STABILITE GENERIQUE DES SYSTEMES HAMILTONIENS QUASI-INTEGRABLES

Laurent Niederman

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplome d'

HABILITATION

A DIRIGER DES RECHERCHES EN SCIENCES

Spécialité : MATHEMATIQUES

par Laurent NIEDERMAN

STABILITE GENERIQUE DES SYSTEMES HAMILTONIENS QUASI-INTEGRABLES

Soutenue le 14 Décembre 2006, devant le jury composé de :

M. Alain CHENCINER	Président
M. Giovanni GALLAVOTTI	Rapporteur
M. Jacek GRACZYK	Examinateur
M. Patrice LE CALVEZ	Rapporteur
M. Jean Jacques RISLER	Examinateur
M. Jean Christophe YOCCOZ	Rapporteur

REMERCIEMENTS

Le problème avec les remerciements c'est que l'on est presque sûr d'oublier quelqu'un qui les mérite. Néanmoins, je vais essayer de faire de mon mieux.

Je remercie très sincèrement Jean Christophe Yoccoz pour l'honneur qu'il me fait de présenter ce mémoire d'habilitation.

Je suis honoré et reconnaissant à Giovanni Gallavotti et Patrice Le Calvez d'avoir accepté de rapporter ce travail dans un délai très bref.

La présence dans ce jury de Jacek Graczyk et Jean Jacques Risler est à la fois un honneur et un plaisir. Je tiens à les en remercier chaleureusement.

Dans mes remerciements pour Alain Chenciner, j'associe Jacques Laskar. Tous deux m'ont accueilli dès le début de mon parcours scientifique dans un groupe qui n'était pas encore l'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques (ASD) au sein de l'IMCCE à l'Observatoire de Paris. Ils ont su créer un lieu de discussion extrêmement ouvert avec des chercheurs aux parcours très divers. Je dois beaucoup à tous les membres de l'équipe ASD mais je tiens à en distinguer deux. Tout d'abord, David Sauzin dont la capacité d'écoute et la rigueur m'ont toujours beaucoup aidé. Ensuite, je transmets un salut spécial à Philippe Robutel que je connaissais avant de démarrer ma carrière scientifique. Notre complicité aussi bien sur le plan scientifique qu'humain ne s'est jamais démentie.

Jean Pierre Marco a accompagné mon parcours mathématique depuis le début. D'abord, il m'a fait découvrir la recherche avec un dynamisme et un optimisme sans failles. Ensuite, notre amitié s'est poursuivie au long des années.

Je remercie Charles Michel Marle qui m'a accordé sa confiance en me prenant en thèse à Paris VI sur un sujet original.

Je suis particulièrement redevable à Pierre Lochak. Tout d'abord, avec sa grande culture, il m'a présenté dès le début de ma thèse une série de problèmes intéressants et abordables qui m'ont fourni la matière à dix ans de travail. Les travaux dans ce mémoire sont un prolongement naturel des questions qu'il m'avait posées à cette époque. Ensuite, d'un point de vue beaucoup plus personnel, je n'oublierai pas que c'est par son intermédiaire que j'ai trouvé le médecin et le service où j'ai enfin été soigné efficacement d'une pathologie lourde et peu connue.

Il s'agit du Docteur Nathalie Costedoat et du service de médecine interne de la Pitié-Salpétrière (Pr Piette) dont le sérieux et la compétence m'ont sorti de l'ornière. Je les remercie chaleureusement.

En appartenant au Laboratoire de Mathématiques de l'université Paris-Sud, plus particulièrement au sein de l'équipe Topologie et Dynamique, j'ai bien conscience de bénéficier d'un environnement scientifique exceptionnel et d'excellentes conditions de travail. Mes remerciements s'adressent à tous mes collègues d'Orsay avec qui j'ai eu l'occasion de travailler et plus particulièrement à Marie Claude Arnaud et Daniel Perrin. Ils m'ont accueilli et aidé pendant mes premières années d'enseignant-chercheur lorsque j'étais détaché comme directeur d'étude à l'IUFM de Versailles. Avec Marie Claude s'ajoutait en plus la proximité géographique (même bureau) et scientifique (même domaine de recherche). C'est aussi un plaisir de saluer mes collègues Frédéric Haglund et Jacques Henry avec qui il est toujours très agréable de travailler. Enfin, je remercie le personnel du Laboratoire de Mathématiques et notamment Martine Justin la secrétaire de mon équipe.

Au-delà des mathématiques, j'adresse des remerciements à mes vieux amis Samuel Mwame et Lucien Vinciguerra. J'ai aussi une pensé pour Serge Tastet qui est parti bien trop tôt.

Pour finir, le reste n'aurait pas d'intérêt sans la présence de ma femme Karine et de mes enfants Célestine et Ernest.

I Introduction :

I.1 Articles et références :

Mes recherches sont consacrées à l'étude des systèmes dynamiques et les possibilités d'application de ces résultats à des problèmes issus de la mécanique céleste.. Dans ce cadre, une question centrale est celle de la stabilité ou de l'instabilité des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables.

Ce mémoire présente trois articles sur ce sujet

[1] **Exponential stability for small perturbations of steep integrable Hamiltonian systems**, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **24**, pp. 593-608, **2004**.

[2] **Hamiltonian stability and subanalytic geometry**, *Annales de l'Institut Fourier*, **56** (3), pp. 795-813, **2006**.

[3] **On the prevalence of exponential stability among nearly integrable Hamiltonian systems**, à paraitre dans *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (disponible sur ArXiv ou sur Mathematical Physics Preprint Archive, mp_arc 06-273), **2006**.

I.2 Le problème général

Tout d'abord, nous rappelons brièvement les avantages du formalisme hamiltonien pour étudier les systèmes mécaniques où la force dérive d'un potentiel et, plus généralement, les systèmes lagrangiens globalement réguliers (voir [AKN]).

Les résultats suivants sont valables pour un système hamiltonien quelconque mais nous allons exposer ces théorèmes dans le cas particulier des systèmes mécaniques. On étudie alors le mouvement d'un point sur une variété riemannienne M (variété de configuration) et le système d'ordre un associé aux équations de la mécanique classique (i.e. : $\ddot{q} = -\partial U(q)$ pour l'espace euclidien usuel) peut être transformé par dualité grâce à la transformation de Legendre. Il prend alors la forme canonique :

$$\dot{p} = -\partial_q H(p,q) \ ; \ \dot{q} = \partial_p H(p,q) \tag{1}$$

où H est une fonction numérique différentiable sur le fibré cotangent T^*M, q désigne des coordonnées locales de M et p les coordonnées conjuguées à q.

Cette fonction H est appelée *hamiltonien.*

Dans le cas de l'espace euclidien usuel, le hamiltonien prend la forme habituelle de l'énergie avec la somme de l'énergie cinétique $\frac{||p||^2}{2}$ et de l'énergie potentielle $U(q)$

D'un point de vue plus géométrique, T^*M peut être muni d'une structure symplectique canonique grâce à la forme de Liouville $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ où $(q_1, \dots , q_n)$ sont des coordonnées locales sur M et $(p_1, \dots , p_n)$ les coordonnées conjuguées (aussi appelées *impulsions*). L'équation (1) est ainsi celle qui est associée au gradient symplectique $\mathcal{X}_H^*$ de H défini par $\mathcal{I}_{\mathcal{X}_H^*}(\omega) = -dH$.

De plus, on dit qu'un difféomophisme (local) Φ du fibré cotangent T^*M est *symplectique* ou *canonique* s'il préserve la forme de Liouville, i.e. : $\Phi^*\omega = \omega$. Notamment, si l'on considère un hamiltonien X défini sur T^*M alors le flot Φ_X^t associé au système canonique gouverné par X est une transformation symplectique sur son domaine de définition (voir

[MH]). Un tel difféomorphisme conserve la forme canonique (1) des équations de Hamilton, c'est à dire que le système dans les nouvelles variables $(p, q) = \Phi(P, Q)$ est associé au gradient symplectique du hamiltonien $K(P, Q) = H \circ \Phi(P, Q)$. Ceci est un avantage important du formalisme hamiltonien puisque dans le système initial défini sur le fibré tangent TM, une transformation ne peut pas faire intervenir les positions q et les vitesses $\dot{q}$ tout en conservant la forme des équations étudiées, alors que dans le cadre canonique on peut mélanger les positions q et les impulsions p. C'est un des ingrédients centraux dans la théorie des perturbations hamiltoniennes qui sera utilisée par la suite.

I.2.a. Les systèmes intégrables :

Un autre point remarquable apparaît dans l'étude des systèmes hamiltoniens.

A priori, intégrer un système différentiel ordinaire de dimension $2n$ impose de déterminer $2n$ intégrales premières. Ici, l'existence de n intégrales premières peut permettre de garantir que le système (1) est intégrable par quadrature.

Remarquons d'abord qu'une fonction $F \in \mathcal{C}^{(1)}(T^*M, \mathbb{R})$ est constante le long des solutions $(p(t), q(t))$ du système associé à un hamiltonien $H \in \mathcal{C}^{(1)}(T^*M, \mathbb{R})$ si et seulement si

$$\frac{d}{dt}\left(F(p(t), q(t))\right) = \partial_q F \partial_p H - \partial_p F \partial_q H = \{F, H\}(t) = 0 \tag{2}$$

sur le domaine de définition de la solution considérée.

La fonction $\{F, H\}$ s'appelle *le crochet de Poisson* de F et de H.

On peut alors énoncer le :

Théorème 1.1 (Arnold-Liouville)

On considère un hamiltonien $H \in \mathcal{C}^{(1)}(T^*M, \mathbb{R})$ dont le système associé admet n intégrales premières indépendantes en involutions $\Psi_i \in \mathcal{C}^{(1)}(T^*M, \mathbb{R})$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, i.e. :

$$\Psi_1 = H \; ; \; \{\Psi_i, \Psi_j\} = 0 \text{ pour } (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \text{ et } d\Psi_1 \wedge \ldots \wedge d\Psi_n \neq 0.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{N}_\alpha = \{(p, q) \in T^*M \text{ avec } (\Psi_1, \ldots, \Psi_n) = \alpha\}$ est non vide, compact et connexe.

Alors, $\mathcal{N}_\alpha$ est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n.

De plus, il existe un ouvert $V \subset T^*M$ qui contient $\mathcal{N}_\alpha$, invariant pour le flot hamiltonien associé à H qui est canoniquement difféomorphe à $U \times \mathbb{T}^n$ où U est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

En effet, il existe un difféomophisme canonique Φ tel que le système (1) dans les nouvelles variables $(I, \theta) = \Phi^{-1}(p, q)$ est associé au hamiltonien $K(I) = H \circ \Phi(I, \theta)$ qui est indépendant des angles. Alors les équations associées sont trivialement intégrables puisque $\dot{I} = 0$ et $\dot{\theta} = \nabla K(I)$ où ∇K est le gradient de K sur U.

Les variables $(I, \theta) \in U \times \mathbb{T}^n$ sont appelées variables *actions-angles* du hamiltonien intégrable K.

Géométriquement, les propriétés précédentes se traduisent par le fait que l'espace des phases est feuilleté en tores invariants de dimension n qui portent des solutions quasi-périodiques.

I.2.b. Trois exemples de systèmes intégrables :

— Une chaine de *rotateurs* dont le hamiltonien associé s'écrit $K(I) = \frac{||I^2||}{2}$.

— Une chaine d'*oscillateurs harmoniques* (i.e. : n ressorts découplés de raideurs k_i^2 pour i variant entre 1 et n) dont le hamiltonien associé s'écrit $K(p,q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2 + (k_i q_i)^2}{2}$. Le passage en variables actions-angles s'obtient en utilisant les coordonnées polaires symplectiques :

$$p_i = \sqrt{2k_i I_i}\cos(\theta_i)\ ;\ q_i = \sqrt{2\frac{I_i}{k_i}}\sin(\theta_i) \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\}$$

ainsi les actions correspondent aux rayons des tores invariants et le hamiltonien devient $K(I) = \sum_{i=1}^{n} k_i I_i$ qui est intégrable.

— Le *problème de Kepler* où l'on étudie le mouvement d'un point soumis à l'attraction gravitationnelle d'un corps fixe placé à l'origine.

Le hamiltonien considéré est à trois degrés de liberté et s'écrit en coordonnées cartésiennes $H(p,q) = \frac{||p||^2}{2} - \frac{k}{||q||}$ avec une constante k positive.

Il est bien connu que pour des énergie négatives $H(p,q) < 0$, les solutions sont des ellipses admettant un foyer à l'origine. Les variables actions-angles (dites de Delaunay) s'expriment alors en fonction des éléments caractéristiques de l'ellipse parcouru.

Plus précisément, il s'agit de la longueur du demi-grand-, de l'excentricité, des trois angles d'Euler permettant de repérer la direction du demi-grand- dans l'espace par rapport à un axe de référence. Enfin, la seule variable évoluant rapidement est l'angle polaire du point considéré défini à partir du demi-grand-axe. Alors, le hamiltonien transformé ne dépend plus que du demi-grand-axe et est donc intégrable (on a cinq intégrales premières indépendantes en involutions alors que trois suffiraient).

Par contre, l'expression des variables actions-angles en fonction des coordonnées cartésiennes initiales est compliquée (voir [M], [Ni1])

I.3. Les systèmes quasi-intégrables :

Nous avons vu que les flots des systèmes hamiltoniens intégrables peuvent être étudiés en détail. Ces systèmes présentent un deuxième intérêt qui justifie leurs importances : de nombreux problèmes de physique mathématique peuvent être considérés comme des *perturbations* de systèmes intégrables que l'on appelle aussi des systèmes *quasi-intégrables*, plus précisément :

Définition 1.2 (systèmes quasi-intégrables : cas analytique)

Un système hamiltonien quasi-intégrable est une fonction $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^\omega\left(]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\times T^*M, \mathbb{R}\right)$ *où* $\varepsilon_0 > 0$ *telle que le hamiltonien* $H = \mathcal{H}(0,.) : T^*M \to \mathbb{R}$ *est intégrable.*

En utilisant les variables actions-angles (I, θ) associées à $\mathcal{H}(0,.)$, on se ramène à une famille de hamiltoniens prenant la forme

$$\mathcal{H}(\varepsilon, I, \theta) = h_0(I) + \varepsilon\mathcal{F}(\varepsilon, I, \theta) \text{ où } \mathcal{F} \in \mathcal{C}^\omega\left(]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\times U \times \mathbb{T}^n, \mathbb{R}\right) \quad (3)$$

avec U ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

En fait pour les problèmes étudiés ici, on pourra considérer sans perte de généralité, la famille de hamiltoniens :

$$\mathcal{H}(\varepsilon, I, \theta) = h_0(I) + \varepsilon f(I, \theta) \text{ où } f \in \mathcal{C}^\omega \left(U \times \mathbb{T}^n, \mathbb{R}\right). \tag{4}$$

Cette situation apparaît notamment pour l'étude du mouvement des planètes dans le système solaire (voir [M]). En effet, si la (faible) interaction mutuelle entre les planètes est négligée, alors le système considéré se découple en plusieurs problèmes de Kepler indépendants et est intégrable. C'est précisément pour l'étude de ce problème que la théorie des perturbations a été initiée au dix huitième siècle.

