

Modèle complétude des structures o-minimales polynomialement bornées

Olivier Le Gal

► **To cite this version:**

Olivier Le Gal. Modèle complétude des structures o-minimales polynomialement bornées. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2006. Français. tel-00127811

HAL Id: tel-00127811

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00127811>

Submitted on 29 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : 3405

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Olivier LE GAL

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

**Modèle-complétude
des structures o-minimales
polynomialement bornées**

Soutenue le 13 décembre 2006 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Coste	Examineur
K. Kurdyka	Rapporteur
J.-M. Lion	Directeur de thèse
J.-P. Rolin	Examineur
P. Speissegger	Rapporteur

REMERCIEMENTS

Cette thèse est le fruit du travail de trois années. Ce travail n'aurait été possible sans le soutien et l'amitié de ceux que j'ai côtoyé durant cette période. Je profite ici de ce que les premières définitions ne soient pas encore introduites pour les en remercier dans un langage qui ne soit pas celui des corps réels clos.

Je tiens particulièrement à remercier Jean-Marie Lion, mon directeur. Il a été pour moi très disponible, et ce malgré ses lourdes charges administratives. Je dois à sa patience didactique des finesses qui me seraient sans doute sans lui toujours restées mystérieuses. Surtout, sa bonne humeur et son écoute ont su me redonner cœur à la tâche, même dans les plus intenses moments de doute. Il m'a procuré une rare aisance matérielle et, ce n'est pas le moindre, m'a permis de triompher des tâches administratives contre lesquelles butait mon légendaire sens de l'organisation, quand il ne s'en est pas directement chargé.

Je remercie vivement Krzysztof Kurdyka et Patrick Speissegger d'avoir accepté d'être mes rapporteurs, ainsi que Michel Coste et Jean-Philippe Rolin pour bien vouloir être membres de mon jury. Par ailleurs, mes discussions mathématiques avec chacun d'entre eux m'auront bien aidé.

J'ai eu la chance d'évoluer dans un contexte mathématique chaleureux et dynamique. Ainsi je suis reconnaissant à l'IRMAR et à l'équipe de géométrie analytique pour leur accueil, et à Claude Boschet, Karine Falc'hon et Danielle Lanneau pour leur efficacité et leur disponibilité. Le réseau RAAG et l'équipe m'ont permis de voyager et de nouer des liens qui ne se résument pas aux seules mathématiques. Durant ces voyages, j'ai entre autre rencontré Benoît, Nico, Lucia, Serge, Didier, Vincent ou Alessandra, avec lesquels parler de math ou d'autre chose, passer de

belles soirées, apprendre des bribes de polonais ou discuter fourmis est un plaisir. Il a fait bon partager repas du RU, séminaires et discussions de cafétéria, *CIES-tés* et vie nocturne avec les doctorants de l'IRMAR, parmi lesquels Erwan, maître en Erwaneries, Vincent, Glenn et Estelle les jardiniers, Damien, La-plus-gentille-Solen-du-monde, Elise, le $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ pert Gwéno, Guillaume, Richard, Julie, Corentin et son art en déménagement de machine à laver, Christian, Ferran.

Au-delà des mathématiques, pour leur soutien et les bons moments passés ensemble, je remercie ceux de toujours, Claire, Seb et la petite Rose, Assia, Bodo, Vincent et Catine. J'ai trouvé en Bretagne avec David et [lamikoz], Virginie, Stéphane, Maga, et tout spécialement Cécile, une chaleur qui a su compenser le climat. L'accueil reçu de Guy et Denise y est aussi pour beaucoup. Mes escapades marseillaises n'auraient eu grand sens sans Vincent, Fida, Giovanni, Garance et Caroline, avec lesquels j'ai pu me ressourcer. Je remercie enfin mes parents pour leur dévouement et Adrien pour ses histoires et ses séries.

Que ceux que je n'ai nommément cités ne m'en veuillent : il fallait laisser un peu de place pour les mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	v
INTRODUCTION	1
0.1 Présentation	1
0.2 Énoncé du résultat principal	4
CHAPITRE 1 : QUELQUES OUTILS	9
1.1 Historique	9
1.2 Définitions et premières propriétés	10
1.3 Un peu de logique	12
1.4 Décompositions et stratifications	15
1.5 Un lemme de type Koopman-Brown	18
1.6 Équations et Paramétrisations	21
CHAPITRE 2 : STRUCTURES O-MINIMALES POLYNOMIALEMENT BORNÉES	23
2.1 Définitions et propriétés élémentaires	23
2.2 Quasi-analyticité, théorème de Miller	27
2.3 Singularités dans les structures o-minimales polynomialement bor- nées	33
2.3.1 Motivations	33
2.3.2 Lemme de Régularisation	36

CHAPITRE 3 : LES PROBLÈMES DE GÉNÉRATION	45
3.1 Problématique	45
3.2 Quelques définitions	46
3.3 Un lemme de frontière	50
3.4 Section explicite	54
3.5 Théorème du complément pour les structures o-minimales poly- nomialement bornées	57
3.5.1 Le cas $Y \subset \mathbb{R}^d$	58
3.5.2 Le cas $n > d$	59
CHAPITRE 4 : REMARQUES ET QUESTIONS OUVERTES . . .	63
4.1 Nœthérianité	63
4.2 Extension aux cas non polynomialement bornés	65
4.3 Extension aux cas non C^∞	66
Annexe I : UN PROBLÈME DE VOLUME	69
I.1 Définissabilité du lieu d'aire finie	70
BIBLIOGRAPHIE	75

INTRODUCTION

0.1 Présentation

Les structures o-minimales sont à la confluence de la géométrie et de la logique. Cette thèse prend un parti géométrique, mais les résultats présentés ont une traduction en terme de théorie des modèles.

Pour le logicien, dans le cadre d'une logique du premier ordre, la donnée d'un langage \mathcal{L} , c'est à dire de termes élémentaires, et la donnée d'un modèle, c'est à dire d'un ensemble E où ce langage prend corps, détermine une structure : cette structure est l'ensemble de toutes les phrases que l'on peut exprimer dans ce langage dans le modèle choisi, c'est à dire toutes les propositions de \mathcal{L} -termes du premier ordre à coefficients dans E .

La notion de structure est rare en géométrie, parce que trop peu contraignante. Une notion pourtant équivalente serait la suivante : étant donné un ensemble de base E – l'équivalent du modèle –, et une famille $\mathcal{A} = (A_i \subset E^{n_i})_{i \in I}$ de sous-ensembles de produits de E – l'équivalent des termes du langage –, une structure géométrique est la famille de tous les ensembles constructibles à partir des éléments de \mathcal{A} , c'est à dire obtenus à partir des A_i en s'autorisant les unions et intersections finies, les produits cartésiens, les projections et passages au complément – ces opérations correspondant respectivement au *ou* et au *et* logiques, à une concaténation de formules, à l'ajout d'un quantificateur \exists et au *non* logique.

Lorsque l'on prend pour ensemble de base le corps des réels, on remarque qu'il apparait en général deux situations très différentes selon la famille de sous-ensembles choisie : soit les ensembles constructibles contiennent tous les boré-

liens [MS05, Mil06], et l'on perd alors l'espoir de faire de la géométrie, soit les ensembles constructibles présentent des régularités très fortes, et des descriptions relativement simples. On parle dans ce dernier cas de géométrie modérée [DM96, Tei97]. Une condition suffisante pour que la géométrie d'une structure soit modérée est la suivante : les ensembles constructibles de \mathbb{R} doivent être les unions finies de points et d'intervalles. Une telle structure est alors dite *o-minimale*.

Des exemples classiques – et historiques – de structures o-minimales sont les semi-algébriques [Tar51, Sei54], engendrés par les graphes de la somme, du produit et de l'ordre, ou les sous-analytiques globaux [Gab68, Hir73, DS85, DvdD88, Gab96], générés en ajoutant aux semi-algébriques les restrictions à un compact analytique de toutes les fonctions analytiques. Les exemples abondent, et l'on pense n'avoir pas fini d'en découvrir de nouvelles.

Parmi toutes ces structures o-minimales, certaines présentent un caractère précieux pour la résolution des singularités. Elles sont polynomialement bornées, c'est à dire que la croissance de toutes les fonctions constructibles ne peut excéder celle d'un polynôme. Cette propriété induit une forme de quasi-analyticité, qui s'exprime géométriquement par une rigidité très forte. Par exemple, une variété lisse dans une telle structure est totalement déterminée par son germe en un point.

La problématique de cette thèse concerne la génération des structures o-minimales polynomialement bornées. On a vu qu'une structure est obtenue par des opérations élémentaires sur des ensembles de base. Pour chaque ensemble constructible, ces opérations n'interviennent qu'un nombre fini de fois, mais cela ne donne pas une description assez précise des ensembles ainsi construits. En effet, appliquer alternativement une projection et un passage au complémentaire un grand

nombre de fois peut générer des ensembles à priori très différents des ensembles de base. Pour preuve : n'importe quel borélien peut être généré ainsi à partir de l'ensemble des entiers, de la somme, du produit et de l'ordre !

Les questions que l'on peut se poser concernant la génération de structures o-minimales sont du type suivant : étant donnés des ensembles de base d'un type particulier, peut-on restreindre le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour obtenir toute la structure ? Par exemple, si les ensembles de base sont les semi-algébriques, une conséquence du théorème de Tarski-Seidenberg (cf. [Tar51, Sei54]) affirme que la structure est obtenue en 0 opération, c'est à dire que les semi-algébriques sont stables par toutes les opérations élémentaires. Des ensembles de base $(A_i)_{i \in I}$ étant fixés, si ni les projections ni les passages au complément ne sont nécessaires pour obtenir toute la structure, on dit qu'elle élimine ses quantificateurs sur $(A_i)_{i \in I}$. Dans le cas des semi-analytiques sur un compact, le théorème de Gabrielov [Gab68, Gab96] montre que toute la structure qu'ils engendrent est obtenue par une seule opération élémentaire : une projection. La structure engendrée par les semi-analytiques est donc exactement formée des sous-analytiques. Des ensembles de base $(A_i)_{i \in I}$ étant fixés, si les passages au complément ne sont pas nécessaire pour obtenir toute la structure, on dit qu'elle est modèle-complète sur $(E_i)_{i \in I}$.

Le principal résultat de cette thèse est une généralisation du théorème de Gabrielov : il affirme que modulo certaines hypothèses de régularité, toutes les structures o-minimales polynomialement bornées sont modèle-complètes.

Le principe des preuves de modèle-complétude suit en général l'article fondateur de Gabrielov [Gab96]. On le voit nettement dans l'article [RSW03]. Ce principe repose sur deux points clefs. D'une part, il s'agit de comprendre les sin-

gularités qui peuvent apparaître dans les ensembles de base. D'autre part, il faut étudier la frontière de ces ensembles pour montrer qu'elle conserve des propriétés héritées de ceux-ci. Toute la difficulté dans notre cas est de se passer de l'analyticité, que l'on remplace par une quasi-analyticité, conséquence du caractère polynomialement borné des structures considérées.

Ce résultat permet de mieux comprendre les structures o-minimales polynomialement bornées et de restreindre les examens nécessaires à la construction de telles structures. Des résultats du même type ont été obtenus par A. Rambaud [Ram05], en ajoutant au langage considéré les puissances rationnelles des coordonnées.

0.2 Énoncé du résultat principal

Pour énoncer le résultat principal de cette thèse, nous aurons besoin des définitions suivantes :

Définition 0.2.1. On appelle quasi-algèbre différentielle une famille \mathcal{F} d'applications $(f_i)_{i \in I}$ telle que :

– La famille \mathcal{F} est une famille d'applications réelles scalaires C^∞ :

$\forall i \in I, \exists n_i \in \mathbb{N}$ tel que f_i soit une application C^∞ de \mathbb{R}^{n_i} dans \mathbb{R}

– La famille \mathcal{F} est stable par opposé, somme et produit :

$\forall i, j \in I$, si $n_i = n_j$, alors $-f_i \in \mathcal{F}$, $f_i + f_j \in \mathcal{F}$, et $f_i \cdot f_j \in \mathcal{F}$

– La famille \mathcal{F} est stable par dérivation :

$\forall i \in I, \forall j \leq n_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathcal{F}$

– La famille \mathcal{F} est stable par composition affine à droite :

$\forall i \in I, \forall L : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$ affine, $f_i \circ L \in \mathcal{F}$

– La famille \mathcal{F} contient les applications coordonnées.

Définition 0.2.2. Soit \mathcal{F} une quasi-algèbre différentielle. Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dit que X est *semi- \mathcal{F}* s'il existe des applications f_1, \dots, f_k , et g_1, \dots, g_l appartenant à \mathcal{F} telles que

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n; (f_1(x), \dots, f_k(x)) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\},$$

ou si X est une union finie d'ensembles de ce type.

Les ensembles semi- \mathcal{F} sont ainsi les ensembles définis par des équations et inéquations portant sur des applications de la quasi-algèbre \mathcal{F} . On appelle leurs projections sous- \mathcal{F} :

Définition 0.2.3. Soit Y un sous ensemble de \mathbb{R}^n . On dit de Y qu'il est *sous- \mathcal{F}* s'il existe m et un semi- \mathcal{F} X de \mathbb{R}^{n+m} tel que Y soit la projection de X sur les n premières coordonnées de \mathbb{R}^{n+m} .

Voici maintenant l'énoncé du principal résultat, sous ses formes géométriques et logiques. C'est une généralisation du théorème de Gabrielov [Gab96].

Théorème 0.2.4 (version géométrique – théorème du complémentaire). *Soit S une structure o-minimale polynomialement bornée. Soit \mathcal{F} une quasi-algèbre différentielle d'applications définissables dans S . Alors, les sous- \mathcal{F} sont stables par passage au complémentaire.*

Théorème 0.2.5 (version logique – modèle-complétude). *Considérons une structure $S = \langle \mathbb{R}, >, +, *, \mathcal{F} \rangle$ o-minimale polynomialement bornée où \mathcal{F} est une quasi-algèbre différentielle. Alors, S est modèle complète.*

Voici une remarque qui développe ce résultat. Considérons un ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n+m}, f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\},$$

où les f_i et g_i sont C^∞ et définissables dans une structure o-minimale polynomialement bornée \mathcal{S} , et soit \mathcal{F} la quasi-algèbre des applications C^∞ définissables dans \mathcal{F} . Soit Y la projection sur les n premières coordonnées de X . Le théorème 0.2.4 affirme que le complémentaire de Y est sous- \mathcal{F} . Autrement dit, il affirme que ce complémentaire est la projection d'un ensemble du type

$$X' = \{x \in \mathbb{R}^{n+m'}, f'_1(x) = 0, \dots, f'_{k'}(x) = 0, g'_1(x) > 0, \dots, g'_{l'}(x) > 0\},$$

avec les f'_i et g'_i dans \mathcal{F} .

Mais si \mathcal{S} est o-minimale, il en est de même de ses sous-structures. En particulier, la structure engendrée par les f_i et g_i est o-minimale. Appelons \mathcal{H} la quasi-algèbre différentielle engendrée par $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$. Alors, Y est sous- \mathcal{H} , donc d'après le théorème 0.2.4, son complémentaire aussi. Les applications qui définissent X' peuvent donc être choisies dans la quasi-algèbre \mathcal{H} . En ce sens, le théorème 0.2.4 est un théorème du complémentaire *explicite*.

De manière équivalente, dans une traduction logique, si \mathcal{S} est une structure o-minimale polynomialement bornée, et $P(x_1, \dots, x_n)$ une formule du premier ordre dans laquelle interviennent des égalités et inégalités portant sur des applications C^∞ f_1, \dots, f_k définissables dans \mathcal{S} , alors P est équivalente à une formule existentielle où n'apparaissent que des applications de la quasi-algèbre engendrée par f_1, \dots, f_k .

