t)^2}{2} (\mathbf{u}''(\theta \Delta t), \mathbf{v}_h) \\
 & \quad - \Delta t (\mathbf{u}(\Delta t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}_H^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h).
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

On choisit $\mathbf{v}_h \in V_h^\perp$ telle que :

$$(p_h^1 - r_h p(\Delta t), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \|p_h^1 - r_h p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et

$$|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta^\star} \|p_h^1 - r_h p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{avec } \beta^\star > 0 \text{ indépendante de } h.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\Delta t)^{1/2} \|p_h^1 - r_h p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{(\Delta t)^{1/2}}{\beta^\star} \left(\|r_h p(\Delta t) - p(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{S_2}{\Delta t} \|\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \nu |P_h \mathbf{u}(\Delta t) - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} + \frac{S_2}{2} (\Delta t) \|\mathbf{u}''(\theta \Delta t)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + S_4^2 (|\mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{u}_H^1|_{H^1(\Omega)}) |\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}(\Delta t)|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\leq C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^{3/2}). \end{aligned}$$

■

Remarque 4.7.2 *L'ordre de l'erreur initiale sur la pression est inférieur à l'ordre d'erreur sur la vitesse, parce que le schéma de démarrage est seulement d'ordre un. Mais ceci ne se répercute pas sur l'erreur globale de la pression.*

4.7.1 Estimation de la vitesse

Théorème 4.7.3 *Sous les hypothèses du théorème 4.5.3, la solution $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ de l'Étape 2 satisfait l'estimation d'erreur suivante :*

$$\begin{aligned} &\sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}(t^{n-1}))\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^N \Delta t |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C(H^3 + h^2 + (\Delta t)^2 + H(\Delta t)^2), \end{aligned} \tag{4.72}$$

avec C une constante indépendante de h, H et Δt .

✓ Preuve. On procède en trois étapes :

Étape 1. En soustrayant les équations (4.3) et (1.39), en posant : $\mathbf{v}_h^i = P_h \mathbf{u}(t^i) - \mathbf{u}_h^i$, $\varphi_h^i = P_h \mathbf{u}(t^i) - \mathbf{u}(t^i)$, en prenant la fonction test $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^{n+1}$ et en sommant l'équation résultante de $n = 1$ à $n = m - 1$, on a

$$\nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} (\|\mathbf{v}_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{v}_h^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|2\mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|2\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

$$\begin{aligned}
 + \sum_{n=1}^{m-1} \|\delta^2 \mathbf{v}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left| \sum_{n=1}^{m-1} R_1 \right| + |\nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\nabla \varphi_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h^{n+1})| \\
 &+ \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (p(t^{n+1}) - r_h p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| + \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\delta^1 \varphi_h^n, \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| \\
 &+ \left| \sum_{n=1}^m \Delta t (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{v}_h^{n+1}) \right|.
 \end{aligned}$$

Étape 2. Le calcul des quatre premiers termes du second membre de l'équation précédente est similaire à celui déjà effectué dans les cas précédents. Rappelons les résultats.

- Le premier est tel que :

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} R_1 \right| \leq \frac{C(\Delta t)^4}{2\varepsilon_1} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- Le deuxième :

$$\left| \nu \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\nabla \varphi_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| \leq \frac{C\nu h^4}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^3(\Omega)^2)}^2 + \frac{\nu \varepsilon_2}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2.$$

- Le troisième :

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (p(t^{n+1}) - r_h p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| \leq \frac{Ch^4}{2\varepsilon_3} \|p\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^2 + \frac{\varepsilon_3}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2,$$

et le quatrième se calcule comme dans la démonstration du théorème 4.3.1. On a :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\delta^1 \varphi_h^n, \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| &\leq \frac{C(\Delta t)^4}{2\varepsilon_4} \left\| \mathbf{u}^{(3)} \right\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2}^2 + \frac{Ch^4}{2\varepsilon_4} \|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2)}^2 \\
 &+ \frac{\varepsilon_4}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{v}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

- Le terme non-linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) \\
 &= (\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) + \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla (P_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1})) \\
 &\quad - (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_h^{n+1} - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})) - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (P_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Ainsi le cinquième terme du second membre $\left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{v}_h^{n+1}) \right|$ se décompose en quatre parties qu'on étudie séparément.

∞ En posant $C_{\infty,1} = \sup |\mathbf{u}|_{W^{1,4}(\Omega)}$, la première partie est telle que :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t ((\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| \\ & \leq \frac{C_{\infty,1}}{2\varepsilon_{5,1}} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{S_4^2 C_{\infty,1} \varepsilon_{5,1}}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{C_{\infty,1}}{2\varepsilon_{5,1}} C(H^6 + (\Delta t)^4) + \frac{S_4^2 C_{\infty,1} \varepsilon_{5,1}}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

∞ En posant $C_{\infty,2} = \sup \|\mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^4(\Omega)}$, la deuxième partie est telle que :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t (\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla (P_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| \\ & \leq \frac{CC_{\infty,2} h^4}{2\varepsilon_{5,2}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega)^2)}^2 + \frac{S_4^2 C_{\infty,2} \varepsilon_{5,2}}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

∞ Pour la troisième partie, nous utilisons l'estimation suivante (cf. [30]) : il existe une constante \widehat{C} , indépendante de η telle que, pour tout $\mathbf{u}_\eta \in V_\eta$,

$$\forall \mathbf{w}_\eta \in X_\eta, |(\mathbf{u}_\eta \cdot \nabla \mathbf{w}_\eta, \mathbf{w}_\eta)| \leq \widehat{C} \eta^{1-\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\eta\|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{w}_\eta|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (4.73)$$

Il est facile de montrer que ce résultat est aussi valable si $\mathbf{u}_\eta \in V + V_\eta$. On a

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t ((\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_h^{n+1} - P_h \mathbf{u}(t^{n+1})), \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| \\ & \leq \widehat{C} H^{1-\varepsilon} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \widehat{C} H^{1-\varepsilon} \sup_n |\mathbf{u}_H^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \widehat{C} H^{1-\varepsilon} (H^2 + (\Delta t)^{3/2} + \frac{H^3}{\sqrt{\Delta t}}) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{v}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

grâce au corollaire 4.4.6. Pour H raisonnablement petit, ce terme est absorbé par le premier membre.

∞ Et la quatrième est

$$\left| \sum_{n=1}^m \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (P_h \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}), \mathbf{v}_h^{n+1}) \right| = 0.$$

Étape 3. Ainsi avec un choix convenable des ε_i et en appliquant le lemme de Gronwall discret, on a (4.72) :

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{1 \leq n \leq N} \|2(\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h \mathbf{u}(t^{n-1}))\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \|\delta^2(\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^N \Delta t |\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C(H^3 + h^2 + (\Delta t)^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.7.2 Estimation de la pression

Finalement, nous traitons l'erreur de la pression. Comme dans la section précédente, la pression satisfait l'estimation suivante :

Lemme 4.7.4 *Soient $(\mathbf{u}(t^{n+1}), p(t^{n+1}))$ et $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ les solutions respectives de (1.1)–(1.4) et (4.3)–(4.4). Nous avons :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p_h^{n+1} - r_h p(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\beta^*} \left\{ C_1 h^2 \|p\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + C_2 (\Delta t)^2 \|\mathbf{u}^{(3)}\|_{L^2(\Omega \times]0,T])^2} \right. \\ & \left. + C_3 (H^3 + (\Delta t)^2) + C_4 h^2 + S_2 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

où β^* est la constante de la condition inf-sup (1.16) et les coefficients $C_i, i = 1, \dots, 4$, sont indépendants de H, h et Δt .

✓ Preuve. Les étapes de la preuve sont similaires à celles de la preuve du lemme 4.6.1, sauf qu'on travaille sur la grille fine et non sur la grille grossière. On a $\mathbf{e}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (p_h^{n+1} - r_h p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_h^{n+1}) &= \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\delta^1 \mathbf{e}_h^n, \mathbf{w}_h^{n+1}) + \nu \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\nabla \mathbf{e}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{w}_h^{n+1}) \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1} R_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (p(t^{n+1}) - r_h p(t^{n+1}), \operatorname{div} \mathbf{w}_h^{n+1}) \\ &+ \sum_{n=1}^N \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{w}_h^{n+1}). \end{aligned}$$

On traite dans cette preuve uniquement la différence avec celle du lemme 4.6.1 qui n'est autre que le terme non-linéaire. En effet, il s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} = (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) \\ & + (\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}) + \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}). \end{aligned}$$

Ainsi le cinquième terme du second membre sera traité comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{w}_h^{n+1}) \right| \\
 & \leq \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{w}_h^{n+1}\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}(t^{n+1})|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \left[\|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^4(\Omega)}^2 \right] |\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\} \\
 & \leq S_4 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{w}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left\{ (\sup_n |\mathbf{u}(t^n)|_{W^{1,4}(\Omega)}) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. + S_4 (\sup_n |\mathbf{u}(t^n) - \mathbf{u}_H^n|_{H^1(\Omega)} + \sup_n |\mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)}) \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\} \\
 & \leq \left(C(H^3 + (\Delta t)^2) \right) \left(\sum_{n=1}^N \Delta t |\mathbf{w}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

D'où le résultat en appliquant la condition inf-sup (1.16) et l'erreur initiale. \blacksquare

Nous avons besoin d'estimer $\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$. Pour cela, nous établissons le lemme suivant.

Lemme 4.7.5 *Sous les hypothèses du théorème 4.5.3 et du corollaire 4.3.1, il existe une constante C indépendante de H, h et Δt telle que :*

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)|_{H^1(\Omega)} \\
 & + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} |2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n)) - (\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}(t^{n-1}))|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t^n))|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^2),
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

avec C une constante indépendante de h, H et Δt .

✓ Preuve. On soustrait les équations (1.39) et (4.3), on pose $\mathbf{e}_h^i = \mathbf{u}_h^i - S_h \mathbf{u}(t^i)$ et $\varphi_h^i = \mathbf{u}(t^i) - S_h \mathbf{u}(t^i)$ et on prend la fonction test $\mathbf{w}_h = \delta^1 \mathbf{e}_h^n$. D'après la définition de l'opérateur

de projection de Stokes S_h , on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\nabla \mathbf{e}_h^{n+1}, \nabla \delta^1 \mathbf{e}_h^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\delta^1 \boldsymbol{\varphi}_h^n, \delta^1 \mathbf{e}_h^n \right) + \sum_{n=1}^{m-1} R_1 + \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \delta^1 \mathbf{e}_h^n \right). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du second membre sont traités comme précédemment et pour le terme non-linéaire, on utilise la forme obtenue dans le lemme précédent 4.7.4. Le second membre est donc constitué de cinq termes. Le premier est tel que :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\delta^1 \boldsymbol{\varphi}_h^n, \delta^1 \mathbf{e}_h^n \right) \right| \leq \frac{C}{2\varepsilon_1} \left\{ h^4 \left(\|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)}^2 + \|p'\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 \right) \right. \\ & \left. + (\Delta t)^2 h^2 \left(\|\mathbf{u}''\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 + \|p''\|_{L^2(\Omega \times]0,T])}^2 \right) \right\} + \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Le deuxième est :

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} R_1 \right| \leq \frac{C(\Delta t)^4}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{u}^{(3)}\|_{L^2(\Omega \times]0,T])^2}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En posant $C_{\infty\infty} = \sup_n \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty(\Omega)}$, le troisième est :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t^{n+1}), \delta^1 \mathbf{e}_h^n \right) \right| \\ & \leq \frac{C_{\infty\infty}}{2\varepsilon_3} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_{\infty\infty}\varepsilon_3}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{C_{\infty\infty}}{2\varepsilon_3} C(H^6 + (\Delta t)^4) + \frac{C_{\infty\infty}\varepsilon_3}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.7.3, le quatrième est tel que :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left((\mathbf{u}_H^{n+1} - \mathbf{u}(t^{n+1})) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}), \delta^1 \mathbf{e}_h^n \right) \right| \\ & \leq \frac{S_4^2}{2\varepsilon_4} \left(\sup_n \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_H^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \right)^2 \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{S_4^2 \varepsilon_4}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{S_4^2}{2\varepsilon_4} C(H^6 + h^4 + (\Delta t)^4) + \frac{S_4^2 \varepsilon_4}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Et, d'après le théorème 4.7.3, le cinquième est tel que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \left(\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}), \delta^1 \mathbf{e}_h^n \right) \right| \\
 & \leq \frac{C_{\infty\infty}}{2\varepsilon_5} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t |\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C_{\infty\infty}\varepsilon_5}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq \frac{C_{\infty\infty}}{2\varepsilon_5} C(H^6 + h^4 + (\Delta t)^4) + \frac{C_{\infty\infty}\varepsilon_5}{2} \sum_{n=1}^{m-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi avec un choix adéquat des $\varepsilon_i, i = 1, \dots, 4$ et en tenant compte de l'erreur initiale, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\delta^1 \mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{e}_h^n|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\nu} \sup_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{2e}_h^n - \mathbf{e}_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)} \\
 & + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2 \mathbf{e}_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^2),
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Ces deux lemmes engendrent directement le théorème suivant.

Théorème 4.7.6 *Sous les hypothèses du lemme 4.7.5, nous avons :*

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h^2 + H^3 + (\Delta t)^2), \quad (4.76)$$

avec C une constante indépendante de h, H et Δt .

Remarque 4.7.7 *Comme conséquence, si h, H et Δt vérifient (4.25), alors*

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|p(t^{n+1}) - p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch^2. \quad (4.77)$$

Implémentation numérique

Chapitre 5

Résultats numériques

Sommaire

5.1	Introduction	156
5.2	Résolution du problème d'ordre un en temps	157
5.2.1	Problème de Stokes	157
5.2.1.1	Introduction	157
5.2.1.2	Stabilité du schéma en fonction du temps	157
5.2.1.3	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace .	159
5.2.1.4	Autre application	161
5.2.2	Problème de Navier-Stokes	163
5.2.2.1	Introduction	163
5.2.2.2	Consistance du schéma	164
5.2.2.3	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace .	165
5.2.3	Premier problème à deux grilles	167
5.2.3.1	Introduction	167
5.2.3.2	Stabilité du schéma en fonction du temps	168
5.2.3.3	Consistance du schéma	170
5.2.3.4	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace .	171
5.2.3.5	Efficacité de la méthode : comparaison en temps de calcul	173
5.2.4	Deuxième problème à deux grilles	174
5.2.4.1	Introduction	174
5.2.4.2	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace .	174
5.2.4.3	Comparaison en temps de calcul	176
5.3	Résolution du problème d'ordre deux en temps	176
5.3.1	Introduction	176
5.3.2	Stabilité du schéma en fonction du temps	176
5.3.3	Consistance du schéma	178
5.3.4	Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace	179
5.3.5	Efficacité de la méthode : comparaison en temps de calcul	181

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de confirmer numériquement les résultats théoriques obtenus pour les schémas à deux grilles d'ordre un et deux en temps. Nous discrétisons totalement le problème, en espace et en temps. Pour l'approximation en espace, on triangularise le domaine Ω avec deux maillages emboîtés, le premier de pas grossier H et le deuxième de pas fin h que nous noterons respectivement \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h .

Pour l'ordre un en temps, dans chaque triangle, on approche chaque composante de la vitesse par un polynôme de \mathbb{P}_1 plus une bulle et on approche la pression par un polynôme de \mathbb{P}_1 . Pour l'ordre deux en temps, on utilise les éléments finis de Taylor-Hood : c'est-à-dire, on approche chaque composante de la vitesse par un polynôme de \mathbb{P}_2 et la pression par un polynôme de \mathbb{P}_1 . Pour l'approximation en temps, on divise l'intervalle $[0, T]$ en N segments $t^n = n\Delta t$, où $\Delta t = T/N$.

On cherche la vitesse (resp. la pression) discrète sous la forme d'un vecteur $(\mathbf{u}_h^n)_{n=0}^N$ (resp. $(p_h^n)_{n=0}^N$) qui représente les valeurs de \mathbf{u} (resp. de p) au temps t^n et en tous les degrés de liberté du maillage.

Pour le schéma d'ordre un en temps, nous proposons la résolution en premier lieu du problème de Stokes, puis celle du problème de Navier-Stokes, suivie enfin de la résolution de deux schémas à deux grilles d'ordre un en temps. Nous implémentons par la suite un schéma à deux grilles d'ordre deux en temps. Dans ces deux cas, nous établissons des résultats de stabilité et de consistance des schémas. Nous calculons aussi leur ordre de convergence.

Les erreurs étudiées sont les erreurs absolues suivantes :

1. Celle de la vitesse en norme L^2 en temps et L^2 en espace : $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega \times]0, T])^2}$.
2. Celle de la vitesse en norme L^2 en temps et H^1 en espace : $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)}$.
3. Celle de la pression en norme L^2 en temps et L^2 en espace : $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega \times]0, T])}$.

La modélisation informatique des problèmes se fait à l'aide du logiciel *FreeFem++*⁴, créé et développé par F. Hecht, O. Pironneau, K. Ohtsuka et leurs équipes.

Nous proposons une solution analytique (\mathbf{u}, p) du problème de Navier-Stokes (sauf dans le cas où la géométrie du domaine est un cercle). Soit $(\mathbf{u}, p) = (\text{rot } \boldsymbol{\psi}, p)$ où $\boldsymbol{\psi}$ et p sont les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{x}, y) &= te^{-t^2(\mathbf{x}+y)}\mathbf{y}^2(1-y)^2\sin^2(\pi\mathbf{x}), \\ p(t, \mathbf{x}, y) &= te^{-t}\cos(2\pi\mathbf{x})\sin(2\pi y).\end{aligned}$$

Cette solution analytique vérifie la condition initiale, la condition au bord ainsi que la condition d'incompressibilité.

⁴<http://www.freefem.org>

5.2 Résolution du problème d'ordre un en temps

5.2.1 Problème de Stokes

5.2.1.1 Introduction

Le problème de Stokes s'écrit de la manière suivante :

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla q(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où \mathbf{g} représente le champ de forces volumiques appliquées au fluide. Nous discrétisons (S) en temps et en espace, nous avons :

$$(S^{n,1}) \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{v}_H^{n+1} - \mathbf{v}_H^n, \mathbf{w}_H) + \nu(\nabla \mathbf{v}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{w}_H) - (q_H^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{w}_H) = (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{w}_H), \\ (q_H, \operatorname{div} \mathbf{v}_H^{n+1}) = 0, \\ \mathbf{v}_H^0 = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Pour la validation numérique, nous prenons pour domaine Ω le carré unité dont chaque côté est divisé en N segments (voir Fig. 5.1).

