Etude numérique de la dynamique tourbillonnaire et du mélange dans les jets coaxiaux turbulents

Guillaume Balarac

▶ **To cite this version:**

Guillaume Balarac. Etude numérique de la dynamique tourbillonnaire et du mélange dans les jets coaxiaux turbulents. Autre. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2006. Français. NNT : . tel-00121393

HAL Id: tel-00121393

https://theses.hal.science/tel-00121393

Submitted on 20 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Mécanique des Fluides et Transferts

préparée au Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (LEGI)
dans le cadre de **l'Ecole Doctorale *Mécanique et Energétique***

présentée et soutenue publiquement

par

Guillaume BALARAC

Le 19 octobre 2006

Titre :

Etude numérique de la dynamique tourbillonnaire et du mélange dans les jets coaxiaux turbulents

---

Directeurs de thèse :
Pr M. LESIEUR
Pr O. METAIS

JURY

Pr. S. Candel	, Président
Pr. L. Vervisch	, Rapporteur
Pr. E. Lamballais	, Rapporteur
Pr M. Lesieur	, Directeur de thèse
Pr O. Métais	, Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement mes directeurs de thèse, Marcel Lesieur et Olivier Métais pour leur soutien scientifique et la confiance qu'ils m'ont accordé pour mener ce travail. Merci à Olivier Métais de m'avoir accepté pour un stage de trois mois (en 2002) qui a duré trois ans et demi...

Je tiens également à témoigner une grande reconnaissance à Sebastion Candel, président du jury, Eric Lamballais et Luc Vervisch, rapporteurs de cette thèse, pour l'attention qu'ils ont porté à ce travail et leur sympathie lors de la soutenance. Présenter et discuter de mes travaux de thèse devant de tels chercheurs étaient, certes, un peu impressionnant mais extrémement enrichissant.

Il y a de nombreuses personnes au LEGI que j'aimerais remercier. Je n'essaierai pas de tous les nommer de peur d'en oublier. En tous les cas, qu'ils sachent que ces trois ans passés en leur compagnie étaient des plus agréables.

J'ai eu la chance d'être moniteur à l'ENSHMG durant cette thèse. Enseigner fut un vrai plaisir. Merci donc à l'équipe enseignante de cette école et aux membres du CIES de Grenoble pour leur accompagnement dans cette première expérience.

Merci également à tous les anciens et nouveaux membres de l'équipe MoST : Jérôme, Gwen, Alex, Mohamed S., Mohamed M., Eric, Christophe B., Christophe C., Achim, Cédric, Abbès et Souhaeil. Une mention particulière à Cécile qui m'a supporté le plus longtemps (ou que j'ai supporté le plus longtemps, question de point de vue). Bien entendu, je n'oublie pas Patrick. Il n'est pas évident de dire en quelques mots tout ce qu'un thésard de MoST lui doit. Alors merci pour ta bonne humeur, tes talents d'informagiciens, tes encouragements pendant les coups de blues... et merci surtout de ne pas m'avoir forcé à venir courir avec toi.

Les choses ont fait que j'ai passé pas mal de temps (surtout entre midi et deux) au laboratoire EPM-Madylam. Un grand merci aux "Madylamiens" pour leur hospitalité tout au long de ces trois ans. Un remerciement particulier à René Moreau qui nous a offert à Laetitia et moi une formidable occasion de poursuivre l'aventure de la recherche.

Pour moi, cette aventure a commencé avec Carlos Frederico Neves Bettencourt da Silva[1]. Je ne le remercierai jamais assez de m'avoir initié à la turbulence numérique. Malgré la distance, il a toujours été présent pour m'aider. Son enthousiasme communicatif pour la recherche a été un formidable moteur. Alors merci encore, Carlos, de toute l'attention que tu m'as porté et j'espère très sincèrement que notre amitié durera et que l'on aura de nouveau l'occasion de travailler

[1] dans la suite on utilisera l'abréviation : Carlos

ensemble.

C'est également durant ces trois ans que j'ai fait mes premiers pas d'entraineur de lutte. Les heures passées sur les tapis du club d'Eybens ont été indispensables. Merci donc aux lutteurs et à Patrick en particulier, même si ce Patrick là m'a forcé à venir courir avec lui.

Merci à tous mes proches, mes amis et ma famille qui ont été de parfaits "facteurs équilibrants" avec une mention spéciale à Olivia, Loïc et mes parents pour leur soutien.

Enfin, les derniers mots seront naturellement pour Laetitia. Ta tendresse dans les moments plus ou moins faciles est essentielle. Merci pour tout et plus encore...

Résumé

Ce travail porte sur l'étude par simulation numérique de jets ronds coaxiaux à fort rapport de vitesse avec une attention particulière portée sur trois aspects : la transition de ces jets vers la turbulence, le mélange dans cette configuration d'écoulement et l'influence du nombre de Reynolds sur ces deux précédents points.

Dans un premier temps, nous réalisons des simulations numériques directes de jets coaxiaux à un nombre de Reynolds modéré. Ces jets génèrent une région de recirculation lorsque le rapport des vitesses entre les jets externe et interne dépasse une valeur critique. Les anneaux de Kelvin-Helmholtz intérieurs et extérieurs ont un développement couplé. Ils sont convectés avec une même fréquence de passage contrôlée par la couche cisaillée extérieure. Ensuite, comme pour les jets ronds, des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs apparaissent initiant la tridimensionnalisation de l'écoulement. La région de recirculation influence les anneaux de Kelvin-Helmholtz internes en les ralentissant et en les étirant longitudinalement. Deux modèles théoriques prédisant des grandeurs globales du jet (la longueur du cône potentiel interne et la valeur du rapport de vitesse critique au-delà duquel la région de recirculation apparaît) montrent l'influence de l'épaisseur de quantité de mouvement intérieure initiale.

Les propriétés de mélange ont ensuite été étudiées en résolvant l'équation de transport d'un traceur simultanément aux équations de Navier-Stokes. Les structures cohérentes de l'écoulement contrôlent le processus de mélange. Les tourbillons longitudinaux augmentent le mélange par un phénomène d'éjection du traceur en périphérie du jet. Cependant, la configuration initiale du jet montre que des poches de traceur non mélangé persistent à la fin de la transition. Les modifications des conditions d'entrée du jet diminuant ces poches sont celles qui permettent une génération plus précoce ou plus intense de structures longitudinales. C'est le cas de la région de recirculation qui étire longitudinalement les structures. De la même façon, un forçage azimutal de la couche cisaillée externe (qui domine la dynamique) améliore nettement le mélange et semble être plus performant qu'un forçage axisymétrique en ce qui concerne le mélange en champ proche.

Pour finir, nous avons réalisé des simulations des grandes échelles de jets coaxiaux à hauts nombres de Reynolds. L'auto-similitude des jets coaxiaux en turbulence pleinement développée a permis une validation sur les données expérimentales. Les quantités globales des jets coaxiaux sont fortement dépendantes du nombre de Reynolds jusqu'à ce que celui-ci atteigne une valeur de l'ordre de 10000. Au-delà de cette valeur, ces quantités sont quasi-indépendantes du nombre de Reynolds en raison du phénomène de "mixing transition" qui implique une déstabilisation tridimensionnelle immédiate du jet. Cette déstabilisation précoce des couches cisaillées conduit la région de recirculation à un comportement instationnaire. Enfin, cela permet une nette amélioration du mélange avec un phénomène d'éjection du traceur proche de l'entrée du jet.

Mots clefs : Ecoulements cisaillées libres ; Structures cohérentes ; Simulation numérique directe ; Simulation des grandes échelles ; Jets coaxiaux ; Transition ; Mélange ; Contrôle actif.

Abstract

Numerical study of vortex dynamics and mixing in turbulent coaxial jets

This work is devoted to the study of round coaxial jets with high velocity ratios using numerical simulations. The work focuses on three particular points : the transition towards fully-developed turbulence state, the mixing properties in this flow configuration, and the influence of the Reynolds number upon the two previous points.

First, direct numerical simulations of coaxial jets with moderate Reynolds numbers are carried out. It was observed that coaxial jets develop a back-flow region when the ratio between the outer and the inner jet velocities exceeds a critical value. The development of the inner and outer Kelvin-Helmholtz rings, arising from the initial instabilities is not independent. The inner rings are controlled by the outer shear layer as they travel downstream. Streamwise counter-rotating vortices develop further downstream, as in the transition scenario of the single round jet, and lead to an high three-dimensionalization of the turbulent field. When it is present, the back-flow region tends to slow down the inner Kelvin-Helmholtz rings and to stretch them in the streamwise direction. Two theoretical models were developed in order to predict some global quantities of the jet, as the inner potential core length and the critical velocity ratio for the appearance of the back-flow region. Both models underline the influence of the inner momentum thickness for the initial jet development.

A tracer transport equation was solved simultaneously with the Navier-Stokes equations to study the mixing properties of coaxial jets. The coherent structures control the mixing process. The streamwise vortices improve therefore the mixing by ejections of tracer around the jet. However spots of unmixed fluid persist at the end of the transition with the initial flow configuration. Modification of the upstream conditions allows the intense or early streamwise vortices to diminish the amount of unmixed fluid. The same effect is caused by the back-flow region due to its increased streamwise vortex stretching phenomena. For the same reason, an azimuthal forcing of the outer shear layer improves the mixing and seems to be more suited to the near-field than an axisymmetric forcing.

Finally, we perform large-eddy simulations of coaxial jets with high Reynolds numbers. The self-similarity allows to validate our simulations by comparison with experimental data in the fully-developed turbulence region. The Reynolds number influences the global quantities of the jet as long as it is smaller than 10000. For larger Reynolds numbers these quantities are almost Reynolds number independent because of the “mixing transition” phenomenon caused by a three-dimensional disturbance from the beginning of the jet. The early disturbance of the shear layers causes the back-flow region to be non-stationary. Moreover, this allows to improve the mixing with the ejections phenomenon near the entrance of the jet.

Keywords : Free shear flows ; Coherent structures ; Direct numerical simulation ; Large eddy simulation ; Coaxial jets ; Transition ; Mixing ; Active control.