Le résultat le plus ambitieux serait de montrer que les systèmes quasi-intégrables sont conjugués à des systèmes intégrables. C'est à dire qu'il faudrait trouver une famille à un paramètre $V_\varepsilon \subset T^*M$ constituée d'ouverts connexes invariants pour le flot hamiltonien associé à $\mathcal{H}(\varepsilon, ., .)$ qui sont canoniquement difféomorphes à $U_\varepsilon \times \mathbb{T}^n$ où U_ε est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. De plus, le hamiltonien $\mathcal{H}(\varepsilon, ., .)$ sur V_ε doit être transformé en $h_\varepsilon(\widetilde{I})$ avec une famille à un paramètre de fonctions analytiques h_ε de $U_\varepsilon \times \mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Poincaré [P] a montré que ce résultat est génériquement faux, l'énoncé et la preuve de ce théorème seront donnés plus loin après l'exposé du principe de moyennisation et des méthodes de moyennisation des perturbations.

I.4. Principe de moyennisation :

Pour ce paragraphe et le suivant, on peut consulter les présentations Arnold, Kozlov et Neishtadt ([AKN]) ou Giorgilli ([Gi]).

On voit que dans le cas quasi-intégrable, le système considéré prend la forme :

$$\dot{I} = -\varepsilon \partial_\theta f(I, \theta) \ ; \ \dot{\theta} = \nabla h(I) + \varepsilon \partial_I f(I, \theta) \tag{5}$$

où ∇h est le gradient de h. Les variables sont scindées en deux groupes : celles qui varient sur une échelle temporelle rapide tandis que les autres dérivent lentement, c'est notamment le cas pour les actions.

Le *principe de moyennisation* consiste à remplacer le système initial par sa moyenne temporelle suivant le flot non perturbé Φ_h^t associé à h, c'est à dire que l'on passe à :

$$< H > (I, \theta) = h(I) + \varepsilon < f > (I, \theta) \text{ avec } < f > (I, \theta) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f\left(I, \theta + s \nabla h(I)\right) ds \right).$$

En fait, cette moyenne va dépendre des relations de commensurabilité qui sont vérifiées par les composantes du vecteur $\nabla h(I)$.

Plus précisément, à un sous-module $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$, on associe une *zone de résonance* :

$$\mathcal{Z}_\mathcal{M} = \{I \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } k.\nabla h(I) = 0 \text{ si et seulement si } k \in \mathcal{M}\}$$

Si le rang de $\mathcal{M}$ est égal à $r \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe une transformation symplectique $\phi = \mathcal{R}\theta$ et $I = {}^t\mathcal{R}J$ où $\mathcal{R} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ est une matrice unimodulaire dont les r premières lignes constituent une base de $\mathcal{M}$.

Dans les nouvelles variables, le hamiltonien considéré devient $\widetilde{h}(J)+\varepsilon\widetilde{f}(J,\phi)$ où $J=(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{n-r}$ et $\phi=(\phi_1,\phi_2)\in\mathbb{T}^r\times\mathbb{T}^{n-r}$ telles que $\nabla\widetilde{h}(J)=(0,\omega(J))$ lorsque ${}^t\mathcal{R}J\in\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ avec $\omega(J)\in\mathbb{R}^{n-r}$ qui ne vérifie aucune relation de commensurabilité.

Alors le flot linéaire de fréquence $\omega(J)$ sur le tore $\mathbb{T}^{n-r}$ est ergodique et la moyenne temporelle $<\widetilde{f}>(J,\phi)$ tend vers la moyenne spatiale

$$<\widetilde{f}>(J_1,J_2,\phi_1)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-r}\int\int_{\mathbb{T}^{n-r}}\widetilde{f}\,(J_1,J_2,\phi_1,\phi_2)\,d\phi_2. \tag{6}$$

Ainsi, le hamiltonien moyennisé ne dépend plus des angles rapides et le système considéré ne fait intervenir que des variables qui évoluent lentement (par exemple pour déterminer numériquement les solutions, on peut prendre un pas d'intégration de l'ordre de $1/\varepsilon$).

De manière équivalente, le principe de moyennisation est basé sur l'idée que les termes ignorés dans le champ de vecteur initial entraîne seulement de petites oscillations qui sont superposées aux solutions générales du système moyennisé, notamment on peut énoncer :

Théorème I.3.

Les actions J_2 conjuguées aux angles rapides θ_2 deviennent des intégrales premières du système moyennisé (qui est donc plus simple que le système initial).

De manière équivalente, on trouve $n-r$ intégrales premières qui sont des combinaisons entières des variables d'action initiales I.

Par contre, l'ensemble des points résonants (i.e. : situé dans une zone $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ avec $\mathcal{M}$ différent de $\{0\}$) peut être :

— vide (cas d'une chaîne d'oscillateurs avec des fréquences $(\omega_1,\dots,\omega_n)$ non résonantes).

— dense (c'est la situation générale lorsque l'application fréquence $\partial_I h(I)$ est localement inversible : $\left|\partial_I^2 h(I)\right|\neq 0$, par exemple c'est le cas pour la particule libre).

— égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier dans le cas où la différentielle de l'hamiltonien intégrable n'est pas de rang maximal, on dit qu'il admet une *dégénérescence propre.*

Cette dernière situation apparaît pour le problème de Kepler où le hamiltonien considéré ne dépend que du demi-grand-axe de l'ellipse parcourue.

Le principe de moyennisation a été introduit par Lagrange et Laplace dans leurs travaux sur les perturbations séculaires des orbites planétaires. Dans ce cas, le système non perturbé est constitué de n problèmes de Kepler découplés donc le théorème I.3 et la remarque précédente entraînent que les demi-grands-axes des planètes sont des intégrales premières du système moyen si leurs périodes de révolution autour du corps central ne sont pas commensurables. Ce résultat a été démontré par Laplace dans son étude de la stabilité du système solaire (1773).

I.5. Théorie des perturbations classiques :

Il s'agit maintenant de vérifier la validité du principe de moyennisation donc de s'assurer que les solutions du système complet restent proches de celles du système moyennisé.

Notamment, ceci sera le cas si l'on trouve une transformation canonique tangente à l'identité qui conjugue le hamiltonien initial à sa moyenne suivant les angles rapides ϕ_2 (i.e. : dans les variables adaptées à la résonance étudiée). On est donc ramené à un problème de forme normale où l'on recherche un système de coordonnées adéquat dans lequel les équations considérées prennent la forme la plus «simple» possible.

Ici, on considèrera une transformation correspondant au flot au temps 1 d'un système gouverné par un hamiltonien $X(I,\theta)=\varepsilon X_1(I,\theta)$ que l'on notera Φ_X^1.

Avec la formule de Taylor et la définition du crochet de Poisson, on obtient :

$$F\circ\Phi_X^1=F+\{F,X\}+\int_0^1(1-u)\{\{F,X\}X\}\circ\Phi_X^u du$$

pour toute fonction vectorielle $F\in\mathcal{C}^2\left(U\times\mathbb{T}^n,\mathbb{R}^m\right)$.

Ainsi, le hamiltonien transformé $H\circ\Phi_X^1$ admet le développement suivant en ε :

$$H\circ\Phi_X^1=h+\varepsilon\left(f+\{h,X_1\}\right)+\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right)$$

donc pour obtenir $H\circ\Phi_X^1=h(I)+\varepsilon<f>$, on doit résoudre :

$$f+\{h,X_1\}=<f>\Longleftrightarrow\nabla h(I).\partial_\theta X_1(I,\theta)=-f+<f> \tag{7}$$

qui est l'équation de conjuguaison linéarisée ou équation *homologique*. Il s'agit de l'équation centrale de la théorie des perturbations.

On est dans le cadre analytique donc la fonction f admet le développement en série de Fourier $f(I,\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}f_k(I)\exp\left(ik\theta\right)$.

Dans la zone de résonance $\mathcal{Z}_\mathcal{M}$, en utilisant l'expression de la moyenne spatiale (6) et après le changement de variable $(I,\theta)=\left({}^t\mathcal{R}J,\mathcal{R}^{-1}\phi\right)$, on voit que la moyenne temporelle admet le développement en série de Fourier $<f>(I,\theta)=\sum_{k\in\mathcal{M}}f_k(I)\exp\left(ik\theta\right)$.

Donc la fonction

$$X_1(I,\theta)=\sum_{k\notin\mathcal{M}}\frac{f_k(I)}{i\left(k.\nabla h(I)\right)}\exp\left(ik\theta\right)$$

fournit une solution formelle de l'équation homologique (7) définie sur $\mathcal{Z}_\mathcal{M}$ puisque les dénominateurs ne s'annulent pas sur cette zone.

On obtient ainsi une transformation qui normalise le hamiltonien au premier ordre et, par le même procédé, on peut éliminer *formellement* les angles rapides à tous les ordres (i.e. : le même type d'équation homologique apparaît pour déterminer X_n où $n\geq 1$).

Cette construction s'appelle la *méthode de Linstedt*.

I.6. Deux exemples de série divergentes en théorie des perturbations :

a. Présence de petits dénominateurs :

C'est la situation la plus connue qui correspond, par exemple, au théorème de non-intégrabilité analytique de Poincaré :

Théorème I.4.

On considère un hamiltonien $\mathcal{H}(\varepsilon, I, \theta) = h_0(I) + \varepsilon f(I, \theta)$ *où* $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^\omega(U \times \mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ *avec* U *un ouvert dans* $\mathbb{R}^n$*, qui vérifie les conditions de*

— Non-dégénérescence : l'application fréquence $\partial_I h(I)$ *est de rang maximal (i.e. :* $\left|\partial_I^2 h(I)\right| \neq 0$ *sur* U*).*

— Généricité : la perturbations a un développement en série de Fourier $f(I, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k(I) \exp(ik\theta)$ *complet (i.e. : aucun coefficient* f_k *n'est identiquement nul sur* U*).*

Alors, il n'existe pas de transformation canonique analytique définie sur un ouvert dans U *qui transforme* $\mathcal{H}(\varepsilon, ., .)$ *en un hamiltonien intégrable.*

Preuve : comme on l'a vu, cette transformation ne peut être définie que dans la zone de non-résonance ($\mathcal{Z}_0 = \{I \in \mathbb{R}^n$ tels que $k.\nabla h(I) = 0$ si et seulement si $k = 0\}$) qui admet un complémentaire dense avec notre condition de non-dégénérescence.▶

De plus, avec l'hypothèse de non-dégénérescence, les tores associés à des résonances d'ordre maximal (i.e. : avec rang $(\mathcal{M}) = n - 1$) sont denses. Ils sont feuilletés en orbites périodiques pour le système non perturbé mais, en général, seulement un nombre fini d'entre elles subsistent dans le problème perturbé pendant que les autres donnent naissance à un comportement chaotique. On a donc un ensemble dense de tores invariants qui sont détruits par la perturbation.

Notamment, ceci implique qu'un système hamiltonien générique *n'est pas intégrable* (voir [MM]).

Par contre, la conjugaison à un système intégrable est formellement possible sur $\mathcal{Z}_0$ dont le complémentaire est de mesure nulle. Poincaré ([P]) pensait que la convergence des séries de Lindstedt était «hautement improbable» mais Kolmogorov ([Ko]) a montré en 1954 (toujours avec la condition de non-dégénérescence du théorème I.4.) que la plupart des tores au-dessus de $\mathcal{Z}_0$ se prolongent en tores invariants sous le flot perturbé. Arnold ([A1]) a prouvé que le complémentaire de ces tores invariants a une mesure qui tend vers zéro avec la taille de la perturbation et Moser ([Mo]) a étendu ce résultat aux hamiltoniens suffisamment différentiables.

Pour un panorama de la théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser, on peut se référer à la présentation de Sevryuk ([Se1]).

On obtient ainsi un résultat de *stabilité en mesure* car la plupart des orbites sont situées sur un tore invariant donc quasi-périodiques et perpetuellement stables. En contrepartie, ces tores forment un ensemble de Cantor nul part dense sans points intérieurs et, du point de vue de la physique, il est impossible de déterminer si une condition initiale conduit à une solution quasi-périodique ou pas.

b. Présence de grands multiplicateurs :

Même en l'absence de petits dénominateurs, la méthode de moyennisation peut conduire à des séries divergentes, ceci avait déjà été remarqué par Poincaré :

«Ce qui empêche la convergence, ce n'est donc pas la présence de petits diviseurs s'introduisant par l'intégration, mais celle des grands multiplicateurs s'introduisant par la différentiation» ([P]).

Plus précisément, Ramis et Schäfke ([RS], voir aussi [S]) ont montré que dans le cadre analytique considéré en (4), avec la méthode de moyennisation on va obtenir des transformations *Gevrey-2*.

C'est à dire qu'il existe une transformation $\mathcal{T}$ qui est Gevrey-2 sur $U \times \mathbb{T}^n$ (i.e.: $\mathcal{T} \in \mathcal{C}^\infty (U \times \mathbb{T}^n)$ où $\left|\left|\partial^k \mathcal{T}\right|\right|_\infty \leq CM^{2|k|}k!^2$ avec des constantes positives C, M et $k = (k_1, \ldots, k_{2n}) \in \mathbb{N}^{2n}$; $|k| = |k_1|+\ldots+|k_{2n}|$; $k! = k_1! \ldots k_{2n}!$) telle que le hamiltonien $\mathcal{H}(\varepsilon, ., .)$ sur $U \times \mathbb{T}^n$ est transformé en $h_\varepsilon(\widetilde{I})$ avec une famille à un paramètre h_ε de fonctions Gevrey-2 de $U \times \mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, Marco et Sauzin ([MS]) ont montré que si l'on part d'un hamiltonien Gevrey-α, c'est à dire: $\left|\left|\partial^k \mathcal{H}(I, \theta)\right|\right|_\infty \leq CM^{\alpha|k|}(k!)^\alpha$ avec les conventions précédentes sur $k \in \mathbb{N}^{2n}$, alors on va obtenir une transformation normalisatrice Gevrey-α+1. Dans ce cas, en utilisant le procédé de «sommation au plus petit terme» (voir [R] et plus loin dans ce mémoire), on obtient un changement de coordonnées canonique qui permet de normaliser le hamiltonien jusqu'à un reste exponentiellement petit par rapport à la taille de la perturbation.

Pour présenter ces techniques, nous allons développer un exemple tiré d'un article de Neishtadt ([Nei]) qui illustre de manière simple les problèmes d'analyse qui apparaissent.

On considère le système quasi-intégrable gouverné par le hamiltonien

$$H(I_1, I_2; \theta_1, \theta_2) = I_1 - \varepsilon \left[I_2 - \cos(\theta_1) f(\theta_2)\right] \text{ défini sur } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$$

avec $f(\theta) = \displaystyle\sum_{m \geq 1} \frac{\alpha_m}{m} \cos(m\theta)$ où $\alpha_m = \exp(-\alpha m)$ pour $0 < \alpha \leq 1$.

