



HAL
open science

Un exemple d'application de l'analyse multivariante

Anestis Antoniadis

► **To cite this version:**

Anestis Antoniadis. Un exemple d'application de l'analyse multivariante. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I; Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1975. Français. NNT: . tel-00126774

HAL Id: tel-00126774

<https://theses.hal.science/tel-00126774>

Submitted on 26 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
en MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Anestis ANTONIADIS

UNE EXEMPLE D'APPLICATION
DE L'ANALYSE MULTIVARIATE

Soutenu le 27 juin 1975 devant la Commission d'Examen

Président : Monsieur N. GASTINEL

Examineurs }
Monsieur J.R. BARRA
Monsieur F. BRODEAU
Monsieur B. VAN CUTSEM

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF

Présidents

M. Louis NEEL

M. Gabriel CAU

Vice-Présidents

MM. Lucien BONNETAIN

Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICCOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELDORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrometallurgie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BOVIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
FELICI Noël	Electrostatique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
SANTON Lucien	Mécanique
SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
----------------------	------------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
COHEN Joseph	Electrotechnique
DURAND François	Metallurgie
MOREAU René	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BOUVARD Maurice	Génie mécanique
CHARTIER Germain	Electronique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Chimie minérale
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
LACOUME Jean Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Physique atomique
LESPINARD Georges	Mécanique
MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIÈRE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Doré	Automatique
---------------------	-------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M. ANCEAU François	Mathématiques appliquées
--------------------	--------------------------

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

Monsieur le Professeur N. GASTINEL qui a bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury.

Monsieur le Professeur J.R. BARRA qui a dirigé cette thèse et dont les conseils et les enseignements m'ont permis de mener à bien ce travail.

Messieurs les Professeurs F. BRODEAU et B. VAN CUTSEM qui ont bien voulu accepter de prendre part au Jury.

Je remercie Mademoiselle ROCHE qui a assuré la dactylographie du manuscrit, ainsi que le personnel du service de reprographie du Laboratoire qui a réalisé le tirage.

TABLE DES MATIERES

		Pages
Introduction.		I
Chapitre I	INTRODUCTION A L'ANALYSE MULTIVARIANTE.	
§1	Rappels et définitions.....	1
§2	Structures gaussiennes linéaires généralisées.....	9
Chapitre II	LES LOIS GAMMA MATRICIELLES DECENTREES	
§1	La fonction génératrice de la mesure de Haar sur le groupe orthogonal.....	25
§2	Etude de la loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ dans le cas $2a \in \mathbb{N}^*$	32
§3	Etude de la loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ dans le cas $2a \notin \mathbb{N}^*$	36
Chapitre III	UN PROBLEME DE GLACIOLOGIE	
§1	L'étude mathématique.....	49
§2	Estimation dans la structure statistique dite de Tukey.....	51
§3	Estimation et test dans le cas où le rapport $C = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ est supposé connu pour le problème de glaciologie.....	56
Chapitre IV	UNE ADAPTATION DU TEST DE BARTLETT-SCHEFFE A UN PROBLEME STATISTIQUE PARTICULIER.	
§1	La structure statistique.....	57
§2	Un lemme.....	60
§3	Test de $\{K\theta=0\}$ dans le cas $n_1 = n_2 = n$	63
§4	Test de $\{K\theta=0\}$ dans le cas $n_1 \neq n_2$	66

Chapitre V	UNE APPLICATION NUMERIQUE DU CHAPITRE IV	
§1	La structure statistique.....	68
§2	Test de $\{\lambda=0\}$ dans le cas où le rapport σ_1^2/σ_2^2 est inconnu.....	69
§3	Les calculs.....	70
Chapitre VI	ESTIMATION DES COMPOSANTES DE LA VARIANCE DANS UNE STRUCTURE LINEAIRE GAUSSIENNE...	
§1	La structure statistique.....	77
§2	Estimateurs MINQUE et MIVQUE des composantes de la variance.....	80
§3	Théorèmes d'existence et formules de calcul....	83
§4	Un exemple d'application.....	87

Bibliographie.

INTRODUCTION

Dans la première partie de ce travail, nous avons étudié les structures gaussiennes linéaires quelconques qui sont à la base de l'analyse multivariante, en employant le formalisme de la statistique mathématique introduit par BARRA dans [8]. De plus, nous avons calculé la densité des lois gamma matricielles décentrées et non singulières, par l'utilisation de la fonction génératrice de la mesure de Haar sur le groupe des matrices orthogonales. Cette idée nous fut suggérée par une propriété analogue satisfaite par la densité de la loi de Wishart matricielle décentrée que JAMES A.T. a établie dans [13].

La deuxième partie de ce travail concerne l'étude statistique d'un problème de glaciologie, proposé par L.LIBOUTRY (cf.[16]). Nous avons examiné différentes structures statistiques et nous nous sommes intéressés aux applications pratiques de la théorie pour ce problème concret.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des structures gaussiennes linéaires d'ordre quelconque qui généralisent la notion de structure gaussienne linéaire et simple (d'ordre 1) de [8]. Les résultats et les théorèmes concernant les modèles linéaires simples y étaient présentés sous une forme géométrique telle que, par un système analogue de notations, ce chapitre les généralise d'une manière naturelle. Pour mettre en valeur le rôle des notations employées, nous avons donné quelques exemples d'illustration d'analyse multivariante classique.

Nous étudions, au chapitre II, les lois gamma matricielles décentrées sur le cône $S_r^+(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre r . Notre examen de la densité à son origine dans le problème suivant posé en [8] :

Existe-t-il, pour a réel positif et r entier supérieur à 1, une fonction g_a^r définie sur $S_r^+(\mathbb{R})$ telle que, quelle que soit la matrice Λ appartenant à $S_r^+(\mathbb{R})$, en désignant par X une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$, on ait :

$$\mathbb{E}(g_a^r(X)) = \exp \{ \text{Tr}(\Lambda) \} \quad ?$$

Si cette fonction existe, quelle que soit la matrice K appartenant à S_r^+ et pour Λ non singulière la loi $\Gamma_r(a, K, \cdot)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur S_r^+ qui se déduit de la fonction g_a^r . Dans un premier paragraphe, nous avons examiné le cas particulier de la loi de Wishart ($2a$ entier), en nous reportant aux travaux de JAMES A.T. (cf. [12], [13]), dont nous avons amélioré quelques résultats. Ensuite, grâce à cette étude, nous obtenons, sous certaines conditions, l'existence et la formule explicite de la fonction g_a^r , pour a réel positif et nous en déduisons l'expression de la densité des lois gamma décentrées régulières.

Dans le chapitre III, nous rappelons brièvement le problème de glaciologie tel qu'il est défini par L.LIBOUTRY dans [6] et nous donnons la définition de la structure statistique Σ associée à ce problème, telle qu'elle est proposée en [7]. Nous examinons ensuite le problème d'estimation du terme non-additif dans les structures statistiques de Tukey, dont la structure Σ est un cas particulier et il apparaît que le test généralisé de Tukey, défini dans [6], est une fonction de l'estimateur proposé.

L'objet du quatrième chapitre est une extension du test de Bartlett-Scheffé pour un problème analogue à celui de Behrens-Fischer. Nous définissons dans ce chapitre une structure statistique gaussienne, qui généralise la structure statistique sur laquelle est défini le problème de Behrens-Fischer et nous étudions des tests de type linéaire sur cette structure. En employant les notations des chapitres précédents, les hypothèses s'expriment par des conditions d'appartenance à des sous espaces vectoriels, ce qui nous a permis de bien dégager la théorie des techniques de calcul. Les tests proposés sont déterministes et libres, et pour le cas particulier de la structure du problème de Behrens-Fischer, nous retrouvons le test de Bartlett-Scheffé proposé par LINNIK dans [15].

Dans le chapitre V , nous étudions une structure statistique analogue à celle du chapitre III pour le problème de glaciologie, mais en ne considérant qu'une partie seulement des observations dont on dispose. Nous définissons alors un test de non-additivité de la moyenne pour cette structure d'après les méthodes de calcul de chapitre IV. Nous avons illustré ce chapitre par une application numérique à partir des observations réelles et nous avons comparé les résultats obtenus à ceux de [16] .

Enfin, le dernier chapitre est consacré à un nouveau principe d'estimation des composantes de la variance dans des structures linéaires gaussiennes d'un type particulier, introduit par RAO C.R. ([21],[22]) et que MOUSSA J. a mis au point. Un article de SEARLE ([24]) contient une description détaillée des récents travaux sur ce sujet, ainsi que plusieurs références. Dans l'esprit d'obtenir des méthodes simples d'analyse, nous avons adopté le langage géométrique et matriciel du chapitre I. Pour terminer, nous appliquons les résultats précédents à l'estimation des composantes de la variance dans la structure Σ du problème de glaciologie.

Nous avons voulu donner à ces différents chapitres un traitement commun en analysant les rôles respectifs de l'algèbre linéaire, du calcul matriciel aléatoire et des hypothèses gaussiennes et en utilisant systématiquement un langage géométrique qui conduit à une présentation naturelle et simple des résultats. L'usage d'un tel formalisme permet d'éviter certaines confusions et de donner de nouvelles formulations à certains problèmes, qui conduisent à des extensions directes des théorèmes fondamentaux et des méthodes classiques de l'analyse de la variance élémentaire. La mise en forme des problèmes concrets en termes statistiques se trouve aussi simplifiée et les applications au problème de glaciologie correspondent à cet esprit.

CHAPITRE I

INTRODUCTION A L'ANALYSE MULTIVARIATE

Dans ce chapitre, on résume quelques résultats importants de [8] dont la plupart sont classiques, mais le système de notations adopté a permis d'obtenir des généralisations intéressantes. Le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à la généralisation des structures gaussiennes linéaires et simples, telle qu'elle a été définie dans [8].

§1. Rappels et définitions.

On rappelle les définitions et principales propriétés dont on aura besoin pour la suite. On désigne respectivement par S_r^+ le cône des matrices symétriques réelles d'ordre r , définies positives, et par I_r la matrice identité d'ordre r .

Définition 1.1. (cf.[8])

"Soient r un entier positif, Λ une matrice symétrique d'ordre r définie positive, a un réel strictement positif. Si $2a$ est entier ou si $2a+1 > \text{rang}(\Lambda)$, il existe une loi de probabilité sur S_r^+ qu'on notera $\Gamma_r(a, \Lambda)$ et dont la fonction caractéristique est définie par :

$$\forall T \in S_r, \quad \phi(T) = \det(I_r - iT\Lambda)^{-a}.$$

Cette loi est appelée loi gamma matricielle d'ordre r ."

Proposition 1.1.

"Soient q un entier et a un réel, tous deux positifs.

(i) Si $2a+1 > q$, soit Y la matrice aléatoire triangulaire supérieure d'ordre q , dont tous les termes non nuls sont des variables aléatoires indépendantes, de loi $N(0, 1/2)$ hors de la diagonale, alors que le carré du terme de la diagonale situé sur la colonne j a pour loi $\Gamma(\frac{2a-q+j}{2}, 1)$. Alors la matrice aléatoire $Y^t Y$ suit la loi $\Gamma_q(a, \mathbb{I}_q)$.

(ii) Si $2a$ est entier et inférieur à q , soit Z la matrice aléatoire d'ordre $(q, 2a)$ à termes indépendants, de lois respectives :

$$\begin{cases} N(0, \frac{1}{2}) & \text{si } i < j+q-2a, \\ \text{celle de la racine d'une variable aléatoire } \Gamma(\frac{2a-q+j}{2}, 1) & \text{si } i = j+q-2a \\ 0 & \text{si } i > j+q-2a. \end{cases}$$

Alors la matrice aléatoire $Z^t Z$ suit la loi $\Gamma_q(a, \mathbb{I}_q)$ ".

Pour une démonstration de cette proposition, le lecteur pourra consulter [

L'intérêt de cette proposition est qu'elle permet la décomposition de Bartlett d'une loi gamma matricielle. Plus précisément, soit Λ une matrice symétrique d'ordre r définie positive et de rang égal à q et soit a un réel strictement positif tel que $2a$ soit entier ou $2a+1 > q$. Si V est une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$ il existe une matrice réelle A d'ordre (r, q) telle que V admette la représentation :

$$V = AY^t Y A \quad \text{si } 2a+1 > q, \quad \text{ou } V = AZ^t Z A \quad \text{si } 2a \text{ est entier et } 2a \leq q,$$

où Y et Z sont les matrices définies dans la proposition 1.1. En effet, la matrice symétrique Λ étant définie positive et de rang égal à q , il existe A d'ordre (r, q) (cf. [5]) telle que :

$$\Lambda = A^t A.$$

Soit alors Y la matrice de la proposition 1.1., si $2a+1 > q$, et Z la matrice de la proposition 1.1. si $2a$ est entier inférieur à q . On sait que $Y^t Y$ ou $Z^t Z$ suivent la loi $\Gamma_q(a, \mathbb{I}_q)$ et donc la matrice aléatoire V suit la loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$ (cf. Prop. 1.3.-I).

Théorème 1.1.

"Avec les notations de la définition 1.1., si Λ est une matrice symétrique définie strictement positive et si $2a+1 > r$, la loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$ admet une densité sur S_r^+ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est égale à :

$$X \in S_r^+, \quad \frac{1}{\Gamma_r(a)} (\det \Lambda)^{-a} \exp\{-\text{Tr}(\Lambda^{-1}x)\} (\det x)^{a - \frac{r+1}{2}},$$

où :

$$\Gamma_r(a) = \pi^{\frac{r(r-1)}{4}} \prod_{j=0}^{r-1} \Gamma(a - \frac{j}{2}).$$

Démonstration :

La démonstration est reprise de [8] et est basée sur la décomposition d'une loi gamma matricielle. Plus précisément, comme $2a+1 > r$ la loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$ admet la décomposition de Wishart-Bartlett, avec $q=r$. Donc, si V est une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$, on a pour V :

$$V = AY^t Y A,$$

où Y est la matrice qui définit la décomposition et A est une matrice réelle d'ordre r et inversible telle que $A^t A = \Lambda$.

Par définition les $\frac{r(r+1)}{2}$ variables aléatoires $Y_{ij} (i \leq j)$ dont dépend la matrice Y sont stochastiquement indépendantes, et donc la densité de la matrice aléatoire Y sera le produit de leurs densités. En posant $U = Y^t Y$ la densité de Y s'écrit :

$$\frac{1}{\Gamma_r(a)} \exp\{-\text{Tr}(U)\} \prod_{j=1}^r (y_{jj})^{2a-r-1} 2^r \prod_{j=1}^r (y_{jj})^j dy,$$

où :

$$dy = \prod_{i \leq j} dy_{ij} \quad \text{cf. [9]}.$$

Mais :

$$\prod_{j=1}^r (y_{jj})^{2a-r-1} = (\det U)^{a-\frac{r+1}{2}}$$

et :

$$dU = 2^r \prod_{j=1}^r (y_{jj})^j dy .$$

La densité de la matrice aléatoire U est donc égale à :

$$\frac{1}{\Gamma_r(a)} \exp\{-\text{Tr}(U)\} (\det U)^{a-\frac{r+1}{2}} dU .$$

Effectuons le changement de variable $V = AU^tA$. En remarquant que :

$$(\det U) = (\det \Lambda)^{-1} (\det V) ,$$

$$\text{Tr}(U) = \text{Tr}(V\Lambda^{-1}) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial V}{\partial U} \right| = (\det \Lambda)^{\frac{r+1}{2}} ;$$

la densité de V est celle du théorème.

Théorème 1.2.

"Soient r un entier positif, a et b deux réels positifs tels que $2a+1 > r$ et $2b+1 > r$; on considère une matrice aléatoire Y de loi $\Gamma_r(b, \mathbb{I}_r)$ et une matrice aléatoire X dont la loi conditionnelle à Y est la loi $\Gamma_r(a, Y^{-1})$. Alors, la loi de probabilité de X s'appelle loi beta matricielle d'ordre r de deuxième espèce et admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur S_r^+ la fonction :

$$\frac{\Gamma_r(a+b)}{\Gamma_r(a)\Gamma_r(b)} \frac{(\det X)^{a-\frac{r+1}{2}}}{\{\det(\mathbb{I}_r+X)\}^{a+b}} \quad " .$$

Pour la démonstration de ce théorème, ainsi que pour les définitions qui suivent, on pourra se reporter à [8] . Dans la suite, on désignera par K_r le cône de \mathbb{R}^r défini par :

$$K_r = \{u \in \mathbb{R}^r ; u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_r > 0\} .$$

Définition 1.2. (Loi gamma vectorielle)

"On appelle loi gamma vectorielle d'ordre r , notée $\gamma_r(a)$, où a est un réel positif tel que $2a+1 > r$, la loi sur K_r de densité égale :

$$\frac{\pi^{r/2}}{\Gamma_r(a)\Gamma_r(\frac{r}{2})} \exp(-\sum_{i=1}^r u_i) \left(\prod_{i=1}^r u_i\right)^{a-\frac{r+1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (u_i - u_j) .$$

Les valeurs propres ordonnées par ordre décroissant d'une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(a, \mathbb{I}_r)$ suivent la loi $\gamma_r(a)$ "

Définition 1.3. (Loi bêta vectorielle)

"On appelle loi bêta vectorielle de deuxième espèce d'ordre r , noté $b_r(a,b)$ où a et b sont des réels positifs tels que $2a+1 > r$ et $2b+1 > r$ la loi de probabilité sur K_r de densité égale à :

$$\frac{\pi^{r/2} \Gamma_r(a+b)}{\Gamma_r(a) \Gamma_r(b) \Gamma_r(\frac{r}{2})} \frac{\left(\prod_{i=1}^r u_i\right)^{a-\frac{r+1}{2}}}{\left(\prod_{i=1}^r (1+u_i)\right)^{a+b}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (u_i - u_j) .$$

Le vecteur des valeurs propres ordonnées par ordre décroissant d'une matrice aléatoire de loi bêta matricielle de deuxième espèce $B_r(a,b)$ suit la loi $b_r(a,b)$ "

On remarquera, d'après le théorème 1.1. que la densité d'une loi $\Gamma_r(a, \mathbb{I}_r)$ s'exprime à l'aide des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres de la loi, plus précisément en fonction de sa trace et de son déterminant. Il est donc intéressant de déterminer la loi conjointe des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres d'une loi $\Gamma_r(a, \mathbb{I}_r)$ et d'une loi $B_r(a,b)$.

On rappelle que les fonctions symétriques élémentaires de s valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sont définies par :

$$e_1^{(s)} = \lambda_1 + \dots + \lambda_s, \quad e_2^{(s)} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{s-1} \lambda_s, \dots, \quad e_s^{(s)} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_s .$$

Dans la suite, on désigne par φ_S l'application de \mathbb{R}^S dans \mathbb{R}^S qui à un vecteur de \mathbb{R}^S associe le vecteur des fonctions symétriques élémentaires de ses composantes.

Proposition 1.2.

"Soient r un entier positif, a et b deux réels positifs tels que $2a+1$ et $2b+1$, soient tous deux strictement supérieurs à r . Alors, la loi conjointe des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres de la loi $\Gamma_r(a, \mathbb{I}_r)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\varphi_r(K_r)$ égale à :

$$\frac{\pi^{r/2}}{\Gamma_r(a)\Gamma_r(\frac{r}{2})} \exp(-e_1) e_r^{a-\frac{r+1}{2}}$$

et la loi conjointe des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres d'une loi $B_r(a, b)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\varphi_r(K_r)$ égale à :

$$\frac{\pi^{r/2}}{\Gamma_r(a)} \frac{\Gamma_r(a+b)}{\Gamma_r(b)\Gamma_r(\frac{r}{2})} \frac{e_r^{a-\frac{r+1}{2}}}{(1+\sum_{i=1}^r e_i)^{a+b}} \quad "$$

Démonstration :

La démonstration de la proposition repose sur la changement de variables qui, à un vecteur u de K_r , associe le vecteur $\varphi_r(u)$ de $\varphi_r(K_r)$ c'est-à-dire, avec nos notations :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \mapsto \varphi_r(u) = \begin{pmatrix} e_1^{(r)} \\ e_2^{(r)} \\ \vdots \\ e_r^{(r)} \end{pmatrix} .$$

On se propose de montrer par récurrence que le Jacobien de cette transformation sur K_r existe et est égal à :

$$\left| \frac{\partial \varphi_r(u)}{\partial u_1, u_2, \dots, u_r} \right| = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (u_i - u_j) . \quad (1)$$

Pour $r = 2$, l'égalité (1) ci-dessus est vraie. Supposons-la vraie pour $r \leq n$ et démontrons-la pour $r = n+1$.

On remarquera que la transformation φ_{n+1} sur K_{n+1} peut être considérée comme la composée de deux transformations T_1 et T_2 , i.e.

$\varphi_{n+1} = T_2 \circ T_1$, où les transformations T_1 et T_2 sont définies de la manière suivante sur \mathbb{R}^{n+1} :

$$T_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^{(n)} \\ e_2^{(n)} \\ \vdots \\ e_n^{(n)} \\ u_{n+1} \end{pmatrix},$$

où les $e_i^{(n)}$ désignent les fonctions symétriques élémentaires des n premières composantes du vecteur u de \mathbb{R}^{n+1} et :

$$T_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_{n+1} \\ u_2 + u_1 u_{n+1} \\ \vdots \\ u_i + u_{i-1} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_n u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien de la transformation φ_{n+1} en $u \in K_{n+1}$ est égal par conséquent à :

$$\left| \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial u} \right|_u = \left| \frac{\partial T_2}{\partial v} \right|_{T_1(u)} \times \left| \frac{\partial T_1}{\partial u} \right|_u. \quad (1)$$

Mais, d'après l'hypothèse de récurrence faite ci-dessus, le Jacobien de la transformation T_1 est égal à :

$$\left| \frac{\partial T_1}{\partial u} \right|_u = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_i - u_j).$$

d'autre part, on a :

$$\left| \frac{\partial T_2}{\partial v} \right|_{T_1(u)} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ u_{n+1} & 1 & 0 & \dots & 0 & e_1^{(n)} \\ 0 & u_{n+1} & 1 & \dots & 0 & e_2^{(n)} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & u_{n+1} & e_n^{(n)} \end{pmatrix} \right| = \prod_{i=1}^n |u_{n+1} - u_i| = \prod_{i=1}^n (u_i - u_{n+1}),$$

et d'après l'égalité (1), on déduit le résultat. En appliquant alors le changement de variables défini ci-dessus aux formules des densités des définitions 1.2. et 1.3., on obtient la proposition 1.2. .

Définition 1.4.

"Soient a un réel positif, Γ et Λ deux matrices symétriques d'ordre r , définies positives. On appelle loi gamma matricielle décentrée d'ordre r , notée $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ la loi sur S_r^+ , quand elle existe, dont la fonction caractéristique est :

$$\forall T \in S_r \quad \phi(t) = \det(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-a} \exp\{i\text{Tr}[\Gamma(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-1}T]\} \text{ " .}$$

On remarquera que la définition 1.4. généralise la notion de loi gamma scalaire décentrée, puisque, d'une part, on a $\Gamma_1(a, \gamma, \lambda) = \gamma(a, \frac{\gamma}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$ et que d'autre part si $\Gamma = 0$, on retrouve la loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$. Une étude approfondie de cette loi sera faite dans le chapitre II. On se propose ici d'établir certaines propriétés de cette loi, qu'on utilisera dans la suite.

Proposition 1.3.

"Avec les notations de la définition 1.4., on a les propriétés suivantes :

(i) Soient X et Y deux matrices aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ et $\Gamma_r(b, \Gamma', \Lambda)$. La matrice aléatoire $X + Y$ suit la loi $\Gamma_r(a+b, \Gamma+\Gamma', \Lambda)$.

(ii) Soit X une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ et A une matrice réelle d'ordre (r, r') , $r \geq r'$. La matrice aléatoire $Y = {}^tAXA$ suit la loi $\Gamma_{r'}(a, {}^tA\Gamma A, {}^tA\Lambda A)$ " .

