



**HAL**  
open science

# Systèmes différentiels et algébriques du type Riccati issus de la théorie des jeux

Lynda Cherfi

► **To cite this version:**

Lynda Cherfi. Systèmes différentiels et algébriques du type Riccati issus de la théorie des jeux. Automatique / Robotique. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT: . tel-00132175

**HAL Id: tel-00132175**

**<https://theses.hal.science/tel-00132175>**

Submitted on 20 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE DE DOCTORAT**

**DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Lynda Cherfi

**pour obtenir le grade de**

**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**ELECTRONIQUE-ELECTROTECHNIQUE-AUTOMATIQUE**

**Sujet de la thèse :**

**Systèmes différentiels et algébriques du  
type Riccati issus de la théorie des jeux**

Soutenance le 19 Décembre 2005 devant le jury composé de :

M. Frédéric BONNANS	Professeur	Président
Mme. Suzanne LESECQ	Maître de Conférences	Rapporteur
M. Gerhard JANK	Professeur	Rapporteur
M.Emmanuel TRELAT	Maître de Conférences	Examineur
M.Yacine CHITOUR	Professeur	Directeur de thèse
M. Hisham ABOU-KANDIL	Professeur	Directeur de thèse

Laboratoire SATIE

ENS CACHAN / CNRS / UMR 8029

61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN Cedex (France)

# Table des matières

<b>Notation</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
0.1 Théorie des jeux . . . . .	5
0.2 Les équations de Riccati . . . . .	6
0.3 Notre contribution . . . . .	6
<b>1 Généralités</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Systèmes linéaires . . . . .	13
1.2.1 Stabilité d'un système linéaire . . . . .	13
1.2.2 Contrôlabilité et observabilité . . . . .	14
1.2.3 Stabilisation et détectabilité . . . . .	15
1.2.4 Equations algébriques du type Lyapunov . . . . .	16
1.3 Un jeu différentiel . . . . .	16
1.3.1 Stratégies admissibles . . . . .	17
1.3.2 Structure d'information . . . . .	18
1.4 Un jeu différentiel linéaire quadratique . . . . .	19
1.4.1 Stratégie du maxmin . . . . .	21
1.4.2 Stratégie de Nash . . . . .	22
1.4.3 Stratégie du point-selle . . . . .	23
1.5 Notions de commande optimale . . . . .	24
1.5.1 Principe du Maximum de Pontryaguine . . . . .	25
1.5.2 Equations de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	26

1.6	Problème de la commande linéaire quadratique . . . . .	27
1.6.1	Problème aux deux bouts . . . . .	28
1.6.2	Equation différentielle du type Riccati . . . . .	29
1.6.3	Lemme de Radon, version 1 . . . . .	30
1.6.4	Equation algébrique du type Riccati . . . . .	31
1.7	Conclusion . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Système différentiel de Nash-Riccati en boucle ouverte</b>	<b>34</b>
2.1	Introduction . . . . .	34
2.2	Présentation du problème . . . . .	36
2.2.1	Problème aux deux bouts . . . . .	37
2.2.2	Système différentiel du type Riccati couplé . . . . .	39
2.2.3	Unicité de la stratégie de Nash . . . . .	40
2.3	Lemme de Radon, version 2 . . . . .	41
2.4	Solutions équivalentes . . . . .	42
2.4.1	Système différentiel linéaire couplé . . . . .	43
2.4.2	Système différentiel du type Riccati couplé . . . . .	48
2.5	Applications . . . . .	51
2.5.1	Système du type Riccati couplé dans le cas général . . . . .	51
2.5.2	Système du type Riccati couplé d'un point-selle . . . . .	53
2.5.3	Exemple scalaire . . . . .	54
2.6	Conclusions et perspectives . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Système algébrique de Nash-Riccati en boucle fermée</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Présentation du problème . . . . .	59
3.3	Itérations du type Lyapunov . . . . .	61
3.3.1	Description de la procédure . . . . .	61
3.3.2	Propriétés des solutions itératives . . . . .	63
3.3.3	Conditions suffisantes de convergence . . . . .	66
3.4	Itérations du type Riccati, version 1 . . . . .	71
3.4.1	Description de la procédure . . . . .	71

3.4.2	Conditions suffisantes de convergence . . . . .	73
3.5	Itérations du type Riccati, version 2 . . . . .	75
3.5.1	Description de la procédure . . . . .	75
3.5.2	Conditions suffisantes de convergence . . . . .	77
3.6	Exemples numériques . . . . .	80
3.7	Conclusion et perspectives . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Système algébrique de MCV-Riccati en boucle fermée</b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Présentation du problème . . . . .	98
4.3	Itérations du type Lyapunov . . . . .	101
4.3.1	Description de l'algorithme . . . . .	101
4.3.2	Propriétés des solutions itératives . . . . .	103
4.3.3	Condition suffisante de convergence . . . . .	106
4.4	Itérations du type Riccati-Lyapunov . . . . .	109
4.4.1	Description de la procédure . . . . .	109
4.4.2	Propriétés des solutions itératives . . . . .	110
4.4.3	Condition suffisante de convergence . . . . .	112
4.5	Applications numériques . . . . .	114
4.6	Conclusions et perspectives . . . . .	128
	<b>Conclusion générale</b>	<b>128</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>130</b>

# Notations

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^{+*}$	ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{C}^-$	ensemble des nombres complexes à partie réelle négative.
$Re(z)$	partie réelle du nombre complexe $z$ .
$Im(z)$	partie imaginaire du nombre complexe $z$ .
$  $	norme d'un vecteur.
$     _\infty$	norme infinie d'une matrice.
$0_n$ ou $0$	matrice nulle d'ordre $n$ .
$I_n$	matrice identité d'ordre $n$ .
$\mathbb{R}^{n \times n}$	ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	ensemble des matrices à $m$ lignes et à $n$ colonnes à coefficients réels.
$exp(A)$	exponentielle de la matrice $A$ .
$A^T$	transposée de la matrice $A$ .
$x^T$	transposée du vecteur $x$ .
$x^*$	conjugué du vecteur $x$ .
$\lambda$	valeur propre d'une matrice $A$ .
$\Lambda(A)$	spectre de la matrice $A$ .
$\lambda_{min}(Q)$	plus petite valeur propre de $Q$ .
$\bar{\lambda}$	conjugué du nombre complexe $\lambda$ .
$\dot{x}$	dérivée par rapport au temps du vecteur $x$ .
$dx$	dérivée au sens stochastique du vecteur $x$ .
■	fin de la preuve.

# Introduction

## 0.1 Théorie des jeux

La théorie des jeux différentiels a été développée dans les années "1950", comme une extension de la théorie des jeux classiques "1930" et celle du contrôle optimal. Cette théorie étudie les problèmes conflictuels de commande, où les variations de position sont décrites par des équations différentielles. On appelle conflit tout phénomène pour lequel on peut a priori déterminer qui et comment participer au conflit, quelles sont les issues possibles au conflit, qui dispose d'intérêt dans ce conflit et en quoi il consiste. Les individus prenant part à ces conflits seront désignés par des joueurs, ces derniers ne possèdent pas toujours un contrôle complet sur le déroulement du jeu. Parfois certains facteurs peuvent se présenter et influencer le déroulement du jeu. Les applications de la théorie des jeux différentiels sont nombreuses en économie, aéronautique, sociologie et politique. Cependant, ce ne sont pas seulement les applications de ce domaine qui sont importantes, mais il est aussi important de développer différents concepts pour décrire et comprendre les situations de conflits, dans le sens où l'information dont pourrait disposer un des joueurs relativement aux autres peut s'avérer cruciale à chaque problème. Ceux-ci peuvent être sous forme de contrôles ou de stratégies qui engloberaient les informations concernant le joueur en question et pourraient même englober les informations concernant les autres joueurs et pouvant être stochastiques ou déterministes.

Selon les termes de Star et Ho [StHo69], on rencontre les jeux différentiels en boucle ouverte ou en boucle fermée. La différence qui les sépare se situe essentiellement dans les stratégies utilisées par les joueurs. Les commandes en boucle fermée sont

exprimées en fonction du vecteur de position et les commandes en boucle ouverte en fonction du temps uniquement.

Les premiers travaux sur l'étude des jeux différentiels furent initiés par "Isaacs 1954", et concernent le problème de poursuite-évasion dans un jeu différentiel à somme nulle. A l'inverse de la théorie du contrôle optimal, la notion d'optimalité dans les jeux différentiels à  $N$  ( $N \geq 2$ ) joueurs n'est pas complètement définie.

## 0.2 Les équations de Riccati

La formulation d'une situation d'optimalité dans les jeux différentiels à un ou à plusieurs joueurs est caractérisée par un ensemble d'équations différentielles ou algébriques du type Riccati. Ces équations sont le principal obstacle à franchir pour la détermination des stratégies des joueurs.

Dans la classe des équations de Riccati, nous distinguons deux catégories. La première se distingue par une seule équation pouvant être différentielle ou algébrique. Cette équation dérive de la théorie de la commande linéaire quadratique en boucle fermée. La deuxième catégorie est constituée d'un ensemble d'équations du type Riccati couplées. Ces équations sont issues de la théorie des jeux différentiels linéaires quadratiques à plusieurs joueurs; cas de l'équilibre de Nash en boucle ouverte et en boucle fermée. Elles peuvent provenir également de la théorie de la commande linéaire quadratique sous l'effet d'une contrainte différentielle-stochastique.

## 0.3 Notre contribution

Le chapitre 1 consiste en une suite de rappels permettant de définir l'ensemble des notions que nous utilisons dans la suite de ce travail. Nous rappelons les propriétés d'un système linéaire dans la section 2. Dans la section 3 nous présentons un jeu différentiel d'une manière générale nous donnons les définitions de solutions admissibles ainsi que la notion de la structure d'information. Dans la section 4 on s'intéresse à la classe des jeux linéaires quadratiques. Nous donnons les principes d'optimalité les plus utilisés dans la littérature. Enfin, pour finir ce chapitre, nous

donnons les principaux résultats de la commande optimale. Une application de ces concepts à la commande linéaire quadratique sera traitée en détail.

Le chapitre 2 est consacré aux systèmes différentiels du type Riccati couplé issus de l'équilibre de Nash en boucle ouverte. Les résultats établis sont basés sur la notion de solutions équivalentes dans le cas d'un système différentiel linéaire et sur le lemme de Radon, version 2 établi dans Abou-Kandil et al. [AFJ93]. Dans ce chapitre, la section 2.4 relative à la recherche de solutions équivalentes est nouvelle. Nous définissons la notion de solutions équivalentes pour les systèmes différentiels du type Riccati couplé au moyen du lemme de Radon, version 2. Nous donnons un ensemble de conditions à satisfaire pour obtenir la séparation du spectre de la matrice caractérisant l'équilibre de Nash. Nous obtenons à l'aide de notre approche deux équations différentielles du type Riccati couplées. Ces équations permettent une étude approfondie des systèmes du type Riccati couplés. Nous fournissons également la forme analytique de la solution dans la Proposition 2.4.2. Dans la section 2.5, nous proposons de retrouver des résultats établis par Abou-Kandil [Abou86]. Nous donnons la forme analytique de la paire de solutions. Enfin, pour finir ce chapitre nous proposons une résolution analytique d'un système différentiel du type Riccati couplé dans le cas scalaire. Cet exemple a été proposé par Simman et Cruz [SiCr73].

Le chapitre 3 est consacré aux systèmes algébriques du type Riccati couplés issus de l'équilibre de Nash en boucle fermée. Concernant ces systèmes, nous présentons deux types de procédures pour le calcul d'une paire de solutions itératives. Les itérations du type Lyapunov établies dans Gajic et Shen [GaSh93] et les itérations du type Riccati établies dans Freiling et al. [FJA96]. Les résultats nouveaux de ce chapitre concernent l'étude des propriétés des solutions itératives issues des itérations du type Lyapunov. Nous donnons des propriétés des solutions itératives. A l'aide de ces propriétés nous établirons des conditions suffisantes de convergence. Pour les itérations du type Riccati nous distinguons deux versions. Les itérations du type Riccati, version 1 établies par Freiling [FJA96]. Concernant ce type d'itérations, nous donnons des conditions suffisantes de convergence. Les itérations du type Riccati, version 2 sont nouvelles. Concernant ces itérations nous donnerons également des conditions suffisantes de convergence. Des simulations numériques effectuées sur plusieurs exemples

numériques, montrent une vitesse de convergence plus rapide de l'algorithme issu des itérations du type Riccati, version 2 relativement à ceux issus des itérations du type Lyapunov et des itérations du type Riccati, version 1.

Le chapitre 4 est consacré aux systèmes algébriques du type Riccati couplés issus de la minimisation de la variance d'un critère quadratique sous une contrainte différentielle-stochastique. La solution optimale est recherchée sous la forme d'une commande linéaire en boucle fermée. Concernant ces systèmes, nous présentons deux types de procédures pour la recherche d'une paire de solutions itératives. Des itérations du type Lyapunov établies dans Freiling et al. [FLJ99] et des itérations du type Riccati-Lyapunov. Les résultats nouveaux de ce chapitre concernent l'étude des propriétés des solutions itératives issues des itérations du type Lyapunov. Nous donnons des propriétés des solutions itératives. A l'aide de ces propriétés nous établirons des conditions suffisantes de convergence. Les itérations du type Riccati-Lyapunov sont nouvelles. Pour ces itérations nous donnons des propriétés des solutions itératives, puis des conditions suffisantes de convergence. Des simulations numériques effectuées sur des exemples montrent une vitesse de convergence plus rapide pour l'algorithme issu des itérations du type Riccati-Lyapunov relativement à celui issu des itérations du type Lyapunov.

Les résultats présentés dans cette thèse ont fait l'objet de publications et ont été présentés dans des conférences internationales :

- L.Cherfi and M.S.Radjef, On the Nash-M equilibrium in differential game under uncertainty, CAO 2003 Proceedings, BARS and GYURKOVICS Editor(s).
- L.Cherfi., H.Abou-Kandil and M.S. Radjef (2003), On the Nash-Pareto equilibrium in disturbed games, XVth Italian meeting on Game Theory and applications, Urbano, Italy, July 2003.
- L.Cherfi., H.Abou-Kandil and M.S. Radjef (2004), Analytic solutions of a class of coupled differential Riccati equations, XIth Spanish meeting on Game

Theory and applications, Alicante, Spain, July 2004.

- L.Cherfi., Y. Chitour and H.Abou-Kandil (2005), A new algorithm for solving coupled algebraic Riccati equations, International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, Vienne, Austria, November 2005.
- L.Cherfi., H. Abou-Kandil and H. Bourles (2005), Iterative Method for General Algebraic Riccati Equation, International Conference on Automatic Control and System, Cairo, Egypt, December 2005.
- L. Cherfi and Y. Chitour (2005), A new algorithm for coupled algebraic Riccati equations in MCV problem, Lecture notes in Computer Science, Springer Link, Workshop on internet and Network Economics, Honk-Kong, December 2005.

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Introduction

Les problèmes de commande des processus ont considérablement évolué au cours du dernier quart de siècle. La nécessité d'augmenter le niveau de production, tout en diminuant les coûts, a contraint les ingénieurs à élaborer des systèmes de plus en plus complexes où l'automaticien joue un rôle fondamental. Par souci d'efficacité, les automaticiens ont cherché à définir des fonctions coût mieux adaptées aux problèmes de commande. Ainsi, dans de nombreux cas, le bon fonctionnement d'un système se traduit par une solution minimisant un critère de performance donné. Les problèmes de commande et d'optimisation se trouvent de ce fait étroitement liés.

La commande optimale des processus a connu un nouvel essor après les travaux de Kalman [Kalm63] et [Kalm69]. La notion d'optimalité concerne un critère et un ensemble de contraintes. La définition d'un critère de performance peut être délicate pour un concepteur et dépend de l'objectif à atteindre. Afin de simplifier le traitement numérique des problèmes d'optimisation, le critère doit être choisi comme une forme analytique, continûment dérivable par rapport aux variables considérées.

La recherche de la loi de commande optimale minimisant un critère donné fait appel aux techniques d'optimisation non linéaire. Les méthodes issues du Calcul des variations, du Principe du Maximum de Pontryaguine et du Principe de la programmation dynamique peuvent être appliquées pour la recherche de la solution optimale. Les

méthodes du Calcul des variations ou du Principe du Maximum de Pontryaguine conduisent à un problème dit aux "deux bouts" (PDB). La solution ainsi obtenue est une fonction d'un vecteur d'état adjoint, celle-ci est dite commande en boucle ouverte. En raison des erreurs de modélisation, des variations sur les conditions initiales qui se produisent sur un processus réel, de telles solutions ne sont pas acceptables. Une solution fonction de l'état du système, dite en boucle fermée, impose la recherche d'une solution par une voie analytique. Ainsi, pour la classe particulière des systèmes différentiels linéaires avec un critère quadratique sur l'état de la commande, Kalman [Kalm63] a présenté une approche basée sur l'élimination du vecteur d'état adjoint, en supposant que celui-ci est une forme linéaire du vecteur d'état.

La programmation dynamique proposée par Bellman [Bell65] est basée sur une approche entièrement différente du problème d'optimisation. Cette approche n'introduit pas le vecteur d'état adjoint et conduit directement par son principe, à une loi de commande en boucle fermée. Toutefois, si une solution analytique recherchée est trouvée, on trouve pratiquement les mêmes hypothèses restrictives que l'approche de Kalman.

Lorsqu'un système est composé de plusieurs agents ayant des objectifs différents, voire parfois antagonistes, il n'est plus possible de modéliser ce problème sous un seul critère. Une approche multi-critères est alors envisagée. La possibilité de coopération ou de non-coopération entre les différents agents peut engendrer des coalitions ou des contre-coalitions au sein d'un même système. Ces paramètres nous amènent alors à définir ce problème dans le cadre de la théorie des jeux.

Les premiers concepts de théorie des jeux ont été établis dans un cadre statique par Von-Neumann et Morgenstern [VoMo44]. Leurs extensions dans le cas dynamique a été faite pour la première fois par Isaacs [Isaa56] dans le cadre d'un jeu de poursuite-évasion. Contrairement à la théorie de la commande optimale, la particularité des jeux à plusieurs joueurs est qu'il n'existe pas de principe d'optimalité unique qui corresponde à toutes les classes de jeu. Cela dépend des règles du jeu, de l'information dont dispose les joueurs et de leurs objectifs respectifs. En terme de théorie des jeux, on désignera les contrôleurs par des "joueurs" et les contrôles par des "stratégies". Ainsi, une fois les règles du jeu établies, le but des joueurs sera, par un

choix convenable de leurs stratégies, d'obtenir au moment final du jeu, les plus bas coûts possibles. La définition qui sera donnée du jeu est un modèle suffisamment général d'un conflit. Le terme "sans coalition" dans les jeux considérés ici, signifie que dans leurs lois de commande, on ne mentionne d'aucune façon les spécificités de coalitions des joueurs causées par des propriétés stratégiques. Après avoir défini la forme générale d'un jeu, il devient nécessaire de définir ce qu'est une solution d'un jeu différentiel. Par solution d'un jeu différentiel de position, on comprendra un composé de stratégies des joueurs vérifiant une conception bien définie d'optimalité. La question d'optimalité est traitée de plusieurs manières. Pour les jeux sans coalitions, dans la grande majorité des ouvrages, les auteurs suivent la conception de l'équilibre de Nash [Nash50]. A partir de la forme générale d'un jeu différentiel, on s'intéressera à la classe des jeux différentiels linéaires quadratiques. Les définitions proposées serviront à la formalisation d'une solution d'un jeu différentiel de position, elles seront commodes à la construction de l'outil mathématique de la recherche pratique d'une situation d'un équilibre donné.

Dans ce chapitre, on propose de faire un bilan des connaissances, sous forme de rappels des concepts les plus utilisés dans cette thèse. Le deuxième paragraphe, est consacré aux systèmes linéaires. On donnera la définition d'un système linéaire. Ensuite, on présentera quelques propriétés sur la contrôlabilité, l'observabilité, la détectabilité et la stabilité. Pour finir, ce paragraphe, on donnera la forme générale d'une équation algébrique du type Lyapunov ainsi que quelques unes de ses propriétés. Dans le troisième paragraphe, on présentera la forme générale d'un jeu différentiel. On donnera les définitions de stratégies admissibles et de la structure d'information respectivement. Dans le quatrième paragraphe, on s'intéressera à la classe de jeux linéaires quadratiques. On définit la stratégie du maxmin, la stratégie de Nash et enfin la stratégie du point-selle. Dans le cinquième paragraphe, on s'intéressera à un problème de contrôle optimal. On présentera le Principe du Maximum de Pontryaguine et le Principe de la programmation dynamique. Au dernier paragraphe, on introduit le problème de la commande linéaire quadratique. L'application du Principe du Maximum de Pontryaguine nous mène à un problème aux deux bouts. L'application du Principe de la programmation dynamique nous mène à l'équation différentielle du

type Riccati. Dans le sixième paragraphe, on étudie le comportement d'un problème de commande linéaire quadratique lorsque le temps d'optimisation devient infini. Enfin, le septième paragraphe est consacré à la conclusion.

## 1.2 Systèmes linéaires

Nous réunissons dans ce paragraphe un certain nombre de notions qui ne relèvent pas directement de la théorie de l'optimisation mais qui sont d'usage permanent en Automatique, et auxquels nous pouvons éventuellement faire référence. Ces notions sont présentées dans Zhou et al. [KDG95].

### Définition 1.2.1 (*système linéaire*)

Un quadruplet  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$ , avec  $n, m$  et  $p \in \mathbb{N}$ , est dit **système linéaire** à coefficients constants, si

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(t_0) = x_0, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ , est le vecteur d'état,  $t_0 \in \mathbb{R}$  est l'instant initial,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  est l'état initial du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée, appelé aussi vecteur de "**contrôle**" et  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie, appelé aussi vecteur "**d'observation**".

Lorsque les matrices  $A, B, C$  et  $D$  sont des fonctions d'une variable  $t \in \mathbb{R}$ , on dira que le système linéaire (1.1) est à coefficients variables.

### 1.2.1 Stabilité d'un système linéaire

Nous rappelons la notion de matrices stables dans la Définition 1.2.2 et la notion de système asymptotiquement stable dans la Définition 1.2.3.

### Définition 1.2.2 (*matrice stable*)

Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite **stable**, si

$$\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-. \quad (1.2)$$

**Définition 1.2.3** (*système asymptotiquement stable*)

Un système linéaire à coefficients constants, donné par l'équation (1.1) est dit **asymptotiquement stable**, si  $A$  est stable.

**1.2.2 Contrôlabilité et observabilité**

Dans cette section, nous rappelons les résultats relatifs à la contrôlabilité et à l'observabilité de la paire  $(A, B)$  et de la paire  $(C, A)$  définies par un système linéaire à coefficients constants du type (1.1). Ces notions sont largement développées dans Zhou et al. [KDG95].

**Définition 1.2.4** (*contrôlabilité*)

On dit que la paire  $(A, B)$  définie par l'équation (1.1) est **contrôlable** si, la matrice  $[A - \lambda I, B]$  est de rang  $n$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dans ce cas, le système linéaire décrit par l'équation (1.1) sera également dit **contrôlable**.

**Proposition 1.2.1** [KDG95] *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. La paire  $(A, B)$  est contrôlable.
2. La matrice de contrôlabilité

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B],$$

*est de rang  $n$ .*

**Définition 1.2.5** (*observabilité*)

On dit que la paire  $(C, A)$  définie par l'équation (1.1) est **observable** si, la matrice  $[\lambda I - A, \ C]^T$  est de rang  $n$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dans ce cas, le système linéaire décrit par l'équation (1.1) sera également dit **observable**.

**Proposition 1.2.2** [KDG95] *Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. La paire  $(C, A)$  est observable.
2. La matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

est de rang  $n$ .

**Remarque 1.2.1** *La contrôlabilité et l'observabilité d'un système linéaire sont des propriétés duales. La paire  $(A, B)$  est contrôlable si et seulement si la paire  $(B^T, A^T)$  est observable et la paire  $(C, A)$  est observable si et seulement si la paire  $(A^T, C^T)$  est contrôlable.*

### 1.2.3 Stabilisation et détectabilité

Les définitions de la stabilisation et de la détectabilité du système linéaire (1.1) sont données dans Callier et Desoer [CaDe91] et Sontag [Sont98].

**Définition 1.2.6** (*stabilisation*)

La paire  $(A, B)$  est dite **stabilisable** s'il existe une matrice  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $A + BF$  est stable.

**Définition 1.2.7** (*détectabilité*)

La paire  $(C, A)$  est dite **détectable** s'il existe une matrice  $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$  telle que  $A + KC$  est stable.

**Remarque 1.2.2** *La stabilisation et la détectabilité d'un système linéaire sont des propriétés duales. La paire  $(A, B)$  est stabilisable si et seulement si la paire  $(B^T, A^T)$  est détectable et la paire  $(C, A)$  est détectable si et seulement si la paire  $(A^T, C^T)$  est stabilisable.*

### 1.2.4 Equations algébriques du type Lyapunov

Dans cette section, nous donnons la forme générale d'une équation algébrique du type Lyapunov. La Proposition 1.2.3 établit une relation entre la solution de cette équation et la notion de stabilité. Pour plus de détails, on renvoie à Abou-Kandil et al. [AFIJ03].

Soit  $L$  une solution de l'équation algébrique du type Lyapunov

$$0 = A^T L + LA + Q, \quad (1.4)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices constantes, avec  $Q$  symétrique.

**Proposition 1.2.3** [AFIJ03] *On considère l'équation algébrique du type Lyapunov (1.4) :*

1. *Si  $A$  est stable et si  $Q > 0$  ( $Q \geq 0$ ), alors l'unique solution  $L$  de l'équation algébrique du type Lyapunov (1.4) est définie positive (semi-définie positive respectivement).*
2. *Si  $Q > 0$  et si l'équation algébrique du type Lyapunov (1.4) possède une solution définie positive  $L$ , alors  $A$  est stable.*

## 1.3 Un jeu différentiel

Dans cette partie, nous présentons les différents paramètres pouvant définir un jeu différentiel à plusieurs joueurs [StHo69]. Les notions de stratégies admissibles et de la structure d'information sont données dans la Définition 1.3.1 et dans la Définition 1.3.3.

Soit  $N$  un entier naturel strictement positif et soit  $\mathcal{T} := [t_0, t_f]$  un intervalle réel. On dit que

$$\Gamma_N = \langle \mathcal{N}, \Sigma, \mathcal{U}_i, J_i \rangle_{i=1, \dots, N}, \quad (1.5)$$

est un jeu différentiel à  $N$  joueurs, si

1.  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ ,
2.  $\Sigma$  décrit un système d'équations différentielles défini par :

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \dots, u_N), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.6)$$

où  $f$  est une application continue par morceaux définie :

$$\mathcal{T} \times X \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_N \rightarrow X.$$

$X$  est un espace vectoriel de dimension finie pouvant être égal à  $\mathbb{R}^n$  ou à un sous espace de celui-ci.

3.  $\mathcal{U}_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , sont des espaces euclidiens de dimension finie.
4.  $J_i$  sont des fonctions réelles définies sur  $\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_N \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.3.1** *Dans la littérature, l'ensemble  $X$  est désigné par l'espace d'état et l'ensemble  $\mathcal{U}_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  par l'espace des stratégies (ou espace des contrôles). Le système différentiel  $\Sigma$  est dit **contrainte dynamique** du problème considéré.  $J_i$  est la fonction **gain** (ou la fonction coût) du " $i$ -ème" joueur. L'intervalle  $\mathcal{T}$  est dit temps (ou horizon) d'optimisation qui peut être soit fini i.e  $[t_0, t_f]$ ,  $t_f < \infty$  ou bien infini i.e  $[t_0, \infty[$ .*

### 1.3.1 Stratégies admissibles

En termes de jeu différentiel à  $N$  joueurs, la notion de stratégies admissibles, consiste en un choix judicieux d'un composé de stratégies de façon à ce que le système différentiel (1.6) admette une solution unique [Frie71].

**Définition 1.3.1** (*stratégie admissible*)

Un composé de stratégies  $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot)) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_N$  est dit **admissible** pour le système défini par l'application  $f$ , s'il existe une unique trajectoire

$$x(\cdot) = x(\cdot, u) : \mathcal{T} \mapsto X \quad (1.7)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $x(\cdot)$  est absolument continue sur  $\mathcal{T}$ ,

- $\dot{x} = f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t))$ , presque partout sur  $\mathcal{T}$ ,
- $x(t_0) = x_0$ ,  $t_0 \in \mathcal{T}$ ,  $x_0 \in X$ .

Les conditions suffisantes pour l'existence d'un composé de stratégies admissibles pour la classe de jeux différentiels  $\Gamma_N$  sont données dans Friedman (1971). Celles-ci sont rappelées dans le Théorème 1.3.1.

**Théorème 1.3.1** [Frie71] *Soit  $\Gamma_N$  un jeu différentiel à  $N$  joueurs. On suppose que l'application  $f$  possède les propriétés suivantes :*

1.  $f(t, x, u_1, \dots, u_N)$  est continue sur  $\mathcal{T} \times X \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_N$ .
2. Il existe une fonction intégrable  $k(t) \geq 0$  sur  $\mathcal{T}$ , i.e  $\int_{\mathcal{T}} k(t) dt < \infty$ , telle que

$$|f(t, x, u_1, \dots, u_N)| \leq k(t)(1 + |x|),$$

pour tout  $(t, x, u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{T} \times X \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_N$ .

3.  $\forall R > 0$ , il existe une fonction  $k_R(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , avec  $\int_{\mathcal{T}} k_R(t) dt < \infty$ , telle que la condition de Lipschitz

$$|f(t, x, u_1, \dots, u_N) - f(t, y, u_1, \dots, u_N)| \leq k_R(t)|x - y|, \quad (1.8)$$

pour tout  $(t, x, u_1, \dots, u_N)$ ,  $(t, y, u_1, \dots, u_N)$  et  $|x|, |y| < R$ .

Alors, il existe un ensemble non vide  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  tel que toute stratégie  $u_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , continue par morceaux soit admissible.

### 1.3.2 Structure d'information

La formulation d'un composé de stratégies admissibles, dépend de l'information que possède chacun des joueurs par rapport à l'état du système. Cet ensemble est dit **structure d'information** du  $i$ -ème joueur, ( $1 \leq i \leq N$ ) et sera noté  $\eta_i(t)$ , pour tout  $t \in \mathcal{T}$ . Lorsque le  $i$ -ème joueur ne connaît que l'état initial du système, on dira que la structure d'information est en boucle ouverte. Par contre si, celui-ci connaît aussi les variations de l'état du système durant le temps d'optimisation, on dira que la structure d'information est en boucle fermée [StHo69].

**Définition 1.3.2** (*boucle ouverte*)

On considère un jeu différentiel à  $N$  joueurs  $\Gamma_N$  défini sur un horizon fini  $\mathcal{T}$ . On dit que le  $i$ -ème joueur possède une structure d'information en **boucle ouverte**, si

$$\eta_i(t) = \{x_0\}, \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

**Définition 1.3.3** (*boucle fermée*)

On considère un jeu différentiel à  $N$  joueurs  $\Gamma_N$  défini sur un horizon fini  $\mathcal{T}$ . On dit que le  $i$ -ème joueur possède une structure d'information en **boucle fermée**, si

$$\eta_i(t) = \{x(t)\}, \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Dans le cadre de notre travail, on ne s'intéressera qu'aux jeux différentiels où les joueurs possèdent la même structure d'information. On dira qu'un jeu différentiel à  $N$  joueurs défini par  $\Gamma_N$  est en boucle ouverte (respectivement, en boucle fermée) si tous les joueurs possèdent une structure d'information en boucle ouverte (respectivement, en boucle fermée).

## 1.4 Un jeu différentiel linéaire quadratique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à une classe de jeux différentiels à  $N$  joueurs [StHo69]. On présente ici les différentes étapes du déroulement du jeu sur un horizon fini. Pour la formulation d'un composé de stratégies admissibles, on adoptera la structure d'information en boucle fermée. Celle-ci contient également la structure d'information en boucle ouverte.