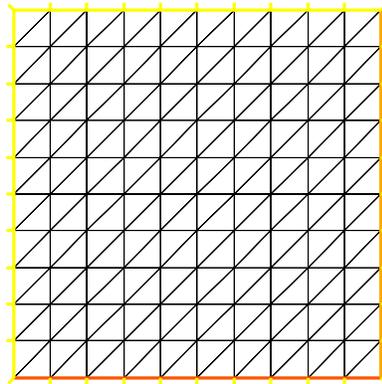


FIG. 5.1 – Géométrie carrée du domaine.

5.2.1.2 Stabilité du schéma en fonction du temps

Nous commençons par vérifier que le schéma $(S^{n,1})$ est inconditionnellement stable. Pour cela, nous traçons l'évolution des deux composantes de la solution \mathbf{v} au degré de liberté 500 (en ordonnée) en fonction du temps. Nous obtenons la comparaison suivante, pour un maillage contenant $N = 30$ points par arête du domaine et pour un temps long $T = 300$, en représentant le signal complet (Fig. 5.2) puis en effectuant un zoom sur les premiers instants (Fig. 5.3) :

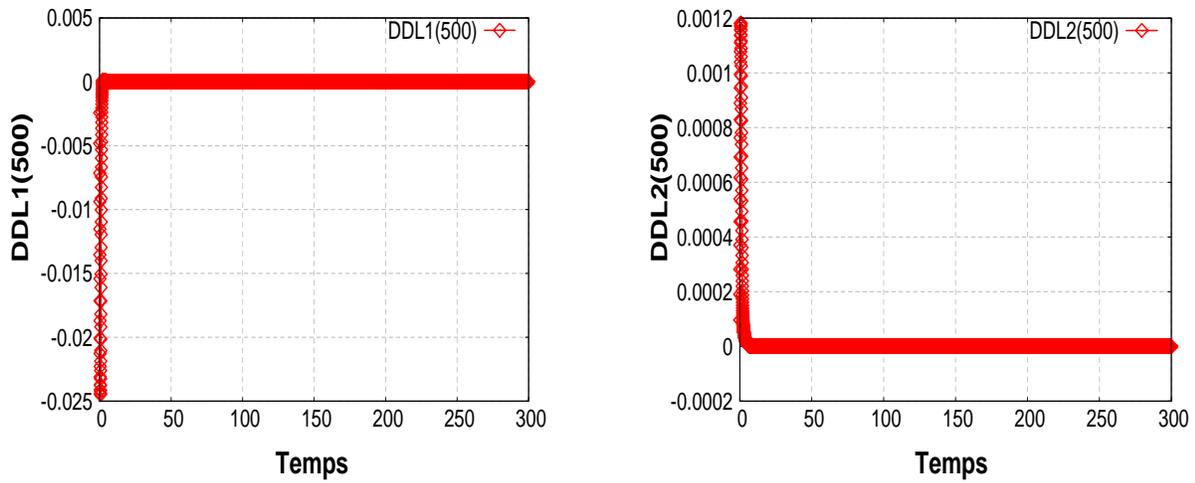


FIG. 5.2 – Évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.

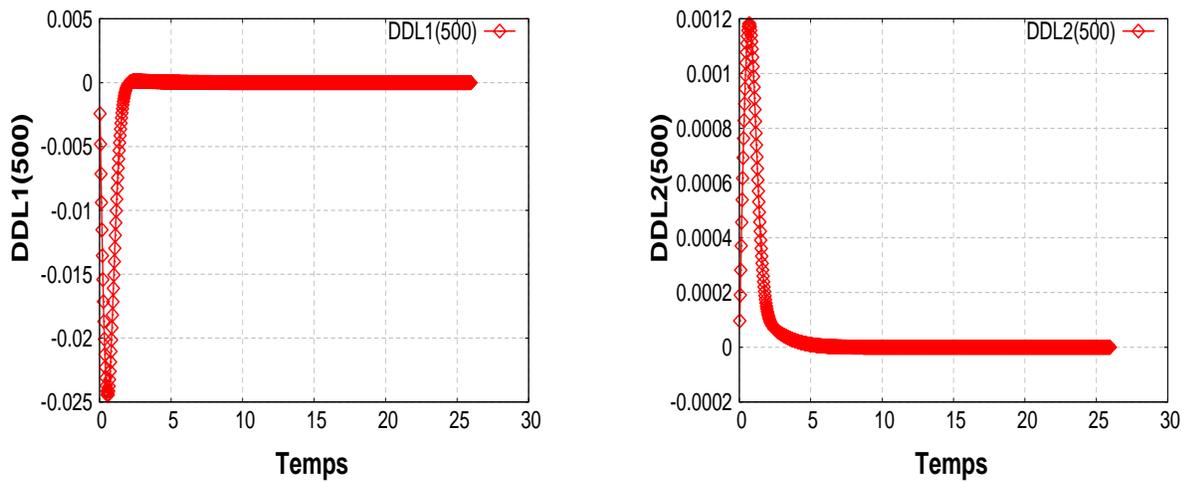


FIG. 5.3 – Zoom sur l'évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.

5.2.1.3 Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace

Pour les estimations d'erreur, nous testons l'algorithme pour N allant de 30 à 100, par pas de 10 points et donc $\Delta t = h = \frac{1}{N}$, $T = 1$ et le nombre d'itérations est $nbiter = T \times N$. Le nombre de Reynolds est fixé à $Re = 100$. Nous devons effectuer les vérifications des estimations d'erreur de la vitesse en normes $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et de la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T[)$.

Ainsi, nous obtenons 1.0305 comme pente de l'erreur sur la vitesse en norme $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$, et 1.0866 en norme $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$, ce qui confirme les résultats théoriques obtenus. En ce qui concerne l'erreur sur la pression, sa pente numérique est de l'ordre de 1.9845 ce qui est mieux que les résultats attendus. Les figures 5.4, 5.5 et 5.6 représentent les graphes correspondant à ces estimations.

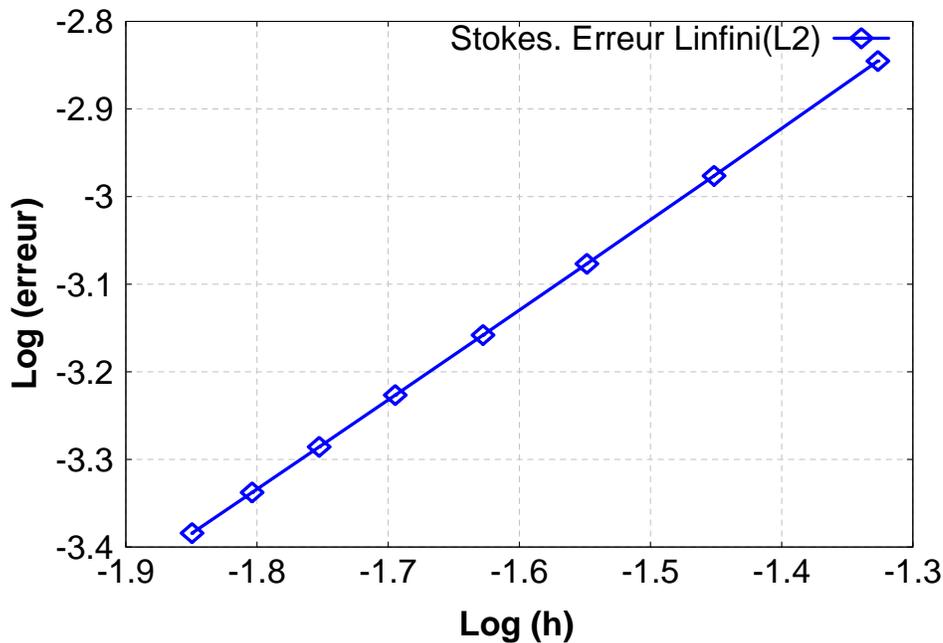
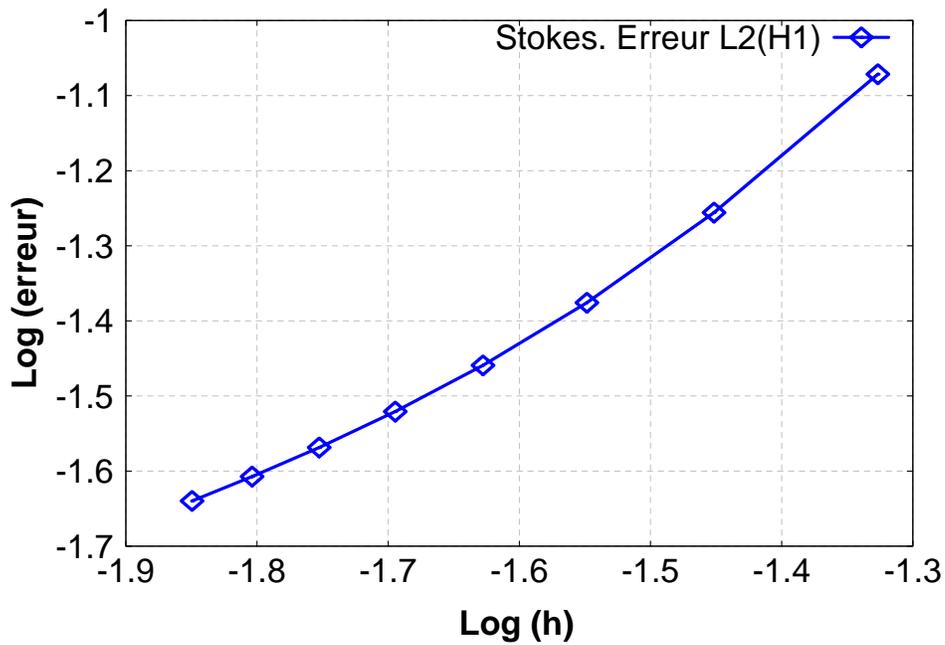
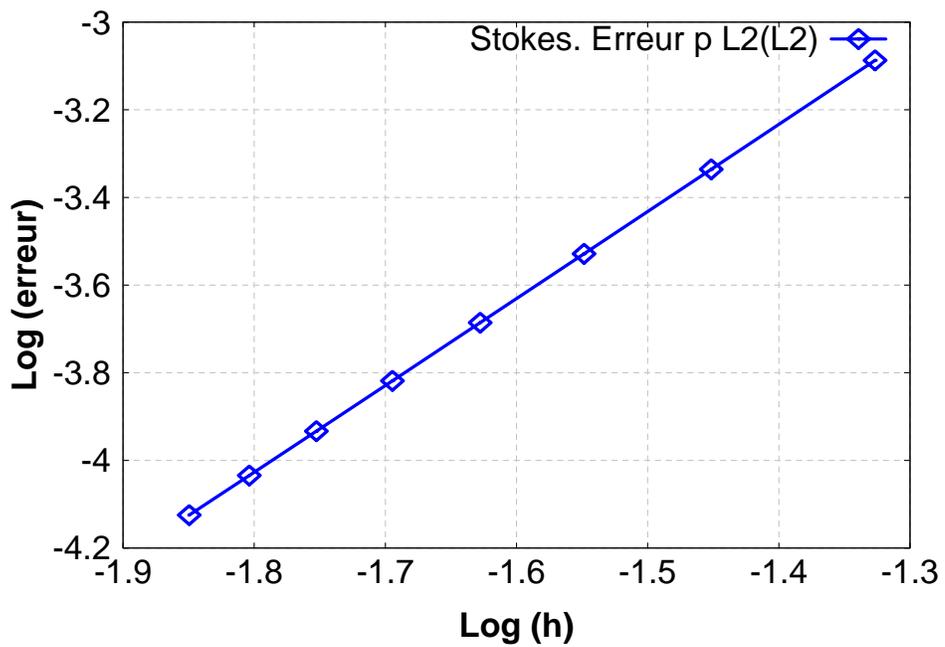


FIG. 5.4 – Erreur $L_t^\infty(L_x^2)$ de la vitesse du problème de Stokes d'ordre 1.


 FIG. 5.5 – Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème de Stokes d'ordre 1.

 FIG. 5.6 – Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème de Stokes d'ordre 1.

5.2.1.4 Autre application

Dans le but d'étendre notre étude et de généraliser les résultats obtenus précédemment, nous avons fait les mêmes tests en adoptant une autre géométrie du domaine : nous optons pour le cercle (Fig. 5.7).

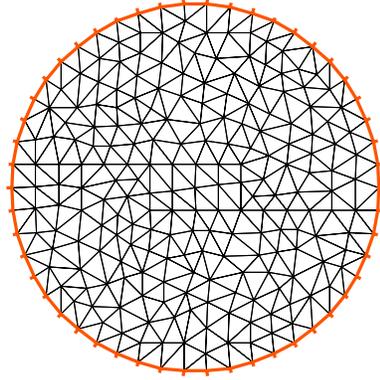


FIG. 5.7 – Géométrie circulaire du domaine.

Nous avons pris dans ce cas la fonction suivante comme second membre :

$$\begin{aligned} f_{xini}(t, x, y) &= (1 - 2t^2) e^{-t^2} (x^2 + y^2 - 1)y - 8 \nu t e^{-t^2} y \\ f_{yini}(t, x, y) &= -(1 - 2t^2) e^{-t^2} (x^2 + y^2 - 1)x + 8 \nu t e^{-t^2} x \end{aligned}$$

L'unique solution $(\mathbf{v} = (ve1 \quad ve2)^T, q)$ de (S) est de la forme :

$$\begin{aligned} ve1 &= t e^{-t^2} (x^2 + y^2 - 1), \\ ve2 &= -t e^{-t^2} (x^2 + y^2 - 1), \\ q &= \text{constante.} \end{aligned}$$

Nous présentons dans les deux figures, 5.8.a et 5.8.b, suivantes une comparaison entre les solutions exacte et numérique pour $T = 1.$, $N = 180$ et $\Delta t = h$:

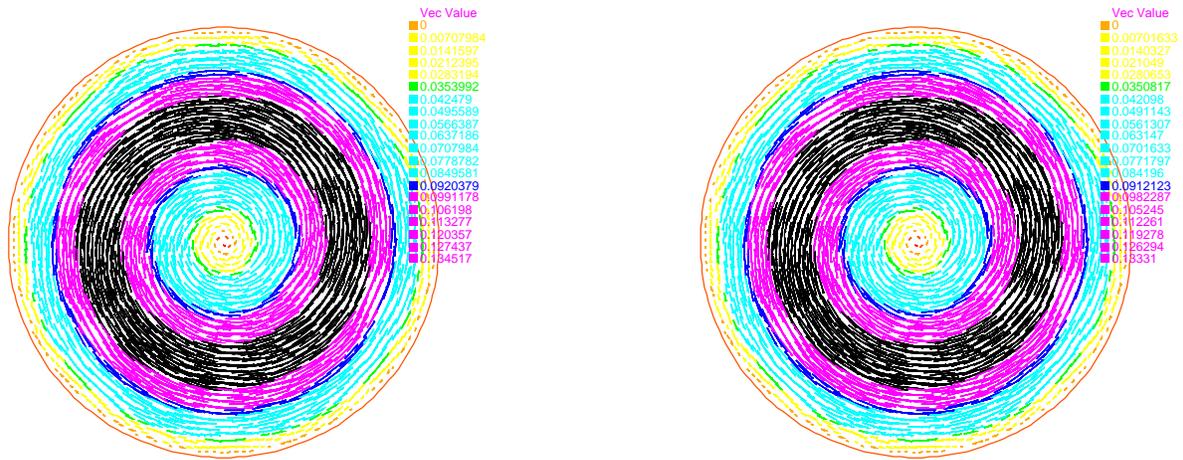


FIG. 5.8 – Champ des vitesses au temps $t = T$ - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse.

Comme dans le cas du carré, nous présentons des résultats numériques correspondant aux erreurs $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$. Le pas d'espace du maillage est $h = \frac{1}{N_f}$ avec N_f le nombre de points sur le cercle. Les pentes respectives des erreurs sont 1.1815 et 1.0018.

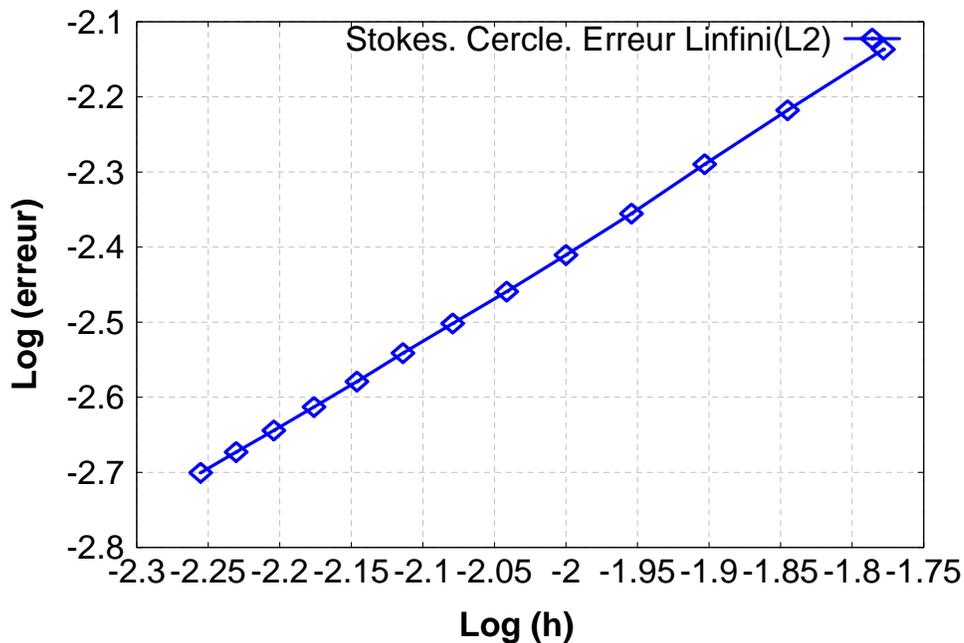
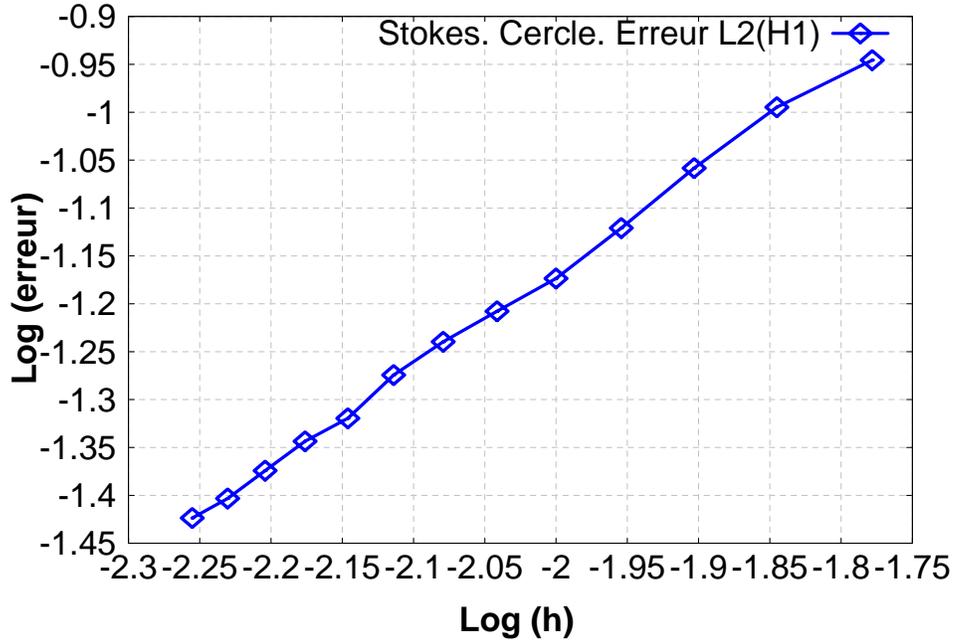


FIG. 5.9 – Cercle. Stokes - Erreur sur la vitesse $L_t^\infty(L_x^2)$.