La thèse est formée de quatre chapitres et d'une annexe. Le premier chapitre est une introduction aux structures o-minimales. Dans le second chapitre, certaines propriétés particulières des structures o-minimales polynomialement bornées sont dégagées. En particulier, on s'attachera à comprendre les points communs avec la situation analytique (quasi-analyticité), ainsi que les différences éventuelles (la question de la noéthérianité dans le lemme 2.3.3). La preuve du résultat principal est présentée au troisième chapitre. Le quatrième chapitre présente quelques questions de noéthérianité dans le cadre polynomialement borné, ainsi que des pistes concernant l'extension éventuelle de notre résultat. Enfin, l'annexe présente un résultat indépendant obtenu au début de mes travaux de recherche, et qui est relatif aux liens entre o-minimalité et intégration.

CHAPITRE 1

QUELQUES OUTILS

Après avoir brièvement replacé les structures o-minimales dans leur contexte historique, nous allons présenter quelques-unes de leurs propriétés élémentaires. En particulier, nous montrerons un lemme de type Koopman – Brown [Łoj65, Dri98]. Nous introduirons aussi quelques notions et résultats classiques.

1.1 Historique

Le premier résultat qui s'apparente à l'étude des structures o-minimales est le théorème de Tarski – Seidenberg [Tar51] [Sei54], qui prouve l'élimination des quantificateurs pour les semi-algébriques. D'autres familles d'ensembles sont ensuite étudiées, qui présentent des propriétés similaires aux semi-algébriques. Ainsi, les études de Thom [Tho69], Whitney [Whi65] ou Łojasiewicz [Łoj65] sur les stratifications introduisent des propriétés qui ensuite seront générales dans les structures o-minimales [DM96], [Cos00]. La terminologie “o-minimal” provient de la logique. Le “o” signifie order, et les structures o-minimales sont issues des structures “order 0”, dans lesquelles les ensembles constructibles de l'ensemble de base sont les unions finies de points, ou le complémentaire d'un nombre fini de points. Les structures order 0 apparaissent essentiellement sur des corps algébriquement clos. Les structures o-minimales sont leur équivalent pour les corps réels clos.

1.2 Définitions et premières propriétés

Nous définissons ici une structure o-minimale sur un corps réel clos quelconque \mathcal{R} . Par la suite, et sauf mention explicite, les structures o-minimales considérées seront toujours des structures o-minimales sur le corps \mathbb{R} des réels.

Définition 1.2.1. Une *structure* \mathcal{S} sur le corps réel clos \mathcal{R} est la donnée pour chaque entier n d'une famille \mathcal{S}_n de sous-ensembles de \mathcal{R}^n , les ensembles *définissables dans* \mathcal{S} . Par extension, une application dont le graphe est définissable sera aussi dite *définissable*. Ces familles d'ensembles définissables doivent vérifier les conditions suivantes :

- Les constantes sont définissables dans \mathcal{S} . Ainsi, \mathcal{S}_1 contient tous les singletons,
- La somme, le produit, l'égalité et l'ordre sont définissables dans \mathcal{S} . Autrement dit, \mathcal{S}_2 contient les ensembles

$$\{(x, y); x = y\} \text{ et } \{(x, y); x > y\}.$$

Et \mathcal{S}_3 contient les ensembles

$$\{(x, y, z); z = x + y\} \text{ et } \{(x, y, z); z = x \cdot y\}.$$

- La structure est stable par union, intersection, et passage au complémentaire. Ainsi, si A et B appartiennent à \mathcal{S}_n , alors $A \cup B$, $A \cap B$ et ${}^c A$ appartiennent aussi à \mathcal{S}_n .
- La structure est stable par projection et produit cartésien. Ainsi, si A ap-

partient à S_n , si B appartient à S_m et si π est la projection canonique de $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$, alors $A \times B$ appartient à S_{n+m} , et $\pi(A)$ appartient à S_m .

Définition 1.2.2. Une structure S est *o-minimale* si les ensembles définissables de \mathcal{R} sont exactement les unions finies de points et d'intervalles.

La propriété suivante permet de mieux appréhender ce qu'est une structure et les manipulations qu'elle autorise.

Propriété 1.2.3. *Un ensemble défini par une formule du premier ordre à coefficients définissables dans une structure S est définissable dans S .*

Dorénavant, $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.

La propriété 1.2.3 permet de montrer par exemple que si A est un ensemble définissable, il en est de même pour son adhérence ou son intérieur. En effet, $\bar{A} = \{x, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, |x - y| < \varepsilon\}$.

On montre aussi les résultats suivants, preuves que les structures o-minimales sont un cadre agréable pour faire de la géométrie.

Propriété 1.2.4 (Fonctions implicites). *Soit $f : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application définissable dans une structure o-minimale S . Soit $Z = f^{-1}(0)$ et $(x_0, y_0) \in Z$. Alors si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est inversible, il existe un voisinage \mathcal{V} de (x_0, y_0) et une application définissable Φ d'un voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^k tel que*

$$(x, y) \in Z \cap \mathcal{V} \Leftrightarrow y = \Phi(x).$$

Propriété 1.2.5 (Inversion locale). *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application définissable dans une structure o-minimale S . On suppose que f est étale en x . Alors, f admet une réciproque définissable au voisinage de x .*

Voici maintenant quelques propriétés générales des ensembles définissables dans une structure o-minimale. Ces propriétés sont très classiques et nous n'en présentons pas de preuve ici. Pour une introduction plus détaillée aux structures o-minimales, nous renvoyons aux ouvrages de M. Coste [Cos00], de C. Miller et L. van den Dries [DM96] ou au livre de L. van den Dries [Dri98].

Lemme 1.2.6 (Finitude). *Soit E un ensemble définissable dans une structure o-minimale. Alors, E n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

Lemme 1.2.7 (Lemme du choix définissable). *Soit A un sous ensemble définissable de \mathcal{R}^{n+m} , et B sa projection dans \mathcal{R}^n . Alors, il existe une application définissable f , définie sur B , et dont le graphe est inclus dans A .*

Lemme 1.2.8 (Finitude uniforme). *Soit A un ensemble définissable de \mathcal{R}^{n+1} , tel que pour tout x de \mathcal{R}^n , la fibre $A_x = \{y ; (x, y) \in A\}$ soit finie. Alors il existe un entier N tel que $\text{Card } A_x < N$ pour tout x de \mathcal{R}^n .*

Wilkie montre même que pour une quasi-algèbre différentielle, la finitude uniforme implique la o-minimalité de la structure engendrée [Wil99]. Couplé à un théorème de finitude uniforme pour les pfaffiens du à Khovanskii [Kho84], ce résultat lui permet de montrer la o-minimalité de ces pfaffiens. Il retrouve en particulier la o-minimalité de la structure \mathcal{S}_{exp} obtenue en ajoutant le graphe de l'exponentielle à une structure o-minimale \mathcal{S} [Wil96] (voir aussi [vdDMM94], [KM99], [LR98b], [Spe99] et [Wil98]).

1.3 Un peu de logique

Les structures o-minimales sont surtout étudiées par des logiciens. Le point de vue logique, quoique équivalent au point de vue géométrique, nécessite un

vocabulaire spécifique, que nous allons introduire ici.

Un langage \mathcal{L} est la donnée d'un ensemble de symboles de fonctions et de relations. À chaque symbole est associé un entier : son arité. Les symboles de fonction peuvent être arrangés entre eux pour faire des \mathcal{L} -termes. Ce sont tous les mots que l'on peut construire à partir de variables et de fonctions, en respectant l'arité de celles-ci. Ces \mathcal{L} -termes sont ensuite associés pour obtenir des \mathcal{L} -formules, avec des quantificateurs, des combinaisons booléennes, et des relations du langage \mathcal{L} . Il faut bien sûr toujours respecter la syntaxe, c'est à dire l'arité des combinaisons booléennes et des relations.

Voici maintenant la définition de structure. Cette définition est l'analogue de la définition géométrique précédemment donnée, dans le cas où le langage \mathcal{L} contient celui des corps ordonnés.

Définition 1.3.1. Une \mathcal{L} -structure \mathcal{S} est la donnée d'un ensemble M non vide, d'une fonction de M^n dans M pour chaque symbole de fonction de \mathcal{L} d'arité n , et d'un sous ensemble de M^n pour chaque relation de \mathcal{L} d'arité n .

Nous pouvons ainsi associer à chaque formule un ensemble : à une formule $P(x_1, \dots, x_n)$ est associé l'ensemble $\{(x_1 \dots x_n); P(x_1, \dots, x_n)\}$. Les ensembles ainsi formés sont dits *définissables dans \mathcal{S}* . Cette famille d'ensemble est alors naturellement stable par union finie, intersection finie, passage au complémentaire, produit cartésien et projection. En effet, à chacune de ces opérations correspond une opération booléenne, ou un ajout d'un quantificateur, et les \mathcal{L} -formules sont stables par ces opérations. Les deux définitions de structure sont donc bien équivalentes, dans le cas des corps ordonnés.

On notera une structure $\langle M, \mathcal{L} \rangle$, où \mathcal{L} désigne les éléments du langage, et M l'ensemble sous-jacent. Par exemple, $\langle \mathbb{R}, 0, 1, >, +, * \rangle$ désigne la structure des

semi-algébriques à coefficients entiers sur \mathbb{R} ; les ensembles définissables dans cette structure sont les ensembles définis par des égalités et inégalités portant sur des polyômes à coefficients entiers. Dans cette thèse, les structures considérées ont pour ensemble de base le corps \mathbb{R} des réels, et leur langage contient toutes les constantes. Pour ne pas alourdir inutilement les notations, nous noterons $\langle \mathbb{R}, +, *, >, \mathcal{L} \rangle$ la structure $\langle \mathbb{R}, \mathbb{R}, +, *, >, \mathcal{L} \rangle$.

Cette nouvelle définition de structure permet de bien comprendre la propriété 1.2.3 introduite précédemment. Dans une structure, les ensembles définis par une formule du premier ordre sont naturellement définissables : c'est la définition.

La *o-minimalité* est une propriété des structures ordonnées, c'est à dire de celles dont le langage contient le symbole $>$. Elle s'exprime de la même façon du point de vue logique et géométrique : une structure $\langle M, >, \mathcal{L} \rangle$ est *o-minimale* si les ensembles définissables de M sont des unions finies de points et d'intervalles.

Si les définitions logiques et géométriques sont équivalentes, elles n'en présentent pas moins une différence de point de vue. En effet, une structure, telle que définie par le logicien, donne un rôle particulier à certains ensembles définissables. Par exemple, la structure des semi-algébriques, donnée par $\langle \mathbb{R}, >, +, * \rangle$ met en avant les graphes de la somme, du produit et de l'ordre. La structure des semi-algébriques peut donc être vue comme la *structure engendrée par* la somme, le produit et l'ordre.

Définition 1.3.2. Soit $\mathcal{E} = (E_i \subset \mathbb{R}^{n_i})_{i \in I}$ une famille de d'ensembles réels. On dira de la plus petite structure contenant tous les E_i qu'elle est *engendrée par* la famille \mathcal{E} .

Notons que cette définition est correcte : l'ensemble des structures contenant les éléments de la famille \mathcal{E} est bien ordonnée par l'inclusion.

Pour une structure o-minimale donnée, on peut essayer de trouver une famille d'ensembles simples qui l'engendre. On peut aussi se demander comment une famille engendre une structure, c'est à dire par le biais de quelles opérations. C'est là l'objet des recherches sur la génération des structures, que nous approfondirons au chapitre 3.

1.4 Décompositions et stratifications

Les structures o-minimales ont été étudiées en premier lieu pour les propriétés que nous allons donner ici. Il s'agit d'un bon comportement vis à vis des stratifications. Les stratifications interviennent dans l'étude des singularités, et dans les résultats liés aux déformations.

Nous n'aurons pas besoin des conditions de frontière spécifiques aux stratifications, aussi n'introduisons nous pas cette notion. Nous parlerons de décomposition, en spécifiant les propriétés que l'on en attend. Le lecteur intéressé pourra néanmoins remarquer que nos décompositions sont très proches des stratifications, et qu'elles pourraient se raffiner aisément pour obtenir des stratifications.

La propriété essentielle de ces décompositions est une propriété de dimension. Ces décompositions visent entre autre à partitionner un ensemble en sous-ensembles de dimension pure. La dimension d'un ensemble définissable se définit par un processus de triangulation, et coïncide avec la notion classique définie localement [Cos00]. Nous supposons le lecteur familier avec cette notion.

Voici une première propriété de décomposition, qui concerne la monotonie.

Propriété 1.4.1. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable dans une structure o-minimale. Alors, il existe un entier n et des réels a_1, \dots, a_n , tels que f soit stricte-*

ment monotone sur chaque intervalle $(-\infty, a_1), (a_i, a_{i+1}), (a_n, +\infty)$.

Démonstration. Considérons l'application

$$\Phi : x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^+ \mapsto \Phi(x, h) = f(x+h) - f(x).$$

Cette application est définissable. Fixons x_0 dans \mathbb{R} . l'application $h \mapsto \Phi(x_0, h)$ est définissable, donc l'ensemble des h où $\Phi(x_0, h)$ a un signe donné (strictement positif, strictement négatif, ou nul) aussi. Ces ensembles sont donc des unions finies de points ou d'intervalles. En particulier, $\Phi(x_0, h)$ a un signe constant à droite de 0, i.e., $\exists \varepsilon > 0$ tel que pour tout $h < \varepsilon$, $\Phi(x, h)$ est de signe constant.

Ainsi, les ensembles de la forme

$$\{x; \exists \varepsilon > 0, \forall h, 0 < h < \varepsilon, f(x+h) - f(x) \sigma 0\},$$

où σ appartient à $\{>, <, =\}$ forment une partition de \mathbb{R} .

D'autre part, ces ensembles sont définissables, donc sont des unions finies de points ou d'intervalles. En restriction à chacun de ces intervalles, f est alors croissante si σ est le signe $>$, décroissante si σ est le signe $<$, ou constante si σ est le signe $=$. On obtient ainsi une décomposition finie de \mathbb{R} en intervalles sur lesquels f est strictement monotone. \square

Remarquons que cette propriété admet un corollaire intéressant. Sur un voisinage de l'infini, une fonction définissable dans une structure o-minimale est soit identiquement nulle, soit inversible. Remarquons aussi

Propriété 1.4.2. *L'ensemble des germes à l'infini des fonctions définissables est totalement ordonné.*

Voici une autre propriété de décomposition, qui concerne la régularité.

Propriété 1.4.3. *Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , définissable dans une structure \mathcal{S} \mathcal{o} -minimale, et k un entier naturel. Alors, il existe une partition finie $C = (C_i)_{i \in I}$ de \mathbb{R}^n telle que :*

- *Chaque C_i de C est définissable dans \mathcal{S} ,*
- *Chaque partie C_i de C est soit incluse dans E , soit d'intersection vide avec E ,*
- *Chaque partie C_i de C est une sous-variété C^k connexe de \mathbb{R}^n .*

On peut voir apparaître à travers cette propriété la notion de dimension. Chaque partie de C étant une variété connexe, elle a une dimension pure. On a donc décomposé E en une union d'ensembles définissables et munis d'une dimension pure.

Cette propriété a un analogue pour les applications :

Propriété 1.4.4. *Soit f une application définie sur \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R}^m , et définissable dans une structure \mathcal{S} \mathcal{o} -minimale. Alors, il existe une partition finie C de \mathbb{R}^n telle que*

- *Chaque partie de C est une sous-variété C^k de \mathbb{R}^n , définissable dans \mathcal{S} ,*
- *En restriction à chacune des parties de C , f est C^k .*

Ces propriétés sont bien connues et nous n'en présentons pas de preuve.

Il est intéressant de remarquer, que bien qu'elles soient vraies pour chaque k , ces propriétés ne se généralisent à priori pas au cas C^∞ . Cependant, toutes les

structures o-minimales connues actuellement vérifient la propriété de décomposition C^∞ .

