



Contribution à la commande non linéaire par des approches linéaires

Yann Labit

► To cite this version:

Yann Labit. Contribution à la commande non linéaire par des approches linéaires. Mathématiques [math]. INSA de Toulouse, 2002. Français. NNT: . tel-00131792

HAL Id: tel-00131792

<https://theses.hal.science/tel-00131792>

Submitted on 19 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Préparée au

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

en vue de l'obtention du grade

Doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

Spécialité: **Systèmes Automatiques**

par

Yann LABIT

Titulaire du Diplôme d'Études Approfondies en Automatique et Informatique Industrielle

**CONTRIBUTION A LA COMMANDE NON LINEAIRE
PAR DES APPROCHES LINEAIRES**

Avant-Propos

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (L.A.A.S.) du C.N.R.S., au sein du groupe Méthodes et Algorithmes en Commande (M.A.C.). Je remercie MM. Jean-Claude Laprie et Augustin Martinez, respectivement actuels directeur et directeur-adjoint du L.A.A.S., de m'avoir accueilli dans ce laboratoire et pour avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.

M. Mekki Ksouri, professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie (I.N.S.A.T.) de Tunis et M. Driss Mehdi, professeur à l'Ecole Supérieure des Ingénieurs de Poitiers (E.S.I.P.), ont accepté de donner de leur temps pour lire ce manuscrit et en être les rapporteurs. Qu'ils en soient tout particulièrement remerciés.

Ces remerciements s'adressent aussi à M. François Kubica ingénieur de la société E.A.D.S. Airbus France à Toulouse, pour avoir accepté de participer à l'examen de ce travail et en avoir assuré la critique.

Je tiens particulièrement à exprimer toute ma reconnaissance envers M. André Titli professeur au département de Génie Electrique et Informatique de l'Institut National des Sciences Appliquées (I.N.S.A.) de Toulouse, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Les discussions que nous avons eues sur l'Automatique et en particulier sur la logique floue m'ont toujours passionné et aidé à y voir plus clair.

Il est maintenant temps de remercier les deux personnes, qui ont été à l'origine de ce travail. Tout d'abord M. Jacques Bernussou, directeur de recherche au C.N.R.S. et responsable du groupe M.A.C. et M. Germain Garcia, professeur à l'I.N.S.A. de Toulouse, pour avoir encadrés ce travail et pour la confiance qu'ils m'ont témoignée durant ces trois années et pour leurs conseils. Ils ont sù ensemble, ou bien chacun à leur tour (quand les contraintes étaient trop fortes) me donner un peu de leur précieux temps pour m'expliquer, m'écouter, me re-diriger quand je me dispersais et planifier ma thèse ainsi que ma rédaction de manuscrit.

Il serait dommage, dans cet avant propos de ne pas parler des amis et collègues que j'ai côtoyés au sein du L.A.A.S. durant trois ans. Je ne peux les citer tous, mais je tiens tous particulièrement à remercier ceux avec qui j'ai partagé le bureau E54. A savoir Olivier, maître de conférences à Poitiers, Vincent, maître de conférences à l'I.N.S.A. de Toulouse et qui se bat avec sa station (le degré zéro de l'informatique!), Christian , enseignant à Toulouse et Pedro, à qui viendra bientôt le tour de la soutenance. Merci à Isa, Sophie, Brigitte, Dimitri, Denis, Didier, pour leurs discussions scientifiques, morales et sportives.

Je remercie tous les services techniques pour leur bonne volonté et sourire à chaque fois que j'avais besoin d'eux, en particulier Christian *el toreador* Berty.

Pour terminer, je tiens à dire un grand merci à tous les membres du groupes M.A.C. que je n'ai pas cités, Les Tortues du L.A.A.S. spécialement Marido, Danielle, Totof et les enseignants de l'U.P.S. et de l'I.N.S.A. et à tous les amis qui m'ont soutenu durant trois ans...

A ton tour Frechou...

Table des matières

Avant-Propos	iii
Table des matières	vii
Notations et abréviations	ix
Introduction Générale	1
I Contexte et motivations	3
I.1 Introduction	4
I.2 Les systèmes linéaires et non linéaires	5
I.2.1 Les systèmes linéaires	5
I.2.2 Les systèmes non linéaires	14
I.3 Stabilité, performances et robustesse	16
I.3.1 Stabilité des systèmes autonomes	17
I.3.2 Performances	24
I.3.3 Robustesse	28
I.4 Des approches multi-modèles	30
I.4.1 Séquencement de gains (<i>Gain Scheduling</i>)	30
I.4.2 Les modèles LPV et Quasi-LPV	31
I.4.3 Les modèles flous et commande floue	33
I.5 Problématique du mémoire	37
I.5.1 But recherché	37
I.5.2 Introduction à la notion de fonctions canoniques linéaires par morceaux (CPWL)	38
I.6 Conclusion	38
II Approximation systématique de systèmes non linéaires	41
II.1 Introduction	42
II.2 Outils de base	43
II.3 Algorithme général [64]	49

II.3.1	Modèle linéaire par morceaux	49
II.3.2	Modèles linéaires incertains polytopiques	56
II.3.3	Synthèses robustes locales	64
II.3.4	Loi de commande globale par séquençement	67
II.3.5	Organigramme	68
II.4	Problèmes liés à l'approche CPWL	68
II.4.1	Compromis précision - complexité - faisabilité	68
II.4.2	Système à comportement de type non minimum de phase	70
II.4.3	Cône d'incertitude pour une non linéarité à N-arguments	70
II.5	Conclusion	71
III	Synthèse de lois de commande robustes séquencées	73
III.1	Introduction	74
III.2	Commande par retour d'état	75
III.2.1	Stabilisabilité	75
III.2.2	Synthèse $\mathcal{H}_2$	76
III.2.3	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$	78
III.2.4	Stabilisabilité et placement de pôles	79
III.3	Commande par retour de sortie dynamique	81
III.3.1	Stabilisabilité	81
III.3.2	Synthèse $\mathcal{H}_2$	84
III.3.3	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$	89
III.3.4	Stabilisabilité et placement de pôles	93
III.4	Solveurs d'inégalités matricielles linéaires (LMIs)	97
III.4.1	LMI Control Toolbox [36] et SEDUMi [92]	98
III.5	CAPILARS 1.01 v. Beta: un prototype logiciel pour l'approche CPWL [63]	99
III.5.1	Problématique	99
III.5.2	Interface	100
III.5.3	Exemples	103
III.6	Conclusion	108
IV	Applications numériques	111
IV.1	Introduction	112
IV.2	Pendule inversé	112
IV.2.1	Présentation	112
IV.2.2	Modélisation CPWL	113
IV.2.3	Simulations	115
IV.3	Commande d'un panneau solaire	119
IV.3.1	Présentation	119

IV.3.2	Convertisseur DC-to-DC survolteur ou “Boost”	119
IV.3.3	Panneau solaire entier	125
IV.4	Moteur d’aération MTB	130
IV.4.1	Présentation	130
IV.4.2	Modélisation CPWL par deux non linéarités à un argument	133
IV.5	Lois de commande multi-modèles de la littérature	136
IV.5.1	Commande séquencée CPWL	137
IV.5.2	Commande séquencée par ellipsoïdes	138
IV.5.3	Commande Q-LPV	139
IV.5.4	Commande floue	141
IV.5.5	Synthèse	145
IV.6	Conclusion	147
Conclusion Générale		149
Annexes		152
A	Initialisation de l’approximation d’une non linéarité	153
B	Approche par ellipsoïdes [67]	155
Références bibliographiques		159
Table des figures		167
Listes des tableaux		171
Index		172

Notations et abréviations

Nous donnons ici quelques notations et les abréviations qui, outre celles qui seront ponctuellement introduites dans ce document, seront régulièrement utilisées.

Notations:

$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels.
$\mathbf{O}$	Matrice nulle.
$\mathbf{I}$	Matrice identité.
$M < 0$	La matrice M est définie négative.
$M > 0$	La matrice M est définie positive.
$M_1 < M_2$ ($M_1 > M_2$)	La matrice $M_1 - M_2$ est définie négative (resp. positive).
M^T	Matrice transposée.
M^*	Matrice conjuguée.
M^{-1}	Matrice inverse de M (pour M carrée de rang plein).
$\ M\ _2$	Norme-2 de la matrice M .
$\ T_{zw}\ _2$	Norme- $\mathcal{H}_2$ du transfert T_{zw} .
$\ T_{zw}\ _\infty$	Norme- $\mathcal{H}_\infty$ du transfert T_{zw} .
$\bar{\vartheta}(M)$	Valeur propre maximale de la matrice M .
$\underline{\vartheta}(M)$	Valeur propre minimale de la matrice M .
$\otimes$	Produit matriciel de Kronecker.
M_{ij}	Elément de M situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne.
$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$	Matrice bloc diagonale.
s	Variable de Laplace.
$T(s)$	Matrice de transfert en continu.
$\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$	Région convexe du plan complexe.
$F(x, u)$	Forme générale d'un système non linéaire.
$f(x, u)$	Partie non linéaire d'un système non linéaire.
$\bar{f}(x, u)$	Approximation de $f(x, u)$.
σ_r	Nombre d'hyperplans de la r -ième non linéarité.

i	Indice du nombre de modèles LTI incertains (Nombre de modèle LTIs incertains: $\mathcal{N}'$).
j	Indice du nombre de sommets de la matrice dynamique des modèles LTIs incertains (Nombre de sommets: $\mathcal{N}$).
k	Indice du nombre de sommets de la matrice de commande des modèles LTIs incertains (Nombre de sommets: $\mathcal{M}$).
r	Indice du nombre de non linéarités (Nombre de non linéarités: γ).
x_1	Première composante du vecteur (d'état) x .
x_{ei}	i -ème point d'équilibre pour le vecteur d'état x - Notation dans l'espace d'état.
$x_{1\epsilon i}$	Valeur de la première composante x_1 du point d'équilibre x_{ei} .

Abréviations:

LMI	Inégalité Matricielle Linéaire.
BMI	Inégalité Matricielle Bilinéaire.
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps.
LPV	Linéaire à Paramètres Variants.
Q-LPV	Quasi-Linéaire à Paramètres Variants.
CPWL	Canonique Linéaire par Morceaux.
CPWLF	Fonction Canonique Linéaire par Morceaux.
NL	Non linéaire / Non linéarité.
TP	Point d'équilibre (<i>Trim Point</i>) - Notation dans l'espace (géométrique).
BP	Point de cassure (<i>Break Point</i>) - Notation dans l'espace (géométrique).

Introduction Générale

La commande des systèmes non linéaires constitue un domaine très actif de recherche en Automatique et, on peut dire, encore très ouvert. La diversité des comportements des phénomènes dynamiques qui peuvent être observés pour cette classe de systèmes explique, au plan fondamental, la grande variété des approches qui, depuis longtemps déjà, et pour une durée encore très longue certainement, ont été et vont être développées.

La théorie des systèmes linéaires est, par contre, arrivée à un aboutissement très élevé et, s'il est possible d'envisager des sujets nouveaux, ils sont pour la plupart plus ou moins en liaison avec les tentatives faites pour l'utilisation des techniques linéaires pour la maîtrise des systèmes non linéaires. C'est dans ce cadre que s'inscrit le travail développé dans ce mémoire et il est à inclure dans la classe des approches multi-modèles utilisant la technique de séquençement des gains. Il s'agit d'une approche relativement heuristique qui consiste à approximer le système non linéaire par un ensemble de systèmes linéaires pour lesquels sont déterminées des commandes via les méthodes classiques des systèmes linéaires (LQ, LQG, placement de pôles, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, etc). La commande globale consiste en un séquençement des gains locaux en fonction de l'état mesuré sur le système. Nombre de ces approches, et en particulier celles développées dans le cadre de la logique floue, comportent un degré d'imprécision, d'approximation assez élevé. Pour ce type d'approche, l'évaluation des performances et leur validation ne peut passer que par des simulations. Un moyen, qui pour être à peu près convaincant, se doit d'être très lourd. L'approche proposée ici a pour ambition de proposer une synthèse de commande dans un processus pas à pas qui permette d'assurer un certain niveau de performances garanties, ou du moins, une méthode systématique pour y arriver. Le premier pas dans cette direction est fourni par la technique qui permet d'approximer le système non linéaire par un ensemble de systèmes linéaires (système linéaire par morceaux) avec un niveau de précision prédéfini et paramétré.

Le deuxième pas est l'utilisation de méthodes de commande robustes qui vont permettre d'assurer les stabilités locales et ce, dans des domaines d'espace d'état, non infiniséaux. Ce

dernier point va permettre de maîtriser la complexité de la commande globale et des techniques de séquençement en permettant l'obtention d'une cardinalité raisonnable pour l'ensemble des systèmes linéaires approximant.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante:

- Le premier chapitre présente les concepts de base nécessaires à la bonne compréhension du mémoire. Cela permet d'aborder les notions de systèmes linéaires et non linéaires, d'incertitudes, de stabilité, de performances, de robustesse et enfin, quelques idées sur des approches multi-modèles. Ces concepts seront à la base des techniques proposées dans ce mémoire.
- Le second chapitre développe l'approche CPWL, méthode mise au point au cours de cette thèse. Basée sur les fonctions canoniques linéaires par morceaux (CPWLF) et sur l'aspect systématisation de l'approche, cette méthode permet de faire la synthèse robuste séquentielle d'une certaine classe de systèmes non linéaires, des systèmes ayant des non linéarités à un ou deux arguments. Les arguments sont les variables d'états et les commandes.
- Le troisième chapitre développe la dernière partie de l'approche CPWL, après l'approximation des non linéarités et la recherche de modèles LTI incertains polytopiques, l'étape de synthèse robuste. Cette méthode permet la synthèse de compensateurs par retour d'état et de sortie dynamique en tenant compte de plus ou moins de performances, c'est-à-dire en garantissant un rejet de perturbation $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou un placement de pôles dans une région convexe du plan complexe. Pour répondre au critère de systématisation, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à la présentation du première version du prototype logiciel CAPILARS issue de l'approche CPWL.
- Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'application de l'approche CPWL sur plusieurs systèmes non linéaires. Les premières applications permettent d'illustrer directement et simplement la méthode. Dans un second temps, nous essayerons de situer l'approche CPWL parmi les approches présentées dans ce mémoire en recherchant les forces et les faiblesses de chacune et plus particulièrement pour l'approche proposée et ainsi mettre en évidence les caractéristiques communes et proposes de cette dernière.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale mettant l'accent sur la contribution de cette méthode quant à la résolution de problèmes de commande robuste séquentielle pour des systèmes non linéaires, ainsi que sur les évolutions possibles et les recherches ultérieures, qui permettront de prolonger les travaux.

Chapitre I

Contexte et motivations

L'objectif de ce premier chapitre est de replacer le travail de cette thèse dans le cadre de l'Automatique et plus particulièrement de la commande des systèmes non linéaires. Des rappels sur les diverses représentations possibles des systèmes linéaires et non linéaires y sont répertoriés et ont pour but d'exhiber le choix de modélisation adoptée dans cette thèse. Une brève introduction aux concepts de stabilité, de robustesse et de performance permet d'effectuer un inventaire des possibilités existantes concernant l'étude des systèmes linéaires et non linéaires. Quelques approches qualifiées de multi-modèles sont décrites aussi dans ce chapitre afin d'exhiber les difficultés possibles pour chacune d'elles et les pistes de travail envisageables. Ceci nous a conduit, à la suite de ces approches, à préciser les objectifs qui ont motivé le travail présenté dans ce mémoire.

“Se donner du mal pour les petites choses, c’est parvenir aux grandes, avec le temps.”
[Samuel Beckett, Extrait de *Molloy*]

I.1 Introduction

Un des objectifs de l'Automatique est d'analyser le comportement de processus ou systèmes (figure I.1.a), dynamiques, continus ou discrets, en boucle ouverte (sans correction) ou fermée. Pour atteindre cet objectif, l'utilisation de modèles est nécessaire. Il faudra penser avant tout aux caractéristiques du système physique afin d'établir le modèle le plus satisfaisant possible. C'est ce que l'on appelle la phase de modélisation. Il est possible d'effectuer une phase d'identification [9, 69] à partir du comportement entrée-sortie du processus comme le montre la figure I.1.b.

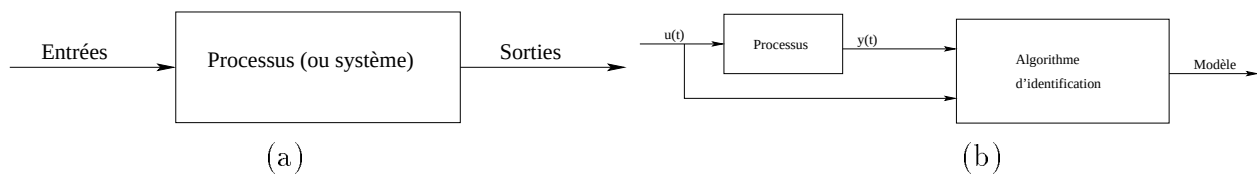


FIG. I.1 – Identification à partir du comportement entrée-sortie.

D'un point de vue pratique, nous nous intéresserons aux systèmes causaux le plus souvent strictement où les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrées. La détermination d'un modèle du processus dépend de l'utilisation prévue de ce modèle, modèle qui peut-être très différent d'un autre en fonction des hypothèses proposées et des approximations effectuées.

Citons le cas des modèles linéaires, continus ou discrets, invariants ou variants dans le temps, qui représentent une grande famille de modèles. La deuxième famille est celle des modèles non linéaires, qui représentent la majorité des systèmes physiques que nous pouvons rencontrer. Par linéarisation locale, il est connu qu'il est possible d'aborder, dans le cas de non linéarités faibles et continues, l'étude de systèmes non linéaires au moyen de techniques linéaires. Toutefois, il existe une grande variété de comportements qui échappent à toutes tentatives de représentations et d'études linéaires. C'est pourquoi, il existe une branche de l'Automatique non linéaire qui s'est développée autour d'approches dites multi-modèles. C'est dans ce cadre que cette thèse s'est inscrite. Il existe de nombreux exemples de telles approches et parmi celles proches de notre travail: le séquençement de gains (**Gain Scheduling** [83, 87, 88]), la commande linéaire à paramètres variants (**LPV/Quasi-LPV** [89, 7, 74, 71, 20]) ou encore la commande floue (**Fuzzy Control** [28, 10, 94]), etc.

Enfin, rappelons qu'il est courant de ne pas connaître parfaitement les caractéristiques des processus, ce qui se traduit par des incertitudes de modélisation. Ces incertitudes seront prises en compte dans la modélisation et auront une influence sur la détermination de la loi de commande. C'est la commande robuste.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante: après avoir décrit les deux familles de

modèles, linéaires et non linéaires, avec leurs caractéristiques respectives, nous présenterons quelques éléments complémentaires qui favoriseront la bonne compréhension du mémoire, c'est-à-dire les notions de stabilité, de robustesse et de performance. Puis, nous nous attacherons à spécifier des méthodes utilisant une famille de modèles afin de représenter le modèle non linéaire au moyen de celle-ci. Nous y présenterons dans un premier temps, la méthode dite de séquençement de gain avec son champ d'applications, puis dans un second temps, l'approche LPV/Q-LPV sera introduite pour enfin terminer, avec ces approches multi-modèles, par la commande floue. Chaque méthode apporte son lot d'avantages et d'inconvénients, et a orienté cette thèse vers une approche qui semble être valable pour la commande d'une classe particulière de systèmes non linéaires. Par conséquent, à la suite de ces présentations et pour conclure ce chapitre, nous décrirons les fondements, les objectifs et les motivations de cette thèse.

I.2 Les systèmes linéaires et non linéaires

Le caractère linéaire est généralement une idéalisation car la plupart des systèmes physiques sont en réalité non linéaires. Pour des raisons de simplicité, le modèle ayant servi pour la conception de la loi de commande ne tient pas toujours compte de certains phénomènes, tels que des perturbations, des frottements, des dynamiques rapides, etc. Il est possible, quand les non linéarités le permettent, de linéariser un modèle non linéaire autour de points de fonctionnement et de travailler avec des modèles linéaires valables localement. Le modèle linéaire résulte alors d'une approximation du modèle non linéaire. L'approximation d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire unique peut produire à un comportement bien éloigné du comportement réel: un moyen pour pallier cela, consiste à utiliser une famille de modèles linéaires pour représenter le système réel. Cette famille de modèles peut être constituée sur la base d'un modèle nominal et d'un domaine paramétrique d'incertitude. Dans cette section nous allons rappeler les définitions des deux classes de modèles avec leurs caractéristiques respectives.

I.2.1 Les systèmes linéaires

Définition

Les systèmes linéaires se caractérisent principalement par deux propriétés, la proportionnalité et l'additivité, qui se résument par le principe de superposition dont la définition est la suivante:

Définition I.1 : Soit $z_1(t)$ et $z_2(t)$ les évolutions respectives d'un processus P pour les entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Il est dit linéaire si pour:

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \quad (I.1)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, alors, il est possible d'écrire la sortie $z(t)$,

$$z(t) = \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t) \quad (\text{I.2})$$



Les systèmes dynamiques linéaires peuvent être classés en plusieurs catégories, par exemples:

- à temps continu / à temps discret,
- invariant dans le temps / variant dans le temps,
- monovariante / multivariante.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons particulièrement aux systèmes linéaires et non linéaires, continus invariants dans le temps. Il existe des représentations qui permettent de décrire le comportement d'un système dynamique linéaire dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Pour le domaine fréquentiel, il s'agit des représentations par les fonctions ou matrices de transfert, en continu et en discret. Et, pour le domaine temporel, la principale représentation est la représentation d'état qui repose sur les équations différentielles. Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons à la représentation d'état des modèles linéaires et non linéaires. Pour plus de détails sur les représentations fréquentielles et temporelles, le lecteur pourra consulter [9].

Représentations

La représentation d'état constitue une alternative intéressante pour la modélisation car elle permet de mettre en évidence des informations internes du processus qui n'apparaissent pas nécessairement dans la représentation par fonction (ou matrice) de transfert.

Dans le cas général des systèmes dynamiques linéaires, un système est décrit par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \\ z(t) = C_1(t)x(t) + D_{11}(t)w(t) + D_{12}(t)u(t), \\ y(t) = C_2(t)x(t) + D_{21}(t)w(t) + D_{22}(t)u(t) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \quad y \in \mathbb{R}^q \\ w \in \mathbb{R}^l \quad z \in \mathbb{R}^p \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

où x, u, w sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de perturbation et z, y sont respectivement les sorties contrôlées et mesurées. Le système précédent est continu linéaire à temps variant (LTV). Plus simplement, et s'il n'existe pas de perturbation w et que les sorties mesurées y s'identifient aux sorties contrôlées z , cette représentation générale se réécrit de

manière suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_2(t)u(t) \\ y(t) = C_2(t)x(t) + D_{22}(t)u(t) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Les matrices A , B_2 , C_2 et D_{22} , appelées respectivement matrice dynamique, matrice d'entrée, matrice de sortie et matrice de transmission directe, sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Le modèle est linéaire invariant dans le temps (LTI) si ses matrices ne dépendent pas explicitement du temps t :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t), \\ y(t) = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Remarque I.1 : *Pour éviter la surcharge au niveau des écritures, nous omettrons, dans les chapitres suivants, de spécifier la dépendance avec le temps t pour les variables d'état, de commande, de sorties et de perturbations. Pour le système LTI précédent, nous écrirons*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2u, \\ y = C_2x + D_{22}u \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

▲

Pour le cas des systèmes discrets, la représentation d'état est composée d'équations récurrentes qui, dans le cas général, s'écrivent:

$$\begin{cases} x_{\kappa+1} = A_{\kappa}x_{\kappa} + B_{1\kappa}w_{\kappa} + B_{2\kappa}u_{\kappa}, \\ z_{\kappa} = C_{1\kappa}x_{\kappa} + D_{11\kappa}w_{\kappa} + D_{12\kappa}u_{\kappa}, \\ y_{\kappa} = C_{2\kappa}x_{\kappa} + D_{21\kappa}w_{\kappa} + D_{22\kappa}u_{\kappa} \\ x_{\kappa} \in \mathbb{R}^n \quad u_{\kappa} \in \mathbb{R}^m \quad y_{\kappa} \in \mathbb{R}^q \\ w_{\kappa} \in \mathbb{R}^l \quad z_{\kappa} \in \mathbb{R}^p \quad \forall t_{\kappa} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

et dans le cas de systèmes discrets LTI

$$\begin{cases} x_{\kappa+1} = Ax_{\kappa} + B_2u_{\kappa}, \\ y_{\kappa} = C_2x_{\kappa} + D_{22}u_{\kappa} \\ x_{\kappa} \in \mathbb{R}^n \quad u_{\kappa} \in \mathbb{R}^m \quad y_{\kappa} \in \mathbb{R}^q \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Les variables x , u et y recouvrent les mêmes significations que dans le cas continu, mais ne sont cette fois définies qu'aux instants $t_k \geq 0$.

Remarque I.2 : *i) Il est possible de passer de la représentation dans l'espace d'état à celle par fonction de transfert. On vérifie aisément que la fonction de transfert de $U(\delta)$ à $Y(\delta)$ est alors donnée par*

$$T(\delta) = D_{22} + C_2(\delta \mathbb{I} - A)^{-1}B_2, \quad (\text{I.9})$$

$\mathbb{I}$ étant la matrice identité et δ représente respectivement s et z dans les cas continu et discret. Alors, (A, B_2, C_2, D_{22}) est appelée réalisation de $T(s)$. Celle-ci n'est pas unique puisque pour n'importe quelle matrice inversible V telle que:

$$\tilde{A} = V^{-1}AV, \quad \tilde{B}_2 = V^{-1}B_2, \quad \tilde{C}_2 = C_2V, \quad \tilde{D}_{22} = D_{22} \quad (\text{I.10})$$

$(\tilde{A}, \tilde{B}_2, \tilde{C}_2, \tilde{D}_{22})$ est aussi une réalisation de $T(s)$.

ii) Ces différentes représentations conviennent aux systèmes monovariables (une seule entrée, une seule sortie, dits SISO) et dans ce cas, on parle de fonction de transfert, mais aussi aux systèmes multivariables (plusieurs entrées, plusieurs sorties, dits MIMO).

▲

Pour plus de détails sur les diverses représentations de modèles, le lecteur pourra consulter les ouvrages [24, 55, 8].

Incertitudes

La connaissance exacte des modèles n'est pas vérifiée dans tous les cas, ce qui engendre des incertitudes de modélisation. Il faut donc assurer une certaine robustesse aux imperfections du modèle en question, c'est-à-dire garantir les propriétés désirées pour toute une famille de systèmes autour d'un modèle de référence. Les imperfections des techniques de modélisation et l'impossibilité de conserver des modèles d'ordre élevé conduisent à deux types d'incertitudes distincts:

– L'incertitude non structurée [13].

Ces incertitudes sont par exemple les dynamiques négligées ou approximées dans le modèle. L'incertitude est considérée comme un modèle perturbateur se superposant au modèle nominal (T_{nom}), ce qui s'écrit dans le domaine fréquentiel:

$$T(s) = T_{nom}(s) + \Delta T(s) \quad (\text{I.11})$$

où $\Delta T(s)$ est une fonction de transfert stable et $T(s)$ représente le modèle nominal (ou de référence). Cette incertitude, généralement haute fréquence, peut s'écrire sous diverses

formes:

1. Forme additive:

$$T(s) = T_{nom}(s) + \Delta_a(s) \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}[\Delta_a(jw)] \leq |l_a(jw)| \quad \forall w \geq 0 \quad (\text{I.12})$$

2. Forme multiplicative directe en entrée:

$$T(s) = T_{nom}(s)(\mathbb{I} + \Delta_{de}(s)) \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}[\Delta_{de}(jw)] \leq |l_{de}(jw)| \quad \forall w \geq 0 \quad (\text{I.13})$$

3. Forme multiplicative inverse en entrée:

$$T(s) = T_{nom}(s)(\mathbb{I} + \Delta_{ie}(s))^{-1} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}[\Delta_{ie}(jw)] \leq |l_{ie}(jw)| \quad \forall w \geq 0 \quad (\text{I.14})$$

4. Forme multiplicative directe en sortie:

$$T(s) = (\mathbb{I} + \Delta_{ds}(s))T_{nom}(s) \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}[\Delta_{ds}(jw)] \leq |l_{ds}(jw)| \quad \forall w \geq 0 \quad (\text{I.15})$$

5. Forme multiplicative inverse en sortie:

$$T(s) = (\mathbb{I} + \Delta_{ds}(s))^{-1}T_{nom}(s) \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}[\Delta_{is}(jw)] \leq |l_{is}(jw)| \quad \forall w \geq 0 \quad (\text{I.16})$$

Toutes ces formes d'incertitudes non structurées sont illustrées sur la figure I.2.

Les incertitudes à l'entrée et en sortie représentent respectivement les erreurs ou fluctuations sur les actionneurs et les capteurs. Cette incertitude est dite non structurée, au sens où l'on ne connaît rien de sa phase, et que la seule information dont on dispose est une borne de sa norme. Dans la représentation de l'espace d'état (domaine temporel), un système LTI incertain peut s'écrire:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + (B_2 + \Delta B_2)u, \\ y = (C_2 + \Delta C_2)x + (D_{22} + \Delta D_{22})u \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

où ΔA , ΔB_2 , ΔC_2 et ΔD_{22} décrivant l'incertitude considérée, traduisent essentiellement des variations paramétriques du modèle.

Dans le cas où seule la matrice dynamique A est affectée, toutes les variations paramétriques sont contenues dans ΔA et la majoration de la norme matricielle s'écrit de la manière suivante:

$$\|\Delta A\| \leq \phi$$

où ϕ est un scalaire positif et $\|\cdot\|$ une norme généralement de type $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

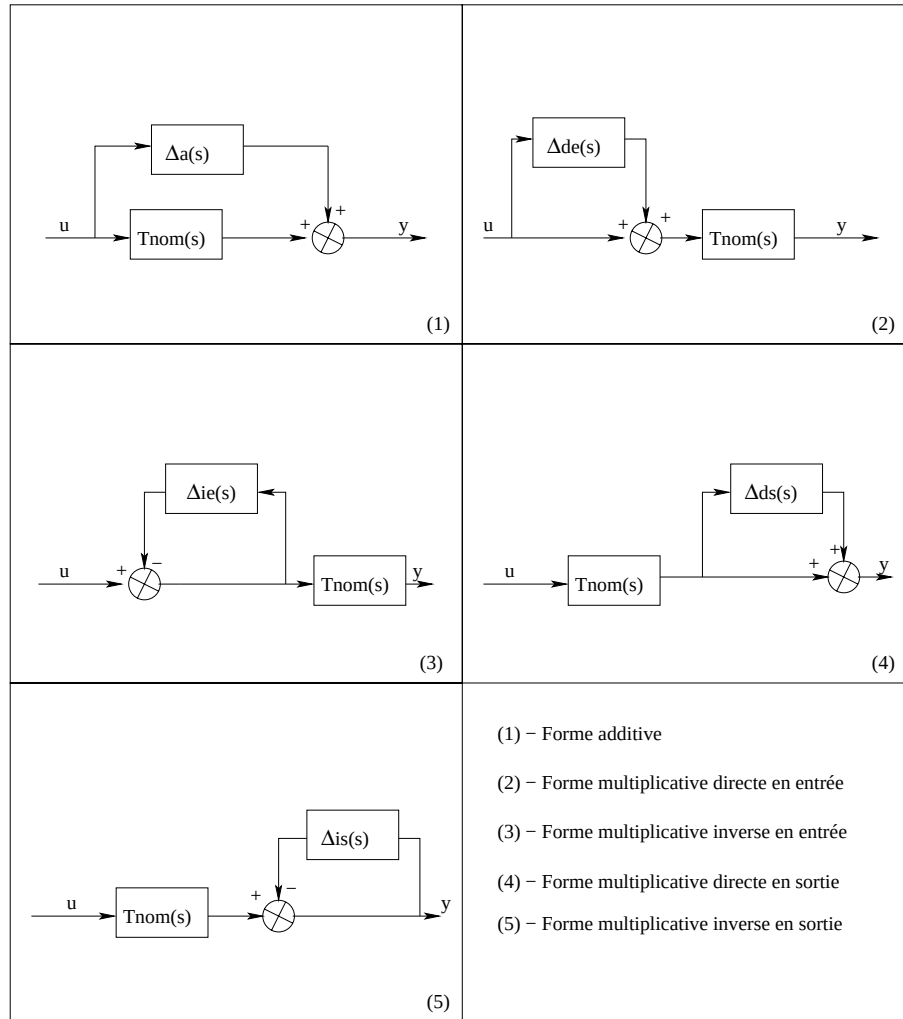
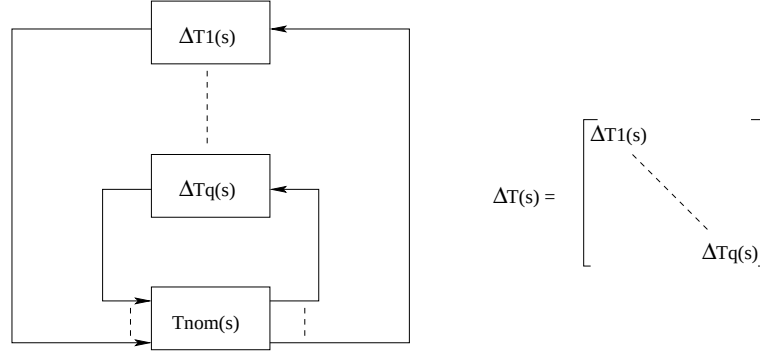


FIG. I.2 – Incertitudes non structurées (domaine fréquentiel).

– L'incertitude structurée.

L'incertitude structurée est généralement liée aux inexactitudes paramétriques du modèle, et concerne donc directement la partie modélisée de la dynamique du système. Contrairement au cas précédent, ces incertitudes ne peuvent pas être traitées par une perturbation non structurée car elles sont plus difficiles à représenter et à prendre en compte. Pour être prises en compte, ces perturbations doivent apparaître dans le modèle dans le domaine fréquentiel (figure I.3) et dans le domaine temporel en supposant que l'on a une certaine information sur la manière dont l'incertitude affecte le système.

La représentation de l'incertitude structurée dans le domaine fréquentiel se fait en considérant une matrice d'incertitude ΔT à structure bloc-diagonale (figure I.3).

FIG. I.3 – *Incertainces structurées (domaine fréquentiel).*

Il existe plusieurs façons de modéliser l'incertitude structurée dans l'espace d'état (domaine temporel). Nous pouvons en énumérer certaines:

- l'incertitude bornée en norme [79, 100],
- l'incertitude bornée réelle [48],
- l'incertitude positive réelle [46],
- l'incertitude polytopique [6],
- l'incertitude affine structurée [93].

Dans l'espace d'état, un système LTI incertain s'écrit par:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + (B_2 + \Delta B_2)u, \\ y = (C_2 + \Delta C_2)x + (D_{22} + \Delta D_{22})u \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérons que seule la matrice dynamique est incertaine.

1. Incertitude bornée en norme [79, 100]

La structure de l'incertitude ΔA s'écrit par la relation suivante:

$$\Delta A = \tilde{D}F\tilde{E} \quad (\text{I.19})$$

où $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ et $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ sont des matrices constantes connues, qui définissent la structure de l'incertitude en la répartissant sur les différents éléments de la matrice A . La matrice $F \in \mathbb{R}^{d \times l}$ est la matrice d'incertitude appartenant au domaine:

$$\mathcal{D}_F = \{F \in \mathbb{R}^{d \times l} : F^T F \leq \mathbb{I}\} \quad (\text{I.20})$$

Sous une forme plus structurée de l'incertitude [39]:

$$\Delta A : = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \Delta A_j \quad (\text{I.21})$$

avec

$$\begin{cases} \Delta A_j : = \tilde{D}_j F_j \tilde{E}_j \\ F_j^T F_j \leq \mathbb{I} \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, \mathcal{N} \quad (\text{I.22})$$

2. Incertitude bornée réelle [48]

L'incertitude bornée réelle est définie par:

$$\Delta A : = \tilde{D} F (\mathbb{I} - \tilde{D}_0 F)^{-1} \tilde{E} \quad (\text{I.23})$$

où $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ et $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ sont des matrices connues qui définissent la structure de l'incertitude. La matrice d'incertitude $F \in \mathcal{D}_F$ (I.20) et $\tilde{D}_0 \in \mathbb{R}^{d \times l}$ est une matrice constante satisfaisant l'inégalité:

$$\mathbb{I} - \tilde{D}_0^T \tilde{D}_0 > 0 \quad (\text{I.24})$$

Sous une forme plus structurée:

$$\Delta A : = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \Delta A_j \quad (\text{I.25})$$

avec

$$\begin{cases} \Delta A_j : = \tilde{D}_j F_j (\mathbb{I} - \tilde{D}_{0j} F_j)^{-1} \tilde{E}_j \\ F_j^T F_j \leq \mathbb{I} \\ \mathbb{I} - \tilde{D}_{0j}^T \tilde{D}_{0j} > 0 \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, \mathcal{N} \quad (\text{I.26})$$

3. Incertitude positive réelle [46, 41]

L'incertitude positive réelle est définie par:

$$\Delta A : = -\tilde{D} F_p (\mathbb{I} + \tilde{D}_0 F_p)^{-1} \tilde{E}$$

où $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ et $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ sont toujours des matrices constantes connues qui définissent la structure de l'incertitude. La matrice F_p d'incertitude appartient à l'ensemble $\mathcal{D}_{F_p}$, telle que:

$$\mathcal{D}_{F_p} : = \{F_p \in \mathbb{R}^{d \times d} : F_p^T + F_p \geq 0\} \quad (\text{I.27})$$

et $\tilde{D}_0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice constante vérifiant l'inégalité:

$$\tilde{D}_0 + \tilde{D}_0^T > 0 \quad (\text{I.28})$$

Cette condition garantit l'existence de l'inverse de $\mathbb{I} + \tilde{D}_0 F_p$ pour tout $F_p \in \mathcal{D}_{F_p}$. Une forme plus structurée que la précédente revient à écrire:

$$\Delta A : = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \Delta A_j \quad (\text{I.29})$$

avec

$$\begin{cases} \Delta A_j : = -\tilde{D}_j F_{pj} (\mathbb{I} + \tilde{D}_{0j} F_{pj})^{-1} \tilde{E}_j \\ F_{pj}^T + F_{pj} \leq 0 \\ \tilde{D}_{0j}^T + \tilde{D}_{0j} > 0 \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, \mathcal{N} \quad (\text{I.30})$$

4. Incertitude affine [7, 33, 93]

L'incertitude dépend des paramètres de manière affine:

$$\Delta A : = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j \Delta A_j \quad \text{avec } p_j \in [\underline{p}_j, \overline{p}_j] \quad (\text{I.31})$$

Les matrices A_j , répartissent l'incertitude sur les différents éléments de la matrice A . Le domaine défini par cette incertitude est un hyper-rectangle de dimension $\mathcal{N}$ dont les sommets correspondent aux valeurs extrêmes de $p = [p_1 \dots p_{\mathcal{N}}]^T$.

5. Incertitude polytopique [6, 7]

L'incertitude polytopique est définie telle que la matrice A appartienne à un domaine de type polytopique:

$$A \in \mathcal{D}_A : = \left\{ A : A = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j A_j, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\} \quad (\text{I.32})$$

où $\mathcal{N}$ représente le nombre de sommets du polyèdre $\mathcal{D}_A$. L'incertitude polytopique se rapproche de l'incertitude affine, mais il n'existe pas de matrice nominale A . Dans ce mémoire, nous nous attacherons à l'incertitude paramétrique de type polytopique, soit

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} A_j \delta_j \right) x + \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} B_{2j} \delta_j \right) u, \\ y = \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} C_{2j} \delta_j \right) x + \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} D_{12j} \delta_j \right) u \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

Il se pourra, par contre, que les sommets de chaque matrice de la représentation d'état ne s'identifie pas avec le même indice (dans ce cas (I.33), l'indice est le même pour toutes les matrices: j).

Nous pouvons énumérer d'autres modélisation d'incertitudes comme les incertitudes de "type μ ", etc. Le lecteur pourra apprécier la section détaillée à ce sujet dans [30]. Les deux types d'incertitudes (structurées et non structurées), qui sont complémentaires, s'expriment dans des cadres distincts. On peut s'attendre à des difficultés lorsqu'il s'agira de les prendre en compte simultanément dans les procédures de synthèse.

I.2.2 Les systèmes non linéaires

A contrario des systèmes linéaires, les systèmes non linéaires ne vérifient plus le principe de superposition, et donc les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus à cette classe de systèmes.

Représentations

Dans l'étude des systèmes non linéaires, on se heurte à plusieurs difficultés:

- L'analyse par les fonctions de transfert est impossible,
- La notion de pôles disparaît,
- Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour lequel le concept de stabilité est global.

La représentation la plus courante, dans l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ (n correspondant à l'ordre du système) s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t), \\ y(t) = G(x(t), u(t), t) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

Une solution $x(t)$ des équations précédentes correspond généralement à une courbe de l'espace d'état, quand t varie de 0 à ∞ , appelée une trajectoire d'état. La non linéarité d'un système peut-être intrinsèque ou peut être isolée, c'est-à-dire que l'on peut avoir une association d'éléments à caractéristiques non linéaires associée à un système pour lequel un modèle est linéaire (figure I.4)

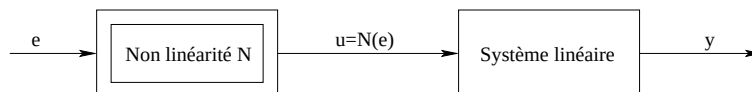


FIG. I.4 – *Système à non linéarité séparable.*

Comme pour les systèmes linéaires, il est possible de distinguer aussi les modèles non linéaires par les caractères suivants:

- à temps continu / à temps discret,
- invariant dans le temps / variant dans le temps,
- monovarié / multivarié, etc.

Définition I.2 : *Le système non linéaire I.34 est dit autonome si F et G ne dépendent pas explicitement du temps t , c'est-à-dire, si le système peut s'écrire par*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)), \\ y(t) = G(x(t), u(t)) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^l \quad y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

Sinon, le système I.35 est dit non autonome.



Dans le cas non autonome, si les variations des caractéristiques sont lentes dans le temps, on pourra approximer le système par une séquence de systèmes autonomes.

Comme nous l'avons cité précédemment, les systèmes non linéaires forment la classe des systèmes la plus générale: un cas particulier de cette classe est le système linéaire. Un système linéaire invariant (LTI) n'a, en général, qu'un seul point d'équilibre, alors qu'un système non linéaire a plusieurs points d'équilibre.

Définition I.3 : *Un état x_{ei} est un état d'équilibre (ou point d'équilibre) du système I.35 si*

$$0 = F(x_{ei}, 0) \quad (\text{I.36})$$

Un système linéaire invariant (LTI) a pour état d'équilibre l'origine, si sa matrice dynamique est non singulière.



Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Soit un processus admettant la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u), \\ y = G(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \quad y \in \mathbb{R}^q \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

avec plusieurs points d'équilibre notés (x_{ei}, u_{ei}) , $\forall i = 1, \dots, \mathcal{N}'$. Si le vecteur d'état évolue dans le voisinage d'un point d'équilibre x_{ei}, u_{ei} avec $1 \leq i \leq \mathcal{N}'$, alors, il est possible de linéariser le modèle non linéaire:

$$x = x_{ei} + \delta x \quad u = u_{ei} + \delta u \quad (\text{I.38})$$

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = F_x(x_{ei}, u_{ei})\delta x + F_u(x_{ei}, u_{ei})\delta u + \phi(\|\delta x\|, \|\delta u\|) \quad (\text{I.39})$$

avec $F_x(x_{ei}, u_{ei})$, $F_u(x_{ei}, u_{ei})$ les matrices Jacobiennes:

$$F_x(x_{ei}, u_{ei}) = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x_{ei}, u=u_{ei}} \quad F_u(x_{ei}, u_{ei}) = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x_{ei}, u=u_{ei}} \quad (\text{I.40})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à un, c'est-à-dire $\phi(\|\delta x\|, \|\delta u\|)$, le modèle est linéaire invariant et valable localement autour du point d'équilibre (x_{ei}, u_{ei}) .

Les lois de commande auxquelles nous nous intéresserons seront continues invariantes dans le temps du type:

- retour d'état,

$$u(t) = Kx(t), \quad (\text{I.41})$$

- retour de sortie dynamique,

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) = C_c x_c(t). \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

avec les dimensions appropriées.

Pour plus d'informations concernant les classes de systèmes non linéaires (et linéaires), le lecteur pourra se référer à [59, 91, 96].

I.3 Stabilité, performances et robustesse

Dans cette partie, nous nous attachons à spécifier dans un premier temps et très brièvement quelques propriétés de stabilité que peuvent vérifier les modèles d'état autonomes précédemment présentés. Il s'agit là de propriétés que doit impérativement vérifier un système commandé sous peine de voir sa (ses) sortie(s) diverger irrémédiablement sous l'effet d'une perturbation. Une plus ample information sur ses problèmes de stabilité peut être trouvée en consultant l'ouvrage de Jury [53]. Cependant, la stabilité est une performance minimale pour le système et reste bien souvent insuffisante pour assurer le comportement souhaité: c'est pourquoi, nous évoquerons les notions de performance et de robustesse par la suite.

I.3.1 Stabilité des systèmes autonomes

Le cas linéaire étant un cas particulier du cas non linéaire, les résultats sur la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes non linéaires s'appliquent aussi pour les systèmes linéaires. Considérons la fonction F localement lipschitzienne [2] sur le domaine ouvert S tel que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et définie par :

$$F : \begin{cases} S \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto F(x) \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

et le système non linéaire autonome stationnaire suivant :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(t_0) = x_0 \text{ (condition initiale)} \quad (\text{I.44})$$

Supposons que x_e est un point d'équilibre défini par la définition I.3 pour le système non linéaire I.44.

Stabilité au sens de Lyapunov

Définition I.4 : Stabilité simple : La trajectoire d'équilibre x_e est dite simplement stable, si $\forall t_0 > 0$ et ϵ scalaire positif, il existe un scalaire positif $\eta(\epsilon, t_0)$, tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \eta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{I.45})$$

◆

Ce concept est illustré avec la figure I.5.a. La condition d'attractivité s'exprime par la conver-

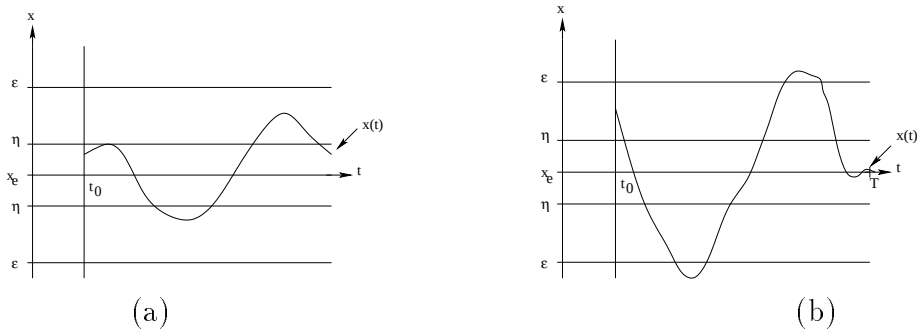


FIG. I.5 – Stabilité simple (a) et attractivité (b).

gence obligatoire de la trajectoire d'évolution au bout un certain temps, mais pendant le transitoire, la trajectoire peut évoluer de manière "libre" (figure I.5.b).

Définition I.5 : Attractivité : $\forall \epsilon > 0$, il existe $T(\epsilon, x_0, t_0)$ tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \eta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (\text{I.46})$$

◆

Définition I.6 : Stabilité asymptotique: La stabilité asymptotique se vérifie si le point d'équilibre étudié est simplement stable et attractif.

◆

Définition I.7 : Stabilité exponentielle: La trajectoire d'équilibre x_e est dite exponentiellement stable, s'il existe deux réels strictement positifs k et α tels que

$$\forall t \geq t_0, \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| \leq k \|x_0 - x_e\| e^{-\alpha t} \quad (\text{I.47})$$

◆

La stabilité exponentielle implique, en plus de la stabilité simple, que la convergence de la trajectoire d'évolution vers le point d'équilibre est exponentielle décroissante.

Définition I.8 : Stabilité uniforme: La trajectoire d'équilibre x_e est dite uniformément stable, si $\forall t > 0$ et ϵ scalaire positif, il existe un scalaire positif $\eta(\epsilon)$, tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \eta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{I.48})$$

◆

La caractérisation de la stabilité est fortement liée à la notion de voisinage du point d'équilibre. Par conséquent, nous allons définir la notion de bassin d'attraction d'un point d'équilibre, l'origine par exemple:

Définition I.9 : Bassin d'attraction: Le bassin d'attraction $\mathcal{D}_a$ de l'origine est l'ensemble constitué de l'origine et des condition initiales x_0 , telles que les trajectoires $x(t, x_0)$ du système non linéaire I.44 convergent vers l'origine.

◆

A partir de cette définition du bassin d'attraction, nous pouvons caractériser la stabilité asymptotique globale et locale.

Définition I.10 : Stabilité asymptotique locale: La stabilité asymptotique sera dite locale si le bassin d'attraction est strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{D}_a \subset \mathbb{R}^n$.

◆

Définition I.11 : Stabilité asymptotique globale: A contrario de la stabilité asymptotique locale, la stabilité asymptotique globale est obtenue si le bassin d'attraction est l'espace d'état tout entier: $\mathcal{D}_a = \mathbb{R}^n$.

◆

Pour les systèmes linéaires, les concepts de stabilité sont toujours globaux.