On considère le jeu différentiel à plusieurs joueurs défini par :

$$\Gamma_N = \langle \mathcal{N}, \Sigma, \mathcal{U}_i, J_i \rangle_{i \in \mathcal{N}}, \quad (1.9)$$

où  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  est l'ensemble des joueurs.

Le système  $\Sigma$  est décrit par le système d'équations différentielles ordinaires linéaires

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i \in \mathcal{N}} B_i(t)u_i, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.10)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  est la stratégie du  $i$ -ème joueur ( $i \in \mathcal{N}$ ); les matrices  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$ , sont telles que les dépendances en  $t$  soient continues sur  $[t_0, t_f]$  pour  $n, m_1$  et  $m_2 \in \mathbb{N}^*$ .

La paire  $(t, x)$  sera appelée **position du jeu** (1.9) et  $(t_0, x_0) \in [0, t_f] \times \mathbb{R}^n$  **la position initiale**.

Les stratégies  $u_i$  du  $i$ -ème joueur seront identifiées ( $u_i := u_i(t, x)$ ) à des fonctions du type  $u_i(t, x) = F_i(t)x$ , ( $i = 1, 2$ ) où  $F_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$  est continue pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ .

Ainsi le choix d'une stratégie concrète (par le  $i$ -ème joueur) se ramène au choix d'une matrice  $F_i(t)$  avec des éléments continus en  $t \in [t_0, t_f]$ .

L'ensemble des stratégies du  $i$ -ème joueur sera désigné par  $\mathcal{U}_i$  :

$$\mathcal{U}_i = \{u_i(t, x) \mid u_i(t, x) = F_i(t)x\}, \quad (i = 1, 2). \quad (1.11)$$

Un composé de stratégies  $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_N$  sera appelé **situation du jeu** (1.9).

Le jeu se déroule de la manière suivante. Chaque joueur choisit et utilise sa stratégie  $u_i := F_i(t)x$ . En remplaçant  $u_i = F_i(t)x$ ,  $i \in \mathcal{N}$  dans (1.10), on obtient une solution unique  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$  du système d'équations différentielles linéaires

$$\dot{x} = [A(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}} B_i(t)F_i(t)]x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.12)$$

A l'aide de cette solution, on formalise la réalisation de la stratégie du  $i$ -ème joueur

$$u_i(t, x) = F_i(t)x, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Le but du  $i$ -ème joueur dans le jeu (1.9) consiste, par un choix judicieux de sa stratégie  $u_i \in \mathcal{U}_i$ , à atteindre la plus grande (plus petite) valeur de sa fonction de gain ( fonction coût). Celle-ci est représentée par une fonction quadratique définie sur l'ensemble des solutions  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$  du système (1.12) par :

$$J_i(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_{if}x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)Q_i x(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}} u_j(t)R_{ij}u_j(t) dt, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.13)$$

où  $K_{if}$ ,  $R_{ij}$  et  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 2$  sont des matrices symétriques d'ordre  $n \times n$ .

La valeur de  $J_i(u)$  est appelée **gain** du  $i$ -ème joueur.

Par **solution du jeu** (1.9), on comprendra une situation (un composé de stratégies)  $u^* = (u_1^*, \dots, u_N^*) \in \mathcal{U}$ , vérifiant un principe d'optimalité donné.

La particularité des jeux à ( $N \geq 2$ ) joueurs est qu'il n'existe pas de principe d'optimalité unique qui corresponde à toutes les classes de jeux.

Le jeu (1.9), dont le système  $\Sigma$  est décrit par les équations différentielles linéaires (1.10) et les fonctions de gains des joueurs (1.13) quadratiques, sera appelé *jeu différentiel linéaire quadratique* (**J.D.L.Q**).

### 1.4.1 Stratégie du maxmin

La stratégie du maxmin est considérée comme une stratégie de comparaison dans les jeux différentiels à  $N$  joueurs. Elle peut servir de référence pour accepter ou refuser toute proposition éventuelle d'un autre principe d'optimalité, voir Başar et Olsder [BaOl95].

#### Définition 1.4.1 (*stratégie du maxmin*)

Une stratégie  $u_i^M \in \mathcal{U}_i$  est dite stratégie **maxmin (de garantie)** pour le  $i$ -ème joueur dans le jeu (1.9), si

$$\begin{aligned} J_i(u_i^M) &= \max_{u_i \in \mathcal{U}_i} \min_{u_{\mathcal{N} \setminus i} \in \mathcal{U}_{\mathcal{N} \setminus i}} J_i(u_i, u_{\mathcal{N} \setminus i}) \\ &= \min_{u_{\mathcal{N} \setminus i} \in \mathcal{U}_{\mathcal{N} \setminus i}} J_i(u_i^M, u_{\mathcal{N} \setminus i}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $u_{\mathcal{N} \setminus i} \in \mathcal{U}_{\mathcal{N} \setminus i} := (\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{i-1}, \mathcal{U}_{i+1}, \dots, \mathcal{U}_N)$ .

Si chaque joueur choisit sa stratégie maxmin, alors on dit que les joueurs utilisent le *principe du maxmin*, appelé aussi *principe du gain garanti* et la valeur  $J_i^M[x_0]$  est dite *gain garanti* du  $i$ -ème joueur.

Ce principe d'optimalité est en général utilisé dans les jeux différentiels sans coalition.

La recherche des stratégies maxmin et du gain garanti apparaît, au moins, dans les trois cas suivants :

- dans toutes les différentes classes de jeux, chaque joueur se doit de définir la valeur  $J_i^M[x_0]$ , gain qu'il pourrait se garantir quelque soit le comportement du reste des joueurs ;
- la détermination du maxmin joue un rôle auxiliaire pour l'étude des autres principes d'optimalité, et pourrait servir de référence pour accepter ou refuser toute proposition éventuelle d'un autre principe d'optimalité ;
- la stratégie maxmin est la loi suivie par un joueur dans le cas où l'information dont il dispose est limitée à la connaissance du système d'équations différentielles (1.10), des ensembles des stratégies des autres joueurs et de sa propre fonction de gain.

### 1.4.2 Stratégie de Nash

La situation d'équilibre de Nash est le principe d'optimalité le plus utilisé et le plus étudié dans la littérature sur la théorie des jeux à plusieurs joueurs. Les concepts de base ont tout d'abord été introduits en économie par Nash [Nash50] pour les jeux statiques, son extension aux jeux différentiels a été faite par Isaacs [Isaa56]. Dans ce paragraphe, nous rappellerons quelques propriétés qui pourraient expliquer l'intérêt apporté à ce principe d'optimalité et quelques unes de ses insuffisances.

#### Définition 1.4.2 (stratégie de Nash)

Une situation  $u^* = (u_1^*, \dots, u_N^*) \in \mathcal{U}$  est dite équilibre de **Nash** du jeu différentiel (1.9) avec la position initiale  $(t_0, x_0) \in [0, t_f] \times \mathbb{R}^n$ , si pour toute stratégie  $u_i \in \mathcal{U}_i$ , on a

$$J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u^*), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (1.15)$$

**Propriété 1.4.1** Les gains des joueurs dans la situation d'équilibre de Nash sont supérieurs ou égaux aux gains garantis (maxmin), i.e pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , on a :

$$J_i(u^*) \geq \max_{u_i \in \mathcal{U}_i} \min_{u_{\mathcal{N} \setminus i} \in \mathcal{U}_{\mathcal{N} \setminus i}} J_i(u_i, u_{\mathcal{N} \setminus i}).$$

Cette propriété signifie qu'il est plus avantageux pour un joueur d'utiliser sa stratégie d'équilibre de Nash que sa stratégie maxmin, sous la condition que les autres joueurs utilisent également leurs stratégies de Nash.

**Propriété 1.4.2** *Dans un jeu différentiel sans coalition à deux joueurs*

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma := (1.10), \mathcal{U}_i, J_i \rangle_{i=1,2},$$

*il suffit qu'un joueur utilise sa stratégie de Nash et en informe l'autre joueur pour que ce dernier puisse se trouver dans l'obligation d'utiliser sa stratégie de Nash.*

### 1.4.3 Stratégie du point-selle

La stratégie du point-selle est souvent utilisée comme solution d'un jeu différentiel à somme nulle. Les propriétés de cette stratégie sont largement étudiées dans Başar et Olsder [BaOl95]. Nous donnons les définitions d'un jeu à somme nulle dans la Définition 1.4.3 puis celle d'un point-selle dans la Définition 1.4.4.

Considérons le jeu différentiel

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma := (1.10), \mathcal{U}_i, J_i \rangle_{i=1,2}, \quad (1.16)$$

avec

$$J_1(u_1, u_2) = J(u_1, u_2), \quad J_2(u_1, u_2) = -J(u_1, u_2), \quad (1.17)$$

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j \in \mathcal{N}} u_j^T(t) R_{ij} u_j(t) + x^T(t) Q x(t) dt, \quad (1.18)$$

où  $K_f, R_{ij}, Q$  sont des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre  $n \times n$ .

**Définition 1.4.3** *(jeu à somme nulle)*

*On appelle jeu différentiel à somme nulle (ou jeu antagoniste) tout jeu de la forme (1.16)-(1.17).*

**Définition 1.4.4** (*stratégie du point-selle*)

Une situation  $(u_1^{ps}, u_2^{ps}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  est dite **point-selle** du jeu (1.16), si

$$J(u_1, u_2^{ps}) \leq J(u_1^{ps}, u_2^{ps}) \leq J(u_1^{ps}, u_2), \quad \forall u_i \in \mathcal{U}_i, \quad (i = 1, 2).$$

**Propriété 1.4.3** *Dans un jeu différentiel antagoniste, une situation d'équilibre de Nash coïncide avec le point-selle.*

Jusqu'à présent, nous avons présenté les "bonnes propriétés" de la situation d'équilibre de Nash; il n'en demeure pas moins que ce principe d'optimalité possède quelques insuffisances. Nous en citerons quelques unes.

**Remarque 1.4.1 :**

1. Une situation d'équilibre de Nash est, d'une manière générale améliorable, i.e il peut exister une situation  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  telle que

$$J_i(\bar{u}) \geq J_i(u^*), \quad i \in \mathcal{N}.$$

2. Certains jeux différentiels n'admettent pas de situations d'équilibre de Nash.

Malgré ces insuffisances, le principe d'optimalité de Nash demeure le principe le plus utilisé dans les jeux différentiels sans coalition.

## 1.5 Notions de commande optimale

Le cas d'un jeu différentiel à un seul joueur ayant un seul critère a été largement étudié dans Anderson et Moore [AnMo71], Fleming et Rishel [FIRi75] et Bernhard [Bern76]. Ce problème, plus connu sous le nom de problème de la commande optimale sera développé dans ce paragraphe.

Soit  $\Sigma$  un système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.19)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est un contrôle admissible et  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  est l'état initial du système.  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue par rapport à tous ses arguments.

Soit  $t_f \in \mathbb{R}$ , fixé, on définit sur un horizon fini  $[t_0, t_f]$ , la fonction objectif suivante :

$$J(u) = g(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.20)$$

où  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , est fixé et  $\Phi : \mathcal{T} \times X \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue par morceaux par rapport à tous ses arguments.

Sur l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$ , le problème de la commande optimale consiste à trouver un contrôle  $u^* \in \mathcal{U}$  de façon à ce que la valeur de la fonction coût  $J(u)$  soit minimale.

### 1.5.1 Principe du Maximum de Pontryaguine

On considère le problème de contrôle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = g(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, x(t), u(t)) dt, \rightarrow \max \\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ u \in \mathcal{U}. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Dans cette section, nous rappelons les conditions nécessaires à l'existence d'une solution optimale pour le problème de contrôle (1.21). Ces conditions sont résumées dans le Théorème 1.5.1.

**Théorème 1.5.1** [Pont66] *On suppose que  $f(t, \cdot, u) \in C_n^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Phi(t, \cdot, u)$  et  $g(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$  pour tout  $(t, u) \in [t_0, t_f] \times \mathcal{U}$ . Soit  $(x^*(t), u^*(t))$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  une solution optimale du problème (1.21). Alors, il existe un vecteur d'état adjoint différentiable*

$\psi(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , telle que la fonction hamiltonienne définie par :

$$H(t, x, u, \psi) := \psi^T(t)f(t, x, u) + \Phi(t, x, u), \quad (1.22)$$

satisfait les conditions suivantes :

1.  $\frac{d}{dt}x^* = \nabla_{\psi}H(t, x^*, u^*, \psi)$ ,
2.  $\frac{d}{dt}\psi = -\nabla_x H(t, x^*, u^*, \psi)$ ,
3.  $\psi(t_f) = \nabla_x g(x(t_f))$ ,
4.  $H(t, x^*, u^*, \psi) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*, u, \psi)$ .

**Remarque 1.5.1** La condition 4 peut être reformulée sous une hypothèse de différentiabilité sous la forme

$$\nabla_u H(t, x^*, u^*, \psi) = 0.$$

## 1.5.2 Equations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Dans cette section, nous présentons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution optimale pour le problème de contrôle (1.19)-(1.20). Celles-ci ont été établies par Bellman [Bell65] et sont résumées dans le Théorème 1.5.2.

**Théorème 1.5.2** [Sont98] *On suppose que  $\Phi$  est continûment différentiable par rapport à  $u$  et  $x$  et que la fonction  $g$  est continûment différentiable par rapport à  $x$ . On suppose que l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$\begin{cases} -V_t(t, x) = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ \Phi(t, x, u) + V_x f(t, x, u) \}, \\ V(t_f, x_f) = g(x(t_f)), \end{cases} \quad (1.23)$$

admet une solution  $V(t, x)$  continûment différentiable sur  $\mathcal{T} \times X$ . Alors,  $(x^*(t), u^*(t))$  est une solution optimale du problème (1.19)- (1.20) si et seulement si

$$\frac{d}{dt}V(t, x^*(t)) + \Phi(t, x^*(t), u^*(t)) = 0. \quad (1.24)$$

Dans ce cas la valeur minimale du critère (1.20) est donnée par :

$$J(u^*) = V(t_0, x_0).$$

## 1.6 Problème de la commande linéaire quadratique

Dans cette partie, on s'intéresse à un cas particulier de la commande optimale connu sous le nom de problème de la commande linéaire quadratique [Bern76]. Nous donnerons deux applications importantes du Théorème 1.5.1 et du Théorème 1.5.2 au problème (1.25)-(1.26) suivant :

Soit  $\Sigma$  un système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.25)$$

On supposera toujours que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , que  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une fonction continue de  $t$ , que  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est continue par morceaux.

Soit  $t_f$  fixé, on définit, sur un horizon fini  $[t_0, t_f]$ , la fonction coût de type quadratique suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)dt, \quad (1.26)$$

où  $x(t_f) \in \mathbb{R}^n$  est fixé et  $K_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique constante. Les matrices  $B$ ,  $Q$  et  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont telles que les dépendances en  $t$  sont continues par morceaux, avec  $Q$  et  $R$  symétriques.

Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des contrôles admissibles, le problème de la commande linéaire quadratique défini par les équations (1.25)-(1.26) consiste à trouver un contrôle  $u^* \in \mathcal{U}$  de façon à ce que la valeur de la fonction coût  $J(u)$  soit minimale.

### 1.6.1 Problème aux deux bouts

Le "Principe du Maximum Pontryaguine" introduit dans la section précédente, appliqué au problème (1.25)-(1.26), nous mène à une loi de commande fonction uniquement du temps. Celle-ci est dite commande en boucle ouverte. Nous obtenons alors la Proposition 1.6.1.

**Proposition 1.6.1** [StHo69] Soit  $(x^*(t), u^*(t))$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  une solution optimale du problème linéaire quadratique (1.25)-(1.26), avec  $R(t) > 0$ , pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ . Alors, il existe un vecteur d'état adjoint différentiable  $\psi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  tel que la fonction hamiltonienne définie par :

$$H(t, x, u, \psi) := \psi^T(t)[A(t)x + B(t)u(t)] + \frac{1}{2}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)], \quad (1.27)$$

satisfait les conditions suivantes :

1.  $\frac{d}{dt}x^* = \nabla_{\psi}H(t, x^*, u^*, \psi)$ ,
2.  $\frac{d}{dt}\psi = -\nabla_x H(t, x^*, u^*, \psi)$ ,
3.  $\psi(t_f) = K_f x(t_f)$ ,
4.  $H(t, x^*, u^*, \psi) = \min_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*, u, \psi)$ .

La condition 4. de la Proposition 1.6.1 permet d'obtenir pour tout  $t \in [t_0, t_f]$

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(t)\psi(t). \quad (1.28)$$

En posant,  $S := BR^{-1}B^T$  nous sommes donc conduits au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} := H \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } \psi(t_f) = K_f x(t_f).$$

Le Principe du Maximum de Pontryaguine remplace donc le calcul de la commande optimale dans le problème de la commande linéaire quadratique (1.25)-(1.26) par la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires avec des conditions aux deux bouts.

### 1.6.2 Equation différentielle du type Riccati

L'application du Théorème 1.5.2 au problème linéaire quadratique (1.25)-(1.26), nous permet d'obtenir l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante :

$$V_t(t, x) + \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] + V_x(Ax + Bu) \right\} = 0. \quad (1.30)$$

Le minimum de l'expression

$$\frac{1}{2} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] + V_x(Ax + Bu)$$

est obtenu pour

$$u^*(t, x) = -R^{-1} B^T V_x.$$

En posant,  $V(t, x) = \frac{1}{2} x^T K(t) x$  on vérifie que la matrice  $K(t)$  satisfait une équation différentielle du type Riccati :

$$\begin{cases} \dot{K} = -A^T K - K A - Q + K S K, \\ K(t_f) = K_f, \end{cases} \quad (1.31)$$

où  $S := B R^{-1} B^T$ .

Nous résumons ce résultat dans le théorème suivant :

**Théorème 1.6.1** [BaOl95] *On considère le problème linéaire quadratique (1.25)-(1.26) sur un horizon fini  $[t_0, t_f]$  avec  $R > 0$ . On suppose que la solution de l'équation différentielle du type Riccati (1.31) existe pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ . Alors, il existe un contrôle optimal du problème linéaire quadratique (1.25)-(1.26). Celui-ci est donné par :*

$$u^*(t, x) = -R^{-1}B^T K(t)x^*, \quad (1.32)$$

où  $x^*$  est la solution de l'équation dynamique

$$\dot{x} = (A - SK(t))x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.33)$$

### 1.6.3 Lemme de Radon, version 1

L'équation différentielle du type Riccati (1.31) a fait l'objet de plusieurs études. Pour plus de détails sur les propriétés de cette équation on se réfère à Wonham [Wonh68], Kalman [Kalm69] et Reid [Reid72].

Parmi ces nombreux résultats, on retiendra une propriété de linéarisation donnée par le lemme de Radon, version 1. Nous verrons dans le chapitre 2, une version 2 de ce lemme pour des systèmes différentiels du type Riccati couplés.

En marge de l'équation différentielle du type Riccati (1.31), on étudiera le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = H(t) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

avec les conditions finales de la forme :

$$\begin{bmatrix} X(t_f) \\ Y(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ K_f \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Le résultat suivant montrera l'existence de la solution de l'équation différentielle du type Riccati (1.31) tant que la matrice  $X(t)$  définie par (1.34) est inversible sur  $[t_0, t_f]$ .

**Lemme 1.6.1** [Reid72](Lemme de Radon, version 1) Soit  $\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) \end{bmatrix}^T$  la solution du système différentiel linéaire (1.34)-(1.35). On suppose qu'il existe un intervalle  $J \subset [t_0, t_f]$  tel que matrice  $X(t)$  est inversible pour tout  $t \in J$ . Alors, l'équation différentielle du type Riccati (1.31) admet une solution définie pour tout  $t \in J$ . Celle-ci est donnée par :

$$K(t) = Y(t)X^{-1}(t). \quad (1.36)$$

Le lemme de Radon, version 1 énoncé ci dessus possède de nombreux avantages :

- Il établit les conditions d'existence de la solution de l'équation différentielle du type Riccati (1.31). Les propriétés de ces équations sont discutées en détail dans Reid [Reid72].
- Lorsque les coefficients de l'équation différentielle du type Riccati (1.31) sont constants, on peut étudier le comportement asymptotique de la solution de cette équation, voir les travaux de Kalman [Kalm69].
- Dans le cas où l'équation (1.31) est à coefficients constants, on peut déterminer les solutions de l'équation algébrique correspondante à partir des sous espaces invariants de la matrice  $H$ . Les solutions de l'équation algébrique du type Riccati obtenues à l'aide de cette approche sont largement étudiées dans Shayman [Shay85] et [Shay86].
- La matrice  $H$  définie dans ce lemme est hamiltonienne. Les propriétés de celle-ci ont servi à construire de nombreux algorithmes de résolution. On se réfère aux travaux de Potter [Pott66], Kucera [Kuce72], Kenney et Leipnik [KeLe85], Laub [Laub79], Arnold et Laub [ArLa84] et Jodar et Ponsoda [JoPo95] pour plus de détails.

#### 1.6.4 Equation algébrique du type Riccati

Pour finir les rappels sur la commande linéaire quadratique, nous proposons d'étudier ce problème lorsque le temps d'optimisation devient infini.

Soit  $\Sigma$  un système d'équations différentielles à coefficients constants

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.37)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ . On définit sur un horizon infini, une fonction coût purement quadratique

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt, \quad (1.38)$$

où  $x(t_f) \in \mathbb{R}^n$  est fixé,  $K_f$ ,  $Q$  et  $R$  sont des matrices constantes symétriques d'ordre  $n \times n$  et à coefficients réels avec  $R > 0$ .

Sur l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$ , on s'intéressera à l'existence d'un contrôle  $u^* \in \mathcal{U}$  de façon à ce que la valeur de la fonction coût  $J(u)$  soit minimale.

Les résultats du comportement asymptotique d'un problème linéaire quadratique à horizon infini ont été établis par plusieurs auteurs. Les principaux résultats sont dus à Kalman [Kalm63] et [Kalm69]. Ces résultats sont donnés dans [BaOl95] et sont résumés dans le Théorème 1.6.2.

**Théorème 1.6.2** [BaOl95] *On suppose que la paire  $(A, B)$  est stabilisable et que la paire  $(\sqrt{Q}, A)$  est détectable. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *Pour tout  $K_f \geq 0$ ,  $K(t) \rightarrow K$  lorsque  $t_f \rightarrow \infty$ , où  $K$  est l'unique solution semi-définie positive de l'équation algébrique du type Riccati*

$$KA + A^T K - KSK + Q = 0, \quad (1.39)$$

où  $S := B^T R^{-1} B$ , avec  $R > 0$ .

2. *La matrice  $A - SK$  est asymptotiquement stable.*
3. *La valeur minimale de la fonction coût (1.38) est égale à  $x_0^T K x_0$ .*
4. *Le contrôle optimal du problème (1.25)-(1.26) est donné par :*

$$u^*(t, x) = -R^{-1}B^T K x^*, \quad (1.40)$$

où  $x^*$  est la solution de l'équation dynamique

$$\dot{x} = (A - SK)x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.41)$$

5. Si la paire  $(\sqrt{Q}, A)$  est observable, la solution de l'équation algébrique du type Riccati est définie positive.

La programmation dynamique permet d'écrire un contrôle optimal du problème linéaire quadratique (1.25)-(1.26) en fonction du vecteur d'état et de la solution d'une équation différentielle du type Riccati. Le Théorème 1.6.2 montre que :

- la limite de la solution de l'équation (1.31) est indépendante du temps lorsque celui-ci tend vers l'infini. Cette limite permet de construire un système dynamique stable qui minimise la fonction coût  $J$  à horizon infini ;
- la valeur minimale du critère  $J$  dépend uniquement de la valeur initiale  $x_0$  et de la matrice  $K$  ;
- la solution de l'équation algébrique du type Riccati (1.39) est semi-définie positive.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les principes d'optimalité les plus utilisés en théorie des jeux différentiels sans coalitions. Parmi ces principes, on retiendra la stratégie de Nash, la stratégie du maxmin et enfin celle du point-selle. Dans le cas d'un jeu différentiel à un seul joueur, nous avons présenté les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la solution optimale. Les principaux résultats établis dans la littérature ont été présentés sous forme de théorèmes et de propositions. Dans le cas d'un jeu différentiel linéaire quadratique à plusieurs joueurs les démarches à suivre sont similaires à celles de la commande linéaire quadratique. Nous obtenons alors des systèmes différentiels ou algébriques du type Riccati. Nous présentons ces résultats dans les chapitres suivants.

# Chapitre 2

## Systeme différentiel de Nash-Riccati en boucle ouverte

### 2.1 Introduction

L'étude de l'équilibre de Nash en boucle ouverte a fait l'objet de plusieurs travaux dans la littérature. Dans ce cadre, on renvoie aux travaux de Foley et Schmitendorf [FoSc71], Lukes et Russel [LuRu71] et Eisele [Eise82]. Les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un équilibre de Nash ont été établies pour la première fois par Star et Ho [StHo69]. Les problèmes de non-existence et de non-unicité de cet équilibre ont été étudiés par Lukes et Russel [LuRu71] puis par Eisele [Eise82] dans un espace de Hilbert de dimension infinie. Dans le cas de la dimension finie, ces problèmes ont été traités d'une façon plus détaillée par Engwerda [Engw98]. L'application des concepts fondamentaux de la stratégie de Nash dans un "J.D.L.Q" à plusieurs joueurs, en boucle ouverte mène à un problème aux deux bouts "PDB". Pour le cas des systèmes différentiels linéaires avec des critères quadratiques, un ensemble d'équations du type Riccati couplées doivent être résolues. Ceci constitue le principal obstacle qu'il faut franchir dans la détermination des stratégies des joueurs. Ainsi pour la recherche d'une paire de solutions d'un système différentiel du type Riccati couplé nous distinguons deux approches. La première est basée sur la recherche d'une solution analytique soit par un procédé de linéarisation, soit par un procédé

de changement de variables. Dans le cas où des coefficients des critères sont proportionnels, Abou-Kandil [Abou86] a introduit une méthode se basant sur la propriété du spectre de la matrice caractérisant l'équilibre de Nash. Dans un cas plus général, Simman et Cruz [SiCr73] ont proposé des changements de variables successifs menant à une paire de solutions analytiques. La deuxième approche est basée sur l'intégration numérique du système d'équations à résoudre. Celle-ci est proposée dans Jodar et Abou-Kandil [JoAb88] et Jodar et Navarro [JoNa91]. Bien qu'il existe deux approches pour résoudre les systèmes différentiels du type Riccati couplés, l'étude des conditions d'existence d'une paire de solutions a rarement été traitée. Il existe à notre connaissance, deux résultats traitant de ce problème : le lemme de Radon, version 2, établi dans Abou-Kandil et al. [AFJ93] et la condition d'inversibilité établie par Engwerda [Engw98].

En 1986, Abou-Kandil [Abou86] a proposé une méthode permettant la recherche d'une paire de solutions analytiques du système différentiel du type Riccati couplé dans le cas où certains coefficients sont proportionnels. Ce résultat est obtenu en étudiant le spectre de la matrice traduisant les conditions nécessaires à satisfaire par la stratégie de Nash. Si la recherche d'une paire de solutions analytiques de cette classe de jeux a entièrement été résolue, cette question reste entièrement posée pour une plus grande classe de jeux.

Dans ce chapitre, nous proposons une généralisation de la méthode introduite par Abou-Kandil [Abou86], en considérant la matrice d'un jeu de Nash dans différents changements de bases. L'intérêt d'opérer ces changements de bases sera d'obtenir une forme plus simple du système différentiel du type Riccati couplé. Nous examinons les propriétés d'une paire de solutions en fournissant l'expression analytique de celle-ci. Enfin, nous donnons quelques applications de la méthode proposée à titre d'exemples.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans le paragraphe 2, nous introduisons un "J.D.L.Q" à deux joueurs. Pour la formulation de la solution optimale nous opterons pour la stratégie de Nash ayant une structure d'information en boucle ouverte. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de cette stratégie seront rappelées sous forme de théorèmes et de propositions. Nous obtenons ainsi un système différentiel du type Riccati couplé. Dans le paragraphe 3, nous donnons le lemme de Radon, version 2. Celui-ci permet d'obtenir une forme linéaire des systèmes différentiels de type Riccati couplé. Dans le paragraphe 4, nous aborderons les propriétés des solutions équivalentes pour des systèmes différentiels couplés linéaires. A l'aide du lemme de Radon, version 2 cette équivalence sera étendue aux systèmes différentiels du type Riccati couplé. Dans le paragraphe 4, nous présentons des applications pour la construction des solutions équivalentes. Dans le paragraphe 5, nous présentons un exemple dans le cas scalaire. Le paragraphe 6, est dédié aux conclusions et aux perspectives.

## 2.2 Présentation du problème

Dans ce paragraphe nous allons considérer un "J.D.L.Q" à deux joueurs défini sur un horizon fini. Pour la formulation de la solution optimale, nous adopterons la notion de l'équilibre de Nash ayant une structure d'information en boucle ouverte [StHo69]. Nous donnons les différentes hypothèses concernant l'état du système, l'ensemble des stratégies admissibles et enfin celles des critères des joueurs.

Soit  $\Gamma_2$  un jeu différentiel linéaire quadratique défini par :

$$\dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2u_2, \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est l'état initial du système,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  est la stratégie du  $i$ -ème joueur ( $i = 1, 2$ ); les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$  ( $i = 1, 2$ ), pour  $n, m_1$  et  $m_2 \in \mathbb{N}^*$ .

Les stratégies  $u_i$ , ( $i = 1, 2$ ) du  $i$ -ème joueur seront identifiées à des fonctions du type  $u_i(t) := F_i(t)x_0$  où  $F_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ , ( $i = 1, 2$ ).

Ainsi le choix d'une stratégie admissible (par le  $i$ -ème joueur) se ramène au choix d'une matrice  $F_i(t)$  avec des éléments continus en  $t \in [0, t_f]$ .

L'ensemble des stratégies admissibles du  $i$ -ème joueur sera désigné par  $\mathcal{U}_i$  :

$$\mathcal{U}_i = \{u_i(t) \mid u_i(t) = F_i(t)x_0\}, \quad (i = 1, 2). \quad (2.2)$$

Le but du  $i$ -ème joueur dans le jeu considéré ici, consiste, par un choix judicieux de sa stratégie  $u_i \in \mathcal{U}_i$  à atteindre la plus petite valeur de sa fonction coût. Celle-ci est représentée par une fonction quadratique définie sur l'ensemble des solutions  $x(t)$  du système différentiel (2.1) et est donnée par :

$$\begin{cases} J_1(u_1, u_2) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_{1f}x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{x^T Q_1 x + u_1^T R_{11} u_1 + u_2^T R_{12} u_2\} dt, \\ J_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_{2f}x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{x^T Q_2 x + u_1^T R_{21} u_1 + u_2^T R_{22} u_2\} dt, \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $x(t_f) \in \mathbb{R}^n$  est fixé,  $K_{if}$ ,  $Q_i$  et  $R_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 2$  sont des matrices constantes et symétriques d'ordre  $n \times n$  et à coefficients réels.

### Définition 2.2.1 (équilibre de Nash)

Une situation  $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t)) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  sera dite équilibre de **Nash en boucle ouverte** du jeu différentiel  $\Gamma_2$  si les inégalités suivantes :

$$J_1(u_1^*(t), u_2^*(t)) \leq J_1(u_1(t), u_2^*(t)), \quad \forall (u_1, u_2^*) \in \mathcal{U}, \quad (2.4)$$

$$J_2(u_1^*(t), u_2^*(t)) \leq J_2(u_1^*(t), u_2(t)), \quad \forall (u_1^*, u_2) \in \mathcal{U}, \quad (2.5)$$

sont satisfaites.

## 2.2.1 Problème aux deux bouts

Les conditions nécessaires pour l'existence d'une situation d'équilibre de Nash en boucle ouverte pour le jeu différentiel  $\Gamma_2$  s'obtiennent directement en appliquant le Principe du Maximum de Pontryaguine au problème (2.1)-(2.3). Ces conditions sont données dans Starr et Ho [StHo69] et sont résumées dans la Proposition 2.2.1.