Démonstration :

L'assertion (i) de la proposition est une conséquence de la définition 1.4.. En effet, X et Y étant indépendantes, on a pour tout $T \in S_r$:

$$\phi_{X+Y}(T) = \phi_X(T) \phi_Y(T) \text{ .}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(T) &= \det(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-a} \exp\{i\text{Tr}[\Gamma(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-1}T]\} \times \det(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-b} \exp\{i\text{Tr}[\Gamma'(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-1}T]\} \text{ ,} \\ &= \det(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-(a+b)} \exp\{i\text{Tr}[(\Gamma+\Gamma')(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-1}T]\} \text{ ,} \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Pour l'assertion (ii), on remarquera que, pour tout $T \in S_r$, on a d'une part (cf. [5] p.87) :

$$\det(\mathbb{I}_r - iAT^tA\Lambda) = \det(\mathbb{I}_r - iT^tA\Lambda A)$$

et d'autre part :

$$A(\mathbb{I}_r - iT^tA\Lambda A) = (\mathbb{I}_r - iAT^tA\Lambda)A$$

Donc :

$$\text{Tr}[\Gamma(\mathbb{I}_r - iAT^tA\Lambda)^{-1}AT^tA] = \text{Tr}[{}^tA\Gamma A(\mathbb{I}_r - iT^tA\Lambda A)^{-1}T]$$

et comme $\Phi_{t_{AXA}}(T) = \Phi_X(AT^tA)$, l'assertion (ii) est démontrée.

§2. Structures gaussiennes linéaires généralisées.

Une étude complète des structures gaussiennes linéaires et simples a été faite dans [8]. L'analyse multivariée la plus générale devrait donc se définir sur une structure qui serait la généralisation du cas "simple". Cette généralisation a été proposée en [8]. Dans ce paragraphe, on se propose de rappeler quelques théorèmes qui généralisent les théorèmes traités dans [5] et de détailler certaines démonstrations de [8].

Proposition 2.1. (Formes quadratiques de matrices gaussiennes)

"Soit X une matrice aléatoire gaussienne d'ordre (p,q), de loi $N(m, \Lambda \otimes \Lambda')$ où Λ est une matrice symétrique d'ordre p définie strictement positive et Λ' une matrice symétrique d'ordre q définie positive. Soit Q une matrice symétrique d'ordre p. Si la matrice AQ a toutes ses r valeurs propres non nulles égales à s ($r \leq p$), alors la matrice aléatoire $Z = {}^tXQX$ suit la loi $\Gamma_q(\frac{r}{2}, {}^t mQm, 2s\Lambda')$ "

Pour une démonstration de cette proposition, le lecteur se reportera à [8]. On remarquera que la proposition 2.1. généralise le théorème de [5] sur les formes quadratiques de vecteurs gaussiens.

Définition 2.1.

"Une structure statistique S est une structure linéaire gaussienne d'ordre p , si et seulement si :

$$S = \{ \Omega^p, \mathfrak{B}_{\Omega^p}, N(m, \Lambda \otimes \Sigma); m \in V^p, \Sigma \in S_p^+(\mathbb{R}) \} ,$$

où Ω est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , muni de sa tribu borélienne \mathfrak{B}_{Ω} , V une variété linéaire de Ω de dimension strictement inférieure à celle de Ω et Λ une forme quadratique définie strictement positive sur le dual Ω^* de Ω . De plus, Ω est muni du produit scalaire défini par Λ^{-1} " .

Pour tout vecteur $z = (z_1, \dots, z_p)$ de Ω^p , on note $Q_{\Lambda}(z)$ la matrice symétrique d'ordre p , de terme général $\langle z_i, z_j \rangle$ et $\langle \dots \rangle$ est le produit scalaire de Ω défini par la forme bilinéaire associée à Λ . Avec ces notations $\Lambda \otimes \Sigma$ est la forme quadratique sur Ω^p définie par :

$$(z_1, \dots, z_p) \mapsto \text{Tr}(\Sigma Q_{\Lambda}(z)) .$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ un élément aléatoire de S . La notation $N(m, \Lambda \otimes \Sigma)$ signifie alors que les x_i ($i=1, \dots, p$) sont des vecteurs aléatoires gaussiens à valeurs dans Ω , dont la moyenne m_i appartient à V et tels que la matrice de variance-covariance des (x_1, \dots, x_p) est proportionnelle à la forme quadratique Λ . Plus précisément :

$$\text{cov}(x_i, x_j) = \sigma_{ij} \Lambda .$$

Remarque 1.

Dans la plupart des ouvrages (cf. [1], [26], [19]) , les problèmes d'analyse multivariate traités découlent de la structure statistique suivante :

On considère n vecteurs gaussiens X_{α} à valeurs dans \mathbb{R}^p , indépendants et de lois respectives $N(BZ_{\alpha}, \Sigma)$ ($\alpha=1, \dots, n$) où Σ est une matrice de $S_p^+(\mathbb{R})$ inconnue, Z_{α} ($\alpha=1, \dots, n$) des vecteurs donnés de \mathbb{R}^q

et B une matrice réelle d'ordre (p, q) . En posant :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} ,$$

la structure statistique définie ci-dessus est :

$$\psi = \{ \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{n,p}}, N(Z^t B, \mathbb{I}_n \otimes \Sigma); \Sigma \in S_p^+(\mathbb{R}); B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \} ,$$

où Z est une matrice réelle donnée d'ordre (n, q) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre (n, p) .

On remarquera alors que la structure statistique ψ définie ci-dessus est un cas particulier de S , avec $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\Lambda = \mathbb{I}_n$. En effet, $(\mathbb{R}^n)^p$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels isomorphes. On note tout élément u de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$u = (u_1, \dots, u_p) ,$$

et on considère le sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^n défini par :

$$V = \{ Z\theta; \theta \in \mathbb{R}^q \} .$$

En désignant par B_i la i ème ligne de la matrice B et par m la moyenne d'un élément de ψ , on a, pour $i = 1, \dots, p$:

$$m_i = Z^t B_i \text{ ce qui équivaut à } m \in V^p .$$

Remarque 2.

On remarquera aussi que la structure S généralise la notion de structures gaussiennes linéaires "simples" définies en [8]. Il suffit pour cela de prendre $p = 1$.

Théorème 2.1.

"Soient Ω un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} et Λ une forme quadratique définie strictement positive sur le dual Ω^* de Ω . Soit X un élément aléatoire à valeurs dans Ω^q de loi $N(m, \Lambda \otimes \Lambda')$ où Λ' appartient

à $S_q^+(\mathbb{R})$. On munit Ω du produit scalaire défini par Λ^{-1} et on considère k sous-espaces vectoriels de Ω, F_1, \dots, F_k orthogonaux deux à deux. On note p_1, \dots, p_k respectivement les projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces F_1, \dots, F_k . Alors, avec les notations précédentes, les éléments aléatoires :

$$P_i(X) = X_i = (p_i(X^1) \dots p_i(X^q)) \quad (i=1, \dots, k) ,$$

sont stochastiquement indépendants et de lois respectives :

$$N(P_i(m), \Lambda_{F_i} \otimes \Lambda') \quad \text{où} \quad \Lambda_{F_i} = \Lambda \circ p_i \quad (i=1, \dots, k) .$$

De plus, les matrices aléatoires $Z_j = Q_{\Lambda^{-1}}(P_j(X))$ sont indépendantes et de loi respectives :

$$\Gamma_q\left(\frac{\dim F_j}{2}, Q_{\Lambda^{-1}}(P_j(m)), 2\Lambda'\right) .$$

Remarque.

Ce théorème est la généralisation du théorème analogue sur vecteurs gaussiens de [5] (cf. Th.4, p.130). On remarquera que les éléments aléatoires X_i ($i=1, \dots, k$) du théorème ne sont pas les projections orthogonales de X sur F_i , mais que $X_i = (X_{F_i}^1, X_{F_i}^2, \dots, X_{F_i}^q)$.

Démonstration du théorème 2.1. (selon [8])

En faisant choix d'une base de Ω , celui-ci est identifié à \mathbb{R}^n , la forme quadratique Λ et les projecteurs P_i sont représentés par des matrices, ce que l'on fera par commodité pour cette démonstration, en gardant les mêmes notations.

La matrice Λ' étant définie positive, il existe une matrice réelle d'ordre q telle que :

$$\Lambda' = {}^t B B .$$

La matrice aléatoire X du théorème se met alors sous la forme :

$$X = m + YB \quad (1)$$

où Y est une matrice aléatoire de loi $N(0, \Lambda \otimes I_q)$. Les colonnes de la matrice

Y, Y^i ($i=1, \dots, q$) sont par conséquent gaussiennes indépendantes de loi $N(0, \Lambda)$. On note pour $j = 1, \dots, k$:

$$Y_j^i = P_j Y^i \quad (2)$$

Les vecteurs Y_j^i pour i fixé sont stochastiquement indépendants et de lois respectives $N(0, \Lambda_{F_j})$. (cf. Th. 4, p. 130, [4]). En notant pour $j = 1, \dots, k$:

$$Y_j = (Y_j^1, Y_j^2, \dots, Y_j^q)$$

on en déduit que les matrices aléatoires Y_j sont indépendantes et de lois respectives $\mathcal{N}(0, \Lambda_{F_j} \otimes \mathbb{1}_q)$. D'après (1), on a, pour $j = 1, \dots, k$:

$$X_j = P_j m + Y_j B$$

d'où la première assertion du théorème.

Enfin, les matrices $Z_j = {}^t X_j \Lambda^{-1} X_j = {}^t X_j {}^t P_j \Lambda^{-1} P_j X_j$ ($j=1, \dots, k$) sont des formes quadratiques de matrices gaussiennes. Les X_j ($j=1, \dots, k$) étant indépendantes, il en est de même pour les Z_j . En remarquant que pour $j = 1, \dots, k$ on a ${}^t P_j \Lambda^{-1} P_j = \Lambda^{-1} P_j$ et en appliquant la proposition 2.1.

avec ici $Q = {}^t P_j \Lambda^{-1} P_j$ et $s = 1$, les matrices aléatoires Z_j ($j=1, \dots, k$) suivent respectivement la loi :

$$\Gamma_q \left(\frac{\dim F_j}{2}, {}^t m \Lambda^{-1} P_j m, 2\Lambda' \right)$$

et la démonstration est achevée.

Soient Ω un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et Λ une forme quadratique définie strictement positive sur Ω , identifiée à son dual. On munit Ω du produit scalaire défini par Λ^{-1} et on considère un sous espace-vectoriel strict de Ω , disons V . Soit $w = (w^1, \dots, w^p)$ un élément de Ω^p , les w^i ($i=1, \dots, p$) étant des vecteurs de Ω . Dans la suite, on définit la projection de $x \in \Omega^p$ sur V^p suivant le produit scalaire défini par Λ^{-1} et on note x_{V^p} l'élément du Ω^p déterminé par :

$$x_{V^p} = (x_V^1, x_V^2, \dots, x_V^p)$$

où les x_V^i sont les projections suivant Λ^{-1} des x^i sur V .

Enfin, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement Q la matrice symétrique $Q_{\Lambda^{-1}}$.

Corollaire 2.1.

"Soit S la structure statistique définie par :

$$S = \{ \Omega^P, \mathcal{B}_{\Omega^P}, N(m, \Lambda \otimes \Sigma), \Sigma \in S_p^+(\mathbb{R}) \},$$

où Ω est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et Λ une forme quadratique définie strictement positive sur le dual Ω^* de Ω .

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de Ω , supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire défini par Λ^{-1} dans Ω . Alors les projections $X_{V_1}^P$ et $X_{V_2}^P$ de tout élément aléatoire X de Ω^P sont stochastiquement indépendantes et de lois respectives :

$$N(m_{V_2}^P, \Lambda_{V_1} \otimes \Sigma) \text{ et } N(m_{V_1}^P, \Lambda_{V_2} \otimes \Sigma) "$$

Théorème 2.2.

"Avec les notations de la définition 2.1., soit :

$$S = \{ \Omega^P, \mathcal{B}_{\Omega^P}, N(m, \cdot \otimes \Sigma); m \in V^P, \Sigma \in S_p^+(\mathbb{R}) \}$$

une structure linéaire gaussienne d'ordre p . On suppose de plus que Σ est définie strictement positive et on munit Ω du produit scalaire défini par Λ^{-1}

Soit X un élément de S . Alors la statistique $X \mapsto (X_{V^P}^P, Q(X - X_{V^P}^P))$ est une statistique exhaustive et complète pour la structure S . De plus, $X_{V^P}^P$ et

et $Q(X - X_{V^P}^P)$ sont des statistiques indépendantes de lois respectives $N(m, \Lambda_V \otimes \Sigma)$ et $\Gamma_p(\frac{\dim \Omega - \dim V}{2}, 2\Sigma)$ "

Démonstration :

Soit n la dimension de Ω . En faisant choix d'une base orthonormale de Ω , l'espace vectoriel Ω est isomorphe à \mathbb{R}^n et la forme quadratique Λ est assimilable à une matrice symétrique réelle d'ordre n , définie strictement positive. Pour cette démonstration, on adoptera l'écriture matricielle, plus commode pour les calculs, en assimilant les vecteurs, les applications linéaires et les formes quadratiques aux matrices qui les représentent.

Soit $X = (X^1 X^2, \dots, X^P)$ un élément aléatoire de Ω^P . En identifiant X à une matrice aléatoire d'ordre (n, p) , d'après les hypothèses la matrice X admet pour densité la fonction (cf. [8]) :

$$f(X) = (2\pi)^{-pn/2} \det(\Lambda \otimes \Sigma)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr}({}^t(X-m)\Lambda^{-1}(X-m)\Sigma^{-1})\right\} . \quad (1)$$

On se propose dans la suite d'étudier la forme quadratique :

$$Q(X-m) = \text{Tr}({}^t(X-m)\Lambda^{-1}(X-m)\Sigma^{-1}) .$$

La matrice Σ étant définie strictement positive, il existe une matrice régulière d'ordre p , disons A , telle que :

$$\Sigma = {}^tAA . \quad (2)$$

D'après l'égalité (2), on a $Q(X-m) = \text{Tr}({}^tY\Lambda^{-1}Y)$ où :

$$Y = (X-m)A^{-1} \text{ et } Y \text{ suit la loi } N(0, \Lambda \otimes \mathbb{I}_p) . \quad (3)$$

Soit W le sous-espace vectoriel directeur de V , c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de Ω parallèle à V . On sait qu'il existe un vecteur unique O_V de V orthogonal à W pour le produit scalaire défini par Λ^{-1} sur Ω , tel que, pour tout vecteur x de Ω , on a :

$$x_V = O_V + x_W . \quad (4)$$

En désignant par Y^i ($i=1, \dots, p$) les colonnes de la matrice aléatoire Y et par Y_W^i leur projection orthogonale suivant $(\cdot, \cdot)_{\Lambda^{-1}}$ sur W , il vient :

$$\begin{aligned}
 K(X-m) &= \text{Tr}({}^t Y \Lambda^{-1} Y) = \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} t_{Y^1} \\ t_{Y^2} \\ \vdots \\ t_{Y^P} \end{pmatrix} \Lambda^{-1} (Y^1 \dots Y^P) \right\} = \sum_{i=1}^P \|Y^i\|_{\Lambda^{-1}}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^P \|Y_{W^i}^i\|_{\Lambda^{-1}}^2 + \sum_{i=1}^P \|Y_{W^\perp}^i\|_{\Lambda^{-1}}^2 \\
 &= \text{Tr}({}^t Y_{W^P} \Lambda^{-1} Y_{W^P}) + \text{Tr}({}^t Y_{(W^\perp)^P} \Lambda^{-1} Y_{(W^\perp)^P}) .
 \end{aligned}$$

D'après l'égalité (3) on a :

$$Y_{W^P} = (X_{W^P} - m_{W^P}) A^{-1} \quad \text{et} \quad Y_{(W^\perp)^P} = (X_{(W^\perp)^P} - m_{(W^\perp)^P}) A^{-1} .$$

D'autre part, comme l'hypothèse $m \in V^P$, on a, pour $i = 1, \dots, p$:

$$m^i = O_V + m_{W^i} \quad \text{et} \quad m_{W^\perp}^i = O_V .$$

On en déduit que :

$$x_{W^P} - m_{W^P} = (x_{W^1}^1 - m_{W^1}^1, \dots, x_{W^P}^P - m_{W^P}^P) = (X_{V^P} - m) ,$$

et :

$$(X_{(W^\perp)^P} - m_{(W^\perp)^P}) = (x_{W^\perp}^1 - O_V, \dots, x_{W^\perp}^P - O_V) = (X - X_{V^P}) ,$$

et on a maintenant $Q(X-m) = Q(X_{V^P} - m) + Q(X - X_{V^P})$.

La densité $f(X)$ définie en (1) s'écrit alors :

$$f(X) = (2\pi)^{-\frac{pn}{2}} \det(\Lambda \otimes \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr}({}^t (X_{V^P} - m) \Lambda^{-1} (X_{V^P} - m) \Sigma^{-1})\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr}[Q(X - X_{V^P}) \Sigma^{-1}]\right\} .$$

Donc, d'après le théorème de factorisation, la statistique $(X_{V^P}, Q(X - X_{V^P}))$ est exhaustive pour S et de plus, X_{V^P} et $Q(X - X_{V^P})$ sont indépendantes. D'autre part, les lois de Y_{W^P} et $Y_{(W^\perp)^P}$ sont déterminées par le corollaire 2.1.

et en tenant compte de l'égalité (3), on en déduit la dernière assertion du théorème.

Enfin, pour établir la complétion, supposons que les q ($q = \dim V$), premiers vecteurs de la base orthonormale de Ω que l'on a choisie, forment une base orthonormale de $W = V - O_V$ et munissons Ω^P de la base correspondante. Enfin, notons O_V^P le vecteur de Ω^P défini par $O_V^P = (O_V, \dots, O_V)$. On a alors :

$$Q(X-m) = Q(X_{V^P} - m) + Q(X - X_{V^P}) = Q(X_{W^P} + O_V^P - m) + Q(X - X_{V^P}) ,$$

et :

$$Q(X_{V^P} - m) = {}^t X_{W^P} \Lambda^{-1} X_{W^P} - {}^t X_{W^P} \Lambda^{-1} (m - O_V^P) - {}^t (m - O_V^P) \Lambda^{-1} X_{W^P} + {}^t (m - O_V^P) \Lambda^{-1} (m - O_V^P) .$$

Donc, le logarithme de la fonction de vraisemblance est égal, à une constante près, à :

$$\text{Tr}(\Sigma^{-1} Q(X - X_{V^P})) - 2 \text{Tr}(\Sigma^{-1} {}^t (m - O_V^P) \Lambda^{-1} X_{W^P}) + \text{Tr}(\Sigma^{-1} Q(m - O_V^P)) \quad (5)$$

Soit θ la matrice (p, q) des q premières colonnes de $\Sigma^{-1} {}^t (m - O_V^P)$ et $X_{W^P}^*$ la matrice d'ordre (q, p) des q premières lignes de $\Lambda^{-1} X_{W^P}$. On a finalement pour (5) :

$$\text{Tr}(\Sigma^{-1} Q(X - X_{V^P})) - 2 \text{Tr}(\theta X_{W^P}^*) + \text{Tr}(\Sigma^{-1} Q(m - O_V^P)) ;$$

donc, la structure statistique induite par la statistique $(Q(X - X_{V^P}), X_{W^P}^*)$ est exponentielle canonique pour les paramètres naturels formés par les termes de θ et ceux de Σ^{-1} qui ne sont pas situés au-dessus de la diagonale.

Remarque.

Le théorème 2.2. est l'extension de la proposition 1 (IX, p.131) de [5]. En effet, pour $p = 1$, on retrouve la statistique $(X_V, \|X - X_V\|_{\Lambda^{-1}}^2)$.

On remarquera aussi que la statistique exhaustive du théorème 2.2. fournit des estimateurs sans biais et du maximum de vraisemblance de m et Σ respectivement.

Lemme 2.1.

"Soient Ω un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et Λ une forme quadratique définie strictement positive sur Ω , identifié à son dual. On munit Ω du produit scalaire défini par Λ^{-1} et on considère p vecteurs aléatoires à valeurs dans Ω, X^i ($i=1, \dots, p$) tels que la matrice aléatoire $X = (X^1, \dots, X^p)$ suive la loi $N(m, \Lambda \otimes \Sigma)$ où Σ est une matrice symétrique d'ordre p définie strictement positive.

Soit V un sous-espace vectoriel aléatoire de Ω , stochastiquement indépendant des X^i ($i=1, \dots, p$) et de dimension presque sûrement constante. Avec nos notations, si $m = 0$ et si $\dim V^{\perp} \geq p$, alors la variable aléatoire :

$$R = \frac{\det(Q(X - X_{V^{\perp}}))}{\det(Q(X_{V^{\perp}}) + Q(X - X_{V^{\perp}}))}$$

a pour loi de probabilité \prod_{R^p} la loi du produit de p variables aléatoires indépendantes Z_j ($j=0, \dots, p-1$) de lois respectives :

$$\beta' \left(\frac{\dim \Omega - \dim V - j}{2}, \frac{\dim V}{2} \right) \quad j = 0, \dots, p-1 \quad "$$

Rappel.

On note $\beta'(a, b)$, où a et b sont des paramètres réels positifs la loi sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$ de densité égale à :

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} .$$

Démonstration du lemme 2.1.

Le sous-espace vectoriel aléatoire V étant indépendant de X , conditionnellement à V , d'après le théorème 2.1., les statistiques $Q(X - X_{V^{\perp}})$ et $Q(X_{V^{\perp}})$ sont indépendantes et de lois respectives :

$$\Gamma_p \left(\frac{\dim \Omega - \dim V}{2}, 2\Sigma \right) \quad \text{et} \quad \Gamma_p \left(\frac{\dim V}{2}, 2\Sigma \right) \quad \text{car} \quad m = 0 .$$

Donc, la loi conditionnelle de R à V est la loi p_R (cf. [8] ou [1] p.185). La dimension de V étant presque sûrement constante, cette loi ne dépend pas de V et par conséquent R et V sont indépendants, d'où la conclusion du lemme.

Corollaire 2.2.

"Avec les notations du lemme 2.1., soit V_0 un sous-espace vectoriel donné de Ω ; on suppose qu'à tout vecteur x de V_0 , on associe s vecteurs y_1^x, \dots, y_s^x linéairement indépendants et orthogonaux à V_0 et on note W^x le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Si $m \in V_0$ et si $\dim V_0^\perp \geq p+s$, quel que soit $i=1, \dots, p$, la variable aléatoire :

$$T_i = \frac{\det Q \left(\begin{matrix} X \\ (V_0^\perp)^{P-X} \\ (W^{X^i}_{V_0})^P \end{matrix} \right)}{\det \left\{ Q \left(\begin{matrix} X \\ (W^{X^i}_{V_0})^P \end{matrix} \right) + Q \left(\begin{matrix} X \\ (V_0^\perp)^{P-X} \\ (W^{X^i}_{V_0})^P \end{matrix} \right) \right\}}$$

a pour loi de probabilité P_{T_i} la loi du produit de p variables aléatoires indépendantes Z_j , $j=0, \dots, p-1$ de lois respectives :

$$\beta' \left(\frac{\dim \Omega - \dim V_0 - s - j}{2}, \frac{s}{2} \right) "$$

Démonstration :

D'après le corollaire 2.1. les projections $X_{V_0^P}$ et $X_{(V_0^\perp)^P}$ sont indépendantes, donc, quel que soit $i=1, \dots, p$, $X_{(V_0^\perp)^P}$ et $W_{V_0^P}^{X^i}$ le sont aussi.

On remarquera de plus, vu la définition des projections, que :

$$\left(\begin{matrix} X \\ (V_0^\perp)^P \\ (W^{X^i}_{V_0})^P \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} X^1 \\ V_0^1 \\ \dots \\ X^p \\ V_0^p \\ \dots \\ W^p \\ V_0^p \end{matrix} \right) = \left\{ \left(\begin{matrix} X^1 \\ V_0^1 \\ \dots \\ X^p \\ V_0^p \\ \dots \\ W^p \\ V_0^p \end{matrix} \right) \right\}$$

et, comme pour tout $k = 1, \dots, p$, on a :

$$(X^k)_{V_0^\perp} W_{V_0}^{X^i} = X^k W_{V_0}^{X^i}$$

on en déduit que :

$$(X_{(V_0^\perp)^P})_{(W_{V_0}^{X^i})^P} = X_{(W_{V_0}^{X^i})^P}$$

On peut donc appliquer le lemme 2.1. dans V_0^\perp en prenant pour V le sous-espace vectoriel $W_{V_0}^{X^i}$ et pour matrice aléatoire la matrice $X_{(V_0^\perp)^P}$, d'où la conclusion du corollaire.

Remarque 3.

Le lemme 2.1. n'est autre que l'extension au cas multivariée du lemme 1. énoncé et démontré dans [6] (p.3.). En effet, pour $p = 1$, la variable aléatoire R du lemme 2.1. est :

$$R = \frac{1}{1 + \frac{\|X_V\|^2}{\|X_{V^\perp}\|^2}} \quad \text{et} \quad P_R = \beta\left(\frac{\dim \Omega - \dim V}{2}, \frac{\dim V}{2}\right)$$

ce qui équivaut à dire que la variable $\frac{\|X_V\|^2}{\|X_{V^\perp}\|^2}$ a pour loi de probabilité la loi $\beta\left(\frac{\dim V}{2}, \frac{\dim \Omega - \dim V}{2}\right)$.