Deux manières d'étudier un système non linéaire de façon locale et/ou globale sont les méthodes indirecte (stabilité locale) et directe (stabilités locale et globale) de Lyapunov.

Méthode indirecte de Lyapunov

Rappelons nous la linéarisation autour d'un point d'équilibre (par exemple l'origine) introduite précédemment et appliquons la au système non linéaire I.44:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(t_0) = x_0 \text{ (condition initiale)} \quad (\text{I.49})$$

Le développement de I.49 est tel que

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} x + \phi(x) \quad (\text{I.50})$$

où $\phi(x)$ fait intervenir les termes d'ordre supérieur en x . On notera la matrice Jacobienne de f

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (\text{I.51})$$

alors, le système défini par

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = A\delta x \quad (\text{I.52})$$

est le système linéarisé autour du point d'équilibre (l'origine). Le résultat fondamental de la méthode indirecte est donné dans le théorème suivant:

Théorème I.1 : *Soit la matrice jacobienne A du système linéarisé de I.49 autour de $x = 0$.*

Si la matrice A a toutes ses valeurs propres à parties réelles strictement négatives, alors le point d'équilibre du système non linéaire est localement asymptotiquement stable.

Si la matrice A admet au moins une valeur propre à partie réelle positive, alors le point d'équilibre du système non linéaire est instable.

Si la matrice A a des valeurs propres à parties réelles négatives ou nulles, avec au moins une nulle, on ne peut rien conclure sur la stabilité du point d'équilibre du système non linéaire, on se trouve alors dans un cas critique. Il peut être stable, asymptotiquement stable ou même instable.

□

Méthode directe de Lyapunov [72]

La méthode directe de Lyapunov se base sur le signe d'une fonction (de Lyapunov) et celui de sa dérivée. Pour cela, définissons d'abord la fonction de Lyapunov.

Définition I.12 : *Fonction définie positive: La fonction scalaire $V(x)$ est dite globalement définie positive si $V(0) = 0$ et que $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.*

◆

Définition I.13 : Fonction de Lyapunov candidate: La fonction $V(x) : \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de Lyapunov candidate, si elle satisfait les deux conditions suivantes:

- $V(x)$ est continue et ses dérivées partielles $\frac{\partial V(x)}{\partial x_{(k_v)}}$, pour tout $k_v = 1, \dots, n$, existent et sont continues,
- $V(x)$ est définie positive.

◆

Nous noterons comme suit:

- La fonction de Lyapunov: $V(x)$ avec $V(0) = 0$, $V(x) \rightarrow \infty$, lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$.
- La dérivée de la fonction de Lyapunov: $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt}$

La recherche du signe de $V(x)$ et $\dot{V}(x)$ donne une information sur la stabilité du système à étudier. Présentons d'abord, grâce à l'existence d'une fonction de Lyapunov candidate, la stabilité locale puis dans un second temps, la stabilité globale pour un point d'équilibre.

Théorème I.2 : Stabilité locale: Dans le voisinage $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$, l'équilibre $x = 0$ est:

- localement stable, s'il existe une fonction de Lyapunov candidate, $V(x) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\dot{V}(x) \leq 0$, pour tout $x \in \mathcal{W}$.
- localement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction de Lyapunov candidate, $V(x) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\dot{V}(x) < 0$, pour tout $x \in \mathcal{W}$.

□

Théorème I.3 : Stabilité globale: L'équilibre $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov candidate $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que:

- $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- $\|x\| \rightarrow \infty$, $\lim V(x) \rightarrow \infty$.

□

Une classe intéressante de fonctions de Lyapunov est celle des fonctions de Lyapunov quadratiques qui s'écrivent de la manière suivante:

$$V(x) = x^T P x \quad P = P^T > 0 \quad (I.53)$$

Cette fonction est définie positive si P est une matrice définie positive. Dans le cas d'un système linéaire autonome,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{I.54})$$

il est possible d'écrire:

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA) x \quad (\text{I.55})$$

Si la dérivée est définie négative alors l'origine est asymptotiquement stable. Nous avons le théorème de Lyapunov suivant qui est fondamental dans l'étude des systèmes linéaires.

Théorème I.4 : *Le système linéaire I.54 est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice Q définie positive, l'unique solution de P de l'équation matricielle*

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (\text{I.56})$$

est définie positive.

□

Dans le cadre des systèmes incertains, l'extension de ces résultats a donné lieu à ce qu'on appelle l'approche quadratique qui consiste pour un système linéaire incertain à rechercher une matrice de Lyapunov unique P satisfaisant I.56 pour toute évolution dans son domaine d'incertitude. Cette approche fournit des conditions suffisantes de stabilité qui recherchent une fonction de Lyapunov unique pour une famille de modèles incertains. On pourra consulter les travaux [79, 6, 43, 23, 40] pour connaître plus de précisions sur la stabilité quadratique appliquée pour différents types d'incertitudes.

Stabilité absolue

Il s'agit d'un concept appliqué à un problème non linéaire particulier où est présente une non linéarité séparable satisfaisant des conditions de secteur. Considérons le schéma de la figure I.6, alors

$$u(t) = -\Phi(t, y), \quad (\text{I.57})$$

définie par:

$$\Phi : \begin{cases} (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, y) \mapsto \Phi(t, y) \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

où Φ est une application non linéaire continue par morceaux en t , localement lipschitzienne en y , sans mémoire pour le système I.59

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \\ u(t) = -\Phi(t, y) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad y, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

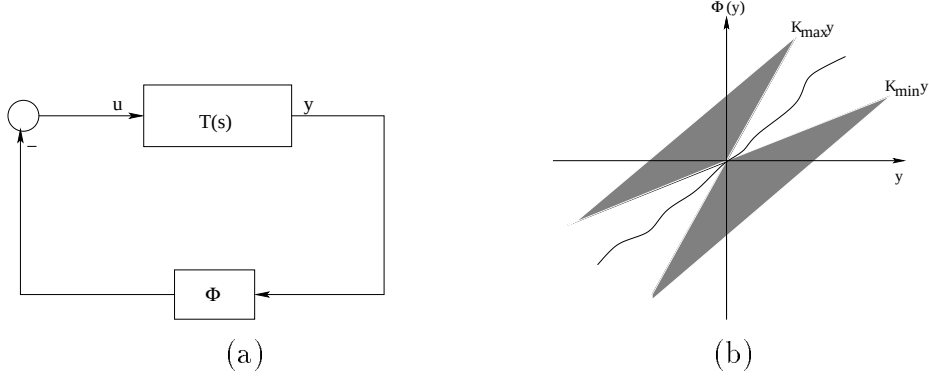


FIG. I.6 – *Structure de système pour la stabilité absolue (a) et non linéarité de secteur pour K_{min} et K_{max} scalaires (b).*

Donc:

$$T(s) = C_2[s\mathbb{I} - A]^{-1}B_2, \quad (\text{I.60})$$

Supposons que:

- la paire (A, B_2) est commandable,
- la paire (A, C_2) est observable.

Définition I.14 : Condition de secteur: Soient deux matrices diagonales K_{min} et K_{max} , telles que $K = K_{min} - K_{max}$ soit définie positive. Alors $\Phi(t, y)$ appartient au secteur (K_{min}, K_{max}) si elle vérifie:

$$[\Phi(t, y) - K_{min}y]^T[\Phi(t, y) - K_{max}y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall y \in S \subseteq \mathbb{R}^m \quad (\text{I.61})$$

Si S est strictement inclus dans $\mathbb{R}^m$, la condition de secteur est vérifiée localement, et si $S = \mathbb{R}^m$, elle l'est globalement.

◆

A partir de cela, nous pouvons donner la définition de la stabilité absolue.

Définition I.15 : Stabilité absolue: Le système I.59 est dit

- localement absolument stable, si le système I.59 est localement asymptotiquement stable pour toute non linéarité vérifiant localement la condition de secteur.
- globalement absolument stable, si le système I.59 est globalement asymptotiquement stable pour toute non linéarité vérifiant globalement la condition de secteur.



Remarque I.3 : *On ne se préoccupe pas seulement de la propriété de stabilité d'un système unique mais de la stabilité d'un ensemble de systèmes pour toutes les non linéarités, d'où le terme de stabilité absolue.*



Pour déterminer la stabilité globale asymptotique pour des systèmes de type I.59, il faut imposer des conditions supplémentaires sur la partie linéaire du système, ce qui nous amène au critère de Popov.

Théorème I.5 : Critère de Popov: *si le système décrit par I.59 satisfait les conditions suivantes:*

- la matrice A est Hurwitz et la paire (A, B_2) est commandable,
- la non linéarité Φ appartient au secteur $[0, K_{max}]$
- il existe un scalaire α strictement positif tel que

$$\forall \omega \in [0, \infty], \operatorname{Re}[(1 + j\alpha\omega)T(j\omega)] + \frac{1}{K_{max}} \geq \epsilon \quad (\text{I.62})$$

pour un scalaire $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, alors le point 0 est globalement asymptotiquement stable.



L'équation I.62 est appelée inégalité de Popov. La preuve du critère est basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov candidate et du lemme de Kalman-Yakubovich ([91]).

Remarque I.4 : *On peut s'apercevoir que là encore, la difficulté à étudier directement la stabilité globale du système non linéaire est bien présente. Par contre, on n'a pas cherché à linéariser le système en approximant la linéarité par développement à l'ordre 1, mais en recherchant un secteur enveloppant la non linéarité. Le travail de cette thèse se dirige dans cette direction.*



Enfin, nous présentons deux notions de stabilité qui concernent plus particulièrement les systèmes linéaires.

Définition I.16 : Stabilité entrée-sortie: *Un système est dit stable au sens "entrée-sortie", si la sortie du système, réponse à une entrée d'énergie finie, est elle-même à énergie finie.*



Définition I.17 : Stabilité interne: *Le système de la figure I.2 est stable de manière interne si tout signal borné injecté en n'importe quel point de la boucle génère une réponse bornée en tout autre point.*



I.3.2 Performances

Parmi les objectifs d'une loi de commande, outre la stabilité, il y a la satisfaction de contraintes de performances spécifiées pour le comportement en boucle fermée. La stabilité est certes nécessaire mais pas suffisante en pratique. Donc, en plus de la notion de stabilité en boucle fermée, on associera souvent dans ce mémoire, des critères de performances, comme par exemples:

- Critère quadratique,
- Critère $\mathcal{H}_2$,
- Critère $\mathcal{H}_\infty$,
- Placement de pôles.

Nous exprimerons les divers critères de performance pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{12}u(t) \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'état et de commande et $y \in \mathbb{R}^q$ la sortie commandée.

Critère quadratique

Ce critère quadratique lie à la fois les variables d'état x et les commandes u par l'utilisation des matrices de pondérations Q et R qui affecteront le comportement du système en boucle fermée (car on utilise les commandes u). Ce critère qui s'exprime par la relation suivante:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{I.64})$$

Critère $\mathcal{H}_2$

Définition I.18 : Norme $\mathcal{H}_2$: La norme $\mathcal{H}_2$ d'un système linéaire stable, notée $\|\cdot\|_2$, correspond à l'énergie de sa réponse impulsionnelle. On a donc

$$\|T(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{trace}(T^*(j\omega)T(j\omega)) d\omega \quad (\text{I.65})$$



Il est possible de calculer exactement la norme $\mathcal{H}_2$ en fonction des grammiens d'observabilité et de commandabilité $(\mathcal{L}_o, \mathcal{L}_c)$:

$$\|T(s)\|_2^2 = \text{trace}[B_2^T \mathcal{L}_o B_2] = \text{trace}[C_2 \mathcal{L}_c C_2^T] \quad (\text{I.66})$$

Les grammiens d'observabilité et de commandabilité $(\mathcal{L}_o, \mathcal{L}_c)$ sont solutions de:

$$A^T \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_o A + C_2^T C_2 = 0 \quad (\text{I.67})$$

et

$$A \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_c A^T + B_2 B_2^T = 0 \quad (\text{I.68})$$

Critère $\mathcal{H}_\infty$

Définition I.19 : *Norme $\mathcal{H}_\infty$: La norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système linéaire, est finie et bornée par γ , si ce système est stable, et l'énergie qu'il restitue reste inférieure, dans un rapport γ à celle qu'on lui apporte, c'est à dire :*

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T y^T(t)y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^T u^T(t)u(t)dt$$

◆

Pour la norme $\mathcal{H}_\infty$, on ne connaît pas la valeur exacte, comme pour la norme $\mathcal{H}_2$, mais simplement une borne ([34, 27, 85, 37]).

Placement de pôles

Ce concept est en fait important aussi sur l'évolution du système, en particulier sur le régime transitoire [1, 12]. Dans ce mémoire, nous nous contenterons des régions dites régions-LMI [14, 15], car toutes les synthèses seront réalisées à partir de conditions d'inégalités matricielles linéaires (LMI) ou bilinéaires (BMI). Le lecteur pourra consulter les travaux [44, 35, 47] pour compléter les notions concernant le placement de pôles.

Définition I.20 : *Région-LMI [15]: Un sous ensemble du plan complexe est appelé région-LMI d'ordre l_r s'il existe une matrice symétrique $\gamma \in \mathbb{R}^{l_r \times l_r}$ et une matrice $\beta \in \mathbb{R}^{l_r \times l_r}$ telles que:*

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{R}}(z) < 0\} \quad (\text{I.69})$$

où

$$f_{\mathcal{R}}(z) = \gamma + \beta z + \beta^T \bar{z} \quad (\text{I.70})$$

◆

Une région intéressante est celle donnée par la figure III.2.4, que nous utiliserons par la suite. Elle est constituée par l'intersection:

- du demi-plan à gauche de α ,
- de l'intérieur du disque de centre 0 et de rayon ρ ,
- du secteur d'angle $\pm \theta$ autour de l'axe des réels.

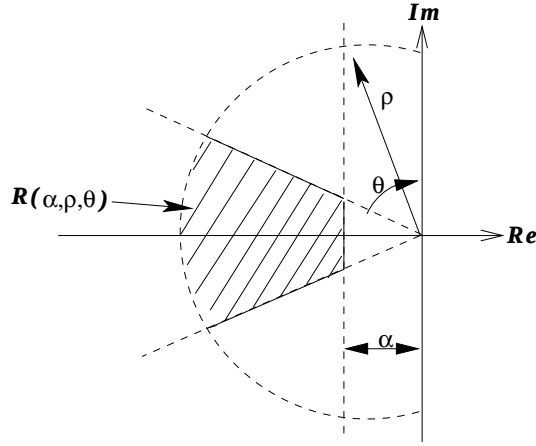


FIG. I.7 – Région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$

Cette condition de placement de pôles pourra s'exprimer à partir d'inégalités matricielles linéaires:

Théorème I.6 : Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ la région-LMI, représenté par la figure III.2.4. Les valeurs propres de la matrice A sont situées dans la région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive telle que :

$$PA + A^T P + 2\alpha P < 0 \quad (\text{I.71})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho P & A^T P \\ PA & -\rho P \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{I.72})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(PA + A^T P) & \sin\theta(PA - A^T P) \\ \sin\theta(A^T P - PA) & \cos\theta(PA + A^T P) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{I.73})$$

□

Remarque I.5 : *Il est courant d'associer plusieurs critères de performance, on parle alors de synthèse multi-objectifs [86]. Par exemple, citons le cas de la commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ détaillée dans [60, 57, 99]. Il consiste à minimiser la norme $\mathcal{H}_2$ (performance nominale) sous une contrainte $\mathcal{H}_\infty$ (stabilité robuste). Il existe aussi des travaux sur la commande $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ avec une contrainte de placement de pôles [15].*

▲

Inégalités Matricielles Linéaires (IMLs ou LMIs)

Nous venons de voir pour le placement de pôles que les valeurs propres de la matrice dynamique doivent se situer dans la région convexe et que cette condition s'exprime par des inégalités matricielles linéaires. La forme de base d'une inégalité matricielle linéaire est [11]

$$F(x) = F_0 + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j F_j > 0 \quad (I.74)$$

où x est la variable et les matrices

$$F_j = F_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}.$$

sont données. Il s'agit d'une contrainte convexe sur la variable x et sur l'ensemble

$$\{x \mid F(x) > 0\} \quad (I.75)$$

est convexe. Certaines inégalités non linéaires peuvent être transformées en LMI au moyen du complément de Schur

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \end{cases} \quad (I.76)$$

$$\iff \begin{cases} Q(x) > 0 \\ R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0 \end{cases} \quad (I.77)$$

où $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ et $S(x)$ dépendent de manière affine de x . A titre d'exemple, l'inégalité de Lyapunov

$$A^T P + P A < 0 \quad (I.78)$$

est une LMI dont la variable est la matrice P et qui peut être mise sous la forme de base en choisissant

$$F_0 = 0, \quad F_j = -A^T P_j - P_j A, \quad j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}. \quad (I.79)$$

avec $P_1, \dots, P_N$ une base de matrices symétriques $n \times n$. Cette approche offre par rapport aux équations de Riccati [79] une alternative intéressante car elle peut être utilisée pour des systèmes incertains de type polytopique. C'est pour cette raison que tous les problèmes de synthèse évoqués dans la suite de la thèse seront écrits sous forme de contraintes LMIs.

Remarque I.6 : *Lors de la résolution des inégalités matricielles linéaires, il se peut que l'on rencontre des problèmes numériques liés au mauvais conditionnement d'une matrice, c'est-à-dire, le rapport maximal entre les valeurs propres. Pour éviter cela, nous pouvons utiliser le résultat suivant:*

Proposition 1.1: *Soient c_0 un scalaire strictement positif et P une matrice définie positive (de dimension n). Alors, on a l'équivalence suivante:*

$$\frac{\overline{\vartheta}(P)}{\underline{\vartheta}(P)} \leq c_0 \iff \exists \eta_1 > 0, \eta_2 > 0 \text{ solutions de } \begin{cases} \eta_1 \mathbb{I} \leq P \\ P \geq \eta_2 \mathbb{I} \\ \eta_2 \leq c_0 \eta_1 \end{cases} \quad (\text{I.80})$$

▲

I.3.3 Robustesse

On dit d'un système qu'il est robuste, s'il conserve sa stabilité et des performances acceptables malgré la présence d'incertitudes. Par conséquent, il existe deux concepts de robustesse pour un système, être robuste en stabilité et robuste en performances. L'analyse robuste va révéler les capacités du système soumis à un polytope d'incertitude. La synthèse robuste, appelée généralement commande robuste, a pour but de calculer une loi de commande qui va assurer la stabilité du système en boucle fermée et tenir compte des performances désirées.

Il existe un grand nombre d'approches de commande robuste mais nous n'évoquerons que la stabilité et la stabilisabilité quadratique [5]. Le principe de la synthèse robuste par l'approche "stabilisabilité quadratique" est de trouver une fonction de Lyapunov unique pour toute une famille de systèmes incertains et d'en déduire une loi de commande. Dans tout ce mémoire, nous nous orienterons vers la stabilisabilité quadratique de systèmes LTI incertains polytopiques par l'approche des fonctions de Lyapunov quadratiques.

Concernant la stabilité quadratique d'un système LTI incertain, nous pouvons écrire:

Définition I.21 : Stabilité quadratique: *Un système incertain $\dot{x} = A(\Delta)x(t)$, est quadratiquement stable si et seulement si il existe une matrice unique $P > 0$ telle que pour toutes les incertitudes Δ :*

$$x^T [A^T(\Delta)P + PA(\Delta)] x < 0 \quad , \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{I.81})$$

La stabilité quadratique est une condition suffisante de stabilité robuste.

◆

A titre indicatif, pour la synthèse, soit le système LTI incertain polytopique:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\sum_j A_j \lambda_j) x + (\sum_k B_{2k} \mu_k) u, \\ y = C_2 x + D_{22} u \end{cases} \quad (I.82)$$

$$\mathcal{D}_A : = \{A : A = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j A_j, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j = 1\} \quad (I.83)$$

$$\mathcal{D}_{B_2} : = \{B_2 : B_2 = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k B_{2k}, \mu_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k = 1\} \quad (I.84)$$

La condition de stabilisabilité quadratique pour un système incertain avec incertitude polytopique sur la matrice dynamique A et la matrice de commande B_2 est donnée par le théorème suivant sous forme LMIs:

Théorème I.7 : [6]: *Le système linéaire incertain défini par (III.9) et (III.5)-(III.6) est quadratiquement stabilisable par retour d'état $u = Kx$ si et seulement si, il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que:*

$$A_j S + S A_j^T + B_{2k} R + R^T B_{2k}^T < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \mathcal{M} \quad (I.85)$$

et $K = R S^{-1}$ est la matrice de retour d'état.

□

Il existe un très grand nombre de travaux concernant l'approche "stabilisabilité quadratique" pour des systèmes incertains par retour d'état et de sortie dynamique. Citons les travaux de [4, 100, 79, 6, 40, 43] sans se préoccuper des performances et [38, 41, 23, 21, 22] en traitant aussi les concepts de performances. N'oublions pas qu'il existe d'autres méthodes pour la commande robuste telles que des méthodes algébriques [61] ou fréquentielles comme la commande LQ et les approches LQG, LQG/LTR [84, 25, 3, 70], la " μ -synthèse" [26, 30] et bien d'autres (!).

Remarque I.7 : *L'objet de ce travail est d'illustrer les potentialités de synthèses robustes à base de LMIs pour proposer une approche valable dans le cadre des systèmes non linéaires. On a vu qu'en général, une représentation linéaire ne peut être qu'une représentation locale acceptable pour un système non linéaire. Un correcteur linéaire invariant unique peut rarement remplir l'ensemble des objectifs de performance et de robustesse sur la totalité du domaine de fonctionnement du système non linéaire pour lequel il a été synthétisé. Par conséquent, il est nécessaire d'adopter une représentation multi-modèles, chaque modèle étant représentatif de l'évolution dans un domaine de l'espace d'état. Il existe plusieurs approches dans ce sens, nous en donnons les principales dans ce qui suit.*

▲

I.4 Des approches multi-modèles

I.4.1 Séquencement de gains (*Gain Scheduling*)

Le séquencement de gains fut très bien accueillie par la communauté Automaticienne. Nombreuses sont les contributions concernant cette approche. Nous pouvons en mentionner quelques unes pour faire un tour d'horizon de son champ d'application. Dans [83, 87, 88], il est question de stabilité de systèmes non linéaires par séquencement de gains. On peut trouver dans [74, 89], des approches pour déterminer des correcteurs pour des systèmes à paramètres variants. Des contrôleurs flous de Takagi-Sugeno sont proposées à partir du séquencement de gain dans [29, 75]. Enfin, le lecteur pourra compléter ses informations sur les contrôleurs généralisés dans [50].

La technique du séquencement de gains est basé sur l'existence de plusieurs modèles linéaires dont leur représentation n'est valable que dans une partie de l'espace d'état. Les modèles sont définis en fonction de points opérationnels pour "couvrir" tout l'espace d'état de l'étude. Pour un système non linéaire, les modèles linéaires sont obtenus par linéarisation aux différents points opérationnels. A partir de cela, il est possible de calculer les différents contrôleurs linéaires de chaque modèle pour la synthèse du système non linéaire. Le séquencement de gains est une méthode relativement simple qui peut être proposé pour la commande de systèmes non linéaires. Considérons le système non linéaire suivant:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)), \quad (\text{I.86})$$

$$y(t) = G(x(t)) \quad (\text{I.87})$$

où $y(t)$ représente la sortie mesurée et $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^q$ et $u \in \mathbb{R}^m$. Supposons l'existence de plusieurs points d'équilibre (x_{ei}, u_{ei}) déterminés par:

$$0 = F(x_{ei}, u_{ei}). \quad (\text{I.88})$$

Pour chaque points d'équilibre, il est possible de calculer un modèle linéaire local obtenu par linéarisation du modèle non linéaire.

$$\dot{\delta x}(t) = A(x_{ei}, u_{ei})\delta x(t) + B_2(x_{ei}, u_{ei})\delta u(t) \quad (\text{I.89})$$

où

$$\delta x(t) = x(t) - x_{ei}, \quad (\text{I.90})$$

$$\delta u(t) = u(t) - u_{ei}, \quad (\text{I.91})$$

$$A(x_{ei}, u_{ei}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad B_2(x_{ei}, u_{ei}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial u_m} \end{pmatrix} \quad (\text{I.92})$$

On suppose que chaque modèle linéaire est valable dans un sous-espace de l'espace d'état. Un contrôleur est calculé pour chacun des modèles linéaires. La loi de commande robuste globale est définie par le séquençement des lois de commande locales associées à un schéma de séquençement basé sur la connaissance de l'état.

La méthode est certes simple mais on peut se poser deux questions importantes quant au choix des points d'équilibre et à leur nombre, et à la linéarisation locale du système. Pour répondre à ces deux questions, nous pourrions nous pencher sur la qualité de la détermination de la loi de commande. Peut-être que la linéarisation locale ne suffit pas à assurer des performances, même si la stabilisabilité est assurée. Est-ce que la transition entre chaque modèle est raisonnablement douce? Toutes ces interrogations devront être prises en compte pour la synthèse du système non linéaire.

I.4.2 Les modèles LPV et Quasi-LPV

Toujours dans le contexte d'interpolation de correcteurs, la commande linéaire à paramètres variants, dite LPV s'est développée à partir de 1992 [7, 20]. Les domaines d'applications [7] sont vastes et s'étendent aussi bien vers les systèmes linéaires à dynamique variant dans le temps que vers les systèmes non linéaires. Les systèmes non linéaires seront caractérisés par des modèles dits Quasi-LPV. Soit le système linéaire suivant dans l'espace d'état:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\tau)x + B_2(\tau)u \\ y = C_2(\tau)x + D_{22}(\tau)u \end{cases} \quad (I.93)$$

où $\tau = \tau(t)$ est un paramètre à variations continues dans le temps. Pour l'approche **LPV**, il s'agit de définir un contrôleur lui même à paramètre variant dans le temps selon la même structure de dépendance que celle du processus à commander.

Pour une variation "polytopique" du paramètre incertain, un retour d'état

$$u = K(\tau)x \quad (I.94)$$

est défini par

$$\mathcal{D}_{K(\tau)} : = \left\{ K(\tau) : K(\tau) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j(\tau) K_j, \lambda_j(\tau) \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j(\tau) = 1 \right\}$$

et pour un retour de sortie dynamique:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c(\tau)x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases} \quad (I.95)$$

avec :

$$A_c(\tau) \in \mathcal{D}_{A_c(\tau)}$$

où :

$$\mathcal{D}_{A_c(\tau)} : = \left\{ A_c(\tau) : A_c(\rho) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j(\tau) A_{cj}, \lambda_j(\tau) \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j(\tau) = 1 \right\}$$

où les K_j et les A_{cj} sont les retours d'état et les matrices dynamiques des contrôleurs calculés sur les sommets j du polytope. Ce type de compensateur peut aisément être étendu au cas non linéaire suivant.

Considérons le cas du système:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(y)x + B_2(y)u, & x(0) = x_0 \\ y = C_2x \\ \forall t \geq 0, y(t) \in \mathcal{P}_y \end{cases} \quad (\text{I.96})$$

On note $\mathcal{P}_y$, le domaine d'évolution des sorties mesurées. Le vecteur des paramètres [7] est confondu avec celui des sorties mesurées. Si l'on suppose que les sorties de ce système sont bornées, c'est-à-dire qu'elles évoluent uniquement dans $\mathcal{P}_y$, alors il est possible de définir une classe de systèmes que l'on nomme “systèmes quasi-LPV” (**QLPV**). Pour cette classe de systèmes, le vecteurs des paramètres est dépendant des états du système. Il est possible d'obtenir cette forme de système à partir d'un système non linéaire.

Théorème I.8 : [7]: *Soit un système non linéaire de la forme suivante:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B_2(y(t))u, & x(0) = x_0 \\ y(t) = C_2x(t) \\ \forall t \geq 0, y(t) \in \mathcal{P}_y \end{cases} \quad (\text{I.97})$$

En respectant les hypothèses suivantes:

- $f(0) = 0$
- la non linéarité de f concerne uniquement les états mesurables:

$$f(x) = A_n x + B_{nl} h(y)$$

*alors, le système non linéaire admet la forme **QLPV** suivante:*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(y)x + B_2(y)u, & x(0) = x_0 \\ y = C_2x \\ \forall t \geq 0, y(t) \in \mathcal{P}_y \end{cases} \quad (\text{I.98})$$

avec

$$A(y) = A_n + B_{nl} \left(\int_0^1 \nabla h(ty) dt \right) C_2 \quad (\text{I.99})$$

□

Preuve : [7].

■

Dans le cas de systèmes non linéaires incertains polytopiques, le modèle **QLPV** final devient

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\tau)x + B_1w + B_2v, & x(0) = x_0 \\ y = C_2x \\ \forall t \geq 0, \tau(t) \in \mathcal{P}_\tau, y(t) \in \mathcal{P}_y \end{cases} \quad (\text{I.100})$$

avec $\tau = [\delta \ y]$,

δ étant le vecteur de paramètres dans la matrice dynamique A_n . On note $\mathcal{P}_\delta$, le domaine d'évolution du vecteur des paramètres δ . Le nouveau vecteur de paramètres s'écrit

$$\tau = [\delta \ y]$$

avec $\delta \in \mathbb{R}^{q_\delta}$ et $y \in \mathbb{R}$. L'indice q_δ représente le nombre de paramètres existant dans la matrice A_n .

Cette approche permet de résoudre des problèmes de commande robuste en diminuant un certain degré de conservatisme que possède l'approche quadratique classique due à l'utilisation d'une seule fonction de Lyapunov garantissant la stabilité et les performances sur tout le domaine d'incertitude. Mais, il faut faire l'hypothèse que la variation paramétrique doit être suffisamment lente pour appliquer cette méthode, hypothèse qui n'est pas forcément évidente à garantir sur le système de départ. Cependant, mis à part cette hypothèse, il est possible d'élaborer une lois de commande **LPV** à partir de la formulation d'un problème d'inégalités matricielles linéaires (**LMI**). De plus, cette technique s'étend aux systèmes non linéaires (Approche **QLPV**). C'est dans ce cadre-là que nous développerons une méthode de synthèse. Mais l'approche **QLPV** est sujette à la connaissance *a priori* des sorties mesurées associées à une variation lente de celles-ci et fait apparaître des difficultés mathématiques lors de la transformation du système non linéaire [7].

I.4.3 Les modèles flous et commande floue

Depuis quelques années maintenant, on assiste à une utilisation de la logique floue dans la synthèse des lois de commande. La logique floue permet une approche des problèmes plus heuristique que mathématique qui peut heurter, les esprits cartésiens ou trop déterministes. Pourtant, dans certains problèmes où les mathématiques peinent par impossibilité ou difficulté de modélisation, elle est d'une certaine efficacité.

La logique floue a déjà fait ses preuves dans de nombreux domaines d'applications (Gestion de projet, traitement d'images, pilotage d'un système d'autofocus d'appareil photos, système d'approche d'une station orbitale pour la navette spatiale américaine...). C'est une technique qui peut s'avérer extrêmement efficace dans certains cas, notamment, lorsque les processus auxquels on s'intéresse sont non linéaires.

Notions élémentaires

Cette partie se limite à rappeler quelques définitions indispensables à la compréhension de la méthode.

Définition I.22 : Sous-ensemble flou Un sous-ensemble flou A de D est défini par une fonction d'appartenance. Elle associe à chaque élément d de D , un degré $\mu_A(d)$, compris entre 0 et 1, qui qualifie l'appartenance de d à A .



Définition I.23 : Règles floues: Une règle floue est de la forme:

$$\mathbf{Si} (V \text{ est } A) \text{ alors } (W \text{ est } B) \quad (\text{I.101})$$

où $(V \text{ est } A)$ est appelée prémisses, $(W \text{ est } B)$ est appelée conclusion.



La combinaison de plusieurs règles floues forme une base de règles. Elle permet la construction de modèles flous. On distingue deux types de modèles flous:

- Les modèles de type Mamdani où les conclusions des règles sont floues
- Les modèles de type Takagi-Sugeno où les conclusions sont procédurales.

Les modèles rappelés dans ce mémoire sont de type Takagi-Sugeno. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter [28].

Commande par contrôleur flou

Bien que la logique floue possède un champ d'application extrêmement vaste (commande, classification, aide à la décision, bases de données imprécises,...), l'objectif ici est de présenter les principes de base de la commande floue à base de modèles (Model Based Fuzzy Control pour les Anglo-saxons) [28]. Un contrôleur flou est un système à base de connaissances particulier, utilisant un raisonnement en profondeur limité, dans une procédure de chaînage avant des règles (activation des règles par les prémisses). Une règle est activable pour une variable d'entrée si cette variable a un degré d'appartenance non nul au sous-ensemble flou de la prémisses. On considère généralement ensuite une moyenne pondérée sur le résultat de ces règles pour engendrer une décision finale. Les différentes étapes de fonctionnement du contrôleur sont:

- Mise en forme des entrées, normalisation.
- Fuzzification.
- Mécanisme de décision.

- Défuzzification.
- Dénormalisation des sorties.

En quelques mots, nous allons expliquer les termes de fuzzification et de mécanisme de décision. La défuzzification est l'opération inverse de la fuzzification. La fuzzification permet de transformer une grandeur mesurée sur le processus en un sous-ensemble flou. Le choix de la forme des fonctions d'appartenance est arbitraire ou lié à l'expertise du problème. Les formes triangulaires sont les plus fréquemment utilisées. Le mécanisme de décision permet de calculer le sous-ensemble flou associé à la commande.

Nous présenterons dans ce mémoire le deuxième modèle de contrôleurs de Takagi-Sugeno. Pour plus de détails sur le premier et le deuxième modèle, le lecteur pourra se référer à [28].

Deuxième modèle de Takagi-Sugeno

Soit le système non linéaire autonome en boucle ouverte, avec les dimensions appropriées:

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (\text{I.102})$$

L'idée principale de ce modèle flou et de ce contrôleur de Takagi-Sugeno est d'utiliser la linéarisation du modèle non linéaire autonome et d'obtenir une loi de commande qui stabilise localement le système en boucle fermée. Choisissons $\mathcal{N}$ couples de points (x_{ei}, u_{ei}) . Nous écrivons le nouveau système avec:

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x_{ei} \\ \delta u &= u - u_{ei} \\ \delta \dot{x} &= \dot{x} - \dot{x}_{ei} \end{aligned}$$

La première étape est de linéariser ce système.

$$\dot{x} = \left(A(x_{ei}, u_{ei}).(x - x_{ei}) + B_2(x_{ei}, u_{ei}).(u - u_{ei}) \right) \quad (\text{I.103})$$

avec A, B_2 matrices Jacobiennes:

$$A(x_{ei}, u_{ei}) = \left(\frac{\delta F(x, u)}{\delta x} \right) \Big|_{x=x_{ei}, u=u_{ei}} \quad B_2(x_{ei}, u_{ei}) = \left(\frac{\delta F(x, u)}{\delta u} \right) \Big|_{x=x_{ei}, u=u_{ei}} \quad (\text{I.104})$$

La i -ème règle s'écrit de la manière suivante:

$$R_s^i : \text{Si } x_d = LX^i \text{ Alors } \dot{x} = \left(A(x_{ei}, u_{ei}).(x - x_d) + B_2(x_{ei}, u_{ei}).(u - u_d) \right) \quad (\text{I.105})$$

où:

- R_s^i est la i -ème règle du modèle flou en boucle ouverte,

- LX^i représente la i -ème région floue,

Il existe une expression générale pour la modélisation à base de règles pour le système en boucle ouverte. Elle s'écrit de la façon suivante:

$$\dot{x} = \sum_i w^i(x_d) \left(A(x_{ei}, u_{ei}) \cdot (x - x_d) + B_2(x_{ei}, u_{ei}) \cdot (u - u_d) \right) \quad (\text{I.106})$$

avec $w^i(x_d)$ degré normalisé de validité,

$$\sum_i w^i(x_d) = 1 \quad \text{et} \quad w^i(x_d) = \frac{\mu^i(x_d)}{\sum_i \mu^i(x_d)}, \quad (\text{I.107})$$

$$\mu^i(x_d) = \min(\mu_{LX_1^i}(x_{1d}), \mu_{LX_2^i}(x_{2d}), \dots, \mu_{LX_n^i}(x_{nd})). \quad (\text{I.108})$$

Le modèle flou du contrôleur est défini par un ensemble de règles $R_c^{i'}$ construites à partir des lois de commande vues précédemment et calculées en (x_d, u_d) avec les $\mathcal{N}'$ lois de commande:

$$R_c^{i'} : \text{Si } x_d = LX^{i'} \text{ Alors } u = K(x_{ei'}, u_{ei'}) \cdot (x - x_d) + u_d \quad (\text{I.109})$$

où:

- $R_c^{i'}$ est la i' -ème règle du modèle flou en boucle ouverte,
- $LX^{i'}$ représente la i' -ème région floue,
- $u = K(x_{ei'}, u_{ei'}) \cdot (x - x_d) + u_d$ représente une loi de commande linéaire correspondant à la i' -ème règle pour le couple de points (x_d, u_d) et construite à partir des $\mathcal{N}'$ lois de commande linéaires. Il est possible d'écrire aussi la forme générale du contrôleur et par conséquent en boucle fermée.

$$u = \sum_{i'} w^{i'}(x) \cdot (K(x_{ei'}, u_{ei'}) \cdot (x - x_d) + u_d) \quad (\text{I.110})$$

$$\dot{x} = \sum_i \sum_{i'} w^i(x_d) \cdot w^{i'}(x_d) \left(A(x_{ei}, u_{ei}) + B_2(x_{ei}, u_{ei}) \cdot K(x_{ei'}, u_{ei'}) \right) \cdot (x - x_d), \quad (\text{I.111})$$

avec $\sum_i w^i(x_d) = 1$, $\sum_{i'} w^{i'}(x_d) = 1$, et $\sum_i w^i(x_d) \cdot \sum_{i'} w^{i'}(x_d) = 1$.

Il est possible d'obtenir un modèle flou résultant d'une partition floue de l'espace d'état et d'une série de modèles linéaires obtenus par linéarisation. Ensuite en calculant une commande pour chaque modèle linéaire, on peut construire une loi de commande floue globale pour commander le système. Le problème de la stabilité se pose alors et pour l'étudier, on peut faire appel à quelques résultats obtenus en commande robuste. Mais les problèmes suivants se posent:

- l'obtention d'un modèle flou dépend des modèles linéarisés (nombre, point de linéarisation) et ce modèle a une incidence directe sur les étapes suivantes. Il convient d'évaluer et de guider les choix dans cette étape cruciale et si possible les systématiser.

- Il faut développer les techniques d'étude de la stabilité avec un double objectif. Le premier concerne l'analyse du système, commandé par une loi de commande obtenue *a priori*. Le deuxième concerne la synthèse d'une loi de commande qui en plus de la stabilité assure un certain niveau de performance. Ce dernier point est intimement relié à quelques résultats déjà obtenus dans le cadre de la commande robuste.

La partie suivante a pour but de présenter les objectifs de notre travail qui se place justement dans cette optique de commande multi-modèles.

I.5 Problématique du mémoire

Nous explicitons dans cette partie quelles sont les motivations de cette thèse en précisant les objectifs en termes de modélisation pour les systèmes non linéaires étudiés et en termes d'analyse et de commande pour les systèmes linéaires et non linéaires.

I.5.1 But recherché

Il s'agit de proposer une méthode systématique pour déterminer une séquence de lois de commande robustes locales qui, pour un système non linéaire quelconque, le stabilise pour toutes conditions initiales et qui assure un certain degré de performance. Ces lois de commande doivent conférer au système bouclé non linéaire des performances. Comment ? A partir de critères utilisables pour la commande des systèmes linéaires continus. Par conséquent, il sera nécessaire de passer à une représentation multi-modèles, chaque modèle sera linéaire continu stationnaire et incertain. Un seul type d'incertitude, l'incertitude de type polytopique [6, 7], sera considérée ici, bien qu'il soit possible d'étendre ces travaux en séparant le problème du choix de la représentation des incertitudes la mieux adaptée aux caractéristiques locales des non linéarités. Le but devient donc de déterminer chaque loi de commande qui puisse placer sur les systèmes linéaires incertains les performances désirées tout en garantissant la stabilité robuste de ces derniers. Comment obtenir les modèles linéaires incertains ? Combien de modèles faut-il choisir ? Est-il possible de le faire de manière systématique ? Sur quels genres de systèmes non linéaires pourrions nous raisonner ? Voilà un ensemble de questions lesquelles feront partie de nos investigations.

Le choix d'obtention des modèles est primordial. Comme nous l'avons vu précédemment, la linéarisation où même encore mieux le séquençement de gains apporte une première idée de réponse. Dans ce cas, il serait intéressant de réfléchir sur le choix des points d'équilibre. est-il possible que tous les systèmes offrent des points d'équilibre atteignables ? Quels sont les moyens de les atteindre, de le déterminer de manière systématique ? Pouvons-nous créer des points d'équilibre intermédiaires, pour atteindre le point d'équilibre final existant ?

Revenons à notre problème de choix de points d'équilibre intermédiaires et sa systématisation, en introduisant la notion de fonctions canoniques linéaires par morceaux (CPWL).

1.5.2 Introduction à la notion de fonctions canoniques linéaires par morceaux (CPWL)

Les fonctions dites canoniques linéaires par morceaux (CPWLF) ont été proposées par *Chua et al.* dans [16, 17, 19]. Nous présentons brièvement ci-dessous leur forme.

Supposons une fonction continue $f(z)$ avec $z \in \mathbb{R}^n$: l'approximation de $f(z)$ par utilisation des CPWLF s'écrit de la manière suivante :

$$f(z) \rightarrow \bar{f}(z), z \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{I.112})$$

$$\bar{f}(z) = a + b^T z + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\alpha_i^T z - \beta_i|, \quad (\text{I.113})$$

où $a, c_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ et $b, \alpha_i \in \mathbb{R}^n$.

Les fonctions canoniques linéaires par morceaux peuvent nous apporter donc, de manière systématique et judicieuse, des nouveaux points permettant à la fois de déterminer des points d'équilibre intermédiaires mais aussi des sous-ensembles d'espace d'état pour les modèles linéaires incertains.

Revenons enfin au problème plus pratique de commande robuste des systèmes incertains polytopiques. Ceux-ci seront étudiées à partir d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) en tenant compte de critères de performance tels que, les performances $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ et localisation de pôles pour la famille de modèles linéaires incertains. Les synthèses proposées s'effectueront par retour d'état statique et par retour de sortie dynamique avec l'utilisation de deux solveurs d'inégalités matricielles linéaires, LMILAB, solveur standard de MATLAB [36] et SEDUMI [92], logiciel libre, utilisable depuis MATLAB et associé à une interface [78, 77, 66].

1.6 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, rappelé quelques outils de base de la commande pour les systèmes linéaires et non linéaires. Nous avons, en outre, présenté quelques méthodes d'étude de stabilité pour des systèmes non linéaires en montrant qu'il était difficile de déterminer la stabilité avec une représentation mono-modèle. C'est pourquoi, trois approches multi-modèles ont été décrites en présentant pour chacune, leur apports et les pistes à suivre. dans un soucis de systématisation dans la recherche des points d'équilibre intermédiaires et des modèles linéaires incertains, nous avons présenté les fonctions linéaires canoniques par morceaux (CPWLF). Ceci

nous a conduit à la réflexion du nombre et de l'emplacement des points d'équilibres intermédiaires, et donc des modèles linéaires incertains. A partir de cela, nous avons également rappelé quelques modèles d'incertitudes en précisant que l'incertitude polytopique sera celle de notre travail et sur laquelle les solveurs d'inégalités matricielles linéaires (LMI), LMILAB [36] et SEDUMI [92], [78, 77, 66]. En conséquence, le chapitre II traite des fonctions linéaires par morceaux en vue de l'obtention d'un modèle linéaire par morceaux et propose une approche autorisant un choix judicieux et systématique de points d'équilibre intermédiaires pour la détermination des modèles linéaires incertains polytopiques. Ceci nous a conduit à présenter au chapitre III, l'analyse et la synthèse de lois de commande robustes séquencées en tenant compte des critères de performance. Le chapitre IV est réservé aux applications de systèmes non linéaires réels avec une série de trois applications différentes et une synthèse comparative avec des approches multi-modèles (dont celles de ce chapitre) afin de situer l'approche proposée dans ce mémoire et évaluer ses points forts et faiblesses.

Chapitre II

Approximation systématique de systèmes non linéaires

Dans ce chapitre, nous présentons l'approche multi-modèle que nous avons choisie pour l'étude des systèmes non linéaires. Dans un premier temps, nous donnons la définition d'outils de base nécessaires pour présenter l'approximation systématique de systèmes non linéaires en une famille de modèle LTI incertains. Les fonctions canoniques linéaires par morceaux sont à la base de cette approche. Ces dernières nous serviront pour approximer les systèmes non linéaires admissibles que nous définirons au préalable. A la suite des approximations des non linéarités, nous rechercherons à déterminer un cône d'incertitude enveloppant les non linéarités. Ces cônes d'incertitude seront la base des modèles LTI incertains pour lesquels nous développerons différentes synthèses robustes locales en tenant compte de critères de performances. Enfin, nous terminerons ce chapitre sur des problèmes liés à cette approche tels que le compromis entre la précision de l'approximation des non linéarités et la complexité des expressions des approximations ou bien encore des systèmes posant problème (comportement de type non minimum de phase par exemple).

“Reste devant la porte si tu veux qu'on te l'ouvre. Ne quitte pas la voie si tu veux qu'on te guide. Rien n'est fermé jamais, sinon à tes propres yeux.”

[Farid Al Din Attar, Extrait de *Langage des oiseaux*]

II.1 Introduction

Nous allons considérer la classe des systèmes non linéaires décrite par les équations d'état suivantes et les remarques ci-après :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) + B_1 w + B_2 u & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_2 x \\ x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n & u = [u_1 \ u_2 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q & w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

et

$$\begin{cases} f(x, u) = A_n x + B_n h(x, u) \\ \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

avec

$$h(x, u) \rightarrow h(\zeta) = \begin{bmatrix} h_1(\zeta) \\ \vdots \\ h_r(\zeta) \\ \vdots \\ h_\gamma(\zeta) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

tel que

$$\left\{ h_r : S_r \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \right\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.4})$$

- On s'intéresse à la représentation d'état de type continu des systèmes SISO ou MIMO.
- Les systèmes sont non linéaires en l'état et/ou en la commande en sachant qu'il existe une ou plusieurs non linéarités dépendant d'une ou deux variables d'état et/ou de commande, c'est-à-dire $N = 1, 2$. Nous ferons quelques remarques concernant les non linéarités à N -arguments avec $N > 2$.
- La partie linéaire du système peut être décrite par une matrice dynamique non nulle et incertaine de type polytopique telle que

$$A_n \in \mathcal{D}_{A_n}, \quad (\text{II.5})$$

$\mathcal{D}_{A_n}$ étant le domaine incertain.

- $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^q$ et $w \in \mathbb{R}^l$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de sorties mesurées et de perturbation. $h(x(t), u(t))$ représente la partie non linéaire du système.

Ce chapitre est consacré à l'approximation de systèmes non linéaires du type II.1 - II.4 par une famille de systèmes LTI incertains polytopiques en utilisant l'algorithme développé dans [64]. Nous appellerons cette approche, l'approche CPWL car elle nécessite l'utilisation des fonctions canoniques linéaires par morceaux (CPWLF) [18, 58] introduites dans la problématique du chapitre I. Cette approche se justifie par les deux points principaux suivants: la systématisation et le choix judicieux de points d'équilibre intermédiaires. La difficulté première du séquençement de gains est la détermination des points opérationnels ou points d'équilibre intermédiaires: l'approche CPWL permet grâce à l'approximation canonique linéaire par morceaux de fixer des points d'équilibre intermédiaires, c'est-à-dire non uniformément répartis mais là où la dérivée est la plus importante. La deuxième caractéristique de l'approche CPWL résulte en partie à la détermination des points d'équilibre et consiste en à la systématisation totale de l'approche. Cette systématisation est pas possible pour des approches présentée dans le chapitre I. Nous détaillerons ce deuxième point fort dans les chapitres suivants.

Ce chapitre est organisé comme suit: dans la section suivante, des outils de bases concernant les fonctions PWL et CPWL sont introduits. Puis, nous développerons l'algorithme de l'approche CPWL qui constitue un des résultats principaux de ce chapitre. Cet algorithme est composé de quatre étapes, chacune décrite en détail. Enfin, nous exposerons quelques problèmes liés à l'utilisation de cette approche comme la précision des approximations des non linéarités, les systèmes ayant un comportement à non minimum de phase et les non linéarités dépendant de plus de deux arguments.

II.2 Outils de base

Une fonction linéaire par morceaux (PWL) du modèle de Chua et Kang [18, 58] est définie comme suit:

Définition II.1 : Fonction PWL: Une fonction $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, où S est un domaine compact, est une fonction PWL si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites:

- Le domaine S correspond à un nombre fini N de régions polyédrales $P^{(i)}$ telles que $S = \bigcup_{i=1}^N P^{(i)}$ et par un ensemble fini de frontières H_i

$$H = \{H_i \subset S, i = 1, \dots, N'\}, \quad (\text{II.6})$$

telles que chaque frontière de région est un hyperplan de dimension $(n - 1)$ défini par

$$H_i = \{z \in \mathbb{R}^n : \pi_i(z) = \alpha_i^T z - \beta_i = 0\}, \quad (\text{II.7})$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$, $\beta_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, N'$.

