Modélisation et contrôle des instabilités de combustion : Application à l'identification et la modélisation des systèmes non-linéaires continus en boucle fermée

Fethi Bouziani

▶ **To cite this version:**

Fethi Bouziani. Modélisation et contrôle des instabilités de combustion : Application à l'identification et la modélisation des systèmes non-linéaires continus en boucle fermée. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2006. Français. NNT : . tel-00126811

HAL Id: tel-00126811
https://theses.hal.science/tel-00126811

Submitted on 26 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque
|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INP Grenoble

Spécialité : « **Automatique - Productique** »

préparée au **Laboratoire d'Automatique de Grenoble**
dans le cadre de **l'Ecole Doctorale EEATS**

présentée et soutenue publiquement

par

FETHI BOUZIANI

le 8 Décembre 2006

TITRE

MODÉLISATION ET CONTRÔLE DES INSTABILITÉS DE COMBUSTION : APPLICATION À L'IDENTIFICATION ET LA MODÉLISATION DES SYSTÈMES NON-LINÉAIRES CONTINUS EN BOUCLE FERMÉE

DIRECTEUR DE THESE

Ioan-Dorè Landau
Alina Voda-Besançon

JURY

M.	A. Barraud,	*Président*
M.me	D. Normand-Cyrot	*Rapporteur*
M.	M. Kristic	*Rapporteur*
M.	I. D. Landau	*Directeur de thèse*
M.me	A. Voda-Besançon	*Co-directeur de thèse*
M.	M. M'Saad	*Examinateur*
M.	R. R. Bitmead	*Invité*

A mon défunt père

A ma très chére mère, que Dieu la garde

Remerciements

Cette thèse a été préparée au Laboratoire d'Automatique de Grenoble durant la période allant du 1er Octobre 2003 au 8 Décembre 2006.

Je remercie vivement Ioan-Dorè Landau, mon directeur de thèse, pour m'avoir encadré pendant toutes ces années, cette thèse lui doit beaucoup. La disponibilité, la confiance et la clairvoyance qu'il m'a accordées au cours de ce travail de thèse, m'ont permis d'entreprendre de nombreuses expériences et ont grandement contribué à la richesse de cette thèse.

J'exprime ma sincère reconnaissance à Alina Voda-Besançon pour avoir co-encadré cette thèse. Sa patience et ses commentaires m'ont permis d'accomplir ce travail dans de très bonnes conditions.

Un grand merci à Robert Bitmead pour sa collaboration, sa disponibilité et pour m'avoir profité de son expérience dans le domaine des instabilités de combustion qui ont fait l'objet de cette thèse.

Je remercie également M. Alain Barraud d'avoir présidé le jury de soutenance, Mme Dorothée Normand-Cyrot et M. Miroslav Krstic de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse, et M. Mohammed M'Saad d'avoir été l'examinateur. Leurs commentaires et les conversations que j'ai pu avoir avec eux ont largement contribués à l'amélioration de ce document.

Je suis reconnaissant à Daniel Rey et Patricia Reynier pour leur aide et disponibilité. Ils ont été toujours prêts à répondre à mes demandes avec leur bonne humeur.

Je réserve un remerciement chaleureux à mes chers amis : B. Lyes, K. Hamoudi, C. Sid Ali, M. Feryal Kamila, B. Nadia, B. Zohra, M. Radja, H. Ahmed, C. Ahmed, E. Maher, Z. Gianluca, T. Samir, R. David, O. Fatima, L. Corinne, L. Perinne, F. Ioana, S. Andrea, D. Hakim, F. Kamel, A Khiredine, L. Adibe.....

Enfin et surtout, mes remerciements s'adressent à ma mère et à ma famille. Je n'aurais eu ni les moyens ni la force d'accomplir ce travail sans eux. Malgré la distance, nous avons été très proches toutes ces années. Je ne peux finir ces remerciement sans rendre hommage à mon défunt père.

Résumé

Cette thèse concerne la modélisation et le contrôle actif des instabilités de combustion. L'approche par boite grise est considérée pour l'identification de modèles. La méthode de Krylov-Bogoliubov (K-B) est choisie comme outil principal d'analyse. Deux modèles analytiquement attractifs avec des structures en boucle fermée sont proposés. Le premier modèle est basé sur deux équations de Van der Pol couplées et généralisées. L'analyse a montré que ce modèle ne peut pas décrire le phénomène de coexistence simultanée de deux modes non harmoniques observé en pratique. Le deuxième modèle est établi en complétant le premier modèle par un retard et un filtre passe bas. L'analyse a montré que le modèle est capable de décrire le phénomène de coexistence simultanée de deux modes non harmoniques. Les performances de l'approximation K-B sont largement illustrées par les tests de simulation. Pour l'établissement des conditions d'extinction des oscillations, le contrôle actif par hautes fréquences et par retour de boucle est considéré. Les deux donnent de bons résultats vérifiés par des tests de simulation.

Mots clés

instabilités de combustion, modélisation, contrôle actif, systèmes non-linéaires oscillants, méthode de Krylov-Bogoliubov.

Abstract

This thesis deals with modelling and active control of combustion instabilities. The grey-box approach is considered for identifying combustion instabilities models. The Krylov-Bogoliubov (K-B) method is chosen as the main tool for model analysis. Two tractable analytical models with closed-loop structure are proposed. The first model is based on two coupled generalized Van der Pol equations. The analysis shows that this model can not describe the coexistence of two oscillating non-harmonic modes phenomenon observed in practice. The second model is established by adding a time delay and low pass filter in the first model. The analysis shows that completed model has the ability to describe the coexistence of two oscillating non-harmonic modes phenomenon. The performances of K-B approximation are widely illustrated using simulations tests. To establish the conditions for quenching oscillations in combustion instabilities, the active control by high frequencies excitation and by feedback is considered. Both give successful results verified by the simulation tests.

Keywords

combustion instabilities, modelling, active control,nonlinear oscillating systems, Krylov-Bogoliubov method.

Table des matières

Notations **1**

Introduction générale **3**

1 Contexte de l'étude **7**

1.1 Identification des systèmes continus en boucle fermée 7

1.2 Instabilités de combustion 9

1.2.1 Modélisation des instabilités de combustion 13

1.2.2 Contrôle actif des instabilités de combustion 16

1.3 Méthodes d'approximation des systèmes non-linéaires auto-oscillants 17

1.3.1 Méthode de Krylov-Bogoliubov 18

2 Étude du modèle 1 : modèle basé sur un système de deux équations de Van der Pol couplées **21**

2.1 Introduction 21

2.2 Mise en forme des équations 23

2.3 Analyse du modèle par la méthode de Krylov-Bogoliubov 24

2.3.1 Deux générateurs avec extinction compétitive 25

2.3.2 Synchronisation mutuelle avec des fréquences proches 28

2.3.3 Synchronisation mutuelle avec des harmoniques multiples 33

2.4 Analyse des résultats 35

2.5 Effets des bruits additifs sur les oscillations 36

2.5.1 Excitation asynchrone 37

2.5.2 Excitation synchrone 39

2.6 Conclusion 43

3 Étude du modèle 2 : modèle complété par un retard pur et un filtre passe bas **45**

3.1 Introduction 45

3.2 Mise en forme des équations . . . 47
3.3 Analyse du modèle par la méthode de Krylov-Bogoliubov . . . 49
3.4 Système asymptotiquement stable à l'origine . . . 52
3.5 Deux générateurs avec extinction compétitive . . . 54
3.6 Un seul générateur de Van der Pol . . . 56
3.7 Auto-oscillations simultanées non-harmoniques : sans synchronisation . . . 56
3.8 Instabilité totale : divergence des oscillations . . . 59
3.9 Analyse des résultats . . . 59
3.9.1 Conséquences du retard et du filtre passe bas . . . 60
3.9.2 Influence de la caractéristique statique . . . 62
3.9.3 Analyse fréquentielle des sorties . . . 63
3.10 Comportements critiques des oscillation . . . 65
3.10.1 Interaction asynchrone des fréquences . . . 65
3.10.2 Dynamique des amplitudes influencée par le retard . . . 67
3.11 Conclusion . . . 70

4 Extinction active des oscillations dans les processus de combustion en régime instable 71
4.1 Introduction . . . 71
4.2 Étude de la première approche : extinction des oscillations par une excitation en hautes fréquences . . . 72
4.2.1 Extinction des oscillations sur un modèle réduit : modèle basé sur une équation de Van der Pol généralisée . . . 72
4.2.2 Extinction des oscillations sur le modèle complet des instabilités de combustion 81
4.3 Étude de la deuxième approche : extinction des oscillations par retour de boucle . . . 83
4.3.1 Application sur un modèle réduit : modèle basé sur une équation de Van der Pol généralisée . . . 83
4.3.2 Extinction des oscillations sur le modèle complet par retour linéaire : compensation de l'amortissement négatif . . . 86
4.3.3 Extinction des oscillations sur le modèle complet par retour non-linéaire . . . 88
4.4 Conclusion . . . 95

5 Conclusion et perspectives 97

A Méthode de Krylov-Bogoliubov 101
A.1 Cas des systèmes avec un seul résonateur . . . 101
A.2 Généralisation au cas des systèmes multi-résonateurs . . . 103

B Détails des calculs de la section 2.2 **105**

C Preuve du Lemme 2.37 **107**

D An analytically tractable model for combustion instability **111**

E Un modèle de commande pour le contrôle des instabilités de combustion **119**

F Analysis of a tractable model for combustion instability : the effect of delay and low pass filtering **127**

G Quenching oscillations in combustion instabilities using model-based closed-loop multiplicative control **135**

Notations

p	déviation de pression par rapport à la pression nominale
q	déviation de la quantité de chaleur par rapport à la quantité de chaleur nominale
T	période d'oscillation
V	volume de la chambre de combustion
$\Upsilon(x,t)$	dissipation d'énergie
$\Psi[\cdot]$	fonction non linéaire statique
τ	temps de retard du transport de l'injecteur à la surface de la flamme
$\dot{p}_\tau$	sortie du bloc dérivée-retard
ϵ	nombre de valeur faible
f, f_k, f_i	séries entières de ϵ dont les coefficients sont des polynômes en x et $\frac{dx}{dt}$
ω	pulsation naturelle du résonateur
ω_1, ω_2	pulsations naturelles du premier et du deuxième résonateur
ω_ℓ	combinaisons linéaires des pulsations naturelles
W	ensemble contenant les combinaisons linéaires des pulsations naturelles
ζ	coefficient d'amortissement linéaire du résonateur
ζ_1, ζ_2	coefficients d'amortissement linéaire du premier et du deuxième résonateur
φ_{v0}, φ_{v1}, φ_{v3}	coefficients généralisées du terme non-linéaire de Van der Pol
φ_0, φ_1, φ_3	coefficients de la non-linéarité statique
a	amplitude de l'oscillation d'un système mono-résonateur
a_1, a_2	amplitudes des oscillations du premier et du deuxième résonateur
θ	phase de l'oscillation d'un système mono-résonateur
θ_1, θ_2	phases des oscillations du premier et du deuxième résonateur
θ_ℓ	combinaisons linéaires des phases
$\Delta\psi$	déphasage entre les oscillations des deux résonateurs
$H_{\ell k}$	coefficient du sinus avec la fréquence ω_ℓ dans f_k
$G_{\ell k}$	coefficient du cosinus avec la fréquence ω_ℓ dans f_k
ν_k	composante de la sortie du résonateur k représentant les harmoniques multiples

N	excitation du bruit
B_N	amplitude d'excitation du bruit
ω_N	pulsation d'excitation du bruit
$\triangle_1$, $\triangle_2$	distances entre la fréquence d'excitation du bruit et les fréquences naturelles du système
LPF	opération de transfert du filtre passe bas
$G(\omega)$, $\phi(\omega)$	gain et déphasage introduits par le filtre passe bas à la fréquence ω
$\psi_{k_1k_2}$	pulsations instantanés présentes dans les sorties du système
$A_{k_1k_2}$, $\chi_{k_1k_2}$	gain et déphasage introduits dans le système par le bloc dérivée-retard et le filtre passe bas pour la fréquence $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$.
η_{11}, η_{13}	variables de l'équation différentielle décrivant l'amplitude a_1
η_{21}, η_{23}	variables de l'équation différentielle décrivant l'amplitude a_2
Dx_1, Dx_2, Dp	densités spectrales de x_1, x_2 et p
B_u, ω_u	amplitude et pulsation de l'excitation en haute fréquence
M_1, M_2, M_3	images des énergies apportées par l'excitation en haute fréquence
T_1, T_3, T_5, T_7, T_9	variables de l'équation différentielle décrivant l'amplitude a pour le cas d'une excitation en haute fréquence
K, K_1, K_2	gains du retour de boucle linéaire

Introduction générale

L'importance de l'identification en boucle fermée a été largement reconnue ces dernières années et des progrès très importants ont été réalisés dans le cas linéaire discret. En général l'identification en boucle fermée ne peut être évitée quand le modèle du système est structurellement en boucle fermée. L'identification du modèle d'un système devient d'autant plus compliquée dans le cas où le système est non-linéaire oscillant. L'identification du modèle des instabilités de combustion est une application très ambitieuse dans ce domaine.

Les instabilités qui se produisent dans les systèmes de combustion font l'objet de très nombreuses études. Il s'agit d'un phénomène complexe mais qui, dans beaucoup de cas, peut être expliqué par une contre réaction positive thermo-acoustique. En effet, ces dernières années ce type de problème attire de plus en plus de chercheurs, car dans le but de réduire la pollution et améliorer le rendement de la combustion, on préconise de réduire le rapport combustible/air. Cependant, la réduction du rapport combustible/air conduit à l'apparition des instabilités de combustion qui sont très rédhibitoires.

Le contrôle actif à travers, la modulation d'une quantité de combustible entrant dans la chambre de combustion, a été proposé comme une alternative pour traiter ce type d'instabilité. La mise en œuvre systématique du contrôle actif repose néanmoins sur la disponibilité d'un modèle dynamique du mécanisme d'instabilité. Cependant, la modélisation d'un tel système complexe est une tâche extrêmement ambitieuse et délicate, pas entièrement résolue.

L'identification d'un modèle pour les instabilités de combustion nécessite d'une part une bonne compréhension du phénomène physique et d'autre part la disponibilité d'outil mathématique permettant d'analyser les systèmes non-linéaires oscillants. Les modèles disponibles dans la littérature ont été établis selon différentes approches. Certains ont été établis par une approche purement théorique à partir des équations de la physique du processus de combustion et d'autres par une approche purement expérimentale. Il existe toutefois, des modèles qui ont été établis sur un compromis entre l'approche théorique et l'approche expérimentale (approche par boite grise). Parmi ces modèles, le modèle de Dunstan et Bitmead représente une très bonne base pour la compréhension du mécanisme des instabilités. Malheureusement en absence de moyens d'analyse ce modèle perd beaucoup son utilité. Cela fait que pour un tel système, la première étape d'identification peut être vue comme la mise en rela-

tion entre les méthodes d'analyse performantes et les modèles existant. Une des méthodes d'analyse largement utilisée pour les systèmes non-linéaires oscillants est la méthode de Krylov-Bogoliubov (K-B). A notre connaissance il s'agit dans ce travail, de la première application de la méthode K-B pour l'analyse des modèles d'instabilité pour la combustion. Si cette méthode s'avère efficace, elle peut être considéré comme la clé du problème de modélisation des instabilités.

Le premier objectif de cette thèse, est de répondre au besoin de modélisation en identifiant et en analysant des structures de modèle attractives. Dans ce sens, le modèle de Dunstan et Bitmead est considéré comme point de départ. Les modèles établis doivent décrire les phénomènes observés en pratique dans les instabilités, entre-autre la coexistence de modes oscillatoires. Une fois cet objectif réalisé, il s'agit de développer des méthodologies de commande permettent l'extinction des oscillations avec une entrée d'excitation multiplicative correspondant à la modulation d'une fraction du débit d'alimentation.

Le premier chapitre de ce rapport fournit le contexte de l'étude. La problématique, un résumé des travaux existants dans la littérature ainsi que les lignes directrices du travail de la thèse y sont décrits.

Le deuxième chapitre présente un modèle basé sur un système de deux équations de Van der Pol couplées (il correspond à une version simplifiée du modèle de Dunstan et Bitmead). Le modèle est analysé en détail par la méthode K-B. Les résultats de l'analyse sont confrontés à ceux obtenus expérimentalement et décrits dans la littérature. Une étude des effets d'un bruit additif est réalisée. Les inconvénients liés à l'incapacité du modèle à décrire la coexistence de deux modes oscillatoires non-harmoniques sont discutés à la fin du chapitre. Ce travail a donné lieu aux publications [BLBV05b] (annexe D) et [LBB06] (annexe E) et au rapport interne [BLBV05a].

Pour décrire la coexistence de deux modes oscillatoires non-harmoniques, dans le troisième chapitre le modèle est complété par un retard et par un filtre passe bas (c'est la structure globale du modèle de Dunstan et Bitmead). Le modèle est analysé par la méthode K-B améliorée. Plusieurs régimes de fonctionnement sont identifiés avec les conditions d'opération de chaque régime. Pour montrer l'efficacité de l'approximation K-B améliorée, des comparaisons temporelles et fréquentielles avec les sorties réelles du modèle sont présentées. Le rôle de chaque partie du modèle est analysé, une attention particulière sera accordée au rôle du retard. L'analyse montre que ce modèle (en fonction de la valeur du retard) peut présenter un régime dans le quel peuvent coexister deux oscillations non-harmoniques (phénomène constaté en pratique). Ce travail a donné lieu à la publication [BLBV06] (l'annexe F).

Le problème du contrôle des instabilités de combustion (extinction des oscillations) est discuté dans le quatrième chapitre. Deux approches sont présentées. La première approche est basée sur une excitation en hautes fréquences. La possibilité d'éteindre les oscillations par cette approche est analysée sur un modèle réduit. Les difficultés d'analyse de cette approche sur le modèle des instabilités de combustion sont décrites. La deuxième approche est basée sur un retour de boucle avec la me-

sure de pression. Cette approche est appliquée dans un premier temps sur un modèle réduit et dans un deuxième temps sur le modèle complet. Les performances des lois de commande linéaire et non-linéaire sont analysées et comparées. Il s'agit néanmoins d'une étude préliminaire, car les problèmes de robustesse vis à vis des paramètres du modèle et les domaines de validité dans l'espace d'état n'ont pas été étudiées théoriquement. Ce travail a donné lieu à la publication [BLB07] (annexe G).

Finalement, des conclusions et perspectives sont présentées dans le dernier chapitre.

Chapitre 1

Contexte de l'étude

1.1 Identification des systèmes continus en boucle fermée

L'identification du modèle du système est la première étape dans le calcul du régulateur. Cette opération qui consiste à déterminer les caractéristiques dynamiques du procédé, a fait ses preuves notamment dans le domaine linéaire. En général pour les systèmes linéaires stables, une identification en boucle ouverte est toute à fait possible, et dans la plus part des cas elle est suffisante. Cependant, pour certains cas une identification en boucle fermée peut s'avérer indispensable.

En général, l'identification en boucle fermée qui peut être expliquée par le schéma de la Figure 1.1 est appliquée dans les trois situations suivantes :

1). Le système est instable en boucle ouverte, nécessitant la mise en place d'un régulateur pour la stabilisation, qu'on peut obtenir sans le modèle du système.

2). Un régulateur existe déjà et d'autre part la boucle fermée offre une possibilité d'approximation du modèle du procédé ou de réduction de l'ordre du régulateur, avec une pondération directement liée aux objectifs de commande.

3). La boucle fermée existe et il n'est pas possible de l'ouvrir. Cette situation peut se produire dans deux cas. Dans le premier cas elle est déjà installée matériellement et on ne peut l'ouvrir, comme c'est le cas dans plusieurs installations industrielles. Le deuxième cas correspond au cas où le modèle a identifier a intrinsèquement une structure en contre réaction (c'est le cas pour les instabilités de combustion).

Des progrès très importants ont été réalisés ces dernières années pour les situations 1 et 2 notamment dans le cas linéaire discret. Ce qui n'est pas le cas pour la situation 3. Le manque d'approches pour identifier de tels systèmes se fait sentir, et le problème de modélisation des instabilités de combustion en sont un exemple.

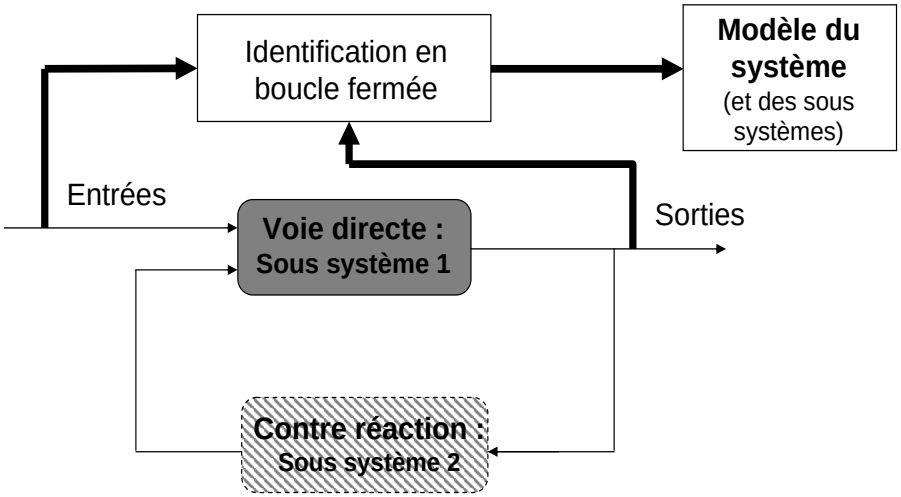

FIG. 1.1 – Schéma en bloc de l'identification en boucle fermée

Pour le système des instabilités de combustion, l'identification en boucle fermée ne peut être évitée, puisque le modèle de ce système se présent sous une structure en boucle fermée. L'identification d'un modèle devient très compliquée dans le cas où le système est non-linéaire oscillant.

Plus précisément, dans cette thèse nous nous intéressons à l'identification de modèles se présentant de la sorte :

- Une voie directe linéaire résonante, possédant de faibles coefficients d'amortissement.
- Un retour de boucle non-linéaire et avec une dynamique (retard, filtre), créant dans certains cas, une situation de retour positif qui conduit à l'apparition des oscillations.

Un exemple très représentatif de ce type de modèle est l'équation de Van der Pol généralisée qu'ont peut représenter par une structure en boucle fermée (voir Figure 1.2). Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left((\varphi_{v1} - 2\zeta\omega) - \varphi_{v3}x^2\right)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{1.1}$$

où ω représente la pulsation naturelle, ζ représente l'amortissement, φ_{v1} et φ_{v3} représentent les coefficients généralisées du terme non-linéaire (pour l'équation de Van der Pol de base : $\omega = 1$, $\varphi_{v1} - 2\zeta\omega = \epsilon$ et $\varphi_{v3} = \epsilon$, où ϵ représente un nombre petit, plus de détails seront donnés sur l'équation de Van der Pol au deuxième chapitre).

Le choix d'une telle configuration pour la structure du modèle a été motivée par les interprétations physiques expliquant l'apparition des oscillations dans les systèmes de combustion. Il est certain que pour ce genre de système, la difficulté réside plutôt dans l'identification structurelle du retour de boucle non-linéaire. Il s'agit donc, dans cette thèse d'identifier une structure en boucle fermée capable d'expliquer tous les phénomènes observés en pratique.

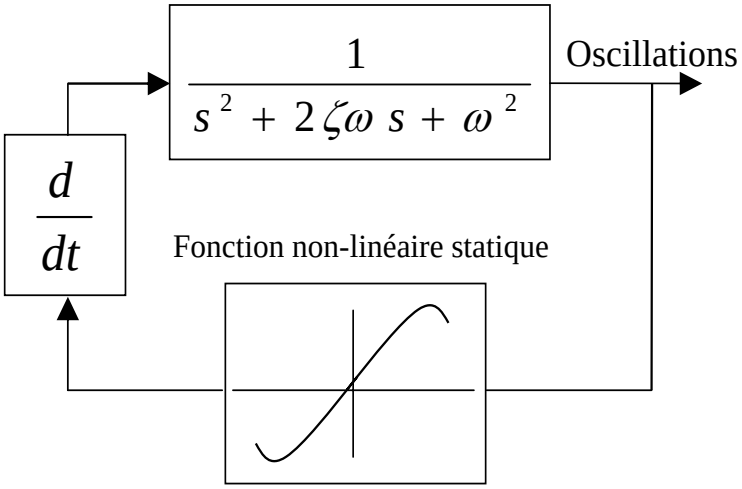

FIG. 1.2 – Représentation en boucle fermée de l'équation de Van der Pol généralisée

1.2 Instabilités de combustion

Les systèmes de propulsion et de production d'énergie modernes basés sur la combustion sont actuellement en plein développement. Plusieurs problèmes affectent le développement de ces systèmes. Un des plus nuisibles est le problème des instabilités de combustion. Ce problème se produit quand la combustion fonctionne en régime pauvre, qui correspond à un faible rapport de Combustible/Air comparé au rapport stoechiométrique (qui chimiquement correspond à une combustion complète). Les instabilités se manifestent à travers l'apparition d'oscillations fortement non-linéaires de pression et de quantité de chaleur autour des points de fonctionnement nominaux. Le problème des instabilités de combustion attire de plus en plus de chercheurs, et constitue l'objet de très nombreuses études. Des programmes de recherche importants orientés sur cette thématique sont conduits dans un certain nombre de pays en collaboration avec les industriels (France, Etats-Unis, Grande-Bretagne). Les articles [FP04, JKB+00, MHD+04, MMC00, Dow95] donnent une image de ces activités.

Le coeur du problème, est que le fonctionnement en régime pauvre est désirable non-seulement au niveau économique, mais aussi au niveau de la réduction de pollution. L'impact de ce fonctionnement est une réduction considérable de la quantité de NOx dégagée par la réaction de combustion. Dans [HS00], les principaux mécanismes de formation de NOx dans les systèmes de combustion sont décrits, et dans [SA91] l'efficacité du fonctionnement en régime pauvre sur la réduction de pollution est examinée. Ces dernières années, un intérêt croissant est accordé à la réduction de l'émission de NOx. La réduction de la pollution est de plus en plus nécessaire pour le développement des systèmes de combustion, puisque les normes industrielles imposées contre la pollution deviennent aux fil des années de plus en plus strictes. Cependant les instabilités ont des effets indésirables variés qui

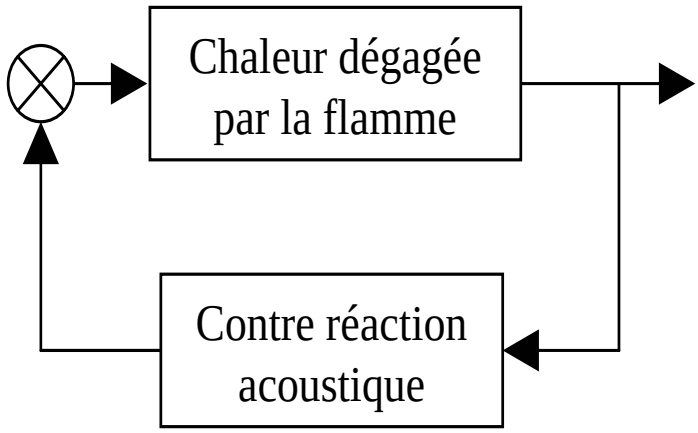

FIG. 1.3 – Schéma en bloc de Instabilité thermo-acoustique

conduisent à la réduction des performances des systèmes de combustion. On peut par exemple citer :

- l'hétérogénéité thermique dans les parois de la chambre de combustion, qui impose beaucoup de contraintes de conception,
- la détérioration et le risque de catastrophe causés par les oscillations de pression.

Le phénomène des instabilités a été découvert expérimentalement depuis plus de deux siècles [Tyn97]. Physiquement, ce phénomène est difficilement prévisible car encore mal compris. Il n'apparaît que dans les milieux confinés, comme la chambre de combustion. Le tube de Rijke [Rij59] qui représente une flamme placée à l'intérieur d'un cylindre ouvert aux extrémités (voir Figure 1.4), est une des applications simples montrant que les instabilités ne se produisent que dans des milieux confinés. Ceci dit, le phénomène peut être expliqué par le retour des ondes de pression qui se crée au fur et à mesure dans les parois de la chambre sur le processus de combustion (Figure 1.3). Une telle interaction entre deux processus dominants est appelée dans la littérature "Contre-réaction thermo-acoustique" [Can02]. Cette cause a été en premier scientifiquement identifiée dans un laboratoire par Rayleigh [Ray45], qui a développé le critère

$$\int_0^T \int_0^V p(x,t)q(x,t)dvdt > \int_0^T \int_0^V \Upsilon(x,t)dvdt \tag{1.2}$$

où $p(x,t)$ est la déviation de pression par rapport à la pression nominale, $q(x,t)$ est la déviation de la quantité de chaleur par rapport à la quantité de chaleur nominale, T est la période d'oscillation, V est le volume de la chambre de combustion et $\Upsilon(x,t)$ est la dissipation d'énergie. Du point de vue système, ce critère est de type condition de passivité pour que le système soit instable. Ce qui fait qu'en réalité les oscillations sont la conséquence d'amortissements négatifs introduits par cette contre-réaction thermo-acoustique. Le critère Rayleigh a fait que ces dernières années les travaux de

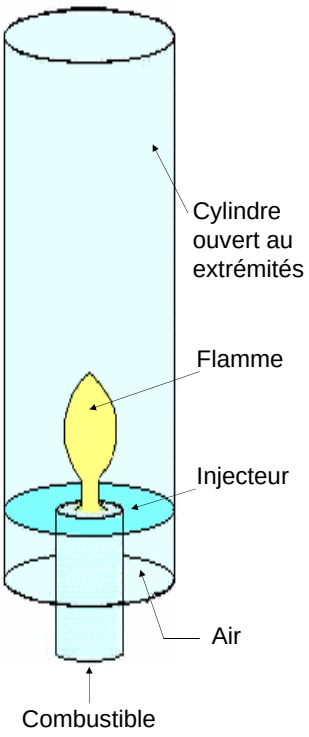

FIG. 1.4 – Tube de Rijke

recherche pour la compréhension du mécanisme des instabilités ont été orientés principalement vers des structures de modèles en boucle fermée.

Le problème des instabilités de combustion affecte plusieurs types de systèmes basés sur la combustion. Les turbines à gaz font partie des systèmes largement utilisés d'une part pour la production d'énergie et d'autre part pour la propulsion. La Figure 1.5 présente une image descriptive d'une turbine à gaz. Dans [Dun03, DBS01], des tests expérimentaux ont été réalisés sur une turbine à gaz (*Solar Turbine Taurus 70*) fonctionnant en régime pauvre, et cela pour différentes valeurs du rapport Combustible/air. La Figure 1.6 représente un segment de 80ms des sorties de pression et de quantité de chaleur obtenues d'un des tests effectués. Cette figure montre que la pression et la quantité de chaleur sont caractérisées par des cycles limites stationnaires persistants. Toutefois, il peut être observé que d'autres phénomènes non stationnaires existent, comme la variation de l'amplitude du cycle limite. Sachant que les cycles limites ne sont pas dus à une entrée externe, les instabilités ne peuvent être expliquées que par une dynamique non-linéaire.

A travers le calcul de la FFT, la Figure 1.7 représente le spectre des sorties du même test expérimental. Les courbes du spectre révèlent la coexistence de deux composantes dominantes sur les fréquences 210Hz et 740Hz ainsi que des harmoniques de 210Hz et des fréquences de bruit de gain négligeable. Les hautes fréquences (notamment 740Hz) ne sont pas représentées sur le spectre de la

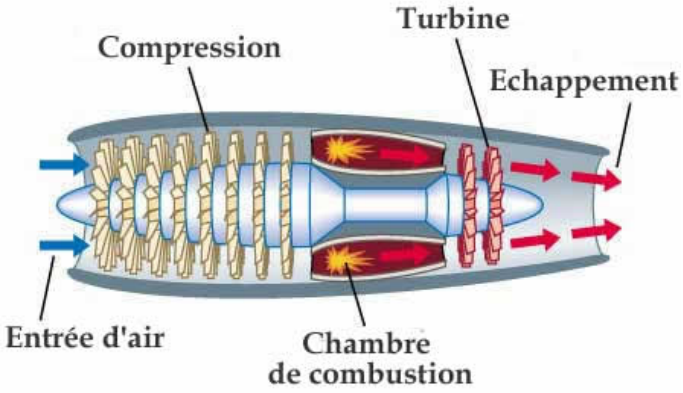

FIG. 1.5 – Schéma de fonctionnement de la turbine à gaz

quantité de chaleur, car le capteur utilisé dans la mesure est de nature filtre passe bas. Il est important de noter que les fréquences dominantes 210Hz et 740Hz ne sont pas multiple entre eux et donc ne peuvent être harmoniques. L'analyse des autres tests a donnés des résultats très similaires avec des fréquences proches de 210Hz et 740Hz.

Pour traiter le problème des instabilités de combustion, plusieurs approches ont été considérées. La première approche dite "passive" concerne la modification de la géométrie de la chambre de combustion. La seconde approche "contrôle actif des instabilités" est basée sur la mise en place d'une régulation en boucle fermée. Dans la plus part des cas, on traite l'instabilité comme une perturbation qu'on essaye de compenser. Ceci requiert la mise en place de capteurs et surtout d'actionneurs. Dans plusieurs applications il s'agit d'un haut parleur [FAI03]. Cette approche de point de vue automatique est à rapprocher avec le contrôle actif des vibrations dans les systèmes mécaniques ou avec le contrôle de bruit. Cette approche ignore totalement le modèle du processus de combustion et nécessite un apport énergétique extérieur très important. Par ailleurs il a été constaté expérimentalement que dans certain cas une faible modulation d'une quantité de combustible peut conduire à la disparition des instabilités (cette commande s'apparente à une entrée multiplicative dans le système). Le contrôle actif à travers la modulation d'une quantité de combustible a été proposé comme une approche pour traiter les instabilités. La mise en œuvre systématique repose néanmoins sur la disponibilité d'un modèle du mécanisme d'instabilité, qui permet d'établir les conditions assurant l'extinction des oscillations. Cette approche dans la mesure où un support théorique peut être apporté, présente d'une part des avantages pratiques évidents en terme de simplicité de mise en œuvre et d'autre part en terme de rendement énergétique (pas d'apport d'énergie extérieure). Cependant, la modélisation d'un tel système complexe est une tâche extrêmement ambitieuse et délicate, pas entièrement résolue.

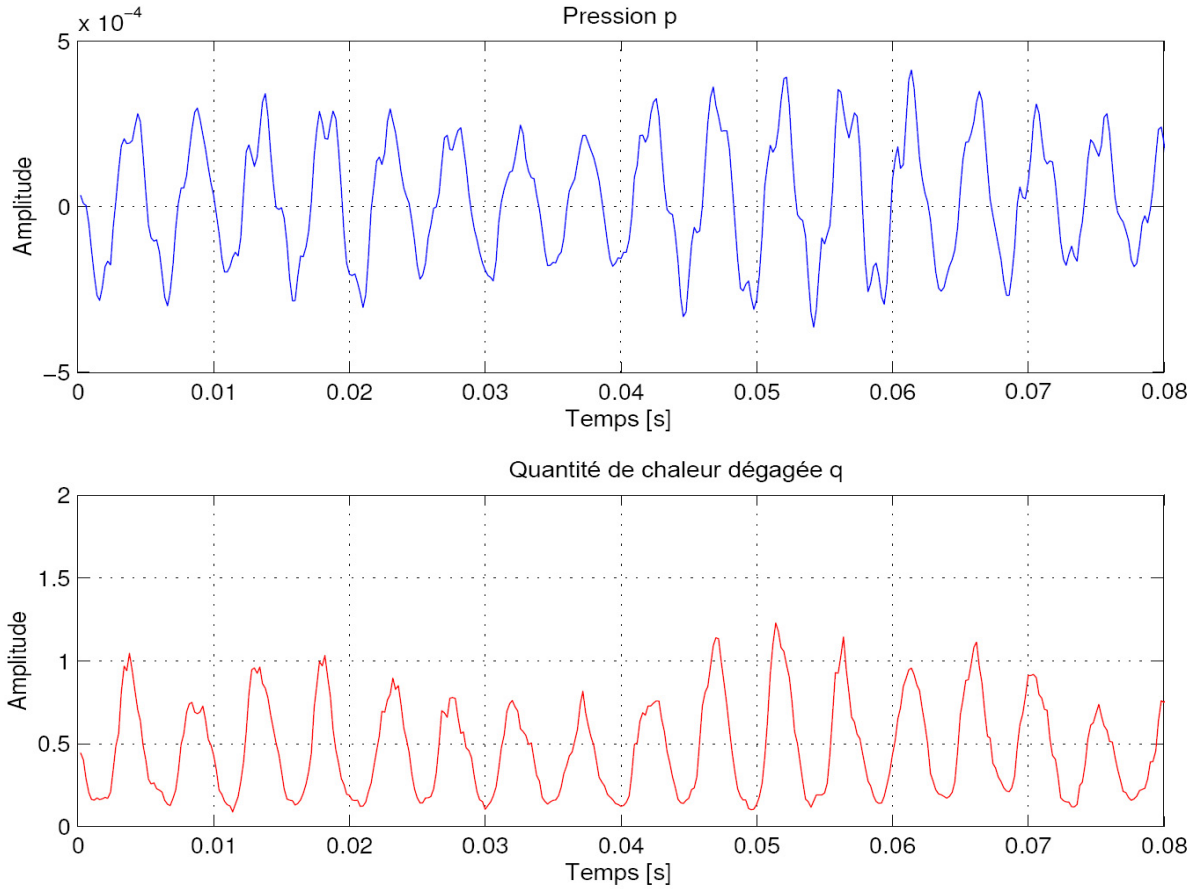

FIG. 1.6 – Pression et de quantité de chaleur obtenus à partir d'une expérience

1.2.1 Modélisation des instabilités de combustion

La nécessité d'éteindre ou de diminuer les instabilités implique d'une part une bonne connaissance du mécanisme responsable de leur apparition, et d'autre part la disponibilité de modèle de complexité réduite permettant le calcul de la commande. Dans cet esprit les modèles moins complexes sont les modèles linéaires [SD04]. Cependant comme il est montré dans [FLP01] le phénomène des instabilités est de nature non-linéaire, et il ne peut être réellement expliqué que par des modèles non-linéaires. La complexité des instabilités a fait qu'actuellement un vide important se fait sentir en matière de modèle capable de prédire le comportement des instabilités.

Dans la littérature, trois approches pour la modélisation des instabilités de combustion sont considérées. La première est la modélisation par boîte blanche (*white-box modelling*), qui utilise des équations provenant directement des théories de la physique. Cette modélisation consiste à représenter le phénomène des instabilités par des équations aux dérivées partielles. Ces équations décrivent la réaction entre la dynamique d'écoulement du fluide avec les conditions de limites imposées par la

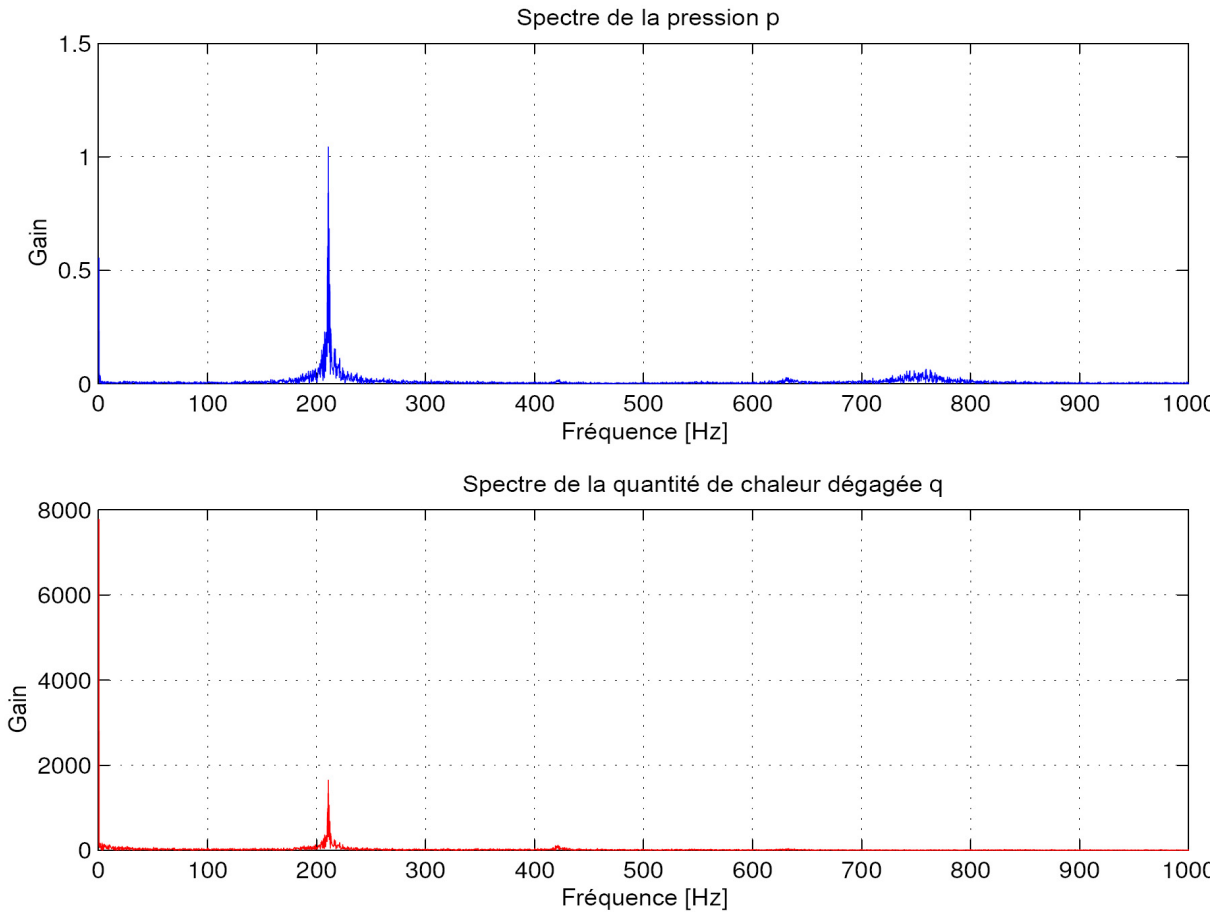

FIG. 1.7 – Spectre de pression et de quantité de chaleur

géométrie de la chambre de combustion. La complexité évidente d'une telle modélisation réside dans la vérification analytique des phénomènes observés et dans le calcul de la commande. Dans le but de développer un modèle de complexité réduite, une procédure de projection, de calcul de la moyenne et des troncations a été utilisée dans [PC89]. Cette procédure a conduit à un modèle caractérisé par deux modes oscillatoires. Ce modèle a été utilisé dans [AMS05] pour le calcul de la commande d'un cas d'étude simple (Les fréquences des deux modes ont respectivement les valeurs 1 et 2). La deuxième approche est la modélisation par boîte noire (*black-box modelling*), elle est basée sur l'application directe des procédures d'identification sur les données expérimentales [YCG05, UA05]. Souvent cette approche utilise des structures de modèle qui n'ont pas de signification physique. La troisième approche est la modélisation par boîte grise (*grey-box modelling*), elle utilise d'une part les interprétations physiques pour la construction de la structure du modèle, et d'autre part elle emploie les données d'entrée/sortie pour l'ajustement des paramètres du modèle. Cette approche est plus attractive dans la mesure où elle représente un compromis entre les deux premières approches.

D'une manière générale, les lois physiques applicables pour la modélisation des instabilités de

combustion sont celles décrivant l'acoustique de la chambre de combustion. Ces équations peuvent être écrites comme suit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(v\rho) = 0 \tag{1.3}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \nabla v = -\nabla p \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \nabla v + v\nabla p = (\gamma - 1)q \tag{1.5}$$

où ρ, v et γ sont respectivement la densité, la vitesse des ondes et le rapport des chaleurs spécifiques. Les équations (1.3) et (1.4) sont les équations de Navier-Stokes et l'équation (1.5) est issue des considérations énergétiques. A partir d'un développement rigoureux de ces équations, Peracchio et Proscia [PP99] ont établi une structure de modèle générique de complexité réduite, représentant un seul mode oscillatoire. Le modèle s'exprime par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{p} + 2\zeta\omega\dot{p} + \omega^2 p = N\frac{d}{dt}q$$
$$q = \Psi\left[\dot{p}(t-\tau)\right]$$

où $\Psi[\cdot]$ est une fonction non linéaire statique, τ est un temps de retard du transport de l'injecteur à la surface de la flamme, ω est le mode fondamental acoustique, ζ est le coefficient d'amortissement associé et N est le gain du résonateur de deuxième ordre. Ce modèle se présente dans une structure en boucle fermée résultant de la contre-réaction thermo-acoustique. La voie directe est caractérisée par un résonateur. La voie de contre-réaction est caractérisée par un retour non-linéaire qui crée un amortissement négatif conduisant dans certaines situations à l'apparition des instabilités. En utilisant l'approche de modélisation par boîte grise, et dans le but d'expliquer la coexistence de deux modes oscillatoires, Dunstan et Bitmead [Dun03, DBS01] ont étendu le modèle. L'extension concerne l'addition du résonateur de la troisième harmonique dans la voie directe (avec un gains M) et l'introduction d'un filtre passe bas dans le retour de boucle. Le modèle est présenté par la Figure 1.8. La validité de ce modèle repose sur une analyse efficace qui permet de mesurer sa capacité à prédire les phénomènes observés dans la pratique, notamment le phénomène de coexistence de deux modes oscillatoires non-harmoniques. Du point de vue de l'analyse, le modèle présente un certain nombre de difficultés parmi lesquelles nous mentionnons :

- L'absence d'entrée directe.
- La présence de deux résonateurs couplés.
- La dynamique compliquée dans le retour de boucle, qui est due à la présence en cascade de dérivées, d'un retard, non-linéarité statique et filtre passe bas.

Pour prédire les sorties du modèle, une analyse par la méthode de la première harmonique (en négligeant le retard) et une analyse par la méthode de bifurcation ont été employées. Les résultats d'ana-

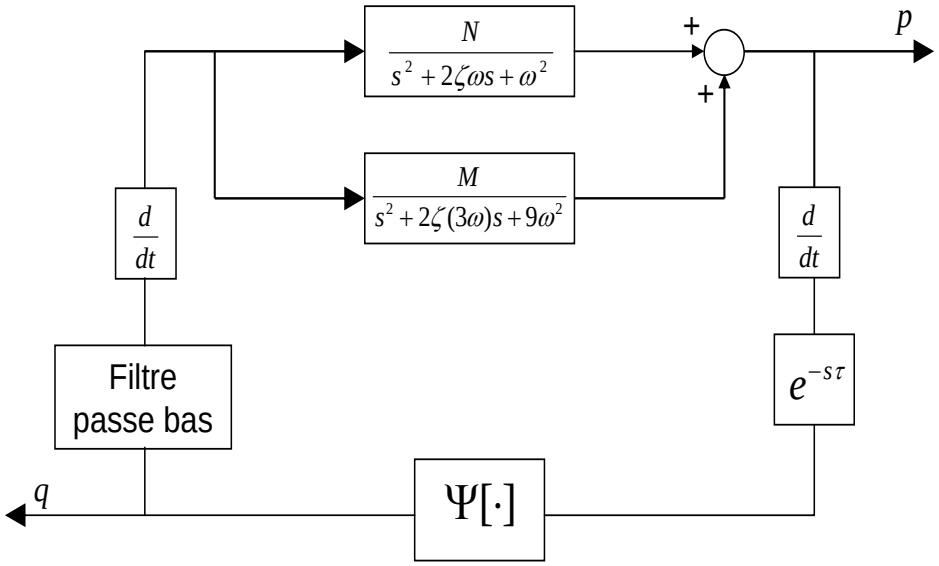

FIG. 1.8 – Modèle des instabilités de combustion de Dunstan et Bitmead [Dun03, DB03]

lyse ont été confrontés avec les données expérimentales. Si ces approches ont permis de gagner de la confiance dans ce type de modèle, elles sont insuffisantes pour faire une description globale des propriétés du modèle et pour établir les conditions d'extinction des oscillations. Une description plus concerte peut être établie si des moyens de calcul ou d'approximation efficace des sorties sont disponibles. Pour aller plus loin dans l'établissement et l'analyse de modèles, dans ce qui suit le modèle de Dunstan et Bitmead sera considère comme une base de départ.

1.2.2 Contrôle actif des instabilités de combustion

La conception d'une loi de commande pour l'extinction des oscillations est un des défis majeurs caractérisant les instabilités de combustion. Le contrôle actif à travers, la modulation d'une quantité de combustible entrant dans la chambre de combustion, a été proposé comme une alternative pour traiter ce type d'instabilité. Cette alternative a été largement testée en pratique pour la suppression des oscillations [Roy01]. Dans la littérature plusieurs méthodes de contrôle actif existent, un excellent résumé des méthodes existantes est donné dans [AG02]. Au niveau de la fréquence d'excitation de la commande, on peut distinguer deux stratégies. La première consiste à utiliser des fréquences non-résonantes, à titre d'exemple on peut citer la commande par une excitation en hautes fréquences [YCG05]. Ce genre de commande est connu dans le domaine d'automatique par le contrôle vibrationnel.

La deuxième stratégie consiste à utiliser des fréquences résonantes, provenant en général de la

mesure des sorties, qui est employée pour un retour de boucle. La plus connue des méthodes de commande dans le contrôle actif des oscillations périodiques est la commande par déphasage (*phase shift control*). Cette méthode est basée sur un retour de boucle avec la composante dominante de la mesure de pression, et un déphasage approprié est introduit pour réduire ou éteindre les oscillations. Généralement dans la commande par déphasage, l'instabilité de combustion est considérée comme un seul résonateur. La commande est implémentée pour la fréquence résonante avec un filtre passe bande qui élimine tout les autres fréquences (considérées comme des fréquences non-contrôlées). Cette méthode de commande a donné de bons résultats dans quelques applications [BAKJ04]. Cependant, dans quelques conditions d'opération cette commande peut induire l'excitation d'autres fréquences non-contrôlées. Ainsi, elle provoque des résonances dans d'autres fréquences néfastes pour les performances de la commande [AG02]. La formulation du problème de commande qui prend en compte toutes les composantes sinusoïdales des instabilités de combustion est loin d'être résolue, puisque cela nécessite plus de travail au niveau d'une modélisation représentative de toutes ces composantes.

1.3 Méthodes d'approximation des systèmes non-linéaires auto-oscillants

En général, les systèmes issus de la physique sont de nature non-linéaire à la base. La linéarisation des systèmes est devenue une pratique courante, qui permet dans la plupart des cas d'avoir des résultats satisfaisants. Il existe cependant quelques systèmes dont les outils de linéarisation ne peuvent pas expliquer les phénomènes observés, entre-autre les systèmes non-linéaires auto-oscillants.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons principalement à l'établissement d'un modèle pour les instabilités de combustion. Une fois un modèle est adopté, il s'agit de trouver l'approche mathématique permettant d'étudier analytiquement ce modèle. Sachant que les modèles qui vont être proposés sont régis par des équations différentielles faisant partie de la classe des systèmes appelés *near-conservative autonomous systems* (systèmes oscillants proches des systèmes autonomes linéaires), et décrits par des équations de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1.6}$$

où ϵ est une quantité positive de valeur faible et f peut être une série entière de ϵ dont les coefficients sont des polynômes en x et $\frac{dx}{dt}$. Le terme de droite de cette équation est appelé terme de perturbation.

Puisqu'en général on ne peut pas trouver les solutions exactes de ce type d'équation, les procédures d'approximation doivent être considérées. Tenant compte du comportement oscillatoire des solutions de ce type d'équations, la recherche d'une méthode d'analyse efficace s'oriente plus vers

les méthodes d'approximation qui proposent une solution de la forme

$$x(t) = a(t)\cos(\omega t + \theta), \tag{1.7}$$

où a et θ sont respectivement l'amplitude et la phase de l'oscillation, qui varient lentement dans le temps.

Dans la littérature, différentes approches sont disponibles pour traiter les systèmes non-linéaires oscillants [Hay64, BM61, Lev49, Lev50, Lou59, Yag59, Yag96]. Parmi les méthodes d'approximation, celles basées sur le calcul de la moyenne sont les plus utilisées. Une procédure d'approximation basée sur le calcul de la moyenne est présentée dans [kha92]. Elle consiste à établir une relation entre l'évolution de l'amplitude et l'évolution de la phase en éliminant l'échelle du temps. Cette procédure est efficace, toutefois il est préférable d'utiliser des méthodes qui permettent de décrire l'évolution de l'amplitude et de la phase séparément en fonction du temps. En faisant le rapprochement entre le phénomène d'oscillation dans les instabilités de combustion et l'équation de Van der Pol utilisée dans les oscillateurs électroniques, le choix d'une approche d'analyse s'orient vers une des méthodes efficaces utilisées pour traiter l'équation de Van der Pol. La méthode de Krylov-Bogoliubov [BM61, Hay64, LB04] utilisée pour l'analyse des oscillateurs électroniques [SPP99] et des oscillations mécaniques [Lan96, Lan00] a clairement montrée une capacité importante en matière de précision. Cela nous a conduit à choisir cette méthode, comme l'approche principale permettant d'analyser le comportement des instabilités de combustion.

1.3.1 Méthode de Krylov-Bogoliubov

La méthode de Krylov-Bogoliubov (K-B) est sans doute une des procédures les plus efficaces pour analyser les systèmes non-linéaires oscillants régis par des équations de la forme (1.6). L'élégance et l'efficacité de cette méthode résident dans le remplacement de l'équation (1.6) par deux équations différentielles couplées décrivant l'amplitude et la phase des oscillations. Ainsi, il est possible de suivre l'évolution de l'amplitude et de la phase de manière indépendante. La méthode K-B fourni plusieurs ordres de précision, la première approximation décrit les propriétés fondamentales de la solution, et les ordres d'approximation élevés permettent d'avoir plus de précision. En général la première approximation est suffisante pour bonne évaluation de l'amplitude et de la phase [BLV04].

Dans le but d'analyser des modèles avec plusieurs résonateurs, nous nous intéressons à l'application de la première approximation K-B pour le cas des systèmes multi-résonateurs autonomes, qui pour n résonateurs sont décrits par des équations de la forme

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \epsilon f_k\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.8}$$

où $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\frac{dx}{dt} = \{\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\}$. Pour le résonateur k, la première approximation K-B propose la solution

$$x_k = a_k \cos(\omega_k t + \theta_k), \tag{1.9}$$

où a_k et θ_k varient lentement dans le temps et obéissent aux équations

$$\begin{cases} \dot{a}_k = -\frac{\epsilon}{2\omega_k} H_{kk}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \\ \dot{\theta}_k = -\frac{\epsilon}{2\omega_k a_k} G_{kk}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \end{cases} \tag{1.10}$$

où H_{kk}, G_{kk}, $H_{\ell k}$ et $G_{\ell k}$ sont obtenues de la fonction $f_k\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ en injectant

$$\begin{cases} x_k = a_k \cos(\omega_k t + \theta_k), \\ \frac{dx_k}{dt} = -a_k \omega_k \sin(\omega_k t + \theta_k), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.11}$$

et en la mettant sous la forme

$$\begin{aligned} &f_k\left(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, a_n \cos(\omega_n t + \theta_n), -a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, -a_n\omega_n \sin(\omega_n t + \theta_n)\right) \\ &= H_{kk} \sin(\omega_k t + \theta_k) + G_{kk} \cos(\omega_k t + \theta_k) + \sum_{\omega_k \not\approx \omega_\ell}^{r} \left(H_{\ell k} \sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_{\ell k} \cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)\right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

où ω_ℓ et θ_ℓ sont respectivement des combinaisons linéaires de $\omega_1, \ldots, \omega_n$ et de $\theta_1, \ldots, \theta_n$, et r est le nombre de combinaisons linéaires possibles de $\omega_1, \ldots, \omega_n$ différentes de ω_k. En outre pour x_k, les coefficients du terme fondamental dans (1.12) sont utilisés et tous les autres termes sont éliminés. Cela fait que la méthode décrit uniquement le comportement de l'oscillation fondamentale. Toutefois pour de décrire le comportement des harmoniques multiples, il est possible de réécrire la solution en ajoutant la composante des harmoniques multiples ν_k, ce qui correspond à

$$x_k = a_k \cos(\omega_k t + \theta_k) + \nu_k, \tag{1.13}$$

avec

$$\nu_k = \sum_{\omega_k \not\approx \omega_\ell}^{r} \frac{H_{\ell k} \sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_{\ell k} \cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)}{\omega_k^2 - \omega_\ell^2}. \tag{1.14}$$

Cette procédure sera appelée dans ce qui suit par la méthode "K-B améliorée". Plus de détails sur la méthode K-B sont données dans l'annexe A.

Chapitre 2

Étude du modèle 1 : modèle basé sur un système de deux équations de Van der Pol couplées

2.1 Introduction

Motivé par le contrôle actif des instabilités de combustion, le but de ce chapitre est l'établissement et l'analyse d'un modèle de complexité réduite. Le modèle résulte d'un rapprochement entre les oscillateurs électroniques et le modèle de Dunstan et Bitmead (voir Figure 1.8 et Figure 1.2). En effet, en faisant abstraction de l'existence du filtre et du bloc dérivée-retard dans le modèle de Dunstan et Bitmead, le schéma suggère une analogie avec les oscillateurs électroniques. Si en plus on examine la caractéristique non-linéaire approximée dans [Dun03, DB03] par la courbe montrée dans la Figure 2.1. Celle-ci peut être approchée dans la zone normale d'opération par :

$$\Psi\left[\dot{p}(t-\tau)\right] = \varphi_0 + \varphi_1 \dot{p}(t-\tau) - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}(t-\tau)^3. \tag{2.1}$$

où φ_0 est une constante, φ_1 et φ_3 sont des constantes négatives. D'un autre côté pour le mode dominant (avec une fréquence $\omega \approx 210Hz$), le bloc dérivée-retard introduit un gain ω et un déphasage avoisinant π (voir [Dun03]). En négligeant l'effet de ce bloc sur le deuxième mode et les effets du bruit, cela revient à approximer $\dot{p}(t-\tau)$ par $-\omega p$.

Ceci suggère un rapprochement avec l'équation de Van der Pol largement utilisée pour l'étude des oscillateurs électroniques et en général avec les techniques d'étude des systèmes oscillants. Il faut néanmoins ne pas perdre de vue qu'à l'opposé des oscillateurs électroniques l'objectif est de faire

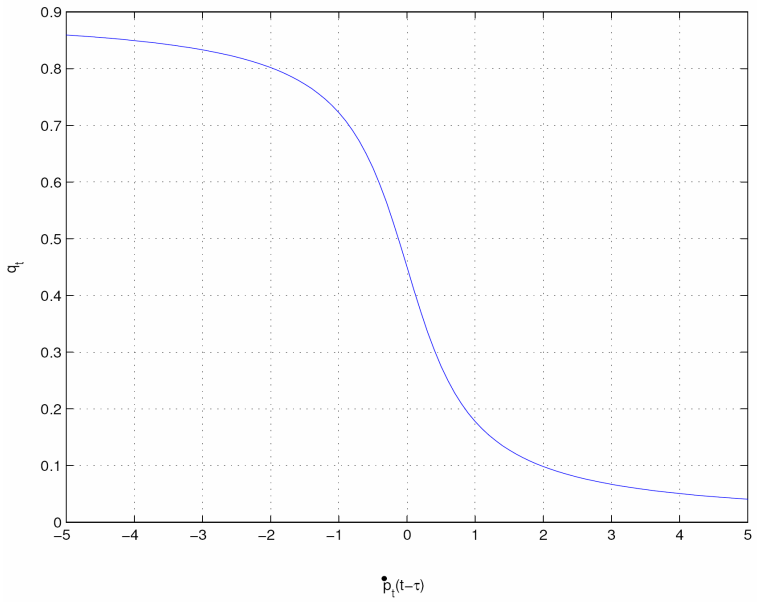

FIG. 2.1 – Approximation de la Caractéristique statique

disparaître les oscillations et non pas de les amorcer. L'équation de Van der Pol possède la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \epsilon\left(1 - y^2\right)\frac{dy}{dt}, \tag{2.2}$$

où ϵ est un paramètre de valeur faible, ω est une fréquences naturelle et dont le terme de droite correspond à la dérivée de la fonction non-linéaire

$$\varphi_v(y) = \varphi_{v0} + y - \frac{y^3}{3}, \tag{2.3}$$

où φ_{v0} est une constante arbitraire.

Tenant compte des caractéristiques de la non-linéarité (2.1), une généralisation de l'équation de Van der Pol doit être considérée

$$\frac{d^2y}{dt} + \omega^2 y = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}y - \frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right), \tag{2.4}$$

où φ_{v1} et φ_{v3} sont des constantes arbitraires positives, et qui dans le cas de deux résonateurs avec des fréquences naturelles ω_1 et ω_2 (quelconques) conduit à un modèle attractif représenté dans la Figure 2.2 et au système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}p - \frac{\varphi_{v3}}{3}p^3\right), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}p - \frac{\varphi_{v3}}{3}p^3\right), \\ p = x_1 + x_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ce modèle constitue sans aucun doute une base pour l'étude des phénomènes d'oscillations. Une fois le modèle adopté, il s'agit d'appliquer l'approche K-B permettant d'étudier analytiquement ce

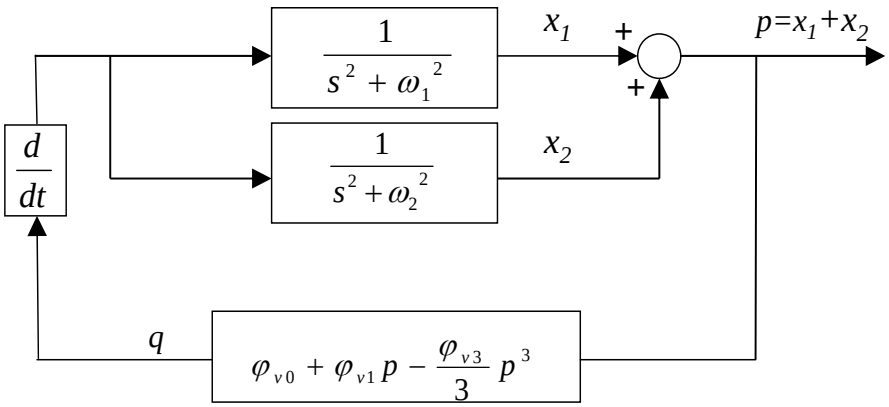

FIG. 2.2 – Modèle de l'instabilité de combustion basé sur un système de deux équations de Van der Pol généralisées et couplées

modèle. Le travail présent se concentre sur l'analyse de l'effet de la structure de deux résonateurs couplés, sans que nécessairement il existe une relation de multiple entier entre leurs fréquences naturelles. Une importance particulière sera accordée à la coexistence des deux modes, pour ce faire on appliquera dans ce chapitre la méthode K-B classique (sans étude des harmoniques multiples). Les phénomènes étudiés seront confrontés avec les observations physiques. Une étude des effets du bruit sur les sorties du modèle sera effectuée à la fin de ce chapitre.