**Proposition 2.2.1** [StHo69] Soit  $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ ,  $t \in [0, t_f]$  une solution optimale du jeu différentiel  $\Gamma_2$  défini par les équations (2.1)-(2.3) avec  $R_{ii} > 0$ , ( $i = 1, 2$ ). Alors, il existe deux vecteurs d'état adjoints  $\psi_i(t)$ , différentiables pour tout  $t \in [0, t_f]$ , ( $i = 1, 2$ ) tels que les fonctions hamiltoniennes définies par :

$$H_i(t, x, u_1, u_2, \psi_i) := \psi_i^T(t)[Ax + \sum_{i=1}^2 B_i u_i(t)] + \frac{1}{2}[x^T Q_i x + \sum_{j=1}^2 u_j^T R_{ij} u_j], \quad (2.6)$$

satisfont les conditions suivantes :

1.  $\frac{d}{dt}x^* = \nabla_{\psi_i} H_i(t, x^*, u_1^*, u_2^*, \psi_i)$ ,
2.  $\frac{d}{dt}\psi_i = -\nabla_x H_i(t, x^*, u_1^*, u_2^*, \psi_i)$ ,
3.  $\psi_i(t_f) = K_{if}x(t_f)$ ,
4.  $H_1(t, x^*, u_1^*, u_2^*, \psi_1) = \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} H_1(t, x^*, u_1, u_2^*, \psi_1)$ .
5.  $H_2(t, x^*, u_1^*, u_2^*, \psi_2) = \min_{u_2 \in \mathcal{U}_2} H_2(t, x^*, u_1^*, u_2, \psi_2)$ .

Les conditions 4 et 5. de la Proposition 2.2.1 permettent d'obtenir, pour tout  $t \in [0, t_f]$ ,

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T(t) \psi_i(t), \quad (i = 1, 2). \quad (2.7)$$

En posant,  $S_{ii} := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$ , ( $i = 1, 2$ ) nous sommes donc conduits au système différentiel suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S_{11} & -S_{22} \\ -Q_1 & -A^T & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} := H_{nash} \begin{bmatrix} x \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

avec les conditions aux deux bouts suivantes :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \psi_i(t_f) = K_{if}x(t_f), \quad (i = 1, 2). \quad (2.9)$$

La Proposition 2.2.1 nous permet de calculer les stratégies de Nash des joueurs pour le jeu différentiel  $\Gamma_2$  à partir du système différentiel linéaire aux deux bouts (2.8)-(2.9).

### 2.2.2 Système différentiel du type Riccati couplé

Les conditions nécessaires à l'existence des stratégies de Nash pour le jeu différentiel  $\Gamma_2$  s'obtiennent en supposant que les vecteurs d'état adjoints  $\psi_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) sont des fonctions linéaires du vecteur d'état  $x(t)$ .

En considérant le problème aux deux bouts (2.8)-(2.9) et en posant

$$\psi_i(t) = K_i(t)x(t), \quad (i = 1, 2), \quad (2.10)$$

on vérifie que les matrices  $K_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) satisfont un système différentiel du type Riccati couplé :

$$\dot{K}_1 = -A^T K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 S_{11} K_1 + K_1 S_{22} K_2, \quad (2.11)$$

$$\dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A - Q_2 + K_2 S_{22} K_2 + K_2 S_{11} K_1, \quad (2.12)$$

où

$$S_{11} := B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \quad \text{et} \quad S_{22} := B_2 R_{22}^{-1} B_2^T,$$

avec les conditions finales :

$$K_1(t_f) = K_{1f} \quad \text{et} \quad K_2(t_f) = K_{2f}.$$

Les conditions suffisantes pour l'existence d'une situation d'équilibre de Nash du jeu différentiel  $\Gamma_2$  sont données dans Starr et Ho [StHo69]. Celles-ci sont résumées dans le Théorème 2.2.1.

**Théorème 2.2.1** [BaOl95] *On considère le jeu différentiel  $\Gamma_2$  défini par les équations (2.1)-(2.3) avec  $Q_i \geq 0$  et  $R_{ii} > 0$ , ( $i = 1, 2$ ). On suppose que la paire de solutions  $(K_1(t), K_2(t))$  du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12) existe pour tout  $t \in [0, t_f]$ . Alors, il existe un composé de stratégies de Nash pour le jeu différentiel (2.1)-(2.3). Celui-ci est donné par :*

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) \zeta(t, 0) x_0, \quad (i = 1, 2), \quad (2.13)$$

où  $\zeta(t, 0)$  est la solution de l'équation dynamique

$$\dot{\zeta}(t, 0) = (A - S_{11}K_1(t) - S_{22}K_2(t))\zeta(t, 0), \quad \zeta(0, 0) = I_n. \quad (2.14)$$

**Remarque 2.2.1** *La matrice  $\zeta(t, 0)$  est introduite pour éviter l'apparition du vecteur d'état  $x(t)$  dans les stratégies (2.13) ; ainsi la structure d'information en boucle ouverte dans le jeu différentiel  $\Gamma_2$  est respectée.*

### 2.2.3 Unicité de la stratégie de Nash

L'unicité de la stratégie de Nash pour la classe de "J.D.L.Q" dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension infinie a fait l'objet des travaux de Lukes et Russel [LuRu71] et Eisele [Eise82].

Dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension finie, Engwerda [Engw98] a montré une équivalence entre l'unicité de la stratégie de Nash et l'unicité de la solution du problème aux deux bouts (2.8)-(2.9). En effet, un calcul élémentaire effectué sur l'expression du système (2.8)-(2.9) montre que la solution de celui-ci est unique si et seulement si la matrice  $H(t_f)$  définie par :

$$H(t_f) = W_{11}(t_f) + W_{12}(t_f)K_{1f} + W_{13}(t_f)K_{2f}, \quad (2.15)$$

où

$$W(t_f) = (W_{ij}(t_f)) \{i, j = 1, 2, 3 ; W_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}\} = \exp(-H_{nash}(t_f)),$$

est inversible. Nous résumons cette équivalence dans la Proposition 2.2.2.

**Proposition 2.2.2** [Engw98] *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le jeu différentiel  $\Gamma_2$  possède un unique équilibre de Nash en boucle ouverte.*
2. *La matrice  $H(t_f)$  définie par l'équation (2.15) est inversible.*

## 2.3 Lemme de Radon, version 2

Dans ce paragraphe, nous présentons une extension du lemme de Radon, version 1 à un système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12). Ce résultat a été établi dans Abou-Kandil et al. [AFJ93] et permet de construire une paire de solutions des équations (2.11)-(2.12) à partir d'un système différentiel linéaire couplé.

En marge du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12), on étudiera le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{bmatrix} = H_{nash} \begin{bmatrix} X \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & -S_{11} & -S_{22} \\ -Q_1 & -A^T & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

avec les conditions finales de la forme :

$$\begin{bmatrix} X(t_f) \\ Y_1(t_f) \\ Y_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ K_{1f} \\ K_{2f} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Le lemme suivant permet d'établir l'existence d'une paire de solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12) tant que la matrice  $X(t)$  définie par (2.16) est inversible sur  $[0, t_f]$ .

**Lemme 2.3.1** [AFJ93] *(Lemme de Radon, version 2)*

*Soit  $\begin{bmatrix} X(t) & Y_1(t) & Y_2(t) \end{bmatrix}^T$  la solution du système différentiel linéaire (2.16)-(2.17). On suppose qu'il existe un intervalle  $J \subset [0, t_f]$  tel que la matrice  $X(t)$  est inversible*

pour tout  $t \in J$ . Alors, le système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12) admet une paire de solutions  $(K_1(t), K_2(t))$  définie pour tout  $t \in J$ . Celle-ci est donnée par

$$K_i(t) = Y_i(t)X^{-1}(t), \quad (i = 1, 2). \quad (2.18)$$

Le lemme de Radon, version 2 énoncé ci-dessus possède lui aussi deux grands avantages :

- il établit les conditions suffisantes d'existence d'une paire de solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12) ;
- il permet de déterminer l'ensemble des solutions du système algébrique correspondant à partir des sous espaces invariants de la matrice  $H_{nash}$ .

A l'inverse du lemme de Radon, version 1 établi dans le chapitre 1, la matrice  $H_{nash}$  définie par l'équation (2.16) n'est pas hamiltonienne. Cette propriété qui fait défaut ici, rend difficile la construction d'algorithmes numériques de résolution. De même le comportement asymptotique de ces systèmes à horizon infini demeure un problème non résolu à ce jour.

## 2.4 Solutions équivalentes

La notion de solutions équivalentes consiste à rechercher la solution du système différentiel linéaire couplé (2.16)-(2.17) en considérant des changements de base pour la matrice  $H_{nash}$ . Le but étant bien entendu d'obtenir une séparation du spectre de celle-ci afin de simplifier la résolution du système différentiel linéaire couplé (2.16)-(2.17). Lorsque la matrice  $X(t)$  est inversible pour tout  $t \in [0, t_f]$ , le lemme de Radon, version 2 permet d'étendre cette notion d'équivalence à des solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12).

Dans le cas  $Q_2 = \alpha Q_1$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ , Abou-Kandil [Abou86] a proposé une méthode permettant une séparation du spectre de la matrice  $H_{nash}$ . Celle-ci est construite à partir des propriétés des valeurs propres de la matrice  $H_{nash}$ . Il obtient ainsi

$$\Lambda(H_{nash}) = \Lambda(-A) \cup \Lambda(H_\alpha),$$

où

$$H_\alpha := \begin{bmatrix} A & -(S_{11} + \alpha S_{22}) \\ -Q_1 & -A^T \end{bmatrix}.$$

Dans ce paragraphe, nous proposons de généraliser la méthode introduite par Abou-Kandil [Abou86] en considérant une plus grande classe de jeux différentiels linéaires quadratiques. Les matrices de passage considérées ici sont construites à partir de matrices symplectiques et de façon à réaliser une séparation du spectre de la matrice  $H_{nash}$ . Nous présentons en détail une méthode pour la construction d'une matrice de changement de base. A partir de celle-ci, nous allons construire des systèmes équivalents dans le cas des systèmes différentiels linéaires couplés et dans le cas des systèmes différentiels du type Riccati couplé.

### 2.4.1 Système différentiel linéaire couplé

Soit  $H_{nash} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  la matrice de l'équilibre de Nash définie par le système différentiel linéaire couplé (2.16)-(2.17). Soit  $T \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ , une matrice régulière telle qu'il existe  $\hat{H}_{nash} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  satisfaisant

$$\hat{H}_{nash} = T^{-1}H_{nash}T. \quad (2.19)$$

Une solution équivalente du système différentiel linéaire couplé (2.16)-(2.17) peut être obtenue en posant

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{Y}}_1 \\ \dot{\hat{Y}}_2 \end{bmatrix} = \hat{H}_{nash} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

avec les conditions finales de la forme :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(t_f) \\ \hat{Y}_1(t_f) \\ \hat{Y}_2(t_f) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ K_{1f} \\ K_{2f} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{K}_{1f} \\ \hat{K}_{2f} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

L'unicité de la solution des deux problèmes de Cauchy (2.16)-(2.17) et (2.20)-(2.21) permet d'établir une équivalence entre ces deux solutions. Celle-ci est présentée dans le Lemme 2.4.1.

**Lemme 2.4.1** *Soient*

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{Y}_1(t) \\ \hat{Y}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

*les solutions des systèmes différentiels linéaires (2.16)-(2.17) et (2.20)-(2.21). Alors, pour tout  $t \in [0, t_f]$*

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{Y}_1(t) \\ \hat{Y}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

En d'autres termes, les solutions des systèmes différentiels linéaires couplés (2.16)-(2.17) et (2.20)-(2.21) se déduisent les unes des autres par la transformation  $T$ . La définition qui va suivre formalise cette relation.

**Définition 2.4.1** *(solutions équivalentes)*

*On dit que deux solutions des systèmes différentiels linéaires couplés (2.16)-(2.17) et (2.20)-(2.21) sont **équivalentes** si, elles satisfont la relation (2.23). Dans ce cas les deux systèmes différentiels linéaires couplés (2.16)-(2.17) et (2.20)-(2.21) sont également dits **équivalents**.*

Par la suite, nous présentons en détail une méthode de recherche de solutions équivalentes pour les systèmes différentiels linéaires couplés (2.16)-(2.17) et (2.20)-(2.21).

Soit  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  une matrice symplectique telle que :

$$M = \begin{bmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} T_{33}^T & -T_{23}^T \\ -T_{32}^T & T_{22}^T \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

où

$$T_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad 2 \leq i \leq j \leq 3.$$

A l'aide de la matrice  $M$ , nous allons définir une matrice de passage  $T$  de façon à ce que :

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & T_{22} & T_{23} \\ 0_n & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & T_{33}^T & -T_{23}^T \\ 0_n & -T_{32}^T & T_{22}^T \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Un calcul élémentaire de la matrice  $\hat{H}_{nash}$  montre que :

$$\hat{H}_{nash} = T^{-1}H_{nash}T := \begin{bmatrix} A & -\hat{S}_1 & -\hat{S}_2 \\ -\hat{Q}_1 & -\hat{A}_{22} & -\hat{A}_{23} \\ -\hat{Q}_2 & -\hat{A}_{32} & -\hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_1 = S_{11}T_{22} + S_{22}T_{32}, \\ \hat{S}_2 = S_{11}T_{23} + S_{22}T_{33}, \\ \hat{Q}_1 = T_{33}^T Q_1 - T_{23}^T Q_2, \\ \hat{A}_{22} = T_{33}^T A^T T_{22} - T_{23}^T A^T T_{32}, \\ \hat{A}_{23} = T_{33}^T A^T T_{23} - T_{23}^T A^T T_{33}, \\ \hat{Q}_2 = -T_{32}^T Q_1 + T_{22}^T Q_2, \\ \hat{A}_{32} = -T_{32}^T A^T T_{22} + T_{22}^T A^T T_{32}, \\ \hat{A}_{33} = -T_{32}^T A^T T_{23} + T_{22}^T A^T T_{33}. \end{array} \right.$$

A partir des équations ci-dessus, nous pouvons obtenir une forme creuse de la matrice  $\hat{H}_{nash}$  si, l'on impose aux coefficients de la matrice  $M$ , définie par l'équation (2.24) de satisfaire le système d'équations algébriques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}_2 = -T_{32}^T Q_1 + T_{22}^T Q_2 = 0_n, \\ \hat{A}_{23} = T_{33}^T A^T T_{23} - T_{23}^T A^T T_{33} = 0_n, \\ \hat{A}_{32} = -T_{32}^T A^T T_{22} + T_{22}^T A^T T_{32} = 0_n. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Dans le cas où les coefficients de la matrice  $T$  satisfont l'équation (2.27), le spectre de la matrice  $H_{nash}$  est donné par :

$$\Lambda(H_{nash}) = \Lambda(-\hat{A}_{33}) \cup \Lambda(H_M),$$

où

$$H_M = \begin{bmatrix} A & -\hat{S}_1 \\ -\hat{Q}_1 & -\hat{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi un système différentiel linéaire équivalent au système différentiel (2.16)-(2.17) défini par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{Y}}_1 \\ \dot{\hat{Y}}_2 \end{bmatrix} = \hat{H}_{nash} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & -\hat{S}_1 & -\hat{S}_2 \\ -\hat{Q}_1 & -\hat{A}_{22} & 0_n \\ 0_n & 0_n & -\hat{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

avec les conditions finales de la forme :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(t_f) \\ \hat{Y}_1(t_f) \\ \hat{Y}_2(t_f) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ K_{1f} \\ K_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ T_{33}^T K_{1f} - T_{23}^T K_{2f} \\ -T_{32}^T K_{1f} + T_{22}^T K_{2f} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Nous résumons ces résultats dans la Proposition 2.4.1.

**Proposition 2.4.1** *Tout système différentiel linéaire couplé défini par les équations (2.16)-(2.17) et satisfaisant la condition (2.27) est équivalent au système différentiel linéaire défini par les équations (2.28)-(2.29).*

Dans ce cas, nous obtenons également une équivalence des solutions des systèmes différentiels linéaires couplés (2.16)-(2.17) et (2.28)-(2.29). Cette équivalence est résumée dans le Corollaire 2.4.1.

**Corollaire 2.4.1** *Toute solution  $[X(t) \ Y_1(t) \ Y_2(t)]^T$  du système différentiel linéaire définie par les équations (2.16)-(2.17) et satisfaisant la condition (2.27) est équivalente à la solution  $[\hat{X}(t) \ \hat{Y}_1(t) \ \hat{Y}_2(t)]^T$  du système différentiel linéaire couplé défini par les équations (2.28)-(2.29).*

## 2.4.2 Système différentiel du type Riccati couplé

Nous présentons dans ce paragraphe une méthode pour la recherche d'une paire de solutions équivalentes pour le système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12). Pour ce faire nous utiliserons les solutions équivalentes déjà établies pour les systèmes différentiels linéaires couplés (2.16)-(2.17) et (2.28)-(2.29) ainsi que le lemme de Radon, version 2.

On considère le système différentiel (2.28)-(2.29), posons

$$\begin{cases} \hat{K}_{1f} = T_{33}^T K_{1f} - T_{23}^T K_{2f}, \\ \hat{K}_{2f} = -T_{32}^T K_{1f} + T_{22}^T K_{2f}. \end{cases} \quad (2.30)$$

On peut réécrire le système différentiel (2.28)-(2.29) sous la forme :

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} - \hat{S}_1\hat{Y}_1 - \hat{S}_2\hat{Y}_2, \quad (2.31)$$

$$\dot{\hat{Y}}_1 = -\hat{Q}_1\hat{X} - \hat{A}_{22}\hat{Y}_1, \quad (2.32)$$

$$\dot{\hat{Y}}_2 = -\hat{A}_{33}\hat{Y}_2, \quad (2.33)$$

avec les conditions finales suivantes :

$$\begin{cases} \hat{X}(t_f) = I_n, \\ \hat{Y}_1(t_f) = \hat{K}_{1f}, \\ \hat{Y}_2(t_f) = \hat{K}_{2f}. \end{cases} \quad (2.34)$$

La résolution de l'équation différentielle (2.33) permet d'obtenir :

$$\hat{Y}_2(t) = \hat{K}_{2f} e^{-\hat{A}_{33}(t-t_f)}. \quad (2.35)$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation (2.31), nous obtenons alors le système différentiel non homogène d'ordre  $2n$  défini par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{Y}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\hat{S}_1 \\ -\hat{Q}_1 & -\hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{S}_2 \hat{K}_{2f} e^{-\hat{A}_{33}(t-t_f)} \\ 0_n \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

avec les conditions finales de la forme :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(t_f) \\ \hat{Y}_1(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ \hat{K}_{1f} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Lorsque la matrice  $X(t)$  définie par le système différentiel linéaire couplé (2.16)-(2.17) est inversible pour tout  $t \in [0, t_f]$ , le lemme de Radon, version 2 permet de construire une paire de solutions  $(K_1(t), K_2(t))$  du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12). Cette paire de solutions est définie pour tout  $t \in [0, t_f]$  par :

$$K_i(t) = Y_i(t)X^{-1}(t), \quad (i = 1, 2). \quad (2.38)$$

De même que, lorsque la matrice  $\hat{X}(t)$  définie par le système différentiel linéaire (2.28)-(2.29) est inversible pour tout  $t \in [0, t_f]$ , ce même lemme permet de construire une paire de solutions  $(\hat{K}_1(t), \hat{K}_2(t))$ . Celle-ci est définie pour tout  $t \in [0, t_f]$  par :

$$\hat{K}_i(t) = \hat{Y}_i(t)\hat{X}^{-1}(t), \quad (i = 1, 2). \quad (2.39)$$

Le calcul de l'expression (2.39) montre que la paire de matrices  $(\hat{K}_1(t), \hat{K}_2(t))$  satisfait un système différentiel du type Riccati défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_1 = -\hat{K}_1 A - \hat{A}_{22} \hat{K}_1 + \hat{K}_1 \hat{S}_1 \hat{K}_1 + \hat{K}_1 \hat{S}_2 \hat{K}_2 - \hat{Q}_1, \\ \hat{K}_1(t_f) = \hat{K}_{1f}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Et

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_2 = -\hat{A}_{33} \hat{K}_2 - \hat{K}_2 A + \hat{K}_2 \hat{S}_1 \hat{K}_1 + \hat{K}_2 \hat{S}_2 \hat{K}_2, \\ \hat{K}_2(t_f) = \hat{K}_{2f}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Nous obtenons ainsi un résultat sur les conditions nécessaires et suffisantes d'exis-

tence pour une paire de solutions  $(K_1(t), K_2(t))$  du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12). Ce résultat est donné dans la Proposition 2.4.2.

**Proposition 2.4.2** *La paire de solutions  $(K_1(t), K_2(t))$  du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12) existe pour tout  $t \in [0, t_f]$  si et seulement si, la paire de solutions  $(\hat{K}_1(t), \hat{K}_2(t))$  des équations différentielles (2.40)-(2.41) existe pour tout  $t \in [0, t_f]$ . Cette paire de solutions est donnée par :*

$$\begin{cases} K_1(t) = T_{22}\hat{K}_1(t) + T_{23}\hat{K}_2(t) \\ K_2(t) = T_{32}\hat{K}_1(t) + T_{33}\hat{K}_2(t). \end{cases} \quad (2.42)$$

La Proposition 2.4.2 présente de nombreux avantages :

1. elle établit les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la paire de solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12). Celles-ci sont équivalentes aux conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la paire de solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.40)-(2.41) ;
2. elle caractérise la propriété de non-symétrie de la paire de solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12) ;

3. l'expression (2.42) donne une forme analytique de la paire de solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.11)-(2.12).

Enfin, on notera que la condition relative à la matrice  $T$  définie par l'équation (2.25) peut être remplacée par la condition suivante :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0_n & 0_n \\ 0_n & T_{22} & T_{23} \\ 0_n & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11}^{-1} & 0_n & 0_n \\ 0_n & T_{33}^T & -T_{23}^T \\ 0_n & -T_{32}^T & T_{22}^T \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

La condition (2.27) peut également être remplacée par :

$$\begin{cases} -T_{32}^T Q_1 + T_{22}^T Q_2 = T_{33}^T Q_1 - T_{23}^T Q_2, \\ T_{33}^T A^T T_{23} - T_{23}^T A^T T_{33} = 0_n, \\ -T_{32}^T A^T T_{22} + T_{22}^T A^T T_{32} = 0_n. \end{cases} \quad (2.44)$$

## 2.5 Applications

Dans ce paragraphe, nous donnons certaines applications pour la recherche de solutions équivalentes. A titre d'exemples nous proposons de retrouver les résultats établis par Abou-Kandil [Abou86] par notre approche.

### 2.5.1 Système du type Riccati couplé dans le cas général

Nous considérons la classe de jeux différentiels linéaires quadratiques définie par (2.1)-(2.3). Dans le cas où  $Q_2 = \alpha Q_1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la solution du système (2.27) peut être obtenue au moyen des vecteurs propres de la matrice  $H_{nash}$ .

On considère le système différentiel du type Riccati couplé (2.16)-(2.17) défini par :

$$\dot{K}_1 = -A^T K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 S_{11} K_1 + K_1 S_{22} K_2, \quad (2.45)$$

$$\dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A - \alpha Q_1 + K_2 S_{22} K_2 + K_2 S_{11} K_1, \quad (2.46)$$

avec les conditions finales :

$$K_1(t_f) = K_{1f} \quad \text{et} \quad K_2(t_f) = K_{2f}.$$

Posons

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & \alpha I_n & I_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Les coefficients des matrices  $T$  et  $T^{-1}$  définies ci-dessus vérifient le système d'équations (2.27). Nous obtenons alors la matrice  $\hat{H}_{nash}$  définie par :

$$\hat{H}_{nash} = \begin{bmatrix} A & -(S_{11} + \alpha S_{22}) & -S_{22} \\ -Q_1 & -A^T & 0_n \\ 0_n & 0_n & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

La Proposition 2.4.2 permet de construire les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_1 = -A^T \hat{K}_1 - \hat{K}_1 A + \hat{K}_1 (S_{11} + \alpha S_{22}) \hat{K}_1 + \hat{K}_1 S_{22} \hat{K}_2 - Q_1, \\ \hat{K}_1(t_f) = \hat{K}_{1f}. \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_2 = -A^T \hat{K}_2 - \hat{K}_2 A + \hat{K}_2 (S_{11} + \alpha S_{22}) \hat{K}_1 + \hat{K}_2 S_{22} \hat{K}_2, \\ \hat{K}_2(t_f) = \hat{K}_{2f}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une paire de solutions du système différentiel du type Riccati couplé (2.45)-(2.46) sont résumées dans le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.1** *Le système différentiel du type Riccati couplé (2.45)-(2.46) admet une paire de solutions  $(K_1(t), K_2(t))$  pour tout  $t \in [0, t_f]$  si et seulement si la paire de solutions  $(\hat{K}_1(t), \hat{K}_2(t))$  des équations différentielles (2.49)-(2.50) existe pour tout  $t \in [0, t_f]$ . Cette paire de solutions est donnée par :*

$$\begin{cases} K_1(t) = \hat{K}_1(t), \\ K_2(t) = \alpha \hat{K}_1(t) + \hat{K}_2(t). \end{cases} \quad (2.51)$$

### 2.5.2 Système du type Riccati couplé d'un point-selle

La stratégie du point selle est un cas particulier du jeu différentiel linéaire quadratique (2.1)-(2.3) à somme nulle. On rappelle qu'un jeu à somme nulle est défini par :

$$J_1(u_1, u_2) = -J_2(u_1, u_2).$$

Le système différentiel du type Riccati couplé correspondant dans ce cas est défini par :

$$\dot{K}_1 = -A^T K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 S_{11} K_1 + K_1 S_{22} K_2, \quad (2.52)$$

$$\dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A + Q_1 + K_2 S_{22} K_2 + K_2 S_{11} K_1, \quad (2.53)$$

avec les conditions suivantes :

$$K_1(t_f) = K_{1f} \text{ et } K_2(t_f) = -K_{1f}.$$

Posons

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n & I_n \end{bmatrix} \text{ et } T^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & I_n \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Les coefficients des matrices  $T$  et  $T^{-1}$  définies ci-dessus vérifient le système d'équations (2.27). Nous obtenons alors la matrice  $\hat{H}_{nash}$  définie par :

$$\hat{H}_{nash} = \begin{bmatrix} A & -(S_{11} - S_{22}) & -S_{22} \\ -Q_1 & -A^T & 0_n \\ 0_n & 0_n & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

La Proposition 2.4.2 permet de construire le système différentiel du type Riccati suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_1 = -A^T \hat{K}_1 - \hat{K}_1 A + \hat{K}_1 (S_{11} - S_{22}) \hat{K}_1 + \hat{K}_1 S_{22} \hat{K}_2 - Q_1, \\ \hat{K}_1(t_f) = K_{1f}. \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_2 = -A^T \hat{K}_2 - \hat{K}_2 A + \hat{K}_2 (S_{11} - S_{22}) \hat{K}_1 + \hat{K}_2 S_{22} \hat{K}_2, \\ \hat{K}_2(t_f) = K_{1f} + K_{2f}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la solution du système différentiel du type Riccati couplé (2.52)-(2.53) sont résumées dans le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.2** *Le système différentiel du type Riccati couplé (2.52)-(2.53) admet une paire de solutions  $(K_1(t), K_2(t))$  pour tout  $t \in [0, t_f]$  si et seulement si la paire de solutions  $(\hat{K}_1(t), \hat{K}_2(t))$  du système différentiel du type Riccati (2.56)-(2.57) existe pour tout  $t \in [0, t_f]$ . Cette paire de solutions est donnée par :*

$$\begin{cases} K_1(t) = \hat{K}_1(t), \\ K_2(t) = -\hat{K}_1(t) + \hat{K}_2(t). \end{cases} \quad (2.58)$$

### 2.5.3 Exemple scalaire

Considérons le jeu différentiel linéaire-quadratique proposé par Simaan et Cruz [SiCr73]

Soit le système dynamique

$$\dot{x} = x + u_1 - u_2, \quad x(0) = x_0. \quad (2.59)$$

Les critères des joueurs sont donnés par :

$$J_1(u_1, u_2) = \frac{1}{2}k_{1f}x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}u_1^2 dt, \quad (2.60)$$

$$J_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2}k_{2f}x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 4x^2 + u_2^2 dt, \quad (2.61)$$

avec :

$$k_{1f} = 2 \quad \text{et} \quad k_{2f} = 1.$$

Le système différentiel du type Riccati couplé est donné par :

$$\dot{k}_1 = -2k_1 - \frac{3}{4} + 3k_1^2 + k_1k_2, \quad (2.62)$$

$$\dot{k}_2 = -2k_2 - 4 + k_2^2 + 3k_1k_2, \quad (2.63)$$

avec :

$$k_{1f} = 2 \quad \text{et} \quad k_{2f} = 1.$$

Cet exemple correspond au cas d'un système différentiel du type Riccati couplé (2.45)-(2.46) avec  $\alpha = 3$ . L'application du Corollaire 2.5.1 nous permet d'obtenir la solution suivante :

$$k_1(t) = \frac{6\exp(-3(t-1)) + \exp(3(t-1)) + 5\exp(-(t-1))}{9\exp(-3(t-1)) - 3\exp(3(t-1))},$$

$$k_2(t) = \frac{6\exp(-3(t-1)) + \exp(3(t-1)) - 5\exp(-(t-1))}{3\exp(-3(t-1)) - \exp(3(t-1))}.$$

Ce résultat correspond bien à la solution donnée par Simman et Cruz [SiCr73] et par Abou-Kandil [Abou86].

## 2.6 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à un système différentiel du type Riccati couplé issu de l'équilibre de Nash en boucle ouverte. Nous avons généralisé une méthode de séparation du spectre de la matrice de Nash représentant cet équilibre. Le choix d'une matrice de passage constituée à partir d'une matrice symplectique est motivé par une simplicité de calcul de l'inverse de celle-ci. Nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une paire de solutions du système considéré. Sous certaines conditions, nous avons également fourni une expression analytique de celle-ci. L'avantage de la méthode proposée ici est qu'elle permet de ramener l'étude des propriétés du système différentiel du type Riccati couplé à celles d'un autre système du même type mais plus simple à étudier.

Beaucoup de variantes peuvent être apportées à cette méthode. Ainsi, on pourrait proposer de construire une matrice de changement de base à partir d'une matrice hamiltonienne. L'approche proposée peut également servir à l'étude du comportement asymptotique de ce jeu à horizon infini. Cette question qui a été entièrement résolue dans le cas d'un problème de commande linéaire quadratique demeure un problème ouvert dans le cas des jeux différentiels linéaires quadratiques en boucle ouverte. Enfin, la méthode proposée dans ce chapitre peut aussi être étendue aux systèmes différentiels du type Riccati couplé issus de l'équilibre de Stackelberg en boucle ouverte. Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence des solutions de ces systèmes peuvent être déduites à partir de la propriété des solutions équivalentes.

# Chapitre 3

## Système algébrique de Nash-Riccati en boucle fermée

### 3.1 Introduction

L'étude de l'équilibre de Nash en boucle fermée a fait l'objet de plusieurs travaux dans la littérature. Dans ce cadre, on renvoie aux travaux de Star et Ho [StHo69], Foley et Schmitendorf [FoSc71] et Lukes et Russel [LuRu71]. L'application des concepts fondamentaux de la stratégie de Nash dans un "J.D.L.Q" en boucle fermée sur un horizon fini mène à un système différentiel du type Riccati fortement couplé. Le comportement asymptotique d'un

" J.D.L.Q" à horizon infini a été établi par Krikelis et Rekasius [KrRe71]. Ces derniers ont obtenu des conditions suffisantes pour l'existence d'une situation de l'équilibre de Nash en boucle fermée. Celle-ci est représentée en fonction de la paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati fortement couplé. Afin de résoudre ces systèmes il existe trois types de procédures. La première est une procédure du type Newton [KrRe71] and [PeJa05] , la seconde et la troisième procédure sont des itérations du type Lyapunov et des itérations du type Riccati. Les itérations du type Lyapunov ont été proposées par Gajic et Shen [GaSh93]. La procédure définie à l'aide de ces itérations génère à chaque étape de la résolution des équations algébriques du type Lyapunov. Les itérations du type Riccati ont été proposées dans

[FJA96]. La procédure définie à l'aide de ces itérations génère à chaque étape de la résolution des équations algébriques du type Riccati. Il n'existe cependant aucune preuve sur la convergence des suites itératives issues de ces trois procédures.