De manière équivalente, $f'(\theta) = \operatorname{Re}(g(-\alpha + i\theta))$ où $g(z) = (1 - \exp(z))^{-1}$ donc la singularité complexe de f la plus proche de l'axe réel est située en $-i\alpha$. Inversement, toute fonction réelle admettant une extension holomorphe sur une bande complexe de largeur α autour de l'axe réel (i.e.: $|\operatorname{Im}(z)| \leq \alpha$) a des coefficients de Fourier majorés par $(C\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ avec une constante positive C.

On note aussi que le système associé à H est intégrable par quadratures.

Il s'agit maintenant de construire une forme normale résonante par rapport à la partie intégrable I_1 dans laquelle l'angle rapide θ_1 a disparu. En fait, formellement, il est possible d'éliminer totalement les angles dans la perturbation. En effet, si on considère la transformation canonique Φ^1_X correspondant au flot au temps 1 associé au système gouverné par un hamiltonien auxiliaire $X(\theta_1, \theta_2) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n X_n(\theta_1, \theta_2)$ alors, à cause de la linéarité de H en (I_1, I_2) et du fait que X ne dépend que des angles (θ_1, θ_2), le hamiltonien transformé prend la forme:

$$H \circ \Phi^1_X = H + \{H, X\} + \int_0^1 (1 - u)\{\{H, X\}X\} \circ \Phi^u_X du = H + \{H, X\}.$$

Dans ce cas, pour éliminer le terme angulaire $\cos(\theta_1) f(\theta_2)$, on est ramené à résoudre les équations

$$\partial_{\theta_1} X_1 (\theta_1, \theta_2) = \cos(\theta_1) f(\theta_2) \text{ et } \partial_{\theta_1} X_n (\theta_1, \theta_2) = \partial_{\theta_2} X_{n-1} (\theta_1, \theta_2)$$

ce qui est possible car les moyennes par rapport à θ_1 des fonctions qui interviennent sont toutes nulles.

On voit qu'aucun petit dénominateur n'apparaît dans cette construction.

La solution s'écrit $X_n(\theta_1,\theta_2)=\cos\left(\theta_1-n\frac{\pi}{2}\right)f^{(n-1)}(\theta_2)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, donc

$$X(\theta_1,\theta_2)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\varepsilon^n\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha_m}{m}m^n\cos\left(\theta_1-n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m\theta_2+n\frac{\pi}{2}\right)$$

et, par exemple, $X\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\varepsilon\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}\exp(-\alpha m)(\varepsilon m)^{2k}$ donc $X\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est une série divergente pour tout $\varepsilon>0$ puisque l'on peut prendre $\varepsilon\geq\frac{1}{m}$.

Par contre, si l'on effectue une transformation polynomiale engendrée par $\sum_{n\geq1}^{N}\varepsilon^n X_n(\theta_1,\theta_2)$ alors le hamiltonien transformé prend la forme

$$H(I_1,I_2;\theta_1,\theta_2)=I_1-\varepsilon I_2+\varepsilon^{N+1}\partial_{\theta_2}X_N(\theta_1,\theta_2)$$

avec $\partial_{\theta_2}X_N(\theta_1,\theta_2)=\cos\left(\theta_1-N\frac{\pi}{2}\right)f^{(N)}(\theta_2)$ et $f^{(N)}(\theta_2)=\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\alpha_m m^N\cos\left(m\theta_2+N\frac{\pi}{2}\right)$.

Avec le choix des coefficients $\alpha_m=\exp(-\alpha m)$, on obtient notamment :

$$\partial_{\theta_2}X_{2N}(0,\theta_2)=\mathrm{Re}\left(g^{(2N)}(i\theta_2-\alpha)\right)\ \text{ et }\ \partial_{\theta_2}X_{2N+1}\left(\frac{\pi}{2},\theta_2\right)=\mathrm{Im}\left(g^{(2N+1)}(i\theta_2-\alpha)\right)\tag{8}$$

toujours avec la fonction $g(z)=\frac{1}{1-\exp(z)}$.

Pour $(\alpha,\theta_2)\in]0,1]\times[-\pi,\pi]$, le pôle de g le plus proche de $-\alpha+i\theta_2$ se situe à l'origine. On peut alors montrer que le terme dominant dans le développement asymptotique de $g^{(n)}(i\theta_2-\alpha)$ lorsque n tend vers l'infini est donné par la dérivée de la partie polaire du développement en série de Laurent de g en 0, plus précisément :

$$\forall\delta>0,\ \exists N(\delta,\alpha,\theta_2)\text{ tel que }n\geq N\Longrightarrow\left|g^{(n)}(i\theta_2-\alpha)+\frac{(-1)^n n!}{(i\theta_2-\alpha)^{n+1}}\right|\leq\frac{\delta n!}{|i\theta_2-\alpha|^{n+1}}.$$

L'estimation précédente permet de prouver la majoration :

$$\forall\Delta>0,\ \exists N_1(\Delta)\text{ tel que }N\geq N_1\Longrightarrow||\partial_{\theta_2}X_N||_\infty\leq\left|g^{(N)}(-\alpha)\right|\leq(1+\Delta)\frac{N!}{\alpha^{N+1}}$$

et les minorations :

$$\forall \Delta > 0,\ \exists N_2(\Delta) \text{ tel que } N \geq N_2 \Longrightarrow \begin{cases} |\partial_{\theta_2} X_{2N}(0,0)| \geq (1-\Delta)\dfrac{(2N)!}{\alpha^{2N+1}} \\ \left|\partial_{\theta_2} X_{2N+1}\left(-\frac{\pi}{2}, \tan\left(\frac{\pi}{4(N+1)}\right)\alpha\right)\right| \geq (1-\Delta)\dfrac{(2N+1)!}{\alpha^{2(N+1)}} \end{cases}$$

donc la partie non normalisée au bout de N pas de théorie des perturbations est exactement de taille comparable à $\varepsilon^{N+1}\dfrac{N!}{\alpha^N}$.

On voit que le reste décroit rapidement avant de croitre vers l'infini, c'est ce que Poincaré appelle une série «convergente au sens des astronomes» et «divergente au sens des géomètres».

Nous pouvons alors utiliser le procédé de «sommation au plus petit terme» : pour $\varepsilon > 0$ *fixé*, la qualité de l'approximation est optimale lorsque $||\partial_{\theta_2} X_{N-1}||_\infty \simeq ||\partial_{\theta_2} X_N||_\infty$ ce qui impose $N = E(\frac{\alpha}{\varepsilon})$. Dans les problèmes qui suivent, il est plus difficile de prévoir la place précise du plus petit terme. On prend alors un «pseudo plus petit terme» en choisissant pour N la partie entière de $\frac{a\alpha}{\varepsilon^k}$ où les constantes positives a et k sont fixées par la structure du problème étudié.

Avec la formule de Stirling, on a alors un reste de taille comparable à $\sqrt{2\pi\alpha\varepsilon}\exp(-\alpha/\varepsilon)$ qui est *exponentiellement petit* par rapport à la perturbation initiale. On peut aussi noter la dépendance exponentielle de cette approximation par rapport à la largeur d'analyticité complexe du hamiltonien considéré.

Nous avons trouvé un changement de variables qui donne une forme normale approchée avec une erreur minimale dans le cas d'une transformation analytique par rapport aux variables actions-angles et au paramètre ε. En fait, cette dernière hypothèse d'analyticité par rapport à ε n'est pas nécessaire comme on peut le voir en suivant les raisonnements de l'article de Neishtadt ([Nei]) exposés ci-dessous.

Si l'on considère un changement de variable symplectique qui ne dépend que des angles :

$$\mathcal{T}(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = (I_1 + \varepsilon U_1(\theta_1, \theta_2; \varepsilon), I_2 + \varepsilon U_2(\theta_1, \theta_2; \varepsilon), \theta_1, \theta_2)$$

où U_1, U_2 sont des fonctions continuement différentiables sur $\mathbb{T}^2$ avec une dépendance *arbitraire* en ε, alors nécessairement $U_j = \partial_{\theta_j} X(\theta_1, \theta_2; \varepsilon)$ pour $j \in \{1, 2\}$ où $X \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{T}^2)$.

On note le développement en série de Fourier de X avec des exponentielles complexes :

$$X(\theta_1, \theta_2; \varepsilon) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2} \gamma_{k_1,k_2}^{(\varepsilon)} \exp\left[i(k_1\theta_1 + k_2\theta_2)\right].$$

Le hamiltonien transformé s'écrit : $H \circ \mathcal{T}(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = I_1 - \varepsilon I_2 + \varepsilon F(\theta_1, \theta_2; \varepsilon)$ où

$$F(\theta_1, \theta_2; \varepsilon) = \partial_{\theta_1} X(\theta_1, \theta_2) - \varepsilon\partial_{\theta_2} X(\theta_1, \theta_2) + \cos(\theta_1) f(\theta_2).$$

Suivant la méthode de Neishtadt, nous allons calculer la moyenne de F le long du cercle $\theta_1 = m\theta_2$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F(m\theta,\theta)d\theta =& i \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}^2} (k_1 - \varepsilon k_2)\gamma^{(\varepsilon)}_{k_1,k_2} \int_0^{2\pi} \exp[i(k_1 m + k_2)\theta]d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) f(\theta)d\theta \\ =& 2i\pi(1-\varepsilon m)\sum_{k\neq 0} k\gamma^{(\varepsilon)}_{k,-mk} + 2\pi\frac{\alpha_m}{2m}\end{aligned}$$

donc, en prenant $\varepsilon = 1/m$ on trouve une suite de perturbations $F_m(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{m}F(\theta_1,\theta_2)$ telles que l'on ne peut éliminer la phase rapide θ_1 au-delà d'un terme d'ordre $\varepsilon^2\exp(-\alpha/\varepsilon)$ avec notre choix des coefficients α_m.

En fait, dans l'exemple précédent, on voit apparaître le petit dénominateur asymptotique $(k_1 - \varepsilon k_2)^{-1}$ lorsque $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Cette situation est celle qui sera tout le temps présente pour établir les résultats de stabilité qui suivent.

Enfin, il convient de noter que l'obtention d'un hamiltonien normalisé ne permet pas de confiner les solutions du système perturbé. Par exemple, on peut considérer la forme normale $H(I_1,I_2,\theta_1,\theta_2) = 2I_1I_2 + \varepsilon\sin(\theta_2)$ par rapport au module $\mathcal{M} = \mathbb{Z}\vec{i}$ avec le vecteur $\vec{i} = (1,0)$, elle admet la solution $(I_1(t),I_2(t),\theta_1(t),\theta_2(t)) = (0,\varepsilon t,\varepsilon t^2/2,0)$ qui part de l'origine $(0,0,0,0)$ au temps $t=0$ et n'est pas bornée. On peut aussi remarquer que la vitesse de dérive de l'action I_2 est maximale compte tenu de la taille de la perturbation.

Par contre, une forme normale non résonante (donc relativement au module nul $\{0\}$) est intégrable, les nouvelles variables d'action sont constantes. Notamment, si l'on considère une forme normale intégrable approchée avec une erreur exponentiellement petite par rapport à la taille de la perturbation alors la vitesse de dérive des actions initiales sera au plus *exponentiellement lente*. C'est l'un des ingrédients centraux de la théorie de Nekhorochev qui va être exposé dans le prochain chapitre.

II Stabilité exponentielle des systèmes hamiltoniens quasi-intégrables :

En 1977, Nekhorochev ([Ne2], [Ne3]) a montré des résultats de stabilité du type suivant :

Définition II.1. (stabilité exponentielle)

On considère un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un hamiltonien intégrable analytique $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec les variables actions-angles associées $(I, \varphi) \in \Omega \times \mathbb{T}^n$ où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Pour une constante arbitraire $\rho > 0$, on note $\mathcal{O}_\rho$ l'espace des fonctions analytiques sur un voisinage complexe $\Omega_\rho \subset \mathbb{C}^{2n}$ de taille ρ autour de $\Omega \times \mathbb{T}^n$ muni de la norme $\mathcal{L}^\infty$ sur Ω_ρ qui sera noté $||.||_\rho$.

On dira que le hamiltonien h est exponentiellement stable sur un ensemble $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ s'il existe des constantes positives ρ, C_1, C_2, a, b et ε_0 qui dépendent seulement de h et $\widetilde{\Omega}$ telles que :

i) $h \in \mathcal{O}_\rho$.

ii) Pour toute fonction $\mathcal{H}(I, \varphi) \in \mathcal{O}_\rho$ telle que $||\mathcal{H} - h||_\rho = \varepsilon < \varepsilon_0$, une solution arbitraire $(I(t), \varphi(t))$ du système hamiltonien associé à $\mathcal{H}$ avec une action initiale $I(t_0)$ dans $\widetilde{\Omega}$ est définie sur l'intervalle de temps $[t_0 - \exp(C_2/\varepsilon^a), t_0 + \exp(C_2/\varepsilon^a)]$ et vérifie :

$$||I(t) - I(t_0)|| \leq C_1 \varepsilon^b \text{ pour } |t - t_0| \leq \exp(C_2/\varepsilon^a) \qquad (\mathcal{E})$$

a et b sont appelés exposants de stabilité.

Remarque II.2. : La définition précédente peut être étendue au cas d'un hamiltonien intégrable de classe Gevrey.

Il s'agit donc de résultats de stabilité *effective* par opposition aux résultats de stabilité en mesure de type KAM.

Pour introduire le problème, on commence par un exemple typique de hamiltonien *non* exponentiellement stable : $h(I_1, I_2) = I_1^2 - I_2^2$. En effet, une dérive des actions $(I_1(t), I_2(t))$ sur un segment de longueur 1 et sur un temps de l'ordre de $1/\varepsilon$ apparaît dans le cas d'une solution du système perturbé associé a $h(I_1, I_2) + \varepsilon \sin(\theta_1 + \theta_2)$ avec une action initiale située sur la première diagonale $(I_1(0) = I_2(0))$. On note aussi que la vitesse de dérive des actions dans cet exemple est maximale compte tenu de la taille ε de la perturbation.

Le point important dans cet exemple qui doit être évité pour garantir une stabilité exponentielle est le fait que le gradient $\nabla h(I_1, I_1)$ reste orthogonal à la première diagonale.

De manière équivalente, le gradient de la restriction de h sur la première diagonale est identiquement nul.

Nekhorochev ([Ne1], [Ne2], [Ne3]) a introduit la classe des fonctions *escarpées* où le problème précédent est évité, cette notion va être précisée ci-dessous.

Dans ce cadre, Nekhorochev a montré que :

Théorème II.3. ([Ne2], [Ne3])

Si le hamiltonien intégrable h est réel-analytique, non-dégénéré ($|\nabla^2 h(I)| \neq 0$ pour tout $I \in \Omega$) et escarpé alors h est exponentiellement stable.