2.2 Mise en forme des équations

Dans le but d'appliquer l'approximation K-B, il s'agit dans cette partie de la mise des fonctions f_1 et f_2 sous la forme d'une somme de sinusoïdes (forme générale de (1.12)). Cette forme permet de trouver les équations différentielles régissant les amplitudes a_1 et a_2 et les phases θ_1 et θ_2 des oscillations x_1 et x_2 solutions de (2.5). Considérons le système d'équations (2.5) et la forme (1.8) (avec $\epsilon = 1$). Par identification on trouve les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 &= f(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}(x_1+x_2) - \frac{\varphi_{v3}}{3}(x_1+x_2)^3\right) \\ &= \varphi_{v1}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(x_1+x_2)^2\right)\left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

En introduisant

$$\begin{cases} x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \\ \frac{dx_i}{dt} = -a_i \omega_i \sin(\omega_i t + \theta_i), \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

dans (2.6), on obtient :

$$f\left(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), -a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), -a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)\right) = -\varphi_{v1}\Big(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2))^2\Big)\left(a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)\right). \quad (2.7)$$

Dans l'Annexe B, on donne les détails du calcul permettant d'obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &f\left(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), -a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), -a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)\right) = \varphi_{v1}\Big\{ \\ &-\omega_1 a_1 \left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t + \theta_1) - \omega_2 a_2 \left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t + \theta_2) + \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big[\\ &\omega_1 \frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t + \theta_1)\right) + \omega_2 \frac{a_2^3}{4}\sin\left(3(\omega_2 t + \theta_2)\right) + (2\omega_1 + \omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1 + \omega_2)t + 2\theta_1 + \theta_2\right) \\ &+(\omega_1 + 2\omega_2)\frac{a_1 a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1 + 2\omega_2)t + \theta_1 + 2\theta_2\right) + (2\omega_1 - \omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1 - \omega_2)t + 2\theta_1 - \theta_2\right) \\ &+ (2\omega_2 - \omega_1)\frac{a_2^2 a_1}{4}\sin\left((2\omega_2 - \omega_1)t + 2\theta_2 - \theta_1\right)\Big]\Big\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

En examinant cette fonction on peut constater l'existence de plusieurs termes sinusoïdaux avec des fréquences qui représentent des combinaisons linéaires entre ω_1 et ω_2. Ces combinaisons peuvent être rassemblées dans l'ensemble de suivant :

$$W = \{\omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1\}. \quad (2.9)$$

Cet ensemble est très important pour trouver les différents régimes possibles du système. Car pour x_1 (respectivement x_2), les termes restants de (2.8) après l'application de l'approximation K-B seront seulement ceux d'une fréquence ω de W tel que $\omega \approx \omega_1$ (respectivement ω_2).

2.3 Analyse du modèle par la méthode de Krylov-Bogoliubov

Dans certaines conditions une interaction entre les deux fréquences existe. Cette interaction se détecte à travers la comparaison de chaque fréquence (ω_1 et ω_2) avec les fréquences ω contenues dans l'ensemble W. En conséquence, on a la classification suivante :

1). $\omega_1 \not\approx \left\{\omega_2, 3\omega_2, \frac{\omega_2}{3}\right\}$-deux générateurs avec extinction compétitive.

2). $\omega_1 \approx \omega_2$-synchronisation mutuelle avec des fréquences proches.

3). $\omega_1 \approx 3\omega_2$ (respectivement $\omega_2 \approx 3\omega_1$)-synchronisation mutuelle avec des harmoniques multiples.

Cette classification impose une analyse au cas par cas.

2.3.1 Deux générateurs avec extinction compétitive

Considérons le cas où les fréquences ω_1 et ω_2 respectent la condition 1 cité ci-dessus. Dans ce cas, il n'existe aucun effet d'interaction entre les deux fréquences et l'approximation K-B utilise seulement les termes de l'oscillation fondamentale de $f(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)$. En conséquence, on propose le lemme suivant :

Lemme 1

Sous la condition 1*, les solutions approximées de (2.5) sont*

$$x_i = a_i\cos(\omega_i t+\theta_i),\ \ (i=1,2) \tag{2.10}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \frac{\varphi_{v1}}{2}a_1 - \frac{\varphi_{v3}}{2}a_1\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right), \\ \frac{da_2}{dt} = \frac{\varphi_{v1}}{2}a_2 - \frac{\varphi_{v3}}{2}a_2\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right), \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Preuve

Calculons l'approximation K-B de x_1. Considérons la condition 1, dans ce cas on a la propriété suivante :

$$\omega_1 \not\approx \{\omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1+\omega_2, \omega_1+2\omega_2, |2\omega_1-\omega_2|, |2\omega_2-\omega_1|\}. \tag{2.12}$$

En conséquence, on peut considérer que (2.8) est exactement dans la forme (1.12). Donc pour x_1 nous obtenons

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\omega_1\varphi_{v1}a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right), \\ G_{11} &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Utilisant (2.13) et (1.10), on trouve

$$x_1 = a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1) \tag{2.14}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \varphi_{v1}\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right), \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Symétriquement, en adoptant la même procédure pour x_2, on obtient

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \tag{2.16}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{da_2}{dt} = \varphi_{v1} \frac{a_2}{2} \left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}} \left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right), \\ \frac{d\theta_2}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

L'assemblage de (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), donne à la fin le résultat énoncé dans le lemme 1.

Le comportement des oscillations x_1 et x_2 dépend des solutions d'équilibre de (2.11). Si on calcul les solutions d'équilibre, on trouve analytiquement que (2.11) possède quatre solutions d'équilibre :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0, \tag{2.18}$$

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}} \text{ et } a_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}, \tag{2.19}$$

$$a_1 = 2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}} \text{ et } a_2 = 0, \tag{2.20}$$

$$a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}. \tag{2.21}$$

La convergence des oscillations dépend de la stabilité de ces points d'équilibre.

Lemme 2

Dans un domaine de stabilité local les amplitudes des oscillations convergent à une des deux solutions d'équilibre (2.20) et (2.21).

Preuve

Le calcul des matrices des systèmes linéarisés autour des quatre solutions d'équilibre donne dans le même ordre :

$$\underset{(a)}{\begin{bmatrix} \frac{\varphi_{v1}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi_{v1}}{2} \end{bmatrix}}, \quad \underset{(b)}{\begin{bmatrix} -\frac{\varphi_{v1}}{3} & -\frac{2\varphi_{v1}}{3} \\ -\frac{2\varphi_{v1}}{3} & -\frac{\varphi_{v1}}{3} \end{bmatrix}}, \quad \underset{(c)}{\begin{bmatrix} -\varphi_{v1} & 0 \\ 0 & -\frac{\varphi_{v1}}{2} \end{bmatrix}}, \quad \underset{(d)}{\begin{bmatrix} -\frac{\varphi_{v1}}{2} & 0 \\ 0 & -\varphi_{v1} \end{bmatrix}}$$

Par la méthode indirecte de Lyapunov (calcul des valeurs propres), on trouve que les matrices (a) et (b) correspondant aux solutions d'équilibre (2.18) et (2.19) sont instables, et les matrices (c) et (d) correspondent aux solutions (2.20) et (2.21) sont stables. Il en résulte que les amplitudes de x_1 et x_2 convergent à un des deux états stationnaires possibles (2.20) et (2.21).

Selon la condition initiale, un des deux générateurs est excité, tandis que les oscillations de l'autre générateur sont entièrement éteintes. Une telle extinction, causée par la présence d'un très fort couplage non linéaire entre les équations, est connue sous le nom *d'extinction compétitive*. Il a été observé que si $a_1(0) > a_2(0)$, x_1 oscille et les oscillations de x_2 sont entièrement éteintes. L'effet inverse se

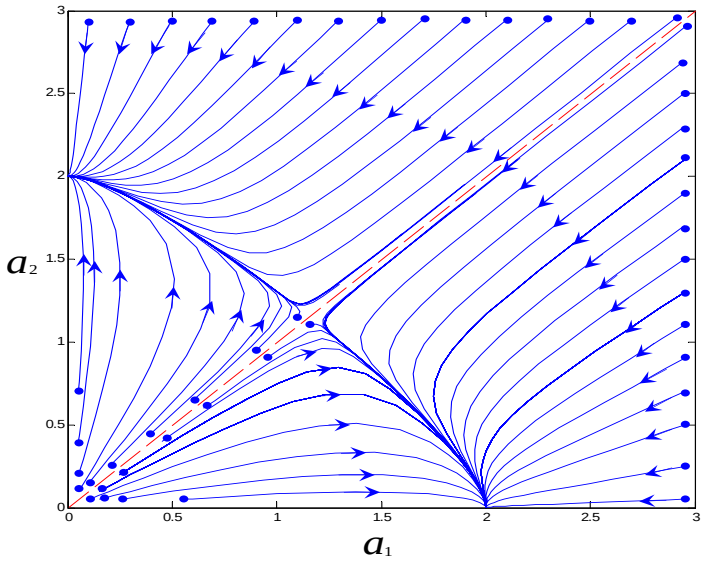

FIG. 2.3 – Quelques courbes de dépendance entre a_1 et a_2 en fonction des amplitudes initiales.

produit quand $a_1(0) < a_2(0)$. Ceci peut se résumer par quelques courbes de dépendance entre l'évolution de a_1 et l'évolution de a_2 montrées dans la Figure 2.3.

Pour évaluer la qualité des approximations K-B, une comparaison entre la simulation du système de départ et la simulation des approximations s'impose. La Figure 2.4 présente un test de simulation avec des valeurs des paramètres approchants les valeurs de la caractéristique non-linéaire réelle (voir [Dun03]). La partie supérieure montre les sorties x_1 et x_2 simulées de (2.5) et la partie inférieure montre les sorties x_1 et x_2 approximées par (2.10) et (2.11). Aussi, quand $a_1(0) = a_2(0)$ (mais non nuls), il a été observé que :

- Dans (2.11), les amplitudes a_1 et a_2 convergent respectivement à $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$, qui correspond à la solution d'équilibre instable (2.19).
- Dans (2.5), les amplitudes a_1 et a_2 convergent respectivement à $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$, et y restent temporairement, mais après un long moment (si on le compare au temps de convergence) ces amplitudes vont converger nécessairement à une des deux solutions d'équilibres (2.20) et (2.21).

Cela implique que dans certaines conditions, les deux fréquences peuvent coexister pour un long moment avant d'entrer dans le régime d'extinction compétitive. Ce phénomène est illustré par la Figure 2.3.1 présentant un test de simulation, où la partie supérieure est la sortie x_1 de (2.5) et la partie inférieure est la sortie x_2 de (2.5).

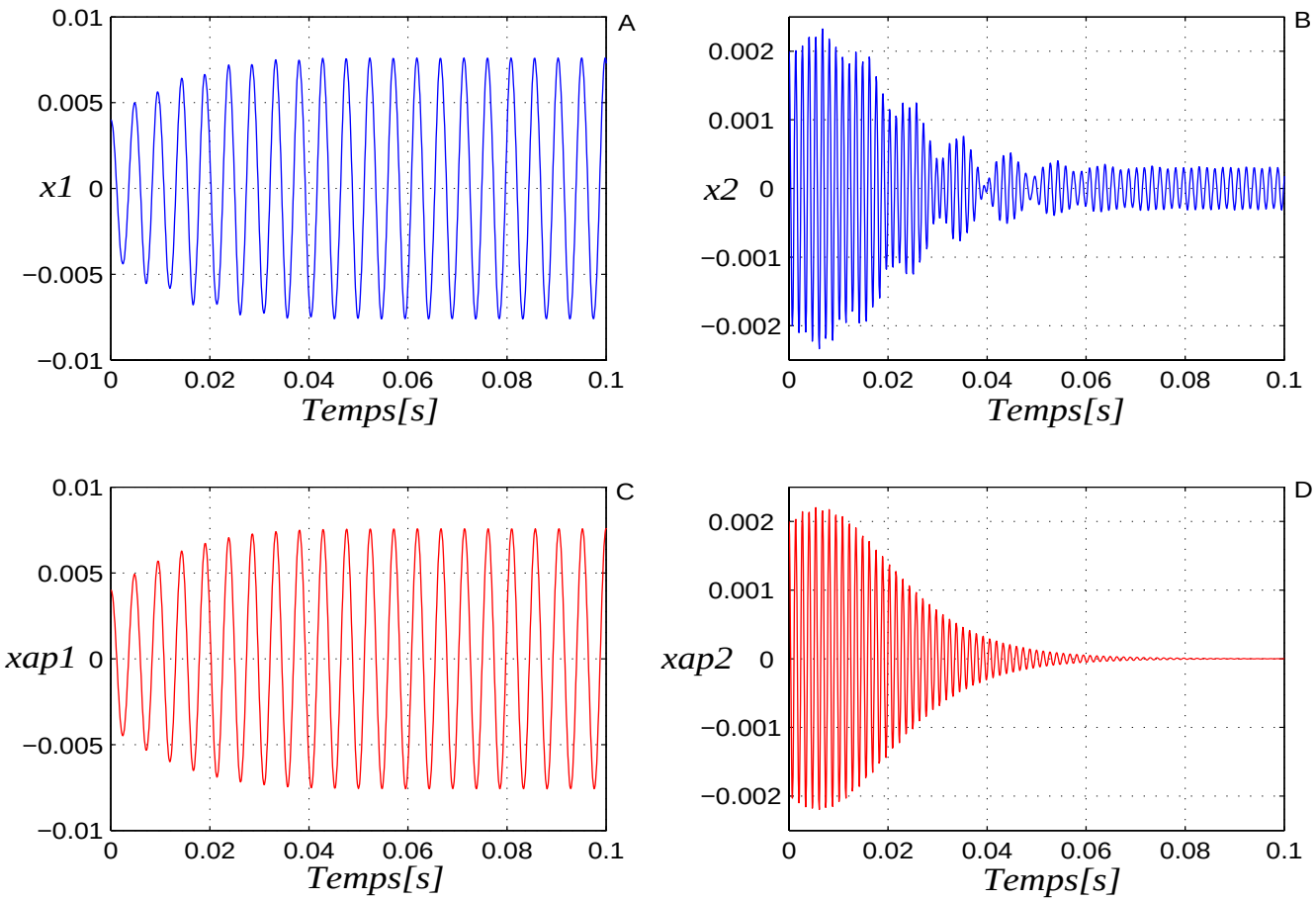

FIG. 2.4 – Simulation du système (2.5) et des approximations (2.10) et (2.11) avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$, $a_1(0) = 4 \times 10^{-3}$ et $a_2(0) = 2 \times 10^{-3}$.

2.3.2 Synchronisation mutuelle avec des fréquences proches

Dans le cas où les fréquences ω_1 et ω_2 sont proches, une interaction importante existe entre les deux résonateurs. Pour x_1 (respectivement x_2), l'application de l'approximation K-B implique la conservation de tous les coefficients des termes sinusoïdaux dans $f(a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2\cos(\omega_2 t + \theta_2), a_1\omega_1\sin(\omega_1 t + \theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t + \theta_2))$ avec une fréquence proche de ω_1. En d'autres termes pour x_1 les termes avec les fréquences ω_1, ω_2, $2\omega_1 - \omega_2$ et $2\omega_2 - \omega_1$ doivent être utilisés, et tous les autres doivent être éliminés.

Lemme 3

Considérons le cas où les fréquences de résonance ω_1 et ω_2 sont proches ($\omega_1 \approx \omega_2$). Les solutions

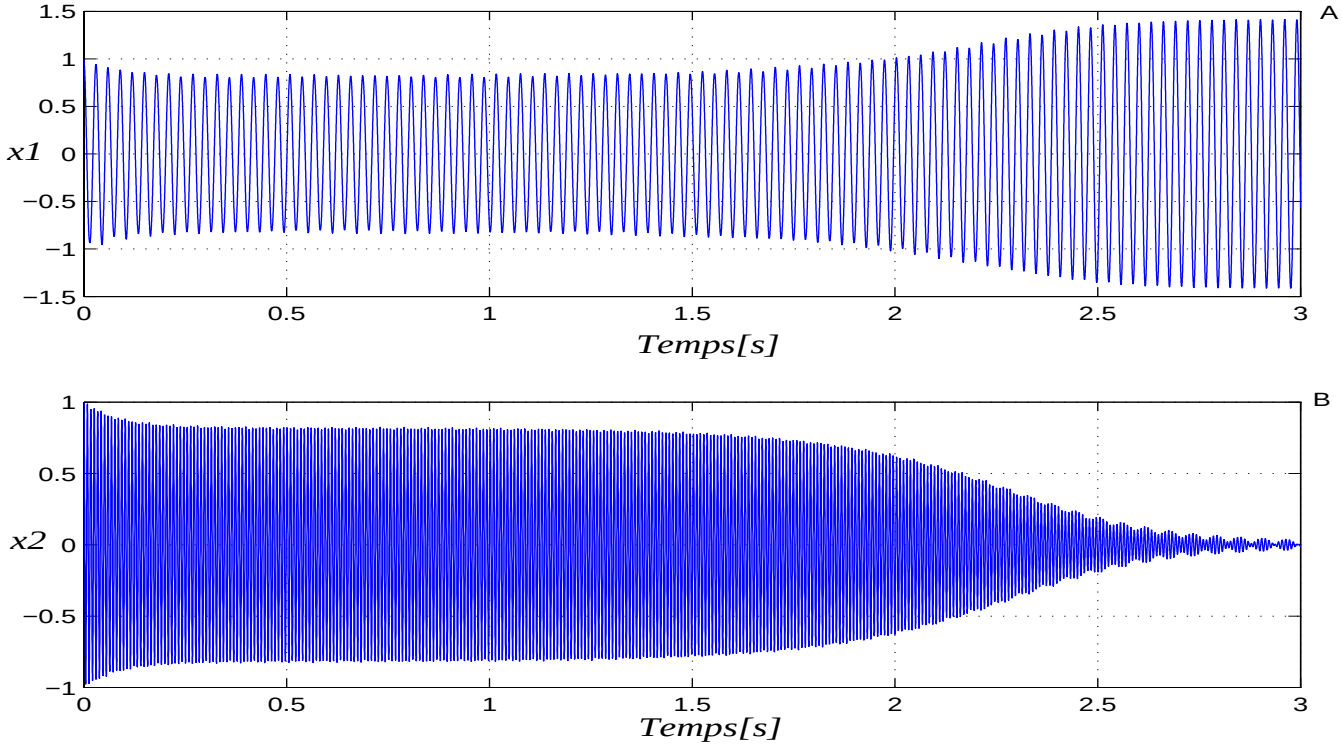

FIG. 2.5 – Simulation du système (2.5) avec $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 3.5\omega_1 = 3.5\pi$, $\varphi_{v1} = \varphi_{v3} = 1$, $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 1$

approximées de (2.5) sont dans ce cas

$$x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \quad (i = 1, 2) \tag{2.22}$$

avec a_1, a_2, θ_1 *et* θ_2 *gouvernés par*

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{a_1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{2}\right)\right) + \left[\frac{a_2\omega_2}{2\omega_1}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right) - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2 a_1^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi) \right. \\ \qquad \left. + \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(\omega_1 - 2\omega_2)a_1 a_2^2}{8\omega_1}\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{da_2}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{a_2}{2}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right) + \left[\frac{a_1\omega_1}{2\omega_2}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right) - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1 a_2^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi) \right. \\ \qquad \left. + \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(\omega_2 - 2\omega_1)a_2 a_1^2}{8\omega_2}\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_2 - \omega_1)a_2^2}{8\omega_1}\sin(2\Delta\psi) - \left[\frac{a_2\omega_2}{2a_1\omega_1}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right) + \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_1 - \omega_2)a_2 a_1}{8\omega_1}\right]\sin(\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(\omega_2 - 2\omega_1)a_1^2}{8\omega_2}\sin(2\Delta\psi) + \left[\frac{a_1\omega_1}{2a_2\omega_2}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{2}\right)\right) + \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_2 - \omega_1)a_2 a_1}{8\omega_2}\right]\sin(\Delta\psi)\right\}. \end{cases} \tag{2.23}$$

où

$$\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = (\omega_1 - \omega_2)t + \theta_1 - \theta_2. \tag{2.24}$$

Preuve

Calculons l'approximation K-B de x_1 quand $\omega_1 \approx \omega_2$. Dans ce cas, on a les propriétés suivantes :

$$\omega_1 \approx \{\omega_2, |2\omega_1 - \omega_2|, |2\omega_2 - \omega_1|\}, \tag{2.25}$$

$$\omega_1 \not\approx \{3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1+\omega_2, \omega_1+2\omega_2\}\,. \tag{2.26}$$

D'un autre côté la notation (2.24) nous permet d'avoir les relations suivantes :

$$\begin{cases} \omega_2 t+\theta_2 = \omega_1 t+\theta_1-\Delta\psi, \\ (2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2 = \omega_1 t+\theta_1+\Delta\psi, \\ (2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1 = \omega_1 t+\theta_1-2\Delta\psi. \end{cases} \tag{2.27}$$

En injectant (2.27) dans (2.8), et en tenant compte de (2.25) et (2.26), on peut écrire :

$$\begin{aligned} &f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right) = \varphi_{v1}\Big\{ \\ &-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1) - \omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1-\Delta\psi) \\ &+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[(2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left(\omega_1 t+\theta_1+\Delta\psi\right)+(2\omega_2-\omega_1)\frac{a_2^2 a_1}{4}\sin\left(\omega_1 t+\theta_1-2\Delta\psi\right)\right]\Big\} \\ &+\sum_{\omega_1\not\approx\omega_\ell}^{4}\left(H_{\ell 1}\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell)+G_{\ell 1}\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)\right). \end{aligned} \tag{2.28}$$

où ω_ℓ représente les combinaisons linéaires entre ω_1 et ω_2 (appartenant à l'ensemble de droites de (2.26)). Par application des règles trigonométriques dans (2.28), cela donne après simplifications :

$$\begin{aligned} &f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right) = \\ &-\varphi_{v1}\left\{\left\{\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)+\left[\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\omega_1\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2 a_1^2}{2}\right]\cos(\Delta\psi)\right.\right. \\ &\left.+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(\omega_1-2\omega_2)a_2^2 a_1}{4}\cos(2\Delta\psi)\right\}\sin(\omega_1 t+\theta_1) - \left\{\left[\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\right.\right. \\ &\left.+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_1-\omega_2)a_1^2 a_2}{4}\right]\sin(\Delta\psi) - \left.\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_2-\omega_1)a_2^2 a_1}{4}\sin(2\Delta\psi)\right\}\cos(\omega_1 t+\theta_1) \\ &+\sum_{\omega_1\not\approx\omega_\ell}^{4}\left(H_{\ell 1}\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell)+G_{\ell 1}\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

qui est dans la forme (1.12). Donc pour x_1 nous obtenons

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\varphi_{v1}\left\{\omega_1 a_1\left(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\tfrac{a_1^2}{4}+\tfrac{a_2^2}{2}\right)\right)+\left[\omega_2 a_2\left(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\tfrac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\omega_1\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\tfrac{a_2 a_1^2}{2}\right]\cos(\Delta\psi)\right. \\ &\qquad\left.+\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\tfrac{(\omega_1-2\omega_2)a_2^2 a_1}{4}\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\ G_{11} &= \varphi_{v1}\left\{\left[\omega_2 a_2\left(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\tfrac{a_2^2}{4}+\tfrac{a_1^2}{2}\right)\right)+\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\tfrac{(2\omega_1-\omega_2)a_1^2 a_2}{4}\right]\sin(\Delta\psi)-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\tfrac{(2\omega_2-\omega_1)a_2^2 a_1}{4}\sin(2\Delta\psi)\right\}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

En utilisant (2.30) et (1.10), on trouve

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)+\left[\frac{a_2\omega_2}{2\omega_1}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2 a_1^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi)\right. \\ \qquad\left.+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{(\omega_1-2\omega_2)a_1 a_2^2}{8\omega_1}\right)\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_2-\omega_1)a_2^2}{8\omega_1}\sin(2\Delta\psi)-\left[\frac{a_2\omega_2}{2a_1\omega_1}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_1-\omega_2)a_2 a_1}{8\omega_1}\right]\sin(\Delta\psi)\right\}. \end{cases} \tag{2.31}$$

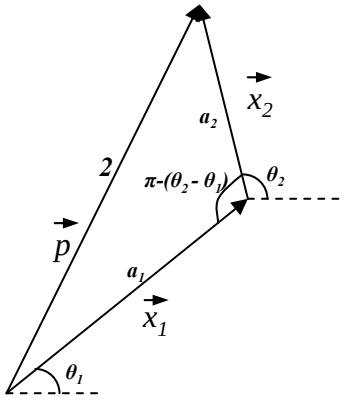

FIG. 2.6 – Représentation de Fresnel de x_1, x_2 et $x_1 + x_2$

Symétriquement, en adoptant la même procédure pour x_2, on obtient

$$\begin{cases} \frac{da_2}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)+\left[\frac{a_1\omega_1}{2\omega_2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1a_2^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi)\right. \\ \qquad\left.+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{(\omega_2-2\omega_1)a_2a_1^2}{8\omega_2}\right)\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \varphi_{v1}\left\{\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(\omega_2-2\omega_1)a_1^2}{8\omega_2}\sin(2\Delta\psi)+\left[\frac{a_1\omega_1}{2a_2\omega_2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{(2\omega_2-\omega_1)a_2a_1}{8\omega_2}\right]\sin(\Delta\psi)\right\}. \end{cases} \tag{2.32}$$

L'assemblage de (1.9), (2.31) et (2.32) donne à la fin le résultat énoncé dans le lemme 3.

Ce résultat est très important, car en parallèle de l'équation différentielle (2.5), il est possible de suivre l'évolution de l'amplitude et la phase de la sortie de (2.23) et de comparer les deux signaux qui sont mesurables en pratique. L'intégration et l'étude des solutions stationnaires de (2.23) sont très difficiles. Cependant, pour trouver les solutions stationnaires quand $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, on peut adopter les étapes suivantes.

Utilisons $p = x_1 + x_2$, si on additionne les deux équations de (2.5) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}+\omega^2(x_1+x_2) &= \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}(x_1+x_2)-\frac{\varphi_{v3}}{3}(x_1+x_2)^3\right) \\ \Rightarrow \frac{d^2p}{dt^2}+\omega^2 p &= \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}p-\frac{\varphi_{v3}}{3}p^3\right). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Il est facile de constater que (2.33) corresponde à une équation de Van der Pol généralisée. Or on sait bien que pour une seule équation de Van der Pol généralisée, l'approximation K-B donne une solution stationnaire [LB04, BM61, Hay64, Lan96, Lan00, BLV04] :

$$\begin{aligned} p &= 2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}\cos(\omega t+\theta). \\ \Rightarrow x_1+x_2 &= 2\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}\cos(\omega t+\theta), \end{aligned} \tag{2.34}$$

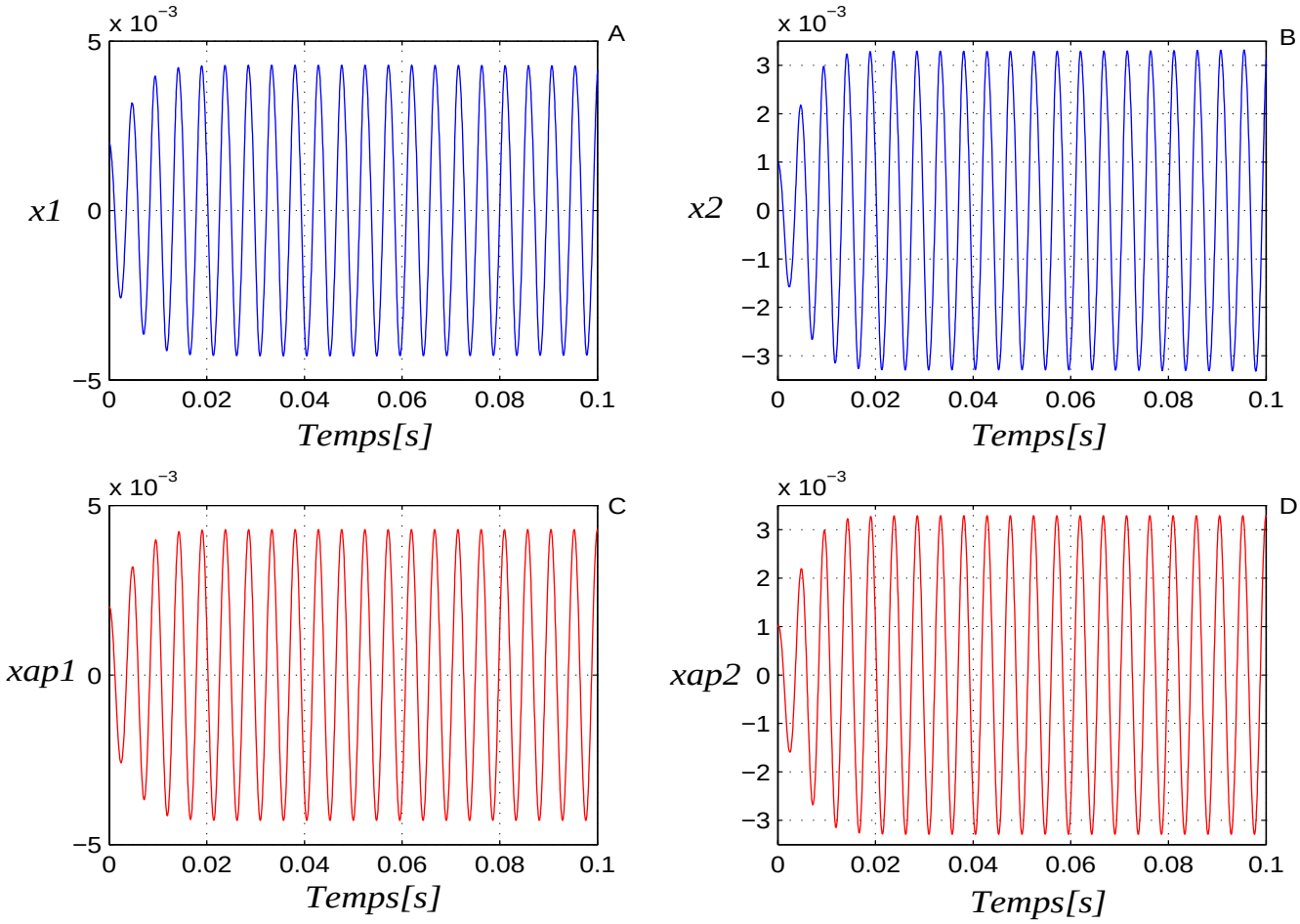

FIG. 2.7 – Simulation du système (2.5) et des approximations (2.22) et (2.23) avec $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi \times 210$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$, $a_1(0) = 2 \times 10^{-3}$, $a_2(0) = 10^{-3}$ et $\theta_1(0) = \theta_1(0) = 0$.

où θ est une phase arbitraire. On peut représenter ce résultat par la représentation de Fresnel dans la Figure 2.6. Par application du théorème de Pythagore on trouve la relation suivante :

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\Delta\psi) = 4\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}} \tag{2.35}$$

Notons que pour ce cas, il existe une infinité de points d'équilibre et que la convergence de l'amplitude et de la phase dépendent essentiellement de l'état initial de x_1 et x_2. Par conséquent, pour avoir le même résultat avec (2.5) et (2.23), il faut initialiser (2.23) avec les bonnes valeurs d'amplitude et de phase. La Figure 2.7 montre un test de simulation, où la partie supérieure montre les sorties simulées de (2.5) et la partie inférieure montre les sorties approximées par (2.22) et (2.23).

2.3.3 Synchronisation mutuelle avec des harmoniques multiples

Considérons le cas où la fréquence ω_1 est proche de $3\omega_2$. Dans ce cas, une interaction indirecte existe entre les deux résonateurs. Pour mesurer cette interaction, les termes avec les fréquences ω_1 et $3\omega_2$ sont utilisés pour l'approximation de x_1 , et les termes avec les fréquences ω_2 et $(2\omega_2 - \omega_1)$ sont utilisés pour l'approximation de x_2.

Lemme 4

Considérons le cas où les fréquences de résonance sont tel que

$$\omega_1 \approx 3\omega_2. \tag{2.36}$$

Les solutions approximées de (2.5) sont dans ce cas

$$x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \quad (i = 1, 2) \tag{2.37}$$

$$avec \begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \varphi_{v1}\left[\frac{a_1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{2}\right)\right) - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1}\cos(\Delta\psi)\right], \\ \frac{da_2}{dt} = \varphi_{v1}\left[\frac{a_2}{2}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right) - \frac{a_1 a_2^2}{8\omega_2}\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(\omega_1 - 2\omega_2)\cos(\Delta\psi)\right], \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \varphi_{v3}\frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1 a_1}\sin(\Delta\psi), \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -\varphi_{v3}\frac{a_1 a_2}{8\omega_2}(\omega_1 - 2\omega_2)\sin(\Delta\psi), \end{cases} \tag{2.38}$$

où

$$\Delta\psi = \psi_1 - 3\psi_2 = (\omega_1 - 3\omega_2)t + \theta_1 - 3\theta_2. \tag{2.39}$$

La preuve du lemme 4 est détaillée dans l'Annexe C.

Pour le système d'équations (2.38), il existe deux solutions d'équilibre stables. Une solution peut être calculée analytiquement

$$a_1 = 2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}} \quad \text{et} \quad a_2 = 0. \tag{2.40}$$

Le deuxième point qui concerne le phénomène de synchronisation a besoin d'une solution numérique de (2.38). En outre, on introduit la variable

$$\rho = \frac{\omega_1 - 3\omega_2}{\omega_2}. \tag{2.41}$$

Par exemple pour le cas où $\omega_1 = 3\omega_2 = 6\pi \times 210$ (correspond à $\rho = 0$), $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$ et $\varphi_{v1} = 1.24 \times 10^7$, la deuxième solution d'équilibre correspond à

$$a_1 = 2.25 \times 10^{-3}, \; a_2 = 8.09 \times 10^{-3} \; \text{ et } \; \Delta\psi = \pi. \tag{2.42}$$

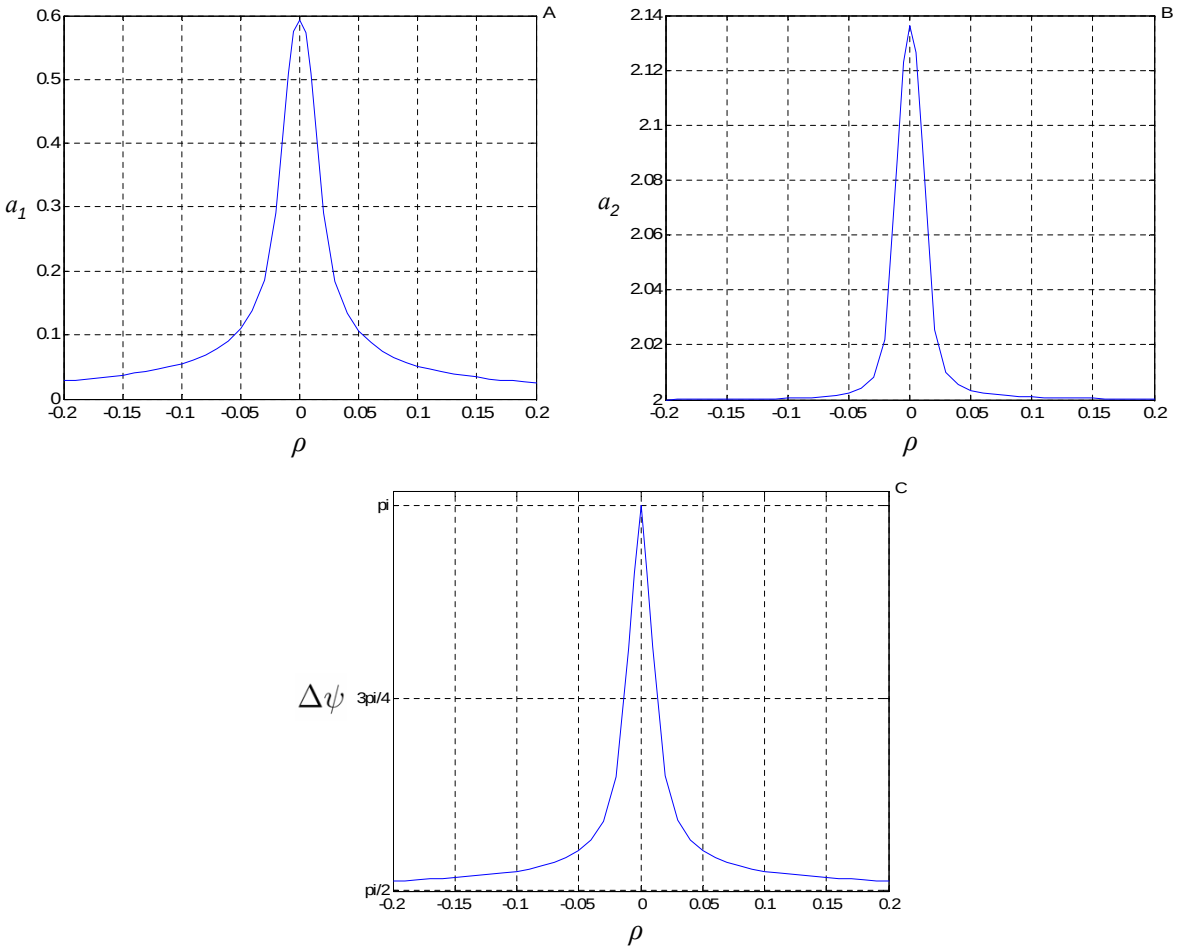

FIG. 2.8 – Description des valeurs de a_1, a_2 et $\Delta\psi$ en fonction de ρ.

Pour $\rho \neq 0$, les valeurs des amplitudes a_1 et a_2 de la deuxième solution d'équilibre stable dépendent inversement de $\mid \rho \mid$. La Figure 2.8 décrit les valeurs des amplitudes et du déphasage $\Delta\psi$ en fonction de ρ.

Il en résulte que si ω_1 est près de $3\omega_2$ (respectivement $\frac{\omega_2}{3}$), il est possible d'avoir deux phénomènes selon l'état initial. Dans le premier phénomène, le générateur avec la fréquence ω_1 est excité et l'autre générateur avec la fréquence ω_2 est éteint. Dans le deuxième phénomène, le système oscille dans un régime de synchronisation. On entend par le régime de "synchronisation", un régime où la fréquence des oscillations du deuxième générateur qui est égale à $\omega_2 + \dot{\theta}_2$, représente exactement un tiers de la fréquence des oscillations du premier générateur qui est égale à $\omega_1 + \dot{\theta}_1$. La Figure 2.9 présente un test de simulation où la partie supérieure montre les sorties simulées de (2.5) et la partie inférieure montre les sorties approximées par (2.37) et (2.38). D'une manière générale, la largeur du domaine de fonctionnement de ce régime dépend beaucoup de la grandeur des coefficients de couplage entre

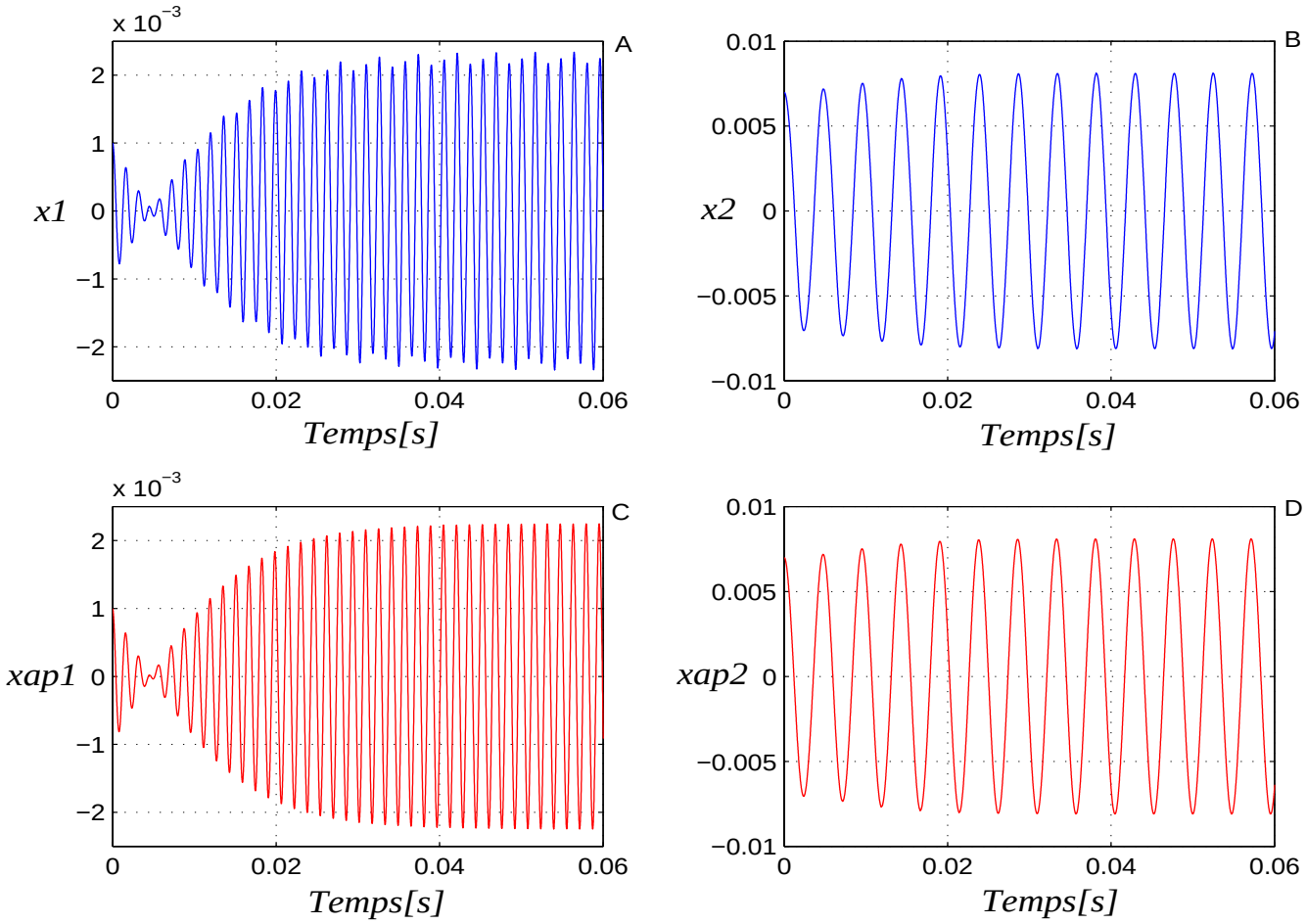

FIG. 2.9 – Test de simulation avec $\omega_1 = 3\omega_2 = 6\pi \times 210$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} =. 1.24 \times 10^7$, $a_1(0) = 10^{-3}$, $a_2(0) = 6 \times 10^{-3}$ et $\theta_1(0) = \theta_1(0) = 0$

les amplitudes et les phases dans (2.38).

2.4 Analyse des résultats

Nous avons identifié avec succès les situations suivantes (2.3.1, 2.3.2, 2.3.3). D'une manière générale, on peut dire que le système est caractérisé dans son état stationnaire soit par une seule fréquence d'oscillation (qui correspond à une des fréquences de résonance des oscillateurs linéaires) ou par des oscillations harmoniques simultanées stables (qui correspondent à des oscillations synchronisées des deux générateurs).

Ce phénomène d'une seule oscillation qui est connu par *le phénomène d'extinction compétitive*, se produit quand le rapport des fréquences de résonance des deux résonateurs est différent de 3, 1 et $\frac{1}{3}$, et

l'occurrence d'une des deux fréquences dépend des conditions initiales. Les oscillations simultanées des deux fréquences se produiront seulement quand $\omega_1 \approx 3\omega_2$ ou $\omega_2 \approx 3\omega_1$ et quand les conditions initiales sont suffisamment bonnes pour que les deux générateurs soient excités.

A ce niveau d'analyse, on peut dire que le modèle tel qu'il est présenté au début de ce chapitre (sans entrée externe) ne décrit pas le phénomène de coexistence de deux modes non-harmoniques, qui est observé en pratique. Au contraire, quand aucune des fréquences de résonance n'est un multiple entier de l'autre, il prédit un phénomène d'extinction compétitive qui signifie la présence d'une seule fréquence de résonance sur les sorties. Toutefois, il est important de noter que cette analyse n'est pas en contradiction avec les résultats d'analyse du modèle du Dunstan et Bitmead obtenus dans [DBS01, Dun03]. En effet, une analyse par la méthode de la première harmonique (légèrement étendue) a prédit l'existence de deux solutions de période d'équilibre. La première avec une fréquence de 210Hz (premier mode) est stable, et la deuxième avec une fréquence de 714Hz (deuxième mode) est instable. Cela conduit normalement à l'excitation du premier mode et à l'extinction du deuxième mode.

Contrairement à la prédiction par la première harmonique une analyse par la méthode de bifurcation prédit l'excitation du deuxième mode (714Hz), mais les perturbations introduites par le bruit peuvent induire un saut dans les deux sens avec le premier mode, créant de ce fait une coexistence. En d'autres termes, l'étude par la méthode de bifurcation suspecte une importante influence du bruit sur les instabilités de combustion, qui doit être analysée sur le modèle proposé dans ce chapitre.

2.5 Effets des bruits additifs sur les oscillations

Pour compléter l'analyse du modèle présenté dans ce chapitre, une étude sur l'influence du bruit doit être effectuée. Cette étude doit répondre à deux questions importantes :

- Qu'elle est l'influence du bruit sur le modèle ?
- Le bruit est-il responsable de la coexistence des deux modes non-harmoniques ?

Pour tenter de répondre a ces questions nous allons étudier ci-dessous l'influence d'un bruit sur le modèle, en considérant que le système sans bruit fonctionne dans le régime d'extinction compétitive.

Sans doute, le bruit en pratique n'est pas sinusoïdal, mais pour étudier l'influence des différentes fréquences du bruit sur les sorties et pour simplifier l'étude, on suppose que ce dernier est une excitation sinusoïdale de la forme

$$N = B_N \cos(\omega_N t). \tag{2.43}$$

La présence du bruit dans les signaux de pression et quantité de chaleur est belle et bien une réalité (voir Figure 1.7), qui se traduit au niveau du système par une excitation additive sur la quantité de chaleur [Dun03, Lie03]. Ce qui suggère d'ajouter (en amont des résonateurs linéaires) une excitation

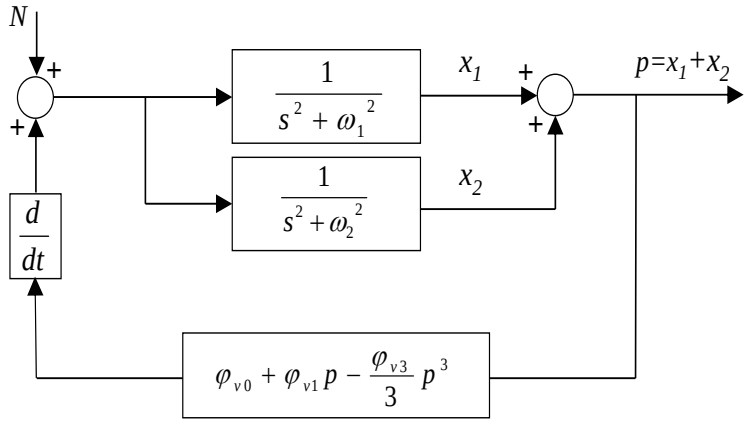

FIG. 2.10 – Représentation d'un bruit additif sur la quantité de chaleur dans le modèle

N sur le modèle proposé dans ce chapitre menant au système représenté par la Figure 2.10 et obéissant au système d'équations

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}p - \frac{\varphi_{v3}}{3}p^3\right) + B_N\cos(\omega_N t), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}p - \frac{\varphi_{v3}}{3}p^3\right) + B_N\cos(\omega_N t), \\ p = x_1 + x_2. \end{cases} \tag{2.44}$$

Par souci de simplification des équations on note

$$\begin{cases} \triangle_1 = (\omega_1^2 - \omega_N^2) \\ \triangle_2 = (\omega_2^2 - \omega_N^2) \end{cases} \tag{2.45}$$

ces paramètres servent aussi à quantifier les distances entre la fréquence d'excitation du bruit et les fréquences naturelles du système.

Les effets de l'excitation par le bruit sur le système peuvent conduire à deux fonctionnements possibles. Le premier est le fonctionnement asynchrone. Il se produit quand la fréquence de l'excitation n'est pas proche des fréquences naturelles du système. Le deuxième est le fonctionnement synchrone. Il se produit quand la fréquence de l'excitation est proche à une des fréquences naturelles du système. Selon le fonctionnement les réponses du système varient. Cela suggère une analyse au cas par cas effectuée ci-dessous.

2.5.1 Excitation asynchrone

Soit une excitation N avec une fréquence de valeur très différente des fréquences de résonance du système ($\omega_N \not\approx \omega_1$ et ω_2), et soient ω_1 et ω_2 vérifiant la condition 1 de la section 2.3. Dans ce cas, il

n'y a aucune interaction entre les trois fréquences. Pour résoudre (2.44), il convient alors de faire le changement de variable suivant

$$x_i = y_i + \frac{B_N}{\triangle_i}\cos(\omega_N t), \quad (i = 1, 2) \tag{2.46}$$

où le premier terme représente une composante approximable par la méthode K-B et le deuxième terme est la réponse à l'excitation N. En injectant le changement de variable (2.46) dans (2.44), on trouve que y_1 et y_2 satisfont les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d^2y_1}{dt^2} + \omega_1^2 y_1 = f(y_1, y_2, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, t), \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} + \omega_2^2 y_2 = f(y_1, y_2, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, t). \end{cases} \tag{2.47}$$

avec

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, t) = &\left[\varphi_{v1} - \varphi_{v3}\left(y_1 + y_2 + \left(\frac{B_N}{\triangle_1} + \frac{B_N}{\triangle_2}\right)\cos(\omega_N t)\right)^2\right]\left(\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt}\right. \\ &\left. - \left(\frac{B_N}{\triangle_1} + \frac{B_N}{\triangle_2}\right)\omega_N \sin(\omega_n t)\right), \end{aligned} \tag{2.48}$$

la nouveau système d'équations montre une influence indirecte de l'excitation sur les oscillations y_1 et y_2 des fréquences ω_1 et ω_2, respectivement.

Lemme 5

Sous les conditions

$$\omega_1 \not\approx \omega_2$$
$$\omega_N \not\approx \{\omega_1, \omega_2\}$$

Les solutions du système (2.47) peuvent être approximées par

$$y_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \quad (i = 1, 2) \tag{2.49}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \frac{a_1}{2}\left(\varphi_{v1} - \frac{\varphi_{v3}}{2}\left(\frac{B_N}{\triangle_1} + \frac{B_N}{\triangle_2}\right)^2 - \varphi_{v3}\left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{2}\right)\right), \\ \frac{da_2}{dt} = \frac{a_2}{2}\left(\varphi_{v1} - \frac{\varphi_{v3}}{2}\left(\frac{B_N}{\triangle_1} + \frac{B_N}{\triangle_2}\right)^2 - \varphi_{v3}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right), \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.50}$$

Preuve

Le lemme présente le résultat de l'approximation K-B. En effet, en remplaçant

$$\begin{cases} y_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \\ \frac{dy_i}{dt} = -a_i\omega_i \sin(\omega_i t + \theta_i), \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

dans (2.48), on obtient après simplifications :

$$\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2), t\right)\\
&= -\varphi_{v1}\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{2\varphi_{v1}}\left(\frac{B_N}{\triangle_1}+\frac{B_N}{\triangle_2}\right)^2-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1)\\
&\quad -\varphi_{v1}\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{2\varphi_{v1}}\left(\frac{B_N}{\triangle_1}+\frac{B_N}{\triangle_2}\right)^2-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\\
&\quad +\sum_{\omega_\ell\not\approx\omega_1\wedge\omega_2}^{r}\left(H_\ell\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell)+G_\ell\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)\right). \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

où ω_ℓ sont des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2 et ω_N. θ_ℓ sont des combinaisons linéaires de θ_1 et θ_n, et r est le nombre de combinaisons linéaires possibles de ω_1, ω_2 et ω_N différentes de ω_1 et ω_2. Par application de la règle (1.10), on trouve le résultat énonce dans le lemme 5.

En comparant par rapport au système sans excitation, on constate une modification sur la dynamique des amplitudes a_1 et a_2 des oscillations. La modification peut être comme le remplacement de φ_{v1} par $\varphi_{v1}-\frac{\varphi_{v3}}{2}\left(\frac{B_N}{\triangle_1}+\frac{B_N}{\triangle_2}\right)^2$ dans les équations des amplitudes.

Compte tenu des valeurs de paramètre rencontrées en pratiques, la modification apportée est très légère. Puisque les fréquences du système sont de l'ordre de 100Hz et la valeur de l'amplitude du bruit B_N ne peut pas excéder 1, alors la quantité $\left(\frac{B_N}{\triangle_1}+\frac{B_N}{\triangle_2}\right)$ est négligeable. Cela veut dire, qu'en dépit des faibles oscillations de fréquences ω_N (voir équation 2.46), l'effet d'une excitation asynchrone est négligeable et ne peut expliquer la coexistence de deux modes. La Figure 2.11 présente un test de simulation du modèle avec bruit où la valeur prise pour l'amplitude B_u est excessive et non-réaliste, mais suffisante pour que les oscillations avec la fréquence ω_N soient visibles.

2.5.2 Excitation synchrone

Soit une excitation N avec une fréquence ω_N proche d'une des deux fréquences ω_1 et ω_2 vérifiant la condition 1 de la section 2.3. On choisira entre autre dans ce paragraphe une fréquence d'excitation proche de celle du deuxième résonateur ($\omega_N \approx \omega_2$). Dans ce cas il n'y a aucune interaction entre l'excitation et le premier résonateur. Il en résulte que pour l'approximation de x_1, le bruit est une excitation asynchrone et aucune modification par rapport aux résultats obtenus dans le paragraphe précédent n'est nécessaire. Vu les considérations pratiques (décrit dans le paragraphe précédent), il est possible de négliger l'effet de l'excitation sur x_1. En d'autres termes on considère que x_1 possède l'expression suivante :

$$x_1 = a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1). \qquad (2.52)$$

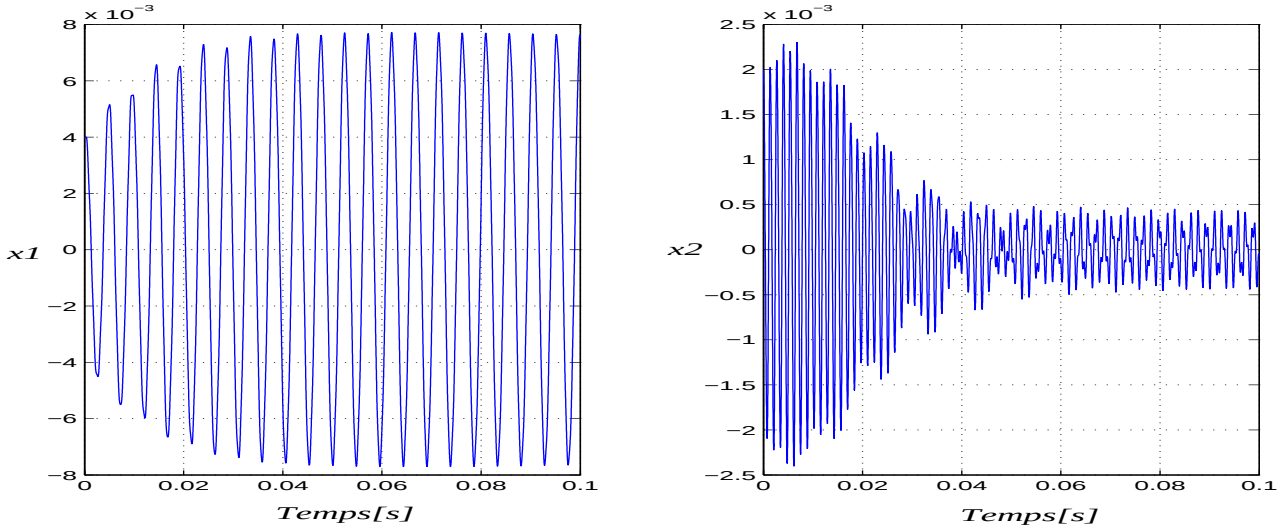

FIG. 2.11 – Simulation du système (2.44) avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\omega_N = 2\omega_2$, $B_N = 10^4$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$, $a_1(0) = 4 \times 10^{-3}$ et $a_2(0) = 2 \times 10^{-3}$.

Par contre, en ce qui concerne x_2 une interaction importante existe entre l'excitation et le deuxième résonateur due à la proximité des fréquences. Cette interaction conduit à une synchronisation du deuxième résonateur par l'excitation. En d'autre termes si la composante x_2 oscille, elle oscille avec une fréquence très proche de ω_N, ce qui nous permet d'approximer x_2 par l'expression suivante :

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_N t + \theta_2) \tag{2.53}$$

Lemme 6

Dans les conditions

$$\omega_1 \not\approx \omega_2$$

$$\omega_N \approx \omega_2$$

Les sorties du système (2.44) peuvent être approximées par

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ x_2 = a_2 \cos(\omega_N t + \theta_2) \end{cases} \tag{2.54}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \varphi_{v1} \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}} \left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{2}\right)\right), \\ \frac{da_2}{dt} = \varphi_{v1} \frac{a_2}{2} \left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}} \left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right) - \frac{B_N}{2\omega_N} \sin(\theta_2), \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{B_N}{2\omega_N a_2} \cos(\theta_2) + \frac{\triangle_2}{2\omega_N}. \end{cases} \tag{2.55}$$

Preuve

Pour approximer x_1, on applique la procédure présentée dans la section 2.3.1. On trouve le même résultat, ce qui n'est pas le cas pour x_2. En outre, l'étude doit se concentrer sur la deuxième équation de (2.44) régissant la sortie x_2. Dans le but d'appliquer l'approximation K-B une manipulation est nécessaire sur cette équation pour la rendre sous la forme (1.8). La manipulation consiste à soustraire $\triangle_2 x_2$ dans les deux côtes de l'équation, ce qui donne :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_N^2 x_2 = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}\left(x_1 + x_2\right) - \frac{\varphi_{v3}}{3}\left(x_1 + x_2\right)^3\right) - \triangle_2 x_2 + B_N \cos(\omega_N t), \tag{2.56}$$

qui par identification avec mise en forme (1.8) correspond à une fonction f_2 possédant l'expression suivante :

$$f_2(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, t) = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v1} - \varphi_{v3}\left(x_1 + x_2\right)^2\right)\left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}\right) - \triangle_2 x_2 + B_N \cos(\omega_N t). \tag{2.57}$$

En remplaçant

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), & \frac{dx_1}{dt} = -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ x_2 = a_2 \cos(\omega_N t + \theta_2), & \frac{dx_2}{dt} = -\omega_N a_2 \sin(\omega_N t + \theta_2) \end{cases} \tag{2.58}$$

dans (2.57), on obtient

$$\begin{aligned} & f_2\left(a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2\cos(\omega_N t + \theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t + \theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_N t + \theta_2)\right) \\ &= -\varphi_{v1}\omega_N a_2\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_N t + \theta_2) + \sum_{\omega_\ell \not\approx \omega_2}^{r}\left(H_\ell \sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_\ell \cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)\right) \\ &\quad + B_N \cos(\omega_N t + \theta_2 - \theta_2) - \triangle_2 a_2 \cos(\omega_N t + \theta_2) \\ &= -\varphi_{v1}\omega_N a_2\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_N t + \theta_2) + \sum_{\omega_\ell \not\approx \omega_N}^{r}\left(H_\ell \sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_\ell \cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)\right) \\ &\quad + B_N\left[\cos(\omega_N t + \theta_2)\cos(\theta_2) + \sin(\omega_N t + \theta_2)\sin(\theta_2)\right] - \triangle_2 a_2 \cos(\omega_N t + \theta_2). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Par application de la règle (1.10) sur (2.59) on trouve

$$\begin{cases} \frac{da_2}{dt} = \varphi_{v1}\frac{a_2}{2}\left(1 - \frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{2}\right)\right) - \frac{B_N}{2\omega_N}\sin(\theta_2), \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{B_N}{2\omega_N a_2}\cos(\theta_2) + \frac{\triangle_2}{2\omega_N}. \end{cases} \tag{2.60}$$

En complétant ce système d'équations avec le système d'équations (2.15) (obtenu pour x_1), on en déduit le résultat des approximations énoncé dans le lemme 6.

En comparant avec les approximations obtenues du modèle sans excitation du bruit, on observe qu'un couplage entre l'amplitude a_2 et la phase θ_2 existe. Le couplage signifie un changement dans les valeurs des solutions d'équilibre, notamment en ce qui concerne l'amplitude des oscillations du second résonateur. Vu l'équation différentielle régissant θ_2, on peut dire que la valeur stationnaire de

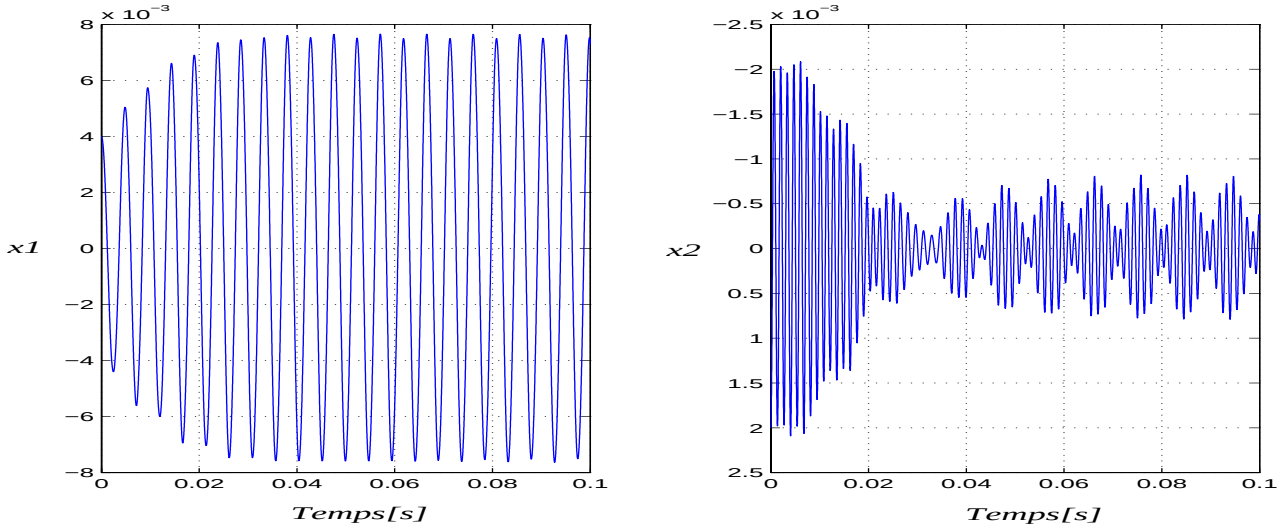

FIG. 2.12 – Simulation du système (2.44) avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = \omega_N = 2\pi \times 740$, $B_u = 400$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$, $a_1(0) = 4 \times 10^{-3}$ et $a_2(0) = 2 \times 10^{-3}$.

a_2 ne peut pas être nulle. Donc, l'existence d'un bruit ayant une fréquence proche de celle d'un résonateur implique que ce dernier ne peut jamais être éteint et oscille avec une amplitude très dépendante de l'amplitude et la fréquence de l'excitation.