On peut s'intéresser aussi aux propriétés de densités locales des ensembles définissables dans une structure o-minimale comme Comte et Yomdin [YC04] ou A. Bernig [Ber06], comme l'ont fait au préalable Lelong pour les ensembles analytiques complexes, Kurdyka [KPR90], Comte, Lion et Rolin [Com00, CLR00] pour les sous-analytiques, ou Roche [Roc94] et Lion [Lio98] pour les pfaffiens.

1.5 Un lemme de type Koopman-Brown

Nous allons montrer un lemme pratique pour projeter des ensembles définissables en évitant une chute de la dimension. C'est un bon exemple des manipulations qu'autorisent les structures o-minimales. Ce lemme existe dans une version semi-analytique sous le nom de *Koopman – Brown* (cf. [Łoj65]). On en trouve aussi une version o-minimale dans [Dri98]. Étant donné un sous-ensemble définissable X de \mathbb{R}^n , il s'agit de trouver une direction de projection L telle que la fibre de X au-dessus de chaque point de sa projection soit une union finie de points. Bien sûr, ceci n'est possible que si L est de dimension inférieure ou égale à la codimension de X . Le lemme affirme qu'alors, les projections satisfaisantes sont génériques.

Plus précisément, soit X un ensemble de \mathbb{R}^n , et L une direction k dimensionnelle. La direction L sera dite *propre* si la fibre de X par rapport à L est toujours de dimension 0, et *impropre* sinon. Autrement dit, si ρ est la projection parallèlement à L sur L^\perp , L est *propre* si $X_t = \rho_X^{-1}(t)$ est de dimension 0 pour tout t dans L^\perp .

Le lemme suivant affirme que dès que c'est possible, les directions 1-dimen-

sionnelles propres sont génériques. Le corollaire qui suit généralise ce résultat aux directions k -dimensionnelles.

Lemme 1.5.1. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans une structure o-minimale, avec $\text{codim}(X) > 0$. Alors l'ensemble des directions 1-dimensionnelles impropres est de codimension au moins 1 dans la grassmannienne G_n^1 .*

Démonstration. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$, définissable, et de codimension non nulle. Posons :

$$M = \{x \in X, v \in \mathbb{R}^n ; \exists \varepsilon > 0, \forall t, 0 < t < \varepsilon \Rightarrow x + tv \in X\}.$$

C est un ensemble définissable, et le lemme équivaut à montrer que sa projection N sur \mathbb{R}^n (l'oubli de la première coordonnée x) est de codimension non nulle.

Raisonnons par l'absurde : supposons que N soit de dimension n .

D'après le lemme du choix définissable 1.2.7, il existe une application ϕ , définie sur N , à valeurs dans X , et telle que son graphe soit inclus dans M . On a donc, pour tout v dans N , $(v, \phi(v)) \in M$. Autrement dit :

$$\forall v \in N, \exists C_v > 0 \text{ tel que } \forall t, 0 < t < C_v \Rightarrow \phi(v) + tv \in X.$$

Quitte à restreindre N , on suppose que $C_v = C$ est uniforme. Nous avons ainsi construit une application $\psi_t = \phi + t * Id$ de N dans X pour tout $t < C$. Cette application étant définissable, elle est C^1 sur un ouvert de N , donc de \mathbb{R}^n (1.4.4). Sa différentielle est $D\psi_t = D\phi + t * Id$, donc les valeurs de t pour lesquelles ψ_t n'est pas une immersion sont au signe près les valeurs propres de $D\phi$, donc sont en nombre fini. Il existe donc t tel que ψ_t soit une immersion. Nous avons ainsi

plongé un ouvert de \mathbb{R}^n dans X , alors que $\dim(X) < n$.

C'est absurde.

Ainsi, N est de codimension non nulle, ce qui termine la preuve. \square

En appliquant récursivement ce lemme, on obtient la propriété :

Corollaire 1.5.2. *Soit X un ensemble définissable de codimension d , inclus dans \mathbb{R}^n . Alors l'ensemble des directions d directionnelles impropres pour X est de codimension supérieure ou égale à 1 dans la grassmannienne G_n^{n-d} . En particulier, il existe une direction L , d dimensionnelle, telle que la fibre de X par rapport à L soit partout de dimension nulle.*

Démonstration. Pour un ensemble définissable Y de \mathbb{R}^n donné, nous noterons $I_n^d(Y)$ l'ensemble des directions d dimensionnelles impropres pour Y .

La démonstration du corollaire se fait par récurrence sur d , la codimension de X . Le cas $d = 1$ est le lemme 1.5.1. Supposons le corollaire vrai jusqu'au rang $d - 1$.

Fixons L une direction 1-dimensionnelle et propre pour X . Décomposons maintenant la grassmannienne G_n^d . Certaines directions de G_n^d contiennent L , et d'autres non. Il en est de même pour $I_n^d(X)$. Sa codimension est donc le minimum des codimensions de chacune de ces deux parties. Comme les directions contenant L forment dans G_n^d un ensemble de codimension supérieure à 1, il suffit de montrer que les directions de $I_n^d(X)$ ne contenant pas L sont de codimension au plus 1. Notons $I_n^d(X)_{\bar{L}}$ cet ensemble : les directions d -dimensionnelles de \mathbb{R}^n impropres pour X ne contenant pas L .

En restriction à l'ensemble des directions de G_n^d ne contenant pas L , la projection π_L sur L^\perp parallèlement à L est une projection sur G_{n-1}^d . La fibre de celle-

ci est partout de dimension d . Mais l'image de $I_n^d(X)_{\overline{L}}$ est entièrement incluse dans $I_{n-1}^d(\pi_L(X))$. Par hypothèse de récurrence, $I_{n-1}^d(\pi_L(X))$ est de codimension 1, donc de dimension inférieure à $(n-1-d)*d-1$. La dimension de $I_n^d(X)_{\overline{L}}$ est donc inférieure à la somme de la dimension de sa projection et de la dimension de sa fibre, soit $(n-d-1)d-1+d = (n-d)d-1$. Et sa codimension est donc au moins $(n-d)d - ((n-d)d-1) = 1$.

□

1.6 Équations et Paramétrisations

Il est souvent plus pratique de travailler sur des applications que sur des ensembles. Nous expliquons ici comment les structures o-minimales permettent de se ramener à ce cas de figure. Nous avons vu que les ensembles définissables se décomposaient facilement en sous-variétés différentielles. Or, une sous-variété définissable peut être décrite par des applications définissables, et de même classe de différentiabilité, que ce soit par le biais d'équations ou de paramétrisations.

Propriété 1.6.1 (Paramétrisation définissable). *Soit E une sous variété C^k (resp C^∞) de \mathbb{R}^n , définissable dans une structure o-minimale S . Alors, E admet un atlas C^k (resp C^∞), et tel que les changements de carte soient définissables dans S .*

Propriété 1.6.2 (Équation définissable). *Soit E une sous-variété C^k (resp C^∞) fermée dans un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , définissable dans une structure o-minimale S . Alors il existe un voisinage de E dans \mathcal{U} définissable \mathcal{V} , et une application C^k (resp C^∞) définissable dans S , $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $E = F^{-1}(0)$.*

Travailler avec des applications plutôt qu'avec des ensembles permet de faire du calcul différentiel. La propriété de décomposition suivante est évidente, mais

sera souvent utilisée. Elle donne une décomposition telle que le rang des applications considérées soit constant sur chaque partie.

Propriété 1.6.3. *Soit F une application de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^m définissable dans une structure o-minimale. Alors, les sous-ensembles \mathcal{U}_i de \mathcal{U} où F est de rang exactement égal à i sont définissables. De plus, ils sont définis par des systèmes d'équations et d'inéquations portant sur des fonctions de l'algèbre différentielle engendrée par F .*

Lorsque la structure o-minimale \mathcal{S} est engendrée par une famille d'applications \mathcal{F} , il est intéressant de se demander comment les applications qui définissent un ensemble sont obtenues à partir de \mathcal{F} . Les résultats présentés ici donnent une réponse à cette problématique dans le cas des structures o-minimales polynomialement bornées.

CHAPITRE 2

STRUCTURES O-MINIMALES POLYNOMIALEMENT BORNÉES

Dans ce chapitre, nous présentons les structures o-minimales polynomialement bornées. Après avoir rappelé la définition et établi quelques propriétés élémentaires concernant les équivalents et la quasi-analyticité, nous introduirons un théorème de C. Miller [Mil94a] qui jouera un rôle central dans la preuve de notre résultat principal 0.2.4. A l'aide de ce théorème, nous établirons le lemme 2.3.3, qui permet d'obtenir des partitions régulières d'ensembles singuliers.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Une structure o-minimale est polynomialement bornée si les fonctions qu'elle définit ont une croissance *raisonnable* – c'est à dire non exponentielle – à l'infini.

Définition 2.1.1. Une structure o-minimale \mathcal{S} sur \mathbb{R} est dite polynomialement bornée si pour toute fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il existe un entier n tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

La famille des ensembles semi-algébriques est une structure o-minimale polynomialement bornée. C'est là un résultat de Hörmander [Hör58]. La famille des sous-analytiques globaux aussi, d'après Łojasiewicz [Łoj65]. Les structures \mathbb{R}_{an}^Λ [DS98], ou celles obtenues à partir de certaines classes de Denjoy-Carleman [RSW03] sont aussi polynomialement bornées. Un résultat récent de A. Grigo-

riev [Gri05] affirme que la structure engendrée par l'ajout d'un nombre fini d'applications lisses aux semi-algébriques est génériquement o-minimale et polynomialement bornée.

Une conséquence immédiate de la définition de polynomialement borné est que ces structures ne peuvent contenir l'exponentielle. En fait, la réciproque de cette propriété est vraie : les structures o-minimales qui ne sont pas polynomialement bornées définissent nécessairement l'exponentielle [Mil94b].

Voici quelques propriétés élémentaires des structures o-minimales polynomialement bornées. Ces résultats expriment la pertinence des fonctions $x \mapsto x^s$ prises comme échelle de comparaison.

On écrira $f(x) \gg g(x)$ pour “ g est négligeable devant f au voisinage de $+\infty$ ”, et $f(x) \sim g(x)$ pour “ f et g sont équivalentes en $+\infty$ ”.

Propriété 2.1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée. On suppose que tout ε positif,*

$$x^{-\varepsilon} \ll f(x) \ll x^{\varepsilon}.$$

Alors f a une limite finie, non nulle en $+\infty$

Démonstration. Rappelons que toute fonction définissable dans une structure o-minimale est monotone au voisinage de $+\infty$ (1.4.1). En particulier, toute fonction admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. La fonction f est donc croissante sur un voisinage de l'infini, et y admet une réciproque F , définissable (propriété 1.4.1). Cette réciproque domine alors toutes les puissances de x , ce qui contredit le caractère polynomialement borné de la structure.

Supposons alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Comme f n'est pas identiquement nulle au voisinage de l'infini (puisque $f(x) \gg x^{-\varepsilon}$), son inverse $F = 1/f$ est bien définie au voisinage de l'infini. Celui-ci vérifie aussi $x^{-\varepsilon} \ll F(x) \ll x^\varepsilon$, mais tend vers l'infini. On a vu que ce n'était pas possible.

Ainsi, la limite de f est nécessairement finie et non nulle. \square

Propriété 2.1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable dans une structure o-minimale et polynomialement bornée. Alors, il existe deux réels r et k tels que $f(x) \sim_{x \rightarrow \infty} k * x^r$.*

Démonstration.

$$\text{Soit } r = \inf\{s; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^s} = 0\}.$$

Cette borne inférieure est soit un réel, soit $-\infty$, puisqu'elle porte sur un ensemble non vide, par définition de polynomialement borné.

Si r est $-\infty$, alors la fonction est identiquement nulle sur un voisinage de l'infini. En effet, sinon elle serait inversible sur un voisinage de l'infini, et cet inverse contredirait le caractère polynomialement borné de la structure.

Supposons donc que r soit réel. On a pour tout ε positif

$$x^{r-\varepsilon} \ll f(x) \ll x^{r+\varepsilon}.$$

Si r est nul, d'après la propriété précédente, f a une limite et est donc équivalente à une constante.

Si r est non nul, alors pour tout ε positif, $x^{r-\varepsilon} < f(x) < x^{r+\varepsilon}$ sur un voisinage de l'infini. Donc $x^{r-\varepsilon-1} < f'(x) < x^{r+\varepsilon-1}$ sur un voisinage de l'infini, d'après la

proposition 1.4.2. Cette inégalité étant vérifiée pour tout ε , on a

$$x^{r-\varepsilon-1} \ll f'(x) \ll x^{r+\varepsilon-1}$$

pour tout ε positif. On en conclut que pour tout ε positif,

$$x^{-\varepsilon} \ll \frac{xf'(x)}{f(x)} \ll x^{\varepsilon}.$$

Ce qui implique que $xf'(x)/f(x)$ admet une limite finie non nulle en $+\infty$. Appelons r' cette limite.

Soit g la fonction définissable :

$$g(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} - r'.$$

Cette fonction tend vers 0 quand x tend vers l'infini. De plus, f vérifie l'équation différentielle :

$$xf'(x) - (r' + g(x))f(x) = 0.$$

La fonction f est donc de la forme $x \mapsto x^{r'} \exp(\int^x \frac{g(t)}{t})$, où $\int^x \frac{g(t)}{t}$ désigne la valeur en x d'une primitive de $g(t)/t$.

Puisque g est définissable et tend vers 0, et puisque la structure est polynomialement bornée, il existe un réel positif s tel que $g(x) \ll x^{-s}$. La fonction $g(x)/x$ est donc intégrable au voisinage de l'infini, donc $\exp \int^x \frac{g(t)}{t}$ a une limite finie quand x tend vers l'infini. Ainsi $f(x)/x^{r'}$ tend vers un réel k quand x tend vers l'infini, c'est à dire que $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} k x^{r'}$.

On peut remarquer que l'exposant r' coïncide nécessairement avec r .

□

Remarque 1. Nous avons attribué un équivalent à l'infini à chaque fonction définissable. Un changement de variable montre qu'en chaque point x_0 et pour toute fonction définissable dans une structure o-minimale et polynomialement bornée, on peut trouver un équivalent à droite ou à gauche de la forme $x \mapsto k(x - x_0)^r$.

2.2 Quasi-analyticité, théorème de Miller

On a vu que l'échelle de comparaison $x \mapsto x^s$ est particulièrement bien adaptée aux structures o-minimales polynomialement bornées. Ceci peut être vu comme une conséquence de la quasi-analyticité de ces structures.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée. On peut lui associer un équivalent de la forme $x \mapsto kx^r$ en 0. En réappliquant cette procédure récursivement à la différence de f et de son développement, on obtient un développement asymptotique pour f . Si f est C^∞ , le développement obtenu est son développement de Taylor. Un point où le développement de Taylor de f est nul est appelé *point de platitude* de f . Nous avons alors la propriété :

Propriété 2.2.1. *Si f est définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée, et si f admet un point de platitude, alors f est identiquement nulle au voisinage de celui-ci.*

Démonstration. Soit x le point de platitude de f . Si f n'est pas nulle à droite de x , alors elle y est inversible. Mais son inverse tend alors vers l'infini plus vite que

toutes les puissances de x , ce qui est impossible. Le même raisonnement à gauche de x montre que f est identiquement nulle au voisinage de x . \square

Corollaire 1 (Quasi-analyticité). Soient f et g deux fonctions C^∞ au voisinage de 0, définissables dans une même structure o-minimale polynomialement bornée. Alors, si f et g ont même développement de Taylor en 0, f et g ont même germe en 0.

Démonstration. Il suffit de constater que $f - g$ est une fonction plate en 0, ce qui est le cas car le développement de $f - g$ en 0 est nul. \square

La propriété suivante exprime ce même phénomène d'une autre manière. On reconnaîtra une propriété bien connue dans le cas analytique.

Propriété 2.2.2. *Soit f une application C^∞ définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée, définie sur un ouvert connexe \mathcal{U} de \mathbb{R}^n . Soit $E = f^{-1}(0)$.*

Alors, $\text{Int } E = \emptyset$ ou $E = \mathcal{U}$.