FIG. 5.10 – Cercle. Stokes - Erreur sur la vitesse $L_t^2(H_x^1)$

5.2.2 Problème de Navier-Stokes

5.2.2.1 Introduction

Pour discrétiser le problème de Navier-Stokes par rapport au temps, nous utilisons une méthode de caractéristiques.

Le principe est le suivant : en considérant que la position ξ est fonction du temps, on écrit :

$$\xi'(t) = \mathbf{u}(t, \xi(t)) = (\mathbf{u} \circ \xi)(t), \quad (5.1)$$

ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \xi(t)) + \mathbf{u}(t, \xi(t)) \cdot \nabla \mathbf{u}(t, \xi(t)) = \frac{d(\mathbf{u} \circ \xi)}{dt}(t).$$

Le long des caractéristiques (c.à.d. pour $\mathbf{x} = \xi(t)$) nous avons l'équation :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t, \xi(t)) - \nu \Delta \mathbf{u}(t, \xi(t)) + \nabla p(t, \xi(t)) = \mathbf{f}(t, \xi(t)),$$

qui est approchée par l'équation numérique suivante :

$$\frac{\mathbf{u}_{\xi}^{n+1} - \mathbf{u}_{\xi}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}_{\xi}^{n+1} + \nabla p_{\xi}^{n+1} = \mathbf{f}_{\xi}^{n+1},$$

où \mathbf{u}_ξ^{n+1} est une approximation de $\mathbf{u}(t_{n+1}, \xi(t_{n+1}))$. De plus \mathbf{u}_ξ^n est approché par convection de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_\xi^n = \mathbf{u}^n \circ \xi^n = \mathbf{u}^n(\mathbf{x} - \Delta t \mathbf{u}^n(\mathbf{x})), \quad (5.2)$$

où ξ^n est l'approximation du pied de la caractéristique au temps $n\Delta t$ qui passe par \mathbf{x} au temps $(n+1)\Delta t$, c'est-à-dire $\xi^n \simeq \mathbf{x} - \mathbf{u}^n \Delta t$.

La discrétisation en espace est la même que celle dans les exemples précédents. Dans cette méthode-là, nous prenons comme solution du problème la première fonction prise dans le cas du problème de Stokes, c'est-à-dire :

$$\psi(t, x, y) = te^{-t^2(x+y)}y^2(1-y)^2 \sin^2(\pi x) \quad \text{et} \quad p(t, x, y) = te^{-t} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

La géométrie du domaine est toujours le carré et nous prenons $N = 40, \dots, 100$ points et donc $h = \frac{1}{N}$, $T = 1$ et le nombre d'itérations est $nbiter = T \times N$.

5.2.2.2 Consistance du schéma

Une comparaison entre les solutions exacte et numérique de la vitesse et de la pression est faite sur le maillage 100×100 et au temps final $T = 1$. La figure 5.11 présente des photographies du champ des vitesses exacte et numérique à l'instant $t = T$, et la figure 5.12 représente les isovalues des pressions exacte et numérique à l'instant $t = T$, coïncidant avec la figure 5.11 des vitesses au même instant.

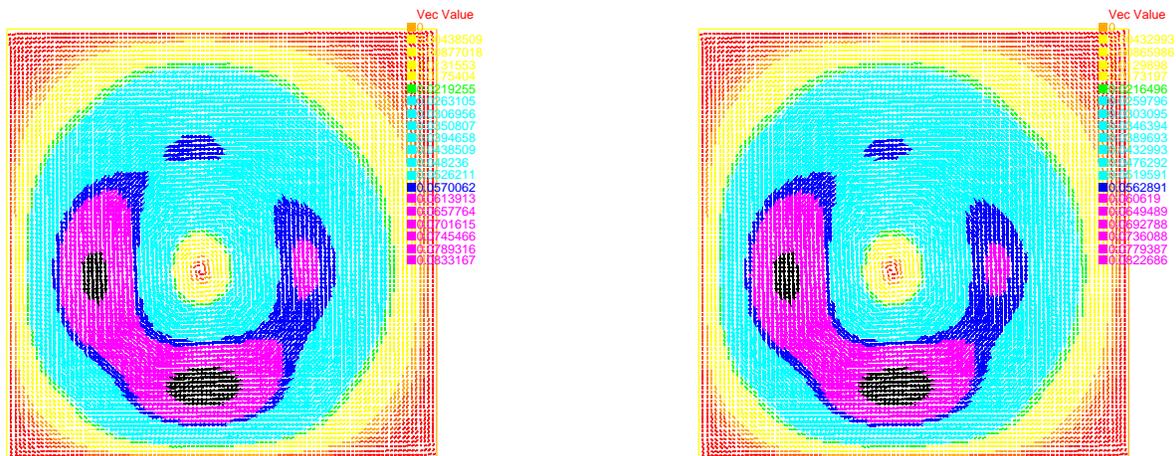


FIG. 5.11 – Champ des vitesses au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse.

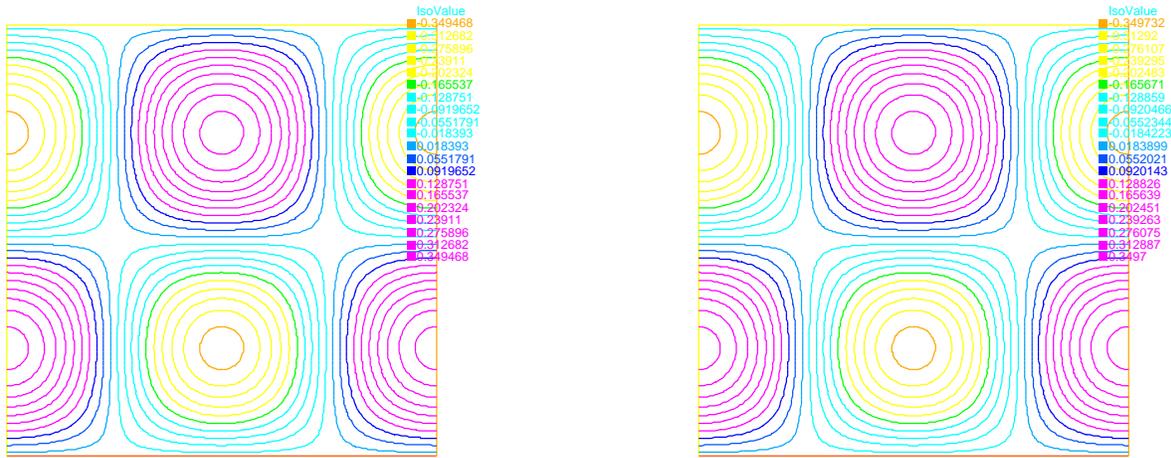
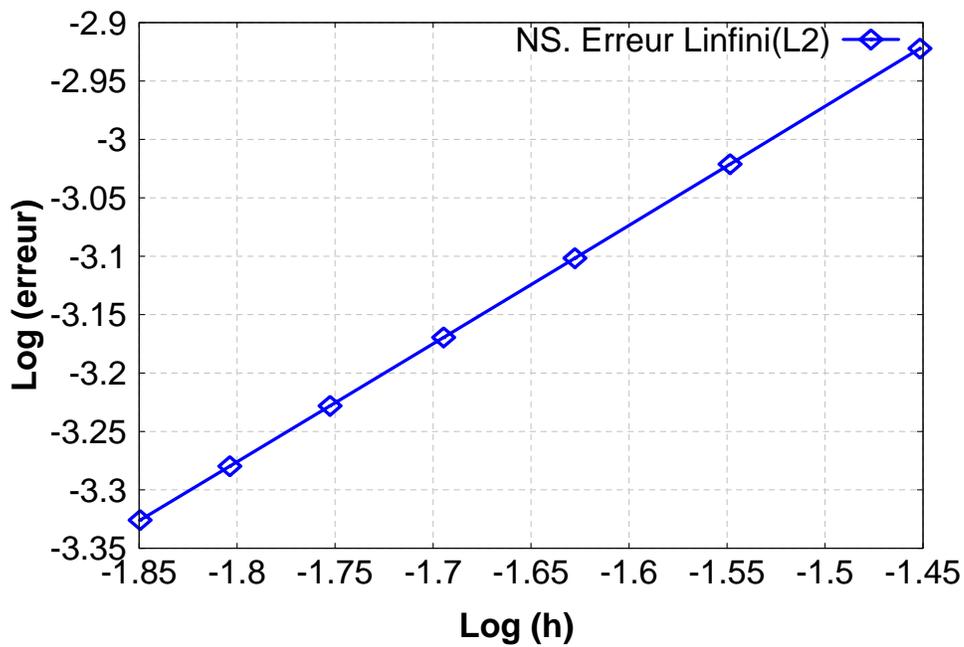
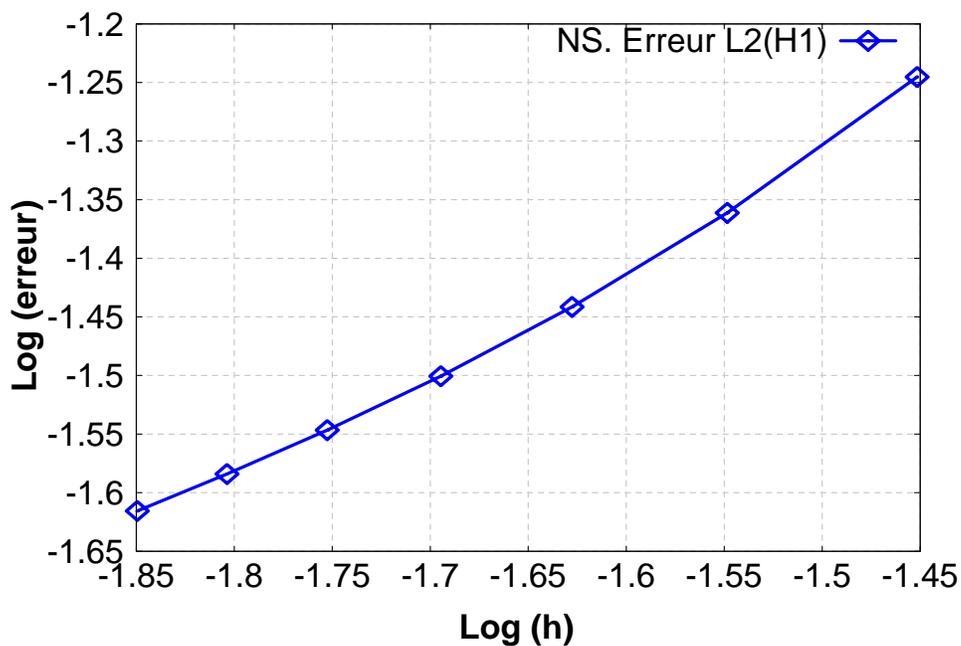


FIG. 5.12 – Isovaleurs des pressions au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la pression.

5.2.2.3 Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace

Comme précédemment, nous devons effectuer les vérifications des estimations d'erreur de la vitesse en norme $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et de la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T[)$. Ainsi, nous obtenons 1.01437 comme pente de l'erreur sur la vitesse en norme L^∞ en temps et L^2 en espace, et 0.930368 en norme L^2 en temps et H^1 en espace, ce qui confirme les résultats théoriques obtenus. En ce qui concerne l'erreur sur la pression, sa pente numérique est de l'ordre de 1.8394 ce qui est mieux que les résultats attendus. Les figures 5.13, 5.14 et 5.15 représentent les graphes correspondant à ces estimations.


 FIG. 5.13 – Erreur $L_t^\infty(L_x^2)$ de la vitesse du problème de Navier-Stokes d'ordre 1.

 FIG. 5.14 – Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème de Navier-Stokes d'ordre 1.

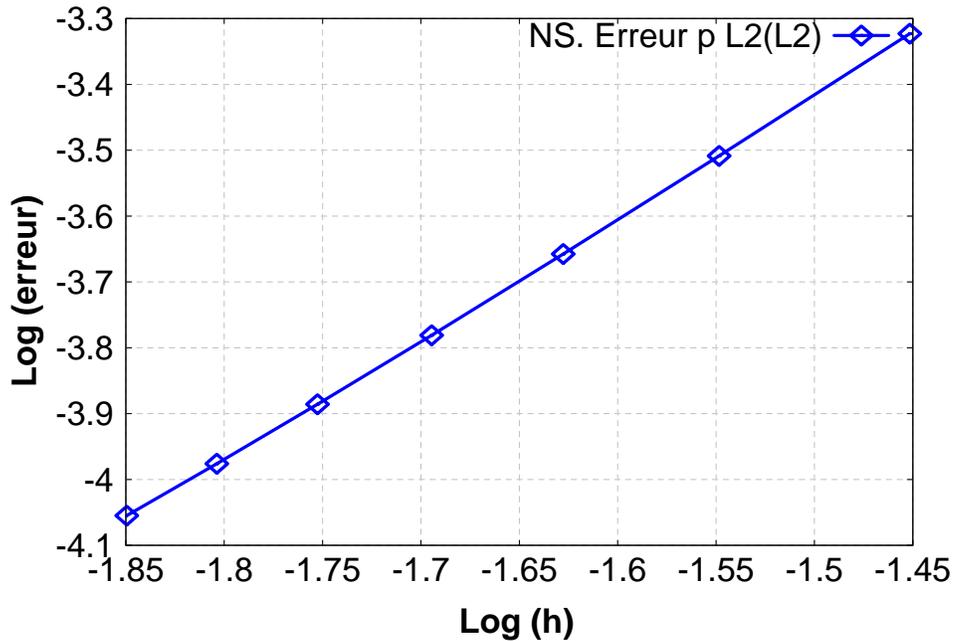


FIG. 5.15 – Erreur $L^2_{t,x}$ de la pression du problème de Navier-Stokes d'ordre 1.

5.2.3 Premier problème à deux grilles

5.2.3.1 Introduction

Le schéma à deux grilles "grossière-fine" consiste à résoudre le problème de Navier-Stokes dépendant du temps sur deux grilles emboîtées, l'une de pas d'espace H et l'autre h .

La méthode consiste à résoudre en premier lieu le problème de Navier-Stokes non-linéaire sur la grille grossière, et à récupérer la solution trouvée \mathbf{u}_H^{n+1} que nous injectons dans les équations sur la grille fine.

En pratique, dans le cas de l'ordre un en temps, on utilise un schéma numérique sur une seule grille, linéarisé en temps, avec le terme non-linéaire $\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}$. Ce dernier schéma est beaucoup plus économique en terme de temps de calcul que le schéma non-linéaire. Pour cette raison, il est plus intéressant d'effectuer la comparaison en temps de calcul entre les schémas suivants :

1. Résoudre en premier lieu le problème de Navier-Stokes linéarisé en temps, puis injecter la solution trouvée \mathbf{u}_H^{n+1} dans les équations sur la grille fine pour résoudre le problème

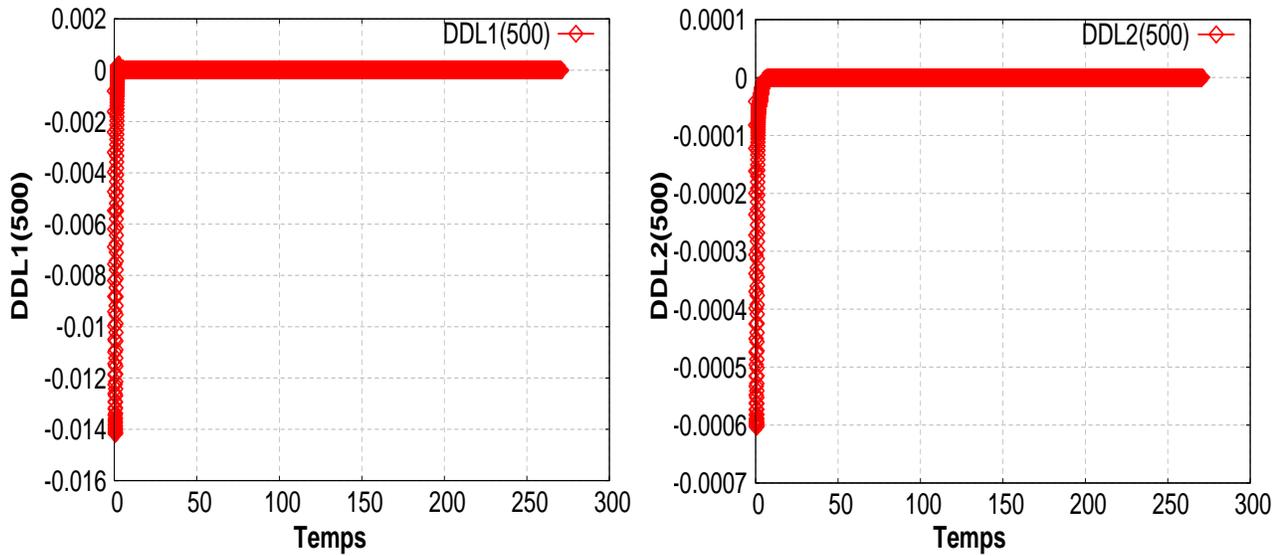


FIG. 5.16 – Évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.