Notre première contribution dans ce chapitre est d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'algorithme défini par les itérations du type Lyapunov. Nous donnons des conditions pour que celles-ci génèrent une dynamique stable. De cette façon nous réalisons l'existence d'une paire de solutions stabilisantes pour le système algébrique du type Riccati couplé considéré.

Notre deuxième contribution consiste également à établir des conditions suffisantes de convergence pour l'algorithme issu des itérations du type Riccati [FJA96]. Enfin, notre troisième contribution consiste à introduire un nouvel algorithme du type Riccati. Nous donnons également des conditions suffisantes de convergence de celui-ci. Afin de distinguer entre les deux itérations du type Riccati, nous désignerons celles établies dans [FJA96] par les itérations du type Riccati, version 1 et celles correspondant à la nouvelle procédure par les itérations du type Riccati, version 2.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans le paragraphe 2, nous introduisons un "J.D.L.Q" de Nash à deux joueurs ayant une structure d'information en boucle fermée. Ce jeu est défini sur un horizon infini. Nous donnons la notion d'une paire de solutions stabilisantes. A l'aide de cette paire de solutions, on formalise les conditions suffisantes pour l'existence de cet équilibre. Nous aboutissons alors à un système algébrique du type Riccati couplé. Dans le paragraphe 3, nous rappelons les itérations du type Lyapunov ainsi que l'algorithme correspondant. Nous donnons deux propriétés importantes de la paire de solutions. Pour finir ce paragraphe, nous donnerons des conditions suffisantes de convergence. Dans le paragraphe 4, nous rappelons les itérations du type Riccati, version 1 ainsi que l'algorithme correspondant. Nous donnerons également des conditions suffisantes de convergence de celui-ci. Dans le paragraphe 5, nous introduisons un nouvel algorithme caractérisant les itérations du type Riccati, version 2. Nous donnerons également des conditions suffisantes de convergence. Dans le paragraphe 6, nous présentons des exemples numériques obtenus en exécutant les trois algorithmes présentés ci-dessus. Enfin, le paragraphe 7, est consacré aux conclusions et aux perspectives.

## 3.2 Présentation du problème

Dans ce paragraphe nous allons considérer un "J.D.L.Q" à deux joueurs défini sur un horizon infini. Pour la formulation de la solution optimale, nous adopterons la notion de l'équilibre de Nash ayant une structure d'information en boucle fermée [StHo69]. Nous donnons les différentes hypothèses concernant l'état du système, l'ensemble des stratégies admissibles et enfin celles des critères des joueurs.

Soit  $\Gamma_2$  un jeu différentiel linéaire quadratique défini par :

$$\dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2u_2, \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est l'état initial,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  est la stratégie du  $i$ -ème joueur ( $i = 1, 2$ ); les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$  ( $i = 1, 2$ ), pour  $n, m_1$  et  $m_2 \in \mathbb{N}^*$ .

Les stratégies  $u_i$ , ( $i = 1, 2$ ) du  $i$ -ème joueur seront identifiées à des fonctions du type  $u_i(x) := F_i x$  où  $F_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ .

Afin de donner un sens aux critères quadratiques des joueurs sur un horizon infini, nous allons définir l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{(F_1, F_2) / A + B_1F_1 + B_2F_2 \text{ est stable}\}. \quad (3.2)$$

A l'aide de l'ensemble  $\mathcal{F}$ , nous allons considérer l'ensemble des solutions stabilisantes du système dynamique (3.1). Ces solutions sont définies par :

$$\dot{x} = (A + B_1F_1 + B_2F_2)x, \quad x(0) = x_0. \quad (3.3)$$

L'ensemble des stratégies admissibles du  $i$ -ème joueur ( $i = 1, 2$ ) sera désigné par  $\mathcal{U}_i$  et est défini ci-dessous :

$$\mathcal{U}_i = \{u_i(x) / u_i(x) = F_i x\}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.4)$$

Le but du  $i$ -ème joueur dans le jeu considéré ici, consiste, par le choix judicieux de sa stratégie  $u_i \in \mathcal{U}_i$  à atteindre la plus petite valeur de sa fonction coût. Celle-ci est représentée par une fonction quadratique définie sur l'ensemble des solutions  $x(t)$  du

système différentiel (3.3) avec :

$$\begin{cases} J_1(u_1, u_2) = \int_0^\infty \{x^T Q_1 x + u_1^T R_{11} u_1 + u_2^T R_{12} u_2\} dt, \\ J_2(u_1, u_2) = \int_0^\infty \{x^T Q_2 x + u_1^T R_{21} u_1 + u_2^T R_{22} u_2\} dt, \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R_{ij} \in \mathbb{R}^{m_j \times m_j}$  pour  $1 \leq i \leq j \leq 2$  sont des matrices symétriques et à coefficients constants .

**Définition 3.2.1** (*équilibre de Nash*)

Une situation  $u^* = (u_1^*, u_2^*) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  est dite **équilibre de Nash en boucle fermée** du jeu différentiel  $\Gamma_2$  défini par les équations (3.3)-(3.5), si les conditions suivantes

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*), \quad \forall u_1 \in \mathcal{U}_1, \quad (3.6)$$

$$J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2), \quad \forall u_2 \in \mathcal{U}_2, \quad (3.7)$$

sont satisfaites.

La formulation d'une situation d'équilibre de Nash en boucle fermée peut être obtenue au moyen d'une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé de la forme suivante :

$$0 = A^T P + P A - P S_{11} P - P S_{22} R - R S_{22} P + R S_{12} R + Q_1, \quad (3.8)$$

$$0 = A^T R + R A - R S_{22} R - R S_{11} P - P S_{11} R + P S_{21} P + Q_2, \quad (3.9)$$

avec :

$$S_{ii} := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T \text{ et } S_{ij} := B_j R_{jj}^{-1} R_{ij} R_{jj}^{-1} B_j^T, \quad 1 \leq i \leq j \leq 2.$$

Nous donnons ci-dessous la définition d'une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9). La Proposition 3.2.1 nous permet d'obtenir la formulation des stratégies en fonction du vecteur d'état ainsi que les valeurs optimales des critères correspondants.

**Définition 3.2.2** (*solution stabilisante*)

On dit que la paire de solutions  $(P, R)$  du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) est **stabilisante**, si la matrice  $(A - S_{11}P - S_{22}R)$  est stable.

**Proposition 3.2.1** [KrRe71] On considère le jeu différentiel  $\Gamma_2$  défini par les équations (3.3)-(3.5) avec  $R_{ii} > 0$ , ( $i = 1, 2$ ). On suppose qu'il existe une paire de solutions stabilisantes  $(P, R)$  du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9). Alors, il existe une situation d'équilibre de Nash en boucle fermée. Celle-ci est donnée par :

$$u_1^*(x) = -R_{11}^{-1}B_{11}^T Px^* \text{ et } u_2^*(x) = -R_{22}^{-1}B_{22}^T Rx^*, \quad (3.10)$$

où  $x^*$  est la solution de l'équation dynamique

$$\dot{x} = (A - S_{11}P - S_{22}R)x, \quad x(0) = x_0. \quad (3.11)$$

Les valeurs minimales des critères (3.5) sont données par :

$$J_1(u_1^*, u_2^*, x_0) = x_0^T Px_0 \text{ et } J_2(u_1^*, u_2^*, x_0) = x_0^T Rx_0. \quad (3.12)$$

### 3.3 Itérations du type Lyapunov

Dans ce paragraphe, nous détaillons la méthode de calcul d'une paire de solutions itératives du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9). Nous donnerons également des propriétés de ces solutions ainsi que des conditions suffisantes de convergence de l'algorithme correspondant.

#### 3.3.1 Description de la procédure

La procédure décrivant des itérations du type Lyapunov sera désignée par "**Algorithme A.L**". Les étapes de calcul d'une paire de solutions itératives  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) sont basées sur les phases suivantes :

##### **Algorithme A.L**

On définit une erreur admissible par  $\epsilon > 0$ .

### 1. Initialisation

L'initialisation se fait par le choix d'une paire de matrices  $(P_0, R_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $A - S_{11}P_0 - S_{22}R_0$  soit stable.

### 2. Evaluation de la solution

Le calcul de la paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  se fait de la manière suivante :

- (a) on détermine  $P_l$  comme l'unique solution de l'équation algébrique du type Lyapunov

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1})^T P_l \\ &+ P_l(A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}) \\ &+ P_{l-1}S_{11}P_{l-1} + R_{l-1}S_{12}R_{l-1} + Q_1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$R_l$  comme l'unique solution de l'équation algébrique du type Lyapunov

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1})^T R_l \\ &+ R_l(A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}) \\ &+ R_{l-1}S_{22}R_{l-1} + P_{l-1}S_{21}P_{l-1} + Q_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

- (b) A l'étape  $l \geq 1$ , on évalue les matrices  $A_l := A - S_{11}P_l - S_{22}R_l$ .

### 3. Evaluation de l'erreur

Le calcul de l'erreur se fera à chaque étape  $l \geq 1$ , en évaluant les quantités suivantes :

$$N_1(P_l, R_l) = A_l^T P_l + P_l A_l + P_l S_{11} P_l + R_l S_{12} R_l + Q_1, \quad (3.15)$$

$$N_2(P_l, R_l) = A_l^T R_l + R_l A_l + R_l S_{22} R_l + P_l S_{21} P_l + Q_2. \quad (3.16)$$

### 4. Critère d'arrêt

Soit

$$e_l := \max\{\|N_1(P_l, R_l)\|_\infty, \|N_2(P_l, R_l)\|_\infty\}. \quad (3.17)$$

Alors le critère d'arrêt pour tout  $l \geq 1$  est tel que  $e_l \leq \epsilon$ .

## 5. Retour

$l \rightarrow l + 1$ , on retourne à la phase de calcul de la paire de solutions c'est à dire à la phase (a) de l'algorithme jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

**Remarque 3.3.1** *Afin d'assurer l'unicité de la paire de solutions obtenues au moyen de l'algorithme A.L, il est nécessaire que les matrices  $(A_l)_{l \geq 0}$  demeurent stables. Afin de remédier à cela nous donnerons par la suite un ensemble de conditions pour que les matrices  $(A_l)_{l \geq 0}$  demeurent stables tout au long des exécutions.*

### 3.3.2 Propriétés des solutions itératives

Dans ce paragraphe, nous donnons des conditions pour que la paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  définie par les équations algébriques du type Lyapunov (3.13)-(3.14) soit déterminée de manière unique.

L'initialisation de l'algorithme A.L se fait en considérant la condition suivante :

- (C0) : Les paires  $(A, B_i)$  et  $(\sqrt{Q_i}, A)$ ,  $(i = 1, 2)$  sont stabilisables et détectables respectivement.

La condition (C0) est suffisante pour l'existence d'une paire  $(P_0, R_0)$  rendant la matrice  $A - S_{11}P_0 - S_{22}R_0$  stable. Pour la démonstration de ce résultat, on renvoie à Gajic et Shen [GaSh93].

Afin de garantir l'existence et l'unicité d'une paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  des équations itératives du type Lyapunov (3.13)-(3.14), nous proposons les conditions suivantes :

- (C1) :  $Q_i \geq 0$   $S_{ii} \geq 0$  et  $S_{ij} \geq 0$   $1 \leq i \leq j \leq 2$ .
- (C2) : La suite  $(X_l)_{l \geq 1}$  définie par l'équation algébrique du type Riccati suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= A^T X_l + X_l A - X_l (S_{11} + S_{22}) X_l \\ &+ P_{l-1} S_{21} P_{l-1} + R_{l-1} S_{12} R_{l-1} + Q_1 + Q_2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

existe et est définie positive.

– (C3) : La suite de matrices  $(\tilde{Q}_l)_{l \geq 1}$  définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_l &:= P_{l-1}S_{11}P_{l-1} - (X_l - P_{l-1})S_{11}(X_l - P_{l-1}) \\ &+ R_{l-1}S_{22}R_{l-1} - (X_l - R_{l-1})S_{22}(X_l - R_{l-1}) \\ &+ P_{l-1}S_{21}P_{l-1} + R_{l-1}S_{12}R_{l-1} + Q_1 + Q_2, \end{aligned}$$

est définie positive.

Nous obtenons des propriétés de la paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  des équations (3.13)-(3.14). Celles-ci sont résumées dans le Théorème 3.3.1.

**Théorème 3.3.1** *On suppose que les conditions (C0) à (C3) sont satisfaites. Alors, les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  possèdent les propriétés suivantes :*

1. Les matrices  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_l$  sont stables, pour tout  $l \geq 0$ .
2. La suite  $(X_l)_{l \geq 1}$  définie par l'équation algébrique du type Riccati (3.18) est telle que :

$$0 < X_l \leq P_l + R_l. \quad (3.19)$$

### Preuve du Théorème 3.3.1

1. Les conditions (C0), (C2) et (C3) et la Proposition 1.2.3, montrent que les matrices  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_l$  sont stables pour tout  $l \geq 0$ .

En effet :

- La condition (C0) montre que  $A - S_{11}P_0 - S_{22}R_0$  est stable.
- D'autre part la matrice  $(X_l)_{l \geq 1}$  définie par l'équation algébrique du type Riccati (3.18) satisfait aussi l'équation du type Lyapunov

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_l)^T X_{l+1} \\ &+ X_{l+1}(A - S_{11}P_l - S_{22}R_l) + \tilde{Q}_{l+1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Compte tenu des conditions (C2) et (C3), la Proposition 1.2.3 montre que les matrices  $(A - S_{11}P_l - S_{22}R_l)$  sont stables pour tout  $l \geq 1$ .

2. Pour montrer que  $X_l \leq P_l + R_l$ , il suffit de remarquer qu'à l'étape  $l \geq 1$  de la procédure, la suite  $Z_l := P_l + R_l$  satisfait l'équation du type Lyapunov :

$$\begin{aligned}
0 &= (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1})^T Z_l \\
&+ Z_l(A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}) \\
&+ P_{l-1}S_{11}P_{l-1} + R_{l-1}S_{12}R_{l-1} \\
&+ P_{l-1}S_{21}P_{l-1} + R_{l-1}S_{22}R_{l-1} \\
&+ Q_1 + Q_2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

La suite  $(X_l)_{l \geq 1}$  est aussi solution de l'équation du type Lyapunov :

$$\begin{aligned}
0 &= (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1})^T X_l \\
&+ X_l(A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}) + \tilde{Q}_l.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

En retranchant l'équation (3.22) de l'équation (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1})^T (Z_l - X_l) \\
&+ (Z_l - X_l)(A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}) \\
&+ (X_l - P_{l-1})S_{11}(X_l - P_{l-1}) \\
&+ (X_l - R_{l-1})S_{22}(X_l - R_{l-1}).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

En tenant compte de la condition (C1) et de la stabilité des matrices  $A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}$  pour tout  $l \geq 1$ , on conclut grâce à la Proposition 1.2.3 que  $X_l \leq Z_l$  pour tout  $l \geq 1$ .

■

Dans le cas où  $S_{12} = S_{21} = 0$ , nous pouvons obtenir une minoration uniforme de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$ , définie par  $Z_l := P_l + R_l$ . En considérant la matrice  $\tilde{X}$  solution de l'équation algébrique du type Riccati de la forme :

$$0 = A^T \tilde{X} + \tilde{X}A - \tilde{X}(S_{11} + S_{22})\tilde{X} + Q_1 + Q_2, \tag{3.24}$$

nous obtenons alors le corollaire suivant :

**Corollaire 3.3.1** *On suppose que les conditions (C0) à (C3) sont satisfaites pour  $S_{12} = S_{21} = 0$ . Alors, la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  définie par  $Z_l := P_l + R_l$  satisfait l'inégalité*

$$0 < \tilde{X} \leq Z_l. \quad (3.25)$$

**Proposition 3.3.1** *On suppose que les conditions (C0) à (C3) sont satisfaites. Alors, les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont définies de manière unique et sont semi-définies positives.*

### Preuve de la Proposition 3.3.1

La preuve est une conséquence du Théorème 3.3.1 et de la Proposition 1.2.3.

En effet, sous les conditions (C0)-(C2) et (C3), les matrices

$A_{l-1} := A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}$  sont stables pour tout  $l \geq 1$ . La Proposition 1.2.3 montre que les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont définies de manière unique. Celles-ci sont semi-définies positives sous la condition (C1).

■

### 3.3.3 Conditions suffisantes de convergence

Dans ce paragraphe, nous donnons des conditions suffisantes pour que les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.13)-(3.14) soient convergentes. Pour cela nous allons utiliser le Théorème 3.3.1 et la Proposition 3.3.1.

Nous donnons les conditions de monotonie suivantes :

– (C4) : La suite  $(\Gamma_l^p)_{l \geq 1}$  définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^p &:= (R_l - R_{l-1})^T S_{22} P_l + P_l S_{22} (R_l - R_{l-1}) \\ &+ (P_{l-1} - P_l)^T S_{11} (P_{l-1} - P_l), \end{aligned} \quad (3.26)$$

est semi-définie positive.

– (C5) : La suite  $(\Gamma_l^r)_{l \geq 1}$  définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^r &:= (P_l - P_{l-1})^T S_{11} R_l + R_l S_{11} (P_l - P_{l-1}) \\ &+ (R_{l-1} - R_l)^T S_{22} (R_{l-1} - R_l), \end{aligned} \quad (3.27)$$

est semi-définie positive.

**Proposition 3.3.2** *On considère le système algébrique du type Riccati (3.8)-(3.9) avec  $S_{12} = S_{21} = 0$ . On suppose que les conditions (C0) à (C5) sont satisfaites. Alors, les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.13)-(3.14) sont convergentes.*

### Preuve de la Proposition 3.3.2

1. Les conditions (C0) à (C3) sont satisfaites, la Proposition 3.3.1 montre que les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.13)-(3.14) sont déterminées de manière unique et sont semi-définies positives.
2. Nous allons montrer que sous les conditions (C4) et (C5), les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$   $(R_l)_{l \geq 1}$  sont décroissantes.

– On considère l'équation du type Lyapunov définie par (3.13) :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1})^T P_l \\ &+ P_l (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}) \\ &+ P_{l-1} S_{11} P_{l-1} + Q_1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

En tenant compte de la définition de  $\Gamma_l^p$ , on peut réécrire l'équation (3.28) sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_l)^T P_l \\ &+ P_l (A - S_{11}P_l - S_{22}R_l) \\ &+ P_l S_{11} P_l + Q_1 + \Gamma_l^p. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A l'étape  $l + 1$ , nous obtenons dans l'équation (3.28) :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_l)^T P_{l+1} \\ &+ P_{l+1}(A - S_{11}P_l - S_{22}R_l) \\ &+ P_l S_{11}P_l + Q_1. \end{aligned} \tag{3.30}$$

En retranchant l'équation (3.30) de l'équation (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_l)^T (P_l - P_{l+1}) \\ &+ (P_l - P_{l+1})(A - S_{11}P_l - S_{22}R_l) + \Gamma_l^p. \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma_l^p \geq 0$  et compte tenu de la stabilité des matrices  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_l$  pour tout  $l \geq 1$ , on conclut grâce à la Proposition 1.2.3 que  $P_l \geq P_{l+1}$ , c'est à dire que la suite  $(P_l)_{l \geq 1}$  est décroissante.

- De la même manière, on montre que la condition  $\Gamma_l^r \geq 0$ , permet d'obtenir la décroissance de la suite  $(R_l)_{l \geq 1}$ .

En effet, un calcul semblable à celui effectué pour la suite  $(P_l)_{l \geq 1}$ , montre que :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_l)^T (R_l - R_{l+1}) \\ &+ (R_l - R_{l+1})(A - S_{11}P_l - S_{22}R_l) + \Gamma_l^r. \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma_l^r \geq 0$  et compte tenu de la stabilité des matrices  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_l$  pour tout  $l \geq 1$ , on conclut grâce à la Proposition 1.2.3 que  $R_l \geq R_{l+1}$ , c'est à dire que la suite  $(R_l)_{l \geq 1}$  est décroissante.

3. Les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont semi-définies positives. Compte tenu du fait qu'elles soient décroissantes; nous obtenons la convergence de celles-ci. Les limites ainsi obtenues sont également semi-définies positives.

■

Lorsque les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations algébriques du type

Lyapunov (3.13)-(3.14) sont convergentes, il est possible de définir une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9). En effet, en posant  $P := \lim_{l \rightarrow \infty} P_l$  et  $R := \lim_{l \rightarrow \infty} R_l$ , on vérifie que la paire de solutions  $(P, R)$  est stabilisante pour ce système.

Nous proposons une condition pour que la matrice  $A - S_{11}P - S_{22}R$  soit stable :

– (C6) : Les matrices  $(\tilde{Q}_l)_{l \geq 1}$  et  $(Q_i)_{1 \leq i \leq 2}$  sont telles que

$$\tilde{Q}_l \geq Q_1 > 0, \quad \text{ou} \quad \tilde{Q}_l \geq Q_2 > 0. \quad (3.31)$$

Dans la Proposition 3.3.3 suivante, nous donnons la preuve de l'existence d'une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9).

**Proposition 3.3.3** *On suppose que les conditions (C0) à (C6) sont satisfaites pour  $S_{12} = S_{21} = 0$ . Alors, les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.13)-(3.14) convergent vers  $P$  et  $R$  respectivement telles que les conditions suivantes soient vérifiées.*

1. *La matrice  $(A - S_{11}P - S_{22}R)$  est stable.*
2. *La paire de solutions  $(P, R)$  satisfait le système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9).*

### Preuve de la Proposition 3.3.3

1. Sous les conditions (C0)-(C2) et (C3), les matrices  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_l$  sont stables pour tout  $l \geq 0$ .
  - Soit  $(v_l)_{l \geq 1}$  un vecteur propre de  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_l$  associé à la valeur propre  $(\lambda_l)_{l \geq 1}$ , avec  $\|v_l\| = 1$ . Posons  $\lambda_l = a_l + ib_l$  avec  $a_l < 0$ .

– Soit  $\tilde{X}$ , la solution définie positive de l'équation du type Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1})^T \tilde{X} \\ &+ \tilde{X}(A - S_{11}P_{l-1} - S_{22}R_{l-1}) \\ &+ \tilde{Q}_l. \end{aligned} \quad (3.32)$$

En multipliant l'équation (3.32) par  $v_{l-1}^*$  à gauche et par  $v_{l-1}$  à droite, on obtient :

$$0 = \bar{\lambda}_{l-1} v_{l-1}^* \tilde{X} v_{l-1} + \lambda_{l-1} v_{l-1}^* \tilde{X} v_{l-1} + v_{l-1}^* \tilde{Q}_l v_{l-1}, \quad (3.33)$$

ou encore :

$$0 = 2a_{l-1} v_{l-1}^* \tilde{X} v_{l-1} + v_{l-1}^* \tilde{Q}_l v_{l-1}. \quad (3.34)$$

Sous la condition (C3) et (C6),  $\tilde{Q}_l \geq Q_1 > 0$  ou  $\tilde{Q}_l \geq Q_2 > 0$  pour tout  $l \geq 1$ . Nous obtenons par exemple pour  $\tilde{Q}_l \geq Q_1 > 0$  :

$$v_{l-1}^* \tilde{Q}_l v_{l-1} \geq \lambda_{\min}(\tilde{Q}_l) \geq \lambda_{\min}(Q_1) > 0. \quad (3.35)$$

Comme  $\tilde{X} > 0$  et  $Q_1 > 0$ , on obtient à partir de l'équation (3.35)

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall l \geq 1, \operatorname{Re}(\lambda_{l-1}) \leq -\alpha < 0, \quad (3.36)$$

c-à-d que  $\lim_{l \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\lambda_l) < 0$ . Nous obtenons donc la stabilité de la matrice  $(A - S_{11}P - S_{22}R)$ .

2. Puisque les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont convergentes, par passage à la limite dans les équations (3.13)-(3.14) ; la paire de matrices  $(P, R)$  satisfait le système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9). La stabilité de la matrice  $(A - S_{11}P - S_{22}R)$  étant vérifiée, la paire de solutions  $(P, R)$  est aussi stabilisante pour le système (3.8)-(3.9).

■

## 3.4 Itérations du type Riccati, version 1

Dans ce paragraphe nous détaillons la méthode de calcul d'une paire de solutions itératives du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9).

### 3.4.1 Description de la procédure

La procédure décrivant les itérations du type Riccati, version 1 sera désignée par "**Algorithme A.R.1**". Les étapes de calcul d'une paire de solutions itératives  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) sont basées sur les phases suivantes :

#### Algorithme A.R.1

On définit une erreur admissible par  $\epsilon > 0$ .

##### 1. Initialisation

L'initialisation de l'algorithme A.R.1 se fait par le choix d'une paire de matrices  $(P_0, R_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$ .

##### 2. Evaluation de la solution

Le calcul de la paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  se fait de la manière suivante :

- (a) on détermine  $P_l$  comme l'unique solution stabilisante de l'équation algébrique du type Riccati

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{22}R_{l-1})^T P_l + P_l(A - S_{22}R_{l-1}) \\ &\quad - P_l S_{11} P_l + R_{l-1} S_{12} R_{l-1} + Q_1, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$R_l$  comme l'unique solution stabilisante de l'équation algébrique du type Riccati

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l-1})^T R_l + R_l(A - S_{11}P_{l-1}) \\ &\quad - R_l S_{22} R_l + P_{l-1} S_{21} P_{l-1} + Q_2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

- (b) A l'étape  $l \geq 1$ , on évalue les quantités :

$$\begin{aligned} A_l^r &= A - S_{22}R_l, \\ A_l^p &= A - S_{11}P_l. \end{aligned}$$

### 3. Evaluation de l'erreur

Le calcul de l'erreur se fera à chaque étape  $l \geq 1$ , en évaluant les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} N_1(P_l, R_l) &= (A_l^r)^T P_l + P_l A_l^r - P_l S_{11} P_l \\ &+ R_l S_{12} R_l + Q_1, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} N_2(P_l, R_l) &= (A_l^p)^T R_l + R_l A_l^p - R_l S_{22} R_l \\ &+ P_l S_{21} P_l + Q_2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 4. Critère d'arrêt

Soit

$$e_l := \max\{\|N_1(P_l, R_l)\|_\infty, \|N_2(P_l, R_l)\|_\infty\}. \quad (3.41)$$

Alors, le critère d'arrêt pour tout  $l \geq 1$  est tel que  $e_l \leq \epsilon$ .

### 5. Retour

$l \rightarrow l + 1$ , on retourne à la phase de calcul de la paire de solutions c'est à dire à la phase (a) de l'algorithme jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

**Remarque 3.4.1** *A l'inverse de l'algorithme A.L, l'initialisation de l'algorithme A.R.1 n'est soumise à aucune condition.*

**Lemme 3.4.1** [Wonh68] *On suppose que la condition (C0) est satisfaite, alors la paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  définie par les équations (3.37)-(3.38) existe, est unique et est semi-définie positive.*

Il découle du Lemme 3.4.1 que sous la condition (C0), l'exécution des différents étapes de l'algorithme A.R.1 est toujours possible.

### 3.4.2 Conditions suffisantes de convergence

Dans ce paragraphe, on donne des conditions suffisantes pour que les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.37)-(3.38) soient convergentes. Celles-ci sont établies à partir des conditions (C0) et (C1) et à partir des conditions de monotonie des suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$ .

Nous donnons les conditions de monotonie suivantes :

– (C7) : La suite  $(\Gamma_l^{hp})_{l \geq 1}$  définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{hp} &:= (R_l - R_{l-1})^T S_{22} P_l + P_l S_{22} (R_l - R_{l-1}) \\ &\quad - (P_l - P_{l+1})^T S_{11} (P_l - P_{l+1}), \end{aligned}$$

est semi-définie positive.

– (C8) : La suite  $(\Gamma_l^{hr})_{l \geq 1}$  définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{hr} &:= (P_l - P_{l-1})^T S_{11} R_l + R_l S_{11} (P_l - P_{l-1}) \\ &\quad - (R_l - R_{l+1})^T S_{22} (R_l - R_{l+1}), \end{aligned}$$

est semi-définie positive.

La monotonie permet d'établir la décroissance des suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$ . Les conditions (C0) et (C1) permettent de garantir l'existence d'une paire de solutions unique et semi-définie positive à chaque étape de la résolution.

**Proposition 3.4.1** *On considère le système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) avec  $S_{12} = S_{21} = 0$ . On suppose que les conditions (C0)-(C1)-(C7) et (C8) sont satisfaites. Alors, les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.13)-(3.14) sont convergentes.*

### Preuve de la Proposition 3.4.1

1. Sous les conditions (C0) et (C1) les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont définies de manière unique et sont semi-définies positives.

2. Nous allons montrer que sous les conditions (C7) et (C8), les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$   $(R_l)_{l \geq 1}$  sont décroissantes.

– On considère l'équation du type Riccati définie par (3.37) :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l-1})^T P_l \\ &+ P_l(A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l-1}) + P_l S_{11} P_l + Q_1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En tenant compte de la définition de  $\Gamma_l^{hp}$ , on peut réécrire l'équation (3.42) sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_l)^T P_l \\ &+ P_l(A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_l) \\ &+ P_{l+1}S_{11}P_{l+1} + \Gamma_l^{hp}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

A l'étape  $l + 1$ , on obtient dans l'équation (3.42) :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_l)^T P_{l+1} \\ &+ P_{l+1}(A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_l) \\ &+ P_{l+1}S_{11}P_{l+1} + Q_1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

En retranchant l'équation (3.44) de l'équation (3.43), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_l)^T (P_l - P_{l+1}) \\ &+ (P_l - P_{l+1})(A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_l) + \Gamma_l^{hp}. \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma_l^{hp} \geq 0$  et compte tenu de la stabilité des matrices

$A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_l$  pour tout  $l \geq 1$ , on obtient grâce à la Proposition 1.2.3 ;

$P_l \geq P_{l+1}$  pour tout  $l \geq 1$ .

- De la même manière, on montre que la condition  $\Gamma_l^{hr} \geq 0$ , permet d'obtenir la décroissance de la suite  $(R_l)_{l \geq 1}$ .

En effet, un calcul semblable à celui effectué pour la suite  $(R_l)_{l \geq 1}$ , montre que :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l+1})^T(R_l - R_{l+1}) \\ &+ (R_l - R_{l+1})(A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l+1}) + \Gamma_l^{hr}. \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma_l^{hr} \geq 0$  et compte tenu de la stabilité des matrices  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l+1}$  pour tout  $l \geq 1$ , on obtient grâce à la Proposition 1.2.3;  $R_l \geq R_{l+1}$  pour tout  $l \geq 1$ .

3. Les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont semi-définies positives. Compte tenu du fait qu'elles soient décroissantes, nous obtenons la convergence de celles-ci vers des limites semi-définies positives.

■

## 3.5 Itérations du type Riccati, version 2

Dans ce paragraphe nous présentons une nouvelle méthode pour le calcul d'une paire de solutions du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9). Nous donnons en détail la méthode de calcul d'une paire de solutions itératives.

### 3.5.1 Description de la procédure

La procédure décrivant des itérations du type Riccati, version 2 sera désignée par "**Algorithme A.R.2**". Les étapes de calcul d'une paire de solutions itératives  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  du système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) sont basées sur les phases suivantes :

#### **Algorithme A.R.2**

On définit une erreur admissible par  $\epsilon > 0$ .

### 1. Initialisation

L'initialisation de l'algorithme A.R.2, se fait par le choix d'une matrice  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$ .