D'un autre côté, tenant compte des valeurs de paramètres rencontrés en pratique, la fréquence ω_N est de l'ordre de 740Hz, et donc la quantité $\frac{B_N}{2\omega_N}$ est très faible. Il en résulte que par rapport au système sans excitation, la modification sur les amplitudes stationnaires est très légère. Cela nous permet d'approcher les amplitudes de la première solution d'équilibre par (2.21) (quand x_1 est éteint et x_2 est excité). La deuxième solution peut être calculée approximativement de (2.55) (en négligeant a_2^2 et par approximation avec (2.20)), ce qui nous donne :

$$a_1 \approx 2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}\,,\; a_2 \approx \frac{B_N}{\omega_N \varphi_{v1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\triangle_2}{\omega_N \varphi_{v1}}\right)^2}} \text{ et } \theta_2 \approx -\arctan\left(\frac{\omega_N \varphi_{v1}}{\triangle_2}\right). \tag{2.61}$$

avec θ_1 quelconque.

Il en résulte qu'à travers une excitation de bruit synchrone, les oscillations des deux modes peuvent coexister, mais avec une amplitude très négligeable pour un des deux modes, qui est de ce fait non-comparable à l'amplitude des oscillations observées en pratique. La Figure 2.12 présente un test de simulation du modèle avec bruit synchrone où la valeur prise pour l'amplitude B_u est excessive et non-réaliste, mais suffisante pour que les oscillations avec la fréquence ω_N soient visibles.

2.6 Conclusion

Le but de ce chapitre a été de prouver qu'il est possible d'aller plus loin dans l'analyse du modèle des instabilités de combustion proposé dans [Dun03], sous réserve de simplification du modèle (suppression du retard). Les deux équations de Van der Pol généralisées et couplées considérées dans ce chapitre comme constituant le coeur du modèle de [Dun03] peuvent être un choix efficace pour approcher le modèle des instabilités de combustion dans la mesure où un seul mode d'oscillation est excité.

La méthode d'analyse est basée sur l'utilisation de l'approche de Krylov-Bogoliubov pour les systèmes oscillants. En effet, cette approche nous a permis de surmonter une des difficultés liées au modèle des instabilités de combustion, c-à-d la présence de deux résonateurs couplés. Les tests de simulation ont illustré la précision de l'approximation de Krylov-Bogoliubov.

L'analyse des effets d'un bruit additif appliqué sur la quantité de chaleur a montré que les réponses du modèle sont sensibles à la nature du bruit. Il a été démontré que le bruit peut induire une coexistence des oscillations non-harmoniques. Cependant, l'amplitude de l'une des oscillations est très faible, ce qui ne corrobore pas les observations expérimentales. On peut conclure que le bruit ne peut pas expliquer la présence dans certaines conditions d'oscillations simultanées non-harmoniques.

Face aux inconvénients du modèle proposé dans ce chapitre, un autre modèle plus complet doit être envisagé. Le modèle doit expliquer d'une manière réaliste la présence simultanée des oscillations de deux modes non-harmoniques. La voie qui semble plus attractive est de ne pas faire abstraction de la présence du retard pur qui existe pratiquement dans la boucle du retour et qui est présent dans le modèle de [Dun03].

Ce chapitre reprend en partie les résultats présentés dans (Annexe D et E) :

F. Bouziani, I.D. Landau, R.R. Bitmead, A. Voda-Besançon, *An analytically tractable model for combustion instability*, Publié dans 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Seville, Décembre 2005.

I.D. Landau, F. Bouziani, R.R. Bitmead, *Un modèle de commande pour le contrôle des instabilités de combustion*, Publié dans : Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bordeaux, Juin 2006, et dans Revue de Sciences et Technologie de l'Automatique e-STA.

Chapitre 3

Étude du modèle 2 : modèle complété par un retard pur et un filtre passe bas

3.1 Introduction

Le modèle proposé dans le chapitre 2 a été analysé avec succès par la méthode K-B. Cependant, ce modèle n'inclut pas le bloc dérivée-retard et le filtre passe bas existant dans le modèle de Dunstan et Bitmead (voir Figure 1.8). En dépit des résultats intéressants obtenus concernant l'excitation ou l'extinction des oscillations dans le système, le modèle n'était pas capable d'expliquer la présence simultanée des deux modes oscillatoires non-harmoniques. Le présent chapitre est la continuité du travail de modélisation entrepris dans le chapitre 2. Le modèle basé sur les deux équations de Van der Pol généralisées et couplées, sera complété pour tenir compte des autres caractéristiques du modèle Dunstan et Bitmead qui précédemment n'ont pas été pris en compte. L'ensemble de ces caractéristiques se résume sur quatre points importants :

1). L'existence du bloc dérivée-retard dans la boucle de retour du modèle .

2). La nature négative de la tangente de la caractéristique non-linéaire statique (voir la Figure 2.1).

3). La modélisation des dynamiques non-dominantes ayant des effets indirects sur les oscillations.

4). L'existence de faibles amortissements dans les résonateurs linéaires.

Le premier aspect nous conduit à compléter la boucle du retour du modèle par un bloc dérivée-retard. Cela pourrait expliquer la coexistence de deux modes oscillatoires non-harmoniques. Le deuxième aspect suggère de remplacer dans le modèle la caractéristique statique $\varphi_{v0} + \varphi_{v1}p - \frac{\varphi_{v3}}{3}p^3$ ayant une tangente positive par $\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3$, où φ_1 et φ_3 sont des constantes arbitraires strictement négatives et φ_0 une constante arbitraire. Les dynamiques non-dominantes peuvent introduire un déphasage dans les oscillations qui peut influer d'une manière indirecte dans le comportement du système. Ces

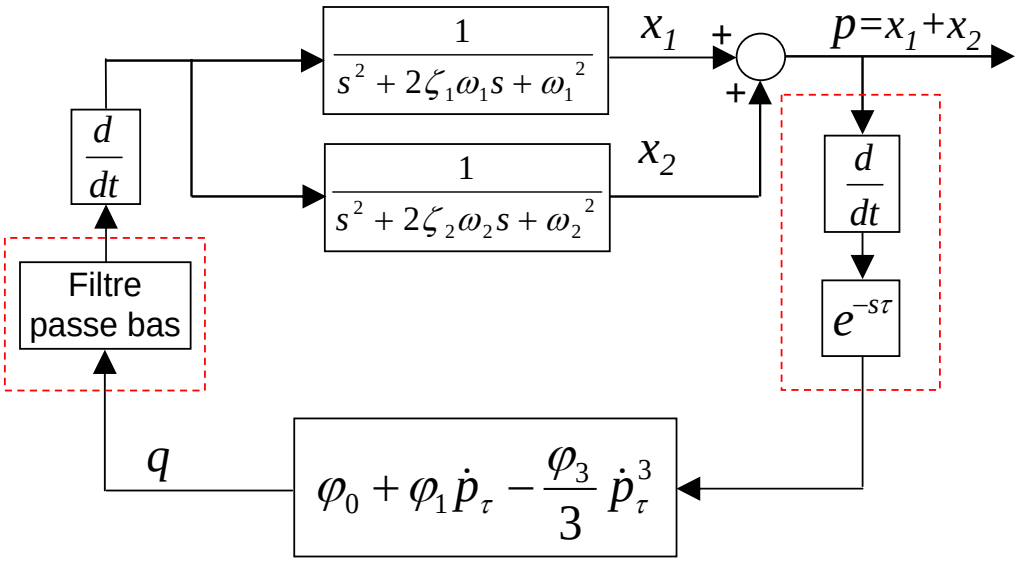

FIG. 3.1 – Modèle proposé pour les instabilités de combustion

dynamiques peuvent être modélisées par un filtre passe bas. Alors le troisième aspect peut être traité en introduisant un filtre passe bas dans le modèle. On choisira d'introduire ce filtre dans la boucle de retour (comme dans le modèle Dunstan et Bitmead). Les valeurs des amplitudes d'oscillation sur la quantité de chaleur sont étroitement liées aux valeurs des coefficients d'amortissement des résonateur linéaires (voir plus loin pour des explications). Il est donc important de prendre en compte le dernier aspect en augmentant les fonctions de transfert du premier et du deuxième résonateurs par des termes d'amortissement linéaire de coefficients ζ_1 et ζ_2, respectivement. Les modifications nous conduisent au modèle présenté par la Figure 3.1 et au système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt} LPF\left\{\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right\}, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt} LPF\left\{\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right\}, \\ p = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

où τ est le temps de transport de l'injecteur à la surface de la flamme, LPF est l'opération de transfert du filtre passe bas et $\dot{p}_\tau$ est la sortie du bloc dérivée-retard.

Ce modèle se rapproche plus du modèle de Dunstan et Bitmead. La différence entre le modèle proposé et le modèle de Dunstan et Bitmead réside principalement dans deux aspects. Le premier est que dans le modèle proposé une expression analytique de la non-linéarité statique a été introduite (approximation du graphe de la caractéristique non-linéaire identifiée dans [Dun03]). Le deuxième est

que dans le modèle proposé les fréquences naturelles des deux résonateurs sont quelconques (l'une n'est pas obligatoirement le multiple de l'autre).

Dans ce chapitre, le modèle (3.1) va être analysé en détail par la méthode K-B améliorée. Le but de cette analyse est de savoir si le modèle peut décrire les phénomènes observés en pratique, notamment le phénomène de coexistence de deux modes oscillatoires non-harmoniques. Le rôle de chaque partie du modèle va être étudié. Une attention particulière sera accordée au rôle du retard dans le modèle. Les résultats de l'analyse seront confrontés aux observations pratiques.

3.2 Mise en forme des équations

Le nouveau modèle est plus complexe et nécessite d'être analysé par une méthode efficace d'approximation telle que la méthode K-B. La présence du retard et du filtre passe bas pose quelques difficultés dans les calculs des approximations. Ces difficultés vont être surmontées par l'introduction de quelques hypothèses réalistes, efficaces dans le régime stationnaire des oscillations. En conséquence, les approximations seront plus performantes en régime stationnaire. Considérons le système d'équations (3.1) et la forme (1.8) (avec $\epsilon = 1$), par identification on trouve les fonctions suivante :

$$f_i(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}) = \frac{d}{dt} LPF\left\{\varphi_0 + \varphi_1 \dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right\} - 2\zeta_i\omega_i\dot{x}_i, \quad (i = 1, 2). \tag{3.2}$$

Pour obtenir une expression de f_1 et de f_2 sous la forme (1.12), le bloc du filtre passe bas doit être approximé. En conséquence, on considère l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1
Le filtre passe bas est linéaire avec une dynamique beaucoup plus rapide que la dynamique d'évolution des amplitudes et des phases.

La première utilité de l'Hypothèse 1 est que, pour une entrée présentée comme la somme de termes sinusoïdaux (comme la forme (1.12)), la sortie va être pratiquement égale à la somme des sorties de chaque terme. La deuxième utilité est que, pour une entrée sinusoïdale avec une amplitude et une phase lentement variante dans le temps, le temps de réponse du filtre va être négligé, et les amplitudes et les phases vont être considérées comme constantes. En d'autres termes pour une entrée sinusoïdale donnée, les effets du filtre seront un déphasage et un gain dépendant de la fréquence de l'entrée. Cela peut être justifié par la nature non-dominante du filtre. Comme les amplitudes et les phases obtenues par l'approximation K-B sont lentement variantes dans le temps (la méthode K-B repose sur ce principe), l'Hypothèse 1 nous permet d'écrire la propriété suivante :

$$LPF\left[\Gamma\left(a_1, a_2\right)\cos\left(\omega t + \Theta\left(\theta_1, \theta_2\right)\right)\right] = G(\omega)\Gamma\left(a_1, a_2\right)\cos\left(\omega t + \Theta\left(\theta_1, \theta_2\right) - \phi(\omega)\right), \tag{3.3}$$

où $\Gamma(a_1, a_2)$ représente une fonction polynômial de a_1 et a_2, $\Theta(\theta_1, \theta_2)$ est une combinaison linéaire de θ_1 et θ_2, ω est une fréquence quelconque, et $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ sont respectivement le gain et le déphasage introduits par le filtre à la fréquence ω. Pour alléger les équations, on propose les notations suivantes :

$$\psi_{k_1k_2} = (k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t + (k_1\theta_{1\tau} + k_2\theta_{2\tau}), \tag{3.4}$$

$$A_{k_1k_2} = \omega_1^{|k_1|}\omega_2^{|k_2|}G(k_1\omega_1 + k_2\omega_2), \tag{3.5}$$

$$\chi_{k_1k_2} = \frac{(k_1+k_2)\pi}{2} - (k_1\omega_1 + k_2\omega_2)\tau - \phi(k_1\omega_1 + k_2\omega_2). \tag{3.6}$$

où $\theta_{1\tau}$ et $\theta_{2\tau}$ sont les phases retardées par le retard τ. La suite de l'analyse montrera que ces notations ont d'importantes significations. En effet, l'expression (3.4) correspond aux fréquences présentes dans les sorties et les expressions (3.5) et (3.6) représentant respectivement le gain et le déphasage introduits dans le système par le bloc dérivée-retard et le filtre pour la fréquence $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$.

Lemme 7

Sous l'Hypothèse 1, on obtient pour les fonctions (3.2) le développement suivant

$$\begin{aligned}
&f_i\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right) = -\varphi_1\omega_1 A_{10}a_{1\tau}\Big[\\
&1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_{1\tau})^2}{4}+\frac{(\omega_2 a_{2\tau})^2}{2}\right)\Big]\sin(\psi_{10}+\chi_{10}) - \varphi_1\omega_2 A_{01}a_{2\tau}\Big[1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_{2\tau})^2}{4}+\frac{(\omega_1 a_{1\tau})^2}{2}\right)\\
&\Big]\sin(\psi_{01}+\chi_{01}) + \varphi_3\Big\{\frac{\omega_1 A_{30}a_{1\tau}^3}{4}\sin\left(\psi_{30}+\chi_{30}\right) + \frac{(2\omega_1+\omega_2)A_{21}a_{1\tau}^2a_{2\tau}}{4}\sin\left(\psi_{21}+\chi_{21}\right)\\
&+\frac{(2\omega_1-\omega_2)A_{2-1}a_{1\tau}^2a_{2\tau}}{4}\sin\left(\psi_{2-1}+\chi_{2-1}\right) + \frac{(2\omega_2-\omega_1)A_{-12}a_{2\tau}^2a_{1\tau}}{4}\sin\left(\psi_{-12}+\chi_{-12}\right)\\
&+\frac{(\omega_1+2\omega_2)A_{12}a_{1\tau}a_{2\tau}^2}{4}\sin\left(\psi_{12}+\chi_{12}\right) + \frac{\omega_2 A_{03}a_{2\tau}^3}{4}\sin\left(\psi_{03}+\chi_{03}\right)\Big\} + 2\zeta_i\omega_i^2 a_i\sin\left(\omega_i t+\theta_i\right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Preuve

En remplaçant

$$\dot{x}_i = -a_i\omega_i\sin(\omega_i t+\theta_i), \quad (i=1,2)$$

dans $\dot{p}$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\dot{p} = -\omega_1 a_1\sin(\omega_1 t+\theta_1) - \omega_2 a_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\\
&\Rightarrow \dot{p} = \omega_1 a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1+\frac{\pi}{2}) + \omega_2 a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2+\frac{\pi}{2}),
\end{aligned}$$

qui après l'introduction de l'effet du retard, prend la forme

$$\dot{p}_\tau = \omega_1 a_{1\tau}\cos(\omega_1 t+\theta_{1\tau}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_1\tau) + \omega_2 a_{2\tau}\cos(\omega_2 t+\theta_{2\tau}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_2\tau), \tag{3.8}$$

où $a_{1\tau}$ et $a_{2\tau}$ sont les amplitudes retardées par le retard τ (les phases sont citées plus haut). En remplaçant (3.8) dans la fonction non-linéaire statique (qui correspond aussi à la quantité de chaleur q), en simplifiant par les relations trigonométriques et en utilisant la notation (3.4), on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
&\varphi_0+\varphi_1\dot{p}_\tau-\tfrac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3=\varphi_0+\varphi_1\Big\{\omega_1a_{1\tau}\Big[1-\tfrac{\varphi_3}{\varphi_1}\Big(\tfrac{(\omega_1a_{1\tau})^2}{4}+\tfrac{(\omega_2a_{2\tau})^2}{2}\Big)\Big]\cos(\psi_{10}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_1\tau)\\
&+\omega_2a_{2\tau}\Big[1-\tfrac{\varphi_3}{\varphi_1}\Big(\tfrac{(\omega_2a_{2\tau})^2}{4}+\tfrac{(\omega_1a_{1\tau})^2}{2}\Big)\Big]\cos(\psi_{01}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_2\tau)\Big\}-\varphi_3\Big\{\tfrac{(\omega_1a_{1\tau})^3}{12}\cos\Big(\psi_{30}+\tfrac{3\pi}{2}-3\omega_1\tau\Big)\\
&+\tfrac{(\omega_2a_{2\tau})^3}{12}\cos\Big(\psi_{03}+\tfrac{3\pi}{2}-3\omega_2\tau\Big)+\tfrac{\omega_1^2\omega_2a_{1\tau}^2a_{2\tau}}{4}\cos\Big(\psi_{21}+\tfrac{3\pi}{2}-(2\omega_1+\omega_2)\tau\Big)\\
&+\tfrac{\omega_1\omega_2^2a_{1\tau}a_{2\tau}^2}{4}\cos\Big(\psi_{12}+\tfrac{3\pi}{2}-(2\omega_2+\omega_1)\tau\Big)+\tfrac{\omega_1^2\omega_2a_{1\tau}^2a_{2\tau}}{4}\cos\Big(\psi_{2-1}+\tfrac{\pi}{2}-(2\omega_1-\omega_2)\tau\Big)\\
&+\tfrac{\omega_1\omega_2^2a_{2\tau}^2a_{1\tau}}{4}\cos\Big(\psi_{-12}+\tfrac{\pi}{2}-(2\omega_2-\omega_1)\tau\Big)\Big\},
\end{aligned}$$

Après application du filtre linéaire LPF (avec la propriété (3.3)), dérivation, introduction du terme d'amortissement linéaire et utilisation des notations (3.5) et (3.6), cette expression devient le résultat écrit dans le lemme 7.

De même que l'analyse effectuée dans le chapitre 2, en examinant la fonction (3.7), on constate l'existence de l'ensemble des fréquences

$$W=\{\omega_1,\omega_2,3\omega_1,3\omega_2,2\omega_1+\omega_2,\omega_1+2\omega_2,2\omega_1-\omega_2,2\omega_2-\omega_1\}\,, \tag{3.9}$$

qui nous permet d'identifier les différentes situations liées à la proximité des fréquences de résonance. En conséquence, on distingue les trois situations suivantes :

1). $\omega_1\not\approx\Big\{\omega_2,3\omega_2,\frac{\omega_2}{3}\Big\}$,

2). $\omega_1\approx3\omega_2$ (respectivement $\omega_2\approx3\omega_1$),

3). $\omega_1\approx\omega_2$.

Les résultats obtenus précédemment dans le chapitre 2 permettent de supposer, que l'analyse du système dans les conditions 2 et 3 donnera des phénomènes de synchronisation entre les deux modes. D'un autre côté, les résultats expérimentaux (voir [Dun03]) montrent que les deux modes, avec des fréquences de l'ordre de 210Hz et 740Hz, oscillent sans synchronisation. Pour cette raison, l'étude dans ce chapitre va se concentrer principalement sur des fréquences respectant la condition 1. Ceci dit, une brève analyse sur le cas où les fréquences respectent la condition 2, sera effectuée à la fin de ce chapitre.

3.3 Analyse du modèle par la méthode de Krylov-Bogoliubov

Pour améliorer les approximations, on utilisera la méthode K-B améliorée. Par rapport à la méthode classique, la méthode améliorée va nous permettre d'estimer les amplitudes des harmoniques

multiples (avec des fréquences représentant des combinaisons linéaires de ω_1 et ω_2). Dans le but d'approximer le retard et d'aller plus loin dans l'analyse on considère l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2

Pour un retard pur τ faible, les quantités $\mid a_i - a_{i\tau} \mid$ et $\mid \theta_i - \theta_{i\tau} \mid$ ($i = 1, 2$) peuvent être négligées.

Cette hypothèse peut être justifiée par la nature des amplitudes et des phases obtenus par la méthode K-B, qui ont des dynamiques varient lentement dans le temps. A titre indicatif, une hypothèse similaire a été utilisée dans [BAKJ04] pour la modélisation des instabilités. Les conséquences de cette hypothèse vont être largement discutées dans ce chapitre.

Lemme 8

Considérons la condition 1, le résultat (3.7) et l'Hypothèse 2. Dans ce cas l'application de la méthode K-B améliorée donne :

$$x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i) + \nu_i, \quad (i = 1, 2) \tag{3.10}$$

avec

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \left(\frac{\varphi_1 A_{10}\cos(\chi_{10})}{2} - \zeta_1\omega_1\right) a_1 - \frac{\varphi_3 A_{10}\cos(\chi_{10})}{2} a_1 \left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right), \\ \dot{a}_2 = \left(\frac{\varphi_1 A_{01}\cos(\chi_{01})}{2} - \zeta_2\omega_2\right) a_2 - \frac{\varphi_3 A_{01}\cos(\chi_{01})}{2} a_2 \left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right), \\ \dot{\theta}_1 = \frac{\varphi_1 A_{10}\sin(\chi_{10})}{2}\left(1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right)\right), \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\varphi_1 A_{01}\sin(\chi_{01})}{2}\left(1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right)\right), \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \nu_i = & -\frac{\varphi_1 a_{3-i}\omega_{3-i}A_{i-1\ 2-i}}{\omega_i^2 - \omega_{3-i}^2}\left(1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_{3-i}a_{3-i})^2}{4} + \frac{(\omega_i a_i)^2}{2}\right)\right)\sin(\psi_{i-1\ 2-i} + \chi_{i-1\ 2-i}) + \varphi_3\Big\{ \\ & + \frac{\omega_1 A_{30} a_1^3}{4(\omega_i^2 - 9\omega_1^2)}\sin(\psi_{30} + \chi_{30}) + \frac{\omega_2 A_{03} a_2^3}{4(\omega_i^2 - 9\omega_2^2)}\sin(\psi_{03} + \chi_{03}) + \frac{(2\omega_1+\omega_2)A_{21}a_1^2 a_2}{4(\omega_i^2 - (2\omega_1+\omega_2)^2)}\sin(\psi_{21} + \chi_{21}) \\ & + \frac{(\omega_1+2\omega_2)A_{12}a_1 a_2^2}{4(\omega_i^2 - (2\omega_2+\omega_1)^2)}\sin(\psi_{12} + \chi_{12}) + \frac{(2\omega_1-\omega_2)A_{2-1}a_1^2 a_2}{4(\omega_i^2 - (2\omega_1-\omega_2)^2)}\sin(\psi_{2-1} + \chi_{2-1}) \\ & + \frac{(2\omega_2-\omega_1)A_{-12}a_2^2 a_1}{4(\omega_i^2 - (2\omega_2-\omega_1)^2)}\sin(\psi_{-12} + \chi_{-12})\Big\}, \ (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Preuve

l'Hypothèse 2 nous permet de faire les approximations suivantes :

$$\begin{cases} a_{i\tau} = a_i - (a_i - a_{i\tau}) \approx a_i, \\ \theta_{i\tau} = \theta_i - (\theta_i - \theta_{i\tau}) \approx \theta_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2) \tag{3.12}$$

En utilisant cette approximation dans la fonction (3.7), en mettant la fonction sous la forme (1.12) suivant la condition 1 et en appliquant les règles (1.10) et (1.14), on trouve aisément les approximations annoncées dans le lemme.

Dans le but d'alléger les expressions des calculs qui vont suivre, on propose les notations suivantes :

$$\begin{cases} \eta_{11} = \varphi_1 A_{10}\cos(\chi_{10}) - 2\zeta_1\omega_1, & \eta_{13} = \varphi_3 A_{10}\cos(\chi_{10}), \\ \eta_{21} = \varphi_1 A_{01}\cos(\chi_{01}) - 2\zeta_2\omega_2, & \eta_{23} = \varphi_3 A_{01}\cos(\chi_{01}). \end{cases} \tag{3.13}$$

ces notations ont un sens physique important. En effet si on utilise (3.13) dans les équations différentielles des amplitudes (3.11), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \frac{\eta_{11}}{2} a_1 - \frac{\eta_{13}}{2} a_1 \left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2} \right), \\ \dot{a}_2 = \frac{\eta_{21}}{2} a_2 - \frac{\eta_{23}}{2} a_2 \left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2} \right). \end{cases}$$

Si on compare le coté droit de ces équations au coté droit des équations (2.11) établies pour le modèle basé sur deux équations de Van der Pol couplées et généralisées, on observe clairement que les amplitudes a_1 et a_2 ont été respectivement remplacées par $\omega_1 a_1$ et $\omega_2 a_2$ et que les constantes φ_{v1} et φ_{v3} ont été respectivement remplacées par : $\frac{\eta_{11}}{\omega_1}$ et $\frac{\eta_{13}}{\omega_1}$ pour le premier résonateur et par $\frac{\eta_{21}}{\omega_2}$ et $\frac{\eta_{23}}{\omega_2}$ pour le deuxième résonateur. Cela revient à dire que dans le modèle proposé dans ce chapitre, les constantes $\frac{\eta_{11}}{\omega_1}$ et $\frac{\eta_{13}}{\omega_1}$ représentent respectivement la tangente et l'effet de saturation de la caractéristique statique effectives pour le premier résonateur, et les constantes $\frac{\eta_{21}}{\omega_2}$ et $\frac{\eta_{23}}{\omega_2}$ représentent respectivement la tangente et l'effet de saturation de la caractéristique statique effectives pour le deuxième résonateur. En conclusion, pour l'évolution des amplitudes la présence du bloc dérivée-retard et filtre passe bas du schéma 3.1 peut se ramener à un système de deux équations de Van der Pol couplées mais avec des paramètres différents (voir Figure 3.2).

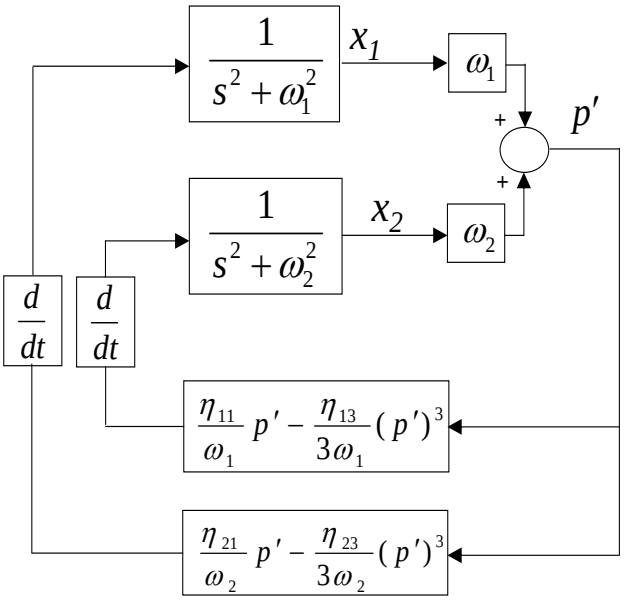

FIG. 3.2 – Schéma bloc équivalant du modèle (3.1)

A partir du système d'équations (3.11), on peut constater qu'il existe un couplage entre les amplitudes a_1 et a_2, qui ne sont pas couplées avec les phases θ_1 et θ_1 (l'inverse est faux). Ainsi, l'excitation ou l'extinction des oscillations dans le système dépendent uniquement de la dynamique des amplitudes. La détermination analytique des solutions d'équilibre donne les quatre points suivants (on

supposera que les paramètres η_{13} et η_{23} sont non nuls et que les expressions $\frac{2\eta_{11}}{3\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{3\eta_{23}}$ et $\frac{2\eta_{21}}{3\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{3\eta_{13}}$ sont positives) :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0, \tag{3.14}$$

$$a_1 = \frac{2}{\omega_1}\sqrt{\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}} \text{ et } a_2 = 0, \tag{3.15}$$

$$a_1 = 0 \text{ et } a_2 = \frac{2}{\omega_2}\sqrt{\frac{\eta_{21}}{\eta_{23}}}, \tag{3.16}$$

$$a_1 = \frac{2}{\omega_1}\sqrt{\frac{2\eta_{21}}{3\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{3\eta_{13}}} \text{ et } a_2 = \frac{2}{\omega_2}\sqrt{\frac{2\eta_{11}}{3\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{3\eta_{23}}}. \tag{3.17}$$

La stabilité de chaque solution d'équilibre conduit à un régime de fonctionnement particulier. En conséquence, on distingue cinq régimes de fonctionnement, qui vont être étudiés :

1). Système asymptotiquement stable à l'origine

2). Deux générateurs avec extinction compétitive

3). Un seul générateur de Van der Pol

4). Auto-oscillations simultanées non-harmoniques (sans synchronisation)

5). Instabilité totale

Pour l'étude de la stabilité, on peut appliquer la méthode indirecte de Lyapunov, qui consiste à utiliser la propriété de stabilité du système linéarisé autour du point d'équilibre. Le calcul de la matrice générale du système linéarisé donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\eta_{11}}{2} - \frac{\eta_{13}}{2}\left(\frac{3(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right) & -\frac{\eta_{13}\omega_2^2}{2}a_1 a_2 \\ -\frac{\eta_{23}\omega_1^2}{2}a_1 a_2 & \frac{\eta_{21}}{2} - \frac{\eta_{23}}{2}\left(\frac{3(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

qui correspond à un polynôme caractéristique du deuxième ordre, dont l'expression est la suivante :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\Big\{\eta_{11} + \eta_{21} - \eta_{13}\Big(\frac{3(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\Big) - \eta_{23}\Big(\frac{3(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\Big)\Big\}\lambda + \frac{1}{4}\Big[\eta_{11} - \eta_{13}\Big(\frac{3(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\Big)\Big]\Big[\eta_{21} - \eta_{23}\Big(\frac{3(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\Big)\Big] - \frac{\eta_{13}\eta_{23}(\omega_1\omega_2 a_1 a_2)^2}{4}, \tag{3.19}$$

Le polynôme caractéristique obtenu est un polynôme de deuxième degré. Alors, pour vérifier la stabilité d'une solution d'équilibre, il suffit seulement de vérifier les signes des coefficients du polynôme correspondent.

3.4 Système asymptotiquement stable à l'origine

Le système est asymptotiquement localement stable autour de l'origine, si et seulement si la solution d'équilibre (3.14) est localement asymptotiquement stable. En remplaçant (3.14) dans le polynôme caractéristique général, on trouve (3.19)

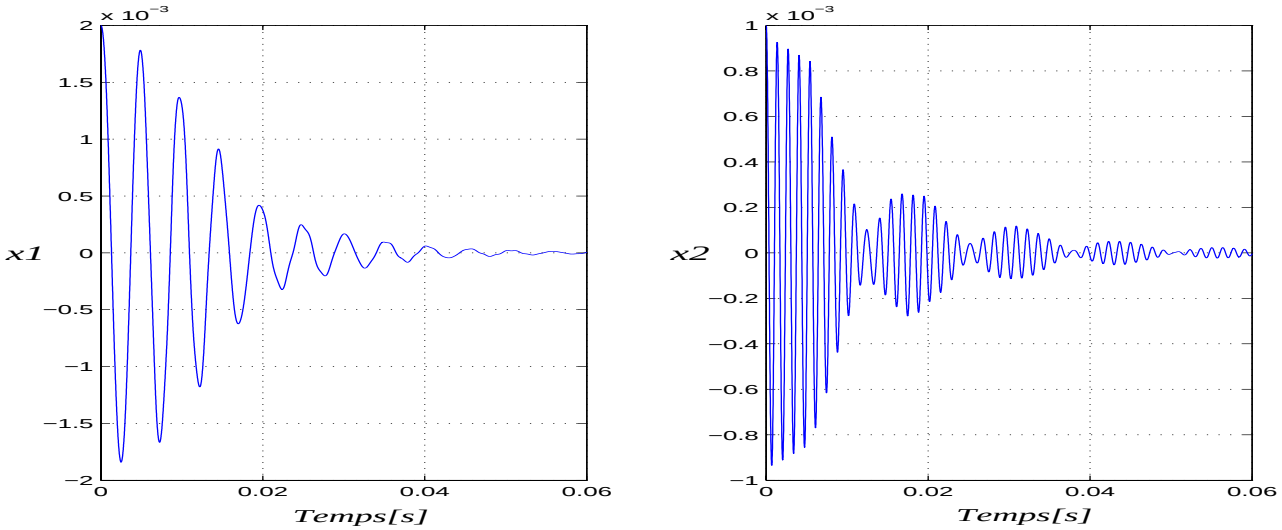

FIG. 3.3 – Test de simulation avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}$ et $\tau = 5.5 \times 10^{-3}$.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\Big\{\eta_{11} + \eta_{21}\Big\}\lambda + \frac{\eta_{11}\eta_{21}}{4}, \tag{3.20}$$

qui possède deux zéros à partie réelle négative, si les conditions suivantes sont respectée :

$$\begin{cases} -\Big\{\eta_{11} + \eta_{21}\Big\} \ \rangle \ 0 \\ \eta_{11}\eta_{21} \ \rangle \ 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \eta_{11} \ < \ 0 \\ \eta_{21} \ < \ 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Sous réserve que les conditions (3.21) soient vérifiées et que les valeurs initiales des amplitudes soient proches de l'origine, les amplitudes des oscillations du système convergeront asymptotiquement vers zéro. D'un point de vue système, la première et la deuxième condition de (3.21) correspondent à un amortissement effectivement positif pour le premier et le deuxième résonateur. Il est important de noter que les conditions dépendent beaucoup des déphasages χ_{10} et χ_{01} introduits par le bloc dérivée-retard et filtre. En effet, si en plus on néglige les coefficients d'amortissement (initialement considérés faibles), les conditions deviennent

$$\begin{cases} \cos(\chi_{10}) \ \rangle \ 0 \\ \cos(\chi_{01}) \ \rangle \ 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

impliquant des déphasages χ_{10} et χ_{01} entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La Figure 3.3 montre un test de simulation des sorties x_1 et x_2 du modèle, où les conditions (3.21) sont respectées.

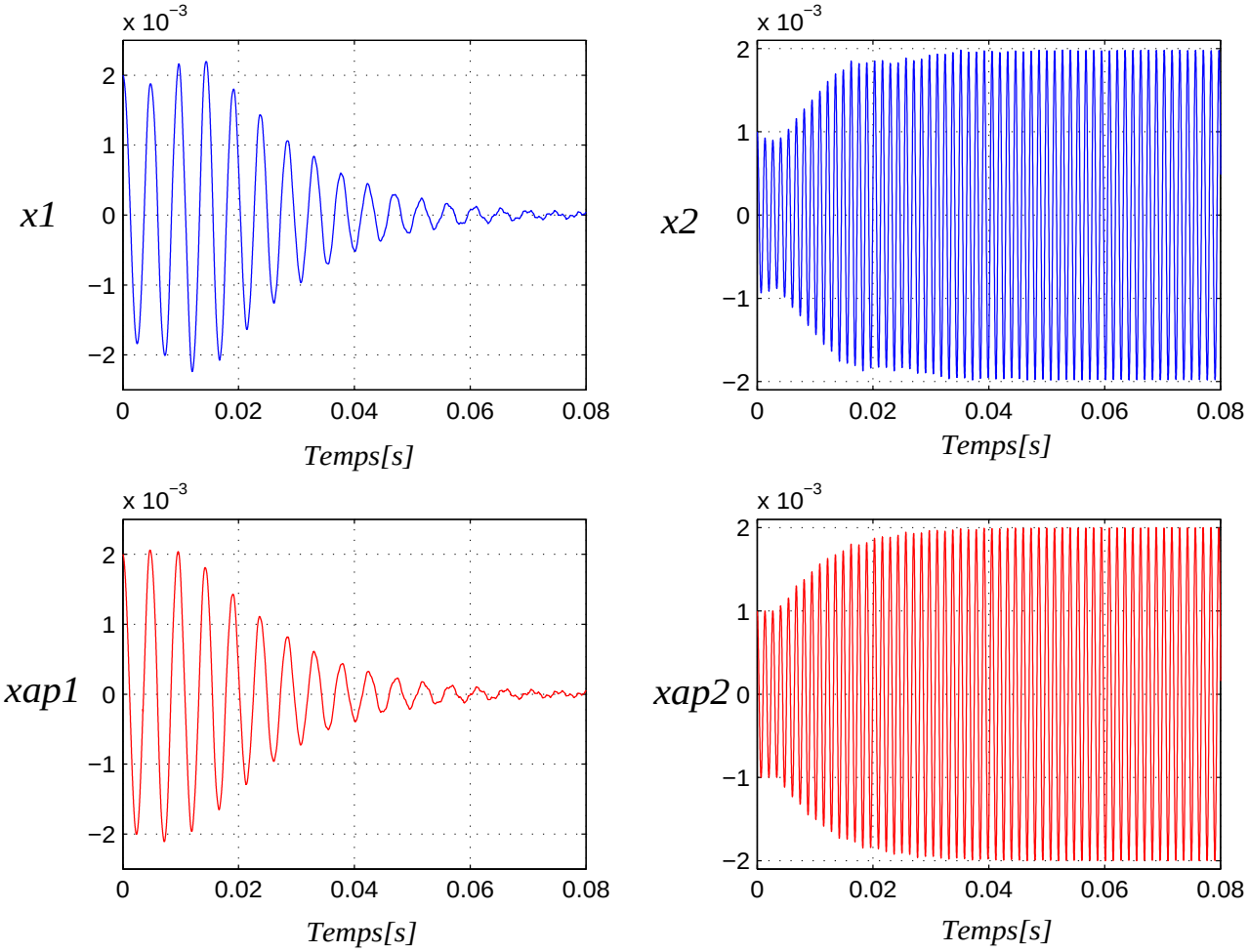

FIG. 3.4 – Test de simulation avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}$ et $\tau = 3.5 \times 10^{-3}$.

3.5 Deux générateurs avec extinction compétitive

Le régime de deux générateurs avec extinction compétitive se produit quand les deux solutions (3.15) et (3.16) sont localement stables. En remplaçant (3.15) dans (3.19) on obtient

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2}\Big\{2\eta_{11} + 2\eta_{23}\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}} - \eta_{21}\Big\}\lambda + \frac{\eta_{11}}{2}\Big\{2\eta_{23}\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}} - \eta_{21}\Big\} \tag{3.23}$$

La stabilité locale de (3.15) est alors satisfaite si et seulement si

$$\begin{cases} 2\eta_{11} + 2\eta_{23}\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}} - \eta_{21} \ \rangle \ 0 \\ \eta_{11}\Big\{2\eta_{23}\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}} - \eta_{21}\Big\} \ \rangle \ 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \eta_{11} > 0 \\ 2\eta_{23}\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}} - \eta_{21} > 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Par symétrie, pour la solution d'équilibre (3.16) on trouve les conditions

$$\begin{cases} 2\eta_{13}\frac{\eta_{21}}{\eta_{23}} - \eta_{11} > 0 \\ \eta_{21} > 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Il en résulte que, si les paramètres du modèle vérifient les conditions (3.24) et (3.25), les amplitudes de x_1 et x_2 convergent à un des deux points d'équilibre possibles (3.15) et (3.16). Selon les valeurs initiales d'amplitude, un générateur est excité, tandis que les oscillations de l'autre générateur sont entièrement éteintes. Ce fonctionnement peut être expliqué par l'existence d'un amortissement négatif pour le générateur excité et d'un amortissement positif pour le générateur en cours d'extinction, qui se crée au fur et à mesure que l'autre générateur est excité.

En général le domaine où la condition (3.24) est vérifiée est très proche à celui de la condition (3.25). Quand les coefficients d'amortissement sont négligés, les conditions se rejoignent et se résument par

$$\begin{cases} \cos(\chi_{10}) < 0 \\ \cos(\chi_{01}) < 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

ce qui correspond à des déphasages χ_{10} et χ_{01} entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Cette situation est très semblable à celle obtenue avec le modèle basé sur un système de deux équations de Van der Pol couplées, étudié dans le chapitre 2. La Figure 3.4 présente un exemple de simulation sur le régime de deux générateurs avec extinction compétitive, où la partie supérieure représente les sorties du modèle et la partie inférieur représente les sorties approximées.

En pratique, si ce régime se produit, alors il sera observé dans le comportement stationnaire de la pression qu'une seule fréquence dominante, avec la superposition d'une harmonique multiple (non-dominante) possédant une fréquence égale au triple de celle dominante. D'un autre côté, la fréquence d'oscillation dominante ne sera pas exactement égale à la fréquence naturelle. Elle sera légèrement modifiée en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement du résonateur excité. Par exemple, dans la situation où x_1 est excité et x_2 est éteint, la fréquence stationnaire sera égale à la valeur

$$\omega_1 + \dot{\theta}_1 = \omega_1 \left(1 + \zeta_1 \tan(\chi_{10})\right) \tag{3.27}$$

La quantité de chaleur stationnaire, qui correspond à la sortie de la caractéristique non-linéaire statique, est aussi très dépendante de la valeur du coefficient d'amortissement. Elle vaut dans la même situation

$$q = \varphi_0 + \frac{4\omega_1\zeta_1}{A_{10}\cos(\chi_{10})}\sqrt{\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}}\cos(\omega_1 t + \theta_1 + \tfrac{\pi}{2} - \omega_1\tau) - \frac{2\varphi_3}{3}\left(\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}\right)^{\frac{2}{3}}\cos(3\omega_1 t + 3\theta_1 + \tfrac{3\pi}{2} - 3\omega_1\tau),$$

Les amplitudes et les fréquences stationnaires des sorties peuvent donner des bonnes indications sur les valeurs des paramètres du modèle. Dans le même sens, le déphasage entre la pression et la quantité de chaleur peut être utilisé pour déterminer la valeur du retard.

3.6 Un seul générateur de Van der Pol

Ce régime se produit quand une seule solution d'équilibre des deux solutions (3.15) et (3.16) est localement stable (pas les deux au même temps). Cela revient pour la stabilité de la solution (3.15), à ce que les conditions (3.24) soient vérifiées et à ce qu'au moins une condition de (3.25) ne soit pas vérifiée. Quand l'inverse est vérifié, l'autre solution (3.16) est localement stable. Dans ce fonctionnent, un seul générateur est excité, tandis que les oscillations de l'autre sont éteintes. La différence avec le régime d'extinction compétitive est que le fonctionnement ne dépende pas de la valeur initiale des amplitudes, il dépend uniquement de la solution d'équilibre stable. Dans ce cas le modèle se comporte comme une seule équation de Van der Pol généralisée. Il est important de noter qu'il n'est pas possible d'avoir ce régime si les coefficients d'amortissement sont nuls.

3.7 Auto-oscillations simultanées non-harmoniques : sans synchronisation

L'oscillation simultanée des deux résonateurs se produit quand la solution d'équilibre (3.17) est localement stable. En introduisant les valeurs des amplitudes (3.17) dans (3.19), on obtient après simplifications

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{3}\Big\{\eta_{13}\left[\frac{2\eta_{21}}{\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}\right] + \eta_{23}\left[\frac{2\eta_{11}}{\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{\eta_{23}}\right]\Big\}\lambda - \frac{\eta_{13}\eta_{23}}{3}\left[\frac{2\eta_{21}}{\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}\right]\left[\frac{2\eta_{11}}{\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{\eta_{23}}\right] \tag{3.28}$$

Il en résulte, que le régime opère quand les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \eta_{13}\left[\frac{2\eta_{21}}{\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}\right] + \eta_{23}\left[\frac{2\eta_{11}}{\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{\eta_{23}}\right] \ \rangle \ 0 \\ \eta_{13}\eta_{23}\left[\frac{2\eta_{21}}{\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}\right]\left[\frac{2\eta_{11}}{\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{\eta_{23}}\right] \ \langle \ 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Sachant que, pour que la solution d'équilibre existe, il faut que

$$\begin{cases} \frac{2\eta_{11}}{\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{\eta_{23}} \ \rangle \ 0 \\ \frac{2\eta_{21}}{\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{\eta_{13}} \ \rangle \ 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \eta_{13}\left[\frac{2\eta_{21}}{\eta_{23}} - \frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}\right] + \eta_{23}\left[\frac{2\eta_{11}}{\eta_{13}} - \frac{\eta_{21}}{\eta_{23}}\right] > 0 \\ \eta_{13}\eta_{23} < 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

À travers la satisfaction de (3.30), il est possible d'avoir l'oscillation simultanée des deux modes non-harmoniques. Les amplitudes de x_1 et x_2 convergeront vers la solution d'équilibre (3.17), qui

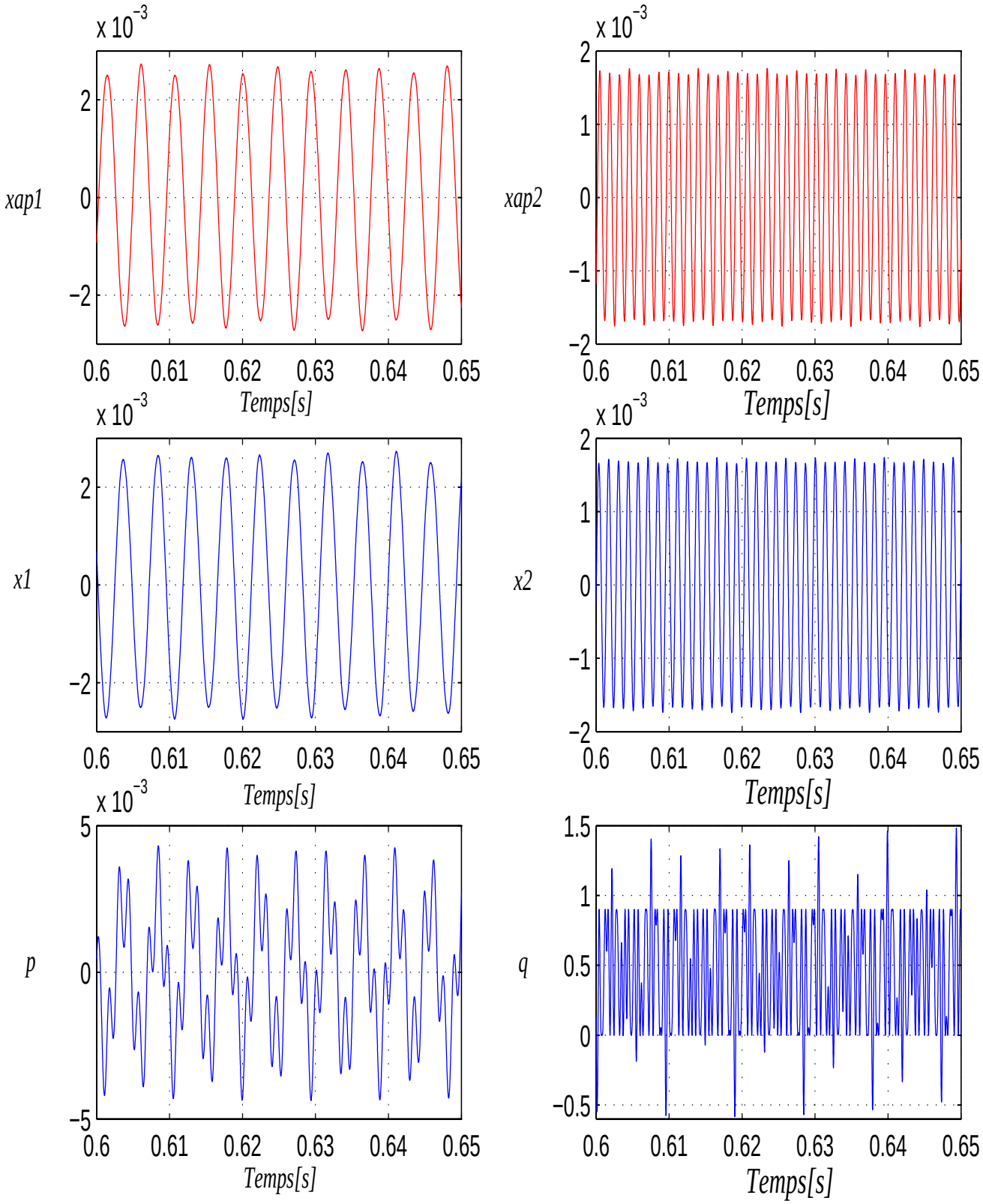

FIG. 3.5 – Test de simulation avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi \times 500}{s+2\pi \times 500}$ et $\tau = 4.8 \times 10^{-3}$.

possèdent des valeurs non-nulles. À l'inverse du régime de deux générateurs avec extinction compétitive, l'excitation d'un résonateur conduit à l'excitation de l'autre. La caractéristique particulière de ce fonctionnement est que les deux résonateurs sont excités au même temps, sans qu'il existe une relation de multiplicité entière entre les fréquences d'oscillation (sans synchronisation). L'existence de ce fonctionnement rend le modèle proposé dans ce chapitre très attractif.

Comme pour les autres régimes, il est important de noter que le fonctionnement dans ce régime dépend principalement des valeurs des gains et des déphasages introduits par le bloc dérivée-retard et filtre. Ceci est facilement observable, si les coefficients d'amortissement sont négligeables, car les conditions (3.30) deviennent

$$\begin{cases} A_{10}\cos(\chi_{10}) + A_{01}\cos(\chi_{01}) \langle 0 \\ \cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01}) \langle 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

ce qui implique (dans un seul sens) que la valeur d'un des deux déphasage χ_{10} et χ_{01} doit être obligatoirement entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, pendant que l'autre doit être entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La Figure 3.5 montre la partie stationnaire d'un exemple de simulation pour le régime d'auto-oscillations simultanées non-harmoniques, où la première ligne représente les sorties x_1 et x_2 approximées, et la deuxième et la troisième ligne représentent respectivement les sorties x_1, x_2, p et q du modèle (3.1).

Il est certain que si le système opère dans ce régime, alors il sera observé sur la mesure de pression la présence de deux fréquences dominantes non-harmoniques, avec quelques fréquences non-dominantes dont les valeurs correspondent à des combinaisons linéaires des deux fréquences dominantes (voir l'expression de ν_i dans le lemme 8). En d'autres termes, toutes les fréquences de W seront observées (avec quelques corrections). Dans le régime stationnaire des oscillations, les fréquences des deux modes dominants atteindront des valeurs fixes, qui sont des corrections légères des fréquences naturelles, ces corrections sont proportionnelles aux valeurs des coefficients d'amortissement. En effet, si on remplace les amplitudes stationnaires dans les équations régissant les phases, et si on ajoute les fréquences naturelles on trouve

$$\begin{cases} \omega_1 + \dot{\theta}_1 = \omega_1\left(1 + \zeta_1\tan(\chi_{10})\right) \\ \omega_2 + \dot{\theta}_2 = \omega_2\left(1 + \zeta_2\tan(\chi_{01})\right) \end{cases} \tag{3.32}$$

L'observation des fréquences dominantes sur la quantité de chaleur est très dépendante des valeurs des paramètres du modèle, notamment des valeurs des coefficients d'amortissement. Puisque les amplitudes, qu'on notera a_{q1} et a_{q2} pour les modes de fréquences $\omega_1 + \dot{\theta}_1$ et $\omega_2 + \dot{\theta}_2$ respectivement, auront les valeurs stationnaires suivantes :

$$\begin{cases} a_{q1} = \frac{4\omega_1\zeta_1}{A_{10}\cos(\chi_{10})}\sqrt{\frac{\eta_{11}}{\eta_{13}}} \\ a_{q2} = \frac{4\omega_2\zeta_2}{A_{01}\cos(\chi_{01})}\sqrt{\frac{\eta_{21}}{\eta_{23}}} \end{cases} \tag{3.33}$$

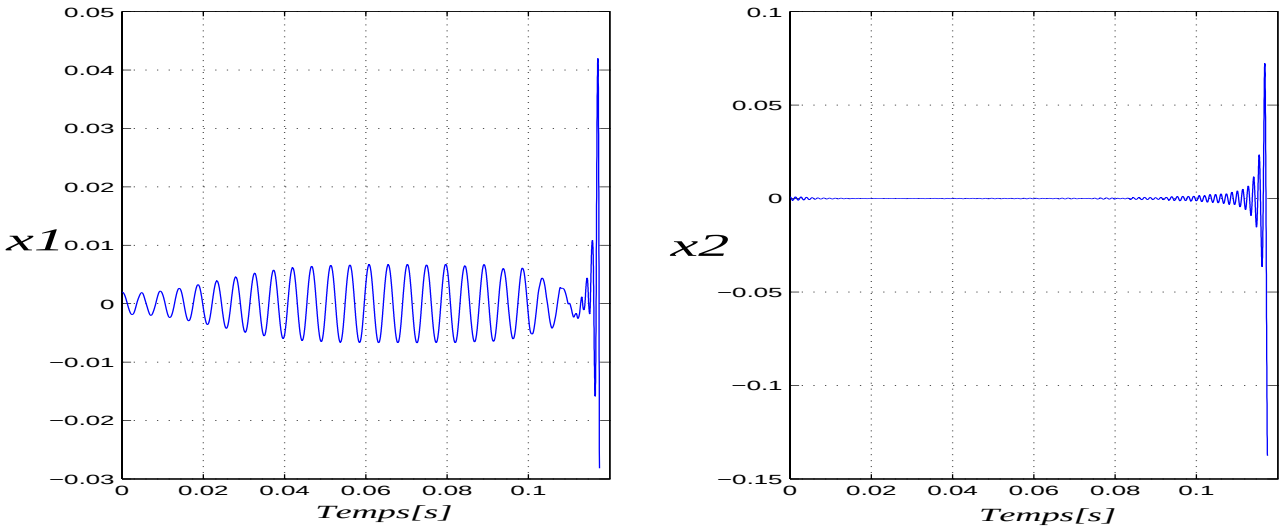

FIG. 3.6 – Test de simulation avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi \times 800}{s + 2\pi \times 800}$ et $\tau = 2.8 \times 10^{-3}$.

En analysant le résultat (3.33), on peut dire que si physiquement deux modes oscillatoires dominants sont visibles sur la pression et qu'un des deux modes n'est pas visible sur la quantité de chaleur, alors cela peut être interprété soit par un amortissement nul ou très faible dans le résonateur correspondant.

3.8 Instabilité totale : divergence des oscillations

Quand aucun des systèmes de conditions (3.21), (3.24), (3.25) et (3.30) n'est satisfait, il n'existe aucune solution d'équilibre stable. En conséquence, il n'existe aucun cycle limite stable et non plus de stabilité asymptotique. Dans ce cas les amplitudes des oscillations divergent. On entend par instabilité totale, la divergence des oscillations dans le système pour n'importe quelle valeur initiale (n'importe quel voisinage). La Figure 3.6 montre un test de simulation des sorties du modèle (3.1), avec des paramètres ne respectant aucune des conditions de stabilité des solutions d'équilibre.

3.9 Analyse des résultats

Les résultats démontrent l'existence de cinq régimes de fonctionnement quand le rapport entre les fréquences naturelles est différent de 1, 3 et $\frac{1}{3}$. L'apparition de chaque régime de fonctionnement dépende de la satisfaction de quelques conditions. Les simulations confirment la capacité de l'approximation K-B à prédire le comportement des sorties du modèle et à estimer les valeurs des

amplitudes d'oscillation. De point de vue pratique, la situation la plus intéressante est celle d'auto-oscillations simultanées non-harmoniques. Le fait que les amplitudes des modes ω_1 et ω_2 prennent les valeurs (3.17), montre clairement qu'elles dépendent inversement des valeurs des fréquences naturelles. Sachant que la fréquence ω_1 est inférieure à ω_2, cela suppose que l'amplitude du premier mode est très probablement supérieure à celle du deuxième.

La capacité d'un modèle des instabilités de combustion à décrire la coexistence de deux modes est considérée comme une importante validation du modèle. En effet, des résultats expérimentaux représentatifs analysés dans [MJC$^+$98, DBS01] démontrent la présence simultanée de deux composantes sinusoïdales ; La première d'amplitude puissante à 210Hz, et la deuxième d'amplitude faible mais persistante à 740Hz.

Le modèle proposé dans ce chapitre possède la capacité de décrire de nombreux phénomènes observés en pratique. En particulier, il décrit le phénomène d'auto-oscillation simultanées non-harmoniques qui se produit quand les conditions (3.30) sont satisfaites. L'analyse de ce phénomène a révélé que, d'une part le modèle peut décrire la coexistence simultanée de deux modes avec n'importe quel rapport entre les fréquences (sous réserve qu'il respect (3.30) et qu'il est différent de 1, 3 et $\frac{1}{3}$) et d'autre part les amplitudes des oscillations diminuent quand les fréquences augmentent. Comme l'analyse a montré, le modèle peut décrire d'autres situations rencontrées en pratique.

Les capacités de ce modèle sont dues à sa structure composée de résonateurs linéaires, d'un retard, d'une caractéristique statique et d'un filtre passe bas. Chaque bloc du modèle a des effets sur la dynamique des sorties qui doivent être analysés convenablement.

3.9.1 Conséquences du retard et du filtre passe bas

L'introduction du retard et du filtre passe bas dans le modèle a permis à ce dernier de représenter quelques phénomènes, considérés comme très intéressants dans la modélisation des instabilités de combustion. Cela suggère que le rôle du retard dans la modélisation qui ne peut être négligé. Dans la littérature, le rôle important du retard dans l'apparition des instabilités a été auparavant discuté. Parmi les résultats importants obtenus, on peut citer ; le modèle établi par Lieuwen [LZ98] qui est principalement basé sur le retard, et la condition d'apparition des instabilités établie par Schuller [SDC03] en se basant sur le critère de Rayleigh, qui est très dépendante de la valeur du retard d'une manière ressemblante aux conditions obtenues dans le présent chapitre. En dépit du fait que ces travaux sont cohérents avec les résultats obtenus dans ce chapitre, ces travaux ne considèrent que la présence d'un seul mode d'oscillation dans les instabilités.

Les conditions de chaque régime de fonctionnement contiennent essentiellement les phases χ_{10} et χ_{01} introduites par le bloc dérivée-retard et le filtrage. Les domaines de phase des conditions (3.21),

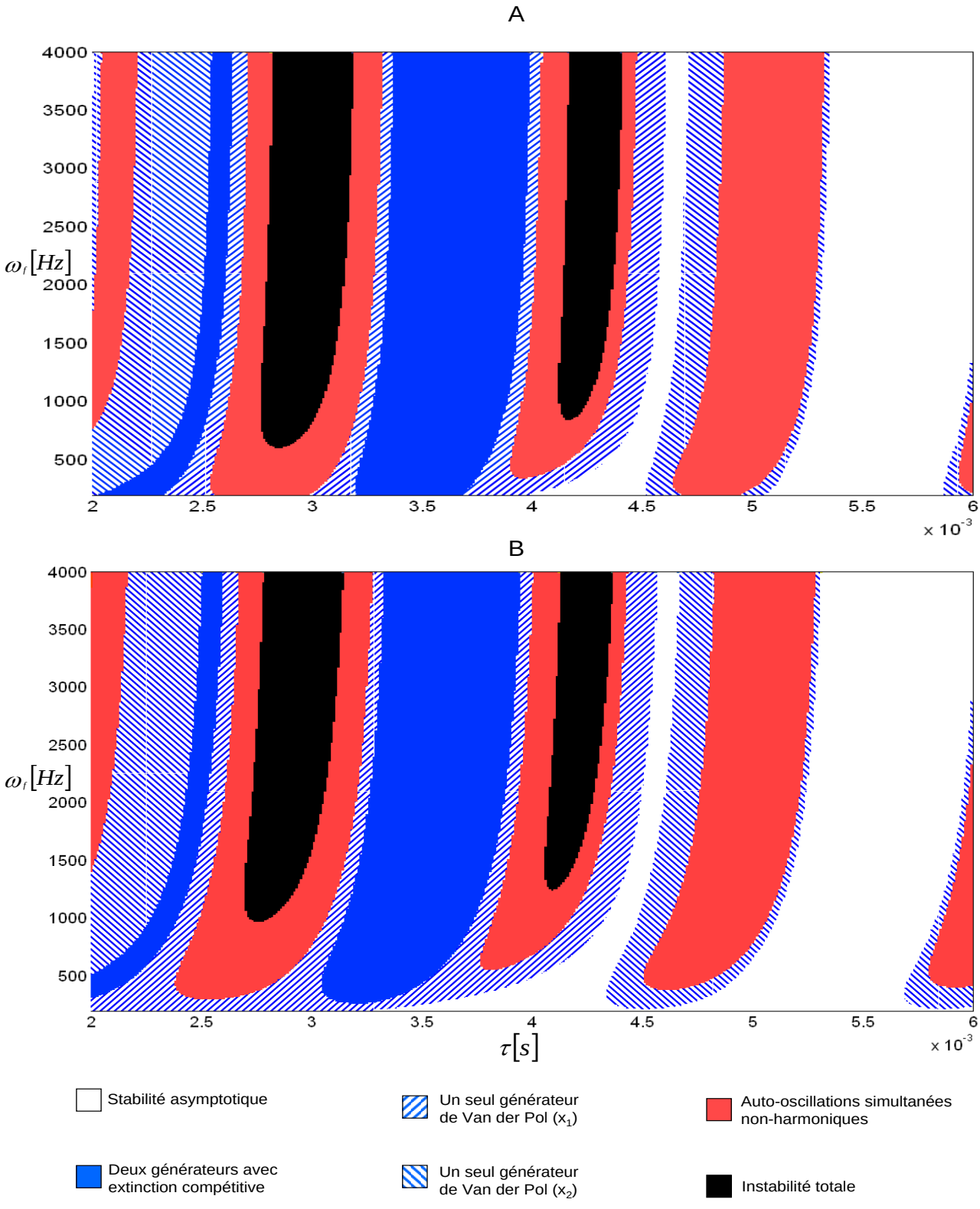

FIG. 3.7 – Variation du régime de fonctionnement en fonction de τ et ω_f avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$ et $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, pour (A) $LPF = \frac{\omega_f}{s+\omega_f}$ et (B) $LPF = \left(\frac{\omega_f}{s+\omega_f}\right)^2$.