Liste des notations

Notations liées aux équations de Navier-Stokes et à leur résolution numérique

(x, y, z)	coordonnées cartésiennes
(x, r, ϕ)	coordonnées cylindriques
$\vec{u}$	vecteur vitesse
$\vec{\omega}$	vecteur vorticité
ρ	masse volumique
ν	viscosité cinématique
p	pression
$\vec{\nabla}$	opérateur gradient
$L_x \times L_y \times L_z$	taille du domaine de calcul
Cu	vitesse fictive de la condition de sortie
$\widehat{(.)}$	quantités dans l'espace spectral
k	nombre d'onde
C	nombre de Courant

Notations liées à la définition des jets coaxiaux

Re	nombre de Reynolds
θ	épaisseur de quantité de mouvement
θ_0	épaisseur de quantité de mouvement initiale
D	diamètre
R	rayon
U	vitesse initiale
$(.)_1$	quantités liés au jet interne
$(.)_2$	quantités liés au jet externe
$(.)_3$	quantités liés au co-courant
r_u	rapport de vitesse, $r_u = U_2/U_1$
β	rapport de diamètre, $\beta = D_2/D_1$
R_m	rayon moyen, $R_m = (R_2 + R_1)/2$
$\vec{u}_{moyen}$	profil moyen du jet en entrée
$\vec{u}_{bruit}$	bruit en entrée

Notations liées à l'étude de la dynamique des jets coaxiaux

Q	second invariant du tenseur des gradients de vitesse
f	fréquence calculée sur le signal de vitesse longitudinale
Str	nombre de Strouhal
Uc	vitesse convective
$\langle . \rangle$	valeur moyenne (décomposition de Reynolds)

$(.)'$	valeur fluctuante (décomposition de Reynolds)
δ	taux d'épanouissement du jet
L_P	longueur du cône potentiel
R_P	localisation radiale du sommet du cône potentiel par rapport à l'axe du jet
r_{uc}	rapport de vitesse critique au-delà duquel une région de recirculation se crée
E_r	contribution radiale des tensions de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente
E_ϕ	contribution azimutale des tensions de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente
II, III	second et troisième invariants du tenseur d'anisotropie
u_e	vitesse d'entraînement du fluide du cône potentiel interne vers l'extérieur
$\overline{u_1}$	vitesse débitante du jet interne

Notations liées à l'étude du mélange

f	fraction de mélange
Sc	nombre de Schmidt
κ_D	diffusivité du traceur
DDP	fonction de densité de probabilité
$\vec{U}_{forc}$	bruit déterministe définissant l'excitation du jet
N	nombre d'onde azimutale de l'excitation azimutale
Z	"mixedness" global
I	intensité de ségrégation

Notations liées à l'étude à haut nombre de Reynolds (SGE)

Δ	taille du filtre en SGE
k_c	nombre d'onde de coupure, $k_c = \pi/\Delta$
ϵ	dissipation d'énergie cinétique
ϵ_f	taux de dissipation de la variance scalaire
E	spectre d'énergie cinétique
E_f	spectre de la variance scalaire
ν_T	viscosité turbulente
Sc_T	nombre de Schmidt turbulent
κ_T	diffusivité turbulente du traceur
C_K	constante de Kolmogorov
C_{CO}	constante de Corrsin-Oboukhov
F_2	fonction de structure du second ordre de vitesse
D_e	diamètre équivalent (relation de similitude)
U_e	vitesse équivalente (relation de similitude)

Table des matières

I Introduction **1**

1 Introduction générale **3**
1.1 La turbulence . . . 3
1.2 Tourbillons cohérents . . . 4
1.3 Simulations numériques d'écoulement turbulent . . . 5
1.4 Organisation du mémoire . . . 6

2 Etat de l'art **7**
2.1 Exemple d'écoulement cisaillé libre : le jet rond . . . 7
2.1.1 Quantités caractéristiques . . . 8
2.1.2 Jet rond laminaire . . . 8
2.1.3 Transition vers la turbulence . . . 9
2.1.4 Jet rond turbulent . . . 17
2.1.5 Jets multiples et jets confinés . . . 19
2.2 Jet coaxial . . . 20
2.2.1 Définition et applications . . . 20
2.2.2 Les cas limites : $r_u < 1$ et $r_u \to \infty$ . . . 22
2.2.3 Les jets coaxiaux avec $r_u > 1$ . . . 24

II Méthodes Numériques **29**

3 Les simulations incompressibles **31**
3.1 Les équations incompressibles . . . 31
3.2 Description du code . . . 32
3.2.1 Conditions aux limites . . . 32
3.2.2 Discrétisation spatiale . . . 36
3.2.3 Discrétisation temporelle . . . 40
3.2.4 Couplage pression-vitesse . . . 41
3.2.5 Retour à la condition de sortie . . . 42
3.2.6 Considération sur la stabilité numérique . . . 43
3.3 Outils d'analyse . . . 43
3.3.1 Quantités instantanées . . . 43
3.3.2 Quantités statistiques . . . 44

III Résultats et Discussions **47**

4 Nombre de Reynolds modéré : SND **49**
4.1 Paramètres physiques et numériques des simulations . . . 50
4.2 Vue globale de l'écoulement - Influence de r_u . . . 52
4.2.1 Description globale de la transition . . . 52
4.2.2 La bulle de recirculation . . . 58
4.3 Structures tourbillonnaires cohérentes . . . 61
4.3.1 Structures primaires : phénomène de "locking" . . . 61
4.3.2 Structures secondaires : vers une tridimensionnalisation du jet . . . 63
4.3.3 La bulle de recirculation et les structures cohérentes . . . 65
4.4 Un paramètre important : θ_{01} . . . 67
4.4.1 Influence sur la dynamique de l'écoulement . . . 68
4.4.2 Développement de modèles théoriques . . . 75
4.5 Animations liées au chapitre . . . 79

5 Mélange dans les jets coaxiaux **81**
5.1 Validation . . . 82
5.1.1 Equation de transport d'un scalaire . . . 82
5.1.2 Validation dans le cas d'un jet plan . . . 84
5.2 Mélange dans les jets coaxiaux - Cas de référence . . . 86
5.3 Influence des conditions d'entrée . . . 92
5.3.1 Traceur introduit dans le jet interne . . . 92
5.3.2 Jets coaxiaux avec bulle de recirculation . . . 94
5.3.3 Quantités de mouvement initiales . . . 97
5.3.4 Comparaison entre les différents cas . . . 100
5.4 Contrôle des structures cohérentes . . . 101
5.4.1 Notion de contrôle . . . 101
5.4.2 Définition des forçages . . . 102
5.4.3 Excitation axisymétrique . . . 103
5.4.4 Excitations azimutales . . . 108
5.4.5 Comparaison globale entre les différents forçages . . . 114
5.5 Animations liées au chapitre . . . 116

6 SGE de jets coaxiaux **117**
6.1 La simulation des grandes échelles . . . 118
6.1.1 Philosophie générale . . . 118
6.1.2 Opération de filtrage et équations de Navier-Stokes filtrées . . . 119
6.1.3 Modélisation sous-maille . . . 121
6.2 Validation dans le cas des jets coaxiaux . . . 123
6.2.1 Paramètres des simulations . . . 123
6.2.2 Notion de vitesse et de diamètre équivalents . . . 124
6.2.3 Validation . . . 124
6.3 Dynamique à grand nombre de Reynolds . . . 126
6.3.1 Dynamique tourbillonnaire . . . 126
6.3.2 Quantités globales . . . 130
6.3.3 Bulle de recirculation . . . 133
6.3.4 Turbulence pleinement développée . . . 135

6.4 Mélange à grand nombre de Reynolds 136
6.4.1 Simulation des grandes échelles de l'équation de transport d'un scalaire passif 138
6.4.2 Influence du nombre de Reynolds 139
6.4.3 Influence de la bulle de recirculation 140
6.4.4 Qualité du mélange 142
6.5 Animations liées au chapitre 143

7 Conclusions générales **145**

IV Articles **149**

A Transition in high velocity ratio coaxial jets analysed from direct numerical simulations, J. Turbulence, 4, 2003 **151**

B The near field of coaxial jets : A numerical study, Phys. Fluids, 17, 2005 **169**

C Mixing and coherent vortices in turbulent coaxial jets, C. R. Mécanique, 333, 2005 **183**

D Direct numerical simulations of high velocity ratio coaxial jets : Mixing properties and influence of upstream conditions, J. Turbulence, in press, 2006 **189**

V Bibliographie **217**

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Introduction générale

Ce mémoire présente une étude numérique des jets coaxiaux turbulents. Cette étude s'est poursuivie selon trois axes principaux. Le premier axe porte sur le scénario de transition des jets coaxiaux vers la turbulence en focalisant sur la dynamique tourbillonnaire et l'influence des conditions d'entrée. Ensuite, le rôle des structures cohérentes dans les processus de mélange est étudié. A cette occasion, un contrôle de ces structures est présenté en vue d'améliorer le mélange. Enfin, le dernier axe porte sur l'influence du nombre de Reynolds sur la dynamique de l'écoulement lors de la transition et ses conséquences sur les processus de mélange.

Ce chapitre d'introduction va présenter les thèmes généraux dans lequel ce travail s'insère.

1.1 La turbulence

La turbulence dans un milieu fluide est répandue aussi bien dans la nature que dans le milieu industriel. Mais, malgré cette omniprésence, il n'existe pas de définition proprement dite de ce phénomène, ni d'ailleurs de théorie générale de la turbulence[1]. La turbulence se caractérise par une apparence désordonnée. On y voit un ensemble de "parcelles" fluides suivant des trajectoires circulaires secondaires au mouvement moyen de l'écoulement définissant ainsi des tourbillons. La turbulence peut être alors caractérisée par quelques propriétés remarquables comme :

L'imprévisibilité. Si on considère les volutes de la fumée d'une cigarette, personne ne peut prévoir précisément leur évolution dans le temps et dans l'espace. C'est parce que cette évolution est fortement dépendante de la moindre perturbation. C'est "l'effet papillon" de la météorologie.

Un fort mélange. L'expérience quotidienne montre que si on veut homogénéiser deux fluides, il est toujours plus rapide de les agiter que de les laisser au repos. Les mouvements turbulents induits par l'agitation permettent un mélange considérablement plus rapide que le mélange moléculaire.

Une grande gamme d'échelles. Les mouvements secondaires des "parcelles" se produisent sur une large gamme d'échelles de longueur. On peut ainsi distinguer des tourbillons de différentes tailles.

Les plus gros tourbillons ont une taille de l'ordre des longueurs géométriques caractéristiques de l'écoulement alors que les plus petits sont définis par la viscosité du fluide. En effet, en dessous d'une certaine échelle de longueur, l'énergie mécanique est transformée en énergie thermique

[1] L'une des meilleures illustrations de ces propos reste la déclaration de H. Lamb, physicien britannique : *Quand je serai au ciel, j'espère que j'y recevrai des éclaircissements à propos de deux phénomènes : l'électrodynamique quantique et la turbulence des fluides. En ce qui concerne l'électrodynamique quantique, j'ai bon espoir.*

à cause de la viscosité moléculaire. Cet ensemble de tourbillons est le théâtre d'un transfert énergétique par processus inertiels qui s'effectue entre structures accordées, c'est-à-dire de proche en proche entre les échelles. Cette *cascade d'énergie* qui illustre l'idée d'un transfert progressif d'énergie depuis les gros tourbillons vers les petits s'articule autour de trois étapes majeures qui sont :

- Un apport énergétique des gros tourbillons en provenance du mouvement moyen, où les effets de la viscosité moléculaire sont négligeables.

- Une redistribution interne de l'énergie des gros tourbillons aux plus petits par un processus essentiellement non-linéaire et non visqueux.

- Une dissipation de cette énergie par des effets de viscosité moléculaire au niveau des petites échelles.

Cette théorie présume donc de l'existence d'une zone inertielle entre les grandes échelles énergétiques et les petites échelles dissipatives. Dans cette zone, les échanges énergétiques vont en direction des petites échelles par des processus non visqueux.

Dans ce travail nous nous intéresserons particulièrement au développement de la turbulence. Ce développement, encore appelé transition, est un phénomène complexe d'amplifications rapides de petites perturbations ajoutées à l'écoulement moyen qui amènent à l'aspect chaotique de l'état de turbulence. Une des grandeurs permettant d'appréhender la capacité d'un écoulement à devenir turbulent est le nombre de Reynolds introduit par O. Reynolds en 1883 [125]. Il est défini par

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractérisant l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Cette grandeur mesure le rapport des forces inertielles sur les forces visqueuses. On peut également l'interpréter comme le rapport de deux temps $Re = T_{vis}/T_{in}$ où $T_{vis} = L^2/\nu$ est le temps caractéristique d'amortissement d'un perturbation par viscosité et $T_{in} = L/U$ est le temps nécessaire à une parcelle fluide pour parcourir la distance L sous l'effet de son inertie. Pour un nombre de Reynolds élevé, le temps visqueux T_{vis} sera beaucoup plus grand que le temps inertiel T_{in} et les mouvements des parcelles fluides pourront se développer sans être amorties par viscosité. La transition vers la turbulence s'opère donc pour de grands nombres de Reynolds.