### 2. Evaluation de la solution

Le calcul de la paire de solution  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  se fait de la manière suivante :

- (a) on détermine  $R_l$  comme l'unique solution stabilisante de l'équation algébrique du type Riccati

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l-1})^T R_l + R_l(A - S_{11}P_{l-1}) \\ &\quad - R_l S_{22} R_l + P_{l-1} S_{21} P_{l-1} + Q_2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

- (b)  $P_l$  comme l'unique solution stabilisante de l'équation algébrique du type Riccati

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{22}R_l)^T P_l + P_l(A - S_{22}R_l) \\ &\quad - P_l S_{11} P_l + R_l S_{12} R_l + Q_1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

- (c) A l'étape  $l \geq 1$ , on évalue les quantités :

$$A_l^r = A - S_{22}R_l, \quad (3.47)$$

$$A_l^p = A - S_{11}P_l. \quad (3.48)$$

### 3. Evaluation de l'erreur

Le calcul de l'erreur se fera à chaque étape  $l \geq 1$ , en évaluant les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} N_1(P_l, R_l) &= (A_l^r)^T P_l + P_l A_l^r - P_l S_{11} P_l \\ &\quad + R_l S_{12} R_l + Q_1, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} N_2(P_l, R_l) &= (A_l^p)^T R_l + R_l A_l^p - R_l S_{22} R_l \\ &\quad + P_l S_{21} P_l + Q_2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 4. Critère d'arrêt

Soit

$$e_l := \max\{\|N_1(P_l, R_l)\|_\infty, \|N_2(P_l, R_l)\|_\infty\}. \quad (3.51)$$

Alors le critère d'arrêt pour  $l \geq 1$  est tel que  $e_l \leq \epsilon$ .

## 5. Retour

$l \rightarrow l + 1$ , on retourne à la phase de calcul de la paire de solutions, c'est à dire à la phase (a) et à la phase (b) de l'algorithme jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

**Remarque 3.5.1** *Notons que l'algorithme A.R.2 possède plusieurs avantages :*

- à l'inverse de l'algorithme A.L, l'initialisation de l'algorithme A.R.2 n'est soumise à aucune condition ;
- par similitude à l'algorithme A.R.1, les solutions itératives obtenues au moyen de l'algorithme A.R.2 sont toujours définies de manière unique sous la condition (C0). Dans ce cas la réalisation des exécutions de cet algorithme est toujours satisfaite ;
- l'initialisation de l'algorithme A.R.2 se fait par le choix d'une seule matrice  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

### 3.5.2 Conditions suffisantes de convergence

Dans ce paragraphe, on donne des conditions suffisantes pour que les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.45)-(3.46) soient convergentes. Celles-ci sont établies à partir des conditions (C0) et (C1) et à partir des conditions de monotonie des suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$ .

Nous donnons les conditions de monotonie suivantes :

- (C9) : La suite  $(\Gamma_l^{yp})_{l \geq 1}$  définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{yp} &:= (R_{l+1} - R_l)^T S_{22} P_l + P_l S_{22} (R_{l+1} - R_l) \\ &\quad - (P_l - P_{l+1})^T S_{11} (P_l - P_{l+1}), \end{aligned}$$

est semi-définie positive.

– (C10) : La suite  $(\Gamma_l^{yr})_{l \geq 1}$  définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{yr} &:= (P_l - P_{l-1})^T S_{11} R_l + R_l S_{11} (P_l - P_{l-1}) \\ &- (R_l - R_{l+1})^T S_{22} (R_l - R_{l+1}), \end{aligned}$$

est semi-définie positive.

**Proposition 3.5.1** *On considère le système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) avec  $S_{12} = S_{21} = 0$ . On suppose que les conditions (C0) à (C1)-(C9) à (C10) sont satisfaites. Alors, les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.45)-(3.46) sont convergentes.*

### Preuve de la Proposition 3.5.1

1. Sous les conditions (C0) et (C1) les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (3.45)-(3.46) sont déterminées de manière unique et sont semi-définies positives.
2. Nous allons montrer que sous les conditions (C9) et (C10), les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont décroissantes.

– On considère l'équation du type Riccati définie par (3.46) :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_l)^T P_l \\ &+ P_l(A - S_{11}P_l - S_{22}R_l) + P_l S_{11} P_l + Q_1. \end{aligned} \quad (3.52)$$

En tenant compte de la définition de  $\Gamma_l^{yp}$ , on peut réécrire l'équation (3.52) sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_{l+1})^T P_l \\ &+ P_l(A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_{l+1}) \\ &+ P_{l+1}S_{11}P_{l+1} + Q_1 + \Gamma_l^{yp}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A l'étape  $l + 1$ , nous avons dans l'équation (3.52) :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_{l+1})^T P_{l+1} \\ &\quad + P_{l+1}(A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_{l+1}) \\ &\quad + P_{l+1}S_{11}P_{l+1} + Q_1 \end{aligned} \tag{3.54}$$

En retranchant l'équation (3.54) de l'équation (3.53), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_{l+1})^T (P_l - P_{l+1}) \\ &\quad + (P_l - P_{l+1})(A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_{l+1}) + \Gamma_l^{yp}. \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma_l^{yp} \geq 0$  et compte tenu de la stabilité des matrices  $A - S_{11}P_{l+1} - S_{22}R_{l+1}$  pour tout  $l \geq 0$ , on conclut grâce à la Proposition 1.2.3 que  $P_l \geq P_{l+1}$  pour tout  $l \geq 1$ .

– De la même manière, on montre que la condition  $\Gamma_l^{yr} \geq 0$ , permet d'obtenir la décroissance de la suite  $(R_l)_{l \geq 1}$ .

En effet, un calcul semblable à celui effectué pour la suite  $(R_l)_{l \geq 1}$ , montre que :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l+1})^T (R_l - R_{l+1}) \\ &\quad + (R_l - R_{l+1})(A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l+1}) + \Gamma_l^{yr}. \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma_l^{yr} \geq 0$ , et compte tenu de la stabilité des matrices  $A - S_{11}P_l - S_{22}R_{l+1}$  pour tout  $l \geq 1$ , on conclut grâce à la Proposition 1.2.3 que  $R_l \geq R_{l+1}$  pour tout  $l \geq 1$ .

3. Les suites  $(P_l)_{l \geq 1}$  et  $(R_l)_{l \geq 1}$  sont semi-définies positives. Compte tenu du fait qu'elles soient décroissantes, nous obtenons la convergence de celles-ci. Les limites ainsi obtenues sont semi-définies positives.

■

### 3.6 Exemples numériques

Ce paragraphe est consacré à quelques applications numériques sur la recherche d'une paire de solutions itératives des systèmes algébriques du type Riccati couplés (3.8)-(3.9). Les résolutions numériques de ces systèmes ont été effectuées au moyen des algorithmes *A.L*, *A.R.1* et *A.R.2*. Les simulations numériques ont été exécutées grâce au logiciel MATLAB, version 5.3.

Nous rappelons que l'initialisation des deux algorithmes *A.L*, *A.R.1* se fait par le choix de deux matrices  $P_0$  et  $R_0$ . L'initialisation de l'algorithme *A.R.2* se fait uniquement par le choix de la matrice  $P_0$ .

**Exemple 3.6.1** *On considère le système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) défini par les coefficients suivants :*

$$A = \begin{bmatrix} 0.4199 & 0.7939 \\ 0.7537 & 0.9200 \end{bmatrix}, \quad S_{11} = \begin{bmatrix} 8.3052 & 3.9682 \\ 3.9682 & 3.7217 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 7.4092 & 6.2590 \\ 6.2590 & 5.7807 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 9.8905 & 6.8816 \\ 6.8816 & 6.0301 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 3.2543 & 4.8155 \\ 4.8155 & 10.9606 \end{bmatrix},$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 5.2835 & 6.4178 \\ 6.4178 & 7.8537 \end{bmatrix}, \quad S_{21} = \begin{bmatrix} 4.4255 & 4.4501 \\ 4.4501 & 4.5081 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $P_0$  et  $R_0$  sont définies par :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 9.4812 & 7.67400 \\ 7.6740 & 7.4243 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 7.9273 & 6.7680 \\ 6.7680 & 6.3859 \end{bmatrix}.$$

- Pour  $\epsilon = 10^{-5}$ , nous obtenons la convergence des trois algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$  vers une paire de solutions définie positive et stabilisante. Celle-ci est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 0.095202 & -0.014476 \\ -0.014476 & 1.202709 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 0.027816 & 0.018055 \\ 0.018055 & 1.03889 \end{bmatrix}.$$

Plusieurs initialisations ont montré que la convergence des trois algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$  vers cette paire de solutions est indépendante du choix des valeurs initiales. L'allure des normes des matrices  $(P_l - P)$  et  $(R_l - R)$  pour tout  $l \geq 1$  est représentée sur la figure 3.1.

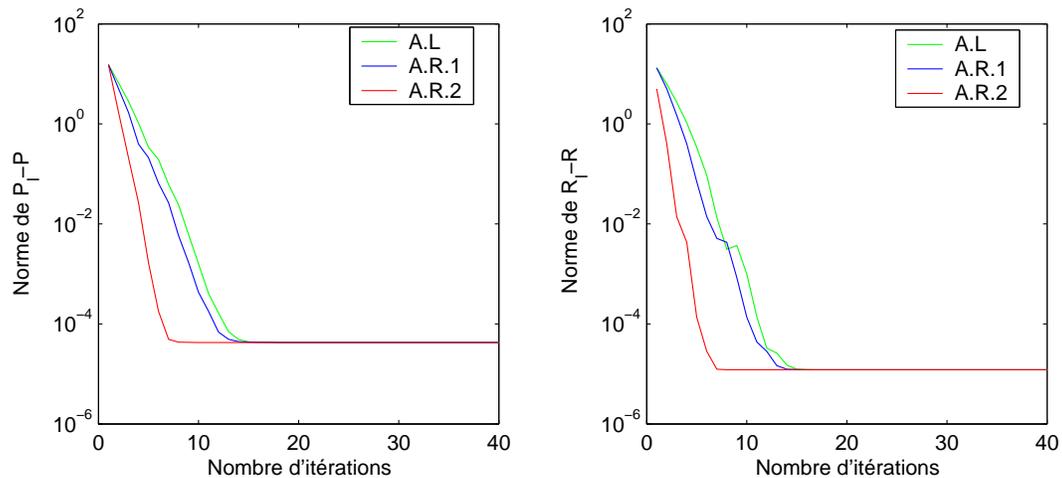


FIG. 3.1 – Performance des algorithmes A.L, A.R.1 et A.R.2.

L'évolution de la suite de matrices  $(\tilde{Q}_l)_{l \geq 1}$  définie par la condition (C3) est représentée sur la figure 3.2. Celle-ci permet de vérifier que la paire de solutions  $(P, R)$  obtenue en utilisant l'algorithme *A.L* est définie positive et stabilisante.

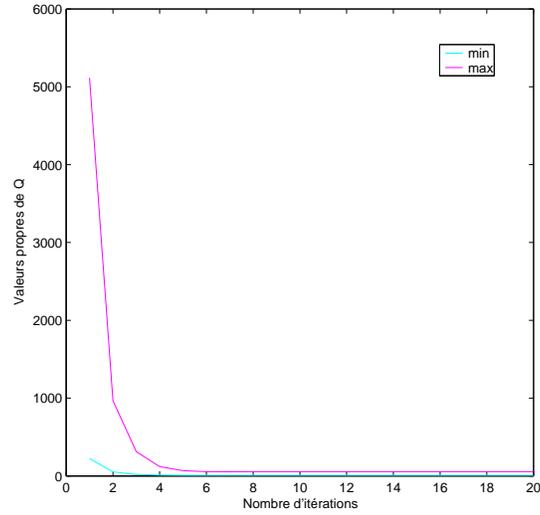


FIG. 3.2 – Evolution de la suite  $(\tilde{Q}_l)_{l \geq 1}$ .

**Exemple 3.6.2** Dans l'exemple suivant nous proposons d'étudier un cas pertinent proposé dans Abou-Kandil et al. ([AFIJ03], page 342).

Le système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) est défini par les coefficients suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 50 \\ -25 & 15 \end{bmatrix}, \quad S_{11} = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = S_{21} = 0.$$

Le système correspondant aux coefficients définis ci-dessus possède quatre paires de solutions [AFIJ03]. Deux paires de solutions définies-positives et stabilisantes, une paire de solutions définie négative et non-stabilisante et une paire de solutions non définie et non-stabilisante. Nous proposons ici de retrouver deux de ces paires de solutions pour différents choix des valeurs initiales  $P_0$  et  $R_0$ .

1. L'initialisation se fait par le choix de deux matrices  $P_0$  et  $R_0$  définies par :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 5.28353188 & 6.41775024 \\ 6.41775024 & 7.85373894 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 4.42545349 & 4.45006346 \\ 4.45006346 & 4.50810342 \end{bmatrix}.$$

- Pour  $\epsilon = 10^{-8}$ , nous obtenons que :
  - L'algorithme A.L est divergent.
  - L'algorithme A.R.1 oscille entre deux paires de solutions définies positives et stabilisantes. Celles-ci sont données par :

$$P = \begin{bmatrix} 0.29893612 & 0.06868009 \\ 0.06868009 & 0.13623926 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 3.16586640 & 0.43560443 \\ 0.43560443 & 2.38350437 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 2.01385096 & 0.07041636 \\ 0.07041636 & 1.49590844 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 0.63420945 & -0.11875324 \\ -0.11875324 & 0.29936014 \end{bmatrix}.$$

- L'algorithme A.R.2 converge vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes. Celle-ci est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 2.01385096 & 0.07041636 \\ 0.07041636 & 1.49590844 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 0.63420945 & -0.11875324 \\ -0.11875324 & 0.29936014 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple la convergence des trois algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$  vers une même paire de solutions dépend du choix des valeurs initiales. La figure 3.3 représente l'allure des normes des matrices  $(P_l - P)$  et  $(R_l - R)$  pour tout  $l \geq 1$ .

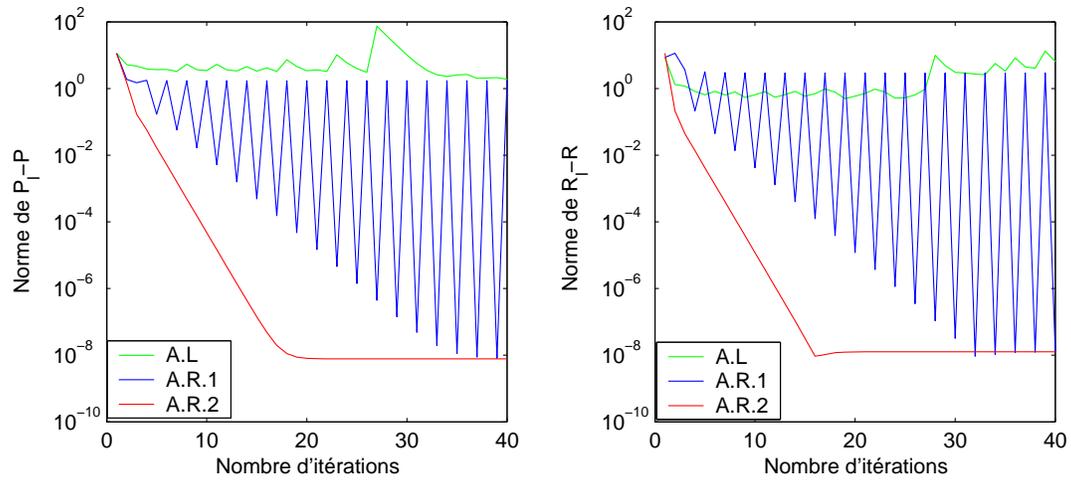


FIG. 3.3 – Performance des algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$ .

Afin de vérifier la monotonie des suites itératives, nous avons également étudié le signe des suites des matrices définies par les conditions (C4)-(C5) pour l'algorithme  $A.L$ , (C7)-(C8) pour l'algorithme  $A.R.1$  et enfin (C9)-(C10) pour l'algorithme  $A.R.2$ . Nous avons obtenu les figures suivantes :

La figure 3.4 illustre la non-monotonicité de la paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  obtenues au moyen de l'algorithme A.L.

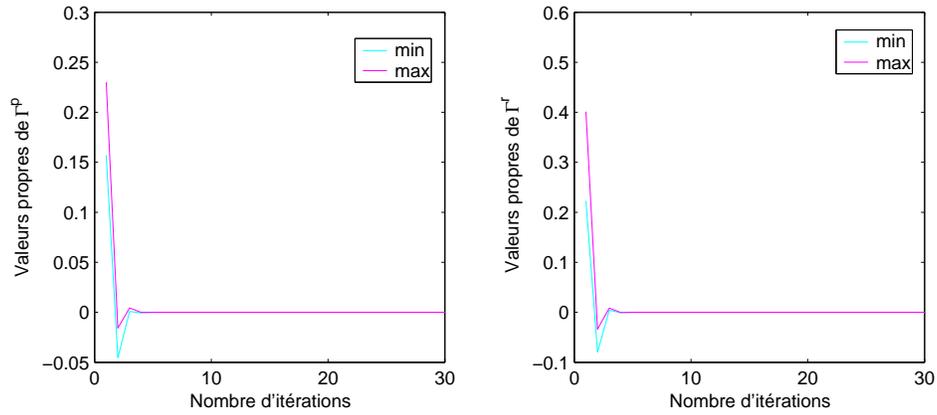


FIG. 3.4 – Evolution des suites  $(\Gamma_l^p)_{l \geq 1}$  et  $(\Gamma_l^r)_{l \geq 1}$ .

La figure 3.5 illustre la non-monotonicité de la paire de solutions  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  obtenues au moyen de l'algorithme A.R.1.

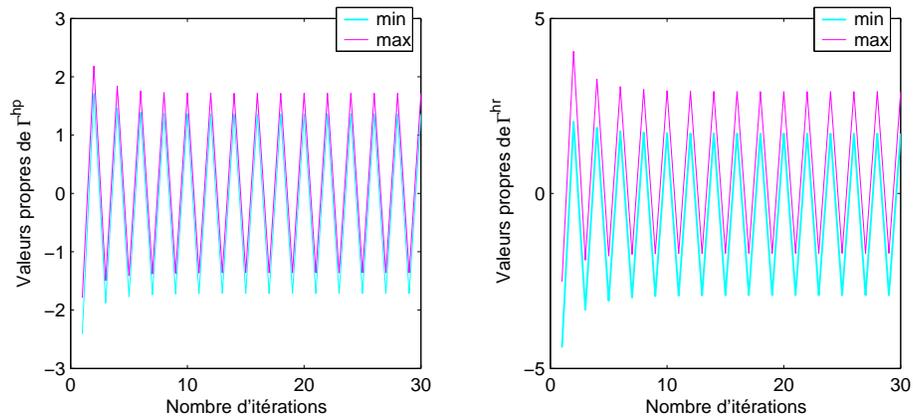


FIG. 3.5 – Evolution des suites  $(\Gamma_l^{hp})_{l \geq 1}$  et  $(\Gamma_l^{hr})_{l \geq 1}$ .

La figure 3.6 illustre la monotonicité de la paire de solutions itératives  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  obtenues au moyen de l'algorithme A.R.2.

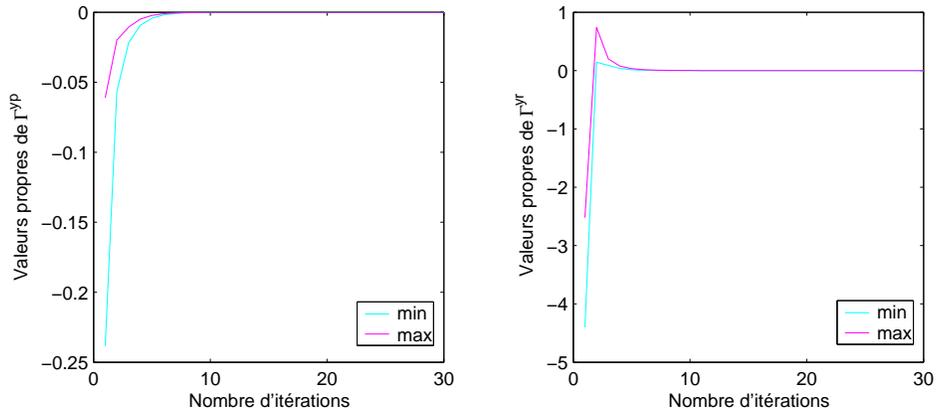


FIG. 3.6 – Evolution des suites  $(\Gamma_l^{yp})_{l \geq 1}$  et  $(\Gamma_l^{yr})_{l \geq 2}$ .

2. Afin d'obtenir la convergence de l'algorithme A.R.1, nous proposons maintenant d'initialiser avec  $P_0 = I_n$  et  $R_0 = I_n$ .

- Pour  $\epsilon = 10^{-5}$ , nous obtenons la convergence des trois algorithmes A.L, A.R.1 et A.R.2 vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes. Celle-ci est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 2.01385096 & 0.07041636 \\ 0.07041636 & 1.49590844 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 0.63420945 & -0.11875324 \\ -0.11875324 & 0.29936014 \end{bmatrix}.$$

La figure 3.7 représente l'allure des normes des matrices  $(P_l - P)$  et  $(R_l - R)$  pour tout  $l \geq 1$ .

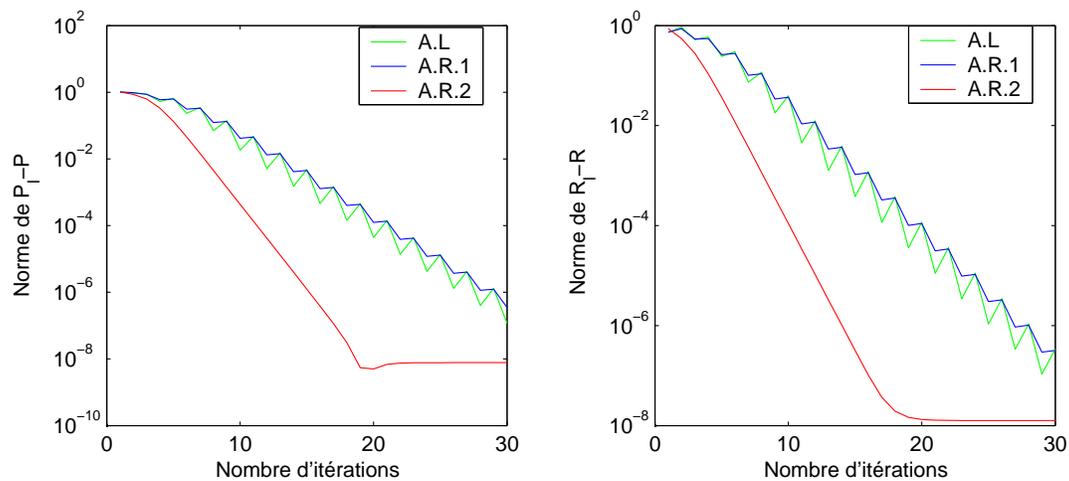


FIG. 3.7 – Performance des algorithmes A.L, A.R.1 et A.R.2.

La figure 3.8 permet de vérifier que la paire de solutions  $(P, R)$  obtenue en utilisant l'algorithme A.L est définie positive et stabilisante.

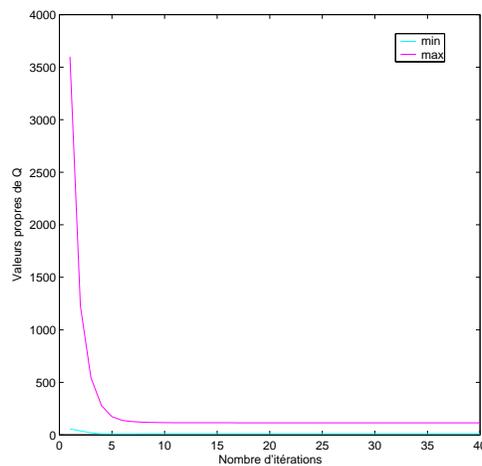


FIG. 3.8 – Evolution de la suite  $(\tilde{Q}_l)_{l \geq 1}$ .

Les figures 3.9, 3.10 et 3.11 illustrent la non-monotonicité de la paire de solutions itératives  $(P_l, R_l)_{l \geq 1}$  obtenues au moyen des algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$ .

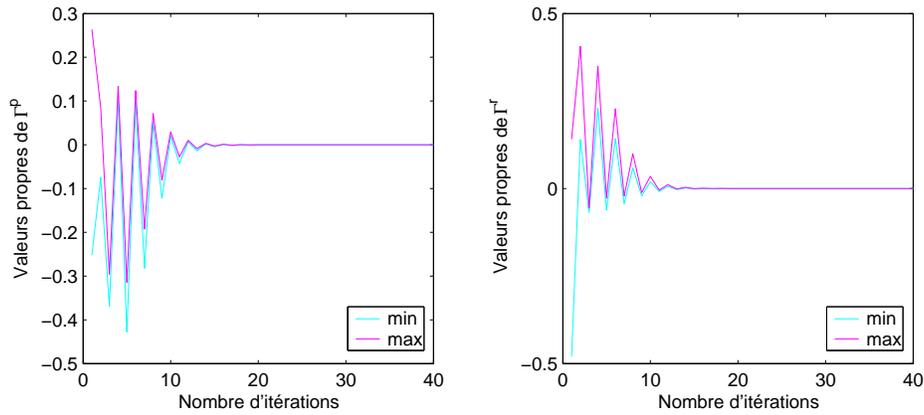


FIG. 3.9 – Evolution des suites  $(\Gamma_l^p)_{l \geq 1}$  et  $(\Gamma_l^r)_{l \geq 1}$ .

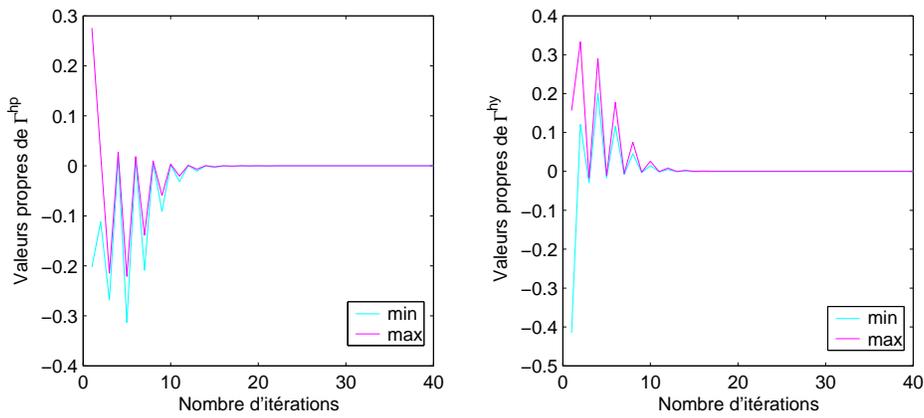


FIG. 3.10 – Evolution des suites  $(\Gamma_l^{hp})_{l \geq 1}$  et  $(\Gamma_l^{hr})_{l \geq 1}$ .

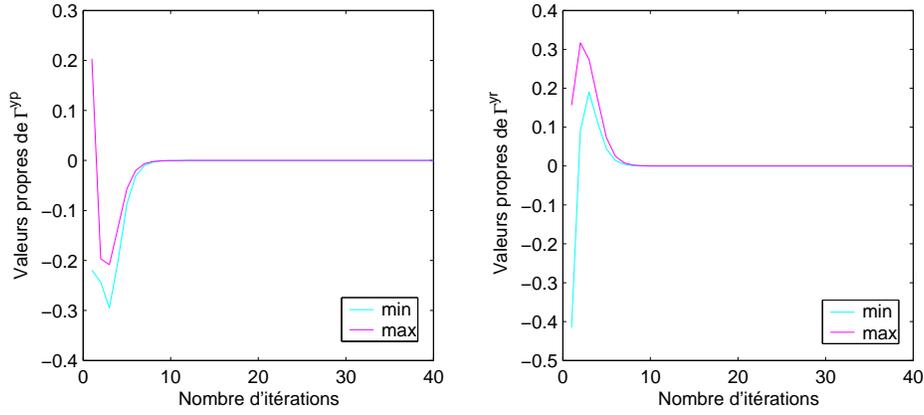


FIG. 3.11 – Evolution des suites  $(\Gamma_l^{yp})_{l \geq 1}$  et  $(\Gamma_l^{yr})_{l \geq 1}$ .

**Exemple 3.6.3** *Considérons maintenant l'exemple suivant. Les coefficients du système algébrique du type Riccati correspondant sont définis ci-dessous.*

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.707 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0.1955 & 1.3464 & -2.4409 & 0 \\ 1.3464 & 9.2702 & -16.8067 & 0 \\ -2.4409 & -16.8067 & 30.4704 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0.0155 & -0.6685 & 0.4394 & 0 \\ -0.6685 & 28.8208 & -18.9425 & 0 \\ 0.4394 & -18.9425 & 12.4501 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \text{diag}([3.5; 2; 4; 5]),$$

$$Q_2 = \text{diag}([1.5; 6; 3; 1]),$$

$$S_{12} = S_{21} = 0.$$

– L'initialisation se fait par le choix de deux matrices  $P_0$  et  $R_0$  définies par :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7.99789541 & 7.35698202 & 6.12569062 & 9.05506804 \\ 7.35698202 & 7.74763243 & 4.62272358 & 9.18239455 \\ 6.12569062 & 4.62272358 & 5.84851487 & 6.80809157 \\ 9.05506804 & 9.18239455 & 6.80809157 & 16.29671835 \end{bmatrix},$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 18.05992567 & 13.07321065 & 17.67166674 & 9.87085557 \\ 13.07321065 & 13.52355845 & 14.19760367 & 10.44017157 \\ 17.67166674 & 14.19760367 & 20.88757207 & 9.77661541 \\ 9.870855575 & 10.44017157 & 9.77661541 & 8.52736008 \end{bmatrix}.$$

• Pour  $\epsilon = 10^{-9}$ , nous obtenons la convergence des deux algorithmes *A.R.1* et *A.R.2*. Par contre l'algorithme *A.L* est divergent. La paire de solutions obtenue est définie positive et stabilisante. Celle-ci est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 7.625731689 & 0.654434069 & 0.637053686 & -3.097106582 \\ 0.654434069 & 0.255513204 & 0.277904812 & -0.087939286 \\ 0.637053686 & 0.277904812 & 0.566944179 & 0.241955368 \\ -3.097106582 & -0.087939286 & 0.241955368 & 6.701975165 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 3.340784449 & 0.208986082 & 0.326996753 & -1.678779379 \\ 0.208986082 & 0.590934159 & 0.223488229 & -0.145262041 \\ 0.326996753 & 0.223488229 & 0.256362395 & -0.111914549 \\ -1.678779379 & -0.145262041 & -0.111914549 & 3.505317074 \end{bmatrix}.$$

La figure 3.12 représente l'allure des normes des matrices  $(P_l - P)$  et  $(R_l - R)$  pour tout  $l \geq 1$ .

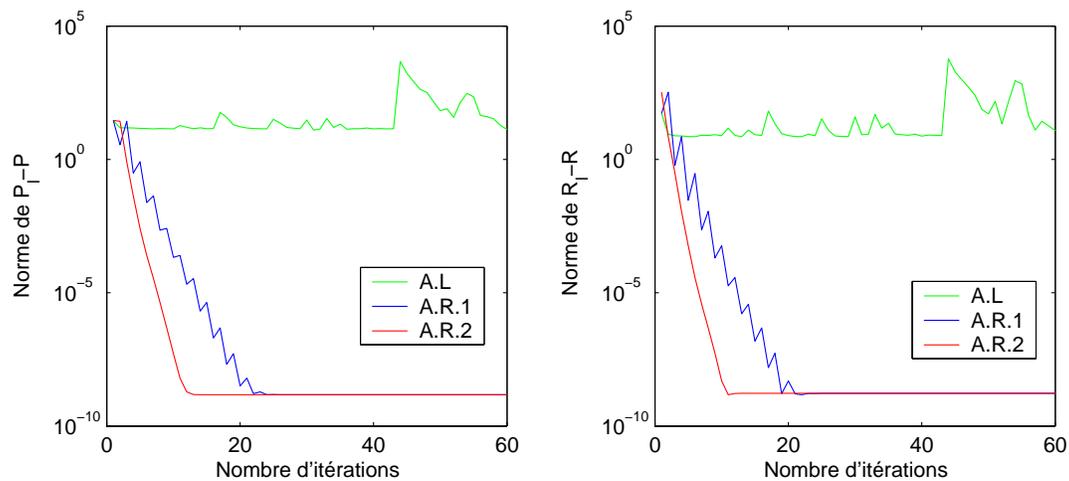


FIG. 3.12 – Performance des algorithmes A.L, A.R.1 et A.R.2

- Afin d'obtenir la convergence de l'algorithme  $A.L$  nous proposons d'initialiser les trois algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$  par le choix de deux matrices définies par :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 9.563801240 & 4.795291432 & 3.251603631 & 9.216944889 \\ 4.795291432 & 4.517280304 & 2.318514567 & 3.011121008 \\ 3.251603631 & 2.318514567 & 4.975977107 & 3.702791912 \\ 9.216944889 & 3.011121008 & 3.702791912 & 10.438175150 \end{bmatrix},$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 10.7068615 & 11.6453668 & 12.3036184 & 3.2074585 \\ 11.6453668 & 23.6793611 & 17.5611725 & 13.7637897 \\ 12.3036184 & 17.5611725 & 16.8479178 & 7.1308378 \\ 3.2074585 & 13.7637897 & 7.1308378 & 11.5182241 \end{bmatrix}.$$

- Pour  $\epsilon = 10^{-8}$  nous obtenons la convergence des trois algorithmes vers la même paire de solutions définie ci dessus.