La première étape de la preuve consiste à construire des formes normales résonantes qui imposent les directions où une dérive des variables d'action peut intervenir lorsque l'on considère une solution du système perturbé. Ceci impose de définir des régions où l'on contrôle les petits dénominateurs qui peuvent apparaître.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-module de $\mathbb{Z}^n$, α une constante positive et K un entier non nul, un sous-ensemble $\Delta \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit (α, K)-non-résonant modulo Λ si :

$$\text{pour tout point } I \in \Delta, \text{ on a} : |k.\partial_I h(I)| \geq \alpha \text{ lorsque } k \in \mathbb{Z}^n_K \backslash \Lambda$$

où $\mathbb{Z}^n_K = \{k \in \mathbb{Z}^n \text{ tel que } ||k||_1 = |k_1| + \ldots + |k_n| \leq K\}$.

Sur ce type de domaine, on peut normaliser le hamiltonien jusqu'à un reste exponentiellement petit grâce aux méthodes de sommation au plus petit terme exposées dans le premier chapitre, plus précisément :

Lemme II.4. ([Pö1])

On considère le domaine $\mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{T}^n$ où Ω est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et un hamiltonien $\mathcal{H}$ quasi-intégrable, analytique sur un voisinage complexe $\mathcal{D}_\rho \subset \mathbb{C}^{2n}$ de taille ρ autour de $\Omega \times \mathbb{T}^n$.

Soit Δ un sous-ensemble de Ω qui est (α, K)-non-résonant modulo $\mathcal{M}$, on suppose que les inégalitées suivantes sont vérifiées :

$$\varepsilon < C_1 \frac{\alpha\rho}{K} \ ; \ \rho < C_2 \frac{\alpha}{K}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de ε, α, K et ρ.

Alors il existe un symplectomorphisme Φ défini au voisinage de $\Delta \times \mathbb{T}^n$ qui transforme $\mathcal{H}$ en une forme normale résonante relativement au module $\mathcal{M}$.

C'est à dire que $\mathcal{H} \circ \Phi = h + g + f_*$ avec une partie principale de la perturbation g dont le développement en série de Fourier prend la forme $g(I, \varphi) = \sum_{k \in \mathcal{M}} g_k(I) \exp(ik\varphi)$ et :

$$||g||_\rho < C_3 \varepsilon \ \text{ et } \ ||f_*||_\rho < C_4 \varepsilon \mu \ \text{ où } 0 < \varepsilon << 1 \ \text{ et } \mu = \exp(-C_5 K)$$

avec des constantes positives C_3, C_4 et C_5 indépendantes de ε, α, K et ρ.

Corollaire II.5.

Avec les hypothèses précédentes, pour toute solution du système associé à $\mathcal{H}$ définie sur $]a, b[$, avec $(I, \varphi) = \Phi(I', \varphi')$ on obtient :

$$\text{dist}(I'(t), \mathcal{M}(t_0)) \leq 2 \frac{\varepsilon}{\rho} \ \textit{pour} \ \text{Sup}\left(a, t_0 - \frac{1}{\mu}\right) = \widetilde{a} \leq t \leq \widetilde{b} = \text{Inf}\left(b, t_0 + \frac{1}{\mu}\right)$$

où $\mathcal{M}(t_0)$ est le sous espace affine dans $\mathbb{R}^n$ passant par $I(t_0)$ de direction $M = \mathcal{M} \otimes \mathbb{R}$ qui est le sous espace vectoriel dans $\mathbb{R}^n$ engendré par $\mathcal{M}$.

Démonstration : Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire orthogonal à M alors :

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{u}.(I'(t) - I'(t_0))|| \leq & \text{Sup}_{[\tilde{a}, \tilde{b}]} \left(\left|\left| \overrightarrow{u}. \frac{\partial \mathcal{H} \circ \Phi}{\partial \varphi'}(I'(t), \varphi'(t)) \right|\right| |t - t_0| \right) \\ \leq & \frac{1}{\mu} \left|\left| \frac{\partial f_*}{\partial \varphi'} \right|\right|_{\rho/2} \leq 2 \frac{\varepsilon}{\rho} \end{aligned}$$

car $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi'}(I',\varphi') = i \sum_{k\in\mathcal{M}} k g_k(I) \exp(ik\varphi) \in M$ et les inégalités de Cauchy donnent :

$$\left|\left|\frac{\partial f_*}{\partial \varphi'}\right|\right|_{\rho/2} \leq \frac{2}{\rho}\,||f_*||_\rho \leq 2\frac{\varepsilon\mu}{\rho}. \blacktriangleright$$

La condition d'escarpement va précisément permettre de garantir qu'une dérive d'ordre ε^b des variables d'action le long du sous espace affine $\mathcal{M}(t_0)$ entraîne que si la solution considérée sort d'un voisinage de la zone de résonance d'ordre $K \in \mathbb{N}^*$ associée à $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}^K = \{I \in \mathbb{R}^n \ / \ k.\nabla h(I) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathcal{M} \text{ avec } |k_1| + \ldots + |k_n| \leq K\}$$

alors elle va passer dans une zone $(\widetilde{\alpha}, K)$-non-résonante associée à un module $\widetilde{\mathcal{M}}$ de dimension *strictement inférieure* à celle de $\mathcal{M}$.

En poursuivant ce procédé, on peut montrer que si les variables d'action $I(t)$ sortent d'une boule de rayon ε^b centrée en $I(t_0)$, elles passent nécessairement dans une zone non-résonante à l'ordre K (i.e. : $k.\nabla h(I) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ avec $||k||_1 \leq K$). On peut alors construire une forme normale intégrable approchée avec une erreur exponentiellement petite par rapport à la taille de la perturbation. Ainsi, les actions restent au moins un temps exponentiellement long au voisinage de $I(t_0)$.

On donne maintenant la définition d'une fonction escarpée :

Définition II.6. (Escarpement : [Ne1], [Ne2], [2])

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, une fonction h différentiable sur Ω est escarpée au point $I \in \Omega$ le long d'un sous-espace affine $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ qui contient I si il existe des constantes positives C, δ et p telles que le long de toute courbe continue γ dans Λ qui joint I et un point à une distance $r < \delta$, la norme de la projection du gradient $\nabla h(x)$ sur la direction de Λ est plus grande que Cr^p en un point $\gamma(t_*)$ tel que $||\gamma(t_*) - I|| \leq r$ pour tout $t \in [0, t_*]$.

(C, δ) and p sont appelés respectivement les coefficients d'escarpement et les indices d'escarpement.

Avec les hypothèses précédentes, la fonction h est escarpée au point $I \in \Omega$ si I n'est pas un point critique pour h et si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, il existe des constantes positives C_k, δ_k et p_k telles que h est escarpée en I le long de tous sous-espace affine de dimension k qui contient I avec les coefficients (C_k, δ_k) et les indices p_k.

Finalement, une fonction h différentiable est escarpée sur un domaine $\Sigma \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ avec les coefficients d'escarpement $(C_1, \ldots, C_{n-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$ et les indices d'escarpement $(p_1, \ldots, p_{n-1})$ s'il n'y a pas de point critique pour h dans Σ et si h est escarpée en tout point $I \in \Sigma$ avec ces coefficients et indices.

Remarque II.7. : On voit que le gradient $\nabla h(I)$ ne peut pas rester perpendiculaire à l'espace vectoriel $M = \mathcal{M} \otimes \mathbb{R}$ dans le cas d'une dérive des variables d'action suivant un sous espace affine de direction M.

Par exemple, les fonctions convexes ou quasi-convexes (i.e. : le système $\nabla h(x).\eta = \nabla^2 h(x)\eta.\eta = 0$ n'admet pas de solutions non nulles en tout point $x \in \Omega$) sont escarpées avec tous les indices d'escarpement égaux à *un*. Inversement, $h(x,y) = x^2 - y^2$ est typiquement une fonction non escarpée mais en ajoutant un terme du troisième ordre y^3, on retrouve une fonction escarpée. En effet, la propriété d'escarpement est garantie par la condition suivante sur les jets d'ordre 3 de h qui généralise la quasi-convexité : le système $\nabla h(x).\eta = \nabla^2 h(x)\eta.\eta = \nabla^3 h(x)\eta\eta\eta = 0$ n'admet pas de solutions η non nulles en tout point $x \in \Omega$. On peut ainsi montrer que les fonctions escarpées sont génériques parmi les fonctions de deux ou trois variables. Par contre pour les jets d'ordre 4 et au-delà, la situation devient plus compliquée avec la formule de Faa de Bruno.

De plus, la définition II.6. est minimale puisqu'une fonction peut être escarpée le long de tous les sous-espaces de dimension inférieure ou égale à $k < n-1$ et non escarpée pour un sous-espace de dimension l plus grande que k (considérer la fonction $h(x,y,z) = (x^2-y)^2+z$ en $(0,0,0)$ le long de toutes les droites et le long du plan $z = 0$).

Enfin, la définition II.6. parait légérement moins restrictive que celle donnée initialement par Nekhorochev ([Ne1], [Ne2]). En fait, elle retient la propriété centrale nécessaire pour établir des résultats de stabilité en dynamique hamiltonienne avec les méthodes exposées plus haut et on prouve dans [2] que ces définitions sont équivalentes à celles de Nekhorochev dans le cas d'une fonction réelle-analytique.

Aucune étude générale de la stabilité des systèmes hamiltoniens proche d'un système intégrable escarpé n'a été mené depuis l'article original de Nekhorochev et c'est précisément l'objectif du premier travail ([1]) dans ce mémoire.

En effet, Benettin and Gallavotti ([BG]) ont montrés que la quasi-convexité du hamiltonien non perturbé permet de simplifier considérablement la preuve de ce type de théorèmes. On peut alors utiliser la conservation de l'énergie perturbée alors que cet ingrédient n'est pas utilisé dans les raisonnements originaux de Nekhorochev. Plus précisément, après avoir construit une forme normale résonante, la quasi-convexité du hamiltonien non perturbé et la conservation de l'énergie fournit une fonction de Liapounov approchée sur des intervalles de temps exponentiellement longs, ceci permet de confiner les actions sur le temps désiré. Ainsi, il suffit de construire une *seule* forme normale au voisinage de la condition initiale de l'orbite considérée. Au contraire, la construction originale de Nekhorochev impose une étude délicate de la géométrie des résonances qui donne une partition précise de l'espace des phases en ouverts où l'on peut construire des formes normales résonantes associées à des modules de dimension *fixée*. On conclut alors avec l'argument basé sur l'escarpement de la partie intégrable énoncé plus haut. Pour cette raison, pratiquement toutes les études de stabilité de ce type ont été faites dans le cas convexe au cours des années 80 et 90.

En particulier, toujours dans le cadre convexe, Lochak-Neishtadt ([Lo], [LN], [LNN]) et Pöschel ([Pö1]) ont obtenu indépendamment les exposants de stabilité $a = b = 1/2n$ globalement pour les systèmes à n degrés de liberté et $a = b = 1/2(n-m)$ pour les trajectoires partant dans une zone associée à une résonance de multiplicité m. Le résultat de Pöschel ([Pö1]) utilise l'argument de confinement par la convexité de Benettin et Gallavotti mais aussi une étude de la géometrie des résonances qui est plus raffinée que celle de Nekhorochev. Au contraire, La preuve de Lochak est basée sur des normalisations autour des orbites périodiques du hamiltonien intégrable. De cette manière, Lochak obtient des ensembles ouverts sur lesquels on a des trajectoires exponentiellements stables. Puis, le théorème de Dirichlet d'approximation diophantienne simultanée assure que ces ensembles ouverts recouvrent l'espace des phases ce qui donne le résultat global de stabilité.

Enfin, Marco et Sauzin ([MS]) dans le cas de systèmes de classe Gevrey puis Marco et Lochak ([ML]) dans le cas analytique ont montré que l'exposant local $a = 1/2(n-m)$ associé au temps de stabilité est presque *optimal* pour $n = 4$ et $m = 2$.

Par contre, en suivant les démonstrations précédentes, on ne peut pas étudier la stabilité des systèmes hamiltoniens proches d'un système intégrable escarpé et même simplement le cas d'une perturbation non-autonome arbitraire d'un hamiltonien intégrable convexe malgrés l'importance de ces situations en physique. Par exemple, on peut ramener un hamiltonien convexe perturbé periodiquement par rapport au temps à un hamiltonien quasi-convexe avec une perturbation autonome en passant à l'espace des phases étendu avec le temps et l'énergie. Par contre, la même réduction n'est pas possible pour une perturbation dépendant arbitrairement du temps et on ne peut plus utiliser la conservation de l'énergie pour prouver des résultats de stabilité. Cette situation apparaît dans l'étude de la dynamique d'une particule avec un potentiel dépendant du temps et une grande énergie cinétique. Un hamiltonien intégrable convexe avec une perturbation non-autonome arbitraire apparaît aussi dans l'étude de la dynamique d'un astéroide dans le système solaire. Des résultats de stabilité exponentielle de type Nekhorochev ont été montrés dans ces deux derniers problèmes respectivement par Giorgilli-Zehnder ([GZ]) et Guzzo-Morbidelli ([GM]) en suivant les raisonnements originaux de Nekhorochev dans le cas convexe. Finalement, la théorie de Nekhorochev s'applique aussi au cas d'un point d'équilibre elliptique dans un système hamiltonien (voir [Ne2], [FGB], [Ni2], [Pö2]). Mais l'exemple le plus classique de ce type de problème en astronomie, à savoir la stabilité d'un astéroide situé au sommet d'un triangle équilatéral avec le Soleil et Jupiter (les points de Lagrange L4 et L5) ne peut pas être abordé avec les démonstrations précédentes. Benettin, Fasso et Guzzo ([BFG]) ont montré que ce problème de la stabilité des points de Lagrange pouvait se ramener à l'étude d'un hamiltonien quasi-intégrable à trois degrés de liberté qui vérifie la condition d'escarpement à l'ordre 3 énoncée plus haut. Ceci permet de garantir un confinement des astéroides situés suffisamment prés des points de Lagrange L4 ou L5 sur de très longs intervalles de temps.