1.2 Tourbillons cohérents

La turbulence implique par "définition" un mouvement de fluide chaotique. Cependant, s'imaginer que la turbulence est un phénomène complètement aléatoire serait un leurre. En effet, au début des années 70, Brown et Roshko [11] ont montré l'existence d'un certain "ordre" dès les premières étapes de la transition et persistant jusqu'à la turbulence pleinement développée. L'un des aspects visibles de cet "ordre" est l'existence de *structures cohérentes* au sein de la turbulence. Lesieur [96] définit les tourbillons cohérents comme des régions de l'écoulement satisfaisant les trois conditions suivantes :

1. La concentration de vorticité ω (définie comme le rotationnel du vecteur vitesse) doit être suffisamment importante pour permettre un retournement local du fluide environnant,

2. Les tourbillons cohérents doivent avoir un temps de vie grand devant leur temps de retournement local ω^{-1},

3. Ils sont imprévisibles.

Généralement, un tourbillon cohérent est une zone de basse pression puisqu'une parcelle fluide dans le tourbillon est en équilibre local (dans le repère se déplaçant avec elle) entre les forces centrifuges et les forces dues aux gradients de pression[2]. Nous verrons dans la suite les critères de visualisation de ces structures.

Outre le fait que les tourbillons cohérents ont permis de redonner un sens physique à la turbulence[3], ces derniers jouent un rôle essentiel dans de nombreux mécanismes des écoulements turbulents. Par exemple, ils sont en grande partie responsables du bruit émis par un jet de réacteur et conditionnent les propriétés de mélange de l'écoulement. De telles constatations ont amené à travailler sur la manipulation de ces structures afin d'assurer un certain contrôle de l'écoulement.

1.3 Simulations numériques d'écoulement turbulent

Pour mener notre étude nous avons utilisé des techniques de simulations numériques. Le développement rapide des calculateurs depuis la fin du vingtième siècle a permis une expansion de ces techniques pour l'étude de la turbulence. L'une de ces techniques est la simulation numérique directe (SND). Le principe de cette approche est de résoudre toutes les échelles spatio-temporelles de l'écoulement. L'erreur potentielle est uniquement due à la précision des schémas numériques utilisés pour résoudre les équations de Navier-Stokes qui régissent les mouvements du fluide. L'intérêt de cette technique est un accès direct aux quantités instantanées en chaque point du maillage (sur lesquelles est discrétisé le calcul). Ces points peuvent être vus comme des sondes non-intrusives, dont le nombre considérable (nécessaire à la résolution de toutes les échelles spatiales) permet une "vision" tridimensionnelle de l'écoulement. La contrainte d'une telle technique reste son coût de calcul. Le nombre de points nécessaires pour sa réalisation ne permet pas actuellement de considérer des écoulements à hauts nombres de Reynolds ou à géométrie complexe comme c'est le plus souvent le cas pour des applications industrielles ou géophysiques.

D'autres approches ont alors été imaginées. La modélisation statistique reste l'approche la plus souvent utilisée dans le contexte industriel. Elle a pour avantage un faible coût de calcul mais elle a pour principal inconvénient que toutes les échelles de l'écoulement sont déduites d'un modèle. De plus ces modèles sont fortement dépendants de l'écoulement considéré. Il n'existe pas de modèle universel facilement applicable à une grande classe d'écoulements.

Une alternative à la SND et aux techniques de modélisation statistique est l'approche dite de simulation des grandes échelles (SGE). Il s'agit alors de ne simuler que les mouvements des grandes échelles (les plus énergétiques), la contribution des mouvements aux petites échelles étant modélisée. Cette technique permet de garder la connaissance de l'instationnarité et de la tridimensionnalité de l'écoulement toute en diminuant sensiblement le coût de calcul. Bien entendu, les performances de cette technique restent tributaires de la qualité du modèle utilisé pour prendre en compte l'action des petites échelles. Le début du chapitre 6 reviendra plus en détail sur cette approche.

[2]Cette analogie basse pression/tourbillon cohérent n'est plus vraie dans certain cas comme quand la compressibilité est forte ou quand le fluide est soumis à une forte rotation d'entraînement [95]

[3]qui était traitée essentiellement d'un point de vue statistique et dimensionnel, avant la découverte de tels tourbillons par A. Roshko au début des années soixante dix (voir Lesieur [95]).

1.4 Organisation du mémoire

La première partie de ce mémoire a pour objectif d'introduire les principaux résultats des travaux antérieurs nécessaires aux discussions qui suivront. Le chapitre 2 détaillera ainsi la physique des jets simples. En particulier, nous présenterons le mécanisme de transition vers la turbulence dans cette configuration d'écoulement car il pourra être relié à celui des jets coaxiaux. Nous profiterons également de ce chapitre pour présenter les travaux antérieurs menés sur les jets coaxiaux, sujets de cette étude. Puis, après avoir présenté le code de calcul utilisé pour réaliser nos simulations numériques au chapitre 3, nous exposerons les résultats obtenus. Le chapitre 4 présentera des simulations numériques directes de jets coaxiaux. L'objectif de ce chapitre est de détailler les mécanismes de transition vers un état de turbulence pleinement développée. On précisera à cette occasion l'influence de certains paramètres d'entrée du jet sur la dynamique de l'écoulement. Dans le chapitre suivant, nous résolvons numériquement l'équation d'un scalaire passif afin d'étudier les propriétés de mélange de l'écoulement. Nous verrons le rôle que joue les structures cohérentes et nous proposerons un forçage qui permet d'améliorer le mélange par modification de la dynamique de ces structures. Ensuite, le chapitre 6 portera sur l'influence du nombre de Reynolds sur les jets coaxiaux. A cette occasion, nous réalisons des simulations des grandes échelles. Le nombre de Reynolds influence de façon importante la dynamique du jet et ses propriétés de mélange. Enfin le chapitre 7 conclura se travail en reprenant les principaux résultats et en énonçant quelques perspectives. Une annexe contenant les articles issus de ce travail et publiés ou soumis à des jounaux avec comité de lecture complète ce mémoire.

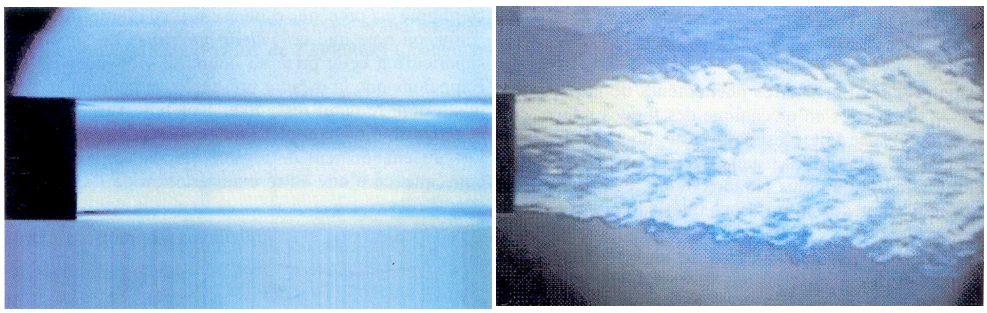
Ce travail a bénéficié des ressources de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS).

Chapitre 2

Etat de l'art

Dans ce chapitre nous allons rappeler les résultats antérieurs nécessaires aux discussions qui suivront. Les jets coaxiaux font partie d'une "famille" d'écoulements qui a été largement étudiée au cours du dernier siècle : les écoulements cisaillés libres[1]. Ainsi, avant d'aborder directement l'étude des jets coaxiaux, nous allons présenter une synthèse des connaissances sur le jet rond. Une bonne compréhension de la physique de cet écoulement est indispensable à l'étude des jets coaxiaux que nous aborderons ensuite.

2.1 Exemple d'écoulement cisaillé libre : le jet rond



(a) *(b)*

FIG. 2.1 – Illustration de jets ronds. *(a)* jet rond laminaire et *(b)* jet rond turbulent. D'après Chassaing [22].

Les jets ronds simples ont été intensivement étudiés en raison des applications industrielles qu'ils offrent et de leur large diffusion dans la nature. A première vue, le jet rond se décompose en deux régions : la couche cisaillée où l'écoulement est rotationnel et la région irrotationnelle qui l'entoure. La couche cisaillée est la région centrale qui est caractérisée par son accroissement radial. Il y a dans cette région de forts gradients de vitesse contrairement à la région irrotationnelle. L'accroissement de la couche cisaillée est le résultat de deux phénomènes distincts : la diffusion visqueuse et un phénomène d'entraînement. La diffusion visqueuse qui est toujours présente, est produite par la diffusion linéaire de la quantité de mouvement à travers la couche cisaillée. Le phénomène d'entraînement, quant à lui, est propre à la turbulence et est causé par la présence de structures cohérentes. La nature intermittente de ces structures leur permet

[1] selon la classification classique des écoulements turbulents (Chassaing [22]).

d'avaler des paquets de fluide irrotationnel à l'intérieur de la couche cisaillée. Ce phénomène est prépondérant par rapport à la diffusion visqueuse pour un écoulement turbulent. La figure 2.1 donne un premier aperçu de jets ronds. Dans la suite, nous ne parlerons que du jet rond incompressible à masse volumique ρ constante.

2.1.1 Quantités caractéristiques

Pour la suite de l'étude, quatre quantités vont être introduites. Leur définition est valable pour tous les jets (ronds, plans ou coaxiaux).

L'une des difficultés pratiques de l'étude expérimentale ou numérique du jet est de connaître la croissance de la couche de cisaillement. Pour cela, on introduit la définition de l'épaisseur de la couche de cisaillement dans le cas d'un jet turbulent. Cette grandeur $\delta_{0.5}$ est définie telle que :

$$\langle u_x \rangle(x, r = \delta_{0.5}) = 0,5[\langle u_x \rangle(x, r = 0) - u_\infty] \tag{2.1}$$

où $\langle u_x \rangle(x, r)$ est la vitesse longitudinale moyenne en coordonnée cylindrique et u_∞ la vitesse dans la région irrotationnelle.

Ensuite, on définit l'épaisseur de quantité de mouvement du jet θ par la formule suivante :

$$\theta(x) = \int_0^\infty \left(\frac{\langle u_x \rangle(x, r) - u_\infty}{u_{max}(x) - u_\infty} \right) \left(1 - \frac{\langle u_x \rangle(x, r) - u_\infty}{u_{max}(x) - u_\infty} \right) dr \tag{2.2}$$

où u_∞ est la vitesse longitudinale du fluide dans la région irrotationnelle et où $u_{max}(x)$ est la valeur maximale de la vitesse longitudinale moyenne en x, $u_{max}(x) = \max(\langle u_x \rangle(x, r))$. Cette quantité mesure le déficit de quantité de mouvement du jet par rapport à un jet de fluide non visqueux.