Démonstration. Supposons que $\text{Int } E \neq \emptyset$. Il s'agit de montrer que E est ouvert et fermé dans \mathcal{U} . Comme E est par définition fermé, il suffit de montrer que sa frontière est vide.

Supposons que cette frontière soit non vide, et considérons une boule centrée en un point de celle-ci, et incluse dans \mathcal{U} . Cette boule contient nécessairement un point x de $\text{Int } E$, et un point y n'appartenant pas à E .

Étudions alors la fonction ϕ définie par :

$$\phi : t \in [0, 1] \mapsto f(x + t(y - x)).$$

Cette fonction est définissable, et C^∞ . Or elle est nulle sur un voisinage de 0, et non nulle en 1. Elle admet donc un point de platitude entre 0 et 1, ce qui est absurde.

La frontière de E est donc vide, donc E et \mathcal{U} coïncident.

□

La quasi-analyticité a pour conséquence une grande rigidité géométrique : une sous-variété lisse est totalement déterminée par son germe en un point.

Propriété 2.2.3. *Soient E et F deux sous-variétés lisses connexes et fermées dans un même ouvert de \mathbb{R}^n , définissables dans une structure o-minimale polynomialement bornée. S'il existe un ouvert \mathcal{U} tel que $E \cap \mathcal{U}$ et $F \cap \mathcal{U}$ soient non vide et coïncident, alors $E = F$.*

Démonstration. Posons $m = \dim E$.

Rappelons qu'une sous-variété lisse localement fermée dans une structure o-minimale peut toujours être vue comme les zéros d'une application C^∞ définissable. Posons donc $F = f^{-1}(0)$, avec f définissable et C^∞ .

Soit \mathcal{U}' le plus grand ouvert de E inclu dans F . Cet ensemble est bien sur non vide car il contient $E \cap \mathcal{U}$. Il suffit donc de montrer qu'il est fermé dans E pour s'assurer qu'il coïncide avec E . Pour cela, nous allons montrer qu'il n'a pas de frontière dans E .

Soit x un point de $\text{Fr } \mathcal{U}'$. Il s'agit de montrer qu'il existe un voisinage de x dans E qui soit inclus dans $E \cap F$. Mais comme toute variété lisse définissable, E admet un paramétrage C^∞ définissable au voisinage de x . Autrement dit, il existe un plongement p , C^∞ et définissable, d'un voisinage \mathcal{W} de $0_{\mathbb{R}^m}$ dans \mathbb{R}^n , envoyant 0 sur x , et \mathcal{W} sur un voisinage \mathcal{V} de x dans E .

Les points de $E \cap F$ sont au voisinage de x ceux où f s'annule. D'autre part,

comme x est sur la frontière de \mathcal{U}' , $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}'$ est un ouvert non vide de E . La fonction f s'y annule.

En composant avec le paramétrage p , on en déduit que $f \circ p$ s'annule sur un ouvert de \mathcal{W} . Comme $f \circ p$ est une application C^∞ définissable dans une structure o-minimale, $f \circ p$ s'annule sur \mathcal{W} tout entier, en vertu du lemme 2.2.2. Ceci prouve que f s'annule sur \mathcal{V} , donc que \mathcal{U}' est un voisinage de x dans E . Ainsi, la frontière de \mathcal{U}' est vide.

L'ensemble \mathcal{U}' étant ouvert et fermé dans E connexe, \mathcal{U}' et E coïncident, et $E \subset F$. L'inclusion réciproque se montre de la même manière.

□

On a vu que dans une structure o-minimale polynomialement bornée, les fonctions $x \mapsto x^r$ jouaient un rôle particulier. En particulier, toute fonction est équivalente à un $k * x^r$ au voisinage de l'infini. Le théorème suivant décrit le comportement de l'exposant r quand il dépend d'un paramètre.

Théorème 2.2.4 (Miller). *Soit $f : x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \mapsto f(x, t)$ une application définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée \mathcal{S} . On pose $k(x), r(x)$ tels que*

$$f(x, t) \sim_{t \rightarrow \infty} k(x)t^{r(x)}.$$

Alors $r(x)$ est définissable, et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Nous proposons une preuve de ce théorème central, différente de la preuve originale [Mil94a]. Elle utilise un résultat plus fort : la o-minimalité de la structure \mathcal{S}_{exp} si \mathcal{S} est o-minimale, \mathcal{S}_{exp} désignant la structure obtenue en ajoutant à \mathcal{S} le graphe de l'exponentielle.

Démonstration. Pour voir la définissabilité de r en fonction de x , il suffit de constater que

$$r(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)}{f(x, t)}.$$

Ce qui a été vu dans la preuve de la proposition 2.1.3.

Pour montrer que $r(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeur, nous allons utiliser une autre expression de r . Remarquons en effet que

$$r(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x, t)}{\ln(t)}.$$

La fonction $\ln f(x, t)/\ln(t)$ n'est pas définissable dans la même structure que f , mais par contre, elle est définissable dans \mathcal{S}_{exp} . En particulier, il existe une décomposition de \mathcal{U} en un nombre fini de parties $(A_i)_{i \in I}$ telle qu'en restriction à chaque A_i , $r(x)$ soit C^1 et que

$$\frac{dr}{dx}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)}{f(x, t)} \frac{1}{\ln(t)}.$$

Nous affirmons que cette limite ne peut être que nulle ou infinie. En effet, l'expression $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)/f(x, t)$ est définissable dans \mathcal{S} , et ne peut donc être équivalente à un logarithme quand t tend vers l'infini. Partout où elle existe, cette différentielle est donc nulle, donc r est constant sur chaque A_i . En particulier, r ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

□

Ce théorème permet de montrer par exemple la finitude des exposants de Łojasiewicz. Nous allons l'utiliser ici pour donner une propriété concernant l'ordre

des zéros d'une fonction définissable. Nous utiliserons cette propriété à de nombreuses reprises par la suite.

Soit f une application continue, définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée, et soit $E = f^{-1}(0)$. On va définir l'ordre de f en un point x de E .

Considérons l'application

$$r \in \mathbb{R}_+^* \mapsto M(r) = \sup_{|y-x|=r} |f(y)|.$$

Cette application est définissable. Par continuité de f , $M(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 0. Comme la structure est polynomialement bornée, il existe k et s tels que $M(r) \sim k * r^s$ quand r tend vers 0. Dans le cas où $M(r)$ est identiquement nul sur un voisinage à droite de 0, on pose $s = \infty$.

Définition 2.2.5. On appellera *ordre de f en x* ce nombre s .

Remarquons que par un développement de Taylor de f en x , si la classe de différentiabilité de f est suffisante, on retrouve bien la notion d'ordre classique.

Propriété 2.2.6. Soit f une application continue, définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée, et $E = f^{-1}(0)$. Alors l'ordre de f en x ne prend qu'un nombre fini de valeurs quand x parcourt E .

Démonstration. Remarquons que l'application :

$$x \in E, r \in \mathbb{R}_+^* \mapsto M(x, r) = \sup_{|y-x|=r} |f(y)|$$

est définissable. On a $M(x, r) \sim_{r \rightarrow 0} k(x) * r^{s(x)}$, où $s(x)$ est l'ordre de f en x .

D'après le théorème de 2.2.4 appliqué à M , $s(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque x parcourt E . \square

2.3 Singularités dans les structures o-minimales polynomialement bornées

2.3.1 Motivations

Deux stratégies sont couramment utilisées pour réduire les problèmes liés aux singularités dans les structures o-minimales. Considérons une application $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, et intéressons nous à $E = f^{-1}(0)$.

Pour comprendre les singularités de E , il est possible de construire un ensemble \mathcal{V} , une application e et une application \tilde{f} tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & & \\ e \downarrow & \searrow \tilde{f} & \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

commute, avec \tilde{f} sans singularité. Cette modification de la source s'apparente aux éclatements. L'ensemble E est alors vu comme un effondrement de $\tilde{f}^{-1}(0)$, un ensemble non singulier. Ce type de construction est utilisé par exemple dans [RSW03].

Une autre stratégie consiste au contraire à modifier la cible, c'est à dire à décomposer E en ensembles définissables non singuliers E_i , et à remplacer f par des applications f_i s'annulant sur chaque partie E_i , et non singulières. C'est ce point de vue que nous aborderons en détail ici, dans le but d'obtenir le lemme de régularisation 2.3.3.

2.3.1.1 Exemple

Voici un exemple qui illustre ces méthodes. Considérons $f(x,y) = x^4 - y^4$, et $E = \{(x,y); f(x,y) = 0\}$. C'est l'union des deux droites $x + y = 0$, et $x - y = 0$. Cet ensemble est singulier en 0.

Pour modifier la source, on peut considérer E comme la projection sur \mathbb{R}^2 de l'ensemble $E' = \{(x,y,z); y * z = x \text{ et } x^4 - y^4 = 0\}$. C'est l'union des droites $(z = 1, x = y)$ et $(z = -1, x + y = 0)$, donc un ensemble non singulier.

Une modification de la cible nous conduit à décomposer E , en ajoutant des conditions de signe sur les dérivées partielles de f . On pose ainsi

$$E_1 = \{(x,y); x^4 - y^4 = 0, 4x^3 - y^4 \neq 0, \text{ ou } x^4 - 4y^3 \neq 0\}.$$

$$E_2 = \{(x,y); x^4 - y^4 = 0, 4x^3 - y^4 = 0, x^4 - 4y^3 = 0\}.$$

L'ensemble E_2 est l'union des points $(0,0)$ et $(4,4)$, et est non singulier, et E_2 est l'union de quatre morceaux (selon les signes des dérivées partielles de f) non singuliers.

Bien que E_2 soit régulier, les équations qui le définissent sont singulières en 0. Mais on peut réitérer le procédé, et on pose

$$E_3 = \{(x,y); (x,y) \in E_2, 12x^2 - y^4 \neq 0, \text{ ou } x^3 - y^3 \neq 0, \text{ ou } x^4 - 12y^2 \neq 0\}$$

$$\text{et } E_4 = \{(x,y); (x,y) \in E_2, 12x^2 - y^4 = 0, x^3 - y^3 = 0, x^4 - 12y^2 = 0\}$$

L'ensemble $E_3 = \{(4,4)\}$ est maintenant défini par des équations non singulières. En ajoutant encore des équations à $E_4 = \{(0,0)\}$, on en obtiendra aussi une

présentation régulière.

Ainsi, cette décomposition a deux buts. D'une part, il s'agit d'obtenir des ensembles réguliers. Et d'autre part, il s'agit d'obtenir de ces ensembles des présentations régulières. Précisons ces notions :

Définition 2.3.1. Un ensemble E est *régulier* en x s'il coïncide au voisinage de x avec les zéros d'une submersion. Un ensemble est *régulier* s'il est régulier en chacun de ses points.

Définition 2.3.2. Considérons un ensemble défini par un système d'équations et d'inéquations :

$$E = \{x; f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}.$$

L'ensemble E est *régulier dans sa présentation en x* si E coïncide au voisinage de x avec les zéros d'une submersion extraite de (f_1, \dots, f_k) , c'est à dire s'il existe (i_1, \dots, i_j) tels que l'ensemble $\{y; f_{i_1}(y) = 0, \dots, f_{i_j}(y) = 0\}$ coïncide avec E au voisinage de x , et que $(f_{i_1}, \dots, f_{i_j})$ soit une submersion en x . Un ensemble est *régulier dans sa présentation* s'il est régulier dans sa présentation en chacun de ses points.

On a vu avec l'exemple une méthode pour décomposer des ensembles en ensembles réguliers dans leur présentation : il s'agit d'ajouter à l'équation $f = 0$ qui définit E des conditions de signe sur certaines dérivées partielles de F .

Cette approche nous fournit un algorithme pour décomposer un ensemble en sous-ensembles réguliers dans leur présentation. Celui-ci est utilisé dans le cas analytique dans [Gab96]. L'arrêt de l'algorithme résulte alors de la noéthériannité

de l'anneau des fonctions analytiques. Nous ne disposons pas d'un tel théorème dans le cas o -minimal. Il va donc nous falloir trouver explicitement un pas à partir duquel l'itération s'arrête. Néanmoins, on peut remarquer que cela est justement rendu possible parce que dans le cadre o -minimal polynomialement borné, l'anneau des applications C^∞ possède des propriétés d'algèbre topologiquement noethérienne comme définies par Tougeron [Tou91], propriété montrée par K. J. Nowak. [Now06].

2.3.2 Lemme de Régularisation

Le lemme suivant permet de décomposer un ensemble défini par des équations et inéquations en une union d'ensembles réguliers dans leurs présentations. Nous démontrons ce lemme en 2.3.2.5. La preuve repose sur une récurrence, dont nous présentons le pas d'induction en 2.3.2.1.

Lemme 2.3.3. *Soit $X = \{x; F(x) = 0, G(x) > 0\}$, où F et G sont des applications C^∞ , définissables dans une structure o -minimale polynomialement bornée. Alors, il existe une partition finie $(X_i)_{i \in I}$ de X telle que : pour tout i de I , il existe des applications définissables F_i et G_i , C^∞ , telles que*

$$X_i = \{x; F_i(x) = 0, G_i(x) > 0\}$$

X_i étant régulier dans cette présentation.

De plus, les applications F_i et G_i peuvent être choisies dans l'algèbre différentielle engendrée par F et G .

Le principe de la preuve du lemme 2.3.3 est le suivant. Considérons un en-

semble X plongé dans un espace E de dimension n , régulier. Quitte à prendre pour E l'espace \mathbb{R}^n entier, nous sommes toujours dans ce cas là. En chaque point x où X est de dimension n , X est régulier, car il coïncide avec E , grâce au lemme 2.2.3. Les équations qui définissent E fournissent une présentation régulière de X en x . Appelons V l'ensemble des points où la dimension de X est la même que celle de E .

Nous décomposons alors $X \setminus V$ en sous-ensembles plongés dans des espaces réguliers de dimension inférieure à n . En effet, par définition de V , $X \subset V$ est de codimension non nulle dans E , donc de dimension inférieure à n . En réitérant le processus, la dimension des espaces ambiants décroissant à chaque étape, on finit par obtenir une décomposition de X en parties régulières dans leur présentation.

2.3.2.1 Induction

Le lemme suivant est le pas d'induction de la récurrence qui démontre le lemme 2.3.3.

Lemme 2.3.4. *Soient F et G des applications C^∞ sur \mathbb{R}^m , définissables dans une structure o-minimale polynomialement bornée. Soit H à valeurs dans \mathbb{R}^{m-n} , extraite de F , et K extraite de G . On pose*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^m; H(x) = 0, K(x) > 0\}$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^m; F(x) = 0, G(x) > 0\}.$$

On suppose que H est une submersion en chaque point de E .

Alors :

Il existe une partition finie de X : $X = Y \cup X_1 \cup \dots \cup X_k$ telle que :

- Y est défini par des conditions de signe portant sur des applications de l'algèbre différentielle engendrée par F , Y est vide ou de dimension n , et régulier dans sa présentation.
- X_i est défini par des conditions de signe portant sur des applications de l'algèbre différentielle engendrée par F .
- Pour tout i , il existe h'_i , dans l'algèbre différentielle engendrée par F , tel que $E_i = \{x \in E; h'_i(x) = 0\}$ contienne X_i . De plus, $E_i = \{x; H(x) = 0, h'_i(x) = 0, K(x) > 0\}$ est de dimension $n - 1$, et régulier dans cette présentation.

Nous allons démontrer ce lemme dans plusieurs configurations. Tout d'abord, dans un cas très simple : celui où E est inclus dans \mathbb{R}^n . Nous nous ramènerons ensuite à ce cas de figure dans le cas simple où E est localement le graphe d'une application au dessus des n premières coordonnées. Enfin, pour le cas général, nous découperons E de manière à ce qu'il se présente localement comme un graphe.