– L'expression de f est décrite de la manière suivante:

$$f^{(i)}(z) = J^{(i)}z + w^{(i)}, \quad (\text{II.8})$$

pour tout $z \in P^{(i)}$ et où $J^{(i)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice Jacobienne de la région $P^{(i)}$ et $w^{(i)} \in \mathbb{R}^m$.

– f est continue pour chaque frontière entre deux régions, c'est-à-dire,

$$J^{(i)}z + w^{(i)} = J^{(k)}z + w^{(k)} \quad (\text{II.9})$$

pour tout $z \in P^{(i)} \cap P^{(k)}$.

◆

Cette formulation n'est pas assez explicite [52, 95] pour notre approche, c'est pourquoi, nous allons à présent décrire la représentation dite canonique linéaire par morceaux, développée également par Chua et Kang [18, 58], représentation qui sera plus intéressante pour arriver à une systématisation.

Définition II.2 : Fonction CPWL: Une fonction canonique linéaire par morceaux (CPWL): $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est une fonction qui peut se représenter par

$$f(z) = a + b^T z + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\alpha_i^T z - \beta_i|, \quad (\text{II.10})$$

où $a, c_i \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, \sigma$.

◆

Remarque II.1 : Il est possible de représenter une fonction PWL $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(z) = J^{(k)}z + w^{(k)} \quad (\text{II.11})$$

par une fonction CPWL $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(z) = a + bz + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |z - \beta_i|, \quad (\text{II.12})$$

avec les dimensions appropriées ($\alpha_i = 1$).

Le passage à la représentation canonique linéaire par morceaux est effectué grâce au théorème suivant (pour une fonction scalaire):

Théorème II.1 : Une fonction PWL scalaire à $\sigma + 1$ hyperplans et $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{\sigma}$ peut être représentée de manière unique par l'expression suivante:

$$f(z) = a + bz + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |z - \beta_i|, \quad (\text{II.13})$$

où a, b, c_i et $\beta_i \in \mathbb{R}$ sont calculés par:

$$\begin{cases} b = (J^{(0)} - J^{(\sigma)})/2 \\ c_i = (J^{(i)} - J^{(i-1)})/2 \quad i = 1, \dots, \sigma \\ a = f(0) - \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\beta_i| \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

□

Preuve : Voir [18, 19]

■

Exemple II.1 : Soit une fonction $f(z)$ linéaire par morceaux définie par trois hyperplans ($\sigma = 2$), avec $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ et caractérisée par les paramètres $J^{(0)} = J^{(2)} = 1$, $J^{(1)} = -1$, $w^{(0)} = 2$, $w^{(1)} = 0$ et $w^{(2)} = -2$. Les trois régions sont:

1. $f(z) = z + 2, \forall z \in P^{(0)} =] - \infty, -1]$
2. $f(z) = -z, \forall z \in P^{(1)} =] -1, 1]$
3. $f(z) = z - 2, \forall z \in P^{(2)} =]1, \infty[$

La fonction linéaire par morceaux peut s'écrire aussi:

$$f(z) = a + bz + \sum_{i=1}^2 c_i |z - \beta_i|, \quad (\text{II.15})$$

où a, b, c_i et $\beta_i \in \mathbb{R}$ sont calculés par:

$$\begin{cases} b = (J^{(0)} - J^{(2)})/2 = 1 \\ c_1 = (J^{(1)} - J^{(0)})/2 = -1 \\ c_2 = (J^{(2)} - J^{(1)})/2 = 1 \\ a = f(0) - \sum_{i=1}^2 c_i |\beta_i| = 0 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

d'où

$$f(z) = x - |x + 1| + |x - 1| \quad (\text{II.17})$$

◇

Pour les équivalences entre les différentes expressions de fonctions $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, le lecteur pourra consulter [19].

▲

Une fonction CPWL $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ possède une partition si son domaine $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est partitionné par σ hyperplans de dimension $(n - 1)$

$$\alpha_i^T z - \beta_i = 0, \quad (\text{II.18})$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, \sigma$.

En vue d'une utilisation plus approfondie des fonctions PWL et plus particulièrement des fonctions CPWL, nous donnons la définition suivante:

Définition II.3 : Points de cassure: Une fonction CPWL $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(z) = a + bz + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\alpha_i z - \beta_i|, \quad (\text{II.19})$$

où a, b, c_i et $\beta_i \in \mathbb{R}$ admet σ points de cassure z_i tels que

$$\alpha_i z_i - \beta_i = 0. \quad (\text{II.20})$$

◆

Remarque II.2 : Il existe d'autres formes de représentations pour décrire des fonctions. Nous pouvons citer:

– Le modèle de Güzelis [45], [52] qui est décrit par l'expression canonique suivante:

$$f(z) = a + B^T z + \sum_{i=1}^{\sigma} b_i |\alpha_i^T z + \beta_i| + \sum_{j=1}^{\tau} c_j \left| \delta_j + \gamma_j^T z + \sum_{i=1}^{\sigma} d_i |\alpha_i^T z + \beta_i| \right| \quad (\text{II.21})$$

qui utilise deux types d'hyperplans, les hyperplans standards (H_i) et les hyperplans PWL (C_j)

$$H_i = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \alpha_i^T z + \beta_i = 0, i = 1, 2, \dots, l \right\} \quad (\text{II.22})$$

$$C_j = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \Phi_j(z) = 0, j = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (\text{II.23})$$

tels que

$$\Phi_j(z) = \delta_j + \gamma_j^T z + \sum_{i=1}^{\sigma} d_i |\alpha_i^T z + \beta_i|. \quad (\text{II.24})$$

avec les dimensions appropriées.

– Le modèle de Kahlert et Chua [54], représenté par

$$f(z) = A + B^T z + \sum_{i=1}^{\sigma} f^i(z) + \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{k=3}^{\delta^j+2} g^{j,j_k}(z), \quad (\text{II.25})$$

où

$$f^i(z) = c^i |\alpha^i z + \beta^i| \quad (\text{II.26})$$

$$g^{j,j_k}(z) = \tilde{c}^{j,j_k} \left\{ \left| a_{j_k,j_1}^j (\alpha^{j_1^T} z - \beta^{j_1}) \right| + a_{j_k,j_2}^j (\alpha^{j_2^T} z - \beta^{j_2}) \right| - \left| a_{j_k,j_1}^j (\alpha^{j_1^T} z - \beta^{j_1}) + a_{j_k,j_2}^j (\alpha^{j_2^T} z - \beta^{j_2}) \right| \right\} \quad (\text{II.27})$$

avec les dimensions appropriées.

– La représentation High Level CPWL développé par Juliañ. Cette représentation utilise une partition “simplicielle”([52]) pour représenter toute la famille des fonctions PWL.

Pour plus de détails sur ces diverses représentations de fonctions PWL, le lecteur pourra consulter les travaux [45], [52] et [54].

▲

L’intérêt de ces fonctions CPWL vient de la systématisation de l’écriture d’une fonction. Donc, pour des fonctions représentant des non linéarités d’un système non linéaire, nous rechercherons à les approximer par des fonctions canoniques linéaires par morceaux. Pour cela, il est nécessaire de présenter le théorème suivant [52].

Théorème II.2 : Approximation: Toute fonction f continue définie sur un domaine compact $S \subset \mathbb{R}^n$ peut être approximée par une fonction CPWL $\bar{f}$

$$f(z) \rightarrow \bar{f}(z) = a + b^T z + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\alpha_i^T z - \beta_i|, \quad (\text{II.28})$$

avec une précision arbitraire donnée et a, c_i et $\beta_i \in \mathbb{R}$, b et $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$.

□

On peut alors formuler le problème suivant:

Problème II.1: Soit une fonction continue $f : S \mapsto \mathbb{R}$ avec $S \subset \mathbb{R}^n$ représentant un domaine compact. Pour un nombre σ d’hyperplans fixé, il faut déterminer l’approximation $\bar{f}$ de f telle que

$$\bar{f}(\theta^*, z) = a^* + b^{*T} z + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i^* |\alpha_i^{*T} z - \beta_i^*|, \quad (\text{II.29})$$

où

$$\theta^* = [a^*, b^{*T}, c_1^*, \dots, c_{\sigma}^*, \alpha_1^{*T}, \dots, \alpha_{\sigma}^{*T}, \beta_1^*, \dots, \beta_{\sigma}^*]^T \quad (\text{II.30})$$

est l'ensemble des paramètres optimaux qui minimise le critère d'erreur suivant

$$J = \sum_{\kappa} \left(f(z_{\kappa}) - \bar{f}(\theta_{\kappa}, z_{\kappa}) \right)^2 \quad \forall z_{\kappa} \in S. \quad (\text{II.31})$$

et où la variable z est discrétisée (z_{κ}).

△

Ce problème peut être résolu en appliquant la version de l'algorithme de Newton-Gauss suivante:

$$\begin{cases} \theta_{\kappa+1} = \theta_{\kappa} + P_{\kappa+1} \nabla \phi_{\kappa} \epsilon_{\kappa} \\ P_{\kappa+1}^{-1} = \lambda P_{\kappa}^{-1} + \nabla \phi_{\kappa} \nabla' \phi_{\kappa} \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

où

$$\epsilon(z_{\kappa}) = \bar{f}(\theta_{\kappa}, z_{\kappa}) - f(z_{\kappa}), \quad (\text{II.33})$$

La matrice P_{κ} est calculée à l'aide de la récurrence suivante

$$P_{\kappa+1} = \lambda^{-1} (\mathbf{I} - (\lambda + \gamma_{\kappa})^{-1} P_{\kappa} \nabla \phi_{\kappa} \nabla' \phi_{\kappa}) P_{\kappa} \quad (\text{II.34})$$

avec

$$\gamma_{\kappa} = \nabla^T \phi_{\kappa} P_{\kappa} \nabla^T \phi_{\kappa} \quad (\text{II.35})$$

et $\nabla \phi_{\kappa}$ défini par:

$$\begin{aligned} \nabla \phi_{\kappa} = [& 1, z_{\kappa}, |\alpha_{1_{\kappa}}^T z_{\kappa} - \beta_{1_{\kappa}}|, \dots, |\alpha_{\sigma_{\kappa}}^T z_{\kappa} - \beta_{\sigma_{\kappa}}|, \\ & c_{1_{\kappa}} z_{\kappa}^T \text{sign}(\alpha_{1_{\kappa}}^T z_{\kappa} - \beta_{1_{\kappa}}), \dots, \\ & c_{\sigma_{\kappa}} z_{\kappa}^T \text{sign}(\alpha_{\sigma_{\kappa}}^T z_{\kappa} - \beta_{\sigma_{\kappa}}), \\ & -c_{1_{\kappa}} \text{sign}(\alpha_{1_{\kappa}}^T z_{\kappa} - \beta_{1_{\kappa}}), \dots, \\ & -c_{\sigma_{\kappa}} \text{sign}(\alpha_{\sigma_{\kappa}}^T z_{\kappa} - \beta_{\sigma_{\kappa}})]^T. \end{aligned}$$

L'étape d'initialisation pour ce problème est une phase importante pour la convergence de l'algorithme. Cette étape est détaillée dans l'annexe A.

II.3 Algorithme général [64]

Dans tout ce qui suit, nous allons considérer les systèmes non linéaires autonomes. Nous allons présenter les grandes lignes de l'algorithme que nous avons développé au cours de cette thèse pour la classe des systèmes non linéaires considérés. Par la suite, chaque étape sera détaillée et nous allons considérer l'exemple du moteur à courant continu [64] pour illustrer l'algorithme. L'algorithme se décompose en quatre étapes:

Algorithme II.1 :

- **Etape 1:** *Approximation du système non linéaire par un système linéaire par morceaux.*
- **Etape 2:** *Obtention de la famille de modèles linéaires incertains de type polytopiques valables localement dans un domaine de l'espace d'état.*
- **Etape 3:** *Synthèses des lois de commande robustes locales pour tous les modèles linéaires incertains locaux.*
- **Etape 4:** *Obtention de la loi de commande globale par séquençement de lois de commande robustes locales.*

★

II.3.1 Modèle linéaire par morceaux

Exemple II.2 : *Soit le moteur à courant continu défini par les équations suivantes et les valeurs numériques de [64]:*

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{F}{\tilde{J}}\omega + \frac{K_c}{\tilde{J}}I \\ \dot{I} = -\frac{K_e}{L}\omega - \frac{R}{L}I + \frac{1}{L}u + \frac{1}{L}\tanh(\theta) \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Le vecteur est composé de trois variables:

$$x = [\theta \ \omega \ I]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

où θ , ω et I sont respectivement la position angulaire, la vitesse angulaire et le courant d'induit. La sortie mesurée est la position angulaire. L'inertie est représentée par $\tilde{J}$ et l'incertitude de la matrice dynamique A_n porte sur cette variable:

$$\tilde{J} = J_0 \pm \Delta J_m \text{ avec } J_m = 0.05 \text{ Kg.m}^2 \quad (\text{II.37})$$

Le fait d'avoir une incertitude sur l'inertie permet d'imaginer ce moteur à courant continu soumis à une variation de couple, d'inertie.

En réécrivant le système sous la représentation II.1 - II.4, nous obtenons:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + B_2 u \\ y(t) = C_2 x \\ x \in \mathbb{R}^3 \quad u \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

et

$$\begin{cases} f(x) = A_n x + B_{nl} h(x) \\ \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

avec

$$\{ h(x) \rightarrow h(\zeta) = h_1(\zeta) = \tanh(x_1) \} \quad (\text{II.40})$$

tel que

$$\{ h_1 : S_1 = [-10, 10] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \}, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.41})$$

Les matrices précédemment citées valent:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{\tilde{J}} & \frac{Kc}{\tilde{J}} \\ 0 & -\frac{Ke}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad (\text{II.42})$$

$$B_{nl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.43})$$

◇

Dans l'expression II.1 du système non linéaire, nous considérons que la matrice A_n peut être incertaine. Dans tout ce mémoire, notre étude se bornera aux incertitudes polytopiques [6]. Par conséquent, l'incertitude polytopique de A_n est définie telle que la matrice A_n appartienne à un domaine polytopique $\mathcal{D}_{A_n}$ telle que

$$A_n \in \mathcal{D}_{A_n} : = \left\{ A_n : A_n = \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j A_{n_j}, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j = 1 \right\}$$

où ν représente le nombre de sommets du polyèdre $\mathcal{D}_{A_n}$.

Exemple II.3 : Dans le cas du moteur à courant continu, la matrice dynamique A_n est incertaine à deux sommets.

◇

A présent, il nous faut approximer la partie non linéaire $h(x, u)$ du système II.1. Pour cela, nous allons traiter plusieurs cas possibles:

- $h(x, u)$ est composée d'une seule non linéarité dépendant d'un seul paramètre (variable d'état ou commande) et $h(x, u)$ est définie sur un domaine S , $h : S \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,
- $h(x, u)$ est composée de plusieurs non linéarités dépendant d'un seul paramètre (variable d'état ou commande) et chaque non linéarité $h_r(x, u)$ de $h(x, u)$ est respectivement définie sur un domaine S_r , $h_r : S_r \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, l'indice r représente l'indice des non linéarités ($r = 1, \dots, \gamma$),
- $h(x, u)$ est composée d'une seule non linéarité dépendant de deux paramètres (variable d'état et/ou commande) et $h(x, u)$ est définie sur un domaine S , $h : S \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$,
- $h(x, u)$ est composée de plusieurs non linéarités dépendant de deux paramètres (variable d'état et/ou commande) et chaque non linéarité $h_r(x, u)$ de $h(x, u)$ est respectivement défini sur un domaine S_r , $h_r : S_r \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, l'indice r représente l'indice des non linéarités ($r = 1, \dots, \gamma$),
- $h(x, u)$ est composée d'une ou plusieurs non linéarités dépendant de N paramètres (variable d'état et/ou commande) avec $(n + m) \geq N > 2$ et $h(x, u)$ est défini sur un domaine S , c'est-à-dire, $h : S \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$.

Chaque partie suivante sera intitulée par le nombre de non linéarités de II.1 (Mono ou Multi non linéarité(s)) et le nombre de paramètres ou arguments associés à ces non linéarités (Mono, bi ou N argument(s)).

Non linéarités - Mono argument

Nous allons considérer les non linéarités dépendant d'un seul argument. Soit le système non linéaire décrit par II.1 - II.4. Chaque non linéarité est définie sur un domaine compact. Le vecteur des non linéarités s'exprime par

$$h(\zeta) = \begin{bmatrix} h_1(\zeta) \\ \vdots \\ h_r(\zeta) \\ \vdots \\ h_\gamma(\zeta) \end{bmatrix} \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.44})$$

D'après le théorème II.2, nous pouvons directement exprimer les approximations de $h_r(\zeta)$ par autant de fonctions CPWL $\bar{h}_r(\zeta)$ décrites par

$$h_r(\zeta) \rightarrow \bar{h}_r(\zeta) = a_r + b_r \zeta + \sum_{i=1}^{\sigma_r} c_{i_r} |\alpha_{i_r} \zeta - \beta_{i_r}|, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma, \quad (\text{II.45})$$

à une précision arbitraire près et avec a_r, c_{i_r}, b_r et $\alpha_{i_r} \in \mathbb{R}$ et calculés en résolvant le problème II.1.

Remarque II.3 :

- Le nombre d'hyperplans σ_r peut être différent d'une non linéarité à une autre.
- La multiplicité des non linéarités va engendrer une augmentation importante du nombre des hyperplans et donc du nombre des points de cassure et des points d'équilibre intermédiaires.

▲

Exemple II.4 : Soit la non linéarité du moteur à courant continu:

$$\begin{cases} h_1(x_1) = \tanh(x_1) \\ \forall t \geq 0, x_1 \in S = \{-10, 10\} \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

On note l'approximation de $h_1(x_1)$ par $\bar{h}_1(x_1)$. Les figures II.1 décrivent respectivement la non linéarité et son approximation pour le nombre d'hyperplans $\sigma = 5$. Les vecteurs des paramètres initiaux $\theta_{0_5} = [0, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_\sigma, \beta_1, \dots, \beta_\sigma]^T$ et finaux $\theta_5^* = [a^*, b^{*T}, c_1^*, \dots, c_\sigma^*, \alpha_1^{*T}, \dots, \alpha_\sigma^{*T}, \beta_1^*, \dots, \beta_\sigma^*]^T$ sont les suivant:

$$\theta_{0_5} = [0, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_5, \beta_1, \dots, \beta_5]^T \quad (\text{II.47})$$

$$\theta_{0_5} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -6.75 \ -2.5 \ 1.75 \ 6. \ 10.25]^T$$

$$\theta_5^* = [a^*, b^{*T}, c_1^*, \dots, c_5^*, \alpha_1^{*T}, \dots, \alpha_5^{*T}, \beta_1^*, \dots, \beta_5^*]^T \quad (\text{II.48})$$

$$\begin{aligned} \theta_5^* = & [-0.0294 \ 0.0030 \ 0.0033 \ 0.2530 \ -0.2757 \\ & -0.0036 \ 0.0029 \ 1.4643 \ 1.3217 \ 1.2131 \ 1.3767 \\ & 1.0197 \ -5.6440 \ -1.9012 \ 1.7449 \ 5.3069 \ 10.2167]^T \end{aligned}$$

Pour $\sigma = 20$ hyperplans, nous trouvons 62 paramètres qui caractérisent l'approximation de la non linéarité $h_1(x_1)$ (pour $\sigma = 5$, le nombre de paramètres vaut 17). L'approximation pour $\sigma = 20$ hyperplans est décrite sur la figure II.2.

◇

Remarque II.4 : Nous pouvons d'ores et déjà observer sur les figures II.1 et II.2 que la précision de l'approximation dépend du nombre d'hyperplans choisi, et par conséquent, il existe un compromis entre la complexité et la précision de l'approximation. Cette observation sera discutée dans la dernière partie du chapitre.

▲

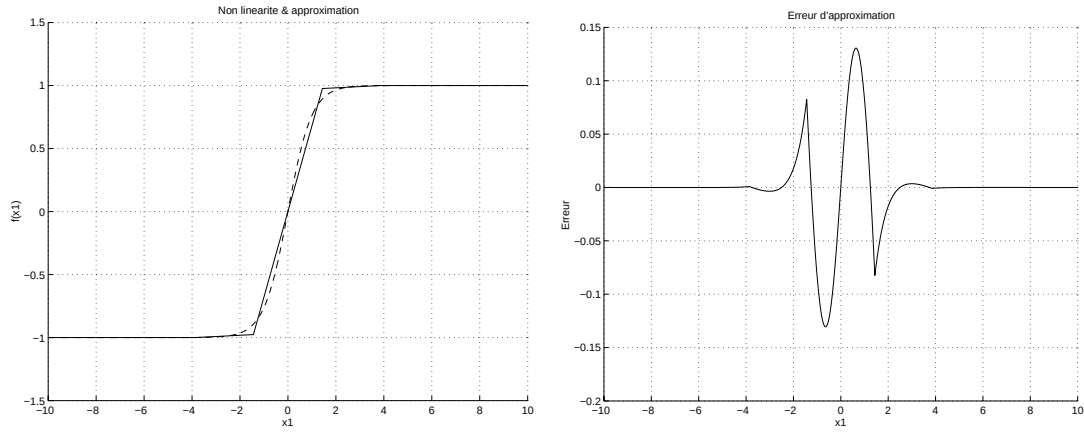


FIG. II.1 – *Approximation et erreur pour la non linéarité $\tanh(x_1)$ avec 5 hyperplans*

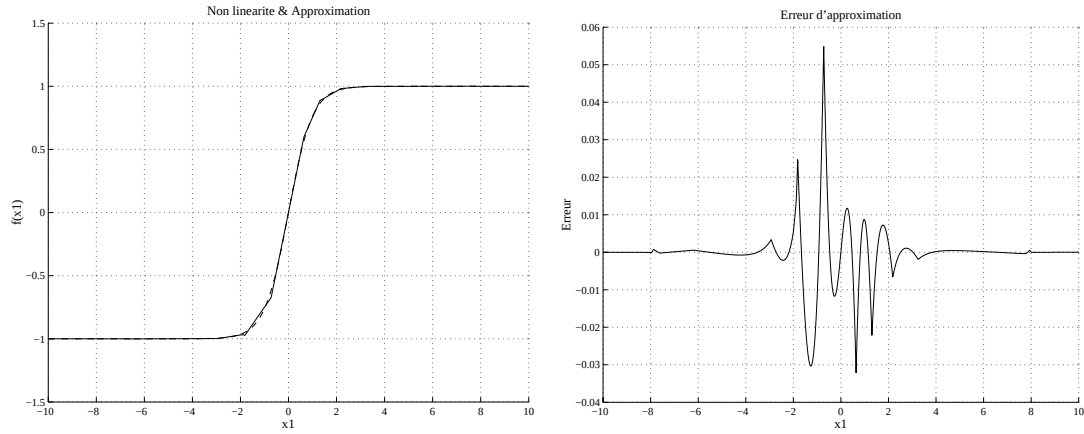


FIG. II.2 – *Approximation et erreur pour la non linéarité $\tanh(x_1)$ avec 20 hyperplans*

Non linéarités - Bi arguments

Soit le système non linéaire décrit par II.1 - II.4. Chaque non linéarité est définie sur un domaine compact. Le vecteur des non linéarités s'exprime par

$$h(\zeta) = \begin{bmatrix} h_1(\zeta) \\ \vdots \\ h_r(\zeta) \\ \vdots \\ h_\gamma(\zeta) \end{bmatrix} \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.49})$$

D'après le théorème II.2, nous pouvons directement exprimer les approximations de $h_r(\zeta)$ par autant de fonctions CPWL $\bar{h}_r(\zeta)$ décrites par

$$h_r(\zeta) \rightarrow \bar{h}_r(\zeta) = a_r + b_r^T \zeta + \sum_{i=1}^{\sigma_r} c_{i_r} |\alpha_{i_r}^T \zeta - \beta_{i_r}|, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma, \quad (\text{II.50})$$

à une précision arbitraire près et avec a_r, c_{i_r} et $\beta_{i_r} \in \mathbb{R}$, b_r et $\alpha_{i_r} \in \mathbb{R}^2$ et calculés en résolvant le problème II.1.

Remarque II.5 : Soit deux non linéarités mono-argument (leur argument est différent). Supposons la partie non linéaire de II.1 décrite par

$$\begin{cases} h(\zeta) = h_1(x_1) + h_2(x_2) \\ h_1 : S_1 \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \\ h_2 : S_2 \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \\ \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

Nous pouvons approximer la partie non linéaire $h(\zeta)$ soit en considérant $h(\zeta)$ comme deux non linéarités mono-argument, soit comme une non linéarité bi-arguments. La première possibilité permet la décomposition de non linéarité bi-arguments en non linéarités mono-argument quand cela est possible, mais le nombre de paramètres est plus important que pour la seconde possibilité et le nombre de points de cassure augmente par la même occasion. Soit l'approximation des non linéarités mono-argument:

$$h_r(\zeta) \rightarrow \bar{h}_r(\zeta) = a_r + b_r \zeta + \sum_{i=1}^{\sigma_r} c_{i_r} |\alpha_{i_r} \zeta - \beta_{i_r}|, \quad \forall r = 1, 2. \quad (\text{II.52})$$

Supposons que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Le nombre de paramètres est défini par

$$p = p_1 + p_2 \quad (\text{II.53})$$

avec

$$\begin{cases} p_1 = 1 + n_{h_1} + (2 + n_{h_1})\sigma_1 \\ p_2 = 1 + n_{h_2} + (2 + n_{h_2})\sigma_2 \\ n_{h_2} = n_{h_1} = 1 \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

avec n_{h_1} et n_{h_2} le nombre respectif d'argument dans h_1 et h_2 . Le nombre de paramètres est égal à $p = 4 + 6\sigma$. Si l'on considère $h(\zeta)$ comme une non linéarité bi-arguments, l'expression de l'approximation est, avec les dimensions appropriées,

$$h(\zeta) \rightarrow \bar{h}(\zeta) = a + b^T \zeta + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\alpha_i^T \zeta - \beta_i|, \quad (\text{II.55})$$

et le nombre de paramètres vaut

$$\begin{cases} p = 1 + n_{h_1+h_2} + (2 + n_{h_1+h_2})\sigma \\ n_{h_1+h_2} = 2 \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

d'où, le nombre de paramètres est égal à $p = 3 + 4\sigma$. Par conséquent, suivant l'expression des non linéarités, il faudra choisir l'une ou l'autre possibilité.

▲

Mono/Multi non linéarités - N-arguments

Remarque II.6 : Nous allons faire seulement des remarques sur cette généralisation car l'étape de l'obtention de la famille de modèles LTI incertains polytopiques n'a pas été résolue pour une non linéarité N-arguments.

Soit le système non linéaire décrit par II.1 - II.4. Chaque non linéarité est définie sur un domaine compact. Le vecteur des non linéarités s'exprime par

$$h(\zeta) = \begin{bmatrix} h_1(\zeta) \\ \vdots \\ h_r(\zeta) \\ \vdots \\ h_\gamma(\zeta) \end{bmatrix} \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.57})$$

D'après le théorème II.2, nous pouvons directement exprimer les approximations de $h_r(\zeta)$ par autant de fonctions CPWL $\bar{h}_r(\zeta)$ décrites par

$$h_r(\zeta) \rightarrow \bar{h}_r(\zeta) = a_r + b_r^T \zeta + \sum_{i=1}^{\sigma_r} c_{i_r} |\alpha_{i_r}^T \zeta - \beta_{i_r}|, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma, \quad (\text{II.58})$$

à une précision arbitraire près et avec a_r, c_{i_r} et $\beta_{i_r} \in \mathbb{R}$, b_r et $\alpha_{i_r} \in \mathbb{R}^N$ avec $n + m \geq N > 2$ et calculés en résolvant le problème II.1.

▲

Pour conclure sur cette étape, nous nous sommes focalisés sur l'approximation du système non linéaire II.1, c'est-à-dire nous voulions déterminer d'une manière systématique un modèle linéaire par morceaux. Les fonctions CPWL nous ont permis de déterminer des points particuliers qui sont les points de cassure. Ils seront utiles pour délimiter les domaines de validité des modèles LTIs incertains dont la détermination est décrite dans le paragraphe suivant.

II.3.2 Modèles linéaires incertains polytopiques

Nous allons considérer les systèmes non linéaires II.1 - II.4 avec des non linéarités mono-arguments et/ou bi-arguments ($N = 1, 2$). Soit le modèle linéaire par morceaux suivant déterminé à l'étape 1. à partir du modèle II.1 - II.4.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x, u) + B_1 w + B_2 u & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_2 x \\ x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n & u = [u_1 \ u_2 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q & w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

et

$$\begin{cases} \bar{f}(x, u) = A_n x + B_n \bar{h}(x, u) \\ \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

avec

$$\bar{h}(\zeta) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1(\zeta) \\ \vdots \\ \bar{h}_r(\zeta) \\ \vdots \\ \bar{h}_\gamma(\zeta) \end{bmatrix} \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.61})$$

tel que

$$\left\{ \bar{h}_r : S_r \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \right\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad N = 1, 2, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.62})$$

L'approximation de chaque non linéarité $\bar{h}_r(\zeta)$ permet de déterminer automatiquement les points de cassure définis dans le paragraphe "Outils de base". Pour chaque non linéarité, les points de cassure s'expriment par l'égalité suivante:

$$\alpha_{i_r}^T \zeta - \beta_{i_r} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \sigma_r + 1, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.63})$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, ces points de cassure seront les limites du domaine de validité de chaque modèle LTI incertain polytopique. Dans chaque domaine de validité, le modèle linéaire par morceaux est tout simplement LTI. Pour effectuer un séquençement de modèles, il faut mettre en place des points opérationnels atteignables qui permettent de fixer une trajectoire pour le système. La manière la plus simple de déterminer ces points d'équilibre intermédiaires est de les considérer comme le centre du domaine de validité. Ceci est illustré sur la figure II.3:

$$\begin{cases} BP_i: \text{Point de cassure } i \text{ (Break Point)} \\ TP_i: \text{Point d'équilibre intermédiaire } i \text{ (Trim Point)} \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

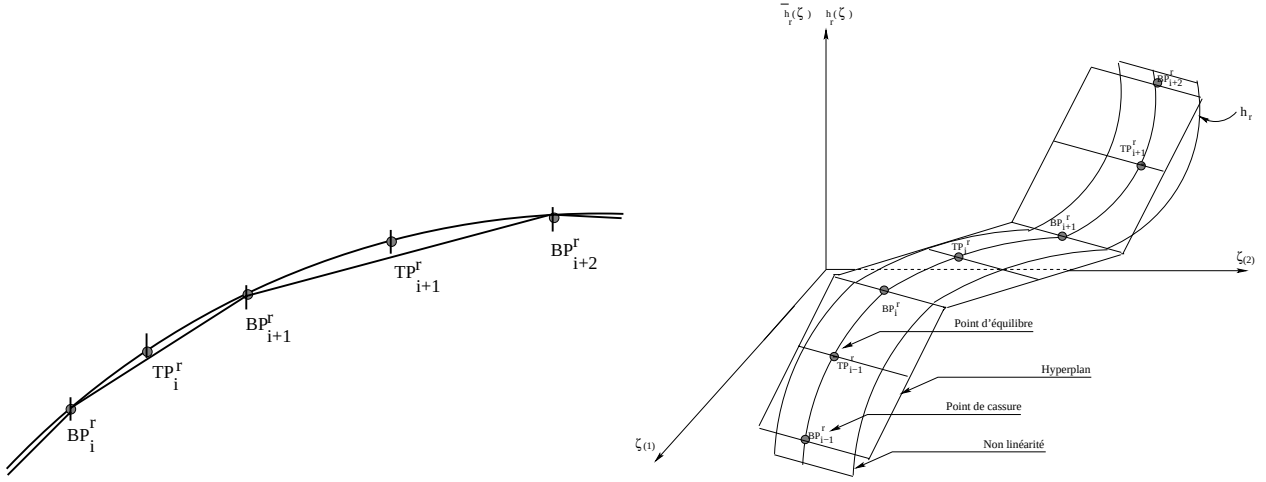


FIG. II.3 – Points de cassure et points d'équilibre intermédiaires

Nous noterons respectivement les points de cassure et les points d'équilibre intermédiaires de la manière suivante. Si le système non linéaire étudié est composé de plusieurs non linéarités, par BP_i^r et TP_i^r , i représente l'indice du point d'équilibre et r celui de la non linéarité. S'il existe une seule non linéarité, alors nous omettrons l'indice r de la non linéarité.

Les points de cassure BP_i^r sont déterminés à partir de l'approximation CPWL de chaque non linéarité d'après la définition II.3

$$\alpha_{i_r}^T \zeta - \beta_{i_r} = 0, \forall i = 1, \dots, \sigma_r + 1, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.65})$$

Compte tenu de ces notations et de ces remarques, nous procéderons comme suit.

- Un point d'équilibre intermédiaire sera déterminé comme le centre du domaine de validité de chaque hyperplans délimité par BP_i^r et BP_{i+1}^r , soit

$$TP_i^r = \frac{BP_{i+1}^r + BP_i^r}{2}, \forall i = 1, \dots, \sigma_r + 1, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.66})$$

- Les points d'équilibre limitrophes dans S_r seront être déterminés en utilisant les limites des domaines S_r .
- Un sous-ensemble de l'espace d'état est définis à partir de deux points de cassure consécutifs et sera considéré comme de domaine de validité ou région d'attraction du modèle LTI correspondant.
- Lors d'une régulation, le point final sera considéré (artificiellement) comme un point d'équilibre.

Exemple II.5 : Soit une non linéarité mono-argument illustrée partiellement sur la figure II.4.a. Il existe un sous-ensemble de l'espace d'état délimité par les points de cassure BP_i et BP_{i+1} .

A partir de l'approximation de la non linéarité et de ses paramètres, il est possible de déterminer les modèles linéaires incertains tels que, dans chaque domaine de validité, la non linéarité est incluse dans un cône d'incertitude. Sur l'exemple de la figure II.4.a, le cône d'incertitude est constitué de deux hyperplans de dimension 1 et l'on retrouve la notion de non linéarité de secteur mais au niveau local. Ce cône d'incertitude est représenté par la zone hachurée et noté $\{C_i^+ \cup C_i^-\}$.

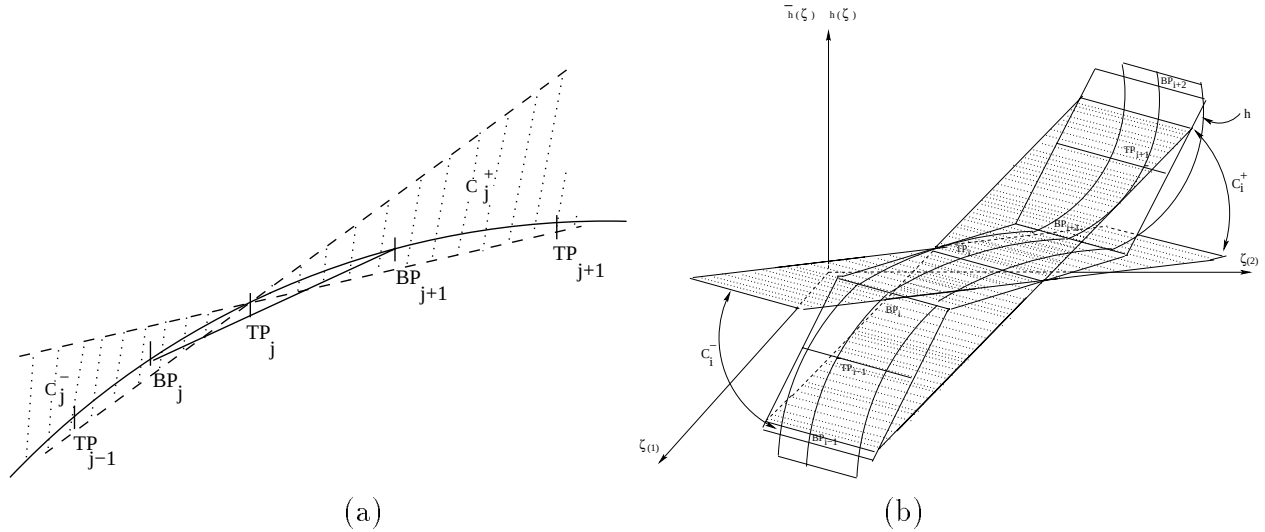


FIG. II.4 – Cônes d'incertitude

Exemple II.6 : La figure II.4.b illustre le cas d'une non linéarité bi-arguments. Le cône d'incertitude est composé de deux hyperplans de dimension 2.

Que ce soit dans le cas de non linéarités mono-argument ou de non linéarités bi-arguments, il faut penser à la construction de ces hyperplans pour chaque non linéarité. Nous présentons dans ce qui suit les deux problèmes correspondant à la construction de ces cônes d'incertitude dans le cas de non linéarités mono-argument et celui de non linéarités bi-arguments respectivement.

Problème II.2 : Non linéarités - Mono argument

Soit le système linéaire par morceaux II.59 - II.62. Le problème est de déterminer systématiquement les hyperplans, de dimension 1 dont les expressions sont $HP(\zeta) = d\zeta + e$ avec $d, e \in \mathbb{R}$ pour chaque point d'équilibre de chaque non linéarité, $\forall r \in [1, \gamma], \forall i \in [1, \sigma_r + 2]$, de telle sorte que

1.

$$\forall \zeta \in [TP_{i-1}^r, TP_{i+1}^r], \quad h_r(\zeta) \in \left\{ C_i^{r+} \cup C_i^{r-} \right\} \quad (\text{II.67})$$

2.

$$TP_{i-1}^r \in \left\{ C_i^{r-} \right\} \quad \text{et} \quad TP_{i+1}^r \in \left\{ C_i^{r+} \right\} \quad (\text{II.68})$$

3. Le cône d'incertitude $\left\{ C_i^{r+} \cup C_i^{r-} \right\}$ soit minimal.

△

Problème II.3 : Non linéarités - Bi arguments

Soit le système linéaire par morceaux II.59 - II.62. Le problème est de déterminer systématiquement les hyperplans, de dimension 2 dont les expressions sont $HP(\zeta) = d^T \zeta + e$ avec $d \in \mathbb{R}^2$ et $e \in \mathbb{R}$ pour chaque point d'équilibre de chaque non linéarité, $\forall r \in [1, \gamma], \forall i \in [1, \sigma_r + 2]$, de telle sorte que

1.

$$\forall \zeta \in [TP_{i-1}^r, TP_{i+1}^r], \quad h_r(\zeta) \in \left\{ C_i^{r+} \cup C_i^{r-} \right\} \quad (\text{II.69})$$

2.

$$TP_{i-1}^r \in \left\{ C_i^{r-} \right\} \quad \text{et} \quad TP_{i+1}^r \in \left\{ C_i^{r+} \right\} \quad (\text{II.70})$$

3. Le cône d'incertitude $\left\{ C_i^{r+} \cup C_i^{r-} \right\}$ soit minimal.

△

Les deux paragraphes suivants expliquent comment on peut résoudre ces deux problèmes.

Non linéarités - Mono argument

Soit le modèle linéaire par morceaux II.59 - II.62 déterminé à l'étape 1. On peut appliquer l'algorithme suivant:

Algorithme II.2 :

1. **Pour** toutes les non linéarités h_r ($r = 1, \dots, \gamma$) de II.1 - II.4 approximé par II.59 - II.62, **faire**
2. **Pour** tous les points d'équilibre intermédiaires TP_i^k ($i = 1, \dots, \sigma_r + 2$) de h_r , **faire**,
3. Calcul des points TP_{i-1}^r , TP_i^r et TP_{i+1}^r .
4. Calcul des points $h_r(TP_{i-1}^r)$, $h_r(TP_i^r)$ et $h_r(TP_{i+1}^r)$.
5. Calcul de l'hyperplan HP_{11} tel que HP_{11} passe par $(TP_{i+1}^r; h_r(TP_{i+1}^r) + \epsilon_{11})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$.
6. Calcul de l'hyperplan HP_{12} tel que HP_{12} passe par $(TP_{i-1}^r; h_r(TP_{i-1}^r) - \epsilon_{12})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$.
7. Calcul de l'hyperplan HP_{21} tel que HP_{21} passe par $(TP_{i+1}^r; h_r(TP_{i+1}^r) - \epsilon_{21})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$.
8. Calcul de l'hyperplan HP_{22} tel que HP_{22} passe par $(TP_{i-1}^r; h_r(TP_{i-1}^r) + \epsilon_{22})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$.
9. A partir des 4 hyperplans $\{HP_{11}, HP_{12}, HP_{21}, HP_{22}\}$, déterminer une combinaison C (voir figure II.5) possible de 2 hyperplans parmi 4 tel que cette combinaison C forme le cône d'incertitude minimal et tel que

$$\forall \zeta \in [TP_{i-1}^r, TP_{i+1}^r], \quad h_r(\zeta) \in \left\{ C_i^{r+} \cup C_i^{r-} \right\} \quad (\text{II.71})$$

$$TP_{i-1}^r \in \left\{ C_i^{r-} \right\} \text{ et } TP_{i+1}^r \in \left\{ C_i^{r+} \right\} \quad (\text{II.72})$$

10. **Si** aucune combinaison C d'hyperplans ne correspond aux conditions, **alors**
11. Incrémenter ϵ_{11} , ϵ_{12} , ϵ_{21} ou ϵ_{22} correspondant à l'hyperplan responsable de l'échec:

$$\epsilon_{ts} = \epsilon_{ts} + \Delta, \forall t, s = 1, 2, \text{ avec } \Delta \text{ fixé.} \quad (\text{II.73})$$

12. Retourner en 3.
13. **Si** ϵ_{ts} a atteint une borne maximale fixé, **alors**

14. *Incrémenter le nombre d'hyperplans σ_r*

$$\sigma_r = \sigma_r + 1. \quad (\text{II.74})$$
15. *Retourner à l'étape 1 de l'algorithme II.1.*
16. **Fin**
17. **sinon**
18. *Mémoriser la combinaison d'hyperplans pour le point d'équilibre TP_i^r .*
19. *Initialiser ϵ_{11} , ϵ_{12} , ϵ_{21} et ϵ_{22} .*
20. *Retourner en 2.*
21. **Fin**
22. **Fin**
23. **Fin**



Maintenant, traitons le cas de non linéarités bi-arguments.

Multi non linéarités - bi arguments

Soit le modèle linéaire par morceaux II.59 - II.62 déterminé à l'étape 1. L'algorithme est le suivant:

Algorithme II.3 :

1. **Pour** toutes les non linéarités h_r ($r = 1, \dots, \gamma$) de II.1 - II.4 approximé par II.59 - II.62, **faire**
2. **Pour** tous les points d'équilibre intermédiaires TP_i^r ($i = 1, \dots, \sigma_r + 2$) de h_r , **faire**,
3. *Calcul des points TP_{i-1}^r , TP_i^r et TP_{i+1}^r .*
4. *Calcul des points $h_r(TP_{i-1}^r)$, $h_r(TP_i^r)$ et $h_r(TP_{i+1}^r)$.*
5. *Calcul de l'hyperplan HP_{11} tel que HP_{11} passe par $(TP_{i+1}^r; h_r(TP_{i+1}^r) + \epsilon_{11})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$,
et tel que l'intersection de cet hyperplan avec l'hyperplan tangent en TP_i^r est perpendiculaire au vecteur porté par TP_{i-1}^r et TP_{i+1}^r .*

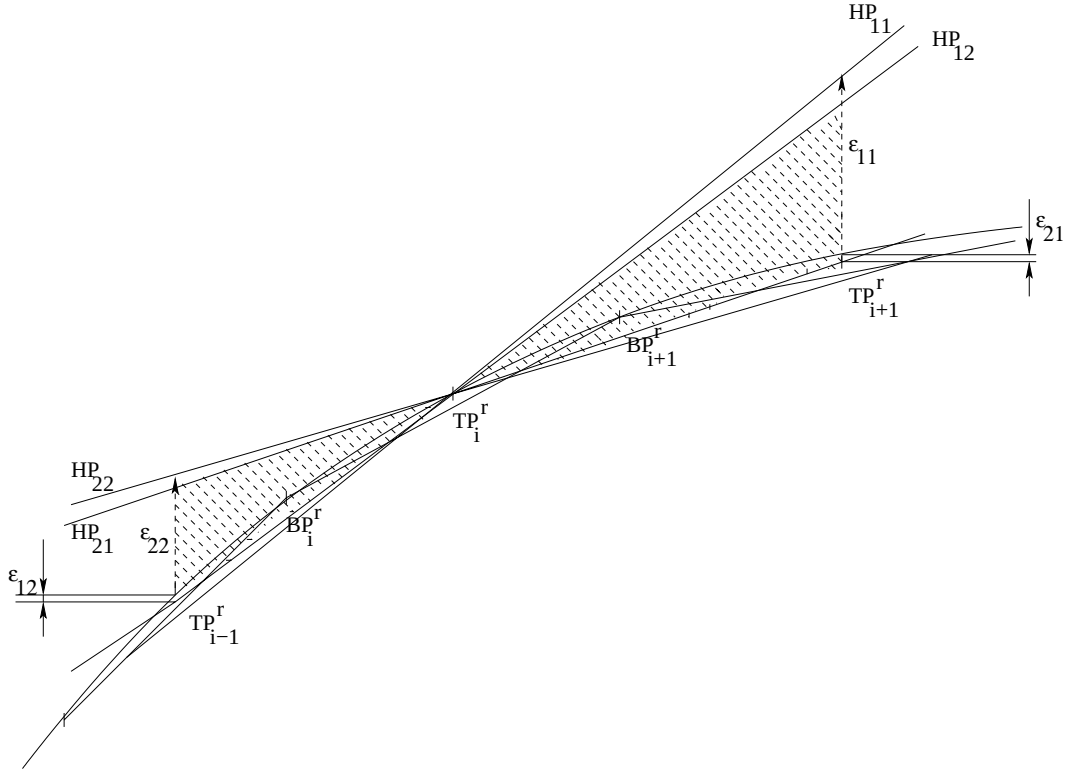


FIG. II.5 — Combinaison C des 4 hyperplans $\{HP_{11}, HP_{12}, HP_{21}, HP_{22}\}$: dans ce cas $C = \{HP_{12}, HP_{21}\}$.

6. Calcul de l'hyperplan HP_{12} tel que HP_{12} passe par $(TP_{i-1}^r; h_r(TP_{i-1}^r) - \epsilon_{12})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$,
et tel que l'intersection de cet hyperplan avec l'hyperplan tangent en TP_i^r est perpendiculaire au vecteur porté par TP_{i-1}^r et TP_{i+1}^r ,
7. Calcul de l'hyperplan HP_{21} tel que HP_{21} passe par $(TP_{i+1}^r; h_r(TP_{i+1}^r) - \epsilon_{21})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$,
et tel que l'intersection de cet hyperplan avec l'hyperplan tangent en TP_i^r est perpendiculaire au vecteur porté par TP_{i-1}^r et TP_{i+1}^r .
8. Calcul de l'hyperplan HP_{22} tel que HP_{22} passe par $(TP_{i-1}^r; h_r(TP_{i-1}^r) + \epsilon_{22})$ et par $(TP_i^r; h_r(TP_i^r))$,
et tel que l'intersection de cet hyperplan avec l'hyperplan tangent en TP_i^r est perpendiculaire au vecteur porté par TP_{i-1}^r et TP_{i+1}^r .
9. A partir des 4 hyperplans $\{HP_{11}, HP_{12}, HP_{21}, HP_{22}\}$, déterminer une combinaison C (voir figure II.6) possible de 2 hyperplans parmi 4 tel que

cette combinaison C forme le cône d'incertitude minimal et tel que

$$\forall \zeta \in [TP_{i-1}^r, TP_{i+1}^r], \quad h_r(\zeta) \in \{C_i^{r+} \cup C_i^{r-}\} \quad (\text{II.75})$$

$$TP_{i-1}^r \in \{C_i^{r-}\} \text{ et } TP_{i+1}^r \in \{C_i^{r+}\} \quad (\text{II.76})$$

10. **Si** aucune combinaison C d'hyperplans ne correspond aux conditions, **alors**
11. Incréments ϵ_{11} , ϵ_{12} , ϵ_{21} ou ϵ_{22} correspondant à l'hyperplan responsable de l'échec:

$$\epsilon_{ts} = \epsilon_{ts} + \Delta, \forall t, s = 1, 2, \text{ avec } \Delta \text{ fixé et } \Delta > 0. \quad (\text{II.77})$$
12. Retourner en 3.
13. **Si** ϵ_{ts} a atteint une borne maximale fixé, **alors**
14. Incréments le nombre d'hyperplans σ_r

$$\sigma_r = \sigma_r + 1. \quad (\text{II.78})$$
15. Retourner à l'étape 1 de l'algorithme II.1.
16. **Fin**
17. **sinon**
18. Mémoriser la combinaison d'hyperplans pour le point d'équilibre TP_i^r .
19. Initialiser ϵ_{11} , ϵ_{12} , ϵ_{21} et ϵ_{22} .
20. Retourner en 2.
21. **Fin**
22. **Fin**
23. **Fin**



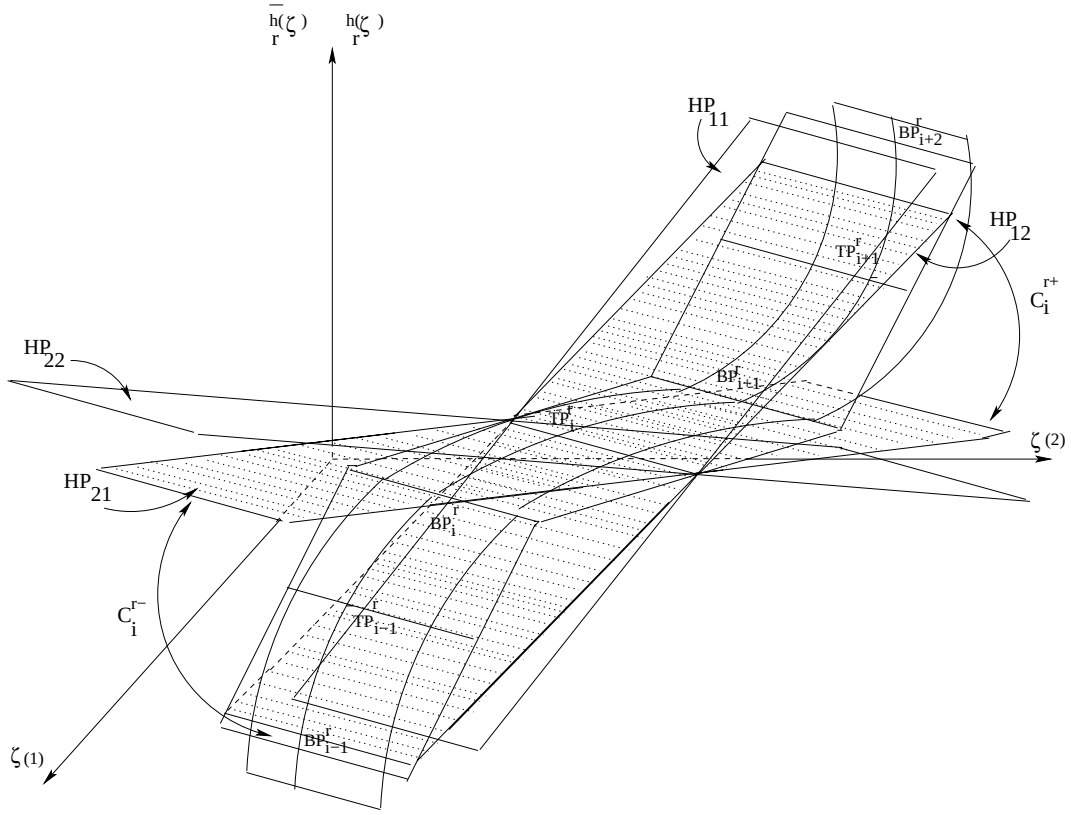


FIG. II.6 — Combinaison C des 4 hyperplans $\{HP_{11}, HP_{12}, HP_{21}, HP_{22}\}$: dans ce cas $C = \{HP_{12}, HP_{21}\}$.