Dans le but de mieux voir ces évolutions, nous avons effectué dans la figure 5.17 un zoom sur les premiers instants des deux composantes et nous avons obtenu les courbes qui représentent respectivement l'évolution de la première composante du degré de liberté 500 en fonction du temps et la deuxième composante :

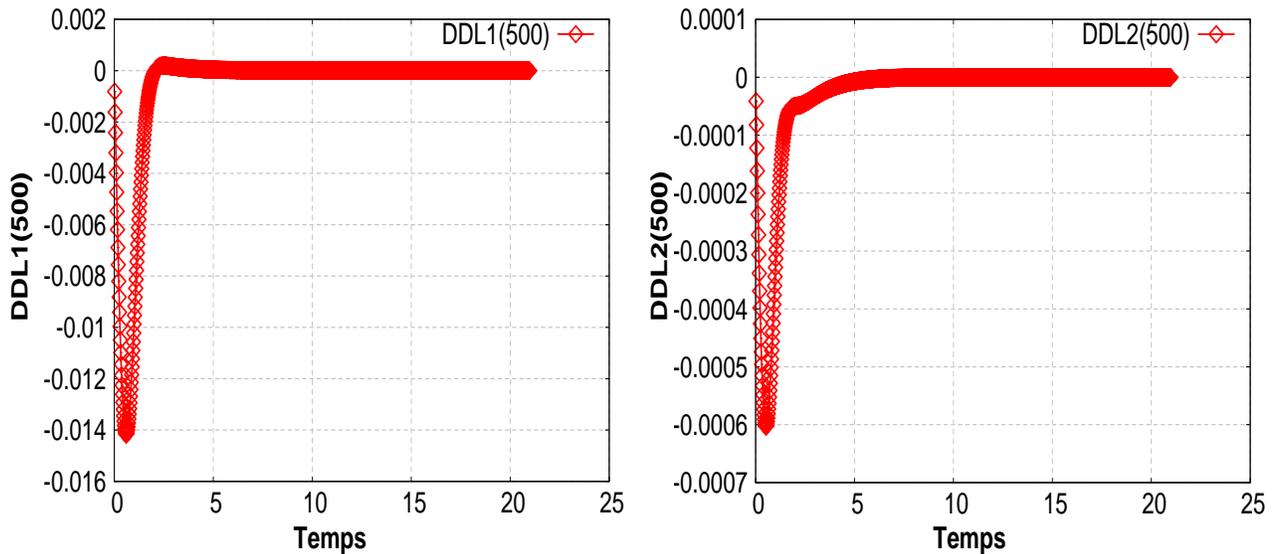


FIG. 5.17 – Zoom sur l'évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.

5.2.3.3 Consistance du schéma

Pour les estimations d'erreur, nous avons gardé la fonction prise dans le cas du problème de Navier-Stokes et nous l'avons traitée sur le domaine carré. Nous avons pris $N_g = 10, N_f = N_g^2, T = 1$ et $nbiter = T \times N_f$. Nous avons obtenu une comparaison, figures 5.18 et 5.19, entre les solutions exacte et numérique de la vitesse et de la pression. La figure 5.18 présente des photographies du champ des vitesses exacte et numérique à l'instant final $t = T$, et la figure 5.19 représente les isovaleurs des pressions exacte et numérique à l'instant final $t = T$, coïncidant avec la figure 5.18 des vitesses au même instant.

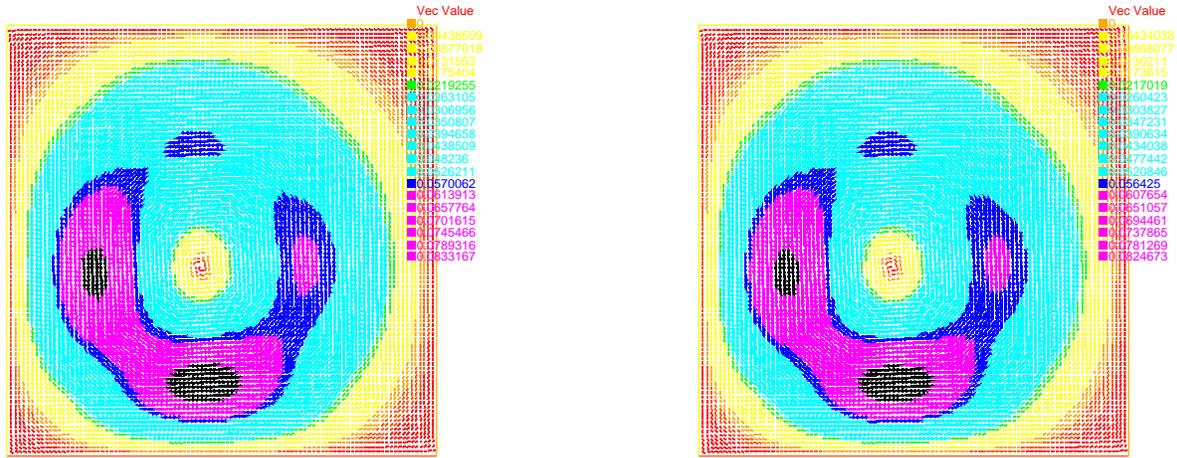


FIG. 5.18 – Champ des vitesses au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse.

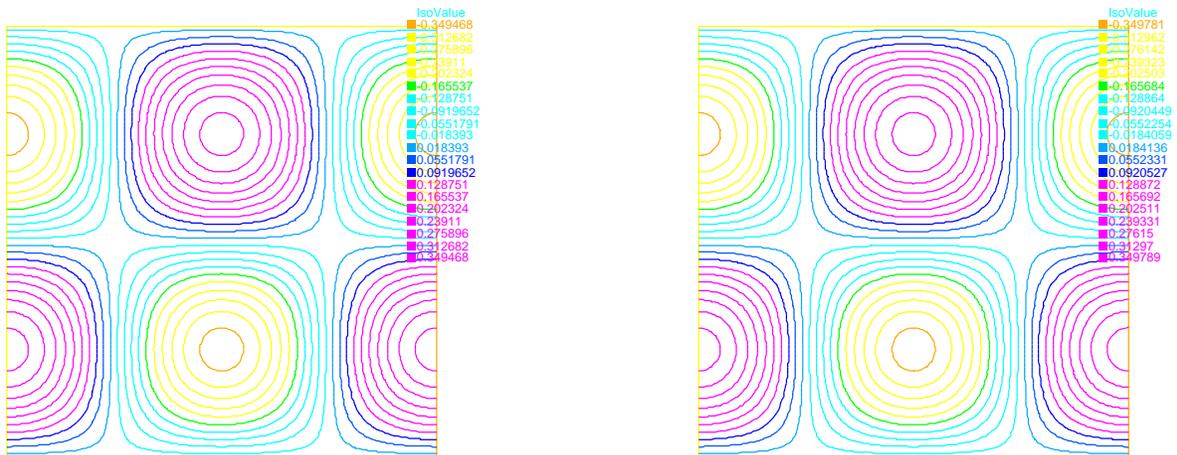


FIG. 5.19 – Isovaleurs de la pression $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la pression.

5.2.3.4 Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace

Nous avons pris $N_g = 4, 6, 8$ et 10 , $N_f = N_g^2$, $T = 1$ et $nbiter = T \times N_f$. Les courbes relatives aux estimations d'erreur de la vitesse et celle relative à la pression ont été étudiées : en échelle logarithmique, la pente de la courbe représentant l'erreur en norme $L^2(\Omega \times]0, T[)^2$ est de l'ordre de 1.1958 et celle en norme $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ est 1.327 ce qui prouve les résultats théoriques tandis que celle de la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T[)$ est de l'ordre de 1.8814, ce qui est mieux que les résultats attendus. Les graphes 5.20, 5.21 et 5.22 représentent ces erreurs à $\Delta t = h = H^2$ en fonction du pas d'espace.

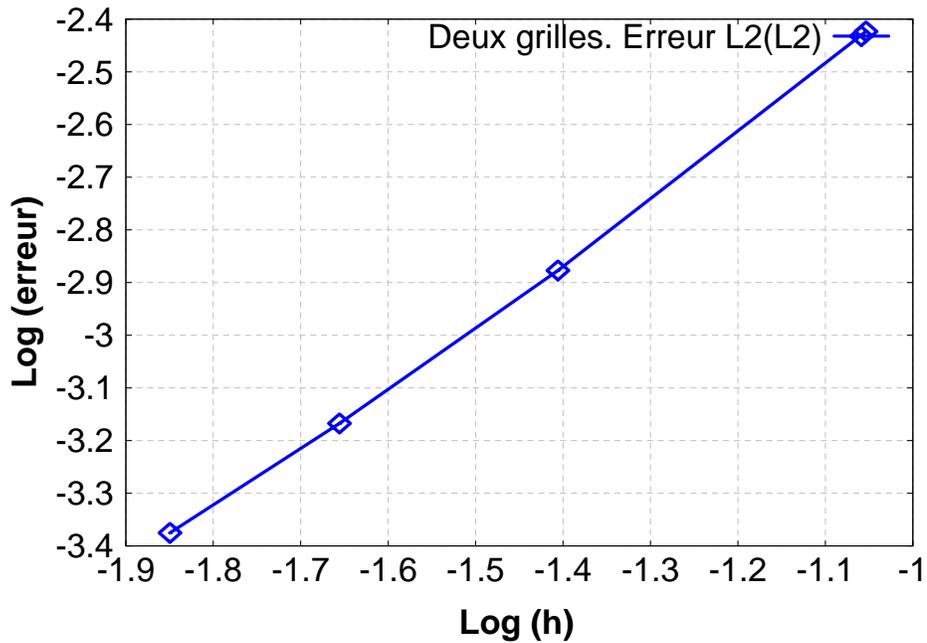


FIG. 5.20 – Erreur $L^2_{t,x}$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.

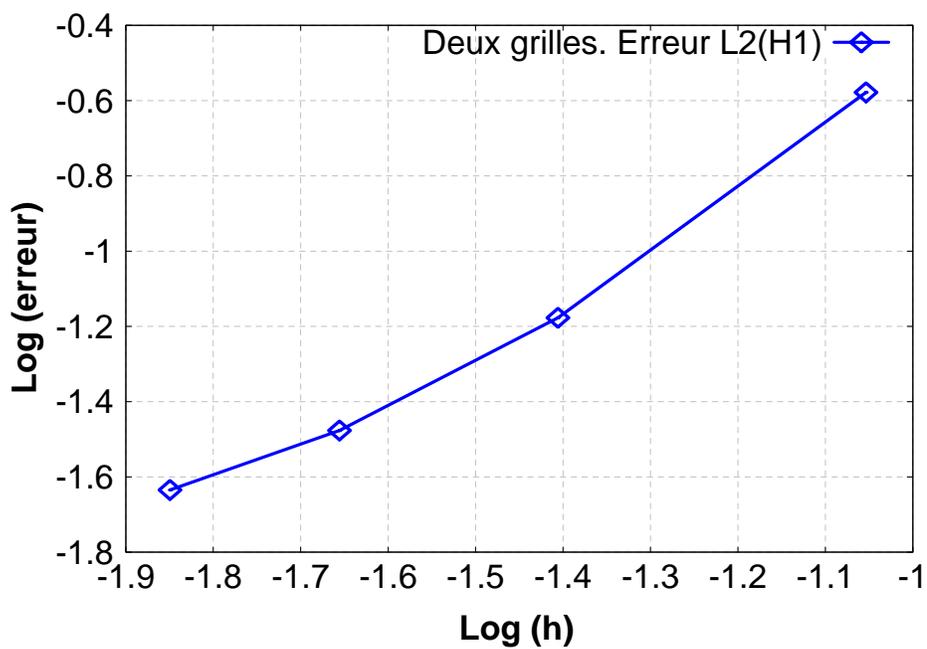


FIG. 5.21 – Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.

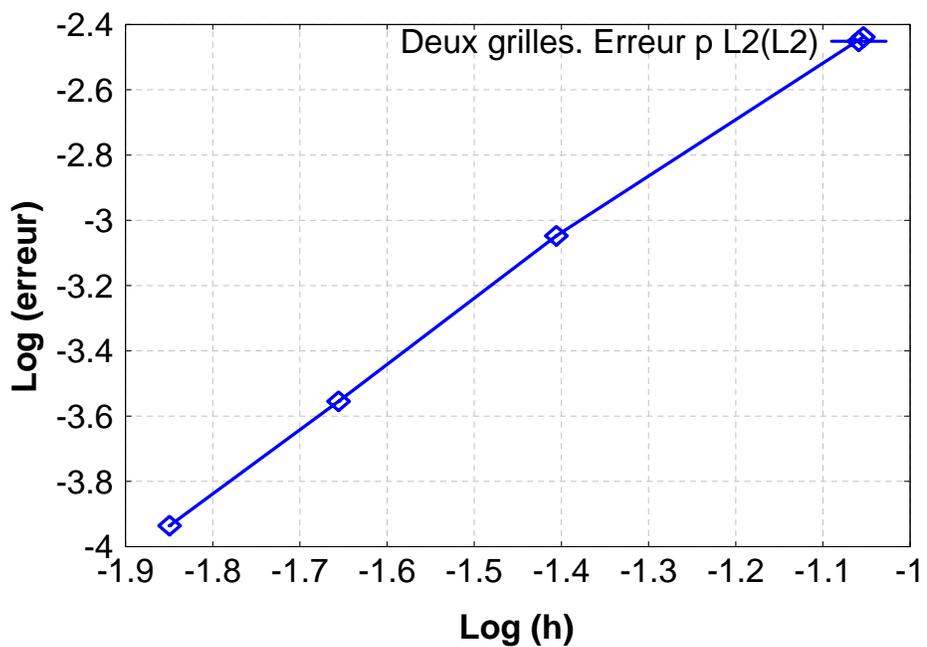


FIG. 5.22 – Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème à deux grilles d'ordre 1.

5.2.3.5 Efficacité de la méthode : comparaison en temps de calcul

Un des avantages de la méthode à deux grilles est le gain en temps de calcul : nous allons constater que la résolution du problème de Navier-Stokes sur deux grilles, l'une grossière \mathcal{T}_H et l'autre fine \mathcal{T}_h est moins coûteuse que la résolution du problème non-linéaire sur une unique grille fine \mathcal{T}_h .

D'un côté, nous avons résolu le problème non-linéaire sur la grille grossière puis le problème linéarisé autour de la solution grossière, qu'on vient de calculer, sur la grille fine. D'un autre côté, nous avons résolu le problème non-linéaire uniquement sur la même grille fine.

Nous présentons dans cette section des résultats numériques qui montrent la comparaison en temps. En notant respectivement N_g et N_f le nombre de points sur le côté du carré du maillage grossier respectivement du maillage fin, nous avons effectué les tests suivants : $N_g = 5, \dots, 9$ et avec $N_f = N_g^2$ et nous avons comparé les temps de calcul. En notant t_{2G} et t_{1G} respectivement les temps de calcul de la résolution par la méthode à deux grilles et la résolution sur une seule grille (linéarisation en espace et linéarisation en temps), nous obtenons :

$N_g \times N_g$ points	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
t_{1G} (en sec.)	85.63	236.46	597.94	1475.75	3265.38
t_{2G} (en sec.)	86.54	233.16	576.89	1403.93	3083.30
$\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	*	1.39	3.52	4.86	5.57

TAB. 5.1 – Comparaison en temps de calcul CPU du premier schéma d'ordre 1 en temps.

Ainsi, pour le premier test effectué $N_g = 5$, l'utilisation de la méthode à deux grilles n'est pas utile puisque le temps de calcul de la résolution sur une grille est inférieur à celui de la résolution par notre technique à deux grilles. Nous déduisons alors l'existence d'une valeur minimale du nombre de points par arête de maillage grossier carré à partir de laquelle notre technique de résolution semble intéressante à appliquer : $N_g = 6$. Le gain en temps de calcul croît avec l'accroissement de N_g .

Remarquons qu'ici la comparaison est faite entre un schéma linéarisé en espace et un autre linéarisé en temps. Les deux schémas sont linéaires. Les schémas non-linéaires sont beaucoup plus coûteux en temps de calcul.

Au-delà de cette valeur, on remarque un gain en temps de calcul de notre technique par rapport à la résolution du problème non-linéaire sur une seule grille fine. De plus, plus on augmente le nombre de mailles, plus le pourcentage de gain en coût de calcul croît.

Cependant, le gain en temps de calcul n'est pas important. Ceci peut s'expliquer par le fait que c'est une méthode de résolution d'ordre un en temps. On espère améliorer l'efficacité de notre technique à deux grilles dans le cadre de la résolution du problème d'ordre deux en temps (ce qui fait l'objet de notre prochaine section).

Remarque 5.2.1 *L'implémentation numérique du schéma (1.39)–(1.42) à deux grilles, proposé*

dans le chapitre 3, montre aussi un gain en temps de calcul. C'est prévisible vu que le calcul du terme de stabilisation sur la grille grossière n'est pas long et que c'est le temps de calcul sur la grille fine, où il y a absence du terme de stabilisation, qui nous intéresse le plus. La résolution de ce problème (1.39)–(1.42) s'effectue par la méthode des caractéristiques sur la grille grossière, méthode qui conserve l'ordre de convergence et fait gagner du temps.

5.2.4 Deuxième problème à deux grilles

5.2.4.1 Introduction

Pour l'amélioration de la méthode à deux grilles, on résout le même schéma sur la grille grossière. Pour la résolution numérique du problème linéarisé sur la grille fine, nous pouvons appliquer aussi la méthode des caractéristiques qui fait gagner davantage en temps de calcul car la matrice est symétrique définie positive et l'assemblage du terme $\mathbf{u}_H^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}$ n'est pas nécessaire. Les caractéristiques sont calculées sur les \mathbf{u}_H^{n+1} , elles-mêmes calculées à l'étape précédente c'est-à-dire à l'étape grossière. Dans ce cas de résolution, on espère gagner davantage en temps de calcul. Nous résolvons donc le problème $(G.G^{(1)})$ par une méthode linéaire ou par la méthode des caractéristiques et $(G.f^{(1)})$ par la méthode des caractéristiques.