2.3.2.2 Un cas très simple

Supposons que E soit inclus dans \mathbb{R}^n , autrement dit, que

$$E = \{x; x_{n+1} = 0, \dots, x_m = 0, K(x) > 0\}.$$

Démonstration dans le cas très simple. Restreignons nous à \mathbb{R}^n . D'après la propriété 2.2.6, l'ordre de F ne prend qu'un nombre fini de valeurs quand x parcourt X . En particulier, il existe N tel que l'ordre de $F|_{\mathbb{R}^n}$ soit infini s'il est supérieur à N .

$$\text{Soit } Y = \{x \in X; \forall \alpha, |\alpha| < N, \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x^\alpha} = 0\},$$

où les $m - n$ dernières coordonnées de α sont nulles. Il s'agit des points où $F|_X$ est d'ordre infini. Autrement dit, des points au voisinage desquels X coïncide avec \mathbb{R}^n .

$$Y = \{x; (x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, F(x) = 0, \forall \alpha \text{ } |\alpha| < N, \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x^\alpha} = 0\}$$

est donc une présentation régulière de Y .

Pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)$ de \mathbb{N}^m de norme inférieure à N , on choisit un multi-indice $\alpha_{(-1)}$ tel que $\alpha - \alpha_{(-1)}$ soit de norme 1. On pose alors

$$X_\alpha = \{x \in X; \forall \beta < \alpha, \frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x^\beta} = 0, \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x^\alpha} \neq 0\}$$

$$E_\alpha = \{x \in E; \frac{\partial^{|\alpha|-1} F}{\partial x^{\alpha_{(-1)}}} = 0, \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x^\alpha} \neq 0\}$$

où les multi-indices sont ordonnés par leur norme puis l'ordre lexicographique, et où les $m - n$ dernières coordonnées de β sont nulles.

La décomposition $X = Y \cup \bigcup_{|\alpha| \leq N} X_\alpha$ est bien une partition de X . L'ensemble Y est bien de dimension n et on en a donné une présentation régulière. X_α est bien inclus dans E_α . Enfin, E_α est bien de dimension $n - 1$, et régulier dans la présentation

$$E = \{x; (x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \frac{\partial^{|\alpha|-1} F}{\partial x^{\alpha_{(-1)}}}(x) = 0, K(x) > 0, \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x^\alpha}(x) \neq 0\}$$

puisque l'équation qui le définit est non singulière en chacun de ses points.

Le lemme 2.3.4 est donc vérifié dans ce cas très simple. \square

2.3.2.3 Un cas simple

On suppose maintenant que H vérifie les hypothèses du théorème des fonctions implicites 1.2.4 au-dessus des n premières coordonnées en chaque point de E . Autrement dit, au voisinage de chacun de ses points, E est le graphe d'une application C^∞ . On note π la projection canonique de \mathbb{R}^m sur \mathbb{R}^n .

Démonstration dans le cas simple. Soit y dans E . Il existe un voisinage \mathcal{V} de y tel que $E \cap \mathcal{V}$ soit le graphe d'une application ϕ_y de $\pi(\mathcal{V})$ dans \mathbb{R}^{m-n} . Remarquons que ϕ_y est définissable (prop. 1.2.4).

Notons $x' = (x_1, \dots, x_n)$ les n premières coordonnées de $x = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_m)$ les $m - n$ dernières coordonnées, et $F'_y(x') = F(x', \phi_y(x'))$, $G'_y(x') = G(x', \phi_y(x'))$. L'ensemble $X' = \{x' \in \pi(\mathcal{V}), F'_y(x') = 0, G'_y(x') > 0\}$ est la projection de $X \cap \mathcal{V}$ sur \mathbb{R}^n .

Au voisinage de y' , les dérivées de F'_y s'expriment en fonction de celles de F en y et de ϕ_y en y' . Comme ϕ_y est donnée par le théorème des fonctions implicites, elle n'appartient à priori pas à l'algèbre différentielle engendrée par F . Par contre ses dérivées s'expriment en fonction de celles de H . En effet, on a $H(x', \phi_y(x')) = 0$, donc

$$D\phi_y(x') = -\left[\frac{\partial H}{\partial x''}(x)\right]^{-1} * \frac{\partial H}{\partial x'}(x).$$

Les dérivées de F'_y en y' s'expriment donc dans l'algèbre différentielle engendrée par F .

Pour un multi indice α de \mathbb{N}^n , on pose

$$\partial_\alpha F(y) = \frac{\partial^{|\alpha|} F'_y}{\partial x'^{\alpha}}(y').$$

Cette application *n'est pas une dérivée de F* , mais appartient tout de même à l'algèbre différentielle engendrée par F .

Supposons que E et X coïncident au voisinage de y . Alors F'_y est d'ordre infini en y' . D'après le lemme 2.2.6, l'ordre de F'_y ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi il existe un entier N tel que l'ordre de F'_y soit infini dès qu'il est supérieur à N . On pose

$$Y = \{x \in X; \forall \alpha, |\alpha| < N, \partial_\alpha F(x) = 0\}.$$

Il s'agit des points au voisinage desquels E et X coïncident. Pour α de module inférieur à N , on pose

$$X_\alpha = \{x \in X; \forall \beta < \alpha, \partial_\beta F(x) = 0, \partial_\alpha F(x) \neq 0\}$$

$$E_\alpha = \{x \in E; \partial_{\alpha_{(-1)}} F(x) = 0, \partial_\alpha F(x) \neq 0\},$$

où $\alpha_{(-1)}$ est un multiindice tel que $\alpha - \alpha_{(-1)}$ soit de norme 1.

On obtient ainsi une partition Y, X_1, \dots, X_k de X , et pour $i = 1, \dots, k$, un ensemble E_i régulier dans sa présentation et contenant X_i . Les ensembles Y, X_i , et E_i sont bien définis par des équations et inéquations portant sur des applications de l'algèbre différentielle engendrée par F et G .

Le lemme 2.3.4 est vérifié dans ce cas simple. □

2.3.2.4 Le cas général

Pour le cas général, nous allons montrer le lemme suivant. Il permet de décomposer X de manière à ce que les espaces ambiants vérifient toujours les hypothèses du théorème des fonctions implicites.

Lemme 2.3.5 (Décomposition locale en graphes). *Soient $X = \{F = 0, G > 0\}$ et $E = \{H = 0, K > 0\}$ comme dans l'énoncé du lemme 2.3.4. Alors, il existe X_1, \dots, X_l , une partition de X et des E_i tels que $X_i \subset E_i$, X_i et E_i vérifiant les hypothèses du lemme 2.3.4. Les équations et inéquations ajoutées pour définir les X_i et E_i étant toutes dans l'algèbre différentielle engendrée par H . De plus, pour tout i , il existe n coordonnées telles que H vérifie le théorème des fonctions implicites au-dessus de ces n coordonnées en chaque point de E_i .*

Démonstration. On ordonne les applications croissantes de $[1, \dots, m-n]$ dans $[1, \dots, m]$ de la façon suivante :

$$\tau_1 < \tau_2 \Leftrightarrow \exists i \in [1, \dots, m-n],$$

$$j < i \Rightarrow \tau_1(j) = \tau_2(j)$$

$$\tau_1(i) < \tau_2(i).$$

On définit aussi, pour une application τ croissante de $[1, \dots, m-n] \rightarrow [1, \dots, m]$, son conjugué $\bar{\tau}$, l'application croissante de $[1, \dots, n] \rightarrow [1, \dots, m]$ qui à i associe le $i^{\text{ème}}$ entier j tel que $j \notin \tau([1, \dots, m-n])$.

Soit $A_\tau(x)$ la matrice $[\partial h_i / \partial x_{\tau(j)}(x)]_{j=1, \dots, m-n}$. C'est la matrice carrée extraite de celle de DH en supprimant les coordonnées d'indice $\bar{\tau}([1, \dots, n])$. Posons

$$E_\tau = \{x \in E; \det A_\tau(x) > 0\}, \text{ et } F_\tau = \{x \in E; \det A_\tau(x) < 0\}.$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique alors à H en chacun des points de E et F au-dessus des n coordonnées $x_{\bar{\tau}(1)}, \dots, x_{\bar{\tau}(n)}$.

On pose

$$X_\tau = \{x \in X, \forall \tau' < \tau, \det A_{\tau'}(x) = 0, A_\tau(x) > 0\},$$

$$\text{et } Y_\tau = \{x \in X, \forall \tau' < \tau, \det A_{\tau'}(x) = 0, A_\tau(x) < 0\}.$$

Les X_τ, Y_τ forment ainsi une partition de X . De plus, $X_\tau \subset E_\tau$, et $Y_\tau \subset F_\tau$. Remarquons que les conditions de signe ajoutées pour définir ces nouveaux ensembles portent toutes sur des fonctions de l'algèbre différentielle engendrée par H . \square

Démonstration du lemme 2.3.4 dans le cas cas général. D'après le lemme 2.3.5, on peut se ramener au cas où H vérifie les hypothèses du théorème des fonctions implicites. La démonstration dans ce cas là a été faite : c'est le cas simple. \square

2.3.2.5 Preuve du lemme de partition régulière

Voici la preuve du lemme 2.3.3. Le principe consiste à appliquer récursivement le lemme 2.3.4 à X .

Démonstration du lemme de régularisation. Soit X un ensemble de \mathbb{R}^n vérifiant les hypothèses du lemme. Appliquons à X le lemme 2.3.4, en prenant comme espace ambiant \mathbb{R}^n . Nous obtenons une partition de X de la forme suivante : un ensemble Y régulier dans sa présentation, et des ensembles X_i inclus dans des espaces ambiants E_i réguliers dans leur présentation, et de dimension $n - 1$.

On peut alors réappliquer le lemme 2.3.4 à chacun de ces couples X_i, E_i . Nous obtenons des ensembles Y_i , de dimension $n - 1$ ou vides, réguliers dans leur présentation, et des couples (X_j, E_j) , chaque E_j étant régulier dans sa présentation et

de dimension $n - 2$.

Ainsi, en appliquant n fois le lemme 2.3.4, on obtient une partition de X en sous ensembles Y_k , tous réguliers dans leur présentation et définis par des conditions de signe portant sur des fonctions de l'algèbre engendrée par F et G .

□

CHAPITRE 3

LES PROBLÈMES DE GÉNÉRATION

3.1 Problématique

La définition des structures est axiomatique : c'est une famille d'ensemble, stable par certaines opérations élémentaires. Néanmoins, usuellement, les structures o-minimales étudiées sont engendrées par certains ensembles, ou certaines fonctions. L'axiomatique ne donne pas alors de description précise des ensembles définissables. C'est à cette problématique que répondent les théorèmes de génération. Le premier résultat de ce type est le théorème de Tarski-Seidenberg [Tar51, Sei54] affirmant l'élimination des quantificateurs dans $\langle \mathbb{R}, >, +, \cdot \rangle$. Autrement dit, ce théorème stipule que les ensembles semi-algébriques sont stables par toutes les opérations élémentaires.

Définition 3.1.1. Soit $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles réels, et \mathcal{S} une structure. On dit que \mathcal{S} admet l'élimination des quantificateurs sur \mathcal{E} si tout ensemble définissable dans \mathcal{S} est obtenu à partir des ensembles de \mathcal{E} par un nombre fini d'unions, d'intersections, et de produits cartésiens.

De manière équivalente :

Définition 3.1.2. Soit \mathcal{L} un langage, et \mathcal{S} une \mathcal{L} -structure. On dit que \mathcal{S} admet l'élimination des quantificateurs sur \mathcal{L} si toute \mathcal{L} -formule du premier ordre est équivalente dans \mathcal{S} à une formule sans quantificateur.

Remarquons que l'élimination des quantificateurs dépend fortement de la famille \mathcal{E} choisie, bien qu'elle soit souvent sous-entendue. Ainsi, une structure ad-

met toujours l'élimination des quantificateurs sur la famille des ensembles qu'elle définit.

Un autre résultat de génération est la modèle-complétude. Le premier résultat de ce type est le théorème du complémentaire de Gabrielov [Gab68]. Ce résultat affirme que le complémentaire d'un ensemble sous-analytique global est un sous-analytique global. Autrement dit, il prouve la modèle-complétude de la structure des sous-analytiques globaux sur la famille des fonctions analytiques définies sur un compact analytique [DvdD88].

Définition 3.1.3. Soit $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles réels, et \mathcal{S} une structure. On dit que \mathcal{S} est *modèle-complète sur \mathcal{E}* si tout ensemble définissable dans \mathcal{S} est obtenu à partir des E_i par un nombre fini d'unions, d'intersections, de produits cartésiens, et de projections.

De manière équivalente,

Définition 3.1.4. Soit \mathcal{L} un langage, et \mathcal{S} une \mathcal{L} -structure. \mathcal{S} est *modèle-complète sur \mathcal{L}* si toute \mathcal{L} -formule du premier ordre est équivalente dans \mathcal{S} à une \mathcal{L} -formule existentielle.

La plupart des structures o-minimales connues actuellement sont modèle-complètes sur la famille d'ensembles qui les définit naturellement. Nous montrons ici le caractère général du phénomène de modèle-complétude, dans le cas polynomialement borné.

3.2 Quelques définitions

Notre objet est de montrer la modèle-complétude des structures o-minimales polynomialement bornées sur certaines familles de fonctions. Nous allons préciser

ici des notions liées à ces familles.

Définition 3.2.1. On appelle quasi-algèbre différentielle une famille \mathcal{F} d'applications $(f_i)_{i \in I}$ telle que :

- La famille \mathcal{F} est une famille d'applications réelles scalaires C^∞ :
 $\forall i \in I, \exists n_i \in \mathbb{N}$ tel que f_i soit une application C^∞ de \mathbb{R}^{n_i} dans \mathbb{R} .
- La famille \mathcal{F} est stable par opposé, somme et produit :
 $\forall i, j \in I$, si $n_i = n_j$, alors $-f_i \in \mathcal{F}$, $f_i + f_j \in \mathcal{F}$, et $f_i \cdot f_j \in \mathcal{F}$.
- La famille \mathcal{F} est stable par dérivation :
 $\forall i \in I, \forall j \leq n_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathcal{F}$.
- La famille \mathcal{F} est stable par composition affine à droite :
 $\forall i \in I, \forall L : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$ affine, $f_i \circ L \in \mathcal{F}$.
- La famille \mathcal{F} contient les applications constantes et coordonnées.

À une quasi-algèbre différentielle \mathcal{F} on peut associer une famille de graphes de fonctions. La plus petite structure contenant ces graphes est la *structure engendrée par \mathcal{F}* .

Cette structure contient naturellement les ensembles définis par des équations et inéquations portant sur des applications de \mathcal{F} . Nous appellerons ces ensembles *semi- \mathcal{F}* , suivant en cela les notions de semi-algèbrique, ou de semi-analytique.

Définition 3.2.2. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est un *semi- \mathcal{F} simple* s'il existe des applications f_1, \dots, f_k de \mathcal{F} et des conditions de signe $\sigma_1 \dots \sigma_k$ telles que :

$$E = \{x; f_1(x)\sigma_1 0, \dots, f_k(x)\sigma_k 0\}.$$

On étend cette notion en appelant semi- \mathcal{F} les unions finies de tels ensembles.

Les semi- \mathcal{F} sont définis par des conditions de signe sur des applications scalaires. Pour une plus grande lisibilité, nous noterons parfois ces conditions de signes en une seule condition de signe, vectorielle. Pour différencier les applications scalaires des applications vectorielles, nous utiliserons des lettres minuscules ou majuscules.

Ainsi une équation $F(x) \sigma_0$ se lit $f_1(x) \sigma_1 0, \dots, f_k(x) \sigma_k 0$, où f_1, \dots, f_k sont les coordonnées de F , et $\sigma_1 \dots \sigma_k$ celles de σ .

La structure engendrée par \mathcal{F} admet l'élimination des quantificateurs sur \mathcal{F} si elle coïncide avec la famille de tous les semi- \mathcal{F} . En effet, on verra que la famille des semi- \mathcal{F} est stable par produit cartésien, unions et intersections finies.