La figure 3.13 représente l'allure des normes des matrices  $(P_l - P)$  et  $(R_l - R)$  pour tout  $l \geq 1$ .

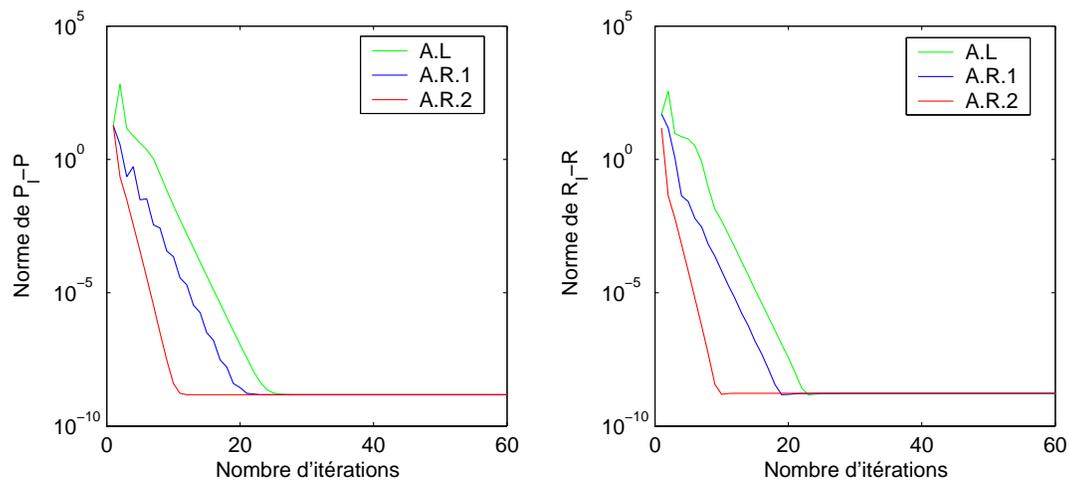


FIG. 3.13 – Performance des algorithmes A.L, A.R.1 et A.R.2

Enfin pour finir ce paragraphe, nous proposons de montrer la performance des trois algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$  par la résolution d'un système algébrique du type Riccati couplé (3.8)-(3.9) dont les coefficients sont des matrices d'ordre 6.

**Exemple 3.6.4** *On considère les coefficients suivants :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ -0.0578 & 0 & 0 & -0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3047 & 0 & 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7489 & 0 & 0 & -0.0002 \end{bmatrix},$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2835 & -0.2095 & -0.0589 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2095 & 0.1548 & 0.0435 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0589 & 0.0435 & 0.0122 \end{bmatrix},$$

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0893 & 0.0235 & -0.0942 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0235 & 0.0062 & -0.0248 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0942 & -0.0248 & 0.0993 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 5 * \text{diag}([2.3; 1.7; .3; 1.1; .85; 1.4]),$$

$$Q_2 = 5 * \text{diag}([0.5; 1; 1.5; 2; 2; 1]),$$

$$S_{12} = S_{21} = 0.$$

– L'initialisation se fait par le choix de deux matrices  $P_0$  et  $R_0$  définies ci-dessous :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 17.10488624 & 11.46534121 & 11.22380157 & 18.29792474 & 6.01180381 & 17.04839811 \\ 11.46534121 & 12.86694149 & 8.38101724 & 14.88158718 & 6.85171903 & 11.79495531 \\ 11.22380157 & 8.38101724 & 16.01789249 & 14.00064802 & 8.14694191 & 12.23327759 \\ 18.29792474 & 14.88158718 & 14.00064802 & 25.57684019 & 11.05769125 & 16.42066675 \\ 6.01180381 & 6.85171903 & 8.14694191 & 11.05769125 & 8.51512821 & 4.32448403 \\ 17.04839811 & 11.79495531 & 12.23327759 & 16.42066675 & 4.32448403 & 20.26099939 \end{bmatrix},$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 13.66916773 & 14.02998131 & 12.65215974 & 9.37366229 & 7.30184535 & 14.06757433 \\ 14.02998131 & 20.83637123 & 15.92676414 & 13.62791671 & 7.57887897 & 18.10670300 \\ 12.65215974 & 15.92676414 & 27.01396965 & 15.95711144 & 10.73772519 & 18.83639843 \\ 9.37366229 & 13.62791671 & 15.95711144 & 19.2777738 & 4.22588450 & 14.91604204 \\ 7.30184535 & 7.57887897 & 10.73772519 & 4.22588450 & 6.72783740 & 10.40402554 \\ 14.06757433 & 18.10670300 & 18.83639843 & 14.9160420 & 10.40402554 & 27.93974411 \end{bmatrix},$$

- Pour  $\epsilon = 10^{-8}$ , nous obtenons la convergence des trois algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$  vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes. La convergence des algorithmes  $A.R.1$  et  $A.R.2$  est indépendante du choix des valeurs initiales. L'algorithme  $A.L$  est fortement sensible aux conditions initiales. Cette paire de solutions est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 19.4044973 & 5.2618826 & 2.6075825 & 13.954556 & 9.1759210 & 9.9083186 \\ 5.2618826 & 15.4878260 & 4.0579575 & 5.7626574 & 9.954965 & 5.5745372 \\ 2.6075825 & 4.0579575 & 16.84479973 & -6.9087523 & -7.305284 & -4.2099097 \\ 13.954556 & 5.7626574 & -6.9087523 & 28.51429702 & 23.301992 & 23.1597587 \\ 9.1759210 & 9.9549657 & -7.3052842 & 23.3019923 & 30.201225 & 21.6248260 \\ 9.9083186 & 5.5745372 & -4.2099097 & 23.1597587 & 21.624826 & 24.3031357 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 9.7336950 & 2.90853138 & 1.31078648 & 7.53637173 & 7.73651554 & 6.86186519 \\ 2.90853138 & 12.1943283 & 4.10149433 & 1.90435631 & 4.09359615 & 2.22142621 \\ 1.31078648 & 4.10149433 & 24.51111044 & -8.63638792 & -9.01137270 & -1.14221883 \\ 7.53637173 & 1.90435631 & -8.63638792 & 26.74440534 & 25.72076956 & 20.61570237 \\ 7.73651554 & 4.09359615 & -9.01137270 & 25.72076956 & 30.43851011 & 19.00321793 \\ 6.86186519 & 2.22142621 & -1.14221883 & 20.61570237 & 19.00321793 & 28.76301552 \end{bmatrix}.$$

La figure 3.14 représente l'allure des normes des matrices  $(P_l - P)$  et  $(R_l - R)$  pour tout  $l \geq 1$ .

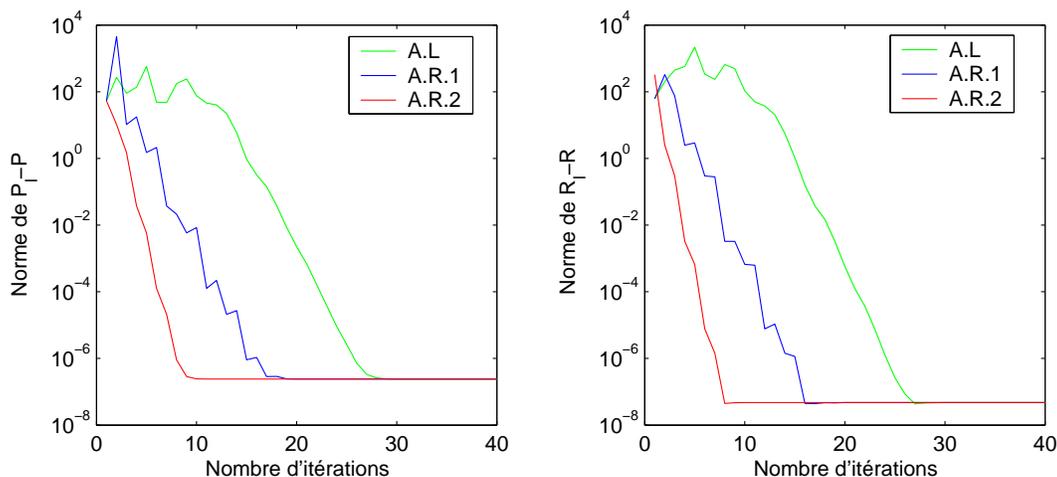


FIG. 3.14 – Performance des algorithmes A.L, A.R.1 et A.R.2

L'étude des exemples présentés dans ce paragraphe nous a permis de montrer les propriétés des trois algorithmes  $A.L$ ,  $A.R.1$  et  $A.R.2$  :

- L'algorithme  $A.L$  possède une forte sensibilité par rapport au choix des valeurs initiales. Cette sensibilité peut engendrer une lenteur de la convergence ou bien la divergence de celui-ci. De même que la convergence vers une paire de solutions semi-définies positives et stabilisantes n'est pas toujours garantie et dépend du signe de la suite de matrices  $(\tilde{Q}_l)_{l \geq 1}$  définie par la condition (C3).
- L'algorithme  $A.R.1$  est d'un point de vue numérique plus performant que l'algorithme  $A.L$ . Mais l'exemple 3.6.2 a montré une défaillance de celui-ci pour la recherche d'une paire de solutions stabilisantes.
- L'algorithme  $A.R.2$  proposé dans ce chapitre est d'un point de vue numérique plus performant que les algorithmes  $A.L$  et  $A.R.1$ . Il nous a permis dans tous les exemples que nous avons exécuté une convergence vers une paire de

solutions définies positives et stabilisantes. Cette convergence est garantie indépendamment des conditions initiales. La solution ainsi obtenue est également une solution optimale du problème considéré.

- Enfin on notera que la convergence des trois algorithmes est vérifiée même lorsque les suites itératives obtenues ne sont pas monotones.

### 3.7 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous nous sommes particulièrement intéressés à des méthodes itératives pour les systèmes algébriques du type Riccati couplés issus de la boucle fermée. Nous avons étudié des propriétés des solutions itératives obtenues au moyen de deux types d'itérations. Pour les itérations du type Lyapunov nous avons établi des conditions suffisantes pour la stabilité de la dynamique générée par celles-ci. Nous avons également donné une minoration de la solution en fonction de la solution d'une équation algébrique du type Riccati. Enfin, concernant l'algorithme correspondant nous avons établi des conditions suffisantes de convergence. Pour les méthodes itératives du type Riccati, nous avons étudié deux versions. L'algorithme issu de la version 1 existe dans la littérature. Pour cet algorithme nous avons donné des conditions suffisantes de convergence. Par contre, l'algorithme issu des itérations du type Riccati, version 2 est nouveau. Des conditions suffisantes de convergence ont aussi été établies. Afin de comparer les vitesses de convergence des trois algorithmes correspondants, un plan de simulation numérique est effectué. Le calcul de la paire de solutions appliqué à un même exemple montre l'efficacité et la bonne performance de l'algorithme issu des itérations du type Riccati, version 2.

D'autres pistes restent à explorer pour ces deux types de méthodes numériques. Par exemple, dans les deux méthodes nous nous sommes restreints à des conditions de convergence dérivant de la monotonocité des suites itératives. On pourrait s'intéresser à des conditions qui ne dérivent pas de la monotonocité. En effet, des simulations numériques montrent que les trois algorithmes convergent même lorsque les suites itératives ne sont pas monotones. Enfin, une étude comparative des vitesses de convergence de ces trois algorithmes pourrait aussi faire l'objet d'autres travaux.

# Chapitre 4

## Systeme algébrique de MCV-Riccati en boucle fermée

### 4.1 Introduction

L'étude d'un problème de contrôle optimal minimisant la variance d'un critère quadratique soumis à une contrainte différentielle-stochastique a fait l'objet de plusieurs travaux. Dans ce cadre, on renvoie aux travaux de Sain [Sain65] et [Sain66], Whittle [Whit91] et Sain et al. [SWS92]. Ces travaux ont permis la représentation de la solution optimale au moyen d'une paire de solutions stabilisantes d'un système algébrique du type Riccati fortement couplé.

Les conditions suffisantes d'existence de la paire de solutions pour ces systèmes dans le cas différentiel ont été établies pour la première fois par Freiling et al. [FLJ99]. Ces conditions ont été obtenues en utilisant des théorèmes de comparaison pour des équations différentielles du type Riccati. Dans le cas du système algébrique correspondant, il n'existe à notre connaissance aucun résultat sur l'existence d'une paire de solutions stabilisantes. Afin d'obtenir une paire de solutions approchées, Freiling et al. [FLJ99] ont proposé un algorithme en se basant sur des itérations du type Lyapunov. Les conditions de convergence de cet algorithme ont été établies sous certaines conditions. La paire de solutions itératives obtenue est unique et est semi-définie positive. Cette paire admet également une limite semi-définie positive et stabilisante.

En 2003, Whon et al. [WSL03] ont étudié le même algorithme en introduisant une légère modification sur celui-ci. Des conditions nouvelles de convergence sont données.

Dans notre travail nous nous sommes intéressés à deux aspects. Le premier consiste à faire une étude plus approfondie de l'algorithme issu des itérations du type Lyapunov proposé par Freiling et al. [FLJ99]. Nous allons établir certaines propriétés de la paire de solutions. Nous établirons une nouvelle preuve pour la stabilité de la dynamique générée par les différentes étapes de cet algorithme. Enfin, nous donnerons des conditions de convergence vers une paire de solutions stabilisantes. Le deuxième aspect consiste à introduire une nouvelle procédure itérative. Celle-ci sera dite : itérations du type Riccati-Lyapunov. Nous donnerons en détail les différentes étapes de l'algorithme correspondant. Nous établirons des propriétés des solutions itératives ainsi que des conditions suffisantes de convergence. Afin de comparer les deux algorithmes proposés, un plan de simulations numériques sera établi. Le calcul de la paire de solutions appliqué à un même exemple montre une vitesse de convergence plus grande de l'algorithme issu des itérations du type Riccati-Lyapunov.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans le deuxième paragraphe, nous introduisons le système algébrique du type Riccati couplé à étudier. Dans le troisième paragraphe, nous rappelons le procédé itératif du type Lyapunov. Nous établirons des propriétés des solutions itératives obtenues en utilisant des itérations de ce type. Dans le paragraphe 4, nous proposons un nouvel algorithme de résolution. Nous donnerons également des propriétés des solutions itératives. Enfin, nous établirons des conditions suffisantes de convergence de celui-ci. Dans le cinquième paragraphe, nous donnerons différents résultats obtenus en exécutant les deux algorithmes. Le sixième paragraphe est consacré aux conclusions et aux perspectives.

## 4.2 Présentation du problème

Dans ce paragraphe, nous considérons une variante d'un problème de contrôle optimal dans le cas différentiel-stochastique [SWS92].

Le système dynamique sera défini au moyen d'une équation différentielle-stochastique.

La fonction objectif sera du type quadratique et sera définie sur un horizon infini. Le problème considéré ici sera la minimisation de la variance de cette fonction objectif sous l'effet d'une contrainte différentielle-stochastique. Pour la formulation de la solution optimale, nous utiliserons la notion de commande linéaire en boucle fermée.

On considère l'équation différentielle-stochastique définie par :

$$dx(t) = [Ax(t) + Bu(t)]dt + Edw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est un contrôle admissible,  $w(t)$  est un vecteur de mouvement Brownien de dimension  $d$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ,  $dw(t)$  est un processus Gaussien satisfaisant  $E\{dw(t)dw^T(t)\} = \tilde{W}dt$ . Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $E$  et  $\tilde{W}$  sont de dimensions  $n \times n$  à coefficients réels.

On définit la fonction quadratique suivante :

$$\hat{J}(x, u) = \int_0^{t_f} \{u^T Ru + x^T Qx\} ds. \quad (4.2)$$

La performance du système (4.1) est évaluée en minimisant le critère défini par :

$$J(x, u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} [E\{\hat{J}^2(x, u)\} - E^2\{\hat{J}(x, u)\}]. \quad (4.3)$$

Afin de donner un sens au critère quadratique défini par l'équation (4.3) sur un horizon infini, nous allons définir un ensemble de matrices stables par :

$$\mathcal{F} = \{F, F \in \mathbb{R}^{n \times n} / A + BF \text{ est stable}\}. \quad (4.4)$$

A l'aide de l'ensemble  $\mathcal{F}$ , nous allons considérer l'ensemble des solutions stabilisantes du système différentiel-stochastique (4.1). Celles-ci sont définies par :

$$\dot{x} = (A + BF)x, \quad x(0) = x_0. \quad (4.5)$$

Dans ce cas, l'ensemble des contrôles admissibles sera noté  $\mathcal{U}$  et est défini par :

$$\mathcal{U} = \{u(x) / u(x) = Fx\}. \quad (4.6)$$

Etant donné un paramètre  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , la formulation d'un contrôle optimal en boucle fermée et minimisant le critère défini par l'équation (4.3) est donnée dans Won et al. [WSL03]. Celui-ci est exprimé en fonction d'une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé de la forme suivante :

$$0 = A^T M + MA - MSM + \gamma^2 VSV + Q, \quad (4.7)$$

$$0 = A^T V + VA - 2\gamma VSV - MSV - VSM + 4MWM, \quad (4.8)$$

où

$$\gamma \geq 0, \quad S := BR^{-1}B^T \quad \text{et} \quad W := E\tilde{W}E^T.$$

Nous donnons ci-dessous la définition d'une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé (4.7)-(4.8). La Proposition 4.2.1 nous permet d'obtenir la formulation du contrôle optimal ainsi que la valeur optimale du critère correspondant.

**Définition 4.2.1** (*solution stabilisante*)

On dit que la paire de solutions  $(M, V)$  du système algébrique du type Riccati couplé (4.7)-(4.8) est **stabilisante** si, la matrice  $A - B(M + \gamma V)$  est stable.

**Proposition 4.2.1** [WSL03] *On suppose qu'il existe une paire de solutions  $(M, V)$  stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé (4.7)-(4.8). Alors, il existe un contrôle en boucle fermée pour le problème (4.1)-(4.3). Celui-ci est donné par l'expression :*

$$u^*(x) = -R^{-1}B^T[M + \gamma V]x. \quad (4.9)$$

Dans ce cas la valeur minimale du critère (4.3) est donnée par :

$$J(u^*(x_0)) = x_0^T[M + \gamma V]x_0. \quad (4.10)$$

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier deux types de méthodes itératives de calcul d'une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati

couplé (4.7)-(4.8). Ces méthodes sont construites à partir de la Proposition 4.2.1 et consistent à utiliser la matrice  $Z := M + \gamma V$  pour trouver une dynamique stable commune aux deux équations (4.7)-(4.8).

Un calcul élémentaire effectué sur les équations algébriques (4.7)-(4.8), montre que la matrice  $Z := M + \gamma V$  satisfait l'équation algébrique du type Riccati :

$$0 = A^T Z + Z A - Z S Z + 4\gamma M W M + Q. \quad (4.11)$$

En utilisant l'équation (4.11), les équations (4.7)-(4.8) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$0 = (A - S Z)^T M + M(A - S Z) + Z S Z + Q, \quad (4.12)$$

$$0 = (A - S Z)^T V + V(A - S Z) + 4M W M. \quad (4.13)$$

Afin de résoudre les deux équations algébriques du type Lyapunov (4.12)-(4.13), nous allons appliquer des "itérations du type Lyapunov". Par contre pour résoudre les équations (4.11)-(4.12), nous allons appliquer des "itérations du type Riccati-Lyapunov".

## 4.3 Itérations du type Lyapunov

Dans ce paragraphe, nous détaillons la méthode de calcul d'une paire de solutions itératives du système algébrique du type Riccati couplé (4.7)-(4.8). Nous donnerons également des propriétés des solutions itératives ainsi que des conditions suffisantes de convergence de l'algorithme correspondant.

### 4.3.1 Description de l'algorithme

La procédure décrivant des itérations du type Lyapunov sera désignée par "**Algorithme A.L.C.V**". Les étapes de calcul d'une paire de solutions itératives  $(M_l, V_l)_{l \geq 1}$  du système algébrique du type Riccati couplé (4.7)-(4.8) sont basées sur les phases suivantes :

### Algorithme A.L.C.V

On définit une erreur admissible par  $\epsilon > 0$ .

#### 1. Initialisation

L'initialisation se fait par le choix d'une matrice  $Z_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $A - SZ_0$  soit stable.

#### 2. Evaluation de la solution

Le calcul de la paire de solutions  $(M_l, V_l)_{\geq 1}$  se fait de la manière suivante :

– (a) on détermine  $M_l$  comme l'unique solution de l'équation

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_{l-1})^T M_l + M_l(A - SZ_{l-1}) \\ &+ Z_{l-1}SZ_{l-1} + Q, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$V_l$  comme l'unique solution de l'équation

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_{l-1})^T V_l + V_l(A - SZ_{l-1}) \\ &+ 4M_{l-1}WM_{l-1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

– (b) A l'étape  $l \geq 1$ , on évalue  $Z_l := M_l + \gamma V_l$  et  $A_l := A - SZ_l$ .

#### 3. Calcul de l'erreur

Le calcul de l'erreur se fera à chaque étape  $l \geq 1$ , en évaluant les quantités suivantes

$$N_1(M_l, V_l) = A_l^T M_l + M_l A_l + Z_l S Z_l + Q,$$

$$N_2(M_l, V_l) = A_l^T V_l + V_l A_l + 4M_l W M_l.$$

#### 4. Critère d'arrêt

Soit

$$e_l := \max\{\|N_1(M_l, V_l)\|_\infty, \|N_2(M_l, V_l)\|_\infty\}. \quad (4.16)$$

Alors le critère d'arrêt pour  $l \geq 1$  est tel que  $e_l \leq \epsilon$ .

#### 5. Retour

$l \rightarrow l + 1$ , on retourne à la phase de calcul de la paire de solutions c'est à dire à la phase (a) de l'algorithme jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

**Remarque 4.3.1** Afin de garantir l'unicité de la paire de solutions obtenues en performant l'algorithme *A.L.C.V* il est nécessaire que les matrices  $A_l := A - SZ_l$  soient stables pour tout  $l \geq 0$ .

### 4.3.2 Propriétés des solutions itératives

Dans ce paragraphe, nous rappelons les conditions suffisantes pour la convergence de l'algorithme *A.L.C.V*. Celles-ci sont données dans [FLJ99]. Nous proposons également de démontrer des propriétés de la paire de solutions  $(M_l, Z_l)_{l \geq 1}$  obtenue en performant l'algorithme *A.L.C.V*.

**Proposition 4.3.1** [FLJ99] On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.

1. La paire  $(\sqrt{Q}, A)$  est détectable.
2. Pour tout  $l \geq 1$ , la suite  $\Sigma_l$  définie par :

$$\Sigma_l := (Z_{l-1} - Z_l)\gamma V_l + \gamma V_l(Z_{l-1} - Z_l) + (Z_{l-1} - Z_l)S(Z_{l-1} - Z_l),$$

est semi-définie positive.

3. La matrice  $W$  satisfait

$$W\Delta + \Delta W + \Delta W\Delta, \quad \forall \Delta \geq 0. \quad (4.17)$$

Alors, les suites itératives  $(M_l)_{l \geq 1}$  et  $(Z_l)_{l \geq 1}$  définies par l'algorithme *A.L.C.V* sont convergentes. La suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  admet une limite  $Z$  semi-définie positive telle que  $A - SZ$  est stable.

Afin de garantir l'existence et l'unicité d'une paire de solutions  $(M_l, V_l)_{l \geq 1}$  des équations itératives (4.14)-(4.15) nous proposons les hypothèses suivantes :

- (H0) :  $\gamma \geq 0$ ,  $Q > 0$ ,  $S \geq 0$  et  $W \geq 0$ .
- (H1) : Il existe une matrice  $Z_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $(A - SZ_0)$  est stable.

- (H2) : Il existe une solution stabilisante et définie positive  $P$  de l'équation algébrique du type Riccati

$$0 = A^T P + P A + Q - P S P. \quad (4.18)$$

- (H3) : La suite de matrices  $(Q_l)_{l \geq 1}$  définie par :

$$Q_l := Z_l S Z_l - (Z_l - P) S (Z_l - P) + Q, \quad (4.19)$$

est définie positive.

En utilisant les équations (4.14)-(4.15), nous obtenons l'équation itérative satisfaite par la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$ . Celle-ci est définie par :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - S Z_{l-1})^T Z_l + Z_l (A - S Z_{l-1}) \\ &+ Z_{l-1} S Z_{l-1} + 4\gamma M_{l-1} W M_{l-1} + Q. \end{aligned} \quad (4.20)$$

L'équation (4.20), nous permet d'obtenir certaines propriétés des suites  $(M_l)_{l \geq 1}$  et  $(Z_l)_{l \geq 1}$ . Celles-ci sont résumées ci dessous.

**Théorème 4.3.1** *On suppose que les hypothèses (H0) à (H3) sont satisfaites. Alors, les suites  $(M_l)_{l \geq 1}$  et  $(Z_l)_{l \geq 1}$  définies par les équations (4.14)-(4.20) possèdent les propriétés suivantes :*

1. Les matrices  $(A - S Z_l)$  sont stables pour tout  $l \geq 0$ .
2. La solution  $P$  de l'équation algébrique du type Riccati (4.18) est telle que

$$0 < P \leq M_l \leq Z_l, \quad \forall l \geq 1. \quad (4.21)$$

### Preuve du Théorème 4.3.1

1. Les hypothèses (H1) à (H3) montrent que les matrices  $A - S Z_l$  sont stables pour tout  $l \geq 0$ .

- En effet, l'hypothèse (H1) assure qu'il existe une matrice  $Z_0$  telle que  $A - SZ_0$  est stable.
- D'autre part, la solution  $P$  définie par l'équation algébrique du type Riccati (4.18) satisfait pour tout  $l \geq 0$  les équations algébriques du type Lyapunov définies par :

$$0 = (A - SZ_l)^T P + P(A - SZ_l) + Q_l. \quad (4.22)$$

Compte tenu des hypothèses (H2) et (H3), la Proposition 1.2.3, montre que les matrices  $(A - SZ_l)$  sont stables pour tout  $l \geq 1$ .

2. Pour montrer que  $P \leq M_l$  pour tout  $l \geq 1$ , nous allons utiliser les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_{l-1})^T P + P(A - SZ_{l-1}) \\ &+ Z_{l-1} S Z_{l-1} - (P - Z_{l-1}) S (P - Z_{l-1}) + Q, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_{l-1})^T M_l + M_l (A - SZ_{l-1}) \\ &+ Z_{l-1} S Z_{l-1} + Q. \end{aligned} \quad (4.24)$$

En retranchant l'équation (4.24) de l'équation (4.23), nous obtenons l'équation algébrique du type Lyapunov :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_{l-1})^T (P - M_l) + (P - M_l) (A - SZ_{l-1}) \\ &- (P - Z_{l-1}) S (P - Z_{l-1}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Les matrices  $A - SZ_{l-1}$  étant stables pour tout  $l \geq 1$ , compte tenu du fait que  $S \geq 0$ , nous obtenons grâce à la Proposition 1.2.3,  $P \leq M_l$ .

3. Enfin, pour montrer que  $P \leq Z_l$  pour tout  $l \geq 1$ , nous utilisons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_{l-1})^T P + P(A - SZ_{l-1}) \\ &+ Z_{l-1} S Z_{l-1} - (P - Z_{l-1}) S (P - Z_{l-1}) + Q, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
0 &= (A - SZ_{l-1})^T Z_l + Z_l(A - SZ_{l-1}) \\
&+ Z_{l-1}SZ_{l-1} + 4\gamma M_{l-1}WM_{l-1} + Q.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

En retranchant l'équation (4.26) de l'équation (4.27), nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned}
0 &= (A - SZ_{l-1})^T(Z_l - P) + (Z_l - P)(A - SZ_{l-1}) \\
&+ 4\gamma M_{l-1}WM_{l-1} + (P - Z_{l-1})S(P - Z_{l-1}).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

En tenant compte de la stabilité des matrices  $(A - SZ_{l-1})$  pour tout  $l \geq 1$  et de l'hypothèse (H0), la Proposition 1.2.3 nous permet d'obtenir  $P \leq Z_l$  pour tout  $l \geq 1$ .

■

### 4.3.3 Condition suffisante de convergence

Dans ce paragraphe, nous donnons une condition suffisante pour que l'algorithme *A.L.C.V* défini précédemment soit convergent. Cette convergence est établie à partir de la monotonocité de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  définie par l'équation (4.20). Les propriétés établies dans la Proposition 4.3.1 serviront à montrer l'existence d'une limite semi-définie positive de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$ . Cette limite permet de définir une paire de solutions stabilisantes du système algébrique du type Riccati couplé (4.7)-(4.8).

Nous donnons l'hypothèse de monotonocité suivante :

- (H4) : La suite de matrices  $(\Gamma_l)_{l \geq 1}$ , définie par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_l &:= 4\gamma(M_{l-1}WM_{l-1} - M_lWM_l) \\
&+ (Z_{l-1} - Z_l)S(Z_{l-1} - Z_l),
\end{aligned}$$

est semi-définie positive.

**Proposition 4.3.2** *Sous les hypothèses (H0) à (H4), la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  définie par l'équation (4.20) admet une limite  $Z$  semi-définie positive telle que la matrice  $(A - SZ)$  est stable.*

### Preuve de la Proposition 4.4.1

1. Nous commençons par établir que la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  est décroissante.

- Sous les hypothèses (H0) à (H3), les propriétés du Théorème (4.3.1) sont satisfaites, les matrices  $(A - SZ_l)$  sont stables pour tout  $l \geq 0$ .
- D'autre part, nous obtenons à partir de l'équation (4.20)

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_l)^T Z_{l+1} + Z_{l+1}(A - SZ_l) \\ &+ Z_l SZ_l + 4\gamma M_l W M_l + Q. \end{aligned} \quad (4.29)$$

En introduisant la matrice  $(\Gamma_l)_{l \geq 1}$  définie par l'hypothèse (H4) dans l'équation (4.20), nous pouvons réécrire celle-ci sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_l)^T Z_l + Z_l(A - SZ_l) \\ &+ Z_l SZ_l + 4\gamma M_l W M_l + Q + \Gamma_l. \end{aligned} \quad (4.30)$$

En retranchant l'équation (4.29) de l'équation (4.30), nous obtenons l'équation algébrique du type Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_l)^T (Z_l - Z_{l+1}) + (Z_l - Z_{l+1})(A - SZ_l) \\ &+ \Gamma_l. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Les matrices  $(A - SZ_l)$  définies dans l'équation (4.31) sont stables pour tout  $l \geq 1$ . En tenant compte de l'hypothèse (H4) et de la Proposition 1.2.3, on en déduit que  $Z_l \geq Z_{l+1}$  pour tout  $l \geq 1$ .

2. Nous montrons maintenant l'existence d'une matrice  $Z$  semi-définie positive telle que  $A - SZ$  soit stable.

Sous les hypothèses (H0) à (H3), les propriétés du Théorème (4.3.1) sont satisfaites, nous avons donc :

- la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  est définie positive et est minorée par la matrice  $P$ . Compte tenu du fait qu'elle soit décroissante, il existe alors une matrice  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$

telle que  $\lim_{l \rightarrow \infty} Z_l = Z$ . La suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  étant définie positive, sa limite  $Z$  est donc semi-définie positive.