5.2.4.2 Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace

Les essais numériques qui ont été faits correspondent à des maillages grossiers contenant $N_g = 4, \dots, 9$ points par arête du domaine et donc le maillage fin en contient $N_f = N_g^2$.

Nous récupérons ainsi les graphes d'erreur à h variable et $\Delta t = h = H^2$ en fonction du pas d'espace. Les pentes des courbes obtenues pour la vitesse en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et pour la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ sont respectivement 1.1832, 1.3569 et 1.7741.

Les courbes d'erreur 5.23, 5.24 et 5.25 sont les suivantes :

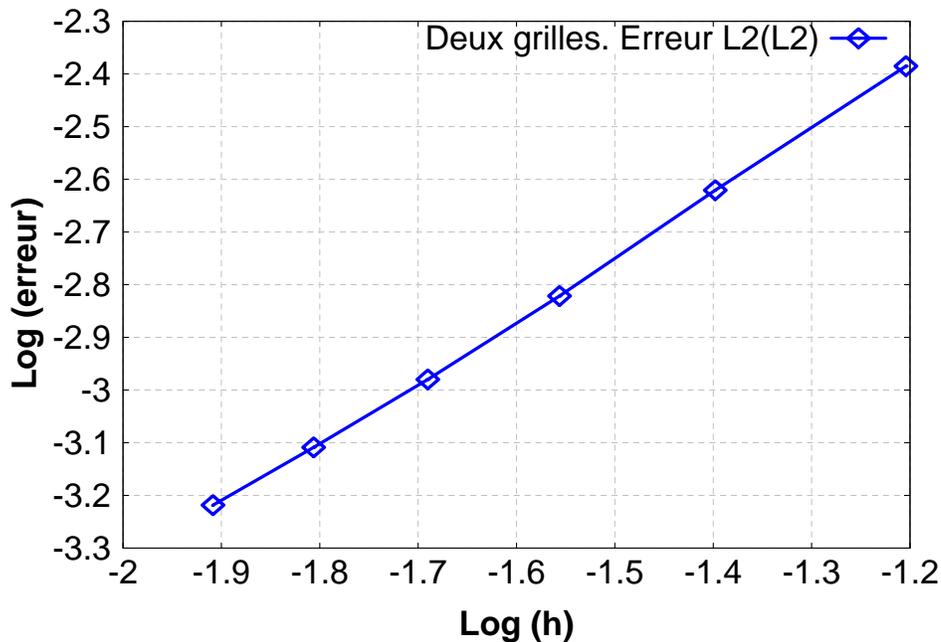
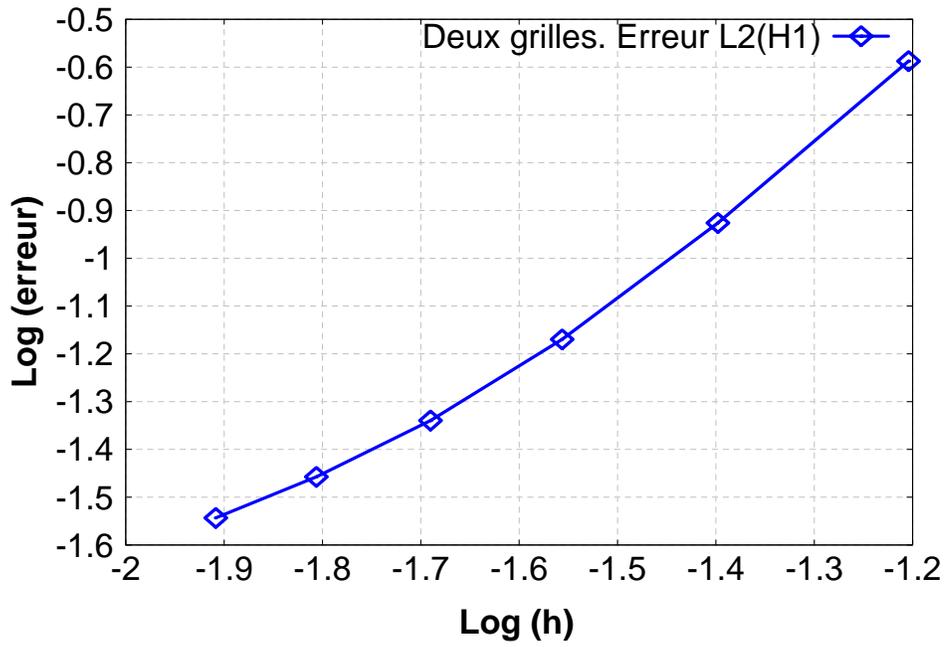
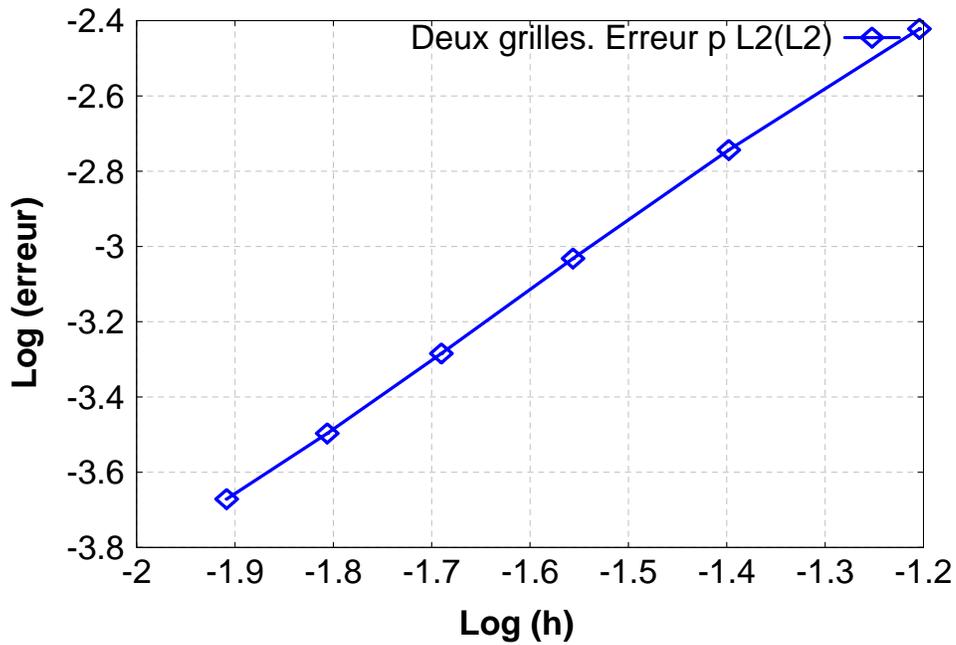


FIG. 5.23 – Erreur $L^2_{t,x}$ de la vitesse du deuxième problème à deux grilles d'ordre 1.

FIG. 5.24 – Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du deuxième problème à deux grilles d'ordre 1.FIG. 5.25 – Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du deuxième problème à deux grilles d'ordre 1.

5.2.4.3 Comparaison en temps de calcul

Nous pouvons ainsi faire la comparaison en temps de calcul entre la résolution du problème non-linéaire sur une grille fine seulement et la résolution par la technique à deux grilles. Les essais numériques sont faits avec les mêmes données prises pour le cas précédent. En conservant les temps de calcul obtenus sur la grille fine dans le tableau 5.1, nous remarquons que le gain en temps de calcul est plus intéressant. La comparaison est donnée dans le tableau 5.2.

$N_g \times N_g$ points	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
t_{1G} (en sec.)	85.63	236.46	597.94	1475.75	3265.38
t_{2G} (en sec.)	59.05	138.844	409.047	1061.16	2448.34
$\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	45	41.2	31.5	28.09	25.02

TAB. 5.2 – Comparaison en temps de calcul CPU du deuxième schéma d'ordre 1 en temps.

Le gain en coût de calcul par cette résolution, i.e. par la résolution par la méthode des caractéristiques sur la grille fine où les caractéristiques se calculent autour de la solution grossière, est nettement meilleur que celui de la résolution du problème précédent.

5.3 Résolution du problème d'ordre deux en temps

5.3.1 Introduction

Dans certains exemples pratiques, l'ordre un en temps ne suffit pas. Il faut donc se baser sur des schémas d'ordre supérieur, en l'occurrence d'ordre deux dans notre cas. Dans cette dernière section, nous présentons des résultats numériques du problème à deux grilles où chaque étape est d'ordre deux en temps (4.1)–(4.4). Pour ce schéma, nous utilisons les éléments finis de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ et nous prenons la même solution théorique $(\mathbf{u}, p) = (\text{rot } \boldsymbol{\psi}, p)$ que celle dans le cas du problème d'ordre un en temps, sur un domaine carré.

5.3.2 Stabilité du schéma en fonction du temps

Avant d'étudier les estimations d'erreur, nous avons vérifié que notre problème est stable. Pour cela, nous avons fixé le maillage grossier contenant $N_g = 9$ points et par la suite, notre maillage fin contient $N_f = Ng^{3/2} = 27$ points. Nous choisissons $T = 100$ et donc le nombre d'itérations est $nbiter = T \times N_f = 2700$. Nous étudions donc, avec ces choix, l'évolution des deux composantes du degré de liberté 500 en fonction du temps, c'est-à-dire en fonction du nombre d'itérations. Nous obtenons ainsi, dans la figure 5.26, les courbes qui montrent respectivement l'évolution de la première et de la deuxième composantes du degré de liberté 500 en fonction du temps :

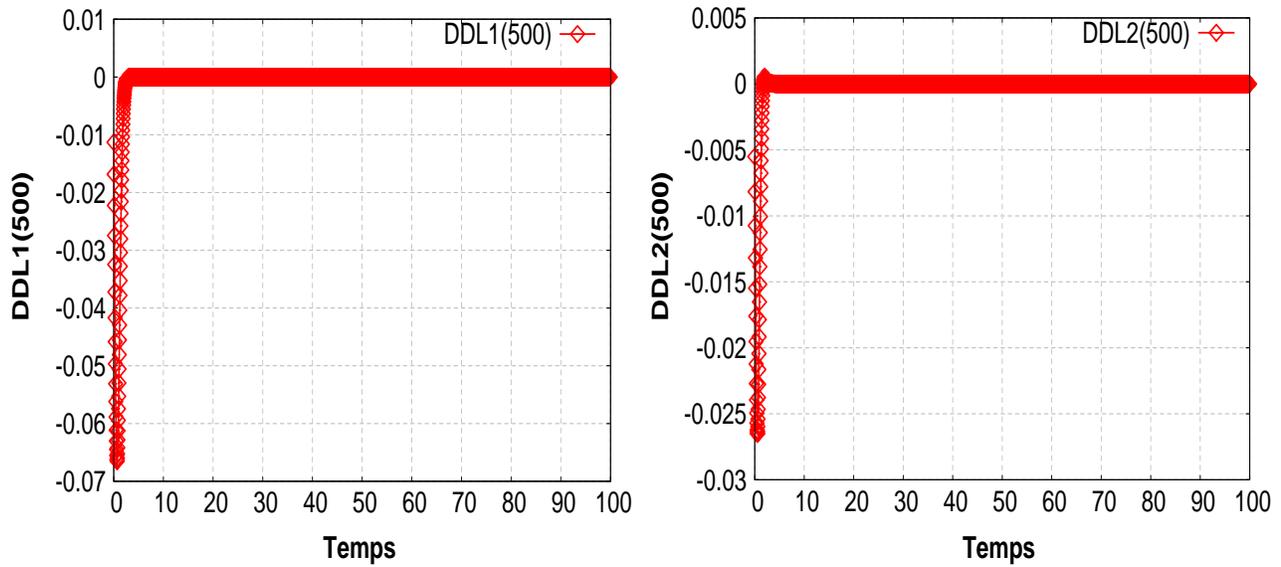


FIG. 5.26 – Évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.

Dans le but de mieux voir ces évolutions, nous proposons la figure 5.27 qui est un zoom sur les premiers instants des deux composantes et nous avons obtenu les courbes qui représentent respectivement l'évolution de la première et de la deuxième composantes du degré de liberté 500 en fonction du temps :

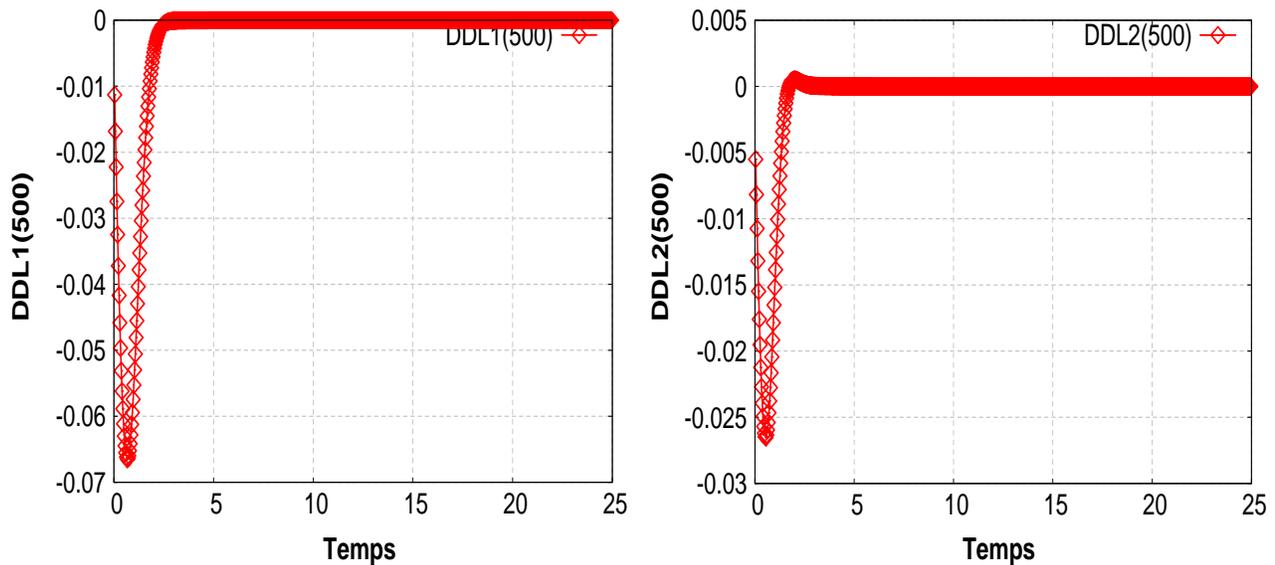


FIG. 5.27 – Zoom sur l'évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.

5.3.3 Consistance du schéma

Nous avons obtenu une comparaison (figures 5.28 et 5.29), entre les solutions théorique et numérique, pour $N_g = 25$ et au temps final $T = 1$ et avec $N_f^2 = Ng^3, \Delta t = h = \frac{1}{N_f}$ de la vitesse et de la pression. La figure 5.28 présente des photographies du champ des vitesses exacte et numérique à l'instant $t = T$, et la figure 5.29 représente les isovaleurs des pressions exacte et numérique à l'instant $t = T$, coïncidant avec la figure 5.28 des vitesses au même instant.

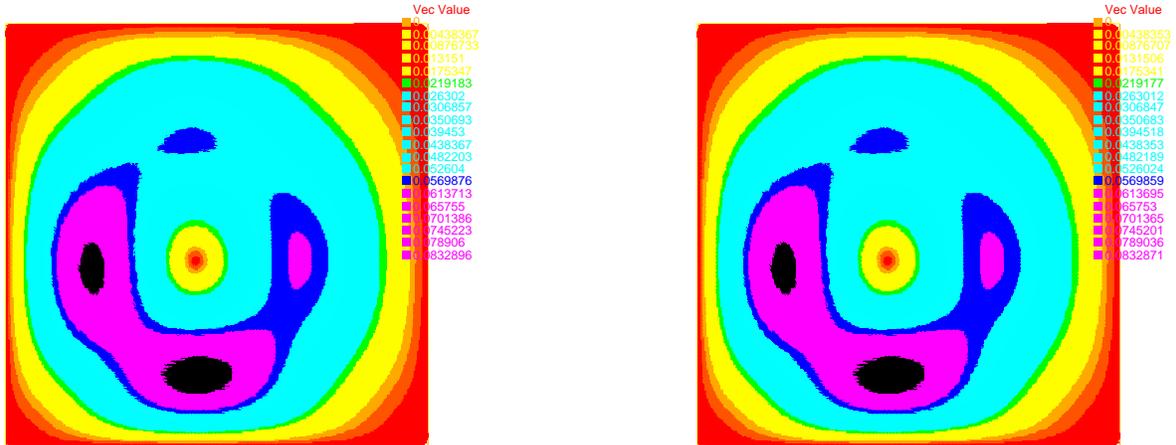


FIG. 5.28 – Champ des vitesses au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse.

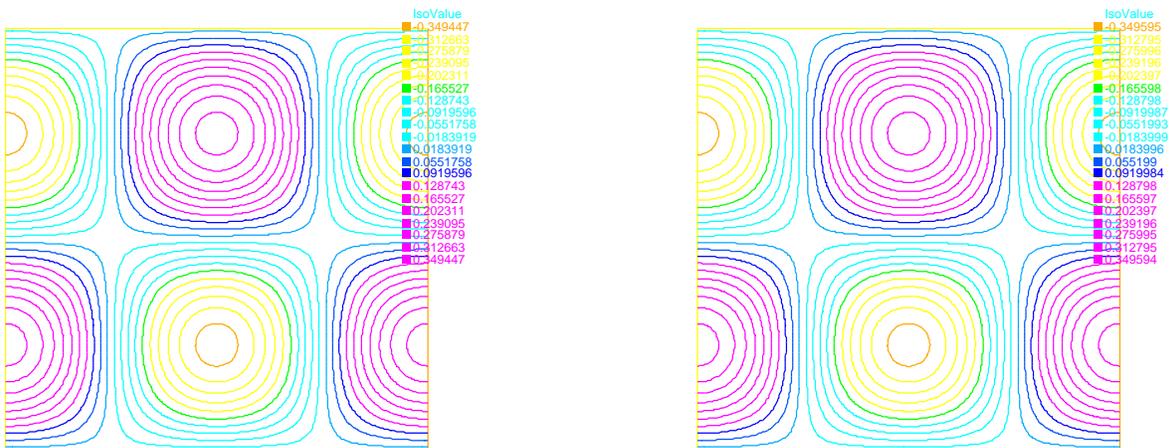


FIG. 5.29 – Isovaleurs de la pression $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la pression.