Enfin, comme le jet se propage à l'intérieur du fluide environnant, la pression extérieure ne change pas et impose la valeur de la pression moyenne dans la couche cisaillée libre. Le gradient de pression moyen dans la direction de l'écoulement peut ainsi être négligé ce qui entraîne que le flux de quantité de mouvement $J(x)$ à travers cette direction reste constant :

$$J(x) = 2\pi\rho \int_0^\infty \langle u_x \rangle^2(x, r) r dr = Const \tag{2.3}$$

Une conséquence de l'entraînement naturel décrit plus haut est que le débit massique $Q(x)$ croît dans la direction de l'écoulement :

$$Q(x) = 2\pi\rho \int_0^\infty \langle u_x \rangle(x, r) r dr, \ \frac{\partial Q}{\partial x} > 0 \tag{2.4}$$

2.1.2 Jet rond laminaire

Sans nous attarder sur le cas laminaire, nous pouvons préciser qu'il existe une solution auto-similaire universelle[2] des équations de Navier-Stokes dans le cas du jet rond laminaire dans l'hypothèse d'une couche cisaillée mince. Cette hypothèse suppose que l'on considère la dimension longitudinale L très grande devant l'épaisseur de la couche cisaillée δ et la vitesse longitudinale u_x très grande devant la vitesse radiale u_r.

[2]Ici, universelle signifie que cette solution est valable pour tous les jets et cela indépendamment de leurs conditions initiales

On définit une quantité de mouvement cinématique $K' = \frac{J}{\rho}$ qui permet d'écrire les solutions analytiques suivantes (voir Schlichting [132]),

$$u_x(x,r) = \frac{3}{8\pi}\frac{\sqrt{K'}}{\nu(x-x_0)}\frac{1}{(1+\frac{1}{4}\xi^2)^2} \tag{2.5}$$

$$u_r(x,r) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sqrt{K'}}{(x-x_0)}\frac{\xi^2-\frac{1}{4}\xi^2}{(1+\frac{1}{4}\xi^2)^2} \tag{2.6}$$

$$u_\theta(x,r) = 0 \tag{2.7}$$

Dans les équation (2.5) et (2.6), ξ est une coordonnée adimensionnalisée qui est définie par :

$$\xi = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}\frac{\sqrt{K'}}{\nu}\frac{r}{x-x_0} \tag{2.8}$$

ν représente la viscosité cinématique du fluide et x_0 est une origine virtuelle tel que $\delta(x_0) = 0$.

2.1.3 Transition vers la turbulence

La majorité des jets que l'on retrouve dans la nature et l'industrie sont turbulents. Cette turbulence résulte de l'amplification de petites perturbations aux alentours du jet[3]. Cette phase d'amplification des perturbations est la transition du jet vers la turbulence. Le scénario est à peu près le même pour tous les jets dès que l'on considère un nombre de Reynolds du jet[4] assez important (supérieur à 300 d'après Mattingly et Chang [106]).

Quelques définitions d'un jet en transition

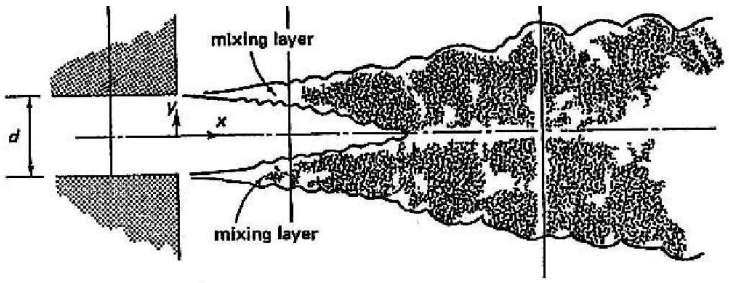


FIG. 2.2 – Description schématique d'un jet rond en transition. D'après Tennekes et Lumley [142].

La figure 2.2 schématise l'évolution initiale d'un jet en transition. Proche du début du jet, l'écoulement peut être divisé en trois régions : Le cône potentiel, la couche cisaillée et la région irrotationnelle. Au centre du jet, l'écoulement n'est pas influencé par la viscosité. Il n'y a pas de gradient axial ou radial de vitesse. Dans cette région en forme de cône, l'écoulement est potentiel et conserve la vitesse longitudinale de l'entrée. La couche cisaillée, au contraire, est le lieu où existe un fort gradient radial de vitesse. Ce gradient est à l'origine de la croissance de cette

[3]Ces perturbations peuvent être de différentes natures : ondes de pressions de sources acoustiques, vibrations de structures mécaniques...

[4]basé sur la vitesse du jet et le diamètre de sortie de la buse

couche cisaillée par diffusion radiale de la quantité de mouvement. Enfin, à l'extérieur de cette couche cisaillée, l'écoulement est irrotationnel avec une vitesse radiale négative impliquée par l'entraînement de fluide nécessaire à la croissance de la couche cisaillée. Au-delà du cône potentiel, plus en aval, la transition est achevée et le jet est dans l'état d'une turbulence pleinement développée.

Pour mieux comprendre cette phase de transition, nous allons détailler les mécanismes menant à cette turbulence pleinement développée.

Instabilité primaire du jet

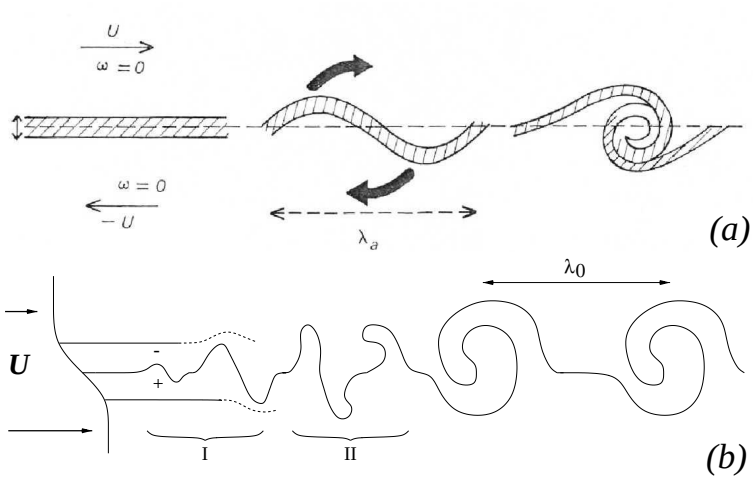


FIG. 2.3 – *(a)* Illustration schématique montrant la formation de tourbillons de Kelvin-Helmholtz dans une couche de mélange. D'après Lesieur [96]. *(b)* Mécanisme des instabilités de Kelvin-Helmholtz.

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz La région de la couche cisaillée initiale d'un jet rond est très similaire à une couche de mélange et connaît des instabilités analogues. L'instabilité initiale sera causée par la différence de vitesses de part et d'autre de la couche cisaillée. Cette instabilité, appelée instabilité de Kelvin-Helmholtz, conduira à l'enroulement de la nappe vorticitaire comme l'illustre la figure 2.3 *(a)*. Ceci peut être expliqué qualitativement par le mécanisme qui suit (Fig.2.3 *(b)*). Considérons les lignes de courant au niveau de la nappe vorticitaire. Si une perturbation déstabilise l'écoulement, il y aura une ondulation de ces lignes. Cette oscillation réduira l'espace entre deux lignes de courant d'un côté et l'augmentera de l'autre. Par continuité, cette réduction d'espace s'accompagnera d'une accélération du fluide. En raisonnant suivant l'équation de Bernoulli, la pression diminuera. L'effet inverse se produisant dans la région où l'espace augmente, l'ondulation sera amplifiée (phase I dans le schéma de la figure 2.3 *(b)*). Finalement, la nappe ainsi déstabilisée s'enroule (phase II) formant une suite de tourbillons primaires de Kelvin-Helmholtz. La géométrie initiale de l'écoulement fait que les tourbillons sont axisymétriques et constituent, ainsi, des anneaux. Ce sont les structures primaires du jet. L'espace entre deux anneaux de Kelvin-Helmholtz, noté λ_0, est lié à la fréquence de lâcher des tourbillons définie par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Appariement des anneaux tourbillonnaires Les anneaux tourbillonnaires grossissent grâce à l'entraînement du fluide extérieur et, parfois, grâce à la fusion avec les anneaux voisins lors-

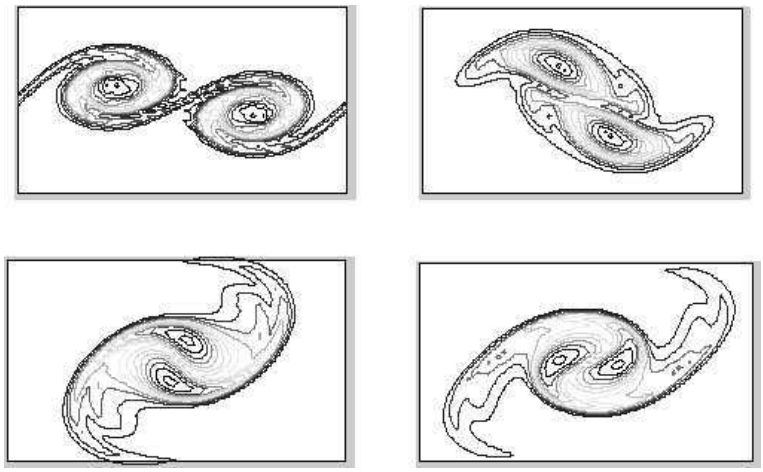


FIG. 2.4 – Appariement de deux tourbillons illustré par des contours de la vorticité. D'après Lin *et al.* [102].

qu'ils se déplacent vers l'aval. Cette fusion, encore appelée appariement de tourbillons, est un mécanisme important de l'élargissement du jet. En effet, deux tourbillons primaires de Kelvin-Helmholtz consécutifs s'enroulent l'un autour de l'autre par induction mutuelle conduisant à un tourbillon secondaire de Kelvin-Helmholtz (Fig.2.4). La taille de ce second tourbillon double, impliquant un élargissement du jet. De la même façon, la longueur d'onde de l'anneau double et, par conséquent, la fréquence de passage diminue de moitié (Zaman et Hussain [159], Ho et Huang [65]). Ce processus[5], peut se poursuivre jusqu'à la fin du cône potentiel[6] permettant, ainsi, d'augmenter sensiblement le niveau de tridimensionnalité de l'écoulement (Verzico et Orlandi [146]). Notons que Laufer et Monkewitz [90] ont suggéré que la perturbation de pression causée par l'appariement se propageait en amont du jet, se rendant responsable du prochain appariement. Ce phénomène rétroactif impliquerait l'aspect organisé des appariements constaté expérimentalement (Grinstein *et al.* [60]).

Notons pour finir qu'il existe un arrangement original des structures primaires au cours de la transition. En effet, des simulations temporelles (Fouillet [52] et Comte *et al.* [26]) et spatiales (da Silva [133]) de jets ronds, ainsi que des expériences (Broze et Hussain [12]) ont montré qu'à la fin du cône potentiel deux anneaux tourbillonnaires consécutifs pouvaient s'apparier localement formant une structure tourbillonnaire en "triangle" (Fig.2.5 *(a)*). Ceci est causé par l'existence d'une perturbation de longueur d'onde double qui décale les structures radialement (Urbin et Métais [144]). Puis, suivant le profil de vitesse, il y aura une inclinaison des anneaux et une fusion des zones où les anneaux se sont rapprochés par des mécanismes similaires à ceux d'un appariement classique. Cela conduira à un arrangement tourbillonnaire de longueur d'onde double (voir figure 2.5 *(b)*). Pour ce type d'appariement, l'analogie peut être faite avec les "appariements hélicoïdaux" rencontrés dans les couches de mélange planes (Pierrehumbert et Widnall [119], Comte *et al.* [27]).