De la même manière, la structure engendrée par une quasi-algèbre différentielle \mathcal{F} est modèle-complète sur \mathcal{F} si elle coïncide avec les projections des semi- \mathcal{F} . Suivant les appellations *sous-analytique*, ou *sous-pfaffien*, nous appellerons *sous- \mathcal{F}* les projections des semi- \mathcal{F} .

Définition 3.2.3. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est *sous- \mathcal{F}* si il existe $m \geq n$ et un semi- \mathcal{F} $A \subset \mathbb{R}^m$ tel que $E = \pi(A)$, où π est la projection canonique de \mathbb{R}^m sur \mathbb{R}^n .

Voici quelques propriétés générales de ces classes d'ensembles.

Propriété 3.2.4. Soit \mathcal{F} une quasi-algèbre différentielle. Alors :

- Les semi- \mathcal{F} sont exactement les ensembles définis par une formule du premier ordre sans quantificateur dans le langage $\mathcal{L} = \mathbb{R}, >, +, *, \mathcal{F}$.
- les sous- \mathcal{F} sont exactement les ensembles définis par une formule existentielle du premier ordre dans le langage $\mathcal{L} = \mathbb{R}, >, +, *, \mathcal{F}$.
- Les semi- \mathcal{F} sont stables par unions et intersections finies, produit cartésien, et passage au complément.

- Les sous- \mathcal{F} sont stables par unions et intersections finies, produit cartésien, et projection.

Eléments de preuve et remarques. Le premier énoncé est conséquence immédiate de la définition.

Pour comprendre le deuxième, il s'agit de voir qu'une projection est équivalente à une formule existentielle. Ceci est conséquence du fait que $\{x \in \mathbb{R}^n; \exists y \in \mathbb{R}^m, P(x, y)\}$ est la projection sur \mathbb{R}^n de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}; P(x, y)\}$.

Le troisième énoncé est tout aussi évident. Le complément d'un semi- \mathcal{F} est obtenu en inversant toutes les conditions de signe qui apparaissent dans sa définition. Cet énoncé est intéressant parce qu'il ne parle pas de la stabilité par projection. C'est la seule opération élémentaire qui manque. Cet énoncé affirme donc que la structure engendrée par \mathcal{F} admet l'élimination des quantificateurs sur \mathcal{F} si et seulement si les semi- \mathcal{F} sont stables par projection.

L'intérêt du dernier énoncé provient lui aussi de ce dont il ne parle pas : la stabilité par passage au complément. Il suffit donc que les sous- \mathcal{F} soient stables par passage au complément pour que la structure engendrée par \mathcal{F} soit modèle-complète sur \mathcal{F} . \square

Rappelons maintenant notre résultat principal. L'objet de ce chapitre est sa démonstration.

Théorème 3.2.5 (version géométrique–théorème du complémentaire). *Soit S une structure o-minimale polynomialement bornée. Soit \mathcal{F} une quasi-algèbre différentielle d'applications définissables dans S . Alors, les sous- \mathcal{F} sont stables par passage au complémentaire.*

Autrement dit, d'après la remarque faite dans la propriété 3.2.4, la structure engendrée par \mathcal{F} est modèle-complète sur \mathcal{F} .

3.3 Un lemme de frontière

Depuis l'article fondateur de Gabrielov [Gab68], les preuves de modèle-complétude comportent une partie consacrée à une étude de frontière. On trouve dans la littérature deux stratégies différentes. La première, consiste à montrer que la frontière d'un sous- \mathcal{F} est incluse dans la projection d'un sous- \mathcal{F} de dimension raisonnable (cf [Gab68, RSW03]), et l'autre (cf [Gab96, Wil99]), consiste à montrer la stabilité des semi- \mathcal{F} par prise de frontière. Nous adoptons ici la première méthode, parce qu'elle décrit plus finement la dynamique des semi- \mathcal{F} .

Le lemme suivant affirme que la prise de frontière est une opération sans quantificateur, donc qu'elle conserve les semi- \mathcal{F} , quand la structure engendrée par ceux-ci est o-minimale et polynomialement bornée.

Dorénavant, et jusqu'à la fin du chapitre, on fixe une quasi-algèbre différentielle \mathcal{F} , dont on suppose que la structure S qu'elle engendre est o-minimale et polynomialement bornée.

Lemme 3.3.1 (Frontière d'un semi- \mathcal{F}). *Soit X un semi- \mathcal{F} . Alors ∂X est un semi- \mathcal{F} .*

Démonstration. Remarquons que l'on peut se ramener au cas où X est donné par une équation scalaire et des inéquations. En effet, si une équation vectorielle intervient dans la définition de X , la somme des carrés de ses coordonnées est nulle si et seulement si chacune l'est.

Si d'autre part, X est une union de semi- \mathcal{F} simples, son bord est l'intersection

de son complémentaire avec le bord de chacune de ses composantes. Or, on a vu que les semi- \mathcal{F} étaient stables par complément et par intersection. On peut donc supposer que X est un semi- \mathcal{F} simple.

Soit $X = \{x ; f(x) = 0, G(x) > 0\}$.

Nous allons donner une caractérisation pour l'appartenance à ∂X . C'est l'objet de la proposition suivante :

Propriété 3.3.2. *Il existe λ et μ deux entiers tels que*

$$x \in \partial X \Leftrightarrow x \in \overline{X_x} \text{ et } f(x) = 0, G(x) = 0,$$

avec $X_x = \{y ; |f_\mu(y)| < |y - x|^\mu, G_\lambda(y) > |y - x|^\lambda\}$, f_μ et G_λ désignant les développements de Taylor en x de f et G aux ordres μ et λ .

Pour montrer que ∂X est semi- \mathcal{F} , il faut maintenant remarquer que l'ensemble X_x est un semi-algébrique. D'après le théorème de Tarski–Seidenberg, son adhérence est aussi semi-algébrique. Autrement dit, $\overline{X_x}$ s'écrit $\{y ; P_x(y) = 0, Q_x(y) > 0\}$, avec P_x et Q_x deux polynômes. De plus, les coefficients de P_x et Q_x sont algébriques en les coefficients des polynômes qui définissent X_x , qui sont des dérivées partielles de f et G . Ainsi, $\overline{X_x}$ est semi-algébrique en les dérivées partielles de f et G en x : les équations et inéquations qui le définissent portent sur des applications de la quasi-algèbre \mathcal{F} .

La condition d'appartenance à ∂X s'exprime donc comme une suite d'équations et d'inéquations portant sur des fonctions de la quasi-algèbre \mathcal{F} , ce qui fait de ∂X un semi- \mathcal{F} .

□

Preuve de la proposition 3.3.2. On pose $g_{min}(x) = \min g_i(x)$, où les g_i sont les coordonnées de G . Soit $Z = \{z; f(z) = 0, g_{min}(z) = 0\}$. On a clairement $\partial X \subset Z$.

Posons

$$X_x(\lambda, \mu) = \{y; |f_\mu|(y) < |y-x|^\mu \text{ et } G_\lambda(y) > |y-x|^\lambda\}.$$

Il s'agit de trouver λ et μ tels que si x appartient à Z , $x \in \partial X \Leftrightarrow x \in \overline{X_x(\lambda, \mu)}$.

Soit $S_x(t) = \{y \in X; |x-y| = t\}$, et considérons :

$$\Gamma = \{(x, t, M); x \in \partial X, t \in \mathbb{R}_+, M = \max_{z \in S_x(t)} g_{min}(z)\}.$$

Fixons x dans $\partial X \cap Z$. Notons que $\Gamma_{x,t}$ est non vide pour t proche de 0. D'après le théorème du choix définissable, il existe une fonction $M_x(t)$ définissable telle que $(x, t, M_x(t))$ appartienne à Γ , pour t assez petit.

Le nombre $M_x(t)$ est le maximum de g_{min} dans X à distance t de x . Remarquons que $M_x(t)$ tend vers 0, car $g_{min}(x) = 0$, et que $M_x(t)$ est non nulle pour $t > 0$. Ainsi, d'après le lemme 2.1.3 il existe r_x et k_x deux réels non nuls tels que $M_x(t) \sim k_x t^{r_x}$.

Mais M_x est une fonction définissable de x . D'après le théorème 2.2.4, r_x ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs lorsque x parcourt ∂X . Choisissons λ un entier strictement supérieur à toutes les valeurs que prend r_x lorsque x parcourt ∂X .

$$\text{Alors, pour } x \in Z \text{ et } \mu \text{ arbitraire, } x \in \partial X \Rightarrow x \in \overline{X_x(\lambda, \mu)}. \quad (3.1)$$

Choisissons en effet x dans ∂X et $\mu > 0$. Soit $\gamma(t)_{t \in (0, \varepsilon)}$ un chemin inclus dans X , issu de x et sur lequel g_{min} atteint son maximum à distance t de x . Pour le

construire, il faut d'appliquer le théorème du choix définissable à l'ensemble

$$\{(y, t) \in X \times \mathbb{R}_+; |y - x| = t, g_{\min}(y) = \max_{z \in S_x(t)} g_{\min}(z)\}.$$

Alors, $\gamma(t)$ appartient à $X_x(\lambda, \mu)$, pour t positif et assez petit. En effet, par définition de λ , $g_{\min}(\gamma(t)) > k * t^\lambda$, pour tout k positif, avec t suffisamment proche de 0. En particulier, pour t assez petit, $G_\lambda(\gamma(t)) > t^\lambda$. D'autre part, $f(\gamma(t)) = 0$ car $\gamma(t)$ appartient à X . En particulier $f_\mu(\gamma(t)) < t^\mu$ pour t assez petit.

Ainsi, puisque le chemin γ est inclus dans $X_x(\lambda, \mu)$, son extrémité x est dans $\overline{X_x(\lambda, \mu)}$. Ceci prouve (3.1)

Il s'agit maintenant de trouver μ tel que $x \notin \partial X \Rightarrow x \notin \overline{X_x(\lambda, \mu)}$.

Soit $S'_x(t) = \{y; |y - x| = t, G_\lambda(y) \geq t^\lambda\}$, et considérons :

$$\Gamma' = \{(x, t, m); x \notin \partial X, t \in \mathbb{R}_+, m = \min_{z \in S'_x(t)} |f(z)|\}.$$

Fixons x dans Z , $x \notin \partial X$. Comme précédemment, d'après le lemme du choix définissable, il existe $m_x(t)$ définissable telle que $(x, t, m_x(t))$ appartienne à Γ' pour t proche de 0.

La fonction $m_x(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0, mais $m_x(t)$ est non nulle quand t est positif et assez petit. Sinon il serait possible de tendre vers x avec simultanément $f = 0$ et G_λ supérieur à t^λ , donc en particulier avec g_{\min} positif. Autrement dit, il existerait une suite dans X tendant vers x , ce qui est absurde, puisque $x \notin \partial X$.

Ainsi, d'après le lemme 2.1.3, il existe deux constantes non nulles k_x et r_x telles que $m_x(t) \sim k_x * t^{r_x}$. Mais la fonction m_x est définissable par rapport à x .

Ainsi, d'après le théorème 2.2.4, la structure \mathcal{S} étant polynomialement bornée, r_x ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Choisissons μ un entier strictement supérieur à toutes les valeurs prises par r_x lorsque x parcourt ${}^c(\partial X) \cap Z$.

$$\text{Alors, pour } x \text{ appartenant à } Z, x \notin \partial X \Rightarrow x \notin \overline{X_x(\lambda, \mu)}. \quad (3.2)$$

En effet, soit x dans ${}^c(\partial X) \cap Z$. Si $x \in \overline{X_x(\lambda, \mu)}$, alors il existe une suite (x_i) dans $X_x(\lambda, \mu)$ tendant vers x . Mais alors $G_\lambda(x_i) > |x_i - x|^\lambda$, autrement dit $x_i \in S'_x(|x_i - x|)$. Donc, par définition de μ , pour tout k , il existe un rang à partir duquel $|f(x_i)| > k * |x_i - x|^\mu$. En particulier, $|f_\mu(x_i)| > |x_i - x|^\mu$ pour i assez grand. Ce qui contredit l'appartenance à $X_x(\lambda, \mu)$. Ceci prouve (3.2)

D'après (3.1) et (3.2), nous avons ainsi trouvé λ et μ satisfaisant la propriété 3.3.2 annoncée.

□

3.4 Section explicite

Le théorème du complément est démontré en section (3.5). La démonstration que nous en présentons utilise le lemme suivant. Il permet de construire une section de la projection d'un semi- \mathcal{F} , tout en restant dans la quasi-algèbre \mathcal{F} , à un sous- \mathcal{F} négligeable près.

Lemme 3.4.1 (Section explicite). *Soit $Y \subset \mathbb{R}^n$ un sous- \mathcal{F} et d sa dimension. Alors il existe $X_1, \dots, X_i \subset \mathbb{R}^{n+m}$, semi- \mathcal{F} de dimension d , réguliers, deux à deux disjoints, et il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ sous- \mathcal{F} de dimension strictement inférieure à d , tels*

que :

$$Y = \bigcup_{j=1\dots i} \pi(X_j) \cup V.$$

La projection π de \mathbb{R}^{n+m} sur \mathbb{R}^n étant régulière en restriction à chaque X_j .

Démonstration. Soit $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un semi- \mathcal{F} de dimension k , et $Y = \pi(X) \subset \mathbb{R}^n$ un sous- \mathcal{F} de dimension d . D'après le lemme 2.3.3, nous pouvons nous ramener au cas où X est régulier. Supposons donc que $X = \{x ; F(x) = 0, G(x) > 0\}$, avec X régulier, c'est à dire avec F de rang $n + m - k$ en tout point de X . On note $x = (y, z)$ les coordonnées de \mathbb{R}^{n+m} , y étant celles de \mathbb{R}^n , et z celles de \mathbb{R}^m . Posons

$$V = \pi(\{x \in X ; \text{rang}(\frac{\partial F}{\partial z}) < m - k + d\}).$$

Il s'agit des valeurs critiques de $\pi|_X$. On a $\dim(V) < d$, et V sous- \mathcal{F} .

Si $k = d$, posons $X' = \{x \in X ; \text{rang}(\frac{\partial F}{\partial z}) = m - k + d\}$.

Alors :

- $Y = V \cup \pi(X')$
- V est sous- \mathcal{F} et $\dim(V) < d$
- X' est semi- \mathcal{F} , et régulier
- $\pi|_{X'}$ est partout de rang d
- $\dim(X') = \dim(Y)$,

donc le lemme est vérifié.

Si $k > d$. Soit $y \in Y \setminus V$, et soit g_* le produit des coordonnées de G . Puisque g_* est définissable, et que la structure est polynomialement bornée, il existe N tel que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g_*(x) * |x|^{-N} = 0.$$

Soit $z_0 = g_*(x) * |x|^{-N}$. Alors z_0 atteint son maximum sur X_y . En effet, z_0 est strictement positif sur X_y , nul sur le bord de X_y et tend vers 0 quand $|x|$ tend vers l'infini. Posons

$$X^0 = \{x \in X ; \text{rang}\left(\frac{\partial(F, g_*)}{\partial z}\right) = m - k + d\}.$$

Il s'agit des points critiques de g_* sur X_y pour y dans $X \setminus V$. Ainsi X_y^0 n'est jamais vide pour y dans $Y \setminus V$, donc $\pi(X^0) \cup V = Y$. De plus, chaque fibre X_y^0 est compacte. En effet, puisqu'il s'agit des points critiques de z_0 , z_0 est constant sur chacune de ses composantes connexes. X_y^0 est donc l'union de certaines composantes connexes d'ensembles de la forme $\{z, F(y, z) = 0, z_0(y, z) = A\}$.

De la même manière, nous définissons récursivement les ensembles X^i pour $i = 1, \dots, n$:

$$X^i = \{x = (y, z) \in X^{i-1}, z \text{ est point critique de la fonction} \\ \text{coordonnée } z_i \text{ restreinte à } X_y^{i-1}\}.$$

Chaque X^i est semi- \mathcal{F} . En effet, X^{i+1} est défini par des conditions sur le rang de $\frac{\partial F_i, z_i}{\partial z}$ où F_i est l'application qui définit X^i . Comme X^0 est semi- \mathcal{F} , il en est de même pour tous les X^i .