Remarque 4.

Par contre, le corollaire 2.2. n'est pas l'extension au cas multivariée du lemme 2. de Tukey défini et démontré dans [6]. En effet, pour avoir cette extension, il aurait fallu définir un élément de la forme :

$$X^1 W_{V_0}^{X^1}, X^2 W_{V_0}^{X^2}, \dots, X^P W_{V_0}^{X^P}$$

ce qui revient à projeter X non plus sur un sous espace V^P , mais sur $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$ les V_i étant des sous espaces vectoriels distincts de Ω .

Malgré cela, on remarquera qu'au cas où $p=1$, le corollaire 2.2. coïncide avec le lemme de Tukey de [6].

Dans la suite, on se propose de donner quelques exemples qui illustrent les résultats de ce paragraphe.

Exemple de structure gaussienne d'ordre p .

Dans les problèmes d'analyse de variance (Modèle I) sur plans d'expériences exposés en [8] et en [5] (cf. §4, p.138), les observations effectuées correspondaient à la structure statistique :

$$(\Omega^*, \mathcal{B}_{\Omega^*}, N(m, \sigma^2 \Lambda_{\Omega^*}), m \in \Omega^*, \sigma \in \mathbb{R}^+) \quad (1)$$

où Λ_{Ω^*} est une forme quadratique connue sur Ω^* , identifié à son dual et où on désigne respectivement par : E l'ensemble représentant toutes les combinaisons des niveaux des facteurs, E^* le plan d'expérience, Ω l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles sur E et Ω^* l'espace vectoriel des restrictions à E^* des éléments de Ω . La structure statistique (1) est donc une structure statistique linéaire gaussienne "simple" ($p=1$) et les problèmes à étudier portent sur le moyenne m d'un phénomène aléatoire scalaire et gaussien. L'analyse multivariate sur plan d'expérience est définie au cas où le phénomène X observé n'est plus scalaire mais vectoriel, et les observations effectuées correspondent à la structure :

$$\{\Omega^{*P}, \mathcal{B}_{\Omega^{*P}}, \eta(m, \Lambda_{\Omega^*} \otimes \sigma), m \in \Omega^{*P}, \sigma \in S_p(\mathbb{R}^+)\} \quad (2)$$

et $\Omega^{*P} = \{f: E^* \rightarrow \mathbb{R}^P\}$. Si on note $X(e)$ l'observation en $e \in E^*$ du phénomène aléatoire X observé et $X^i(e)$ ($i=1, \dots, p$) ses composantes, on obtient la matrice aléatoire :

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ e \\ \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & p \\ \vdots & & & & \\ \dots & X^i(e) & \dots & & \end{pmatrix}$$

Les hypothèses signifient que cette matrice est gaussienne et que les matrices de variance-covariance de deux colonnes arbitraires de cette matrice sont proportionnelles à Σ . La structure (2) est une structure linéaire gaussienne d'ordre p . Les hypothèses que l'on testera seront du type $m \in V^P$ où V est un sous-espace vectoriel de Ω , donc linéaires et d'un type particulier. Vu la définition de la projection suivant $\Lambda_{\Omega^*}^{-1}$ dans Ω^P , sur V^P les remarques faites sur E^* en [5] (cf. p.141) sont valables.

Proposition 2.2. (Test de Hotelling (cf. [1], p.107) .

"Soit \mathfrak{F} la structure statistique définie par :

$$\mathfrak{F} = \{ \mathbb{R}^k, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^k}; N(m, \Lambda), m \in \mathbb{R}^k, \Lambda \in S_k^+ \}^N \text{ avec } N > k ,$$

où Λ est définie strictement positive et soit m_0 un vecteur donné de \mathbb{R}^k .

Alors, le test dont la région critique est définie par :

$$\frac{\det(S)}{\det\{S + (\bar{X} - m_0)^t (\bar{X} - m_0)\}} \geq K_0 ,$$

où $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$, $S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^t (X_i - \bar{X})$ et où la constante K_0 est déterminée par :

$$\int_{K_0}^{+\infty} dB' \left(\frac{N-k}{2}, \frac{k}{2} \right) = \alpha ,$$

est un test libre de niveau α pour tester l'hypothèse $m = m_0$ contre $m \neq m_0$.

Démonstration :

Par une translation de la moyenne égale à m_0 , on peut se ramener, sans perdre de généralité au cas $m_0 = 0$, ce qu'on supposera par la suite. Le problème reste dans le cadre des méthodes générales exposées. En effet, en posant ${}^t X = (X_1, \dots, X_N)$, la structure statistique \mathfrak{F} de la proposition peut se mettre sous la forme :

$$\{ m_N, k(\mathbb{R}), \mathfrak{B}_{m_N, k}, N(m, \mathbf{I}_N \otimes \Lambda); \Lambda \in S_k^+, m \in V^k \} \quad (1)$$

où V est la droite de \mathbb{R}^N engendrée par le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ et Λ est définie strictement positive. La structure statistique (1) est une structure linéaire gaussienne d'ordre k , avec $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\Lambda_\Omega = \mathbb{I}_N$ et $\Sigma = \Lambda$. d'après le théorème 2.2., la structure (1) admet pour statistique exhaustive le couple $(X_{V^k}, Q(X-X_{V^k}))$. Vu la forme du sous-espace vectoriel V on a :

$$X_{V^k} = \begin{pmatrix} \bar{t}_X \\ \bar{t}_X \\ \vdots \\ \bar{t}_X \end{pmatrix} \} N \text{ fois et } X - X_{V^k} = \begin{pmatrix} t_{X_1} - \bar{t}_X \\ t_{X_2} - \bar{t}_X \\ \vdots \\ t_{X_N} - \bar{t}_X \end{pmatrix},$$

le produit scalaire sur $\Omega = \mathbb{R}^N$ étant défini par \mathbb{I}_N . On a alors :

$$Q(X_{V^k}) = n \bar{X} \bar{t}_X \text{ et } Q(X - X_{V^k}) = nS.$$

Le test du maximum de vraisemblance est donc défini par :

$$\frac{\det Q(X - X_{V^k})}{\det(Q(X_{V^k}) + Q(X - X_{V^k}))} = \frac{\det S}{\det(S + \bar{X} \bar{t}_X)} \geq K_0$$

où K_0 est la constante définie par :

$$\int_{K_0}^{+\infty} d\beta' \left(\frac{N-k}{2}, \frac{k}{2} \right) = \alpha,$$

puisque :

$$\frac{\det S}{\det(S + \bar{X} \bar{t}_X)} = \frac{1}{1 + \bar{t}_X S^{-1} \bar{X}}$$

et que $T = \bar{t}_X S^{-1} \bar{X}$ suit la loi $\beta \left(\frac{k}{2}, \frac{N-k}{2} \right)$ sous l'hypothèse nulle.

Enfin, pour les problèmes d'estimations sur les structures gaussiennes linéaires généralisées, la statistique exhaustive du théorème 2.2. fournit des estimateurs sans biais du maximum de vraisemblance pour m et Σ . Considérons par exemple la structure statistique :

$$\{ (\mathbb{R}^n)^P, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{np}}, N(m, \mathbb{I}_n \otimes \Sigma), m \in V^P, \Sigma \in S_p^+(\mathbb{R}) \},$$

où $V = \{A\theta; \theta \in \mathbb{R}^q\}$, A étant une matrice réelle donnée d'ordre (n, q) et \mathbb{R}^n étant muni du produit scalaire canonique. Si on note Θ une matrice réelle d'ordre (q, p) , la condition $m \in V^P$ équivaut à $m = A\Theta$. Le projecteur orthogonal de tout élément X de $(\mathbb{R}^n)^P$ sur le sous espace V^P est alors (cf. [20]), d'après nos notations :

$$X_{V^P} = A({}^tAA)^{-t} {}^tAX,$$

où $({}^tAA)^{-}$ est l'inverse généralisée de tAA , et on obtient comme estimateurs sans biais de maximum de vraisemblance pour m et Σ respectivement les statistiques :

$$\hat{\Theta} = ({}^tAA)^{-t} {}^tAX \quad \text{et} \quad \hat{\Sigma} = {}^tXX - {}^t\hat{\Theta} {}^tAA \hat{\Theta}.$$

On constatera qu'ici aussi, on a une extension des méthodes du cas "simple". En effet, pour $p = 1$, on retrouve les estimateurs classiques de m et σ^2 tels qu'ils sont par exemple définis dans [20] (cf. ch.4, §2, p.181).

CHAPITRE II

LES LOIS GAMMA MATRICIELLES DECENTREES

La définition de telles lois a été donnée dans le chapitre précédent. Pour le cas où $2a$ est supposé entier, une étude de cette loi, appelée aussi loi de Wishart décentrée, est faite dans [1], [3], [13] par exemple. Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le cas où $2a$ n'est plus supposé entier, mais réel positif. Dans un premier paragraphe, on rappelle quelques résultats de [12] qui nous seront utiles pour la suite.

§ 1. La fonction génératrice de la mesure de Haar sur le groupe orthogonal.

L'étude probabiliste des lois gamma décentrées est liée au calcul de la fonction génératrice de la mesure de Haar sur le groupe G des matrices orthogonales. Plus précisément, on calculera l'intégrale :

$$\psi(Z) = \int_{G(n)} \exp\{\text{Tr}({}^tHZ)\} dP(H) \quad (1)$$

où Z est une matrice réelle d'ordre n , H une matrice orthogonale d'ordre n et P la mesure de Haar normalisée sur le groupe $G(n)$ des matrices orthogonales d'ordre n . On remarquera que la fonction ψ ci-dessus est partout définie, étant donné que la fonction positive $\exp\{\text{Tr}({}^tHZ)\}$ est bornée sur $G(n)$.

Proposition 1.1. ([12], p.368)

"La fonction $\psi(Z)$ définie en (1) est une fonction symétrique et analytique des valeurs propres de tZZ . De plus, si Δ désigne le laplacien de la première ligne de Z , c'est-à-dire :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial Z_{11}^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_{12}^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial Z_{1n}^2} \quad , \quad \text{on a } \Delta\psi = \psi \quad .$$

Démonstration :

Il existe des matrices orthogonales d'ordre n , H_1 et H_2 , telles que :

$$Z = H_1 \Lambda H_2 \quad , \quad (\alpha)$$

où Λ est la matrice diagonale d'ordre n , ayant pour éléments diagonaux non nuls les racines carrées des valeurs propres non nulles de tZZ .

La mesure de Haar P sur $G(n)$ étant invariante par translation à gauche ou à droite, la fonction génératrice ψ est invariante pour toute transformation de la forme :

$$Z \rightarrow H_1 Z H_2 \quad \text{où } H_1, H_2 \in G(n) \quad .$$

Effectivement, on a :

$$\psi(H_1 Z H_2) = \int_{G(n)} \exp\{\text{Tr}({}^t H H_1 Z H_2)\} dP(H) = \int_{G(n)} \exp\{\text{Tr}({}^t H' Z)\} dP(H') = \psi(Z) \quad .$$

Donc, d'après l'égalité (α) on a : $\psi(Z) = \psi(\Lambda)$, d'où la première assertion de la proposition.

D'autre part, $\psi(Z)$ est la transformée de Laplace en Z de la mesure de Haar P sur le groupe $G(n)$. En tant que transformée de Laplace d'une mesure positive bornée, $\psi(Z)$ est analytique (cf.[5]) .

Enfin, comme $\Delta(\exp\{\text{Tr}({}^t H Z)\})$ est bornée sur $G(n)$, par différentiation sous le signe \int on trouve pour tout Z :

$$\Delta\psi(Z) = \int_{G(n)} \left(\sum_{i=1}^n h_{1i}^2 \right) \exp\{\text{Tr}({}^t H Z)\} dP(H) = \psi(Z) \quad \text{car } H = (h_{ij}) \in G(n) \quad .$$

C.Q.F.D.

Remarque 1.

Soit $G^+(n)$ le sous groupe du groupe orthogonal $G(n)$, formé par les matrices de rotation d'ordre n , c'est-à-dire :

$$G^+(n) = \{H \in G(n); \det H = +1\}.$$

Si on note $G^-(n)$, le complémentaire de $G^+(n)$ dans $G(n)$, on a pour la fonction génératrice de la mesure de Haar définie en (1) :

$$\psi(Z) = \int_{G^+(n)} \exp\{\text{tr}({}^tHZ)\} dP(H) + \int_{G^-(n)} \exp\{\text{tr}({}^tHZ)\} dP(H).$$

Etant donné que $-G^-(n) = G^+(n)$, on en déduit que :

$$\psi(Z) = 2 \int_{G^+(n)} \exp\{\text{tr}({}^tHZ)\} dP(H). \quad (2)$$

Pour l'étude qui suivra, on pourra donc se limiter au groupe $G^+(n)$.

Remarque 2.

On sait que toute matrice de rotation d'ordre n peut être définie par ses $\frac{n(n-1)}{2}$ angles d'Euler $(\theta_{ij}^i)_{\substack{j=1, \dots, n-1 \\ 1 \leq i < j}}$ où :

pour $j=1, \dots, n-1$ et $i < j$: $\theta_j^i \in [0, \pi]$; et pour $j=1, \dots, n-1$: $\theta_j^j \in [0, 2\pi[$

Si on note D_n le domaine de définition des angles d'Euler θ_j^i d'une matrice de rotation H , on démontre (cf. [14], p.58-60) que si la matrice H suit la loi de Haar sur $G^+(n)$, alors les angles d'Euler sont des variables aléatoires indépendantes et leur loi conjointe admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur D_n égale à :

$$\frac{2^{n-1}}{\tau_n(\frac{n}{2})} \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^j (\sin \theta_j^i)^{j-i} \right\}.$$

On remarquera alors que pour $n > 2$, l'évaluation de la fonction génératrice de la mesure de Haar définie en (2), à l'aide d'une paramétrisation par les angles d'Euler est assez complexe.

Dans la suite, on se propose d'exprimer le laplacien Δ en termes des valeurs propres de tZZ , en utilisant le fait que $\psi(Z)$ satisfait à certaines équations différentielles dues à l'invariance. Au cours de la démonstration de la proposition 1.1., on a vu que la fonction ψ définie en (1), était invariante pour toute transformation de la forme :

$$Z \rightarrow H_1 Z H_2 \quad \text{avec} \quad H_1, H_2 \in G(n) . \quad (3)$$

D'après la remarque 1, on pourra se limiter aux matrices de $G^+(n)$. Or, on sait que toute matrice de rotation d'ordre n , peut s'écrire comme produit de matrices de rotations élémentaires $H_{k,k'}$ ($k=1, \dots, n; k'=1, \dots, n$), les matrices $H_{k,k'} = (h_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ étant définies par :

$h_{k,k} = h_{k',k'} = \cos \theta$, $h_{k',k} = -h_{k,k'} = \sin \theta$, $h_{ii} = 1$ pour $i \neq k, k'$ et 0 ailleurs, avec θ réel. Donc, l'invariance de ψ pour les transformations de la forme (3) est équivalente à l'invariance de ψ pour toute transformation de la forme :

$$Z \rightarrow H_{k,k'} Z H_{p,p'} \quad (4)$$

les matrices $H_{k,k'}$ et $H_{p,p'}$ étant des matrices de rotation élémentaires.

A présent, considérons par exemple la transformation élémentaire définie par :

$$Z \rightarrow H_{1,2} Z = \tilde{Z} .$$

D'après nos notations, on a :

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & \dots & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} Z .$$

En posant : $\psi(\tilde{Z}(\theta, Z)) = \chi(\theta, Z)$ on a :

$$\sum_{r=1}^n (z_{1r} \frac{\partial \chi}{\partial z_{2r}} - z_{2r} \frac{\partial \chi}{\partial z_{1r}}) = \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \theta = 0 \quad (5)$$

D'autre part, vu l'invariance de ψ pour toute transformation de la forme (4), quel que soit θ , on a $\psi(\tilde{Z}) = \psi(Z)$. On en déduit donc que :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=1}^n (z_{1\nu} \frac{\partial \psi}{\partial z_{2\nu}} - z_{2\nu} \frac{\partial \psi}{\partial z_{1\nu}}) = 0 \quad \text{d'après (5)} .$$

En considérant des transformations élémentaires du type précédent à gauche ou à droite par des matrices élémentaires de $G^+(n)$, on trouve des équations semblables à la précédente, pour toute paire de lignes ou pour toute paire de colonnes de Z .

Si on note r_i ($i=1, \dots, n$) les fonctions symétriques élémentaires de valeurs propres de tZZ et si on pose :

$$\psi(Z) = \xi(r_1, r_2, \dots, r_n) \quad , \quad (5 \text{ bis})$$

par un calcul élémentaire sur les équations différentielles du type (5), on trouve (cf. [12]) que l'équation $\Delta\psi = \psi$ est équivalente au système différentiel :

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n a_{\mu, \nu}^{(j)}(r_1, \dots, r_n) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + 2(n-j+1) \frac{\partial \xi}{\partial r_j} - \delta_{1j} \xi = 0, \quad j=1, \dots, n \quad (6)$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker et où les coefficients $a_{\mu, \nu}^{(j)} = a_{\nu, \mu}^{(j)}$ sont définis par :

Pour $\mu \leq \nu$:

$$a_{\mu, \nu}^{(j)} = \begin{cases} r_{\mu+\nu-j} & \text{pour } 1 \leq j \leq \mu \quad . \\ 0 & \text{pour } \mu < j \leq \nu \quad . \\ -r_{\mu+\nu-j} & \text{pour } \nu < j \leq \mu+\nu \text{ avec } r_0 = 1 \quad . \\ 0 & \text{pour } \mu+\nu < j \quad . \end{cases}$$

Si on note $\Xi = (\xi_{ij})$ la matrice de terme général $\xi_{ij} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial r_i \partial r_j}$ le système différentiel défini en (6) s'écrit plus explicitement sous la forme :

$$j = 1 : \quad \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{n-1} & r_n \\ r_2 & r_3 & \dots & r_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ r_{n-1} & r_n & 0 \dots 0 & & 0 \\ r_n & 0 \dots 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \Xi \right\} + \frac{1}{2} n \frac{\partial \xi}{\partial r_1} - \frac{1}{4} \xi = 0 \quad .$$

$$j = 2 : \quad \text{tr} \left\{ \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-1} & r_n \\ 0 & r_3 & r_4 & \dots & r_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & r_{n-1} & r_n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\} \equiv + \frac{1}{2} (n-1) \frac{\partial \xi}{\partial r_2} = 0 ,$$

et plus généralement pour :

$$j = k : \quad \text{tr} \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & & \\ & 0 & -1 & -r_1 & & \\ & -1 & -r_1 & -r_2 & & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -r_{k-6} & -r_{k-5} & -r_{k-4} \\ 0 & -1 & -r_1 & -r_{k-5} & -r_{k-4} & -r_{k-3} \\ -1 & -r_1 & -r_2 & \dots & \dots & -r_{k-2} \\ & & & & r_k & r_{k+1} & \dots & r_n \\ & & & & r_{k+1} & r_{k+2} & \dots & r_n & 0 \\ 0 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & r_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\} \equiv + \frac{(n-k+1)}{2} \frac{\partial \xi}{\partial r_k} = 0 .$$

Comme ξ , d'après la proposition 1.1. est une fonction analytique en r_1, \dots, r_n , on peut écrire ξ sous la forme :

$$\xi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} C(j_1, j_2, \dots, j_n) r_1^{j_1} r_2^{j_2} \dots r_n^{j_n} . \quad (7)$$

Si on ordonne les coefficients $C(j_1, j_2, \dots, j_n)$ avec l'ordre lexicographique en considérant j_n comme première "lettre" et j_1 comme dernière, par substitution de ξ définie en (7) dans l'équation différentielle du système (6) correspondante à $j=k \geq 2$ et quand $r_{k+1} = r_{k+2} = \dots = r_n = 0$, on trouve pour les coefficients :

$$\begin{aligned}
 & [(j_k+1)(j_k+\frac{n-k+1}{2})] C(j_1, \dots, j_{k-1}, j_k+1, \dots, 0) \\
 = & (j_{k/2+1})(j_{k/2+2}) C(j_1, \dots, j_{k/2+2}, \dots, j_k, 0, \dots, 0) \\
 & + \sum_{i=1}^{k-1} (j_i+1)(j_{k-i}+1) C(j_1, \dots, j_i+1, \dots, j_{k-i}+1, \dots, j_k, 0, \dots, 0) \\
 & \quad 2i \neq k \\
 & + \sum_{i=2}^{k-1} \sum_{t=1}^{i-1} \{ (j_i+1)(j_{k-i+t}+1) C(j_1, \dots, j_t-1, \dots, j_i+1, \dots, j_{k-i+t}+1, \dots, j_k, \dots, 0) (1-\delta_{t, 2i-k}) \\
 & + \delta_{t, 2i-k} (j_i+2)(j_i+1) C(j_1, \dots, j_t-1, \dots, j_i+2, \dots, j_k, 0, \dots, 0) \} \quad , \quad (8)
 \end{aligned}$$

si k est pair, où δ désigne le symbole de Kronecker et où par convention on pose $C(j_1, \dots, j_k) = 0$ si pour $i = 1, \dots, k : j_i < 0$. Pour k impair, le premier terme de la somme du membre de droite de (8) disparaît. Enfin, pour $j = k = 1$ et quand $r_2 = r_3 = \dots = r_n = 0$, on a :

$$C(j_1+1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{4(j_1+\frac{n}{2})(j_1+1)} C(j_1, 0, \dots, 0) \quad . \quad (9)$$

D'après les équations de récurrence (8) et (9), on voit que le coefficient $C(j_1, j_2, \dots, j_k, 0, \dots, 0)$ peut être exprimé en fonction de coefficients d'ordre plus petit et cela quel que soit $k = 1, \dots, n$. D'après (5 bis) et (7), on a $C(0, \dots, 0) = 1$. Donc, les n équations de récurrence obtenues à partir de (6) déterminent les coefficients de manière unique.

A titre d'exemple, effectuons le calcul de ξ pour certains cas simples. On notera k le rang de ${}^t Z Z$.

Pour le cas : $k = 1$:

On suppose donc que $\psi(Z) = \xi(r_1) = \sum_{j_1=0}^r C(j_1) r_1^{j_1}$ et d'après (9), on a :

$$C(j_1+1) = \frac{C(j_1)}{4(j_1+\frac{n}{2})(j_1+1)} \quad \text{avec} \quad C(0) = 1 \quad .$$

On obtient finalement :

$$\xi(r_1) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \alpha_{j_1} \frac{r_1^{j_1}}{j_1!}$$

où :

$$\alpha_{j_1} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4^{j_1} \Gamma(\frac{n}{2} + j_1)}$$

De la même manière, pour $k = 2$ et $k = 3$, on obtient respectivement :

$$\xi(r_1, r_2) = \sum_{j_1, j_2} \alpha_{j_1, j_2} \frac{r_1^{j_1} r_2^{j_2}}{j_1! j_2!}$$

avec :

$$\alpha_{j_1, j_2} = \frac{\Gamma_2(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} 2^{2j_1+4j_2} \Gamma(\frac{n}{2} + j_1 + 2j_2) \Gamma(\frac{n-1}{2} + j_2)}$$

et :

$$\xi(r_1, r_2, r_3) = \sum_{j_1, j_2, j_3} \alpha_{j_1, j_2, j_3} \frac{r_1^{j_1} r_2^{j_2} r_3^{j_3}}{j_1! j_2! j_3!}$$

avec :

$$\alpha_{j_1, j_2, j_3} = \frac{\pi^{-3/2} \Gamma_3(\frac{n}{2}) (n+j_1+2j_2+4j_3-3)! 2^{-(2j_1+4j_2+6j_3)}}{(n+j_1+2j_2+3j_3-3)! \Gamma(\frac{n}{2} + j_1 + 2j_2 + 3j_3) \Gamma(\frac{n-1}{2} + j_2 + 2j_3) \Gamma(\frac{n-2}{2} + j_3)}$$

§ 2. Etude de la loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ dans le cas $2a \in \mathbb{N}^*$.

On gardera les notations du chapitre I. On désignera par la suite par Γ et Λ des matrices symétriques définies positives d'ordre r et on pose $q = \text{rang } \Gamma$. Enfin, on notera S_r^{*+} le cône des matrices symétriques réelles d'ordre r , définies strictement positives.

Proposition 2.1.

"Soit X une matrice aléatoire gaussienne de loi $N(m, \mathbb{I}_n \otimes \frac{\Lambda}{2})$ où m est une matrice réelle d'ordre (n, r) . Alors, la matrice aléatoire tXX suit la loi gamma décentrée $\Gamma_r(\frac{n}{2}, {}^tmm, \Lambda)$ ".