[5]que l'on peut nommer "cascade de tourbillons" sans néanmoins la confondre avec la "cascade d'énergie" de la turbulence.

[6]Même si dans la plupart des jets les tourbillons de Kelvin-Helmholtz n'ont pas le temps de s'apparier avant la fin du cône potentiel ; dans ce cas, les tourbillons croissent uniquement par diffusion visqueuse de la vorticité.

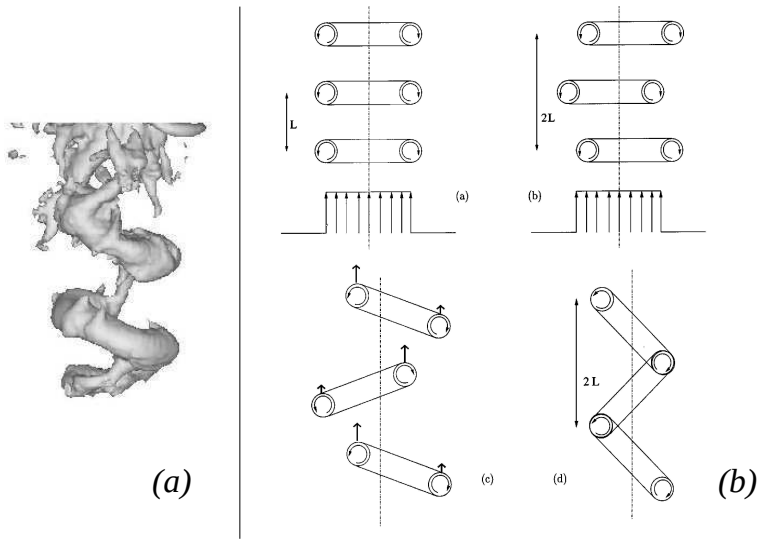


FIG. 2.5 – *(a)* Illustration d'un "appariement alterné" dans un jet rond par visualisation d'une isosurface de basse pression. D'après da Silva et Métais [136]. *(b)* Illustration schématique du scénario conduisant à un "appariement alterné". D'après da Silva et Métais [136].

Théorie linéaire de l'instabilité primaire De nombreux résultats portant sur l'instabilité primaire (ou de Kelvin-Helmholtz) des jets et des couches de mélange ont été obtenus à partir de la "théorie de la stabilité linéaire". Cette théorie consiste à linéariser les équations de Navier-Stokes et étudier l'évolution d'une perturbation que l'on superpose à un profil de vitesse donné. Cette théorie n'est valable qu'au début de la transition mais a l'avantage d'identifier précisément le rôle joué par les paramètres de l'écoulement. Dans le cas d'un jet, le profil initial peut être défini par une fonction en tangente hyperbolique,

$$u_x(r) = \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\frac{R}{\theta_0}\left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right)\right), \tag{2.9}$$

qui est une bonne évaluation de la vitesse du jet dans le cône potentiel (Freymuth [53]). Dans l'équation (2.9), θ_0 est l'épaisseur de quantité de mouvement initiale (Eq.(2.2) en $x = 0$), R est le rayon du jet, U_1 est la vitesse du jet au centre et U_2 est la vitesse de la région externe au jet. A partir de cela, Michalke [109] a déterminé que la longueur d'onde de la perturbation la plus instable était $\lambda_0 \approx 7,8\delta_i$ pour une couche de mélange associée à une perturbation croissant spatialement. Ici, δ_i est l'épaisseur de vorticité initiale définie par la relation

$$\delta_i = \frac{1}{\Omega_x} \int_0^\infty \langle\omega_\phi\rangle(x = 0, r)dr$$

où $\langle\omega_\phi\rangle$ est la composante tangentielle de la vorticité moyenne dans le repère cylindrique (x,r,ϕ) et Ω_x la valeur maximale de $\langle\omega_\phi\rangle$ initialement[7]. De la même façon, dans le cas d'amplifications spatiales, le nombre de Strouhal basé sur θ_0 et sur la fréquence de la perturbation la plus

[7] δ_i est égale à $4\theta_0$ dans le cas d'un profil en tangente hyperbolique (Bailly et Comte-Bellot [5])

amplifiée[8] est

$$Str_\theta = \frac{f_0\theta_0}{Uc} = 0,033$$

avec Uc la vitesse convective (de l'ordre de $(U_2+U_1)/2$ en incompressible). Ce nombre de Strouhal est encore appelé nombre de Strouhal de la couche cisaillée. Des résultats expérimentaux (Crow et Champagne [30], Gutmark et Ho [61]) et numériques (Grinstein *et al.* [60], Danaila *et al.* [33]) ont montré de très bons accords avec cette valeur théorique. Ce résultat illustre l'importance de l'épaisseur de quantité de mouvement initiale (θ_0)[9] dans le processus de transition.

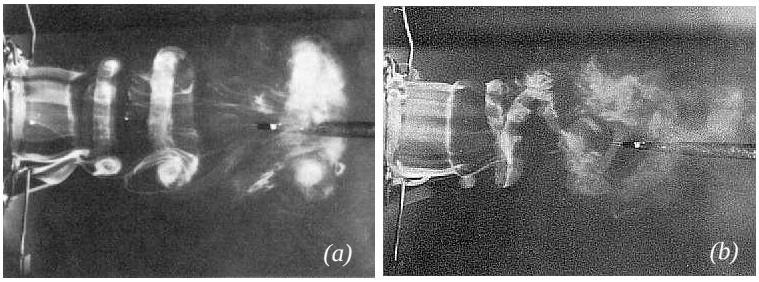


FIG. 2.6 – Modes instables observés dans un jet rond : *(a)* mode variqueux et *(b)* mode sinueux. L'écoulement va de la gauche vers la droite. D'après Drobniak [40].

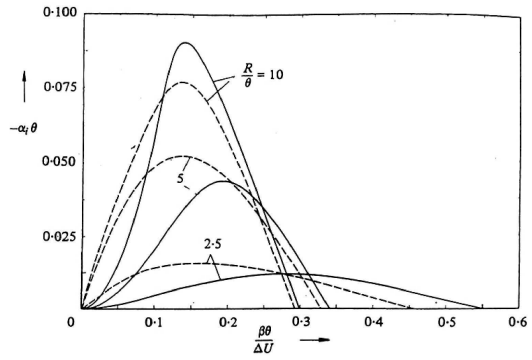


FIG. 2.7 – Evolution du taux d'amplification $(-\alpha_i)$ en fonction de la fréquence (β) pour trois valeurs de R/θ_0. Les lignes continues représentent le mode variqueux et les lignes pointillées représentent le mode hélicoïdal d'ordre 1. D'après Michalke et Herman [110].

Une autre information importante peut être obtenue à l'aide de la théorie de stabilité linéaire. En effet, Michalke et Hermann [110] ont étudié la réceptivité du profil en tangente hyperbolique (Eq.(2.9)) à une perturbation de pression de la forme,

$$p(x, r, \phi, t) = \tilde{p}(r)\exp[i(\alpha x + m\phi - \beta t)] + (*). \tag{2.10}$$

Dans cette équation, i est l'unité imaginaire ($i^2 = -1$), β est la fréquence de la pertubation, m est le nombre d'onde azimutal. $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ est un nombre complexe tel que α_r est le nombre

[8] Cette fréquence f_0 correspondra à la fréquence de lâcher des tourbillons primaires, de la même façon que λ_0 correspond à l'espace entre deux tourbillons primaires consécutif et on a $f_0 = Uc/\lambda_0$ où Uc est la vitesse convective des tourbillons (de l'ordre de $(U_2 + U_1)/2$ pour un jet incompressible).

[9] R/θ_0 définit la pente du profil en tangente hyperbolique donné par l'équation (2.9).

d'onde axial et α_i le taux d'amplification spatial. Enfin, $\tilde{p}(r)$ est le profil radial de la perturbation et $(*)$ est le terme complexe conjugué. L'écoulement devient instable à la perturbation si cette dernière est amplifiée ($\alpha_i < 0$). Si, à une fréquence donnée, la perturbation la plus amplifiée est telle que $m = 0$, on dit que le mode de l'instabilité est axisymétrique (ou variqueuse), si la perturbation la plus amplifiée est tel que $m \neq 0$, on dit que l'instabilité est de mode hélicoïdal (ou sinueux) d'ordre m. Ces modes se caractérisent par l'évolution des structures cohérentes. Un mode variqueux renforce l'axisymétrie initiale des anneaux (Hussain et Zaman [68], Liepmann et Gharib [100], Brancher *et al.* [10]) alors qu'un mode hélicoïdal $m = 1$ conduit les tourbillons de Kelvin-Helmholtz à former une hélice (Kusek *et al.* [84], Danaila *et al.* [33]) comme l'illustre la figure 2.6. Des modes hélicoïdaux d'ordre supérieur à l'unité sont toujours moins amplifiés que les modes fondamentaux, $m = 0$ ou 1, et sont invisibles expérimentalement (Plaschko [120]). Là encore, l'importance du paramètre R/θ_0 est illustré par la figure 2.7. Pour des valeurs importantes de R/θ_0, le mode variqueux est le plus amplifié alors que pour de faibles valeurs de ce paramètre, le mode hélicoïdal est prépondérant. La limite se situerait aux alentours de $R/\theta_0 = 6,25$. En reprenant le profil réel d'un jet, R/θ_0 est important en entrée du jet, puis le rapport R/θ diminue progressivement par diffusion de la quantité de mouvement. Le mode variqueux apparaîtra ainsi en premier lieu et progressivement le mode hélicoïdal s'amplifiera pour dominer à partir de la fin du cône potentiel. Ce résultat a été confirmé par des études expérimentales et numériques. Cohen et Wygnanski [25] ont montré la capacité qu'avait la théorie de la stabilité linéaire à détailler les processus d'instabilité des jets comme la distribution spectrale de perturbations de vitesse[10].

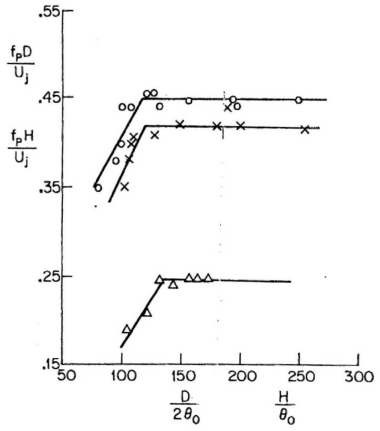


FIG. 2.8 – Nombre de Strouhal du mode préférentiel des jets en fonctions du rapport des longueurs caractéristiques : jets ronds (cercle, croix) et jet plan (triangles). D'après Ho et Huerre [66].

Le mode préférentiel Pour terminer cette partie sur l'instabilité primaire du jet rond, on peut rappeler que des expériences de jets forcés de Crow et Champagne [30] ont mis en évidence l'existence d'une fréquence privilégiée à la fin du cône potentiel. C'est le mode "préférentiel" du jet. Le nombre de Strouhal basé sur cette fréquence et sur le diamètre du jet ($Str_D = fD/U_1$) varie de 0,25 à 0,5 d'une étude à l'autre (Crow et Champagne [30], Yule [158], Gutmark et Ho

[10]Des compléments intéressants sur la théorie de la stabilité linéaire peuvent être trouvés dans la thèse d'Urbin [143].