(3.24), (3.25) et (3.30) sont indépendants. Alors pour un modèle précis avec un retard pur et un filtre donnés, il n'est pas possible d'avoir plus d'un seul régime de fonctionnement. Les résultats obtenus suggèrent qu'il est possible dans certains cas d'estimer le retard à partir des mesures des oscillations (nombre de modes, amplitudes, fréquences et déphasages). Pour illustrer l'importance du retard et du filtre dans le modèle, la Figure 3.7 trace les régimes de fonctionnement pour différentes valeurs de retard τ et de fréquence de coupure du filtre ω_f (les valeurs des autres paramètres sont fixes) dans deux situations. La première présentée dans la partie supérieure est avec un filtre de premier ordre. La deuxième présentée dans la partie inférieure est avec un filtre de deuxième ordre. Au niveau de la modélisation, le régime de fonctionnement le plus intéressant est le régime d'auto-oscillations simultanées non-harmoniques. La différence observable entre les deux situations (filtre de premier ordre et le filtre de deuxième ordre), montre clairement que la connaissance de la nature et la fréquence de coupure du filtre sont aussi très importantes dans la modélisation des instabilités.

3.9.2 Influence de la caractéristique statique

La caractéristique statique présente dans les instabilités de combustion est en réalité une saturation avec une tangente négative. Cette saturation fait que les amplitudes des oscillations du système convergent vers certaines valeurs dépendantes des propriétés de la saturation est non pas des conditions initiales (comme il s'agit pour les oscillation linéaires). L'approximation de la caractéristique par un polynôme du troisième ordre est toute à fait justifiable. La tangente négative peut être approximée par le terme $\varphi_1 \dot{p}_\tau$ et le phénomène de saturation peut être approximé (dans un certain intervalle) en ajoutant le terme $-\frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3$ qui compense le premier. Ce qui donne des amplitudes d'oscillations très dépendantes des coefficients du polynôme. La mesure des ces amplitudes peut être utilisée comme un outil d'estimation des valeurs de φ_1 et φ_3.

L'allure de la caractéristique statique est un fait non négligeable qui peut expliquer l'apparition des instabilités quand le rapport combustible/air est réduit. Des analyses dans [Dun03] soupçonnent que, la réduction du rapport combustible/air entraîne la décroissance de la tangente φ_1, au même moment les autres paramètres (notamment le retard) sont considérés comme pratiquement constants. Vis à vis de l'analyse du modèle proposé dans ce chapitre, cela est toute à fait correct. Puisque le rôle du paramètre φ_1 est en opposition au rôle des coefficients d'amortissement linéaires ζ_1 et ζ_2. Alors, quand $|\varphi_1|$ est faible devant l'amortissement le système est stable, et quand l'inverse se produit le système devient instable.

Pour un système de combustion donné, le comportement des sorties en fonction de rapport combustible/air peut être utilisé, d'une part pour déterminer la relation entre le rapport combustible/air et la tangente φ_1, et d'autre part pour valider les autres paramètres du modèle. Par exemple on peut

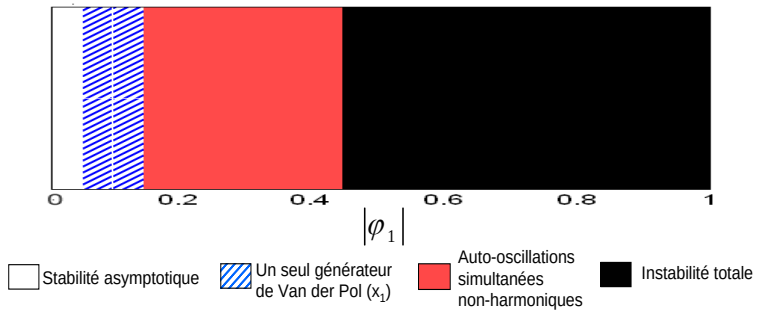

FIG. 3.8 – Variation du régime de fonctionnement en fonction de $|\varphi_1|$, avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $LPF = \left(\frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}\right)^2$, $\tau = 3.8 \times 10^{-3}$ et φ_3 quelconque.

imaginer le scénario suivant ; la réduction progressive du combustible/air entraîne tout d'abord la manifestation d'oscillation avec un seul mode (avec fréquence proche de ω_1), puis des oscillations avec deux modes, et en fin une instabilité totale (divergence, extinction de la flamme). Le scénario est illustré par la Figure 3.8 qui représente la variation du régime de fonctionnement selon l'augmentation de $|\ \varphi_1\ |$, et cela pour n'importe qu'elle valeurs de φ_3 et pour des valeurs fixes des autres paramètres.

3.9.3 Analyse fréquentielle des sorties

La procédure K-B améliorée a permis d'ajouter les harmoniques multiples de ω_1 et ω_2 dans les approximations. L'évaluation de la précision des approximations requiert une comparaison spectrale avec les sorties réelles du modèle. Tenant compte des Hypothèses 1 et 2 utilisées pour le calcul des approximations, la comparaison doit se faire en régime stationnaire. La comparaison des densités spectrales stationnaires en utilisant la FFT est présentée dans la Figure 3.9, où Dx_1, Dx_2 et Dp sont les densités spectrales de x_1, x_2 et p, respectivement. De la Figure 3.9, on peut observer que les fréquences importantes des sorties du modèle sont détectées avec des excellentes estimations des amplitudes par les approximations K-B. Les autres fréquences possèdent des amplitudes négligeables.

De point de vue pratique, la présence des harmoniques multiples dans les sorties est une image de la forme du polynôme de la caractéristique statique. Dans le modèle (3.1), la caractéristique statique utilisée implique la présence dans les sorties de fréquences appartenant à l'ensemble W. Cela fait que si en pratique, une fréquence multiple de ω_1 et ω_2 n'appartenant pas à W est observée avec une amplitude élevée, des modifications sur la forme du polynôme de la caractéristique statique doivent être considères. Par exemple, si la fréquence $2\omega_1$ est observée, alors la forme $\varphi_0 + \varphi_1 y + \varphi_2 y^2 - \frac{\varphi_3}{3} y^3$ doit être reconsidérée. Dans ce cas particulier, l'ensemble W sera augmenté avec les fréquences $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$, et aucune modification n'aura lieu sur le comportement des amplitudes et les

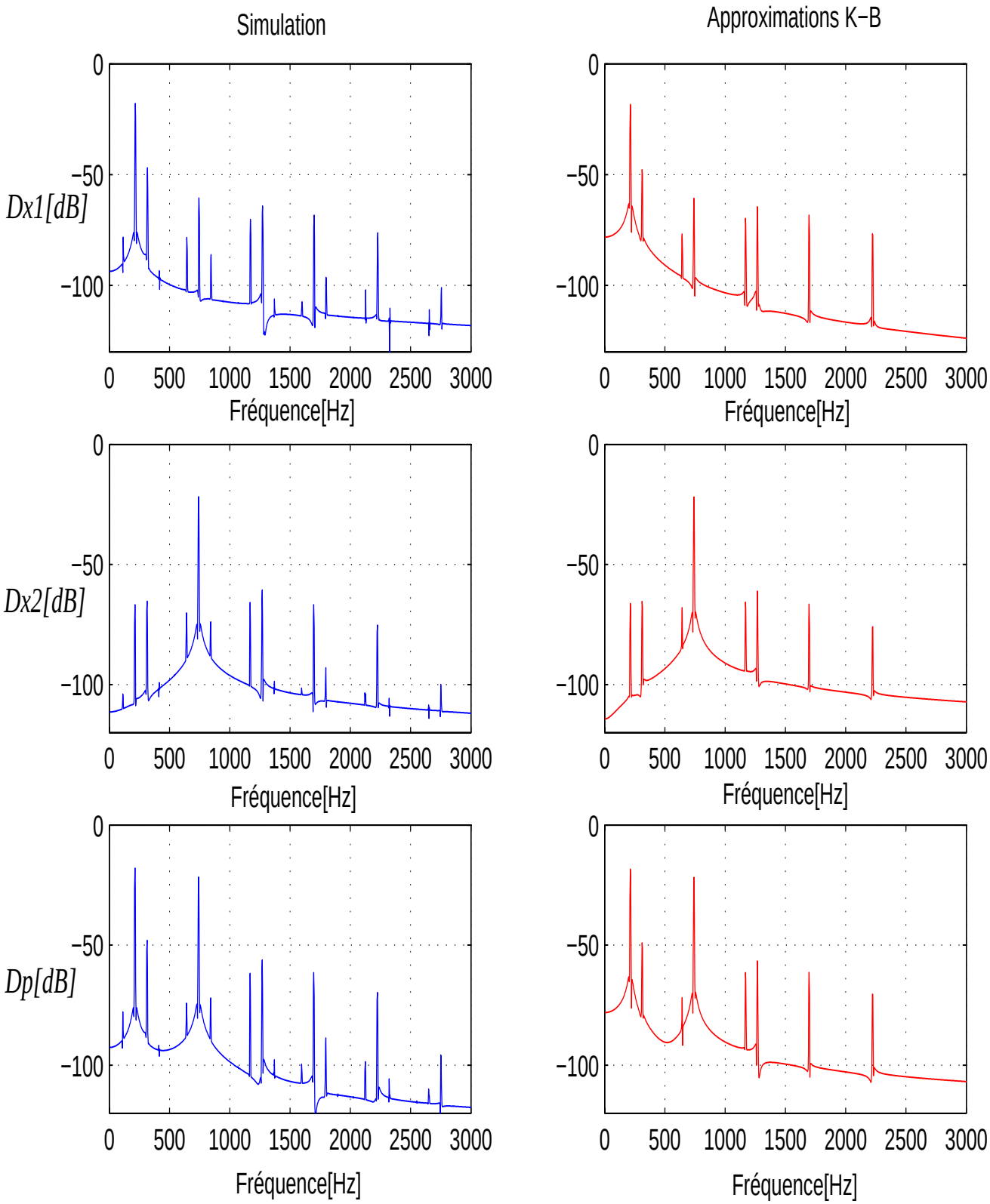

FIG. 3.9 – Représentation fréquentielle avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi \times 500}{s+2\pi \times 500}$ et $\tau = 4.8 \times 10^{-3}$.

phases. Toutefois dans certaines situations, des fréquences qui n'ont pas relation directe avec la caractéristique statique peuvent être observées. La présence de ces fréquences est due à des comportements critiques, détaillés dans la section suivantes.

3.10 Comportements critiques des oscillations

Des tests de simulation ont été effectués en variant les valeurs des paramètres du modèle. Dans la plupart des situations, l'analyse présentée dans la sections précédentes a été suffisante pour interpréter les résultats. Cependant, pour certaines situations critiques l'analyse ne pouvait pas expliquer correctement le comportement des sorties. Ces comportements sont dus à deux phénomènes importants qui doivent être étudiés.

3.10.1 Interaction asynchrone des fréquences

Les valeurs des fréquences naturelles des deux résonateurs utilisées dans les simulations sont chacune de l'ordre de 210Hz et 740Hz, respectivement. Ces fréquences ont été considérées au début du chapitre comme des fréquences vérifiant la condition $\omega_1 \not\approx \left\{\omega_2, 3\omega_2, \frac{\omega_2}{3}\right\}$. Cependant dans certains situations, des oscillations sur les amplitudes a_1 et a_2 avec une fréquence $\Delta\dot{\psi} = \omega_2 - 3\omega_1$ peuvent être observées. Cela signifie l'existence d'une importante interaction entre les deux fréquences. Cette interaction se produit quand les termes sinusoïdaux avec les fréquences $3\omega_1$ et $\omega_2 - 2\omega_1$ dans (3.7) ont des gains importants et se manifeste par la forte présence dans les sorties de fréquences qui sont des combinaisons linéaires des fréquences naturelles (exemple : $4\omega_1 - \omega_2$), mais qui n'appartiennent pas à l'ensemble W. La Figure 3.10 présente la densité spectrale de la pression d'un exemple de simulation. Dans ces situations, l'interaction entre les fréquences oblige à considérer que les fréquences naturelles respectent la condition $\omega_2 \approx 3\omega_1$ et non pas celle considérée précédemment.

Lemme 9

Considérons le cas où les fréquences $\omega_1 \approx 3\omega_2$ et le système (3.1). Les amplitudes et les phases des sorties du système peuvent être approximées comme suit

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{a}_1 = \left(\frac{\varphi_1 A_{10}\cos(\chi_{10})}{2} - \zeta_1\omega_1\right) a_1 - \frac{\varphi_3 A_{10}\cos(\chi_{10})}{2} a_1 \left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right) \\
\quad - \frac{\varphi_3(\omega_2 - 2\omega_1)A_{2-1}}{8\omega_1} a_2 a_1^2 \cos(\Delta\psi - \chi_{2-1}), \\
\dot{a}_2 = \left(\frac{\varphi_1 A_{01}\cos(\chi_{01})}{2} - \zeta_2\omega_2\right) a_2 - \frac{\varphi_3 A_{01}\cos(\chi_{01})}{2} a_2 \left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right) \\
\quad - \frac{\varphi_3 A_{30}\omega_1 a_1^3}{8\omega_2}\cos(\Delta\psi - \chi_{30}), \\
\dot{\theta}_1 = \frac{\varphi_1 A_{10}\sin(\chi_{10})}{2}\left(1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right)\right) - \frac{\varphi_3(\omega_2 - 2\omega_1)A_{2-1}}{8\omega_1} a_2 a_1 \sin(\Delta\psi - \chi_{2-1}), \\
\dot{\theta}_2 = \frac{\varphi_1 A_{01}\sin(\chi_{01})}{2}\left(1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right)\right) + \frac{\varphi_3 A_{30}\omega_1 a_1^3}{8\omega_2 a_2}\sin(\Delta\psi - \chi_{30}),
\end{array}\right. \tag{3.34}$$

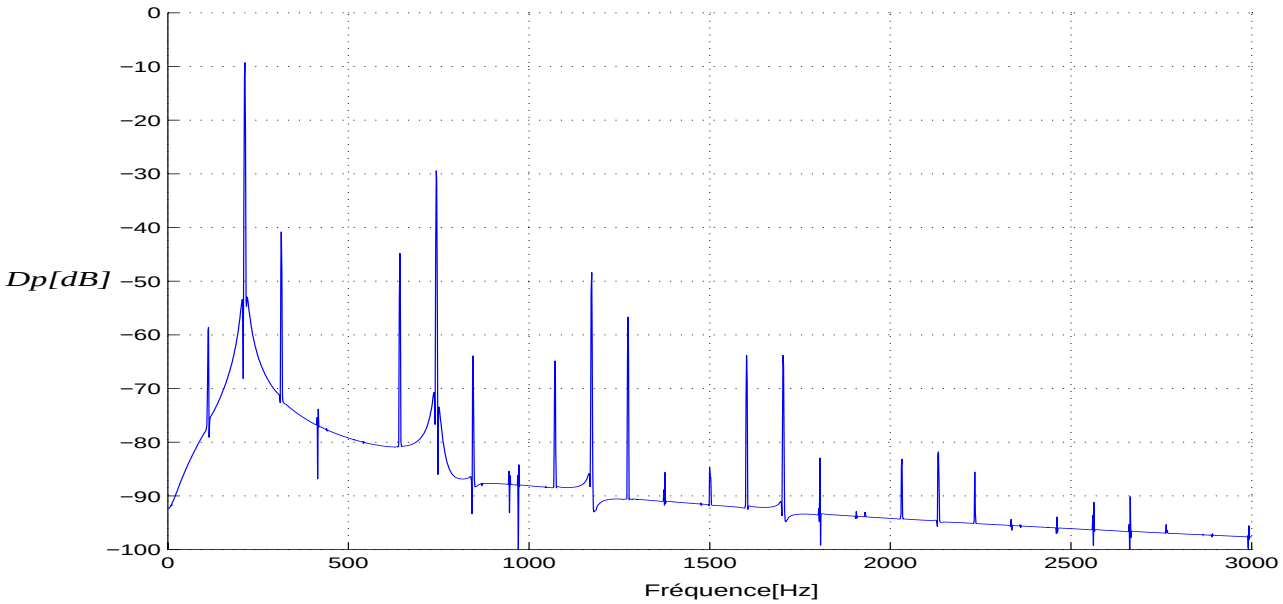

FIG. 3.10 – Représentation fréquentielle avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi \times 3000}{s+2\pi \times 3000}$ et $\tau = 2.7 \times 10^{-3}$.

avec

$\Delta\psi = (\omega_2 - 3\omega_1)t + \theta_2 - 3\theta_1$.

La même procédure que celle appliquée dans l'Annexe C pour le lemme 4, peut être appliquée pour obtenir le résultat du lemme 9.

En général, quand les conditions (3.30) sont vérifiées, le système d'équations différentielles (3.34) ne possède aucune solution d'équilibre stable. L'absence de solution d'équilibre stable avec un déphasage $\Delta\psi$ constant, signifie que les sorties du modèle ne peuvent pas osciller avec une synchronisation mutuelle, et cela même si la valeur de ω_2 est très proche de $3\omega_1$. Dans ce cas, deux fonctionnements sont possibles. Le premier est une instabilité totale où les sorties du système divergent. Dans le deuxième fonctionnement, les amplitudes a_1 et a_2 oscillent avec une fréquence égale $\Delta\dot{\psi}$. Ces oscillations se produisent autour de solution d'équilibre (3.17) qui concerne le régime d'auto-oscillations simultanées non-harmoniques. En d'autres termes, les deux modes oscillent simultanément avec une interaction forte entre les fréquences mais asynchrone. Parmi les deux fonctionnements et vu les valeurs des fréquences de résonance, le deuxième fonctionnement est celui qui peut se produire le plus souvent, car cela dépend beaucoup de la distance entre ω_2 et $3\omega_1$. Quand la distance est très faible les sorties divergent, mais si la distance n'est pas très faible une interaction asynchrone se produit.

3.10.2 Dynamique des amplitudes influencée par le retard

Dans beaucoup de situations, il est possible d'observer clairement sur les sorties (dans le domaine temporel) une oscillation sur les amplitudes a_1 et a_2. Cette oscillation est autour de la solution d'équilibre stable (calculée précédemment) et avec une très basse fréquence (en général inférieure à 50Hz pour l'exemple considéré) qui ne peut pas correspondre à une combinaison linéaire des autres fréquences d'oscillations. Un exemple de simulation présenté dans la Figure 3.11 montre clairement l'oscillation sur les amplitudes.

Cette oscillation n'est pas une incohérence du modèle proposé, puisque un phénomène semblable a été largement observé en pratique dans plusieurs systèmes de combustion [MMM98, CRJA98, PVB$^+$88, ISCZ97, Lan88, ZSW00, BG$^+$98, GPHPS91]. Dans ce phénomène, les amplitudes (ou une amplitude) varient d'un cycle à un autre et la présence d'une fréquence basse dans les sorties a été rapportée. Cette fréquence a même été exploitée par Uhm [UA05] pour une commande en boucle ouverte (de valeur 13Hz). Dans [Lie03, LB05], Lieuwen explique la variation des amplitudes par une très grande sensibilité des instabilités face au bruit présent dans les systèmes de combustion.

Bien qu'une importante sensibilité face au bruit peut exister (comme étudiée précédemment dans le chapitre 2), l'origine de ce comportement dans les sorties du modèle est une dynamique des amplitudes influencée par le retard τ. Il très connu dans le domaine des asservissements que, la présence d'un retard pur dans une boucle fermée d'un système donné peut conduire a une instabilité. En ce qui concerne les sorties du modèle proposé, le retard est aussi présent dans la dynamique des amplitudes et peut induire des instabilités qui peuvent se traduire par l'apparition de cycles limites ou par une divergence des amplitudes.

Les approximations établies dans (3.11) ne peuvent pas prédire ce comportement. Cela est dû à l'approximation des amplitudes $a_{1\tau}$ et $a_{2\tau}$ par a_1 et a_2 (énoncée précédemment dans l'Hypothèse 2). En d'autres termes dans ces situations, l'Hypothèse 2 est mise en cause. Une approximation plus correcte, peut être aisément obtenue en remplaçant convenablement dans le côté droit des équations d'amplitudes de (3.11) a_1 et a_2 par $a_{1\tau}$ et $a_{2\tau}$. Cela donne le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{a}_1 = -\zeta_1\omega_1 a_1 + \frac{\varphi_1 A_{10}\cos(\chi_{10})}{2} a_{1\tau}\left[1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_{1\tau})^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_{2\tau})^2}{2}\right)\right], \\ \dot{a}_2 = -\zeta_2\omega_2 a_2 + \frac{\varphi_1 A_{01}\cos(\chi_{01})}{2} a_{2\tau}\left[1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_{2\tau})^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_{1\tau})^2}{2}\right)\right], \end{array}\right. \tag{3.35}$$

Ce système d'équations nous permet d'avoir une meilleure approximation du comportement des amplitudes, notamment quand l'oscillation des amplitudes se produit sur les sorties du modèle. Cependant, le système d'équations (3.35) ne permet pas de prédire si les amplitudes oscille ou n'oscille pas, et si c'est le cas, il ne permet pas de déterminer la fréquence de l'oscillation. Pour ce faire, une autre approximation de l'effet du retard sur les amplitudes doit être appliquée. L'approximation consistant à approcher le retard par un système de premier ordre (avec un pôle égal $-\frac{1}{\tau}$) peut être utilisée, ce qui

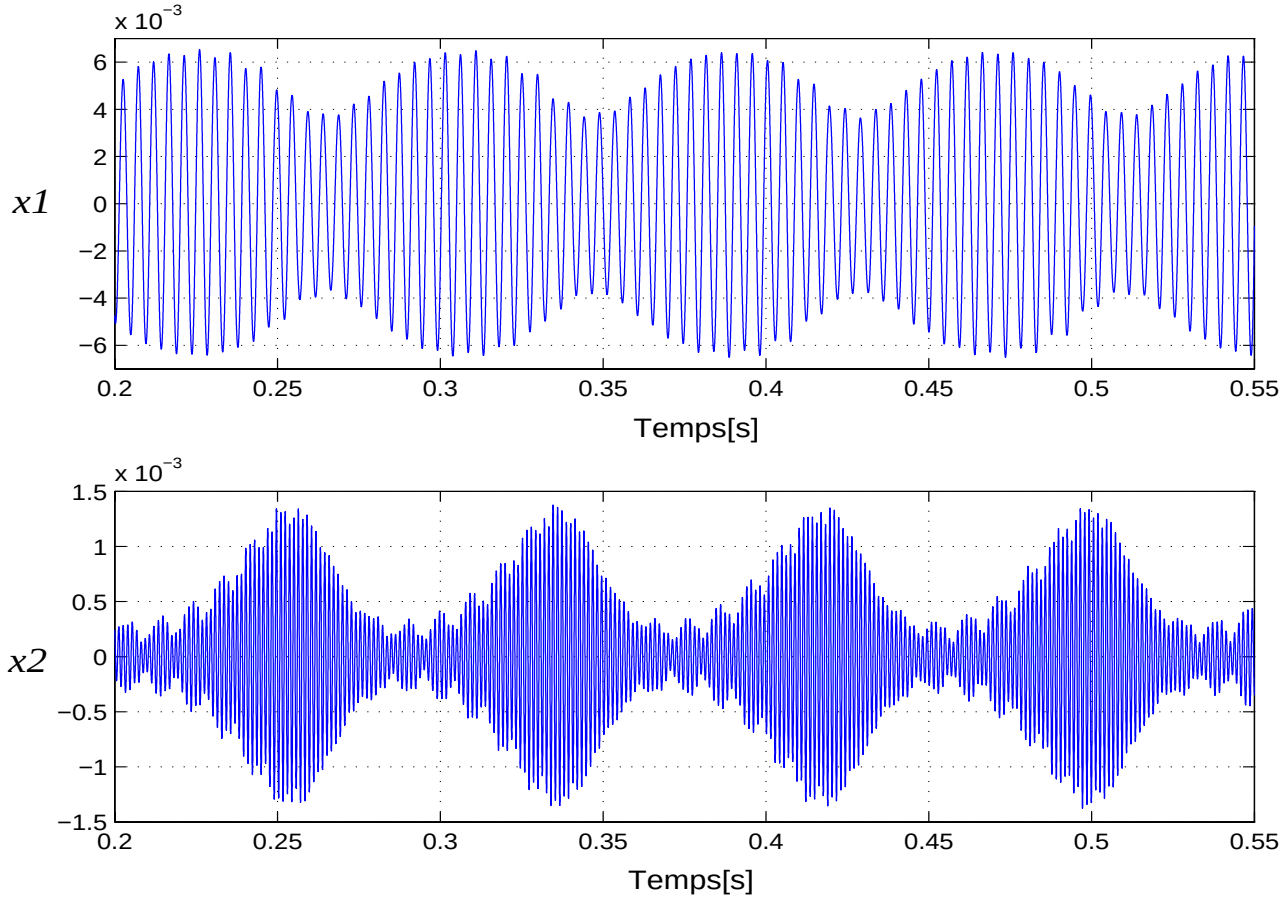

FIG. 3.11 – Test de simulation avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}$ et $\tau = 2.7 \times 10^{-3}$.

nous conduit aux équations différentielles

$$\dot{a}_{i\tau} = \frac{1}{\tau}\left(a_i - a_{i\tau}\right), \quad (i = 1, 2) \tag{3.36}$$

en complétant avec le résultat (3.35), cela donne finalement :

$$\begin{cases} \dot{a}_{1\tau} = \frac{1}{\tau}\left(a_1 - a_{1\tau}\right), \\ \dot{a}_1 = -\zeta_1\omega_1 a_1 + \frac{\varphi_1 A_{10}\cos(\chi_{10})}{2} a_{1\tau}\left[1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_{1\tau})^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_{2\tau})^2}{2}\right)\right], \\ \dot{a}_{2\tau} = \frac{1}{\tau}\left(a_2 - a_{2\tau}\right), \\ \dot{a}_2 = -\zeta_2\omega_2 a_2 + \frac{\varphi_1 A_{01}\cos(\chi_{01})}{2} a_{2\tau}\left[1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_{2\tau})^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_{1\tau})^2}{2}\right)\right]. \end{cases} \tag{3.37}$$

Le calcul des solutions d'équilibre donne le même résultat obtenu précédemment dans la section 3.3. La première étape pour prédire le comportement des amplitudes, est la détermination de la solution d'équilibre stable au sens des conditions établies précédemment (en considérant dans un premier

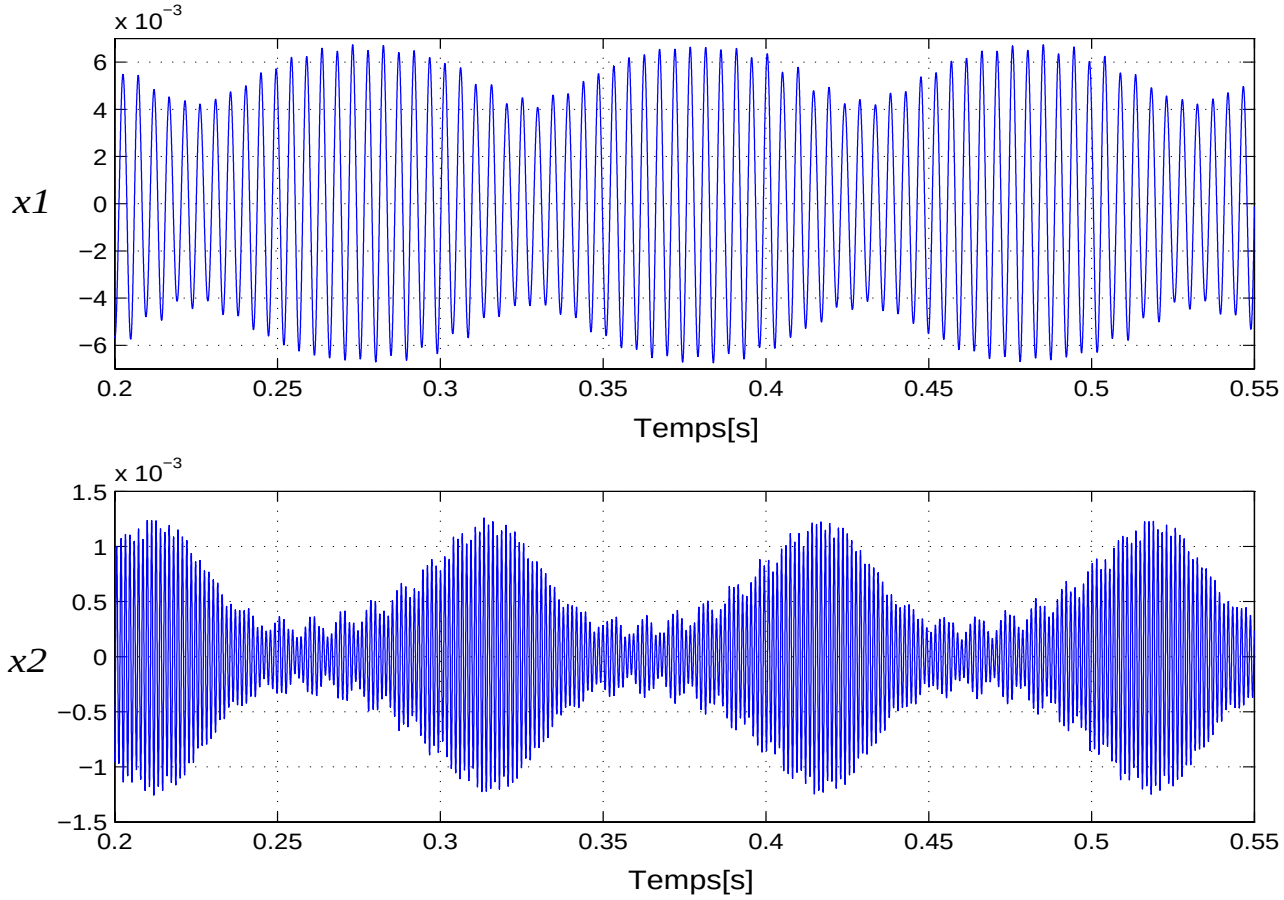

FIG. 3.12 – Approximation des sorties avec $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\zeta_1 = 10^{-2}$, $\zeta_2 = 5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_1 = -0.135$, $\varphi_3 = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}$ et $\tau = 2.7 \times 10^{-3}$.

temps que l'Hypothèse 2 est correcte). Cette étape nous permet de connaître vers quelle solution d'équilibre les amplitudes convergent ou oscillent. La deuxième étape est l'analyse de la stabilité de la solution d'équilibre dans le système (3.37), cela permet de prédire la présence d'oscillation sur les amplitudes. On peut appliquer la méthode indirecte de Lyapunov et calculer de la matrice générale du système linéarisé

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ \frac{\eta_{11}+2\zeta_1\omega_1}{2} - \frac{\eta_{13}}{2}\left(\frac{3(\omega_1 a_{1\tau})^2}{4} + \frac{(\omega_2 a_{2\tau})^2}{2}\right) & -\zeta_1\omega_1 & -\frac{\eta_{13}\omega_2^2}{2}a_{1\tau}a_{2\tau} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} \\ -\frac{\eta_{23}\omega_1^2}{2}a_{1\tau}a_{2\tau} & 0 & \frac{\eta_{21}+2\zeta_2\omega_2}{2} - \frac{\eta_{23}}{2}\left(\frac{3(\omega_2 a_{2\tau})^2}{4} + \frac{(\omega_1 a_{1\tau})^2}{2}\right) & -\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix}$$

A partir de cette matrice on peut prédire une convergence des amplitudes (pas d'oscillation) si les valeurs propres sont à partie réelle négative, ou une oscillation s'il existe des valeurs propres à partie

réelle positive. S'il une oscillation est prédite, alors la fréquence d'oscillation peut être approximée par la partie imaginaire des valeurs propres instables. Pour tester la validité de l'approximation du retard, la Figure 3.12 présente les sorties x_1 et x_2 approximée en utilisant (3.37), et cela pour les mêmes valeurs des paramètres utilisées dans la Figure 3.11.

3.11 Conclusion

Ce chapitre a été focalisé sur la proposition et l'analyse d'un modèle dynamique complet pour les instabilités de combustion. Le modèle est caractérisé par une structure en boucle fermée contenant retard, dérivées, non-linéarité statique, filtre passe bas et résonateurs linéaires. Le rôle crucial de chaque composante du modèle a été largement discuté. La conséquence importante de ce nouveau modèle est qu'il peut décrire le phénomène de coexistence de deux modes oscillatoires non-harmoniques, qui se produit réellement dans les processus de combustion. Par rapport au modèle proposé dans le chapitre 2, cela est sans doute dû à la présence du retard dans le retour de boucle.

Le modèle dans sa forme générale peut décrire plusieurs phénomènes observés en pratique. Un des phénomènes le plus important est le phénomène d'auto-oscillations simultanées non-harmoniques, qui se produit avec des fréquences ayant un rapport différent de 1, 3 et $\frac{1}{3}$. La cohérence de l'analyse théorique avec les résultats expérimentaux et de simulations est un fait important, indiquant que la méthode K-B est un puissant moyen d'analyse pour traiter les instabilités de combustion.

Le problème d'analyse dû à la nature compliquée du modèle, a été encore une fois surmonté par l'application de la méthode K-B et par l'approximation des effets du retard. La méthode K-B améliorée a permis d'ajouter dans les approximations les harmoniques multiples. Il est important de noter que les résultats obtenus dans ce chapitre sont des résultats d'approximation. Et comme pour toute approximation il existe des frontières de validité de l'approximation. Pour l'analyse du modèle proposé, il existe deux frontières de validité dépendantes des valeurs des paramètres du modèle. La première concerne la frontière de validité des approximations K-B et la deuxième concerne la frontière de validité des approximations des effets du retard.

Le modèle ainsi établi peut maintenant constituer une base pour traiter les instabilités et mettre en place un contrôle actif. Le prochain chapitre se focalisera sur l'établissement des conditions nécessaires pour l'extinction des oscillations.

Ce chapitre reprend en partie les résultats présentés dans (Annexe F) :

F. Bouziani, I.D. Landau, R.R. Bitmead, A. Voda-Besançon, *Analysis of a tractable model for combustion instability : the effect of delay and low pass filtering,* Accepté dans 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, Décembre 2006.

Chapitre 4

Extinction active des oscillations dans les processus de combustion en régime instable

4.1 Introduction

L'analyse du modèle proposé dans le chapitre 3 a démontré la cohérence du comportement de sorties du modèle avec la réalité. Pour cette raison, ce modèle est adopté dans ce chapitre pour envisager les conditions du contrôle actif qui permettent d'éteindre les oscillations dans les instabilités de combustion.

D'un point de vue pratique, il est possible de moduler une fraction du flux du combustible entrant dans la chambre de combustion. Dans [Dun03, DBS01], la modulation d'une fraction du flux de combustible a été incluse dans le modèle comme une excitation multiplicative, agissant au niveau de la sortie de la non-linéarité statique. Si on considère la même inclusion sur le modèle proposé, cela se traduit comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt} LPF\left\{(1+u)\left(\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt} LPF\left\{(1+u)\left(\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Au niveau de la fréquence du signal d'excitation, deux approches sont attractives. La première consiste à injecter dans le système en boucle ouverte une excitation en hautes fréquences. Cette approche de commande est connue dans le domaine d'automatique par contrôle vibrationnel [SZ97]. La correspondance peut être faite avec le pendule inversé excité par une excitation verticale, qui est modélisé par une commande multiplicative. Le rôle d'une telle commande est de modifier les caractéristiques dynamiques du système initialement instable. En effet, une excitation en hautes fréquences modifie les caractéristiques dynamiques du pendule inversé et rend le système stable sous certaines conditions. De la même manière, pour les instabilités de combustion, l'objectif de la commande est

d'éteindre les oscillations en modifiant la caractéristique responsable des instabilités. Autrement dit, l'objectif de cette commande est de remplacer l'amortissement négatif (introduit par la contre-réaction thermo-acoustique) par un autre positif (pour le pendule inversé il s'agit d'un autre type de modification). La deuxième approche consiste à introduire dans le système un signal contenant les fréquences résonantes. Alors, il convient mieux d'utiliser la mesure des oscillations de sortie pour faire un retour de boucle. Dans ce chapitre les deux approches sont étudiées en considérant leur application à un modèle réduit et au modèle complet.

4.2 Étude de la première approche : extinction des oscillations par une excitation en hautes fréquences

L'étude sur les effets d'une excitation en hautes fréquences est réalisée en considérant un modèle simplifié composé d'un seul résonateur (une seule équation de Van der Pol généralisée avec filtre passe bas). L'étude est basée sur la séparation de la sortie du système en deux composantes. La première est une composante lente qui varie à une fréquence proche de la fréquence naturelle. La deuxième est une composante rapide qui varie à une fréquence proche de la fréquence de l'excitation. Les difficultés rencontrées dans l'application de cette même procédure sur le modèle complet sont décrites en bref à la fin de cette section.

4.2.1 Extinction des oscillations sur un modèle réduit : modèle basé sur une équation de Van der Pol généralisée

L'équation de Van der Pol généralisée excitée par un signal en hautes fréquences, a été choisie comme modèle pour illustrer l'effet d'une telle excitation sur la modification des paramètres du modèle. Un filtre passe bas a été ajouté, car pour l'excitation en hautes fréquences ce dernier a des effets non-négligeables. Cela nous conduit au modèle présenté par la Figure 4.1 et à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{d}{dt} LPF \left\{ (1 + u(t)) \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} x - \frac{\varphi_{v3}}{3} x^3 \right) \right\}, \tag{4.2}$$

où $u(t)$ une excitation en hautes fréquences et LPF est l'opérateur de transfert du filtre passe bas. On considère que ce dernier respect l'Hypothèse 1, et possède une fréquence de coupure largement supérieure à ω.

En pratique l'excitation en hautes fréquences peut être riche en fréquences (exemple : bruit). Cependant, par souci de simplicité, on se restreint dans l'analyse à l'étude d'une excitation contenant

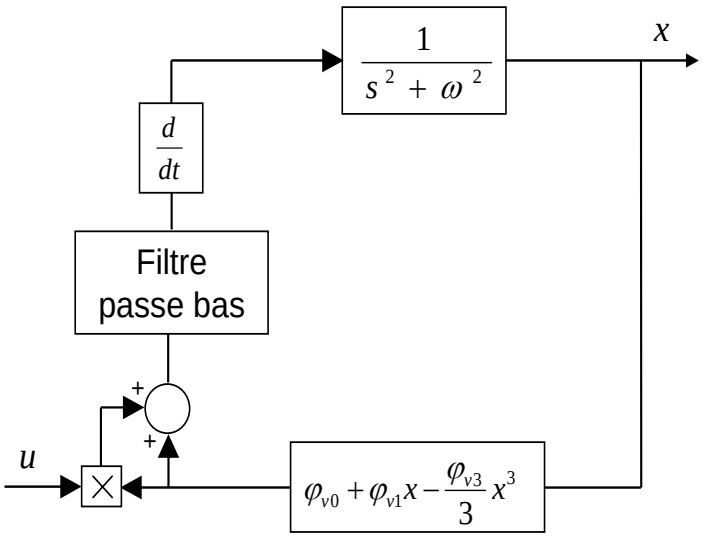

FIG. 4.1 – Schéma fonctionnel de la commande par excitation en hautes fréquences pour un modèle basé sur une équation de Van der Pol généralisée.

qu'une seule fréquence et qui s'exprime sous la forme sinusoïdale suivante :

$$u(t) = B_u \cos(\omega_u t), \tag{4.3}$$

où B_u est l'amplitude d'excitation et ω_u est la pulsation d'excitation vérifiant

$$\omega_u \gg \omega. \tag{4.4}$$

Soit z une variable quelconque, la moyenne de z sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{\omega_u}$ est notée comme suit

$$< z >= \frac{\omega_u}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_u}} z(\delta) d\delta \tag{4.5}$$

En tenant compte que le système sans commande est auto-oscillant avec une fréquence proche de ω, l'excitation de ce dernier avec une fréquence ω_u peut conduire à une coexistence et une interaction entre les deux fréquences dans la sortie système. Ce comportement rend la tâche de calcul de la solution complexe. Dans le but de réduire la complexité, on propose l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3

Considérons l'équation différentielle (4.2) et la commande (4.3) vérifiant la condition (4.4). On suppose que la sortie x peut être décomposée comme suit

$$x = y + \alpha, \tag{4.6}$$

où y et α sont des variables temporelles oscillantes vérifiant la condition

$$y \gg \alpha \tag{4.7}$$

avec

1). α : est une composante rapide qui oscille avec une fréquence proche de ω_u vérifiant

$$< \alpha >= \frac{\omega_u}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_u}} \alpha(\delta) d\delta \approx 0, \tag{4.8}$$

2). y : est une composante lente, qui oscille avec une fréquence proche de ω vérifiant

$$< x >= \frac{\omega_u}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_u}} x(\delta) d\delta \approx y(t), \tag{4.9}$$

Cette hypothèse est un moyen analytique de résolution de l'équation différentielle (4.2). Ce moyen a largement été utilisé dans la littérature et notamment pour les systèmes mécaniques, où il est connu par "Méthode de séparation directe des mouvements" [Ble00]. Une version plus développée de cette méthode a été utilisée pour traiter le pendule inversé [SZ97]. Cependant, cette version est applicable à une certaine classe de système dont les résonateurs de Van der Pol ne font partie. Pour cette raison, la méthode de base va être utilisée pour l'analyse de l'équation (4.2).
Une des conséquences importantes du point 1) de l'hypothèse est l'inégalité suivante :

$$\|\ddot{\alpha}\| \gg \|\dot{\alpha}\| \gg \|\alpha\|. \tag{4.10}$$

Cette inégalité nous permettra d'approximer α, en négligeant ce dernier devant $\dot{\alpha}$, et en négligeant $\dot{\alpha}$ devant $\ddot{\alpha}$. Le point 2) de l'hypothèse implique que sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{\omega_u}$, la variable y peut être considérée comme constante. En d'autres termes, la composante y obéit à une équation différentielle ne contenant pas de composantes rapides et résultant de la moyenne de l'équation (4.2) sur l'intervalle $\frac{2\pi}{\omega_u}$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \left\langle \frac{d}{dt} LPF \left\{ (1+u(t)) \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} (y+\alpha) - \frac{\varphi_{v3}}{3} (y+\alpha)^3 \right) \right\} \right\rangle. \tag{4.11}$$

Par soustraction entre les équations (4.2) et (4.11), on obtient l'équation différentielle régissant α :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha &= \frac{d}{dt} LPF \left\{ (1+u(t)) \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} (y+\alpha) - \frac{\varphi_{v3}}{3} (y+\alpha)^3 \right) \right\} \\ &\quad - \left\langle \frac{d}{dt} LPF \left\{ (1+u(t)) \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} (y+\alpha) - \frac{\varphi_{v3}}{3} (y+\alpha)^3 \right) \right\} \right\rangle. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Les équations différentielles (4.11) et (4.12), constituent *un système singulièrement perturbé* [kha92], dont les sorties y et α ont deux échelles du temps différentes. La moyenne sur un intervalle

de longueur $\frac{2\pi}{\omega_u}$ utilisée pour l'établissement de (4.11), a permis d'éliminer l'échelle du temps rapide et d'obtenir une équation avec une seule échelle du temps. Des équations plus explicites peuvent être obtenues en introduisant $x = y + \alpha$ dans le terme de droit de l'équation (4.2), ce qui donne après simplifications :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}LPF\left\{(1+u(t))\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}x-\frac{\varphi_{v3}}{3}x^3\right)\right\}\\
&=\frac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3-\varphi_{v3}\alpha^2 y+\left(\varphi_{v1}-\varphi_{v3}y^2\right)\alpha u-\frac{\varphi_{v3}}{3}\alpha^3 u+\left(\varphi_{v1}-\varphi_{v3}y^2\right)\alpha\right.\\
&\quad\left.-\frac{\varphi_{v3}}{3}\alpha^3+\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right)u-\varphi_{v3}\alpha^2 yu\right\}. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

En remplaçant (4.13) dans (4.11) et en tenant compte des Hypothèses 1 et 3 on trouve

$$\begin{aligned}
\ddot{y}+\omega^2 y=\frac{d}{dt}LPF&\left\{\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3-\varphi_{v3}\left\langle\alpha^2\right\rangle y+\left(\varphi_{v1}-\varphi_{v3}y^2\right)\langle\alpha u\rangle-\frac{\varphi_{v3}}{3}\left\langle\alpha^3 u\right\rangle\right.\\
&\left.+\left(\varphi_{v1}-\varphi_{v3}y^2\right)\langle\alpha\rangle-\frac{\varphi_{v3}}{3}\left\langle\alpha^3\right\rangle+\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right)\langle u\rangle-\varphi_{v3}\left\langle\alpha^2 u\right\rangle y\right\}. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

De la même manière on obtient

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}+\omega^2\alpha \;=\; &\frac{d}{dt}LPF\left\{-\varphi_{v3}\left(\alpha^2-\left\langle\alpha^2\right\rangle\right)y+\left(\varphi_{v1}-\varphi_{v3}y^2\right)(\alpha u-\langle\alpha u\rangle)-\frac{\varphi_{v3}}{3}\left(\alpha^3 u-\left\langle\alpha^3 u\right\rangle\right)\right.\\
&+\left(\varphi_{v1}-\varphi_{v3}y^2\right)(\alpha-\langle\alpha\rangle)-\frac{\varphi_{v3}}{3}\left(\alpha^3-\left\langle\alpha^3\right\rangle\right)+\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right)(u-\langle u\rangle)\\
&\left.-\varphi_{v3}\left(\alpha^2 u-\left\langle\alpha^2 u\right\rangle\right)y\right\}. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

cette équation peut maintenant être simplifiée pour trouve la solution α correspondante.

Lemme 10

Considérons les inégalités (4.4), (4.7) et (4.10). La solution de (4.15) peut être approximée par l'expression suivante :

$$\alpha=\frac{G(\omega_u)B_u}{\omega_u}\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right)\sin(\omega_u t-\phi(\omega_u)) \qquad (4.16)$$

Preuve

Le calcul de la moyenne de u donne :

$$<u>=\frac{\omega_u}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_u}}B_u\cos(\omega_u\delta)d\delta=0, \qquad (4.17)$$

En considérant les inégalités (4.7) et (4.10) , les termes contenants α et $\dot{\alpha}$ dans (4.15) peuvent être négligés devant $\ddot{\alpha}$ et y. Et en utilisant le résultat (4.17), cela conduit à l'approximation suivante :

$$\ddot{\alpha}=\frac{d}{dt}LPF\left\{\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right)B_u\cos(\omega_u t)\right\}. \qquad (4.18)$$

En introduisant les effets du filtre LPF (sous l'Hypothèse 1) et de la dérivée, l'équation (4.18) devient

$$\ddot{\alpha} = -\omega_u G(\omega_u) B_u \left\{ \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} y - \frac{\varphi_{v3}}{3} y^3 \right) \sin(\omega_u t - \phi(\omega_u)) \right\}. \tag{4.19}$$

La condition (4.4) fait que l'intégration de l'équation différentielle (4.19) peut être finalement approchée par l'expression décrite dans le lemme 10.

La présence du terme $\frac{G(\omega_u)}{\omega_u}$, qui est de valeur faible (si ω_u possède une valeur importante), dans l'expression de α, confirme clairement l'inégalité (4.7). Le résultat (4.16) nous permet de calculer l'effet de l'excitation u en hautes fréquences sur la composante lente y, et ainsi établir l'expression de x.

Lemme 11

Considérons le système régit par l'équation différentielle (4.2). Sous l'Hypothèse 3, la sortie du système x peut être approchée par

$$\begin{aligned} x = a\cos(\omega t + \theta) + \frac{G(\omega_u) B_u}{\omega_u} \Big(\varphi_{v0} + a \Big(\varphi_{v1} - \frac{\varphi_{v3}}{4} a^2 \Big) \cos(\omega t + \theta) \\ - \frac{\varphi_{v3}}{12} a^3 \cos(3\omega t + 3\theta) \Big) \sin(\omega_u t - \phi(\omega_u)) \end{aligned} \tag{4.20}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{G(\omega)}{2} \cos(\phi(\omega)) \left\{ T_1 + \frac{3}{4} T_3 a^2 + \frac{5}{8} T_5 a^4 + \frac{35}{6} T_7 a^6 + \frac{63}{128} T_9 a^8 \right\} a \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{G(\omega)}{2} \sin(\phi(\omega)) \left\{ T_1 + \frac{3}{4} T_3 a^2 + \frac{5}{8} T_5 a^4 + \frac{35}{6} T_7 a^6 + \frac{63}{128} T_9 a^8 \right\} \end{cases} \tag{4.21}$$

où T_1, T_3, T_5, T_7 et T_9 sont des constantes détaillées plus loin.

Preuve

Si on considère le résultat (4.16), cela implique

$$\bullet \ \langle \alpha \rangle = 0, \tag{4.22}$$

$$\bullet \ \left\langle \alpha^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{G(\omega_u) B_u}{\omega_u} \right)^2 \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} y - \frac{\varphi_{v3}}{3} y^3 \right)^2, \tag{4.23}$$

$$\bullet \ \left\langle \alpha^3 \right\rangle = 0, \tag{4.24}$$

$$\bullet \ \langle \alpha u \rangle = -\frac{G(\omega_u) B_u^2}{2\omega_u} \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} y - \frac{\varphi_{v3}}{3} y^3 \right) \sin(\phi(\omega_u)), \tag{4.25}$$

$$\bullet \ \left\langle \alpha^2 u \right\rangle = 0, \tag{4.26}$$

$$\bullet \ \left\langle \alpha^3 u \right\rangle = -\frac{3 G(\omega_u)^3 B_u^4}{8\omega_u^3} \left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1} y - \frac{\varphi_{v3}}{3} y^3 \right)^3 \sin(\phi(\omega_u)). \tag{4.27}$$

La signification de ces résultats est que, la commande multiplicative en hautes fréquences a des effets sur la composante lente y uniquement à travers les multiplications entre α et u de degré pair. Vu les

degrés des multiplications, on peut considérer ces derniers comme des apports énergétiques. Dans le souci d'alléger les équations on note

$$M_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{G(\omega_u)B_u}{\omega_u}\right)^2, \quad M_2 = -\frac{G(\omega_u)B_u^2}{2\omega_u}\sin(\phi(\omega_u)) \text{ et } M_3 = -\frac{G(\omega_u)^3 B_u^4}{8\omega_u^3}\sin(\phi(\omega_u)). \tag{4.28}$$

Ces quantités sont respectivement aussi les images des énergies (ou modifications) apportées par (4.23), (4.25) et (4.27). En injectant (4.17), (4.22), (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) et (4.27) dans (4.14), on obtient après simplifications

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{d}{dt}LPF\left\{T_0 + T_1 y + T_2 y^2 + T_3 y^3 + T_4 y^4 + T_5 y^5 + T_6 y^6 + T_7 y^7 + T_9 y^9\right\} \tag{4.29}$$

où

$$\left\{\begin{array}{c} T_0 = \varphi_{v0}\left(1 + \varphi_{v1}M_2 - \varphi_{v0}^2\varphi_{v3}M_3\right), \quad T_1 = \varphi_{v1} - \varphi_{v0}^2\varphi_{v3}M_1 + \varphi_{v1}^2 M_2 - 3\varphi_{v0}^2\varphi_{v1}\varphi_{v3}M_3, \\ T_2 = -\varphi_{v0}\varphi_{v3}\left(2\varphi_{v1}M_1 + M_2 + 3\varphi_{v1}^2 M_3\right), \\ T_3 = -\frac{\varphi_{v3}}{3}\left(1 + 3\varphi_{v1}^3 M_1 + 4\varphi_{v1}M_2 + 3\left(\varphi_{v1}^3 - \varphi_{v0}^2\varphi_{v3}\right)M_3\right), \\ T_4 = \frac{2\varphi_{v0}\varphi_{v3}^2}{3}\left(M_1 + 3\varphi_{v1}M_3\right), \quad T_5 = \frac{\varphi_{v3}^2}{3}\left(2\varphi_{v1}M_1 + M_2 + 3\varphi_{v1}^2 M_3\right), \\ T_6 = -\frac{\varphi_{v0}\varphi_{v3}^3}{3}M_3, \quad T_7 = -\frac{\varphi_{v3}^3}{9}\left(M_1 + 3\varphi_{v1}M_3\right), \quad T_9 = \frac{\varphi_{v3}^4}{27}M_3. \end{array}\right. \tag{4.30}$$

Sachant que y est une composante lente qui varie à une fréquence proche de ω, et en tenant compte de la forme (4.29), alors y peut être approchée en utilisant la méthode K-B. En considérant la mise forme (1.8), par identification on trouve la fonction suivante :

$$f(y) = \frac{d}{dt}LPF\left\{T_0 + T_1 y + T_2 y^2 + T_3 y^3 + T_4 y^4 + T_5 y^5 + T_{64} y^6 + T_7 y^7 + T_9 y^9\right\}, \tag{4.31}$$

tenant compte de l'Hypothèse 1 et la mise en forme (1.12), l'introduction de $y = a\cos(\omega t + \theta)$ dans la fonction (4.31) donne après simplifications :

$$\begin{aligned} f(a\cos(\omega t + \theta)) = -\omega G(\omega) a\left\{T_1 + \frac{3}{4}T_3 a^2 + \frac{5}{8}T_5 a^4 + \frac{35}{64}T_7 a^6 + \frac{63}{128}T_9 a^8\right\}\sin(\omega t + \theta - \phi(\omega)) \\ + H_0(a) + \sum_{n=2}^{9}\left\{H_n(a)\sin\left(n(\omega t + \theta)\right) + G_n(a)\cos\left(n(\omega t + \theta)\right)\right\}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

où H_0, H_n et G_n sont des fonctions polynômiaux de a. En appliquant les règles (1.9) et (1.10) sur (4.32) de l'approximation K-B, on obtient

$$y = a\cos(\omega t + \theta) \tag{4.33}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{G(\omega)}{2}\cos(\phi(\omega))\left\{T_1 + \frac{3}{4}T_3 a^2 + \frac{5}{8}T_5 a^4 + \frac{35}{64}T_7 a^6 + \frac{63}{128}T_9 a^8\right\}a \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{G(\omega)}{2}\sin(\phi(\omega))\left\{T_1 + \frac{3}{4}T_3 a^2 + \frac{5}{8}T_5 a^4 + \frac{35}{64}T_7 a^6 + \frac{63}{128}T_9 a^8\right\} \end{array}\right. \tag{4.34}$$

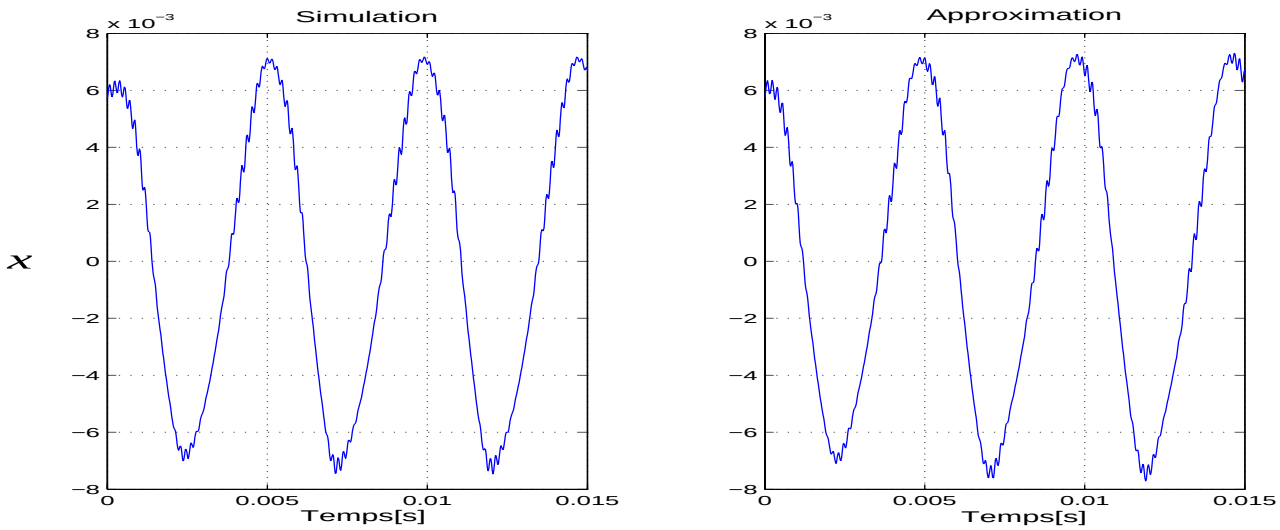

FIG. 4.2 – Test de simulation avec $\omega = 2\pi \times 210$, $\omega_u = 2\pi \times 6300$, $B_u = 50$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$, $LPF = \frac{2\pi\times 2100}{s+2\pi\times 2100}$ et $a(0) = 6 \times 10^{-3}$.

Par assemblage de (4.6), (4.16), (4.33) et (4.34) on en déduit le résultat présenté par le lemme 11.

Par la méthodologie de résolution présentée ci-dessus, la sortie du système a été séparée en deux composantes. La composante rapide a été approximée en négligeant l'effet de la contre réaction physique sur cette dernière. Cela peut être expliqué par le fait que la fréquence d'excitation ω_u n'est pas une fréquence de résonance du système, et donc le système (avec sa contre-réaction physique) réagit à l'excitation comme un filtre passe bas. En contre partie, les effets de cette composante sur la composante lente n'ont pas été négligés. Ces effets peuvent changer la dynamique de la composante lente qui est à l'origine auto-oscillante. Le résultat obtenu dans le lemme 11 prédit que la solution x est la superposition d'une oscillation de fréquence ω et d'amplitude importante avec une oscillation de fréquence ω_u et d'amplitude très faible devant la première. Cela peut être vérifié par le test de simulation présenté dans la Figure 4.2, où la partie gauche est la sortie simulée et la partie droite est la sortie approximée.

A partir de l'examen des expressions de T_i ($i = 1, .., 9$) intervenant dans (4.21), il est clair que l'amplitude et la fréquence d'excitation intervient dans la dynamique de l'auto-oscillation du système (celle avec fréquence ω). A ce niveau d'analyse, il est important de voir si une telle influence peut changer radicalement la dynamique de l'auto-oscillation d'une manière à l'éteindre. Cela signifie que les paramètres de l'excitation doivent être choisi convenablement pour que l'amplitude a soit asymptotiquement stable à l'origine. A travers la linéarisation de la première équation de (4.34), on déduit aisément que l'amplitude est localement asymptotiquement stable à l'origine si la condition

suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
&T_1 < 0 \\
&\Rightarrow \varphi_{v1} - \varphi_{v0}^2\varphi_{v3}M_1 + \varphi_{v1}^2 M_2 - 3\varphi_{v0}^2\varphi_{v1}\varphi_{v3}M_3 < 0 \\
&\Rightarrow \varphi_{v1} - \tfrac{\varphi_{v0}^2\varphi_{v3}}{2}\left(\tfrac{G(\omega_u)B_u}{\omega_u}\right)^2 - \tfrac{\varphi_{v1}^2 G(\omega_u)B_u^2}{2\omega_u}\sin(\phi(\omega_u)) + \tfrac{3\varphi_{v0}^2\varphi_{v1}\varphi_{v3}G(\omega_u)^3 B_u^4}{8\omega_u^3}\sin(\phi(\omega_u)) < 0 \quad (4.35)
\end{aligned}$$

pour une fréquence ω_u élevée et pour une valeur de $\sin(\phi(\omega_u))$ non-négligeable, la condition peut être approximée en négligeant le deuxième et le quantième terme du côté gauche de l'inégalité (4.35), ce qui donne :

$$B_u > B_{crt} \text{ avec } B_{crt} = \sqrt{\frac{2\omega_u}{\varphi_{v1}G(\omega_u)\sin(\phi(\omega_u))}} \quad (4.36)$$

cette condition est une condition nécessaire pour que l'extinction des oscillations se produit. Cependant, étant donné que la stabilité à l'origine est que locale, cette condition n'est pas suffisante pour qu'obligatoirement l'extinction des oscillations se produit. En général, le calcul numérique des solutions d'équilibre de l'équation (4.34) sous la satisfaction de (4.35) donne ; une solution d'équilibre stable à l'origine $a_{s1} = 0$, une deuxième solution d'équilibre stable a_{s2} proche de l'amplitude d'oscillation stationnaire du système sans excitation, et une troisième solution d'équilibre instable a_{s3} de valeur inférieure à celle de la deuxième. Pour dés valeurs différentes de B_u, les valeurs des solutions d'équilibre varient. Un exemple de ces variations est présenté dans la Figure 4.3.

Il a été observé que si l'amplitude initiale $a(t_u^+)$ après l'instant d'application de la commande t_u est inférieure à la solution d'équilibre instable a_{s3}, l'extinction des oscillations se produit. Quand l'amplitude initiale est supérieure à a_{s3}, l'extinction des oscillations ne se produit pas et la composante y oscille avec une amplitude égale à a_{s2}. Ce comportement résulte du fait que la solution d'équilibre instable est répulsive, au même moment que les autres solutions sont attractive.

Pour que l'extinction des oscillations se produit, la valeur de B_u (en fixant ω_u) doit être choisie de telle façon à ce que la valeur de l'amplitudes initiale $a(t_u^+)$ des oscillations de fréquence ω doit être inférieure à a_{s3}. L'augmentation de la valeur de B_u, entraîne l'augmentation de la valeur de a_{s3} (voir Figure 4.3). Cela fait que pour augmenter les chances d'extinction des oscillations une valeur de B_u importante est nécessaire. D'un autre côté, la valeur de $a(t_u^+)$ dépend aussi de la valeur de B_u. En effet, si on considère que la réponse du système avant l'application de la commande $x(t_u^-)$ peut s'exprimer par $a(t_u^-)\cos(\omega t_u^- + \theta(t_u^-))$, alors par principe de continuité les équations suivantes doivent être vérifiées (obtenues en négligeant $\frac{\omega}{\omega_u}$, $\dot{a}$ et $\dot{\theta}$)

$$\begin{cases}
a(t_u^-)\cos(\omega t_u^- + \theta(t_u^-)) = \frac{G(\omega_u)B_u}{\omega_u}\left(\varphi_{v0} + a(t_u^+)\left(\varphi_{v1} - \frac{\varphi_{v3}}{4}a(t_u)^2\right)\cos(\omega t_u^+ + \theta(t_u^+))\right. \\
\left. -\frac{\varphi_{v3}}{12}a(t_u^+)^3\cos(3\omega t_u^+ + 3\theta(t_u^+))\right)\sin(\omega_u t_u^+ - \phi(\omega)) + a(t_u^+)\cos(\omega t_u^+ + \theta(t_u^+)), \\
-\omega a(t_u^-)\sin(\omega t_u^- + \theta(t_u^-)) = G(\omega_u)B_u\left(\varphi_{v0} + a(t_u^+)\left(\varphi_{v1} - \frac{\varphi_{v3}}{4}a(t_u^+)^2\right)\cos(\omega t_u^+ + \theta(t_u^+))\right. \\
\left. -\frac{\varphi_{v3}}{12}a(t_u^+)^3\cos(3\omega t_u^+ + 3\theta(t_u^+))\right)\cos(\omega_u t_u^+ - \phi(\omega)) - \omega a(t_u^+)\sin(\omega t_u^+ + \theta(t_u^+)).
\end{cases} \quad (4.37)$$

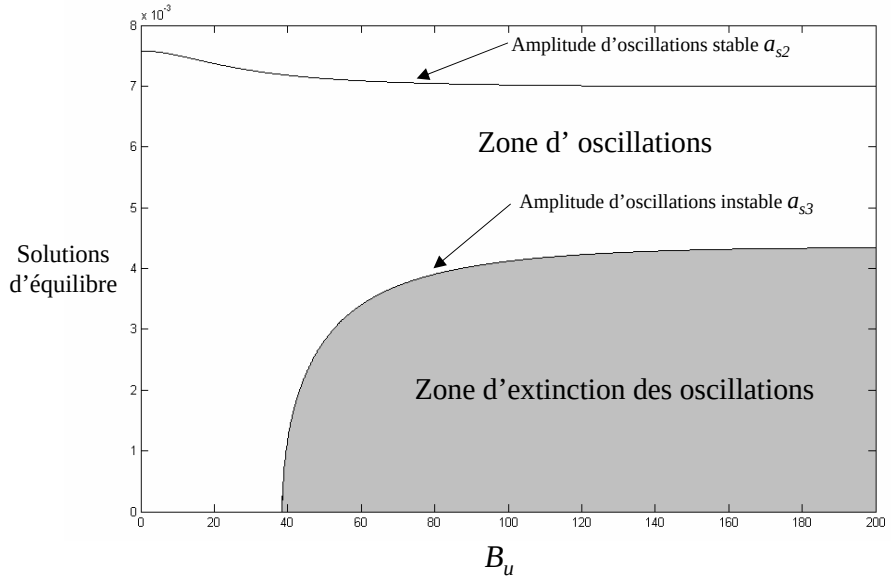

FIG. 4.3 – Exemple de courbes de variations des solutions d'équilibre en fonction de l'amplitude d'excitation avec $\omega = 2\pi \times 210$, $\omega_u = 2\pi \times 6300$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$, et $LPF = \frac{2\pi \times 2100}{s+2\pi \times 2100}$.