Démonstration : (selon [8])

D'après la proposition 1.3.-I., il suffit de montrer la proposition pour $n = 1$ sans perdre de généralité.

Soit X un vecteur ligne gaussien d'ordre r , suivant la loi $N({}^tm, \frac{\Lambda}{2})$ où m est un vecteur de \mathbb{R}^r . Quelle que soit $T \in S_r$, on a :

$$\phi_{{}^tXX}(T) = \mathbb{E}\{\exp\{i\text{Tr}(T{}^tXX)\}\} = \mathbb{E}(e^{iXT{}^tX}) = \phi_{{}^tXTX}(1) \quad (1)$$

Mais la variable aléatoire tXTX est la valeur en tX de la forme quadratique définie par T . Par conséquent (cf. [5], p.88.), on a :

$$\phi_{{}^tXX}(T) = \{\det(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)\}^{-1/2} \exp\{{}^tm(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-1}Tm\} \quad ,$$

et d'autre part :

$${}^tm(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-1}Tm = \text{Tr}\{{}^tm({}^t(\mathbb{I}_r - iT\Lambda)^{-1}T)\} \quad ,$$

d'où la conclusion.

Remarque.

D'après la proposition 2.1., on remarquera que, quelles que soient les matrices définies positives Γ et Λ d'ordre r , avec $q = \text{rang } \Gamma$, la loi $\Gamma_r(\frac{n}{2}, \Gamma, \Lambda)$ existe pour $n \geq q$ et admet la représentation tXX où X est une matrice aléatoire d'ordre (n, r) de loi $N(M, \mathbb{I}_n \otimes \frac{\Lambda}{2})$, avec M matrice d'ordre (n, r) telle que :

$$\Gamma = {}^tMM \quad .$$

On supposera désormais que la matrice symétrique Λ est définie strictement positive. On rappelle ci-dessous un lemme de calcul de probabilité (cf. [1]. Lemme 13.3.1., p.319.) , dont on aura besoin par la suite.

Lemme 2.1.

"Soit X une matrice aléatoire d'ordre (n, r) , $n \geq r$, admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ égale à $f({}^tXX)dX$. Alors, la matrice aléatoire $Y = {}^tXX$ admet une densité égale à :

$$\frac{f(Y)(\det Y)^{\frac{n-r+1}{2}}}{\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{-\frac{nr}{2}}} dY "$$

Soit X une matrice aléatoire gaussienne d'ordre (n, r) de loi $N(M, \mathbb{I}_n \otimes \frac{\Lambda}{2})$. Du fait que Λ est supposée définie strictement positive, la densité de X existe et est de la forme :

$$g({}^tXX)\exp\{+\text{Tr}(2\Lambda^{-1}{}^tMX)\} dX ,$$

où :

$$g(Y) = (2\pi)^{-nr/2} (\det \frac{\Lambda}{2})^{-n/2} \exp\{-\text{Tr}(\Lambda^{-1}{}^tMM)\} \exp\{-\text{Tr}(\Lambda^{-1}Y)\} .$$

Proposition 2.2.

"Soit H une matrice orthogonale d'ordre n suivant la loi de Haar sur le groupe orthogonal $G(n)$ et soit X une matrice aléatoire d'ordre (n, r) , $n \geq r$, indépendante de H et de loi $N(M, \mathbb{I}_n \otimes \frac{\Lambda}{2})$. Alors, la matrice aléatoire $Y = HX$ admet pour densité la fonction :

$$g({}^tYY)\psi(2Y\Lambda^{-1}{}^tM)dY ,$$

où g est la fonction définie ci-dessus et ψ est la fonction génératrice de la mesure de Haar sur $G(n)$. De plus, la matrice aléatoire tYY suit la même loi que tXX , c'est-à-dire la loi $\Gamma_r\left(\frac{n}{2}, {}^tMM, \Lambda\right)$.

Démonstration :

Par hypothèse X et H sont stochastiquement indépendantes. La densité du couple (X, H) est donc égale à :

$$f_{X,H}(x, H) = f_X(x)f_H(H) ,$$

et plus précisément :

$$f_{X,H}(x, H) = g({}^txx)\exp\{+2\text{Tr}(\Lambda^{-1}{}^tMx)\} dX dP(H) .$$

On effectue le changement de variable $X \rightarrow Y$. La Jacobien de cette transformation est égal à $(\det({}^t H))^r = 1$. Donc, le couple (Y, H) admet pour densité la fonction :

$$f_{Y,H}(Y, H) = g({}^t Y Y) \exp\{+2\text{Tr}({}^t H Y \Lambda^{-1} {}^t M)\} dY dP(H) ,$$

puisque ${}^t X X = {}^t Y H {}^t H Y = {}^t Y Y$. La densité de Y est donc égale à :

$$f_Y(Y) = \int_{G(n)} f_{Y,H}(Y, H) dP(H) = g({}^t Y Y) \psi(2Y \Lambda^{-1} {}^t M) ,$$

d'où la première assertion de la proposition. La deuxième conclusion de la proposition est immédiate du fait que :

$${}^t Y Y = {}^t X {}^t H H X = {}^t X X \quad \text{car } H \in G(n) .$$

C.Q.F.D.

Soit X une matrice aléatoire d'ordre (n, r) , $n \geq r$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue égale à :

$$g({}^t X X) \psi(2X \Lambda^{-1} {}^t M) dX . \quad (1)$$

D'après la proposition 1.1.-II., la fonction génératrice de la mesure de Haar en $2X \Lambda^{-1} {}^t M$ est une fonction des valeurs propres de ZK , où on pose :

$$Z = {}^t X X \quad \text{et} \quad K = \Lambda^{-1} {}^t M M \Lambda^{-1} .$$

On notera dans la suite :

$$\psi(2X \Lambda^{-1} {}^t M) = \phi(Z) , \quad {}^t M M = \Gamma \quad \text{et} \quad K = \Lambda^{-1} \Gamma \Lambda^{-1} .$$

Si on note r_i , les fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres de ZK , d'après les résultats du §1 on a respectivement pour ϕ lorsque $\text{rang } K = \text{rang } \Gamma = q = 1, 2, 3$ les formules suivantes :

$$\phi_1(Z) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)} \frac{r_1^m}{m!} ,$$

$$\phi_2(Z) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sum_{j_1, j_2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + j_1 + 2j_2\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + j_2\right)} \frac{r_1^{j_1} r_2^{j_2}}{j_1! j_2!} ,$$

et :

$$\phi_3(Z) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \sum_{j_1 j_2 j_3} \alpha_{j_1, j_2, j_3} \frac{r_1^{j_1} r_2^{j_2} r_3^{j_3}}{j_1! j_2! j_3!}$$

avec :

$$\alpha_{j_1, j_2, j_3} = \frac{(n+j_1+2j_2+4j_3-3)!}{(n+j_1+2j_2+3j_3-3)!} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j_1+2j_2+3j_3\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+j_2+2j_3\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+j_3\right)}$$

Avec nos notations, d'après la proposition 2.2., la matrice aléatoire $Z = {}^t X X$ suit la loi $\Gamma_r\left(\frac{n}{2}, \Gamma, \Lambda\right)$. D'autre part, vu la forme de la densité de X en (1) et d'après la remarque précédente sur la fonction génératrice de la mesure de Haar, on est dans les conditions d'application du lemme 2.1. . Par conséquent, la densité de la loi $\Gamma_r\left(\frac{n}{2}, \Gamma, \Lambda\right)$ sur S_r^+ existe et est égale à :

$$\frac{1}{\Gamma_r\left(\frac{n}{2}\right)} (\det \Lambda)^{-\frac{n}{2}} \exp\{-\text{Tr}(\Lambda^{-1} \Gamma)\} \exp\{-\text{Tr}(\Lambda^{-1} Z)\} \phi(Z) (\det \phi)^{\frac{n-r+1}{2}} dZ .$$

§ 3. Etude de la loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ dans le cas où $2a \in \mathbb{N}^*$.

Dans le chapitre I, on a défini la loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$, pour $2a+1 > \text{rang } \Lambda$. Dans la suite, on supposera Λ régulière et donc $2a+1 > r$.

Lemme 3.1.

"Soit a un réel strictement positif. Soient Λ une matrice symétrique d'ordre q définie strictement positive et D une matrice diagonale d'ordre q à éléments positifs. Si $2a$ est entier, on supposera que $2a > q$ sinon, on supposera que $2a+1 > 2q$. Soit X une matrice aléatoire de loi $\Gamma_q(a, \Lambda)$. Il existe une fonction g_a^q positive sur S_q^+ , ne dépendant pas de Λ et telle que :

$$\mathbb{E}(g_a^q(X)) = \exp\{\text{Tr}(D\Lambda)\} .$$

Remarque 1.

Si $2a$ est un entier tel que $2a = n \geq q$, on démontrera que la fonction $g_{n/2}^q$ du lemme 3.1. est égale en tout X de S_q^+ à :

$$g_{n/2}^q(X) = \psi_n(2Z\Lambda^{-1}{}^tM) ,$$

où ψ_n est la fonction génératrice de la mesure de Haar sur $G(n)$, Z est une matrice d'ordre (n, q) telle que $X = {}^tZZ$ et M est une matrice d'ordre (n, q) telle que ${}^tMM = \Lambda D \Lambda$.

Remarque 2.

Dans le cas où $2a$ n'est plus entier, pour $2a+1 > 2q$ on démontrera que la fonction g_a^q du lemme est égale en tout X de S_q^+ à :

$$g_a^q(X) = \frac{(\det X)^{-a + \frac{q+1}{2}}}{\Gamma_q(\frac{q}{2})\Gamma_q(a - \frac{q}{2})} \Gamma_q(a) \int_{\substack{X-Y \in S_q^+ \\ Y \in S_q^+}} \phi_q(Y) (\det Y)^{-\frac{1}{2}} \det(X-Y)^{a - \frac{2q+1}{2}} dY ,$$

avec $\phi_q(Y) = \psi_q(2ZD^{1/2})$.

Z est une matrice d'ordre q telle que $y = {}^tZZ$ et ψ_q est la fonction génératrice de la mesure de Haar sur $G(q)$.

Démonstration du lemme 3.1.

On suppose d'abord que $2a$ est entier, plus précisément $2a = n$ et on pose $S = \Lambda^{-1}$. D'après les hypothèses $n \geq q$. Soit alors Y une matrice aléatoire d'ordre q suivant la loi $\Gamma_q(\frac{n}{2}, \Lambda D \Lambda, \Lambda)$ et M une matrice d'ordre (n, q) telle que :

$${}^tMM = \Lambda D \Lambda .$$

Comme $n \geq q$, d'après les résultats du paragraphe 2, Y admet une densité sur S_q^+ égale à :

$$\frac{(\det S)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma_q(\frac{n}{2})} \exp\{-\text{Tr}(DS^{-1})\} \exp\{-\text{Tr}(SU)\} \phi(U) \det(U)^{\frac{n}{2} - \frac{q+1}{2}} dU \quad (1)$$

où $\phi(U) = \psi_n(2Z\Lambda^{-1t}M)$, ψ_n étant la fonction génératrice de la mesure de Haar sur $G(n)$ et Z étant une matrice d'ordre (n, q) telle que $U = {}^tZZ$. On remarquera ici que $\phi(U)$ est fonction uniquement des valeurs propres de DU et ne dépend donc pas de Λ . D'après (1), il vient :

$$\int_{S_q^+} \exp\{-\text{Tr}(SU)\} \phi(U) (\det U)^{\frac{n-q+1}{2}} dU = \Gamma_q\left(\frac{n}{2}\right) (\det S)^{-\frac{n}{2}} \exp\{\text{Tr}(DS^{-1})\} \quad (2)$$

En identifiant toute matrice symétrique d'ordre q , disons $A = (a_{ij})$ à un vecteur \tilde{A} de $\mathbb{R}^{\frac{q(q+1)}{2}}$ de la manière suivante : à la matrice A on asso-

cie le vecteur $\tilde{A} = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_q \end{pmatrix}$ où $T_j = \begin{pmatrix} \sqrt{2} a_{1,j} \\ \vdots \\ \sqrt{2} a_{j-1,j} \\ a_{j,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^j, \quad \forall j = 1, \dots, q$,

la mesure m_1^n sur $\mathbb{R}^{\frac{q(q+1)}{2}}$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est égale à $\frac{\phi(X)(\det X)^{\frac{n-q+1}{2}}}{\Gamma_q\left(\frac{n}{2}\right)}$ sur le cône des vecteurs \tilde{X} associés à une

matrice symétrique définie positive et nulle ailleurs, est une mesure positive modérée d'après l'égalité (2) et avec les notations de [5], $Dm_1^n \supset S_q^{*+} \neq \emptyset$. La fonction $(\det S)^{-n/2} \exp\{\text{Tr}(DS^{-1})\}$ est la transformée de Laplace en S de la mesure m_1^n ci-dessus. La fonction $g_{n/2}^q(X)$ existe donc et on a :

$$g_{n/2}^q(X) = \phi(X) = \psi_n(2Z\Lambda^{-1t}M),$$

où Z est une matrice d'ordre (n, q) telle que $X = {}^tZZ$.

On considère à présent le cas où $2a$ n'est plus entier et $2a+1 > 2q$. Le résultat recherché du lemme peut se mettre sous sa forme équivalente :

$$\int_{S_q^+} \exp\{-\text{Tr}(XS)\} (\det X)^{a-\frac{q+1}{2}} g_a^q(X) dX = \Gamma_q(a) (\det S)^{-a} \exp\{\text{Tr}(DS^{-1})\}. \quad (4)$$

On remarquera que (cf. [8]), pour $2a+1 > r$, la structure statistique :

$$\{S_r^+(\mathbb{R}), \mathfrak{B}_{S_r^+}, \tau_r(a, \Lambda); \Lambda \in S_r^+(\mathbb{R})\},$$

est complète et donc l'équation (4) a au plus une solution.

D'après le théorème 1.1.-I., étant donné que $2a+1 > 2q$, la loi $\Gamma_q(a - \frac{q}{2}, \Lambda)$ existe et admet sur S_q^+ la densité :

$$\frac{1}{\Gamma_q(a - \frac{q}{2})} \exp\{-\text{Tr}(XS)\} (\det S)^{a - \frac{q}{2}} (\det X)^{a - \frac{2q+1}{2}} dX \quad (5)$$

Par un raisonnement analogue au précédent, la mesure m_2^a sur $\mathbb{R}^{\frac{q(q+1)}{2}}$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est égale à $\frac{\Gamma_q(a)}{\Gamma_q(a - \frac{q}{2})} (\det X)^{a - \frac{2q+1}{2}}$ sur le cône des vecteurs \tilde{X} associés à une matrice symétrique définie positive, et nulle ailleurs, est une mesure positive modérée d'après (5) et $Dm_2^a \supset S_q^{*+} \neq \emptyset$. On a, d'après (5), pour la transformée de Laplace de m_2^a en tout $S \in S_q^{*+}$:

$$L_{m_2^a}(S) = \Gamma_q(a) (\det S)^{-a + \frac{q}{2}} \quad (6)$$

Les mesures m_1^q et m_2^a sont des mesures positives modérées sur S_q^+ telles que :

$$Dm_1^q \cap Dm_2^a \neq \emptyset .$$

Il existe donc (cf. [5].Th.4, p.166) une mesure positive modérée unique sur S_q^+ , $m_1^q * m_1^a$ telle que pour tout S élément de S_q^{*+} on a :

$$L_{m_1^q * m_1^a}(S) = L_{m_1^q}(S) L_{m_2^a}(S) \quad (7)$$

D'après la définition des mesures m_1^q et m_2^a , on en déduit par (4) et (7) que la fonction $g_a^q(X)$ existe et est définie comme dans la remarque 2, d'où le résultat du lemme.

C.Q.F.D.

A titre d'exemple, appliquons le lemme 3.1. pour $q=1$. Soit X une variable aléatoire de la $\Gamma_1(a, \lambda)$ avec $a \geq \frac{1}{2}$, $\lambda > 0$ et $D = \gamma > 0$. Si $2a$ est entier, d'après la remarque 1, on a :

$$g_{n/2}^1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})(\gamma x)^m}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)m!} .$$

Dans le cas où $2a$ n'est plus supposé entier, d'après les résultats du §2 , on a :

$$\phi_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} \frac{(\gamma x)^m}{m!} .$$

D'après la remarque 2 , on a alors pour $g_a^1(y)$:

$$g_a^1(y) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a-\frac{1}{2})} y^{1-a} \int_0^y \phi_1(x) x^{-\frac{1}{2}} (y-x)^{a-\frac{3}{2}} dx .$$

La fonction à intégrer étant positive, on peut intervertir les signes \sum et \int et en effectuant le changement de variable $x \mapsto yz$ on trouve :

$$g_a^1(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+m)} \frac{(\gamma y)^m}{m!} .$$

On remarquera ici que la fonction g_a^1 existe et est définie non seulement pour $a > 1/2$ mais pour tout $a > 0$.

De la même manière, pour $a > 1/2$, on trouve, avec les notations du lemme 3.1. :

$$g_a^2(Y) = \sum_{j_1, j_2} \frac{\Gamma_2(a)(\det DY)^{j_2} (\text{Tr}(DY))^{j_1}}{\Gamma(a+2j_2+j_1)\Gamma(a+j_2-\frac{1}{2}) j_1! j_2!} .$$

Remarque 3.

D'après la remarque 2 , la formule générale donnant g_a^q en $X \in S_q^{*+}$ est :

$$g_a^q(X) = \frac{(\det X)^{-a+\frac{q+1}{2}} \Gamma_q(a)}{\Gamma_q(\frac{q}{2})\Gamma_q(a-\frac{q}{2})} \int_{\substack{X-Y \in S_q^+ \\ Y \in S_q^+}} \phi_q(Y) (\det Y)^{-\frac{1}{2}} \det(X-Y)^{a-\frac{2q+1}{2}} dY . \quad (1)$$

Soit alors Z une matrice carrée régulière d'ordre q telle que $X = {}^tZZ$.
On effectue le changement de variable $Y \rightarrow {}^tZUZ$ où $U \in S_q^+$. On a alors :

$$dY = (\det X)^{\frac{q+1}{2}} dU,$$

et, d'après (1), on trouve :

$$g_a^q(X) = \frac{\Gamma_q(a)}{\Gamma_q(\frac{q}{2})\Gamma_q(a-\frac{q}{2})} \int_{\substack{U \in S_q^+ \\ \mathbb{I}_q - U \in S_q^+}} \mathfrak{f}_q({}^tZUZ) (\det U)^{-\frac{1}{2}} \det(\mathbb{I}_q - U)^{a-\frac{2q+1}{2}} dU.$$

D'après la proposition 1.1.-II., la fonction $\mathfrak{f}_q({}^tZUZ)$ est une fonction analytique et développable en série de monômes $m({}^tZUZ)$ de tZUZ . Avec les notations de [5], (p.164), si $\nu = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^S$ avec $s = \frac{q(q+1)}{2}$, on entend par monôme $m_\nu(X)$ où $X \in S_q$, la fonction :

$$m_\nu(X) = x_{11}^{n_1} x_{12}^{n_2} \dots x_{qq}^{n_s}.$$

Avec ces notations, on voit que le calcul de la fonction $g_a^q(X)$ se ramène à calculer des expressions de la forme :

$$\int_{\substack{U \in S_q^+ \\ \mathbb{I}_q - U \in S_q^+}} m_\nu(U) (\det U)^{-\frac{1}{2}} \det(\mathbb{I}_q - U)^{a-\frac{2q+1}{2}} dU \quad \text{où } \nu \in \mathbb{N}^S,$$

c'est-à-dire des espérances mathématiques de monômes en U quand U suit la loi matricielle d'ordre q de première espèce $B_q(\frac{q}{2}, a-\frac{q}{2})$. D'où la difficulté d'avoir une formule analytique pour les fonctions g_a^q lorsque $q \geq 3$.

D'autre part, en maintenant les notations du §2, on remarquera que les fonctions g_a^q définies dans le lemme 3.1., pour $q=1$ et $q=2$ et pour a réels sont solutions des systèmes différentiels :

$j = 1, \dots, q$ ($q=1$ ou $q=2$) :

$$4 \sum_{\mu, \nu=1}^q a_{\mu, \nu}^{(j)}(r_1, \dots, r_q) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + 2(2a-j+1) \frac{\partial \xi}{\partial r_j} - \delta_{1j} \xi = 0,$$

avec :

$$g_a^q(X) = \xi(r_1, \dots, r_q) = \sum_{j_1 \dots j_q} C_a(j_1, \dots, j_q) r_1^{j_1} \dots r_q^{j_q} \quad \text{où les } r_i \text{ (} i=1, \dots, q \text{),}$$

sont les fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres de DX , D étant une matrice diagonale positive de rang égal à q .

Remarque 4.

Si $I_\lambda(Z)$ désigne la fonction de Bessel d'argument purement imaginaire d'ordre λ , appelée aussi fonction de Bessel modifiée de première espèce (cf. [30]), plus précisément :

$$I_\lambda(Z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^{\lambda+2r}}{r! \Gamma(\lambda+r+1)} = e^{-\frac{iZ}{2}} J_\lambda(iZ),$$

par un calcul élémentaire, pour $q=1$ et $q=2$, on a respectivement :

$$g_a^1(y) = (\sqrt{y})^{-(a-1)} I_{a-1}(2\sqrt{y}),$$

et :

$$g_a^2(Y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\{\det(DY)\}^j}{j! \Gamma(a - \frac{1}{2} + j)} \left\{ \text{Tr}(DY) \right\}^{-\frac{(a-1+2j)}{2}} I_{a-1+2j}(2(\text{Tr}DY)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 3.1.

"Soient K une matrice diagonale d'ordre r , à éléments positifs et de rang égal à $q \leq r$, et a un réel strictement positif. Si $2a$ est entier, on suppose que $2a \geq r$, sinon on supposera que $2a+1 > \max(r, 2q)$. Alors, la loi $\Gamma_r(a, K, \mathbb{I}_r)$ sur S_r^+ existe et admet une densité égale à :

$$\frac{1}{\Gamma_r(a)} \exp\{-\text{Tr}(K)\} \exp\{-\text{Tr}(U)\} (\det U)^{a - \frac{r+1}{2}} f(U) dU,$$

où la fonction $f(U)$ est définie de la manière suivante :

On note $U^{(q)}$ la matrice formée des q premières lignes et q premières colonnes d'une matrice $U \in S_r^+$; alors :

$$f(U) = g_a^q(U^{(q)}),$$

où g_a^q est la fonction qui a été définie dans le lemme 3.1. "

Démonstration :

Soit U une matrice aléatoire symétrique d'ordre r , suivant la loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$ où Λ est définie strictement positive. Comme $2a+1 > r$, la matrice aléatoire U , d'après le théorème 1.1.-I., admet une densité sur S_r^+ égale à

$$\frac{1}{\Gamma_r(a)} (\det \Lambda)^{-a} \exp\{-\text{Tr}(\Lambda^{-1}x)\} (\det x)^{a-\frac{r+1}{2}} dx,$$

et la matrice aléatoire d'ordre q , $U^{(q)}$, extraite de U suit la loi $\Gamma_q(a, \Lambda^{(q)})$ (cf. [1]. Th. 7.3.3., p. 163). On note $S = \Lambda^{-1}$. Avec nos notations, on a :

$$\mathbb{E}(f(U)) (\det S)^{-a} = \int_{S_r^+} \frac{1}{\Gamma_r(a)} \exp\{-\text{Tr}(US)\} f(U) (\det U)^{a-\frac{r+1}{2}} dU. \quad (1)$$

Soit alors m la mesure positive modérée sur S_r^+ définie par :

$$dm(X) = \frac{(\det X)^{a-\frac{r+1}{2}}}{\Gamma_r(a)} dX.$$

Si on note L_{fdm} la transformée de Laplace de fdm , d'après (1), on a :

$$L_{\text{fdm}}(S) = (\det S)^{-a} \mathbb{E}(f(U)).$$

Mais par définition de f , on a $\mathbb{E}(f(U)) = \mathbb{E}(g_a^q(U^{(q)}))$, la fonction g_a^q étant définie puisque les hypothèses du lemme 3.1. sont satisfaites. On a donc :

$$\begin{aligned} L_{\text{fdm}}(s) &= (\det S)^{-a} \exp \text{Tr}(K^{(q)}(S^{-1})^{(q)}) \\ &= (\det S)^{-a} \exp\{\text{Tr}(KS^{-1})\} \text{ vu la définition de } K. \end{aligned} \quad (2)$$

Soit alors $S = \mathbb{I}_r - iT$ où $T \in S_r$. Comme $\text{Re}(S) = \mathbb{I}_r \in S_r^{*+}$ on a, d'après (2) :

$$\begin{aligned} L_{\text{fdm}}(\mathbb{I}_r - iT) &= \int_{S_r^+} \exp\{i\text{Tr}(UT)\} \frac{1}{\Gamma_r(a)} \exp\{-\text{Tr} U\} f(U) (\det U)^{a-\frac{r+1}{2}} dU \\ &= \det(\mathbb{I}_r - iT)^{-a} \exp\{\text{Tr}(K(\mathbb{I}_r - iT)^{-1})\}. \end{aligned} \quad (3)$$

En remarquant alors que $K(\mathbb{I}-iT)^{-1} = K + iK(\mathbb{I}_r - iT)^{-1}T$ l'égalité (3) devient :

$$\int_{S_r^+} \exp\{i\text{Tr}(UT)\} \left[\frac{1}{\Gamma_r(a)} \exp\{-\text{Tr}K\} \exp(-\text{tr}U) f(U) (\det U)^{a - \frac{r+1}{2}} \right] dU$$

$$= \det(\mathbb{I}_r - iT)^{-a} \exp\{i\text{Tr}(K(\mathbb{I}_r - iT)^{-1}T)\} . \quad (4)$$

D'après (4) pour $T = 0$, on en déduit que l'expression entre crochets dans (4) est une densité. D'autre part, le membre de gauche de l'égalité est la transformée de Fourier en T de la densité recherchée, tandis que le membre de droite est la fonction caractéristique en T de la loi $\Gamma_r(a, K, \mathbb{I}_r)$ d'après la définition 1.4.-I., d'où le théorème.