II.3.3 Synthèses robustes locales

Pour effectuer la synthèse robuste locale des systèmes linéaires incertains, nous avons utilisé l'approche quadratique de Lyapunov. Aussi, pour des questions de performances (rejet de perturbation, régime transitoire...), nous incluons un critère tel que la minimisation d'une norme H_2 ou H_∞ , ou un placement de pôles. La synthèse des lois de commande se fera par résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) [11].

Les modèles LTIs incertains suivants s'écrivent de la manière suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{ij}(x(t) - x_{ei}) + B_{1i}w + B_{2ik}(u(t) - u_{ei}) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_{2i}(x(t) - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}', \forall j = 1, \dots, \mathcal{N}, \forall k = 1, \dots, \mathcal{M} \\ x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n \quad u = [u_1 \ u_2 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

avec (x_{ei}, u_{ei}) représentant le point d'équilibre intermédiaire i . Les matrices dynamique et

de commande de chaque modèle LTI incertain II.79 n'ont pas forcément le même indice de sommets: cela dépend de des arguments des non linéarités. L'indice j correspond aux sommets de la matrice dynamique et l'indice r correspond aux sommets de la matrice de commande.

Pour un retour d'état, les lois de commande s'écriront

$$u(t) = u_i + L_i(x(t) - x_{ei}) \quad \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}'. \quad (\text{II.80})$$

et pour un retour de sortie dynamique,

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_{ci}x_c(t) + B_{ci}(y(t) - y_{ei}), \\ y_{ei} = C_{2i}x_{ei}, \\ u(t) - u_{ei} = C_{ci}x_c(t) \quad \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}'. \end{cases} \quad (\text{II.81})$$

Le nombre de modèles LTI incertains polytopiques $\mathcal{N}'$ dépend du nombre d'hyperplans et du nombre de non linéarités: Soient γ le nombre de non linéarités ($r = 1, \dots, \gamma$) et σ_r le nombre d'hyperplans pour l'approximation de la non linéarité r . Alors, le nombre de modèles obtenu est calculé par

$$\mathcal{N}' = \sum_{r=1}^{\gamma} (\sigma_r + 1) + 1 \quad (\text{II.82})$$

De la même manière que précédemment, le nombre de sommets de chaque modèle LTI incertain polytopique est directement lié au nombre de non linéarités. Comme nous recherchons un cône d'incertitude (une combinaison C de 2 hyperplans parmi 4) pour chaque point d'équilibre intermédiaire, alors le nombre de sommets est défini par des puissances de 2. Soient γ_1 et γ_2 les nombres de non linéarités dépendant respectivement des variables d'état et des commandes telles que

$$\gamma \leq \gamma_1 + \gamma_2 \quad (\text{II.83})$$

Alors, le nombre de sommets de la matrice de commande de II.79 est donnée par

$$\mathcal{M} = 2^{\gamma_2} \quad (\text{II.84})$$

Pour la matrice dynamique, il faut intégrer que la matrice A_n de II.59 - II.62 peut être incertaine (polytopique) à ν sommets. Par conséquent, le nombre de sommets de la matrice dynamique de II.79 est donnée par

$$\mathcal{N} = \nu \cdot 2^{\gamma_1} \quad (\text{II.85})$$

Donc, l'incertitude polytopique est telle que la matrice A_{ij} de II.59 - II.62 (pour le modèle i) appartienne à un domaine de type polytopique:

$$A_{ij} \in \mathcal{D}_{A_{ij}} : = \left\{ A_{ij} : A_{ij} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j A_{ij}, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\} \quad (\text{II.86})$$

où $\mathcal{N}$ représente le nombre de sommets du polyèdre $\mathcal{D}_{A_{ij}}$.

De la même manière pour B_{2ik} , on a :

$$B_{2ik} \in \mathcal{D}_{B_{2ik}} : = \left\{ B_{2ik} : B_{2ik} = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k B_{2ik}, \mu_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k = 1 \right\} \quad (\text{II.87})$$

où $\mathcal{M}$ représente le nombre de sommets du polyèdre $\mathcal{D}_{B_{2ik}}$.

Remarque II.7 :

- *Le détail des différentes synthèses robustes locales par retour d'état et de sortie dynamique font l'objet du prochain chapitre.*
- *Si une synthèse robuste locale est infaisable, il faut recommencer l'approche CPWL en changeant le nombre d'hyperplans, voire augmenter la taille du cône d'incertitude pour le point d'équilibre correspondant au modèle LTI pour lequel le problème de commande est infaisable.*
- *Le calcul des lois de commande véritablement locales (valables aux points d'équilibre intermédiaires) est calculés pour TP_i^r avec $i = 1, \dots, \mathcal{N}'$ et $r = 1, \dots, \gamma$.*

▲

Exemple II.7 : Reprenons l'exemple du moteur à courant continu: la non linéarité est approximée par $\sigma = 5$

$$\bar{h}_1(\zeta) = a + b\zeta + \sum_{i=1}^5 c_i |\alpha_i \zeta - \beta_i|, \quad (\text{II.88})$$

avec a, c_i, b et $\alpha_i \in \mathbb{R}$ calculés en résolvant le problème II.1. Les modèles LTIs incertains s'écrivent:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{ij}(x(t) - x_{ei}) + B_{2i}(u(t) - u_{ei}) \\ y(t) = C_{2i}(x(t) - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, 7, \forall j = 1, \dots, 4 \\ x \in \mathbb{R}^3 \quad u \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.89})$$

avec

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{\Delta_{1ij}} & \frac{Kc}{\Delta_{1ij}} \\ \Delta_{2ij} & -\frac{Ke}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \quad B_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad C_{2i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.90})$$

- Δ_{1ij} correspond à l'incertitude sur l'inertie $\tilde{J}$:

$$\Delta_{1ij} \in \left\{ \frac{1}{J_0 - \Delta J_m}, \frac{1}{J_0 + \Delta J_m} \right\} \quad (\text{II.91})$$

- Δ_{2ij} représente l'approximation de la non linéarité et est déterminée par les cônes d'incertitude de chaque modèle,

$$\Delta_{2ij} \in \{ \Delta_{2ij}^-, \Delta_{2ij}^+ \} \quad (\text{II.92})$$

◇

II.3.4 Loi de commande globale par séquençement

La loi de commande globale est créée à partir de la famille de lois de commande robustes locales. Une manière simple pour la déterminer est d'effectuer un séquençement à partir d'une condition initiale donnée.

Soit P_i^r , la région d'attraction entre deux points d'équilibre intermédiaires d'une non linéarité (TP_i^r et TP_{i+1}^r par exemple). Soit η , un scalaire positif très petit. Le changement de loi de commande s'effectuera lorsque le point d'évolution ζ sera très proche du point d'équilibre TP_i^r , c'est-à-dire dans la région d'attraction adjacente P_{i+1}^r telle que

$$\forall \zeta(t) \in P_i^r \subset S_r, \forall \|TP_i^r - \zeta(t)\| < \eta \Rightarrow \zeta(t) \in P_{i+1}^r \quad (\text{II.93})$$

Le séquençement de loi de commande est illustré sur la figure II.7 autour des points d'équilibre TP_{i-1}^r , TP_i^r et TP_{i+1}^r .

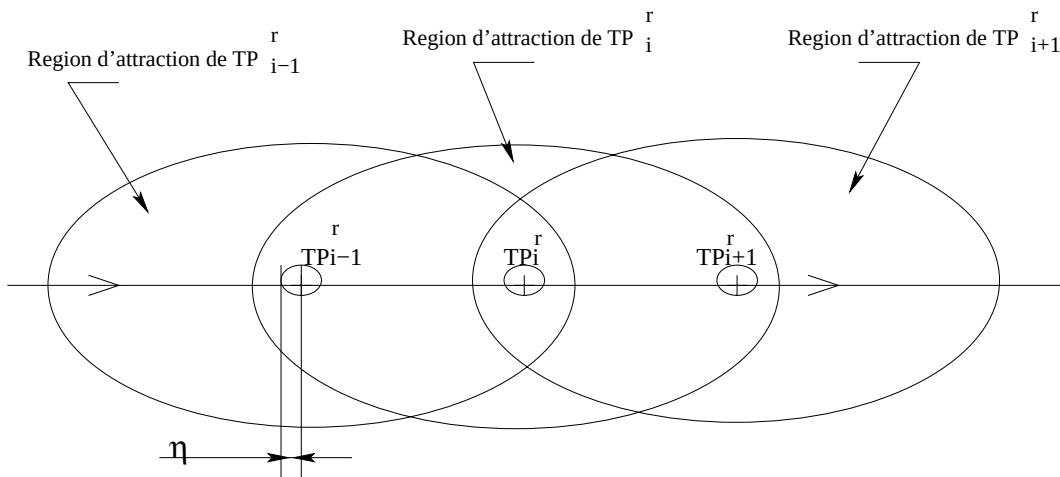


FIG. II.7 – Séquençement de modèles LTI locaux.

II.3.5 Organigramme

Pour résumer l'approche d'une manière schématique, nous présentons sur la figure II.8 un organigramme de l'approche CPWL développée dans ce chapitre. L'environnement de base est l'environnement de MATLAB. Chaque rectangle représente une action à exécuter. Une liaison entre deux rectangles peut avoir une condition à vérifier. Nous observons que l'approche CPWL nécessite des ressources comme les deux solveurs de LMIs: LMILAB, solveur standard de MATLAB [36] et SEDUMI [92], logiciel libre, utilisable depuis MATLAB et aussi SIMULINK pour effectuer les simulations sur le système non linéaire.

II.4 Problèmes liés à l'approche CPWL

II.4.1 Compromis précision - complexité - faisabilité

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur le problème de la systématisation de l'approche CPWL. A partir d'approximations des non linéarités par des fonctions CPWL, nous pouvons déterminer les modèles LTI incertains polytopiques. Mais, nous avons évoqué à plusieurs reprises que lorsqu'il y a un échec au niveau de la détermination du cône d'incertitude ou lors de la résolution des synthèses robustes (problème infaisable), il est possible d'augmenter le nombre d'hyperplans de la non linéarité responsable de/des échec(s). Mais, la complexité de l'approximation va croître à cause du nombre de ses paramètres. Par conséquent, le premier problème de l'approche CPWL, c'est un compromis à trouver entre le nombre d'hyperplans et la complexité. Le nombre d'hyperplans est lié à la précision de l'approximation, le nombre des points d'équilibre intermédiaires, l'ouverture du cône d'incertitude, la transition entre les modèles (et donc les amplitudes des cassures aux niveaux des commandes). Le problème à résoudre peut se résumer à ce qui suit:

Problème II.4 : Soit le modèle linéaire par morceaux II.1 - II.4 déterminé à l'étape 1.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x, u) + B_1 w + B_2 u & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_2 x \\ x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n & u = [u_1 u_2 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q & w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

et

$$\begin{cases} \bar{f}(x, u) = A_n x + B_{nl} \bar{h}(x, u) \\ \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.95})$$

avec

$$\bar{h}(x, u) \rightarrow \bar{h}(\zeta) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1(\zeta) \\ \vdots \\ \bar{h}_r(\zeta) \\ \vdots \\ \bar{h}_\gamma(\zeta) \end{bmatrix} \quad \forall r = 1, \dots, \gamma. \quad (\text{II.96})$$

tel que

$$\left\{ \bar{h}_r : S_r \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \right\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad N = 1, 2, \quad \forall r = 1, \dots, \gamma, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.97})$$

L'étape 2 nous permet de déterminer les modèles LTI incertains suivants:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{ij}(x(t) - x_{ei}) + B_{1i}w + B_{2ik}(u(t) - u_{ei}) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_{2i}(x(t) - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}', \quad \forall j = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad \forall k = 1, \dots, \mathcal{M} \\ x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n \quad u = [u_1 \ u_2 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.98})$$

tels que

$$A_{ij} \in \mathcal{D}_{A_{ij}} : = \left\{ A_{ij} : A_{ij} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j A_{ij}, \quad \delta_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\} \quad (\text{II.99})$$

et

$$B_{2ik} \in \mathcal{D}_{B_{2ik}} : = \left\{ B_{2ik} : B_{2ik} = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k B_{2ik}, \quad \mu_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k = 1 \right\} \quad (\text{II.100})$$

L'approche CPWL peut conduire à un échec pour les cas 1, 2 et 3 (voir la figure II.8):

- lorsqu'un nombre insuffisant d'hyperplans pour une ou plusieurs non linéarités ont engendré des cônes d'incertitude trop larges (1),
- lorsque l'on obtient des problèmes de synthèses infaisables (2),
- lorsque le séquençement de gains est gêné par des sauts trop violents sur les commandes pendant les phases de simulation (3),

△

La solution envisageable est simplement d'augmenter le nombre d'hyperplans des non linéarités responsables de ces échecs. Mais, les conséquences sont les suivantes:

- Le nombre de paramètres peut considérablement augmenter. Soit une non linéarité $h_r(\zeta)$ et son approximation $\bar{h}_r(\zeta)$ définies par

$$\bar{h}_r(\zeta) = a_r + b_r^T \zeta + \sum_{i=1}^{\sigma_r} c_{i_k} |\alpha_{i_r}^T \zeta - \beta_{i_r}|, \quad (\text{II.101})$$

à une précision arbitraire près, avec a_r, c_{i_r} et $\beta_{i_r} \in \mathbb{R}$, b_r et $\alpha_{i_r} \in \mathbb{R}^2$ et calculés par la résolution du problème II.1. Le nombre de paramètres vaut

$$\begin{cases} p = 1 + n + (2 + n)\sigma_r \\ n = 2 \end{cases} \quad (\text{II.102})$$

d'où, le nombre de paramètres est égal à $p = 3 + 4\sigma_r$.

- Le temps de calcul des approximations augmente sensiblement.
- Le nombre de points d'équilibre va croître autant que le nombre d'hyperplans σ_r .

II.4.2 Système à comportement de type non minimum de phase

Il se peut que dans un domaine d'attraction d'une non linéarité, le modèle résultant ait un comportement de type non minimum de phase.

Pour éviter quelques cas où ce problème existe, que l'on découvre qu'au moment des simulations, il est possible de vérifier une condition nécessaire supplémentaire:

- Il est possible de tester localement le signe de la dérivée de l'argument de la non linéarité

$$\left\| \frac{d(\zeta - TP_{i+1}^r)}{dt} \right\| < 0, \quad \forall \zeta \in P_i^r \quad (\text{II.103})$$

puis éventuellement, agrandir le domaine d'incertitude de manière à ce que les variations de la non linéarité se trouvent aussi incluses dans le cône $\{C_i^{r-} \cup C_i^{r+}\}$ agrandi. Il se peut alors que le système ne soit plus quadratiquement stabilisable et il faut alors augmenter le nombre de points d'équilibre intermédiaires pour contrôler les domaines d'incertitude locaux.

II.4.3 Cône d'incertitude pour une non linéarité à N-arguments

Nous avons évoqué dans une remarque que l'approximation d'une non linéarité à N-arguments est faisable mais que la détermination des cônes d'incertitude pour obtenir la famille de modèles LTI incertains polytopiques est très difficile.

Une solution qui peut être intéressante est de se dégager de la représentation l'incertitude de type polytopique et de travailler avec une représentation de l'incertitude de type bornée en norme qui s'écrit, pour la matrice dynamique:

$$\Delta A := \tilde{D}F\tilde{E}$$

où $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ et $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ sont des matrices constantes connues définissant la structure de l'incertitude en la répartissant sur les différents éléments de la matrice A . La matrice $F \in \mathbb{R}^{d \times l}$ est la matrice d'incertitude appartenant au domaine :

$$\mathcal{D}_F : = \{F \in \mathbb{R}^{d \times l} : F^T F \leq 1\} \quad (\text{II.104})$$

Alors, la construction des modèles LTI incertains pourraient être simplifié en omettant le calcul des hyperplans.

II.5 Conclusion

Après avoir rappelé des outils de base concernant les fonctions linéaires par morceaux (PWL) et canoniques linéaires par morceaux (CPWL), nous avons développé dans ce chapitre une approche systématique permettant de faire l'approximation de système non linéaire par une famille de modèles LTI incertains de type polytopique. Pour obtenir ces modèles, nous avons approximer les non linéarités par des fonctions CPWL, ce qui nous permet de choisir des points d'équilibre intermédiaires et des régions d'attraction. A partir des approximations des non linéarités, nous avons construit, pour des non linéarités mono-argument ou bi-arguments, des cônes d'incertitude tels que les non linéarités soient incluses dans les cônes d'incertitude et les points d'équilibre intermédiaires sont inclus dans les régions d'attractions adjacentes. A partir des modèles LTI incertains, il est possible de poser des problèmes de synthèses robustes qui détermineront des lois de commandes robustes locales. Les problèmes de synthèses sont écrits à partir d'inégalités matricielles linéaires. La loi de commande globale est réalisée par séquençement, la transition entre deux modèles LTI aura lieu dès que la trajectoire d'état entrera dans la région d'attraction adjacente.

Cet algorithme, bien qu'efficace, nous a révélé quelques problèmes tels que le compromis entre la complexité des approximations, la précision de ces dernières et la faisabilité des problèmes de synthèses, l'apparition possible de systèmes LTI incertains ayant un comportement de type non minimum de phase. Et enfin, la détermination des cônes d'incertitude pour des non linéarités à N arguments se révèle impossible à ce jour par une représentation d'incertitude structurée polytopique.

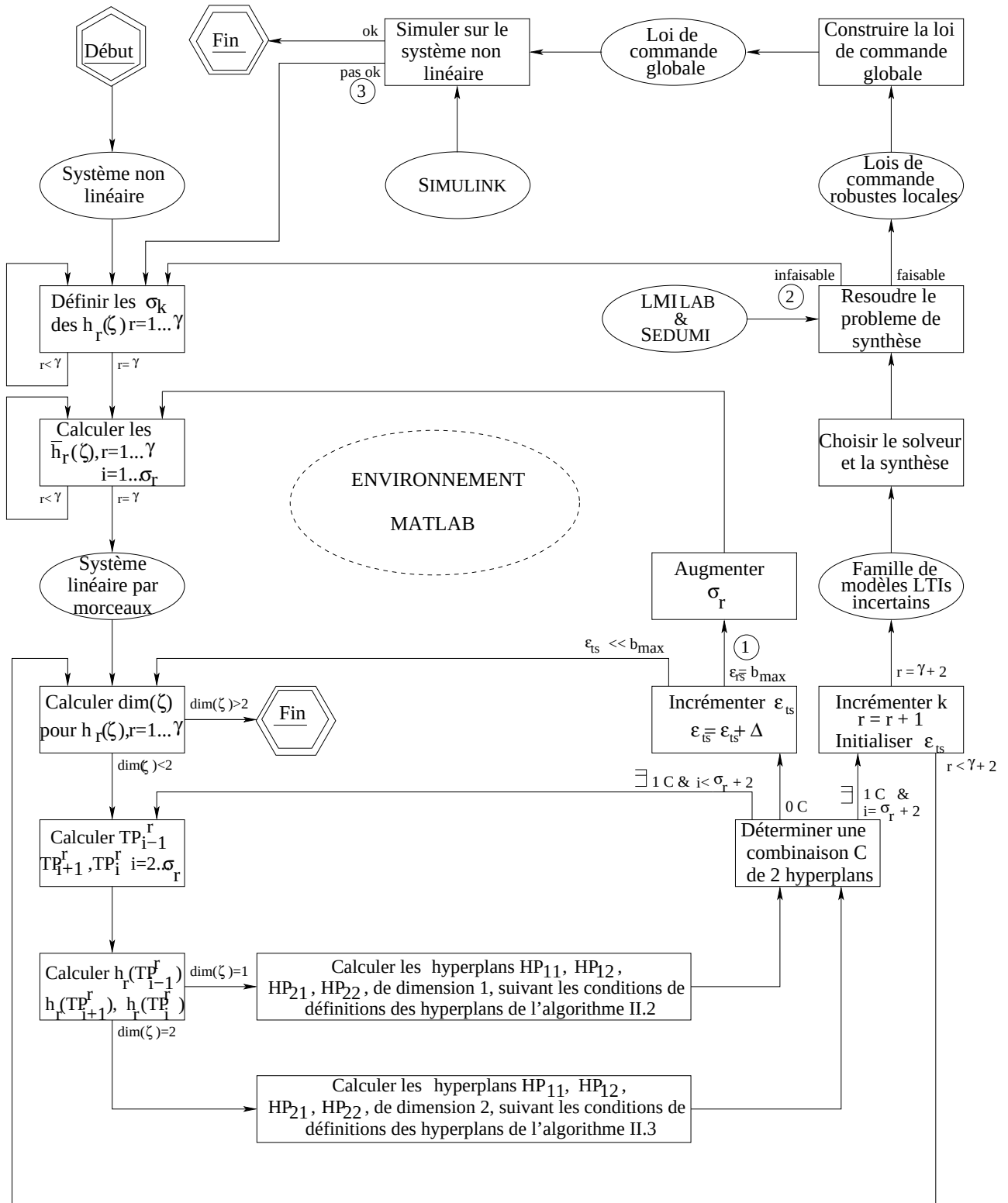


FIG. II.8 – Approche CPWL de systèmes non linéaires.

Chapitre III

Synthèse de lois de commande robustes séquencées

Dans ce chapitre, nous abordons la commande des systèmes LTI incertains, et plus particulièrement la commande des systèmes appartenant à la famille des modèles obtenus lors de la deuxième étape de l'algorithme CPWL [64]. Chaque modèle LTI incertain de la famille sera bouclé par un correcteur de type retour d'état ou sortie dynamique, déterminé à partir de la notion de stabilisabilité quadratique. Par conséquent, nous rechercherons une séquence de correcteurs qui stabilisent quadratiquement et respectivement chaque modèle LTI incertain. Afin d'obtenir des performances satisfaisantes seront définis des problèmes d'optimisation qui pourront s'exprimer à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) ou bilinéaires (BMIs), la résolution de ces dernières se fera à partir d'un algorithme par décomposition croisée. Outre le choix de la synthèse, nous nous sommes intéressés au choix des solveurs. Enfin, nous avons développé un prototype logiciel pour appliquer l'approche CPWL de manière systématique pour des systèmes non linéaires avec des non linéarités à un ou deux arguments. Deux exemples clôtureront ce chapitre afin de montrer le fonctionnement et les capacités de cette première version du logiciel appelé CAPILARS 1.01 v. Beta [63].

“ Face à la roche, le ruisseau l'emporte toujours, non pas par la force mais par la persévérance.”

[H. Jackson Brown]

III.1 Introduction

Dans le chapitre II, la famille de modèles linéaires incertains polytopiques a été définie comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_i(x(t) - x_{ei}) + B_1 w + B_{2i}(u(t) - u_{ei}) \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_{2i}(x(t) - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}', \quad \forall j = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad \forall k = 1, \dots, \mathcal{M} \\ x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n \quad u = [u_1 \ u_2 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

tels que

$$A_i \in \mathcal{D}_{A_i} : = \left\{ A_i : A_i = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j A_{ij}, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\} \quad (\text{III.2})$$

et

$$B_{2i} \in \mathcal{D}_{B_{2i}} : = \left\{ B_{2i} : B_{2i} = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k B_{2ik}, \mu_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k = 1 \right\} \quad (\text{III.3})$$

où x , u , w sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de perturbation et y est le vecteur des sorties mesurées, avec les dimensions appropriées. Nous notons les points d'équilibre par le couple (x_{ei}, u_{ei}) avec $\forall i = 1, \dots, \mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}'$ défini au chapitre II. Le nombre de modèles est exprimé par l'indice i , le nombre de sommets de chaque matrice dynamique par l'indice j et enfin le nombre de sommets de chaque matrice de commande par l'indice k . Pour éviter la surcharge au niveau des indices, nous nous contenterons de spécifier les indices des incertitudes polytopiques correspondant aux matrices dynamique et de commande. Les points d'équilibre intermédiaires seront volontairement "oubliés" mais en pensant que chaque paire de matrices dynamique et de commande (A_i, B_{2i}) d'un modèle est associée à un point d'équilibre intermédiaire. Chaque modèle LTI incertain s'écrira par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B_1 w + B_2 \tilde{u}(t) \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \\ y(t) = C_2 \tilde{x}(t) \\ \forall j = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad \forall k = 1, \dots, \mathcal{M} \\ \tilde{x}(t) = x(t) - x_{ei}, \quad \tilde{u}(t) = u(t) - u_{ei}, \quad \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}', \\ \tilde{x} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n]^T \in \mathbb{R}^n \quad \tilde{u} = [\tilde{u}_1 \ \tilde{u}_2 \dots \tilde{u}_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

tels que

$$A \in \mathcal{D}_A : = \left\{ A : A = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j A_j, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\} \quad (\text{III.5})$$

et

$$B_2 \in \mathcal{D}_{B_2} : = \left\{ B_2 : B_2 = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k B_{2k}, \mu_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \mu_k = 1 \right\} \quad (\text{III.6})$$

Un modèle plus complet peut être défini en incorporant aux équations III.4 la relation avec les sorties contrôlées z

$$z(t) = C_1 \tilde{x}(t) + D_{12} \tilde{u}(t) \quad (\text{III.7})$$

et la relation sur les sorties mesurées

$$y(t) = C_2 \tilde{x}(t) + D_{21} w. \quad (\text{III.8})$$

Dans ce chapitre nous allons traiter du problème de commande robuste de systèmes incertains. L'approche présentée s'appuie sur la notion de stabilisabilité quadratique [5], où une seule fonction de Lyapunov (par modèle) est utilisée pour tester la stabilité de chaque système LTI incertain sur tout leur domaine respectif des incertitudes. La méthode proposée s'appuie sur les travaux de [43], utilisant la paramétrisation proposée par [86] mais utilisée pour une famille de modèles LTI. L'intérêt de la démarche est la synthèse d'une séquence de compensateurs uniques pour chaque modèle LTI assurant respectivement la stabilité et les performances de chaque système sur leur domaine des incertitudes.

Nous présenterons dans un premier temps quelques rappels sur la commande par retour d'état, ce qui nous permettra d'introduire par la suite la commande par retour de sortie dynamique, associée à l'optimisation de critères de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, ainsi qu'à la possibilité d'assurer le placement des pôles du système. Enfin, nous présenterons un prototype logiciel représentant le support "software" de l'approche CPWL développée dans ce mémoire. Ce support, appelé CAPILARS 1.01 v. Beta, se décompose suivant les étapes de l'algorithme proposé dans le chapitre II et est assisté d'une interface graphique développée dans l'environnement de MATLAB.

III.2 Commande par retour d'état

Depuis 1960 avec l'introduction de la représentation d'état par Kalman [56] et des notions de commandabilité et d'observabilité, de nombreux chercheurs [81, 80, 98] se sont intéressés à la commande des systèmes par retour d'état. Ce paragraphe présente des résultats de commande par retour d'état par synthèse de type Lyapunov et en tenant compte de critères de performances ($\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ et placement de pôles) pour des systèmes certains puis pour une famille de modèles LTI incertains définis par (III.4) et (III.5)-(III.6).

III.2.1 Stabilisabilité

Système LTI certain: CNS de stabilisabilité

On considère un système linéaire invariant certain décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_1 w + B_2 \tilde{u} \\ z = C_1 \tilde{x} + D_{12} \tilde{u} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

où $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^l$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de perturbation et $z \in \mathbb{R}^p$ est la sortie commandée. Le modèle du système en boucle fermée, avec $\tilde{u} = K\tilde{x}$, où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A + B_2 K)\tilde{x} + B_1 w \\ z = (C_1 + D_{12} K)\tilde{x} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Théorème III.1 : *Le système invariant (III.9) est stabilisable asymptotiquement en boucle fermée par $\tilde{u} = K\tilde{x}$ si et seulement si, il existe une matrice $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que :*

$$AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T < 0 \quad (\text{III.11})$$

un gain de retour d'état est alors donné par $K = RS^{-1}$.

□

Incertitudes polytopiques: CNS de stabilisabilité quadratique

Considérons la famille de modèles LTI incertains (III.4) et (III.5)-(III.6). Nous nous plaçons ici dans le cas de la stabilité quadratique, comme définie au chapitre I, où une seule fonction de Lyapunov est utilisée pour garantir la stabilité de chaque modèle LTI sur tout leur domaine respectif des incertitudes.

Théorème III.2 : *[6] Le système linéaire incertain défini par (III.4) et (III.5)-(III.6) est quadratiquement stabilisable par retour d'état $\tilde{u} = K\tilde{x}$ si et seulement si, il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ propres à chaque modèle, telles que :*

$$A_j S + S A_j^T + B_{2k} R + R^T B_{2k}^T < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \mathcal{M} \quad (\text{III.12})$$

et $K = RS^{-1}$ est une matrice de retour d'état.

□

III.2.2 Synthèse $\mathcal{H}_2$

Retour d'état et performance $\mathcal{H}_2$: Système LTI certain

On cherche un retour d'état statique stabilisant et garantissant $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu$ pour le système (III.9).

Théorème III.3 : *Le système (III.9) est stabilisable par retour d'état et $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu$ si et seulement si, il existe deux matrices symétriques définies positives $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et*

une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, solution des inégalités matricielles suivantes:

$$\text{Trace}[W] \leq \mu \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{pmatrix} S & SC_1^T + R^T D_{12}^T \\ C_1 S + D_{12} R & W \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{pmatrix} AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T & B_1 \\ B_1^T & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.15})$$

un gain de retour d'état étant défini par $K = RS^{-1}$.

□

Preuve : Dans le cas des systèmes certains, nous considérons le problème de la détermination d'un retour d'état stabilisant garantissant la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert T_{zw} inférieure à une certaine valeur μ .

$$T_{zw} = (C_1 + D_{12}K)(s\mathbb{I} - A - B_2K)^{-1}B_1$$

On sait que la norme $\mathcal{H}_2$ peut s'exprimer en fonction du grammien de commandabilité, c'est à dire pour le système en boucle fermée (III.10) :

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \text{trace}[C_\kappa \mathcal{L}_c C_\kappa^T] \quad \text{où} \quad C_\kappa = C_1 + D_{12}K \quad (\text{III.16})$$

avec :

$$A_\kappa \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_c A_\kappa^T + B_1 B_1^T = 0 \quad \text{où} \quad A_\kappa = A + B_2 K \quad (\text{III.17})$$

Finalement [42], le problème peut s'écrire, avec $S \geq \mathcal{L}_c$:

$$\text{trace}[C_\kappa S C_\kappa^T] \leq \text{trace}[W] \leq \mu \quad \text{où} \quad W = W^T \geq 0$$

sous

$$A_\kappa S + S A_\kappa^T + B_1 B_1^T \leq 0$$

qui donne:

$$(C_1 + D_{12}K) \mathcal{L}_c (C_1 + D_{12}K)^T \leq W$$

sous

$$(A + B_2 K)S + S(A + B_2 K)^T + B_1 B_1^T \leq 0$$

en utilisant le complément de Schur et en posant $R = KS$, on obtient les inégalités matricielles linéaires (III.14) et (III.15).

■

Retour d'état et performance $\mathcal{H}_2$: incertitudes polytopiques

Soit la famille de modèles LTI incertains définie par (III.4) et (III.5)-(III.6).

Théorème III.4 : *Chaque système (III.4) est stabilisable par retour d'état et $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu$ si, il existe deux matrices symétriques définies positives $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, propres à chaque modèle, solution des inégalités matricielles suivantes:*

$$\text{Trace}[W] \leq \mu \quad (\text{III.18})$$

$$\begin{pmatrix} S & SC_1^T + R^T D_{12}^T \\ C_1 S + D_{12} R & W \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{pmatrix} A_j S + S A_j^T + B_{2k} R + R^T B_{2k}^T & B_1 \\ B_1^T & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \mathcal{M}$$

un gain de retour d'état étant défini par $K = RS^{-1}$.

□

III.2.3 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$

Après avoir traité du problème de la commande $\mathcal{H}_2$ par retour d'état, nous nous intéressons ici à celui de la commande $\mathcal{H}_\infty$.

Retour d'état et performance $\mathcal{H}_\infty$: Système LTI certain

Théorème III.5 : *Le système (III.9) est stabilisable par retour d'état et sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est inférieure à γ^2 si et seulement si, il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que:*

$$\begin{pmatrix} SA^T + AS + R^T B_2^T + B_2 R & B_1 & SC_1^T + R^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma \mathbb{I} & \mathcal{O} \\ C_1 S + D_{12} R & \mathcal{O} & -\gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.21})$$

un gain stabilisant étant alors donné par $K = RS^{-1}$.

□

Retour d'état et performance $\mathcal{H}_\infty$: incertitudes polytopiques

De la même manière que pour la synthèse $\mathcal{H}_2$, appliquons le théorème précédent à la famille de modèles LTI incertains définie par (III.4) et (III.5)-(III.6).

Théorème III.6 : *Chaque système (III.4) est stabilisable par retour d'état et sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est inférieure à γ^2 si, il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ propres à chaque modèle, telles que :*

$$\begin{pmatrix} SA_j^T + A_j S + R^T B_{2k}^T + B_{2k} R & B_1 & SC_1^T + R^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma \mathbb{I} & \mathcal{O} \\ C_1 S + D_{12} R & \mathcal{O} & -\gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.22})$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \mathcal{M}$$

un gain stabilisant étant alors donné par $K = RS^{-1}$.

□

III.2.4 Stabilisabilité et placement de pôles

Retour d'état et placement de pôles: Système LTI certain

Le système (III.9) est certain et l'on souhaite placer les pôles du système en boucle fermée dans la région convexe suivante $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ (figure II.1).

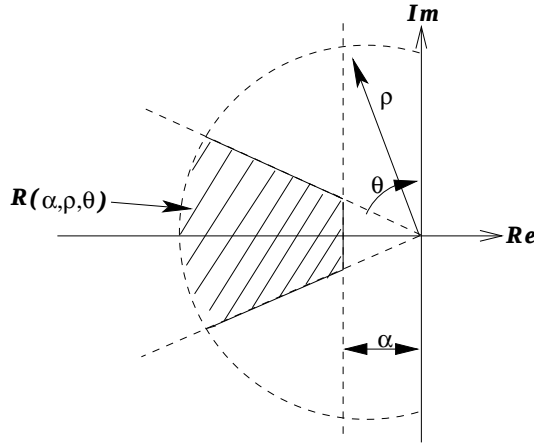


FIG. III.1 – Région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$

Théorème III.7 : *Il existe pour le système (III.9) un retour d'état tel que les pôles du système en boucle fermée sont contenus dans la région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ si et seulement si, il existe une matrice $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que :*

$$AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T + 2\alpha S < 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho S & SA^T + R^T B_2^T \\ AS + B_2 R & -\rho S \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.24})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T) & \sin\theta(AS - SA^T + B_2 R - R^T B_2^T) \\ \sin\theta(SA^T - AS + R^T B_2^T - B_2 R) & \cos\theta(AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.25})$$

un gain de retour d'état est alors donné par $K = RS^{-1}$.

□

Preuve : D'après [15] le système (III.9) bouclé par $\tilde{u} = K\tilde{x}$ est stable et ses pôles sont situés dans la région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive telle que :

$$P(A + B_2 K) + (A + B_2 K)^T P + 2\alpha P < 0 \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho P & (A + B_2 K)^T P \\ P(A + B_2 K) & -\rho P \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(P(A + B_2 K) + (A + B_2 K)^T P) & \sin\theta(P(A + B_2 K) - (A + B_2 K)^T P) \\ \sin\theta((A + B_2 K)^T P - P(A + B_2 K)) & \cos\theta(P(A + B_2 K) + (A + B_2 K)^T P) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.28})$$

en pré et post multipliant la première inégalité par P^{-1} et les deux autres par $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1})$, nous obtenons :

$$AP^{-1} + B_2 KP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1}K^T B_2^T + 2\alpha P^{-1} < 0 \quad (\text{III.29})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho P^{-1} & P^{-1}A^T + P^{-1}K B_2^T \\ AP^{-1} + B_2 KP^{-1} & -\rho P^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.30})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(AP^{-1} + B_2 KP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1}K^T B_2^T) & \sin\theta(AP^{-1} + B_2 KP^{-1} - P^{-1}A^T - P^{-1}K^T B_2^T) \\ \sin\theta(-AP^{-1} - B_2 KP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1}K^T B_2^T) & \cos\theta(AP^{-1} + B_2 KP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1}K^T B_2^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.31})$$

On pose alors $S = P^{-1}$ et $R = KS$, cela donne ainsi les inégalités linéaires (III.23), (III.24) et (III.25).

■

Retour d'état et placement de pôles: incertitudes polytopiques

Dans le cas des systèmes incertains, on ne peut pas parler explicitement de placement de pôles, mais on souhaite en garantir le maintien dans une région donnée du plan complexe.

Théorème III.8 : Il existe pour le système incertain (III.4) un retour d'état tel que les pôles du système en boucle fermée sont contenus dans la région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ si, il existe une matrice $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, propres à chaque modèle, telles que:

$$A_j S + S A_j^T + B_{2k} R + R^T B_{2k}^T + 2\alpha S < 0 \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho S & S A_j^T + R^T B_{2k}^T \\ A_j S + B_{2k} R & -\rho S \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(A_j S + S A_j^T + B_{2k} R + R^T B_{2k}^T) & \sin\theta(A_j S - S A_j^T + B_{2k} R - R^T B_{2k}^T) \\ \sin\theta(S A_j^T - A_j S + R^T B_{2k}^T - B_{2k} R) & \cos\theta(A_j S + S A_j^T + B_{2k} R + R^T B_{2k}^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.34})$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \mathcal{M}$$

Le gain de retour d'état est alors donné par $K = RS^{-1}$.

□

III.3 Commande par retour de sortie dynamique

Le cas où, seule est disponible pour l'élaboration d'une loi de commande une sortie mesurée, est abordé dans ce paragraphe, où il est rappelé quelques résultats concernant la synthèse de compensateurs dynamiques par résolution d'inégalités matricielles linéaires. Ces résultats sont étendus au cas de l'analyse et de la synthèse de compensateurs robustes, qui garantissent la stabilité de chacun des systèmes LTI incertains en boucle fermée sur tout leur domaine respectif des incertitudes.

Considérons maintenant la relation sur les sorties mesurées (III.8) et le système (III.9). Nous nous proposons de déterminer un compensateur strictement propre ayant pour représentation d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

Le système dynamique global s'exprime alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = A_e X + B_e w \\ z = C_e X \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

avec

$$A_e := \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \quad B_e := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}, \quad C_e := [C_1 \quad D_{12} C_c]$$

III.3.1 Stabilisabilité

Système LTI certain: CNS de stabilisabilité

Théorème III.9 : [43, 86] *Le système défini par (III.9) et (III.8) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (III.35) si et seulement si, il existe $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices symétriques définies positives et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solution des inégalités matricielles:*

$$\begin{bmatrix} H(Y, L) & Z + M \\ Z^T + M^T & G(X, F) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.37})$$

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{III.38})$$

avec

$$\begin{aligned} H(Y, L) &= AY + YA^T + B_2L + L^TB_2^T & G(X, F) &= A^TX + XA + FC_2 + C_2^TF^T \\ Z &= A + YA^TX + L^TB_2^TX + YC_2^TF^T \end{aligned}$$

□

Preuve : [43] D'après le théorème de Lyapunov, le système en boucle fermée (III.36) est asymptotiquement stable si et seulement si, il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ symétrique définie positive telle que :

$$A_e^TP + PA_e < 0 \quad (\text{III.39})$$

P et P^{-1} sont partitionnées en quatre blocs de dimension $n \times n$ tel que

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix}$$

$Y = (X - U\hat{X}U^T)^{-1} > X^{-1}$ ce qui est traduit par l'inégalité matricielle (III.38). On pré et post multiplie (III.39), respectivement, par T_e^T et T_e :

$$T_e = \begin{bmatrix} Y & \mathbb{I} \\ V^T & \mathcal{O} \end{bmatrix}$$

on obtient alors l'inégalité (III.37), après changement de variables :

$$L = C_cV^T, F = UB_c, M = VA_c^TU^T$$

■

L'utilisation de ce résultat pour la synthèse d'un compensateur ne peut directement être effectuée par utilisation de méthodes LMI, l'inégalité matricielle (III.37) n'étant pas linéaire, mais bilinéaire, par rapport aux variables d'optimisation. Cependant sans contrainte supplémentaire en effectuant le changement de variable suivant :

$$\Gamma = Z + M$$

et en définissant comme inconnues X, Y, L, F et Γ , les relations deviennent linéaires et les techniques LMIs peuvent être utilisées pour la résolution.

A partir de la connaissance des matrices X, Y, L, F et M , il est possible de reconstruire un

compensateur dynamique garantissant la stabilité du système en boucle fermée. La décomposition de la matrice de Lyapunov en quatre blocs de dimension $n \times n$, nous a conduit à effectuer les changements de variables suivants :

$$L = C_c V^T, \quad F = U B_c, \quad M = V A_c^T U^T$$

ce qui implique la connaissance de U et V pour la reconstruction du compensateur dynamique. Noter que la liberté de choix du couple (U, V) n'est pas totale puisque $XY + UV^T = \mathbb{I}$.

La matrice de transfert du compensateur s'écrit :

$$T_c(s) = C_c(s\mathbb{I} - A_c)^{-1}B_c = L(V^T)^{-1}(s\mathbb{I} - U^{-1}M^T(V^T)^{-1})^{-1}U^{-1}F = L(sUV^T - M^T)^{-1}F$$

d'après la définition de P , $XY + UV^T = \mathbb{I}$ donc ;

$$T_c(s) = L(s(\mathbb{I} - XY) - M^T)^{-1}F$$

cela donne donc la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} (\mathbb{I} - XY)\dot{x}_c = M^T x_c + Fy \\ u = Lx_c \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

d'où $A_c : = (\mathbb{I} - XY)^{-1}M^T$, $B_c : = (\mathbb{I} - XY)^{-1}F$ et $C_c : = L$.

Incertitudes polytopiques: CS de stabilisabilité quadratique

On considère maintenant la famille de modèles LTI incertains définies par (III.4) et (III.5)-(III.6) mais modifiées par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B_1 w + B_2 \tilde{u}(t) & \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \\ y(t) = C_2 \tilde{x}(t) \\ \forall j = 1, \dots, \mathcal{N} \\ \tilde{x}(t) = x(t) - x_{ei}, \quad \tilde{u}(t) = u(t) - u_{ei}, \quad \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}', \\ \tilde{x} = [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n]^T \in \mathcal{R}^n \quad \tilde{u} = [\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \dots \tilde{u}_m]^T \in \mathcal{R}^m \\ y \in \mathcal{R}^q \quad w \in \mathcal{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

tels que

$$A \in \mathcal{D}_A : = \left\{ A : A = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j A_j, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\} \quad (\text{III.42})$$

et

$$B_2 \in \mathcal{D}_{B_2} : = \left\{ B_2 : B_2 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j B_{2j}, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\} \quad (\text{III.43})$$

Nous simplifions les écritures au niveau des incertitudes en considérant le même paramètre incertain δ_j avec $\forall j = 1, \dots, \mathcal{N}$ pour les matrices dynamique et de commande de chaque modèle LTI incertain.

Théorème III.10 : *S'il existe $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices symétriques définies positives et des matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, propres à chaque modèle défini par (III.41) et (III.42)-(III.43), solutions des inégalités matricielles suivantes:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{array} \right) > 0 \\ \left(\begin{array}{cc} H_j & Z_j + M \\ Z_j^T + M^T & G_j \end{array} \right) < 0 \\ \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \end{array} \right. \quad (\text{III.44})$$

avec

$$\begin{aligned} H_j &= A_j Y + Y A_j^T + B_{2j} L + L^T B_{2j}^T & G_j &= A_j^T X + X A_j + F C_2 + C_2^T F^T \\ Z_j &= A_j + Y A_j^T X + L^T B_{2j}^T X + Y C_2^T F^T \end{aligned}$$

alors chaque système incertain décrit par (III.41) et (III.42)-(III.43) est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique de type (III.35).

□

Preuve : *Le système (III.36) est quadratiquement stabilisable s'il existe une matrice symétrique définie positive P telle que:*

$$A_{ej}^T P + P A_{ej} < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$$

et en reprenant le même type de développement que celui conduit lors de la preuve du théorème III.9, on obtient les inégalités matricielles (III.44).

■

III.3.2 Synthèse $\mathcal{H}_2$

Retour de sortie dynamique et performance $\mathcal{H}_2$: Système LTI certain

Dans cette partie, nous traitons le problème du retour de sortie dynamique $\mathcal{H}_2$, pour des systèmes certains. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante de stabilité et de performance [43].

Théorème III.11 : *Le système décrit par (III.9)-(III.8) est stabilisable par retour de sortie dynamique défini par (III.35) et $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu$ avec $\mu = \text{trace}[W]$ si et seulement si, il existe*

une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ et $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que :

$$\begin{pmatrix} Y & \mathbf{I} & B_1 \\ \mathbf{I} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & W \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{III.45})$$

$$\begin{pmatrix} H(Y, L) & Z + M & YC_1^T + L^T D_{12}^T \\ Z^T + M^T & G(X, F) & C_1^T \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.46})$$

où H , G , Z et M sont définis au théorème III.9.

□

Preuve : La norme $\mathcal{H}_2$ du transfert T_{zw} , pour le système en boucle fermée (III.36) est définie par :

$$\|T_{zw}(s)\|_2^2 = \text{trace}[B_e^T P B_e]$$

avec $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ solution de $A_e^T P + P A_e + C_e^T C_e = 0$.

Ainsi

$$\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \text{trace}[W]$$

où P et W vérifient les inégalités matricielles suivantes:

$$\begin{pmatrix} P & P B_e \\ B_e^T P & W \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{III.47})$$

$$\begin{pmatrix} A_e^T P + P A_e & C_e^T \\ C_e & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.48})$$

En pré et post multipliant (III.47) et (III.48) par T_e^T et T_e : $= \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I} & \mathcal{O} \\ v^T & \mathcal{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ respectivement et en utilisant les changements de variables du théorème III.9, on obtient les inégalités matricielles (III.45) et (III.46).

■

Retour de sortie dynamique et performance $\mathcal{H}_2$: incertitudes polytopiques

Ce paragraphe traite du problème de la commande de systèmes incertains définis par (III.41) et (III.42)-(III.43), dont les incertitudes sont de type polytopique convexe.

Théorème III.12 : S'il existe deux matrices symétriques définies positives X , $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$

et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, propres à chaque modèle LTI incertain, solutions des inégalités matricielles bilinéaires suivantes:

$$\begin{pmatrix} Y & \mathbb{I} & B_1 \\ \mathbb{I} & X & X B_1 + F D_{21} \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & W \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{III.49})$$

$$\begin{pmatrix} H_j & Z_j + M & Y C_1^T + L^T D_{12}^T \\ Z_j^T + M^T & G_j & C_1^T \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.50})$$

$\forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$

où

$$\begin{aligned} H_j &= A_j Y + Y A_j^T + B_{2j} L + L^T B_{2j}^T \\ G_j &= A_j^T X + X A_j + F C_2 + C_2^T F^T \\ Z_j &= A_j + Y A_j^T X + L^T B_{2j}^T X + Y C_2^T F^T \end{aligned}$$

alors chaque système incertain, défini par (III.41) et (III.42)-(III.43), est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique (III.35) et $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \text{trace}[W]$, $T_{zw}(s)$ étant le transfert, en boucle fermée, entre z et w .