[61], Zaman et Hussain [159], Olsson et Fuchs [114], Danaila *et al.* [33], Urbin et Métais [144]). Cette fréquence f est la fréquence de passage des tourbillons à la fin du cône potentiel. Une bonne approximation de sa valeur est $f = f_0/2^n$ où f_0 est la fréquence initiale de lâché des tourbillons et n le nombre d'appariement. Des études expérimentales ont montré que pour un rapport $R/\theta_0 < 120$, le nombre de Strouhal du mode préférentiel est proportionnel à ${R/\theta_0}^{11}$, alors que pour $R/\theta_0 > 120$, ce nombre de Strouhal est bloqué à 0,44 (voir figure 2.8). A ce jour, aucune explication n'a été avancée pour expliquer ce comportement.

Instabilité secondaire du jet

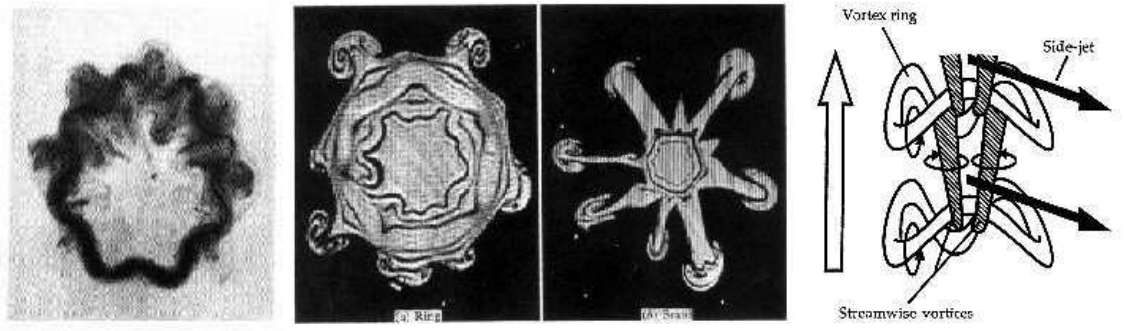


FIG. 2.9 – *(a)* Ondes azimutales dans un anneau tourbillonnaire. D'après Lim et Nickels [101]. *(b)* Illustration des jets latéraux d'un jet rond au niveau d'un anneau de Kelvin-Helmholtz et au niveau d'une *tresse*. D'après Liepmann et Gharib [100]. *(c)* Schéma de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs connectant deux tourbillons de Kelvin-Helmholtz consécutifs. D'après Brancher *et al.* [10].

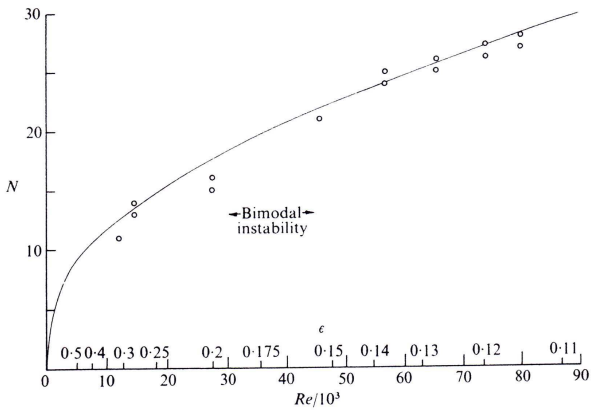


FIG. 2.10 – Dépendance du nombre d'onde azimutale avec le nombre de Reynolds. La ligne continue représente la prédiction théorique de Saffman [128] et les ronds représentent les observations expérimentales de Maxworthy [107]. D'après Saffman [128].

[11] Ce résultat est cohérent avec l'approximation que l'on vient de donner de f.

Tout ce qui vient d'être établi concerne l'instabilité primaire du jet et les anneaux tourbillonnaires qui en découlent. Cette étape est suivie d'une instabilité azimutale des anneaux tourbillonnaires (Yule [158]). L'anneau se déforme en n "vagues" où n correspond au nombre d'onde de l'instabilité. La figure 2.9 *(a)* illustre le cas d'un anneau qui a subi une instabilité azimutale de nombre d'onde $n = 8$. Des recherches ont été menées afin de déterminer l'instabilité (et donc le nombre d'onde) prédominante. Des calculs théoriques d'instabilité inviscide sur un anneau tourbillonnaire isolé de rayon R et de diamètre de tourbillon a (Widnal *et al.* [153]) ont montré que le nombre d'onde de l'instabilité azimutale la plus instable suivait la relation

$$R/a_e = n/k$$

où a_e est le diamètre de tourbillon effectif. Par exemple, pour une distribution uniforme de la vorticité dans le tourbillon, $k = 2,5$ et $a_e = a$ alors que pour une distribution de la vorticité de la forme $\omega(r) = \left(r^2 - a^2\right)^{-2}$, on a $k = 2,7$ et $a_e = 0,7a$ avec r la distance radiale à partir du centre du tourbillon. Cette théorie donne de bon résultats à de hauts nombres de Reynolds. Mais des études expérimentales ont montré que n augmentait avec le nombre de Reynolds [100]. Ce fait n'était pas pris en compte dans l'analyse inviscide de Widnall *et al.* [153]. Saffman [128] a donc repris ces travaux en tenant compte de la viscosité. Ses prédictions sont en bon accord avec les observations expérimentales comme l'illustre la figure 2.10.

La déformation azimutale des anneaux est suivie de l'apparition des paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs qui relient deux anneaux successifs. Longtemps, l'origine de ce phénomène a été expliquée à partir d'instabilités azimutales de type Widnall (Widnall et Sullivan [154]) qui donnaient naissance à une ondulation de l'anneau et qui viennent d'être décrites. Mais des études plus récentes, à la fois expérimentales (Liepmann et Gharib [100]) et numériques (Brancher *et al.*[10]), ont montré que l'instabilité azimutale agirait également sur la nappe fine de vorticité qui existe entre deux anneaux successifs[12]. L'instabilité au niveau de cette nappe, appelée *tresse* ou *braid*, est amplifiée et la *tresse* est étirée. Il s'en suit un ensemble de filaments à forte vorticité longitudinale de signe alterné : ce sont les paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Ces tourbillons relient alors les anneaux, en se logeant sur l'extérieur de l'anneau amont d'une part et sur l'intérieur de l'anneau aval d'autre part (Fig.2.9 *(c)*). Il apparaît alors entre deux tourbillons longitudinaux contra-rotatifs, des jets latéraux intenses (sous forme de champignons). Ces éjections radiales sont dues aux régions de hautes vitesses radiales induites par les tourbillons contra-rotatifs (Fig.2.9 *(b)*). Des simulations numériques (Brancher *et al.* [10], Urbin et Métais [144]) ont démontré que le nombre de paires de tourbillons longitudinaux était déterminé par le nombre d'onde n de la perturbation azimutale que subit l'anneau tourbillonnaire le plus proche de l'entrée du jet.

Ensuite, les tourbillons longitudinaux sont suffisamment intenses pour se libérer de l'influence des anneaux. Ils peuvent alors s'expulser par induction mutuelle et croître par diffusion visqueuse. Cette dernière étape est responsable de l'épanouissement important du jet à la fin de la transition par entraînement du fluide extérieur. Après l'émergence de ces tourbillons longitudinaux, la transition s'achève par une augmentation brutale de la turbulence au niveau des petites échelles due à une étape complexe de déchirure et d'appariement fractionnel des structures tourbillonnaires, conduisant ainsi le jet à une turbulence pleinement développée.

[12] ce processus est similaire à celui établi en couche de mélange (Bernal et Roshko [7], Lasheras *et al.* [88] et Lasheras et Choi [89])

Influence du nombre de Reynolds

Les auteurs s'accordent pour dire que le scénario de transition du jet rond vers la turbulence développée était indépendant de la viscosité pour un nombre de Reynolds assez élevé (supérieur à 3000 selon Zaman et Hussain [159]).

Cependant quelques cas limites peuvent être discutés. Morris [113] a établi que pour des jets de profil de vitesse en "haut de forme" [13] et de nombre de Reynolds faible ($100 < Re_D < 500$), le nombre de Reynolds devenait le paramètre qui sélectionne le mode le plus instable (variqueux ou hélicoïdal). Ceci avait été précédemment observé par Crow et Champagne [30] puis retrouvé plus tard numériquement par Danaila *et al.* [33] qui avaient noté que le mode hélicoïdal était prépondérant à faible nombre de Reynolds alors que le mode variqueux dominait pour les plus grands nombres de Reynolds de cette plage.

De plus, il est commun de remarquer qu'à haut nombre de Reynolds, les structures paraissent plus désorganisées et ceci plus tôt dans la transition du jet. Dimotakis [36] est allé plus loin dans l'analyse en établissant qu'il existait un nombre de Reynolds critique de l'ordre de 10^4 au-delà duquel la transition est fortement modifiée. Cette idée est partie de l'étude de couches de mélange. Pour ce type d'écoulement le nombre de Reynolds local est $Re(x) = \Delta U \delta(x)/\nu$ où x est la coordonnée dans le sens de l'écoulement, ΔU est la différence de vitesse à travers la couche de mélange et $\delta(x)$ l'épaisseur locale de la couche de mélange. Comme ΔU est indépendant de x et que $\delta(x)$ est proportionnel à x, on déduit $Re(x) \propto x$. Or il a été remarqué que le mélange entre le fluide lent et le fluide rapide de la couche de mélange s'améliorait remarquablement dès que $Re(x)$ était de l'ordre de 10^4 comme l'illustre la figure 2.11. Pour ces raisons d'amélioration nette du mélange, la transition de l'écoulement au-delà de ce nombre de Reynolds a été baptisée "transition de mélange" (mixing transition). Dans le cas d'un jet rond, des observations du même ordre ont pu être établies comme l'illustre la figure 2.12. Cependant, il y a une différence importante dans la définition du nombre de Reynolds local. En effet, dans le cas d'un jet, on a $Re(x) = U(x)\delta(x)/\nu$ avec $U(x)$ la vitesse caractéristique locale du jet et $\delta(x)$ l'épaisseur local du jet. Or dans le cas d'un jet, on a $U(x) \propto x^{-1}$ et $\delta(x) = R(x) \propto x$ (avec $R(x)$ le rayon local moyen du jet) ce qui implique que $Re(x) = Re_R = U_1 R/\nu$ est indépendant de x. Contrairement à la couche de mélange qui peut atteindre l'état de " transition de mélange" au cours de sa transition, un jet sera dans l'état de "transition de mélange" dès le début de sa transition ou ne l'atteindra jamais. D'un point de vue des structures cohérentes, cette "transition de mélange" se caractérise par une déstabilisation tridimensionnelle du jet (c'est-à-dire l'émergence de tourbillons longitudinaux) dès le début de la transition. Celle-ci est donc sensiblement réduite.