Corollaire 3.1.

"Soient Γ et Λ des éléments de $S_r^+(\mathbb{R})$ avec Λ définie strictement positive et rang $\Gamma = q$. Soit a un réel strictement positif. Si $2a$ est entier, on supposera que $2a \geq r$, sinon on suppose que $2a + 1 > \text{Max}(r, 2q)$. Alors, la loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ admet une densité sur $S_r^+(\mathbb{R})$ ".

Effectivement, (cf. [5], p.86), il existe une matrice inversible d'ordre r A telle que :

$$\Lambda^{-1} = A^t A \quad \text{et} \quad {}^t A \Gamma a = K ,$$

où K est une matrice diagonale d'ordre r , ayant pour éléments diagonaux non nuls les valeurs propres non nulles de $\Gamma \Lambda^{-1}$. D'après la proposition 1.3.-

(ii), si X est une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$ la matrice aléatoire $Y = {}^t A \Gamma X$ suit la loi $\Gamma_r(a, {}^t A \Gamma A, {}^t A \Lambda A) = \Gamma_r(a, K, \mathbb{I}_r)$ et réciproquement.

D'après le théorème 3.1., la matrice aléatoire Y admet une densité sur S_r^+ , il en est donc de même pour la matrice aléatoire X , d'où le corollaire.

On se propose maintenant d'étudier certains partitionnements en sous-matrices des lois gamma matricielles.

Proposition 3.1. (cf. [8])

"Avec les notations du corollaire 3.1. , soit Y une matrice aléatoire d'ordre r suivant la loi $\Gamma_r(a, \Gamma, \Lambda)$. On considère pour Y le partitionnement suivant :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_3 \\ {}^t Y_3 & Y_2 \end{pmatrix} ,$$

où Y_1 est une matrice d'ordre r' et Y_2 une matrice carrée d'ordre $r-r'$. Alors, les matrices aléatoires Y_1 et Y_2 suivent respectivement les lois $\Gamma_{r'}(a, \Gamma_1, \Lambda_1)$ et $\Gamma_{r-r'}(a, \Gamma_2, \Lambda_2)$, les matrices Γ et Λ étant partitionnées de la même manière que Y " .

Démonstration :

Soit A la matrice réelle d'ordre (r, r') définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{r'} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On a alors :

$${}^t A Y A = Y_1 , \quad {}^t A^{-1} A = \Gamma_1 \quad \text{et} \quad {}^t A \Lambda A = \Lambda_1 .$$

D'après la proposition 1.3.(ii)-I., la matrice aléatoire Y_1 suit donc la loi $\Gamma_{r'}(a, {}^t A^{-1} A, {}^t A \Lambda A) = \Gamma_{r'}(a, \Gamma_1, \Lambda_1)$. D'une manière analogue, on obtient le résultat pour la matrice aléatoire Y_2 .

Remarque.

On remarquera qu'avec les notations de la proposition, si $\Lambda_3 = 0$, les matrices aléatoires Y_1 et Y_2 sont stochastiquement indépendantes. En effet, par un calcul simple, on a, pour tout $T_1 \in S_{r'}$ et $T_2 \in S_{r-r'}$:

$$\Phi_{Y_1, Y_2}(T_1, T_2) = \Phi_Y \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \Phi_{Y_1}(T_1) \Phi_{Y_2}(T_2) .$$

Proposition 3.2.

"Soient a un réel strictement positif tel que $2a+1 > r$ et Λ une matrice symétrique d'ordre r définie strictement positive. Soit X une matrice aléatoire d'ordre r suivant la loi $\Gamma_r(a, \Lambda)$. On considère pour X et pour Λ le même partitionnement, défini par :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_{12} \\ {}^t X_{12} & X_2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_{12} \\ {}^t \Lambda_{12} & \Lambda_2 \end{pmatrix} ,$$

où X_1 et X_2 sont carrées, d'ordre $r-r'$ et r' respectivement avec $\bar{r}' > r/2$
On note de plus :

$$\Lambda' = \Lambda_2 - {}^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1} \Lambda_{12} .$$

Alors, la loi conditionnelle de X_2 à X_1 est la loi $\Gamma_{r'}(a, {}^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1} X_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_{12}, \Lambda')$

Démonstration :

Soit Y une matrice aléatoire d'ordre r' , dont la loi conditionnelle à X_1 est la loi :

$$\Gamma_{r'}(a, {}^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1} X_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_{12}, \Lambda') .$$

On remarquera qu'une telle matrice aléatoire existe, car d'une part $2a+1 > r'$ et d'autre part, du fait que $r' \geq r/2$, $2a+1 > 2r-2r'$. Le rang de la matrice de décentrage de Y étant au plus égal à $r-r'$, les hypothèses du corollaire 3.1. sont satisfaites et donc Y existe.

On se propose maintenant de calculer la fonction caractéristique de la matrice Y en tout $T \in S_{r'}^+$, $\Phi_Y(T)$. On a, en tout $T \in S_{r'}^+$:

$$\Phi_Y(T) = \int_{S_{r-r'}^+} \Phi_{Y/X_1}(T) dP_{X_1} , \quad (1)$$

où $\Phi_{Y/X_1}(T)$ est la fonction caractéristique de Y conditionnelle à X_1 en T et où $P_{X_1}^+$ est la loi de probabilité de X_1 sur $S_{r-r'}^+$. D'après la définition 1.4.-I., on a :

$$\Phi_{Y/X_1}(T) = \det(\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-a} \exp\{i \text{Tr} [{}^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1} X_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_{12} (\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-1} T] \} . \quad (2)$$

D'après (1) et (2) , on a donc , pour $\phi_Y(T)$:

$$\phi_Y(T) = \det(\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-a} \int_{S_{r-r'}^+} \exp\{i\text{Tr}[X_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_{12} (\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-1} T^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1}]\} dP_{X_1} \quad (3)$$

L'intégrale ci-dessus est donc la transformée de Fourier de dP_{X_1} au point :

$$\Lambda_1^{-1} \Lambda_{12} (\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-1} T^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1} \in S_{r-r'} \quad .$$

D'après la proposition 3.1. , la loi de X_1 est $\Gamma_{r-r'}(a, \Lambda_1)$. Donc , d'après la définition 1.1.-I. , on a :

$$\begin{aligned} & \int_{S_{r-r'}^+} \exp\{i\text{Tr}[X_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_{12} (\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-1} T^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1}]\} dP_{X_1} \\ &= \det(\mathbb{I}_{r-r'} - i\Lambda_1^{-1} \Lambda_{12} (\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-1} T^t \Lambda_{12})^{-a} \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Mais on sait que si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors :

$$\det(\mathbb{I}_m - BA) = \det(\mathbb{I}_n - AB) \quad . \quad (\text{cf. [8]})$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \det(\mathbb{I}_{r-r'} - i\Lambda_1^{-1} \Lambda_{12} (\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-1} T^t \Lambda_{12})^{-a} \\ &= \det(\mathbb{I}_{r'} - i(\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda')^{-1} T^t \Lambda_{12} \Lambda_1^{-1} \Lambda_{12})^{-a} \quad . \end{aligned} \quad (5)$$

D'après (3) , (4) et (5) on a donc :

$$\phi_Y(T) = \det(\mathbb{I}_{r'} - iT\Lambda_2)^{-a} \quad .$$

D'après la proposition 3.1.-II. , X_2 suit la loi $\Gamma_{r'}(a, \Lambda_2)$. Donc , on a , pour tout $T \in S_{r'}$:

$$\phi_Y(T) = \phi_{X_2}(T) \quad ,$$

ou en d'autres termes :

$$\forall T \in S_{r'} \quad , \quad \int_{S_{r-r'}^+} \phi_{Y/X_1}(T) dP_{X_1} = \int_{S_{r-r'}^+} \phi_{X_2/X_1}(T) dP_{X_1} \quad . \quad (6)$$

La structure statistique $\{S_{r-r'}^+, \mathcal{B}_{S_{r-r'}^+}, \Gamma_{r-r'}(a, \Lambda); \Lambda \in S_{r-r'}^{*+} \subset S_{r-r'}^+\}$ est une structure exponentielle canonique. Comme $S_{r-r'}^{*+}$ est d'intérieur non vide, elle est donc complète et par conséquent, d'après (6), on obtient :

$$\phi_{X_2/X_1}^{(T)} = \phi_{Y/X_1}^{(T)} \quad P_{X_1} \text{ p.p.}$$

Donc, la loi de X_2 à X_1 est bien celle énoncée dans la proposition.

Remarque.

On remarquera qu'au cas où on suppose que $2a$ est entier et $2a \geq r$, on peut ignorer l'hypothèse $r' \geq r/2$ et donc dans ce cas la proposition est vraie quel que soit r' .

CHAPITRE III

UN PROBLEME DE GLACIOLOGIE

On rappelle le problème tel qu'il a été proposé et défini dans [16]. Il s'agit d'une étude des bilans annuels en zone d'ablation sur le glacier de Saint-Sorlin dans les Alpes françaises, mesurés depuis 15 années consécutives par le laboratoire de glaciologie du CNRS à Grenoble. Par ablation, on désigne la masse de glace disparue par unité d'aire horizontale, par fonte ou par évaporation.

Pour la mesure des bilans, des balises furent installées à différents points du glacier. La différence des émergences des balises à un an d'intervalle donne le bilan en mètres cube de glace. Il peut y avoir une erreur dans la mesure des émergences due par exemple au fait que la partie de la balise enfouie dans la neige n'est plus verticale ou qu'il est impossible d'apprécier à moins de quelques centimètres près le niveau moyen de la glace autour de la balise. Une autre cause d'erreur des mesures est due au glacier qui se déplace et se contracte ou s'allonge verticalement. Pour de plus amples détails sur les conditions de l'expérience, le lecteur pourra consulter [16]. Dans ce chapitre et les chapitres qui suivront, on s'est intéressé au modèle mathématique associé à ce problème concret.

§1. L'étude mathématique.

L'analyse mathématique du problème de glaciologie est faite dans [7]. Pour plus de détails, le lecteur consultera cet article. Ci-dessous, on rappelle brièvement les hypothèses et les notations qui ont été adoptées en [7].

On désignera par E un plan d'expérience à deux facteurs, de la forme

$$E = \bigcup_{p \in \Pi} E_p,$$

où Π est un ensemble d'indices défini par l'expérience. La structure statistique associée au problème de glaciologie défini dans l'introduction est alors la suivante :

$$\{\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, N(A\theta + \lambda F_\theta; \sigma_1^2 \Lambda_1 + \sigma_2^2 \Lambda_2); \theta \in \mathfrak{H}, \lambda \in \mathbb{R}; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+\} \quad (1)$$

où :

- Ω est l'espace vectoriel des fonctions numériques sur E , de dimension N muni de sa tribu borélienne \mathfrak{B}_Ω ;

- Λ_1 et Λ_2 sont des formes quadratiques sur Ω , identifiées à son dual, connues et définies strictement positives ;

- θ est le vecteur de \mathbb{R}^{J+T+1} de composantes $(a_1 a_2 \dots a_J b_1 b_2 \dots b_T \lambda')$;

- B est le vecteur de \mathbb{R}^{J+T+1} de composantes $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0)$;

- \mathfrak{H} est l'hyperplan de \mathbb{R}^{J+T+1} défini par $\langle B, \theta \rangle = 0$;

- $\{f_{j'}; j'=1, \dots, J\}$ sont les vecteurs de Ω définis par :

$$\forall p \in \Pi, \forall (j, t) \in E_p, f_{j'}(j, t) = \begin{cases} p & \text{si } j' = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases};$$

- $\{g_{t'}; t'=1, \dots, T\}$ sont les vecteurs de Ω définis par :

$$\forall p \in \Pi, \forall (j, t) \in E_p, g_{t'}(j, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t' - t \leq p - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases};$$

- h est le vecteur de Ω défini par :

$$\forall p \in \Pi, \forall (j, t) \in E_p, h_{(j, t)} = Z_j \sum_{t'=t}^{t'+p-1} P_{t'},$$

où les Z_j et $P_{t'}$ sont des réels donnés ;

- A est l'application linéaire de \mathbb{R}^{J+T+1} dans Ω définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^{J+T+1}, \quad A\theta = \sum_{j=1}^J a_j f_j + \sum_{t=1}^T b_t g_t + \lambda' h ;$$

- Enfin, F est l'application de \mathbb{R}^{J+T+1} dans Ω définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^{J+T+1}, \quad \forall p \in \Pi, \quad \forall (j,t) \in E_p, \quad F_{\theta}(j,t) = a_j \sum_{t'=t}^{t'+p-1} b_{t'} .$$

Les vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_J, g_1, \dots, g_T$ de Ω sont supposés linéairement indépendants. De plus, on suppose que la fonction $P_{t,j}$ de (j,t) n'est pas décomposable en somme d'une fonction de j seul et de t seul. Pour les calculs effectifs, en faisant choix d'une base de Ω , l'espace vectoriel Ω est identifiable à \mathbb{R}^N . Les formes quadratiques Λ_1 et Λ_2 sont alors représentées par des matrices carrées d'ordre N sur \mathbb{R} , définies strictement positives et A est représentée par une matrice réelle d'ordre $(N, J+T+1)$

Les problèmes statistiques posés sur la structure statistique (1) sont, d'une part, l'estimation du paramètre θ , d'autre part, le test des hypothèses $\{\lambda=0\}$ et $\{\lambda'=0\}$.

§2. Estimation dans la structure statistique dite de Tukey.

Le test de l'hypothèse $\{\lambda=0\}$ est basé sur une généralisation du test de non-additivité de Tukey (cf.[6]). Dans ce paragraphe, on s'est intéressé à l'estimation du terme "non-additif" dans les structures de Tukey dont on rappelle la définition ci-dessous. On gardera les notations de [6] et de [5] (cf. Chap. IX, §3, p.135).

On note E l'ensemble représentant toutes les combinaisons des niveaux de k facteurs, $k > 1$, E^* la partie de E qui définit le plan d'expérience, Ω l'espace vectoriel des fonctions numériques sur E et V la variété linéaire de Ω définie par :

$$m \in V \Rightarrow \forall e \in E, \quad m(e) = m_{\phi} + \sum_{q=1}^k m_{\{q\}}(e_q) \quad \text{où } e = (e_1, \dots, e_k) .$$

On se donne de plus une application qui, à toute fonction m de V , fait correspondre un sous-espace aléatoire W_m de Ω de dimension constante égale à s . Ce sous-espace W_m est déterminé par s fonctions linéairement indépendantes f_p^m ($p=1, \dots, s$) définies sur E . Quand m décrit V , le lieu des variétés linéaires $m + W_m$ est une surface Σ de Ω . On désignera par Ω^* l'espace vectoriel des fonctions sur E^* , par V^* le sous-espace vectoriel de Ω^* formé des restrictions à E^* des éléments de V , par Σ^* le sous-ensemble de Ω^* formé des restrictions à E^* des éléments de Σ et on supposera que $\dim V^* < \text{card} E^* - s$. Avec ces notations, la structure statistique de Tukey, comme elle est définie dans [6], est alors :

$$\Phi = \{ \Omega^*, \mathbb{R}_{\Omega^*}, N(m, \sigma^2 \Lambda_0); m \in \Sigma^*; \sigma \in \mathbb{R}^+ \} \quad (2)$$

où Λ_0 est une forme quadratique sur Ω^* , identifiée à son dual, définie strictement positive. D'après nos hypothèses, la moyenne de tout élément de Φ est donc en tout $e \in E$:

$$\mathbb{E}(X(e)) = m_\emptyset + \sum_{q=1}^k m_{\{q\}}(e_q) + \sum_{p=1}^s \lambda_p f_p^m(e) \quad \text{où } ((\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s)$$

Dans la suite, on se propose d'estimer le terme "non-additif" de cette moyenne c'est-à-dire les λ_p ($p=1, \dots, s$).

Remarque 1.

Soit χ un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et Λ une forme quadratique définie strictement positive sur le dual χ^* de χ . On suppose que χ est muni du produit scalaire défini par Λ^{-1} . Soit V_0 un sous-espace vectoriel strict de χ , donné. A tout vecteur x de V_0 , on associe s vecteurs y_1^x, \dots, y_s^x de χ , linéairement indépendants et orthogonaux à V_0 , pour le produit scalaire de χ . Pour $x_0 \in V_0$ fixé, on considère la structure statistique :

$$\{ \chi, \mathbb{R}_\chi, N(x_0 + \sum_{i=1}^s \lambda_i y_i^{x_0}; \sigma^2 \Lambda); \sigma \in \mathbb{R}^+; \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R} \}$$

et on pose :
$$\theta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix}, A_{X_{X_0}} = (y_1^{X_0}, \dots, y_s^{X_0}) \text{ et } S_{X_0} = {}^t A_{X_0} \Lambda^{-1} A_{X_0} .$$

Avec ces notations, la structure statistique de la remarque est une structure statistique gaussienne linéaire et simple. La statistique $\hat{\theta}$ définie par :

$$\hat{\theta} = S_{X_0}^{-1} {}^t A_{X_0} \Lambda^{-1} (X - X_{V_0}) \quad (3)$$

où X_{V_0} désigne la projection de X sur V_0 selon le produit scalaire sur λ défini par Λ^{-1} , est donc un estimateur sans biais de θ , du maximum de vraisemblance et de variance minimum. On remarquera que S_{X_0} est inversible, en tant que matrice de Gram d'un système de s vecteurs linéairement indépendants.

Revenons au problème de l'estimation du terme "non-additif" dans la structure de Tukey. On munit Ω^* du produit scalaire défini par Λ_0^{-1} . On remarquera que la statistique X_{V^*} projection de X selon Λ_0^{-1} sur V^* dans la structure ϕ de Tukey s'interprète comme l'estimateur de m en l'absence de terme d'interaction, c'est-à-dire quand $\theta = 0$. On suppose que pour tout vecteur m de V^* , les projections des vecteurs f_p^m ($p=1, \dots, s$) selon Λ_0^{-1} sur V_{\perp}^* sont non nulles et linéairement indépendantes. On notera \mathfrak{F}^m le sous-espace vectoriel qu'elles engendrent et θ le vecteur de \mathbb{R}^s défini par ${}^t \theta = (\lambda_1 \dots \lambda_s)$. L'estimateur $\tilde{\theta}$ de θ qu'on propose est défini par :

$$\tilde{\theta} = S_{X_{V^*}}^{-1} {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_0^{-1} (X - X_{V^*}) \quad (4)$$

où :

$$A_{X_{V^*}} = \left([f_1^{X_{V^*}}]_{V_{\perp}^*}, [f_2^{X_{V^*}}]_{V_{\perp}^*}, \dots, [f_s^{X_{V^*}}]_{V_{\perp}^*} \right) ,$$

et :

$$S_{X_{V^*}} = {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_0^{-1} A_{X_{V^*}} .$$

L'estimation par $\tilde{\theta}$ de θ étend l'estimation définie en (3) dans la remarque 1. D'autre part, on remarquera, d'après la définition de $A_{X_{V^*}}$, que :

$${}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_o^{-1} (X - X_{V^*}) = {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_o^{-1} X_{\mathfrak{F}_{V^*}}$$

où $X_{\mathfrak{F}_{V^*}}$ désigne la projection selon Λ_o^{-1} sur le sous-espace \mathfrak{F}_{V^*} de \mathcal{V}

Donc, l'estimateur $\tilde{\theta}$ de (4) peut encore s'écrire :

$$\tilde{\theta} = S_{X_{V^*}}^{-1} {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_o^{-1} X_{\mathfrak{F}_{V^*}} \quad (5)$$

Remarque 2.

On sait que les projections X_{V^*} et $X - X_{V^*}$ sont stochastiquement indépendantes et gaussiennes (cf. [8]). L'espérance conditionnelle de $\tilde{\theta}$ à X_{V^*} est donc égale à :

$$\mathbb{E}(\tilde{\theta}/X_{V^*}) = S_{X_{V^*}}^{-1} {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_o^{-1} \mathbb{E}(X - X_{V^*}) = S_{X_{V^*}}^{-1} {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_o^{-1} A_m \theta$$

où :

$$A_m = [(f_1^m)_{V^*} \quad (f_2^m)_{V^*} \quad \dots \quad (f_s^m)_{V^*}]$$

Sous l'hypothèse $\{\theta=0\}$, on a donc :

$$\mathbb{E}(\tilde{\theta}/X_{V^*}) = 0$$

Remarque 3.

Dans la suite, on note P_{V^*} le projecteur orthogonal selon Λ_o^{-1} sur \mathfrak{F}_{V^*} . Dans le cadre de nos hypothèses, il est intéressant d'étudier la relation existante entre $\tilde{\theta}$ et le test de Tukey proposé en [6] sur la structure \mathfrak{F} . Avec nos notations, la matrice de covariance de $\tilde{\theta}$ conditionnelle à X_{V^*} est égale à

$$v(\tilde{\theta}/X_{V^*}) = \sigma^2 S_{X_{V^*}}^{-1} {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_o^{-1} (I - P_{V^*}) \Lambda_o (I - P_{V^*}) \Lambda_o^{-1} A_{X_{V^*}} S_{X_{V^*}}^{-1}$$

car $X - X_{V^*}$ est indépendante de X_{V^*} et de matrice de variance $(\mathbb{I} - P_{V^*}) \Lambda_0 (\mathbb{I} - P_{V^*})$ où \mathbb{I} est l'identité sur Ω . D'autre part, on a :

$$(\mathbb{I} - P_{V^*}) \Lambda_0 (\mathbb{I} - P_{V^*}) = \Lambda_0 - P_{V^*} \Lambda_0 P_{V^*} ,$$

et :

$$P_{V^*} \Lambda_0^{-1} = P_{V^*} \Lambda_0^{-1} P_{V^*} ,$$

et par suite :

$$v(\tilde{\theta}/X_{V^*}) = \sigma^2 S_{X_{V^*}}^{-1} - \sigma^2 S_{X_{V^*}}^{-1} {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_0^{-1} P_{V^*} \Lambda_0 P_{V^*} \Lambda_0^{-1} P_{V^*} A_{X_{V^*}} S_{X_{V^*}}^{-1} .$$

Les vecteurs colonnes de $A_{X_{V^*}}$ sont par hypothèses orthogonaux à V^* , donc

$$P_{V^*} A_{X_{V^*}} = 0 ,$$

et par conséquent :

$$v(\tilde{\theta}/X_{V^*}) = \sigma^2 S_{X_{V^*}}^{-1} . \quad (6)$$

Soit alors u la variable aléatoire définie par :

$$u = {}^t \tilde{\theta} v(\tilde{\theta}/X_{V^*})^{-1} \tilde{\theta} .$$

D'après (5) et (6), on a, pour u :

$$u = \frac{1}{\sigma^2} {}^t X_{F_{V^*}} \Lambda_0^{-1} A_{X_{V^*}} S_{X_{V^*}}^{-1} {}^t A_{X_{V^*}} \Lambda_0^{-1} X_{F_{V^*}} .$$

Le sous-espace vectoriel $F_{V^*}^{X_{V^*}}$ étant engendré par les projections sur V_{*}^{\perp} des $f_i^{X_{V^*}}$ selon Λ_0^{-1} et d'après la définition de $A_{X_{V^*}}$, on a finalement :

$$u = \frac{1}{\sigma^2} \|X_{F_{V^*}}\|^2 ,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme sur Ω définie par Λ_0^{-1} . On remarquera que le test généralisé de Tukey défini en [6] s'écrit :

$$\frac{\sigma^2 u}{(\|X_{V_{*}^{\perp}}\|^2 - \sigma^2 u)} \leq K \Rightarrow \{\theta=0\} .$$

§3. Estimation et test dans le cas où le rapport $C = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$ est supposé connu pour le problème de glaciologie défini au §1.