Cela fait que pour le choix de la valeur de B_u, le comportement du système à l'instant t_u^- est très important. Au niveau de l'instant d'application de la commande, on distingue deux situations extrêmes :

- l'apparition des oscillations est détectée immédiatement (elles ont encore une amplitude faible),
- les oscillations sont déjà en régime stationnaire.

Par exemple quand la commande est appliquée à la détection des oscillations sur la sortie, la valeur de B_u nécessaire pour l'extinction des oscillations est faible. Pour cette situation, un exemple de simulation est présenté dans la Figure 4.4. La situation est plus complexe lorsque le régime stationnaire des oscillations est établi, car l'application de la commande peut éteindre les oscillations comme elle peut engendrer des oscillations avec amplitude a_{s2}. La difficulté réside dans le choix de B_u vérifiant $a(t_u^+) < a_{s3}$. En général, il faut que la valeur de B_u soit très grande pour qu'une telle condition soit vérifiée (voir équation (4.37)). Cependant, l'amplitude des oscillations en hautes fréquences restantes (correspondantes à α) après l'application de la commande est proportionnelle à B_u. Cette caractéristique mène à plus de restriction dans le choix de l'amplitude B_u dont la valeur doit respecter l'Hypothèse 3 de départ. Pour minimiser α après l'extinction des oscillations dans y, la valeur de B_u peut être réduite progressivement jusqu'à atteindre une valeur de B_u avoisinant B_{crt}. Ainsi cette méthodologie permet de minimiser les oscillations dans la sortie du système. La Figure 4.5 présente un exemple de simulation où l'extinction des oscillations dans y se produit et les oscillations en hautes fréquences sont réduites progressivement. Il est à noter que si $\varphi_0 = 0$, alors l'extinction

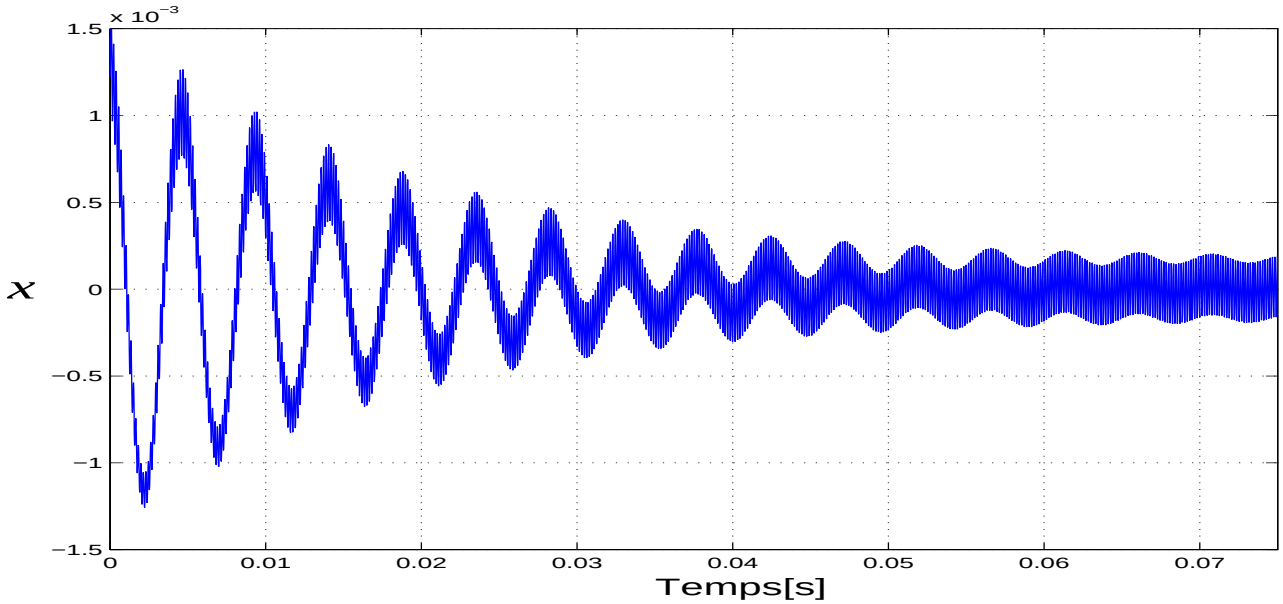

FIG. 4.4 – Extinction des oscillations à l'apparition de l'instabilité avec $\omega = 2\pi \times 210$, $B_u = 50$, $\omega_u = 2\pi \times 6300$, $a(0) = 1.5 \times 10^{-3}$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$, et $LPF = \frac{2\pi \times 2100}{s + 2\pi \times 2100}$.

des oscillations dans y entraîne l'extinction des oscillations en hautes fréquences, ce qui mène à une disparition totale des oscillations dans la sortie du modèle.

4.2.2 Extinction des oscillations sur le modèle complet des instabilités de combustion

Une étude a été réalisée pour l'établissement des conditions d'extinction des oscillations dans les instabilités de combustion. Le modèle (4.1) a été considéré avec une commande sinusoïdale en hautes fréquences. L'étude consistée a appliquer une extension de la procédure précédemment appliquée sur le modèle réduit. En d'autres termes, l'étude a été basée sur une procédure de séparation de x_1 et x_2, chacune en deux composantes

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_1 \\ x_2 = y_2 + \alpha_2 \end{cases} \tag{4.38}$$

où y_1 et y_2 sont respectivement des composantes qui varient lentement avec des fréquences proches de ω_1 et ω_2, α_1 et α_2 sont respectivement des composantes qui varient rapidement avec des fréquences proches de la fréquence de commande.

Les équations différentielles régissant y_1 et y_1 obtenues à travers la séparation des dynamiques (Méthode de séparation directe des mouvements), sont tout à fait analysables par la méthode K-B si

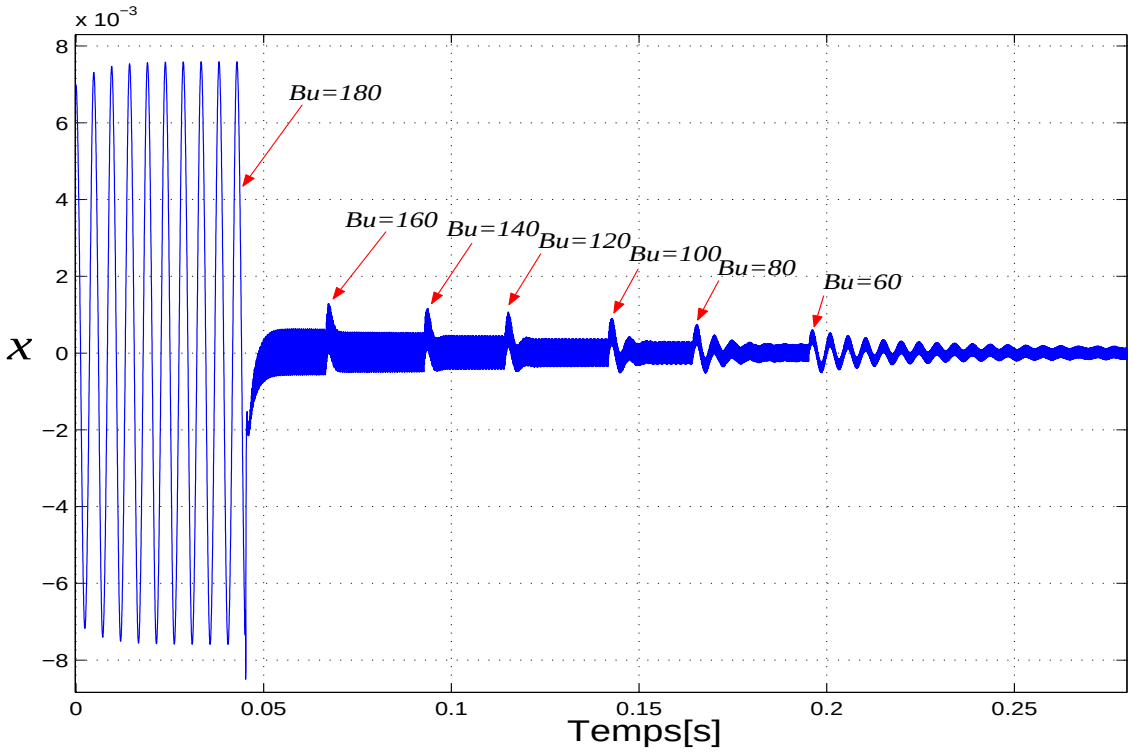

FIG. 4.5 – Méthodologie pour éteindre les oscillations en régime permanent avec $\omega = 2\pi \times 210$, $\omega_u = 2\pi \times 6300$, $\varphi_0 = 0.45$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$ et $LPF = \frac{2\pi \times 2100}{s + 2\pi \times 2100}$.

les expressions de α_1 et α_2 été connues. Cependant la difficulté principale de cette analyse se présente au niveau de la détermination des expressions de α_1 et α_2. Dans la section précédente l'expression de la composante α a été établie en négligeant l'effet de la contre réaction sur cette dernière. Cela n'est pas très correct si on applique la même procédure pour la détermination des expressions de α_1 et α_2. Puisque d'une part l'existence de deux dérivées dans la contre réaction du modèle, fait que l'effet de la contre réaction sur les composantes rapides est tout à fait comparable à celui de la voie directe. Et d'autre part puisque, l'influence du retard sur la dynamique des composantes rapides est très importante, elle ne peut être approximée par un déphasage constant (Hypothèse 2).

La difficulté d'analyse des effets de l'excitation en hautes fréquences sur le modèle des instabilités est due à la nature complexe du modèle. Une analyse efficace nécessite un outil performant permettant de surmonter les difficultés liées à l'existence de deux dérivées et du retard dans la contre réaction du modèle.

4.3 Étude de la deuxième approche : extinction des oscillations par retour de boucle

Cette deuxième approche sera étudiée dans un premier temps sur un modèle réduit. Ensuite, elle sera étudiée dans le cas du modèle complet. De point de vue analytique, l'étude de la possibilité d'extinction des oscillations par retour de boucle nécessite que la constante φ_{v0} de la caractéristique statique du modèle soit non nulle (ce qui est le cas dans les phénomènes des instabilités de combustion). Alors pour étudier cette approche, on considère dans cette section que φ_{v0} est non nulle.

Pour le modèle complet des instabilités de combustion, la possibilité de traiter les instabilités par un retour de boucle linéaire ou non-linéaire est étudiée. L'idée de base est d'utiliser la mesure de pression p pour l'extinction des oscillations, étant donné que cette dernière est mesurable pratiquement. Pour ce faire, on envisage deux types de commande. Une basée sur le retour linéaire et l'autre basée sur un retour non-linéaire (cependant dans les deux cas, la commande est non-linéaire due à la nature multiplicative de l'action de commande).

L'étude des deux commandes nécessite l'utilisation de la méthode d'analyse K-B. Les difficultés liées à la présence du filtre passe bas et du retard seront traitées en considérant les Hypothèses 1 et 2. Pour des tests de simulation illustratifs, les valeurs des paramètres utilisées dans le chapitre 3 pour le fonctionnement d'auto-oscillations simultanées non-harmoniques seront employées dans tout les tests de simulation. La validité des résultats obtenus impose un niveau de confiance élevé dans l'approximation K-B. Pour ce faire, on considère l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4

Considérons a_1 et a_2 les amplitudes des oscillations obtenues par l'approximation K-B.

- *Si les amplitudes a_1 et a_2 sont asymptotiquement localement stables à l'origine, alors le système est asymptotiquement localement stable à l'origine.*
- *Si les amplitudes a_1 et a_2 sont asymptotiquement globalement stables à l'origine, alors le système est asymptotiquement localement stable à l'origine.*

4.3.1 Application sur un modèle réduit : modèle basé sur une équation de Van der Pol généralisée

Pour illustrer l'efficacité du retour de boucle avec un commande multiplicative, on utilise dans cette partie un modèle réduit basé sur l'équation de Van der Pol généralisée. La commande est une fonction de la sortie, elle est introduite dans le modèle d'une manière multiplicative, tel que dans

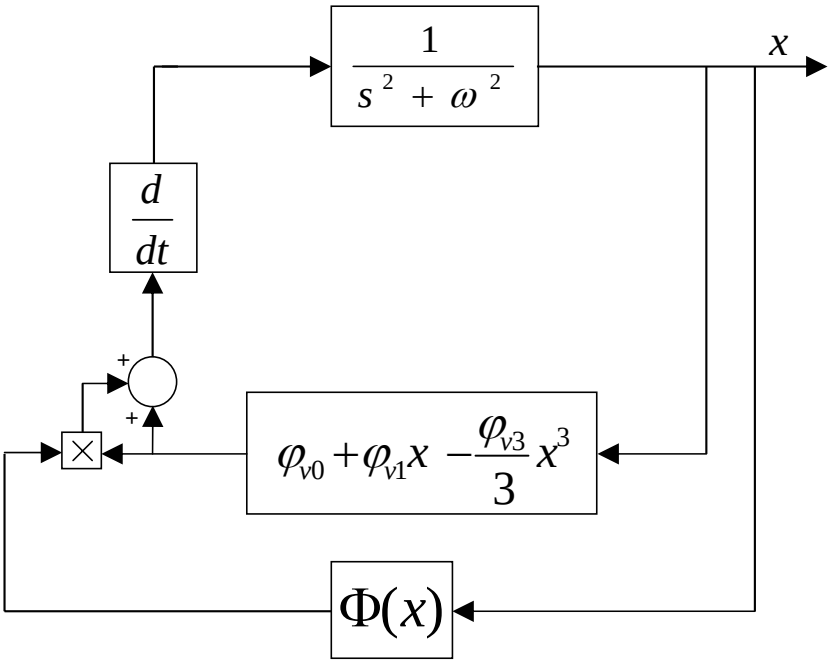

FIG. 4.6 – Schéma fonctionnel de la commande par retour de boucle pour un modèle réduit

le cas du modèle complet. Cela conduit au schéma bloc de la Figure 4.6 et à un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{d}{dt}\left\{(1 + \Phi(x))\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}x - \frac{\varphi_{v3}}{3}x^3\right)\right\}, \tag{4.39}$$

où $\Phi(x)$ une fonction polynômial de x.

Il est important de noter que pour une équation de Van der Pol généralisée, la solution x est oscillante avec une fréquence stationnaire proche de ω et une amplitude proche de $2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$. Pour éteindre cette oscillation, la loi de commande $\Phi(x)$ doit donner un système (4.39) asymptotiquement stable à l'origine. Pour cette raison on considère le lemme suivant :

Lemme 12

Soit l'équation (4.39). Pour une fonction

$$\Phi(x) = -Kx - \frac{1}{\varphi_{v0}}\left(\varphi_{v1}x - \frac{\varphi_{v3}}{3}x^3\right), \tag{4.40}$$

où K est une constante du même signe que φ_{v0}, le système est localement asymptotiquement stable à l'origine.

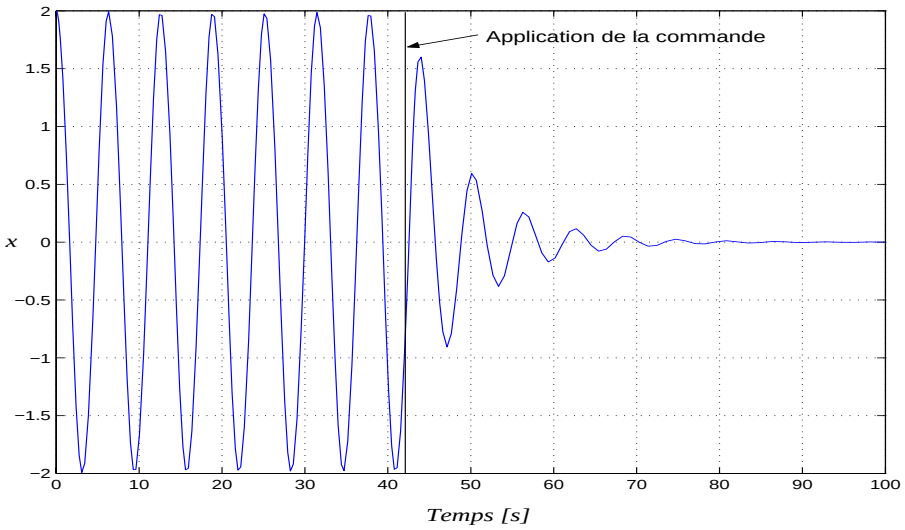

FIG. 4.7 – Test de simulation du retour de boucle sur un modèle réduit avec $K = 1$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v3} = \varphi_{v1} = 0.1$ et $\omega = 1$.

Preuve

En remplacent la fonction (4.40) dans (4.39) on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \frac{d}{dt}\left\{\varphi_{v0} - K\varphi_{v0}x - \left(K\varphi_{v1} + \frac{\varphi_{v1}^2}{\varphi_{v0}}\right)x^2 + \left(K\frac{\varphi_{v3}}{3} + \frac{2\varphi_{v1}\varphi_{v3}}{3\varphi_{v0}}\right)x^4 - \frac{\varphi_{v3}^2}{9\varphi_{v0}}x^6\right\} \\ &= -K\varphi_{v0}\dot{x} - 2\left(K\varphi_{v1} + \frac{\varphi_{v1}^2}{\varphi_{v0}}\right)x\dot{x} + 4\left(K\frac{\varphi_{v3}}{3} + \frac{2\varphi_{v1}\varphi_{v3}}{3\varphi_{v0}}\right)x^3\dot{x} - 2\frac{\varphi_{v3}^2}{3\varphi_{v0}}x^5\dot{x} \end{aligned} \quad (4.41)$$

La mise de cette équation sous forme d'équations d'état avec $z_1 = x$ et $z_2 = \dot{x}$ donne :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\omega^2 z_1 - K\varphi_{v0}z_2 - 2\left(K\varphi_{v1} + \frac{\varphi_{v1}^2}{\varphi_{v0}}\right)z_1 z_2 + 4\left(K\frac{\varphi_{v3}}{3} + \frac{2\varphi_{v1}\varphi_{v3}}{3\varphi_{v0}}\right)z_1^3 z_2 - 2\frac{\varphi_{v3}^2}{3\varphi_{v0}}z_1^5 z_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

Le calcul de la matrice du système linéarisé autour de l'origine donne :

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -K\varphi_{v0} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

étant donné que K et φ_{v0} possèdent le même signe (voir lemme 12), il en résulte que les valeurs propres de la matrice A_z sont à partie réelle négative. Par application de la méthode indirecte de Lyapunov, on en déduit que le système est localement asymptotiquement stable à l'origine.

La stabilité locale à l'origine signifie que l'extinction des oscillations est possible, et elle se produit dans un domaine local autour de l'origine qui dépend de la validité de la linéarisation (qui peut être estimé [kha92]). L'extinction des oscillations est vérifiée par le test de simulation présenté dans la Figure 4.7.

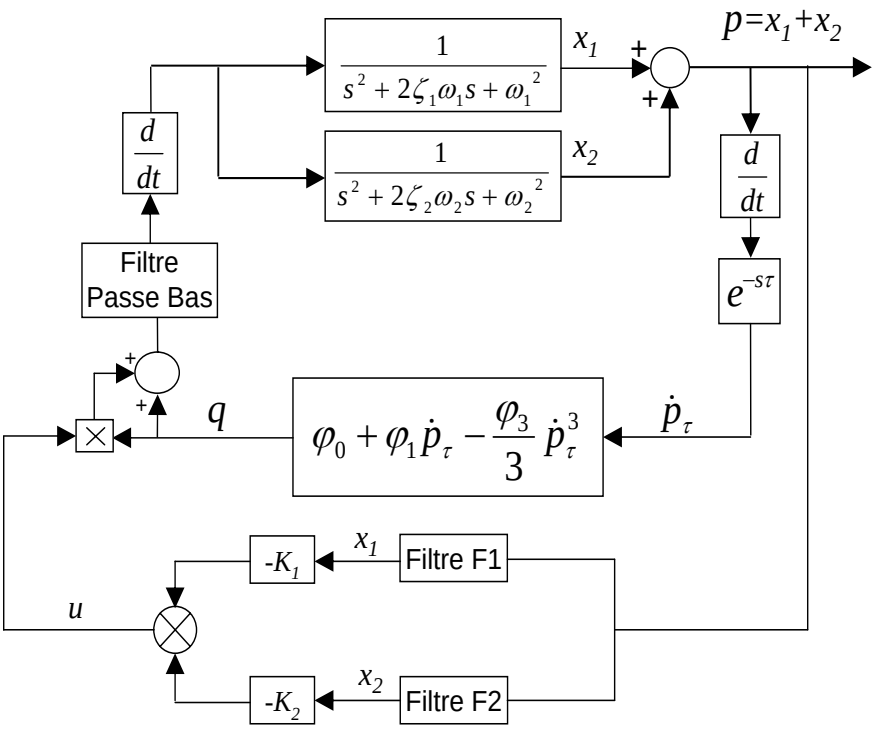

FIG. 4.8 – Schéma fonctionnel de la commande par retour linéaire

4.3.2 Extinction des oscillations sur le modèle complet par retour linéaire : compensation de l'amortissement négatif

Pour le retour linéaire, la loi de commande va être de la forme $u = -K_1x_1 - K_2x_2$, où K_1 et K_2 sont des gains. Malheureusement, la mesure de pression $p = x_1+x_2$, et pour obtenir respectivement x_2 et x_1 des filtres passes bandes $F1$ et $F2$ doivent être considérés. Dans le but d'explorer la possibilité de stabilisation du système par un retour linéaire, dans ce qui suit, on supposera que x_2 et x_1 sont disponibles. Le schéma de commande dans ce cas, se présente sous la forme montrée dans la Figure 4.8. Il en résulte, que le système obéit aux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt}LPF\left\{(1 - K_1x_1 - K_2x_2)\left(\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt}LPF\left\{(1 - K_1x_1 - K_2x_2)\left(\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}. \end{cases} \tag{4.44}$$

Le but de cette commande est de compenser l'amortissement négatif introduit par la contre réaction physique et d'introduire un autre positif qui va rendre le système localement asymptotiquement stable à l'origine. Pour cette raison, les gains K_1 et K_2 doivent être choisis convenablement

Lemme 13

Soit le système représenté par les équations (4.44). Si les conditions

$$\begin{cases} K_1\varphi_0 G(\omega_1)\cos(\phi(\omega_1)) \ \rangle \ \omega_1\varphi_1 G(\omega_1)\sin(\phi(\omega_1)+\omega_1\tau) - 2\zeta_1\omega_1, \\ K_2\varphi_0 G(\omega_2)\cos(\phi(\omega_2)) \ \rangle \ \omega_2\varphi_1 G(\omega_2)\sin(\phi(\omega_2)+\omega_2\tau) - 2\zeta_2\omega_2, \end{cases} \tag{4.45}$$

sont satisfaites, alors le système est localement asymptotiquement stable à l'origine.

Preuve

Considérons le système d'équations (4.44) et la forme (1.8) (avec $\epsilon = 1$). Par identification on trouve les fonctions suivantes :

$$f_i = \frac{d}{dt}LPF\left\{(1-K_1x_1-K_2x_2)\left(\varphi_0+\varphi_1\dot{p}_\tau-\frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\} - 2\zeta_i\omega_i\dot{x}_i, \ \ (i=1,2). \tag{4.46}$$

En remplaçant

$$\begin{cases} x_i = a_i\cos(\omega_i t+\theta_i), \\ \dot{x}_i = -a_i\omega_i\sin(\omega_i t+\theta_i), \end{cases} (i=1,2)$$

dans (4.46), après simplifications trigonométriques et utilisation des Hypothèses 1 et 2, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}LPF\left\{(1-K_1x_1-K_2x_2)\left(\varphi_0+\varphi_1\dot{p}_\tau-\frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\} - 2\zeta_i\omega_i\dot{x}_i = 2\zeta_i\omega_i^2 a_i\sin(\omega_i t+\theta_i) \\ &+K_1\varphi_0\omega_1 G(\omega_1)\sin(\omega_1 t+\theta_1-\phi(\omega_1))a_1 + K_2\varphi_0\omega_2 G(\omega_2)\sin(\omega_2 t+\theta_2-\phi(\omega_2))a_2 \\ &-\varphi_1\omega_1^2 G(\omega_1)a_1\left[1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4}+\frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right)\right]\sin(\omega_1 t+\theta_1+\frac{\pi}{2}-\omega_1\tau-\phi(\omega_1)) \\ &-\varphi_1\omega_2^2 G(\omega_2)a_2\left[1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4}+\frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right)\right]\sin(\omega_2 t+\theta_2+\frac{\pi}{2}-\omega_2\tau-\phi(\omega_2)) \\ &+\sum_{\omega_\ell\not\approx\omega_1\wedge\omega_2}^{r}\left(H_\ell(a_1,a_2,\theta_1,\theta_2)\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell)+G_\ell(a_1,a_2,\theta_1,\theta_2)\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)\right), \end{aligned} \tag{4.47}$$

où ω_ℓ est une combinaison linéaire de ω_1 et ω_2, θ_ℓ est une combinaison linéaire de θ_1 et θ_2, et r est le nombre de combinaisons linéaires possibles entre ω_1 et ω_2 différentes de ω_1 et ω_2. En appliquant les règles (1.10) sur (4.47), on obtient

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = a_1\left\{\frac{G(\omega_1)\varphi_1\omega_1\sin(\omega_1\tau+\phi(\omega_1))}{2}\left[1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4}+\frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right)\right]-\frac{G(\omega_1)K_1\varphi_0\cos(\phi(\omega_1))}{2}-\zeta_1\omega_1\right\}, \\ \frac{da_2}{dt} = a_2\left\{\frac{G(\omega_2)\varphi_1\omega_2\sin(\omega_2\tau+\phi(\omega_2))}{2}\left[1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4}+\frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right)\right]-\frac{G(\omega_2)K_2\varphi_0\cos(\phi(\omega_2))}{2}-\zeta_2\omega_2\right\}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{G(\omega_1)\varphi_1\omega_1\cos(\omega_1\tau+\phi(\omega_1))}{2}\left[1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_1 a_1)^2}{4}+\frac{(\omega_2 a_2)^2}{2}\right)\right]+\frac{G(\omega_1)K_1\varphi_0\sin(\phi(\omega_1))}{2}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{G(\omega_2)\varphi_1\omega_2\cos(\omega_2\tau+\phi(\omega_2))}{2}\left[1-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\left(\frac{(\omega_2 a_2)^2}{4}+\frac{(\omega_1 a_1)^2}{2}\right)\right]+\frac{G(\omega_2)K_2\varphi_0\sin(\phi(\omega_2))}{2}. \end{cases}$$

Ce résultat donne des amplitudes a_1 et a_1 découplées des phases θ_1 et θ_1. Ce qui implique, que la stabilité des amplitudes ne dépend pas de celle des phases. Le calcul de la matrice du système linéarisé autour de l'origine donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{G(\omega_1)\varphi_1\omega_1\sin(\omega_1\tau+\phi(\omega_1))}{2} - \frac{G(\omega_1)K_1\varphi_0\cos(\phi(\omega_1))}{2} - \zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & \frac{G(\omega_2)\varphi_1\omega_2\sin(\omega_2\tau+\phi(\omega_2))}{2} - \frac{G(\omega_2)K_2\varphi_0\cos(\phi(\omega_2))}{2} - \zeta_2\omega_2 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

Les conditions de stabilité asymptotique locale peuvent être obtenues par la méthode indirecte de Lyapunov. En effet, en utilisant la matrice (4.48) on trouve les conditions (4.45). Tenant compte de l'Hypothèse 4, on en déduit que sous ces conditions, le système est localement asymptotiquement stable à l'origine.

En obtenant une stabilité locale à l'origine, l'extinction des oscillations devient possible et se produit dans un domaine local qui dépend des gains K_1 et K_2. Il est certain que quand les gains K_1 et K_2 augmentent, le domaine de stabilité asymptotique de l'origine augmente aussi. Pour cette raison et en faisant le rapprochement avec les systèmes linéaires du second ordre, on propose le choix des gains suivants

$$\begin{cases} K_1 = \max\left(\frac{2(\zeta-\zeta_1)\omega_1+\varphi_1\omega_1 G(\omega_1)\sin(\phi(\omega_1)+\omega_1\tau)}{\varphi_0 G(\omega_1)\cos(\phi(\omega_1))}, 0\right) \\ K_2 = \max\left(\frac{2(\zeta-\zeta_2)\omega_2+\varphi_1\omega_2 G(\omega_2)\sin(\phi(\omega_2)+\omega_2\tau)}{\varphi_0 G(\omega_2)\cos(\phi(\omega_2))}, 0\right) \end{cases} \tag{4.49}$$

où ζ est un amortissement.

Du point de vue pratique, la commande peut être appliquée dans deux situations. Dans le premier cas la commande est appliquée dès la détection des oscillations dans x_1 ou x_2. Cette situation est illustrée par un test de simulation effectué avec $\zeta = 0.05$ ($K_1 = 0$ et $K_2 = 4050$) et qui est présenté dans Figure 4.9. On peut constater dans cette Figure, que cette commande nécessite un signal u très faible, sachant que ce dernier dépend beaucoup du rapport $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ (équations (4.49)).

La deuxième situation est la plus critique des situations. La commande est appliquée après que les oscillations dans x_1 et x_2 aient atteint le régime permanent. Si on compare avec la situation précédente, cela nécessite d'une part, un amortissement relativement important pour agrandir le domaine de stabilité, et d'autre part un signal de commande u important. Cette situation est illustrée par un test de simulation effectué avec $\zeta = 0.1$ ($K_1 = 160$ et $K_2 = 5700$) et présenté dans la Figure 4.10.

Par ailleurs l'application effective de cette commande nécessite l'introduction de filtres séparateurs qui complique l'analyse. Cette partie n'a pas été étudiée car on souhaite arriver à une stratégie avec un domaine de validité théorique plus important.

Cette stratégie offre sous les conditions (4.45) une stabilité asymptotique locale. Ceci indique que l'extinction des oscillations est tout à fait possible, mais sans aucune garantie (aucune idée sur le domaine de stabilité). Une meilleure garantie vis-à-vis de l'extinction des oscillations, peut être obtenue si les amplitudes a_1 et a_2 sont globalement stables au sens des approximation K-B. Pour cette raison, un retour non-linéaire doit être envisagé.

4.3.3 Extinction des oscillations sur le modèle complet par retour non-linéaire

Dans cette section, la mesure de pression p est dérivée et retardée avec un retard égal à τ pour obtenir $\dot{p}_\tau$, qui est introduite dans une fonction non-linéaire Φ, pour obtenir une loi de commande

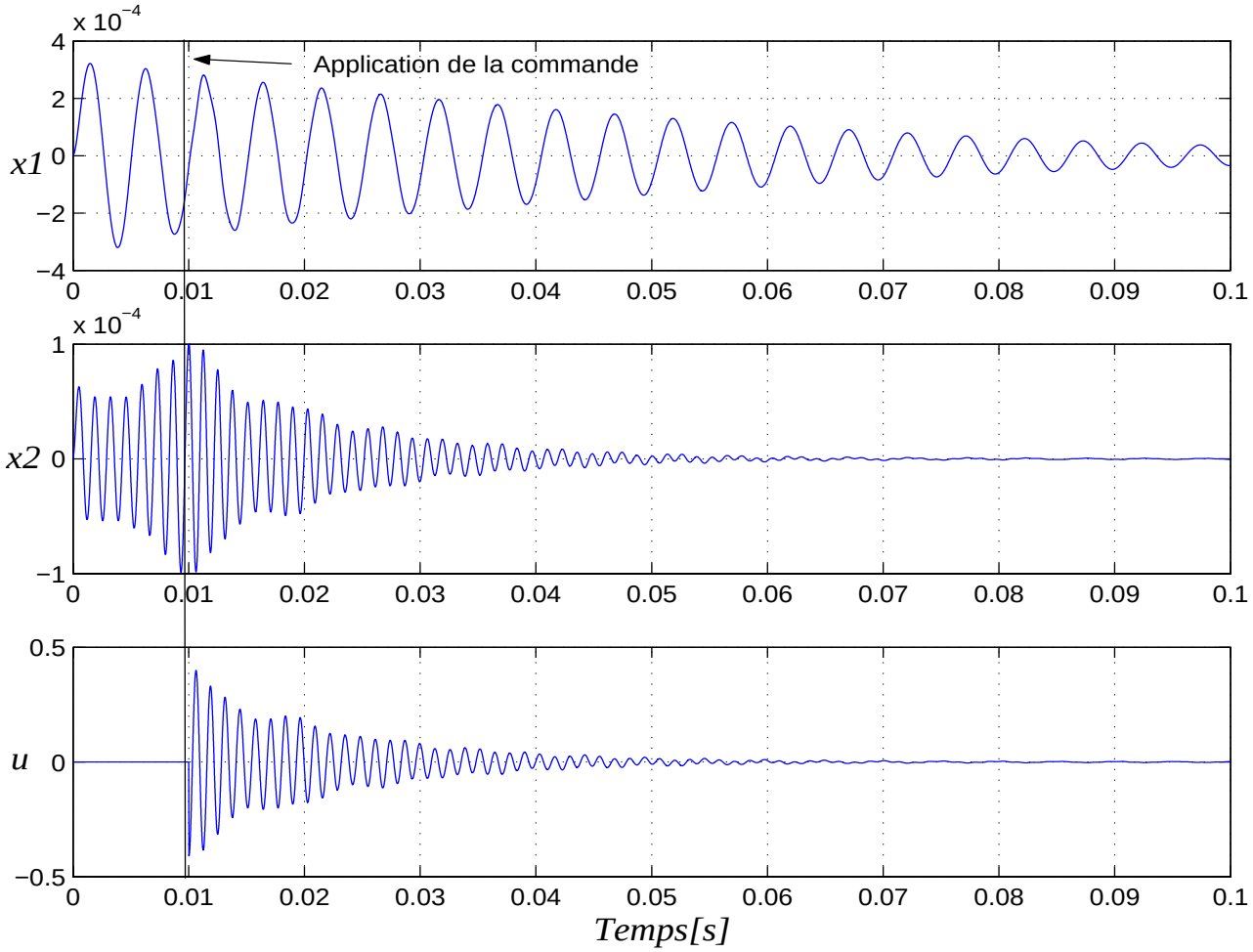

FIG. 4.9 – Application du retour de boucle linéaire dès l'apparition des instabilités

$u = \Phi(p, \dot{p}_\tau)$. Cette stratégie de commande est représentée dans le schéma bloc de la Figure 4.11 et par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt} LPF\left\{(1 + \Phi(p, \dot{p}_\tau))\left(\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt} LPF\left\{(1 + \Phi(p, \dot{p}_\tau))\left(\varphi_0 + \varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}, \end{cases} \tag{4.50}$$

La loi de commande $\Phi(p, \dot{p}_\tau)$ va servir à compenser la contre réaction thermo-acoustique et à ajouter un amortissement. Si une telle commande est établie, le système deviendra stable à l'origine et l'extinction des oscillations se produira. Cela peut aussi être interprété comme une linéarisation du système par contre-réaction non-linéaire dynamique qui en plus rend le système stable.

Il est certain que si un système est linéaire, alors sa stabilité ne peut être que globale. Cependant, la linéarisation qu'on peut obtenir est une linéarisation au sens des approximations K-B, ce qui implique que le domaine de stabilité obtenu est en réalité le domaine de validité des approximations K-B. Considérons le lemme suivant :

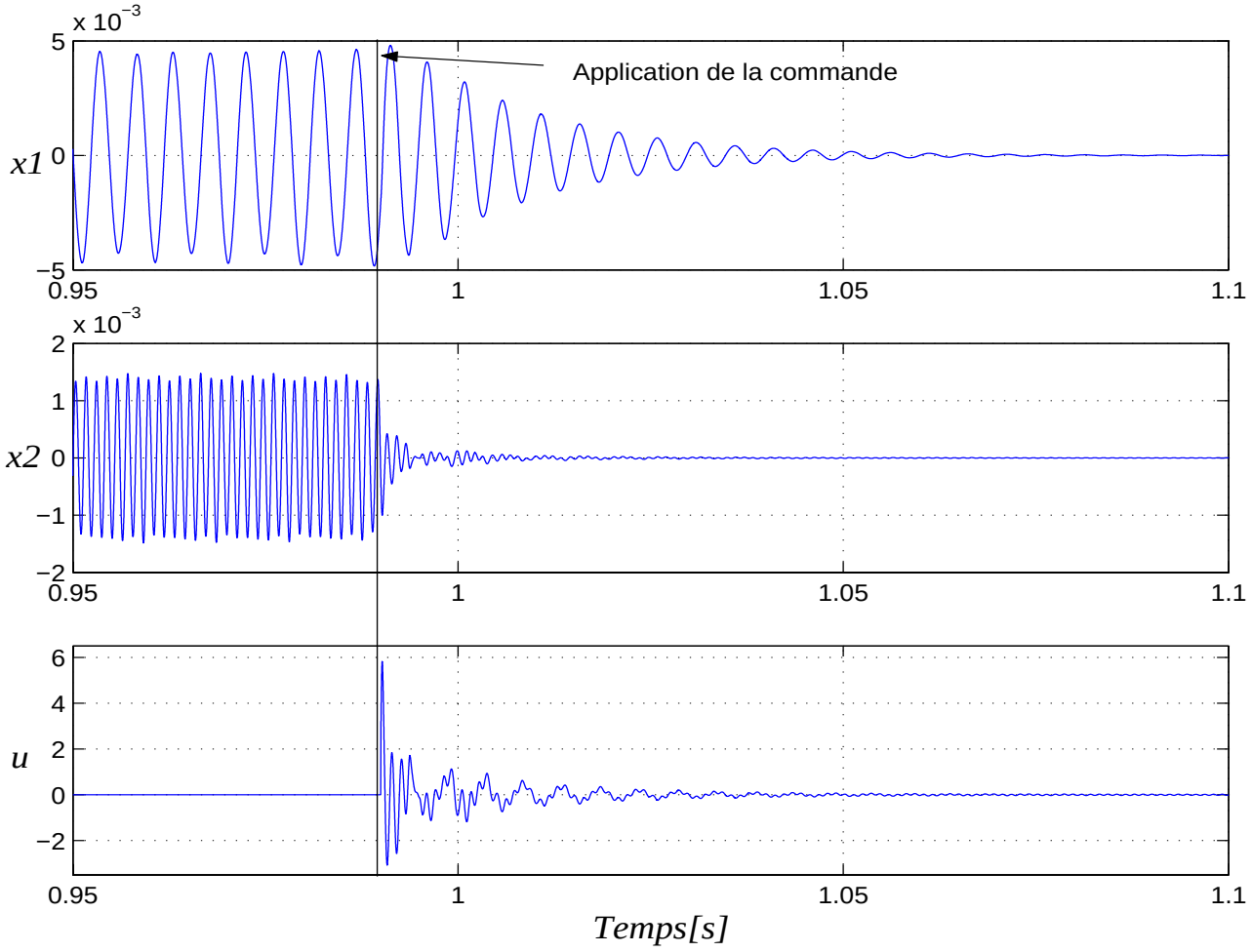

FIG. 4.10 – Application du retour de boucle linéaire au régime permanent des oscillations

Lemme 14

Pour la loi de commande suivante :

$$\Phi\left(p,\dot{p}_\tau\right) = -Kp - \frac{1}{\varphi_0}\left(\varphi_1\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_3}{3}\dot{p}_\tau^3\right), \tag{4.51}$$

où K est un gain qui satisfait les conditions :

$$\begin{cases} K\varphi_0 G(\omega_1)\cos(\phi(\omega_1)) \ \rangle \ -2\zeta_1\omega_1, \\ K\varphi_0 G(\omega_2)\cos(\phi(\omega_2)) \ \rangle \ -2\zeta_2\omega_2, \end{cases} \tag{4.52}$$

le système (4.50) est localement asymptotiquement stable à l'origine.

Preuve

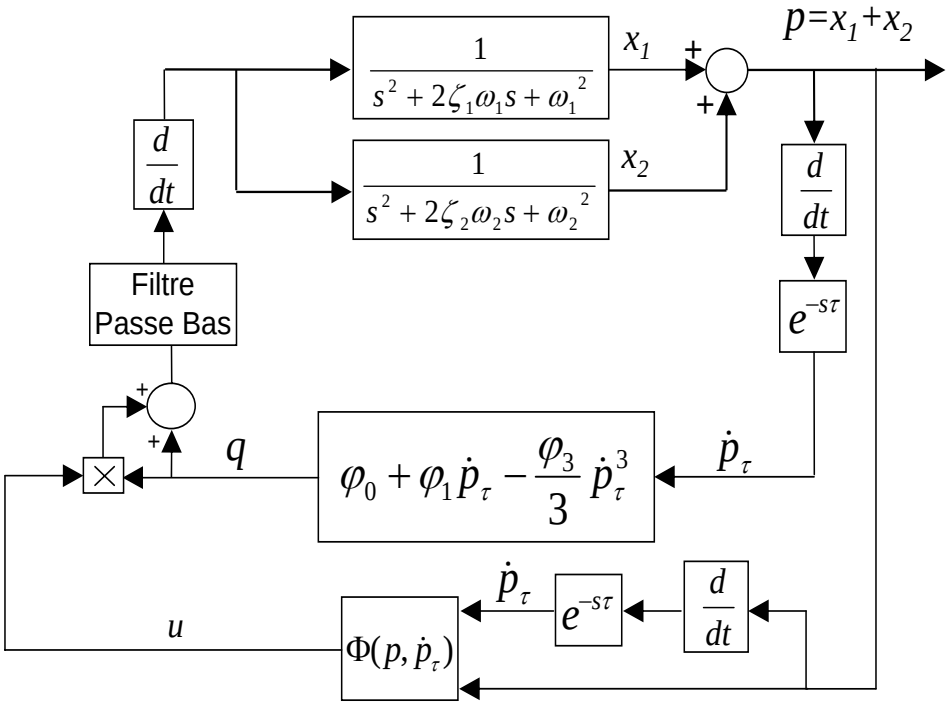

FIG. 4.11 – Schéma de commande avec retour non-linéaire

En remplacent la fonction (4.51) dans (4.50) on obtient le système d'équations suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_0 - K\varphi_0 p - K\varphi_1 p\dot{p}_\tau + K\frac{\varphi_3}{3}p\dot{p}_\tau^3 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0}\dot{p}_\tau^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{2\varphi_1\varphi_3}{3\varphi_0}\dot{p}_\tau^4 - \frac{\varphi_3^2}{9\varphi_0}\dot{p}_\tau^6\right\}, \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_0 - K\varphi_0 p - K\varphi_1 p\dot{p}_\tau + K\frac{\varphi_3}{3}p\dot{p}_\tau^3 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0}\dot{p}_\tau^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{2\varphi_1\varphi_3}{3\varphi_0}\dot{p}_\tau^4 - \frac{\varphi_3^2}{9\varphi_0}\dot{p}_\tau^6\right\}, \end{array}\right. \tag{4.53}$$

Ce qui conduit, pour l'application de l'approximation K-B, au choix des fonctions suivantes (forme (1.8)) :

$$\begin{aligned} f_i \;=\; & \frac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_0 - K\varphi_0 p - K\varphi_1 p\dot{p}_\tau + K\frac{\varphi_3}{3}p\dot{p}_\tau^3 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0}\dot{p}_\tau^2 \right. \\ & \left. + \frac{2\varphi_1\varphi_3}{3\varphi_0}\dot{p}_\tau^4 - \frac{\varphi_3^2}{9\varphi_0}\dot{p}_\tau^6\right\} - 2\zeta_i\omega_i\dot{x}_i, \quad (i=1,2). \end{aligned} \tag{4.54}$$

En remplaçant

$$\left\{\begin{array}{l} x_i = a_i\cos(\omega_i t + \theta_i), \\ \dot{x}_i = -a_i\omega_i\sin(\omega_i t + \theta_i), \end{array}\right. (i=1,2)$$

dans (4.54), après simplification et utilisation des Hypothèses 1 et 2, on obtient l'expression

$$\begin{aligned} f_i &= K\varphi_0\omega_1 G(\omega_1)\sin(\omega_1 t+\theta_1-\phi(\omega_1))a_1 + K\varphi_0\omega_2 G(\omega_2)\sin(\omega_2 t+\theta_2-\phi(\omega_2))a_2 \\ &\quad +2\zeta_i\omega_i^2 a_i\sin(\omega_i t+\theta_i) \\ &\quad + \sum_{\omega_\ell \not\propto \omega_1\wedge\omega_2}^{r} \left(H_\ell(a_1,a_2,\theta_1,\theta_2)\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell) + G_\ell(a_1,a_2,\theta_1,\theta_2)\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)\right), \end{aligned} \quad (4.55)$$

où ω_ℓ est une combinaison linéaire entre ω_1 et ω_2, θ_ℓ est une combinaison linéaire entre θ_1 et θ_2, et r est le nombre de combinaisons linéaires possibles entre ω_1 et ω_2 différentes de ω_1 et ω_2. En appliquant les règles (1.10) sur (4.55), on obtient les approximations

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2}\left[G(\omega_1)K\varphi_0\cos(\phi(\omega_1)) + 2\zeta_1\omega_1\right]a_1, \\ \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2}\left[G(\omega_2)K\varphi_0\cos(\phi(\omega_2)) + 2\zeta_2\omega_2\right]a_2, \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{1}{2}G(\omega_1)K\varphi_0\sin(\phi(\omega_1)), \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{1}{2}G(\omega_2)K\varphi_0\sin(\phi(\omega_2)). \end{cases} \quad (4.56)$$

Il en résulte du système d'équations (4.56) des amplitudes a_1 et a_1 découplées, obéissant à des équations différentielles linéaires et globalement asymptotiquement stables à l'origine si et seulement si les conditions (4.52) sont vérifiées. Tenant compte de l'Hypothèse 4, on en déduit que sous ces conditions le système est localement asymptotiquement stable à l'origine.

Malgré le fait que le système d'équations de départ (4.53) est non-linéaire, on obtient par l'approximation K-B un système d'équations (4.56) qui est linéaire. Cela peut être interprété, par le fait que les termes non-linéaires dans (4.53), n'ont pas d'effets d'excitation ou d'amortissement directs sur les oscillations. Sous la satisfaction des conditions (4.52) les amplitudes sont asymptotiquement globalement stable, cela veux dire que l'extinction des oscillations se produit dans le domaine de validité des approximation K-B.

Comme pour le retour linéaire cette stratégie est testée en simulation, avec un gain $K = 100$ et pour les deux situations envisageables. La première est lorsque la commande est appliquée dès la détection des oscillations sur x_1 ou x_2, pour cette situation un test est présenté par la Figure 4.12. La deuxième situation, est lorsque la commande est appliquée après que les oscillations de x_1 et x_2 aient atteints le régime permanent (situation critique). Pour cette situation un test est présenté par la Figure 4.13. On peut constater, que par rapport au retour linéaire, l'extinction des oscillations est très lente. Par contre, en ce qui concerne l'amplitude de la commande u, celle ci est relativement moins importante (facteur de 2).

La satisfaction des conditions (4.52) par le paramètre K, est tout à fait possible quand le produit $\cos(\phi(\omega_1))\cos(\phi(\omega_2))$ est strictement positif. Ceci dit, quand le produit est négatif, il est difficile et parfois impossible de trouver un gain K vérifiant (4.52). Le problème peut être évité par l'utilisation

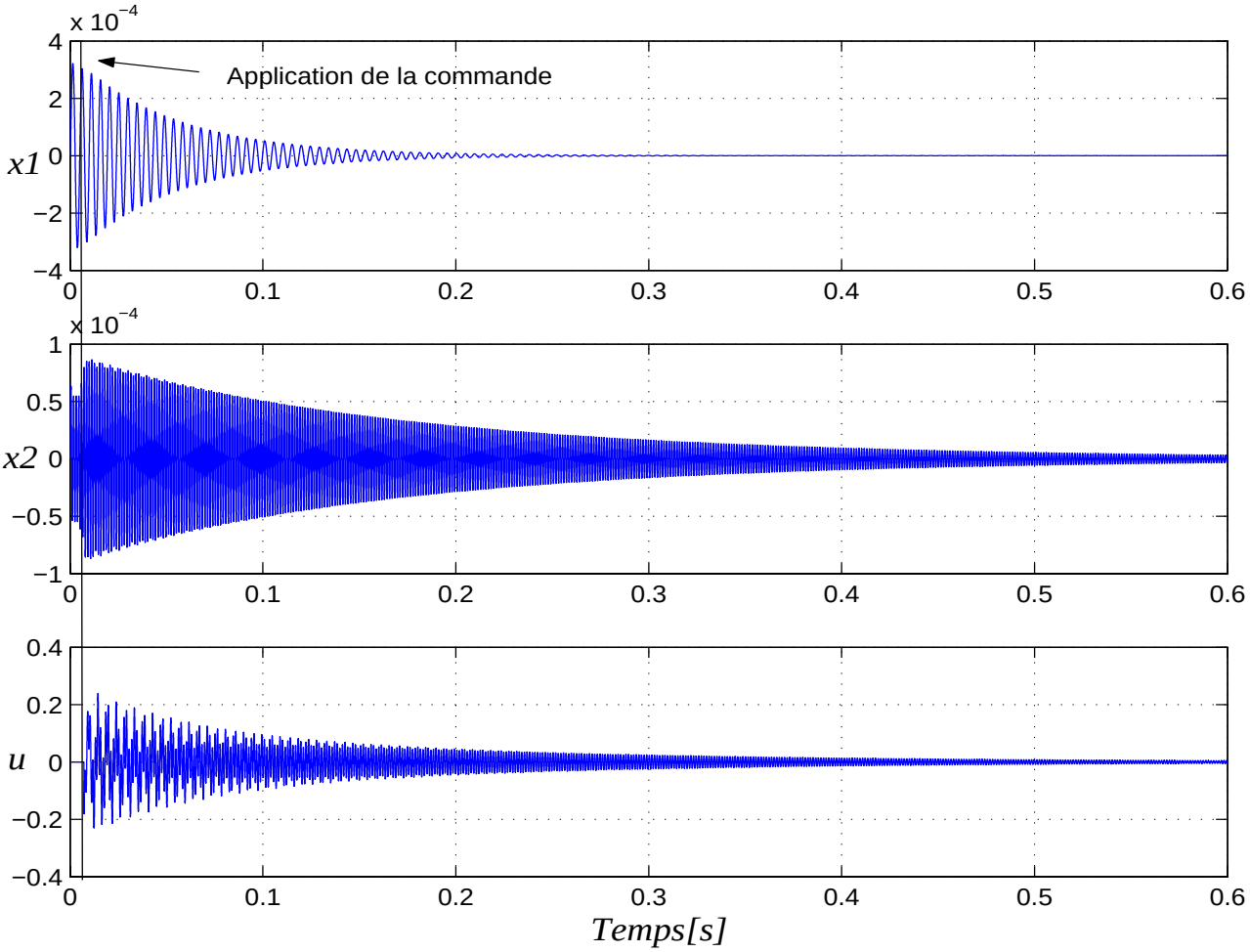

FIG. 4.12 – Application du retour de boucle non-linéaire dès l'apparition dès instabilités

des filtres passe bande $F1$ et $F2$ (comme il s'agit pour le retour linéaire) pour pouvoir remplacer dans le retour de boucle Kp par $K_1x_1 + K_2x_2$, alors les conditions (4.52) deviennent

$$\begin{cases} K_1\varphi_0 G(\omega_2)\cos(\phi(\omega_1)) \ \rangle \ -2\zeta_1\omega_1, \\ K_2\varphi_0 G(\omega_2)\cos(\phi(\omega_2)) \ \rangle \ -2\zeta_2\omega_2, \end{cases} \tag{4.57}$$

ce qui est très facile à résoudre. Toutefois, ceci suppose de prendre en compte dans l'analyse les effets des filtres.

Par cette commande on obtient une stabilité asymptotique et locale à l'origine. Le domaine où l'extinction des oscillations se produit est limité par les frontières de la validité de l'application de la méthode K-B pour les équations (4.53). Cela n'est pas le cas pour la commande par retour linéaire, car pour cette dernière le domaine d'extinction des oscillations n'est pas seulement limité par la validité de l'application de la méthode K-B, mais aussi par le domaine de stabilité locale qui dépend beaucoup des gains K_1 et K_2 du retour de boucle. Alors, le domaine d'extinction des oscillations obtenu par

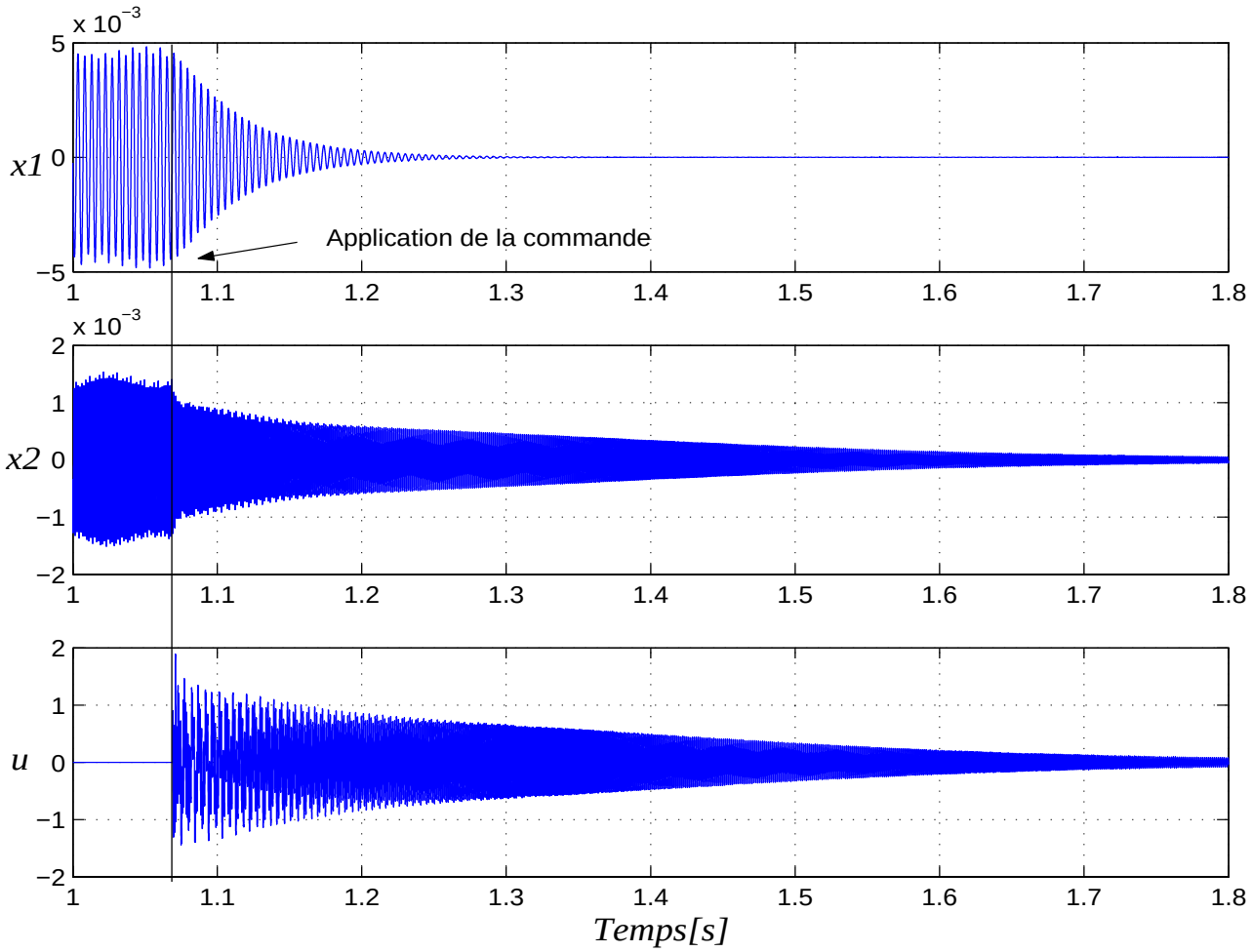

FIG. 4.13 – Application du retour de boucle non-linéaire au régime permanent des oscillations

retour linéaire peut être vu comme l'intersection du domaine de validité des approximations K-B avec le domaine de stabilité locale.

Les rôles de l'introduction de la fonction non-linéaire $\Phi\left(p, \dot{p}_\tau\right)$ dans la commande, peuvent être expliqués par :

- une compensation de la boucle de retour physique au sens de la méthode K-B (ouverture par linéarisation),
- introduction d'un amortissement positif.

Il convient toutefois de dire, qu'une telle stratégie de commande nécessite une bonne connaissance des valeurs des paramètres du modèle, notamment la valeur du retard τ.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux méthodologies de commande pour l'extinction des oscillations ont été présentées. La première méthodologie est basée sur une approche de commande en hautes fréquences. L'analyse de cette approche sur un modèle réduit a illustré l'efficacité de ce genre ce commande sur la modification de la dynamique des sorties. Il a été aussi démontré que par un choix approprié des paramètres d'une telle commande, l'extinction des oscillations est possible. Le domaine d'amplitude d'oscillation où l'extinction se produit a été analysé. Les problèmes rencontrés dans l'analyse de cette méthodologie sur le modèle réduit ont été brièvement décrits.

La deuxième méthodologie est basée sur une approche de commande par retour de boucle. La commande par retour linéaire a été envisagée en premier lieu. L'étude de la commande a démontré que l'extinction des oscillations est possible dans un domaine qui représente l'intersection du domaine de stabilité locale dépendant des gains de retour de boucle avec le domaine de validité des approximation K-B. Ceci dit l'implémentation effective de cette commande nécessite d'avoir indépendamment accès aux deux oscillations du système. Les tests de simulation ont montré que l'extinction des oscillations se déroule avec succès. Des gains de retour de boucle et un signal de commande importants sont nécessaires dans le cas des oscillations avec régime permanent établi.

Pour élargir le domaine de stabilité locale, la commande par retour non-linéaire a été envisagée en deuxième lieu. En effet, la commande permet l'extinction des oscillations dans un domaine de stabilité local dépendent du domaine de validité des approximations K-B. En d'autres termes, la commande offre un domaine de stabilité plus grand que le domaine obtenu par retour linéaire. La commande non-linéaire permet aussi d'éteindre les oscillations avec un signal de commande sensiblement moins important qu'avec le retour linéaire. Cela est au prix d'un temps d'extinction plus important.

Ces méthodologies ont été analysées sur la base d'une bonne connaissance des paramètres du modèle. Comme perspective, nous estimons que la robustesse de commande et le calcul du domaine de stabilité sont des aspects importants qui doivent être étudiés soigneusement. En plus pour le retour linéaire le problème des filtres doit être étudié.

Dans ce chapitre une étude préliminaire de faisabilité sur les aspects de stabilisation a été effectuée. Des solutions efficaces ont été proposées mais une étude quantitative plus approfondie sur le plant théorique et de simulation doit être envisagée dans le futur.

Ce chapitre reprend en partie les résultats présentés dans (Annexe G) :

F. Bouziani, I.D. Landau, R.R. Bitmead, *Quenching oscillations in combustion instabilities using model-based closed-loop multiplicative control*, Soumis pour European Control Conference, Kos, Juillet 2007.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la modélisation et le contrôle des instabilités de combustion. Le choix d'un tel système comme application principale de notre travail a été motivé par l'intérêt accordé actuellement à la réduction de pollution dans les systèmes de combustion. La nature des modèles expliquant l'apparition des instabilités de combustion par une structure en boucle fermée, font de cette application une thématique concrète dans le domaine de l'automatique.

Il s'agit dans cette thèse, premièrement de développer des modèles pouvant être analysés et permettant de comprendre le mécanisme des instabilités, et deuxièmement d'établir les conditions du contrôle actif qui entraîne l'extinction des oscillations. Parmi les approches de modélisation utilisées pour traiter ce genre de système, l'approche par "boîte grise" a été choisie. Cette approche semble être un bon compromis entre les interprétations physiques et les observations expérimentales. Sur la base de cette approche, le modèle de Dunstan et Bitmead a été choisi comme un repère pour la modélisation des instabilités de combustion. Ce modèle est caractérisé par deux résonateurs en boucle fermée avec un retard, des dérivées, une caractéristique non-linéaire et un filtre passe bas. L'analyse explicite de ce modèle est une tâche extrêmement complexe. La contribution principale apportée par ce travail concerne essentiellement l'analyse par la méthode de Krylov-Bogoliubov de ce type de modèle (c'est une première application de cette méthode pour l'étude des instabilités de combustion). Une fois un modèle efficace est établi, il s'agit d'employer ce modèle pour calculer des conditions d'extinction des oscillations.

Par rapprochement entre la non-linéarité statique du modèle de Dunstan et Bitmead et l'oscillateur de Van der Pol, un premier modèle a été proposé dans le deuxième chapitre. Ce modèle est basé sur deux équations de Van der Pol généralisées et couplées. Sachant que le modèle a été établi en faisant abstraction de l'existence du retard et du filtre passe bas, il se présente néanmoins avec une complexité réduite, attractive pour envisager le contrôle actif. L'application de la méthode K-B sur ce modèle a permis d'analyser avec efficacité la structure de deux résonateurs couplés. Les tests de simulation ont

permis de gagner de la confiance dans les approximations K-B.

En dépit des avantages liés à la complexité réduite du modèle, les résultats d'analyse ont montré que le modèle sans bruit ne peut pas décrire tous les phénomènes observés en pratique. Notamment, le phénomène de coexistence simultanée de deux modes oscillatoires non-harmoniques. L'analyse des effets d'un bruit additif sur les sorties du modèle, a démontré qu'un bruit avec un gain élevé peut induire une coexistence de deux modes oscillatoires. Ceci dit, en tenant compte des considérations pratiques la coexistence observée en pratique ne peut pas être assimilée à une coexistence due à la présence du bruit.