III Description des résultats de l'article [1] :

Ici, nous reprenons le problème de stabilité étudié initialement par Nekhorochev ([Ne2], [Ne3]). Notre démonstration reprend le mécanisme de Nekhorochev puisque l'on analyse la dynamique autour des résonances en utilisant des formes normales résonantes. Mais on remplace la construction globale dans la démonstration originale par une construction semi-locale le long de chaque trajectoire qui est basée sur l'approximation des fréquences $\nabla h(I(t))$ à certains instants par des vecteurs rationnels comme dans la preuve de Lochak de ce résultat de stabilité exponentielle pour le cas convexe ([Lo]). Ceci permet de simplifier notablement la démonstration initiale et donne une clarification de la dépendance des exposants de stabilité par rapport aux paramètres intervenant dans la preuve. De plus, les estimations de ces exposants sont aussi améliorées, plus particulièrement nous obtenons :

Théorème III.1.
Avec les hypothèses d'escarpement et d'analyticité, pour une perturbation suffisamment petite ($\varepsilon \leq \varepsilon_0$) et pour toute orbite avec des conditions initiales $(I(t_0), \varphi(t_0)) \in \Omega \times \mathbb{T}^n$ où $I(t_0)$ est suffisamment loin de la frontière de Ω, nous avons :

$$||I(t) - I(t_0)|| \leq R(\varepsilon) \text{ pour } |t| \leq \mathcal{T}(\varepsilon) \ ,$$

où $R(\varepsilon)$ et $\mathcal{T}(\varepsilon)$ sont respectivemt d'ordre ε^b et $\exp(C/\varepsilon^a)$ pour une constante $C > 1$ et

$$a = b = \frac{1}{(2n-1)p_1 \dots p_{n-1} + 1}.$$

Notamment, dans le cas quasi-convexe, les indices d'escarpement sont tous égaux à *un* et nous retrouvons les exposants $1/2n$ de Lochak-Neishtadt et Pöschel dont les résultats sont ainsi généralisés dans le cas escarpé. Ceci peut être comparé aux expressions obtenues par Nekhorochev qui étaient beaucoup plus compliquées et donnaient dans le cas quasi-convexe $a = 2\beta$ et $b = 3\beta$ avec $\beta = (6n^2 - 3n + 14)^{-1}$ et pas $1/2n$.

Notre preuve est basée sur la propriété algébrique suivante : si l'on considère un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$ qui est *rationel*, c'est à dire le multiple d'un vecteur à coordonnées entières, alors les produits scalaires $|k.\omega|$ pour $k \in \mathbb{Z}^n$ tels que $k.\omega \neq 0$ sont bornés inférieurement par une constante ℓ strictement positive. Ceci entraîne que pour tout entier positif $K \in \mathbb{N}^*$, il existe un petit voisinage V de ω qui dépend de K tel que :

$$|k.\omega'| \geq \frac{\ell}{2} \text{ pour tout } \omega' \in V \text{ et tout } k \in \mathbb{Z}^n \backslash < \omega >^\perp \text{ avec } ||k||_1 = |k_1| + \ldots + |k_n| \leq K.$$

De plus, si nous trouvons un autre vecteur rationel $\widetilde{\omega} \in V$, alors les produits scalaires $|k.\widetilde{\omega}|$ sont bornés inférieurement pour tout $k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{< \omega >^\perp \cap < \widetilde{\omega} >^\perp\}$ et $||k||_1 \leq K$.

De plus, si ω et $\widetilde{\omega}$ sont linéairement indépendants, on a aussi

$$\text{Dim} \left(< \omega >^\perp \cap < \widetilde{\omega} >^\perp\right) = n - 2.$$

En poursuivant ces raisonnements, on peut garantir que si l'on trouve une suite $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de vecteurs rationels qui sont linéairement independants (c'est à dire que $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$), alors il existe une borne inférieure uniforme pour tous les produits scalaires $|k.\omega_n|$ avec $k \in \mathbb{Z}^n$ et $||k||_1 \leq K$ où $K \in \mathbb{N}^*$.

Maintenant, considérons une trajectoire du systéme perturbé partant à un instant t_0 qui admet une suite croissante de temps $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq t_0 + \exp(C_5 K)$ avec la constante C_5 du lemme II.4. et un entier $K \in \mathbb{N}^*$ telle que chaque vecteur fréquence $\nabla h(I(t_k))$ est proche d'un vecteur rationel ω_k pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs rationels qui sont suffisamment proches les uns des autres pour vérifier la propriété algébrique précédente avec la constante K. Alors, $I(t_n)$ est situé dans une zone sans résonances jusqu'à l'ordre K. Notamment, si K est de l'ordre de ε^{-a}, on peut construire une forme normale intégrable au voisinage de $I(t_0)$ ce qui permet de confiner les variables d'action.

Notre résultat de stabilité (théorème III.1) est alors prouvé par l'absurde avec le raisonnement suivant. Considérons une solution du système perturbé partant à un instant initial t_0 qui admet une dérive des variables d'action sur un temps exponentiellement long. Alors l'escarpement du hamiltonien intégrable assure que pour une perturbation suffisamment petite, la suite de temps $(t_1, \ldots, t_n)$ et la base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ peuvent être construite récursivemment. Ainsi les actions sont confinées ce qui donne la contradiction désirée.

La proximité de $\nabla h(I(t_k))$ à ω_k pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ est donnée par une application du théorème classique de Dirichlet sur l'approximation diophantienne simultanée qui fournit une vitesse minimale d'approximation d'un vecteur arbitraire par un vecteur rationnel. Ceci permet d'obtenir une borne supérieure sur l'ordre K et sur la taille du reste dans les formes normales résonantes qui peuvent être construites. Ainsi on détermine les valeurs des exposants de stabilité a et b admissibles.

IV. Une condition géométrique équivalente à l'escarpement ([2]).

IV.1. Description des résultats.

Dans le contexte de la théorie KAM, la condition usuelle de non-dégénérescence est l'inversibilité locale de l'application gradient associée au hamiltonien non perturbé. Mais la condition minimale nécessaire pour garantir l'existence de tores invariants dans un système quasi-intégrable est la condition de Rüssmann (voir [BHS] ou [Ru]) : l'image de l'application gradient ne doit pas être incluse dans un hyperplan. Cette dernière propriété est beaucoup plus facile à vérifier pour un hamiltonien intégrable arbitraire. En particulier dans l'approximation du problème à n-corps correspondant aux mouvements des planètes dans le système solaire, le système non perturbé est constitué de n problèmes de Kepler découplés qui sont fortement dégénérés. Dans ce cadre, M. Herman a montré que l'utilisation de la condition de Rüssman est cruciale pour prouver l'existence de trajectoires planétaires quasi-périodiques. Une preuve complète de ce dernier résultat a été donné récemment par Féjoz ([Fe]).

Ceci motive la recherche d'une condition minimale de non-dégénérescence dans le cadre des théories de stabilité effective en temps exponentiellement longs. C'est précisément l'objet du deuxième article associé à ce mémoire où l'on donne une condition de non-dégénérescence sur le hamiltonien non perturbé nécessaire pour établir un résultat de stabilité exponentielle qui est *strictement plus faible* que l'escarpement ainsi qu'un critère *géométrique* équivalent à l'escarpement.

Premièrement, l'absence de points critiques dans la définition II.6 et la condition de non-dégénérescence dans le théorème II.3 sur le hamiltonien non-perturbé ne sont pas nécessaires pour montrer un résultat de stabilité exponentielle (voir [3]). La présence de points critiques est surmontée suivant les raisonnements de Nekhorochev ([Ne2, sect. 1.9]) en supposant que notre hamiltonien intégrable est escarpé pas seulement le long des sous-espaces affines propres mais aussi le long de l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier avec les coefficients (C_n, δ_n) et l'indice p_n, les exposants de stabilité sont alors modifiés avec $a = (1 + 2np_1 \dots p_{n-1})^{-1}$ et $b = a/p_n$. En suivant la terminologie de Nekhorochev, on dira qu'une fonction escarpée le long de tous sous-espace affine, y compris $\mathbb{R}^n$, est *escarpée symétriquement* (ou *S-escarpée*).

En utilisant des résultats de géométrie sous-analytique (voir [BM]) : le lemme de sélection de courbe et les inégalitiés de Lojasiewicz pour une fonction continue et sous-analytique, on obtient alors :

Théorème IV.1.

Soit h une fonction numérique qui est réelle-analytique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors h est S-escarpée (resp. escarpée) sur tout compact $\Sigma \subset \Omega$ si et seulement si sa restriction $h_{|\Lambda}$ à tout sous-espace affine $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ admet seulement des points critiques isolés (resp. si f n'a pas de points critiques, $\nabla h(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$, et si sa restriction $h_{|\Lambda}$ à tout sous-espace affine propre $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ admet seulement des points critiques isolés).

Un critère géométrique similaire qui entraîne l'escarpement a déjà été obtenu par Ilyashenko ([Il]). Il a montré qu'une fonction à valeurs complexes, holomorphe sur un domaine de $\mathbb{C}^n$ dont la restriction à tout sous-espace affine (complexe) admet seulement des points critiques $\mathbb{C}$-isolés est escarpée sur $\mathbb{C}^n$ (avec une généralisation de notre définition

II.6. dans le domaine complexe). Ilyashenko considère donc une propriété plus forte que l'escarpement dans le cas réel.

On donne aussi une condition *nécessaire* pour la stabilité exponentielle :

Théorème IV.2.

Considérons un hamiltonien intégrable h qui est réel-analytique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ici il s'agit de l'espace des actions). Si h est exponentiellement stable alors sa restriction à tout sous-espace affine propre dont la direction est engendrée par des vecteurs à coordonnées entières admet seulement des points critiques isolés.

Ce dernier théorème est montré grâce à un résultat de Nekhorochev ([Ne3, sect IV]) qui donne des conditions suffisantes sur un hamiltonien intégrable pour garantir l'existence de perturbations qui génèrent des solutions avec une dérive des variables d'action sur des temps linéaires par rapport à la taille de la perturbation. Le même problème a été étudié dans le cadre de la théorie KAM par Herman [H] qui a considéré des systèmes hamiltoniens quasi-intégrables admettant un ensemble de Cantor de tores invariants dense dans l'espace des phases et conjointement des orbites qui dérivent jusqu'à l'infini.

On voit qu'un écart subsiste entre la condition suffisante pour la stabilité exponentielle donnée dans le théorème IV.1. et la condition nécessaire du théorème IV.2. C'est précisément l'objet du troisième article associé à ce mémoire.

IV.2. Démonstration des résultats.

Les preuves des théorèmes IV.1. et IV.2. sont basées sur deux résultats importants de géométrie sous analytique dont nous rappelons les définitions de base (voir [BM]).

Définition IV.3.

Soit M une variété réelle analytique.

i) un sous ensemble $A \subset M$ est dit semi-analytique s'il peut être défini par des inégalités analytique ($f(x) \geq 0$) au voisinage de tout point de A.

ii) Un sous-ensemble $X \subset M$ est dit sous-analytique s'il est la projection d'un ensemble semi-analytique relativement compact A (i.e. il existe une variété réelle analytique N et un ensemble semi-analytique relativement compact $A \subset M \times N$ tel que $X \cap U = \Pi(A)$ avec la projection canonique Π de $M \times N$ dans N).

iii) Soit $X \subset M$ et N une variété réelle analytique, une application $f : X \longrightarrow N$ est dite sous-analytique si son graphe est sous-analytique dans $M \times N$

Notamment, on peut montrer que la distance à un ensemble sous-analytique est une fonction sous-analytique, de même pour une fonction du type :

$$\mathcal{M}(r, y) = \mathrm{Max}_{0 \leq t \leq r} \left(\mathrm{Min}_{||x||=t} \left(\mathcal{F}(x, y) \right) \right) \text{ pour } (r, y) \in [0, R] \times K$$

où K est une variété réelle analytique compacte et $\mathcal{F}$ est une fonction réelle analytique sur $\overline{\mathrm{B}}_R \times K$ avec $\overline{\mathrm{B}}_R$ la boule fermée centrée à l'origine de rayon R.

Le premier théorème utilisé ici est :

Théorème IV.4. (Lemme de sélection de courbes)
Soit X une ensemble sous-analytique d'une variété réelle analytique M et x un point d'accumulation de X, alors il existe un chemin réel-analytique non constant $\gamma :]-1,+1[\longrightarrow M$ avec $\gamma(0) = x$ and $\gamma(]0,1[) \subset X$.

Le deuxième point est le fait que, sous les hypothèses du théorème IV.1, les indices d'escarpement peuvent être vus comme les exposants de Lojasiewicz de deux fonctions avec :

Théorème IV.5. (Inégalités de Lojasiewicz)
Soit M une variété réelle analytique, K un compact inclus dans M et f, g deux fonctions à valeurs vectorielles, continues et sous-analytiques sur K telles que

$$Z_g = \{x \in K \ / \ g(x) = 0\} \subset Z_f = \{x \in K \ / \ f(x) = 0\}$$

alors l'ensemble :

$$\mathcal{E}_K(f,g) = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tel qu'il existe une constante } C \text{ avec } ||f(u)||^\alpha \leq \mathrm{C}||g(u)||, \forall u \in K\}$$

est non vide.

Le réel $\alpha_K(f,g) = \mathrm{Inf}\,\{\mathcal{E}_K(f,g)\}$ est appelé l'exposant de Lojasiewicz de f par rapport à g sur K et on a $\alpha_K(f,g) \in \mathbb{Q}$ ainsi que $\alpha_K(f,g) \in \mathcal{E}_K(f,g)$.

On va aussi considérer le cas où f est défini sur un compact dans $\mathbb{R}^n$ et admet un zero isolé en x, alors on pose :

$$\alpha_x(f) = \mathrm{Inf}\,\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \exists\ \mathrm{C} > 0,\ r > 0 \text{ avec } ||u - x||^\alpha \leq \mathrm{C}||f(u)|| \text{ si } ||u - x|| \leq r\}$$

c'est à dire $\alpha_x(f) = \alpha_K(f, \mathrm{dist}(.,x))$.

Ces deux ingrédients permettent d'établir :

Lemme IV.6.
Soit $\mathcal{F}$ une fonction à valeurs réelles positives continue et sous-analytique sur $\overline{\mathrm{B}}_R \times K$ où $\overline{\mathrm{B}}_R$ est la boule fermée de rayon R centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et K est un compact dans une variété réelle analytique, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute valeur fixée du paramètre $y \in K$, la fonction $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}(.,y)$ a un zero isolé à l'origine dans $\overline{\mathrm{B}}_R$ ou $\mathcal{F}_y(0) \neq 0$.

(ii) Il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que l'inégalité

$$\mathrm{Max}_{0 \leq t \leq r}\left(\mathrm{Min}_{||x||=t}\mathcal{F}(x,y)\right) \geq C r^\alpha$$

est vérifiée pour tout $(r,y) \in [0,R] \times K$.

(iii) Il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que le long de toute courbe continue γ dans $\overline{\mathrm{B}}_R$ reliant l'origine à un point à une distance $r \leq R$ et pour tout paramètre $y \in K$, la norme de la fonction $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}(.,y)$ est supérieure à Cr^α en un point $\gamma(t_*)$ tel que $||\Gamma(t_*) - I|| \leq r$ pour tout $t \in [0, t_*]$.

Remarque IV.7. : On recherche des bornes inférieures sur la croissance des fonctions $\mathcal{F}_y$ qui soient uniformes par rapport à y. Dans la plupart des cas, on ne peut pas espérer trouver des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $\mathcal{F}_y(x) \geq C||x||^\alpha$ pour tout $(x, y) \in \overline{\mathrm{B}}_R \times K$. Par exemple, la fonction $\mathcal{F}(x, y) = |x(x - y)|$ définie sur $[-R, +R] \times [0, 1]$ vérifie nos hypothèses mais l'inégalité désirée est manifestement fausse. Par contre, on peut prouver que

$$\mathrm{Max}_{0 \leq \xi \leq r} \left(\mathrm{Min}_{|x|=\xi}(\mathcal{F}(x, y))\right) \geq (3 - 2\sqrt{2})r^2 \text{ pour tout } (r, y) \in [0, R] \times [0, 1]$$

et nous voulons généraliser ce type d'estimation pour une fonction sous-analytique arbitraire qui vérifie notre condition de racines isolées pour un paramètre fixé.