L'étude du cas où $C = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$ est une constante, connue pour la structure (1) du §1, a été faite dans [7]. On rappelle ici le test proposé en [7] pour l'hypothèse $\{\lambda=0\}$ et on calcule l'estimateur $\tilde{\lambda}$ de λ d'après la méthode précédente.

On remarquera que la structure statistique (1) est une structure de Tukey avec $s = 1$, $m = A\theta$, $\Lambda_0 = \Lambda_1 + C\Lambda_2$ et $f_1^m = F_\theta$. Par hypothèse, la projection de F_θ sur W^\perp où W est le sous-espace vectoriel image de l'hyperplan \mathbb{H} par l'application linéaire A est non nulle. En notant $\hat{\theta}$ l'estimateur de θ proposé en [6], on a :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\langle (F_{\hat{\theta}})_{W^\perp}, x_{W^\perp} \rangle}{\| (F_{\hat{\theta}})_{W^\perp} \|^2} \quad \text{où } x_W = A\hat{\theta} ,$$

et le test de l'hypothèse $\{\lambda=0\}$ défini en [6] est :

$$\frac{(\tilde{\lambda})^2}{\|x_{W^\perp}\|^2 \| (F_{\hat{\theta}})_{W^\perp} \|^2 - \tilde{\lambda}^2} \leq K_\alpha \Rightarrow \{\lambda=0\} ,$$

où K_α est la constante déterminée par :

$$\int_{K_\alpha}^{+\infty} d\beta \left(\frac{1}{2}, \frac{N-J-T-1}{2} \right) = \alpha ,$$

le test ainsi défini étant de seuil α .

Les formules données ci-dessus se prêtent sans difficulté au calcul numérique. Les données numériques du problème défini dans l'introduction sont rappelées dans le chapitre V. Dans les chapitres qui suivent, on s'est intéressé au cas où le rapport C n'est plus supposé connu.

CHAPITRE IV

UNE ADAPTATION DU TEST DE BARTLETT-SCHEFFE A UN PROBLEME STATISTIQUE PARTICULIER

On présente ici une adaptation du test de Bartlett-Scheffé pour le problème de Behrens-Fischer défini dans [26], en nous plaçant dans un cadre plus général de structures statistiques.

§1. La structure statistique.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux espaces vectoriels réels de dimensions respectives n_1 et n_2 ; on désigne respectivement par \mathbb{I}_{Ω_1} et \mathbb{I}_{Ω_2} les formes quadratiques unité sur les duals Ω_1^* et Ω_2^* de Ω_1 et Ω_2 . Soient V_1 et V_2 des sous-espaces vectoriels stricts et non nuls de Ω_1 et Ω_2 de dimensions respectives p_1 et p_2 . Enfin, on note :

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \mathbb{I}_{\Omega_2} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ ,$$

la forme quadratique définie sur $\Omega_1^* \times \Omega_2^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \Omega_1^* \times \Omega_2^* : (x, y) \xrightarrow{Q} Q(x, y) = \sigma_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_1}(x) + \sigma_2^2 \mathbb{I}_{\Omega_2}(y) .$$

Avec ces notations, on définit la structure statistique suivante, que l'on notera par la suite Σ :

$$\Sigma = \{ \Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{B}_{\Omega_1 \times \Omega_2}, N(m, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \mathbb{I}_{\Omega_2} \end{pmatrix}); m \in V_1 \times V_2; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \} .$$

On remarquera que la structure statistique Σ ainsi définie est une structure statistique produit. Soit alors W un sous-espace vectoriel donné de $\Omega_1 \times \Omega_2$, de dimension un et contenu strictement dans $V_1 \times V_2$. Le problème statistique que l'on se pose est le test de l'hypothèse linéaire W pour la structure Σ .

On a remarqué que la structure statistique Σ est une structure produit. Plus précisément, en posant :

$$\Sigma_1 = \{ \Omega_1, \mathcal{B}_{\Omega_1}, N(m_1, \sigma_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_1}); m_1 \in V_1, \sigma_1 \in \mathbb{R}^+ \},$$

et :

$$\Sigma_2 = \{ \Omega_2, \mathcal{B}_{\Omega_2}, N(m_2, \sigma_2^2 \mathbb{I}_{\Omega_2}); m_2 \in V_2, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \},$$

on a :

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2.$$

Dans le cas où le sous-espace vectoriel W de $V_1 \times V_2$ est de la forme particulière $\{0\} \times W_2$ ou $W_1 \times \{0\}$ le test de l'hypothèse linéaire W dans Σ est équivalent aux tests des hypothèses linéaires W_i ($i=1,2$) dans les structures Σ_i ($i=1,2$) respectives tels qu'ils sont définis dans [5] (cf. IX. déf.1., p.131.)

Remarque 1.

Le problème du test de l'hypothèse linéaire W sur la structure Σ est une extension du problème de Behrens-Fischer, tel qu'il est par exemple défini dans [15]. En effet, la structure statistique sur laquelle on définit le problème de Behrens-Fischer, avec des notations analogues aux précédentes, est :

$$\Phi = \left\{ \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}}, N \left(m, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \mathbb{I}_{n_2} \end{pmatrix} \right); m \in D_1 \times D_2; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

et l'hypothèse linéaire à tester sur Φ est D , où D, D_1, D_2 sont les diagonales respectives de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, \mathbb{R}^{n_1} et \mathbb{R}^{n_2} . On entend par diagonale de \mathbb{R}^n , le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n formé des vecteurs à composantes toutes égales dans la base canonique $\#$.

On munit Ω_1 du produit scalaire défini par \mathbb{I}_{Ω_1} et Ω_2 du produit scalaire défini par \mathbb{I}_{Ω_2} . En faisant choix d'une base orthonormée de Ω_1 et d'une base orthonormée de Ω_2 , ces espaces sont identifiés à \mathbb{R}^{n_1} et \mathbb{R}^{n_2} munis de leurs bases canoniques et l'espace produit $\Omega_1 \times \Omega_2$ est identifié à $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Les formes quadratiques \mathbb{I}_{Ω_1} et \mathbb{I}_{Ω_2} sont alors représentées par les matrices-unités \mathbb{I}_{n_1} et \mathbb{I}_{n_2} et le sous-espace vectoriel $V_1 \times V_2$ peut être considéré comme image d'une application linéaire f définie sur \mathbb{R}^P avec $p = p_1 + p_2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, telle que f soit représentée par la matrice :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} & \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right. \end{matrix}$$

où A est une matrice réelle d'ordre (n_1, p_1) et de rang égal à p_1 , B une matrice réelle d'ordre (n_2, p_2) et de rang égal à p_2 . Avec ces notations, la structure statistique Σ a pour représentation analytique :

$$\Sigma = \left\{ \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{R}^{n_1+n_2}, N \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \theta; \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \mathbb{I}_{n_2} \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R}^P; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \right) \right\}. \quad (1)$$

Le sous-espace vectoriel W s'écrit alors analytiquement :

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \theta; K\theta = 0; \theta \in \mathbb{R}^P \right\},$$

où K est une matrice réelle donnée d'ordre (m, p) . On pourra choisir K de rang égal à m , avec m égal à $p-1$. En effet, on sait que :

$$\dim W = \text{rang} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ K \end{bmatrix} - \text{rang } K.$$

Comme $\text{rang} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right)$ est égal à p et que $\dim W$ est 1, K est une matrice de rang $p-1$.

Remarque 2.

La forme analytique de la structure statistique Φ définie dans la remarque 1 est :

$$\Phi = \left\{ \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}, N \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right] ; \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \mathbb{I}_{n_2} \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R}^2 ; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \right\} ,$$

où A est le vecteur colonne de \mathbb{R}^{n_1} à composantes toutes égales à 1 et où B le vecteur colonne de \mathbb{R}^{n_2} à composantes toutes égales à 1 . Le sous-espace vectoriel D s'écrit :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \theta ; K\theta = 0 ; \theta \in \mathbb{R}^2 \right\} ,$$

où K est le vecteur ligne de \mathbb{R}^2 , défini par $K = (1-1)$. #

Dans la suite, pour la commodité des calculs, on considère la structure statistique Σ sous sa forme analytique. On s'intéressera au test de l'hypothèse linéaire W et on distinguera les deux cas : le cas où $n_1 = n_2 = n$ et le cas $n_1 \neq n_2$.

§2. Un lemme.

Rappel 1. (cf. [4] -II-p.A-2).

"Soient E, F et G trois espaces vectoriels réels de dimensions finies. Soient u et v deux applications linéaires de E dans F et de E dans G respectivement, telles que le noyau de v contienne le noyau de u . Il existe alors une application linéaire w de F dans G telle que $v = w \circ u$ et w est déterminée de manière unique sur l'image $u(E)$ de u ."

Si q_1, q_2, q_3 sont les dimensions respectives de E, F et G , les applications linéaires u, v et w peuvent être représentées par des matrices $A[q_2, q_1]$, $B[q_3, q_1]$ et $C[q_3, q_2]$ et on a :

$$B = CA .$$

Quand le rang de A est égal à q_2 , il existe un moyen simple pour calculer C . En effet, soit \tilde{A} la matrice carrée d'ordre q_1 obtenue en complétant A par $(q_1 - q_2)$ vecteurs lignes de \mathbb{R}^{q_1} linéairement indépendants et indépendants des lignes de A . Alors C est égale à la matrice d'ordre (q_3, q_2) formée des q_2 premières colonnes de $B(\tilde{A})^{-1}$ et dans ce cas le rang de C est égal au rang de B .

Définition 2.1.

"Une matrice rectangulaire réelle U d'ordre (r, s) , avec $r < s$ est dite unitaire si et seulement si :

$$U^t U = \mathbb{I}_r,$$

où \mathbb{I}_r est la matrice identité d'ordre r ".

Lemme 2.1.

"Soient deux matrices $A[n, q]$ et $B[m, q]$, $n \leq m$ et K une matrice réelle d'ordre $(q-1, q)$ et de rang $q-1$. Soit W le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{n+m} défini par :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \theta; \theta \in \mathbb{R}^q \text{ tels que } K\theta = 0 \right\}.$$

On suppose qu'il existe θ_0 tel que :

$$K\theta_0 = 0, \quad A\theta_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad B\theta_0 \neq 0.$$

Alors, il existe un réel strictement positif α , une matrice orthogonale C_1 d'ordre n , une matrice unitaire C_2 d'ordre (n, m) et une matrice réelle D d'ordre $(n, q-1)$ tels que :

$$C_1 A - \alpha C_2 B = DK \quad ".$$

Démonstration :

D'après les hypothèses, la dimension de W est égale à 1 et quel que soit θ tel que $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \theta$ appartienne à W , on a $\theta = \lambda \theta_0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'autre part, on sait qu'il existe une matrice orthogonale C_1 d'ordre n telle que :

$$C_1 A \theta_o = \begin{pmatrix} \|A\theta_o\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

où $\|A\theta_o\|^2 = {}^t\theta_o {}^tAA\theta_o$ et qu'il existe une matrice unitaire C_2 d'ordre (n,m) telle que :

$$C_2 B \theta_o = \begin{pmatrix} \|B\theta_o\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

D'après nos hypothèses $\|B\theta_o\|$ est strictement positif. Soit alors $\alpha = \frac{\|A\theta_o\|}{\|B\theta_o\|}$. Par construction, on a alors, pour tout θ tel que $K\theta$ soit nul :

$$(C_1 A - \alpha C_2 B) \theta = 0 .$$

Donc, le noyau de $C_1 A - \alpha C_2 B$ est contenu dans le noyau de K et d'après le rappel 1, on déduit qu'il existe une matrice $D[n,q-1]$ telle que :

$$C_1 A - \alpha C_2 B = DK ,$$

d'où la conclusion du lemme.

Remarque.

On peut donner une interprétation géométrique de ce lemme. Notons V_1 le sous-espace vectoriel image de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^n par l'application linéaire A et V_2 le sous-espace vectoriel image de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^m par B . Soit alors H le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les vecteurs lignes de ${}^tC_1 C_2$, de dimension n . D'après le lemme, pour tout vecteur de \mathbb{R}^q appartenant au noyau de K , la projection de $B\theta$ sur H est égale à $A\theta$.

§3. Test de l'hypothèse $\{K\theta=0\}$ dans le cas $n_1=n_2=n$.

On se propose de tester l'hypothèse $\{K\theta=0\}$ dans la structure statistique Σ du §1, donnée sous sa forme analytique. On maintient les notations du §1 et on suppose que Ω_1 et Ω_2 sont de même dimension, disons n . L'hypothèse linéaire W à tester est :

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \theta ; K\theta=0, \theta \in \mathbb{R}^P \right\} \text{ et } \dim W = 1 .$$

Dans le cas où, pour tout θ tel que $K\theta=0$, on a :

$$[A \ 0] \theta = 0 ,$$

alors, le sous-espace vectoriel W est de la forme $\{0\} \times W_2$; il suffit alors de tester séparément les hypothèses $\{m_1=0\}$ et $m_2 \in W_2$ dans les structures statistiques Σ_1 et Σ_2 respectivement, définies au §1. On supposera donc que le sous-espace vectoriel W n'est pas isomorphe à un sous-espace vectoriel de V_1 ou de V_2 . Par conséquent, il existe un vecteur θ de \mathbb{R}^P tel que :

$$K\theta = 0 , [A \ 0] \theta \neq 0 \text{ et } [0 \ B] \theta \neq 0 .$$

D'après le lemme 2.1., il existe donc une matrice orthogonale C d'ordre n , un réel strictement positif α et une matrice D d'ordre $(n, p-1)$ tels que :

$$(A \ 0) - \alpha C [0 \ B] = DK . \tag{1}$$

Soit T la statistique de $(\mathbb{R}^{2n}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{2n}})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (x, y) \xrightarrow{T} x - \alpha Cy .$$

On considère dans la suite la structure Σ_T définie par :

$$\Sigma \xrightarrow{T} \Sigma_T ,$$

c'est-à-dire la structure induite par T . D'après (1), on a :

$$\Sigma_T = \left\{ \mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}, N(DK\theta; (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \mathbb{I}_n; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+; \theta \in \mathbb{R}^P) \right\} ,$$

d'où :

Proposition. 3.1.

"Pour la structure statistique :

$$\Sigma_T = \left\{ \mathbb{R}^n, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}, N(DK\theta; \sigma^2 \mathbf{I}_n); \theta \in \mathbb{R}^P, \sigma \in \mathbb{R}^+ \right\} ,$$

le test dont la région critique est définie par :

$$(\bar{z})^2 \geq C_\gamma \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 ,$$

où \bar{z} est la moyenne empirique des z_i ($i=1, \dots, n$) et C_γ est la constante déterminée par :

$$\int_{C_\gamma}^{+\infty} d\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) = \gamma ,$$

est un test libre, de niveau de signification γ , comme test de l'hypothèse $K\theta = 0$ contre $K\theta \neq 0$ ".

Remarque 1.

On considère la structure statistique \mathfrak{F} du problème de Behrens-Fischer définie dans la remarque 2 du §1. Avec nos notations, quand $n=n_1=n_2$, la statistique T définie sur $(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{2n}})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n})$ est :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (x, y) \xrightarrow{T} (x-y) ,$$

et le test de la proposition 3.1. n'est autre que le test de Bartlett-Scheffé tel qu'il est défini dans [5] (cf. p.121) .

Remarque 2.

Dans le cas où le rang de la matrice D est égal à 1, on sait qu'il existe une matrice orthogonale R d'ordre n telle que, quel que soit θ appartenant à \mathbb{R}^P , on a :

$$R DK\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \langle a, \theta \rangle ,$$

où a est un vecteur connu de \mathbb{R}^P , et où \langle , \rangle désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^P . Le test de la proposition 3.1. défini sur la structure statistique Σ_{RT} induite de Σ_T par la statistique R a une fonction puissance parfaitement connue et calculable à l'aide de la loi :

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)\langle a, \theta \rangle}{2\sigma^2}\right).$$

Dans le cas où le rang $(DK) = s$ et s est supérieur à 1, il est possible de calculer la fonction puissance du test sur une partie de la contre-hypothèse. Notons d_i ($i=1, \dots, n$) les vecteurs lignes de la matrice DK et soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^P engendré par les vecteurs :

$$(d_1 - d_2), (d_2 - d_3), \dots, (d_{n-1} - d_n).$$

La matrice DK étant de rang s , la dimension de E est au plus égale à $s-1$ et :

$$s-1 < s \leq p-1 \quad \text{car} \quad \text{rang}(DK) = \text{rang}(D) \leq p-1.$$

Le sous-espace vectoriel orthogonal à E dans \mathbb{R}^P est donc non réduit à l'origine. Soit Θ'_1 ce sous-espace. D'après ce qui précède, on a :

$$\dim \Theta'_1 = p - \dim W \geq p - s + 1.$$

D'autre part, le noyau de DK est contenu dans Θ'_1 . Il l'est strictement car :

$$\dim \Theta'_1 = p - s + 1 > p - s = \dim(\ker(DK)).$$

On pose alors $\Theta_1 = \Theta'_1 - \ker DK$. Il vient alors pour tout $\theta \in \Theta_1$:

$$DK\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \langle b, \theta \rangle,$$

où b est un vecteur de \mathbb{R}^P parfaitement déterminé et donc comme précédemment la fonction puissance du test est calculable sur Θ_1 à l'aide d'une loi bêta décentrée.

§4. Test de l'hypothèse $\{K\theta=0\}$ quand $n_1 \neq n_2$.

On supposera, sans perdre de généralité, que n_1 est strictement inférieur à n_2 . D'après les hypothèses, il existe une matrice unitaire U d'ordre (n_1, n_2) , un réel positif α et une matrice D d'ordre $(n_1, p-1)$ tels que :

$$[A \ 0] - \alpha U[0 \ B] = DK .$$

Si on désigne par Z la statistique définie sur $(\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}})$ dans $(\mathbb{R}^{n_1}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_1}})$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : (x, y) \xrightarrow{Z} x - \alpha Uy ,$$

la structure statistique Σ_Z induite par Z est encore :

$$\Sigma_Z = \left\{ \mathbb{R}^{n_1}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_1}}, N(DK\theta; \sigma^2 \mathbb{I}_{n_1}) ; \theta \in \mathbb{R}^p, \sigma \in \mathbb{R}^+ \right\} ,$$

et on a :

Proposition 4.1.

"Pour la structure statistique :

$$\Sigma_Z = \left\{ \mathbb{R}^{n_1}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_1}}, N(DK\theta; \sigma^2 \mathbb{I}_{n_1}) ; \theta \in \mathbb{R}^p, \sigma \in \mathbb{R}^+ \right\} ,$$

le test dont la région critique est définie par :

$$(\bar{u})^2 \geq C_Y \sum_{i=1}^{n_1} (u_i - \bar{u})^2 ,$$

où \bar{u} est la moyenne empirique des u_i ($i=1, \dots, n_1$) et C_Y la constante déterminée par :

$$\int_{C_Y}^{+\infty} d\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n_1-1}{2}\right) = \gamma ,$$

est un test libre de niveau γ comme test de l'hypothèse $K\theta = 0$ contre $K\theta \neq 0$."

Remarque.

Revenons à la structure statistique ϕ du problème de Behrens-Fischer. suppose maintenant que $n_1 < n_2$. Les hypothèses du lemme 2.1. sont satisfaites et on trouve :

$$\alpha = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} \quad \text{et} \quad C = \left[\begin{array}{cccccccc} \delta & \beta & \beta & \dots & \beta & \gamma & \gamma & \dots & \gamma \\ \beta & \delta & \beta & \dots & \beta & \gamma & \gamma & \dots & \gamma \\ \beta & \beta & \delta & \beta & \dots & \beta & \gamma & \gamma & \dots & \gamma \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & \\ \beta & \dots & \dots & \beta & \delta & \gamma & \gamma & \dots & \gamma \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{n_1} & & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{n_2 - n_1} & & & & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \delta \\ \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \end{array}} \right\} n_1$$

où $\delta = 1 - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}$, $\beta = -\frac{1}{n_1} + \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}$ et $\gamma = +\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}$.

Le test de la proposition 4.1. n'est autre que le test de Bartlett-Scheffé pour le problème de Behrens-Fischer défini dans [26].

Enfin, on remarquera que les propriétés de la fonction puissance du test de la proposition 3.1. sont aussi valables pour le test de la proposition 4.1.

CHAPITRE V

UNE APPLICATION NUMERIQUE DU CHAPITRE IV

On se propose dans ce chapitre d'illustrer les méthodes du chapitre IV par une application numérique à partir des données du problème de glaciologie défini dans le chapitre III. On étudie le cas où le rapport σ_1/σ_2 est supposé inconnu, mais on se restreint à une partie seulement des observations.

§1. La structure statistique.

On maintient les notations adoptées dans le chapitre III pour le problème de glaciologie. Pour les données numériques (cf. tableau I), l'ensemble Ξ est formé des trois entiers 1, 2 et 4 et les parties E_1 , E_2 et E_4 du plan d'expérience E sont de cardinal respectif :

$$N_1 = 166 \quad , \quad N_2 = 8 \quad , \quad N_4 = 1 \quad .$$

Pour l'application proposée, on s'est restreint à une partie des observations de E_1 et de E_2 uniquement. Plus précisément, on désigne par \bar{E}_1 le sous-ensemble de E_1 formé des points (j,t) de E_1 tels que si (j,t_1) et (j,t_2) appartiennent à \bar{E}_1 , alors : $|t_1 - t_2| > 1$.

D'après les hypothèses du chapitre III, les observations $X_{j,t}$ dont l'indice parcourt \bar{E}_1 , sont donc des variables gaussiennes, indépendantes et de variance égale à $\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2$.

De la même manière, on désigne par \bar{E}_2 , le sous-ensemble de E_2 , formé des éléments (j,t) de E_2 tels que si (j,t_1) et (j,t_2) appartiennent

à \bar{E}_2 , alors : $|t_1 - t_2| > 2$. Ici aussi, les variables $X_{j,t}$ indicées par les éléments de \bar{E}_2 sont gaussiennes, indépendantes et de variance égale à $2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2$. Soit alors E'_1 le sous-ensemble de \bar{E}_1 tel que si (j,t) appartient à E'_1 et (j,t') appartient à \bar{E}_2 , alors $|t-t'| > 2$. On pose :

$$E' = E'_1 \cup \bar{E}_2, \quad n_1 = \text{card} E'_1, \quad n_2 = \text{card} \bar{E}_2,$$

et on indice de 1 à n_1 les observations $X_{j,t}$ dont l'indice appartient à E'_1 , puis de n_1+1 à n_1+n_2 les observations $X_{j,t}$ dont l'indice (j,t) appartient à \bar{E}_2 . Avec ces notations, la structure statistique du problème est

$$\left\{ \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}, N \left(A\theta + \lambda F\zeta; \begin{pmatrix} (\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) \mathbf{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & (2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) \mathbf{I}_{n_2} \end{pmatrix} \right); \theta \in H, \lambda \in \mathbb{R}; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (1)$$

§2. Test de l'hypothèse $\{\lambda=0\}$ dans le cas où le rapport σ_1^2/σ_2^2 est inconnu

Pour le test de l'hypothèse $\{\lambda=0\}$ on se propose d'appliquer un principe analogue à celui du chapitre IV pour le test de Bartlett-Scheffé, sur une structure statistique qui est un cas particulier de la structure statistique (1) définie ci-dessus. Plus précisément, désignons par A_1 et A_2 respectivement, les matrices des n_1 premières lignes de A et des n_2 dernières et soit ζ_0 un vecteur de H tel que $A_1 \zeta_0$ et $A_2 \zeta_0$ soient non nuls. On pose H_0 le sous-espace vectoriel de H engendré par le vecteur ζ_0 . D'après le lemme 2.1. du chapitre IV, il existe une matrice orthogonale C d'ordre (n_2, n_1) et une constante positive α tels que :

$$\forall \zeta \in H_0, \quad A_2 \zeta - \alpha C A_1 \zeta = 0.$$

Par suite :

"Pour la structure statistique :

$$= \left\{ \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}, N \left(A\theta + \lambda F\zeta; \begin{pmatrix} (\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) \mathbf{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & (2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) \mathbf{I}_{n_2} \end{pmatrix} \right); \theta \in H_0; \lambda \in \mathbb{R}; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

le test dont la région critique est définie par :

$$(\bar{z})^2 \geq C_Y \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 ,$$

où $z = Y - \alpha CX$, X et Y étant respectivement les vecteurs des n_1 première composantes et des n_2 dernières composantes d'un élément aléatoire de ψ et où C_Y est la constante déterminée par :

$$\int_{C_Y}^{+\infty} d\beta \left(\frac{1}{2}, \frac{n_2 - 1}{2} \right) = \gamma ,$$

est un test libre, de seuil γ , comme test de l'hypothèse $\{\lambda=0\}$ contre l'hypothèse $\{\lambda \neq 0\}$ " .