□

Les inégalités matricielles obtenues ne sont pas linéaires par rapport aux inconnues, mais bilinéaires. Cela ne pose pas de problème dans le cas certain où par un simple changement de variable on obtient des inégalités de type LMIs. Pour le cas des systèmes LTI incertains, ce changement de variable ne peut plus s'opérer. Pour cela, nous allons utiliser un algorithme par décomposition croisée [43, 20] pour chaque modèle LTI et l'appliquer à la commande à coût garanti $\mathcal{H}_2$ pour cette famille de modèles LTI incertains.

Coût garanti $\mathcal{H}_2$: incertitudes polytopiques [43]

Les systèmes sont définis par (III.41) et (III.42)-(III.43). La commande à coût garanti $\mathcal{H}_2$ consiste, à déterminer un retour de sortie dynamique, minimisant la borne supérieure ($\text{Trace}[W]$) de la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert $T_{zw}(s)$ que nous rechercherons pour chaque modèle

LTI incertain. La solution consiste alors à résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X,Y,L,F,M} \text{trace}[W] \\ \text{sous} \\ \left(\begin{array}{ccc} Y & \mathbb{I} & B_1 \\ \mathbb{I} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & W \end{array} \right) > 0 \\ \\ \left(\begin{array}{ccc} H_j & Z_j + M & YC_1^T + L^T D_{12}^T \\ Z_j^T + M^T & G_j & C_1^T \\ C_1 Y + D_{12} & C_1 & -\mathbb{I} \end{array} \right) < 0 \\ \\ \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \end{array} \right. \quad (\text{III.51})$$

Pour résoudre le problème du coût garanti, nous allons utiliser l'algorithme par décomposition croisée développé dans [20] dont nous donnons ci-après une idée rapide: **Algorithme III.1**

Premier problème: Supposons qu'à l'itération κ les matrices X_κ , Y_κ , L_κ , F_κ et M_κ satisfassent les inégalités (III.51) et considérons le problème d'optimisation convexe suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{Q_1, X, F, S_1, W} \text{trace}[W] \\ \text{sous} \\ \left(\begin{array}{ccc} Q_1 & Q_1 & Q_1 B_1 \\ Q_1 & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1^T Q_1 & B_1^T X + D_{21}^T F^T & W \end{array} \right) > 0 \\ \\ \left(\begin{array}{ccc} A_{j\kappa}^T Q_1 + Q_1 A_{j\kappa} & Q_1 A_j + A_{j\kappa}^T X + C_2^T F^T + S_1 & C_\kappa^T \\ A_j^T Q_1 + X A_{j\kappa} + F C_{2j} + S_1^T & G_j & C_1^T \\ C_\kappa & C_1 & -\mathbb{I} \end{array} \right) < 0 \\ \\ \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \end{array} \right. \quad (\text{III.52})$$

où

$$A_{j\kappa} = A_j + B_{2j} L_\kappa Y_\kappa^{-1} \quad C_\kappa = C_1 + D_{12} L_\kappa Y_\kappa^{-1}$$

Les inégalités matricielles linéaires (III.52) sont obtenues par pré et post multiplication des inégalités (III.51) par $\text{diag}[Y^{-1}, \mathbb{I}, \mathbb{I}]$ et par le changement de variable $Q_1 = Y^{-1}$ et $S_1 = Y^{-1} M$. La résolution du problème convexe (III.52) conduit à une solution telle que :

$$\text{trace}[W] \leq \text{trace}[W_\kappa] \quad (\text{décroissance du critère})$$

les matrices $Y = Q_1^{-1}$, L_κ , X , F , $M = Q_1^{-1} S_1$, W étant faisables pour les inégalités (III.51) et pouvant servir pour initialiser le problème dual suivant.

Second problème: Supposons, comme précédemment, que X_κ , Y_κ , L_κ , F_κ et M_κ sont faisables pour les inégalités (III.51), le problème dual s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{Q_2, Y, L, S_2, W} \text{trace}[W] \\ \text{sous} \\ \left(\begin{array}{ccc} Y & Q_2 & B_1 \\ Q_2 & Q_2 & B_\kappa \\ B_1^T & B_\kappa^T & W \end{array} \right) > 0 \\ \\ \left(\begin{array}{ccc} H_j & A_j Q_2 + Y A_{j\kappa}^T + L^T B_{2j}^T + S_2 & Y C_1^T + L^T D_{12}^T \\ Q_2 A_j^T + A_{j\kappa} Y + B_{2j} L + S_2^T & A_{j\kappa} Q_2 + Q_2 A_{j\kappa}^T & Q_2 C_1^T \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 Q_2 & -\mathbb{I} \end{array} \right) < 0 \\ \\ \forall j = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (\text{III.53})$$

où

$$A_{j\kappa} = A_j + X_\kappa^{-1} F_\kappa C_{2j} \quad B_\kappa = B_1 + X_\kappa^{-1} F_\kappa D_{21}$$

Les inégalités matricielles linéaires (III.53) sont obtenues par pré et post multiplication des inégalités (III.51) par $\text{diag}[\mathbb{I}, X^{-1}, \mathbb{I}]$ et par le changement de variable $Q_2 = X^{-1}$ et $S_2 = M X^{-1}$. Là encore, la résolution du problème convexe (III.52) conduit à une solution telle que :

$$\text{trace}[W] \leq \text{trace}[W_\kappa]$$

Définissons alors l'algorithme suivant :

- **Étape 1 :** A l'itération $\kappa = 0$ soit $(Y_0, L_0, X_0, F_0, M_0)$ solution admissible.
- **Étape 2 :** Avec les matrices Y_κ et L_κ , résolution du problème (III.52) et détermination de la valeur courante du coût $\alpha_\kappa = \text{trace}[W_\kappa]$. La solution optimale donne les matrices X_κ et F_κ qui vont être utilisées à l'étape 3.
- **Étape 3 :** Avec les matrices X_κ et F_κ , résolution du problème (III.53) et détermination de la valeur courante du coût $\beta_\kappa = \text{trace}[W_\kappa]$. La solution optimale donne les matrices Y_κ et L_κ qui vont être utilisées à l'étape 2.
- **Étape 4 :** Si $\alpha_\kappa - \beta_\kappa < \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit alors Y_κ , L_κ , X_κ , F_κ et M_κ sont les solutions de notre problème, STOP. Sinon $\kappa \leftarrow \kappa + 1$ et retour à l'étape 2.

★

Se pose généralement le problème de l'initialisation à $\kappa = 0$. Il peut être résolu à partir du problème d'optimisation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X,Y,L,F,M} \lambda \\ \text{sous} \\ \left(\begin{array}{cc} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{array} \right) > 0 \\ \\ \left(\begin{array}{cc} H - \lambda Y & Z + M \\ Z^T + M^T & G - \lambda X \end{array} \right) < 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.54})$$

Ce problème peut être résolu par un algorithme de décomposition croisée identique au précédent. L'algorithme est obtenu en appliquant aux inégalités (III.54) les transformations appliquées aux inégalités (III.51). L'algorithme de décomposition croisée appliqué au problème (III.54) génère une séquence telle que :

$$\lambda_{\kappa+1} \leq \lambda_{\kappa} \quad \forall \kappa = 0, 1, \dots$$

La recherche est terminée lorsque $\lambda_{\kappa} < 0$, on a alors une solution faisable pour initialiser le problème de minimisation de la norme $\mathcal{H}_2$.

Remarque III.1 : *Cet algorithme, bien qu'efficace, ne nous permet pas de garantir, toujours, la convergence du problème d'optimisation, ni même l'existence d'une solution admissible.*

▲

III.3.3 Synthèse $\mathcal{H}_{\infty}$

Retour de sortie dynamique et performance $\mathcal{H}_{\infty}$: Système LTI certain

Dans ce paragraphe nous traitons le problème de commande, pour des systèmes certains par retour de sortie dynamique, garantissant certaines performances sur la norme $\mathcal{H}_{\infty}$ du transfert T_{zw} .

Théorème III.13 : *Le système décrit par (III.9) et (III.8) est stabilisable par retour de sortie dynamique, défini par (III.35), et $\|T_{zw}(s)\|_{\infty} < \gamma$ si et seulement si, il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles suivantes:*

$$\left(\begin{array}{cc} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{array} \right) > 0 \quad (\text{III.55})$$

$$\left(\begin{array}{cccc} H(Y, L) & Z + M & B_1 & L^T D_{12}^T + Y C_1^T \\ Z^T + M^T & G(X, F) & X B_1 + F D_{21} & C_1^T \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & -\gamma \mathbb{I} & \mathcal{O} \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 & \mathcal{O} & -\gamma \mathbb{I} \end{array} \right) < 0 \quad (\text{III.56})$$

avec

$$\begin{aligned} H(Y, L) &= AY + YA^T + B_2L + L^TB_2^T; & G(X, F) &= A^TX + XA + FC_2 + C_2^TF^T \\ Z &= A + YA^TX + L^TB_2^TX + YC_2^TF^T \end{aligned}$$

□

Preuve : d'après le "lemme borné réel", le système décrit par (III.36) est stable et

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$$

si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ symétrique définie positive telle que :

$$\begin{pmatrix} A_e^TP + PA_e & PB_e & C_e^T \\ B_e^TP & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ C_e & \mathbf{O} & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.57})$$

P et P^{-1} sont alors partitionnées en quatre blocs de dimension $n \times n$ telles que :

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix}$$

où $Y = (X - U\hat{X}^{-1}U^T)^{-1} > X^{-1}$ ce qui donne l'inégalité matricielle (III.55). On pré et post multiplie (III.57) par T_e' et $T_e = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} Y & \mathbf{I} \\ V^T & \mathbf{O} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\right)$ respectivement, on obtient alors l'inégalité matricielle (III.56). ■

L'utilisation de solveurs LMIs est bien sûr possible après changement de variable $\Gamma = Z + M$.

Retour de sortie dynamique et performance $\mathcal{H}_\infty$: incertitudes polytopiques

Cette partie présente le problème de réalisation de la commande dynamique par retour de sortie robuste, et contrainte $\mathcal{H}_\infty$, lorsque chaque système est décrit par (III.41) et (III.42)-(III.43).

Théorème III.14 : S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, propres à chaque modèle LTI incertain, solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} Y & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & X \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{III.58})$$

$$\begin{pmatrix} H_j & Z_j + M & B_1 & L^T D_{12}^T + Y C_1^T \\ Z_j^T + M^T & G_j & X B_1 + F D_{21} & C_1^T \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & -\gamma \mathbb{I} & \mathcal{O} \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 & \mathcal{O} & -\gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.59})$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$$

avec

$$H_j = A_j Y + Y A_j^T + B_{2j} L + L^T B_{2j}^T; \quad G_j = A_j^T X + X A_j + F C_2 + C_2^T F^T$$

$$Z_j = A_j + Y A_j^T X + L^T B_{2j}^T X + Y C_2^T F^T$$

alors chaque système incertain, décrit par (III.41) et (III.42)-(III.43) est quadratiquement stabilisable par un retour de sortie dynamique (III.35) et $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$.

□

Dans le cas incertain, comme pour la synthèse $\mathcal{H}_2$, les contraintes (III.58) et (III.59) sont des inégalités matricielles bilinéaires, dont la structure particulière est adaptée à une résolution numérique de type décomposition croisée, qui consiste à définir un schéma itératif définissant, par relaxation, des LMIs à résoudre à chaque itération, ce schéma de relaxation gardant un maximum de variables d'optimisation et n'en fixant en fait qu'une seule par relaxation.

Comme pour la commande $\mathcal{H}_2$, où nous nous étions intéressés au coût garanti $\mathcal{H}_2$, il est évidemment possible de traiter du problème de coût garanti $\mathcal{H}_\infty$ pour des systèmes avec incertitudes polytopiques.

Coût garanti $\mathcal{H}_\infty$: incertitudes polytopiques

De la même manière que précédemment, nous allons rappeler l'algorithme par décomposition croisée détaillée dans [20], mais appliqué à une famille de modèles LTI incertains polytopiques.

Algorithme III.2

Premier problème: Supposons qu'à l'itération κ les matrices Y_κ , L_κ , X_κ , F_κ , M_κ satisfassent les inégalités (III.58) et (III.59) et considérons le problème d'optimisation convexe (avec

contraintes LMIs) suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \gamma \\ \text{sous} \\ \left(\begin{array}{cc} Q_1 & Q_1 \\ Q_1 & X \end{array} \right) > 0 \\ \left(\begin{array}{cccccc} A_{j\kappa}^T Q_1 + Q_1 A_{j\kappa} & Q_1 A_j + A_{j\kappa}^T X + C_2^T F^T + S_1 & Q_1 B_1 & C_{\kappa}^T \\ A_j^T Q_1 + X A_{j\kappa} + F C_2 + S_1^T & G_j & X B_1 + F D_{21} & C_1^T \\ B_1^T Q_1 & B_1^T X + D_{21}^T F^T & -\gamma \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ C_{\kappa} & C_1 & \mathbf{0} & -\gamma \mathbb{I} \end{array} \right) < 0 \\ \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \end{array} \right. \quad (\text{III.60})$$

où

$$A_{j\kappa} = A_j + B_{2j} L_{\kappa} Y_{\kappa}^{-1}, \quad C_{\kappa} = C_1 + D_{12} L_{\kappa} Y_{\kappa}^{-1}$$

Les inégalités matricielles linéaires (III.60) sont obtenues, par pré et post multiplication des inégalités (III.58) et (III.59) par $\text{diag}[Y^{-1}, \mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}]$ et par le changement de variable $Q_1 = Y^{-1}$ et $S_1 = Y^{-1} M$. La résolution du problème convexe (III.60) conduit à une solution telle que $\gamma_{\text{opt}} \leq \gamma_{\kappa}$ (décroissance du critère), les matrices $Y = Q_1^{-1}$, L_{κ} , X , F , $M = Q_1^{-1} S_1$ étant faisables pour les inégalités (III.58) et (III.59) et pouvant servir à initialiser le problème dual suivant.

Second problème: Supposons comme précédemment, que X_{κ} , L_{κ} , Y_{κ} , F_{κ} , M_{κ} sont faisables pour (III.58) et (III.59), le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \beta \\ \text{sous} \\ \left(\begin{array}{cc} Y & Q_2 \\ Q_2 & Q_2 \end{array} \right) > 0 \\ \left(\begin{array}{cccccc} H_j & A_j Q_2 + Y A_{j\kappa}^T + L^T B_{2j}^T + S_2 & B_1 & L^T D_{12}^T + Y C_1^T \\ Q_2 A_j^T + A_{j\kappa} Y + B_{2j} L + S_2^T & A_{j\kappa} Q_2 + Q_2 A_{j\kappa}^T & B_{\kappa} & Q_2 C_1^T \\ B_1^T & B_{\kappa}^T & -\beta \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 Q_2 & \mathbf{0} & -\beta \mathbb{I} \end{array} \right) < 0 \\ \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \end{array} \right. \quad (\text{III.61})$$

où

$$A_{j\kappa} = A_j + X_{\kappa}^{-1} F_{\kappa} C_2, \quad B_{\kappa} = B_1 + X_{\kappa}^{-1} F_{\kappa} D_{21}$$

Les LMIs (III.61) sont obtenues par pré et post multiplication des inégalités (III.58) et (III.59) par $\text{diag}[\mathbb{I}, X^{-1}, \mathbb{I}, \mathbb{I}]$ et changement de variable $Q_2 = X^{-1}$ et $S_2 = M X^{-1}$. Comme

précédemment, la résolution du problème convexe (III.61) conduit à une solution faisable telle que

$$\gamma_{opt} \leq \beta_{\kappa+1} \leq \gamma_{\kappa+1} \leq \beta_{\kappa} \leq \gamma_{\kappa}$$

D'où l'algorithme de calcul du retour de sortie dynamique suivant :

- **Étape 1 :** A l'itération $\kappa = 0$ soit $(Y_0, L_0, X_0, F_0, M_0)$ solution admissible.
- **Étape 2 :** Avec les matrices Y_{κ} et L_{κ} , résolution du problème (III.60) et détermination de la valeur courante du coût γ_{κ} . La solution optimale donne les matrices X_{κ} et F_{κ} qui vont être utilisées à l'étape 3.
- **Étape 3 :** Avec les matrices X_{κ} et F_{κ} , résolution du problème (III.61) et détermination de la valeur courante du coût β_{κ} . La solution optimale donne les matrices Y_{κ} et L_{κ} qui vont être utilisées à l'étape 2.
- **Étape 4 :** Si $\gamma_{\kappa} - \beta_{\kappa} < \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit alors $Y_{\kappa}, L_{\kappa}, X_{\kappa}, F_{\kappa}$ et M_{κ} sont les solutions de notre problème, STOP. Sinon $\kappa \leftarrow \kappa + 1$ et retour à l'étape 2.

★

III.3.4 Stabilisabilité et placement de pôles

Retour de sortie dynamique et placement de pôles: Système LTI certain

Comme dans le cas des commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_{\infty}$, nous traitons ici le retour de sortie dynamique avec placement de pôles pour un système certain.

Théorème III.15 : *Le système défini par (III.9) et (III.8) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (III.35) avec les pôles du système en boucle fermée situés dans la région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ si et seulement si, il existe $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices symétriques définies positives et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :*

$$\begin{pmatrix} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{pmatrix} > 0 \quad (III.62)$$

$$\begin{pmatrix} H(Y, L) + 2\alpha Y & Z + M + 2\alpha \mathbb{I} \\ Z^T + M^T + 2\alpha \mathbb{I} & G(X, F) + 2\alpha X \end{pmatrix} < 0 \quad (III.63)$$

$$\begin{pmatrix} -\rho Y & -\rho \mathbb{I} & Y A^T + L^T B_2^T & Z + M - A \\ -\rho \mathbb{I} & -\rho X & A^T & A^T X + C_2^T F^T \\ AY + B_2 L & A & -\rho Y & -\rho \mathbb{I} \\ Z^T + M^T - A^T & X A + F C_2 & -\rho \mathbb{I} & -\rho X \end{pmatrix} < 0 \quad (III.64)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(H(Y, L)) & \cos\theta(Z + M) & \sin\theta(\tilde{H}(Y, L)) & \sin\theta(2A - Z - M) \\ \cos\theta(Z^T + M^T) & \cos\theta(G(X, F)) & \sin\theta(-2A^T + Z^T + M^T) & \sin\theta(\tilde{G}(X, F)) \\ \sin\theta(\tilde{H}^T(Y, L)) & \sin\theta(-2A + Z + M) & \cos\theta(H(Y, L)) & \cos\theta(Z + M) \\ \sin\theta(2A^T - Z^T - M^T) & \sin\theta(\tilde{G}^T(X, F)) & \cos\theta(Z^T + M^T) & \cos\theta(G(X, F)) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.65})$$

avec

$$\begin{aligned} H(Y, L) &= AY + YA^T + B_2L + L^T B_2^T & G(X, F) &= A^T X + XA + FC_2 + C_2^T F^T \\ \tilde{H}(Y, L) &= AY - YA^T + B_2L - L^T B_2^T & \tilde{G}(X, F) &= A^T X - XA - FC_2 + C_2^T F^T \\ Z &= A + YA^T X + L^T B_2^T X + YC_2^T F^T \end{aligned}$$

□

Preuve : D'après [15] le système en boucle fermée (III.36) est asymptotiquement stable avec ses pôles situés dans la région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$ si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ symétrique définie positive telle que :

$$PA_e + A_e^T P + 2\alpha P < 0 \quad (\text{III.66})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho P & A_e^T P \\ PA_e & -\rho P \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.67})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(PA_e + A_e^T P) & \sin\theta(PA_e - A_e^T P) \\ \sin\theta(A_e^T P - PA_e) & \cos\theta(PA_e + A_e^T P) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.68})$$

en posant $P = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix}$ et la matrice $T_e = \begin{bmatrix} Y & \mathbb{I} \\ V^T & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ on pré et post multiplie (III.66) par T_e' et T_e respectivement, (III.67) et (III.68) par $\text{diag}(T_e^T, T_e^T)$ et $\text{diag}(T_e, T_e)$ respectivement et utilisant le changement de variable du théorème III.9 on obtient les inégalités matricielles (III.62) à (III.65).

■

Les inégalités matricielles obtenues ne sont pas linéaires par rapport aux variables d'optimisation, mais bilinéaires. Dans le cas des systèmes certains, en effectuant le changement de variables suivant $\Gamma = Z + M$, on se ramène à des LMIs, qui peuvent être résolues à l'aide de la LMI Control Toolbox de Matlab par exemple.

Retour de sortie dynamique et placement de pôles: incertitudes polytopiques

Les systèmes sont définis par (III.41) et (III.42)-(III.43). Dans le cas des systèmes incertains, on ne peut pas parler explicitement de placement de pôles, mais on souhaite en garantir le maintien dans une région donnée du plan complexe. Pour cela, nous avons une condition suffisante de placement valable pour chaque modèle LTI incertain.

Théorème III.16 : *S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ propres à chaque modèle LTI incertain, satisfaisant les inégalités matricielles bilinéaires suivantes :*

$$\begin{pmatrix} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{III.69})$$

$$\begin{pmatrix} H_j + 2\alpha Y & Z_j + M + 2\alpha \mathbb{I} \\ Z_j^T + M^T + 2\alpha \mathbb{I} & G_j + 2\alpha X \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.70})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho Y & -\rho \mathbb{I} & Y A_j^T + L^T B_{2j}^T & Z_j + M - A_j \\ -\rho \mathbb{I} & -\rho X & A_j^T & A_j^T X + C_2^T F^T \\ A_j Y + B_{2j} L & A_j & -\rho Y & -\rho \mathbb{I} \\ Z_j^T + M^T - A_j^T & X A_j + F C_2 & -\rho \mathbb{I} & -\rho X \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.71})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(H_j) & \cos\theta(Z_j + M) & \cdots \\ \cos\theta(Z_j^T + M^T) & \cos\theta(G_j) & \cdots \\ \sin\theta(\tilde{H}_j^T) & \sin\theta(-2A_j + Z_j + M) & \cdots \\ \sin\theta(2A_j^T - Z_j^T - M^T) & \sin\theta(\tilde{G}_j^T) & \cdots \end{pmatrix} \quad (\text{III.72})$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \sin\theta(\tilde{H}_j) & \sin\theta(2A_j - Z_j - M) \\ \cdots & \sin\theta(-2A_j^T + Z_j^T + M^T) & \sin\theta(\tilde{G}_j) \\ \cdots & \cos\theta(H_j) & \cos\theta(Z_j + M) \\ \cdots & \cos\theta(Z_j^T + M^T) & \cos\theta(G_j) \end{pmatrix} < 0$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$$

avec

$$\begin{aligned} H_j &= A_j Y + Y A_j^T + B_{2j} L + L^T B_{2j}^T & G_j &= A_j^T X + X A_j + F C_2 + C_2^T F^T \\ \tilde{H}_j &= A_j^T Y - Y A_j^T + B_{2j} L - L^T B_{2j}^T & \tilde{G}_j &= A_j^T X - X A_j^T - F C_2 + C_2^T F^T \\ Z_j &= A_j + Y A_j^T X + L^T B_{2j}^T X + Y C_2^T F^T \end{aligned}$$

alors chaque système LTI incertain défini par (III.41) et (III.42)-(III.43) est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique (III.35) avec les pôles du système en boucle fermée situés dans la région du plan complexe $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$.

□

Preuve : Pour toutes réalisations dans le domaine d'incertitudes, la stabilité et la localisation des pôles dans $\mathcal{R}(\alpha, r, \theta)$ du système en boucle fermée sont définies par les inégalités matricielles :

$$PA_e + A_e^T P + 2\alpha P < 0 \quad (\text{III.73})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho P & A_e^T P \\ PA_e & -\rho P \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.74})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(PA_e + A_e^T P) & \sin\theta(PA_e - A_e^T P) \\ \sin\theta(A_e^T P - PA_e) & \cos\theta(PA_e + A_e^T P) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.75})$$

du fait de la dépendance linéaire des inégalités (III.73), (III.74) et (III.75) par rapport à A_e et donc à A_j , B_{2j} et C_2 il est aisé de vérifier que $\forall A_e \in \mathcal{D}_{A_e}$:

$$\mathcal{D}_{A_e} : = \left\{ A_e, A_e = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j A_{ej}, \delta_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \delta_j = 1 \right\}$$

avec

$$A_{ej} = \begin{bmatrix} A_j & B_{2j}C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix}$$

les pôles des systèmes en boucle fermée sont dans la région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$, s'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}$ solution des inégalité matricielles :

$$PA_{ej} + A_{ej}^T P + 2\alpha P < 0 \quad (\text{III.76})$$

$$\begin{pmatrix} -\rho P & A_{ej}^T P \\ PA_{ej} & -\rho P \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.77})$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(PA_{ej} + A_{ej}^T P) & \sin\theta(PA_{ej} - A_{ej}^T P) \\ \sin\theta(A_{ej}^T P - PA_{ej}) & \cos\theta(PA_{ej} + A_{ej}^T P) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.78})$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$$

et en utilisant le même développement que celui utilisé au paragraphe III.3.1 pour prouver le théorème III.9, on obtient les inégalités (III.69) à (III.72).

■

Algorithme de résolution

Dans le cas certain, un changement de variable nous permettrait, de transformer les BMIs en LMIs. Dans le cas incertain, ce changement de variable est impossible du fait de la présence des matrices A_j , B_{2j} dans l'expression de Z_j . On peut cependant, comme pour le cas de la minimisation des normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, se ramener à un problème LMI en utilisant un algorithme

par décomposition croisée (ou par relaxation) pour résoudre le problème de valeurs propres généralisées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X,Y,L,F,M} \lambda \\ \text{sous} \\ \left(\begin{array}{cc} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{array} \right) > 0 \\ \left(\begin{array}{cc} H_j + 2\alpha Y - \lambda Y & Z_j + M + 2\alpha \mathbb{I} \\ Z_j^T + M^T + 2\alpha \mathbb{I} & G_j + 2\alpha X - \lambda X \end{array} \right) < 0 \\ \left(\begin{array}{cccc} -\rho Y - \lambda Y & -\rho \mathbb{I} & Y A_j^T + L^T B_{2j}^T & Z_j + M - A_j \\ -\rho \mathbb{I} & -\rho X - \lambda X & A_j^T & A_j^T X + C_2^T F^T \\ A_j Y + B_{2j} L & A_j & -\rho Y - \lambda Y & -\rho \mathbb{I} \\ Z_j^T + M^T - A_j^T & X A_j X + F C_2 & -\rho \mathbb{I} & -\rho X - \lambda X \end{array} \right) < 0 \\ \left(\begin{array}{ccc} \cos\theta(H_j) - \lambda Y & \cos\theta(Z_j + M) & \dots \\ \cos\theta(Z_j^T + M^T) & \cos\theta(G_j) - \lambda X & \dots \\ \sin\theta(\tilde{H}_j^T) & \sin\theta(-2A_j + Z_j + M) & \dots \\ \sin\theta(2A_j^T - Z_j^T - M^T) & \sin\theta(\tilde{G}_j^T) & \dots \\ \dots & \sin\theta(\tilde{H}_j) & \sin\theta(2A_j - Z_j - M) \\ \dots & \sin\theta(-2A_j^T + Z_j^T + M^T) & \sin\theta(\tilde{G}_j) \\ \dots & \cos\theta(H_j) - \lambda Y & \cos\theta(Z_j + M) \\ \dots & \cos\theta(Z_j^T + M^T) & \cos\theta(G_j) - \lambda X \end{array} \right) < 0 \\ \forall j = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \end{array} \right. \quad (\text{III.79})$$

Ce type d'algorithme ne présente pas de problème d'initialisation particulier: en effet, si $X = Y = \mathbb{I}$, $\lambda \rightarrow \infty$ est une possibilité d'initialisation.

III.4 Solveurs d'inégalités matricielles linéaires (LMIs)

Durant cette dernière décennie, les solveurs d'inégalités matricielles linéaires(LMI) se sont multipliés et sont devenus de plus en plus puissants et performants au niveau des résolution de problèmes d'optimisation. Sans que cela soit exhaustif, nous pouvons citer quelques solveurs de LMIs tels que la LMI Control Toolbox, la boîte à outils de MATLAB [36], SEDUMI [92], et d'autres [78, 73]. Certains solveurs sont accompagnés d'une interface, graphique ou non, comme SEDUMI avec SEDUMI INTERFACE [78], [77] et [66] et LMITOOL [31]. L'interface de la LMI Control Toolbox, LMILAB, permet d'écrire toutes les inégalités sous MATLAB, ainsi que l'interface SEDUMI avec SEDUMI INTERFACE. Nous ne détaillerons pas plus les solveurs existants exceptés SEDUMI et LMI Control Toolbox que nous avons utilisés lors de la résolution des LMIs. Ce choix est expliqué dans le paragraphe suivant.

III.4.1 LMI Control Toolbox [36] et SEDUMI [92]

La LMI Control Toolbox et SEDUMI sont deux boîtes à outils qui permettent de résoudre des problèmes d'optimisation avec des contraintes LMIs.

La LMI Control Toolbox a été écrite par Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan Laub et Mahmoud Chilali [36]. La force de la LMI Control Toolbox est l'assurance du logiciel validé au niveau mondial. Cette boîte à outils sert de référence pour la communauté automatique. De plus, elle est associée à une interface graphique qui permet de décrire les LMIs lors des premières utilisations (LMILAB).

SEDUMI est une boîte à outil écrite par J.F. Sturm [92] fonctionnant dans l'environnement de MATLAB et qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation avec des contraintes linéaires, quadratiques et semi définies positives. Il est possible d'utiliser des variables complexes sous SEDUMI. Les forces de SEDUMI sont:

- La rapidité ou vitesse de convergence de SEDUMI est intéressante, en comparaison avec d'autres solveurs de LMIs [32, 51, 76].
- Utilisation d'un format compact ("Sparse" ou dit aussi matrices creuses). De cette manière, les problèmes d'optimisation de grande taille sont résolus de manière efficace et la place mémoire utilisée est réduite.
- Environnement MATLAB. Il est intéressant de pouvoir travailler dans l'environnement MATLAB, environnement largement répandu dans le monde de la recherche et plus particulièrement dans la communauté automatique.
- Résolution également de problèmes avec des contraintes égalités, avec des variables complexes.
- SEDUMI, logiciel gratuit. Ce point n'est pas négligeable car à partir d'un noyau MATLAB, il est possible après l'obtention des fichiers source de SEDUMI [92], d'exploiter les capacités de ce solveur.
- Association d'une interface (non graphique), SEDUMI INTERFACE, développée par Dimitri Peaucelle [78], [77] et [66].
- Résolution différente pour les problèmes d'optimisation (par rapport à la LMI Control Toolbox) au niveau du conditionnement des variables d'optimisation: Lors de synthèses par retour d'état et de sortie dynamique, nous avons constaté que les variables (matrices) étaient mieux conditionnées, c'est-à-dire le rapport entre la plus petite et la plus grande valeur de la matrice, qu'avec la LMI Control Toolbox.

III.5 CAPILARS 1.01 v. Beta: un prototype logiciel pour l'approche CPWL [63]

Dans cette section, nous allons présenter le prototype logiciel développé au cours de cette thèse.

III.5.1 Problématique

Au cours de cette thèse, il a été question, après avoir élaborer l'algorithme CPWL général décrit au chapitre II, de développer un "logiciel interactif" permettant de faire la synthèse (retour d'état / retour de sortie dynamique) de lois de commande robustes séquencées avec plus ou moins de performances pour des systèmes non linéaires quelconques et de manière systématique. Mais, nous nous sommes imposés des contraintes permettant de fixer les directions de recherche. Aussi, nous devons respecter des hypothèses sur les systèmes non linéaires et apprécier les ressources mises à notre disposition. A partir des contraintes, des hypothèses et des possibles ressources, nous pouvons évaluer les possibilités du futur prototype logiciel CAPILARS 1.01 v. Beta. Cette version [63] est provisoire et subit régulièrement des modifications.

Les contraintes

La contrainte la plus forte se résume au nombre d'arguments des non linéarités: nous savons approximer des non linéarités à N arguments avec $N > 2$, mais il est plus délicat de déterminer les cônes d'incertitude pour des non linéarités avec $N > 2$, et par la même occasion les modèles LTI incertains polytopiques. Dans ce cas, il serait certainement plus judicieux d'utiliser des incertitudes de type bornées en norme, structurée ou non. Donc, nous nous restreindrons à la classe des systèmes non linéaires ayant des non linéarités à 1 et 2 arguments. Enfin, dans un premier temps ([63]), les systèmes non linéaires seront certains.

Les hypothèses

En termes d'hypothèse, nous devons supposer que les applications que nous étudierons permettent une définition des points d'équilibre intermédiaires (x_{ei}, u_{ei}) , c'est-à-dire que les systèmes peuvent proposer une résolution suivant la relation

$$\dot{x}(t) = 0 \rightarrow F(x_{ei}, u_{ei}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \mathcal{N}' \quad (\text{III.80})$$

Les ressources

Grâce à l'environnement de MATLAB, il est possible d'utiliser les deux solveurs d'inégalités matricielles linéaires précédemment présentés, la LMI Control Toolbox, la boîte à outils de MATLAB [36], SEDUMI [92]. De plus, nous pourrions associer l'interface non graphique propre

à SEDUMI, SEDUMI INTERFACE. Enfin, grâce à une version récente de MATLAB présente au LAAS-CNRS (version 6.1), il a été possible de réaliser une interface graphique (GUI) qui permet de se rendre compte de l'interactivité du logiciel et d'avoir une vue complète de l'application en cours.

Les possibilités

Pour que le prototype soit un minimum opérationnel, il faut qu'il puisse:

- Saisir les caractéristiques des systèmes non linéaires sous la représentation de l'espace d'état,
- Approximer les non linéarités à un et deux arguments,
- Déterminer les modèles LTI incertains polytopiques,
- Avoir le choix des synthèses robustes et des solveurs de LMIs,
- Afficher un maximum d'informations et de résultats concernant l'application en cours.

III.5.2 Interface

Nous avons jugé intéressant de développer une interface graphique (GUI) pour l'interactivité du logiciel et permettre ainsi une vue globale de l'application. Cette interface se résume à deux fenêtres graphiques interactives "multi-menus". La première permet un dialogue bilatéral entre l'utilisateur et la machine, tandis que la deuxième n'offre qu'un dialogue dans le sens machine vers utilisateur. La première fenêtre représente toutes les étapes de l'algorithme développé dans ce mémoire, de manière successive. La deuxième expose toutes les données liées à l'application en cours. Les étapes à suivre pour arriver au terme de l'application, c'est-à-dire déterminer une séquence de lois de commande robustes locales qui stabilisent le système non linéaire, sont les suivantes:

- **Etape 1:** Saisie du système non linéaire sous la forme de l'espace d'état et plus particulièrement suivant la notation prise au cours du chapitre II.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x, u) + B_1 w + B_2 u \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_2 x \\ x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n \quad u = [u_1 \ u_2 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^q \quad w \in \mathbb{R}^l \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.81})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, u) = A_n x + B_{nl} h(x, u) \\ \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.82})$$

avec

$$h(x, u) \rightarrow h(\zeta) = \begin{bmatrix} h_1(\zeta) \\ \vdots \\ h_k(\zeta) \\ \vdots \\ h_\gamma(\zeta) \end{bmatrix} \quad (\text{III.83})$$

tel que

$$\left\{ h_k : S_k \subset \forall R^N \mapsto \forall R \right\}, \forall k = 1, \dots, \gamma, \forall N = 1, 2, \forall t \geq 0 \quad (\text{III.84})$$

Le vecteur $h(x, u)$ représente le vecteur des non linéarités du système III.81. Toute la partie non linéaire est concentrée dans les termes de $h(x, u)$. Par conséquent, nous devons saisir toutes les matrices du système non linéaire et le nombre de non linéarités.

- **Etape 2:** Obtention de la famille de modèles linéaires incertains de type polytopiques valables localement dans un domaine de l'espace d'état.
Pour chaque non linéarité, nous devons choisir le nombre d'hyperplans qui vont approximer la non linéarité, donner les arguments de la non linéarité et l'expression de la non linéarité. A partir de cela, il sera possible d'approximer les non linéarités et déterminer les modèles linéaires incertains polytopiques de manière systématique.
- **Etape 3:** Synthèses robustes locales de tous les modèles linéaires incertains locaux.
La dernière étape réside dans le choix de la synthèse robuste pour chaque modèle LTI incertain et du solveur de LMIs.

Nous n'avons pas encore évoqué un dernier menu dans la première fenêtre graphique (figure III.2): c'est un menu d'options:

- Choix de la région convexe pour le placement de pôles,
- Contrainte possible sur les variables d'optimisation pour éviter un mauvais conditionnement des variables d'optimisation,
- Affichage des itérations lors de la résolution des problèmes,
- Sauvegarde des données dans un fichier,
- Chargement d'un fichier pour éviter les premières étapes ou pour faire la synthèse robuste de systèmes linéaires incertains polytopiques (voir l'exemple 2).

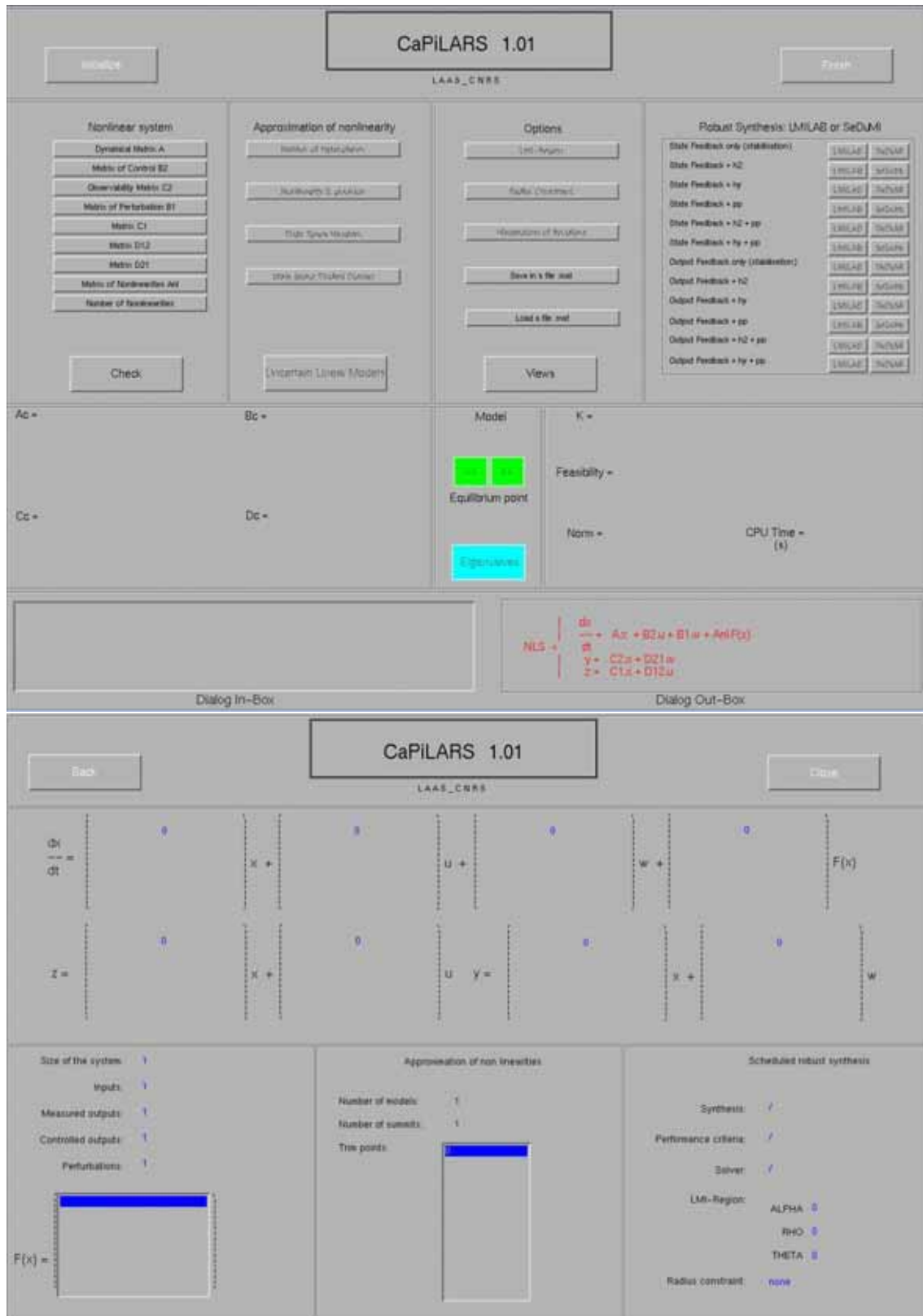


FIG. III.2 – Ecrans n° 1 et n° 2 de l'interface de CaPiLARS 1.01 v. Beta

Les données et les résultats des approximations des non linéarités de l'application sont regroupés dans la deuxième fenêtre graphique (figure III.2). Les résultats principaux, c'est-à-dire les correcteurs par retour d'état et de sortie dynamique, les normes, les temps de calcul, la faisabilité des problèmes, sont situés dans la première fenêtre graphique (figure III.2).

La section suivante est consacrée à l'application du prototype logiciel CAPILARS 1.01 v. Beta présenté dans ce chapitre et est essentiellement composée de deux exemples. Dans le premier exemple, l'application traitée a pour objet la commande d'un modèle de moteur à courant continu (système non linéaire). Le deuxième exemple est une application connue dans les congrès: c'est un benchmark où le système physique est constitué de deux masses (m_1, m_2) reliées par un ressort. Ce deuxième exemple permet de montrer la capacité de CAPILARS 1.01 v. Beta à effectuer les synthèses robustes pour des systèmes LTI incertains polytopiques.

III.5.3 Exemples

Exemple 1: modèle de moteur à courant continu

Nous illustrons à présent notre algorithme à l'aide d'un système non linéaire bâti à partir d'une représentation du moteur à courant continu décrite dans [64] et [65]. Nous considérons le système non linéaire comme un modèle à une seule non linéarité dépendant d'une variable, et la matrice A_n certaine. La représentation d'état est la suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + B_1 w + B_2 u & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C_2 x \\ x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta, \dot{\theta}, I]^T \in \mathbb{R}^3 & u \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} & w \in \mathbb{R} \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.85})$$

et

$$\begin{cases} f(x) = A_n x + B_{nl} h(x) \\ \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.86})$$

avec

$$\{ h(x) \rightarrow h(\zeta) = h_1(\zeta) = \tanh(x_1) \} \quad (\text{III.87})$$

tel que

$$\{ h : S = [-10, 10] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \}, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{III.88})$$

et

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 10 \\ 0 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \quad B_{nl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \quad C_2 = (1 \ 0 \ 0) \quad (\text{III.89})$$

$\theta, \dot{\theta}$ et I sont respectivement la position angulaire, la vitesse angulaire et le courant d'induit. On prendra $D_{12} = 1$ et $D_{21} = 0$.

On note l'approximation de $h(x_1)$ par $\bar{h}(x_1)$. La figure III.3 rappelle respectivement la non linéarité et son approximation pour le nombre d'hyperplans $\sigma = 5$.

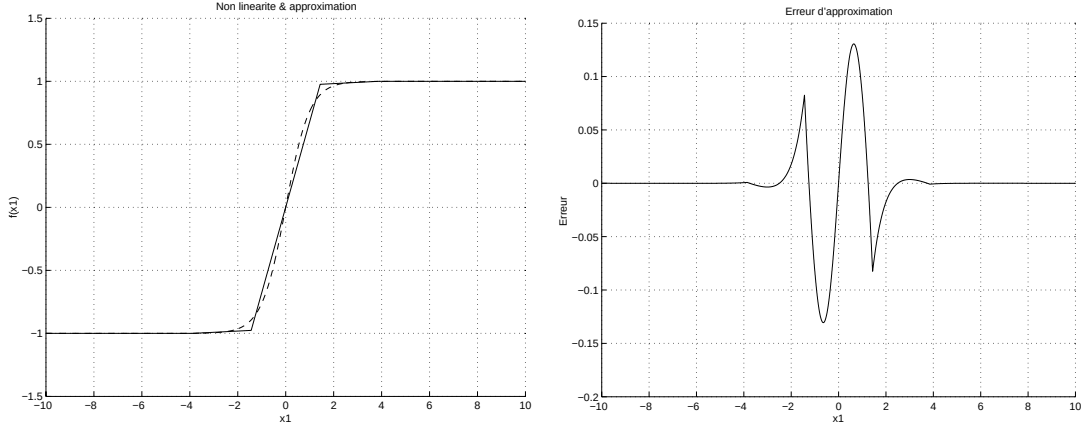


FIG. III.3 – *Approximation et erreur pour la non linéarité $\tanh(x_1)$ avec 5 hyperplans*

A partir de cette modélisation, nous pouvons commencer à utiliser le logiciel CAPILARS 1.01 v. Beta étapes par étapes :

- **Étape 1:** Saisie du système non linéaire sous la forme de l'espace d'état.
- **Étape 2:** Obtention de la famille de modèles linéaires incertains de type polytopiques valables localement dans un domaine de l'espace d'état.
Pour la non linéarité $h(x_1)$, nous devons choisir le nombre d'hyperplans ($\sigma = 5$) qui vont approximer la non linéarité, donner les arguments de la non linéarité (x_1) et l'expression de la non linéarité. A partir de cela, il sera possible d'approximer la non linéarité et déterminer les modèles linéaires incertains polytopiques de manière systématique.

Remarque III.2 : *Nous pouvons regarder à tout moment les informations que l'on saisit dans la boîte de dialogue (Dialog Out-Box) au bas de la première fenêtre graphique (voir figure III.5), ou mieux encore pour avoir une vue globale de l'application, sur la deuxième fenêtre en cliquant sur le bouton Views de la première fenêtre (voir figures III.4, III.5).*

▲

- **Étape 3:** Synthèses robustes locales.
La dernière étape réside dans le choix de la synthèse robuste pour chaque modèle LTI incertain et du solveur de LMIs. Dans le cadre de cette simulation, nous avons choisi de

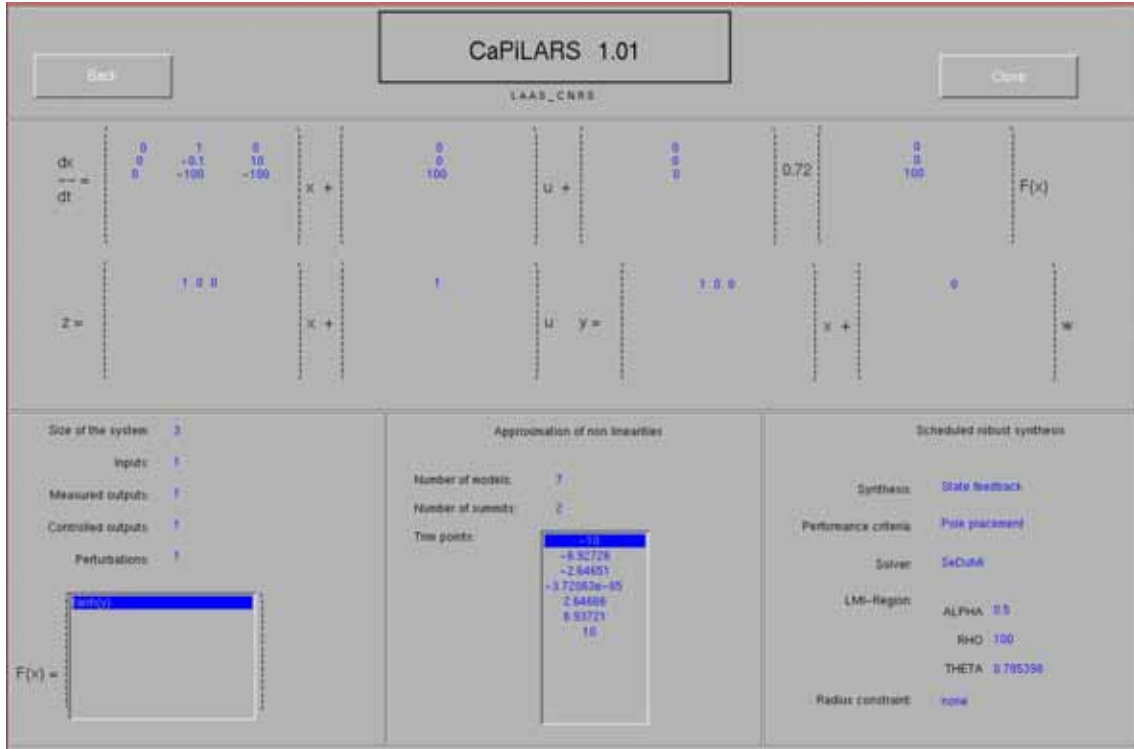


FIG. III.4 – Ecran n°2 de l'interface de CaPiLARS 1.01 v. Beta

déterminer une séquence de correcteurs robustes par retour d'état avec une localisation de pôles dans la région convexe (figure III.6)

$$\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta) = \mathcal{R}(0.5, 100, 0.7854) \quad (\text{III.90})$$

Il est possible d'atteindre la figure III.6 en cliquant sur le bouton *Eigenvalues* de la première fenêtre graphique. Le solveur d'inégalités matricielles est SEDUMI (voir figure III.4).

Remarque III.3 : *En termes de résultats, nous pouvons observer sur la première fenêtre graphique, grâce à des boutons d'évolution (précédent et suivant):*

- Les correcteurs par retour d'état / de sortie dynamique sous forme matricielle.
- La faisabilité du/des problèmes d'optimisation.
- Le domaine de validité de chaque modèle LTI incertain, ainsi que leur point d'équilibre intermédiaire respectif.
- Les valeurs des normes $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$.