5.3.4 Vérification numérique de l'erreur en temps et en espace

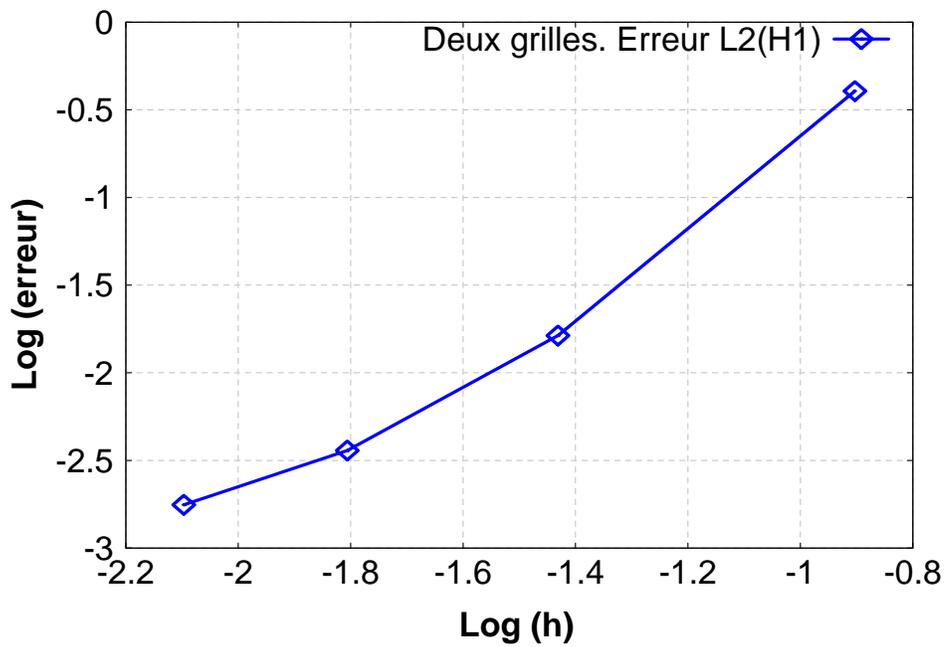
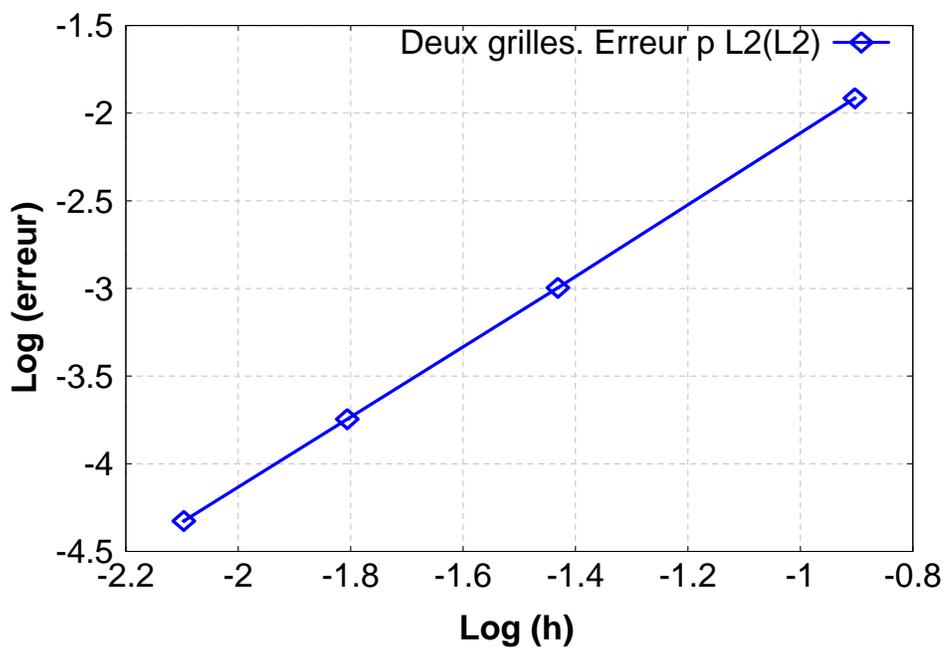
Pour les estimations d'erreur, nous avons gardé la fonction prise dans le cas du problème de Navier-Stokes et nous l'avons traitée sur le domaine carré. Nous avons considéré les cas où $Ng = 4, 9, 16$ et 25 avec $Nf^2 = Ng^3, T = 1$ et $nbiter = T \times Nf$.

Les courbes relatives aux estimations d'erreur de la vitesse et celle relative à la pression ont été étudiées : en échelle logarithmique, la pente de la courbe représentant l'erreur de la vitesse en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est de l'ordre de 2.9674 et celle en norme $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ est 1.9769 , ce qui prouve les résultats théoriques et celle de la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ est de l'ordre de 2.0199 .

Les graphes 5.30, 5.31 et 5.32 représentent ces erreurs à h variable et $(\Delta t)^2 = h^2 = H^3$ en fonction du pas d'espace.



FIG. 5.30 – Erreur $L^2_{t,x}$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.


 FIG. 5.31 – Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.

 FIG. 5.32 – Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème à deux grilles d'ordre 2.

5.3.5 Efficacité de la méthode : comparaison en temps de calcul

Le but de la méthode à deux grilles est le gain en temps de calcul : dans ce paragraphe aussi, nous allons montrer que la résolution du problème de Navier-Stokes sur deux grilles, l'une grossière \mathcal{T}_H et l'autre fine \mathcal{T}_h , est moins coûteuse que la résolution du problème sur une unique grille fine \mathcal{T}_h .

En notant respectivement N_g et N_f le nombre de points sur le côté du carré du maillage grossier respectivement du maillage fin, nous avons effectué les tests suivants : $N_g = 4, 9, 16$ et 25 , et avec $N_f^2 = N_g^3$, nous avons comparé les temps de calcul. En notant t_{2G} et t_{1G} respectivement les temps de calcul de la résolution par la méthode à deux grilles et la résolution sur une seule grille, nous obtenons :

$N_f \times N_f$ points	8×8	27×27	64×64	125×125
t_{1G} en secondes	7.25	304.953	13346.01	363402.083
t_{2G} en secondes	4.89	196.25	7340.34	174433
$\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %)	32.5	35.64	45	52

TAB. 5.3 – Comparaison en temps de calcul CPU du schéma d'ordre 2 en temps.

Nous remarquons donc que le coût de calcul par la technique à deux grilles de la solution du problème de Navier-Stokes est réduit par rapport à celui de la résolution du problème non-linéaire sur une seule grille. Ce gain en temps de calcul est énorme, comparé à celui du schéma d'ordre un en temps.

En effectuant la comparaison en temps de calcul, nous comparons aussi l'ordre de convergence de l'erreur de la vitesse et de la pression. Nous effectuons alors les estimations d'erreur de la vitesse et celle relative à la pression calculées par la résolution sur une seule grille : en échelle logarithmique, la pente de la courbe représentant l'erreur de la vitesse en norme $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est de l'ordre de 2.95001, celle en norme $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ est 1.97329 et celle de la pression en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ est de l'ordre de 2.0029. Nous remarquons que l'ordre de convergence est semblable à celui obtenu dans la méthode à deux grilles.

Nous représentons alors dans les figures 5.33, 5.34 et 5.35 une comparaison entre l'erreur calculée par la technique à deux grilles et l'erreur calculée par la résolution du problème sur une seule grille. Les erreurs représentées sont respectivement en normes $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ et $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ pour la vitesse et en norme $L^2(\Omega \times]0, T])$ pour la pression, en fonction du pas d'espace.

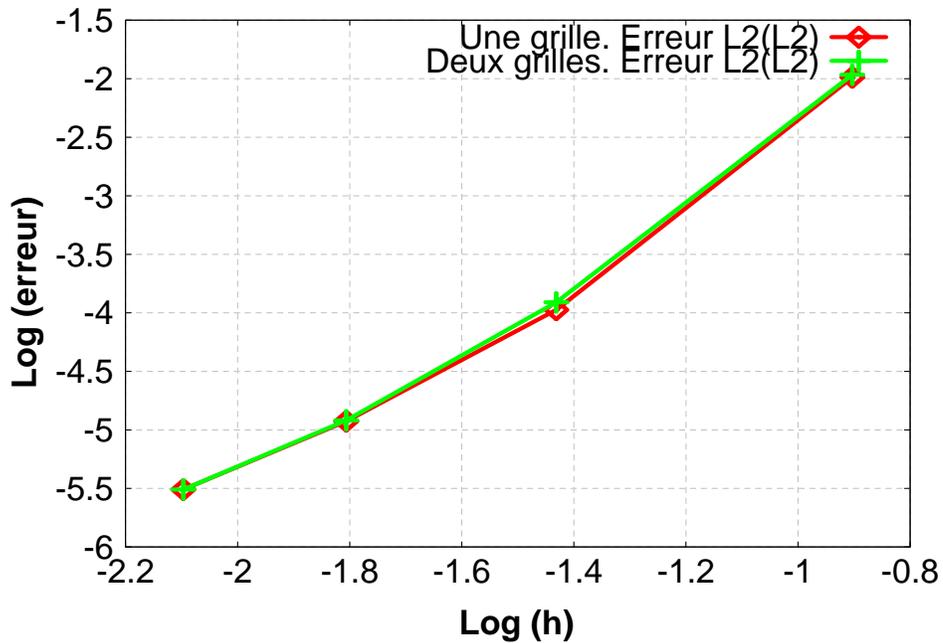


FIG. 5.33 – Comparaison de l'erreur $L^2_{t,x}$ de la vitesse des problèmes à une et à deux grilles d'ordre 2.

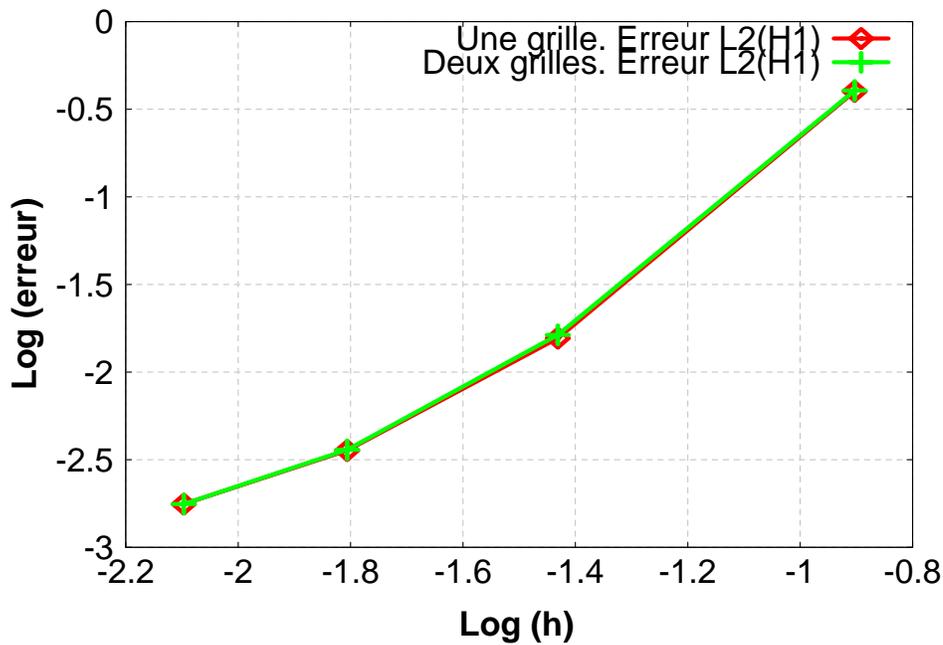


FIG. 5.34 – Comparaison de l'erreur $L^2_t(H^1_x)$ de la vitesse des problèmes à une et à deux grilles d'ordre 2.

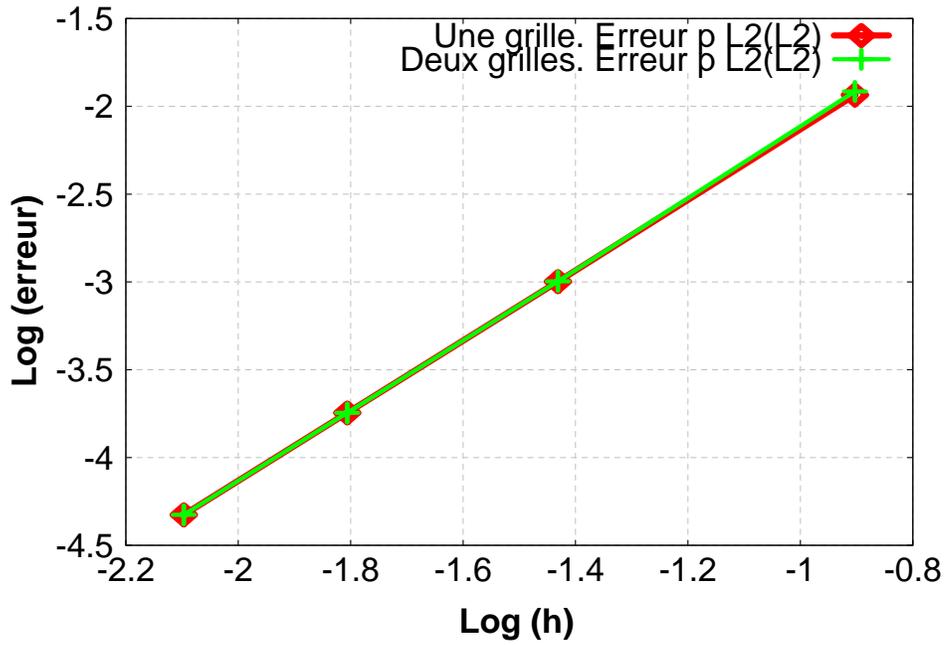


FIG. 5.35 – Comparaison de l'erreur $L^2_{t,x}$ de la pression des problèmes à une et à deux grilles d'ordre 2.

Nous constatons donc que les erreurs sont comparables. Cet avantage de la technique de résolution à deux grilles s'ajoute à celui du gain en temps de calcul.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Au cours de cette thèse, on a proposé de nouveaux schémas à deux grilles pour la résolution du problème d'évolution de Navier-Stokes incompressible. Le but de la méthode à deux grilles est le gain en temps de calcul et la réduction de la complexité du problème non-linéaire de Navier-Stokes.

Dans un premier temps, nous avons étudié un schéma à deux grilles d'ordre un en temps et nous avons pu établir les estimations d'erreur, de la solution de l'étape grossière, prouvant, entre autres, la convergence en norme L^2 , par un argument de dualité, de la solution numérique vers la solution exacte des équations de Navier-Stokes. A partir des estimations d'erreur calculées sur la grille grossière, nous avons établi l'ordre de convergence de la solution numérique calculée à l'étape fine vers la solution exacte.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié un schéma à deux grilles d'ordre deux en temps et nous avons montré un gain en ordre de convergence par rapport au schéma d'ordre un en temps.

Il y a de nombreuses extensions. Il est intéressant, d'une part, d'étudier le schéma à deux grilles correspondant au problème implicite non anti-symétrisé, d'ordre un en temps. La différence entre ce schéma et celui du troisième chapitre est uniquement le terme de stabilisation. Concernant l'étude des estimations d'erreur, elle n'est pas à refaire en entier ; en effet, il faut que nous établissions une estimation a priori de la solution de la première étape du schéma puis son estimation d'erreur de base. Concernant l'argument de dualité, vu qu'il est basé sur le problème de Stokes rétrograde, son étude reste inchangée. De ce fait, il ne nous reste plus qu'à étudier l'erreur de la contribution non-linéaire et donc qu'à établir un résultat de superconvergence pour pouvoir compléter notre étude. Nous pouvons démontrer l'unicité de la solution de ce schéma, résultat classique, vu que nous sommes en dimension finie. Mais la difficulté repose dans la démonstration de l'existence globale en temps de la solution. Lorsque H et Δt sont du même ordre, on peut montrer cette existence globale en temps. Mais c'est un problème ouvert dans notre cas où H est de l'ordre de $\sqrt{\Delta t}$.

Dans cette thèse, pour simplifier, nous avons fait d'abord l'analyse du schéma sur la grille grossière et ensuite celle du schéma sur la grille fine sans tenir compte du fait qu'en pratique les deux étapes sont intercalées, ce qui produit des résultats plus précis que ceux annoncés par l'analyse. L'analyse théorique des deux étapes intercalées est plus dure à faire, vu le fait que la solution à l'étape précédente est celle de la grille fine et non de la grille grossière, et elle pourrait constituer une prochaine étape de ce travail.

D'autre part, il serait intéressant d'appliquer ce concept à d'autres problèmes non-linéaires : par exemple, aux systèmes dissipatifs non-linéaires (Kuramoto-Sivashinsky, Ginzburg-Landau, Cahn-Hilliard, Réaction-diffusion, Burgers, etc) qui s'écrivent dans un espace de Hilbert H

donné :

$$\frac{du}{dt} + Au + B(u) = f,$$

$$u(0) = u_0,$$

où u est une fonction de \mathbb{R}^+ dans H et A est un opérateur auto-adjoint, positif dont le domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H et tel que A^{-1} est compact. Enfin, B est un opérateur non linéaire.

De plus, la résolution des problèmes de transport non-linéaires, le système de Vlasov-Poisson et les lois de conservation scalaires, paraît envisageable par la technique de résolution à deux grilles.

Dans cette thèse, notre étude repose sur l'utilisation de deux types d'éléments finis continus : le mini-élément et l'élément fini de Taylor-Hood. Il serait intéressant de voir ce qui se passe dans le cas de l'utilisation d'autres types d'éléments-finis comme par exemple, les éléments finis discontinus, l'élément fini de Crouzeix-Raviart, etc...