Effectivement, avec les notations précédentes, le vecteur aléatoire z suit la loi $N(\lambda G(\theta); \sigma^2 \mathbf{I}_{n_2})$ où θ appartient à H_0 , σ est un réel strictement positif et où $G(\theta)$ est une fonction numérique déduite de F_θ .

Pour l'application numérique qui suit, on a calculé le test ci-dessus défini pour un sous-espace vectoriel H_0 particulier, en choisissant comme vecteur θ_0 le vecteur égal à l'estimateur $\tilde{\theta}$ de θ des moindres carrés dans la structure statistique (1) .

§3. Les calculs.

Pour les calculs numériques, les valeurs de n_1 et de n_2 étaient respectivement 88 et 8 , les valeurs correspondantes des observations $X_{j,t}$ étant données dans le tableau II . On a construit un programme numérique permettant d'une part l'estimation de θ et d'autre part le calcul du test ci-dessus défini.

Le programme.

Ce programme, écrit en langage Algol W et intitulé SCHEFFE a les possibilités suivantes : il permet, pour tout ensemble de données :

$$(N_1, N_2, N, X, A_1, A_2, ALPHA) ,$$

où N_1, N_2 et N sont des entiers, X est un vecteur de $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ et A_1, A_2 sont des matrices réelles d'ordre respectif $[N_1, N]$ et $[N_2, N]$, $ALPHA$ un réel positif donné :

- (i) L'estimation des moindres carrés de θ dans la structure statistique (1).
- (ii) Le calcul de la statistique du test défini dans le §2.
- (iii) L'acceptation ou le rejet de l'hypothèse nulle $\{\lambda=0\}$ pour un seuil α donné.

On a adapté ce programme au problème de glaciologie. La matrice A intervenant dans la moyenne est déduite du plan d'expérience et est formée par les vecteurs f_j et g_t définis au chapitre III. On a établi une procédure de calcul de la matrice A d'après le calcul de f_j et g_t . Dans le programme, on n'a pas déclaré la matrice A , et pour chaque calcul faisant intervenir A , on a fait appel à la procédure associée (cf. programme).

Pour l'estimation de θ , on a utilisé la proposition 3 de [8] (cf. p.1 d'après laquelle, avec les notations du chapitre III :

$\hat{\theta} = G^t A X$, où G est la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice inverse de la matrice $\Sigma = \begin{pmatrix} S^t & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ avec $S = {}^t A A$, est l'estimateur des moindres carrés de θ , et qui est sans biais sous l'hypothèse $\{\lambda=0\}$. On a résolu le système linéaire :

$$\Sigma \hat{\theta} = \begin{pmatrix} {}^t A X \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

par la méthode de Gauss.

Pour le calcul des matrices C_1 et C_2 du lemme 2.1.-IV., on a construit une procédure COMPLET qui calcule des vecteurs orthogonaux et ortho-normés à un vecteur donné. Les méthodes de calculs du test et de l'estimation ont été séparées dans le programme, afin de pouvoir changer de vecteur θ_0

et de constater ainsi la sensibilité du test au choix du vecteur θ_0 . La statistique du test est enfin comparée à la constante $C_\alpha = F_{1, N2-1}(\alpha)$ où $F_{1, N2-1}$ désigne la loi de Fischer-Snedécor et qui est tabulée.

Comme on l'a remarqué au début de ce chapitre, pour cette application numérique, on s'est restreint à 96 observations du plan d'expérience. La solution qui consisterait à se restreindre aux 166 observations de E_1 et appliquer le test de Tukey est donc préférable.

Néanmoins, on a pu remarquer que les estimateurs de θ calculés sur la partie E'_1 du plan d'expérience se trouvent à l'intérieur de l'ellipsoïde de confiance de θ définie et calculée dans [16] (cf.p.385). On trouvera les différents estimateurs de θ dans le tableau III. Comme dans [16], le test de l'hypothèse $\{\lambda=0\}$ contre $\{\lambda \neq 0\}$ est positif à un seuil α égal à 5%.

TABLEAU I

Les données

	t=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1						2,89									
2						2,64	2,20								
3									1,37	0,93	2,40	1,15	1,57		
4				2,90	1,99	2,51	2,16	3,56							
5											1,35	0,25	0,70	0,92	2,28
6						2,05	1,16	2,61	0,90	0,45	1,61	0,79	1,05	1,25	2,77
7											2,08	0,82	1,23	4,13	
8				2,38	1,75	2,43									
9									1,30	0,65	2,17	1,03	1,15	1,75	
10											2,00	0,80	1,20	1,82	2,94
11				2,75	2,31		2,01	3,92	1,63	1,15	2,70	1,38	1,77	5,25	
12	2,01	1,04	2,35	1,53	1,21	1,73	0,92			0,30	1,65	0,25	0,75	1,21	2,49
13									0,64	0,16	1,90	0,45	0,87		
14				1,61	3,64		1,13								
15									0,87	2,58		0,40	0,88	1,12	2,55
16											1,90	0,60	0,85	1,35	2,03
17							1,25								
18						1,69	0,29	2,64	0,49	0,35	1,50	0,00	0,36	0,83	1,89
19	1,74	1,23	2,52	1,78	1,85	2,24	0,86		0,85	0,45	2,00	0,65	0,73	3,49	
20											1,55	0,30	0,57	1,25	2,62
21											1,90	0,30	0,67	1,14	2,04
22				2,09	1,93	2,58	1,24	3,21	0,75	0,85	2,06	0,44	0,85	1,53	2,42
23											1,50	0,15	0,42	1,07	2,09
24											1,20	0,10	0,40	1,58	1,32
25											1,35	0,05	0,23	0,70	1,91
26											1,60	-0,05	0,33	0,77	1,81
27	0,65	0,65	1,97												
28						1,36	0,35	2,47	0,62	0,18					
29	0,95	0,53	2,16	0,81											
30				1,05	1,00		-0,05								
31						0,71	1,54					0,85	0,28		
32						0,83	1,47								

Les chiffres encadrés par un carré correspondent aux observations de E_2 .
 Les chiffres entourés d'un rond correspondent aux observations de E_4 .

TABLEAU II

Pour les calculs, on a numéroté les éléments de E' de 1 à 96 et le vecteur des observations a été identifié à un vecteur de R^{96} de la manière suivante :

E'	X	E'	X	E'	X	E'	X
(1, 6)	$X_1 = 2,89$	(12, 1)	$X_{30} = 2,01$	(20, 15)	$X_{59} = 2,62$	(31, 13)	$X_{88} = 0,28$
(2, 7)	$X_2 = 2,20$	(12, 3)	$X_{31} = 2,35$	(21, 11)	$X_{60} = 1,90$	(7, 14)	$X_{89} = 4,13$
(3, 9)	$X_3 = 1,37$	(12, 5)	$X_{32} = 1,21$	(21, 13)	$X_{61} = 0,67$	(11, 14)	$X_{90} = 5,25$
(3, 11)	$X_4 = 2,40$	(12, 7)	$X_{33} = 0,92$	(21, 15)	$X_{62} = 2,04$	(14, 5)	$X_{91} = 3,64$
(3, 13)	$X_5 = 1,57$	(12, 10)	$X_{34} = 0,30$	(22, 4)	$X_{63} = 2,09$	(15, 10)	$X_{92} = 2,58$
(4, 4)	$X_6 = 2,90$	(12, 12)	$X_{35} = 0,25$	(22, 6)	$X_{64} = 2,58$	(19, 14)	$X_{93} = 3,49$
(4, 6)	$X_7 = 2,51$	(12, 14)	$X_{36} = 1,21$	(22, 8)	$X_{65} = 3,21$	(30, 5)	$X_{94} = 1,00$
(4, 8)	$X_8 = 3,56$	(13, 9)	$X_{37} = 0,64$	(22, 10)	$X_{66} = 0,85$	(31, 7)	$X_{95} = 1,54$
(5, 11)	$X_9 = 1,35$	(13, 11)	$X_{38} = 1,90$	(22, 12)	$X_{67} = 0,44$	(32, 7)	$X_{96} = 1,47$
(5, 13)	$X_{10} = 0,70$	(13, 13)	$X_{39} = 0,87$	(22, 14)	$X_{68} = 1,53$		
(5, 15)	$X_{11} = 2,28$	(15, 13)	$X_{40} = 0,88$	(23, 11)	$X_{69} = 1,50$		
(6, 6)	$X_{12} = 2,05$	(15, 15)	$X_{41} = 2,55$	(23, 13)	$X_{70} = 0,42$		
(6, 8)	$X_{13} = 2,61$	(16, 11)	$X_{42} = 1,90$	(23, 15)	$X_{71} = 2,05$		
(6, 10)	$X_{14} = 0,45$	(16, 13)	$X_{43} = 0,85$	(24, 11)	$X_{72} = 1,20$		
(6, 12)	$X_{15} = 0,79$	(16, 15)	$X_{44} = 2,03$	(24, 13)	$X_{73} = 0,40$		
(6, 14)	$X_{16} = 1,25$	(17, 7)	$X_{45} = 1,25$	(24, 15)	$X_{74} = 1,32$		
(7, 12)	$X_{17} = 0,82$	(18, 6)	$X_{46} = 1,69$	(25, 11)	$X_{75} = 1,35$		
(8, 4)	$X_{18} = 2,38$	(18, 8)	$X_{47} = 2,64$	(25, 13)	$X_{76} = 0,23$		
(8, 6)	$X_{19} = 2,43$	(18, 10)	$X_{48} = 0,35$	(25, 15)	$X_{77} = 1,97$		
(9, 9)	$X_{20} = 1,30$	(18, 12)	$X_{49} = 0,00$	(26, 11)	$X_{78} = 1,60$		
(9, 11)	$X_{21} = 2,17$	(18, 14)	$X_{50} = 0,83$	(26, 13)	$X_{79} = 0,33$		
(9, 13)	$X_{22} = 1,15$	(19, 1)	$X_{51} = 1,74$	(26, 15)	$X_{80} = 1,87$		
(10, 11)	$X_{23} = 2,00$	(19, 3)	$X_{52} = 2,52$	(27, 1)	$X_{81} = 0,65$		
(10, 13)	$X_{24} = 1,20$	(19, 5)	$X_{53} = 1,85$	(27, 3)	$X_{82} = 1,97$		
(10, 15)	$X_{25} = 2,94$	(19, 7)	$X_{54} = 0,86$	(28, 6)	$X_{83} = 1,36$		
(11, 5)	$X_{26} = 2,31$	(19, 9)	$X_{55} = 0,85$	(28, 8)	$X_{84} = 2,47$		
(11, 8)	$X_{27} = 3,92$	(19, 11)	$X_{56} = 2,00$	(28, 10)	$X_{85} = 0,18$		
(11, 10)	$X_{28} = 1,15$	(20, 11)	$X_{57} = 1,55$	(29, 2)	$X_{86} = 0,53$		
(11, 12)	$X_{29} = 1,38$	(20, 13)	$X_{58} = 0,57$	(29, 4)	$X_{87} = 0,81$		

TABLEAU III

Estimations de θ

On désigne respectivement par :

- θ_1 l'estimateur des moindres carrés de θ dans le plan E .
- θ_2 l'estimateur des moindres carrés de θ dans le plan E' .
- θ_3 l'estimateur de θ dans E quand le rapport $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 0$.
- θ_4 l'estimateur de θ dans E quand $c = 1$.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
1	2,491	2,538	2,511	2,494
2	2,458	2,635	2,504	2,482
3	2,115	2,124	2,164	2,135
4	2,320	2,325	2,361	2,319
5	1,327	1,345	1,291	1,302
6	1,634	1,684	1,620	1,608
7	1,466	1,564	1,773	1,790
8	1,941	2,053	1,993	1,943
9	1,932	1,884	1,958	1,927
10	1,979	1,958	1,900	1,922
11	2,183	2,261	2,411	2,398
12	1,387	1,471	1,391	1,390
13	1,435	1,481	1,446	1,443
14	1,075	1,600	1,607	1,577
15	1,428	1,278	1,557	1,588
16	1,573	1,505	1,505	1,509
17	1,725	1,885	1,796	1,769
18	1,174	1,356	1,135	1,136
19	1,421	1,485	1,513	1,508
20	1,485	1,492	1,536	1,472
21	1,437	1,448	1,403	1,391

TABLEAU III (suite)

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
22	1,776	1,836	1,759	1,750
23	1,265	1,235	1,185	1,195
24	1,147	0,985	1,001	1,047
25	1,087	1,095	1,040	1,038
26	1,131	1,148	1,045	1,043
27	0,633	0,506	0,710	0,765
28	1,109	1,154	1,133	1,118
29	0,663	0,658	0,756	0,807
30	0,310	0,359	0,491	0,437
31	0,533	0,431	0,685	0,682
32	0,327	0,401	0,396	0,379
33	0,310	0,396	0,235	0,207
34	-0,264	-0,139	-0,240	-0,268
35	1,223	1,209	1,147	1,075
36	0,324	0,351	-0,286	0,296
37	-0,087	-0,033	-0,084	-0,006
38	0,398	0,351	0,379	0,396
39	-0,575	-0,535	-0,546	-0,519
40	1,259	1,290	1,280	1,278
41	-0,661	-0,654	-0,716	-0,685
42	-1,089	-1,095	-1,082	-1,069
43	0,279	0,265	0,299	0,291
44	-1,01	-0,974	-1,028	-1,033
45	-0,668	-0,645	-0,686	-0,686
46	-0,282	-0,243	-0,212	-0,231
47	0,852	0,842	-0,838	0,824

LE PROGRAMME

```
BEGIN
  INTEGER N, M, N1, N2 ; LOGICAL IMPOSS ; REAL ZBAR, R, CO, ALPHA ;
  READ(N1, N2, N, M, ALPHA) ;
  BEGIN INTEGER ARRAY T1, T2(1::M) ; REAL ARRAY ATX, THETA(1::N+1) ;
  REAL ARRAY X2(1::N1) ; REAL ARRAY X1, Y(1::N2) ;
  REAL ARRAY S(1::N+1, 1::N+1) ;
  REAL ARRAY C1(1::N2, 1::N1) ; REAL ARRAY C2(1::N2, 1::N2) ;
  REAL ARRAY X(1::M) ;

  PROCEDURE COMPLET(REAL ARRAY E(*, *); INTEGER VALUE N1, N2 ) ;
  COMMENT COMPLETE LA MATRICE E PAR DES LIGNES ORTHONORMEES ;
  BEGIN REAL NORME ;
  FOR I:=1 UNTIL N2-1 DO ORTHO(E, I, N1, E(I+1, *)) ;
  FOR I:=1 UNTIL N2 DO
    BEGIN NORME:=SQRT(PRODSCAL(E(I, *), E(I, *), N1) ;
    FOR J:=1 UNTIL N1 DO E(I, J):=E(I, J)/ NORME ;
    END
  END COMPLET ;

  REAL PROCEDURE PRODSCAL(REAL ARRAY X, Y(*) ; INTEGER VALUE N) ;
  BEGIN
  REAL S ; S:=0 ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO S:=S+X(I)*Y(I) ;
  S
  END PRODSCAL ;

  PROCEDURE ORTHO(REAL ARRAY E(*, *) ; INTEGER VALUE N, M ;
  REAL ARRAY NVLIGNE(*)) ;
  COMMENT RAJOUTE A E UNE NVLIGNE ORTHOGONALE ;
  BEGIN
  REAL ARRAY GRAM(1::N, 1::N) ; REAL ARRAY LAMDA, EJI(1::N) ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO FOR J:=1 UNTIL N DO
    GRAM(I, J):=PRODSCAL(E(I, *), E(J, *), M) ;
  FOR K:=1 UNTIL N DO EJI(K):=E(K, N+1) ;
  GAUSS(GRAM, LAMDA, EJI, N, '-7, IMPOSS) ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO NVLIGNE(I):=0 ; NVLIGNE(N+1):=1 ;
  FOR I:=N+2 UNTIL M DO NVLIGNE(I):=0 ;
  FOR I:=1 UNTIL M DO FOR K:=1 UNTIL N DO
    NVLIGNE(I):=NVLIGNE(I)-(LAMDA(K)*E(K, I) ;
  END ORTHO ;
```

```

PROCEDURE GAUSS(REAL ARRAY A(*,*) ; REAL ARRAY X,B(*) ;
INTEGER VALUE N ; REAL VALUE EPS ; LOGICAL RESULT LO) ;
COMMENT RESOUDRE AX=B PAR METHODE DE GAUSS,N DIMENSION DU SYSTEME
BEGIN

```

```

  FOR K:=1 UNTIL N DO
    BEGIN COMMENT TRIANGULARISATION DE A COLONNE PAR COLONNE ;

```

```

      IF ABS(A(K,K)) < EPS THEN

```

```

        BEGIN

```

```

          FOR I:=K+1 UNTIL N DO

```

```

            IF ABS(A(I,K)) > EPS THEN

```

```

              BEGIN FOR J:=K UNTIL N DO

```

```

                BEGIN REAL PERM ;

```

```

                PERM:=A(K,J):=A(I,J):=A(I,I) ; A(I,J):=PERM END ;

```

```

                BEGIN REAL PERM ; PERM:=B(K):=B(I):=PERM

```

```

                END PERMUTATION; GOTO JO

```

```

              END ; GOTO FIN

```

```

            END PIVOTEST ;

```

```

          JO: FOR I:=K+1 UNTIL N DO

```

```

            BEGIN REAL Z; Z:=A(I,K)/A(K,K) ;

```

```

              FOR J:=K+1 UNTIL N DO

```

```

                A(I,J):=A(I,J)-A(K,J)*Z ;

```

```

                B(I):=B(I)-B(K)*Z ;

```

```

                A(I,K):=0.

```

```

              END

```

```

            END TRIANGULARISATION ;

```

```

          X(N):=B(N)/A(N,N) ;

```

```

        FOR I:=N-1 STEP -1 UNTIL 1 DO

```

```

          BEGIN REAL S ; S:=0. ;

```

```

            FOR J:=I+1 UNTIL N DO S:=S+A(I,J)*X(J) ;

```

```

            X(I):=(B(I)-S)/A(I,I) ;

```

```

          END ;

```

```

        LO:=TRUE ; GOTO FINI ; FIN: LO: LO:=FALSE ; FINI:

```

```

END GAUSS ;

```

```

INTEGER PROCEDURE A(INTEGER ARRAY T1,T2(*) ; INTEGER VALUE I,J) ;

```

```

  BEGIN INTEGER RES ;

```

```

  RES:=IF(J <= 32) THEN

```

```

    BEGIN

```

```

      IF T1(I)=J THEN

```

```

        BEGIN

```

```

          IF I <= M-8 THEN 1 ELSE 2

```

```

        END

```

```

      ELSE 0

```

```

    END

```

```

  ELSE

```

```

    IF I <= M-8 THEN

```

```

      BEGIN
      IF T2(I)=J-32 THEN 1 ELSE 0
      END
      ELSE
      IF((T2(I)=J-32) OR(T2(I)=J-33)) THEN 1 ELSE 0 ;
      RES
      END A ;

      COMMENT ESTIMATION DE THETA ;

      FOR I:=1 UNTIL N DO
      BEGIN RELA ATXP ; ATXP:=0 ;
      FOR K:=1 UNTIL M DO ATXP:=ATXP+A(T1,T2,K,I)*X(K) ;
      FOR J:=1 UNTIL N DO
      BEGIN INTEGER SP ;SP:=0 ;
      FOR K:=1 UNTIL M DO
      SP:=SP +A(T1,T2,I)*A(T1,T2,K,J) ;
      S(I,J):=SP ;
      END ;
      ATX(I):=ATXP ;
      END ;
      FOR I:= 1 UNTIL N DO
      S(I,N+1):=S(N+1,I):= IF (I<32) THEN 0 ELSE 1 ;
      S(N+1,N+1):=0 ; ATX(N+1):=0 ;
      GAUSS(S,THETA,ATX,N+1,'-8,IMPOSS) ;
      WRITE("L'ESTIMATEUR DE THETA EST") ;
      WRITE(" ") ;
      FOR I:=1 UNTIL N+1 DO
      BEGIN
      WRITE(THETA(I)) ; WRITE(" ") ;
      END ;

      FOR I:=1 UNTIL N1 DO
      BEGIN REAL EI1 ; EI1:=0 ;
      FOR K:=1 UNTIL N DO EI1:=EI1+A(T1,T2,I,K)*THETA(K) ;
      C1(1,I):=EI1 ;
      END ;
      FOR I:=1 UNTIL N2 DO
      BEGIN REAL EI1 ; EI1:=0 ;
      FOR K:=1 UNTIL N DO EI1:=EI1+A(T1,T2,I,K)*THETA(K) ;
      C2(1,I) := EI1 ;
      END ;
      CO := SQRT(PRODSCAL(C1(1,*),C1(1,*),N1));
      CO:= CO/SQRT(PRODSCAL(C2(1,*),C2(1,*),N2)) ;
      COMPLET(C1,N1,N2) ; COMPLET(C2,N2,N2) ;
      FOR I:=1 UNTIL N2 DO
      BEGIN REAL V1 ; V1:=0 ;
      FOR K:= 1 UNTIL N1 DO V1:=V1 +C1(I,K)*X2(K) ;
      X1(I):= V1 ;

```

```
END ;
FOR J:=1 UNTIL N2 DO
  BEGIN REAL V2 ; V2:=0 ;
  FOR K:=1 UNTIL N2 DO
    V2:=V2+C2(K,J)*X1(K) ; Y(J):= Y(J)- CO*V2 ;
  END ;
ZBAR :=0 ;
FOR I:=1 UNTIL N2 DO ZBAR:= ZBAR+Y(I) ; ZBAR := ZBAR/ N2 ;
FOR I:= 1 UNTIL N2 DO Y(I):= Y(I)- ZBAR ;
  R:= ZBAR**2/PRODSCAL(Y,Y,N2) ;
IF R< ALPHA THEN
  WRITE("AVEC UN SEUIL DE CONFIANCE DE 5% ,LAMDA=0") ELSE
  WRITE("LE TEST REJETTE L'HYPOTHESE NULLE POUR UN SEUIL DE 5%") ;
WRITE(R) ;
END ;
FINI: END.
```

CHAPITRE VI

ESTIMATION DES COMPOSANTES DE LA VARIANCE DANS UNE STRUCTURE LINEAIRE GAUSSIENNE

Dans ce chapitre, on réexpose le principe d'estimation des composantes de la variance introduit par RAO [21] et dont plusieurs particularités théoriques originales ont été mises au point dans [18]. On a utilisé les notations des chapitres I et II, qui permettent d'avoir une vue géométrique du problème.

§1. La structure statistique.

Avec les notations du chapitre I, la structure statistique des modèles linéaires gaussiens que l'on étudie, s'écrit sous sa forme générale :

$$\left\{ \Omega, \mathfrak{B}_\Omega, N\left(A\theta; \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \Lambda_i\right); \theta \in \mathfrak{H}; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad (1)$$

où :

- Ω est un espace vectoriel réel de dimension finie n , muni de sa tribu borélienne \mathfrak{B}_Ω .
- A est une application linéaire de \mathbb{R}^s dans Ω , donnée.
- \mathfrak{H} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^s , donné par exemple sous la forme :

$$\mathfrak{H} = \{ \theta \in \mathbb{R}^s; B\theta = 0 \},$$

où B est une matrice réelle donnée d'ordre (m, s) avec $m < s$ et de rang égal à m .

- Les Λ_i ($i=1, \dots, k$) sont des formes quadratiques sur le dual Ω^* de Ω , connues et définies strictement positives.

Pour la commodité des calculs qui suivront, en faisant choix d'une base de Ω , on identifiera Ω à \mathbb{R}^n ; l'application linéaire A est alors représentée par une matrice d'ordre (n, s) et les formes quadratiques Λ_i sont représentées par des matrices symétriques d'ordre n définies strictement positives.