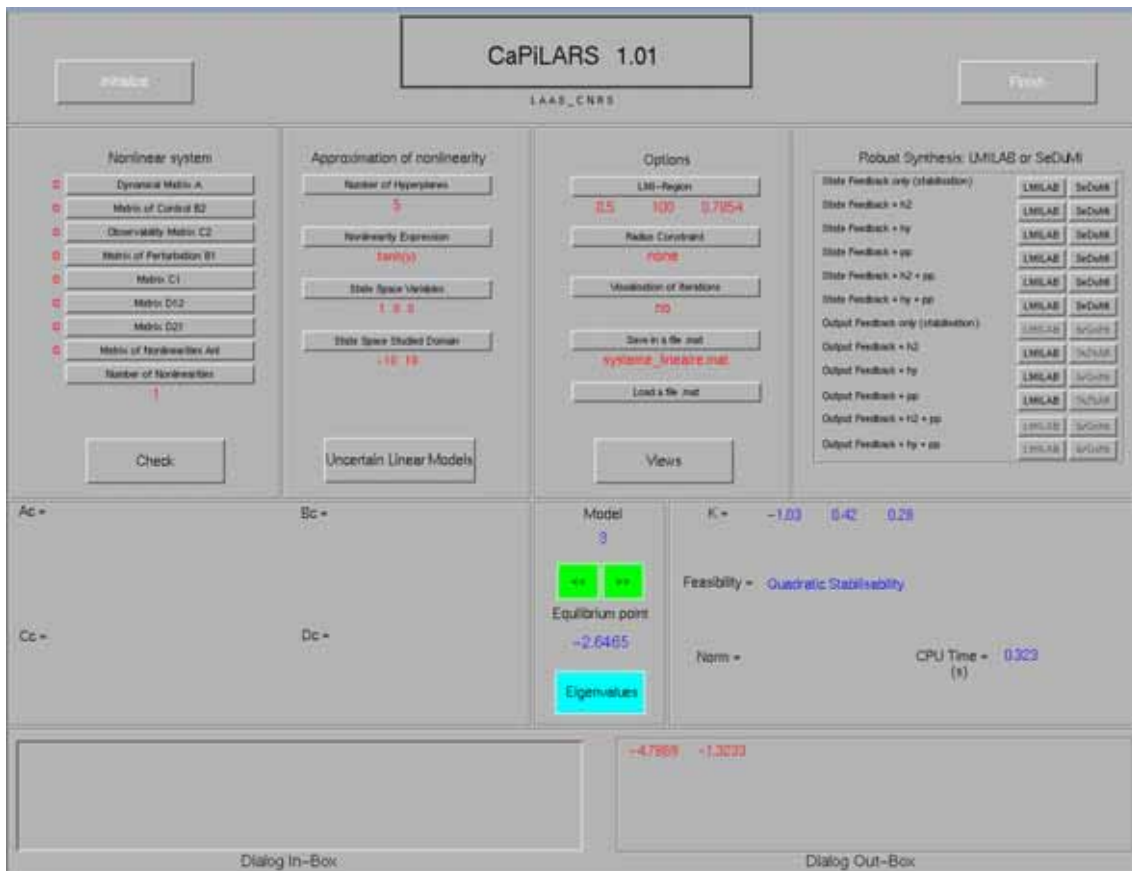


FIG. III.5 – Ecran n° 1 de l'interface de CaPiLARS 1.01 v. Beta

– Le temps de calcul (CPU) pour chaque synthèse robuste.

▲

Exemple 2: Benchmark ACC [97]

Il s'agit d'un "Benchmark" présenté à plusieurs reprises au congrès ACC (American Control Conference) où le système physique est constitué de deux masses (M_1 , M_2) reliées par un ressort de raideur k (figure III.7).

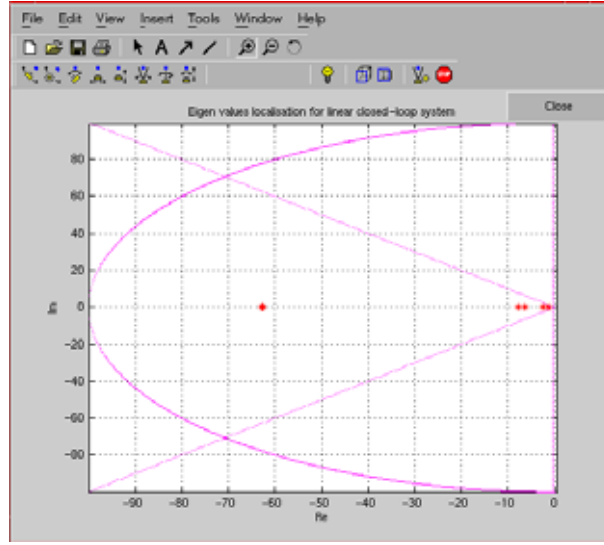


FIG. III.6 – Localisation des pôles en boucle fermée avec CAPILARS 1.01 v. Beta

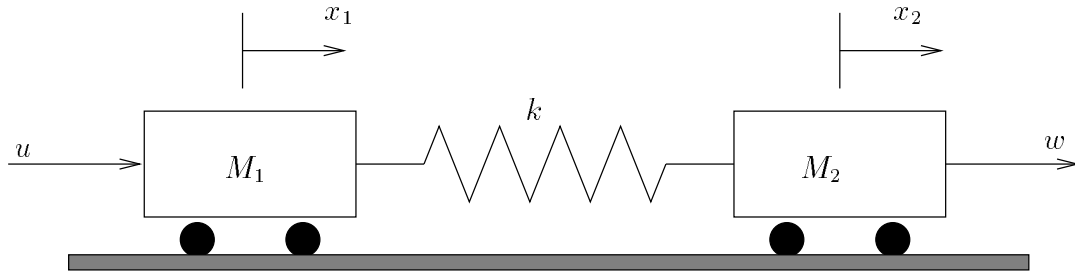


FIG. III.7 – Problème de commande masse + ressort

La représentation d'état de ce système est donnée par [97] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x (+D_{12}u) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x (+D_{21}w) \end{array} \right. \quad (\text{III.91})$$

y est la sortie mesurée et z la sortie commandée. Les masses M_1 et M_2 , ainsi que la raideur k

sont incertaines et définies ainsi :

$$\begin{aligned} k &= k_0 + \delta_k \\ M_1 &= M_{10} + \delta_{M_1} \\ M_2 &= M_{20} + \delta_{M_2} \end{aligned} \tag{III.92}$$

avec :

$$\begin{aligned} k_0 &= 1 & -0.1 &\leq \delta_k \leq 0.1 \\ M_{10} &= 1.5 & 0 &\leq \delta_{M_1} \leq 0.2 \\ M_{20} &= 1 & 0 &\leq \delta_{M_2} \leq 0.4 \end{aligned}$$

En prenant $D_{12} = 1$ et $D_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on détermine, à partir de CAPILARS 1.01 v. Beta et en utilisant l'algorithme par décomposition croisée, un compensateur par retour de sortie dynamique et en tenant compte d'un critère de performance $\mathcal{H}_2$. Nous sommes en présence d'un système incertain de type polytopique à 8 sommets. Cet exemple est composé d'un seul modèle et il n'y a pas de point d'équilibre à rechercher. Donc, nous allons simplement utiliser la troisième fonction de CAPILARS 1.01 v. Beta: synthèses robustes avec ou sans performances. Il est possible de mémoriser toutes les caractéristiques du système LTI en utilisant le bouton de chargement (*Load a file.mat*). Ensuite, comme pour un modèle non linéaire, nous pouvons utiliser le tableau de synthèses robustes, par retour d'état ou par retour de sortie dynamique, avec comme solveur, LMILAB (LMI Control Toolbox) ou SEDUMI. Dans le cadre de cette simulation, le solveur d'inégalités matricielles est LMILAB (voir figure III.8).

III.6 Conclusion

Après avoir rappelé brièvement la forme des systèmes LTI incertains de type polytopique, obtenus à partir de l'algorithme CPWL [64] développé dans ce mémoire, nous avons rappelé les principes de la commande par retour d'état et par retour de sortie dynamique pour des systèmes certains et détaillé la résolution des problèmes de synthèse de retour d'état et de sortie dynamique pour une famille de modèles incertains. Les domaines d'incertitude portent sur tous les couples de matrices (A_i, B_{2i}) avec $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}'$. Que ce soit pour le retour d'état ou le retour de sortie dynamique, nous avons rappelé une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour les systèmes certains et nous avons exprimé une condition suffisante de stabilité pour chacun des modèles LTI incertains de la famille.

Pour ces types de commandes, on utilise une formulation de type LMI. Lorsque ces inégalités matricielles ne sont plus linéaires (LMIs) mais bilinéaires (BMIs) dans le cas incertain, on utilise un algorithme par décomposition croisée. Une fois les problèmes de synthèse bien posés (en tenant compte de critères de performances), la résolution ne dépend que du choix du solveur de LMIs. Nos choix se sont orientés vers la LMI Control Toolbox [36] et vers SEDUMI [92] pour diverses raisons.

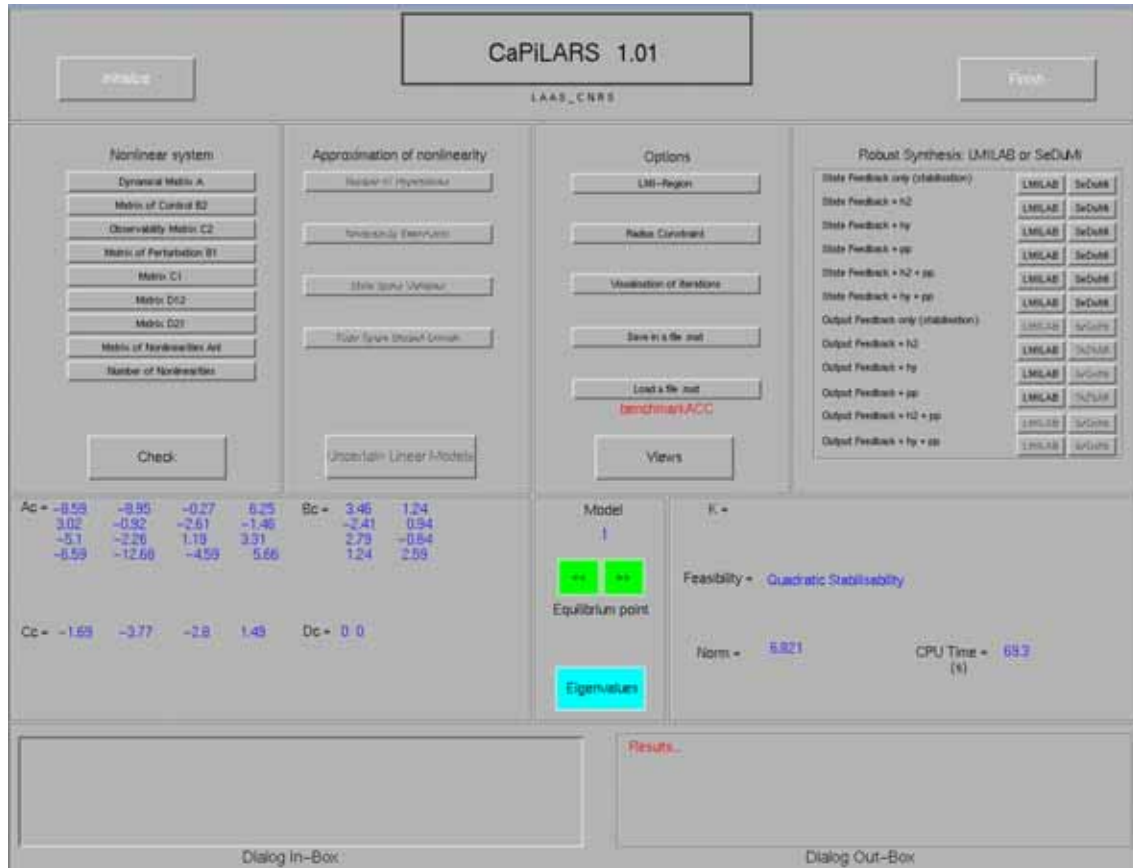


FIG. III.8 – Ecran n°1 de l'interface de CaPiLARS 1.01 v. Beta

L'un des intérêts de l'approche CPWL réside dans la systématisation de celle-ci. En allant dans cette direction, nous avons développé un prototype logiciel, CaPiLARS 1.01 v. Beta [63], un des résultats de ce travail. Dans un souci d'utilisations diverses, nous avons développé ce logiciel dans l'environnement MATLAB, pour des applications concernant les systèmes non linéaires ayant des non linéarités à un ou deux arguments et pour des systèmes linéaires incertains polytropiques. Deux exemples (un modèle de machine à courant continu et un Benchmark) viennent clôturer ce chapitre pour décrire le fonctionnement de ce logiciel et évaluer ses capacités. Pour plus d'informations, le lecteur pourra consulter le guide d'utilisation [63].

Chapitre IV

Applications numériques

Ce chapitre, consacré à l'application de l'approche présentée dans ce mémoire, est composé essentiellement de deux parties. Dans la première partie, les applications traitées ont pour objet l'application directe de la méthode. Ces applications concernent la commande d'un pendule simple inversé, la commande d'un panneau solaire basé sur un convertisseur DC-DC de type survolteur et la commande d'un moteur d'aération (MTB). Pour chacune de ces trois applications, une brève description du système sera faite, puis nous rappellerons les spécifications de chacune. Ensuite, la modélisation sera détaillée pour précéder l'approximation CPWL du modèle en une famille de modèle LTI incertains. Le calcul des correcteurs ainsi que les résultats de simulations obtenus, sont ensuite présentés et discutés.

Enfin, dans un deuxième temps, à partir d'une comparaison avec des approches multi-modèles existantes de la littérature, nous chercherons à situer l'approche CPWL et déterminer ses points forts et ses limites.

“La simplicité est la forme de la vraie grandeur.”

[Francesco de Sanctis, Extrait de *Histoire de la littérature italienne*]

IV.1 Introduction

Ce chapitre est constitué d'une série d'applications pour illustrer et valider l'approche CPWL développée dans cette thèse. Nous travaillerons sur deux catégories d'exemples numériques: la première catégorie illustrant intégralement l'approche CPWL où chaque application a été résolue par le prototype logiciel CAPILARS 1.01 v Beta décrit en fin de chapitre III. Trois applications caractérisent cette catégorie et sont ordonnées suivant leur difficulté: la première application est l'idéalisation d'un pendule simple inversé. Cette application, bien que simplifiée, permet d'illustrer l'approche CPWL d'une manière simple et directe avec une seule non linéarité à un argument. La non linéarité de ce système est une fonction sinusoïdale. La deuxième application appartient au domaine du génie électrique et énergétique. Cette application est la modélisation d'un panneau solaire constitué à partir d'un convertisseur DC-DC de type survolteur (dit "Boost"). Cette application illustre l'approche par une non linéarité logarithmique associée à une bilinéarité entre une variable d'état et la commande. Elle sera traitée en deux temps (bilinéarité uniquement puis bilinéarité associée à la non linéarité logarithmique). La dernière application est l'illustration d'un moteur d'aération, application constituée de deux non linéarités à un argument.

Enfin, à partir d'une comparaison avec des approches multi-modèles existantes de la littérature, nous chercherons à situer l'approche CPWL, déterminer ses forces et faiblesses et vérifier si cette méthode répond aux objectifs attendus.

IV.2 Pendule inversé

IV.2.1 Présentation

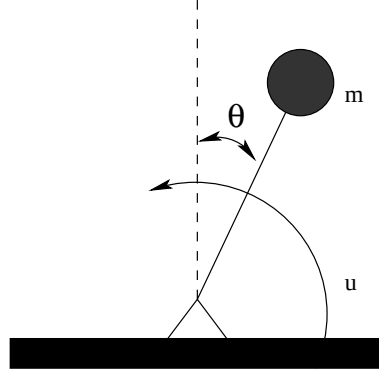
Un pendule simple inversé est présenté sur la figure IV.1. Les équations dynamiques sont

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{mgl}{J} \cdot \sin(x_1(t)) + \frac{1}{J}u(t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où $[x_1(t), x_2(t)]^T = [\theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}]^T$ avec $\theta(t)$ et $\frac{d\theta(t)}{dt}$ respectivement la position et la vitesse angulaire. La commande est notée u et la sortie mesurée correspond à la position angulaire.

Significations des paramètres et valeurs numériques:

- m : Masse du pendule, considérée comme ponctuelle, $m = 1$ Kg.
- g : Gravité, $g = 9.81$ N.m.Kg⁻¹.
- l : Longueur du pendule, $l = 0.62$ m.

FIG. IV.1 – *Pendule inversé.*

- J : Couple (inertie), $J = 1 \text{ Kg.m}^2$.

Le but de la commande est de “lever” le pendule de $\theta(t) : 1.29 \rightarrow 0$ (radians), en assurant la stabilité en boucle fermée, et certaines spécifications sur le régime transitoire (placement de pôles) pour chaque modèle LTI incertain déterminé par l’approche CPWL. Comme nous l’avons mentionné dans les chapitres précédents, il est difficile dans le cas de modèles LTIs incertains, de parler de placement de pôles et on s’intéresse plutôt à les localiser dans une région convexe $\mathcal{R}(\alpha_m, \rho_m, \theta_m)$ [20]. Cette région convexe, définie par $\mathcal{R}(0.5, 1.5, \frac{\pi}{2})$, sera la même pour tous les modèles. Nous allons appliquer l’approche CPWL proposée dans ce mémoire pour le cas du retour d’état avec placement de pôles et dans le cas du retour de sortie dynamique, en utilisant le solveur (de LMIs) LMILAB de MATLAB.

IV.2.2 Modélisation CPWL

Pour cette approche, nous avons choisi de limiter le domaine de variation de la position angulaire, première variable d’état, à l’intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Le nombre de modèles LTI incertains locaux est de 11 ($\sigma = 9$). Il faut garder à l’esprit que, plus le nombre de modèles linéaires locaux augmente, plus la précision sera grande, l’erreur d’approximation sera faible et la transition entre les modèles sera moins brusque. En résumé, le cahier des charges du modèle du pendule est:

- Régulation du pendule autour de $\theta_f(t) = 0$ avec comme condition initiale $\theta_0(t) = 1.29$ radians (En fait, on acceptera toutes les conditions initiales de l’intervalle d’étude proposé $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).
- Lois de commande par retour d’état avec localisation de pôles dans une région convexe du plan complexe $\mathcal{R}(0.5, 1.5, \frac{\pi}{2})$.

– Nombre de modèles LTI incertains résultant de l'approximation: 11.

En appliquant l'algorithme CPWL, les points d'équilibre intermédiaires sont rangés dans le tableau IV.1 pour la composante $x_1(t)$:

N^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_{1ei} (rad)	-1.3943	-1.0790	-0.7836	-0.4661	-0.1914	0	0.1914	0.4661	0.7836	1.0790	1.3943

TAB. IV.1 – Valeurs des points d'équilibre intermédiaires

A l'aide des résultats classiques de la stabilité quadratique (Théorème III.8, Chap III), nous pouvons à présent établir les différentes matrices de gains K_i , $i = 1, \dots, 11$ respectivement pour les modèles LTI incertains suivants:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{ij}(x - x_{ei}) + B_{2i}(u - u_{ei}) \\ y(t) = C_{2i}(x - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, 11, \forall j = 1, 2. \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

avec les matrices dynamique, de commande et d'observation de la forme:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad B_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_{2i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

$$(\text{IV.4})$$

$$\forall i = 1, \dots, 11, \forall j = 1, 2.$$

Δ_{ij} représente l'incertitude polytopique de chaque modèle LTI incertain déterminée à partir de l'approximation de la non linéarité sinusoïdale. Chaque système est commandé par

$$u = u_{ei} + K_i(x - x_{ei}) \quad \forall i = 1, \dots, 11. \quad (\text{IV.5})$$

avec

N^0	K_i	N^0	K_i
1	[-50.2101 -2.5261]	7	[-12.7435 -2.0977]
2	[-30.1088 -2.5222]	8	[-15.8617 -2.3462]
3	[-22.8962 -2.4941]	9	[-22.8962 -2.4941]
4	[-15.8617 -2.3462]	10	[-30.1088 -2.5222]
5	[-12.7435 -2.0977]	11	[-50.2101 -2.5261]
6	[-9.7743 -1.6368]		

TAB. IV.2 – Valeurs des gains par retour d'état.

Les consignes locales (valables aux points d'équilibre intermédiaires uniquement) sont résumées dans le tableau IV.3 ci-dessous:

N^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_{ei}	0.9845	0.8815	0.7058	0.4494	0.1903	0	-0.1903	-0.4494	-0.7058	-0.8815	-0.9845

TAB. IV.3 – Valeurs des commandes locales u_{ei} .

IV.2.3 Simulations

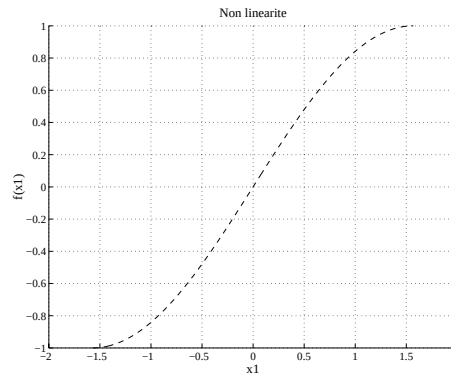


FIG. IV.2 – Non linéarité du pendule inversé simplifié.

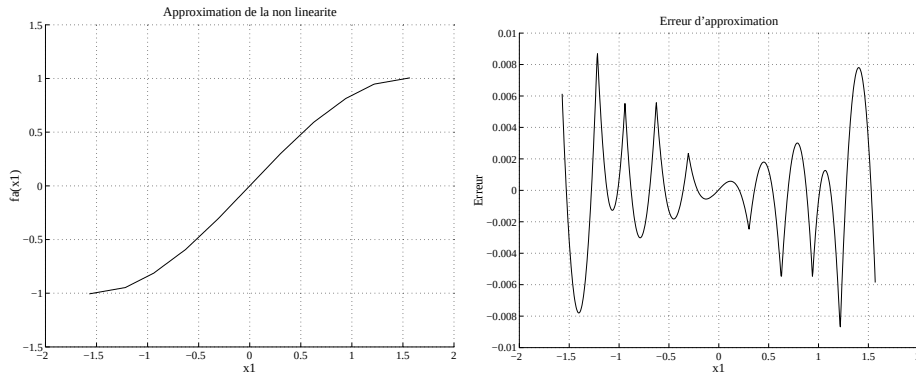
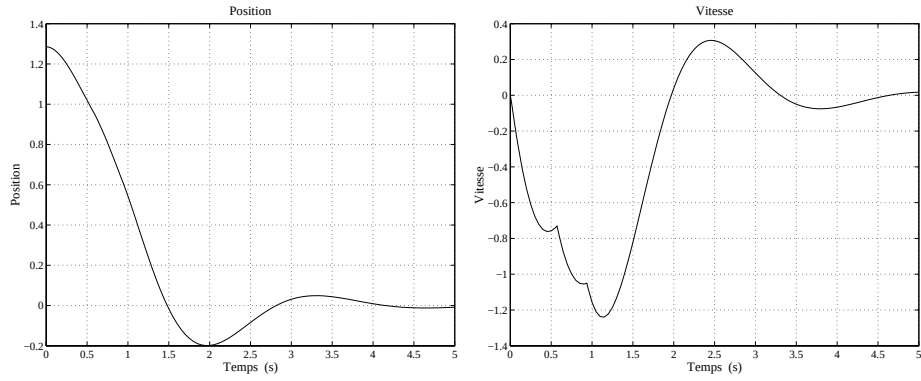
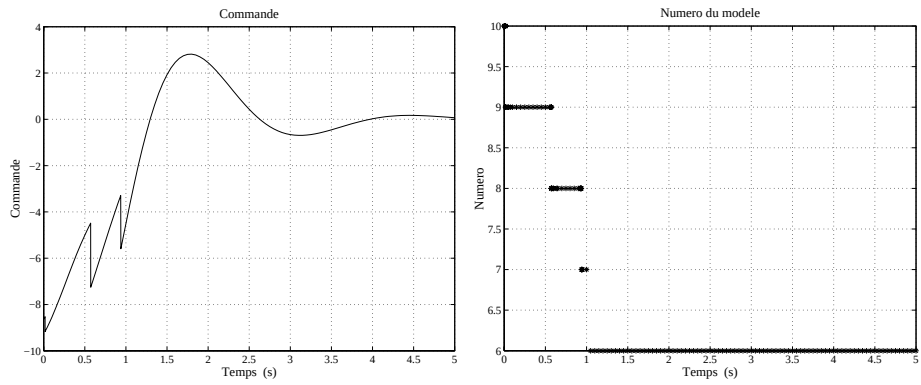
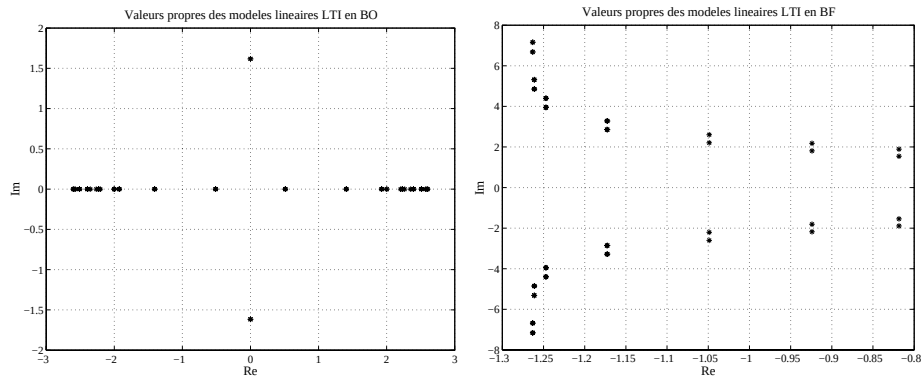


FIG. IV.3 – Approximation de la non linéarité et erreur d'approximation.

Nous avons fixé comme conditions initiales $\theta(0) = 1.29$ et comme état final $\theta(\infty) = 0$. Les figures IV.2 et IV.3 décrivent la non linéarité et son approximation sur l'intervalle d'étude $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. D'après les figures IV.4 et IV.5, la commutation d'un modèle linéaire local à un autre s'exécute de manière douce. La réponse atteint son régime permanent avec un temps de réponse de 3s (figure IV.4).

Nous pouvons observer la commutation des modèles LTI incertains sur la figure IV.5 qui donne les indices des modèles linéaires locaux sous les conditions d'expérience. En termes de performances (ici uniquement un placement de pôles), les figures IV.6 décrivent les pôles des modèles LTI incertains en boucle ouverte puis en boucle fermée. Les contraintes au niveau de la

FIG. IV.4 – *Position et vitesse du pendule.*FIG. IV.5 – *Commande et indice des modèles du pendule.*FIG. IV.6 – *Pôles en boucle ouverte et fermée.*

région convexe du plan complexe $\mathcal{R}(0.5, 1.5, \frac{\pi}{2})$ sont bien respectées. Enfin, la figure IV.7 décrit la trajectoire de la vitesse en fonction de la position, c'est-à-dire le plan de phase qui montre la convergence des états vers l'origine. Le pendule part de la condition initiale $\theta(0) = 1.29$ (radians) avec une vitesse angulaire nulle et va converger vers l'origine avec undépassement

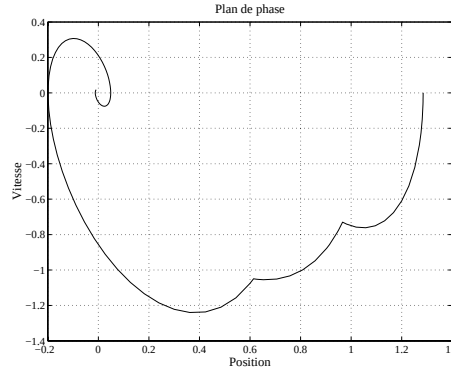


FIG. IV.7 – Trajectoire de la vitesse en fonction de la position.

compensé par la commande globale qui va faire revenir le pendule qui “dépasse” l’origine (dûe en partie à l’absence de frottements).

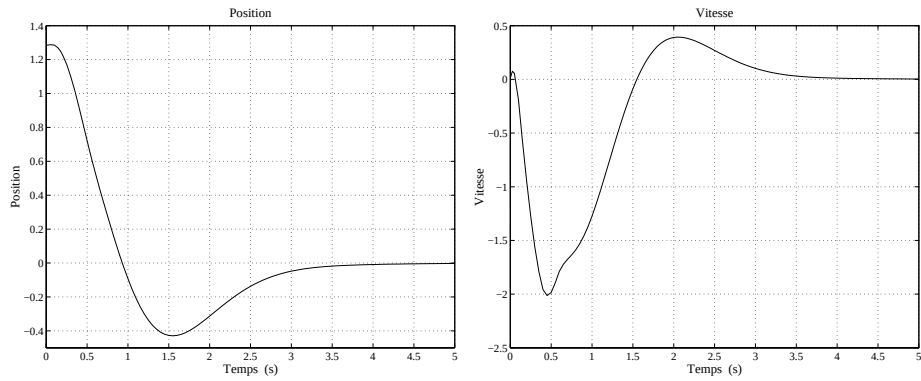
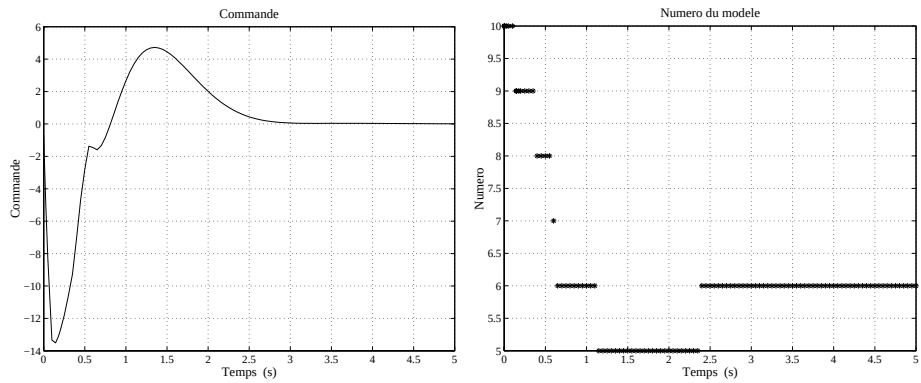
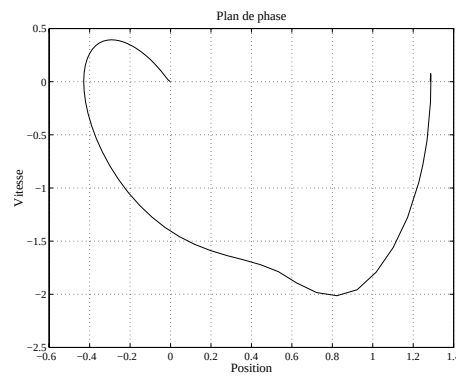
Remarque IV.1 : Nous avons aussi simulé la commande du pendule inversé avec une séquence de correcteurs par retour de sortie dynamique décrite dans le chapitre I et déterminée en utilisant l’algorithme par décomposition croisée, avec la position angulaire comme variable d’état accessible. Les résultats suivants représentent les valeurs des correcteurs dynamiques pour les mêmes conditions d’approximation et de simulations. Les figures IV.8 et IV.9 décrivent les résultats de simulations.

N^0	A_{ci}	N^0	B_{ci}	N^0	C_{ci}
1	[-22.6445 51.6565 ; -6.4891 12.4483]	1	[490.0130; 148.5316]	1	[-0.0369 -0.9164]
2	[-27.1540 60.9200 ; -8.4729 17.2107]	2	[409.6755; 135.7769]	2	[-0.0550 -0.8734]
3	[-34.2019 77.9604 ; -11.2150 24.1378]	3	[402.0277; 139.3243]	3	[-0.0734 -0.8266]
4	[-48.4350 111.9816 ; -17.0169 38.3567]	4	[376.3452; 138.1086]	4	[-0.1160 -0.7222]
5	[-65.2753 156.2258 ; -23.3057 55.0336]	5	[387.3983; 143.2055]	5	[-0.1558 -0.6156]
6	[-92.1097 218.8242 ; -34.7838 82.1409]	6	[338.5206; 131.0818]	6	[-0.2577 -0.3733]
7	[-65.2753 156.2258 ; -23.3057 55.0336]	7	[387.3983; 143.2055]	7	[-0.1558 -0.6156]
8	[-48.4350 111.9816 ; -17.0169 38.3567]	8	[376.3452; 138.1086]	8	[-0.1160 -0.7222]
9	[-34.2019 77.9604 ; -11.2150 24.1378]	9	[402.0277; 139.3243]	9	[-0.0734 -0.8266]
10	[-27.1540 60.9200 ; -8.4729 17.2107]	10	[409.6755; 135.7769]	10	[-0.0550 -0.8734]
11	[-22.6445 51.6565 ; -6.4891 12.4483]	11	[490.0130; 148.5316]	11	[-0.0369 -0.9164]

TAB. IV.4 – Valeurs des correcteurs dynamiques.

▲

En terme de séquencement, de lois de commande (pour le retour d’état par exemple), le système a pour condition initiale $x_{10} = 1.29$ et pour condition finale $x_{1f} = 0$. Le premier

FIG. IV.8 – *Position et vitesse du pendule.*FIG. IV.9 – *Commande et Indice de modèle du pendule*FIG. IV.10 – *Trajectoire de la vitesse en fonction de la position.*

modèle LTI incertain sera, comme l'indique la figure IV.9, le numéro 10, ce qui correspond au domaine d'attraction $[0.7836, 1.3943]$ pour le point d'équilibre 10 ($x_{1ei} = 1.0790$). Le modèle suivant est le numéro 9 pour le point d'équilibre $x_{1ei} = 0.7836$ et pour domaine d'attraction

$[0.4652, 0.783]$. Le séquençement va se faire jusqu'au point d'équilibre final $x_{1ei} = x_{1f} = 0$.

Ce système non linéaire, bien que simplifié, nous permet d'illustrer l'approche CPWL en approximant une non linéarité à un argument et de déterminer des modèles LTI incertains qui vont "couvrir" tout le domaine d'étude proposé. Grâce à ces modèles, nous pouvons calculer une séquence de lois de commande robustes qui permettent de satisfaire les deux conditions principales, assurer la stabilité du modèle non linéaire en boucle fermée en vérifiant les critères de performances.

L'application suivante va nous amener à plus de réflexions car elle est constituée d'une non linéarité logarithmique associée à deux bilinéarités.

IV.3 Commande d'un panneau solaire

IV.3.1 Présentation

Dans cette deuxième application, le système à commander est un panneau solaire composé d'un convertisseur DC-DC de type "Boost" ou survolteur (figure IV.11).

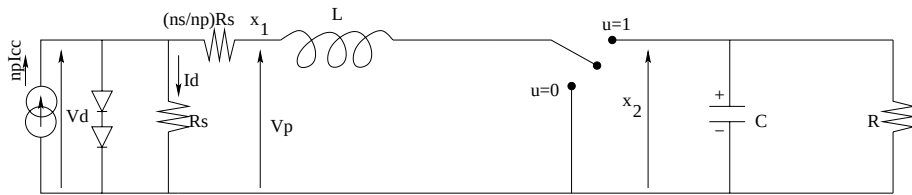


FIG. IV.11 – *Panneau solaire.*

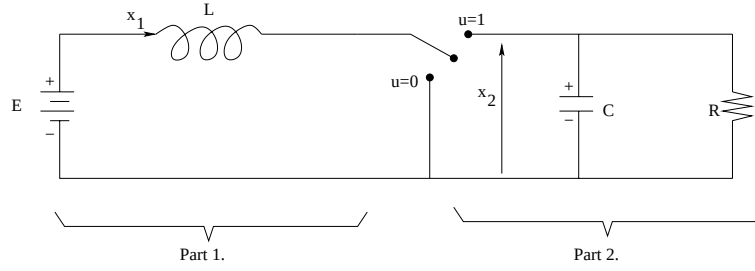
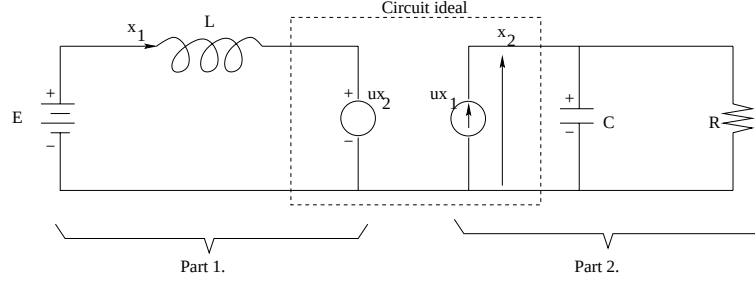
Outre le convertisseur DC-DC que nous étudierons dans un premier temps, le panneau est constitué d'une source de courant associée à un pont de diodes pour éviter les inversions de courant ou de tension et donc de puissance. Comme nous l'avons énoncé précédemment, nous commencerons par étudier le modèle du convertisseur DC-DC survolteur, puis nous incluerons la partie source de courant pour rechercher une commande robuste stabilisant le système en boucle fermée.

IV.3.2 Convertisseur DC-to-DC survolteur ou "Boost"

Modélisation CPWL

Considérons le modèle de convertisseur survolteur décrit par la figure IV.12.

x_1 et x_2 représentent respectivement le courant inducteur d'entrée et la tension de sortie aux bornes de la capacité C . E représente la tension d'entrée constante externe alimentant le circuit de la figure IV.12. La variable u représente la commande de l'interrupteur entre

FIG. IV.12 – *Convertisseur DC-DC survolteur.*FIG. IV.13 – *Circuit équivalent du convertisseur survolteur.*

les parties 1 et 2 du système (figure IV.12). Cette grandeur est pilotée par une modulation de largeur d'impulsions (MLI ou PWM pour les anglo-saxons). D'après [90] et sous certaines conditions¹, on peut considérer que le système peut-être transformé sous la forme de la figure IV.13. Les valeurs que peut donc prendre u sont comprises dans l'ensemble des valeurs suivantes:

$$u \in \mathcal{D}_u, \mathcal{D}_u = [0, 1] \quad (\text{IV.6})$$

A partir de ce schéma, on peut déterminer les équations électriques IV.7 et IV.8:

$$\sum_{i=1}^{N_U} U_i = 0 \rightarrow E - L \frac{dI_1}{dt} - uV_2 = 0, \quad (\text{IV.7})$$

$$\sum_{j=1}^{N_I} I_j = 0 \rightarrow -uI_1 + C \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{R} = 0. \quad (\text{IV.8})$$

Par conséquent, en posant $x_1 = I_1$ et $x_2 = V_2$, il est possible d'obtenir les équations différentielles suivantes décrivant le système de la figure IV.13, équivalent à celui de la figure IV.12:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-1}{L}ux_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}ux_1 - \frac{x_2}{RC} \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

1. en considérant pour x_1 , x_2 et u comme les valeurs moyennes sur une période de MLI des variables respectives qu'elles représentent.

Significations des paramètres et valeurs numériques:

- E : Tension d'alimentation externe, $E = 15$ V.
- L : Inductance du convertisseur survolteur, $L = 20$ mH.
- C : Capacité du convertisseur survolteur, $C = 20$ mF.
- R : Résistance de charge du convertisseur survolteur, $R = 30$ Ω .

Afin de tester la robustesse et les performances des contrôleurs calculés par l'approche CPWL, nous avons réalisé 3 séries de simulations. La première correspond au convertisseur nominal: tous les paramètres du modèle sont parfaitement connus par la loi de commande et aucune perturbation n'est présente. Dans les deux autres séries, nous considérons le convertisseur survolteur avec des incertitudes δ_E sur E : δ_E représente une perturbation d'entrée externe affectant le système non linéaire directement au travers de la tension externe E . On considère que la valeur maximale de δ_E est égale à 2 volts. Les deux cas envisagés sont:

Cas n°1: une erreur de type impulsionnelle de 2 volts et de "durée" de 0.1s à $t = 0.1$ s,

Cas n°2: une perturbation aléatoire de 2 volts d'amplitude (± 1 volt) sur toute la durée de simulation.

On choisit de tenir compte de performances telles que placement de pôles et rejet de perturbation (performance $\mathcal{H}_2$).

A partir d'une condition initiale ($x_{10} = 0.66A$, $x_{20} = 17.30V$), l'objectif de contrôle est la stabilisation des sorties autour du point d'équilibre suivant ($x_{1f} = 1.10A$, $x_{2f} = 22.33V$) respectivement pour le courant d'entrée et la tension de sortie.

Le choix s'est porté sur 3 hyperplans ($\sigma = 3$) pour les approximations. Nous obtenons 5 modèles incertains sur un domaine d'évolution de x_2 entre 15 volts et 25 volts de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i(x - x_{ei}) + B_{2ik}(u - u_{ei}) + B_1 \\ y(t) = C_{2i}(x - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, 5, \forall k = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

pour les points d'équilibre intermédiaires

N^0	1	2	3	4	5
x_{1ei}	0.5	0.642	0.802	1.10	1.1756
x_{2ei}	15	17	19	22.33	23

TAB. IV.5 – Valeurs des points d'équilibre intermédiaires

et avec les matrices dynamique, de commande, de perturbation et d'observation de la forme:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1.667 \end{pmatrix} \quad B_{2ik} = \begin{pmatrix} \Delta_{1ik} \\ \Delta_{2ik} \end{pmatrix} \quad (IV.11)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 750 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_{2i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (IV.12)$$

$$\forall i = 1, \dots, 5, \forall k = 1, \dots, 4.$$

Δ_{1ik} et Δ_{2ik} représentent les incertitudes polytopiques de chaque modèle LTI incertain déterminée à partir de l'approximation des deux bilinéarités. Chaque système est commandé par

$$u = u_{ei} + K_i(x - x_{ei}) \quad \forall i = 1, \dots, 5. \quad (IV.13)$$

Remarque IV.2 : Les gains K_i seront identiques pour chaque cas, vu l'expression des bilinéarités.

N^O	K_i	N^O	K_i
i	[0.0636 0.0021]	i	[0.0914 0.0107]

TAB. IV.6 – Valeurs des gains par retour d'état pour le cas n° 1 (gauche) et n° 2 (droite).

▲

Les consignes locales (valables aux points d'équilibre intermédiaires uniquement) sont résumées dans le tableau IV.7, ci-dessous:

N^0	1	2	3	4	5
u_{ei}	1	0.8824	0.7895	0.6715	0.6522

TAB. IV.7 – Valeurs des commandes locales u_{ei}

Simulations

Les simulations sur le convertisseur nominal sont ajoutées en tirets sur chaque courbe de chaque figure des deux cas, l'un avec l'erreur impulsionnelle et l'autre avec la perturbation. Sur chacune des figures (état, commande et sortie) des deux cas perturbés, les trajectoires du modèle nominal en boucle fermée sont décrites ainsi que la commande u . Comme on peut le constater, la commande séquencée pour le modèle nominal, atteint bien le point de stabilisation ($x_{1f} = 1.10A, x_{2f} = 22.33V$). Le ratio final est égal à 0.67 et a débuté avec une valeur de 0.73.

On peut suggérer que le système non linéaire non perturbé est bien contrôlé, dans un temps de réponse de 0.2s.

Cas n°1: Erreur impulsionnelle sur E .

Pour le cas de l'erreur impulsionnelle effective entre $t = 0.1s$ et $t = 0.2s$, les figures IV.14 et IV.15 décrivent, en traits continus, les trajectoires, la commande u et le changement de modèle. La commande séquencée atteint son objectif de manière précise, de la stabilisation au point d'équilibre ($x_{1f} = 1.10A, x_{2f} = 22.33V$). Le degré de robustesse est appréciable pour une perturbation de ce genre mais, le temps de réponse est modifié et vaut 0.35s. Donc, on observe une baisse du côté des performances. Dès que la perturbation disparaît, la séquence de contrôleurs réussit rapidement à restaurer la situation et à se diriger vers l'état final désiré. Le changement de modèle est illustré par la figure IV.15:

en trait "----": séquence du modèle nominal

en trait "oooo": séquence du modèle perturbé

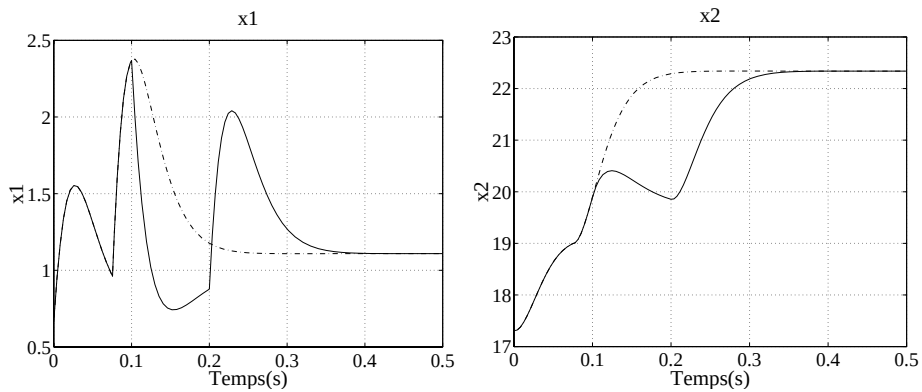


FIG. IV.14 – Courant et tension du convertisseur avec erreur impulsionnelle sur E de -3 V.

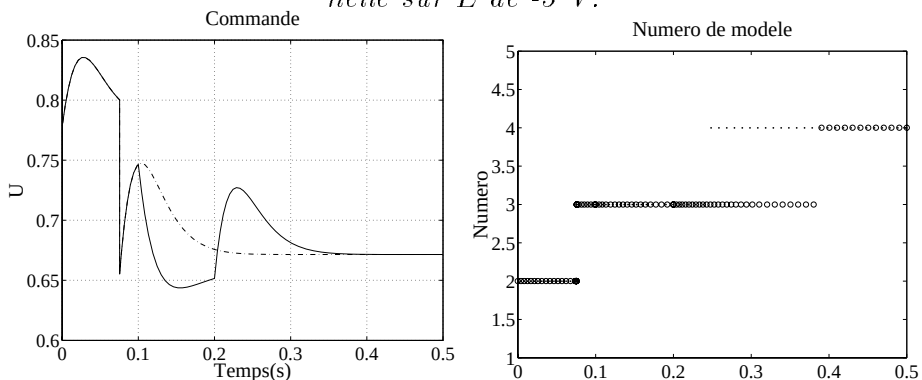


FIG. IV.15 – Commande et indice du convertisseur avec erreur impulsionnelle sur E de -3 V.

Cas n°2: Perturbations sur E .

Dans ce deuxième cas, on suppose que l'on n'a pas la connaissance exacte de la tension d'alimentation et donc qu'il existe une perturbation aléatoire sur toute la durée de la simulation de ± 1 volt. Comme pour le cas avec une erreur impulsionnelle, les figures IV.16 et IV.17 décrivent les trajectoires, la commande et le changement de modèle au cours de la simulation. On observe, toujours d'après la figure IV.16, que la tension d'alimentation est fortement perturbée, ce qui entraîne une forte répercussion sur le courant d'entrée x_1 . Ce courant d'entrée perturbé est directement lié à la perturbation car il fait partie du primaire du système. Au niveau de la tension de sortie x_2 , la perturbation agit aussi, avec moins d'amplitude. Le séquençement de gains robustes est effectué sans problème malgré cette perturbation et l'on s'aperçoit que nous sommes proches du modèle nominal. Le fait de créer un cône d'incertitude et de rechercher une loi de commande robuste rejetant des perturbations en incluant un critère $\mathcal{H}_2$ pour chaque modèle permet d'effectuer le changement de modèle et d'atteindre le point équilibre final. La figure IV.18 montre aussi une localisation de pôles des modèles linéaires en boucle fermée. Il est intéressant de remarquer que les valeurs des pôles sont confinées dans la région convexe $\mathcal{R}(2, 5, \pi/4)$. Ces valeurs sont suffisantes et il n'y a pas besoin de rechercher des pôles plus "durs"[68], grâce au séquençement de gains.

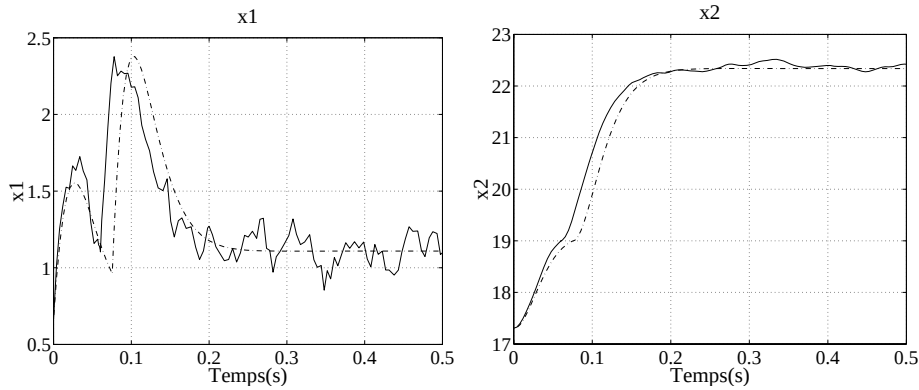


FIG. IV.16 – *Courant et tension du convertisseur avec perturbation centrée sur E de ± 1 V.*

En termes de robustesse et de performance, notons que l'approche séquentielle montre de bonnes performances. Au niveau des réponses du convertisseur, après un fort dépassement dû au changement de loi de commande pour le courant d'entrée, le système va se stabiliser sur le point final désiré. Il est à noter cependant que cet accroissement de courant est nécessaire pour changer de point de fonctionnement. L'apparition d'une erreur de type impulsionnelle engendre un bruit sur la commande qui l'encaisse suffisamment pour que la tension de sortie ne subisse que de petites variations. Le placement de pôles et le critère $\mathcal{H}_2$ en sont à l'origine.