- Pour montrer que la matrice  $A - SZ$  est stable, nous allons utiliser le fait que la suite de matrices  $A - SZ_l$  est stable pour tout  $l \geq 1$  et que la matrice  $Q$  est définie positive.

En effet, soit  $(v_l)_{l \geq 1}$  un vecteur propre de la matrice  $A - SZ_l$  associé à la valeur propre  $(\lambda_l)_{l \geq 1}$ , avec  $\|v_l\| = 1$ . Puisque  $A - SZ_l$  est stable pour tout  $l \geq 1$ , posons  $\lambda_l = a_l + ib_l$  avec  $a_l < 0$ .

Soit  $(M_l)_{l \geq 1}$  la solution définie positive de l'équation algébrique du type Lyapunov (4.14) :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_{l-1})^T M_l + M_l (A - SZ_{l-1}) \\ &+ Z_{l-1} S Z_{l-1} + Q. \end{aligned} \quad (4.32)$$

En multipliant l'équation (4.32) par  $v_{l-1}^*$  à gauche et par  $v_{l-1}$  à droite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\lambda}_{l-1} v_{l-1}^* M_l v_{l-1} + \lambda_{l-1} v_{l-1}^* M_l v_{l-1} \\ &+ v_{l-1}^* [Z_{l-1} S Z_{l-1} + Q] v_{l-1}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

i.e

$$0 = 2a_{l-1} v_{l-1}^* M_l v_{l-1} + v_{l-1}^* [Z_{l-1} S Z_{l-1} + Q] v_{l-1}. \quad (4.34)$$

Puisque  $Q > 0$ , nous avons

$$v_{l-1}^* [Q + Z_{l-1} S Z_{l-1}] v_{l-1} \geq v_{l-1}^* Q v_{l-1} \geq \lambda_{\min}(Q) > 0. \quad (4.35)$$

Comme  $M_l > 0$  pour tout  $l \geq 1$  et compte tenu de l'équation (4.34), nous obtenons à partir de l'équation (4.35) :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall l \geq 0, \operatorname{Re}(\lambda_l) \leq -\alpha < 0. \quad (4.36)$$

i.e  $\lim_{l \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\lambda_l) < 0$ , d'où la stabilité de la matrice  $(A - SZ)$ . ■

## 4.4 Itérations du type Riccati-Lyapunov

Dans ce paragraphe, nous détaillons la méthode de calcul d'une paire de solutions itératives du système algébrique du type Riccati couplé (4.11)-(4.12).

### 4.4.1 Description de la procédure

La procédure décrivant des itérations du type Riccati-Lyapunov sera désignée par "**Algorithme A.R.C.V**". Les étapes de calcul d'une paire de solutions itératives  $(Z_l, M_{l+1})$ , pour tout  $l \geq 0$  sont basées sur les phases suivantes :

#### Algorithme A.R.C.V

On définit une erreur admissible par  $\epsilon > 0$ .

##### 1. Initialisation

L'initialisation se fait par le choix d'une matrice  $M_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

##### 2. Evaluation de la solution

Le calcul de la paire de solutions  $(Z_l, M_{l+1})_{l \geq 0}$  se fait de la manière suivante :

- (a) on détermine  $Z_l$  comme l'unique solution de l'équation du type Riccati

$$0 = A^T Z_l + Z_l A - Z_l S Z_l + 4\gamma M_l W M_l + Q. \quad (4.37)$$

- (b)  $M_{l+1}$  comme l'unique solution de l'équation du type Lyapunov

$$0 = (A - S Z_l)^T M_{l+1} + M_{l+1} (A - S Z_l) + Z_l S Z_l + Q. \quad (4.38)$$

- (c) A l'étape  $l \geq 1$ , on évalue  $A_l := A - S Z_l$ .

##### 3. Calcul de l'erreur

Le calcul de l'erreur se fera à chaque étape  $l \geq 1$ , en évaluant les quantités suivantes :

$$N_1(Z_l, M_l) = A^T Z_l + Z_l A - Z_l S Z_l + 4\gamma M_l W M_l + Q,$$

$$N_2(Z_l, M_l) = A_l^T M_l + M_l A_l + Z_l S Z_l + Q.$$

#### 4. Critère d'arrêt

Soit

$$e_l := \max\{\|N_1(M_l, V_l)\|_\infty, \|N_2(M_l, V_l)\|_\infty\}. \quad (4.39)$$

Alors le critère d'arrêt pour  $l \geq 1$  est tel que  $e_l \leq \epsilon$ .

#### 5. Retour

$l \rightarrow l + 1$ , on retourne à la phase de calcul de la paire de solutions c'est à dire à la phase (a) et à la phase (b) de l'algorithme jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

**Remarque 4.4.1** *A l'inverse de l'algorithme A.L.C.V l'initialisation de l'algorithme A.R.C.V n'est soumise à aucune condition.*

Afin de garantir l'existence et l'unicité d'une solution stabilisante  $(Z_l)_{l \geq 0}$  de l'équation algébrique du type Riccati (4.37), nous proposons l'hypothèse suivante :

- (H5) :  $(A, B)$  est stabilisable et  $(\sqrt{Q}, A)$  est détectable.

**Lemme 4.4.1** [Wonh68] *On suppose que les conditions (H0) et (H5) sont satisfaites, alors la suite  $(Z_l)_{l \geq 0}$  définies par l'équation (4.37) existe de manière unique. Celle-ci est également semi-définie positive et stabilisante.*

L'existence de la suite  $(Z_l)_{l \geq 0}$  telle que  $A - SZ_l$  est stable ainsi que la Proposition 1.2.3 entraîne l'existence et l'unicité de la suite  $(M_l)_{l \geq 1}$  définie par l'équation (4.38). Ainsi, les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme A.R.C.V sont toujours satisfaites.

#### 4.4.2 Propriétés des solutions itératives

Dans ce paragraphe, nous donnons des propriétés de la paire de solutions  $(Z_l, M_{l+1})_{l \geq 0}$  définie par les équations (4.37)-(4.38).

**Théorème 4.4.1** *On suppose que les hypothèses (H0) et (H5) sont vérifiées. Alors, la paire de solutions  $(M_l, Z_l)_{l \geq 0}$  définies par les équations (4.37)-(4.38) sont telles que*

$$0 < P \leq M_{l+1} \leq Z_l, \quad \forall l \geq 0. \quad (4.40)$$

**Preuve du Théorème 4.4.1**

1. Sous l'hypothèse (H5), nous savons que les suites de matrices  $A - SZ_l$  sont stables pour tout  $l \geq 0$ .

Considérons l'équation du type Lyapunov satisfaite par  $M_{l+1}$ . Celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_l)^T M_{l+1} + M_{l+1}(A - SZ_l) \\ &+ Z_l S Z_l + Q. \end{aligned} \quad (4.41)$$

De même que l'équation (4.37) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_l)^T Z_l + Z_l(A - SZ_l) \\ &+ Z_l S Z_l + 4\gamma M_l W M_l + Q. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Nous obtenons en retranchant l'équation (4.41) de l'équation (4.42) l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_l)^T (Z_l - M_{l+1}) + (Z_l - M_{l+1})(A - SZ_l) \\ &+ 4\gamma M_l W M_l. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Puisque les matrices  $(A - SZ_l)$  sont stables pour tout  $l \geq 0$  et en tenant compte de l'hypothèse (H0), nous obtenons grâce à la Proposition 1.2.3  $M_{l+1} \leq Z_l$  pour tout  $l \geq 0$ .

2. Afin de montrer l'inégalité :

$$0 < P \leq M_{l+1}, \quad \forall l \geq 0. \quad (4.44)$$

nous allons utiliser l'équation suivante :

$$0 = (A - SZ_l)^T P + P(A - SZ_l) + Z_l S Z_l \quad (4.45)$$

$$- (Z_l - P)S(Z_l - P) + Q. \quad (4.46)$$

En retranchant l'équation (4.41) de l'équation (4.45), nous obtenons l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - SZ_l)^T(P - M_{l+1}) + (P - M_{l+1})(A - SZ_l) \\ &\quad - Z_lSZ_l. \end{aligned} \tag{4.47}$$

En tenant compte de la stabilité des matrice  $(A - SZ_l)$  pour tout  $l \geq 0$  ainsi que de l'hypothèse  $(H0)$ , la Proposition 1.2.3 nous permet d'obtenir

$$P \leq M_{l+1}, \quad \forall l \geq 0. \tag{4.48}$$

■

### 4.4.3 Condition suffisante de convergence

Dans ce paragraphe, nous donnons une condition suffisante pour que l'algorithme *A.R.C.V* soit convergent. Cette convergence est établie à partir de la monotonie de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  définie par l'équation (4.37).

Nous donnons l'hypothèse de monotonie suivante :

–  $(H6)$  : La suite de matrices  $(\Gamma_l^y)_{l \geq 1}$  définie par :

$$\Gamma_l^y := 4\gamma(M_lWM_l - M_{l+1}WM_{l+1})$$

est semi-définie positive.

Pour montrer que la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  est monotone, nous allons utiliser un résultat sur la comparaison des solutions (stabilisantes) pour des équations algébriques du type Riccati. Nous rappelons ce résultat dans le Lemme 4.4.2.

**Lemme 4.4.2** [LaRo95] *Soient  $X_i$ , ( $i = 1, 2$ ) les solutions des équations algébriques du type Riccati :*

$$0 = A_i^T X_i + X_i A_i + Q_i - X_i S_i X_i, \tag{4.49}$$

où  $A_i$ ,  $Q_i$  et  $S_i$  sont des matrices à coefficients réels de dimension  $n$ , avec  $Q_i = Q_i^T$  et  $S_i = S_i^T$ , ( $i = 1, 2$ ). Soient

$$K_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & A_1^T \\ A_1 & -S_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_2 = \begin{bmatrix} Q_2 & A_2^T \\ A_2 & -S_2 \end{bmatrix}.$$

On suppose que  $X_i$ , ( $i = 1, 2$ ) sont des solutions semi-définies positives et stabilisantes des équations (4.49). Si  $K_1 \leq K_2$ , alors  $X_1 \leq X_2$ .

**Proposition 4.4.1** *Sous les hypothèses (H0)-(H5) et (H6), la suite  $(Z_l)_{l \geq 0}$  définie par l'équation (4.37) admet une limite  $Z$  semi-définie positive telle que la matrice  $A - SZ$  est stable.*

### Preuve de la Proposition 4.4.1

1. Nous allons établir que sous l'hypothèse (H6), la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  est décroissante.

A partir de l'équation (4.37), nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= A^T Z_l + Z_l A \\ &- Z_l S Z_l + 4\gamma M_l W M_l + Q. \end{aligned} \quad (4.50)$$

A l'étape  $l + 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= A^T Z_{l+1} + Z_{l+1} A \\ &- Z_{l+1} S Z_{l+1} + 4\gamma M_{l+1} W M_{l+1} + Q. \end{aligned} \quad (4.51)$$

En tenant compte de l'hypothèse (H6) nous avons

$$4\gamma M_{l+1} W M_{l+1} + Q \leq 4\gamma M_l W M_l + Q. \quad (4.52)$$

L'application du Lemme 4.4.2 aux équations (4.50) et (4.51), nous permet d'obtenir  $Z_{l+1} \leq Z_l$ , c'est à dire que la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  est décroissante.

2. Sous les hypothèses (H0) et (H5), la suite  $(Z_l)_{l \geq 0}$  est minorée par  $P$ . Cette suite étant décroissante et minorée, il existe une matrice  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $\lim_{l \rightarrow \infty} Z_l = Z$ . La matrice  $Z$  est semi-définie positive car c'est la limite d'une suite définie positive.
3. Sous l'hypothèse (H5) la solution  $Z$  est également stabilisante [Wonh68].

## 4.5 Applications numériques

Ce paragraphe est consacré à quelques applications numériques sur la recherche d'une paire de solutions itératives du système algébrique du type Riccati (4.7)-(4.8). Les résolutions numériques de ce système se feront au moyen des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*. Les simulations sont exécutées grâce au logiciel MATLAB, version 5.3.

**Exemple 4.5.1** *On considère le système algébrique du type Riccati couplé (4.7) et (4.8) défini dans Freiling et al. [FLJ99] avec les coefficients suivants :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$W := E\tilde{W}E^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Nous proposons de résoudre le système algébrique correspondant aux coefficients définis ci-dessus pour différentes valeurs de  $\gamma$ .

L'initialisation de l'algorithme *A.L.C.V* se fait par le choix d'une matrice  $Z_0 = 5 * I_2$ . L'initialisation de l'algorithme *A.R.C.V* se fait par le choix d'une matrice  $M_0$  définie par :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0.12345 \\ 0.12345 & 4.26044 \end{bmatrix}.$$

•  $\gamma = 3/8$  :

- Pour  $\epsilon = 10^{-7}$ , nous obtenons la convergence des deux algorithmes vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes. Celle-ci est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 3.259400 & 0.051900 \\ 0.051900 & 2.417500 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 3.599500 & 0.058064 \\ 0.058064 & 2.498800 \end{bmatrix}.$$

L'allure des normes des matrices  $(M_l - M)$  et  $(Z_l - Z)$  pour tout  $l \geq 1$  est représentée sur la figure 4.1. La convergence de l'algorithme *A.R.C.V* est nettement plus rapide que celle de l'algorithme *A.L.C.V*.

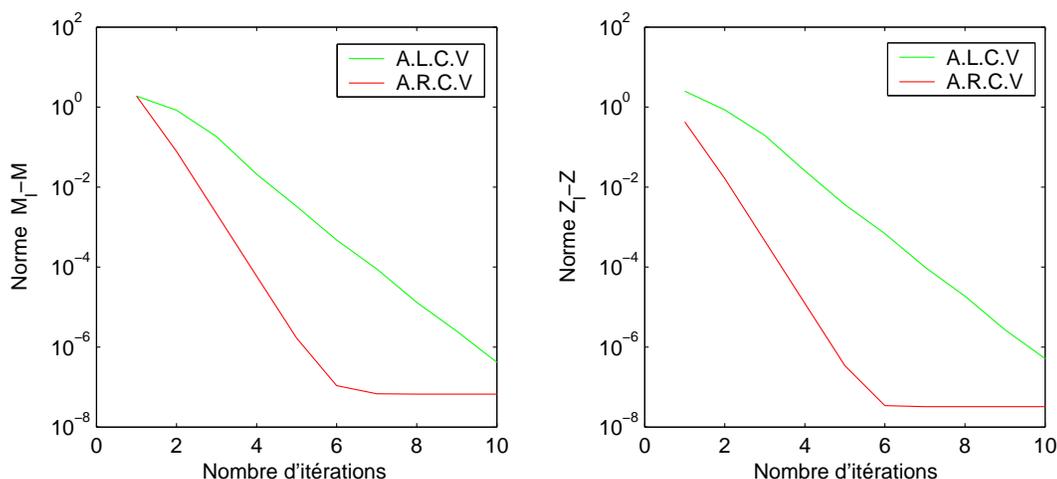


FIG. 4.1 – Performance des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

•  $\gamma = \frac{9}{4}$  :

- Pour  $\epsilon = 10^{-6}$ , nous obtenons la convergence des deux algorithmes vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes. Celle-ci est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 3.754196 & 0.0640150 \\ 0.0640150 & 2.4726799 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 5.366429 & 0.0899795 \\ 0.0899795 & 2.879690 \end{bmatrix}.$$

La figure 4.2 représente l'allure des normes  $(M_l - M)$  et  $(Z_l - Z)$  pour tout  $l \geq 1$ . Nous observons la convergence des deux algorithmes vers une même paire de solutions. La performance de l'algorithme *A.R.C.V* est nettement meilleure que celle de l'algorithme *A.L.C.V*.

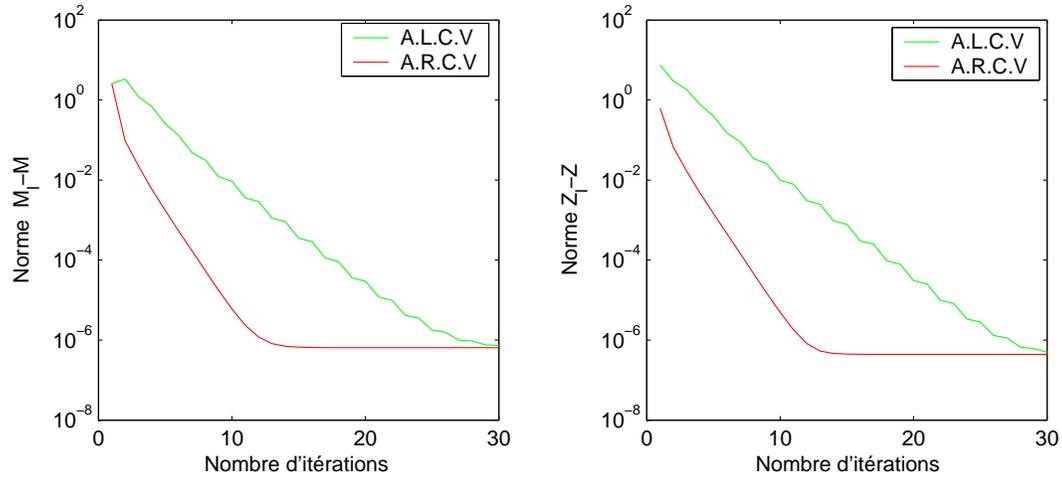


FIG. 4.2 – Performance des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

- $\gamma = 5$  :
  - Pour  $\epsilon = 10^{-5}$ , nous obtenons la convergence des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V* vers une même paire de solutions définies positives et stabilisantes. Celle-ci est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 5.6182 & 0.1060 \\ 0.1060 & 2.6225 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 9.6623 & 0.1718 \\ 0.1718 & 3.4146 \end{bmatrix}.$$

La figure 4.3 représente le comportement des normes des matrices  $(M_l - M)$  et  $(Z_l - Z)$  pour tout  $l \geq 1$ . Nous observons une convergence rapide de l'algorithme *A.R.C.V* et une convergence relativement lente de l'algorithme *A.L.C.V*.

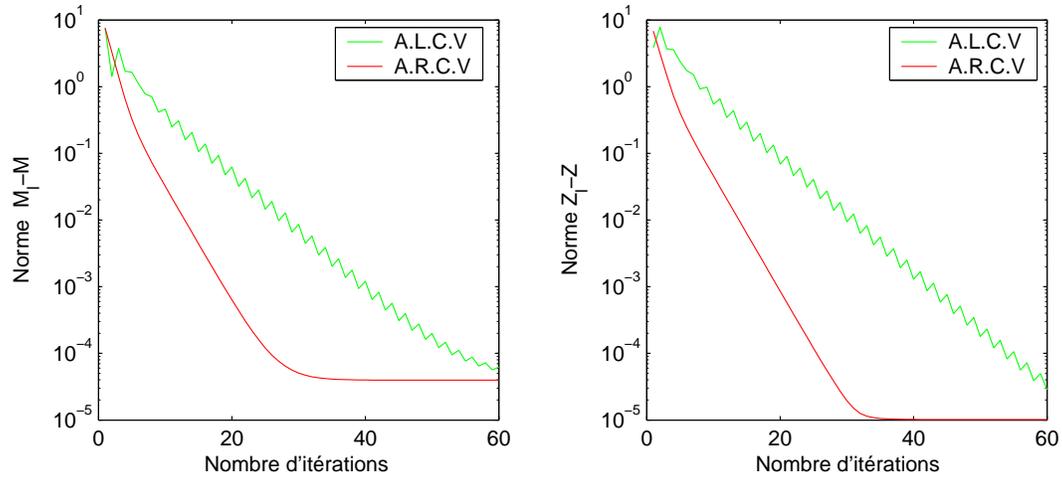


FIG. 4.3 – Performance des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

Les figures 4.1, 4.2 et 4.3 montrent que les algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V* sont convergents. Cependant certaines des suites itératives  $(Z_l)_{l \geq 1}$  obtenues en performant ces deux algorithmes ne sont pas monotones. Nous donnons ci-dessous l'allure des valeurs propres des matrices  $(\Gamma_l)_{l \geq 1}$  et  $(\Gamma_l^y)_{l \geq 1}$  définies dans les hypothèses  $(H4)$  du paragraphe 3 et  $(H6)$  du paragraphe 4.

•  $\gamma = 3/8$  : Les figures 4.4 et 4.5 illustrent la monotonocité de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  obtenue en performant les algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

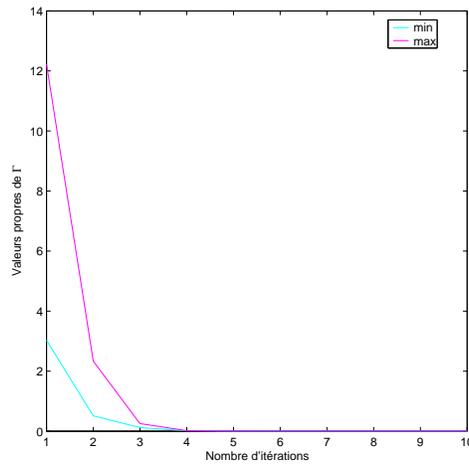


FIG. 4.4 – Evolution des valeurs propres de  $(\Gamma_l)_{l \geq 1}$ .

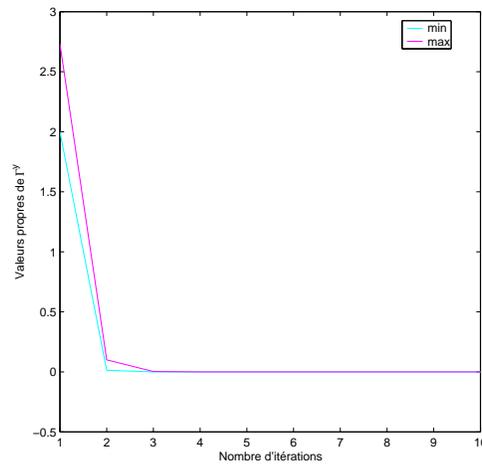


FIG. 4.5 – Evolution des valeurs propres de  $(\Gamma_l^y)_{l \geq 1}$ .

•  $\gamma = 9/4$  : La figure 4.6 illustre la non-monotonocité de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  obtenue en performant l'algorithme *A.L.C.V.*

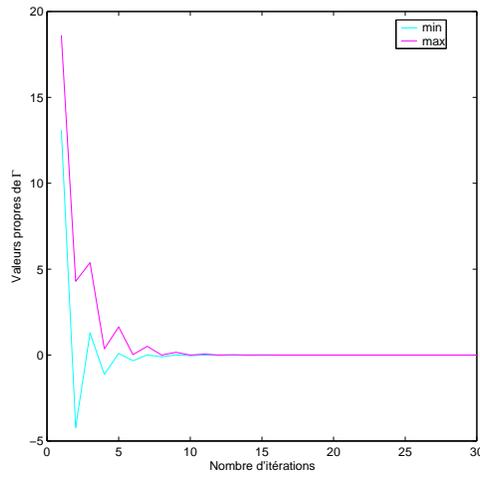


FIG. 4.6 – Evolution des valeurs propres de  $(\Gamma_l)_{l \geq 1}$ .

La figure 4.7 illustre la monotonocité de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  obtenue en performant l'algorithme *A.R.C.V.*

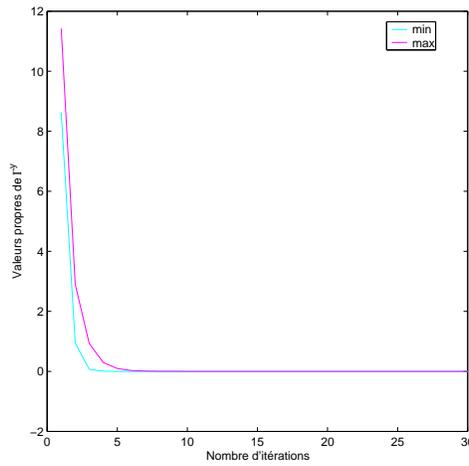


FIG. 4.7 – Evolution des valeurs propres de  $(\Gamma_l^y)_{l \geq 1}$ .

•  $\gamma = 5$  : La figure 4.8 illustre la non-monotonocité de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  obtenue en performant l'algorithme *A.L.C.V.*

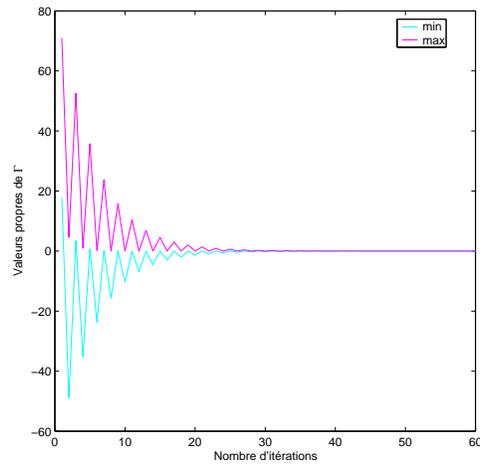


FIG. 4.8 – Evolution des valeurs propres de  $(\Gamma_l)_{l \geq 1}$ .

La figure 4.9 illustre la non-monotonocité de la suite  $(Z_l)_{l \geq 1}$  obtenue en performant l'algorithme *A.R.C.V.*

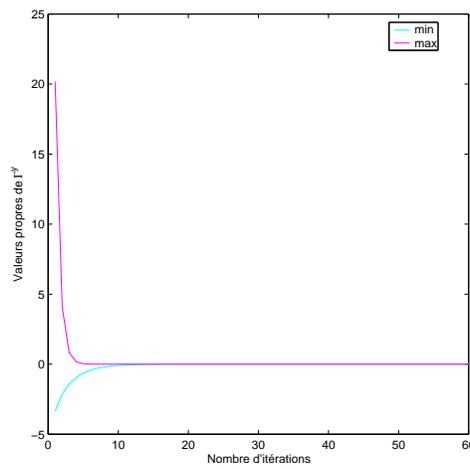


FIG. 4.9 – Evolution des valeurs propres de  $(\Gamma_l^y)_{l \geq 1}$ .

**Exemple 4.5.2** Nous proposons dans cet exemple de résoudre le système algébrique (4.11)-(4.12) pour  $\gamma = \frac{1}{5}$  et tel que le rang de la matrice  $S$  soit égal à 1. Celui-ci est défini par les coefficients suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 0.2625 & 0.9171 \\ 0.1863 & 0.1233 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 8.2008 & 2.3365 \\ 2.3365 & 0.6743 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

L'initialisation de l'algorithme *A.L.C.V* se fait par le choix d'une matrice  $Z_0$ . L'initialisation de l'algorithme *A.R.C.V* se fait par le choix d'une matrice  $M_0$ . Celles-ci sont définies par :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 3.632130 & 3.07105 \\ 3.07105 & 2.708311 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z_0 = \begin{bmatrix} 1.848595 & 0.814131 \\ 0.814131 & 3.69150 \end{bmatrix}.$$

- Pour  $\epsilon = 10^{-8}$ , nous obtenons la convergence des deux algorithmes vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes. Celle-ci est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 1.29493658 & 0.43005158 \\ 0.43005158 & 0.40448081 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 1.44779860 & 0.40551539 \\ 0.40551539 & 0.64414979 \end{bmatrix}.$$

L'allure des normes des matrices  $(M_l - M)$  et  $(Z_l - Z)$  pour tout  $l \geq 1$  est représentée sur la figure 4.10.

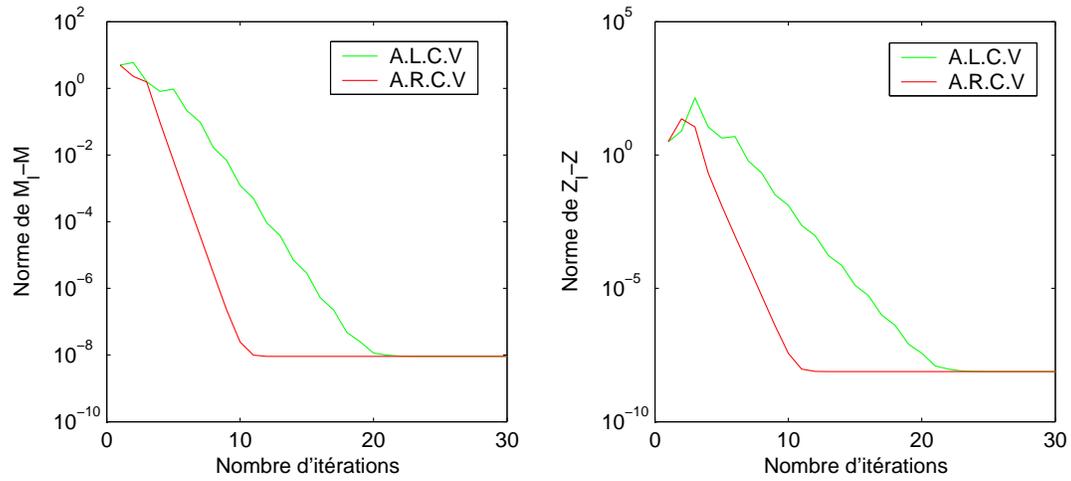


FIG. 4.10 – Performance des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

**Exemple 4.5.3** Nous proposons de résoudre un exemple dont les matrices sont d'ordre 4 pour  $\gamma = 8$ . Les coefficients du système algébrique correspondant sont définis par :

$$A = \begin{bmatrix} 0.9400 & 0.9711 & 0.8626 & 0.3346 \\ 0.4341 & 0.9577 & 0.0309 & 0.0073 \\ 0.9355 & 0.7207 & 0.3659 & 0.8155 \\ 0.4968 & 0.6480 & 0.0938 & 0.0250 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 12.3503 & 8.4915 & 5.6607 & 7.5955 \\ 8.4915 & 6.8577 & 2.5956 & 4.9411 \\ 5.6607 & 2.5956 & 5.0054 & 3.8547 \\ 7.5955 & 4.9411 & 3.8547 & 5.6463 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 25.7311 & 14.6143 & 11.3274 & 17.6665 \\ 14.6143 & 10.8532 & 8.6898 & 11.0443 \\ 11.3274 & 8.6898 & 8.4332 & 10.9099 \\ 17.6665 & 11.0443 & 10.9099 & 16.0682 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.0497 & 0.0128 & 0.0492 & 0.0326 \\ 0.0128 & 0.0083 & 0.0164 & 0.0083 \\ 0.0492 & 0.0164 & 0.0720 & 0.0394 \\ 0.0326 & 0.0083 & 0.0394 & 0.0278 \end{bmatrix}.$$

- *L'initialisation des deux algorithmes se fait par le choix de deux matrices définies par :*

$$M_0 = \begin{bmatrix} 3.031582481 & -1.539852630 & -0.342705357 & -0.4931695286 \\ -1.539852630 & 2.7478328202 & 0.6721270915 & 0.4903182670 \\ -0.342705357 & 0.6721270915 & 0.8646631737 & 0.442166498 \\ -0.4931695286 & 0.4903182670 & 0.4421664989 & 1.643914313 \end{bmatrix},$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 3.973123565 & -2.364273587 & -0.541038590 & -0.741374506 \\ -2.364273587 & 3.593822353 & 0.886371256 & 0.717271191 \\ -0.541038590 & 0.886371256 & 1.022937294 & 0.551635989 \\ -0.741374506 & 0.717271191 & 0.551635989 & 1.854287569 \end{bmatrix}.$$

- *Pour  $\epsilon = 10^{-7}$  nous obtenons la convergence des deux algorithmes vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes.*

$$M = \begin{bmatrix} 3.0315820 & -1.53985220 & -0.34270544 & -0.49316936 \\ -1.53985220 & 2.74783234 & 0.67212718 & 0.49031808 \\ -0.34270544 & 0.67212718 & 0.86466313 & 0.44216654 \\ -0.49316936 & 0.490318082 & 0.44216654 & 1.64391423 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 3.97312227 & -2.36427224 & -0.54103881 & -0.74137407 \\ -2.36427224 & 3.59382096 & 0.88637149 & 0.71727073 \\ -0.54103881 & 0.88637149 & 1.02293719 & 0.55163609 \\ -0.74137407 & 0.71727073 & 0.55163609 & 1.85428744 \end{bmatrix}.$$

L'allure des normes des matrices  $(M_l - M)$  et  $(Z_l - Z)$  pour tout  $l \geq 1$  est représentée sur la figure 4.11.