Chaque fibre X_y^i est compacte et non vide. En effet, z_i est critique sur chaque composante connexe de X_y^i , donc constante. Comme par récurrence, X_y^{i-1} est compacte, z_i y admet des points critiques, donc X_y^i est non vide.

Remarquons que X_y^n est de dimension 0. En effet, soit C une composante connexe de X_y^n . Alors, pour tout i , C est inclus dans une composante connexe de

X_y^i . En particulier, z_i est constant sur C . Toutes les coordonnées étant constantes sur C , C est un point.

Puisque chaque fibre de X^n est de dimension 0, X^n est de dimension au plus d . D'autre part, on a vu que les fibres de X_y^n n'étaient jamais vide pour y dans $Y \subset V$. On a donc $\pi(X^n) \cup V = Y$. Nous sommes donc ramenés au cas où $k = d$, où le lemme a été démontré. \square

3.5 Théorème du complément pour les structures o-minimales polynomialement bornées

L'objet de cette section est de montrer le théorème 0.2.4. Nous allons en fait prouver le résultat plus fort suivant :

Théorème 3.5.1. *Soit $Y \subset \mathbb{R}^n$ sous- \mathcal{F} . Alors, il existe $(S_i)_{i \in I}$ une partition finie de \mathbb{R}^n telle que :*

$$\forall i \in I, S_i \text{ est sous-}\mathcal{F} \text{ et connexe}$$

$$\forall i \in I, S_i \cap Y = \emptyset \text{ ou } S_i \subset Y.$$

On dira d'une partition de \mathbb{R}^n qu'elle est *adaptée* à Y si elle satisfait aux conclusions du théorème. Le théorème 0.2.4 en est un corollaire immédiat : si Y est un sous- \mathcal{F} de \mathbb{R}^n , il existe une partition en sous- \mathcal{F} de \mathbb{R}^n adaptée à Y . Le complémentaire de Y est alors une union finie de parties sous- \mathcal{F} , et est donc sous- \mathcal{F} .

Démonstration. La preuve du théorème 3.5.1 se fait par récurrence sur la dimension d de Y .

3.5.1 Le cas $Y \subset \mathbb{R}^d$

On suppose dans cette partie que $Y \subset \mathbb{R}^d$. On note π la projection de \mathbb{R}^{d+k} sur \mathbb{R}^d . En appliquant à Y le lemme de section 3.4.1, on obtient des semi- \mathcal{F} X_j de \mathbb{R}^{d+k} , réguliers et de dimension d , et un sous- \mathcal{F} V de \mathbb{R}^d de dimension inférieure à d , et tels que $Y = \bigcup_{j=1 \dots i} \pi(X_j) \cup V$. On pose $X = \bigcup X_j$.

Soit $Z = \bigcup \pi(\partial X_j) \cup V$.

Alors $\sharp X_y$ reste constant quand y parcourt
(3.3)
 une composante connexe de ${}^c Z$.

En effet, la régularité des X_j nous permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de chaque point de ${}^c Z$. Or Z est sous- \mathcal{F} . En effet, d'après le lemme de frontière 3.3.1, ∂X_j est semi- \mathcal{F} . Sa projection est donc sous- \mathcal{F} , donc Z aussi.

Comme $\dim(Z) < d$, nous pouvons appliquer à Z l'hypothèse de récurrence. Nous obtenons une partition de \mathbb{R}^d adaptée à Z , et qui fait de chaque composante connexe de ${}^c Z$ une union de sous- \mathcal{F} . En particulier, $Y \setminus Z$ et ${}^c Y \setminus Z$ sont des unions de parties sous- \mathcal{F} connexes. D'autre part, $Z \cap Y$ est un sous- \mathcal{F} de dimension inférieure à d . Par hypothèse de récurrence, il existe une partition de \mathbb{R}^d adaptée à $Z \cap Y$. Son complémentaire est donc une union de sous- \mathcal{F} , il est donc sous- \mathcal{F} . Par conséquent, $Z \setminus Y = {}^c(Z \cap Y) \cap Z$ est lui aussi sous- \mathcal{F} . On peut donc décomposer $Z \cap Y$ et $Z \cap {}^c Y$ en parties sous- \mathcal{F} connexes.

Nous avons ainsi construit une partition de \mathbb{R}^d adaptée à Y .

3.5.2 Le cas $n > d$

Nous avons montré le pas d'induction quand Y était inclus dans \mathbb{R}^d . Supposons maintenant que $Y \subset \mathbb{R}^n$, avec $n > d$. Nous allons décomposer Y en une union de nappes sous- \mathcal{F} au-dessus d'un espace de dimension d . Il nous faut pour cela choisir une bonne direction de projection, c'est à dire telle que la fibre de Y soit toujours finie au-dessus de sa projection. Le lemme de Koopman-Brown 1.5.2 affirme que c'est possible.

Quitte donc à changer de coordonnées, on suppose que Y vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \dim Y_t = 0.$$

On appelle p la projection sur les d premières coordonnées. Appliquons maintenant à Y le lemme de section 3.4.1. On obtient un semi- \mathcal{F} $X = \bigcup_j X_j$ de \mathbb{R}^{n+k} de dimension d et un sous- \mathcal{F} V de \mathbb{R}^n , de dimension inférieure à d et tels que $\pi(X) \cup V = Y$, où π est la projection de $\mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Au dessus de chaque point t de $\mathbb{R}^d \setminus p(V)$, X est alors une union finie de points, et Y aussi. Il s'agit de trouver les paramètres pour lesquels le nombre de ceux-ci pourrait changer. Considérons $Z_1 = \bigcup_j p \circ \pi(\partial X_j) \cup \pi(V) \cup K$, où K est l'ensemble des valeurs critiques de $p \circ \pi|_X$. Alors, de la même manière que dans le cas $n = d$, $\sharp X_t$ reste constant quand t parcourt une composante connexe de ${}^c Z_1$. Appelons Z_2 les points au-dessus desquels les projections de deux X_i différents s'intersectent. Il s'agit de l'ensemble $Z_2 = \pi(\partial W \cap \{x_1 = x_2\})$, avec

$$W = \{(x_1, x_2) \in X^2 ; p \circ \pi(x_1) = p \circ \pi(x_2) \text{ et } \pi(x_1) \neq \pi(x_2)\}.$$

Alors, $\#Y_t$ reste constant sur chaque
 composante connexe de ${}^c(Z_1 \cup Z_2)$. (3.4)

C'est la conséquence du théorème des fonctions implicites, qui s'applique par régularité des X_j .

Remarquons maintenant que $Z = Z_1 \cup Z_2$ est sous- \mathcal{F} . En effet,

- $\pi(V)$ est sous- \mathcal{F} car V est sous- \mathcal{F} ,
- $p \circ \pi(\partial X_j)$ est sous- \mathcal{F} grâce au lemme de frontière 3.3.1,
- Les points critiques sont sous- \mathcal{F} car donnés par la nullité de certains déterminants portant sur les dérivées des fonctions décrivant X ,
- Z_2 est sous- \mathcal{F} , car W est semi- \mathcal{F} , donc ∂W aussi d'après le lemme de frontière 3.3.1.

Les sous- \mathcal{F} étant stables par union finie, Z est bien sous- \mathcal{F} .

D'autre part, $\dim(Z) < d$. Appliquons donc l'hypothèse de récurrence à Z , c'est à dire refaire ce qui a été fait dans le cas $d = n$. Nous obtenons ainsi une partition en sous- \mathcal{F} de $\mathbb{R}^d \setminus Z$, telle qu'au-dessus de chaque partie, le cardinal de Y_t reste constant.

Soit S une de ces parties. Nous allons montrer que $S' = S \times \mathbb{R}^{n-d}$ se décompose en une partition adaptée à Y . Soit m le cardinal de Y_t pour t dans S . Alors $Y \cap S' = \bigcup_{i=1 \dots m} Y_i$, avec

$$Y_i = \{y \in Y ; \exists y_1, \dots, y_{m-1} \in Y^{m-1} \text{ tels que}$$

$$p(y_1) = p(y_2) = \dots = p(y_{m-1}) = p(y)$$

$$y_1 < \dots < y_{i-1} < y < y_{i+1} < \dots < y_{m-1}\}$$

où $<$ est l'ordre lexicographique des coordonnées. Ces ensembles Y_i sont sous- \mathcal{F} , car ils sont donnés par des formules existentielles portant sur des sous- \mathcal{F} . De la même manière le complémentaire de Y se décompose en ensembles de la forme :

$$C_i = \{y ; \exists y_1, \dots, y_{m-1} \in Y^m \text{ tels que}$$

$$p(y_1) = p(y_2) = \dots = p(y_{m-1}) = p(y)$$

$$y_1 < \dots < y_i < y < y_{i+1} < \dots < y_m\}.$$

Chacune de ces parties est bien connexe, et sous- \mathcal{F} .

Il ne reste ainsi plus qu'à décomposer $Z \times \mathbb{R}^{n-d}$. Mais il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence, car $Y \cap Z \times \mathbb{R}^{n-d}$ est de dimension inférieure à d .

Ceci termine la preuve.

□

CHAPITRE 4

REMARQUES ET QUESTIONS OUVERTES

Nous présentons ici quelques problématiques liées à ce travail. En particulier, nous discutons du problème de la noëthérianité qui a été rencontré au chapitre 2, et nous envisageons des stratégies pour étendre notre résultat.

4.1 Noëthérianité

Nous avons démontré dans le chapitre 2 une propriété de décomposition (lemme 2.3.3) dont l'analogie sous-analytique est une conséquence de la noëthérianité de l'anneau des fonctions analytiques [Gab96]. Dans notre cas, cette propriété est liée à la noëthérianité topologique [Tou91] des structures o-minimales polynomialement bornées, un résultat que l'on trouve dans [DM96, Now06]. La noëthérianité est une propriété qui possède des corollaires géométriques intéressants, et à notre connaissance, mis à part les cas sous-analytiques ou semi-algébriques, on ne sait actuellement pas si les anneaux d'applications C^∞ définissables dans une structure o-minimale polynomialement bornée sont ou non noëthériens.

La question ne se pose bien entendu que dans les structures polynomialement bornées, car la définissabilité de fonctions plates interdit toute noëthérianité, même topologique. Par exemple, la suite $f_n^{-1}(0)$ avec

$$f : \begin{array}{ll} x \leq -n & \mapsto 0 \\ x > -n & \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x+n}\right) \end{array}$$

est une suite décroissante d'ensembles et ne stabilise pas, alors que f_n est C^∞ , et définissable dans toutes les structures qui ne sont pas polynomialement bornées.

La démonstration classique de la noëthérianité de l'anneau des fonctions analytiques repose sur le théorème de préparation de Weierstrass. On pourrait ainsi se demander à quelle condition il existe un théorème de préparation de type Weierstrass dans une structure o-minimale. Le théorème de division de Malgrange [Mal64, LMR01] affirme qu'en classe C^∞ , la préparation est toujours possible. Il s'agirait de comprendre quand elle peut se faire de manière définissable.

Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définissable dans une structure o-minimale, régulière d'ordre d par rapport à la dernière variable. Préparer f , c'est donner une unité u , et des applications C^∞ a_1, \dots, a_d telles que :

$$f(x, y) = u(x, y)(y^d + a_1(x)y^{d-1} + \dots + a_d(x)).$$

Considérons l'ensemble

$$E = \{(x, y, a_1, \dots, a_d, u) \in \mathbb{R}^{n+1+d+1}; f(x, y) - u(y^d + a_1y^{d-1} + \dots + a_d) = 0\}.$$

L'application $(x, y) \mapsto (a_1(x), \dots, a_d(x), u(x, y))$ est alors une section de E au-dessus des $n + 1$ premières coordonnées. Cette section vérifie d'autres propriétés : u est une unité, les a_i ne dépendent que de x , et elle est C^∞ .

La question de la noëthérianité est ainsi liée à la suivante : considérant un ensemble $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ définissable dans une structure o-minimale, et sachant qu'il admet une section C^∞ (ou une autre propriété remarquable) au-dessus des n premières coordonnées, quand admet-il une section *définissable* C^∞ (ou qui possède

cette même propriété) ?

Une telle section n'existe pas toujours, comme le montre l'exemple suivant. Néanmoins, il est surprenant de savoir que même dans le cas semi-algébrique, et quand l'hypothèse n'est que la continuité, le résultat n'est pas encore connu.

Contre exemple à l'existence de section C^∞ définissable. Considérons l'ensemble

$$E = \{(x, 0), x < 0\} \cup \{(x, y), x \geq 0, y > 0\}.$$

Celui-ci est semi-algébrique, donc définissable dans toute structure o-minimale. De plus, il admet au-dessus des x une section C^∞ : la fonction nulle au-dessus des x négatifs, et égale à $\exp(-1/x)$ sinon. Néanmoins, il n'admet pas de section C^∞ définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée. En effet, si une telle section existait, elle serait nulle à gauche de 0, donc identiquement nulle, par quasi-analyticité. \square

Une autre piste pour étudier la noëthérianité est de considérer les développements formels de fonctions définissables dans une structure o-minimale polynomialement bornée. En effet, certains anneaux de séries formelles, liés par exemple aux classes de Denjoy-Carleman, sont noëthériens [CC97, Thi]. Il s'agirait ici de transposer une preuve formelle en une preuve géométrique.

4.2 Extension aux cas non polynomialement bornés

Une grande partie des structures o-minimales connues aujourd'hui vérifient une propriété de modèle-complétude. Plus précisément, si la question reste ouverte pour certaines d'entre elles, aucune structure n'est connue pour n'être pas

modèle-complète. On peut donc se demander s'il est possible d'étendre notre résultat en supprimant l'hypothèse polynomialement borné.

La première extension naturelle consiterait à remplacer l'hypothèse polynomialement borné par exponentiellement borné. Une structure serait dite exponentiellement bornée si toutes les fonctions définissables sont majorées au voisinage de l'infini par une itération de l'exponentielle.

On retrouve dans ce cas de figure une valuation sur le corps des germes de fonctions. Au lieu de caractériser une fonction par son type lipschitzien (son exposant), on lui attribuera un type exponentiel. Pour l'obtenir, on peut considérer la suite $f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{-n}(f(E_n(x)))$, où E_{-n} désigne n itérations du logarithme, et E_n n itérations de l'exponentielle. Cette suite converge vers une fonction de la forme E_k . Il s'agirait de montrer que k ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsqu'il dépend d'un paramètre, c'est à dire un théorème du même type que celui de C. Miller (théorème 2.2.4). Ceci permettrait d'adapter le lemme de frontière 3.3.1. Par contre, la question de la noéthérianité topologique étant ici mise en défaut, le lemme 2.3.3 ne se transposerait pas directement.

Cette remarque concernant les propriétés de valuation nous pousse à nous interroger sur l'existence de structures o-minimales qui ne soient pas exponentiellement bornées. Actuellement, toutes les structures o-minimales connues le sont.

4.3 Extension aux cas non C^∞

Une autre direction pour étendre notre résultat consiste à se passer de l'hypothèse C^∞ . On peut déjà se poser la question dans les structures vérifiant une propriété de décomposition cellulaire C^∞ . Il s'agirait de refaire la preuve que nous

présentons “par morceaux”.

Le problème est plus complexe qu’il n’y paraît. A partir d’applications définissables dans une structure o-minimale, il existe plusieurs façons d’en construire de nouvelles : les sommes, les produits, les compositions, et les procédés qui font intervenir des limites. Notre résultat peut alors s’interpréter comme le fait que les seules dérivations soient suffisantes pour obtenir toutes les applications construites à base de limite. Mais dans le cas C^∞ par morceau, cette propriété est moins évidente.