Annexes

Annexe A

Preuves des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution

Dans cette annexe, dans le but de faciliter la lecture de ce manuscrit, nous donnons les démonstrations des résultats d'existence et d'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes énoncés dans le chapitre 1. Ces preuves ont été établies par J.-L. Lions [44], R. Temam [64] et V. Girault et P.-A. Raviart [31] et nous les reproduisons ici.

A.1 Preuve du théorème d'existence 1.3.1

Pour la démonstration, nous introduisons un corollaire. L'espace $(H^s(\Omega))^2$ est muni du produit scalaire hilbertien

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_s = \sum_{i=1}^2 (u_i, v_i)_{H^s(\Omega)}. \quad (\text{A.1})$$

Corollaire A.1.1 Le problème spectral

$$((\mathbf{w}, \mathbf{v}))_s = \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_s = \overline{\mathcal{V}}^{(H^s(\Omega))^2} \quad (\text{A.2})$$

admet une suite de solutions non nulles w_j correspondant à une suite de valeurs propres λ_j :

$$((\mathbf{w}, \mathbf{v}))_s = \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_s = \overline{\mathcal{V}}^{(H^s(\Omega))^2}, \lambda_j > 0. \quad (\text{A.3})$$

La démonstration sera divisée en quatre parties.

(i) Solutions approchées.

Nous utilisons la "base" $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \dots$ introduite dans (A.3). Nous définissons $\mathbf{u}_m(t)$ solution "approchée" d'ordre m par

$$\mathbf{u}_m(t) \in [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m], \mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \mathbf{w}_j,$$

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j) + \nu a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j), 1 \leq j \leq m \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}, \mathbf{u}_{0m} \in [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m], \mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}_0 \text{ dans } H. \quad (\text{A.5})$$

Ce système d'équations différentielles en les $g_{jm}(t)$ définit $\mathbf{u}_m(t)$ dans $[0, t_m]$; Nous verrons que nous pouvons prendre $t_m = T$.

(ii) Estimations a priori (I).

Multiplions (A.4) par $g_{jm}(t)$ et sommons en j ; comme $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$, nous avons $b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = 0$, nous en déduisons

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)),$$

i.e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)), \quad (\text{A.6})$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \leq C \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m(\sigma)|^2 d\sigma + \nu \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq C \int_0^t \|\mathbf{f}(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\sigma)\|^2 d\sigma,$$

d'où

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + C' \int_0^t \|\mathbf{f}(\sigma)\|^2 d\sigma. \quad (\text{A.7})$$

En utilisant (A.5), nous en déduisons que $t_m = T$ et que

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \quad (\text{A.8})$$

(iii) Estimations a priori (II).

Le problème fondamental est de montrer que

$$\mathbf{u}'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V'_s). \quad (\text{A.9})$$

C'est ce que nous allons faire maintenant.

Soit P_m le projecteur de $H \rightarrow [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$ (i.e $P_m h = \sum_{i=1}^m (h, \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_i$). En utilisant que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}), A \in \mathcal{L}(V; V')$$

et que

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{v}), \mathbf{g}(\mathbf{u}) \in V'_s$$

avec

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{u})\|_V \leq C_6 \|\mathbf{u}\|_{(L^p(\Omega))^2}. \quad (\text{A.10})$$

Nous déduisons de (A.4) que

$$\mathbf{u}'_m = -P_m(\mathbf{g}(\mathbf{u}_m)) - \nu P_m A \mathbf{u}_m + P_m \mathbf{f}. \quad (\text{A.11})$$

Mais, grâce au choix de \mathbf{w}_j , $\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_s; V_s)} \leq 1$, donc par transposition, et comme $P_m^* = P_m$:

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_s; V_s)} \leq 1. \quad (\text{A.12})$$

Nous introduisons le lemme suivant :

Lemme A.1.2 Soit $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Alors

$$\mathbf{u} \in L^4(0, T; L^p(\Omega)^n), \text{ p donné par } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, p < q \text{ où } q; \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \text{ q fini quelconque si } n = 2. \quad (\text{A.13})$$

Nous déduisons donc de (A.8), (A.10), (A.13) que $\mathbf{g}(\mathbf{u}_m)$ demeure dans un borné de $L^2(O, T; V'_s)$ et donc $P_m(\mathbf{g}(\mathbf{u}_m))$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; V'_s)$. Alors, comme $\mathbf{A}\mathbf{u}_m$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; V')$ donc de $L^2(0, T; V'_s)$ alors, (A.9) résulte de (A.11).

(iv) Passage à la limite.

En utilisant le théorème de compacité avec les données suivantes : $B_0 = V, p_0 = 2, B_1 = V'_s, p_1 = 2$ et $B = H$. Nous pouvons donc extraire une suite \mathbf{u}_μ de \mathbf{u}_m telle que

$$\mathbf{u}_\mu \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible.} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{u}_\mu \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible *}. \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{u}_\mu \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ fort et p.p dans } Q. \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{u}_\mu \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; V'_s) \text{ faible.} \quad (\text{A.17})$$

Nous déduisons donc de (A.14) et (A.17) que $\mathbf{u}_\mu(0) \rightarrow \mathbf{u}(0)$ dans V'_s faible (par exemple) et donc $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. D'après le lemme A.1.2, $\mathbf{u}_{\mu i} \mathbf{u}_{\mu j}$ est borné dans $L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega))$ et donc, nous pouvons supposer que

$$\mathbf{u}_{\mu i} \mathbf{u}_{\mu j} \rightarrow \chi_{ij} \text{ dans } L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega)) \text{ faible} \quad (\text{A.18})$$

mais grâce à (A.16), nous avons

$$\chi_{ij} = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \quad (\text{A.19})$$

car $\mathbf{u}_{\mu i} \mathbf{u}_{\mu j} \rightarrow \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: en effet, $\int_Q \mathbf{u}_{\mu i} \mathbf{u}_{\mu j} \varphi dx dt \rightarrow \int_Q \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \varphi dx dt, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$, car $\mathbf{u}_{\mu i} \rightarrow \mathbf{u}_i$ dans $L^2(Q)$ faible, et $\mathbf{u}_{\mu i j} \varphi \rightarrow \mathbf{u}_j \varphi$ dans $L^2(Q)$ fort.

(A.18) et (A.19) impliquent que

$$b(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{w}_j) \rightarrow b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_j) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible.} \quad (\text{A.20})$$

en effet, si $\psi \in L^2(0, T)$, on a $\int_0^T b(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu, \mathbf{w}_j) \psi dt = - \int_0^T b(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_\mu) \psi dt$ puis passage à la limite en utilisant (A.18).

Par ailleurs,

$$(\mathbf{u}'_\mu, \mathbf{w}_j) \rightarrow (\mathbf{u}', \mathbf{w}_j) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ par exemple}$$

et donc (A.4) (pour $m = \mu$) donne à la limite

$$(\mathbf{u}', \mathbf{w}_j) + \nu a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j), \forall j.$$

Nous en déduisons l'équation de (P) $\forall \mathbf{v} \in V_s$ puis $\forall \mathbf{v} \in V \cap (L^2(\Omega))^2$. ■

A.2 Preuve du théorème d'unicité 1.3.2

Pour l'unicité de la solution, dans le cas de la dimension d'espace 2, nous utilisons quelques lemmes.

Preuve de (1.10)

Il suffit de montrer (1.10) pour $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$; prolongeant \mathbf{v} par 0 hors de Ω , (1.10) résultera alors de

$$\|\mathbf{v}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 \|D_i \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{A.21})$$

En effet, nous partons de

$$\mathbf{v}^2(\mathbf{x}) = 2 \int_{-\infty}^{x_i} \mathbf{v}(D_i \mathbf{v}) dx_i,$$

d'où

$$\mathbf{v}^2(\mathbf{x}) \leq 2\mathbf{v}_1(x_2) \text{ et } \mathbf{v}^2(\mathbf{x}) \leq 2\mathbf{v}_2(x_1),$$

où

$$\mathbf{v}_1(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{v}| |D_1 \mathbf{v}| dx_1 \text{ et } \mathbf{v}_2(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{v}| |D_2 \mathbf{v}| dx_2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &\leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}_1(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}_2(x_1) dx_1 \leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}| |D_1 \mathbf{v}| dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}| |D_2 \mathbf{v}| dx_2 dx_1 \\ &\leq 4 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_1 \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_2 \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 4 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 (\|D_1 \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_2 \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}) \\ &\leq 2 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 (2 \|D_1 \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_2 \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}) \leq 2 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \|D_i \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right) \end{aligned}$$

D'où,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/4} \leq 2^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 \|D_i \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)^{1/2}.$$

i.e (A.21). ■

Lemme A.2.1 Si $n = 2$ et $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, alors

$$\sum_{i=1}^2 u_i D_i \mathbf{u} \in L^2(0, T; V'). \quad (\text{A.22})$$

Preuve :

Si $\varphi \in V$, nous avons $\left(\sum_{i=1}^2 u_i D_i \mathbf{u}, \varphi \right) = - \left(\sum_{i=1}^2 u_i D_i \varphi, \mathbf{u} \right)$,

Donc,

$$\left| \left(\sum_{i=1}^2 u_i D_i \mathbf{u}, \varphi \right) \right| \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{(L^4(\Omega))^2} \|\varphi\|_V \leq_{(L_1)} C_2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\| \|\varphi\|$$

et donc,

$$\left\| \sum_{i=1}^2 u_i(t) D_i \mathbf{u}(t) \right\|_{V'} \leq C_2 \|\mathbf{u}(t)\| |\mathbf{u}(t)|$$

or, $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|$ est dans $L^2(0, T)$ et $t \mapsto |\mathbf{u}(t)|$ est dans $L^\infty(0, T)$ d'où (A.22). ■

Nous énonçons maintenant la preuve du théorème d'unicité 1.3.2 de la solution :

Soient \mathbf{u} et \mathbf{u}_1 deux solutions et soit $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$. Alors,

$$(\mathbf{w}', \mathbf{v}) + \nu a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V \text{ (car } V \subset (L^2(\Omega))^2!) \quad (\text{A.23})$$

Or, $\mathbf{w}' \in L^2(0, T; V')$, nous pouvons donc prendre dans (A.23) $\mathbf{v} = \mathbf{w}(t)$ et intégrer en t ; il vient

$$\frac{1}{2} |\mathbf{w}(t)|^2 + \nu \int_0^t a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) d\sigma + \int_0^t [b(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w})] = 0 \quad (\text{A.24})$$

mais $b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$, $b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ et donc, (A.24) donne

$$\frac{1}{2} |\mathbf{w}(t)|^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{w}(\sigma)\|^2 d\sigma = - \int_0^t b(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) d\sigma. \quad (\text{A.25})$$

Or,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t b(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) d\sigma \right| &\leq C_3 \int_0^t \|\mathbf{w}(\sigma)\|_{(L^4(\Omega))^2}^2 \|\mathbf{u}(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq (\text{par (1.10)}) C_4 \int_0^t |\mathbf{w}(\sigma)| \|\mathbf{w}(\sigma)\| \|\mathbf{u}(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \nu \int_0^t \|\mathbf{w}(\sigma)\|^2 d\sigma + C_5 \int_0^t |\mathbf{w}(\sigma)|^2 \|\mathbf{u}(\sigma)\|^2 d\sigma, \end{aligned}$$

donc, (A.25) donne

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq 2C_5 \int_0^t \|\mathbf{u}(\sigma)\|^2 |\mathbf{w}(\sigma)|^2 d\sigma. \quad (\text{A.26})$$

d'où, $\mathbf{w} = 0$. ■

Annexe B

Équations fondamentales de la dynamique des fluides. Tenseurs de contraintes

-
1. Première forme locale : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$
 2. Seconde forme locale : $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
 3. Première forme macroscopique : $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot n dA = 0$
 4. Seconde forme macroscopique : $\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_A \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot n dA = 0$
-

TAB. B.1 – Équation de conservation de la masse.

-
1. Forme locale : $\rho \frac{d}{dt} V = -\nabla p + \rho g + \nabla \cdot \tau$
 2. Forme locale conservative : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho g + \nabla \cdot \tau$
 3. Variante de la forme 2 : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \delta - \tau] = \rho g$
-

TAB. B.2 – Équations de conservation de la quantité de mouvement.

1. Forme locale : $\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$
 2. Forme locale conservative : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$
 3. Variante de la forme 2 : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \delta) = \rho \mathbf{g}$
-

TAB. B.3 – Équations de conservation de la quantité de mouvement, écoulements de fluides idéaux (équations d’Euler).

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

avec

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

TAB. B.4 – Composantes du tenseur des contraintes pour les fluides newtoniens en coordonnées rectangulaires (x, y, z) .

Annexe C

Algorithme de résolution et méthode des caractéristiques

C.1 Méthode de gradient conjugué

Ayant le problème approché suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Phi \text{ tel que :} \\ A\Phi = F, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

avec A une matrice $n \times n$ symétrique définie positive et F un vecteur de taille n :

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j, \quad F_i = \int_{\Omega_h} \nabla \cdot u_h \phi_i,$$

Φ le vecteur solution : $\Phi = (\phi_h(q^i))_{i \in 1, \dots, n}$ et $\{\psi_i\}_{1..n}$ une base.

Pour résoudre le système (C.1), on utilise une méthode de gradient conjugué dont l'algorithme est le suivant :

1. Initialisation :

Choisir une méthode de préconditionnement $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (C doit être symétrique définie positive, comme exemple de préconditionneur, on peut citer la diagonale de la matrice, un préconditionnement de type LU , un critère d'arrêt ε (ou/et un nombre maximum d'itérations).

Poser $g^0 = h^0 = C^{-1}(A\Phi^0 - F)$ et $m = 0$. h^m correspond à la direction de recherche.

2. Calculer :

$$\rho^m = \frac{\langle g^m, h^m \rangle_C}{t_{h^m} A h^m},$$

$$\Phi^{m+1} = \Phi^m - \rho^m h^m,$$

$$g^{m+1} = g^m - \rho^m C^{-1} A h^m,$$

$$\gamma^m = \frac{\|g^{m+1}\|_C^2}{\|g^m\|_C^2},$$

$$h^{m+1} = g^{m+1} + \gamma^m h^m,$$

avec $\langle a, b \rangle_C = {}^t a C b$ et $\|a\|_C = \langle a, a \rangle_C^{\frac{1}{2}}$.

3. Si $\|g^{n+1}\| < \varepsilon$, Φ^{n+1} est la solution approchée du problème. Sinon, on incrémente m et on retourne en 2.

C.2 Méthode des caractéristiques

Parmi les difficultés associées à la résolution des équations de Navier-Stokes est la prise en compte du terme non-linéaire : $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Afin de surmonter cette difficulté, nous avons choisi de discrétiser ce terme, numériquement, par la méthode des caractéristiques ; il s'agit d'un traitement lagrangien de la dérivée totale :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (\text{C.2})$$

appelée également dérivée particulaire.

Plus précisément, la trajectoire d'une particule fluide dans un écoulement ayant une vitesse $\mathbf{u}(t, \cdot)$ et se trouvant à la position \mathbf{x} au temps s est notée $\chi(t, s; \mathbf{x})$ (Voir la figure C.1).

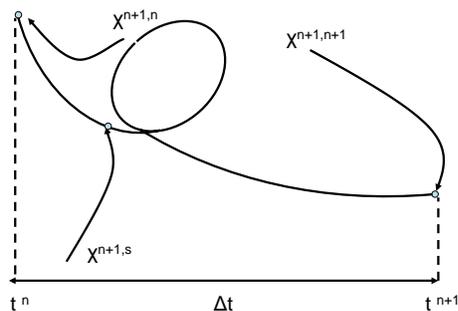


FIG. C.1 – Ligne caractéristique.

χ ainsi définie est donc solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{d\chi(t, s; \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{u}(t, \chi(t, s; \mathbf{x})), & t \in [0, s], \\ \chi(s, s; \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

On note $\chi^{n+1, n}(\mathbf{x}) = \chi(t^n, t^{n+1}; \mathbf{x})$.