Démonstration :

La première implication (i$\Longrightarrow$ii) est obtenue en considérant l'inégalité de Lojasiewicz avec les fonctions continues sous-analytiques sur le compact $[0, R] \times K$:

$$\mathcal{M}(r, y) = \mathrm{Max}_{0 \leq t \leq r} \left(\mathrm{Min}_{||x||=t} \mathcal{F}(x, y)\right) \text{ et } \mathcal{N}(r, y) = r$$

La deuxième implication (ii$\Longrightarrow$iii) est triviale.

La troisième implication (iii$\Longrightarrow$i) est démontrée par l'absurde en appliquant le lemme de sélection de courbes à l'ensemble sous-analytique $Z_y = \{x \in \overline{\mathrm{B}}_R \text{ tel que } \mathcal{F}_y(x) = 0\}$.▶

Démonstration du théorème IV.1. :

Elle s'obtient en considérant les fonctions h_k suivantes pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la Grassmannienne k-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^n$ est notée $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et on introduit la fonction numérique $h_k(X, X_0, \Lambda_k) = ||\mathrm{Proj}_{\Lambda_k}(\nabla h(X + X_0))||$ définie sur l'ensemble compact

$$\{(X, X_0, \Lambda_k) \in \mathbb{R}^n \times \Sigma \times \mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n) \text{ tels que } X \in \Lambda_k \text{ et } X + X_0 \in \Sigma\}$$

où Σ est un compact inclus dans Ω.

Alors, les hypothèses du théorème IV.1. entraînent que la propriété (i) de racines isolées dans le lemme IV.6. est vérifiée.

La propriété équivalente (iii) correspond exactement à l'escarpement de la fonction h.▶

Démonstration du théorème IV.2. :

Ceci s'obtient par l'absurde en appliquant le lemme de sélection de courbes IV.5. à l'ensemble analytique $Z_\Lambda = \{x \in \Lambda \text{ tels que } \mathrm{Proj}_\Lambda(\nabla h(x)) = 0\}$ où Λ est un sous espace affine engendré par des vecteurs *entiers*.

Si l'ensemble Z_Λ possède un point d'accumulation, comme dans la preuve du lemme IV.6, cet ensemble est réel-analytique et on peut trouver un chemin analytique non-constant γ_h in Z_Λ composé de points critiques pour la restriction de h à Λ. Dans ce cas, un théorème de Nekhorochev ([Ne3, sect. IV]) qui généralise l'exemple de hamiltonien perturbé non exponentiellement stable $I_1^2 - I_2^2 + \varepsilon \sin(\theta_1 + \theta_2)$ considéré au début du chapitre II montre que l'on peut construire une perturbation qui donne une dérive des variables d'action sur un temps $1/\varepsilon$ le long de γ_h. De plus, γ_h est une courbe de longueur indépendante de ε, ce qui donne la contradiction désirée.▶

Finalement, on peut calculer des bornes inférieures fines sur les indices d'escarpements grâce au résultat suivant :

Théorème IV.8.
Soit h une fonction qui vérifie les hypothèses de notre théorème IV.1.
Soit Λ un sous-espace affine dans $\mathbb{R}^n$, on considère l'ensemble

$$Z_\Lambda = \left\{x \in \Lambda \text{ tels que } \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{\Lambda}} \left(\nabla h(x)\right) = 0\right\}$$

où $\overrightarrow{\Lambda}$ est la direction de Λ donc Z_Λ est composé de points isolés.
L'indice d'escarpement d'ordre k sur un compact $\Sigma \subset \Omega$ vérifie :

$$p_k \geq \mathrm{Sup}_{\Lambda \in \mathrm{Graff}_\Sigma(k,n)} \left(\mathrm{Sup}_{x \in Z_\Lambda} \left(\alpha_x \left(f_\Lambda\right)\right)\right)$$

où $\alpha_x(f_\Lambda)$ est l'exposant de Lojasiewicz à la racine isolée $x \in Z_\Lambda$ de la restriction f_Λ au sous espace affine Λ de la fonction $f(u) = \left|\left|\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{\Lambda}} \left(\nabla h(u)\right)\right|\right|$ et $\mathrm{Graff}_\Sigma(k,n)$ est l'ensemble des sous espaces affines de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ qui coupent Σ.

Le point important vient du fait que nos bornes inférieures sur les indices d'escarpements peuvent être obtenus comme le maximum des exposants de Lojasiewicz pour un zero isolé d'une famille de fonctions réelles-analytiques et ces quantitée peuvent être calculées grâce à la propriété suivante due à Gwozdziewicz ([Gw]).

Soit g une fonction numérique réelle analytique dans un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, avec $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$, on considère la courbe polaire :

$$\mathrm{P}^{(j)} = \nabla g^{-1}\left(\mathbb{R}\vec{e}_j\right) = \left\{u \in \mathcal{V} \text{ tels que } \nabla g(u) = \lambda \vec{e}_j \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Pour $x \in \Omega$ un zero isolé de g et $j \in \{1, \ldots, k\}$, on définit l'exposant partiel :

$$\alpha_x^{(j)}(g) = \mathrm{Inf}\left\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \exists C > 0, R > 0 \text{ avec } ||u-x||^\alpha \leq C|g(u)| \text{ si } \begin{array}{c} ||u-x|| \leq R \\ \text{et } u \in \mathrm{P}^{(j)} \end{array}\right\}$$

alors l'exposant de Lojasiewicz en x est donné par $\alpha_x(g) = \mathrm{Max}_{1 \leq j \leq k}\left(\alpha_x^{(j)}(g)\right)$.

En résumé, pour calculer l'exposant d'une fonction réelle-analytique en un zero isolé, on doit seulement estimer la croissance de la fonction le long d'une des courbes polaires qui sont généralement des ensemble analytiques de dimension un.

Ici, pour un sous-espace affine $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, on applique le résultat précédent à la fonction réelle-analytique $g_\Lambda(u) = \left(f_\Lambda(u)\right)^2 = \left|\left|\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{\Lambda}}\left(\nabla h(u)\right)\right|\right|^2$ et $\alpha_x(g_\Lambda) = 2\alpha_x(f_\Lambda)$ pour tout zero isolé x de f_Λ, alors :

$$p_k \geq \frac{1}{2}\mathrm{Sup}_{\Lambda \in \mathrm{Graff}_\Sigma(k,n)}\left(\mathrm{Sup}_{x \in Z_\Lambda}\left(\alpha_x\left(g_\Lambda\right)\right)\right).$$

On peut enfin noter que l'exposant de Lojasiewicz dans le cas complexe est en général beaucoup plus *grand* que son analogue dans le domaine réel (voir [2] et [Pl]). Ainsi les méthodes d'analyse complexe utilisées dans l'article d'Ilyashenko ([Il]) ne permettent pas d'avoir des estimations fines sur les indices d'escarpement.

V. Stabilité générique des systèmes hamiltoniens quasi-intégrables ([3]).

V.1. Description des résultats.

Dans l'article précédent, on a vu que la condition nécessaire pour la stabilité exponentielle obtenue dans le théorème IV.2. est plus faible que la condition suffisante du théorème IV.1. De plus, Guzzo ([GLF]) a exhibé des hamiltoniens quadratiques exponentiellement stables et non escarpés.

Dans l'article [3], on montre un théorème de type Nekhorochev avec une hypothèse de non-dégénérescence strictement plus faible que l'escarpement (théorème V.2.). L'intérêt de cette généralisation vient du fait qu'elle permet de prouver le résultat de stabilité générique suivant :

Théorème V.1. (Généricité de la stabilité exponentielle)

Soit h un hamiltonien intégrable réel-analytique arbitraire défini sur un voisinage de la boule fermée $\overline{B}_R^{(n)}$ de rayon R centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

Pour presque tout $\Omega \in \mathbb{R}^n$, le hamiltonien intégrable $h_\Omega(x) = h(I) - \Omega.I$ est exponentiellement stable avec les exposants :

$$a = \frac{b}{2+n^2} \text{ et } b = \frac{1}{2(2+(2n)^n)}.$$

La différence fondamentale entre notre résultat de stabilité générique et les théorèmes du même type qui peuvent être montrés avec le travail initial de Nekhorochev est la valeur *fixée* des exposants a and b dans notre théorème V.1.

En effet, l'ensemble des fonctions escarpées est générique parmi les fonctions suffisamment régulières. Par exemple, on a vu que la fonction $x^2 - y^2$ n'est pas escarpée mais on peut montrer facilement que $x^2 - y^2 + x^3$ est escarpée et, généralement, une fonction arbitraire peut être transformée en une fonction escarpée en ajoutant des termes d'ordre plus élevé. En effet, si $J_r(n)$ est l'espace des jets d'ordre r des fonctions numériques $\mathcal{C}^\infty$ à n variables réelles, Nekhorochev ([Ne3]) a montré que les fonctions non escarpées admettent un jet d'ordre r dans un ensemble algébrique de $J_r(n)$ dont la codimension tend vers l'infini lorsque r tend vers l'infini. Ainsi, le théorème initial (II.3.) permet de trouver un ensemble générique de hamiltoniens exponentiellement stables mais avec des exposants de stabilité qui sont arbitrairement *petits* puisqu'ils sont inversement proportionnels aux indices d'escarpement (voir le théorème III.1.). En conséquence, on ne peut pas obtenir des exposants de stabilité uniformes pour un ensemble générique de hamiltoniens intégrables.

Ici, d'après notre théorème V.1, des exposants de stabilité *fixés* sont obtenus sur un ensemble de hamiltoniens intégrables générique *au sens de la mesure*. Plus précisemmment, nous mettons en évidence un ensemble de hamiltoniens intégrables exponentiallement stables qui est *prévalent* suivant la terminologie de Hunt, Sauer et Yorke ([HSY]) ou Kaloshin ([K1]).

Différentes propriétés génériques au sens de la prévalence ont été montrées en systèmes dynamiques dans ([HSY], [K1], [K2], [OY]) mais il me semble qu'il y a seulement un seul résultat de ce type pour les systèmes hamiltoniens quasi-intégrables. Il est dû à Pérez-Marco ([PM]) qui a montré que les formes normales de Birkhoff sont convergentes ou divergentes pour un ensemble générique au sens de la mesure de hamiltoniens quasi-intégrables (en fait, il utilise une notion plus forte de généricité que la prévalence, voir [3] et plus loin dans ce mémoire).

V.2. Stabilité des hamiltoniens admettant un escarpement diophantien.

On donne maintenant la définition d'une fonction admettant *escarpement diophantien.*

Pour $m \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\mathrm{Graff}_R(n, m)$ la Grassmanienne affine m-dimensionelle au dessus de $\overline{B}_R^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ (c'est à dire l'ensemble des sous espaces affines de dimension m dans $\mathbb{R}^n$ qui coupent la boule fermée $\overline{B}_R^{(n)}$ de rayon $R > 0$ autour de l'origine).

Pour un entier $K \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère $\mathrm{Graff}_R^K(n, m) \subset \mathrm{Graff}_R(n, m)$ qui est l'ensemble des sous espaces affines de dimension m dans $\mathbb{R}^n$ dont la direction est engendrée par des vecteurs à coordonnées entières de longueur $||\vec{k}||_1 = |k_1| + \ldots + |k_n| \leq K$.

Définition V.2.

On dit qu'une fonction différentiable f définie sur un voisinage de $\overline{B}_R^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ admet un escarpement (γ, τ)–diophantien avec deux constantes positives γ et τ, si pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un indice $p_m \geq 1$ et des coefficients $C_m > 0$, $\delta_m > 0$ tels que le long de tout sous espace affine $\Lambda_m \in \mathrm{Graff}_R^K(n, m)$ et toute courbe continue Γ de $[0, 1]$ dans $\Lambda_m \cap B_R$ avec $||\Gamma(0) - \Gamma(1)|| = r \leq \delta_m \frac{\gamma}{K^\tau}$, on a :

$$\exists t_* \in [0, 1] \text{ tel que } \begin{cases} ||\Gamma(0) - \Gamma(t)|| \leq r \text{ pour tout } t \in [0, t_*] \\ \left|\left|\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{\Lambda}_m}(\nabla f(\gamma(t_*)))\right|\right| \geq C_m r^{p_m} \end{cases}$$

où $\overrightarrow{\Lambda}_m$ est la direction de Λ_m.

Remarque V.3. : L'espace $\mathbb{R}^n$ est lui-même le seul élément de $\mathrm{Graff}_R^1(n, n)$. Donc, le long de tout arc dans B_R de longueur $r \leq \delta_n \gamma$, il existe un point où la norme du gradient ∇f est plus grande ou égale à $C_n r^{p_n}$ (la projection se réduit à l'identité dans ce cas).

On peut alors énoncer le principal résultat de ce paragraphe :

Théorème V.4.

Si le hamiltonien intégrable h est réel-analytique et admet un escarpement (γ, τ)–diophantien, alors h est exponentiellement stable avec les exposants :

$$\beta = \frac{1}{2(1 + n^n p_1 \ldots p_{n-1})} \; ; \; a = \frac{\beta}{1 + \tau} \; ; \; b = \frac{\beta}{p_n}$$

pour des perturbations de taille ε inférieures ou égales à $C \, \mathrm{Inf}\left(\gamma^{1/a}, \gamma^{1/b}\right)$ où C est une constante positive qui ne dépend pas de ε ni de γ.

Remarque V.5. : (i) Dans l'étude [3], on n'a pas recherché une estimation fine des exposants a et b comme dans [1] mais on a privilégié la simplicité de la démonstration du résultat de stabilité avec la condition d'escarpement diophantien. En fait, notre objectif est d'établir l'existence d'un exposant de stabilité uniforme valable pour un ensemble générique de hamiltoniens intégrables. La question de l'optimalité de cet exposant n'est pas très pertinente puisque l'on est obligé d'utiliser des estimations très générales et on n'exploite pas les spécificités d'un hamiltonien.

(ii) Le fait que les exposants de stabilité soient *indépendants* de γ est crucial pour nos raisonnements ultérieurs. Par ailleurs, la borne supérieure sur la taille de la perturbation dans ce théorème (V.4) dépend de γ, c'est similaire à la théorie KAM où cette borne est proportionnelle à $\sqrt{\gamma}$.

La démonstration du théorème de stabilité V.4. est analogue à celle du théorème III.1. Mais cette démonstration (dans [1]) est généralisé dans trois directions. Premièrement, on remplace la condition d'escarpement originale II.6. par notre condition plus faible d'escarpement diophantien V.2. De plus, grâce à la construction des ensembles non-résonants directement dans l'espace des fréquences, on peut enlever la condition de non dégénérescence sur l'application fréquence ($\left|\nabla^2 h\right| \neq 0$) qui était supposée dans le théorème III.1. Finalement, d'après la remarque V.3., le hamiltonien intégrable h peut admettre des points critiques sous réserve que h vérifie une condition globale d'escarpement sur l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier.