Considérons en effet une fonction f définie sur \mathbb{R}^2 , C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$. Alors, à y fixé, $Df(x, y)$ admet une limite quand y tend vers 0, qui apparaîtra dans la structure engendrée par f . Mais elle n’apparaît pas dans la quasi-algèbre engendrée par f , et il n’est pas évident que l’on puisse la construire aisément. Il faudrait ainsi sans doute ajouter au langage toutes les limites de fonctions dérivées.

Une autre extension concerne les structures o-minimales n’admettant pas la propriété de décomposition C^∞ . Actuellement, nous n’en connaissons aucun exemple. La question est donc tout d’abord : existe-t-il des structures o-minimales n’admettant pas la propriété de stratification C^∞ , et comment les construire ?

Annexe I

UN PROBLÈME DE VOLUME

Dans cette annexe, nous présentons un résultat original concernant les liens entre o -minimalité et intégration. C'est un travail qui a été effectué au début de mes travaux de recherche. Ce même résultat a été trouvé indépendamment et étendu à un corps réel clos quelconque par T. Kaiser [Kai05].

On a pu voir que les structures o -minimales avaient un bon comportement vis-à-vis de la dérivation. Vis-à-vis de l'intégration, les choses se présentent différemment.

Les travaux de J. M. Lion et J. P. Rolin [LR98a] ont montré que les intégrales de fonctions sous-analytiques étaient log-analytiques. Entre autre, ceci donne une conservation de la o -minimalité. D'autres résultats ont montré que les structures o -minimales avaient des propriétés notables dans le domaine de l'intégration. Ainsi, la o -minimalité des sous-pfaffiens, ou plus généralement l'existence d'une clôture pfaffienne o -minimale [Spe99] donne des résultats en ce qui concerne la o -minimalité des primitives de fonctions définissables.

Par contre, en ce qui concerne les intégrales dépendant d'un paramètre, nous avons peu de résultats. On peut citer la thèse de Remi Soufflet [Sou01] qui donne une réponse à cette problématique dans un cas particulier. Le résultat que nous présentons ici donne une information partielle sur les intégrales de fonctions définissables dépendant d'un paramètre.

I.1 Définissabilité du lieu d'aire finie

Considérant un ensemble $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ définissable, on note pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, \mathcal{V}_x le volume m dimensionnel de A_x . La question que l'on pose est la suivante : l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / \mathcal{V}_x < \infty\}$ est-il définissable ?

Dans le cas où $m = 2$, nous avons le résultat suivant :

Propriété I.1.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ un ensemble définissable dans une structure o-minimale. Alors,*

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{V}_x < \infty\}$$

est définissable.

Dans le cas où $m > 2$, nous n'avons pas de résultat. Néanmoins, on peut remarquer que dans le cas où la structure o-minimale est polynomialement bornée, un résultat de G. Valette devrait permettre de conclure [Val05]. En effet, ce résultat donne des stratifications d'ensembles définissables avec une isotopie lipschitzienne des fibres, et l'intégrabilité se conserve par isotopie lipschitzienne.

Pour la démonstration de notre résultat, nous allons utiliser le lemme suivant (voir [DM94] pour plus de détails) :

Lemme I.1.2. *Soit A un ensemble définissable, et supposons le muni d'un ordre total définissable – c'est à dire tel que son graphe le soit. Appelons sections les sous-ensembles S de A vérifiant : $\forall x \in S, y < x \Rightarrow y \in S$. Alors les sections sont des ensembles définissables.*

Nous allons maintenant démontrer la proposition, tout d'abord dans un cas réduit, et nous nous y ramènerons par la suite.

Démonstration dans un cas réduit. Supposons tout d'abord que A soit de la forme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in C, 0 < y < f(x), 0 < z < g(x, y)\}$$

avec C un ensemble définissable de \mathbb{R}^n , $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable continue, et $g : C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable continue telle que pour tout $x \in C$, $g(x, \cdot)$ est bornée au voisinage de 0.

On a alors, pour x fixé :

$$\mathcal{V}_x = \int_0^{f(x)} \int_0^{g(x,y)} dydz = \int_0^{f(x)} g(x,y) dy$$

Posons alors, pour $x \in C$:

$$F_x : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto g(x, t * f(x)) * f(x)$$

Considérons la relation sur C :

$$x_1 \prec x_2 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \in (1 - \varepsilon, 1), F_{x_1}(y) < F_{x_2}(y)$$

Cette relation est une relation de semi-ordre total définissable : c'est la trace sur C de l'ordre usuel sur les germes de fonctions définissables en 1. De plus, comme $\mathcal{V}_x = \int_0^1 F_x(t) dt$, on a :

$$\text{Si } x_1 \prec x_2, \text{ alors } \mathcal{V}_{x_1} = \infty \Rightarrow \mathcal{V}_{x_2} = \infty \text{ et } \mathcal{V}_{x_2} < \infty \Rightarrow \mathcal{V}_{x_1} < \infty.$$

On a ainsi muni C d'un semi-ordre total tel que l'ensemble des x d'aire finie soit

une section. Notons que le fait que \prec soit une relation de semi-ordre seulement ne change pas le résultat du lemme : il suffit en effet de réordonner les x de même germe en 1 par l'ordre lexicographique des coordonnées pour obtenir un ordre définissable total vérifiant les mêmes propriétés.

Appliquer le lemme I.1.2 donne alors le résultat. \square

Réduction du cas général. Cette façon de réduire le problème est une idée de M. Coste. La réduction originale [Gal03] est une suite de décompositions en cellules cylindriques, combinées avec des découpages et symétries.

Posons $B = \{(x, r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]; (x, r \cos \theta, r \sin \theta) \in A\}$. Il s'agit d'un passage en coordonnées cylindriques. Posons

$$h_x(r) = \int_0^{2\pi} \mathbf{1}_{B_{x,r}}(r, \theta) r d\theta,$$

où $\mathbf{1}_{B_{x,r}}$ désigne la fonction caractéristique de $B_{x,r}$. La fonction $h_x(r)$ est le volume 1 dimensionnel de l'intersection de A_x avec la sphère de rayon r .

Alors, $h_x(r)$ est définissable. Décomposons en effet B en cellules. Au dessus de chaque de cellule de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, B est une union finie de graphes et de nappes délimitées par des fonctions définissables $\theta_1(x, r), \dots, \theta_k(x, r)$. Les graphes n'interviennent pas dans l'intégrale, aussi $h_x(r)$ est-il de la forme

$$h_x(r) = r * \sum_{2j+1 \leq k} \theta_{2j+1}(x, r) - \theta_{2j}(x, r).$$

Ceci prouve la définissabilité de $h_x(r)$.

D'autre part, $h_x(r)$ est évidemment bornée au voisinage de 0, et quitte à décomposer A en un nombre fini de parties, on la peut supposer continue.

Comme le volume de A_x est :

$$V_x = \int_0^{\infty} h_x(r) dr,$$

on est bien ramené au cas réduit.

□

BIBLIOGRAPHIE

- [Ber06] Andreas Bernig. Curvature tensors of singular spaces. *Differential Geom. Appl.*, 24(2) :191–208, 2006.
- [CC97] Jacques Chaumat and Anne-Marie Chollet. Caractérisation des anneaux noethériens de séries formelles à croissance contrôlée. Application à la synthèse spectrale. *Publ. Mat.*, 41(2) :545–561, 1997.
- [CLR00] G. Comte, J.-M. Lion, and J.-P. Rolin. Nature log-analytique du volume des sous-analytiques. *Illinois J. Math.*, 44(4) :884–888, 2000.
- [Com00] Georges Comte. Équisingularité réelle : nombres de Lelong et images polaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(6) :757–788, 2000.
- [Cos00] M. Coste. *An introduction to o-minimal geometry*. Istituti editoriali e poligrafici internazionali, 2000.
- [DM94] C. Steinhorn D. Marker. *Definable types in o-minimal theories*. J.S.L 59, 1994.
- [DM96] L. van den Dries and C. Miller. Geometric categories and o-minimal structures. *Duke Math. J.*, 84 :497–540, 1996.
- [Dri98] L. van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. Number 248 in LMS Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998.
- [DS85] S. Denkowski and J. Stasica. Ensemble sous-analytique à la polonaise. 1985.

- [DS98] L. van den Dries and P. Speissegger. The real field with convergent generalized power series is model complete and o-minimal. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 :4377–4421, 1998.
- [DvdD88] J. Denef and L. van den Dries. P-adic and real subanalytic sets. *Ann. Math.*, 128 :79–138, 1988.
- [Gab68] A. Gabrielov. Projections of semianalytic sets. *Funct. Anal. Appl.*, 2 :282–291, 1968.
- [Gab96] A. Gabrielov. Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions. *Invent. math.*, 125 :1–12, 1996.
- [Gal03] O. Le Gal. Mémoire de D.E.A. *Université de Rennes 1*, 2003.
- [Gri05] Alexei Grigoriev. On o-minimality of extensions of the real field by restricted generic smooth functions, 2005.
- [Hir73] H. Hironaka. Subanalytic sets. *Number theorie, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Tokyo, Kinokuniya*, pages 453–493, 1973.
- [Hör58] Lars Hörmander. On the division of distributions by polynomials. *Ark. Mat.*, 3 :555–568, 1958.
- [Kai05] T. Kaiser. On convergence of integrals in o-minimal structures on archimedean real closed fields. *Ann. Polon. Math.*, 2005.
- [Kho84] A. G. Khovanskii. Real analytic manifolds with the property of finiteness, and complex abelian integrals. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 18(2) :40–50, 1984.

- [KM99] Marek Karpinski and Angus Macintyre. A generalization of Wilkie's theorem of the complement, and an application to Pfaffian closure. *Selecta Math. (N.S.)*, 5(4) :507–516, 1999.
- [KPR90] K. Kurdyka, J.-B. Poly, and G. Raby. Moyennes des fonctions sous-analytiques, densité, cône tangent et tranches. In *Real analytic and algebraic geometry (Trento, 1988)*, volume 1420 of *Lecture Notes in Math.*, pages 170–177. Springer, Berlin, 1990.
- [Lio98] Jean-Marie Lion. Densité des ensembles semi-pfaffiens. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 7(1) :87–92, 1998.
- [ŁMR01] Stanisław Łojasiewicz, Tomasz Maszczyk, and Kamil Rusek. On the Weierstrass division. *Univ. Iagel. Acta Math.*, (39) :49–58, 2001. *Effective methods in algebraic and analytic geometry, 2000* (Kraków).
- [Łoj65] S. Łojasiewicz. *Ensembles semi-analytiques*. 1965.
- [LR98a] J.-M Lion and J.-P. Rolin. Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-ensembles sous-analytiques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48 :755–767, 1998.
- [LR98b] Jean-Marie Lion and Jean-Philippe Rolin. Volumes, feuilles de Rolle de feuilletages analytiques et théorème de Wilkie. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 7(1) :93–112, 1998.
- [Mal64] Bernard Malgrange. The preparation theorem for differentiable functions. In *Differential Analysis, Bombay Colloq., 1964*, pages 203–208. Oxford Univ. Press, London, 1964.

- [Mil94a] C. Miller. Expansions of the real field with power functions. *Ann. Pure Appl. Logic*, 68(1) :79–94, 1994.
- [Mil94b] C. Miller. Exponentiation is hard to avoid. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122 :257–259, 1994.
- [Mil06] Chris Miller. Avoiding the projective hierarchy in expansions of the real field by sequences. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(5) :1483–1493 (electronic), 2006.
- [MS05] C. Miller and P. Speissegger. A trichotomy for expansions of \mathbb{R}^n by trajectories of analytic planar vector fields. 2005.
- [Now06] K. J. Nowak. On the euler characteristic of the links of a set determined by smooth definable functions. *R.A.A.G. preprint server*, 2006.
- [Ram05] A. Rambaud. Thèse. *Université de Paris 7*, 2005.
- [Roc94] C. Roche. Densities for certain leaves of real analytic foliations. *Astérisque*, (222) :7, 373–387, 1994. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).
- [RSW03] J.-P. Rolin, P. Speissegger, and A. J. Wilkie. Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(4) :751–777 (electronic), 2003.
- [Sei54] A. Seidenberg. A new decision method for elementary algebra. *Ann. of Math. (2)*, 60 :365–374, 1954.
- [Sou01] Rémi Soufflet. Propriétés oscillatoires des intégrales de x^λ -fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(5) :461–464, 2001.

- [Spe99] P. Speissegger. The Pfaffian closure of an o-minimal structure. *J. Reine Angew. Math.*, 508 :189–211, 1999.
- [Tar51] A. Tarski. *A decision method for elementary algebra and geometry*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, California, 2nd edition, 1951.
- [Tei97] B. Teissier. Tame and stratified objects, proceeding of the conference on geometry and arithmetic of moduli spaces, luminy, france, august 1995. *Lond. Math. Soc. Lect. Note Serv 242*, 1997.
- [Thi] V. Thillez. An introduction to quasianalytic local rings. summer school and workshop Tame geometry : A tribute to René Thom and Stanisław Łojasiewicz Chambéry, France, 6-18 june 2005.
- [Tho69] R. Thom. Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Amer. Soc.*, pages 240–284, 1969.
- [Tou91] J. Cl. Tougeron. Algèbres analytiques topologiquement noethériennes. théorie de khovanskiĭ. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1991.
- [Val05] Guillaume Valette. A bilipschitz version of Hardt’s theorem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(12) :895–900, 2005.
- [vdDMM94] Lou van den Dries, Angus Macintyre, and David Marker. The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation. *Ann. of Math. (2)*, 140(1) :183–205, 1994.
- [Whi65] H. Whitney. Tangents to analytic varieties. *Ann. of Math.*, pages 4965–549, 1965.
- [Wil96] A. J. Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and

the exponential function. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(4) :1051–1094, 1996.

- [Wil98] A. J. Wilkie. O-minimality. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. I, pages 633–636 (electronic), 1998.
- [Wil99] A. Wilkie. A theorem of the complement and some new o-minimal structures. *Sel. math.*, 5 :397–421, 1999.
- [YC04] Yosef Yomdin and Georges Comte. *Tame geometry with application in smooth analysis*, volume 1834 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

MODÈLE-COMPLÉTUDE DES STRUCTURES
O-MINIMALES POLYNOMIALEMENT BORNÉES

Résumé

Les structures o-minimales, introduites dans les années '80 par Van den Dries et largement étudiées par Wilkie et Macintyre répondent à Grothendick en donnant le cadre d'une géométrie modérée.

Cette thèse montre un théorème du complémentaire explicite pour les structures o-minimales polynomialement bornées, ce qui équivaut à la modèle-complétude en théorie des modèles.

En 1968, Gabrielov montre un théorème du complémentaire pour les sous-analytiques globaux, qui en implique la o-minimalité. Il améliore ce résultat en 96, avec un théorème explicite. Une généralisation de celui-ci est présentée ici.

Par des arguments de valuation dus à Łojaciewicz et à Miller, des propriétés de quasi-analyticité sont exhibées, qui permettent d'adapter le schéma classique des preuves de modèle-complétude. Ce résultat permet de mieux comprendre la façon dont sont générées les structures o-minimales et donne un langage réduit sur lequel une structure polynomialement bornée est modèle-complète.

MODEL-COMPLETNESS OF O-MINIMAL
POLYNOMIALLY BOUNDED STRUCTURES

Abstract

O-minimal structures were introduced in the '80 by Van den Dries answering the Grothendick's request for a tame geometry framework, and were largely studied by Wilkie and Macintyre.

This thesis shows an explicit theorem of the complement for o-minimal polynomially bounded structures, result equivalent to the model-completeness in model theory.

In 1968, Gabrielov shows a theorem of the complement for sub-analytic sets, which implies the tameness of global sub-analytic sets. He gives in 1996 an explicit version of this result. A generalisation of this theorem is introduced here.

By valuation's arguments (due to Łojasiewicz in the analytic case, and to Miller for the o-minimal case), some quasi-analytic's properties are exhibited, which permit to adapt the classical proof of model-completeness scheme. This result is a step for better understand how o-minimal structures are generated and gives a reduced language on which an o-minimal polynomially bounded structure is model-complete.