Pour la suite, on pose :

$$\gamma = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2) \quad \text{et} \quad \Lambda = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \Lambda_i .$$

Avec ces notations, tout élément aléatoire de Ω admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{B}_Ω , la fonction :

$$f(X) = g(\gamma) \exp\left\{-\frac{1}{2} t(X-A\theta) \Lambda^{-1} (X-A\theta)\right\} , \quad (2)$$

où $g(\gamma)$ est une constante dépendant de γ . On se propose d'établir l'existence d'une statistique exhaustive de la structure (1) pour les paramètres inconnus (θ, γ) .

Lemme 1.1.

"Soient k matrices symétriques Λ_i ($i=1, \dots, k$) d'ordre n définies strictement positives. Il existe p matrices réelles d'ordre n , M_i , linéairement indépendantes dans leur ensemble, telles que, pour toute combinaison linéaire strictement positive des Λ_i , i.e. ; $\Lambda = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \Lambda_i$ il existe p coefficients réels $z_i(\gamma)$ ($i=1, \dots, p$) tels que :

$$\Lambda^{-1} = \sum_{i=1}^p z_i(\gamma) M_i \quad \text{avec} \quad \gamma = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2) ."$$

Remarque.

Du point de vue pratique, la formule du lemme n'est pas très utile en elle-même, puisqu'elle ne nous donne ni la valeur de p , ni la forme des matrices M_i . Dans le cas où toutes les matrices Λ_i ($i=1, \dots, k$) sont simultanément diagonalisables par une même matrice R , il est possible de déterminer facilement p et les matrices M_j ($j=1, \dots, p$). Une condition suffisante de diagonalisation simultanée des matrices définies positives Λ_i est

est que (cf. [19], p.57) les matrices Λ_i commutent deux à deux ou que k soit égal à 2. Supposons donc qu'il existe une matrice régulière R d'ordre n telle que pour tout i ($i=1, \dots, k$) les matrices $R\Lambda_i^t R$ soient diagonales. On a alors :

$$R\Lambda^t R = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 R\Lambda_i^t R \quad (3)$$

Sans perdre de généralité, la matrice R peut-être choisie de telle manière que les éléments de la diagonale de $R\Lambda^t R$ correspondants à des fonctions des σ_i^2 proportionnelles entre elles, soient regroupés. Soient $z_i'(\gamma)$ ($i=1, \dots, p$) les p éléments distincts de la matrice diagonale $R\Lambda^t R$ et soient n_i leur ordre de multiplicité respectif. Il vient :

$$\Lambda^{-1} = ({}^t R R^{-1}) \Lambda^{-1} (R^{-1} R) = {}^t R ({}^t R^{-1} \Lambda^{-1} R^{-1}) R = {}^t R (R\Lambda^t R)^{-1} R$$

D'où :

$$\Lambda^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{z_i(\gamma)} {}^t R_i R_i$$

les matrices R_i ($i=1, \dots, p$) étant des matrices d'ordre (n_i, n) extraites de R

Proposition 1.1.

"La structure statistique (1), avec les notations du lemme, admet la statistique exhaustive de dimension $p(s+1)$ suivante :

$$K_i = {}^t X M_i X \quad (i=1, \dots, p) ; \quad L_{j,i} = {}^t A_j M_i X \quad (j=1, \dots, s ; i=1, \dots, p)$$

où A_j désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A "

Effectivement, la forme quadratique Q en X , intervenant dans la densité de X , devient d'après le lemme 1.1. :

$$\begin{aligned} Q(X-A\theta) &= {}^t (X-A\theta) \Lambda^{-1} (X-A\theta) = {}^t X \Lambda^{-1} X - 2 {}^t \theta {}^t A \Lambda^{-1} X + {}^t \theta {}^t A \Lambda^{-1} A \theta \\ &= \sum_{i=1}^p z_i(\gamma) {}^t X M_i X - 2 \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^p \theta_j z_i(\gamma) {}^t A_j M_i X + {}^t \theta {}^t A \Lambda^{-1} A \theta \end{aligned}$$

et d'après le théorème de factorisation, on a la conclusion.

§2. Estimateurs MINQUE et MIVQUE des composantes de la variance.

On s'intéresse dans la suite à la classe des estimateurs quadratiques de toute forme linéaire donnée $p_1\sigma_1^2 + p_2\sigma_2^2 + \dots + p_k\sigma_k^2$ des composantes de la variance, classe qui contient les estimateurs classiques de l'analyse de la variance. Il s'agit des estimateurs de la forme tXMX satisfaisant aux propriétés suivantes :

(e₁) Sans biais :

On désigne par $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n et on munit S_n du produit scalaire défini par :

$$\forall A, B \in S_n, \quad \langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB) .$$

Proposition 2.1.

"Soit X un vecteur aléatoire de la structure statistique (1) et p un vecteur donné de \mathbb{R}^k , de composantes p_i ($i=1, \dots, k$). Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre n . La statistique tXMX est un estimateur sans biais de la quantité $\sum_{i=1}^k p_i\sigma_i^2$ si et seulement si :

$${}^tAMA = 0 \quad \text{et} \quad \langle M, \Lambda_i \rangle = p_i \quad (i=1, \dots, k) \text{ " .}$$

En effet, on sait que (cf. [5], p.90) :

$$\mathbb{E}({}^tXMX) = {}^tAMA\theta + \sum_{i=1}^k p_i\sigma_i^2 \text{Tr}(M\Lambda_i) ,$$

d'où la proposition.

(e₂) Invariants par translation du paramètre θ .

L'intérêt d'une telle condition est lié à la manière dont on désire estimer les paramètres inconnus de la structure statistique (1) . On se propose de déterminer une estimation de la matrice de covariance Λ de la structure (1) , qui ne dépende pas de θ . Il est donc préférable que la variable aléatoire tXMX soit invariante par translation sur θ et qu'elle admette une loi de probabilité libre par rapport au paramètre θ .

Proposition 2.2.

"Avec les notations de la proposition 2.1. pour que l'estimateur sans biais t_{XMX} de $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ satisfasse à la condition d'invariance, il faut et il suffit que :

$$MA = 0 .$$

Alors t_{XMX} est une statistique libre par rapport au paramètre θ "

Par définition, une statistique $f(\theta)$ est invariante pour un groupe de transformation \mathcal{G} sur θ , si pour tout élément g de \mathcal{G} , on a :

$$f(\theta) = f(g(\theta)) .$$

Soit θ_0 un vecteur arbitraire de \mathbb{R}^S et posons $Z = X - A\theta_0$. Pour que la statistique $X \mapsto t_{\text{XMX}}$ soit invariante, il faut et il suffit que :

$$t_{\text{ZMZ}} = t_{\text{XMX}} ,$$

condition équivalente, du fait que t_{XMX} est sans biais, à :

$$t_{\text{XMA}\theta_0} = 0 .$$

D'autre part (cf.ch.I.) , MA nulle équivaut à :

$$\phi_{t_{\text{XMX}}}(t) = \det(\mathbf{I}_n - 2itM\Lambda)^{1/2} ,$$

d'où la proposition 2.2. #

Dans la suite, on note \mathfrak{H}_0 et \mathfrak{H}_p les sous-ensembles de S_n définis par $\mathfrak{H}_0 = \{M \in S_n(\mathbb{R}) ; MA=0\}$ et $\mathfrak{H}_p = \{M \in S_n ; MA=0 \text{ et } \langle M, \Lambda_i \rangle = p_i, i=1, \dots, k\}$, où p est un vecteur donné de \mathbb{R}^k , de composantes p_i ($i=1, \dots, k$).

(e₃) De variance minimum.

La variance de toute forme quadratique t_{XMX} de X (cf.[18], p.19) est égale à :

$$v(t_{\text{XMX}}) = 2\text{Tr}(M\Lambda M) = 2\langle M\Lambda, \Lambda M \rangle .$$

La forme bilinéaire définie sur $S_n^2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall E, D \in S_n \times S_n : (E, D) \mapsto (E/D)_\Lambda = 2\langle E\Lambda, \Lambda D \rangle$$

est un produit scalaire. La condition (e_3) revient donc à déterminer un élément M de \mathfrak{H}_p de norme $\|\cdot\|_\Lambda$ minimum, où $\|\cdot\|_\Lambda$ est la norme sur $S_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire $(\cdot | \cdot)_\Lambda$.

Les estimateurs satisfaisants aux conditions (e_1) , (e_2) et (e_3) sont appelés MIVQUE. On remarquera qu'en général on ne peut calculer de tels estimateurs, puisque la norme à minimiser $\|\cdot\|_\Lambda$ dans (e_3) dépend des composantes de la variance. La condition (e_3) est alors remplacée par la condition (e'_3) suivante :

(e'_3) De norme minimale sur $S_n(\mathbb{R})$.

Cette condition revient à déterminer un élément M de \mathfrak{H}_p de manière que la norme $\|\cdot\|_{\Lambda^*}$ définie par :

$$\|M\|_{\Lambda^*}^2 = (M/M)_{\Lambda^*} = 2\langle M\Lambda^*, \Lambda^*M \rangle$$

soit minimum, où $\Lambda^* = \sum_{i=1}^k \sigma_i^{*2} \Lambda_i$, les σ_i^* étant des valeurs a priori pour les paramètres inconnus σ_i .

Les estimateurs satisfaisant aux conditions (e_1) , (e_2) et (e'_3) sont appelés MINQUE.

Remarque.

Les conditions (e_3) et (e'_3) sont de même nature et ne dépendent que du choix de la norme euclidienne définie sur l'espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$. En particulier, les MINQUE sont des MIVQUE calculés pour une valeur fixée a priori des paramètres $\sigma_i^2 (i=1, \dots, k)$. Les théorèmes qui suivent sont, d'après cette remarque, valables pour les MINQUE et MIVQUE, à condition de choisir la norme correspondante sur $S_n(\mathbb{R})$.

§3. Théorèmes d'existence et formules de calculs.

Quel que soit le produit scalaire que l'on considère sur $S_n(\mathbb{R})$, disons $(.|..)$, ce dernier est un espace de Hilbert de dimension finie. Par conséquent, il existe, pour tout $i=1, \dots, k$, des éléments T_i de S_n , définis de manière unique et tels que :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \langle S, \Lambda_i \rangle = (S/T_i) \quad \text{pour } i=1, \dots, k .$$

Dans la suite, avec les notations adoptées pour les structures gaussiennes linéaires d'ordre p , on désigne successivement par :

■ $Z_{V^k} = \begin{pmatrix} Z_V^1 \\ Z_V^2 \\ \vdots \\ Z_V^k \end{pmatrix}$ la projection orthogonale d'un élément $Z = \begin{pmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^k \end{pmatrix}$ de $S_n^k(\mathbb{R})$ sur

un sous-espace vectoriel de la forme V^k , où Z_V^i ($i=1, \dots, k$) est la projection orthogonale suivant le produit scalaire $(.|..)$ de Z^i sur le sous-espace vectoriel V de $S_n(\mathbb{R})$.

■ $Q(Z)$ la matrice symétrique d'ordre k , de terme général (Z^i/Z^j) et comme dans le chapitre I, on a :

$$Q(Z) = Q(Z_{V^k}) + Q(Z - Z_{V^k}) .$$

Avec ces notations, on a :

Théorème 3.1. (Existence) (cf. [18], p.12)

"Soit T l'élément de $S_n^k(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \langle S, \Lambda_i \rangle = (S/T_i) \quad (i=1, \dots, k) ,$$

où les T_i sont les composantes du vecteur T de $S_n^k(\mathbb{R})$. On note H_0 le sous-espace vectoriel de $S_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$H_0 = \{ M \in S_n(\mathbb{R}) ; MA=0 \} .$$

Alors :

(i) Les MINQUE ou MIVQUE (suivant le choix de $(.|..)$) de la forme linéaire $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ sont les statistiques définies par :

$$X \mapsto {}^t X M X ,$$

où :

$$M = ({}^t_p Q^{-1} (T_{H^k_0} \otimes I_n) T_{H^k_0}) .$$

(ii) Pour que tous les σ_i^2 soient estimables, il faut et il suffit que les composantes de $T_{H^k_0}$ soient linéairement indépendantes dans $S_n(\mathbb{R})$.

Démonstration :

Soit \mathcal{F} le sous-espace vectoriel de \mathcal{H} engendré par les projections orthogonales selon $(. | .)$, $T_{H^k_0}^i$ des composantes T^i du vecteur T sur \mathcal{H}_0 . En décomposant tout élément M de \mathcal{H}_0 sur \mathcal{F} et son orthogonal dans \mathcal{H}_0 , il vient :

$$M = \sum_{i=1}^k \mu_i T_{H^k_0}^i + M_{\mathcal{F}^\perp} .$$

par suite :

$$(M/T_j) = \sum_{i=1}^k \mu_i (T_{H^k_0}^i / T_{H^k_0}^j) , j=1, \dots, k \text{ et } \|M\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^k \mu_i T_{H^k_0}^i \right\|^2 + \|M_{\mathcal{F}^\perp}\|^2 .$$

Les solutions de norme minimum dans \mathcal{H}_p , sont telles que $\|M_{\mathcal{F}^\perp}\|^2 = 0$, et :

$$Q(T_{H^k_0}) \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix} = p .$$

La matrice Q étant une matrice de Gramm, le théorème est démontré.

Corollaire 3.1. (cf. [18])

"Soit A_ℓ la ℓ ième colonne de la matrice A . On note $C_{j,\ell}$ ($j=1, \dots, n ; \ell=1, \dots, s$) les matrices d'ordre n , formées de zéros sauf sur la i ème colonne qui est A_ℓ . Pour que les σ_i^2 ($i=1, \dots, k$) soient estimables, il faut et il suffit que les matrices :

$$\Lambda_i \ (i=1, \dots, k) \text{ et } S_{i,\ell} = \frac{1}{2} (C_{i,\ell} + {}^t C_{i,\ell})$$

forment une famille libre" .

Calcul du MINQUE.

On rappelle ici quelques résultats géométriques de [20] dont on aura besoin. On notera W le sous-espace vectoriel de Ω image de \mathbb{R}^S par l'application linéaire A et P_W le projecteur orthogonal sur W , selon le produit scalaire défini sur Ω par Λ^{*-1} . On a :

$$P_W = A(t_A \Lambda^{*-1} A)^{-1} t_A \Lambda^{*-1} ,$$

où G^- désigne l'inverse généralisé de la matrice G . En posant :

$$Q_W = I_n - P_W ,$$

le projecteur orthogonal sur H_0 , pour le produit scalaire $(. | .)_{\Lambda^*}$ est :

$$\forall E \in S_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t Q_W E Q_W ,$$

et pour tout couple (E, D) de $S_n^2(\mathbb{R})$ on a :

$$(D / {}^t Q_W E Q_W)_{\Lambda^*} = ({}^t Q_W D Q_W / E)_{\Lambda^*} .$$

On supposera désormais que les σ_i^2 sont estimables.

Théorème 3.2. (Calcul du MINQUE). (cf. [18])

"Soit $(. | .)_{\Lambda^*}$ le produit scalaire défini sur $S_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (E, D) \in S_n^2(\mathbb{R}) , \quad (E/D)_{\Lambda^*} = 2 \langle E \Lambda^* , \Lambda^* D \rangle ,$$

où $\Lambda^* = \sum_{i=1}^k \sigma_i^{*2} \Lambda_i$ et soit p un vecteur donné de \mathbb{R}^k . On pose, pour

$i=1, \dots, k$:

$$T_i = \frac{1}{2} \Lambda^{*-1} \Lambda_i \Lambda^{*-1} \quad \text{et} \quad T_i^H = {}^t Q_W T_i Q_W , \quad i=1, \dots, k .$$

Alors, les solutions de norme minimale dans H_p sont les matrices M de S_n de la forme :

$$M = \sum_{i=1}^k \mu_i T_i^H ,$$

les μ_i ($i=1, \dots, k$) étant les composantes du vecteur μ de \mathbb{R}^k solution de l'équation linéaire :

$$Q(T_k^H) \mu = p .$$

L'estimateur ${}^t X M X$ est le MINQUE de la forme linéaire $\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 p_i$.

Le théorème 3.2. est simplement la version analytique du théorème 3.1.. On remarquera que si on note q_{ij} ($i=1, \dots, k$, $j=1, \dots, k$) les coefficients de la matrice inverse de $Q(T_{H_0}^k)$, les MINQUE respectifs des composantes σ_i^2 sont les formes quadratiques ${}^t X M_i X$ ($i=1, \dots, k$) où :

$$M_i = \sum_{j=1}^k q_{ij} T_i^{H_0}.$$

Pour le calcul du MIVQUE, il suffit de remplacer dans les calculs du théorème 3.2., la matrice Λ^* par Λ . Dans ce cas, on remarque que la matrice de covariance des MIVQUE des σ_i^2 ($i=1, \dots, k$) est $Q^{-1}(T_{H_0}^k)$.

Remarques.

1. On a vu que les estimateurs MINQUE des quantités $\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2$ étaient des MIVQUE calculés pour une valeur a priori $(\sigma_1^*, \dots, \sigma_k^*)$ des composantes σ_i ($i=1, \dots, k$). Si on note alors :

$$f_p(\gamma) = \sum_{i=1}^k p_i \sigma_i^2,$$

les MINQUE sont des estimateurs admissibles pour la fonction de perte $W(\gamma, x) = (x - f_p(\gamma))^2$, parmi les estimateurs quadratiques, sans biais et invariants par translation sur θ , de $f_p(\gamma)$.

2. Dans le §2, on a vu que pour la détermination des MINQUE ou MIVQUE, la norme minimisée est de la forme :

$$(M/M)_{[\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2]} = 2 \text{Tr} \left(M \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \Lambda_i \right) M \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \Lambda_i \right) \right).$$

On a alors, pour tout réel λ strictement positif :

$$(M/M)_{[\lambda \sigma_1^2, \dots, \lambda \sigma_k^2]} = \lambda^2 (M/M)_{[\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2]},$$

et le problème de la minimisation de $(M/M)_{[\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2]}$ a donc les mêmes solutions en M que celui de la minimisation de $(M/M)_{[\lambda \sigma_1^2, \dots, \lambda \sigma_k^2]}$.

§4. Un exemple d'application.

La structure statistique associée au problème de glaciologie défini dans le chapitre III est, avec les mêmes notations :

$$\{ \Omega, \theta, N(A\theta + \lambda F_\theta; \sigma_1^2 \Lambda_1 + \sigma_2^2 \Lambda_2); \theta \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \} . \quad (1)$$

Dans le §3 du chapitre III, pour des valeurs a priori du rapport $C = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$, on a défini les estimations correspondantes des paramètres θ, λ et on a déterminé le test de Tukey de l'hypothèse $\{\lambda=0\}$. On se propose ici d'estimer de plus le paramètre inconnu c , d'après le principe d'estimation exposé dans ce chapitre.

En effet, sous l'hypothèse nulle $\{\lambda=0\}$, la structure statistique (1) est une structure gaussienne linéaire du même type que celle du §1, avec ici $k=2$.

D'autre part, d'après la remarque 2.§3, le MINQUE du rapport c ne dépend que de c .

On remarque que les conditions d'estimabilité des composantes de la variance sont satisfaites. En effet, avec les notations du corollaire 3.1.-VI, la famille des matrices $S_{i,\ell}$ ($i=1, \dots, N; \ell=1, \dots, J+1$) de $S_N(\mathbb{R})$ est une famille libre, puisque, d'après les hypothèses (cf.ch.III), les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes. D'autre part, par définition de Λ_1 et Λ_2 et vu la forme des $S_{i,\ell}$, Λ_1 et Λ_2 sont indépendantes linéairement des $S_{i,\ell}$ et par conséquent, d'après le corollaire 3.1., c est estimable.

Soit c^* une valeur a priori pour c et notons successivement par :

- $\Lambda^* = \Lambda_1 + c^* \Lambda_2$.
 - $R = \mathbb{I}_N - A(\Lambda^*)^{-1} A^t$.
 - $\check{T}_1 = \frac{1}{2} {}^t R \Lambda_1^{-1} R$ et $\check{T}_2 = \frac{1}{2} {}^t R \Lambda_2^{-1} R$.
 - G la matrice d'ordre 2 de terme général :
- $$(i=1,2; j=1,2) \quad g_{ij} = \text{Tr}(\check{T}_i \Lambda_j) ,$$

et δ_{ij} ($i=1,2 ; j=1,2$) les coefficients de la matrice inverse G^{-1} de G . Alors, d'après le théorème 3.2.-VI, l'estimateur MINQUE de c est défini par :

$$\hat{c} = {}^t X \left(\sum_{j=1}^2 \delta_{2j} \check{T}_j \right) X$$

et sous l'hypothèse $\{\lambda=0\}$, \hat{c} est un estimateur sans biais, libre par rapport à θ , et de norme minimum pour le produit scalaire associé à Λ^* sur $S_N(\mathbb{R})$.

Une telle estimation dépend évidemment du choix a priori de c^* , et son emploi suppose un certain risque, car si la valeur a priori c^* s'éloigne trop de la valeur réelle c , nous pouvons obtenir une mauvaise estimation. Néanmoins, cette méthode nous donne une certaine idée de la valeur de c .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDERSON T.W. "An introduction to multivariate analysis".
(1958) - J.WILEY.
- [2] ANDERSON T.W. "The non central Wishart distribution".
(1946) - Ann.Math.Statist., 17, p.409.
- [3] ANTONIADIS A. "Une application de l'estimation optimale des composante
de la variance dans une structure linéaire gaussienne".
(1974) - Séminaire I.R.M.A.
- [4] ARTZNER Ph. I. "Sur les formes quadratiques aléatoires et les variable
du CHI-Deux généralisé".
II. "Sur l'analyse de la variance et les plans d'expérienc
(1972) - Thèses Université Louis Pasteur - Strasbourg I.
- [5] BARRA J.R. "Notions fondamentales de statistique mathématique".
(1971) - Dunod, Paris.
- [6] BARRA J.R. "Généralisation du test de non additivité de Tukey".
(1972) - Publication de l'Equipe de Statistique . I.R.M.A
- [7] BARRA J.R. "Une application de la statistique en glaciologie".
(1974) - Renue de Statistique appliquée n° 1.
- [8] BARRA J.R. "Introduction à l'analyse multivariate".
(1973) - Cours de 3ème cycle. I.R.M.A. Grenoble.
- [9] FOURGEAUD C. "Statistique".
FUCHS A. (1967) - Dunod Editeur, Paris.
- [10] GUICHARDET A. "Analyse harmonique commutative".
(1968) - Dunod, Paris.
- [11] GASTINEL N. "Analyse numérique linéaire".
(1965) - Hermann.
- [12] JAMES A.T. "A generating function for averages over the orthogonal
group".
(1955) - Ann.Math.Statist., 35, p.367.
- [13] JAMES A.T. "The non central Wishart Distribution".
(1955) - Proc.Roy.Society (London), A229, p.364.

- [14] JAMES A.T. "Normal multivariate analysis and the orthogonal group" (1954) - Ann.Math.Statist., 25, p.40.
- [15] LINNIK Y.V. "Leçons sur les problèmes de statistique analytique". (1967) - Gauthier-Villars.
- [16] LLIBOUTRY L. "Multivariate Statistical analysis of glacier annuals balances". (1974) - Journal of Glaciology, 13, n°69, p.371.
- [17] MALINVAUD. "Méthodes statistiques de l'économétrie". (1964) - Dunod, Paris.
- [18] MOUSSA J. "L'estimation optimale des composantes de la variance dans les modèles linéaires mixtes". (1973) - Thèse, Paris.
- [19] NEWCOMB R.W. "On the simultaneous diagonalisation of two semi-definite matrices". (1960) - Quart.Appl.Math., 19, p.144.
- [20] RAO C.R. "Linear statistical inference and its applications". (1965) - J.Wiley.
- [21] RAO C.R. "Minimum variance unbiased quadratic estimators of variance components". (1971) - Journal of multivariate analysis, 1, p.445.
- [22] RAO C.R. "Estimation of variance components. MINQUE theory". (1971) - Journal of mult.analysis, 1, p.257.
- [23] RAO C.R. "Estimation of variance components in linear models". (1970) - J.A.S.A., 65, p.161.
- [24] SEARLE S.R. "Topics in variance components estimation". (1970) - Biometrics 27, p.1.
- [25] SCHEFFE H. "On the solutions of the Behrens-Fischer problem, based on the t-distribution". (1943) - Ann.Math.Stat., 14, p.35.
- [26] WILKS S.S. "Mathematical Statistics". (1962) - J.Wiley.
- [27] WILKS S.S. "Certain generalisations in the analysis of variance". (1932) - Biometrika, 24, p.471.
- [28] WATSON G.N. "Theory of Bessel functions". (1944) - Cambridge University Press.