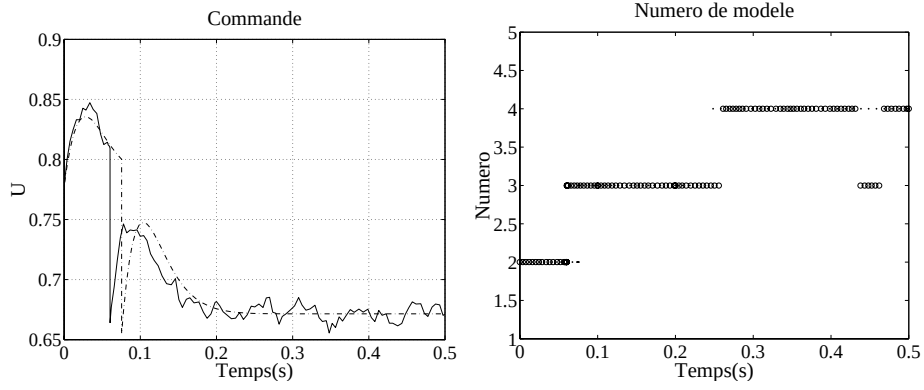


FIG. IV.17 – *Commande et indice du convertisseur avec perturbation centrée sur E de ± 1 V.*

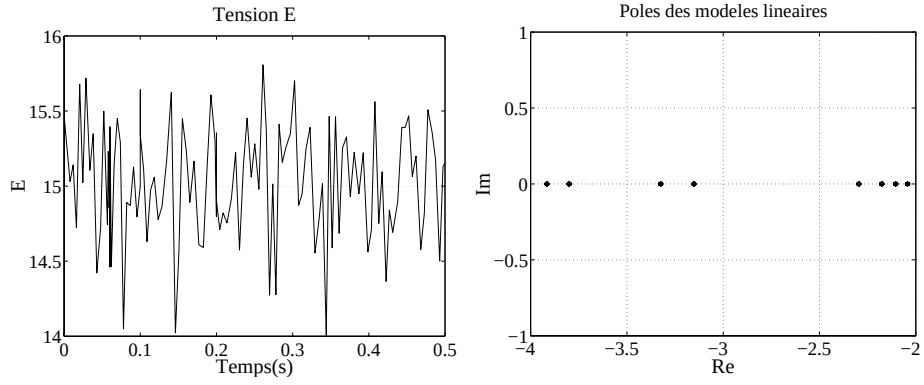


FIG. IV.18 – *Perturbation centrée sur E de ± 1 volt et pôles en boucle fermée.*

Après ces essais sur le convertisseur seul, il est intéressant d'étudier le comportement du panneau solaire complet. Ce dernier se propose d'être complètement non linéaire par l'introduction de la fonction logarithme, en plus de la bilinéarité du convertisseur.

IV.3.3 Panneau solaire entier

Modélisation CPWL

Les relations qui décrivent les tensions V_d et V_p nécessaires pour la commande du panneau solaire sont les suivantes:

Tension aux bornes de la source de courant:

$$V_d = \rho V_T \ln \left(\frac{I_{cc} - \frac{I_1}{n_p}}{I_s} + 1 \right) \quad (\text{IV.14})$$

Tension vue par le convertisseur survolteur:

$$V_p = n_s V_d - \frac{n_s}{n_p} R_s I_1 \quad (\text{IV.15})$$

Posons les équations électriques suivantes:

$$\sum_{i=1}^{N_U} U_i = 0 \rightarrow V_p - L \frac{dI_1}{dt} - u V_2 = 0, \quad (\text{IV.16})$$

$$\sum_{j=1}^{N_I} I_j = 0 \rightarrow -u I_1 + C \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{R} = 0. \quad (\text{IV.17})$$

Grâce à ces équations, nous pouvons écrire le système non linéaire:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{-1}{L} u V_2 + \frac{V_p}{L} \\ \dot{V}_2 = \frac{1}{C} u I_1 - \frac{V_2}{RC} \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Remplaçons dans ce système la tension V_p par

$$V_p = n_s V_d - \frac{n_s}{n_p} R_s I_1 \quad (\text{IV.19})$$

qui s'écrit aussi

$$V_p = n_s \left(\rho V_T \ln \left(\frac{I_{cc} - \frac{I_1}{n_p}}{I_s} + 1 \right) \right) - \frac{n_s}{n_p} R_s I_1 \quad (\text{IV.20})$$

ou encore

$$V_p = n_s \rho V_T \ln \left(\alpha I_1 + \beta \right) - \frac{n_s}{n_p} R_s I_1 \quad (\text{IV.21})$$

avec $\alpha = -\frac{1}{n_p I_s}$ et $\beta = 1 + \frac{I_{cc}}{I_s}$

Après ces quelques calculs et en posant $x_1 = I_1$ et $x_2 = V_2$, nous pouvons écrire le système suivant représentant le panneau solaire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_2 x_1 + k_1 \ln(\alpha x_1 + \beta) + \frac{-1}{L} u x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} u x_1 - \frac{x_2}{RC} \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

avec $k_2 = -\frac{n_s R_s}{n_p L}$ et $k_1 = -\frac{n_s \rho V_T}{L}$

Significations des paramètres et valeurs numériques:

– n_p : Nombre de panneaux en parallèles, $n_p = 1$.

- n_s : Nombre de cellules élémentaires sur un panneau, $n_s = 36$.
- R_s : Résistance de contact et connexion pour une cellule élémentaire, $R_s = 0.07 \, \Omega$.
- I_{cc} : Courant d'alimentation, $I_{cc} = 1.37 \, \text{A}$.
- I_s : Courant d'obscurité des porteurs minoritaires, $I_s = 1.2 \mu\text{A}$.
- L : Inductance du convertisseur, $L = 20 \, \text{mH}$.
- C : Capacité du convertisseur, $C = 20 \, \text{mF}$.
- R : Résistance de charge du convertisseur, $R = 30 \, \Omega$.
- ρ : Résistivité du matériau, $\rho = 1.5 \, \text{S.I.}$
- T : Température, $T = 50 \, \text{degrés}$.
- V_T : Tension caractéristique d'une diode, $V_T = 22e - 3 * \frac{273 + T}{273 + 40} = 0.0227 \, \text{V}$.
- k_1 : constante définie par $k_1 = \frac{n_s V_T \rho}{L} = 61,3$.
- k_2 : constante définie par $k_2 = \frac{n_s R_s}{n_p L} = 126$.
- α : constante définie par $\alpha = \frac{-1}{n_p I_s} = -8.333e05$.
- β : constante définie par $\beta = \frac{I_{cc}}{I_s} + 1 = 1.1417e06$.

L'introduction de la fonction logarithme impose des contraintes sur les domaines d'étude des variables d'état x_1 et x_2 : il faut évidemment que l'argument de la fonction logarithme soit définie positive, c'est-à-dire,

$$\alpha x_1 + \beta > 0 \quad (\text{IV.23})$$

soit

$$x_1 < 1.37 \, \text{A} \quad (\text{IV.24})$$

donc,

$$x_1 \in \mathcal{D}_{x_1}, \mathcal{D}_{x_1} = [0, 1.37[\quad (\text{IV.25})$$

Calcul des correcteurs (retour d'état)

La réalisabilité des correcteurs ne posent pas de problème particulier. Le schéma d'obtention de ces derniers suit la même approche que pour le convertisseur seul. Cette fois-ci, le choix s'est porté sur 4 hyperplans ($\sigma = 4$) pour les approximations. Nous obtenons 6 modèles incertains sur un domaine d'évolution de x_1 entre 0 A et 1.37 A de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{ij}(x - x_{ei}) + B_{2ik}(u - u_{ei}) \\ y(t) = C_{2i}(x - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, 6, \forall j = 1, 2, \forall k = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

pour les points d'équilibre intermédiaires

N^0	1	2	3	4	5	6
x_{1ei}	0.1747	0.2111	0.2589	0.8638	1.0685	1.2606
x_{2ei}	9.7508	10.6764	11.7612	19.7633	21.0371	21.22

TAB. IV.8 – Valeurs des points d'équilibre intermédiaires.

et avec les matrices dynamique, de commande et d'observation de la forme:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \Delta_{ij} - k_2 & 0 \\ 0 & -1.6667 \end{pmatrix} \quad B_{2ik} = \begin{pmatrix} \Delta_{1ik} \\ \Delta_{2ik} \end{pmatrix} \quad C_{2i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

$$\forall i = 1, \dots, 6, \forall j = 1, 2, \forall k = 1, \dots, 4.$$

Δ_{ij} , Δ_{1ik} et Δ_{2ik} représentent respectivement les incertitudes polytopiques de chaque modèle LTI incertain déterminées à partir de l'approximation de la fonction logarithmique et des deux bilinéarités. Chaque système est commandé par

$$u = u_{ei} + K_i(x - x_{ei}) \quad \forall i = 1, \dots, 6. \quad (\text{IV.28})$$

N^0	K_i	N^0	K_i
1	[44.4153 -0.3117]	4	[75.0298 -0.1695]
2	[33.0263 -0.2405]	5	[44.8186 -0.1291]
3	[56.6292 -0.2170]	6	[75.0298 -0.1695]

TAB. IV.9 – Valeurs des gains par retour d'état.

et les commandes locales (valables aux points d'équilibre intermédiaires uniquement) sont résumées dans le tableau IV.10 ci-dessous:

N^0	1	2	3	4	5	6
u_{ei}	1.6913	1.5326	1.3766	0.6933	0.5966	0.5101

TAB. IV.10 – Valeurs des commandes locales u_{ei} .

Simulations

Dans le cadre de cette simulation, nous nous sommes contentés de stabiliser le système non linéaire: par conséquent, nous avons recherché à déterminer une séquence de lois de commande par retour d'état sans contrainte de performance. L'approximation de la non linéarité logarithmique (figure IV.19) pour $\sigma = 4$ est donnée par la figure IV.20 avec l'erreur d'approximation, pour un domaine d'évolution de x_1 défini par $] -1.37, 1.37[$, mais étudiée uniquement sur l'intervalle valable $[0, 1.37[$.

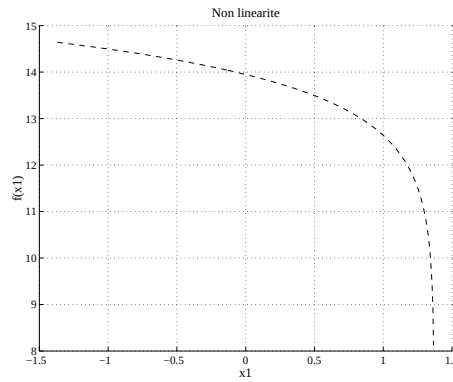


FIG. IV.19 – Non linéarité logarithmique du panneau solaire.

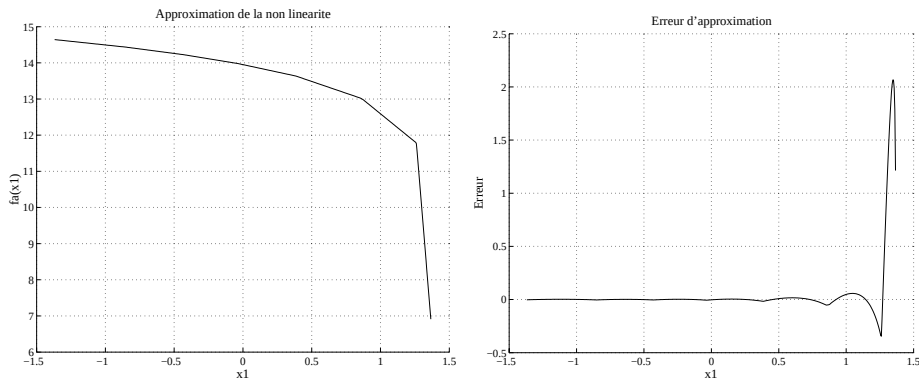


FIG. IV.20 – Approximation de la non linéarité et erreur d'approximation.

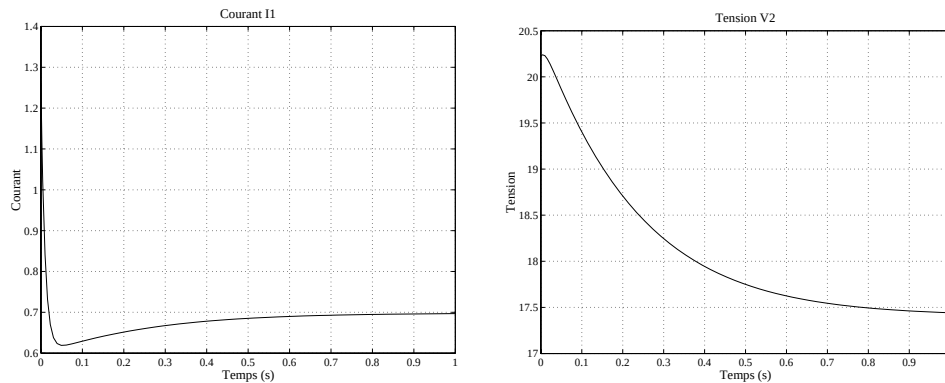


FIG. IV.21 – *Courant d'entrée et tension de sortie pour le panneau solaire.*

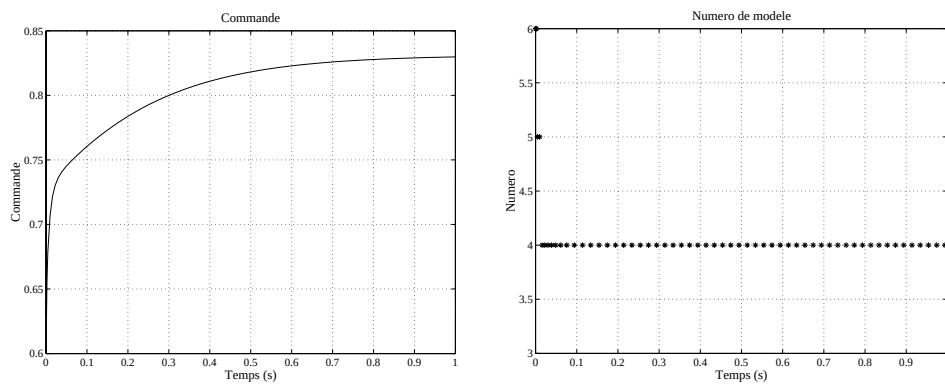


FIG. IV.22 – *Commande et indice des modèles pour le panneau solaire.*

Le courant d'entrée et la tension de sortie sont illustrés par les figures IV.21 pour la régulation du panneau solaire autour du point d'équilibre $x_1 = 0.7$ A. Le changement de modèles est décrit par la figure IV.22. Nous aurions pu inclure, par exemple, un critère supplémentaire pour essayer de calculer la puissance maximale développée en sortie du panneau solaire.

IV.4 Moteur d'aération MTB

IV.4.1 Présentation

Cette application est basée sur l'exemple proposé par [82]. Cet exemple est une illustration de moteur d'aération automatique appelée MTB (Motorized Throttle Body). Nous utilisons un modèle non linéaire approximant celui donné dans [82].

Le système exact est composé de deux parties:

- La partie moteur: cette partie sera modélisée de la même manière que dans [82] et ne sera pas approximée.
- La partie couple: cette partie sera approximée à partir des tableaux et figures proposées dans [82] car nous n'avons pas les expressions exactes des non linéarités.

Le moteur MTB, illustré par la figure IV.23, est décrit par des équations de la forme:

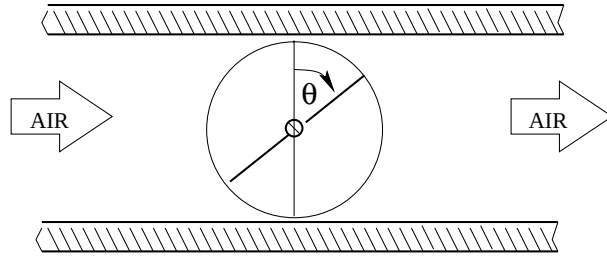


FIG. IV.23 – Moteur d'aération MTB.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

où

$$f(t, x(t)) = A_n x + B_{nl} h(t, x(t)) \quad (\text{IV.30})$$

Les équations sont:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{K_T}{J} i - \frac{T_L}{J} \\ \dot{i} = -\frac{R}{L} i - \frac{K_T}{L} \omega + \frac{1}{L} u \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Significations des paramètres et valeurs numériques:

- $x = [\theta \ \omega \ i]^T$.
- θ, ω , position et vitesse du moteur.
- i, u , courant et tension du moteu.
- K_T coefficient de couple, $K_T = 0.05 \text{ Nm/A}$.
- R résistance du moteur, $R = 1.5 \Omega$.

- L inductance du moteur, $L = 1.5$ mH.
- J inertie total, $J = 16.9e-06$ Kg.m².
- T_L couple total en Nm.

Le couple de charge peut être réécrit de la manière suivante, comme une somme de non linéarités:

$$h(t, x(t)) = -\frac{T_L}{J} = -\frac{1}{J}(T_S(\theta) + T_f(\omega) + T_{ad}(t, \omega, \theta)) \quad (\text{IV.32})$$

avec

- $T_S(\theta)$ représentant le couple de charge généré par les roulements. $T_S(\theta)$ peut être décrite comme une saturation particulière illustrée par la figure IV.24 (droite).
- $T_f(\omega)$ représentant le frottement. $T_f(\omega)$ est aussi considérée comme une saturation illustrée par la figure IV.24 (gauche).
- $T_{ad}(t, \omega, \theta)$ représentant le couple aérodynamique (valeurs non prévisibles) que l'on négligera.

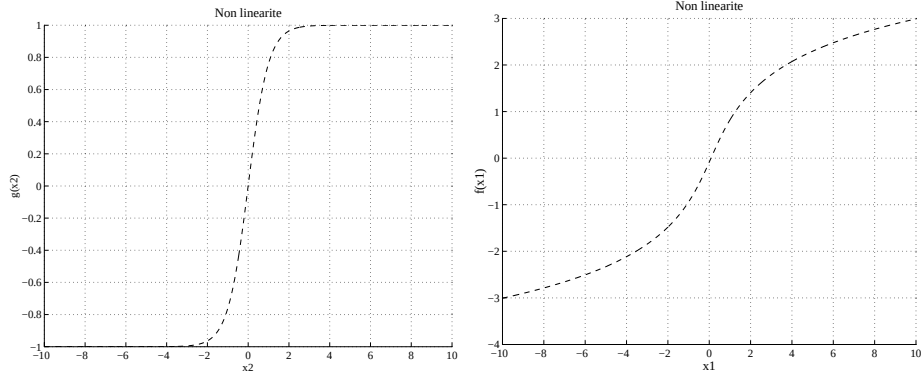


FIG. IV.24 – Couple de charge $T_S(\theta)$ (droite) et couple de frottement $T_f(\omega)$ (gauche).

Les sorties mesurées et contrôlées sont respectivement la position θ et la vitesse ω .
Valeurs numériques des matrices du modèle d'état approché:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2959 \\ 0 & -50 & -2000 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

$$B_{nl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

Non linéarités: Les non linéarités de ce système sont données par $T_S(\theta)$ et $T_f(\omega)$:

$$\begin{cases} h(x(t)) = -\frac{1}{J}(T_S(\theta) + T_f(\omega)) \\ h(x(t)) = \frac{-1}{16.9e - 06}(0.07 * \text{asinh}(x_1 - 0.1) + 0.07 * \tanh(x_2)) \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

Par conséquent, le modèle utilisé s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B_2 u \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

avec

$$f(x(t)) = A_n x + B_{nl}.h(x(t)) \quad (\text{IV.37})$$

Les objectifs sont de déterminer une séquence de lois de commande robustes telle que le modèle non linéaire sera stable en boucle fermée. Les synthèses robustes seront des synthèses par retour d'état et le solveur utilisé sera SEDUMI.

IV.4.2 Modélisation CPWL par deux non linéarités à un argument

Pour l'approximation des deux non linéarités du moteur, nous avons choisi pour chacune d'elles, 8 hyperplans (il est possible de choisir des valeurs différentes pour les deux non linéarités) avec comme domaine d'étude $[-10 \ 10]$ pour chaque argument des non linéarités. Étant donné les expressions des non linéarités, nous pouvons supposer que les points d'équilibre intermédiaires par rapport à la variable x_2 seront nuls. Par conséquent, la non linéarité $T_f(x_2)$ n'aura qu'un seul cône d'incertitude centré en $x_{2ei} = 0$ (figure IV.25). Au total, nous aurons 10 modèles LTI incertains (4 sommets) à déterminer de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{ij}(x - x_{ei}) + B_{2i}(u - u_{ei}) \\ y(t) = C_{2i}(x - x_{ei}) \\ \forall i = 1, \dots, 10, \forall j = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

pour les points d'équilibre intermédiaires correspondant à la non linéarité T_S

et avec les matrices dynamique, de commande, de perturbation et d'observation de la forme:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Delta_{1ij} & \Delta_{2ij} & 2959 \\ 0 & -50 & -2000 \end{pmatrix} \quad B_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

N^0	1	2	3	4	5
x_{1ei}	-8.6802	-5.8918	-3.1307	-2.3561	-1.3247
N^0	6	7	8	9	10
x_{1ei}	-0.6316	0.3588	2.3780	4.3981	7.3101

TAB. IV.11 – Valeurs des points d'équilibre intermédiaires.

$$C_{2i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

$$\forall i = 1, \dots, 10, \forall j = 1, \dots, 4.$$

Δ_{1ij} et Δ_{2ij} représentent les incertitudes polytopiques de chaque modèle LTI incertain déterminée à partir de l'approximation de la non linéarité à deux arguments. Chaque système est commandé par

$$u = u_{ei} + K_i(x - x_{ei}) \quad \forall i = 1, \dots, 10. \quad (\text{IV.41})$$

N^0	K_i
1	[-775.8986 -287.9208 0.6979]
2	[-104.0060 -93.6545 0.8215]
3	[-15.0805 -7.8321 0.0857]
4	[-261.9018 -74.6554 1.1006]
5	[-10.4097 -7.6294 -6.0778]
6	[-10.4122 -2.2239 -1.8254]
7	[-791.9863 -320.6749 0.7509]
8	[-461.2942 -317.4372 0.5905]
9	[-298.6707 -311.3211 0.5156]
10	[-1450.8012 -61.2327 0.7016]

TAB. IV.12 – Valeurs des gains par retour d'état

Les matrices de gains K_i et les consignes locales (valables aux points d'équilibre intermédiaires uniquement) sont respectivement résumées dans les tableaux IV.12 et IV.13:

N^0	1	2	3	4	5
u_{ei}	2.8674	2.5031	2.0034	1.3663	0.1480
N^0	6	7	8	9	10
u_{ei}	0.0872	-1.0755	-1.8398	-2.4581	-2.8586

TAB. IV.13 – Valeurs des commandes locales u_{ei} .

Simulations

Les figures IV.25 et IV.26 décrivent les non linéarités et leur approximation sur l'intervalle d'étude $[-10, 10]$ pour chaque argument des deux non linéarités. Nous pouvons observer

que l'erreur d'approximation (figure IV.27) de la non linéarité T_S reste faible dans l'intervalle d'étude.

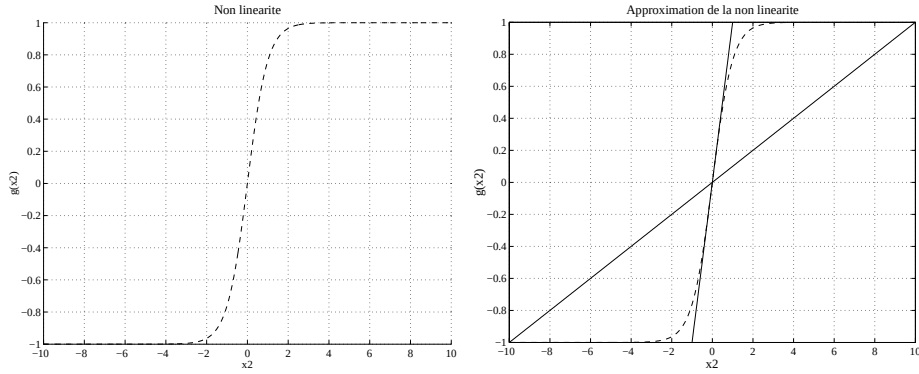


FIG. IV.25 – Non linéarité T_f du moteur MTB.

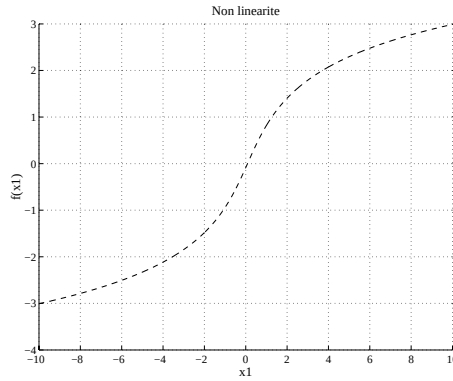


FIG. IV.26 – Non linéarité T_S du moteur MTB.

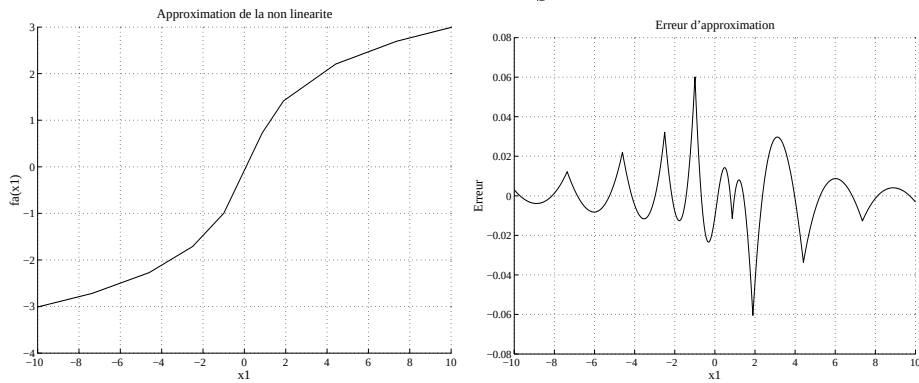


FIG. IV.27 – Approximation et erreur d'approximation.

Nous pouvons observer la commutation des modèles LTI incertains sur la figure IV.28 qui décrit l'évolution de la sortie et donne les indices des modèles linéaires locaux sous les conditions

d'expérience. La figure IV.29 présente la localisation des pôles en boucle ouverte et fermée. Les conditions initiale et finale de simulations sont $x_{10} = -6$ et $x_{1f} = -0.66$.

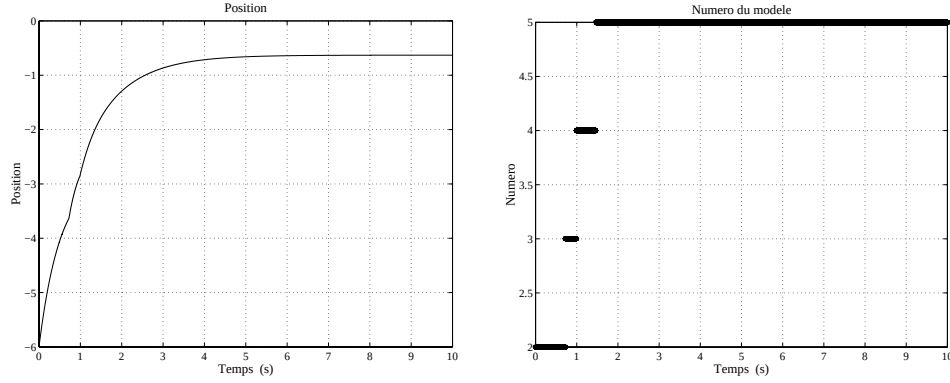


FIG. IV.28 – *Position et numéro des modèles pour le moteur MTB.*

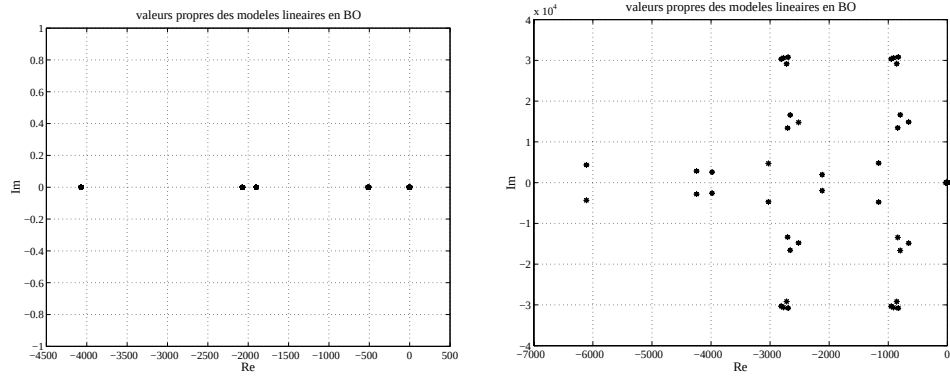


FIG. IV.29 – *Localisation des pôles en boucles ouverte et fermée pour la familles de modèles LTIs incertains.*

IV.5 Lois de commande multi-modèles de la littérature

Pour évaluer l'intérêt de l'approche proposée et illustrée précédemment, nous allons examiner deux approches connues de la communauté Automaticienne, introduites dans le chapitre I, et une approche en développement dans le cadre d'une thèse au LAAS-CNRS (P. Teppa, premiers résultats dans [67]), que nous appellerons "approche par ellipsoïdes".

Reprenons l'application du pendule inversé simple avec les mêmes notations. Nous allons appliquer successivement les quatres approches (CPWL, Q-LPV, par Ellipsoïdes et Floue) dans

un cas particulier de synthèse robuste: un retour d'état avec un critère de performance $\mathcal{H}_2$. Puis, nous établirons une synthèse de ces approches multi-modèles² pour en tirer les points forts et les limites de chaque approche et enfin situer l'approche CPWL parmi ces approches multi-modèles.

IV.5.1 Commande séquencée CPWL

Pour ce cas d'application, nous avons choisi de limiter le domaine d'étude de $[0 \frac{\pi}{2}]$ et le nombre de modèles linéaires incertains locaux à 6 ($\mathcal{N}' = 6$).

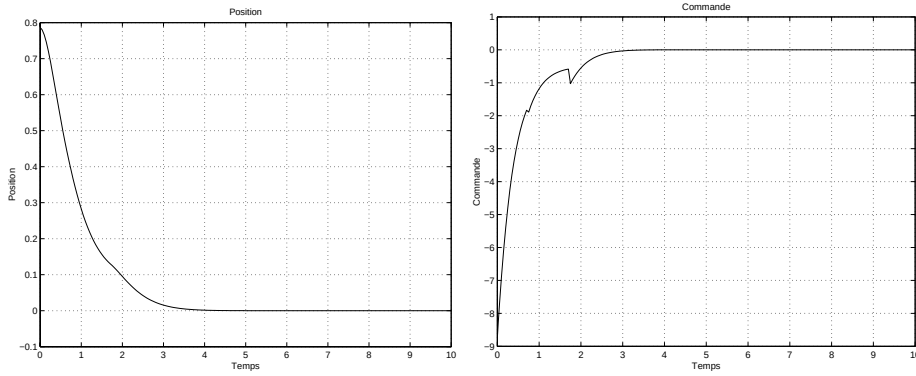


FIG. IV.30 – *Commande et position du pendule*

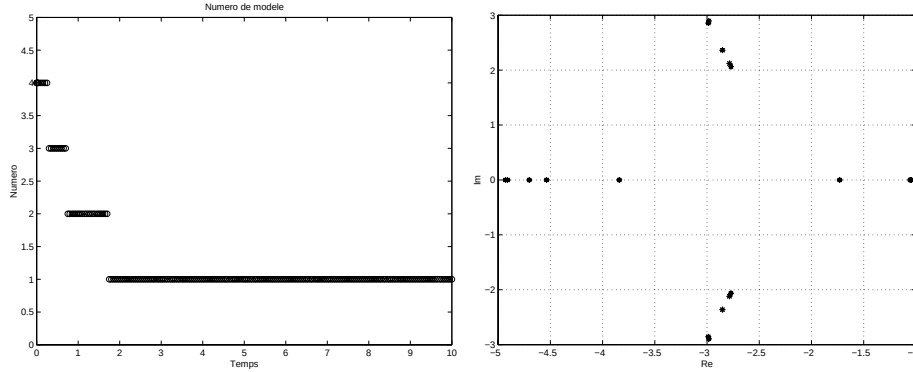
Toujours avec l'aide des résultats classiques de stabilité quadratique, nous pouvons à présent établir les différentes matrices de gains K_i avec la performance demandée.

Nous avons fixé comme conditions initiales $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ et comme état final $\theta(\infty) = 0$. La commutation d'un modèle linéaire local à un autre s'exécute de manière douce et le régime transitoire doit s'effectuer de manière correcte et douce. La réponse atteint son régime permanent avec un temps de réponse de 4s (IV.30). La figure IV.30 décrit la commande globale pour le système non linéaire en boucle fermée. Cette commande est composée d'une séquence de lois de commande robustes locales satisfaisant le théorème III.6 du chapitre III.

La figure IV.31 donne les indices des modèles linéaires locaux sous les conditions d'expérience et les pôles en boucle fermée. Le choix du transfert T_{zw} permet d'améliorer encore le régime transitoire ici mais le critère sur la norme $\mathcal{H}_2$ pouvait bien sûr être utilisé pour satisfaire des contraintes en précision et rejet de perturbation.

Dans notre cas, nous avons pu déterminer des bornes telles que $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu_i$ pour chaque modèle linéaire local. Ces bornes sont exposées dans le tableau IV.14.

2. Le terme de multi-modèle ne convient pas parfaitement pour l'approche Q-LPV.

FIG. IV.31 – *Indice de modèle et pôles en boucle fermée.*

i	1	2	3	4	5	6
μ_i	6.43	9.45	18.70	17.56	17.58	17.33

TAB. IV.14 – *Bornes μ_i .*

IV.5.2 Commande séquencée par ellipsoïdes

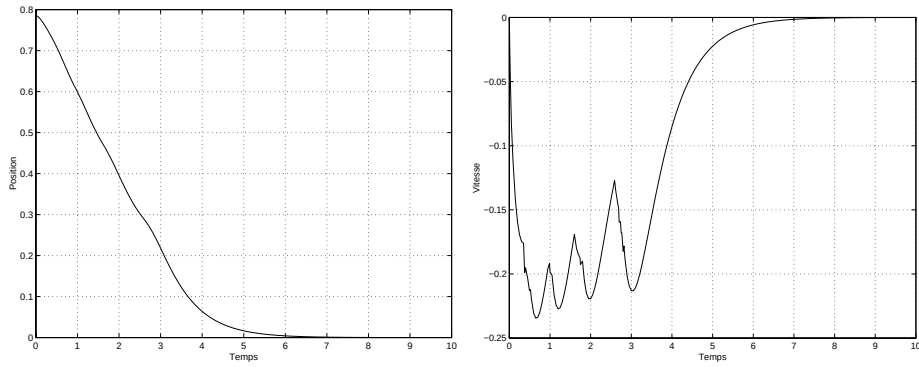
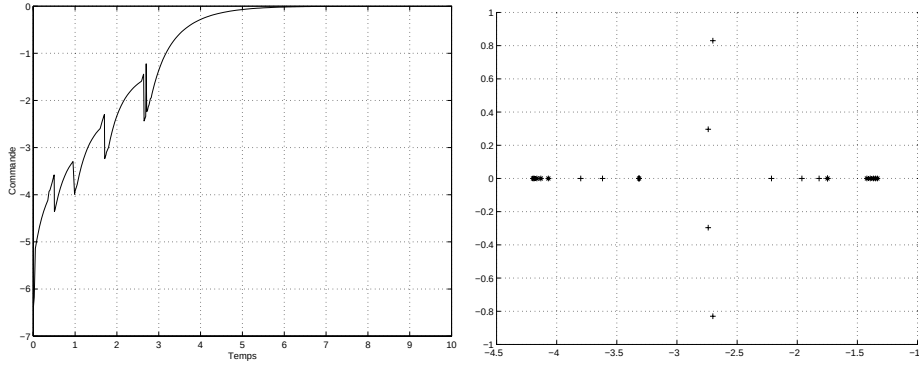
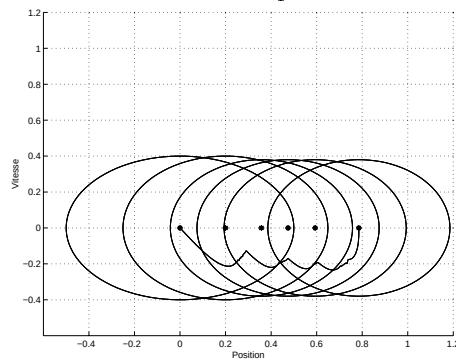
Nous allons présenter brièvement cette approche développée par Pedro Teppa³ [67] dans le cadre de sa thèse et qui s’inscrit bien dans les approches multi-modèles.

Dans cette approche, on encadre localement les non linéarités dans un polyèdre. Puis, on construit une loi de commande linéaire robuste qui garantit la stabilité asymptotique dans une région ellipsoïdale maximale incluse dans le polyèdre autour de chaque point d’équilibre. En répétant la procédure sur une trajectoire “stationnaire” prédéfinie dans l’espace d’état qui connecte les deux points de fonctionnement, il est possible de couvrir la dite trajectoire, par une série d’ellipsoïdes inclus dans des polyèdres, qui assurent la stabilité du système non linéaire en boucle fermée. De plus, on pourra garantir certaines spécifications au niveau local. Le déroulement de cette approche est rappelé en annexe (Annexe B).

En utilisant $x_1(t)$ comme variable de séquençage et fixant la variable d’encadrement en $\delta = 0.25$, (ce qui induit le nombre de correcteurs $\mathcal{N}' = 6$), on trouve les résultats suivants: la position et la vitesse du pendule sont montrées sur la figure IV.32.

La figure IV.34 illustre la trajectoire d’état qui évolue toujours à l’intérieur des ellipses de stabilité pour une condition initiale égale au point de départ ($x_{10} = \frac{\pi}{4}$, $x_{20} = 0$ de l’algorithme). La figure IV.33 décrit aussi la location des pôles des modèles linéaires en boucle fermée. Pour cette approche aussi, les valeurs des bornes pour le transfert $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu_i$ dans la table IV.15.

3. Doctorant vénézuélien effectuant sa thèse au LAAS-CNRS en cotutelle avec son pays et la France.

FIG. IV.32 – *Position et vitesse du pendule.*FIG. IV.33 – *Commande et pôles en boucle fermée.*FIG. IV.34 – *Trajectoire de la vitesse en fonction de la position.*

IV.5.3 Commande Q-LPV

Concernant l'approche Q-LPV, nous avons rappelé dans le premier chapitre ses principes. Les lois de commande s'écrivent de la manière suivante

$$u = K(\tau)x \quad (\text{IV.42})$$

i	1	2	3	4	5	6
μ_i	6.31	9.81	17.37	17.27	17.17	17.01

TAB. IV.15 – Bornes μ_i .

avec $K(\tau)$ défini sur le domaine:

$$\mathcal{D}_{K(\tau)} := \left\{ K(\tau) : K(\tau) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j(\tau) K_j, \lambda_j(\tau) \geq 0, \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j(\tau) = 1 \right\} \quad (\text{IV.43})$$

Appliquons au pendule inversé simple, la relation de transformation pour déterminer le nouveau modèle Q-LPV de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = A(y)x + B_2(y)u, & x(0) = x_0 \\ y = C_2x \\ \forall t \geq 0, y(t) \in \mathcal{P}_y \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

avec

$$A(y) = A_n + B_{nl} \left(\int_0^1 \nabla h(ty) dt \right) C_2 \quad (\text{IV.45})$$

valable pour un modèle de la forme générale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B_2(y(t))u, & x(0) = x_0 \\ y(t) = C_2x(t) \\ \forall t \geq 0, y(t) \in \mathcal{P}_y \end{cases} \quad (\text{IV.46})$$

avec

$$f(x) = A_n x + B_{nl} h(y) \quad (\text{IV.47})$$

Calcul de $A(y)$:

$$h(y) = \sin(x_1(t)) = \sin(y) \quad (\text{IV.48})$$

$$\int_0^1 \nabla h(ty) dt = \left(\frac{\cos(ty)}{y^2} + \frac{t \sin(ty)}{y} - \frac{1}{y^2} \right)_0^1 \quad (\text{IV.49})$$

donc,

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta(y) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

avec

$$\zeta(y) = \left(\frac{\cos(y)}{y^2} + \frac{\sin(y)}{y} - \frac{2}{y^2} \right) \quad (\text{IV.51})$$

Le paramètre ζ va évoluer dans le domaine défini par l'évolution de la sortie y :

$$y \in [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \zeta \in [0.23, 0.5] \quad (\text{IV.52})$$

Pour cette application, il nous faut déterminer les lois de commande par retour d'état avec le critère $\mathcal{H}_2$ pour les sommets suivants:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.1409 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3063 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.53})$$

Nous obtenons les gains K_j suivants:

$$\begin{cases} K_1 = [-6.9045 & -0.3187] \\ K_2 = [-9.9711 & -0.6921] \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

Il ne reste plus qu'à calculer les valeurs $\lambda_j(\tau)$ à partir des relations suivantes:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \lambda_j(\tau) = 1 \\ \tau = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \tau_j \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

d'où,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \zeta = \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

Par conséquent,

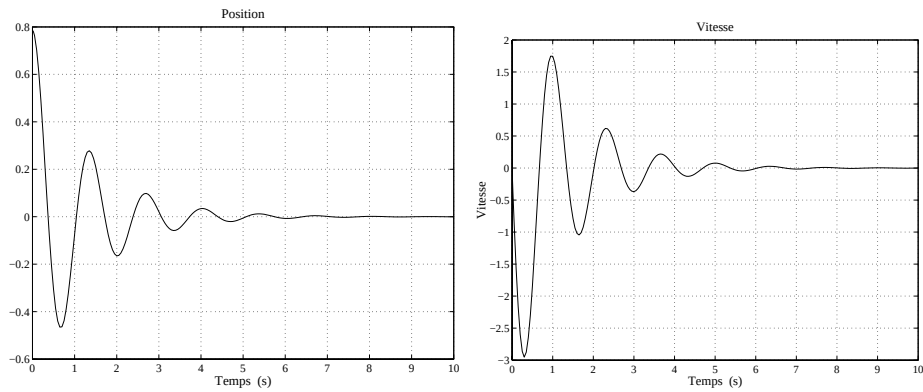
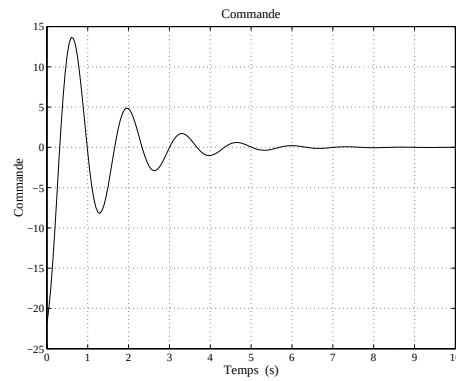
$$\lambda_1 = -3.7(\zeta - 1.23) \quad (\text{IV.57})$$

$$\lambda_2 = 3.7(\zeta - 0.23) \quad (\text{IV.58})$$

Les figures IV.35 et IV.36 décrivent la position, la vitesse et la commande du pendule pour les mêmes conditions d'expériences, c'est-à-dire la commande du pendule de $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ vers l'état final $\theta(\infty) = 0$.

IV.5.4 Commande floue

Nous avons choisi d'introduire un contrôleur de Takagi-Sugeno du deuxième type car nous voulons étudier le problème de la régulation pour le pendule simple inversé. Nous allons nous intéresser particulièrement à la forme des fonctions d'appartenance des entrées du contrôleur flou (c'est-à-dire les variables d'état) puis à la forme des règles floues.

FIG. IV.35 – *Position et vitesse angulaire pour le pendule.*FIG. IV.36 – *Commande LPV pour le pendule.*

Les fonctions d'appartenance

Soit x le vecteur d'état. Il est composé de deux variables d'état:

- un angle (position angulaire): x_1 ,
- la vitesse angulaire: $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$.

Remarque IV.3 : *La modélisation du pendule simple inversé rappelle directement la modélisation du bras-robot plan à deux membres [62] et nous nous en inspirons pour les fonctions d'appartenance.*

▲

L'angle x_1 est caractérisé par les sous-ensembles flous *faible* (*Low*), *moyen* (*Medium*) et *élevé* (*High*). Sa dérivée $\dot{x}_1$ est caractérisée par les sous-ensembles flous *négative* (*N*) et *positive*

(P). Le partitionnement dans l'espace d'état flou s'illustre par le tableau IV.16 et par la figure IV.37.

Variable	Sous-ensembles flous	Centre des régions
x_1	Low, Medium, High	$(-\pi, 0, \pi)$
x_2	N, P	$(-10, 10)$

TAB. IV.16 – *Partitionnement de l'espace d'état flou.*

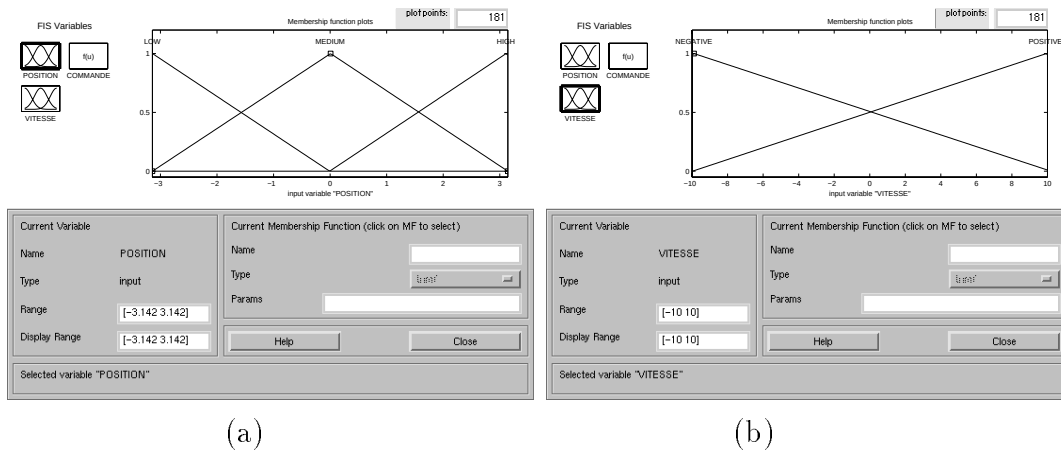


FIG. IV.37 – *Fonctions d'appartenance: (a) x_1 - (b) $\dot{x}_1 = x_2$*

Remarque IV.4 : *Il existe d'autres manières de modéliser les variables d'état avec d'autres fonctions d'appartenance mais une position angulaire est facilement caractérisée par sa grandeur (Faible, Moyenne et Forte), ainsi que sa vitesse angulaire (dérivée de la position angulaire) par le signe (Négatif et Positif).*

▲

Les règles floues

Nous allons utiliser les propriétés du contrôleur flou de Takagi-Sugeno (deuxième type). Pour être en accord avec le chapitre I, il faut créer $\mathcal{N}'$ modèles linéaires. Par conséquent, nous choisissons $\mathcal{N}'$ couples de points (x_{ei}, u_{ei}) pour lesquels nous calculons respectivement leur modèle linéarisé et leur loi de commande linéaire:

$$\delta \dot{x} = A(x_{ei}, u_{ei}).\delta x + B(x_{ei}, u_{ei}).\delta u, \quad (\text{IV.59})$$

pour

$$\delta u = K(x_{ei}, u_{ei}).\delta x \quad (\text{IV.60})$$

Soit un couple de point opérationnel (x_d, u_d) différents des $\mathcal{N}'$ couples de points (x_{ei}, u_{ei}) . Ecrivons les règles floues du contrôleur et du modèle flou en ce point en utilisant les $\mathcal{N}'$ lois de commande déjà existantes:

Pour le modèle flou:

$$R_s^i : Si\ x_d = LX^i\ Alors\ \delta\dot{x} = A(x_{ei}, u_{ei}).\delta x + B(x_{ei}, u_{ei}).\delta u, \quad (IV.61)$$

Pour le contrôleur flou:

$$R_c^i : Si\ x_d = LX^i\ Alors\ \delta u = K(x_{ei}, u_{ei})\delta x, \quad (IV.62)$$

avec

$$\begin{cases} \delta x = x - x_d, \\ \delta u = u - u_d, \\ \delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_d, \end{cases} \quad (IV.63)$$

et la matrice de gain $K(x_{ei}, u_{ei})$ s'écrit:

$$K(x_{ei}, u_{ei}) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^i \quad (IV.64)$$

d'où

$$\delta u(x_{ei}, u_{ei}) = \delta u(x_{ei}) \begin{pmatrix} k_1\delta x_1 + k_2\delta x_2 \end{pmatrix}^i. \quad (IV.65)$$

Nous observons que pour chaque règle, la conclusion est une fonction linéaire des entrées, c'est-à-dire, des variables d'état. Le nombre de règles dépend du nombre des entrées et des termes linguistiques des entrées, ici:

- 1 entrées à 2 termes
- 1 entrées à 3 termes

Par conséquent, le nombre de règles est: $2*3 = 6$ règles ($\mathcal{N}' = 6$). La base de règles floues avec les valeurs numériques se situent dans le tableau suivant IV.17 et les gains dans le tableau IV.18:

N^0	R_c^j
1	If (POSITION is LOW) and (VITESSE is NEGATIVE) then (COMMANDE is loi1) (1)
2	If (POSITION is LOW) and (VITESSE is POSITIVE) then (COMMANDE is loi2) (1)
3	If (POSITION is MEDIUM) and (VITESSE is NEGATIVE) then (COMMANDE is loi3) (1)
4	If (POSITION is MEDIUM) and (VITESSE is POSITIVE) then (COMMANDE is loi4) (1)
5	If (POSITION is HIGH) and (VITESSE is NEGATIVE) then (COMMANDE is loi5) (1)
6	If (POSITION is HIGH) and (VITESSE is POSITIVE) then (COMMANDE is loi6) (1)

TAB. IV.17 – *Tables des règles floues.*

Comme pour la commande Q-LPV, les variables d'état présente un régime transitoire oscillatoire important. Ce comportement est décrit sur les figures IV.38 et IV.39.