Pour expliquer la coexistence des deux modes, le modèle basé sur deux équations de Van der Pol couplées a été modifié dans le troisième chapitre. La modification concerne l'introduction d'une dérivée, d'un retard et d'un filtre passe bas dans le retour de boucle (qui existent dans le modèle de Dunstan et Bitmead). Ainsi, le nouveau modèle devient plus complexe, et rend l'analyse par la méthode K-B plus difficile. Dans le but de surmonter cette difficulté, des hypothèses sur le retard et le filtre ont été employées. L'analyse a montré que le modèle dans sa forme générique, peut décrire plusieurs régimes de fonctionnement. Des conditions dépendant de la valeur du retard et des caractéristiques du filtre ont été déterminées pour l'existence de chaque régime.

Un des résultats majeurs de l'analyse du modèle complété, est la démonstration que ce dernier peut décrire le phénomène de coexistence simultanée de deux modes oscillatoires non-harmoniques. Le régime de fonctionnement correspondant à ce phénomène est connu par le régime d'auto-oscillations simultanées non-harmoniques. Il peut se produire quand le rapport de fréquences est différent de 1, 3 et $\frac{1}{3}$. Le comportement des sorties du modèle dans ce régime a été comparé aux observations pratiques. Beaucoup de similarités ont été constatées laissant envisager que ce modèle est un candidat performant pour la prédiction des instabilités de combustion.

Le modèle complet étudié au troisième chapitre a été adopté dans le quatrième chapitre pour l'établissement des conditions d'extinction des oscillations par une excitation multiplicative. Pour ce faire deux stratégies qui se différencient par la nature de la fréquence d'excitation ont été envisagées. La première est basée sur une excitation en hautes fréquences. Vu la complexité du modèle des instabilités, elle n'a pu être appliquée que sur un modèle réduit. L'analyse de cette stratégie a montré qu'une excitation en hautes fréquences a des effets indirects sur la dynamique des oscillations, qui peuvent entraîner l'extinction des oscillations.

La deuxième stratégie se base sur un retour de boucle impliquant la mesure de pression. Le retour de boucle linéaire a été envisagé sur la base de la disponibilité de filtres, qui permettent de mesurer séparément les oscillations des deux modes. L'étude de cette commande sur le modèle des instabilités a montré que l'extinction des oscillations est possible. Elle se produit dans un domaine de stabilité locale, qui dépend des gains de la boucle de retour. Pour élargir le domaine de stabilité locale, le

retour non-linéaire a été envisagé. Il a été démontré au sens des approximations K-B que, par un choix approprié de la loi de commande ce retour peut linéariser le comportement du système et le stabiliser. Il a été aussi démontré que l'extinction des oscillations est possible, et se produit dans le domaine de validité des approximations K-B. Il s'agit néanmoins d'une étude préliminaire, car les domaines de validité (stabilité) n'ont pas été étudiés.

La méthode K-B a permis de prédire le comportement des sorties d'une manière efficace, ce que d'autre méthode déjà utilisée n'ont pas pu réaliser. Les comparaisons par tests de simulation et représentations fréquentielles ont montré une grande cohérence entre les approximations K-B et les sorties des modèles. Toutefois cette méthode est une méthode d'approximation, et pour chaque approximation il existe des limites de validité.

Cette thèse a donc permis de mieux comprendre les phénomènes des instabilités de combustion et d'aller plus loin dans les aspects de modélisation et de contrôle. Toutefois, le travail sur des instabilités de combustion n'est pas totalement achevé. D'autre aspects pratiques et théoriques importants doivent être étudiés en perspective. L'ensemble des perspectives que nous estimons abordables se concentre sur deux points importants. Le premier point est l'évaluation quantitative du domaine de validité des approximations K-B. Cette évaluation est nécessaire dans le calcul du domaine de stabilité pour la commande par retour non-linéaire. Le deuxième point est l'étude de la robustesse des approches de contrôle proposées, en tenant compte des incertitudes des paramètres.

Annexe A

Méthode de Krylov-Bogoliubov

A.1 Cas des systèmes avec un seul résonateur

Considérons un système régit par une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{A.1}$$

où ϵ est une quantité positive de valeurs faible et f peut être une série entière de ϵ dont les coefficients sont des polynômes en x et $\frac{dx}{dt}$. La méthode K-B cherche une solution de la forme

$$x = a\cos(\omega t + \theta) + \epsilon\nu(a, \theta), \tag{A.2}$$

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \epsilon A, \\ \frac{d\theta}{dt} = \epsilon B, \end{cases} \tag{A.3}$$

en respectant les conditions suivantes :

1). la composante u est périodique et ne contient que les harmoniques supérieures (multiples),

2). les erreurs d'ordre supérieur à ϵ sont négligées (les termes contenants ϵ^2 ou un ordre supérieur sont éliminés).

Résolution

Considérons la première et la deuxième dérivée de x

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega a\sin(\omega t + \theta) + \frac{da}{dt}\cos(\omega t + \theta) - \frac{d\theta}{dt}a\sin(\omega t + \theta) + \epsilon\frac{d\nu(a,\theta)}{dt}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a\cos\psi - 2\omega\frac{da}{dt}\sin(\omega t + \theta) - 2\omega\frac{d\theta}{dt}a\cos(\omega t + \theta) + \frac{d^2a}{dt^2}\cos(\omega t + \theta) \\ \qquad -\frac{d^2\theta}{dt^2}a\sin(\omega t + \theta) - 2\frac{da}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin(\omega t + \theta) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 a\cos(\omega t + \theta) + \varepsilon\frac{d^2\nu(a,\theta)}{dt^2}. \end{cases} \tag{A.4}$$

D'un autre côté, l'équation (A.3) implique :

$$\begin{cases} \frac{d^2a}{dt^2} = \left\{\epsilon\frac{\partial A}{\partial a}\right\}\{\epsilon A\} = \epsilon^2\ldots, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = \left\{\epsilon\frac{\partial B}{\partial a}\right\}\{\epsilon A\} + \left\{\epsilon\frac{\partial B}{\partial \theta}\right\}\{\epsilon B\} = \epsilon^2\ldots, \\ \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \{\epsilon A\}^2 = \epsilon^2\ldots, \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \{\epsilon B\}^2 = \epsilon^2\ldots, \\ \frac{da}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \{\epsilon B\}\{\epsilon A\} = \epsilon^2\ldots. \end{cases} \tag{A.5}$$

Le rassemblement du résultat (A.5) et des équations (A.3) dans (A.4) donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\omega a\sin(\omega t+\theta) + \epsilon A\cos(\omega t+\theta) - \epsilon Ba\sin(\omega t+\theta) + \epsilon\frac{d\nu(a,\theta)}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a\cos(\omega t+\theta) - 2\omega\epsilon A\sin(\omega t+\theta) - 2\omega a\epsilon B\cos(\omega t+\theta) + \epsilon\frac{d^2\nu(a,\theta)}{dt^2} + \epsilon^2\ldots. \end{array}\right. \tag{A.6}$$

En utilisant (A.6), le côté gauche de l'équation (A.1) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon\left\{-2\omega A\sin(\omega t+\theta) - 2\omega aB\cos(\omega t+\theta) + \frac{d^2\nu(a,\theta)}{dt^2}\right\} + \epsilon^2\ldots. \tag{A.7}$$

De même, en utilisant (A.6) et (A.2), le côté droit de l'équation (A.1) devient

$$\epsilon f(x,\frac{dx}{dt}) \quad = \quad \epsilon f(a\cos(\omega t+\theta), -a\omega\sin(\omega t+\theta)) + \epsilon^2\ldots \tag{A.8}$$

En égalisant (A.7) et (A.8), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \epsilon\left(\frac{d^2\nu(a,\theta)}{dt^2} + \omega^2\nu(a,\theta)\right) & = & \epsilon\{f(a\cos(\omega t+\theta), -a\omega\sin(\omega t+\theta)) + 2\omega A_1\sin(\omega t+\theta) \\ & & +2\omega aB_1\cos(\omega t+\theta)\} + \epsilon^2\ldots. \end{array} \tag{A.9}$$

Considérons le développement en série de Fourier de $f(a\cos(\omega t+\theta), -a\omega\sin(\omega t+\theta))$ (notée $f(\cdot,\cdot)$) :

$$\left\{\begin{array}{c} f(\cdot,\cdot) = G_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\{G_n(a,\theta)\cos n(\omega t+\theta) + H_n(a,\theta)\sin n(\omega t+\theta)\}, \\ G_n(a,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot,\cdot)\cos n\psi d\psi,\ G_0(a,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot,\cdot)d\psi \\ H_n(a,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot,\cdot)\sin n\psi d\psi, \quad \psi = \omega t+\theta. \end{array}\right. \tag{A.10}$$

Sachant que le terme $\nu(a,\theta)$ ne contient pas l'oscillation fondamentale, il peut alors s'écrire sous la forme

$$\nu(a,\theta) = V_0(a,\theta) + \sum_{n=2}^{\infty}\{V_n(a,\theta)\cos n(\omega t+\theta) + W_n(a,\theta)\sin n(\omega t+\theta)\}, \tag{A.11}$$

qui implique

$$\frac{d^2\nu(a,\theta)}{dt^2} = -\sum_{n=2}^{\infty}(n\omega)^2\{V_n(a,\theta)\cos n(\omega t+\theta) + W_n(a,\theta)\sin n(\omega t+\theta)\} + \epsilon\ldots. \tag{A.12}$$

En replaçant (A.10), (A.11) et (A.12) dans (A.9), et en éliminant les termes contenants ϵ^2, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{array}{l} \omega^2 V_0(a,\theta) + \sum_{n=2}^{\infty}\omega^2(1-n^2)\{V_n(a,\theta)\cos n(\omega t+\theta) + W_n(a,\theta)\sin n(\omega t+\theta)\} \\ = G_0(a,\theta) + \{G_1(a,\theta) + 2\omega aB\}\cos(\omega t+\theta) + \{H_1(a,\theta) + 2\omega A\}\cos(\omega t+\theta) \\ \quad + \sum_{n=2}^{\infty}\{G_n(a,\theta)\cos n(\omega t+\theta) + H_n(a,\theta)\sin n(\omega t+\theta)\}. \end{array}$$

Par identification, on obtient

$$\left.\begin{array}{c} A = -\frac{1}{2\omega}H_1(a,\theta),\ \ B = -\frac{1}{2\omega a}G_1(a,\theta), \\ V_0(a,\theta) = \frac{G_0(a,\theta)}{\omega^2},\ \ V_n(a) = \frac{G_n(a,\theta)}{\omega^2(1-n^2)},\ \ W_n(a,\theta) = \frac{H_n(a,\theta)}{\omega^2(1-n^2)}, \\ (n=2,3,\ldots). \end{array}\right\}$$

Finalement nous obtenons le résultat suivant

$$x = a\cos(\omega t+\theta) + \epsilon\nu(a,\omega), \tag{A.13}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{da}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\omega}H_1(a,\theta) = -\frac{\epsilon}{2\omega\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi, \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\omega a}G_1(a,\theta) = -\frac{\epsilon}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi, \end{array}\right. \tag{A.14}$$

$$\nu(a,\theta) = \frac{G_0(a,\theta)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{G_n(a,\theta)\cos(n(\omega t+\theta)) + H_n(a,\theta)\sin(n(\omega t+\theta))}{n^2-1} \tag{A.15}$$

Comme u est une fonction de a et θ, et sachant que (A.14) introduit une erreur d'ordre ϵ dans a et θ, alors cela implique que l'erreur dans ϵu est de l'ordre ϵ^2. Pour cette raison, la composante u peut être négligée dans l'expression de x. On considérera dans ce cas uniquement les équations (A.13) et (A.14) en négligeant u, et on parlera de la "Première approximation K-B". Ceci dit l'introduction de la composante u donne une indication sur les valeurs des amplitudes des harmoniques multiples. Il est intéressant quelques fois de considérer les équations (A.13), (A.14) et (A.15), et on parlera dans ce cas de la "Première approximation K-B améliorée".

A.2 Généralisation au cas des systèmes multi-résonateurs

La méthode peut être généralisée pour les systèmes avec n résonateurs décrits par des équations de la forme

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \epsilon f_k\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{A.16}$$

où $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\frac{dx}{dt} = \{\frac{dx_1}{dt} et, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\}$. En effet, par généralisation des équations (A.13), (A.14) et (A.15), la méthode K-B propose pour le cas multi-résonateurs la solution suivante :

$$x_k = a_k \cos(\omega_k t + \theta_k) + \nu_k, \tag{A.17}$$

avec

$$\begin{cases} \dot{a}_k = -\frac{\epsilon}{2\omega_k} H_{kk}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \\ \dot{\theta}_k = -\frac{\epsilon}{2\omega_k a_k} G_{kk}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \end{cases} \tag{A.18}$$

$$\nu_k = \sum_{\omega_k \not\approx \omega_\ell}^{r} \frac{H_{\ell k}\sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_{\ell k}\cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)}{w_k^2 - w_\ell^2}, \tag{A.19}$$

où H_{kk}, G_{kk}, $H_{\ell k}$ et $G_{\ell k}$ sont obtenus de la fonction f_k en injectant

$$\begin{cases} x_k = a_k \cos(\omega_k t + \theta_k), \\ \dot{x}_k = -a_k \omega_k \sin(\omega_k t + \theta_k), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{A.20}$$

et en la mettant sous la forme suivante (par généralisation de la mise en forme (A.10)) :

$$\begin{aligned} &f_k\left(a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, a_n\cos(\omega_n t + \theta_n), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, -a_n\omega_n\sin(\omega_n t + \theta_n)\right) \\ &= H_{kk}\sin(\omega_k t + \theta_k) + G_{kk}\cos(\omega_k t + \theta_k) + \sum_{\omega_k \not\approx \omega_\ell}^{r} \left(H_{\ell k}\sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_{\ell k}\cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)\right), \end{aligned} \tag{A.21}$$

où ω_ℓ et θ_ℓ sont respectivement des combinaisons linéaires de $\omega_1, \ldots, \omega_n$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n$, et r est le nombre de combinaisons linéaires possibles de $\omega_1, \ldots, \omega_n$ différentes de ω_j.

De la même manière, la composante ν_k peut être négligée. On considéra dans ce cas uniquement (A.17) et (A.18) en négligeant ν_k, et on parlera de la "Première approximation K-B". Pour connaître les amplitudes des harmoniques ω_ℓ, les équations (A.17), (A.18) et (A.19) doivent être considérées sans négliger ν_k. On parlera dans ce cas de la "Première approximation K-B améliorée".

Annexe B

Détails des calculs de la section 2.2

Dans cette annexe nous présentons les détails du calcul permettant d'obtenir (2.8). Considérons l'équation (2.6), initialement on a

$$\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&= -\varphi_{v1}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)+a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)\right)^2\right)\left(a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)+a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&= -\varphi_{v1}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(a_1^2\cos^2(\omega_1 t+\theta_1)-a_2^2\cos^2(\omega_2 t+\theta_2)-2a_1a_2\cos(\omega_1 t+\theta_1)\cos(\omega_2 t+\theta_2)\right)\right)\\
&\times\left(a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)+a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right). \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

En utilisant les règles trigonométriques

$$\cos^2(x)=\frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right), \qquad \text{(B.2)}$$

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right). \qquad \text{(B.3)}$$

dans (B.1), on obtient

$$\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&= -\varphi_{v1}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t+2\theta_1)+\frac{a_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t+2\theta_2)\right.\right.\\
&\left.\left.+a_1a_2\cos((\omega_1+\omega_2)t+\theta_1+\theta_2)+a_1a_2\cos((\omega_1-\omega_2)t+\theta_1-\theta_2)\right)\right)\left(a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)+a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&= \varphi_{v1}\left\{-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1)-\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right.\\
&+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{2}\cos(2\omega_1 t+2\theta_1)\sin(\omega_1 t+\theta_1)+\omega_1\frac{a_1a_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t+2\theta_2)\sin(\omega_1 t+\theta_1)\right.\\
&+\omega_1 a_2a_1^2\cos((\omega_1+\omega_2)t+\theta_1+\theta_2)\sin(\omega_1 t+\theta_1)+\omega_1 a_2a_1^2\cos((\omega_1-\omega_2)t+\theta_1-\theta_2)\sin(\omega_1 t+\theta_1)\\
&+\omega_2\frac{a_2a_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t+2\theta_1)\sin(\omega_2 t+\theta_2)+\omega_2\frac{a_2^3}{2}\cos(2\omega_2 t+2\theta_2)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\\
&\left.\left.+\ \omega_2 a_1a_2^2\cos((\omega_1+\omega_2)t+\theta_1+\theta_2)\sin(\omega_2 t+\theta_2)+\omega_2 a_1a_2^2\cos((\omega_1-\omega_2)t+\theta_1-\theta_2)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right]\right\}. \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

De même, en utilisant la règle trigonométrique

$$\cos(x)\sin(y)=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y)-\sin(x-y)\right). \qquad \text{(B.5)}$$

dans (B.4), on obtient

$$
\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&=\varphi_{v1}\left\{-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1)-\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right.\\
&+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\left[\sin(3\omega_1 t+3\theta_1)-\sin(\omega_1 t+\theta_1)\right]+\omega_1\frac{a_1a_2^2}{4}\left[\sin((2\omega_2+\omega_1)t+2\theta_2+\theta_1)-\sin((2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1)\right]\right.\\
&+\omega_1\frac{a_2a_1^2}{2}\left[\sin((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2)-\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right]+\omega_1\frac{a_2a_1^2}{2}\left[\sin((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2)+\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right]\\
&+\omega_2\frac{a_2a_1^2}{4}\left[\sin((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2)-\sin((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2)\right]\\
&+\omega_2\frac{a_2^3}{4}\left[\sin(3\omega_2 t+3\theta_2)-\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right]+\omega_2\frac{a_1a_2^2}{2}\left[\sin((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2)-\sin(\omega_1 t+\theta_1)\right]\\
&\left.\left.+\ \omega_2\frac{a_1a_2^2}{2}\left[\sin(\omega_1 t+\theta_1)-\sin((\omega_1-2\omega_2)t+\theta_1-2\theta_2)\right]\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

Finalement par simplification de (B.6), on trouve

$$
\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&=\varphi_{v1}\left\{-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1)-\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right.\\
&\quad+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t+\theta_1)\right)+\omega_2\frac{a_2^3}{4}\sin\left(3(\omega_2 t+\theta_2)\right)+(2\omega_1+\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)\right.\\
&\quad+(\omega_1+2\omega_2)\frac{a_1a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right)+(2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\\
&\quad\left.\left.+(2\omega_2-\omega_1)\frac{a_2^2a_1}{4}\sin\left((2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

Annexe C

Preuve du Lemme 2.37

Considérons l'expression (2.8) et calculons l'approximation K-B de x_1 quant $\omega_1 \approx 3\omega_2$. Dans ce cas, on a les propriétés suivantes :

$$\omega_1 \approx \{3\omega_2\}, \tag{C.1}$$

$$\omega_1 \not\approx \{\omega_2, 3\omega_1, 2\omega_1+\omega_2, \omega_1+2\omega_2, |2\omega_1-\omega_2|, |2\omega_2-\omega_1|\}. \tag{C.2}$$

En considérant la notation suivante :

$$\Delta\psi = \psi_1 - 3\psi_2 = (\omega_1 - 3\omega_2)t + \theta_1 - 3\theta_2. \tag{C.3}$$

qui implique la relation

$$3(\omega_2 t + \theta_2) = \omega_1 t + \theta_1 - \Delta\psi. \tag{C.4}$$

En injectant (C.4) dans (2.8), on trouve

$$\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&= \varphi_{v1}\left\{-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1) + \omega_2\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^3}{4}\sin\left(\omega_1 t+\theta_1-\Delta\psi\right)\right)\\
&\quad+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t+\theta_1)\right) + (2\omega_1+\omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)\right.\\
&\quad+(\omega_1+2\omega_2)\frac{a_1 a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right) + (2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\\
&\quad\left.+(2\omega_2-\omega_1)\frac{a_2^2 a_1}{4}\sin\left((2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1\right)\right] - \omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Considérons les règles trigonométriques suivantes :

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \tag{C.6}$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y). \tag{C.7}$$

En introduisant la relation trigonométrique (C.7) dans (C.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&= \varphi_{v1}\left\{-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1) + \omega_2\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^3}{4}\left[\sin(\omega_1 t+\theta_1)\cos(\Delta\psi)\right.\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\cos(\omega_1 t+\theta_1)\sin(\Delta\psi)]+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t+\theta_1)\right)+(2\omega_1+\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)\right.\\
&+(\omega_1+2\omega_2)\frac{a_1a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right)+(2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\\
&\left.+(2\omega_2-\omega_1)\frac{a_2^2a_1}{4}\sin\left((2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1\right)\right]-\omega_2a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\Bigg\}\\
&=\varphi_{v1}\left\{-\left[\omega_1a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)-\omega_2\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^3}{4}\cos(\Delta\psi)\right]\sin(\omega_1 t+\theta_1)-\omega_2\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^3}{4}\sin(\Delta\psi)\cos(\omega_1 t+\theta_1)\right.\\
&+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t+\theta_1)\right)+(2\omega_1+\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)\right.\\
&+(\omega_1+2\omega_2)\frac{a_1a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right)+(2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\\
&\left.\left.+(2\omega_2-\omega_1)\frac{a_2^2a_1}{4}\sin\left((2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1\right)\right]-\omega_2a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right\},
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

qui est dans la forme (1.12). En conséquence pour x_1 nous obtenons

$$
\begin{aligned}
H_{11}&=-\varphi_{v1}\left[\omega_1a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)-\omega_2\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^3}{4}\cos(\Delta\psi)\right]\\
G_{11}&=-\varphi_{v3}\omega_2\frac{a_2^3}{4}\sin(\Delta\psi).
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

En utilisant la règle (1.10) sur (C.9), on trouve

$$
\begin{cases}
\frac{da_1}{dt}=\epsilon\varphi_{v1}\left[\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{\omega_2a_2^3}{8\omega_1}\cos(\Delta\psi)\right],\\
\frac{d\theta_1}{dt}=\epsilon\varphi_{v3}\frac{\omega_2a_2^3}{8\omega_1a_1}\sin(\Delta\psi).
\end{cases}
\tag{C.10}
$$

Calculons l'approximation K-B de x_2. Quand $\omega_1\approx 3\omega_2$ on a les propriétés suivantes :

$$
\omega_2\approx\{|2\omega_2-\omega_1|\},
\tag{C.11}
$$

$$
\omega_2\not\approx\{\omega_1,3\omega_1,3\omega_2,2\omega_1+\omega_2,\omega_1+2\omega_2,|2\omega_1-\omega_2|\}.
\tag{C.12}
$$

En considérant la notation (C.3), on a la relation suivante :

$$
(2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1=-(\omega_2 t+\theta_2)-\Delta\psi.
\tag{C.13}
$$

En injectant (C.13) dans (2.8), on obtient

$$
\begin{aligned}
&f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1),a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2),-a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1),-a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)\\
&=\varphi_{v1}\left\{-\omega_2a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)-(2\omega_2-\omega_1)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^2a_1}{4}\sin\left(\omega_2 t+\theta_2+\Delta\psi\right)\right.\\
&-\omega_1a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1)+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t+\theta_1)\right)+\omega_2\frac{a_2^3}{4}\sin\left(3(\omega_2 t+\theta_2)\right)\right.\\
&+(2\omega_1+\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)+(\omega_1+2\omega_2)\frac{a_1a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right)\\
&\left.\left.+(2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

Par application de la règle trigonométrique (C.6) dans (C.14), on trouve

$$
f\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1),a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2),-a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1),-a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{v1}\left\{-\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2 t+\theta_2)-(2\omega_2-\omega_1)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^2 a_1}{4}\left[\sin(\omega_2 t+\theta_2)\cos(\Delta\psi)\right.\right.\\
&\quad\left.+\cos(\omega_2 t+\theta_2)\sin(\Delta\psi)\right]+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t+\theta_1)\right)+\omega_2\frac{a_2^3}{4}\sin\left(3(\omega_2 t+\theta_2)\right)\right.\\
&\quad+(2\omega_1+\omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)+(\omega_1+2\omega_2)\frac{a_1 a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right)\\
&\quad\left.+(2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\right]-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1)\left.\right\}\\
&= \varphi_{v1}\left\{-\left[\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)+(2\omega_2-\omega_1)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^2 a_1}{4}\cos(\Delta\psi)\right]\sin(\omega_2 t+\theta_2)\right.\\
&\quad+(\omega_1-2\omega_2)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^2 a_1}{4}\sin(\Delta\psi)\cos(\omega_2 t+\theta_2)+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\frac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1 t+\theta_1)\right)+\omega_2\frac{a_2^3}{4}\sin\left(3(\omega_2 t+\theta_2)\right)\right.\\
&\quad+(2\omega_1+\omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)+(\omega_1+2\omega_2)\frac{a_1 a_2^2}{4}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right)\\
&\quad\left.\left.+(2\omega_1-\omega_2)\frac{a_1^2 a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\right]-\omega_1 a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1 t+\theta_1)\right\}, \quad \text{(C.15)}
\end{aligned}
$$

qui est dans la forme (1.12). Donc pour x_2 nous obtenons

$$
\begin{aligned}
H_{22} &= -\varphi_{v1}\left[\omega_2 a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)+(2\omega_2-\omega_1)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^2 a_1}{4}\cos(\Delta\psi)\right]\\
G_{22} &= +(\omega_1-2\omega_2)\varphi_{v3}\frac{a_2^2 a_1}{4}\sin(\Delta\psi). \qquad \text{(C.16)}
\end{aligned}
$$

Par application de la règle (1.10) sur (C.16), on trouve

$$
\begin{cases}
\frac{da_2}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left[\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)-\frac{a_1 a_2^2}{8\omega_2}\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(\omega_1-2\omega_2)\cos(\Delta\psi)\right], \\
\frac{d\theta_2}{dt} = -\epsilon\varphi_{v3}\frac{a_1 a_2}{8\omega_2}(\omega_1-2\omega_2)\sin(\Delta\psi).
\end{cases} \qquad \text{(C.17)}
$$

L'assemblage de (1.13), (C.10) et (C.17) nous donne à la fin :

$$
x_{1,2} = a_{1,2}\cos(\omega_{1,2}t+\theta_{1,2}), \qquad \text{(C.18)}
$$

avec

$$
\begin{cases}
\frac{da_1}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left[\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1}\cos(\Delta\psi)\right], \\
\frac{da_2}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left[\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)-\frac{a_1 a_2^2}{8\omega_2}\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(\omega_1-2\omega_2)\cos(\Delta\psi)\right], \\
\frac{d\theta_1}{dt} = \epsilon\varphi_{v3}\frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1 a_1}\sin(\Delta\psi) \\
\frac{d\theta_2}{dt} = -\epsilon\varphi_{v3}\frac{a_1 a_2}{8\omega_2}(\omega_1-2\omega_2)\sin(\Delta\psi).
\end{cases} \qquad \text{(C.19)}
$$

Annexe D

An analytically tractable model for combustion instability

Publié dans 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Seville, Décembre 2005

An analytically tractable model for combustion instability

F. Bouziani, I.D. Landau, R.R. Bitmead†, A. Voda-Besançon
Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France
† Department of Mechanical & Aerospace Engineering, University of California, San Diego, La Jolla CA 92093-0411, USA

***Abstract*— A system of two coupled Van der Pol equations is considered as a model for combustion instability. This system is analyzed using the Krylov-Bogoliubov method. The results of the analysis are compared with simulation results and with data obtained from a combustion system.**

***Index Terms*— modelling, combustion instability, nonlinear oscillating systems, Krylov-Bogoliubov method.**

I. INTRODUCTION

Combustion instabilities in gas turbine engines and power plants are the focus of a significant number of current studies, see [1] for a recent survey and [2] for an overview of a recent research program funded by the USA Office of Navy Research in the area. Major research activities are conducted *inter alia* in USA, France and UK [3], [4], [5], [6]. The heart of the issue is that such engines combust more coolly and therefore pollute less at low equivalence ratio (fuel-to-air ratio). As the equivalence ratio, ϕ, decreases however, a combustion instability appears due to the nonlinear interaction of heat release with combustion chamber acoustics, and the appearance of this instability reverses any gain from lower ϕ. The instability manifests itself through the occurrence of a limit cycle in most variables; pressure, heat release rate, flame surface, etc, producing an audible tone, which leads to its being called *howling*, *hooting* or *screaming*.

Active control has been proposed as a method to deal with this instability, with the actuation taking place primarily through modulation of a fraction of the fuel flow into the combustion chamber [2]. A recent article [7] reports the successful application of periodic forcing at the limit cycle frequency with slowly adaptive tuning of the relative phase. This method does not rely on a model of the system, only on a structure of the controller. Additionally [2], [8], experimental reports indicate that non-harmonic (including sub-harmonic) forcing also can be effective in reducing limit cycle magnitude, although without much guidance as to how to select the forcing parameters.

One of the features of active control of combustion instabilities is the difficulty in developing a reliable model which captures the dominant dynamical effects in realistic operation. The phenomenon has been scientifically studied in the laboratory since Rayleigh and Rijke [9], [10] and has been described much earlier [11]. However, the modelling still is not fully resolved and certainly has not been resolved well enough to permit the design of controllers. Part of the difficulty has been the natural arising of nonlinear delay differential equations through the transcription of compartmental phenomenological models, which capture the known physical subprocesses but are not amenable to tractable analytical tools other than brute simulation. Our objective in this paper is to present, motivate and study an alternative for the widely used model of Perrachio and Proscia [12] and their descendants based on a coupled Van der Pol Equation. This latter dynamic system is then analyzed using the methods of Krylov and Bogoliubov [13], which is amenable to the development of formal stabilization design studies.

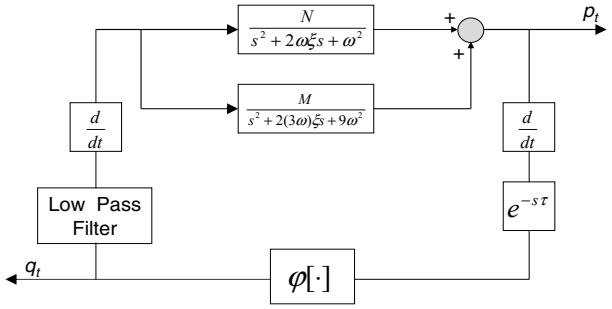

Fig. 1. Block diagram of the model [14]

In [14] a model for the combustion instability has been proposed, which is an extension of [12] through the inclusion of and additional third-harmonic resonance. The block diagram of the model is shown in Figure 1, where p_t is the downstream pressure perturbation at the burning plane, q_t is the flame heat release rate, $\varphi[\cdot]$ is a static non-linear mapping, τ is a transport time delay from nozzle to flame surface, ω is the fundamental acoustic mode of combustor, ξ is the associated damping ratio and N and M are the gains of second-order oscillators with the natural radian frequency equal to ω and 3ω, respectively. The model arises by considering the acoustics of the combustion chamber interacting with the sensitivity of the location of the flame surface. A number of competing physical explanations are available for instability phenomenon based on variations in the length direction alone or in terms of vortex shedding. Our aim is to find a model suited to control; single-input via an actuated variable, single output in terms of a measurable variable (Pressure is one of the few quantities able to be measured in an environment as hostile as an operating combustion chamber.), manageable complexity, and capturing the important dynamical phenomena.

The model is characterized by an inherent feedback structure resulting from the thermo-acoustic feedback [14]. The feedforward path is characterized by two linear resonators in feedback with a nonlinear path which create a nega-

tive damping in certain situation leading to the occurrence of the oscillations. It should be noted that this model is composed of a strictly linear forward path in feedback with a memoryless nonlinearity, making it immediately a candidate for describing function analysis, if one ignores the infinite-dimensionality introduced by the delay element, the non-lowpass nature of the forward path, etc. In [14], [15] computational bifurcation analysis of the nonlinear delay-differential was performed and shown to extend the simplified describing function analysis. A rapprochement of the bifurcation diagram with the experimental evidence led to a level of confidence in the capacity of this model to reflect the data.

This delay-differential model is not, however, tractable for feedback control design and stability analysis. Accordingly, we seek to replace it by a similarly performing delay-free nonlinear model based on coupled Van der Pol systems presented below. The equations governing this system belong to the class of equations called *near-conservative autonomous systems* which are described by equations of the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1}$$

where ϵ is a small positive quantity and f may be a power series in ϵ whose coefficients are polynomial in x and $\frac{dx}{dt}$.

Since in general one cannot find the exact solutions for this type of differential equation, approximation procedures for the analysis of this type of equations have to be considered.

The Krylov-Bogoliubov (K-B) method [13], [16], [17], [18], [19], [20] is without doubt one of the most efficient procedure of analyzing oscillating systems governed by equations of the form (1). In brief the K-B method is looking for solutions of the form

$$x(t) = a(t)\cos\psi(t),$$

where a is the time-varying magnitude of the fundamental oscillation term and ψ is the instantaneous total phase. They obey, in the single resonator case, the differential equations

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\omega\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi. \end{cases}$$

Note that ψ can be written in the form

$$\psi(t) = \omega t + \theta(t),$$

where θ is the instantaneous phase.

It is this approach which will be used for analyzing the behavior of the model of the combustion instability system. From the analysis point of view the combustion instability model presents a number of difficulties among which we mention :

- Presence of two coupled resonators.
- Complicated dynamics in the nonlinear path due to the cascade of a differentiator and delay.

This present work will focus on the analysis of the effect of two-coupled-resonators structure, without the necessity of their being harmonically related.

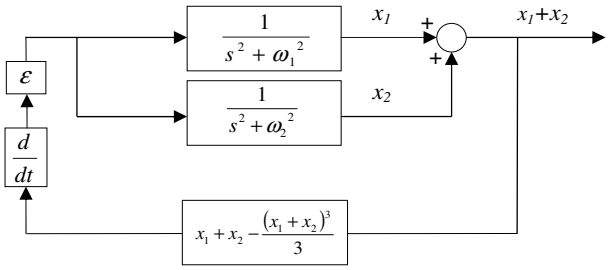

Fig. 2. Combustion instability model based on coupled Van der Pol equations

The nonlinear term will be approximated by a simpler one, but nevertheless representative for these type of oscillations. Specifically the nonlinearity encountered in Van der Pol equations will be considered. Therefore the model of the combustion instability will be approached by a system of two coupled Van der Pol equations (two coupled Van der Pol generators)

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = \epsilon\frac{d}{dt}\left((x_1+x_2) - \frac{1}{3}(x_1+x_2)^3\right), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = \epsilon\frac{d}{dt}\left((x_1+x_2) - \frac{1}{3}(x_1+x_2)^3\right), \end{cases} \tag{2}$$

where ω_1 and ω_2 are the natural radian frequencies of the first and second equations respectively and which can have arbitrary values with some modest provisions to be developed, ϵ is a small positive quantity and the corresponding block diagram is shown in Figure 2. A study involving a small-parameter linearized analysis of the Dunstan model operating with noise excitation in a regime immediately before the appearance of the limit cycle has been conducted in [14], [21]. This bears strong resemblance to the this Van der Pol model. At a fundamental level, the presence of the differentiator, appearing in [12], in the right-hand path has been questioned from a physical perspective. Because of this uncertainty, the presence of small loop gain ϵ, and the resonant forward path, the removal of the cascade differentiator followed by a time delay should be manageable provided the requisite phase match is preserved.

While this type of system has not yet been studied in the literature, one can mention that the single resonator Van der Pol equation has been successfully analyzed using the K-B method [13], [16], [17], [18], [19], [20].

The system (2) will be analyzed by the K-B method and systematically compared with the results of the simulation of system (2). This will allow us to see to what extent, the K-B method gives results close to the exact solutions. In the last part of the paper the results obtained will be compared with the phenomena observed with the combustion instability in [14].

II. First K-B approximation for autonomous multi-resonator systems

Consider a system with n resonators which are be described by equations of the form

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \epsilon f_k\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

where $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\frac{dx}{dt} = \{\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\}$ and ϵ is a small parameter.

To summarize (for more details see Chapter 2 of [18]), for the resonator j, the first K-B approximation proposes the solution

$$x_j = a_j \cos(\psi_j), \tag{4}$$

where $\psi_j = \omega_j t + \theta_j$, a_j and θ_j are slowly time-varying functions obeying the equations

$$\begin{cases} \frac{da_j}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\omega_j} H_{jj}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \\ \frac{d\theta_j}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\omega_j a_j} G_{jj}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n). \end{cases} \tag{5}$$

with H_{jj} and G_{jj} are obtained from the function $f_j\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ by substituting

$$\begin{cases} x_k = a_k \cos(\omega_k t + \theta_k), \\ \frac{dx_k}{dt} = -a_k \omega_k \sin(\omega_k t + \theta_k), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

and by setting it in the form

$$\begin{aligned} & f_j\left(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, a_n \cos(\omega_n t + \theta_n),\right. \\ & \quad \left. - a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, -a_n\omega_n \sin(\omega_n t + \theta_n)\right) \\ & = H_{jj} \sin(\omega_j t + \theta_j) + G_{jj} \cos(\omega_j t + \theta_j) \\ & \quad + \sum_{\omega_j \not\approx \omega_\ell}^{r} (H_{\ell j} \sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_{\ell j} \cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)), \end{aligned} \tag{7}$$

where ω_ℓ and θ_ℓ are the linear combinations of $\omega_1, \ldots, \omega_n$ and $\theta_1, \ldots, \theta_n$, respectively, and r is the number of possible linear combinations of $\omega_1, \ldots, \omega_n$ different from ω_j. Furthermore for x_j, the coefficients of fundamental term in (7) are used and the all other terms are eliminated.

III. K-B approximation of two coupled Van der Pol equations

Consider the equations system (2) and the form (3), in this case

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 &= f(x_1, x_2, \tfrac{dx_1}{dt}, \tfrac{dx_2}{dt}) \\ &= \left(1 - (x_1 + x_2)^2\right)\left(\tfrac{dx_1}{dt} + \tfrac{dx_2}{dt}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Introducing

$$\begin{cases} x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \\ \frac{dx_i}{dt} = -a_i \omega_i \sin(\omega_i t + \theta_i), \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

into (8), one gets

$$\begin{aligned} & f\left(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2),\right. \\ & \quad \left. -a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), -a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)\right) \\ & = -\left(1 - (a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2))^2\right) \\ & \quad \times (a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)). \end{aligned} \tag{9}$$

To approximate the solution of (2), it is necessary to set (9) in the form (7). In [22], one gives the details of computation leading to the expression

$$\begin{aligned} & f\left(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2),\right. \\ & \quad \left. -a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), -a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)\right) \\ & = -\omega_1 a_1 \left(1 - \tfrac{a_1^2}{4} - \tfrac{a_2^2}{2}\right) \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ & \quad - \omega_2 a_2 \left(1 - \tfrac{a_2^2}{4} - \tfrac{a_1^2}{2}\right) \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ & \quad + \omega_1 \tfrac{a_1^3}{4} \sin\left(3(\omega_1 t + \theta_1)\right) + \omega_2 \tfrac{a_2^3}{4} \sin\left(3(\omega_2 t + \theta_2)\right) \\ & \quad + (2\omega_1 + \omega_2) \tfrac{a_1^2 a_2}{2} \sin\left((2\omega_1 + \omega_2)t + 2\theta_1 + \theta_2\right) \\ & \quad + (\omega_1 + 2\omega_2) \tfrac{a_1 a_2^2}{2} \sin\left((\omega_1 + 2\omega_2)t + \theta_1 + 2\theta_2\right) \\ & \quad + (2\omega_1 - \omega_2) \tfrac{a_1^2 a_2}{4} \sin\left((2\omega_1 - \omega_2)t + 2\theta_1 - \theta_2\right) \\ & \quad + (2\omega_2 - \omega_1) \tfrac{a_2^2 a_1}{4} \sin\left((2\omega_2 - \omega_1)t + 2\theta_2 - \theta_1\right), \end{aligned} \tag{10}$$

from which one can see the existence of the frequency set

$$\begin{aligned} W = \{ & \omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, \\ & 2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1\}. \end{aligned} \tag{11}$$

This set is very important for finding the possible operation regimes of the system, i.e. for x_1 (respectively x_2), the remaining terms from (10) after application of the K-B approximation will only be the terms with the frequency ω from W such as $\omega \approx \omega_1$ (respectively ω_2). Consequently, one has the following classification, which will be elaborated and explained shortly :

1) $\omega_1 \not\approx \left\{\omega_2, 3\omega_2, \frac{\omega_2}{3}\right\}$-two generators with competitive quenching
2) $\omega_1 \approx \omega_2$-mutual synchronization with close frequencies
3) $\omega_1 \approx 3\omega_2$ (respectively $\omega_2 \approx 3\omega_1$)-mutual synchronization with multiple frequencies

A. Two generators with competitive quenching

Consider the case where the frequencies ω_1 and ω_2 respect Condition 1 above. In this case, there is no interconnection effect between the both frequencies and the K-B approximation uses only the fundamental oscillations terms of $f\left(a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), -a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), -a_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)\right)$. Consequently the approximate solutions of (2) are (for details see [22])

$$x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \quad (i = 1, 2) \tag{12}$$

with

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \epsilon \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_2^2}{2}\right), \\ \frac{da_2}{dt} = \epsilon \frac{a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2^2}{4} - \frac{a_1^2}{2}\right), \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Let us find steady-state solutions of (13). In this case, (13) possesses four steady-state solutions

$$a_1 = 0 \text{ and } a_2 = 0, \tag{14}$$

$$a_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ and } a_2 = \tfrac{2}{\sqrt{3}}, \tag{15}$$

$$a_1 = 2 \text{ and } a_2 = 0, \tag{16}$$

$$a_1 = 0 \text{ and } a_2 = 2. \tag{17}$$

Both former solutions (14) and (15) are unstable, and both latter solutions (16) and (17) are stable. Therefore, the amplitudes of x_1 and x_2 converge to one of both

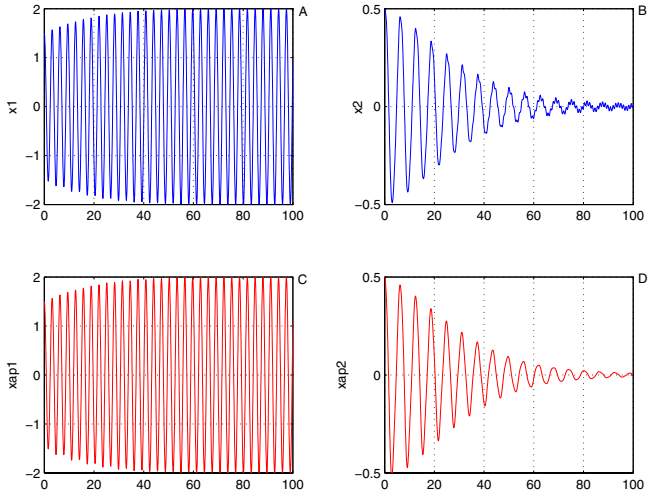

Fig. 3. (A) x_1 simulated from (2), (B) x_2 simulated from (2), (C) x_1 approximated by (12) and (13), (D) x_2 approximated by (12) and (13)

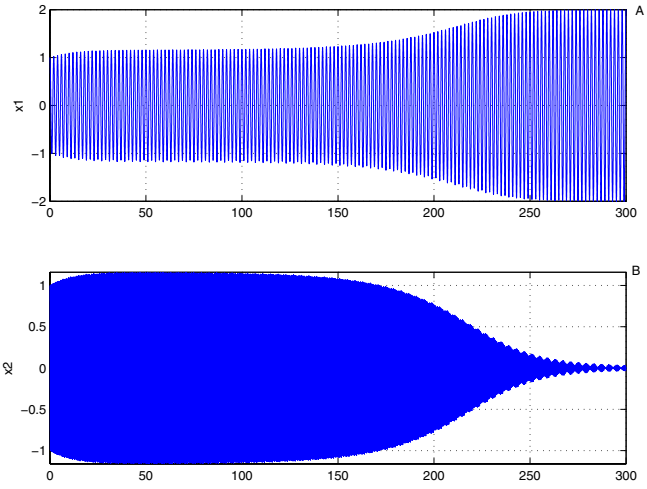

Fig. 4. (A) x_1 simulated from (2), (B) x_2 simulated from (2)

possible stationary states (16) and (17). Depending on the initial condition, one of the generators is excited, while the oscillations of the other generator are entirely quenched. Such quenching of the oscillations of one of the generators, caused by the sufficiently large non-linear coupling between them, is know as *competitive quenching*.

It was noted that, if $a_1(0) > a_2(0)$, x_1 is excited and the oscillations of x_2 are entirely quenched, and the converse effect occurs when $a_1(0) < a_2(0)$. Figure 3 presents a simulation test with $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$, $\epsilon = 0.1$, $a_1(0) = 1.5$ and $a_2(0) = 0.5$, the upper part shows the outputs of (2) and lower part shows the outputs approximated by (12) and (13). Also, when $a_1(0) = a_2(0)$ (but not equal to zero), it was noted that:

- In (13), the magnitudes a_1 and a_2 converge to $\frac{2}{\sqrt{3}}$ and $\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectively, which correspond to the unstable steady-state (15).
- In (2), the magnitudes a_1 and a_2 converge to $\frac{2}{\sqrt{3}}$ and $\frac{2}{\sqrt{3}}$ respectively, and remain temporarily, but after a long time (if one compares it to the convergence dynamics) these the magnitudes will converge necessarily to one of the steady-states (16) and (17).

This implies that in certain conditions, both frequencies can coexist for a long time before the entry into the competitive quenching regime. To illustrate this phenomenon, Figure 4 presents a simulation test with $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 3.5\omega_1 = 3.5\pi$, $\epsilon = 0.1$, $a_1(0) = 1$ and $a_2(0) = 1$, the upper part is the output x_1 of (2) and lower part is the output x_2 of (2).

B. Mutual synchronization with close frequencies

Consider the case where the frequencies ω_1 and ω_2 are close. For x_1 (respectively x_2), the application of K-B approximation implies the conservation of all coefficients of sinusoidal terms in $f(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2))$ with a frequency close to ω_1 (respectively ω_2) and the elimination of all other terms. Consequently the approximate solutions of (2) are (for details see [22])

$$x_i = a_i\cos(\omega_i t+\theta_i), \quad (i=1,2) \tag{18}$$

with a_1, a_2, θ_1 and θ_2 are governed by

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \epsilon\left\{\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{a_1^2}{4}-\frac{a_2^2}{2}\right)\right. \\ \qquad +\left[\frac{a_2\omega_2}{2\omega_1}\left(1-\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\frac{a_2a_1^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi) \\ \qquad \left.+(\omega_1-2\omega_2)\left(\frac{a_1a_2^2}{8\omega_1}\right)\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{da_2}{dt} = \epsilon\left\{\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{a_2^2}{4}-\frac{a_1^2}{2}\right)\right. \\ \qquad +\left[\frac{a_1\omega_1}{2\omega_2}\left(1-\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\frac{a_1a_2^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi) \\ \qquad \left.+(\omega_2-2\omega_1)\left(\frac{a_2a_1^2}{8\omega_2}\right)\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} = -\epsilon\left\{\frac{a_2^2}{8\omega_1}(\omega_1-2\omega_2)\sin(2\Delta\psi)+\left[\frac{a_2a_1}{8\omega_1}(2\omega_1-\omega_2)\right.\right. \\ \qquad \left.\left.+\frac{a_2\omega_2}{2a_1\omega_1}\left(1-\frac{a_2^2}{4}-\frac{a_1^2}{2}\right)\right]\sin(\Delta\psi)\right\}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \epsilon\left\{\frac{a_1^2}{8\omega_2}(\omega_2-2\omega_1)\sin(2\Delta\psi)+\left[\frac{a_2a_1}{8\omega_2}(2\omega_2-\omega_1)\right.\right. \\ \qquad \left.\left.+\frac{a_1\omega_1}{2a_2\omega_2}\left(1-\frac{a_1^2}{4}-\frac{a_2^2}{2}\right)\right]\sin(\Delta\psi)\right\}, \end{cases} \tag{19}$$

where $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = (\omega_1-\omega_2)t+\theta_1-\theta_2$.

This result is very important, because in parallel with differential equation (2), it is possible to compute from (19) the amplitude and the phase evolutions of the output and to compare both to signals measured in practice.

The integration and study of stationary solutions of (19) are very difficult. However, to find the stationary solutions when $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, one can adopt the following steps.

Using $y = x_1 + x_2$, if we add the both equations of (2) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}+\omega^2(x_1+x_2) &= \epsilon\left(1-(x_1+x_2)^2\right)\frac{d(x_1+x_2)}{dt} \\ \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y &= \epsilon\left(1-y^2\right)\frac{dy}{dt}. \end{aligned} \tag{20}$$

It is seen that (20) corresponds to classical Van der Pol equation. It is well to known that for the classical Van der Pol

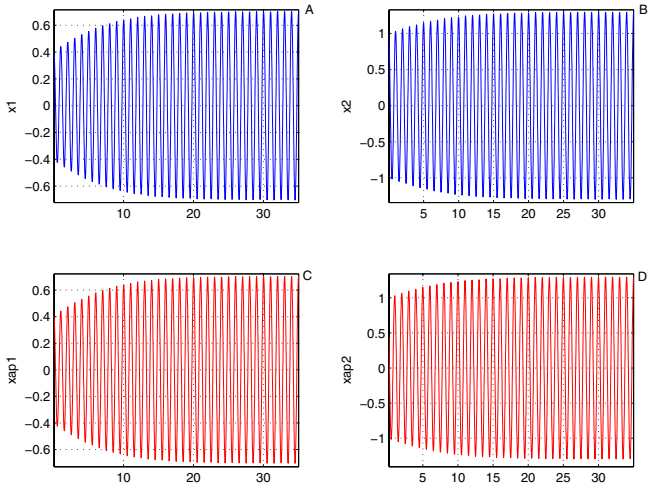

Fig. 5. (A) x_1 simulated from (2), (B) x_2 simulated from (2), (C) x_1 approximated by (18) and (19), (D) x_2 approximated by (18) and (19)

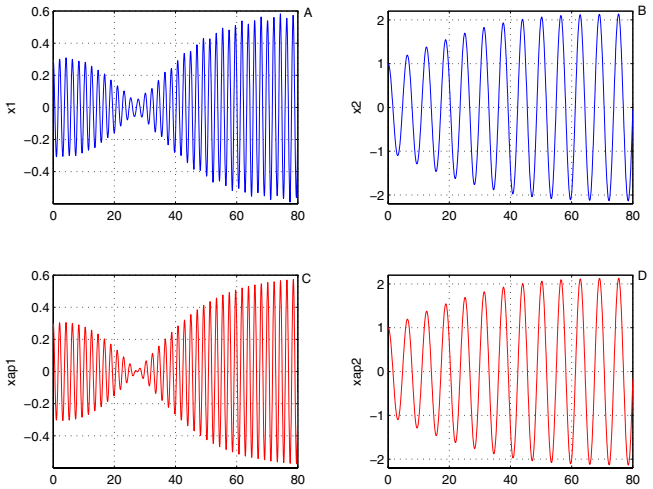

Fig. 6. (A) x_1 simulated from (2), (B) x_2 simulated from (2), (C) x_1 approximated by (24) and (25), (D) x_2 approximated by (24) and (25)

equation, the K-B approximation gives a stationary solution [19], [13], [16], [17], [18], [20]

$$y = 2\cos(\omega t + \theta). \tag{21}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2\cos(\omega t + \theta), \tag{22}$$

where θ is the arbitrary instantaneous phase, which satisfies

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 4 \tag{23}$$

One notes that there exist an infinity of steady-state points and that the convergence of the amplitude and phase depends essentially on the initial state of x_1 and x_2. Therefore, to get the same result between (2) and (19), one must initialize (19) with the appropriate values of initial amplitude and phase.

Figure 5 shows a simulation test with $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi$, $a_1(0) = 0.4$, $a_2(0) = 1$, $\epsilon = 0.1$ and $\theta_1(0) = \theta_1(0) = \frac{\pi}{2}$, the upper part is the outputs of (2) and lower part is the outputs approximated by (18) and (19).

C. Mutual synchronization with multiple frequencies

Consider the case where the frequency ω_1 is close to $3\omega_2$. In this case the terms with frequencies ω_1 and $3\omega_2$ are used for x_1 approximation, and the terms with frequencies ω_2 and $(2\omega_2 - \omega_1)$ are used for x_2 approximation. Therefore, one finds (for details see [22])

$$x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i), \quad (i = 1, 2) \tag{24}$$

with

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \epsilon\left[\frac{a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_2^2}{2}\right) - \frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1}\cos(\Delta\psi)\right], \\ \frac{da_2}{dt} = \epsilon\left[\frac{a_2}{2}\left(1 - \frac{a_2^2}{4} - \frac{a_1^2}{2}\right)\right. \\ \qquad \left. + \frac{a_1 a_2^2}{8\omega_2}(2\omega_2 - \omega_1)\cos(\Delta\psi)\right], \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \epsilon\frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1 a_1}\sin(\Delta\psi), \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -\epsilon\frac{a_1 a_2}{8\omega_2}(\omega_1 - 2\omega_2)\sin(\Delta\psi), \end{cases} \tag{25}$$

where $\Delta\psi = \psi_1 - 3\psi_2 = (\omega_1 - 3\omega_2)t + \theta_1 - 3\theta_2$,

Let us find steady-state solution of (25). One stable steady-state point can be computed analytically from (25)

$$a_1 = 2 \quad \text{and} \quad a_2 = 0. \tag{26}$$

Others points need numerical solution of (25). Furthermore, one introduces

$$p = \frac{\omega_1 - 3\omega_2}{\omega_2}. \tag{27}$$

When $p = 0$ and for any value of ω_2 (or ω_1), it exist one other stable steady-state point

$$a_1 = 0.593, \quad a_2 = 2.136 \quad \text{and} \quad \Delta\psi = \pi. \tag{28}$$

For $p \neq 0$, it exists one other stable steady-state point which depend from the value of p and ω_2 (or ω_1).

From this, one can see that if ω_1 is close to $3\omega_2$ (respectively $\frac{\omega_2}{3}$), it is possible to have two phenomena depending on the initial condition. In the first phenomenon, the generator with frequency ω_1 is excited and the other generator with frequency ω_2 is quenched. In the second phenomenon, one has synchronization regime. By a synchronization regime is meant that the oscillation frequency of the second generator, which is equal to $\omega_2 + \dot{\theta}_2$, is exactly a third of the oscillation frequency of the first generator, which is equal to $\omega_1 + \dot{\theta}_1$.

Figure 6 presents a simulation test with $\omega_1 = 3\omega_2 = 3$, $\epsilon = 0.1$, $a_1(0) = 0.3$, $a_2(0) = 1$ and $\theta_1(0) = \theta_1(0) = \frac{\pi}{2}$, the upper part is the outputs of (2) and lower part is the outputs approximated by (24) and (25).

IV. Summary of the analysis results

We have identified the following three situations relating the proximity of the natural frequencies of the individual oscillators. From a practical point of view one can say that the system is characterized in steady state either by a single oscillating frequency (which correspons to one of the resonance frequencies of the linear oscillators) or by stable simultaneous oscillations (which correspond to synchronized oscillations of both generators).

This single oscillation phenomena which is known as *competitive quenching phenomena*, occurs when the ratio of resonance frequencies of the two resonators are different from 3, 1 and $\frac{1}{3}$, and occurrence of one of frequencies (among the two) will depend on the initial conditions.

Stable simultaneous oscillations with two distinct frequencies will occur only when $\omega_1 \approx 3\omega_2$ or $\omega_2 \approx 3\omega_1$ and the initial condition is sufficiently good so that both generators are excited.

V. Comparison with experimental results

Representative experimental results are discussed in a [23], [15] which demonstrate salient dynamical phenomena, such as the simultaneous presence of two sinusoidal components; a strong dominant tone at 210Hz, and a lesser but persistent non-harmonic tone at 714Hz. The capacity of a model to display the coexistence of these modes is regarded as an important corroboration of the model.

In [15], [14] a describing function analysis (slightly extended) shows that equilibrium period solutions at these frequencies should exist with 210Hz being stable and 714Hz having a low-dimensional unstable manifold. This would normally lead to the extinction of the 714Hz mode except for a measure-zero set of initial conditions. A bifurcation analysis shows that, contrary to the prediction from describing functions, the 714Hz mode of the Dunstan model is in fact stable, but that noise induced perturbations can induced jumping to and from the stable 210Hz mode, thereby creating the coexistence.

It is important to note that the new model proposed here also demonstrates presence of two stable limit cycles with non-measure-zero basins of attraction. The ability of the model to capture this unusual and testable aspect of the system dynamics, is a strong indicator of its possible strength for system design. The tractability of the K-B method for analysis is a major advantage of this model versus that of [14].

VI. Conclusion

The aim of this paper has been to show that it is possible to go further in the analysis of the instability combustion model proposed in [14]. The two coupled Van der Pol equations considered in this paper may be an effective choice to approach the combustion instability model. The analysis method is based on the use of Krylov-Bogoliubov approach for oscillatory systems. Indeed, this approach allows one to overcome one of the difficulties related to the combustion instability model, i.e. the presence of two coupled resonators. The simulation tests have illustrated the precision of the Krylov-Bogoliubov approximation.

References

[1] A. Annaswamy and A. Ghoniem, "Active control of combustion instability: Theory and practice," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, no. 6, pp. 37–54, Dec 2002.

[2] G. Roy, *Advances in Chemical Propulsion: Science to Technology*. Boc Raton, Fl USA: CRC – Taylor & Francis, 2001.

[3] C. Jacobson, A. Khibnik, A. Banaszuk, J. Cohen, and W. Proscia, "Active control of combustion instabilities in gas turbine engines for low emissions. part I: Physics-based and experimentally identified models of combustion instability," *Proc. AVT Symposium on Active Control Technology, Braunschweig*, pp. 30–1–30–11, 2000.

[4] K. McManus, F. Han, W. Dunstan, C. Barbu, and M. Shah, "Modeling and control of combustion dynamics in industrial gas turbines," *Proc. ASME Turbo-Expo*, pp. 567–575, 2004.

[5] E. H. M. Mettenleiter and S. Candel, "Adaptive control of aeroacoustic instabilities," *J. Sound & Vibration*, vol. 230, no. 4, pp. 761–789, 2000.

[6] A. Dowling, "The calculation of thermoacoustic oscillations," *J Sound & Vibration*, vol. 180, no. 4, pp. 557–581, 1995.

[7] A. Banaszuk, K. Ariyur, M. Krstic, and C. Jacobson, "An adaptive algorithm for control of combustion instability," *Automatica*, vol. 40, pp. 1965–1972, 2004.

[8] J. Cohen, N. Rey, C. Jacobson, and T. Anderson, "Active control of combustion instability in a liquid-fueled low-nox combustor," *43rd ASME/IGTI Turbo Expo, Stockholm, Sweden*, Jun 1998.

[9] J. Rayleigh, *The Theory of Sound*. New York: Dover, 1945, vol. 2.

[10] P. Rijke, *Ann. of Physics*, 1959.

[11] J. Tyndal, *Sound*. New York: D. Appleton & Company, 1897.

[12] A. Peracchio and W. Proscia, "Nonlinear heat-release/acoustic model for thermoacoustic instability in lean premixed combustors," *ASME J. Eng. Gas Turbines Power*, vol. 121, no. 3, pp. 415–421, 1999.

[13] N. Bogoliubov and Y. Mitropolski, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Hindustan Publishing Corp, Delhi, and Gordon and Breach, 1961.

[14] W. J. Dunstan, "System identification of nonlinear resonant systems," Ph.D. dissertation, University of California, San Diego, 2003.

[15] W. J. Dunstan, R. R. Bitmead, and S. M. Savaresi, "Fitting nonlinear low-order models for combustion instability control," *Automatica*, pp. 1301–1317, 2001.

[16] C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. New York: McGraw-Hill Book Co, 1964, (reprinted by Princeton University Press, 1985).

[17] P. S. Landa, *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Kluwer, 1996.

[18] ——, *Regular and Chaotic Oscillations*, V. I. Babitsky and J. Wittenburg, Eds. New York: Springer, 2000.

[19] I. D. Landau and R. R. Bitmead, "On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations," Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla CA 92093-0411, USA, Tech. Rep., Jan 2004.

[20] F. Bouziani, I. D. Landau, and A. Voda-Besançon, "First and second-order K-B approximations for the analysis of nonlinear oscillations in autonomous systems," Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France, Tech. Rep., Jun 2004.

[21] W. J. Dunstan and R. R. Bitmead, "Identification of resonant systems using periodic multiplicative reference systems," *13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam NL*, 2003.

[22] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, and A. Voda-Besançon, "Analysis of two coupled Van der Pol equations as a model for combustion instability," Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France, Tech. Rep., Mar 2005.

[23] R. M. Murray, C. A. Jacobson, R. Casas, A. I. Khibnik, C. R. Johnson Jr, R. R. Bitmead, A. A. Peracchio, and W. M. Proscia, "System identification for limit cycling systems: a case study for combustion instabilities," *American Control Conference, Philadelphia PA*, pp. 2004–2008, 1998.

Annexe E

Un modèle de commande pour le contrôle des instabilités de combustion

Publié dans :

– *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bordeaux, Juin 2006*

– *Revue de Sciences et Technologie de l'Automatique e-STA*

Un modèle de commande pour le contrôle des instabilités de combustion

Landau Ioan-Doré
Laboratoire d'Automatique de Grenoble,
ENSIEG BP 46,
38402 Saint-Martin d'Hères, France
landau@lag.ensieg.inpg.fr

Bouziani Fethi
Laboratoire d'Automatique de Grenoble,
ENSIEG BP 46,
38402 Saint-Martin d'Hères, France
Fethi.Bouziani@lag.ensieg.inpg.fr

Bitmead Robert
Department of Mechanical & Aerospace
Engineering, University of California, San Diego,
La Jolla CA 92093-0411, USA
rbitmead@ucsd.edu

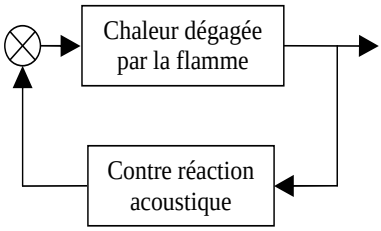

Fig. 1. Schéma bloc décrivant l'instabilité thermo-acoustique

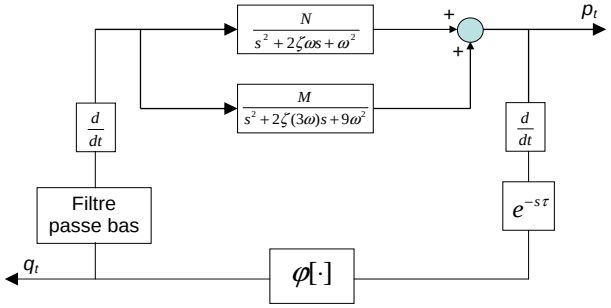

Fig. 2. Modèle de l'instabilité de combustion

Résumé— **Un système de deux équations de Van der Pol généralisées et couplées est proposé comme un modèle de commande pour l'instabilité de combustion. Ce système est analysé en utilisant la méthode de Krylov-Bogoliubov. Les aspects de commande conduisant à l'extinction des oscillations sont examinés. Les résultats de l'analyse sont comparés avec des tests en simulation.**

Mots-clés— **modélisation, instabilité de combustion, systèmes non-linéaires oscillants, méthode de Krylov-Bogoliubov.**

I. Introduction

Le problème des instabilités de la combustion dans les turbines à gaz constitue l'objet de très nombreuses études. Il s'agit d'un phénomène complexe mais qui dans beaucoup de cas peut être expliqué par une contre réaction positive thermo-acoustique (Figure 1). Des programmes de recherche importants orientés sur cette thématique sont conduits dans un certain nombre de pays en collaboration avec les industriels (France, Etats-Unis, Grande-Bretagne). Les articles [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] donnent une image de cette activité.