2.1.4 Jet rond turbulent

Une fois la transition vers une turbulence pleinement développée passée, il existe une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes. Il a longtemps été supposé que cette solution était universelle comme pour les jets laminaires [142]. D'après Schlichting [132], les équations du mouvements peuvent s'écrire en coordonnées cylindriques (x, r, ϕ)[14] :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\langle u_r\rangle}{\partial r} + \frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial x} = 0. \tag{2.11}$$

$$\langle u_r\rangle\frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial r} + \langle u_x\rangle\frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\langle u'_x u'_z\rangle. \tag{2.12}$$

[13] c'est-à-dire une vitesse constante dans le jet et nulle à l'extérieur

[14] C'est l'hypothèse d'"approximation de couche limite" ("boundary-layer approximation" en anglais).

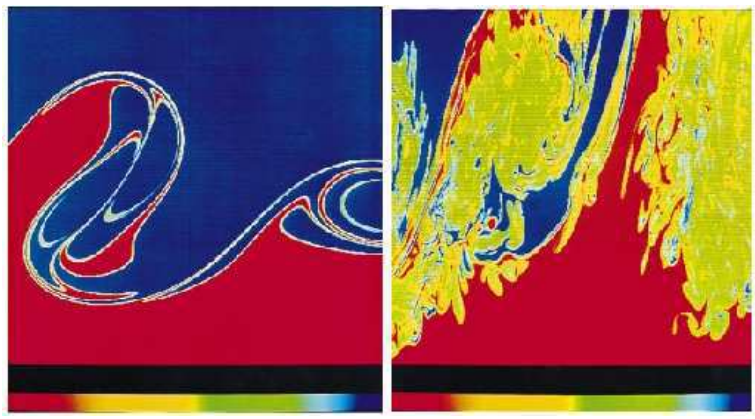


FIG. 2.11 – Champ scalaire dans une couche de mélange pour $Re(x) = 1,75 \times 10^3$ (à gauche) et $Re(x) = 2,3 \times 10^4$ (à droite). D'après Koochesfahani et Dimotakis [81].

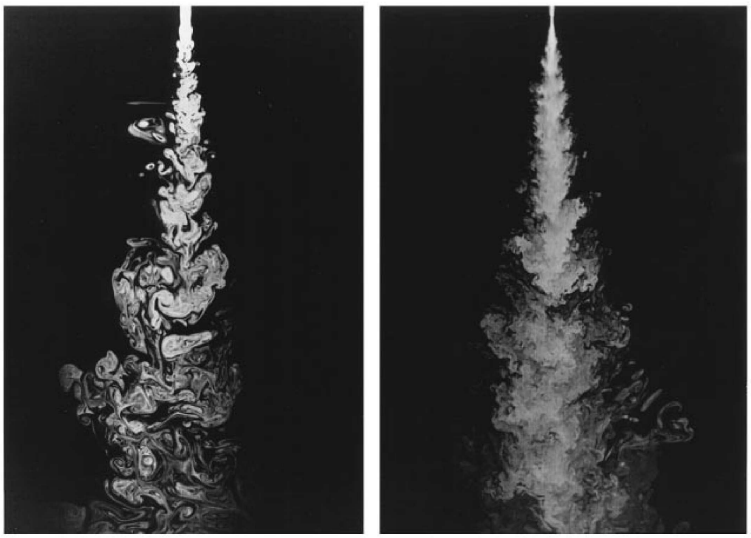


FIG. 2.12 – Champ scalaire dans le plan de symétrie de deux jets ronds de nombres de Reynolds : $Re_R = 2,5 \times 10^3$ (à gauche) et $Re_R = 10^4$ (à droite). D'après Dimotakis *et al.* [37].

On cherche alors une solution auto-similaire de la forme

$$\langle u_x \rangle = U(x) f(\eta),\ \langle u'_x u'_z \rangle = R(x) g(\eta),\ \eta = \frac{r}{\delta(z)},$$

où $U(x)$ est une échelle de vitesse, $R(x)$ est une échelle des tensions de Reynolds et $\delta(x)$ est une échelle de longueur. Il apparaît alors que la similitude existe seulement si

$$\frac{U^2(x)}{R(x)} \frac{\partial \delta}{\partial x} = \lambda \tag{2.13}$$

avec λ, une constante. Les études antérieures ont alors supposé que λ était une valeur universelle c'est-à-dire indépendante des conditions initiales du jet. Mais des travaux récents semblent montrer que l'auto-similitude du jet requiert seulement une proportionnalité entre $R(x)$ et $U^2(x)\partial\delta/\partial x$ avec une constante de proportionnalité non universelle [70, 8, 55].

2.1.5 Jets multiples et jets confinés

Il est intéressant pour les simulations numériques de connaître les particularités des jets confinés afin de s'assurer qu'il n'y a pas d'influence des conditions aux limites dans les simulations (*i.e.* que les limites du domaine de calcul ne modifient pas la physique du jet simulé en le confinant).

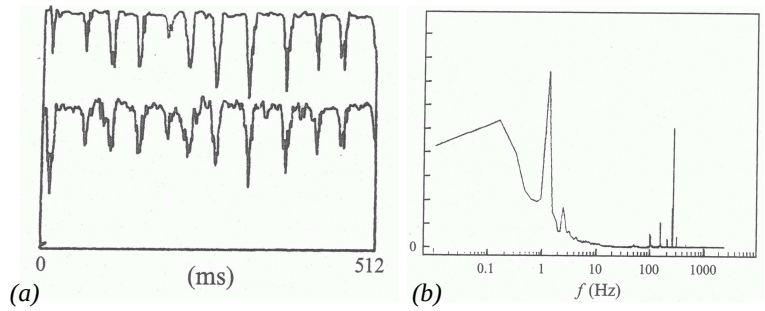


FIG. 2.13 – *(a)* Signal de vitesse longitudinale caractéristique d'un jet confiné illustrant les diminutions ponctuelles de la vitesse dues au confinement. *(b)* Spectre du signal de vitesse longitudinale d'un jet confiné. Le pic de haute fréquence caractérise l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et le pic de basse fréquence est caractéristique du confinement. D'après Villermaux et Hopfinger [147].

La particularité des jets confinés (que ce soit par des parois solides ou par des jets adjacents comme dans le cas des jets multiples) est l'existence de phénomènes oscillatoires inexistant en jet libre. Ces oscillations sont de très basses fréquences comparées à la fréquence caractéristique de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Elles sont de larges amplitudes conduisant à des diminutions ponctuelles et brutales de la vitesse longitudinale comme l'illustre le signal de vitesse donné par la figure 2.13. De plus, le déficit de fluide (causé par le confinement) susceptible d'être entraîné dans le jet implique l'existence d'une zone de recirculation et affecte sensiblement le développement spatial de ce jet en comparaison à un jet libre. Villermaux et Hopfinger [147] ont proposé le mécanisme suivant pour expliquer les oscillations caractéristiques des jets confinés : quand un paquet de fluide se détachera du point de rattachement entre le jet et la paroi (ou du point de fusion entre les jets pour le cas de jets multiples), il sera transporté en direction de

l'amont. Ce paquet de fluide d'intensité turbulente plus élevée que la région amont, déstabilisera le jet proche de son entrée. La vitesse de retour de la bulle de recirculation étant faible, la déstabilisation due à ces paquets sera de fréquence plus faible que la fréquence caractéristique du jet.

Nous verrons dans la suite qu'une région de recirculation similaire apparaîtra pour des configurations particulières de jets coaxiaux.

2.2 Jet coaxial

Dans cette partie, nous allons définir les jets coaxiaux et les principaux paramètres qui les influencent. Nous préciserons ensuite les travaux antérieurs menés sur cette configuration d'écoulement et dont cette thèse souhaite être la continuité.

2.2.1 Définition et applications

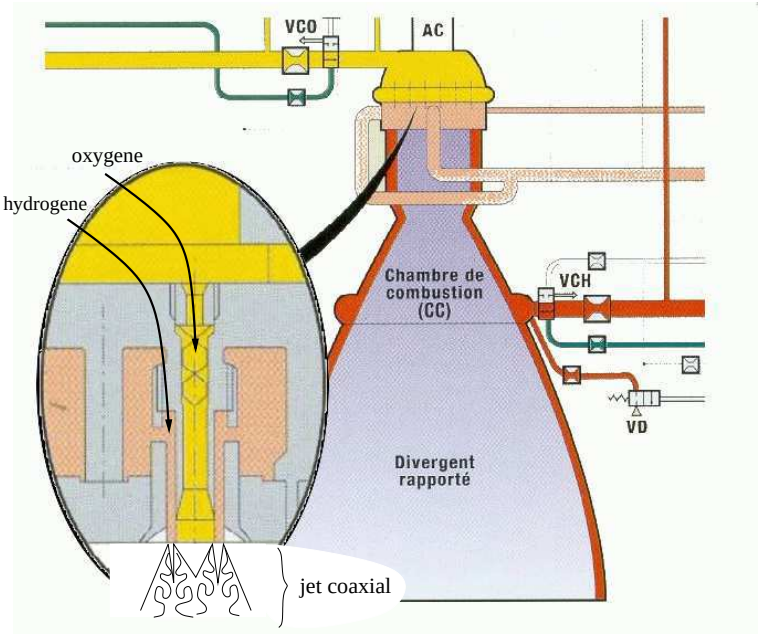


FIG. 2.14 – Illustration d'un des jets coaxiaux en amont de la chambre de combustion des moteurs VULCAIN de la fusée Ariane V.

Un jet coaxial est un "double jet" composé d'un jet rond simple de vitesse initiale U_1 et de diamètre initial D_1 qui est entouré d'un jet annulaire de vitesse initiale U_2 et de diamètre initial D_2. Il est important de noter que les jets coaxiaux ont donc deux échelles de taille et deux échelles de vitesse distinctes. Cet écoulement a été étudié en raison de ses importantes applications. En effet, Williams *et al.* [155] ont montré que le bruit créé par un jet simple pouvait être sensiblement réduit en entourant ce jet par un jet annulaire de vitesse faible car cela modifiait les tourbillons cohérents qui influencent la génération du bruit. De plus, la configuration coaxiale est souvent utilisée dans l'industrie comme un moyen efficace de mélanger deux fluides. L'une des applications est alors la chambre de combustion des moteurs de fusées (Fig.2.14), où le jet annulaire est plus rapide que le jet simple central. Il apparaît dans ce cas important d'étudier la

dynamique de l'écoulement, afin d'améliorer les performances des injecteurs car cette dynamique gouverne largement le mélange. C'est l'objectif de ce travail. Nous nous placerons dans le cas simplifié de jets coaxiaux monophasiques (la configuration d'écoulement des injecteurs de fusée est diphasique, voir par exemple Candel *et al.* [17]) et le mélange sera considéré à l'aide d'un traceur passif (sans combustion[15]).

Les deux applications citées distinguent deux types de jets coaxiaux : ceux où la vitesse du jet central est supérieure à la vitesse du jet annulaire ($U_1 > U_2$) et ceux où la vitesse du jet central est inférieure à la vitesse du jet annulaire ($U_1 < U_2$). Dès les premières études des jets coaxiaux, comme celles de Forstall et Shapiro en 1951 [51], la valeur de U_1 relativement à U_2 est apparue comme un élément clef définissant la configuration de l'écoulement. Le rapport des vitesses du jet annulaire et du jet central défini par $r_u = U_2/U_1$ a alors été identifié comme le paramètre déterminant des jets coaxiaux. Plus tard, Favre-Marinet et Camano-Schettini [46, 47] ont montré que c'était en réalité le rapport des flux de quantité de mouvement, $M = \rho_2 {U_2}^2/\rho_1 {U_1}^2$ (où ρ_1 et ρ_2 sont les masses volumiques du fluide issu du jet annulaire et du jet central respectivement) qui déterminait l'écoulement. Mais ce rapport se réduit au rapport de vitesse r_u si on considère le même fluide dans les deux jets comme ce sera le cas dans la suite de ce travail.