On utilise l'approximation suivante pour la dérivée totale en temps :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \simeq \frac{\mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{x}) - \mathbf{u}(t^n, \chi^{n+1, n}(\mathbf{x}))}{\Delta t}. \quad (\text{C.4})$$

Index

- Argument de dualité, 7, 23, 34, 62, 84, 129
- bulle (Fonction $-$), 46
- Caractéristiques (Méthode des $-$), 6, 200
- Cauchy-Schwarz (Inégalité de $-$), 79
- CFL (condition $-$), 38
- cisaillement (Contrainte de $-$), 3
- conservation de la masse, 29, 197
- conservation des moments, 29
- contraintes (Tenseur des $-$), 3
- convection (Terme de $-$), 28
- courant (Fonction de $-$), 156
- CPU, 173, 176, 181
- déformation (Taux de $-$), 3
- densité d'un fluide, 3, 8
- différences finies (Méthode des $-$), 6, 44
- diffusion (Terme de $-$), 28
- Dirichlet (Conditions de $-$), 8, 28
- dualité (Produit de $-$), xv
- EDP (Équations aux Dérivées Partielles), 7, 34
- Espaces des Éléments-finis, 33
- Euler (Équation d' $-$), 3
- Euler (Schéma d' $-$), 12
- Existence (Résultat d' $-$), 30
- Fluide newtonien, 3
- Fluide non-newtonien, 3
- Fluide parfait, 3
- Fluide visqueux, 3, 8
- FreeFem++, 156
- FreeFem+, 15
- Frobenius (Norme de $-$), 40
- Galerkin (Méthode de $-$), 7, 30, 31, 35
- Gradient conjugué (Méthode de $-$), 199
- Gronwall (Lemme de $-$, continu), 41
- Gronwall (Lemme de $-$, discret), 41
- incompressibilité (Condition d' $-$), 6, 15, 29, 156
- incompressibilité (Contrainte d' $-$), 28, 29, 33
- incompressible (Fluide $-$), 4, 7, 8
- inf-sup globale (Condition $-$), 33, 46, 47
- inf-sup locale (Condition $-$), 53
- instationnaire (Écoulement), 4
- Isovaleurs, 164, 170, 178
- Lagrange (Multiplieurs de $-$), 29
- Lagrange-Galerkin (Projection de $-$), 6
- laminaire (Écoulement $-$), 4
- laminaire (Régime $-$), 29
- Ligne caractéristique, 200
- Méthode des Éléments Finis, 5, 44
- Mini-élément, 22, 45
- Navier-Stokes (Équations de $-$), 3–9, 11, 12, 14, 15, 20, 22, 23, 28, 29, 31, 34, 35, 37, 45, 62, 84, 118, 125, 156, 163, 166–168, 170, 173, 179, 181, 187, 191, 200
- Navier-Stokes, équation de conservation de la quantité de mouvement, 4, 197, 198
- norme duale, 40
- Opérateur d'approximation local, 47
- Opérateur d'interpolation, 48
- Opérateur de régularisation, 47
- Opérateur de restriction, 46
- particulière (Dérivée), 6, 200
- Poincaré (Constante de $-$), 40
- Poincaré (Inégalité de $-$), 40
- Préconditionnement (Méthode de $-$), 199
- projection (Méthodes de $-$), 6
- Régularité (Résultat de $-$), 31
- Reynolds (Nombre de $-$), 4, 29
- Sobolev (Espace de $-$), 40
- Sobolev (Injections de $-$), 40
- stationnaire (Écoulement), 4

Stokes rétrograde (Problème de $-$, d'ordre 1),
72
Stokes rétrograde (Problème de $-$, d'ordre 2),
129
superconvergence (schéma d'ordre 1, Résultat
de $-$), 85
superconvergence (schéma d'ordre 2, Résultat
de $-$), 134

Taylor-Hood (Élément fini de $-$), 22, 51
Tenseur des contraintes, fluides newtoniens, 198
transport (Terme de $-$), 28
Triangulation, 33
turbulent (Régime $-$), 29

Unicité (Résultat d' $-$), 31

Viscosité, 3, 5, 8, 28, 29

Bibliographie

- [1] H. Abboud. *A second order accuracy in time for a full discretized time-dependent Navier-Stokes equations by a two-grid scheme*. In preparation.
- [2] H. Abboud and T. Sayah. *A full discretization of the time-dependent Navier-Stokes equations by a two-grid scheme*. Submitted.
- [3] H. Abboud. *Méthode à deux grilles d'ordre deux en temps pour Navier-Stokes non stationnaire incompressible*. In 38ème Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM 2006), Guidel, France, Juin 2006.
- [4] H. Abboud, V. Girault and T. Sayah. *Two-grid finite element scheme for the fully discrete time-dependent Navier-Stokes problem*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).
- [5] H. Abboud, V. Girault and T. Sayah. *Schémas à deux grilles pour le problème de Navier-Stokes incompressible, instationnaire*. In 36ème Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM 2004), Obernai, France, Juin 2004.
- [6] Y. Achdou and J.-L. Guermond. *Convergence analysis of a finite element projection/Lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations*. SIAM J. Numer. Anal., 37(3) : 799-826, 2000.
- [7] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [8] A. Ait Ou Amni and M. Marion. *Nonlinear Galerkin methods and mixed finite element : two-grid algorithms for the Navier-Stokes equations*. Numer. Math. 62, 189-213, 1994.
- [9] D. Arnold, F. Brezzi and M. Fortin. *A stable finite element for the Stokes equations*. Calcolo 21, 337-344, 1984.
- [10] I. Babuška, J. Osborn and J. Pitkäranta. *Analysis of mixed methods using mesh-dependent norms*. Math. of Comp. 35, pp. 1039-1079, 1980.
- [11] I. Babuška. *The finite element method with Lagrangian multipliers*. Numer. Math. 20, 179-192, 1973.
- [12] M. Bercovier and O. Pironneau. *Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables*. Numer. Math. 33, pp. 211-224, 1979.
- [13] C. Bernardi. *Optimal finite-element interpolation on curved domain*. SIAM J. Numer. Anal., 5, 1212-1240, 1989.
- [14] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [15] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [16] F. Brezzi. *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*. RAIRO Anal. Numér. 129-151, 1974.
- [17] K. M. Chandy and J. Misra. *Parallel program design : a foundation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

-
- [18] A.J. Chorin. *On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations.* Math. Comput. 23 : 341-353, 1969.
- [19] A.J. Chorin. *Numerical solution of the Navier-Stokes equations.* Math. Comput. 22, 745-762, 1968.
- [20] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York , Oxford, 1978.
- [21] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, New York ,1983.
- [22] R. Comolet. *Mécanique des fluides.* Masson, 1985.
- [23] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations.* RAIRO, Anal. Numér. 3, 33-75, 1973.
- [24] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements.* In Springer, Applied Mathematical Sciences 159, Springer-Verlag, New York (2003).
- [25] L. Euler. *Opera omnia.* Series Secunda, 12 : 274-361, 1755.
- [26] C. Foias, O. Manley and R. Temam. *Modelization of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows.* RAIRO Modél. Anal. Numér. 22, 93-114, (1988).
- [27] M. Fortin. *Old and new finite elements for incompressible flows.* Int. Jour. Numer. Meth. Fluids, 1, pp. 347-364, (1981).
- [28] B. Garcia-Archilla and E. Titi. *Postprocessing the Galerkin method : the finite element case.* SIAM J. Numer. Anal. 37, 470-499 (2000).
- [29] V. Girault and J.-L. Lions. *Two-grid finite-element schemes for the transient Navier-Stokes equations.* M2AN 35, 945-980 (2001).
- [30] V. Girault and J.-L. Lions. *Two-grid finite-element schemes for the steady Navier-Stokes problem in polyhedra.* Portugal.Math. 58 (2001), 25-57.
- [31] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms.* In Springer Series in Computational Mathematics 5, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).
- [32] R. Glowinski. *Finite element methods for the numerical simulation of unsteady incompressible viscous flow modeled by the Navier-Stokes equations.* Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, Eds., Elsevier, Amsterdam.
- [33] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman Monographs and Studies in Mathematics 24, Pitman, Boston, 1985.
- [34] M. Gunzberger. *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows. A Guide to Theory, Practice and Algorithms.* Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [35] D. Hoff. *Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data.* Arch. Rat. Mech. Anal., 132 : 1-14, 1995.
- [36] O.A. Ladyzenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* In Russian (1961). First English translation, Gordon & Breach , Eds., New York (1963).
- [37] L. Lamport. *The Temporal Logic of Actions.* Technical Report 79, SRC, 1991.
- [38] W. Layton and W. Lenferink. *A Multilevel mesh independence principle for the Navier-Stokes equations.* SIAM J. Numer. Anal. 33, 17-30, 1996.

-
- [39] W. Layton and W. Lenferink. *Two-level Picard-defect corrections for the Navier-Stokes equations at high Reynolds number*. Appl. Math. Comput. 69, 263-274, 1995.
- [40] W. Layton. *A two-level discretization method for the Navier-Stokes equations*. Comput. Math. Appl. 26, 33-38, 1993.
- [41] J. Leray. *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*. J. Math. Pures Appl., 13 : 331-448, 1934.
- [42] J. Leray. *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta. Math., 63 : 193-248, 1934.
- [43] J. Leray. *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*. J. Math. Pures Appl., 12 : 1-82, 1933.
- [44] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris (1969).
- [45] J.-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1*. Dunod, Paris, 1968.
- [46] J.-L. Lions. *Equations différentielles opérationnelles 111*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1961).
- [47] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*. Vol. 2. Compressible Models. Oxford Science Publications, 1998.
- [48] B. Lucquin et O. Pironneau. *Introduction au calcul scientifique*. Masson 1996.
- [49] M. Marion and R. Temam. *Navier-Stokes equations : theory and approximation, in Handbook of Numerical Analysis. Vol. VI*. P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, Eds., Elsevier, Amsterdam 503-688, 1998.
- [50] M. Marion and R. Temam. *Nonlinear Galerkin Methods : the finite element case*. Numer. Math. 57, 1-22, 1990.
- [51] M. Marion and R. Temam. *Nonlinear Galerkin Methods*. SIAM J. Numer. Anal. 26, 1139-1157, 1989.
- [52] A. Matsumura and T. Nishida. *The initial value problem for the equations of motion of compressible and heat conductive fluids*. Comm. Math. Phys., 89 : 445-464, 1983.
- [53] C.L.M.H. Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. MéM. Acad. Sci. Inst. France, 6(2) : 375-394, 1822.
- [54] A. Niemistö. *FE-approximation of unconstrained optimal control like problems*. Report No. 70. University of Jyväskylä 1995.
- [55] J.T. Oden. *Finite Elements of Nonlinear Continuum*. McGraw-Hill, New York.
- [56] J.T. Oden. *Finite Elements : an Introduction*. Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, édité par P.G Ciarlet & J.L. Lions, North-Holland, 3-15, 1991.
- [57] O. Pironneau. *Finite Element Methods for Fluids*. Wiley, Chichester 1989.
- [58] O. Pironneau. *On the transport diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equations*. Masson, Paris, 1983.
- [59] O. Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Numer. Math, 38 : 309-332, 1982.
- [60] P.A. Raviart et J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod.

- [61] L.R. Scott and S. Zhang. *Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions*. Math. Comp. 54 (1990), 483-493.
- [62] G. G. Stokes. *On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids*. Trans. Camb. Phil. Soc., 8 : 287-319, 1822.
- [63] E. Süli. *Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method*. Numer. Math, 53 : 459-483, 1988.
- [64] R. Temam. *Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations*. North-Holland, (1977).
- [65] R. Temam. *Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*. Bull. Soc. Math. France 98, 115-152, 1968.
- [66] R. Verfürth. *Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations*. R.A.I.R.O. Numer. Anal. 18 n2, pp. 175-182 (1984).
- [67] V.A. Weigant and A.V. Kazhikhov. *On the existence of global solutions to two-dimensional Navier-Stokes equations of a compressible viscous fluid*. Sibirskij Mat. Z., 36(6) : 1283-1316, 1995.
- [68] M.F. Wheeler. *A priori L_2 Error Estimates for Galerkin Approximations to parabolic partial differential equations*. SIAM. J. Numer. Anal. Vol 10, No. 4, September 1973, pp. 723-759.
- [69] J. Xu. *Two-grid finite element discretization techniques for linear and nonlinear PDE*. SIAM J. Numer. Anal. 33, 1996.
- [70] J. Xu. *A novel two-grid method for semilinear elliptic equations*. SIAM J. Sci. Comput. 15, 231-237, 1994.
- [71] O.C. Zienkiewicz. *Visco-plasticity and plasticity An alternative for finite element solution of material nonlinearities*. Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, 259-287, 1973.

Table des figures

1	C. Navier et G.G. Stokes	4
2	Erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.	16
3	Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.	17
4	Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème à deux grilles d'ordre 1.	17
5	Erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.	19
6	Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.	19
7	Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression problème à deux grilles d'ordre 2.	20
8	Erreurs $L_{t,x}^2$ de la vitesse des problèmes d'ordre 2 à une et à deux grilles.	21
9	Erreurs $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse des problèmes d'ordre 2 à une et à deux grilles.	21
10	Erreurs $L_{t,x}^2$ de la pression des problèmes d'ordre 2 à une et à deux grilles.	22
2.1	Exemple des quantités ρ_κ et η_κ	45
2.2	Le mini-élément	50
2.3	Un autre mini-élément	51
2.4	Élément Taylor-Hood	52
2.5	Ensemble Ω_i des éléments κ de \mathcal{T}_η	56
5.1	Géométrie carrée du domaine.	157
5.2	Évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.	158
5.3	Zoom sur l'évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.	158
5.4	Erreur $L_t^\infty(L_x^2)$ de la vitesse du problème de Stokes d'ordre 1.	159
5.5	Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème de Stokes d'ordre 1.	160
5.6	Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème de Stokes d'ordre 1.	160
5.7	Géométrie circulaire du domaine.	161
5.8	Champ des vitesses au temps $t = T$ - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse. 162	
5.9	Cercle. Stokes - Erreur sur la vitesse $L_t^\infty(L_x^2)$	162
5.10	Cercle. Stokes - Erreur sur la vitesse $L_t^2(H_x^1)$	163
5.11	Champ des vitesses au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse. 164	
5.12	Isovaleurs des pressions au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la pression.	165
5.13	Erreur $L_t^\infty(L_x^2)$ de la vitesse du problème de Navier-Stokes d'ordre 1.	166
5.14	Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème de Navier-Stokes d'ordre 1.	166
5.15	Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème de Navier-Stokes d'ordre 1.	167
5.16	Évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.	169

5.17	Zoom sur l'évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.	169
5.18	Champ des vitesses au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse.	170
5.19	Isovaleurs de la pression $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la pression.	170
5.20	Erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.	171
5.21	Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 1.	172
5.22	Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème à deux grilles d'ordre 1.	172
5.23	Erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse du deuxième problème à deux grilles d'ordre 1.	174
5.24	Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du deuxième problème à deux grilles d'ordre 1.	175
5.25	Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du deuxième problème à deux grilles d'ordre 1.	175
5.26	Évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.	177
5.27	Zoom sur l'évolution des première et deuxième composantes du degré de liberté 500 par rapport au temps.	177
5.28	Champ des vitesses au temps $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la vitesse.	178
5.29	Isovaleurs de la pression $t = T$. - Solutions a. exacte b. numérique de la pression.	178
5.30	Erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.	179
5.31	Erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse du problème à deux grilles d'ordre 2.	180
5.32	Erreur $L_{t,x}^2$ de la pression du problème à deux grilles d'ordre 2.	180
5.33	Comparaison de l'erreur $L_{t,x}^2$ de la vitesse des problèmes à une et à deux grilles d'ordre 2.	182
5.34	Comparaison de l'erreur $L_t^2(H_x^1)$ de la vitesse des problèmes à une et à deux grilles d'ordre 2.	182
5.35	Comparaison de l'erreur $L_{t,x}^2$ de la pression des problèmes à une et à deux grilles d'ordre 2.	183
C.1	Ligne caractéristique	200

Liste des tableaux

1	Comparaison en temps CPU du 1 ^{er} et 2 ^{ème} schémas d'ordre 1 en temps.	18
2	Comparaison en temps de calcul CPU du schéma d'ordre 2 en temps.	20
5.1	Comparaison en temps de calcul CPU du premier schéma d'ordre 1 en temps. . .	173
5.2	Comparaison en temps de calcul CPU du deuxième schéma d'ordre 1 en temps. .	176
5.3	Comparaison en temps de calcul CPU du schéma d'ordre 2 en temps.	181
B.1	Équation de conservation de la masse.	197
B.2	Équations de conservation de la quantité de mouvement.	197
B.3	Équations de conservation de la quantité de mouvement, écoulements de fluides idéaux (équations d'Euler).	198
B.4	Composantes du tenseur des contraintes pour les fluides newtoniens en coordon- nées rectangulaires (x, y, z)	198

Schémas à deux grilles pour la résolution du problème de Navier-Stokes instationnaire incompressible

Résumé

Dans ce travail nous nous intéressons à la résolution du problème d'évolution de Navier-Stokes incompressible totalement discrétisé en temps et en espace, en dimension deux par une méthode à deux grilles.

Dans un premier temps, nous étendons la méthode à deux grilles, appliquée par V. Girault et J.-L. Lions au problème de Navier-Stokes instationnaire semi-discrétisé, au problème de Navier-Stokes totalement discrétisé en temps (par un schéma d'ordre un) et en espace (par une méthode d'éléments finis d'ordre un). Dans la première étape, le problème non-linéaire est discrétisé en espace et en temps sur une grille grossière de pas d'espace H avec un pas de temps Δt . Puis dans la deuxième étape, le problème, linéarisé autour de la vitesse \mathbf{u}_H calculée à l'étape précédente, est discrétisé en espace sur une grille fine de pas d'espace h et le même pas de temps. L'idée de la méthode à deux grilles est que, sous des hypothèses adéquates, la contribution de \mathbf{u}_H à l'erreur dans le terme non-linéaire en espace, est mesurée en norme L^2 en espace et en temps et a un ordre plus élevé que si elle était mesurée en norme H^1 .

Dans un deuxième temps, vu que le but est de gagner en ordre de convergence de l'erreur totale du schéma ainsi qu'en complexité, nous étudions un schéma à deux grilles d'ordre deux en temps du problème totalement discrétisé en temps et en espace de Navier-Stokes.

Nous présentons les résultats suivants : dans le cas de la résolution du schéma d'ordre un en temps, si $h = H^2 = \Delta t$, alors l'erreur globale de l'algorithme à deux grilles est de l'ordre de h . Dans le cas du schéma d'ordre deux en temps, si $h^2 = (\Delta t)^2 = H^3$, alors l'erreur globale de l'algorithme à deux grilles est de l'ordre de h^2 : résultats identiques à ceux de la résolution directe du problème non-linéaire sur une grille fine.

Mots-clés: Méthode à deux grilles, problème non-linéaire, équations de Navier-Stokes, écoulements fluides instationnaires incompressibles, schémas d'ordre un et deux en temps, méthode des éléments finis, "mini-élément", élément fini de Taylor-Hood.

Two grid schemes for the resolution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes problem

Abstract

This thesis focuses on the time-dependent incompressible Navier-Stokes problem totally discretized in time and space, in two dimensions, by a two-grid method.

In the first part, we extend the two-grid method, applied by V. Girault and J.-L. Lions to the transient semi-discretized Navier-Stokes problem, to the totally discretized Navier-Stokes problem in time (by a first order scheme) and in space (by a first order finite element method). In the first step, the fully non-linear problem is discretized in space on a coarse grid with mesh-size H and time step Δt . In the second step, the problem is linearized around the velocity \mathbf{u}_H computed in the first step and is discretized in space on a fine grid with mesh-size h and the same time step. The two-grid strategy is motivated by the fact that under suitable assumptions, the contribution of \mathbf{u}_H to the error in the non-linear term, is measured in the L^2 norm in space and time, and thus has hopefully a higher-order than if it were measured in the H^1 norm in space.

In the second part, since our objectif is to gain in order of convergence and in complexity of the scheme, we study a second order time accuracy two-grid scheme for the totally discretized in time and space Navier-Stokes problem.

We present the following results : for the first order scheme, if $h = H^2 = \Delta t$, then the global error of the two-grid algorithm is of the order of h . For the second order scheme, if $h^2 = (\Delta t)^2 = H^3$, then the global error of the two-grid algorithm is of the order of h^2 : the same results as would have been obtained if the non-linear problem had been solved directly on the fine grid.

Keywords: Two-grid method, non linear problem, Navier-Stokes equations, time-dependent incompressible flows, first and second order accuracy scheme in time, finite element method, "mini-élément", Taylor-Hood finite element.