N^0	K_i (Gain de la loi i)	N^0	K_i (Gain de la loi i)
1	[-11.2499 -4.5276]	4	[-9.9148 -4.2225]
2	[-11.0992 -4.4943]	5	[-8.9104 -3.9775]
3	[-10.6504 -4.3933]	6	[-7.6620 -3.6502]

TAB. IV.18 – Valeurs des gains par retour d'état.

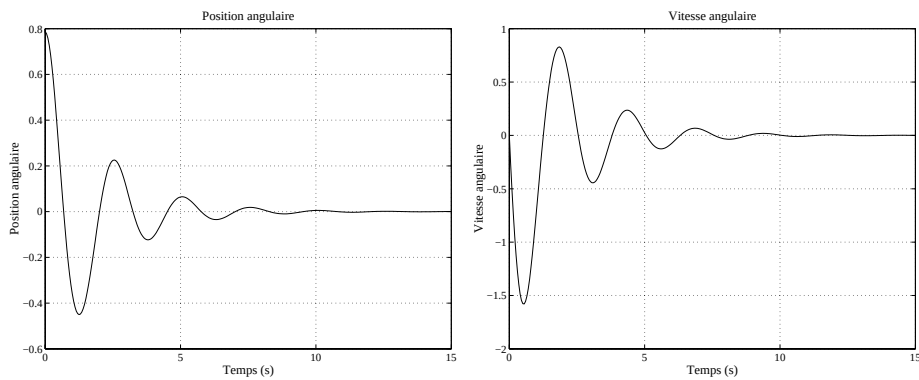


FIG. IV.38 – Position et vitesse angulaire pour le pendule.

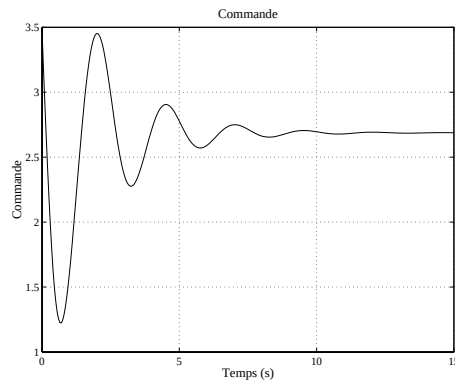


FIG. IV.39 – Commande pour le pendule.

IV.5.5 Synthèse

Cette synthèse a pour but de repérer rapidement dans un premier temps, les forces et faiblesses de chacune des approches précédemment appliquées sur l'exemple simple du pendule inversé. Nous souhaitons que cette synthèse soit la plus objective possible et ne “classe” pas les approches proposées. Dans un deuxième temps, nous souhaitons situer notre travail (l'approche CPWL).

– **Approche Q-LPV**

Bien que cette approche recherche un nombre fini de correcteurs, la force de cette approche se situe dans le séquençement des gains par l'intermédiaire des paramètres variant dans le temps. Par conséquent, la trajectoire ne subit pas de saut non désiré. Par contre, la faiblesse majeure de cette approche se situe au niveau du calcul d'une intégrale d'un gradient (équation IV.45), calcul qui n'est pas forcément évident pour toute expression non linéaire. L'exemple du pendule avec une non linéarité sinusoïdale est déjà relativement complexe.

– **Approche par ellipsoïdes**

Comme pour l'approche Q-LPV, l'approche par ellipsoïdes présente un nombre de calculs importants au niveau des ellipsoïdes et des polyèdres. Malgré des sauts au niveau de la commande, cette approche permet de représenter un système non linéaire par une famille de modèles LTIs incertains polytopiques sans approximer les non linéarités du système non linéaire. On peut "adoucir" la commande en augmentant le nombre d'ellipsoïdes.

– **Approche floue**

L'approche floue se distingue des autres approches par l'utilisation de règles et d'une "moyennisation" des lois de commande, ce qui garantit une continuité au niveau des sorties et évite ainsi une succession de sauts. De plus, l'approche floue autorise une méconnaissance d'un modèle analytique du système. Les faiblesses de cette approche sont liées au nombre de règles qui peut vite "exploser" suivant le système à étudier et la détermination des points de linéarisation.

– **Approche CPWL**

L'approche CPWL se présente des points forts qui la distingue des trois autres approches: la détermination des points d'équilibre intermédiaires n'est pas déterminée manuellement mais en approximant systématiquement les non linéarités par des fonctions canoniques linéaires par morceaux. La systématisation totale de l'approche est possible grâce au calcul des cônes d'incertitude pour l'obtention d'une famille de modèles LTIs incertains polytopiques. Comme pour l'approche par ellipsoïdes, on peut augmenter le nombre de modèles LTIs incertains par l'intermédiaire du nombre d'hyperplans, afin d'adoucir la commande. Par contre, l'approche CPWL présente un handicap lié à la taille des non linéarités (nombre d'arguments) à approximer, problème non résolu à l'heure actuelle.

Nous pouvons tirer quelques remarques quant à la situation de l'approche CPWL parmi les approches examinées. Nous pouvons dire que l'approche CPWL se rapproche de la méthode par ellipsoïdes sur les points suivants: le type d'incertitude des modèles LTIs, l'ordre

des non linéarités, l'existence de conditions d'inclusion pour la transition de modèle et l'existence de points d'équilibre intermédiaires.

L'approche CPWL présente des similitudes avec à l'approche Q-LPV sur les aspects incertitudes polytopiques, matrice dynamique incertaine du système non linéaire et nombre de sommets. Mais il ne faut pas oublier l'approche floue qui a des points communs avec l'approche CPWL comme la facilité de mise en oeuvre (pas de calcul annexe) et l'existence de points opérationnels.

Toutes ces méthodes ont des points communs, en particulier sur l'aspect multi-modèle.

Le nombre de modèles et de paramètres, le nombre de LMIs à résoudre, et enfin, une caractéristique très importante dans cette approche, la systématisation (de toute l'approche et en particulier dans la détermination des points d'équilibre), font que l'approche CPWL est une approche à part entière, dotée de points forts (systèmeatisation, robustesse, stabilité,...) mais qu'il ne faut pas oublier qu'elle a un certain conservatisme et un compromis entre la précision de l'approximation des non linéarités et le nombre de modèles LTIs incertains polytopiques.

Nous résumons et concluons cette synthèse par la figure IV.40. Cette figure est faite pour situer l'approche CPWL. Chaque approche est représentée par un tryptique, avec une branche commune qui représente l'aspect multi-modèle commun aux quatre approches. Il existe un recouvrement entre l'approche CPWL et chacune des trois approches. Les liens entre les approches sont représentées par des flèches en traits discontinus. Chacune des quatre approches est illustrée par un tryptique de telle sorte que chaque branche indique une direction majeure de travail. Les approches sont plus ou moins proches de ces directions de travail (stabilité, robustesse et performance, séquençement de gains).

IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'applicabilité de l'approche présentée dans ce mémoire a été illustrée sur trois types de modèles concrets. Sur ces exemples numériques réels, on peut voir la pertinence de l'utilisation de l'approche CPWL proposée dans ce manuscrit. Que ce soit un système simple, comme le pendule ou les applications industrielles comme le panneau solaire et le moteur d'aération MTB, l'approche CPWL montre toutes ses possibilités quant à l'approximation des diverses non linéarités, et la régulation de ces systèmes par des synthèses robustes séquencées. Ces applications illustrent notamment le bien-fondé de notre approche qui, calquée sur l'approximation systématique par morceaux des non linéarités, permet de générer des correcteurs robustes pour des systèmes LTIs incertains. Elle met également en évidence l'intérêt de la modélisation des cônes d'incertitude permettant la détermination des modèles LTIs incertains (polytopiques) et le séquençement des correcteurs. Suivant les expressions des non linéarités, il faudra penser au compromis entre le nombre de modèles (à partir du nombre d'hyperplans) et la précision des approximations des non linéarités. Par ailleurs, il est intéressant de noter

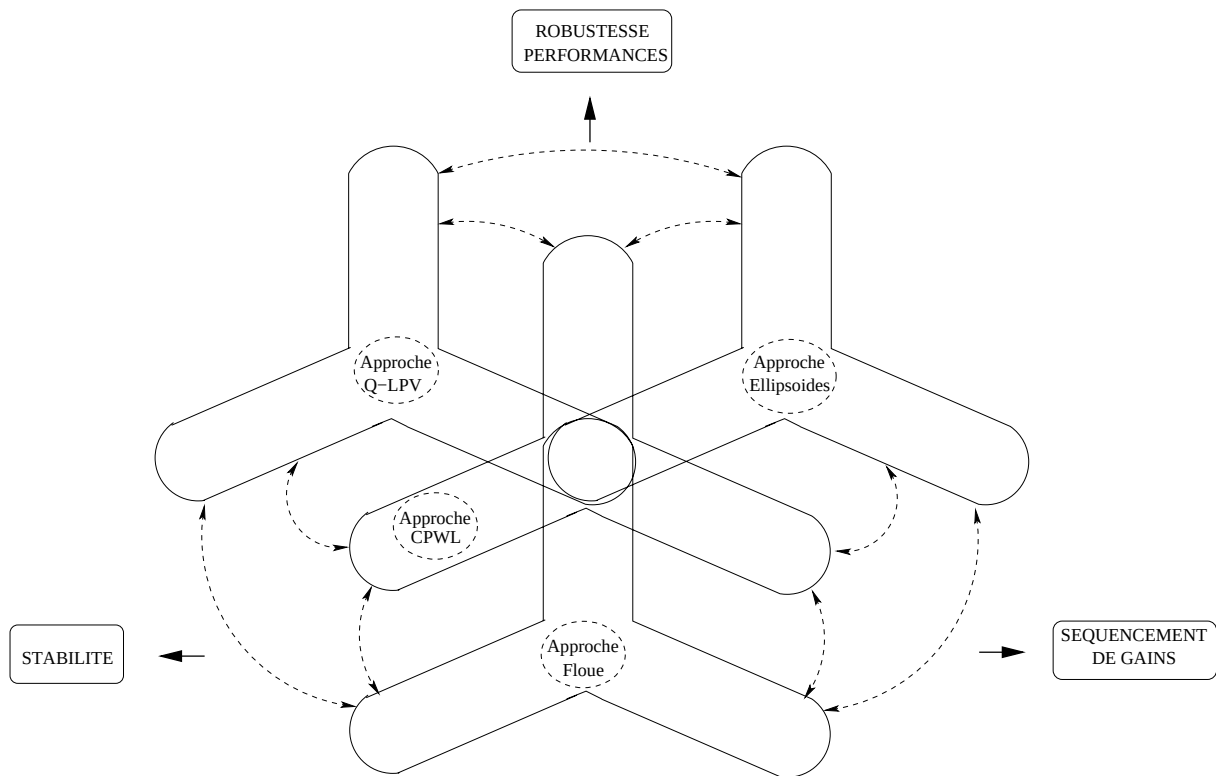


FIG. IV.40 – Situation de l'approche CPWL.

le caractère générique et systématique de l'approche CPWL, depuis la saisie du système non linéaire jusqu'à la détermination des correcteurs robustes, grâce à l'utilisation du prototype logiciel CAPILARS 1.01 v Beta décrit au chapitre III.

Pour conclure ce chapitre d'applications, nous avons essayer de situer l'approche CPWL parmi d'autres approches "multi-modèles": l'approche Q-LPV, l'approche floue et l'approche par ellipsoïdes. Cette synthèse nous a permis d'exprimer les caractéristiques communes de chaque approche par rapport à l'approche CPWL et de montrer que cette dernière répondait bien aux attentes et objectifs que l'on s'était fixés: créer une approche systématique multi-modèles pour une classe de système non linéaire, en utilisant des outils de la commande robuste dans le but d'assurer la stabilité "globale" et tenir compte de critères de performances.

Conclusion Générale

Il existe bien sûr des systèmes pour lesquels on ne peut s'affranchir du caractère non linéaire et pour lesquels l'approche par linéarisation est difficilement applicable. Le domaine des systèmes non linéaires fait, à l'heure actuelle, l'objet d'attentions et de recherches nombreuses et, même si des résultats probants et importants ont été obtenus, on peut dire que la plupart des outils et méthodes développées ne satisfont pas encore le critère fondamental nécessaire à leur introduction au plan des applications: complexité versus performances. Il est, en effet, important, aux yeux du monde industriel, que le gain en performances ne soit pas complètement occulté devant l'accroissement en complexité des lois de commande. Ceci est vrai sauf, peut-être, dans le domaine des hautes technologies. Ceci explique, par exemple, le succès des approches prédictives à la fois simples au plan du principe et de leur application. On peut toutefois leur reprocher un manque de robustesse et leur domaine reste encore celui des processus de dynamique suffisamment lente.

Le domaine linéariste s'est enrichi cette dernière décennie, de méthodes et de résultats importants et notamment ceux qui débouchent sur des formulations de type LMI (Linear Matrix Inequality) qui permettent la recherche élégante et efficace de problèmes de robustesse multicritère. Notre travail s'inscrit dans la voie qui tente à utiliser et adapter ces résultats afin de fournir des approches pour la synthèse de commande non linéaires qui, tout en conservant un degré de complexité raisonnable, garantissent un degré d'optimalité. L'approche LPV (ou Q-LPV) est un exemple de telle approche où il est fait l'hypothèse de la mesure en ligne des paramètres variant dans le temps. Son application à l'extention des systèmes non linéaires impose une forme particulière de type "bilinéarité": linéarité par rapport aux non linéarités à arguments mesurés. On peut citer, aussi, les approches plus ou moins heuristiques d'approches multimodale, ou d'approche logique floue pour lesquelles la difficulté réside surtout dans le fait qu'il est assez difficile de garantir des performances du fait de leur caractère plus ou moins heuristique. L'approche que nous avons développée est une approche par modélisation par systèmes

dynamiques avec incertitude, synthèse de commande à coût garanti et, finalement, proposition d'une loi globale par séquençement de gains.

Notre travail se divise en trois parties (théorique, applicative et logicielle). Après un chapitre introductif présentant les concepts généraux sur la commande des systèmes dynamiques, nous avons abordé l'approximation systématique de non linéarités conduisant à la détermination de modèles LTIs incertains polytopiques. L'inconvénient d'une telle méthode est la multiplicité de modèles LTIs que nous devons contraindre et réguler: il faut faire un compromis entre le nombre d'hyperplans déterminant l'approximation de chaque non linéarité et la précision des approximations. Les approximations des non linéarités se basent sur les représentations de Chua qui utilisent une forme canonique linéaire par morceaux (CPWL) déterminés sur une famille d'hyperplans.

Dans le troisième chapitre, nous avons décrit la dernière étape de l'approche CPWL qui est l'utilisation d'outils de la commande robuste pour effectuer différentes synthèses robustes pour chaque modèle de la famille de modèles LTIs incertains polytopiques: nous avons développé ces synthèses suivant deux types de correcteurs, les correcteurs par retour d'état et les correcteurs par retour de sortie dynamique, en tenant compte de critères de performance, d'optimisation de type $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ et placement de pôles dans une région du plan complexe. Une fois l'algorithme complètement décrit, nous avons développé un prototype logiciel, CAPILARS 1.01 qui réalise la totalité de l'approche CPWL de manière systématique, jusqu'à la détermination des correcteurs robustes, à partir de deux solveurs d'inégalités matricielles linéaires:

- LMILAB, solveur standard de MATLAB [36],
- SEDUMI [92], logiciel libre, utilisable depuis MATLAB et associé à l'interface SEDUMI INTERFACE [78], [77] et [66].

Dans le chapitre IV, nous avons concentré une part importante de nos efforts aux développements d'applications réalistes et variées. Dans un premier temps, nous avons exécuté l'approche CPWL sur un modèle de pendule inversé simple. Cette première application permet, à partir d'une non linéarité sinusoïdale, d'illustrer l'approche. Puis, nous avons appliqué l'approche CPWL sur la commande d'un panneau solaire. Par la suite, un moteur de conduite d'aération est étudié: ce modèle est composé de deux non linéarités à un argument. Ce chapitre IV se termine par une synthèse comparative dans laquelle ressortent les forces et les faiblesses de l'approche CPWL, des deux méthodes introduites au cours du chapitre I (approche floue et approche Q-LPV) et d'une approche dite par ellipsoïdes. Cette synthèse a pour but final de situer l'approche CPWL parmi ces approches dites "à base de modèles" et vérifier si les objectifs sont atteints. Cette synthèse met en évidence que l'approche CPWL s'applique aux systèmes non linéaires, en utilisant des aspects de séquençement de gains et en tenant compte de concepts tels que la stabilité en boucle fermée, la robustesse et les performances.

Naturellement, par le biais de l'approche CPWL, nous ne prétendons pas résoudre tous les problèmes que pose la commande des systèmes non linéaires. Il existe des applications pour lesquelles la détermination des points d'équilibre ne sera pas aussi évidente: l'approximation des non linéarités dépendant d'au moins trois arguments, le comportement de type non minimum de phase présenté au chapitre II, ...

En conclusion, nous pouvons proposer les extensions suivantes de ce travail:

1. D'un point de vue théorique:

Les prolongements possibles de nos travaux, sur le plan théorique, pourraient se situer aux niveaux de l'amélioration du comportement et de la rapidité des algorithmes, et sur l'évolution des algorithmes concernant les systèmes non linéaires posant des problèmes tels que:

- les comportements de type non minimum de phase,
- les non linéarités dépendant d'au moins trois arguments (variables d'état et/ou commandes),
- détermination des points d'équilibre intermédiaires.

Concernant le comportement et la rapidité des algorithmes, il s'agit là d'un travail plus proche des préoccupations du numéricien que de l'automaticien. Nous ne doutons pas que les travaux des spécialistes, dans ce domaine, pourront apporter encore davantage de crédit à ce type de technique. On pensera, pour des extensions envisageables au niveau des non linéarités à trois arguments ou plus, de considérer des modèles LTIs incertains bornés en norme, au lieu d'incertitudes polytopiques. Pour le problème de détermination de points d'équilibre intermédiaires, nous pouvons penser à nous orienter vers des aspects de la commande optimale et/ou de la platitude pour générer une trajectoire de référence. Enfin, pour les problèmes de comportement de type non minimum de phase, il sera possible de considérer des critères supplémentaires.

2. D'un point de vue pratique et logiciel:

- optimisation des routines sous MATLAB, en utilisant le format SPARSE, ce qui engendrerait une diminution de la taille mémoire utilisée et des temps de calculs.

- modification du logiciel CAPILARS 1.01 pour des systèmes non linéaires ayant des non linéarités dépendant d'au moins trois arguments (variables d'état et/ou commandes).
- amélioration du guide d'utilisation de CAPILARS 1.01.
- application sur des modèles encore plus complexes: le groupe MAC (Méthode et Algorithmes de Commandes) du LAAS-CNRS vient de faire l'acquisition d'un modèle d'hélicoptère réduit 3D. Cette application pourrait faire l'objet d'une validation plus concrète de l'approche CPWL et pourrait la faire passer au stade de l'implantation réelle.
- développer toutes les routines possibles (retour de sortie dynamique en particulier) avec les critères $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ et placement de pôles dans une région du plan complexe avec SEDUMI.

Annexe A

Initialisation de l'approximation d'une non linéarité

L'étape d'initialisation pour ce problème est une phase importante pour la convergence de l'algorithme:

Soit une fonction continue $f : S \mapsto \mathbb{R}$ avec $S \subset \mathbb{R}^{n'}$ représentant un domaine compact. Pour un nombre σ d'hyperplans fixé, il faut déterminer l'approximation $\bar{f}$ de f telle que

$$\bar{f}(\theta^*, z) = a^* + b^{*T}z + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i^* |\alpha_i^{*T}z - \beta_i^*|, \quad (\text{A.1})$$

où

$$\theta^* = [a^*, b^{*T}, c_1^*, \dots, c_{\sigma}^*, \alpha_1^{*T}, \dots, \alpha_{\sigma}^{*T}, \beta_1^*, \dots, \beta_{\sigma}^*]^T \quad (\text{A.2})$$

est l'ensemble des paramètres optimaux qui minimise le critère d'erreur suivant

$$J = \sum_{\kappa} \left(f(z_{\kappa}) - \bar{f}(\theta_{\kappa}, z_{\kappa}) \right)^2 \quad \forall z_{\kappa} \in S. \quad (\text{A.3})$$

et où la variable z est discrétisée (z_{κ}).

Soit le domaine S défini tel que

$$S : = \{z = (z_1, \dots, z_{n'}) \in \mathcal{R}^n : |z_i - \rho_i| \leq \delta_i\} \quad (\text{A.4})$$

soit σ le nombre d'hyperplans tel que

$$\sigma = t.n' \quad (\text{A.5})$$

c'est-à-dire qu'il correspond à un multiple de la dimension du vecteur z . Soit la matrice P_κ initialisée par P_0 telle que

$$P_0 = \text{diag}(\varrho_1, \dots, \varrho_p) \quad (\text{A.6})$$

avec p défini comme le nombre de paramètres de θ_κ , c'est-à-dire,

$$p = 1 + n' + (2 + n')\sigma \quad (\text{A.7})$$

Le vecteur des paramètres est initialisé comme suit

$$\theta_0 = [0, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_\sigma, \beta_1, \dots, \beta_\sigma]^T \quad (\text{A.8})$$

avec

$$\alpha_{(i-1)t+j} = e_i, \quad \forall i \in [1, n'], \forall j \in [1, t] \quad (\text{A.9})$$

$$\beta_{(i-1)t+j} = \rho_i - \delta_i + \frac{j\delta_i}{(t+1)}, \quad \forall i \in [1, n'], \forall j \in [1, t] \quad (\text{A.10})$$

e_i correspond à un vecteur unité.

Les valeurs des ϱ_j sont initialisées telles que

$$10^3 \leq \varrho_j \leq 10^5 \text{ si } j \in [1, 1 + n' + \sigma] \quad (\text{A.11})$$

$$10 \leq \varrho_j \leq 10^3 \text{ si } j \in [2 + n' + \sigma, p] \quad (\text{A.12})$$

Cette initialisation particulière permet de réaliser un quadrillage.

Remarque A.1 : *Il est cependant possible, que même si l'algorithme de Newton-Gauss ait convergé et qu'une solution ait été trouvée pour le vecteur des paramètres θ^* , que nous soyons insatisfaits de la précision obtenue quant à l'approximation de la fonction continue sur le domaine $S \subset \mathcal{R}^n$. la solution triviale pour améliorer la précision est d'augmenter le nombre d'hyperplans σ . Le problème est que le nombre de paramètres augmente considérablement aussi.*

▲

Annexe B

Approche par ellipsoïdes [67]

Algorithme

1. Prendre comme point d'équilibre initial (x_{e1}, u_{e1}) , le point d'arrivée, $(x_{e1}, u_{e1}) = (x_f, u_f)$.
2. Encadrer le système non linéaire dans le polyèdre $P^{(j)} = \{x : a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, 2n\}$ autour du j -ème point d'équilibre (x_{e1}, u_{e1}) .
3. Représenter le système non linéaire à l'intérieur du polyèdre $P^{(j)}$ par le système linéaire incertain (A_j, B_{2j}, C_{2j}) où les matrices appartiennent aux domaines d'incertitudes polytopiques appropriés.
4. Bâtir une loi de commande robuste linéaire locale $u_j(t) = K_j(x(t) - x_{ej})$ telle qu'elle maximise le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}^{(j)} = \{x : (x(t) - x_{ej})^T S (x(t) - x_{ej}) < 1, S = S^T > 0\}$ inclus dans $P^{(j)}$ en assurant la stabilité et certaines spécifications de performance pour (A_j, B_{2j}, C_{2j}) dans $\mathcal{E}^{(j)}$.
5. Calculer le point d'équilibre suivant (x_{ej+1}, u_{ej+1}) dans $\partial\mathcal{E}^{(j)}$ (frontière de l'ellipsoïde actuel)

6. Si le point de départ $x_i \in \mathcal{E}^{(j)}$ alors $x_{ej+1} = x_i, u_{ej+1} = u_i$ et retour en 2.

7. Si $x_{ej+1} = x_i$ arrêter sinon retour en 2.

Remarque B.1 : Si dans l'étape 4, on fait la synthèse par retour d'état [20], la loi de commande globale devient

$$u_{globale}(x) = \begin{cases} u_1(t) = K_1(x(t) - x_{e1}) + u_{e1}, x \in \mathcal{E}^{(1)} \\ u_2(t) = K_2(x(t) - x_{e2}) + u_{e2}, x \in \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} \\ \vdots \\ u_{N'}(t) = K_{N'}(x(t) - x_{eN'}) + u_{eN'}, x \in \mathcal{E}^{N'} - \bigcup_{j=1}^{N'-1} \mathcal{E}^{(j)} \end{cases} \quad (B.1)$$

▲

Remarque B.2 : L'encadrement des non linéarités dans une région polytopique autour du j -ème point d'équilibre (étape 2 de l'algorithme) se réalise de la façon suivante. Tout d'abord, on borne chaque composante du vecteur d'état comme

$$|x_i(t) - x_{ej}| \leq \delta, \forall i = 1, \dots, n \quad (B.2)$$

Soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta + x_{1ej} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta + x_{nej} \\ \delta - x_{1ej} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta - x_{nej} \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

On procède alors à l'encadrement des non linéarités dans l'hypercube défini.

▲

Remarque B.3 : *Le volume maximal de l'ellipsoïde $\mathcal{E}^{(j)} = \{x : (x(t) - x^{ej})^T S (x(t) - x^{ej}) < 1, S = S^T > 0\}$ inclus à l'intérieur du polyèdre $P^{(j)} = \{x : a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, 2n\}$ est donné par la résolution du problème d'optimisation suivant [49]*

$$\text{Max} \quad \text{Trace}(S_j)$$

telle que

$$S = S^T \tag{B.4}$$

$$\begin{bmatrix} (b_i - a_i^T x_{ej}) & * \\ a_i^T & (b_i - a_i^T x_{ej}) \end{bmatrix} > 0, \tag{B.5}$$

$$i = 1, \dots, 2n \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}'$$

▲

Références bibliographiques

- [1] A.N. Andry, E.Y. Shapiro, and J.C. Chung. “Eigenstructure assignment for linear systems”. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 19(5):711–729, 1983.
- [2] J.M. Arnaudiès and H. Fraysse. “*Cours de mathématiques-2, Analyse*”. Ed Dunod, 1994.
- [3] M. Athans. “A tutorial on the LQG/LTR method”. In *American Control Conference ACC’86*, pages 1289–1296. IEEE-CSS, Juin 1986.
- [4] B.R. Barmish. “Stabilization of uncertain system via linear control”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(8):848–850, 1983.
- [5] B.R. Barmish. “Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system”. *Journal of Optimisation Theory and Application*, 46(4):399–408, 1985.
- [6] J. Bernussou, P.L.D. Peres, and J.C. Geromel. “A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems”. *Systems and Control Letters*, 13:65–72, 1989.
- [7] J.M. Biannic. “*Commande robuste des systèmes à paramètres variables : application en aéronautique*”. PhD thesis, Ecole nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace, 1996.
- [8] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J-P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. Analyse et régulation des processus industriels. In *Editions Technip, Paris*, volume tome 1, 1993.
- [9] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J-P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. Modélisation et identification des processus. In *Editions Technip, Paris*, volume tome 1, 1993.

- [10] P. Bortholet. *Modélisation et commande multivariables floues: application à la commande d'un moteur thermique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France, 1998.
- [11] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. “*Linear matrix inequalities in system and control theory*”, volume 15. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [12] C. Champetier and J.F. Magni. “Analyse et synthèse de lois de commande modale”. *La recherche Aérospaciale*, 6:17–35, 1989.
- [13] S.S.L. Chang and T.K.C. Peng. “Adaptative guaranteed cost control systems with uncertain parameters”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17:474–483, 1972.
- [14] M. Chilali. “*Méthode LMI pour la synthèse multi-critère*”. PhD thesis, Université PARIS IX - Dauphine, U.F.R. Mathématique de la Décision, Paris, France, 1996.
- [15] M. Chilali and P. Gahinet. “ H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, 1996.
- [16] L.O. Chua and A. Deng. Canonical piecewise-linear representation. In *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, volume CAS-35, pages 511–525, Jan 1988.
- [17] L.O. Chua and A. Deng. Canonical piecewise-linear modeling. In *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, volume CAS-33, pages 511–525, May 1986.
- [18] L.O. Chua and S.M. Kang. Section-wise piecewise-linear functions: Canonical representation, properties, and applications. In *Proc. IEEE*, volume 65, pages 915–929, 1977.
- [19] L.O. Chua and R.L.P. Ying. Canonical piecewise-linear analysis. In *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, volume CAS-30, pages 125–140, Mar 1983.
- [20] C. Courties. *Sur La Commande Robuste Et L.P.V De Systèmes à Paramètres Lentement Variables*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 1999.
- [21] C. Courties, J. Bernussou, and G. Garcia. “ H_∞ robust control for polytopic uncertain systems”. In *IEEE-CESA '98*, Nabeul-Hammamet, Avril 1998.
- [22] C. Courties, J. Bernussou, and G. Garcia. “LPV control by dynamic output feedback”. In *Proceedings of the American Control Conference - ACC'99*, pages 2267–2271, San Diego, Californie, Juin 1999.

- [23] J. Daafouz. “Robustesse en performance des systèmes linéaires incertains : placement de pôles et coût garanti”. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France, 1997.
- [24] P. de Larminat. “Automatique : commande de systèmes linéaires”. Hermes, Paris, 1993.
- [25] J.C. Doyle. “Guaranteed margins for LQG regulators”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(8):756–757, Août 1978.
- [26] J.C. Doyle. “Analysis of feedback systems with structured uncertainties”. *IEEE Proceedings, Part D*, 129(6):242–250, Novembre 1982.
- [27] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. “State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, 1989.
- [28] D. Driankov, H. Hellendorn, and R. Palm. Model based fuzzy control. In *Springer—Verlag, New York*, 1996.
- [29] D. Driankov, R. Palm, and U. Reh fuss. A Takagi-Sugeno fuzzy gain-scheduler. In *Proc. IEEE Conf. Fuzzy Syst., New Orleans, LA*, pages 1053–1059, 1996.
- [30] G. Duc. “Robustesse des systèmes linéaires multivariables”. Ecole Supérieure d’Electricité, 1994.
- [31] L. El Ghaoui, F. Delebecque, and R. Nikoukhah. *LMIT00L : a User-Friendly Interface for LMI Optimisation*, 1995. User’s Guide, Beta version, URL: <http://robotics.eecs.berkeley.edu/~elghaoui/lmitool/lmitool.html>.
- [32] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 42(8):1171–1176, August 1997.
- [33] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. “Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions’ ’. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:1041–1046, 1996.
- [34] B.A. Francis, J.W. Helton, and G. Zames. “ H_∞ optimal feedback controllers for linear multivariable systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29:888–900, 1984.
- [35] K. Furuta and S.B. Kim. “Pole assignment in a specified disk”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32:423–427, 1987.

- [36] P. Gahinet, A. Nemirovski and A.J. Laub, and M. Chilali. “*The LMI control toolbox*”. The Mathworks Inc., 1995.
- [37] P. Gahinet and P. Apkarian. “A linear inequality approach to H_∞ control”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.
- [38] G. Garcia and J. Bernussou. “Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):184–190, Janvier 1995.
- [39] G. Garcia, J. Bernussou, and D. Arzelier. “Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm bounded time varying uncertainty”. *Systems and Control Letters*, 1993.
- [40] G. Garcia, J. Bernussou, and D. Arzelier. “Stabilization of a linear dynamic system by state and output feedback: A quadratic stability approach”. *International of Control*, 64:839–858, 1996.
- [41] G. Garcia, J. Daafouz, and J. Bernussou. “Output feedback disk pole assignment for systems with positive real uncertainty”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9):1385–1391, 1996.
- [42] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. “ H_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems”. *Systems and Control Letters*, 19:23–27, 1992.
- [43] J.C. Geromel, J.M. Bernussou, and M.C. de Oliveira. “ H_2 norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers : decentralized and reliable control”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(7):1449–1454, Juillet 1999.
- [44] S. Gutman and E.I. Jury. “A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:853–863, 1981.
- [45] G. Güzelis and I. Gökner. A canonical representation for piecewise-affine maps and its applications to circuit analysis. In *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, volume 38, pages 1342–1354, 1991.
- [46] A.H. Haddad and D.S. Bernstein. Robust stabilization with positive real uncertainty: beyond the small gain theorem. *Systems and Control Letters*, 14:13–24, 1991.
- [47] A.H. Haddad and D.S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:54–61, 1992.

- [48] A.H. Haddad and D.S. Bernstein. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle and Popov theorems and their application to robust stability. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13:331–339, 1993.
- [49] D. Henrion. *Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 1999.
- [50] K.J. Hunt and T.A. Johansen. Design and analysis of gain-scheduled control using local controller networks. In *Int. J. Contr.*, volume 66(5), pages 619–651, 1997.
- [51] T. Iwasaki. LPV system analysis with quadratic separator for uncertain implicit systems. *LMI Methods in optimisation, identification and control*, Seminar, Compiègne, France, May 1999.
- [52] P. Julián. *A High Level Canonical Piecewise-Linear Representation: Theory and Applications*. PhD thesis, Universidad Nacional Del Sur, Bahía Blanca, Argentine, 1999.
- [53] E.I. Jury. *Inners an stability of dynamic systems*. Wiley, New-York, 1974.
- [54] C. Kahlert and L.O. Chua. A generalized canonical piecewise-linear representation. In *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, volume CAS-37, pages 373–383, 1990.
- [55] T. Kailath. *Linear system*. Information & Systems Science Series. Prentice Hall, 1980.
- [56] R.E. Kalman. “On the theory of control systems”. In *Premier Congrès international IFAC*, Moscou, URSS, 1960.
- [57] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, and M. A. Rotea. “Mixed H_2/H_∞ control for discrete-time systems via convex optimization”. *Automatica*, 29(1):51–70, 1993.
- [58] S.M. Kang and L.O. Chua. A global representation of multidimensional piecewise-linear functions with linear partitions. In *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, volume CAS-25, pages 938–940, 1978.
- [59] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Macmillan publishing company, 1992.
- [60] P.P. Khargonekar and M.A. Rotea. “Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 824–837, 1991.
- [61] V.L. Kharitonov. “Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations”. *Differentsial’nye Uravneniya*, 14:2086–2088, 1978.

- [62] Y. Labit. Commande floue - commande robuste: Une étude comparative, rapport de DEA. 1999.
- [63] Y. Labit. User's guide for CAPILARS 1.01: Tool & interface for designing robust synthesis problems for nonlinear systems using robust control tools, En préparation. 2002.
- [64] Y. Labit, J. Bernussou, and G. Garcia. Scheduling of local robust laws for nonlinear system control. In *Rapport LAAS n° 01048. Proceedings of IEEE Conference on Control Applications (CCA), Mexico City, Mexico*, pages 514–519, Sept 2001.
- [65] Y. Labit, J. Bernussou, and G. Garcia. Synthèse par retour d'état de lois de commande robustes séquencées pour un modèle non linéaire. In *Rapport LAAS n° 01200. Journées Doctorales d'Automatique (JDA'01), Toulouse, France*, pages 75–80, Sept 2001.
- [66] Y. Labit, D. Peaucelle, and D. Henrion. SEDUMI INTERFACE 1.02: A tool for solving lmi problems with SEDUMI. In *2002 IEEE International Conference on Control Applications and International Symposium on Computer Aided Control Systems Design (CCA/CACSD'2002), Glasgow (GB), 18-20 Septembre 2002, pp.272-277*, Dec 2001.
- [67] Y. Labit, Pedro Teppa, J. Bernussou, and G. Garcia. Application de la commande robuste séquencée au contrôle de la transition opérationnelle d'un système non linéaire. In *Rapport LAAS n° 01546. Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA) 2002, Nantes, France*, pages 510–515, Juillet 2002.
- [68] Y. Labit and V. Mahout. Platitude et séquencement de gains pour la régulation et la robustesse de convertisseurs de puissance DC-to-DC de type “boost”. In *Rapport LAAS n° 01547. Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA) 2002, Nantes, France*, pages 284–289, Juillet 2002.
- [69] I.D. Landau. “*Identification et commande des procédés*”. Edition Hermes, 1993. Deuxième édition.
- [70] F.L. Lewis. “*Applied optimal Control and Estimation*”. Digital signal processing series. Prentice Hall and Texas Instruments, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1992.
- [71] W.M. Lu and J.C. Doyle. “Robustness analysis and synthesis for uncertain nonlinear systems”. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 787–792, Lake Buena-Vista, FL, 1994.

- [72] A. Lyapunov. “*Problème général de la stabilité du mouvement*”. Annales de la faculté de Sciences de Toulouse 1907, traduit de l’ouvrage original, Kharkov, 1892.
- [73] H.D. Mittelmann. An independent benchmarking of SDP and SOCP solvers. Technical report, Arizona State University, July 2001. URL: www.optimization-online.org/DB_HTML/2001/07/358.html.
- [74] A. Packard. “Gain scheduling via linear fractional transformations”. *Systems and Control Letters*, 22:79–92, 1994.
- [75] R. Palm, D. Driankov, and U. Reh fuss. Lyapunov linearization based design of Takagi-Sugeno fuzzy controllers. In *Proc. IFSA World Congress., Sao Paolo, Brazil*, pages 513–516, 1995.
- [76] D. Peaucelle and D. Arzelier. An efficient numerical solution for H_2 static output feedback synthesis. In *European Control Conference*, pages 3800–3805, Porto, Portugal, September 2001.
- [77] D. Peaucelle, D. Henrion, and Y. Labit. User guide for SEDUMI INTERFACE 1.01: Interface for solving lmi problems with SEDUMI. In URL: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2001/11/398.html, Nov 2001.
- [78] D. Peaucelle, D. Henrion, and Y. Labit. User guide for SEDUMI INTERFACE 1.01: Interface for solving lmi problems with SEDUMI. In *Rapport LAAS n° 01445*, URL: <http://www.laas.fr/~peaucell/SeDuMiInt.html>, Oct 2001.
- [79] I.R. Petersen. “A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems”. *Systems and Control Letters*, 8:351–357, 1987.
- [80] J. Rissanen. Control system synthesis by analogue computer based on the “generalized linear feedback” concept. In *Proceedings of the Symposium on Analog Computation Applied to the Study of Chemical Processes*, International Seminar, pages 1–13, Brussel, November 21-23 1960. Presses Académiques Européennes, Bruxelles, 1961.
- [81] H.H. Rosenbrock. Distinctive problems of process control. *Chem. Eng. Prog.*, 58:43–50, September 1962.
- [82] C. Rossi, A. Tilli, and A. Tonielli. Robust control of a throttle body for drive by wire operation of automotive engines. *IEEE Trans. on Control systems Technology*, 8(62):993–1002, November 2000.
- [83] W.J. Rugh. Analytical framework for gain-scheduling. In *IEEE Trans. on Control Systems*, volume 11(1), pages 79–84, 1991.

- [84] M.G. Safonov and M. Athans. “Gain and phase margin for multiloop lqg regulators”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):173–179, Avri 1977.
- [85] M. Sampei, T. Mita, and M. Nakamichi. “An algebraic approach to H_∞ output feedback control problems”. *Systems and Control Letters*, 14:13–24, 1990.
- [86] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911, july 1997.
- [87] J.S. Shamma and M. Athans. Analysis of nonlinear gain-scheduled control systems. In *IEEE Trans. on Automatic Control*, volume 35(8), pages 398–907, 1990.
- [88] J.S. Shamma and M. Athans. Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies. In *IEEE Trans. on Control Systems*, volume 12(3), pages 101–107, 1992.
- [89] S.M. Sharuz and S. Behtash. Design controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique. In *J. Math. Anal. Applicat.*, volume 168, pages 195–217, 1992.
- [90] H. Sira-Ramirez, R.A. Perez-Moreno, R. Ortega, and M. Garcia-Esteban. Passivity-based controllers for the stabilization of dc-to-dc power converters. In *Automatica*, pages 499–513, 1997.
- [91] J.J.E. Slotine. “*Applied Nonlinear Control*”. Prentice Hall International Editions, Englewood Cliffs, NewJersey, 1991.
- [92] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653, 1999. URL:<http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>.
- [93] A. Tesi and A. Vicino. Robust stability of state-space models with structured uncertainty. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 35(2), pages 191–195, Fevrier 1990.
- [94] A. Titli. Logique floue et systèmes flous, cours insa 5e année. INSA de Toulouse, France, 1997.
- [95] W. van Bokhoven. Piecewise linear modelling and analysis. In *Deventer, The Netherlands: Kluwer Technishe Boeken*, 1981.
- [96] M. Vidyasagar. “*Nonlinear systems analysis*”. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.

-
- [97] B. Wie and D.S. Bernstein. “Benchmark problem for robust control design”. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 15:1057–1059, 1992.
- [98] W.M. Wonham. “*Linear Multivariable Control: A geometric Approach*”, volume 10 of *Application of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1985.
- [99] K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, and J. Doyle. “Mixed H_2 and H_∞ performance objectives part i: Robust performance analysis, part ii: Optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:1564–1587, 1994.
- [100] K. Zhou and P.P. Khargonekar. Robust stabilization of linear system with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems and Control Letters*, 10:17–20, 1988.

Table des figures

I.1	Identification à partir du comportement entrée-sortie.	4
I.2	Incertitudes non structurées (domaine fréquentiel).	10
I.3	Incertitudes structurées (domaine fréquentiel).	11
I.4	Système à non linéarité séparable.	14
I.5	Stabilité simple (a) et attractivité (b).	17
I.6	Structure de système pour la stabilité absolue(a) et non linéarité de secteur pour K_{min} et K_{max} scalaires(b).	22
I.7	Région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$	26
II.1	Approximation et erreur pour la non linéarité $\tanh(x_1)$ avec 5 hyperplans . . .	53
II.2	Approximation et erreur pour la non linéarité $\tanh(x_1)$ avec 20 hyperplans . .	53
II.3	Points de cassure et points d'équilibre intermédiaires	57
II.4	Cônes d'incertitude	58
II.5	Combinaison C des 4 hyperplans $\{HP_{11}, HP_{12}, HP_{21}, HP_{22}\}$: dans ce cas $C =$ $\{HP_{12}, HP_{21}\}$	62
II.6	Combinaison C des 4 hyperplans $\{HP_{11}, HP_{12}, HP_{21}, HP_{22}\}$: dans ce cas $C =$ $\{HP_{12}, HP_{21}\}$	64
II.7	Séquencement de modèles LTI locaux.	67
II.8	Approche CPWL de systèmes non linéaires.	72
III.1	Région $\mathcal{R}(\alpha, \rho, \theta)$	79
III.2	Ecrans n°1 et n°2 de l'interface de CAPILARS 1.01 v. Beta	102
III.3	Approximation et erreur pour la non linéarité $\tanh(x_1)$ avec 5 hyperplans . . .	104
III.4	Ecran n°2 de l'interface de CAPILARS 1.01 v. Beta	105
III.5	Ecran n°1 de l'interface de CAPILARS 1.01 v. Beta	106
III.6	Localisation des pôles en boucle fermée avec CAPILARS 1.01 v. Beta	107
III.7	Problème de commande masse + ressort	107
III.8	Ecran n°1 de l'interface de CAPILARS 1.01 v. Beta	109
IV.1	Pendule inversé.	113
IV.2	Non linéarité du pendule inversé simplifié.	115

IV.3	Approximation de la non linéarité et erreur d'approximation.	115
IV.4	Position et vitesse du pendule.	116
IV.5	Commande et indice des modèles du pendule.	116
IV.6	Pôles en boucle ouverte et fermée.	116
IV.7	Trajectoire de la vitesse en fonction de la position.	117
IV.8	Position et vitesse du pendule.	118
IV.9	Commande et Indice de modèle du pendule	118
IV.10	Trajectoire de la vitesse en fonction de la position.	118
IV.11	Panneau solaire.	119
IV.12	Convertisseur DC-DC survolteur.	120
IV.13	Circuit équivalent du convertisseur survolteur.	120
IV.14	Courant et tension du convertisseur avec erreur impulsionnelle sur E de -3 V. . .	123
IV.15	Commande et indice du convertisseur avec erreur impulsionnelle sur E de -3 V. .	123
IV.16	Courant et tension du convertisseur avec perturbation centrée sur E de ± 1 V. .	124
IV.17	Commande et indice du convertisseur avec perturbation centrée sur E de ± 1 V. .	125
IV.18	Perturbation centrée sur E de ± 1 volt et pôles en boucle fermée.	125
IV.19	Non linéarité logarithmique du panneau solaire.	129
IV.20	Approximation de la non linéarité et erreur d'approximation.	129
IV.21	Courant d'entrée et tension de sortie pour le panneau solaire.	130
IV.22	Commande et indice des modèles pour le panneau solaire.	130
IV.23	Moteur d'aération MTB.	131
IV.24	Couple de charge $T_S(\theta)$ (droite) et couple de frottement $T_f(\omega)$ (gauche). . . .	132
IV.25	Non linéarité T_f du moteur MTB.	135
IV.26	Non linéarité T_S du moteur MTB.	135
IV.27	Approximation et erreur d'approximation.	135
IV.28	Position et numéro des modèles pour le moteur MTB.	136
IV.29	Localisation des pôles en boucles ouverte et fermée pour la familles de modèles LTIs incertains.	136
IV.30	Commande et position du pendule	137
IV.31	Indice de modèle et pôles en boucle fermée.	138
IV.32	Position et vitesse du pendule.	139
IV.33	Commande et pôles en boucle fermée.	139
IV.34	Trajectoire de la vitesse en fonction de la position.	139
IV.35	Position et vitesse angulaire pour le pendule.	142
IV.36	Commande LPV pour le pendule.	142
IV.37	Fonctions d'appartenance: (a) x_1 - (b) $\dot{x}_1 = x_2$	143
IV.38	Position et vitesse angulaire pour le pendule.	145
IV.39	Commande pour le pendule.	145
IV.40	Situation de l'approche CPWL.	148

Liste des tableaux

IV.1 Valeurs des points d'équilibre intermédiaires	114
IV.2 Valeurs des gains par retour d'état.	114
IV.3 Valeurs des commandes locales u_{ei}	115
IV.4 Valeurs des correcteurs dynamiques.	117
IV.5 Valeurs des points d'équilibre intermédiaires	121
IV.6 Valeurs des gains par retour d'état pour le cas n°1 (gauche) et n°2 (droite). . . .	122
IV.7 Valeurs des commandes locales u_{ei}	122
IV.8 Valeurs des points d'équilibre intermédiaires.	128
IV.9 Valeurs des gains par retour d'état.	128
IV.10 Valeurs des commandes locales u_{ei}	129
IV.11 Valeurs des points d'équilibre intermédiaires.	134
IV.12 Valeurs des gains par retour d'état	134
IV.13 Valeurs des commandes locales u_{ei}	134
IV.14 Bornes μ_i	138
IV.15 Bornes μ_i	140
IV.16 Partitionnement de l'espace d'état flou.	143
IV.17 Tables des règles floues.	144
IV.18 Valeurs des gains par retour d'état.	145

Index

- Algorithme CPWL, 49
- Approche CPWL, 112
- Approximation CPWL, 47
- Attractivité, 17
- Bassin d'attraction, 18
- Bilinéarités, 119
- Cône d'incertitude, 58
- CaPiLARS, 99, 112
- Commande floue, 33, 141
- Commande par ellipsoïdes, 138
- Commande Q-LPV, 139
- Convertisseur DC-DC, 119
- Critère $\mathcal{H}_2$, 24
- Critère $\mathcal{H}_\infty$, 25
- Critère de Popov, 23
- Critère quadratique, 24
- Fonction de Lyapunov, 20
- Fonctions CPWL, 38, 44
- Fonctions PWL, 43
- Identification, 4
- Incertitudes, 8
- Incertitudes non structurée, 8
- Incertitudes structurée, 10
- LMilab, 98
- Modèles incertains polytopiques, 56
- Modèles LPV - Quasi-LPV, 31
- Modélisation, 4
- Moteur d'aération MTB, 130
- Multi-modèles, 136
- Panneau solaire, 119
- Pendule inversé, 112
- Performances, 24
- Placement de pôles, 25, 79
- Point d'équilibre, 15, 56
- Point de cassure, 46, 56
- Région-LMI, 25
- Représentations, 6, 14
- Retour d'état, 75
- Retour de sortie dynamique, 81
- Robustesse, 28
- Séquencement de gains, 30
- SeDuMi, 98
- Stabilité, 17
- Stabilité absolue, 21
- Stabilité asymptotique, 18
- Stabilité entrée-sortie, 23
- Stabilité exponentielle, 18
- Stabilité interne, 23
- Stabilité simple, 17
- Stabilité uniforme, 18
- Synthèse $\mathcal{H}_2$, 76
- Synthèse $\mathcal{H}_\infty$, 78
- Systèmes linéaires, 5
- Systèmes non linéaires, 14