Le problème devient de plus en plus actuel car la réduction du rapport combustible/air, améliore le rendement et réduit la pollution. Malheureusement, la réduction du rapport combustible/air conduit à l'apparition des instabilités de combustion qui sont rédhibitoires. Plusieurs approches pour traiter ce problème ont été considérées. La première approche dite "passive" concerne la modification de la géométrie des turbines.

La seconde approche "active instability control" (AIC) est basée sur la mise en place d'une régulation en boucle fermée. Dans la plus part des cas, on traite l'instabilité comme une perturbation qu'on essaye de compenser. Ceci requiert la mise en place de capteurs et surtout d'actionneurs. Dans plusieurs applications il s'agit d'un haut parleur [9]. Cette approche de point de vue automatique est à rapprocher avec le contrôle actif des vibrations dans les systèmes mécaniques ou avec le contrôle de bruit. Cette approche ignore totalement le modèle du processus de combustion.

Par ailleurs il a été constaté expérimentalement que dans certain cas une faible modulation en haute fréquence du rapport combustible/air peut conduire à la disparition des instabilités de combustion (cette commande s'apparente à une entrée multiplicative dans le système représenté dans Figure 1). La mise en œuvre systématique repose néanmoins sur la disponibilité d'un modèle du mécanisme d'instabilité et sur la compréhension des conditions assurant l'extinction des oscillations.

Cette approche, dans la mesure où un support théorique peut être apporté présente d'une part des avantages pratiques évidents en terme de simplicité de mise en œuvre et d'autre part en terme de rendement énergétique (pas d'apport d'énergie extérieure).

Plusieurs aspects importants sont à étudier :

1. Un modèle macroscopique du mécanisme de l'instabilité ;
2. Une compréhension théorique approfondie des comportements oscillatoires du modèle ;
3. Etude théorique des conditions d'extinction des oscillations par application d'une commande multiplicative.

Des progrès important ont été fait sur le point 1 dans [10], [11].Un modèle assez représentatif existe. A titre de référence, nous avons considéré le modèle de Dunstan et Bitmead [12], [13] qui est une extension du modèle Peracchio et Proscia [14] et qui a fait l'objet de nombreuses vérifications expérimentales. Ce modèle est représenté dans la Figure 2. où p_t est la perturbation de pression en aval agissant de la chambre de combustion, q_t est la quantité de chaleur dégagée par la flamme, $\varphi[\cdot]$ est une fonction non linéaire statique, τ est un temps de retard du transport de l'injecteur à la surface de la flamme, ω est le mode fondamental acoustique de l'instabilité de combustion, ζ est le coefficient d'amortissement associé et N et M sont les gains

des résonateurs de deuxième ordre avec les pulsations naturelles égale à ω et 3ω, respectivement. Le modèle résulte de l'interaction entre l'acoustique de la chambre de combustion et l'emplacement de la surface de la flamme.

La caractéristique statique non-linéaires $\varphi[\cdot]$ a été identifiée sur une turbine réelle et on a une image assez claire de ses caractéristiques [12].

Le modèle est caractérisé par une structure à contre-réaction intrinsèque résultant de la contre réaction thermo-acoustique (voir Figure 2). La voie directe est caractérisée par la présence de deux résonateurs et le retour non-linéaire crée dans certaines situations un amortissement négatif conduisant à l'apparition des oscillations.

En faisant abstraction de l'existence de deux résonateurs et du retard, le schéma suggère une analogie avec les oscillateurs électroniques. En effet, si en plus on examine la caractéristique non-linéaire celle-ci peut être approchée dans la zone normale d'opération par

$$\varphi(y) = a + by - \frac{c}{3}y^3. \tag{1}$$

où a, b et c sont des constantes.

Ceci suggère un rapprochement avec l'équation de Van der Pol largement utilisée pour l'étude des oscillateurs électroniques et en général avec les techniques d'études des systèmes oscillants. Il faut néanmoins ne pas perdre de vue qu'à l'opposé des oscillateurs électroniques l'objectif et de faire disparaître les oscillations et non pas de les amorcer.

En effet l'équation de Van der Pol a la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \epsilon\left(1 - y^2\right)\frac{dy}{dt}, \tag{2}$$

où ϵ est paramètre faible, ω est la pulsation naturelle et dont le terme de droite correspond à la dérivée de la fonction non-linéaire

$$\varphi_v(y) = \varphi_{v0} + y - \frac{y^3}{3}, \tag{3}$$

où φ_{v0} est une constante arbitraire.

Tenant compte des caractéristiques de la non-linéarité (1) effective, une généralisation de l'équation de Van der Pol doit être considérée (Van der Pol généralisée, VDPG)

$$\frac{d^2y}{dt} + \omega^2 y = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}y - \frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right), \tag{4}$$

où φ_{v1} et φ_{v3} sont des constantes arbitraires positive, et qui dans le cas de deux résonateurs conduit au schéma représenté dans la Figure 3 et au système d'équation suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = \epsilon\frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}y - \frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = \epsilon\frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0} + \varphi_{v1}y - \frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right), \\ y = x_1 + x_2. \end{cases} \tag{5}$$

Ce modèle constitue sans aucun doute dans un premier temps, une base pour l'étude des phénomènes d'oscillations (qui serait à confronter avec les données réelles) et dans un deuxième temps il devrait permettre l'étude effective de l'effet d'extinction, et donc le dimensionnement de la commande (amplitude et caractéristiques fréquentielles)

Une fois le modèle adopté, il s'agit de trouver l'approche mathématique permettant d'étudier analytiquement ce modèle. Les équations régissant ce système, font que ce dernier

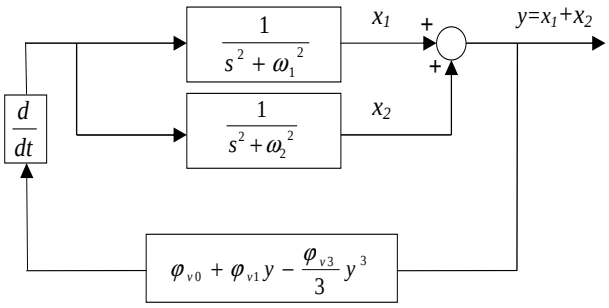

Fig. 3. Modèle de l'instabilité de combustion basé sur des équations de Van der Pol généralisées et couplées

appartient à la classe des systèmes qui sont décrits par des équations de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{6}$$

où ϵ est une quantité positive de valeurs faible et f peut être une série entière de ϵ dont les coefficients sont des polynômes en x et $\frac{dx}{dt}$.

Puisqu'en général on ne peut pas trouver les solutions exactes pour ce type d'équation, les procédures d'approximation pour l'analyse de ce type d'équations doivent être considérées.

La méthode de Krylov-Bogoliubov (K-B) [15], [16], [17], [18], [19], [20] est sans doute une des procédures les plus efficaces pour analyser les systèmes oscillants régis par des équations de la forme (6). En bref la méthode K-B cherche des solutions de la forme

$$x(t) = a(t)\cos\psi(t), \tag{7}$$

où a est l'amplitude de l'oscillation fondamentale variant dans le temps et ψ est la phase totale instantanée. Ils obéissent dans le cas d'un seul résonateur au système d'équations

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\omega\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi. \end{cases}$$

Notons que ψ peut être écrite sous la forme

$$\psi(t) = \omega t + \theta(t),$$

où θ est la phase instantanée

C'est cette approche qui sera employée pour l'analyse du comportement du modèle d'instabilité de combustion. Du point de vue de l'analyse, le modèle d'instabilité de combustion présente un certain nombre de difficultés parmi lesquelles nous mentionnons :

- La présence de deux résonateurs couplés.
- La dynamique compliquée dans le retour de boucle qui est due à la présence en cascade d'une dérivée et d'un retard.

Le travail présent se concentrera sur l'analyse de l'effet de la structure de deux résonateurs couplés, sans que nécessairement il existe une relation entre leur harmoniques.

II. Première approximation K-B pour les systèmes multi-résonateurs autonomes

Considérons un système avec n résonateurs qui est décrit par des équations de la forme

$$\frac{d^2x_k}{dt^2}+\omega_k^2x_k=\epsilon f_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right),\quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

où $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\frac{dx}{dt}=\{\frac{dx_1}{dt},\ldots,\frac{dx_n}{dt}\}$ et ϵ est un paramètre faible.

Pour le résonateur j, la première approximation K-B propose la solution (pour plus de détails voir le Chapter 2 de [18])

$$x_j=a_j\cos(\psi_j), \tag{9}$$

où $\psi_j=\omega_jt+\theta_j$, a_j et θ_j sont des fonctions lentement variant dans le temps obéissent aux équations

$$\begin{cases}\frac{da_j}{dt}=-\frac{\epsilon}{2\omega_j}H_{jj}(a_1,\ldots,a_n,\theta_1,\ldots,\theta_n),\\ \frac{d\theta_j}{dt}=-\frac{\epsilon}{2\omega_ja_j}G_{jj}(a_1,\ldots,a_n,\theta_1,\ldots,\theta_n).\end{cases} \tag{10}$$

où H_{jj} et G_{jj} sont obtenues de la fonction $f_j\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ en injectant

$$\begin{cases}x_k=a_k\cos(\omega_kt+\theta_k),\\ \frac{dx_k}{dt}=-a_k\omega_k\sin(\omega_kt+\theta_k),\end{cases}\quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{11}$$

et en la mettant sous la forme

$$\begin{aligned}&f_j\left(a_1\cos(\omega_1t+\theta_1),\ldots,a_n\cos(\omega_nt+\theta_n),\right.\\&\quad\left.-a_1\omega_1\sin(\omega_1t+\theta_1),\ldots,-a_n\omega_n\sin(\omega_nt+\theta_n)\right)\\&=H_{jj}\sin(\omega_jt+\theta_j)+G_{jj}\cos(\omega_jt+\theta_j)\\&\quad+\sum_{\omega_j\not\approx\omega_\ell}^{r}(H_{\ell j}\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell)+G_{\ell j}\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)),\end{aligned} \tag{12}$$

où ω_ℓ et θ_ℓ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1,\ldots,\omega_n$ et $\theta_1,\ldots,\theta_n$, respectivement, et r est le nombre combinaisons linéaires possible de $\omega_1,\ldots,\omega_n$ différent de ω_j. En outre pour x_j, les coefficients du terme fondamental dans (12) sont utilisés et toutes les autres termes sont éliminés.

III. Application de l'approximation K-B pour deux équations de Van der Pol généralisées

Considérons le système d'equations (5) et la forme (8), dans ce cas

$$\begin{aligned}f_1=f_2&=f(x_1,x_2,\tfrac{dx_1}{dt},\tfrac{dx_2}{dt})\\&=\varphi_{v1}\left(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(x_1+x_2)^2\right)(\tfrac{dx_1}{dt}+\tfrac{dx_2}{dt}).\end{aligned} \tag{13}$$

Introduisons

$$\begin{cases}x_i=a_i\cos(\omega_it+\theta_i),\\ \frac{dx_i}{dt}=-a_i\omega_i\sin(\omega_it+\theta_i),\end{cases}\quad (i=1,2)$$

dans (13), on obtient

$$\begin{aligned}&f\left(a_1\cos(\omega_1t+\theta_1),a_2\cos(\omega_2t+\theta_2),\right.\\&\quad\left.-a_1\omega_1\sin(\omega_1t+\theta_1),-a_2\omega_2\sin(\omega_2t+\theta_2)\right)\\&=-\varphi_{v1}\left(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(a_1\cos(\omega_1t+\theta_1)+a_2\cos(\omega_2t+\theta_2))^2\right)\\&\quad\times(a_1\omega_1\sin(\omega_1t+\theta_1)+a_2\omega_2\sin(\omega_2t+\theta_2)).\end{aligned} \tag{14}$$

Pour approximer la solution de (5), il est nécessaire de mettre (14) sous la forme (12). Dans [11], on donne les détails du calcul qui nous permet d'obtenir l'expression

$$\begin{aligned}&f\left(a_1\cos(\omega_1t+\theta_1),a_2\cos(\omega_2t+\theta_2),\right.\\&\left.-a_1\omega_1\sin(\omega_1t+\theta_1),-a_2\omega_2\sin(\omega_2t+\theta_2)\right)\\&=\varphi_{v1}\left\{-\omega_1a_1\left(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\tfrac{a_1^2}{4}+\tfrac{a_2^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_1t+\theta_1)\right.\\&\quad-\omega_2a_2\left(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\tfrac{a_2^2}{4}+\tfrac{a_1^2}{2}\right)\right)\sin(\omega_2t+\theta_2)\\&\quad+\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left[\omega_1\tfrac{a_1^3}{4}\sin\left(3(\omega_1t+\theta_1)\right)+\omega_2\tfrac{a_2^3}{4}\sin\left(3(\omega_2t+\theta_2)\right)\right.\\&\quad+(2\omega_1+\omega_2)\tfrac{a_1^2a_2}{2}\sin\left((2\omega_1+\omega_2)t+2\theta_1+\theta_2\right)\\&\quad+(\omega_1+2\omega_2)\tfrac{a_1a_2^2}{2}\sin\left((\omega_1+2\omega_2)t+\theta_1+2\theta_2\right)\\&\quad+(2\omega_1-\omega_2)\tfrac{a_1^2a_2}{4}\sin\left((2\omega_1-\omega_2)t+2\theta_1-\theta_2\right)\\&\quad\left.\left.+(2\omega_2-\omega_1)\tfrac{a_2^2a_1}{4}\sin\left((2\omega_2-\omega_1)t+2\theta_2-\theta_1\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

En examinant cette fonction on peut constater l'existence de l'ensemble de fréquences

$$\begin{aligned}W=\{&\omega_1,\omega_2,3\omega_1,3\omega_2,2\omega_1+\omega_2,\omega_1+2\omega_2,\\&2\omega_1-\omega_2,2\omega_2-\omega_1\}.\end{aligned} \tag{16}$$

Cet ensemble est très important pour trouver les différents régimes possibles du système, c-a-d pour x_1 (respectivement x_2), les termes restants de (15) après l'application de l'approximation K-B serons seulement les termes avec la fréquence ω de W tell que $\omega\approx\omega_1$ (respectivement ω_2). En conséquence, on a la classification suivante :

1. $\omega_1\not\approx\left\{\omega_2,3\omega_2,\frac{\omega_2}{3}\right\}$-deux générateurs avec extinction compétitive
2. $\omega_1\approx\omega_2$-synchronisation mutuelle avec des fréquences proches
3. $\omega_1\approx3\omega_2$ (respectivement $\omega_2\approx3\omega_1$)-synchronisation mutuelle avec des fréquences multiples

A. Deux générateurs avec extinction compétitive

Considérons le cas où les fréquences ω_1 et ω_2 respectent la condition 1 cité ci-dessus. Dans ce cas, ils n'existe aucun effet d'interconnection entre les deux fréquences et l'approximation K-B utilise seulement les termes de l'oscillation fondamental de $f\left(a_1\cos(\omega_1t+\theta_1),a_2\cos(\omega_2t+\theta_2),\right.$ $\left.-a_1\omega_1\sin(\omega_1t+\theta_1),-a_2\omega_2\sin(\omega_2t+\theta_2)\right)$. En conséquence les solutions approximées de (5) sont (pour les détails voir [11])

$$x_i=a_i\cos(\omega_it+\theta_i),\quad (i=1,2) \tag{17}$$

avec

$$\begin{cases}\frac{da_1}{dt}=\epsilon\varphi_{v1}\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right),\\ \frac{da_2}{dt}=\epsilon\varphi_{v1}\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right),\\ \frac{d\theta_1}{dt}=0,\\ \frac{d\theta_2}{dt}=0.\end{cases} \tag{18}$$

Trouvons les solutions d'équilibre de (18). Dans ce cas, (18) possède quatre solutions d'équilibre :

$$a_1=0\text{ et }a_2=0, \tag{19}$$

$$a_1=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}\text{ et }a_2=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}, \tag{20}$$

$$a_1=2\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}\text{ et }a_2=0, \tag{21}$$

$$a_1=0\text{ et }a_2=2\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}. \tag{22}$$

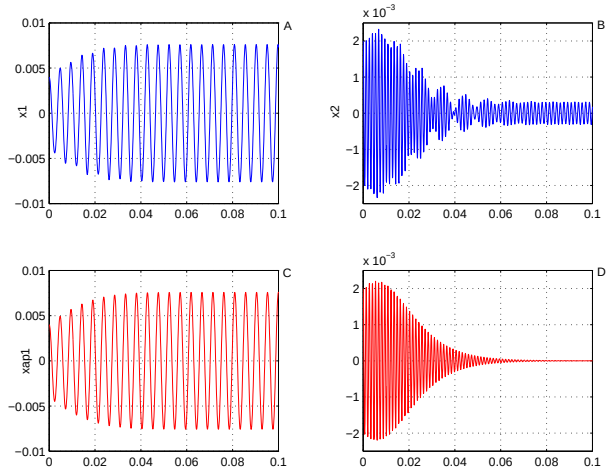

Fig. 4. (A) x_1 simulé de (5), (B) x_2 simulé de (5), (C) x_1 approximé par (17) et (18), (D) x_2 approximé par (17) et (18)

Les deux premières solutions (19) et (20) sont instables, et les deux dernières solutions (21) et (22) sont stables. Donc les amplitudes de x_1 et x_2 convergent à un des deux états stationnaires possibles (21) et (22). Selon la condition initiale, un des deux générateurs est excité, tandis que les oscillations de l'autre générateur sont entièrement éteintes. Une telle extinction des oscillations d'un des générateurs, causée par la présence d'un très fort couplage non linéaire entre les équations, est connue sous le nom *extinction compétitive*.

Il a été observé que si $a_1(0) > a_2(0)$, x_1 oscille et les oscillations de x_2 sont entièrement éteintes, et l'effet inverse se produit quant $a_1(0) < a_2(0)$. La Figure 4 présente un test de simulation avec $\omega_1 = 2\pi\times 210$, $\omega_2 = 2\pi\times 740$, $\epsilon = 1$, $\varphi_{v1} = 1.78\times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24\times 10^7$ (valeurs approchant les valeurs réelles, voir [12]), $a_1(0) = 4\times 10^{-3}$ et $a_2(0) = 2\times 10^{-3}$. La partie supérieure montre les sorties simulées de (5) et la partie inférieure montre les sorties approximées par (17) et (18). Aussi, quant $a_1(0) = a_2(0)$ (mais non nuls), il a été observé que :

- Dans (18), les amplitudes a_1 et a_2 convergent à $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$ respectivement, qui correspond à la solution équilibre instable (20).
- Dans (5), les amplitudes a_1 et a_2 convergent $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$ respectivement, et reste temporairement, mais après un temps relativement long (si on le compare à la dynamique de convergence) ces amplitudes vont converger nécessairement à une des deux solutions d'équilibre (21) et (22).

Cela implique que dans certaines conditions, les deux fréquences peuvent coexister pour un long moment avant d'entrer dans le régime d'extinction compétitive. Pour illustrer ce phénomène, la Figure 5 présente un test de simulation avec $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 3.5\omega_1 = 3.5\pi$, $\epsilon = 0.1$, $\varphi_{v1} = \varphi_{v3} = 1$, $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 1$, la partie supérieure est la sortie x_1 de (5) et la partie inférieure est la sortie x_2 de (5).

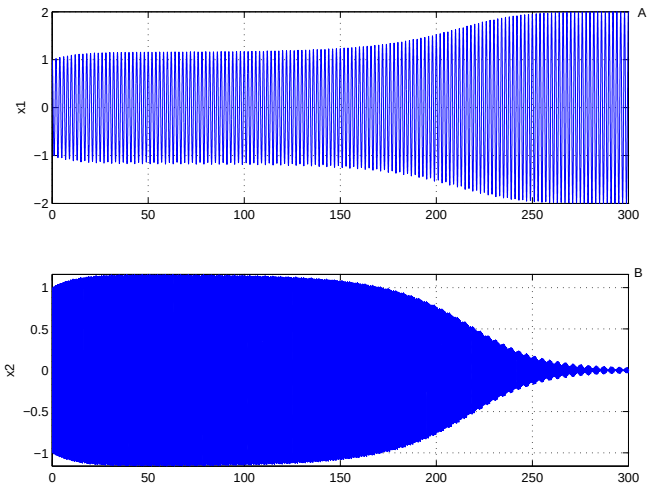

Fig. 5. (A) x_1 simulé de (5), (B) x_2 simulé de (5)

B. *Synchronisation mutuelle avec des fréquences proches*

Considérons le cas où les fréquences ω_1 et ω_2 sont proches. Pour x_1 (respectivement x_2), l'application de l'approximation K-B implique la conservation de tous les coefficients des termes sinusoïdaux dans $f(a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1), a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2), -a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1), -a_2\omega_2\sin(\omega_2 t+\theta_2))$ avec une fréquence proche de ω_1 (respectivement ω_2) et l'élimination de tous les autres termes. En conséquence les solutions approximées de (5) sont (voir [11] pour les détails)

$$x_i = a_i\cos(\omega_i t+\theta_i),\quad (i=1,2) \tag{23}$$

avec a_1, a_2, θ_1 et θ_2 sont gouverné par

$$\begin{cases}
\frac{da_1}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left\{\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\right. \\
\qquad +\left[\frac{a_2\omega_2}{2\omega_1}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2a_1^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi) \\
\qquad \left.+(\omega_1-2\omega_2)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1a_2^2}{8\omega_1}\right)\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\
\frac{da_2}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left\{\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\right. \\
\qquad +\left[\frac{a_1\omega_1}{2\omega_2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2+a_2^2}{4}\right)-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1a_2^2}{4}\right]\cos(\Delta\psi) \\
\qquad \left.+(\omega_2-2\omega_1)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2a_1^2}{8\omega_2}\right)\cos(2\Delta\psi)\right\}, \\
\frac{d\theta_1}{dt} = -\epsilon\varphi_{v1}\left\{(\omega_1-2\omega_2)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2^2}{8\omega_1}\sin(2\Delta\psi)\right. \\
\qquad +\left[\frac{a_2\omega_2}{2a_1\omega_1}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\right. \\
\qquad \left.\left.+(2\omega_1-\omega_2)\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2a_1}{8\omega_1}\right]\sin(\Delta\psi)\right\}, \\
\frac{d\theta_2}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left\{\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_1^2}{8\omega_2}(\omega_2-2\omega_1)\sin(2\Delta\psi)\right. \\
\qquad +\left[\frac{a_1\omega_1}{2a_2\omega_2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\right. \\
\qquad \left.\left.+\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{a_2a_1}{8\omega_2}(2\omega_2-\omega_1)\right]\sin(\Delta\psi)\right\}.
\end{cases} \tag{24}$$

où $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = (\omega_1-\omega_2)t + \theta_1 - \theta_2$.

Ce résultat est très important, car en parallèle de l'équation différentielle (5), il est possible de suivre l'évolution de l'amplitude et la phase de la sortie de (24) et de comparer les deux signaux qui sont mesurables en pratique.

L'intégration et l'étude des solutions stationnaires de (24) sont très difficiles. Cependant, pour trouver les solutions stationnaires quant $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, on peut adopter les étapes suivantes.

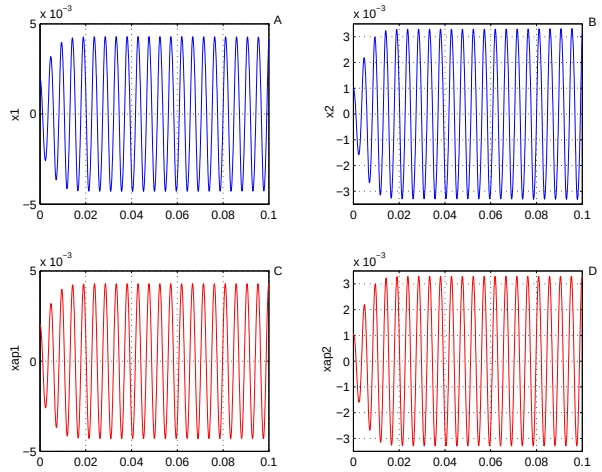

Fig. 6. (A) x_1 simulé de (5), (B) x_2 simulé de (5), (C) x_1 approximé par (23) et (24), (D) x_2 approximé par (23) et (24)

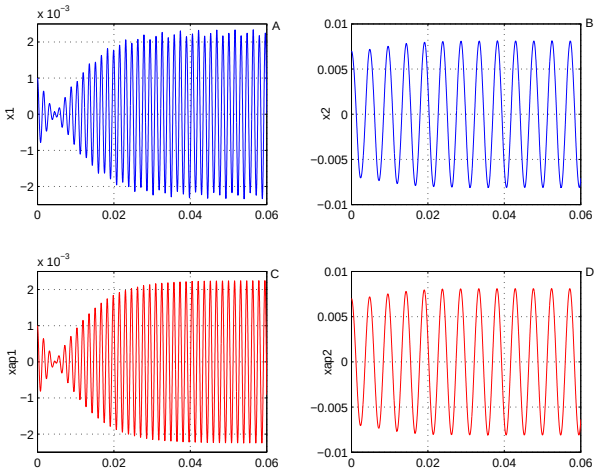

Fig. 7. (A) x_1 simulé de (5), (B) x_2 simulé de (5), (C) x_1 approximé par (29) et (30), (D) x_2 approximé par (29) et (30)

Utilisons $y = x_1+x_2$. Si on additionne les deux équations de (5) on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} + \omega^2(x_1+x_2) \\ &= \epsilon\varphi_{v1}\left(1 - \tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(x_1+x_2)^2\right)\tfrac{d(x_1+x_2)}{dt} \\ \Rightarrow\quad &\tfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \epsilon\varphi_{v1}\left(1 - \tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}y^2\right)\tfrac{dy}{dt}. \end{aligned} \tag{25}$$

On voit que (25) correspond à une équation de Van der Pol généralisée. Or on sait bien que pour une seule équation de Van der Pol généralisée, l'approximation K-B donne une solution stationnaire [19], [15], [16], [17], [18], [20]

$$y = 2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}\cos(\omega t+\theta). \tag{26}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}\cos(\omega t+\theta), \tag{27}$$

où θ est le déphasage entre x_1 et x_2. Et donc a_1, a_2 et $\theta_1-\theta_2$ doivent satisfaire

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1-\theta_2) = 4\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}} \tag{28}$$

Notons que pour ce cas, il existe une infinité de points d'équilibre et que la convergence de l'amplitude et de la phase dépend essentiellement de l'état initial de x_1 et x_2. Par conséquence, pour avoir le même résultat (5) et (24), il faut initialiser (24) avec les bonnes valeurs d'amplitude et de phase.

La Figure 6 montre un test de simulation avec $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi\times 210$, $\varphi_{v1} = 1.78\times10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24\times10^7$, $a_1(0) = 2\times10^{-3}$, $a_2(0) = 10^{-3}$, $\epsilon = 1$ et $\theta_1(0) = \theta_1(0) = 0$. La partie supérieure montre les sorties simulées de (5) et la partie inférieure montre les sorties approximées par (23) et (24).

C. Synchronisation mutuelle avec des fréquences multiples

Considérons le cas où la fréquence ω_1 est proche de $3\omega_2$. Dans ce cas les termes avec les fréquences ω_1 et $3\omega_2$ sont utilisés pour l'approximation de x_1 , et les termes avec les fréquences ω_2 et $(2\omega_2-\omega_1)$ sont utilisés l'approximation de x_2. Donc, on trouve (voir [11] pour les détails)

$$x_i = a_i\cos(\omega_i t+\theta_i),\quad (i=1,2) \tag{29}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left[\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_1^2}{4}+\frac{a_2^2}{2}\right)\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. -\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1}\cos(\Delta\psi)\right], \\ \frac{da_2}{dt} = \epsilon\varphi_{v1}\left[\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{a_2^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. -\frac{a_1a_2^2}{8\omega_2}\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}(\omega_1-2\omega_2)\cos(\Delta\psi)\right], \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \epsilon\varphi_{v3}\frac{\omega_2 a_2^3}{8\omega_1 a_1}\sin(\Delta\psi), \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -\epsilon\varphi_{v3}\frac{a_1a_2}{8\omega_2}(\omega_1-2\omega_2)\sin(\Delta\psi), \end{cases} \tag{30}$$

où $\Delta\psi = \psi_1 - 3\psi_2 = (\omega_1-3\omega_2)t + \theta_1 - 3\theta_2$,

Pour (30) il existe deux points d'équilibre stables. Un point peut être calculé analytiquement de (30)

$$a_1 = 2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}} \quad \text{et} \quad a_2 = 0. \tag{31}$$

Le deuxième point qui concerne le phénomène de synchronisation s'obtient par une solution numérique de (30). Par exemple pour le cas où $\omega_1 = 3\omega_2 = 6\pi\times210$, $\epsilon = 1$, $\varphi_{v1} = 1.78\times10^2$ et $\varphi_{v1} = 1.24\times10^7$, le deuxième point d'équilibre correspond à

$$a_1 = 2.25\times10^{-3},\ \ a_2 = 8.09\times10^{-3}\ \ \text{et}\ \ \Delta\psi = \pi. \tag{32}$$

De cela, on peut voir que si ω_1 est près de $3\omega_2$ (respectivement $\frac{\omega_2}{3}$), il est possible d'avoir deux phénomènes selon l'état initial. Dans le premier phénomène, le générateur avec la fréquence ω_1 est excité et l'autre générateur avec la fréquence ω_2 est éteint. Dans le deuxième phénomène, on a le régime de synchronisation. On entend par le régime de synchronisation, un régime où la fréquence des oscillations du deuxième générateur qui est égale à $\omega_2+\dot{\theta_2}$, est exactement un tiers de la fréquence des oscillations du premier générateur qui est égale à $\omega_1+\dot{\theta_1}$.

La Figure 7 présente un test de simulation avec $\omega_1 = 3\omega_2 = 6\pi\times210$, $\epsilon = 1$, $\varphi_{v1} = 1.78\times10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24\times10^7$, $a_1(0) = 10^{-3}$, $a_2(0) = 6\times10^{-3}$ et $\theta_1(0) = \theta_1(0) = 0$. La partie supérieure montre les sorties simulées de (5) et la partie inférieure montre les sorties approximées par (29) et (30).

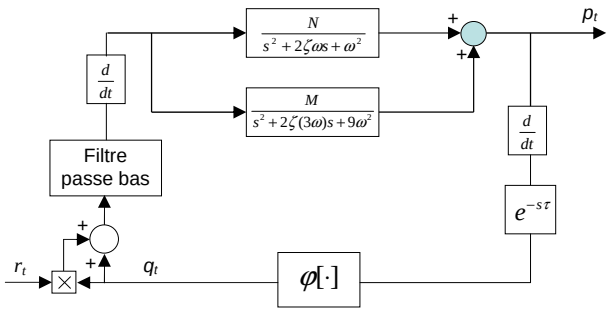

Fig. 8. Effet de la modulation sur modèle de Dunstan et Bitmead

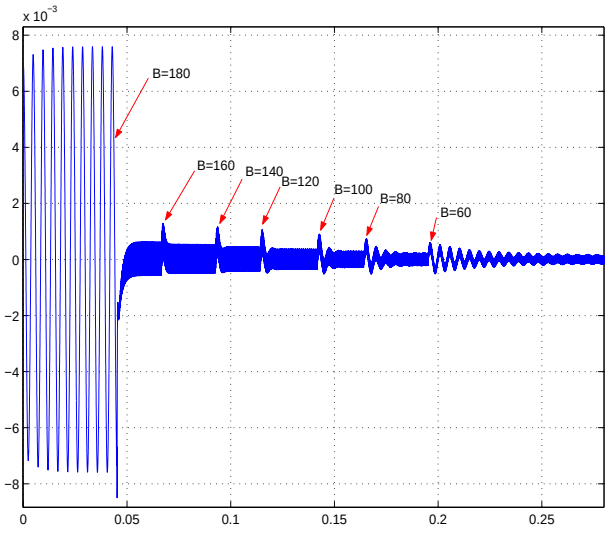

Fig. 9. Example de simulation sur l'extinction des oscillations

IV. Extinction des oscillations

Du point de vue pratique, il est possible de moduler le flux du combustible entrant dans la chambre de combustion. Cela se traduit par une excitation multiplicative r_t agissant sur le retour de la boucle du modèle de l'instabilité de combustion. Si on considère le modèle de Dunstan/Bitmead (Figure 2) cela se traduit par la modification montrée dans la Figure 8.

Une étude sur l'effet de cette excitation a été réalisée en considérant un modèle simplifié avec un seul résonateur (c-à-d un seul résonateur de VDPG). Le but de cette étude était de voir si on peut arriver à un phénomène d'extinction des oscillations dans le système de combustion en utilisant une excitation $r_t = B\cos(w_r t)$ en hautes fréquences.

En effet, l'étude a démontré que l'extinction des oscillations est possible sous certaines conditions. Un exemple de simulation sur l'extinction des oscillations est montré dans la Figure 9 avec $w = 2\pi \times 210$, $w_r = 6\pi \times 2100$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v1} = 1.78 \times 10^2$, $\varphi_{v3} = 1.24 \times 10^7$ et un filtre passe bas de premier ordre. L'étude en question fera l'objet d'une publication ultérieure.

V. Conclusion

Le but de cet article a été de prouver qu'il est possible d'aller plus loin dans l'analyse du modèle d'instabilité de combustion proposé dans [12] et d'envisager le problème de commande des instabilités. Les deux équations Van der Pol généralisées et couplées considérées dans cet article peuvent être un choix efficace pour approcher le modèle d'instabilité de combustion. La méthode d'analyse est basée sur l'utilisation de l'approche de Krylov-Bogoliubov pour les systèmes oscillants. En effet, cette approche nous a permis de surmonter une des difficultés liées au modèle d'instabilité de combustion, c-à-d la présence de deux résonateurs couplés. Les essais de simulation ont illustré la précision de l'approximation de Krylov-Bogoliubov.

Références

[1] V. Faivre et T. Poinsot. Experimental and numerical investigations of jet active control for combustion applications. *Journal of Turbulence*, 5(025), Aug 2004.

[2] R. Blonbou et A. Laverdant. Control of combustion instabilities on a rijke tube by a neural network. TP 49, ONERA, 29, avenue de la Division Leclerc, BP 72, 92322 Chltillon Cedex, France, May 2000.

[3] C.A. Jacobson, A. Khibnik, A. Banaszuk, J.M. Cohen, et W.P. Proscia. Active control of combustion instabilities in gas turbine engines for low emissions. part I : Physics-based and experimentally identified models of combustion instability. *Proc. AVT Symposium on Active Control Technology, Braunschweig*, pages 30–1–30–11, 2000.

[4] K. McManus, F. Han, W. Dunstan, C. Barbu, et M. Shah. Modeling and control of combustion dynamics in industrial gas turbines. *Proc. ASME Turbo-Expo*, pages 567–575, 2004.

[5] E. Haile M. Mettenleiter et S. Candel. Adaptive control of aeroacoustic instabilities. *J. Sound & Vibration*, 230(4) :761–789, 2000.

[6] A.P. Dowling. The calculation of thermoacoustic oscillations. *J Sound & Vibration*, 180(4) :557–581, 1995.

[7] S. Candel. Combustion dynamics and control : progress and challenges. *Proceedings of the Combustion Institute*, 29 :1–28, 2002.

[8] N. Docquier et S. Candel. Combustion control and sensors : a review. *Progress in Energy and Combustion Science*, 28 :107–150, 2002.

[9] V. FAIVRE. *Etude expérimentale et numérique du contrôle actif des jets dans des chambres de combustion*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.

[10] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, et A. Voda-Besançon. An analytically tractable model for combustion instability. *CDC-ECC*, (44), 2005.

[11] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, et A. Voda-Besançon. Analysis of two coupled Van der Pol equations as a model for combustion instability. Technical report, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France, Mar 2005.

[12] Wayne J. Dunstan. *System Identification of Nonlinear Resonant Systems*. PhD thesis, University of California, San Diego, 2003.

[13] W. J. Dunstan et R. R. Bitmead. Identification of resonant systems using periodic multiplicative reference systems. *13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam NL*, 2003.

[14] A.A. Peracchio et W.M. Proscia. Nonlinear heat-release/acoustic model for thermoacoustic instability in lean premixed combustors. *ASME J. Eng. Gas Turbines Power*, 121(3) :415–421, 1999.

[15] N.N. Bogoliubov et Y.A. Mitropolski. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Hindustan Publishing Corp, Delhi, and Gordon and Breach, New York, 1961.

[16] C. Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill Book Co, New York, 1964. (reprinted by Princeton University Press, 1985).

[17] P. S. Landa. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Kluwer, 1996.

[18] P. S. Landa. *Regular and Chaotic Oscillations*. Springer, New York, 2000.

[19] I. D. Landau et R. R. Bitmead. On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations. Technical report, Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla CA 92093-0411, USA, Jan 2004.

[20] F. Bouziani, I. D. Landau, et A. Voda-Besançon. First and second-order K-B approximations for the analysis of nonlinear oscillations in autonomous systems. Technical report, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France, Jun 2004.

Annexe F

Analysis of a tractable model for combustion instability : the effect of delay and low pass filtering

Accepté dans 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, Décembre 2006

Analysis of a tractable model for combustion instability: the effect of delay and low pass filtering

F. Bouziani, I.D. Landau, R.R. Bitmead†, A. Voda-Besançon
Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France
† Department of Mechanical & Aerospace Engineering, University of California, San Diego, La Jolla CA 92093-0411, USA

***Abstract*— In this paper a new analytically tractable model for combustion instability is proposed. The model is based on two coupled resonators in a feedforward path, and a feedback path composed of a delay, generalized Van der Pol term and a low pass filter. The model is analyzed and approximated using a refined Krylov-Bogoliubov (K-B) method. The analysis shows that the model captures the phenomenon of two coexisting oscillating modes which has been noted in combustion instability in [1], [2]. Conditions for the occurrence of various operation regimes have been established. The importance of delay and low pass filtering is discussed in this article. A frequency domain comparison between K-B approximations and the true outputs of the model has been provided in the end of the paper.**

***Index Terms*— modelling, combustion instability, nonlinear oscillating systems, Krylov-Bogoliubov method.**

I. INTRODUCTION

Combustion instabilities constitute a major problem for combustion turbomachinery such as jet engines and gas turbine powerplants, when operating in lean premixed combustion, which is desirable from the standpoint of minimizing pollution. Research programs in this area are actively conducted in a number of countries [3], [4], [5], [6], [7], [8]. The modeling of this instability is difficult and somewhat contentious in detail, with the broad explanation being the positive feedback coupling between the thermal heat-release process and the acoustics of the combustion chamber. The phenomenon has been experimentally known for more than 200 years.

Several control strategies have been proposed to deal with this instability, see [9] for an overview. One of most effective strategies, successfully experimented, is active control with the actuation taking place primarily through modulation of a fraction of the fuel flow into the combustion chamber [10], [11]. The goal of active control is to modify the combustion system dynamics. The systematic implementation and reliable design of active control requires the development of a realistic low order model which exhibits the dominant dynamical effects as limit cycles. The phenomenon has been scientifically studied in the laboratory since Rayleigh and Rijke [12], [13] and has been described much earlier in [14]. However, a low order and accurate modelling of such a complex system is an extremely challenging task and is still not fully resolved.

In [15], Peracchio and Proscia have proposed a low order model resulting from several physical investigations, the model was characterized by a linear resonator in feedback with a delay and a nonlinear static function. In order to explain the coexistence of two modes (see [2], [16]), the model has been extended in [1] by adding a second resonator. The model in [1] features in the feedback loop a cascade of a : differentiator - delay - static nonlinear characteristic - low pass filter - differentiator. An analytically tractable model for [1] has been proposed in [17] based on coupled Van der Pol equations. The block diagram of the model is shown in Figure 1, where ω_1 and ω_2 are the natural radian frequencies of the first and second resonators respectively and which can have arbitrary values with some modest provisions to be developed, ε is a small positive quantity. The model has been successfully analyzed using Krylov-Bogoliubov approach in [17]. However, this model does not include the cascade differentiator - delay and the low pass filter. While interesting results have been obtained concerning the existence or quenching of the oscillations in the system, the model was not able to explain the simultaneous presence of two oscillating modes observed experimentally, when the frequencies of the two resonators are in ratio different from 1, 3 and $\frac{1}{3}$. The present paper which is the continuation of [17] considers an analytically tractable model which takes into account

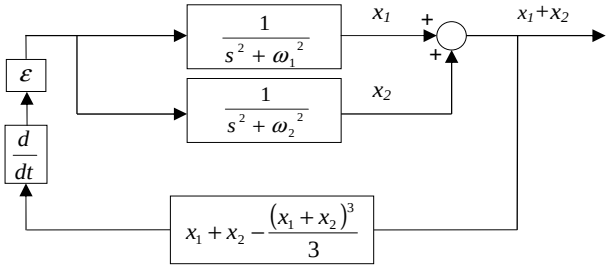

Fig. 1. Combustion instability model based on coupled Van der Pol equations

1) The generalization of the nonlinear static characteristic (see [1], previously approximated by basic Van der Pol characteristic).
2) The existence of time delay plus differentiator block and low pass filtering in the feedback path (see [15]).

The first point suggests replacing in the model the basic Van der Pol term $\varepsilon\frac{d}{dt}(y-\frac{1}{3}y^3)$ by a generalized Van der Pol term $\frac{d}{dt}\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}y-\frac{\varphi_{v3}}{3}y^3\right)$, where φ_{v0}, φ_{v1} and φ_{v3}

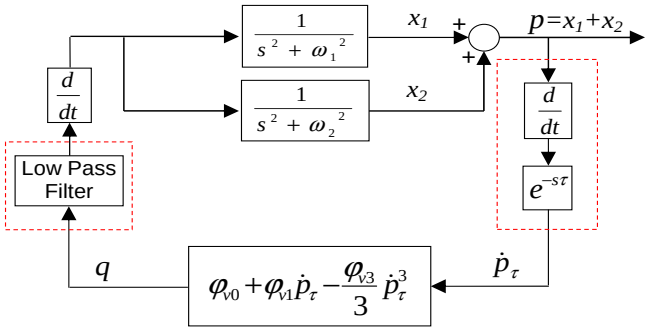

Fig. 2. Proposed combustion instability model

are arbitrary constants with the condition that φ_{v1} and φ_{v3} have the same sign. This allows accurate approximation of the static characteristic identified from experiments [1]. The coexistence of two oscillating modes can be explained when a time delay plus differentiator block and a low pass filter are included in the feedback path of the model (in dashed boxes). The modifications lead to the model presented in Figure 2 and is described by the following equations

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt} LPF\left\{\varphi_{v0} + \varphi_{v1}\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3\right\}, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt} LPF\left\{\varphi_{v0} + \varphi_{v1}\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3\right\}, \end{cases} \quad (1)$$

where τ is a transport time delay from nozzle to flame surface, LPF is the transfer operator of the low pass filter, $p = x_1 + x_2$ is the downstream pressure perturbation at the burning plane, $\dot{p}_\tau$ is the output of the delay-plus-differentiator block and q is the flame heat release rate.

The new model is more complex and needs to be analyzed by an efficient approximation method as Krylov-Bogoliubov (K-B) approximation detailed in [18], [19], [20], [21], [22]. The presence of delay and low pass filtering yields some difficulties in computing approximations, which will be treated in this paper by introducing some realistic assumptions which are effective in stationary regime. Consequently, our approximations will be powerful at stationary regime. Also, to perform the approximations, we will use the refined K-B procedure which will add multiple harmonics.

There is a long history of modeling this instability, which is well summarized in [9]. Modeling splits into two main approaches; Galerkin approximation of partial-differential-equation descriptions based on physics, and black-box system identification methods which do not account for physics other than through their structure. The authors of [9] then move on to consider control approaches with a number of different schemes and the experimental performance. Some of these are model-based and others adapt a single control parameter directly. In no case is the control design nonlinear and attempt to benefit from the nature of the model. Here, we develop and analyze a model based on a variation of that from [1] and establish: that it is capable of demonstrating the salient dynamical features of the instability and its control, and that it is amenable to analysis using K-B methods. The contribution is thus in the tractability of the model class for control design.

II. Refined K-B approximation: introducing neglected harmonics

Consider a system with n resonators described by differential equations of the form

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \epsilon f_k\left(x, \dot{x}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (2)$$

where $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\dot{x} = \{\dot{x_1}, \ldots, \dot{x}_n\}$ and ϵ is a small parameter.

In the previous article [17], we have given a summary of classical first K-B approximation, which consists of using only the fundamental terms in f_k. However, in some cases the outputs x_k contain other harmonics with non negligible amplitudes (with respect to fundamental harmonic). These harmonics correspond to the other terms initially neglected in f_k and will now be considered.

Rewrite the solution in another form

$$x_k = a_k \cos(\psi_k) + u_k, \quad (3)$$

where; $\psi_k = \omega_k t + \theta_k$, u_k is a sum of periodic functions excluding the fundamental harmonic, a_k and θ_k are slowly time-varying functions, obeying the following equations

$$\begin{cases} \dot{a}_k = -\frac{\epsilon}{2\omega_k} H_{kk}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \\ \dot{\theta}_k = -\frac{\epsilon}{2\omega_k a_k} G_{kk}(a_1, \ldots, a_n, \theta_1, \ldots, \theta_n), \end{cases} \quad (4)$$

$$u_k = \sum_{\omega_k \not\approx \omega_\ell}^{r} \frac{H_{\ell k}\sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_{\ell k}\cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)}{w_k^2 - w_\ell^2}, \quad (5)$$

where H_{kk}, G_{kk}, $H_{\ell k}$ and $G_{\ell k}$ are obtained from the function f_k by substituting

$$\begin{cases} x_k = a_k \cos(\omega_k t + \theta_k), \\ \dot{x}_k = -a_k \omega_k \sin(\omega_k t + \theta_k), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (6)$$

and by setting it in the form

$$\begin{aligned} & f_k\left(a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, a_n \cos(\omega_n t + \theta_n),\right. \\ & \quad \left. - a_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), \ldots, -a_n\omega_n \sin(\omega_n t + \theta_n)\right) \\ & = H_{kk}\sin(\omega_k t + \theta_k) + G_{kk}\cos(\omega_k t + \theta_k) \\ & \quad + \sum_{\omega_k \not\approx \omega_\ell}^{r} \left(H_{\ell k}\sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_{\ell k}\cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)\right), \end{aligned} \quad (7)$$

where ω_ℓ and θ_ℓ are the linear combinations of $\omega_1, \ldots, \omega_n$ and $\theta_1, \ldots, \theta_n$, respectively, and r is the number of possible linear combinations of $\omega_1, \ldots, \omega_n$ different from ω_k.

III. Equation development and analysis

Consider the system (1) and the form (2) (with $\epsilon = 1$), in this case

$$f_1 = f_2 = \frac{d}{dt} LPF\left\{\varphi_{v0} + \varphi_{v1}\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3\right\}. \quad (8)$$

Replacing

$$\dot{x}_i = -a_i\omega_i \sin(\omega_i t + \theta_i), \ (i = 1, 2)$$

in $\dot{p}$, one obtains

$$\begin{aligned} & \dot{p} = \dot{x_1} + \dot{x_2} \\ \Rightarrow\ & \dot{p} = -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) - \omega_2 a_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ & \quad = \omega_1 a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1 + \frac{\pi}{2}) + \omega_2 a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2 + \frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

which after adding delay effect, takes the form

$$\begin{aligned}\dot{p}_\tau &= \omega_1 a_{1\tau}\cos(\omega_1 t+\theta_{1\tau}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_1\tau)\\ &\quad+\omega_2 a_{2\tau}\cos(\omega_2 t+\theta_{2\tau}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_2\tau),\end{aligned} \tag{9}$$

where $a_{1\tau}$, $a_{2\tau}$, $\theta_{1\tau}$ and $\theta_{2\tau}$ are amplitudes and phases after the delay block, respectively. Since, for K-B approximation the amplitudes a_i and the phases θ_i $(i=1,2)$ are slowly time-varying functions, and in order to approximate the time delay block, we propose the following assumption.

Assumption 1: For small time delay τ, the quantities $\mid a_i - a_{i\tau} \mid$ and $\mid \theta_i - \theta_{i\tau} \mid$ $(i=1,2)$ can be neglected.

The assumption 1 allows the following approximations

$$\begin{cases} a_{i\tau} = a_i - (a_i - a_{i\tau}) \approx a_i, \\ \theta_{i\tau} = \theta_i - (\theta_i - \theta_{i\tau}) \approx \theta_i. \end{cases} \quad (i=1,2) \tag{10}$$

Substituting approximations (10) in expression (9), one gets

$$\begin{aligned}\dot{p}_\tau &\approx \omega_1 a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1+\tfrac{\pi}{2}-\omega_1\tau)\\ &\quad+\omega_2 a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2+\tfrac{\pi}{2}-\omega_2\tau).\end{aligned} \tag{11}$$

We use the following notation in the remaining of paper

$$\psi_{k_1k_2} = (k_1\omega_1+k_2\omega_2)t+(k_1\theta_1+k_2\theta_2). \tag{12}$$

Introducing (11), using notation (12) in nonlinear static function and trigonometrical simplifications lead to the expression written in Appendix (A.25).

To get an expression in the form of (7), the low pass filter block must be also approximated. Therefore, we consider a second assumption

Assumption 2: The low pass filter is linear and the low pass filter dynamics are much faster than the evolution of amplitudes and phases.

The utility of assumption 2 is that, for an input given as the sum of sinusoidal terms (such as (A.25)), the output will be equal to the sum of the outputs of each term, and for sinusoidal inputs with slowly time-varying amplitudes and phases the rise time will be neglected, and the amplitudes and phases will be considered as constant parameters. Therefore, the assumption 2 leads the following approximation

$$LPF\left(a\cos(\omega t+\theta)\right) \approx G(\omega)a\cos(\omega t+\theta-\phi(\omega)) \tag{13}$$

where a, ω and θ are the amplitude, the frequency and the phase of input, respectively, $G(\omega)$ and $\phi(\omega)$ are the gain and the phase at frequency ω introduced by the filter. We use the following notation in the remaining of paper

$$\begin{aligned} A_{k_1k_2} &= \omega_1^{|k_1|}\omega_2^{|k_2|}G(k_1\omega_1+k_2\omega_2), \\ \chi_{k_1k_2} &= \tfrac{(k_1+k_2)\pi}{2}-(k_1\omega_1+k_2\omega_2)\tau-\phi(k_1\omega_1+k_2\omega_2). \end{aligned} \tag{14}$$

Using (A.25), property (13) and notation (14), one arrives at (B.26). Result (B.26) yields the frequency set

$$\begin{aligned}W = \{&\omega_1,\omega_2,3\omega_1,3\omega_2,2\omega_1+\omega_2,\omega_1+2\omega_2,\\ &2\omega_1-\omega_2,2\omega_2-\omega_1\},\end{aligned} \tag{15}$$

which will be very important for identifying the different situations depending on the proximity of frequencies in W. Consequently, one has the following three situations:

1) $\omega_1 \not\approx \left\{\omega_2, 3\omega_2, \frac{\omega_2}{3}\right\}$,
2) $\omega_1 \approx \omega_2$: Mutual synchronization with close frequencies
3) $\omega_1 \approx 3\omega_2$ (respectively $\omega_2 \approx 3\omega_1$): Mutual synchronization with multiple frequencies

Experimental results ([1]) reveal that both modes oscillate freely without synchronization and with the frequencies not respecting the conditions of cases number 2 and 3. Hence, we limit our study here to case 1. This is new and more practically interesting when compared with [17].

IV. K-B APPROXIMATION OF THE MODEL

Consider the condition $\omega_1 \not\approx \left\{\omega_2, 3\omega_2, \frac{\omega_2}{3}\right\}$ and the result (B.26). The application of refined K-B approximation gives

$$x_i = a_i\cos(\omega_i t+\theta_i)+u_i, \quad (i=1,2) \tag{16}$$

with

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \frac{\varphi_{v1}A_{10}\cos(\chi_{10})}{2}a_1\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{(\omega_1a_1)^2}{4}+\frac{(\omega_2a_2)^2}{2}\right)\right), \\ \dot{a}_2 = \frac{\varphi_{v1}A_{01}\cos(\chi_{01})}{2}a_2\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{(\omega_2a_2)^2}{4}+\frac{(\omega_1a_1)^2}{2}\right)\right), \\ \dot{\theta}_1 = \frac{\varphi_{v1}A_{10}\sin(\chi_{10})}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{(\omega_1a_1)^2}{4}+\frac{(\omega_2a_2)^2}{2}\right)\right), \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\varphi_{v1}A_{01}\sin(\chi_{01})}{2}\left(1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\left(\frac{(\omega_2a_2)^2}{4}+\frac{(\omega_1a_1)^2}{2}\right)\right), \end{cases} \tag{17}$$

where u_i is given in appendix C. From the equations (17), one can see that the coupled parameters are a_1 and a_2. Therefore, the system dynamics depend essentially on the evolution of amplitudes a_1 and a_2. The analytical determination of equilibrium points gives

$$a_1 = 0 \text{ and } a_2 = 0, \tag{18}$$

$$a_1 = \tfrac{2}{\omega_1}\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}} \text{ and } a_2 = 0, \tag{19}$$

$$a_1 = 0 \text{ and } a_2 = \tfrac{2}{\omega_2}\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}, \tag{20}$$

$$a_1 = \tfrac{2}{\omega_1}\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{3\varphi_{v3}}} \text{ and } a_2 = \tfrac{2}{\omega_2}\sqrt{\tfrac{\varphi_{v1}}{3\varphi_{v3}}}. \tag{21}$$

The stability of each equilibrium point leads to a particular regime. Consequently, one distinguishes four operation regimes, which will be elaborated and explained shortly :

1) Asymptotically stable system,
2) Two generators with competitive quenching,
3) Simultaneous self-sustained oscillations,
4) Total instability.

For stability study one can apply Lyapunov's indirect method, which uses the stability property of linearized system around the equilibrium point. The computation of general characteristic polynomial leads to the result showed in Appendix D. The characteristic polynomial obtained is second order. Therefore, the stability can be verified by testing the signs of polynomial coefficients.

A. Asymptotically stable system

The system is asymptotically stable around the origin, if and only if the equilibrium point (18) is asymptotically stable. Introducing (18) in the general characteristic polynomial (D.28), one obtains

$$\begin{aligned}P(\lambda) = \lambda^2 &- \tfrac{\varphi_{v1}}{2}\Big\{A_{10}\cos(\chi_{10})+A_{01}\cos(\chi_{01})\Big\}\lambda\\ &+\tfrac{A_{10}A_{01}\cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01})\varphi_{v1}^2}{4},\end{aligned}$$

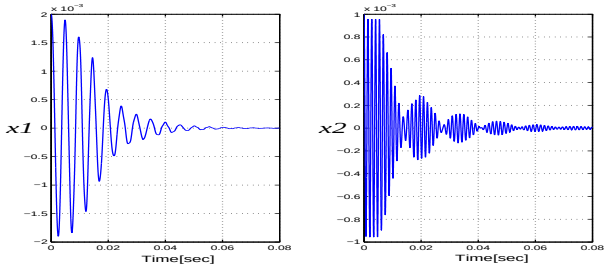

Fig. 3. Simulation test for $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v1} = -0.135$, $\varphi_{v3} = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}$ and $\tau = 5.5 \times 10^{-3}$.

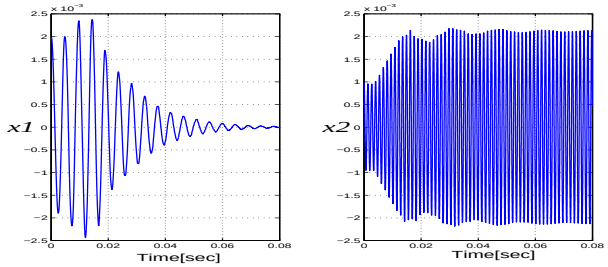

Fig. 4. Simulation test for $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v1} = -0.135$, $\varphi_{v3} = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}$ and $\tau = 3.5 \times 10^{-3}$.

which has two stable zeros if the following conditions are respected

$$\begin{cases} -\varphi_{v1}\Big\{A_{10}\cos(\chi_{10}) + A_{01}\cos(\chi_{01})\Big\} \;\rangle\; 0 \\ A_{10}A_{01}\cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01})\varphi_{v1}^2 \;\rangle\; 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_{v1}\cos(\chi_{10}) \;\langle\; 0 \\ \varphi_{v1}\cos(\chi_{01}) \;\langle\; 0 \end{cases} \quad (22)$$

Provided (22) is satisfied and initial states are close to the origin, the amplitudes of both oscillations converge to equilibrium point (18). Figure 3 shows an example of simulation test, where the conditions (22) are satisfied under realistic parameters values.

B. Two generators with competitive quenching

The two generators with competitive quenching regime occurs when both equilibrium points (19) and (20) are locally stable. Substituting (19) into (D.28), one gets

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \varphi_{v1}\Big\{A_{10}\cos(\chi_{10}) + \tfrac{1}{2}A_{01}\cos(\chi_{01})\Big\}\lambda + \frac{A_{10}A_{01}\cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01})\varphi_{v1}^2}{2},$$

The local stability of (19) is satisfied if and only if

$$\begin{cases} \varphi_{v1}\Big\{A_{10}\cos(\chi_{10}) + \frac{1}{2}A_{01}\cos(\chi_{01})\Big\} \;\rangle\; 0 \\ A_{10}A_{01}\cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01})\varphi_{v1}^2 \;\rangle\; 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_{v1}\cos(\chi_{10}) \;\rangle\; 0 \\ \varphi_{v1}\cos(\chi_{01}) \;\rangle\; 0 \end{cases} \quad (23)$$

By symmetry, for the equilibrium point (20) one finds the same conditions.

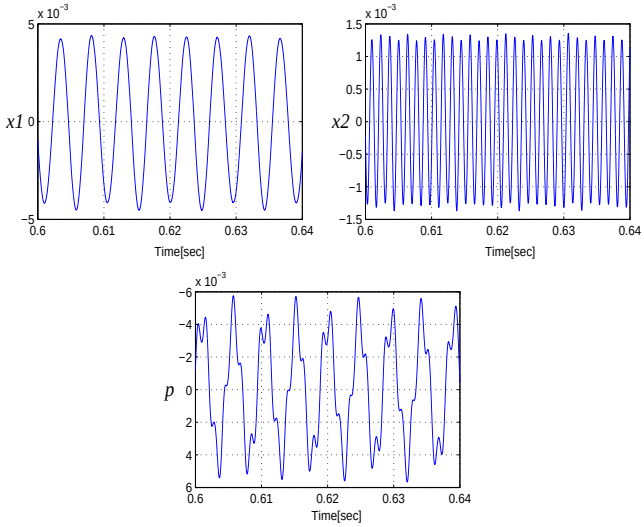

Fig. 5. Simulation test for $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v1} = -0.135$, $\varphi_{v3} = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times500}{s+2\pi\times500}$ and $\tau = 4.8 \times 10^{-3}$.

Provided that the conditions (23) are satisfied, the amplitudes of x_1 and x_2 converge to one of both possible equilibrium points (19) and (20). Depending on the initial states, one of the generators is excited, while the oscillations of the other generator are entirely quenched. Figure 4 shows an example of simulation test on two generators with competitive quenching regime.

C. Simultaneous self-sustained oscillations

Simultaneous oscillation of both resonators occurs when the equilibrium point (21) is stable. Introducing (21) in (D.28), one obtains

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \tfrac{\varphi_{v1}}{3}\Big\{A_{10}\cos(\chi_{10}) + A_{01}\cos(\chi_{01})\Big\}\lambda - \frac{A_{10}A_{01}\cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01})\varphi_{v1}^2}{3},$$

The equilibrium point (21) is locally stable if and only if

$$\begin{cases} \varphi_{v1}\Big\{A_{10}\cos(\chi_{10}) + A_{01}\cos(\chi_{01})\Big\} \;\rangle\; 0 \\ -A_{10}A_{01}\cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01})\varphi_{v1}^2 \;\rangle\; 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_{v1}\big(A_{10}\cos(\chi_{10}) + A_{01}\cos(\chi_{01})\big) \;\rangle\; 0 \\ \cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01}) \;\langle\; 0 \end{cases} \quad (24)$$

By satisfying (24), it is possible to have simultaneous self-sustained oscillations, the amplitudes of x_1 and x_2 converge to the equilibrium point (21). By the self-sustained oscillations it is meant that both oscillators are excited without synchronization. The Figure 5 shows the stationary part of a simulation test example on simultaneous self-sustained oscillations regime.

D. Total instability

When the conditions (22), (23) and (24) are not satisfied, there does not exist a stable equilibrium point. Therefore, there is no stable limit cycle and the amplitudes of both oscillations diverge. By total instability it is meant that for any initial states, the oscillations of the system diverge.

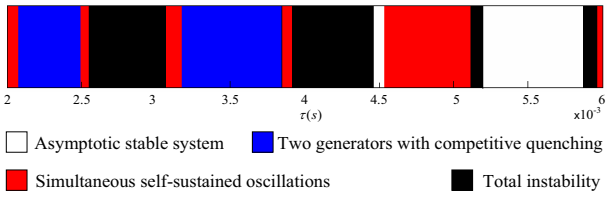

Fig. 6. The operation regimes as a function of τ, $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v1} = -0.135$, $\varphi_{v3} = -5.4 \times 10^{-3}$ and $LPF = \frac{2\pi \times 500}{s + 2\pi \times 500}$.

V. Results Analysis

The results demonstrate the existence of four operation regimes when the ratio of natural frequencies is different from $1, 3$ and $\frac{1}{3}$. The occurrence of each operation regime depends on the satisfaction of some conditions. The simulations confirm the quality of estimated amplitudes using K-B approximation. The condition for each regime contain essentially the phases χ_{01} and χ_{10} introduced by the delay and low pass filtering respectively. The phase domain conditions (22), (23) and (24) are independent. So with fixed delay and low-pass filter it is not possible to have operation in more than one regime. The results suggest that it is perhaps possible in certain cases to estimate the delay from the measurement of the oscillations (number, frequency, amplitude). To illustrate the importance of delay, Figure 6 depicts the operation regimes for several values of τ and for other parameters fixed near to the practical values. One observes the occurrence of various regimes as a function of the delay.