D'autre part, je pense que la rédaction de cette démonstration est notablement améliorée par rapport au premier article ([1]) grâce aux remarques de François Ledrappier.

V.3. $\mathcal{C}^k$–généricité des fonctions admettant un escarpement diophantien.

Premièrement, toute forme linéaire $h(I) = \omega.I$ avec un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$ qui est (γ, τ)-diophantien admet un escarpement diophantien avec des indices et des coefficients égaux à un. Donc une forme linéaire admet presque toujours un escarpement diophantien alors qu'elle ne peut pas être escarpée d'après notre définition II.6.

De la même manière, au second ordre, on peut prouver qu'une forme quadratique admet presque toujours un escarpement Diophantien avec des indices égaux à 2 (on peut montrer que pour toute forme quadratique $q(I) = {}^tIAI$, pour tout $\tau > n^2$ et pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $\gamma > 0$ tel que la forme quadratique modifiée $q_\lambda(I) = {}^tIAI + \lambda||I||^2$ admet un escarpement (γ, τ)-diophantien).

Donc, au premier et au second ordre, l'ensemble des fonctions admettant un escarpement diophantien est beaucoup plus grand que la classe initiale des fonctions escarpées définie dans le chapitre II. En effet, une forme linéaire ne peut pas être escarpée et une forme quadratique est escarpée si et seulement si elle est de signe défini.

A partir de ces exemples, on cherche un ensemble de mesure pleine composé de fonctions admettant un escarpement diophantien dans l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs réelles définies sur un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

En fait, un ensemble dans un espace de dimension infini qui est invariant par translation ne peut être de mesure nulle que s'il s'agit d'un ensemble trivial (voir [HSY]). Pour cette raison, Christensen [C], Hunt, Sauer et Yorke ([HSY]), Kaloshin ([K1]) ont introduit une notion plus faible pour définir des ensembles de mesure pleine dans un espace de dimension infini appelé *prévalence* qui correspond à la propriété usuelle dans le cas d'un espace de dimension fini.

En considérant le cas le plus simple, un ensemble $\mathcal{P}$ est dit prévalent s'il existe un sous espace F de dimension *fini* appelé espace test tel que tout sous espace affine de direction F coupe $\mathcal{P}$ suivant un ensemble de mesure pleine (i.e. : avec un complémentaire de mesure nulle) pour la measure de Lebesgue usuelle sur ce sous espace. Des notions de prévalence plus fortes peuvent être définies (voir [HSY], [K1], [K2] or [PM]). Par exemple, les ensembles considérés par Pérez-Marco dans [PM] coupent *tout* sous espace affine de dimension finie suivant un ensemble de mesure pleine pour la mesure de Lebesgue.

Un exemple d'ensemble prévalent est celui des fonctions de Morse dans l'espace de Banach $\left(\mathcal{C}^2\left(\overline{B}_R^{(n)},\mathbb{R}\right),||.||_{\mathcal{C}^2}\right)$ où $\overline{B}_R^{(n)}$ est la boule fermée de rayon R centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^n$. En effet, pour toute fonction $f\in\mathcal{C}^2\left(\overline{B}_R^{(n)},\mathbb{R}\right)$, en appliquant le théorème de Sard à l'application gradient ∇f on peut prouver que pour presque toute forme linéaire $\omega\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$, la fonction $f_\omega = f+\omega$ est de Morse et l'espace test est constitué des formes linéaires. On dit que la fonction modifiée f_ω est appelée une morsification de f (voir [1] et [6]).

V.4. Théorie quantitative de Morse-Sard et applications

Ici, on cherche un ensemble $\mathcal{P}$ de fonctions admettant un escarpement Diophantien avec des indices *fixés* pour obtenir des exposants de stabilité fixés avec le théorème V.4. qui est prévalent dans $\mathcal{C}^k\left(\overline{B}_R^{(n)},\mathbb{R}\right)$ pour un entier $k\in\mathbb{N}^*$ à déterminer.

Comme on l'a déjà indiqué, ceci va être obtenu en introduisant la classe des fonctions de Morse Diophantiennes (définition V.6.) en montrant sa prévalence dans $\mathcal{C}^{2n+2}\left(\overline{B}_R^{(n)},\mathbb{R}\right)$ grâce à la théorie de Morse-Sard quantitative développée par Yomdin ([Y1], [YC]) avec des raisonnements similaires à ceux utilisés pour les fonctions de Morse usuelles. De plus, on montre que les fonctions de Morse Diophantienne admettent un escarpement Diophantien avec des indices égaux à deux et ces deux derniers ingrédients fournissent notre théorème principal V.1.

D'autre part, d'après Yomdin [Y2], les estimations données dans la preuve des théorèmes V.7. et V.8 devraient être utiles pour localiser les points presque-critiques d'une application générique (i.e. : il s'agit du problème des «centres organisateurs», voir [Y2, p. 296]).

Définition et théorème V.6. (Fonctions de Morse diophantiennes)

On note $\mathrm{Gr}(n,m)$ *l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension* m *dans* $\mathbb{R}^n$ *et, pour* $K\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{Gr}_K(n,m)\subset\mathrm{Gr}(n,m)$ *est l'ensemble des sous espaces vectoriels dans* $\mathbb{R}^n$ *engendré par des vecteurs à coordonnées entières de longueur* $||\vec{k}||_1 = |k_1|+\ldots+|k_n|\leq K$, *de plus* $\mathrm{Gr}_K(n)=\cup_{m=1}^n\mathrm{Gr}_K(n,m)$.

Une fonction deux fois différentiable $f\in\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ *définie au voisinage de la boule fermée* $\overline{B}_R^{(n)}\subset\mathbb{R}^n$ *de rayon* R *centrée à l'origine est dite Morse* (γ,τ)*–Diophantienne avec deux constantes positives* γ *et* τ *si, pour tout* $K\in\mathbb{N}^*$, *tout* $m\in\{1,\ldots,n\}$ *et tout* $\Lambda\in\mathrm{Gr}_K(n,m)$, *il existe* $(e_1,\ldots,e_m)$ *(resp.* $(f_1,\ldots,f_{n-m})$*) une base orthonormée de* Λ *(resp. de* $\Lambda^\perp$*) telle que la fonction*

$$f_\Lambda(\alpha,\beta) := f\left(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_me_m+\beta_1f_1+\ldots+\beta_{n-m}f_{n-m}\right),$$

qui est deux fois différentiable au voisinage de $\overline{B}_R^{(n)}$, satisfait :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\overline{B}_R^{(n)} \text{ on a } \left|\left|\frac{\partial f_\Lambda}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)\right|\right| > \frac{\gamma}{K^\tau} \text{ ou } \left|\left|\frac{\partial^2 f_\Lambda}{\partial\alpha^2}_{|(\alpha,\beta)}(\eta)\right|\right| > \frac{\gamma}{K^\tau}||\eta|| \ (\forall\eta\in\mathbb{R}^m).$$

Enfin, si une fonction différentiable $f\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ définie au voisinage de la boule fermée $\overline{B}_{2R}^{(n)}\subset\mathbb{R}^n$ est Morse (γ,τ)–Diophantienne pour deux constantes positives γ et τ alors f admet un escarpement (γ,τ)–Diophantien sur $\overline{B}_R$ avec les coefficients $C_m=1$, $\delta_m=\frac{1}{2M}$ et les indices $p_m=2$ pour $m\in\{1,\ldots,n\}$.

Remarque V.7. : Notre définition d'une fonction de Morse Diophantienne s'appuie sur le choix d'une base orthonormée dans tout sous espace $\Lambda\in\mathrm{Gr}_K(n)$ et des valeurs propres de la matrice Hessienne qui sont extrinsèques. Mais la propriété d'escarpement Diophantien fait seulement intervenir la norme du gradient ∇f puisque

$$\left|\left|\frac{\partial f_\Lambda}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)\right|\right| = ||\mathrm{Proj}_\Lambda\left(\nabla f\left(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_me_m+\beta_1f_1+\ldots+\beta_{n-m}f_{n-m}\right)\right)||$$

ne dépend pas de la base orthonormée considérée.

Maintenant, l'application de la version quantitative du théorème de Sard due à Yomdin ([Y1]) permet de montrer que, pour une valeur fixée du paramètre $\tau>0$ assez grande, toute fonction suffisamment régulière $f\in\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ peut être transformée en une fonction de Morse (γ,τ)–diophantienne en lui ajoutant presque toute forme linéaire.

En suivant les raisonnements de Yomdin (voir [Y1] et surtout le livre introductif [YC]), on obtient :

Théorème V.8.

Pour $\kappa\in]0,1[$ et $g\in\mathcal{C}^{2n+1}\left(\overline{B}_R^{(n)},\mathbb{R}^m\right)$ avec $||g||_{\mathcal{C}^{2n+1}}=\mathcal{M}\geq1$, il existe un sous ensemble $\mathcal{C}_\kappa\subset\mathbb{R}^m$ et une constante positive C tels que :

$$\mathrm{Vol}\left(\mathcal{C}_\kappa\right)\leq C\sqrt{\kappa}$$

et, pour tout $\omega\in\mathbb{R}^m\backslash\mathcal{C}_\kappa$, la fonction $g_\omega(x)=g(x)-\omega$ vérifie en tout point $x\in\overline{B}_R^{(n)}$:

$$||g_\omega(x)||>\kappa \text{ ou } ||dg_\omega(x)\zeta||>\kappa||\zeta|| \ (\forall\zeta\in\mathbb{R}^n).$$

On considère maintenant les constantes $\gamma>0$, $\tau>0$ et une fonction arbitraire $f\in\mathcal{C}^{2n+2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ définie sur un voisinage de la boule fermée $\overline{B}_R^{(n)}\subset\mathbb{R}^n$ avec la borne $||f||_{\mathcal{C}^{2n+2}}=\mathcal{M}\geq1$.

Le théorème précédent permet de borner la mesure de l'ensemble des valeurs $\Omega\in\mathbb{R}^n$ telle que la fonction modifiée $f(x)-\Omega.x$ n'est pas Morse (γ,τ)–Diophantienne.

Plus précisément, pour tout $(K,n,m)\in\mathbb{N}^3$ avec $1\leq m\leq n$ et tout sous espace $\Lambda\in\mathrm{Gr}_K(n,m)$, grâce au choix d'une base orthonormée dans Λ et $\Lambda^\perp$, la fonction f_Λ

considérée dans la définition V.6. admet la borne supérieure $||\partial_\alpha f_\Lambda||_{\mathcal{C}^{2n+1}} \leq ||f||_{\mathcal{C}^{2n+2}} = \mathcal{M}$ pour la norme usuelle sur $\mathcal{C}^{2n+1}\Big(\overline{B}_R^{(n)}, \mathbb{R}^m\Big)$.

Alors, en appliquant le théorème V.8. avec la constante $\kappa = \gamma/K^\tau$ sur la fonction $g(\alpha,\beta) = \partial_\alpha f_\Lambda(\alpha,\beta) \in \mathcal{C}^{2n+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, on obtient le :

Corollaire V.9.

Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$, $K \in \mathbb{N}^*$ et $\Lambda \in \mathrm{Gr}_K(n,m)$, il existe un sous ensemble $\mathcal{C}_\Lambda^{(\nu)} \subset \mathrm{B}_\nu^{(n)}$ où $\mathrm{B}_\nu^{(n)}$ est la boule ouverte de rayon ν centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^n$ avec :

$$\mathrm{Vol}\left(\mathcal{C}_\Lambda^{(\nu)}\right) \leq C_m^{(\nu)} \sqrt{\frac{\gamma}{K^\tau}}$$

où la constante $C_m^{(\nu)}$ ne dépend que de n, m, $\mathcal{M}$, R et ν telle que, pour tout $\Omega \in \mathcal{B}_\nu^{(n)} \backslash \mathcal{C}_\Lambda^{(\nu)}$ la fonction modifiée $f_\Omega(x) = f(x) - \Omega.x$ vérifie en tout point $x \in \overline{B}_R^{(n)}$:

$$\left|\left|\partial_\alpha f_{(\Lambda,\Omega)}(\alpha,\beta)\right|\right| \geq \frac{\gamma}{K^\tau} \;\; ou \;\; \left|\left|\partial_\alpha^2 f_{(\Lambda,\Omega)}(\alpha,\beta)\eta\right|\right| \geq \frac{\gamma}{K^\tau}||\eta|| \;\; (\forall \eta \in \mathbb{R}^m)$$

(la fonction $f_{(\Lambda,\Omega)}$ est définie par rapport à f_Ω de la même manière que f_Λ par rapport à f dans la définition V.6).

V.5. Fin de la preuve du théorème V.1. :

On considère une constante arbitraire $\tau > 2(n^2+1)$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^{2n+2}\left(\overline{B}_R^{(n)}, \mathbb{R}\right)$ définie au voisinage la boule fermé $\overline{B}_R^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$.

Pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathcal{C}_K^{(\nu)} = \cup_{m=1}^n \cup_{\Lambda \in \mathrm{Gr}_K(n,m)} \mathcal{C}_\Lambda^{(\nu)}$, en appliquant le corollaire V.9., on obtient :

$$\mathrm{Vol}\left(\mathcal{C}_K^{(\nu)}\right) \leq \sum_{m=1}^n \mathrm{Card}\left(\mathrm{Gr}_K(n,m)\right) \overline{C}_m^{(\nu)} \sqrt{\frac{\gamma}{K^\tau}} \leq \left(\sum_{m=1}^n \overline{C}_m^{(\nu)}\right) K^{n^2} \sqrt{\frac{\gamma}{K^\tau}}.$$

Donc pour $\gamma > 0$ fixé, l'ensemble $\mathcal{C}_\gamma^{(\nu)} = \cup_{K \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_K^{(\nu)}$ vérifie

$$\mathrm{Vol}\left(\mathcal{C}_\gamma^{(\nu)}\right) \leq \left(\sum_{m=1}^n \overline{C}_m^{(\nu)}\right) \left(\sum_{K \in \mathbb{N}^*} K^{n^2-\tau/2}\right) \sqrt{\gamma}$$

et cette borne supérieure est convergente avec notre hypothèse $\tau > 2(n^2+1)$.

Pour $\mathcal{C}^{(\nu)} = \cap_{\gamma>0} \mathcal{C}_\gamma^{(\nu)}$ on a $\mathrm{Vol}\left(\mathcal{C}^{(\nu)}\right) = 0$ et $\mathcal{C} = \cup_{\nu \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}^{(\nu)}$ vérifie $\mathrm{Vol}(\mathcal{C}) = 0$.

Finalement, pour tout $\Omega \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{C}$, il existe $\gamma > 0$ tel que la fonction $f_\Omega(x) = f(x) - \Omega.x$ est de Morse (γ,τ)–diophantienne sur $\overline{B}_R^{(n)}$.