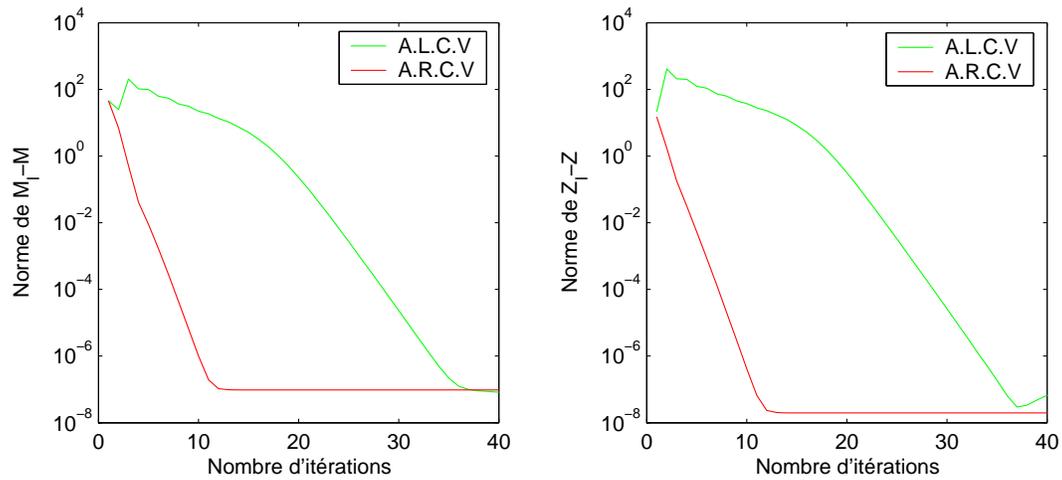


FIG. 4.11 – Performance des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

Considérons maintenant les valeurs initiales suivantes :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 3.973122575 & -2.36427255 & -0.54103875 & -0.74137416 \\ -2.36427255 & 3.593821292 & 0.886371420 & 0.71727084 \\ -0.54103875 & 0.886371420 & 1.022937230 & 0.55163606 \\ -0.74137416 & 0.717270840 & 0.5516360653 & 1.85428740 \end{bmatrix},$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 3.03158218 & -1.53985230 & -0.34270541 & -0.49316940 \\ -1.53985230 & 2.74783245 & 0.67212715 & 0.49031812 \\ -0.34270541 & 0.67212715 & 0.86466314 & 0.44216653 \\ -0.49316940 & 0.49031812 & 0.44216653 & 1.64391425 \end{bmatrix}.$$

– Pour  $\epsilon = 10^{-9}$ , nous obtenons la convergence de l'algorithme *A.R.C.V* par contre l'algorithme *A.L.C.V* est divergent.

L'allure des normes des matrices  $(M_l - M)$  et  $(Z_l - Z)$  pour tout  $l \geq 1$  est représentée sur la figure 4.12.

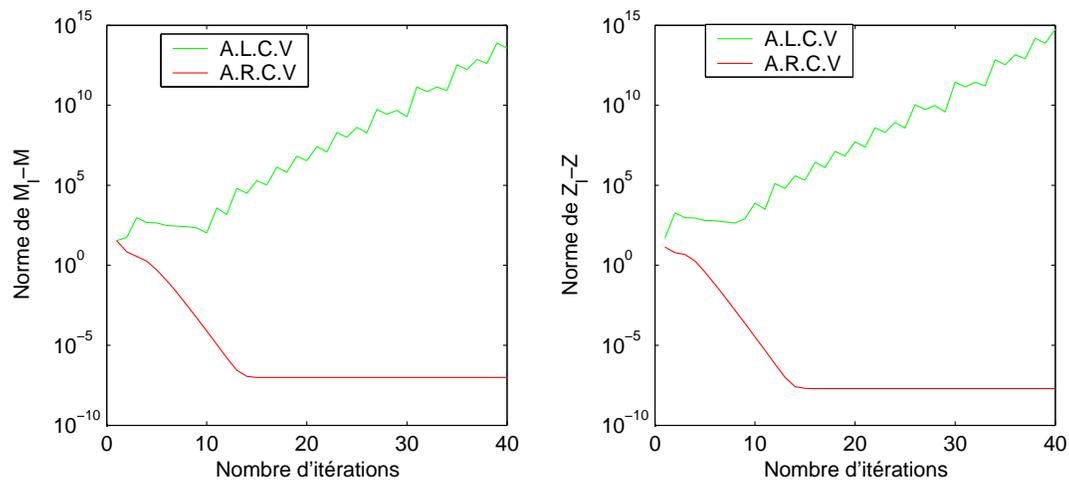


FIG. 4.12 – Performance des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

**Exemple 4.5.4** Nous proposons dans cet exemple de résoudre le système algébrique (4.11)-(4.12) pour  $\gamma = \frac{1}{4}$  et tel que le rang de la matrice  $S$  soit égal à 2. Celui-ci est défini par les coefficients suivants :

$$A = \begin{bmatrix} -48.5628 & 6.4360 & 0.4822 & 18.7399 \\ 5.0774 & -50.9040 & 0.0004 & 4.2818 \\ 16.9243 & 10.0912 & -51.5288 & 8.9564 \\ 5.9128 & 0.1951 & 10.9500 & -47.3978 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 3.3288 & 1.3682 & 1.3930 & 0 \\ 1.3682 & 0.5653 & 0.5936 & 0 \\ 1.3930 & 0.5936 & 0.7362 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 13.4942 & 14.3873 & 5.2520 & 11.8985 \\ 14.3873 & 17.1694 & 6.9608 & 13.5955 \\ 5.2520 & 6.9608 & 3.0951 & 5.5753 \\ 11.8985 & 13.5955 & 5.5753 & 14.5638 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 14.3220 & 8.4610 & 12.4986 & 12.7641 \\ 8.4610 & 5.6902 & 7.2289 & 7.1130 \\ 12.4986 & 7.2289 & 13.0294 & 13.0767 \\ 12.7641 & 7.1130 & 13.0767 & 13.5294 \end{bmatrix}.$$

– Pour  $\epsilon = 10^{-7}$  nous obtenons la convergence des deux algorithmes vers une paire de solutions définies positives et stabilisantes définie par :

$$M = \begin{bmatrix} 0.21982159 & 0.20752171 & 0.09862942 & 0.231326549 \\ 0.20752171 & 0.21290380 & 0.10284515 & 0.220587944 \\ 0.09862942 & 0.10284510 & 0.05479220 & 0.115344913 \\ 0.23132654 & 0.22058794 & 0.11534491 & 0.283132040 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.316240229 & 0.28985194 & 0.14851666 & 0.3470736 \\ 0.289851942 & 0.28408023 & 0.14520401 & 0.3189340 \\ 0.148516660 & 0.14520401 & 0.08067237 & 0.1753692 \\ 0.347073675 & 0.31893408 & 0.17536925 & 0.4223693 \end{bmatrix}.$$

L'allure des normes des matrices  $(M_l - M)$  et  $(Z_l - Z)$  pour tout  $l \geq 1$  est représentée sur la figure 4.13.

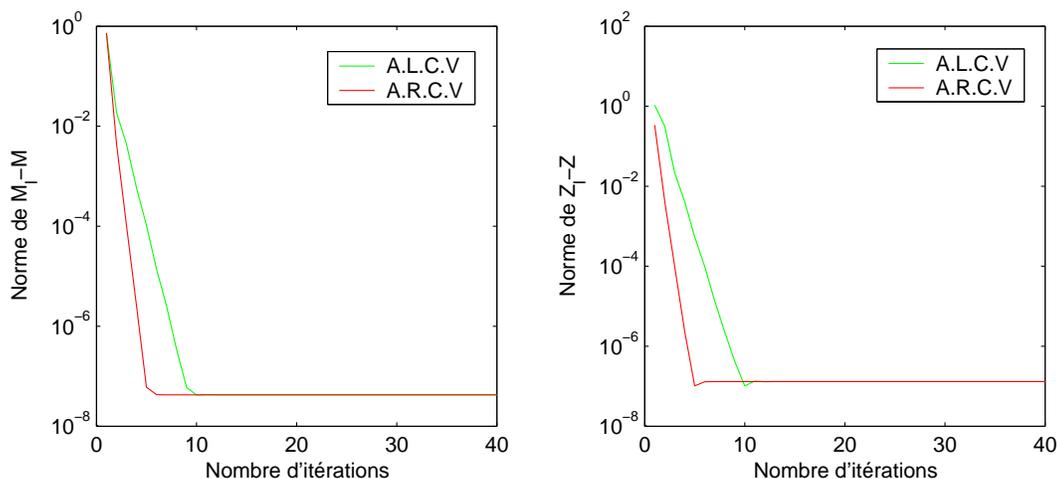


FIG. 4.13 – Performance des algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V*.

*Les exemples présentés dans ce paragraphe nous ont permis de montrer des propriétés des solutions itératives obtenues en performant les deux algorithmes *A.L.C.V* et *A.R.C.V* :*

- *L’algorithme *A.L.C.V* possède une forte sensibilité par rapport au choix des valeurs initiales. Cette sensibilité peut engendrer une lenteur de la convergence ou bien une divergence de celui-ci.*
- *L’algorithme *A.R.C.V* nouvellement introduit dans ce chapitre est d’un point numérique nettement plus performant. Celui-ci nous a permis de calculer une paire de solutions définies positives et stabilisantes indépendamment des conditions initiales. La solution ainsi obtenue est également une solution optimale du problème considéré.*
- *Enfin on notera que la convergence des deux algorithmes est vérifiée même lorsque les suites itératives obtenues ne sont pas décroissantes.*

## 4.6 Conclusions et perspectives

*Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à deux types de méthodes itératives pour les systèmes algébriques du type Riccati couplés. Ces systèmes sont issus d'un problème de contrôle optimal sous une contrainte différentielle-stochastique. La première méthode est déjà présentée dans la littérature. Notre objectif a été d'étudier des propriétés des solutions itératives. Nous avons également construit de nouvelles hypothèses pour assurer la stabilité de la dynamique itérative engendrée par cette méthode.*

*La deuxième méthode est nouvelle et consiste à résoudre une équation algébrique du type Riccati et une équation algébrique du type Lyapunov à chaque étape de la résolution. Nous avons également étudié des propriétés de la paire de solutions itératives. Pour finir nous avons proposé des conditions suffisantes de convergence vers une solution stabilisante. Afin de comparer les vitesses de convergences et l'efficacité des deux algorithmes, un plan de simulations numériques est effectué. Le calcul de la paire de solutions appliqué à un même exemple montre l'efficacité et la bonne performance du nouvel algorithme présenté dans ce chapitre.*

*D'autres pistes restent à explorer pour ces deux méthodes numériques. Par exemple dans les deux méthodes nous nous sommes restreints à des conditions de convergence dérivant de la monotonocité des suites itératives. On pourrait s'intéresser à des conditions qui ne dérivent pas de la monotonocité. En effet, des simulations numériques montrent que ces deux algorithmes convergent même lorsque les suites itératives ne sont pas monotones. Enfin, une étude comparative des vitesses de convergence de ces deux méthodes pourrait aussi faire l'objet d'autres travaux.*

# Conclusion générale

*L'objectif assigné à la préparation de cette thèse était l'étude des propriétés des systèmes différentiels et algébriques du type Riccati couplés issus de la théorie des jeux. Nous avons utilisé deux approches : une approche analytique pour des systèmes différentiels du type Riccati couplés issus de la boucle ouverte et une approche itérative dans le cas des systèmes algébriques du type Riccati couplés en boucle fermée.*

*Dans le cas des systèmes différentiels du type Riccati couplés issus de la boucle ouverte, notre intérêt s'est porté à ceux caractérisant le concept d'optimalité relatif à l'équilibre de Nash. Nous avons montré dans ce travail comment obtenir des solutions analytiques des systèmes issus de ce jeu. La méthode proposée nous a permis d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une paire de solutions. Nous avons également fourni la forme analytique de celle-ci. Ces résultats ont été obtenus en s'appuyant sur les propriétés des solutions équivalentes des systèmes différentiels linéaires. Le lemme de Radon, version 2 nous a permis une extension de cette propriété pour des systèmes différentiels du type Riccati couplés.*

*Dans le cas des systèmes algébriques du type Riccati couplés issus de la boucle fermée, notre intérêt s'est porté à ceux caractérisant deux notions d'optimalité. La première concerne la notion de l'équilibre de Nash à deux joueurs et la seconde concerne une variante d'un problème de contrôle optimale dans le cas différentiel-stochastique. Les méthodes proposées étaient toutes itératives. Pour cette classe de systèmes, nous distinguons deux types de méthodes de résolution. Les méthodes de résolution du type Lyapunov et les méthodes de résolution du type Riccati. Les algorithmes dérivant des méthodes itératives du type Lyapunov existent dans la littérature. Concernant*

ces derniers nous avons proposé des propriétés des solutions itératives ainsi que des conditions suffisantes de convergence. Les algorithmes proposés dans le cas des méthodes du type Riccati sont nouveaux à l'exception de la version 1 établi dans le chapitre 3. Ces algorithmes ont permis dans tous les exemples numériques que nous avons exécuté d'améliorer les performances des algorithmes des méthodes du type Lyapunov.

Différentes perspectives de recherche peuvent être proposées. A cet égard, il nous paraît évident que l'extension de la méthode des solutions équivalentes établie dans le cas de l'équilibre de Nash en boucle ouverte peut être étendue aux solutions de l'équilibre de Stackelberg en boucle ouverte. De même que la méthode proposée peut servir à l'étude du comportement des jeux en boucle ouverte lorsque le temps d'optimisation devient infini.

Dans le cas des systèmes algébriques du type Riccati couplés en boucle fermée, beaucoup d'améliorations restent encore à apporter. L'étude des propriétés des solutions itératives issues de ces algorithmes peuvent être établies. Les conditions de convergence établies ici dépendent de la monotonie des suites itératives, toutefois de nombreuses exécutions numériques démontrent une convergence de ces méthodes indépendamment de la monotonie.

Enfin des aspects liés à la vitesse de convergence de ces méthodes itératives qui n'ont pas été abordés dans cette thèse méritent une étude approfondie. Cette comparaison a été établie uniquement dans un contexte numérique.

# Bibliographie

- [Abou86] Abou-Kandil, H. (1986). *Elaboration de structures de commande hiérarchisées : approches mono-critère et multi-critères*. Thèse de Doctorat d'état, Université Pierre et Marie-Curie, Paris.
- [AbBe86] Abou-Kandil, H. and Bertrand, P. (1986). Analytical solution for a class of linear quadratic open-loop Nash games. *Int.J.Control*, vol **43**, no 3, 997-1002.
- [AFJ93] Abou-Kandil, H., Freiling, G and Jank, G. (1993). Necessary conditions for constant solutions of coupled Riccati equations in Nash games. *Systems and Control Letters*, **21**, 295-306.
- [AFJ94] Abou-Kandil, H., Freiling, G and Jank, G. (1994). Solution and asymptotic behavior of coupled Riccati equations in jump linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, **39**, 1631-1636.
- [AFIJ03] Abou-Kandil, H., Freiling, G., Ionescu, V. and Jank, G. (2003). *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Birkhäuser Verlag, Germany.
- [AnMo71] Anderson, B.D.O. and Moore, J.B. (1972). *Optimal control : Linear quadratic methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [ArLa84] Arnold, W.F and Laub, A.J. Generalized Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equations. *IEEE Trans. Automat Control*, **72**, no 12, 1746-1754.
- [BaBe95] Başar, T. and Bernhard, P. (1995).  *$H^\infty$ -optimal control and related minimax design problems. A dynamic game approach. Second Edition*. Birkhäuser, Boston.
- [BaOl95] Başar, T. and Olsder, G. (1995). *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press, London.

- [Bell65] Bellman, R. (1965). *Dynamic Programming*, Princeton University.
- [Bern76] Bernhard, P. (1976). *Commande Optimale, Décentralisation des Jeux Dynamiques*, Dunod, Automatic.
- [BeVa85] Bensoussan, A and Van-Schuppen, J.H. (1985). Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential of integral performance index. *SIAM J. Control*, **23**, 599–613.
- [CaDe91] Callier, F.M and Desoer, C.A. (1991). *Linear System Theory*, Springer-Verlag.
- [CrCh71] Cruz, J.B. and Chen, C.I. (1971). Serie Nash solutions of two person nonzero-sum linear quadratic games. *J. Optim. Theory Appl.*, **4**, 240-257.
- [DeOu] Delfour, M.C and Ouansaf, A. (1992). Noniterative Approximations to the Solution of the Matrix Riccati Differential Equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol **29**, no 6, 1648-1693.
- [Dieci] Dieci, L. (1992). Numerical Integration of the Differential Riccati Equation and some Related Issues. *SIAM. J. Numer. Anal.*, vol **29**, no 3, 781-815.
- [DiEi94] Dieci, L. and Eirola, T. (1994). Positive Definiteness in the Numerical Solution of Riccati Differential Equations. *Numer. Math.*, vol **67**, no 11, 303-313.
- [Egor93] Egorov, M.A. (1993). A criterion for the Matrix Differential Riccati Equation to be Linearizable and some Properties of Solutions. *J. Differential. Equ.*, vol **29**, no 10, 1461-1465.
- [Eise82] Eisele, T. (1982). Nonexistence and nonuniqueness of Open-Loop equilibrium in linear quadratic differential games. *J. Optim. Theory Appl.*, vol **37**, no 4, 443–468.
- [Engw98] Engwerda, J.C. (1998) On the open loop Nash equilibrium in LQ-games. *J. Economic Dynamics and Control.*, vol **22**, 729–762.
- [FlRi75] Fleming, H and Rishel, R.W. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer- Verlag.

- [FoSc71] Foley, M.H. and Schmitendorf, W.E. (1971). *On a Class of Nonzero-Sum Linear-Quadratic Differential Games*. *J.Optim Theory Appl.*, vol **7**, no 5, 357-377.
- [Frei02] Freiling, G. (2002). *A survey of nonsymmetric Riccati equations*. *Linear Algebra Appl.*, **251-252**, 243-270.
- [FLJ99] Freiling, G., Lee, S.R and Jank, G.(1999). *Coupled matrix Riccati equations in minimal cost variance control problems*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **44**, 556-560.
- [FrHo03] Freiling, G and Hochhaus, A (2004). *On a class of rational matrix differential equations arising in stochastic control*. *Linear Algebra Appl.*, vol **379**, no 1, 43-68
- [FrJa96] Freiling, G and Jank, G. (1996). *Existence and comparison theorems for algebraic and continuous Riccati differential and difference equations*. *J. Dynamic Control Syst.*, **2**, 529-547.
- [FJA96] Freiling, G., Jank, G and Abou-Kandil, H. (1996). *On global existence of solutions to coupled matrix Riccati equations in closed-loop Nash games*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **41**, 264-269.
- [Frie71] Friedman, A. (1971). *Differential Games*. Wiley-Interscience, New-York.
- [GaBo95] Gajic, Z. and Borno, I. (1995). *Lyapunov type iterations for optimal control of jump linear systems at steady state*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **40**, 1971-1975.
- [GaSh93] Gajic, Z and Shen, S. (1993). *Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [HePa97] Herdandez, V. and Pastor, A. (1997). *On the Kleinman iteration for periodic nonstabilizable*. *Proceeding ECC 97, Brussel, Belgium, Fr-A-L-5*.
- [Hewe93] Hewan, G. (1993). *Existence theorems for positive semidefinite and sign indefinite stabilizing solutions of the Riccati equation*. *SIAM J.Control.Optim.*, **13**, 16-29.
- [Hale69] Hale, J.K. (1969). *Ordinary differential equation*. Edition Wiley Interscience.

- [HBB65] Ho, Y.C., Brysson, Jr.A.E. and Baron, S. (1965). *Differential games and optimal pursuit-evasion strategies*. *IEEE Trans Automat.Control*, **10**, 385-389.
- [Isaa56] Isaacs, R. (1956). *Differential games*. John Wiley and Sons, New York.
- [Isaa69] Isaacs, R. (1969). *Differential games :their scope, nature and future*. *J.Opt.Th.Appl.*, **13**, 283-295.
- [JoPo95] Jodar, L. and Ponsoda, E. (1995) *Non-autonomous Riccati-Type Matrix Differential Equations : Existence interval, Construction of Continuous Numerical Solution and Error Bounds*. *IMA. J. Numer Anal.*, **15**, 61-74.
- [JoNa91] Jodar, L. and Navarro, E. (1991). *Exact computable solution of a class of strongly coupled Riccati equations*. *J. Numer Anal.*, **15**, 61-74.
- [JoAb88] Jodar, L. and Abou-Kandil, H. (1988). *A Resolution Method for Riccati Differential Systems Coupled in their Quadratic Terms*. *SIAM. J. Math. Anal.*, **19**, 1225-1230.
- [Kalm69] Kalman, R.E. (1969). *Contribution to the theory of optimal control*. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **5**, 102-119.
- [Kalm63] Kalman, R.E. (1963). *The theory of optimal control and the calculus of variations*. *Mathematical Optimization Technique, Uni.of California, Press, Los Angeles*.
- [KaNi85] Kano, H. and Nishimura, T. (1985). *Controlability, stability and matrix Riccati equation for periodic systems*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **30**, 1129-1131.
- [KeLe85] Kenney, C.S. and Leipnik, R.B. (1985). *Numerical Integration of the Differential Matrix Riccati Equation*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **30**, 962-970.
- [Klei68] Kleinman, D.L. (1968). *On an iterative technique for Riccati equation computation*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **13**, 114-115.
- [Kuce72] Kucěra, V. (1972). *On nonnegative definite solutions to matrix quadratic equations*. *Automatica*, **8**, 413-423.
- [Kuce72] Kucěra, V. (1972). *A contribution to matrix quadratic equations*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **17**, 344-347.

- [Kuc272] Kucěra, V. (1972). *The discrete Riccati equation of optimal control*, *Kybernetika*, **8**, 413–423.
- [Kuce3] Kucěra, V. (1973). *A review of the matrix Riccati equation*. *Kybernetika.*, **9**, 42–61.
- [Krem03] Kremer, D. (2003). *Non-symmetric Riccati theory and noncooperative games*. Phd Thesis, Departement of Mathematics, University of Aachen, Germany.
- [KrRe71] Krikelis, N.J. and Rekasius, Z.V. (1971). *On the solution of optimal linear control problems under conflict of interest*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **16**, no 2, 140–145.
- [KwRs72] Kwakernaak, H. and Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*. John Wiley and Sons.
- [KYB85] Kwon, B.H., Youn, M.J., and Bien, Z. (1985). *On bounds of Riccati equation and Lyapunov matrix equation*. *IEEE Trans. Automat. Control*, **30**, no 11, 547–550.
- [Laub79] Laub, A.J. *A Schur method for solving algebraic Riccati Equations*. *IEEE Trans. Automat Control*, **24**, 913–921.
- [LaRo95] Lancaster, P. and Rodman, L. (1995). *Algebraic Riccati Equations*. Oxford Science Publications, New-York.
- [LaRo80] Lancaster, P. and Rodman, L. (1980). *Existence and uniqueness theorems for algebraic Riccati equations*. *Int. J. Control*, **32**, 285–309.
- [LRR86] Lancaster, P., Ran, A.C.M. and Rodman, L. (1986). *Hermitian solutions of the discrete Riccati equation*. *Int. J. Control*, **44**, 777–802.
- [LRR87] Lancaster, P., Ran, A.C.M. and Rodman, L. (1987). *An existence and monotonicity theorem for the discrete algebraic Riccati equation*. *Linear and Multilinear Algebra*, **20**, 353–361.
- [LaRo94] Lancaster, P. and Rodman, L. (1994). *Invariant neutral subspaces for symmetric and skew real matrix pairs*. *Canad. J. Math.*, **46**, 602–618.

- [LiHa78] Liberty, S.R. and Hartwing, R.C. (1978). Design Performance Measure Statistics for Stochastic Linear Control Systems. *IEEE Trans. Automat Control*, **23**, 1085-1090.
- [Luke71] Lukes, D.L. (1971). Equilibrium feedback control in linear games with quadratic cost. *SIAM J. Control Optim.*, **9**, 234-252.
- [LuRu71] Lukes, D.L. and Russell, D.L. (1971). A Global Theory for Linear Quadratic Differential Games. *J. Math. Anal. Appl.*, **33**, 96-123.
- [Meda82] Medanic, J. (1982). Geometric properties and invariant manifolds of the Riccati equation. *IEEE Trans. Automat. Control*, **27**, 670-677.
- [Nash50] Nash, J.F. (1950). Equilibrium points in  $N$  person games, (1950). *Proc. Nat. Aca. Sci. U.S*, **36**, 48-49.
- [Nash51] Nash, J.F. (1951). Non Cooperative Games. *Annals, Math.*
- [OsBa85] Oshman, Y and Bar-Itzhack, Y.I. (1985). Eigenfactor solution of the matrix Riccati equation - A continuous square root algorithm. *IEEE Trans. Automat. Control*, **30**, no 10, 971-970.
- [PaCr79] Pavasilopulos, G.P and Cruz, J.B. (1979). On the uniqueness of Nash strategies for a class of analytic differential games. *J. Optim. Theory Appl.*, **27**, 309-314.
- [PeJa05] Perdicolis, T. and Jank, G. (2005). Linear quadratic Nash games on positive linear systems. *European Journal of Control*, **11**, no.6.
- [PMC79] Pavasilopulos, G.P., Medanic, J.V. and Cruz, Jr., J.B. (1979). On the existence of Nash strategies and solutions to coupled Riccati equations in linear-quadratic Nash games. *J. Optim. Theory Appl.*, **27**, 309-314.
- [PaOl84] Papavasilopulos, G.P and Olsder, G.J. (1984). On the linear quadratic closed-loop no memory Nash game. *J. Optim. Theory Appl.*, **42**, 551-560.
- [Pont66] Pontriaguine, L. (1966). Sur la Théorie des Jeux Différentiels. *Ou MN*, **21**, no 4.
- [Pon69] Pontriaguine, L and Michtchenko, E. (1969). Problèmes d'Evasion d'un Objet Guidé. *DAN SSSR*, **189**, no 4.

- [Pott66] Potter, J. (1966). *Matrix quadratic solutions*. *SIAM. J. Appl. Math.*, **14**, 496-501.
- [Reid60] Reid, W.T. (1960). *Properties of solutions of a Riccati matrix differential equation*. *J. Math. Mech.*, **60**, 749-770.
- [Reid70] Reid, W.T. (1970). *Monotonicity properties of solutions of Hermitian Riccati matrix differential equations*. *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, **1**, 195-213.
- [Reid72] Reid, W.T. (1972). *Riccati Differential Equation*. New-York :Academic.
- [Rein82] Reinhard, H. (1982). *Equations différentielles : Fondement et Applications*. Gauthier-Villars Edition.
- [RaRo92a] Ran, A.C.M. and Rodman, L. (1992). *Stable solutions of real algebraic matrix Riccati equations*. *SIAM J. Control Optim.*, **30**, 63-81.
- [RaRo192b] Ran, A.C.M. and Rodman, L. (1992). *Stable hermitian solutions of discrete algebraic Riccati equations*. *Math. Control Signals Systems*, **5**, 165-193.
- [RaTr93] Ran, A.C.M. and Trentelman, H.L. (1993). *Linear quadratic problems with infinite cost for discrete time systems*. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **14**, 776-797.
- [RaVr88] Ran, A.C.M. and Vreugdenhil, R. (1988). *Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous and discrete time systems*. *Linear Algebra Appl.*, **99**, 63-83.
- [Rodm97] Rodman, L. (1997) *Non-Hermitian solutions of algebraic Riccati equations*. *Canad. J. Math.*, **49**, 840-854.
- [Royd88] Royden, H.L. (1988). *Comparison theorems for the matrix Riccati equations*. *Comm. Pure Appl. Math.*, **41**, 739-746.
- [Sain65] Sain, M.K. (1965). *On minimal Variance Control of linear systems with quadratic loss*. Ph.D, Department of Electrical Engineering, University of Illinois, Urbana.
- [Sain66] Sain, M.K. (1966). *Control of linear systems according to the Minimal Variance Criteria- A New approach to the disturbance Problem*. *IEEE Trans Automatic Control*, **11**, no 1, 118-122.
- [SWS92] Sain, M.K., Won, C.H. and Spencer, B.F.Jr. (1992). *Cumulant minimization and robust control" Stochastic Theory and Adaptative Control*. Lecture Notes

*in Control and Information Science 184, T.E.Duncan and B.Pasik-Duncan, Eds.. Edition, Germany : Springer-Verlag, 411–425.*

- [SWS95] Sain, M.K., Won, C.H. and Spencer, B.F.Jr. (1995). *Cumulant in risk-sensitive control : The full-state feedback cost variance. Conference on Decision and Control, 1036–1041.*
- [SWSL00] Sain, M.K., Won, C.H., Spencer, B.F.Jr. and Liberty, S.R. (2000). *Cumulant in risk-sensitive control : A cost mean and variance theory with application to seism protection of structures "Advances in Dynamic Games and Applications. Annals of the International Society of Dynamic Games, vol 5, Jerzy A filar, Vladimir Gaitsgory and Koichi Mizukami, Editors. Boston : Birkhäuser.*
- [StHo69] Starr, A.W. and Ho, Y.C. (1969). *Nonzero-sum differential games. J.Optim Theory Appl., 3, 184–206.*
- [SiCr73] Simaan, M. and Cruz, J.B. (1973). *On the solution of the open-loop Nash Riccati equations in linear quadratic differential games. Int. J. Control, 18, no 1, 57–63.*
- [Sont98] Sontag, E.D. (1998). *Mathematical control theory-deterministic finite-dimensional systems. Springer-Verlag, Second Edition.*
- [Shay85] Shayman, M.A. (1985). *On the phase portrait of the matrix Riccati equation arising from periodic control problem. SIAM J. Control Optim., 23, 717-751.*
- [Shay86] Shayman, M.A. (1986). *Phase portrait of the matrix Riccati equation. SIAM J. Control Optim., 24, 1-65.*
- [Shay83] Shayman, M.A. (1983). *Geometry of the algebraic Riccati equations I et II SIAM J. Control Optim., 21, 375-394, 395-409.*
- [denb01] Van den Broek, B. (2001). *Uncertainty in Differential Games. PhD-thesis Uni. Tilburg,. Netherlands, 2001.*
- [VoMo44] Von-Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press.*
- [Will71] Willems, J.C. (1971). *Least squares stationary optimal control and algebraic Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Control, 16, 621-634.*

- [Wimm84] Wimmer, H.K. (1984). *The algebraic Riccati equation : Conditions for the existence and uniqueness of solutions. Linear Algebra Appl.*, **58**, 441-452.
- [Wimm92] Wimmer, H.K. and Pavon, M. (1992). *A comparison theorem for matrix Riccati difference equations. Systems and Control Letters*, **19**, 233-239.
- [Wimm99] Wimmer, H.K. (1999). *Intervals of solutions of the discrete-time algebraic Riccati equations. Systems and Control Letters*, **36**, 207-212.
- [Whit91] Whittle, P. (1991). *A Risk-sensitive maximum principle : the case of imperfect state observation. IEEE Trans. Automat. Control*, **36**, 793-801.
- [Wonh68] Wonham, W.M. (1968). *On a matrix Riccati equation of stochastic control. SIAM J. Control*, **6**, 681-697.
- [WoGu02] Won, C.H. and Guanaratne, K.T. (2002). *Performance Study of LQG, MCV, and Risk-Sensitive Control Methods for Satellite Structure Control. Proceedings of the American Control Conference*, 2481-2486.
- [WSL03] Won, C.H., Sain, M.K. and Liberty, S.R. (2003). *Infinite Time minimal cost variance control and coupled algebraic Riccati equations. Proceedings of the American Control Conference*, 5155-5160.
- [KDG95] Zhou, K., Doyle, J.C. and Glover, K. (1995). *Robust Optimal Control. Prentice Hall, New-Jersey*.
- [ZhCh94] Zhukovski, V.I. and Chikrii, A.A. (1994). *Linear-quadratic differential games. Naoukovo Doumka, Kiev*.
- [ZSK94] Zhukovski, V.I., Salukvadze, M.E. and Kourzin, D.V. (1994). *Linear-quadratic differential games with side payements, Georgian Academic of Science*.