From a practical point of view, the interesting situation is the simultaneous self-sustained oscillatory regime which is represented in Figure 6 in red. The fact that, the amplitudes of harmonics ω_1 and ω_2 take values $\frac{2}{\omega_1}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{3\varphi_{v3}}}$ and $\frac{2}{\omega_2}\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{3\varphi_{v3}}}$ respectively, shows clearly that they depend inversely on the values of frequencies (phenomenon which has been observed in practice). The refined K-B procedure added the multiple harmonics of ω_1 and ω_2 to the approximations. The evaluation of the precision of the refined K-B approximations requires a spectral comparison with the real outputs of the model. The stationary power spectral density comparison using FFT is presented in Figure 7, where D_{x1}, D_{x2} and D_p are the power spectral densities of x_1, x_2 and p, respectively. From Figure 7, one can see that the important harmonics of the model outputs have been captured with an excellent approximation of the gains. The other uncaptured harmonics have negligible gains.

VI. Comparison with Experimental Results

The capacity of a combustion instability model to display the coexistence of two modes is regarded as an important corroboration of the model. Indeed, the representative experimental results discussed in [2], [16] demonstrate the simultaneous presence of two sinusoidal components; a strong dominant tone at 210Hz, and a weak but persistent non-harmonic tone at 714Hz.

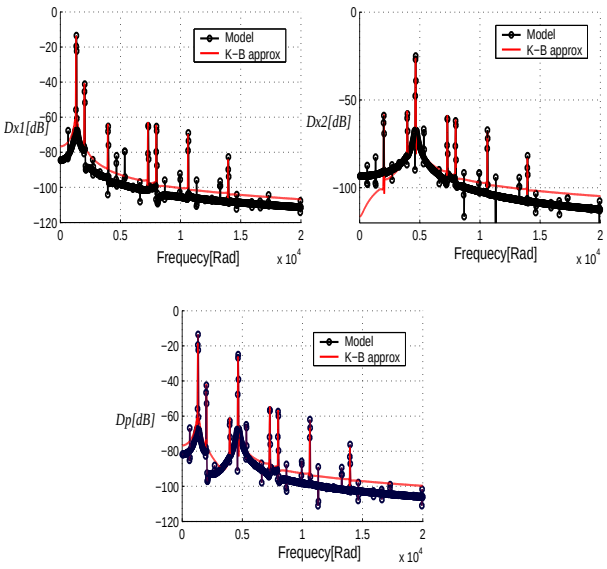

Fig. 7. Spectral comparison of real and approximated outputs for $\omega_1 = 2\pi \times 210$, $\omega_2 = 2\pi \times 740$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v1} = -0.135$, $\varphi_{v3} = -5.4 \times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi \times 500}{s + 2\pi \times 500}$ and $\tau = 4.8 \times 10^{-3}$.

The model proposed here has the ability to describe a number of distinct phenomena observed in practice. One of most important is simultaneous self-sustained oscillations phenomenon which occurs when the conditions (24) are satisfied. The analysis of this phenomenon shows that, on one hand, the model can display the coexistence of two modes at any frequencies (depending of the value of the delay), and on other hand it shows that the amplitudes of both oscillations decrease when the frequency increase. As the analysis has shown, the model can display also the other situations encountered in practice.

The coherence of the theoretical analysis with the experimental and model simulation results constitutes also an important fact, indicating that K-B method is a powerful analysis method for the combustion instability.

VII. Conclusion

This article focused on proposing and analyzing an attractive dynamic model for combustion instability having a feedback structure. The crucial role of the delay in the feedback path of the model has been emphasized. The important consequence is that the new model captures the coexistence of two modes phenomena, which occur in real systems. The efficiency of refined K-B analysis method has been illustrated by a spectral comparison of the true model outputs with those of the computed approximations.

One of the major results is the demonstration of occurrence of simultaneous self-sustained oscillations which have a frequency ratio different from $1, 3$ and $\frac{1}{3}$ and with a magnitude decreasing with the frequency. Furthermore, a thorough full analysis of the effect of the delay has been provided showing clearly the possibility of occurrence of various operation regimes as a function of the value of the delay. This may

constitute also a starting point for an estimation of delay from experimental data.

Further work will focus on the establishment of conditions for the quenching of the oscillations by adding an external modulation of a fraction of the fuel flow into the combustion chamber.

REFERENCES

[1] W. J. Dunstan, "System identification of nonlinear resonant systems," Ph.D. dissertation, University of California, San Diego, 2003.

[2] R. M. Murray, C. A. Jacobson, R. Casas, A. I. Khibnik, C. R. Johnson Jr, R. R. Bitmead, A. A. Peracchio, and W. M. Proscia, "System identification for limit cycling systems: a case study for combustion instabilities," *American Control Conference, Philadelphia PA*, pp. 2004–2008, 1998.

[3] V. Faivre and T. Poinsot, "Experimental and numerical investigations of jet active control for combustion applications," *Journal of Turbulence*, vol. 5, no. 025, Aug 2004.

[4] S. R. Stow and A. Dowling, "Low-ordre modelling of thermoacoustic limit cycles," *Proceedings of ASME TURBO EXPO*, Jun 2004.

[5] C. Jacobson, A. Khibnik, A. Banaszuk, J. Cohen, and W. Proscia, "Active control of combustion instabilities in gas turbine engines for low emissions. part I: Physics-based and experimentally identified models of combustion instability," *Proc. AVT Symposium on Active Control Technology, Braunschweig*, pp. 30–1–30–11, 2000.

[6] K. McManus, F. Han, W. Dunstan, C. Barbu, and M. Shah, "Modeling and control of combustion dynamics in industrial gas turbines," *Proc. ASME Turbo-Expo*, pp. 567–575, 2004.

[7] S. Candel, "Combustion dynamics and control: progress and challenges," *Proceedings of the Combustion Institute*, vol. 29, pp. 1–28, 2002.

[8] N. Docquier and S. Candel, "Combustion control and sensors: a review," *Progress in Energy and Combustion Science*, vol. 28, pp. 107–150, 2002.

[9] A. Annaswamy and A. Ghoniem, "Active control of combustion instability: Theory and practice," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, no. 6, pp. 37–54, Dec 2002.

[10] G. Roy, *Advances in Chemical Propulsion: Science to Technology*. Boc Raton, Fl USA: CRC – Taylor & Francis, 2001.

[11] A. Banaszuk, K. Ariyur, M. Krstic, and C. Jacobson, "An adaptive algorithm for control of combustion instability," *Automatica*, vol. 40, pp. 1965–1972, 2004.

[12] J. Rayleigh, *The Theory of Sound*. New York: Dover, 1945, vol. 2.

[13] P. Rijke, *Ann. of Physics*, 1959.

[14] J. Tyndal, *Sound*. New York: D. Appleton & Company, 1897.

[15] A. Peracchio and W. Proscia, "Nonlinear heat-release/acoustic model for thermoacoustic instability in lean premixed combustors," *ASME J. Eng. Gas Turbines Power*, vol. 121, no. 3, pp. 415–421, 1999.

[16] W. J. Dunstan, R. R. Bitmead, and S. M. Savaresi, "Fitting nonlinear low-order models for combustion instability control," *Control Engineering Practice*, pp. 1301–1317, 2001.

[17] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, and A. Voda-Besançon, "An analytically tractable model for combustion instability," *CDC-ECC*, no. 44, 2005.

[18] N. Bogoliubov and Y. Mitropolski, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Hindustan Publishing Corp, Delhi, and Gordon and Breach, 1961.

[19] C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. New York: McGraw-Hill Book Co, 1964, (reprinted by Princeton University Press, 1985).

[20] P. S. Landa, *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Kluwer, 1996.

[21] ——, *Regular and Chaotic Oscillations*, V. I. Babitsky and J. Wittenburg, Eds. New York: Springer, 2000.

[22] I. D. Landau and R. R. Bitmead, "On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations," Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla CA 92093-0411, USA, Tech. Rep., Jan 2004.

APPENDIX A
ASSUMPTION 1 CONSEQUENCE

$$\varphi_{v0}+\varphi_{v1}\dot{p}_{-\tau}-\tfrac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}^3_{-\tau}\approx\varphi_{v0}+\varphi_{v1}\Big\{\omega_1a_1\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{4}+\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{2}\Big)\Big)\cos(\psi_{10}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_1\tau)+\omega_2a_2\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{4}+\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{2}\Big)\Big)\cos(\psi_{01}+\tfrac{\pi}{2}-\omega_2\tau)\Big\}-\varphi_{v3}\Big\{\tfrac{(\omega_1a_1)^3}{12}\cos\big(\psi_{30}+\tfrac{3\pi}{2}-3\omega_1\tau\big)+\tfrac{(\omega_2a_2)^3}{12}\cos\big(\psi_{03}+\tfrac{3\pi}{2}-3\omega_2\tau\big)+\tfrac{\omega_1^2\omega_2a_1^2a_2}{4}\cos\big(\psi_{21}+\tfrac{3\pi}{2}-(2\omega_1+\omega_2)\tau\big)+\tfrac{\omega_1\omega_2^2a_1a_2^2}{4}\cos\big(\psi_{12}+\tfrac{3\pi}{2}-(2\omega_2+\omega_1)\tau\big)+\tfrac{\omega_1^2\omega_2a_1^2a_2}{4}\cos\big(\psi_{2-1}+\tfrac{\pi}{2}-(2\omega_1-\omega_2)\tau\big)+\tfrac{\omega_1\omega_2^2a_2^2a_1}{4}\cos\big(\psi_{-12}+\tfrac{\pi}{2}-(2\omega_2-\omega_1)\tau\big)\Big\}. \quad (A.25)$$

APPENDIX B
ASSUMPTION 2 CONSEQUENCE

$$\tfrac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_{v0}+\varphi_{v1}\dot{p}_{-\tau}-\tfrac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}^3_{-\tau}\right\}\approx-\varphi_{v1}\Big\{\omega_1A_{10}a_1\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{4}+\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{2}\Big)\Big)\sin(\psi_{10}+\chi_{10})+\omega_2A_{01}a_2\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{4}+\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{2}\Big)\Big)\sin(\psi_{01}+\chi_{01})\Big\}+\varphi_{v3}\Big\{\tfrac{\omega_1A_{30}a_1^3}{4}\sin\left(\psi_{30}+\chi_{30}\right)+\tfrac{\omega_2A_{03}a_2^3}{4}\sin\left(\psi_{03}+\chi_{03}\right)+\tfrac{(2\omega_1+\omega_2)A_{21}a_1^2a_2}{4}\sin\left(\psi_{21}+\chi_{21}\right)+\tfrac{(\omega_1+2\omega_2)A_{12}a_1a_2^2}{4}\sin\left(\psi_{12}+\chi_{12}\right)+\tfrac{(2\omega_1-\omega_2)A_{2-1}a_1^2a_2}{4}\sin\left(\psi_{2-1}+\chi_{2-1}\right)+\tfrac{(2\omega_2-\omega_1)A_{-12}a_2^2a_1}{4}\sin\left(\psi_{-12}+\chi_{-12}\right)\Big\}. \quad (B.26)$$

APPENDIX C
REFINEMENT COMPONENT

$$u_i=-\tfrac{\varphi_{v1}a_{3-i}\omega_{3-i}A_{i-1\ 2-i}}{\omega_i^2-\omega_{3-i}^2}\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_{3-i}a_{3-i})^2}{4}+\tfrac{(\omega_ia_i)^2}{2}\Big)\Big)\sin(\psi_{i-1\ 2-i}+\chi_{i-1\ 2-i})+\varphi_{v3}\Big\{\tfrac{\omega_1A_{30}a_1^3}{4(\omega_i^2-9\omega_1^2)}\sin\left(\psi_{30}+\chi_{30}\right)+\tfrac{\omega_2A_{03}a_2^3}{4(\omega_i^2-9\omega_2^2)}\sin\left(\psi_{03}+\chi_{03}\right)+\tfrac{(2\omega_1+\omega_2)A_{21}a_1^2a_2}{4(\omega_i^2-(2\omega_1+\omega_2)^2)}\sin\left(\psi_{21}+\chi_{21}\right)+\tfrac{(\omega_1+2\omega_2)A_{12}a_1a_2^2}{4(\omega_i^2-(2\omega_2+\omega_1)^2)}\sin\left(\psi_{12}+\chi_{12}\right)+\tfrac{(2\omega_1-\omega_2)A_{2-1}a_1^2a_2}{4(\omega_i^2-(2\omega_1-\omega_2)^2)}\sin\left(\psi_{2-1}+\chi_{2-1}\right)+\tfrac{(2\omega_2-\omega_1)A_{-12}a_2^2a_1}{4(\omega_i^2-(2\omega_2-\omega_1)^2)}\sin\left(\psi_{-12}+\chi_{-12}\right)\Big\},\ (i=1,2) \quad (C.27)$$

APPENDIX D
GENERAL CHARACTERISTIC POLYNOMIAL

$$P(\lambda)=\lambda^2-\tfrac{\varphi_{v1}}{2}\Big\{A_{10}\cos(\chi_{10})\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{3(\omega_1a_1)^2}{4}+\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{2}\Big)\Big)+A_{01}\cos(\chi_{01})\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{3(\omega_2a_2)^2}{4}+\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{2}\Big)\Big)\Big\}\lambda+\tfrac{A_{10}A_{01}\cos(\chi_{10})\cos(\chi_{01})}{4}\Big\{\varphi_{v1}^2\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{3(\omega_1a_1)^2}{4}+\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{2}\Big)\Big)\Big(1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{3(\omega_2a_2)^2}{4}+\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{2}\Big)\Big)-\varphi_{v3}^2(\omega_1\omega_2a_1a_2)^2\Big\}. \quad (D.28)$$

Annexe G

Quenching oscillations in combustion instabilities using model-based closed-loop multiplicative control

Soumis pour European Control Conference, Kos, Juillet 2007

Quenching oscillations in combustion instabilities using model-based closed-loop multiplicative control

F. Bouziani, I.D. Landau, R.R. Bitmead†
Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France
† Department of Mechanical & Aerospace Engineering, University of California, San Diego, La Jolla CA 92093-0411, USA

***Abstract*— This papers deals with active control of combustion instabilities through measurement and feedback of pressure oscillations. The measurement is used to construct a multiplicative feedback control. The aim of such a control is to quench the oscillations associated with the instability associated with lean pre-mixed combustion. This quenching is analyzed using the Krylov-Bogoliubov approach applied to a tractable gray-box model of the underlying process and fitted using experimental data. A linear and a nonlinear feedback law are considered and conditions for quenching the oscillations established. Both give successful results verified by the simulation tests.**

***Index Terms*— active control, combustion instability, nonlinear oscillating systems, Krylov-Bogoliubov method.**

I. INTRODUCTION

Thermo-acoustic combustion instabilities are dynamic phenomena that manifest themselves through strong self-sustained oscillations. They cause serious degradation of, particularly, pollution performance in combustion turbomachinery systems such as gas turbine powerplants and jet engines. These instabilities occur in lean premixed combustion and effectively dispel the low-pollution properties of such operating regimes. Physically the instabilities are highly nonlinear phenomena, that can be explained by a positive feedback coupling between the thermal heat-release process and the acoustics of the combustion chamber. The positive feedback coupling leads the creation of nonlinear limit cycles, which can be sometimes characterized by co-existence of oscillations at several distinct non-harmonic frequencies.

From a practical perspective, the modulation of a fuel flow fraction into the combustor is possible as a control input. This modulation has been widely tested in experiments as a candidate for active control for suppressing the combustion instability [1], [2]. In the literature, several active control method have been proposed; an excellent overview of existing methods is given in [3]. Systematic design and implementation of active control requires a realistic low order model which exhibits the dominant dynamical effects. The parsimonious modelling of such nonlinear systems is an extremely difficult task, given that high-order, physics-based computational fluid dynamical codes can be unreliable in demonstrating the phenomenon well. One particular feature which the model should capture is the simultaneous coexistence of two non-harmonic oscillating modes, [4], [5].

In the literature, three approaches to combustion instability modeling are considered. The first is *white-box modelling*, which derives from physical theory directly and relies on partial differential equations describing the reacting-flow fluid dynamics with boundary conditions given by the combustor geometry. The complexity of this task is evident in the difficulties evident in computational verification of the observed phenoena. To develop a low-order model of use for control, Galerkin projection, averaging and truncation are used in [6], yielding a low order model with two oscillating modes. This model was used in [7] for controller design of a simple case study (The frequencies of both modes are 1 and 2.). The second approach, *black-box modelling* uses data directly with system identification methods [8], [9] often with model structures which have no physical interpretation. The third approach, *grey-box modelling* uses physical insight to determine the model structure and the input/output data to fit the parametrized model. This approach is more attractive inasmuch as it represents the middle ground between white-box and black-box approaches. In [10], Peracchio and Proscia proposed a low order model resulting from several physical investigations. The model was characterized by a linear resonator in feedback with a delay and a nonlinear static function. By using the grey-box approach and in order to explain the coexistence of two modes in the data, Dunstan and Bitmead [11] have extended the model through the inclusion of and additional third-harmonic resonance. In [12], the relationship between the occurrence of oscillations in combustion instabilities and the van der Pol equation has been discussed, and used to derive a model. In order to make modelling more realistic in [13], the model was generalized by incorporating delay and filtering. The model was successfully analyzed using the Krylov-Bogoliubov (K-B) method (detailed in [14], [15], [16], [17], [18]). This analysis showed that the model has the ability to capture a number of important distinct phenomena observed in practice, including the coexistence of two modes oscillating called the simultaneous self-sustained oscillations phenomenon, which can occur with a frequency ratios different from those demonstrated in models earlier; 1, 3 and $\frac{1}{3}$.

The best known control method in active control of periodic oscillations is phase-shift control. This method feeds back the fundamental frequency component of the pressure measurement with an appropriate phase shift in order to reduce or to quench the oscillations. In the design of this controller, generally the combustion instability is considered as a single resonator. The controller is implemented for the

resonant frequency with a bandpass filter which eliminates all other (and therefore regarded as uncontrolled) frequencies. The control method gives successful results in many applications [2]. However, at some operating conditions this controller can induce excitations at other non-controlled frequencies. Their are still many issues to be resolved with such a control design.

The present work is a continuation of [13]. The possibility of quenching oscillations by multiplicative feedback feedback control will be investigated. The multiple-resonator model model presented in [13] will be considered as the base for the study of oscillation quenching in combustion instabilities. However in order to illustrate the methodology a single resonator model will be considered first. The previous analysis [12], [13] indicates clearly that the K-B method is a powerful analysis method for the combustion instabilities. For this reason, the method will be considered in this paper as the main tool for the description of the system and its behavior.

II. First K-B approximation for autonomous multi-resonator systems

Consider a system with n resonators described by differential equations of the form,

$$\frac{d^2x_j}{dt^2}+\omega_j^2 x_j=\varepsilon f_j\left(x,\frac{dx}{dt}\right),\quad (j=1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

where $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\frac{dx}{dt}=\{\frac{dx_1}{dt},\ldots,\frac{dx_n}{dt}\}$ and ε is a small parameter. For the jth resonator, the first K-B approximation (for more details see Chapter 2 of [17]) proposes the solution

$$x_j=a_j\cos(\psi_j), \tag{2}$$

where $\psi_j=\omega_j t+\theta_j$, a_j and θ_j are slowly time-varying functions obeying the equations

$$\begin{cases}\frac{da_j}{dt}=-\frac{\varepsilon}{2\omega_j}H_{jj}(a_1,\ldots,a_n,\theta_1,\ldots,\theta_n),\\ \frac{d\theta_j}{dt}=-\frac{\varepsilon}{2\omega_j a_j}G_{jj}(a_1,\ldots,a_n,\theta_1,\ldots,\theta_n),\end{cases} \tag{3}$$

with H_{jj} and G_{jj} obtained from the function $f_j\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ by substituting

$$\begin{cases}x_k=a_k\cos(\omega_k t+\theta_k),\\ \frac{dx_k}{dt}=-a_k\omega_k\sin(\omega_k t+\theta_k),\end{cases}\quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

and by setting it in the form

$$\begin{aligned}&f_j\left(a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1),\ldots,a_n\cos(\omega_n t+\theta_n),\right.\\ &\quad\left.-a_1\omega_1\sin(\omega_1 t+\theta_1),\ldots,-a_n\omega_n\sin(\omega_n t+\theta_n)\right)\\ &=H_{jj}\sin(\omega_j t+\theta_j)+G_{jj}\cos(\omega_j t+\theta_j)\\ &\quad+\sum_{\omega_j\not\approx\omega_\ell}^{r}\left(H_{\ell j}\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell)+G_{\ell j}\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)\right),\end{aligned} \tag{5}$$

where ω_ℓ and θ_ℓ are integer linear combinations of $\omega_1,\ldots,\omega_n$ and $\theta_1,\ldots,\theta_n$, respectively, and r is the number of possible integer linear combinations of $\omega_1,\ldots,\omega_n$ different from ω_j. For x_j the coefficients of the fundamental term in (5) are used and the all other terms are eliminated.

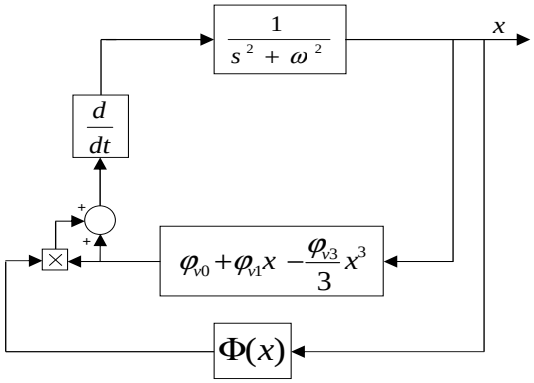

Fig. 1. Closed-loop control for model based on a generalized Van der Pol equation

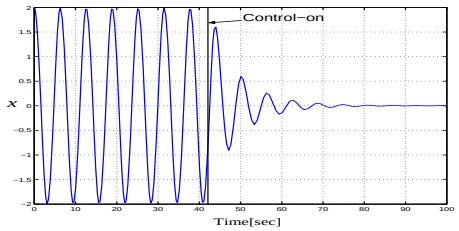

Fig. 2. Simulation test of quenching oscillations on a model described by a generalized van der Pol equation, where $K=1$, $\varphi_{v0}=0.45$, $\varphi_{v1}=\varphi_{v1}=0.1$ and $\omega=1$.

III. Simple case study: model based on a generalized van der Pol equation

In this section a reduced-order model with one single resonator and without time delay (corresponding to a generalized van der Pol equation) will be considered to illustrate the potential effectiveness of the closed-loop multiplicative control. This output-feedback control is introduced into the model by multiplying a function of the output x to capture the effect of fuel flow modulation on the heat release rate. The control strategy is presented in the block diagram shown in Figure 1 and it is characterized by the following differential equation.

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{d}{dt}\left\{(1+\Phi(x))\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}x-\frac{\varphi_{v3}}{3}x^3\right)\right\}, \tag{6}$$

where; ω is the natural frequency, φ_{v1} and φ_{v3} are arbitrary positive constants, φ_{v0} is an arbitrary constant different from zero and the feedback law $\Phi(x)$ is a polynomial function of x.

It is well known that for the uncontrolled generalized van der Pol equation [14], [15], the solution x is a self-sustained oscillation with steady frequency close to ω and with steady amplitude close to $2\sqrt{\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v3}}}$. In order to quench this oscillation, the control law must force the system (6) to be asymptotically stable at the origin. Hence, one considers the following lemma.

Lemma 1: For the following control low

$$\Phi(x)=-Kx-\frac{1}{\varphi_{v0}}\left(\varphi_{v1}x-\frac{\varphi_{v3}}{3}x^3\right), \tag{7}$$

where K is a constant of the same sign of φ_{v0}, the system (6) is locally asymptotically stable at the origin.

Proof: Introducing the expression (7) into the differential equation (6), one gets

$$\ddot{x}+\omega^2 x = -K\varphi_{v0}\dot{x} - 2\varphi_{v1}\left(K+\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v0}}\right)x\dot{x} + \frac{4\varphi_{v3}}{3}\left(K+\frac{2\varphi_{v1}}{\varphi_{v0}}\right)x^3\dot{x} - 2\frac{\varphi_{v3}^2}{3\varphi_{v0}}x^5\dot{x}$$

Expressing this equation in state equation form with $z_1 = x$ and $z_2 = \dot{x}$, one obtains

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\omega^2 z_1 - K\varphi_{v0}z_2 - 2\varphi_{v1}\left(K+\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v0}}\right)z_1 z_2 \\ \qquad + \frac{4\varphi_{v3}}{3}\left(K+\frac{2\varphi_{v1}}{\varphi_{v0}}\right)z_1^3 z_2 - 2\frac{\varphi_{v3}^2}{3\varphi_{v0}}z_1^5 z_2 \end{cases}.$$

Computation of the linearized system matrix around the origin gives

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -K\varphi_{v0} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

since by assumption K and φ_{v0} have the same sign, the eigenvalues of matrix A_z will have negative real part. By using Lyapunov's indirect method, one can deduce that the system is locally asymptotically stable at the origin.

The local asymptotical stability at the origin implies that quenching of the oscillation is possible and can occur in a local domain around the origin which can be estimated [19]. This quenching is illustrated by the simulation test presented in Figure 2.

IV. Combustion instability model

The model from [13] is chosen as a basis for the development of effective control methods for quenching both oscillation modes present in combustion instabilities. However, the multiplicative effect of the control action must be included in the representation to capture the modulation of a fraction of the fuel flow u into the combustion chamber and its consequent effect on the heat release rate [11], [5]. This leads to the following differential equations.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1+\omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt}LPF\left\{(1+u)\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}, \\ \ddot{x}_2+\omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt}LPF\left\{(1+u)\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}. \end{cases} \tag{9}$$

where; φ_{v0} is an arbitrary constant, φ_{v1} and φ_{v3} are arbitrary negative constants, τ is a transport time delay from nozzle to flame surface, LPF is the transfer function operator of a low pass filter, $p = x_1 + x_2$ is the downstream pressure perturbation at the burning plane, $\dot{p}_\tau$ is the output of the delay-plus-differentiator block, and $q = \varphi_{v0} + \varphi_{v1}\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3$ is the flame heat release rate. Figure 3 shows a simulation test with an appropriate choice of parameter values for coexistence of two non-harmonic oscillations. For the following simulations, these parameter values will be used.

From an analytical point of view, the presence of the delay τ and the filter LFP leads to some difficulties, which will be the subject of two assumptions proposed (and discussed more fully) in [13].

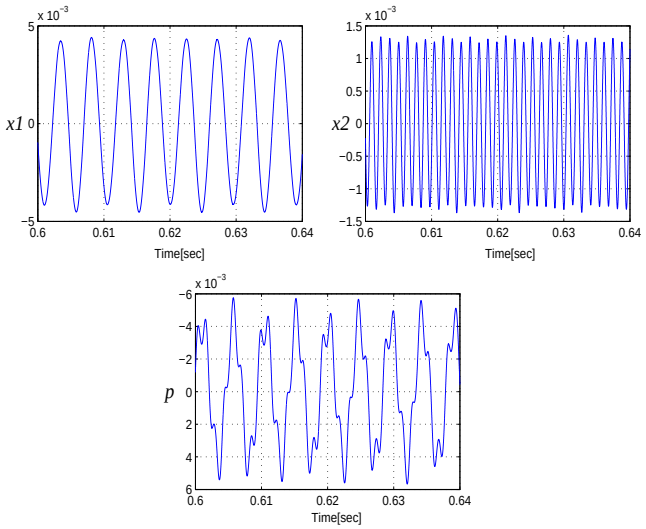

Fig. 3. Coexistence of two modes in the combustion instability model of [13], with $\omega_1 = 2\pi\times 210$, $\omega_2 = 2\pi\times 740$, $\varphi_{v0} = 0.45$, $\varphi_{v1} = -0.135$, $\varphi_{v3} = -5.4\times 10^{-3}$, $LPF = \frac{2\pi\times 500}{s+2\pi\times 500}$ and $\tau = 4.8\times 10^{-3}$

Assumption 1: For small values of the time delay τ, the oscillatory components of the output of delay block can approximated by

$$\dot{x}_1(t-\tau) \approx \omega_1 a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1 + \frac{\pi}{2} - \omega_1\tau)$$
$$\dot{x}_2(t-\tau) \approx \omega_2 a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2 + \frac{\pi}{2} - \omega_2\tau).$$

Assumption 2: The output of the linear low pass filter for sinusoidal inputs with slowly time-varying amplitudes and phases can be approximated by

$$LPF\left(a\cos(\omega t+\theta)\right) \approx G(\omega)a\cos(\omega t+\theta-\phi(\omega)) \tag{10}$$

where a, ω and θ are the amplitude, the frequency and the phase of input, respectively, $G(\omega)$ and $\phi(\omega)$ are the gain and the phase at frequency ω introduced by the filter, respectively.

V. Closed-loop control of combustion instabilities

In this section, the possibility of dealing with the instabilities by linear and nonlinear feedback law is analyzed. The basic idea is to use the pressure measurement p in feedback for quenching both oscillations simultaneously. Two types of control law are considered, one linear the other nonlinear, for the calculation of the input to the multiplicative control actuator.

To study the effects of each control we use the K-B method. The following assumption is proposed concerning the validity of the K-B approximation.

Assumption 3: Let a_1 and a_2 be the amplitudes of the oscillations x_1 and x_2 obtained from K-B approximation. If a_1 and a_2 are asymptotically locally (globally) stable at the origin, then the original system is asymptotically locally stable at the origin.

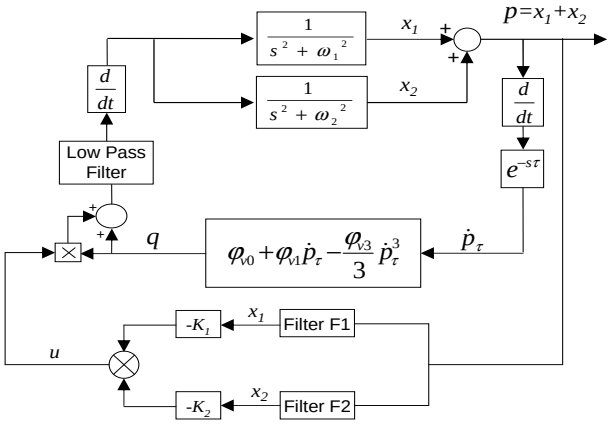

Fig. 4. Block diagram of the linear feedback controller

A. Linear feedback: Compensation of negative damping

For a linear feedback the control law will be of the form $u=-K_1x_1-K_2x_2$, where K_1 and K_2 are gains. Unfortunately, the pressure measurement $p=x_1+x_2$ and to obtain x_1 and x_2, band pass filters should be considered. In what follows we will assume that x_1 and x_2 are available in order to explore the possibility of stabilizing the system with a linear feedback. This control strategy corresponds to the block diagram shown in Figure 4. The aim of such a control is to compensate for the negative damping introduced by the physical loop and to introduce another positive damping, which causes the system (9) to become asymptotically locally stable at the origin. The gains K_1 and K_2 must be tuned to accommodate the phase delay and to ensure closed-loop stability.

Lemma 2: Consider the system (9) and linear control law above subject to the previous assumptions. Then provided

$$\left\{\begin{array}{rcl} K_1\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_1)) & > & \omega_1\varphi_{v1}\sin(\phi(\omega_1)+\omega_1\tau), \\ K_2\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_2)) & > & \omega_2\varphi_{v1}\sin(\phi(\omega_2)+\omega_2\tau), \end{array}\right. \quad (11)$$

the system is locally asymptotically stable at the origin.

Proof: We make the following identifications in the K-B approximation representation (1) with $\varepsilon=1$.

$$f_1=f_2=f=\tfrac{d}{dt}LPF\left\{(1+u)\left(\varphi_{v0}+\varphi_{v1}\dot{p}_\tau-\tfrac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3\right)\right\}. \quad (12)$$

As in [13], we introduce notations $x_i=a_i\cos(\omega_i t+theta_i)$ and $\dot{x}_i=-a_i\omega_i\sin(\omega_i t+\theta_i)$, $i=1,2$ in (12). After trigonometric simplifications and using Assumptions 1 and 2, one obtains

$$\begin{aligned} f \approx\ & a_1G(\omega_1)\sin(\omega_1t+\theta_1)\Big\{K_1\varphi_{v0}\omega_1\cos(\phi(\omega_1))-\varphi_{v1}\omega_1^2\Big[1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{4} \\ & +\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{2}\Big)\Big]\sin(\omega_1\tau+\phi(\omega_1))\Big\}-a_1G(\omega_1)\cos(\omega_1t+\theta_1)\Big\{K_1\varphi_{v0}\omega_1 \\ & \times\sin(\phi(\omega_1))+\varphi_{v1}\omega_1^2\Big[1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{4}+\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{2}\Big)\Big]\cos(\omega_1\tau+\phi(\omega_1))\Big\} \\ & +a_2G(\omega_2)\sin(\omega_2t+\theta_2)\Big\{K_2\varphi_{v0}\omega_2\cos(\phi(\omega_2))-\varphi_{v1}\omega_2^2\Big[1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{4} \\ & +\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{2}\Big)\Big]\times\sin(\omega_2\tau+\phi(\omega_2))\Big\}-a_2G(\omega_2)\cos(\omega_2t+\theta_2)\Big\{K_2\varphi_{v0}\omega_2 \\ & \sin(\phi(\omega_2))-\varphi_{v1}\omega_2^2\Big[1-\tfrac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\tfrac{(\omega_2a_2)^2}{4}+\tfrac{(\omega_1a_1)^2}{2}\Big)\Big]\cos(\omega_2\tau+\phi(\omega_2))\Big\} \\ & +\sum_{\omega_\ell\not\approx\omega_1\wedge\omega_2}^{r}(H_\ell(a_1,a_2,\theta_1,\theta_2)\sin(\omega_\ell t+\theta_\ell)+G_\ell(a_1,a_2,\theta_1,\theta_2)\cos(\omega_\ell t+\theta_\ell)), \end{aligned}$$

where; ω_ℓ is a linear combination of ω_1 and ω_2, θ_ℓ is a linear combination of θ_1 and θ_2, r is the number of possible linear combinations of ω_1 and ω_2 different from ω_1 and ω_2. After applying the rule (3) for amplitudes, this leads to the following approximations.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{da_1}{dt}=\frac{G(\omega_1)\varphi_{v1}\omega_1\sin(\omega_1\tau+\phi(\omega_1))}{2}a_1\Big[1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\frac{(\omega_1a_1)^2}{4}+\frac{(\omega_2a_2)^2}{2}\Big) \\ \qquad\Big]-\frac{G(\omega_1)K_1\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_1))}{2}a_1, \\ \frac{da_2}{dt}=\frac{G(\omega_2)\varphi_{v1}\omega_2\sin(\omega_2\tau+\phi(\omega_2))}{2}a_2\Big[1-\frac{\varphi_{v3}}{\varphi_{v1}}\Big(\frac{(\omega_2a_2)^2}{4}+\frac{(\omega_1a_1)^2}{2}\Big) \\ \qquad\Big]-\frac{G(\omega_2)K_2\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_2))}{2}a_2. \end{array}\right.$$

The linearized system matrix around the origin becomes,

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{G(\omega_1)}{2}(\varphi_{v1}\omega_1\sin(\omega_1\tau+\phi(\omega_1))-K_1\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_1))) & 0 \\ 0 & \frac{G(\omega_2)}{2}(\varphi_{v1}\omega_2\sin(\omega_2\tau+\phi(\omega_2))-K_2\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_2))) \end{array}\right]$$

This matrix has two negative eigenvalues if the conditions (11) are satisfied. In this case, the amplitudes are locally asymptotically stable at the origin. Appealing to assumption 3, one can concludes the result.

Local asymptotic stability at the origin implies that quenching the oscillations is possible, and occurs in a local domain which depends on the gains K_1 and K_2. When the values K_1 and K_2 increase, the domain of asymptotic stability around origin should also increase. For this reason and by comparison to damped second-order linear systems, the following gains are chosen in the subsequent simulations of this controller.

$$\left\{\begin{array}{l} K_1=\max\left(\frac{2\eta\omega_1+\varphi_{v1}\omega_1G(\omega_1)\sin(\phi(\omega_1)+\omega_1\tau)}{\varphi_{v0}G(\omega_1)\cos(\phi(\omega_1))},0\right) \\ K_2=\max\left(\frac{2\eta\omega_2+\varphi_{v1}\omega_2G(\omega_2)\sin(\phi(\omega_2)+\omega_2\tau)}{\varphi_{v0}G(\omega_2)\cos(\phi(\omega_2))},0\right) \end{array}\right., \quad (13)$$

where η is the desired damping factor.

We consider two scenarios for simulation testing of this controller. In the first, the control is applied at the appearance of oscillations in x_1 or x_2. This is illustrated by a simulation test executed with $\eta=0.05$ ($K_1=0$ and $K_2=4051$) and presented in Figure 5. One can observe from the Figure 5, that this control law requires a very weak control signal u, noting that this depends on the ratio $\frac{\varphi_{v1}}{\varphi_{v0}}$, *c.f* (13). The second scenario is where the control is applied after that the oscillations in x_1 and x_2 have already reached steady-state operation. Compared with the previous scenario, this requires sufficient control action to effect damping but also a need not to violate the validity of the approximations including linearization. This is illustrated by a simulation test with $\eta=0.1$ ($K_1=160$ and $K_2=5700$) and is presented in Figure 6.

This linear strategy under the conditions (11) offers local asymptotic stability, which makes quenching possible, but without any guarantee in a larger domain. However to effectively implement such quenching, the problem of obtaining x_1 and x_2 ba appropriate filtering has to be solved (work in progress). It would be preferable if the amplitudes a_1 and a_2 were to be globally stable. For this a non-linear close loop feedback must be considered.

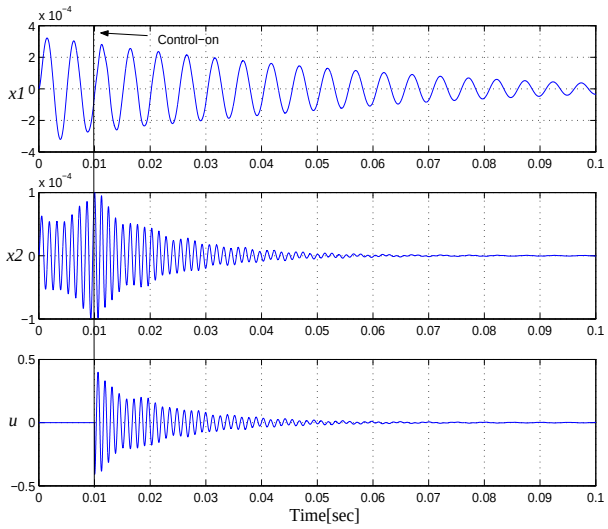

Fig. 5. Linear feedback control applied at the first appearance of the oscillations.

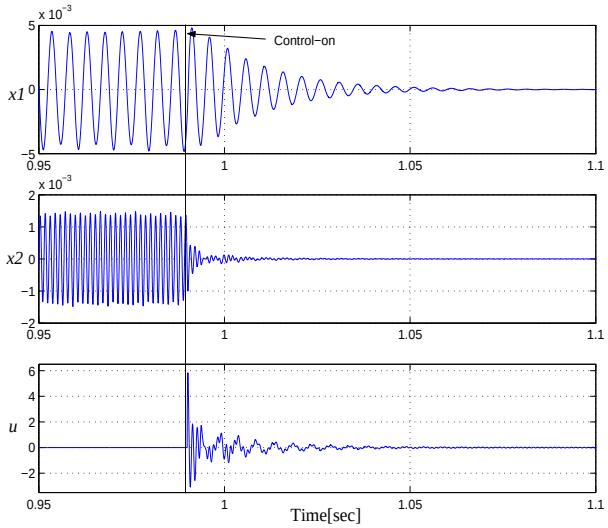

Fig. 6. Linear feedback control applied after the oscillations have reached steady state.

B. Non-linear feedback: feedback linearization

In this section, the pressure measurement p is differentiated and delayed with a delay τ to obtain $\dot{p}_\tau$, which is introduced into a non-linear function Φ, to obtain a control law $u = \Phi(p, \dot{p}_\tau)$. This control strategy is explained in the block diagram shown in Figure 7. This control law will be used to add damping and to compensate the physical feedback caused by the coupling between the thermal heat-release process and the acoustics of the combustion chamber. If such a control is designed, the system will be asymptotically stable at the origin and the quenching of oscillations will occur. This can be interpreted also as a feedback linearization which in addition stabilizes the system.For this reason, one considers the following lemma

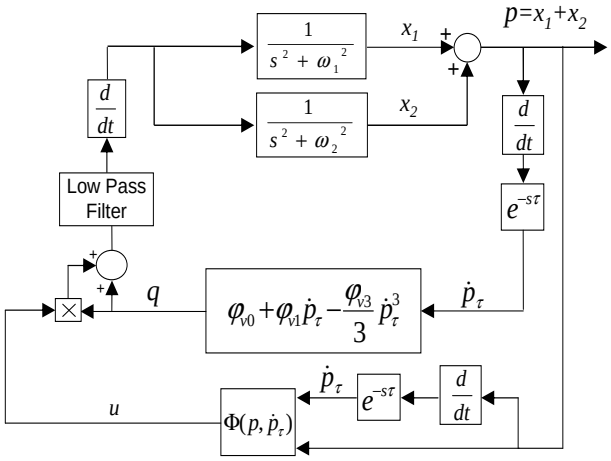

Fig. 7. Block diagram of non-linear feedback.

Lemma 3: For the control law

$$\Phi(p, \dot{p}_\tau) = -Kp - \frac{1}{\varphi_{v0}}\left(\varphi_{v1}\dot{p}_\tau - \frac{\varphi_{v3}}{3}\dot{p}_\tau^3\right), \tag{14}$$

where K is a constant satisfying the conditions

$$\begin{cases} K\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_1)) > 0, \\ K\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_2)) > 0, \end{cases} \tag{15}$$

the system is locally asymptotically stable at the origin.

Proof: Replacing the function (14) in (9) yields,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_{v0} - K\varphi_{v0}p - K\varphi_{v1}p\dot{p}_\tau + K\frac{\varphi_{v3}}{3}p\dot{p}_\tau^3 \right. \\ \qquad \left. - \frac{\varphi_{v1}^2}{\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^2 + \frac{2\varphi_{v1}\varphi_{v3}}{3\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^4 - \frac{\varphi_{v3}^2}{9\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^6\right\}, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_{v0} - K\varphi_{v0}p - K\varphi_{v1}p\dot{p}_\tau + K\frac{\varphi_{v3}}{3}p\dot{p}_\tau^3 \right. \\ \qquad \left. - \frac{\varphi_{v1}^2}{\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^2 + \frac{2\varphi_{v1}\varphi_{v3}}{3\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^4 - \frac{\varphi_{v3}^2}{9\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^6\right\}. \end{cases}$$

Therefore, for the K-B approximation (1) with $\varepsilon = 1$ one may consider the following choice.

$$f_1 = f_2 = f = \frac{d}{dt}LPF\left\{\varphi_{v0} - K\varphi_{v0}p - K\varphi_{v1}p\dot{p}_\tau + K\frac{\varphi_{v3}}{3}p\dot{p}_\tau^3 \right. \\ \left. - \frac{\varphi_{v1}^2}{\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^2 + \frac{2\varphi_{v1}\varphi_{v3}}{3\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^4 - \frac{\varphi_{v3}^2}{9\varphi_{v0}}\dot{p}_\tau^6\right\}. \tag{16}$$

Introducing $x_i = a_i\cos(\omega_i t + \theta_i)$ and $\dot{x}_i = -a_i\omega_i\sin(\omega_i t + \theta_i)$, $i = 1, 2$, in (16) and after trigonometric simplifications and using assumption 2, one obtains the expression

$$f \approx K\varphi_{v0}\omega_1 G(\omega_1)a_1\left[\cos(\phi(\omega_1))\sin(\omega_1 t + \theta_1) - \sin(\phi(\omega_1))\cos(\omega_1 t + \theta_1)\right] \\ + K\varphi_{v0}\omega_2 G(\omega_2)a_2\left[\cos(\phi(\omega_2))\sin(\omega_2 t + \theta_2) - \sin(\phi(\omega_2))\cos(\omega_2 t + \theta_2)\right] \\ + \sum_{\omega_\ell \not\approx \omega_1 \wedge \omega_2}^{r} (H_\ell(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2)\sin(\omega_\ell t + \theta_\ell) + G_\ell(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2)\cos(\omega_\ell t + \theta_\ell)).$$

Applying the rule (3) for the amplitudes leads to the following approximations.

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2}G(\omega_1)K\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_1))a_1, \\ \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2}G(\omega_2)K\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_2))a_2. \end{cases} \tag{17}$$

These are linear differential equations for the uncoupled amplitudes a_1 and a_2. The amplitudes are globally asymptotically stable at origin if the conditions (15) are satisfied. Appealing to the assumption 3, one deduces the result.

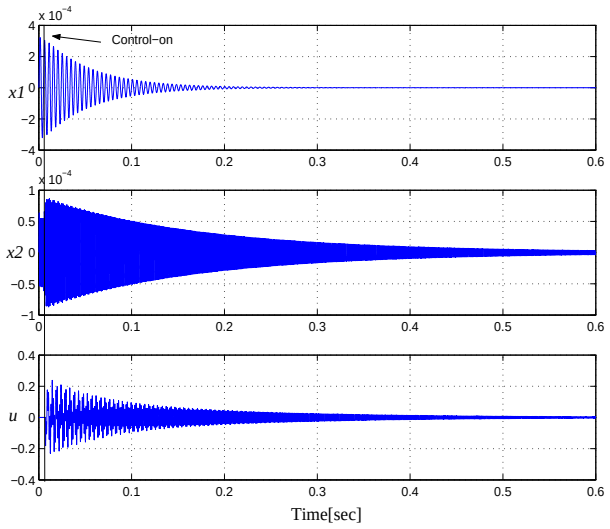

Fig. 8. Linear feedback control applied at the first appearance of oscillations.

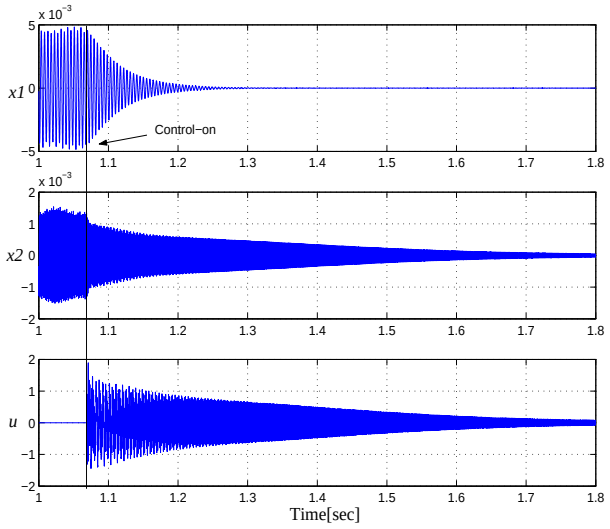

Fig. 9. Non-linear feedback control applied after the oscillation has reached steady-state.

This strategy has been tested in simulation, with gain $K = 100$ for the two scenarios as before. First, when the control is applied at the appearance of oscillations in x_1 or x_2. This is presented in Figure 8. Then when the control is applied after that the oscillations of x_1 and x_2 have already reached steady-state operation. This is presented in Figure 9. One can note that compared to linear feedback, the quenching of oscillations is very slow. On the other hand, the control amplitude is smaller.

The satisfaction of conditions (15) on parameter K, is completely possible when the product $\cos(\phi(\omega_1))\cos(\phi(\omega_2))$ is strictly positive. However, when the product is negative, it is difficult and sometimes impossible to find a value K satisfying (15). The problem can be avoided by using the Filters F1 and F2 (the same Filters used in the linear feedback) which allows the replacement of Kp by $K_1x_1 + K_2x_2$ in the control law to obtain the following conditions which are easier to satisfy.

$$\begin{cases} K_1\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_1)) > 0, \\ K_2\varphi_{v0}\cos(\phi(\omega_2)) > 0. \end{cases} \tag{18}$$

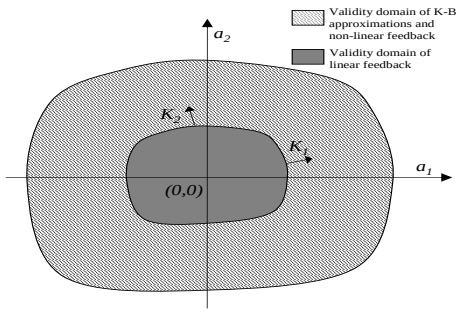

Fig. 10. Comparison between the computed quenching domains of both feedback controllers.

VI. Comparison between the control strategies

The nonlinear control law yields asymptotic local stability at the origin. The domain of amplitudes a_1 and a_2 where quenching oscillations is guaranteed, is delimited by the boundary of validity the K-B method applied to (9). For the linear feedback law, the quenching domain is limited not just by the validity of the K-B method, but also by the local limitations on the gain values K_1 and K_2 of feedback loop (Figure 10). Additionally, the nonlinear feedback requires less restriction on the delay value, since it does not use the Assumption 1. It is however important to note however, that both control strategies are predicated on having good knowledge of the parameters values in the combustion instability model, particularly of the value of the delay τ.

VII. Conclusion

This paper presents control methodologies for quenching oscillations in combustion instabilities based on a tractable model derived elsewhere, which exhibits the coexistence of two oscillating modes observed in combustion instabilities. The K-B method has been considered as a main tool for analysis and conditions for quenching have been established.

Control by linear feedback was firstly considered. The study showed that quenching oscillations is possible in a local stability domain, which depends on the feedback gains. The simulation tests show that quenching was successfully, requiring more control efforts in the case of oscillations which had reached steady state. To increase the local stability domain, the non-linear feedback was considered as an alternative solution. This feedback also quenches oscillations in a local stability domain, but one which depends solely on the domain of validity of K-B approximations. In other word, the feedback offers a stability domain larger than the domain obtained by linear feedback. Good knowledge of model parameters is necessary for quenching with either feedback approach.

Further work will focus on the robustness of these approaches with respect to model parameters uncertainties as well as a quantitative evaluation of the stability domain.

REFERENCES

[1] G. Roy, *Advances in Chemical Propulsion: Science to Technology*. Boc Raton, Fl USA: CRC – Taylor & Francis, 2001.

[2] A. Banaszuk, K. Ariyur, M. Krstic, and C. Jacobson, "An adaptive algorithm for control of combustion instability," *Automatica*, vol. 40, pp. 2155–2162, 2004.

[3] A. Annaswamy and A. Ghoniem, "Active control of combustion instability: Theory and practice," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, no. 6, pp. 37–54, Dec 2002.

[4] R. M. Murray, C. A. Jacobson, R. Casas, A. I. Khibnik, C. R. Johnson Jr, R. R. Bitmead, A. A. Peracchio, and W. M. Proscia, "System identification for limit cycling systems: a case study for combustion instabilities," *American Control Conference, Philadelphia PA*, pp. 2004–2008, 1998.

[5] W. J. Dunstan, R. R. Bitmead, and S. M. Savaresi, "Fitting nonlinear low-order models for combustion instability control," *Control Engineering Practice*, pp. 1301–1317, 2001.

[6] L. G. Paparizos and F. E. C. Culick, "The two-mode approximation to nonlinear acoustics in combustion chambers," *Combustion Science and Technology*, vol. 65, pp. 39–65, 1989.

[7] N. Al-Masoud and T. Singh, "Closed-loop amplitude modulation control of reacting premixed turbulent jet," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, pp. 1076–1082, 2005.

[8] T. Yi, M. Cornwell, and E. J. Gutmark, "Mean flow regulation of a high frequency combustion control valve based on pulse width modulation and system identification," *American Control Conference*, 2005.

[9] J. H. Uhm and S. Acharya, "Low-bandwith open-loop control of combustion instabity," *Combustion and Flame*, vol. 142, pp. 348–363, 2005.

[10] A. Peracchio and W. Proscia, "Nonlinear heat-release/acoustic model for thermoacoustic instability in lean premixed combustors," *ASME J. Eng. Gas Turbines Power*, vol. 121, no. 3, pp. 415–421, 1999.

[11] W. J. Dunstan, "System identification of nonlinear resonant systems," Ph.D. dissertation, University of California, San Diego, 2003.

[12] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, and A. Voda-Besançon, "An analytically tractable model for combustion instability," *Conference on Decision and Control and European Control Conference*, no. 44, 2005.

[13] ——, "Analysis of a tractable model for combustion instability: the effect of delay and low pass filtering," *Conference on Decision and Control-San Diego (accepted)*, no. 45, 2006.

[14] N. Bogoliubov and Y. Mitropolski, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Hindustan Publishing Corp, Delhi, and Gordon and Breach, 1961.

[15] C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. New York: McGraw-Hill Book Co, 1964, (reprinted by Princeton University Press, 1985).

[16] P. S. Landa, *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Kluwer, 1996.

[17] ——, *Regular and Chaotic Oscillations*, V. I. Babitsky and J. Wittenburg, Eds. New York: Springer, 2000.

[18] I. D. Landau and R. R. Bitmead, "On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations," Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla CA 92093-0411, USA, Tech. Rep., Jan 2004.

[19] H. K. khalil, *Nonlinear Systems*. New York: MacMillan, 1992.

Bibliographie

[AG02] A.M. Annaswamy and A.F. Ghoniem. Active control of combustion instability : Theory and practice. *IEEE Control Systems Magazine*, 22(6) :37–54, Dec 2002.

[AMS05] N. Al-Masoud and T. Singh. Closed-loop amplitude modulation control of reacting premixed turbulent jet. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13 :1076–1082, 2005.

[BAKJ04] A. Banaszuk, K.B. Ariyur, M. Krstic, and C. Jacobson. An adaptive algorithm for control of combustion instability. *Automatica*, 40 :2155–2162, 2004.

[BG$^+$98] D. Bradley, , P.H. Gaskell, X. J. Gu, M. Lawes, and M. J. Scott. Premixed turbulent flamme instability and no formation in a lean burn swirl burner. *Combustion and Flame*, 115 :515–538, 1998.

[BLB07] F. Bouziani, I. D. Landau, and R. R. Bitmead. Quenching oscillations in combustion instabilities using model-based closed-loop multiplicative control. *European Control Conference, Kos (accepted)*, 2007.

[BLBV05a] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, and A. Voda-Besançon. Analysis of two coupled Van der Pol equations as a model for combustion instability. Technical report, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France, Mar 2005.

[BLBV05b] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, and A. Voda-Besançon. An analytically tractable model for combustion instability. *Conference on Decision and Control and European Control Conference*, (44), 2005.

[BLBV06] F. Bouziani, I. D. Landau, R. R. Bitmead, and A. Voda-Besançon. Analysis of a tractable model for combustion instability : the effect of delay and low pass filtering. *Conference on Decision and Control-San Diego*, (45), 2006.

[Ble00] I. I. Blekhman. *Vibrational Mechanics*. World Scientific, London, 2000.

[BLV04] F. Bouziani, I. D. Landau, and A. Voda-Besançon. First and second-order K-B approximations for the analysis of nonlinear oscillations in autonomous systems. Technical report, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, France, Jun 2004.

[BM61] N.N. Bogoliubov and Y.A. Mitropolski. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Hindustan Publishing Corp, Delhi, and Gordon and Breach, New York, 1961.

[Can02] S. Candel. Combustion dynamics and control : progress and challenges. *Proceedings of the Combustion Institute*, 29 :1–28, 2002.

[CRJA98] J.M. Cohen, N.M. Rey, C.A. Jacobson, and T.J. Anderson. Active control of combustion instability in a liquid-fueled low-nox combustor. *43rd ASME/IGTI Turbo Expo, Stockholm, Sweden*, Jun 1998.

[DB03] W. J. Dunstan and R. R. Bitmead. Identification of resonant systems using periodic multiplicative reference systems. *13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam NL*, 2003.

[DBS01] W. J. Dunstan, R. R. Bitmead, and S. M. Savaresi. Fitting nonlinear low-order models for combustion instability control. *Control Engineering Practice*, pages 1301–1317, 2001.

[Dow95] A.P. Dowling. The calculation of thermoacoustic oscillations. *J Sound & Vibration*, 180(4) :557–581, 1995.

[Dun03] Wayne J. Dunstan. *System Identification of Nonlinear Resonant Systems*. PhD thesis, University of California, San Diego, 2003.

[FAI03] V. FAIVRE. *Etude expérimentale et numérique du contrôle actif des jets dans des chambres de combustion*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.

[FLP01] A. Fichera, C. Losenno, and A. Pagano. Experimental analysis of thermo-acoustic combustion instability. *Applied Energiy*, 70 :179–191, 2001.

[FP04] V. Faivre and T. Poinsot. Experimental and numerical investigations of jet active control for combustion applications. *Journal of Turbulence*, 5(025), Aug 2004.

[GPHPS91] E. Gutmark, T. P. Parr, D. M. Hanson-Parr, and K. C. Schadow. Closed-loop amplitude modulation control of reacting premixed turbulent jet. *AIAA Journal*, 29 :2155–2162, 1991.

[Hay64] C. Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill Book Co, New York, 1964. (reprinted by Princeton University Press, 1985).

[HS00] S. C. Hall and L. Douglas Smoot. Modeling of nitrogen oxides formation and destruction in combustion system. *Progress in energy and combustion science*, 25 :417–458, 2000.

[ISCZ97] G. Isella, C. Seywert, F. E. C. Culick, and E. E. Zukoski. A further note on active control of combustion instabilities based on hysteresis. *Combustion Science and Technology*, 126 :381–388, 1997.

[JKB+00] C.A. Jacobson, A. Khibnik, A. Banaszuk, J.M. Cohen, and W.P. Proscia. Active control of combustion instabilities in gas turbine engines for low emissions. part I : Physics-based and experimentally identified models of combustion instability. *Proc. AVT Symposium on Active Control Technology, Braunschweig*, pages 30–1–30–11, 2000.

[kha92] H. K. khalil. *Nonlinear Systems*. MacMillan, New York, 1992.

[Lan88] P.J. Langhorne. Reheat buzz : An acoustically coupled combustion instability part 1.experiment. *J. Fluid Mech.*, 193 :417–443, 1988.

[Lan96] P. S. Landa. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Kluwer, 1996.

[Lan00] P. S. Landa. *Regular and Chaotic Oscillations*. Springer, New York, 2000.

[LB04] I. D. Landau and R. R. Bitmead. On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations. Technical report, Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla CA 92093-0411, USA, Jan 2004.

[LB05] T.C. Lieuwen and A. Banaszuk. Backround noise effects on combustor stability. *Journal of Propulsion and Power*, 21 :25–31, 2005.

[LBB06] I. D. Landau, F. Bouziani, and R. R. Bitmead. Un modèle de commande pour le contrôle des instabilités de combustion. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bordeaux*, 2006.

[Lev49] N. Levinson. A second order differentiable equation with singular solutions. *The Annals of Mathematics 2nd ser*, 50 :127–153, 1949.

[Lev50] N. Levinson. Small periodic perturbation of autonomous system with a stable orbit. *The Annals of Mathematics 2nd ser*, 52 :727–738, 1950.

[Lie03] T.C. Lieuwen. Statistical characteristics of pressure oscillations in a premixed. *Journal of Sound and Vibration*, 260 :3–17, 2003.

[Lou59] W.S. Loud. Periodic solutions of a perturbation autonomous system. *The Annals of Mathematics 2nd ser*, 70 :490–529, 1959.

[LZ98] T. Lieuwen and B.T. Zinn. The roler of equivalence ratio oscillations in driving combustion instabilities in low nox gas turbines. *Proc. 27th Int. Symp. Combust.*, pages 1809–1816, 1998.

[MHD+04] K. McManus, F. Han, W. Dunstan, C. Barbu, and M. Shah. Modeling and control of combustion dynamics in industrial gas turbines. *Proc. ASME Turbo-Expo*, pages 567–575, 2004.

[MJC+98] R. M. Murray, C. A. Jacobson, R. Casas, A. I. Khibnik, C. R. Johnson Jr, R. R. Bitmead, A. A. Peracchio, and W. M. Proscia. System identification for limit cycling systems : a case study for combustion instabilities. *American Control Conference, Philadelphia PA*, pages 2004–2008, 1998.

[MMC00] E. Haile M. Mettenleiter and S. Candel. Adaptive control of aeroacoustic instabilities. *J. Sound & Vibration*, 230(4) :761–789, 2000.

[MMM98] K. R. McManus, J. C. Magill, and M. F. Miller. Control of unstable combustion oscillations in liquid-fueled gas turbines. *International Conference on Control Applications*, 1998.

[PC89] L. G. Paparizos and F. E. C. Culick. The two-mode approximation to nonlinear acoustics in combustion chambers. *Combustion Science and Technology*, 65 :39–65, 1989.

[PP99] A.A. Peracchio and W.M. Proscia. Nonlinear heat-release/acoustic model for thermoacoustic instability in lean premixed combustors. *ASME J. Eng. Gas Turbines Power*, 121(3) :415–421, 1999.

[PVB+88] T. Poinsot, D. Veynante, F. Bourienne, S. Candel, E. Esposito, and J. Surget. Initiation and suppression of combustion instabilities. *Proceedings of the Combustion Institute*, 22 :1363–1370, 1988.

[Ray45] J.W.S. Rayleigh. *The Theory of Sound*, volume 2. Dover, New York, 1945.

[Rij59] P. Rijke. *Ann. of Physics*, 1959.

[Roy01] G.D. Roy. *Advances in Chemical Propulsion : Science to Technology*. CRC – Taylor & Francis, Boc Raton, Fl USA, 2001.

[SA91] A. Saul and D. Altemark. Lean-burn premixed combustion in gas turbine combustion. *Gaswärme international*, 40, 1991.

[SD04] S. R. Stow and A. Dowling. Low-ordre modelling of thermoacoustic limit cycles. *Proceedings of ASME TURBO EXPO*, Jun 2004.

[SDC03] T. Schuller, D. Durox, and S. Candel. Self-induced combustion oscillations of laminar premixed flames stabilized on annular burners. *Progress in Energy and Combustion Science*, 135 :525–537, 2003.

[SPP99] R. Sun, L. Peng, and D. S. Pan. Analytical theory for the subfrequency excitation of a parametric series-integrated rtd oscillator. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 47 :1931–1937, 1999.

[SZ97] B. Shapiro and B.T. Zinn. High frequency and nonlinear vibrational control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jan 1997.

[Tyn97] J. Tyndal. *Sound*. D. Appleton & Company, New York, 1897.

[UA05] J. H. Uhm and S. Acharya. Low-bandwith open-loop control of combustion instabity. *Combustion and Flame*, 142 :348–363, 2005.

[Yag59] K. Yagasaki. Degenerate resonances in forced oscillators. *Continuous Dynamical Systems- Series B*, 3 :423–438, 1959.

[Yag96] K. Yagasaki. The melnikou theory for subharmonic and their bifurcations in forced oscilation. *SIAM J Appl. Mathematics*, 56 :1720–1765, 1996.

[YCG05] T. Yi, M. Cornwell, and E. J. Gutmark. Mean flow regulation of a high frequency combustion control valve based on pulse width modulation and system identification. *American Control Conference*, 2005.

[ZSW00] S.R.N. De Zilwa, S. Sivasegaram, and J.H. Whitelaw. Control of combustion oscillations close to stoichiometry. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63 :395–414, 2000.