Ainsi, si l'on choisit $\tau = 2n^2 + 3 > 2(n^2+1)$, on en déduit que l'ensemble des fonctions de Morse $(\gamma, 2n^2+3)$-Diophantiennes pour $\gamma > 0$ quelconque est prévalent dans $\mathcal{C}^{2n+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

En revenant à la dynamique, notre résultat de stabilité exponentielle (théorème V.4.) conjugué à la prévalence des fonctions de Morse diophantiennes (corollaire V.9.) entraînent que pour un hamiltonien intégrable réel-analytique arbitraire et pour presque toute forme linéaire $\omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, le hamiltonien modifié $h_\omega(x) = h(x) + \omega(x)$ est exponentiellement stable avec des exposants de stabilité fixés.

En effet, pour presque tout $\Omega \in \mathbb{R}^n$ il existe $\gamma > 0$ tel que le hamiltonien intégrable $h_\Omega(I) = h(I) + \Omega.I$ est de Morse (γ, τ)–diophantien avec $\tau = 3 + 2n^2$.

Ainsi, le hamiltonien intégrable $h_\Omega(I) = h(I)+\Omega.I$ admet un escarpement (γ, τ)–diophantien avec des indices égaux à deux et finalement le théorème V.4. entraîne que h_Ω est exponentiellement stable avec les exposants désirés.▶

VI. Perspectives et questions.

Au moins deux questions directement liées à ce travail apparaîssent.

Le théorème de généricité V.1. établit dans [3] est basé sur la prévalence des fonctions de Morse diophantiennes. On voit de voir que cette propriété est valable pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ (théorème V.3). L'analyticité des systèmes étudiés n'intervient que pour la construction des formes normales à un ordre exponentiellement élevé. Il serait naturel d'établir les résultats de stabilité analogues au théorème V.2. dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geq 2n+2$. Il s'agirait alors de stabilité en temps polynomiaux. Ce type de théorème devrait aisément s'obtenir à partir de nos résultats avec des méthodes de lissage analytique comme dans la théorie KAM (voir Salomon [Sa]), Marco a déjà des résultats dans cette direction.

Un problème plus ambitieux est la question de la stabilisation par les résonances. Lochak ([Lo]) a montré que pour un système presque intégrable quasi-convexe, les exposants de stabilité sont plus *grands* lorsque l'on considère des conditions initiales proches des résonances. D'autre part, Marco-Sauzin ([MS]) puis Marco-Lochak ([ML]) ont montrés que ces exposants améliorés sont pratiquement atteints dans certains exemples.

Il serait intéressant de voir si ce type d'estimations apparaissent aussi dans les cas génériques considérés ici. Cela ne semble pas possible avec les démonstrations développées dans le premier et le troisième article associés à ce mémoire. En effet, le résultat de Lochak est basé sur le fait que pour obtenir le confinement des actions, il suffit d'approcher *une partie* du vecteur fréquence par des vecteurs rationnels lorsque l'on considère une condition initiale presque-résonante. Ici, on construit toujours une *base* de vecteurs rationnels qui approchent les vecteurs fréquences considérés. Par contre, on peut espérer obtenir des résultats améliorés lorsque l'on considère un système intégrable escarpé qui est *partiellement* convexe suivant un certain nombre de degrés de liberté. Ceci pourrait se révéler trés utile dans les équations aux dérivés partielles (voir plus bas). On peut noter que dans le cadre de la théorie KAM, Sevryuk ([Se2]) vient de considérer le problème de l'existence de tores invariants pour des systèmes intégrables vérifiant une condition de non-dégénérescence forte (i.e. : de Kolmogorov) sur certains degrés de liberté et une condition faible (i.e. : de Russmann) sur l'ensemble des variables.

La question suivante qui provient d'un exposé de C. Simo ([Si]) est peut être liée au mécanisme de stabilisation par les résonances évoqué ci-dessus.

Les résultats de stabilité globaux comme le théorème V.2. ne sont évidemment valables que si l'on prend en compte les estimations les plus pessimistes. Par contre, on vient de voir que ces résultats peuvent être améliorés localement. Il serait pertinent de faire une étude de l'exposant de stabilité *moyen*, ce qui n'existe même pas dans le cas quasi-convexe.

Une première possibilité serait d'essayer de calculer la moyenne *spatiale* de ces exposants en considérant la moyenne sur toutes les conditions initiales.

La question la plus difficile serait de calculer la moyenne *temporelle* de ces exposants en considérant l'évolution de la vitesse de dérive des actions au cours du temps. Cela nécessiterait une connaissance fine de la diffusion d'Arnold que l'on ne semble pas avoir actuellement.

Enfin, il y a trés peu d'estimations de type Nekhorochev pour les équations aux dérivées partielles. A ma connaissance, le seul travail de ce type est celui de Bambusi ([Ba]) qui a obtenu de tels résultats pour l'équation de Schrödinger non linéaire. Dans ce cas, il se ramène à l'étude une position d'équilibre elliptique dans un système Hamiltonien de dimension infinie qui admet une torsion de signe définie, ce qui correspond à une forme normale de Birkhoff convexe. On peut alors étendre en dimension infinie un résultat de stabilité en temps exponentiellement longs par rapport à l'inverse de la distance à la position d'équilibre (voir [FGB], [Ni2], [Pö2], [Pö3]). Par contre, ce type de raisonnement utilise le mécanisme de stabilisation par les résonances de Lochak qui permet ici d'obtenir des résultats de stabilité prés des orbites périodiques du système intégrable avec des exposants qui ne dépendent pas du nombre de degrés de liberté ce qui est évidemment crucial pour passer à la dimension infinie. Avec Bambusi, on espère établir des résultats analogues sur des EDP qui se ramènent à système hamiltonien quasi-intégrable avec une partie principale qui est quasi-convexe par rapport à toutes les variables à partir d'un certain rang et escarpée par rapport à l'ensemble des variables (l'équation KdV semble être un bon candidat).

References

[A1] Arnold, V.I. : 1963, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Russian Math. Surveys* **18** (6), pp. 85-191.

[AKN] Arnold, V. I.; Kozlov, V.V.; Neishtadt, A.I.: 1993, Dynamical Systems III: Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, Springer Verlag, Berlin.

[Ba] Bambusi, D.: 1999, Nekhoroshev theorem for small amplitude solutions in nonlinear Schrdinger equations, *Math. Z.* **230** (2), pp. 345-387.

[BFG] Benettin, G., Fasso, F., Guzzo, M.: 1998, Nekhorochev stability of L4 and L5 in the spatial restricted three body problem, *Regul. Chaotic Dyn.* **3** (3), pp. 56-72.

[BG] Benettin, G., Gallavotti G.: 1986, Stability of motions near resonances in quasi-integrable Hamiltonian systems, *Journal of Statistical Physics* **44** (3-4), pp. 293-338.

[BM] Bierstone, E., Milman, P.D.: 1988, Semianalytic and subanalytic sets, *Publ. Math. I.H.E.S.* **67**, pp. 5-42.

[BHS] Broer, H.W., Huitema, G.B., Sevryuk, M.B.: 1996, Quasi-periodicity in families of dynamical systems: order amidst chaos, LNM **1645**, Springer Verlag, New-York.

[C] Christensen, J.P.R.: 1973, On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups, *Isr. J. Math.* **13**, pp. 255-260.

[FGB] Fasso, F., Guzzo, M., Benettin, G.: 1998, Nekhorochev-stability of elliptic equilibria of Hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.* **197** (2), pp. 347-360.

[Fe] Féjoz, J.: 2004, Démonstration du théorème d'Arnold sur la stabilité du système planétaire (d'après Herman), *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **24** (5), pp. 1521-1582.

[Gi] Giorgilli, A.: 1998, On the problem of stability for near to integrable Hamiltonian systems, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Berlin 1998, *Documenta Mathematica*, Vol. III, extra volume ICM 1998, pp. 143–152.

[GZ] Giorgilli, A., Zehnder, E.: 1992, Exponential stability for time dependent potential, *ZAMP* **43**, pp. 827-855.

[GM] Guzzo, M., Morbidelli, A.: 1997, Construction of a Nekhorochev like result for the asteroid belt dynamical system, *Celestial Mechanics* **66**, pp. 255-292.

[GLF] Guzzo, M., Lega, E., Froeschlé, C.: 2006, Diffusion and stability in perturbed non-convex integrable systems, *Nonlinearity* **19** (5), pp. 1049-1067.

[Gw] Gwozdziewicz, J.: 1999, The Lojasiewicz exponent of an analytic function at an isolated zero, *Comment. Math. Helv.* **74** (3), pp. 364-375.

[H] Herman, M.: 1992, Dynamics connected with indefinite normal torsion, in *Twists Mapping and Their Applications*, McGehee, R., Meyer, K. (Eds), I.M.A. conference proceedings series **44**, Springer-Verlag, New-York, pp. 153-182.

[HSY] Hunt, B.; Sauer, T.; Yorke, J. A.: 1992, Prevalence: a translation-invariant “almost every” on infinite- dimensional spaces, *Bull. Am. Math. Soc.***27** (2), pp. 217-238.

[Il] Ilyashenko, I.S.: 1986, A steepness test for analytic functions, *Russian Math. Surveys* **41**, pp. 229-230.

[K1] Kaloshin, V.Y.: 1996, Some prevalent properties of smooth dynamical systems, *Proc. Steklov Inst. Math.* **213**, pp. 115-140.

[K2] Kaloshin, V.Y.; Hunt, B.R.: 2006, A stretched exponential bound on growth of the number of periodic points for prevalent diffeomorphisms, part I, to appear in *Ann. Math.*, 95 pp.

[Ko] Kolmogorov, A.N.: 1954, On the persistence of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamilton function, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **98**, pp. 527-530 (English translation in Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Casati G., Ford J. (Eds), *Lecture Notes in Physics* **93**, pp. 51-56, SpringerVerlag, New-York, 1979).

[Lo] Lochak, P.: 1992, Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, *Russian Math. Surveys* **47**, pp. 57-133.

[LN] Lochak, P., Neishtadt, A.I.: 1992, Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian, *Chaos* **2** (4), pp. 495-499.

[LNN] Lochak, P., Neishtadt, A.I., Niederman, L.: 1994, Stability of nearly integrable convex Hamiltonian systems over exponentially long times in *Proceedings of the 1991 Euler Institute Conference on Dynamical Systems*, Kuksin, Lazutkin and Pöschel (Eds), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **12**, Birkhaüser, Basel, 20 pp.

[ML] Marco, J.P., Lochak, P.: 2005, Diffusion times and stability exponents for nearly integrable analytic systems, *Central European Journal of Mathematics* **3** (3), pp. 342-397.

[MS] Marco J.P., Sauzin D.: 2003, Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian Systems, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* **96**, pp. 199-275.

[MM] Markus, L., Meyer, K.R.: Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic, *Mem. Am. Math. Soc.* **144**, 52 pp. 1-52.

[MH] Meyer, K. R., Hall, G.R.: 1992, Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-Body problem, *Applied Mathematical Sciences* **90**, Springer-Verlag, New York.

[M] Morbidelli, A.: 2002, Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics, Taylor & Francis, London.

[Mo] Moser, J.: 1962, On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus,*Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Kl.*, pp. 1-20.

[Ne1] Nekhorochev, N.N.: 1973, Stable lower estimates for smooth mappings and for gradients of smooth functions, *Math. USSR Sbornik* **19**(3), pp. 425-467.

[Ne2] Nekhorochev, N.N.: 1977, An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, *Russian Math. Surveys* **32**, pp. 1-65.

[Ne3] Nekhorochev, N.N.: 1979, An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems 2, *Trudy Sem. Petrovs* **5**, pp. 5-50, translated in Oleinik, O.A. (Ed.), Topics in Modern Mathematics, Petrovskii Semin. (**5**), New York: Consultant Bureau 1985.

[Nei] Neishtadt,A.I.: 1984, The separation of motions in systems with rapidly rotating phase, *J. Appl. Math. Mech.* **48**, pp. 133-139.

[Ni1] Niederman, L.: 1996, Stability over exponentially long times in the planetary problem, *Nonlinearity* **9** (6), pp. 1703-1751.

[Ni2] Niederman, L.: 1998, Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in an Hamiltonian system, *Nonlinearity* **11** (6), pp. 1465-1479.

[OY] Ott, W.; Yorke, J.A.: 2005, Prevalence, *Bull. Am. Math. Soc.*, **42** (3), pp. 263-290.

[PM] Pérez-Marco, R.: 2003, Convergence or generic divergence of the Birkhoff normal form, *Ann. Math.* **157** (2), pp. 557-574.

[Pl] Ploski, A.: 1988, Multiplicity and the Lojasiewicz exponent, *Banach Cent. Publ.* **20**, pp. 353-364.

[P] Poincaré, H.: 1892, Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste **tomes I, II, III**, reprinted by *Blanchard, Paris.*

[Pö1] Pöschel, J.: 1993, Nekhorochev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems, *Math. Z.* **213**, pp. 187-217.

[Pö2] Pöschel, J.: 1999, On Nekhoroshev's Estimate at an Elliptic Equilibrium, *Int. Math. Res. Not.* **1999: 4**, pp. 203-216.

[Pö3] Pöschel, J.: 1999, On Nekhoroshev estimates for a nonlinear Schrödinger equation and a theorem by Bambusi, *Nonlinearity* **12** (6), pp. 1587-1600.

[R] Ramis J.P.: 1993, Séries divergentes et théories asymptotiques, *Bulletin de la Société Mathématique de France (Panoramas et Synthèses* **121**, 74 pp.

[RS] Ramis, Jean-Pierre; Schäfke, Reinhard: 1996, Gevrey separation of fast and slow variables. (English), *Nonlinearity* **9** (2), pp. 353-384.

[Ru] Rüssmann, H.: 2001, Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems, *Regul. Chaotic Dyn.* **6** (2), pp. 119-204.

[Sa] Salamon, D.A.: 2004, The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem, *Math. Phys. Electron. Jour.* **10** (3), 37 pp.

[S] Sauzin, D.: 1992, Gevrey character of formal series solutions of an averaging problem, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **315** (9), pp. 991-995.

[Se1] Sevryuk, M.: 2003, The classical KAM theory at the dawn of the Twenty-First Century, *Mosc. Math. J.* **3** (3), pp. 1113-1144.

[Se2] Sevryuk, M.: 2006, Partial preservation of frequencies in KAM theory, *Nonlinearity* **19** (5), pp. 1099-1140.

[Si] Simó, C.: 2006, Boundaries of Stability, to appear in *Disc. and Cont. Dyn. Syst.*.

[Y1] Yomdin, Y.: 1983, The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings, *Math. Ann.* **264**, pp. 495-515.

[Y2] Yomdin, Y.: 2005, Some quantitative results in singularity theory, *Ann. Polon. Math.* **87**, pp. 277-299.

[YC] Yomdin, Y.; Comte, G.: 2004, Tame geometry with application in smooth analysis, LNM **1645**, Springer Verlag, Berlin.