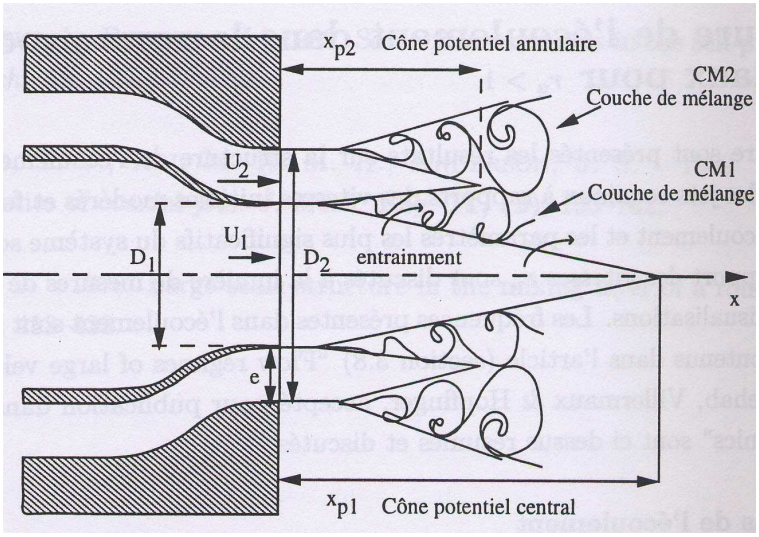


FIG. 2.15 – Schématisation de l'écoulement dans le champ proche d'un jet coaxial. D'après Rehab [122].

A ce stade, nous pouvons déjà évoquer certaines caractéristiques des jets coaxiaux. Champagne et Wygnanski [20] ont précisé que les jets coaxiaux possédaient deux couches cisaillées axisymétriques distinctes. En effet, il y a la couche cisaillée interne qui se forme entre le jet interne et le jet annulaire et la couche cisaillée externe qui se forme entre le fluide issu du jet annulaire et le fluide ambiant. De plus, de façon similaire aux jets ronds simples, deux cônes potentiels peuvent être définis, l'un pour le jet simple central et le second pour le jet annulaire (Fig.2.15). Nous reviendrons plus en détails sur ces grandeurs de l'écoulement mais nous pouvons déjà dire que les études antérieures ont montré qu'elles variaient avec les paramètres initiaux de l'écoulement. On peut ainsi définir le rapport de diamètre $\beta = D_2/D_1$. Ce paramètre aura une influence importante sur la longueur des cônes potentiels. Champagne et Wygnanski [20]

[15]On peut se référer au papier de Vervisch *et al.* [145] pour une revue de la modélisation de la combustion turbulente.

ont étudié deux valeurs de β et ont montré que les cônes potentiels étaient plus longs lorsque β augmentait.

Dans cette thèse, nous avons étudié des jets coaxiaux de rapports de vitesse supérieurs à l'unité, $r_u > 1$. Ces jets sont situés entre deux configurations : $r_u < 1$ et $r_u \to \infty$ (jet annulaire pur). Nous allons ainsi évoquer les résultats antérieurs dans ces deux configurations avant de faire une revue plus détaillée des jets coaxiaux où $r_u > 1$.

2.2.2 Les cas limites : $r_u < 1$ et $r_u \to \infty$

Les jets coaxiaux avec $r_u < 1$

L'étude des jets coaxiaux de rapport de vitesse inférieur à l'unité a été motivée par le désir de réduire le bruit émis par un jet. Il a été observé empiriquement (Williams *et al.* [155], Dosanjh *et al.* [39]) que le bruit produit par un jet simple pouvait être sensiblement réduit par l'addition d'un jet annulaire de vitesse faible. D'après Möhring [111], le bruit émis est en grande partie dû aux structures tourbillonnaires à grandes échelles. Les études ont alors essentiellement porté sur le champ proche des jets coaxiaux.

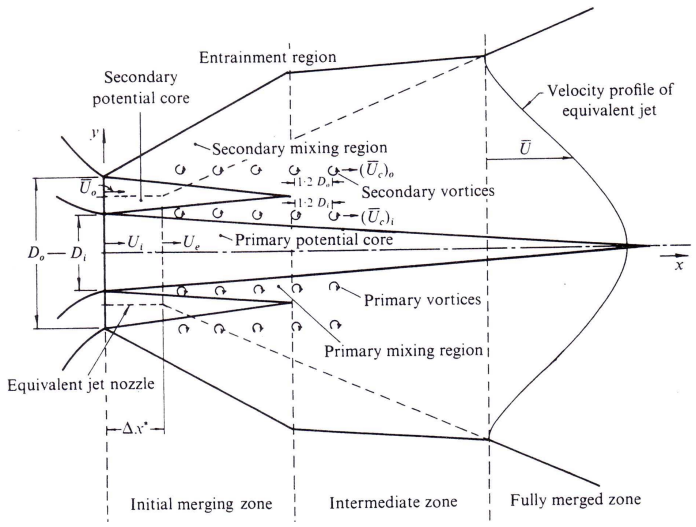


FIG. 2.16 – Région initiale des jets coaxiaux de rapport de vitesse inférieur à l'unité. D'après Kwan et Ko [85].

Les travaux expérimentaux de Ko et Kwan [78, 85] ont distingué le développement des jets coaxiaux en trois zones : la zone de développement initiale, la zone intermédiaire et la zone pleinement développée (Fig.2.16). La zone de développement initiale s'étend du début du jet jusqu'à la fin du cône potentiel externe et la zone pleinement développée débute à l'endroit où les deux jets ont complètement fusionné et que le jet coaxial a un comportement de jet rond. La zone intermédiaire est la zone se situant entre la région de développement initial et la région pleinement développée. Dans la zone intermédiaire, l'auto-similitude des profils radiaux de vitesse moyenne et fluctuante n'est pas réalisée contrairement aux zones de développement initial et pleinement développée. Les paramètres d'auto-similitude différent dans ces deux zones [78]. Champagne et Wygnanski [20] ont réalisé des mesures de vitesses moyennes et turbulentes axiales ainsi que des contraintes de cisaillement pour $r_u = 0,5$. Leurs résultats montrent que le comportement de l'écoulement est assez similaire à celui d'un jet simple. L'écoulement est

dominé par la couche cisaillée interne ce qui n'est pas surprenant étant donné que le jet annulaire n'agit que comme un co-courant qui affecte peu la dynamique du jet rond central. Nous verrons que ce comportement sera tout à fait différent pour des rapports de vitesse supérieurs à l'unité. Les mesures de fréquence effectuées par Kwan et Ko [85] ont révélé deux pics distincts correspondant au passage des tourbillons issus de la couche cisaillée interne et du passage de ceux issus de la couche cisaillée externe (ces tourbillons sont illustrés à la figure 2.16). Ils déduisent de leurs résultats expérimentaux sur les distributions de vitesse moyenne et fluctuante que la structure de l'écoulement des jets coaxiaux pourrait être décrite en considérant les couches cisaillées indépendantes. Nous verrons que ce n'est absolument pas le cas pour $r_u > 1$.

Les jets annulaires : $r_u \to \infty$

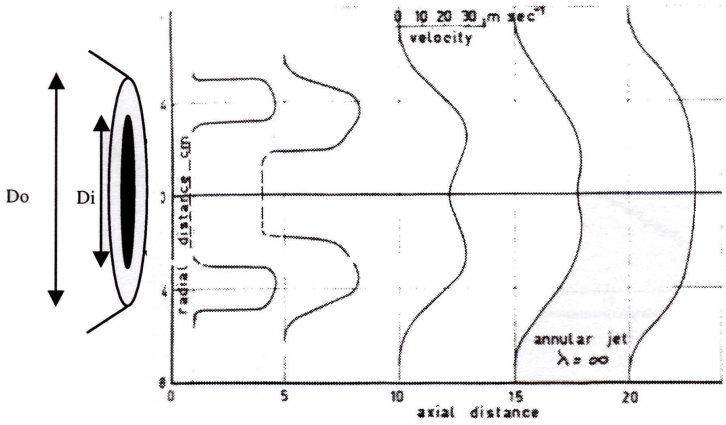


FIG. 2.17 – Evolution longitudinale de la vitesse longitudinale d'un jet annulaire. D'après Chigier et Beer [23].

Les jets annulaires peuvent être vus comme un cas limite des jets coaxiaux avec une vitesse du jet interne nulle. En 1964, Chigier et Beer [23] ont mesuré les vitesses à différentes distances de la buse au moyen de tubes de Pitot. Ils ont décelé la présence d'une zone de recirculation juste après la buse (cette recirculation est caractérisée par des vitesses axiales négatives sur la figure 2.17). Ils ont également noté que les deux pics du profil de vitesse moyenne longitudinale convergeaient vers l'axe du jet et qu'à une certaine distance de la buse, la valeur maximum de la vitesse moyenne longitudinale se situait sur l'axe du jet (Fig.2.17). Le point où les deux pics se rencontrent pour n'en faire plus qu'un est appelé le point de rattachement du jet. La région de recirculation s'étend sur approximativement un diamètre interne en aval. Durao et Whitelaw [43] ont montré également que la longueur de la recirculation diminuait quand le rapport de diamètre β augmentait. Ko et Chan [77] ont constaté qu'au-delà du point de rattachement, il y avait une similitude des profils des vitesses moyenne et fluctuante. Ils proposent alors une description du jet annulaire en trois zones similaires à celles vues en jets coaxiaux pour $r_u < 1$. Dès 1978, Ko et ses collaborateurs [21, 80, 79] ont étudié les structures cohérentes présentes dans le champ proche des jets annulaires. Ils notent tout d'abord la présence de structures tourbillonnaires de type Kelvin-Helmholtz dans la couche cisaillée entre le fluide ambiant et le jet, mais également entre le jet et la région de recirculation. De plus, ces auteurs ont constaté l'émergence de structures de type sillage au-delà de la région de recirculation.

2.2.3 Les jets coaxiaux avec $r_u > 1$

Dans cette section, nous allons présenter les résultats existants pour la famille des jets coaxiaux de rapport de vitesse supérieur à l'unité qui seront étudiés numériquement par la suite. Harran [63] ayant montré les limitations de la modélisation statistique du second ordre dans la description de la zone proche de ces jets, une étude numérique doit donc être menée à partir de simulations numériques directes ou des grandes échelles. Ceci nécessite des ressources de calcul importantes ce qui explique que les études numériques sont rares et souvent restreintes au cas 2D. Les études antérieures sont le plus souvent expérimentales. Parmi les études numériques précédentes, on peut citer le travail d'Akselvoll et Moin [1] qui ont étudié un jet coaxial confiné de condition d'entrée turbulente par simulation des grandes échelles. En simulation numérique directe, Salvetti et ses collaborateurs [131, 130] ont étudié des jets coaxiaux axisymétriques (2D) et da Silva et Métais [134] ont réalisé un jet coaxial 3D forcé.

Dynamique de l'écoulement

La division du développement des jets coaxiaux en trois régions, proposée par Ko et Kwan [78] dans le cas $r_u < 1$, est toujours valable dans le cas $r_u > 1$. Cependant, la croissance spatiale du jet est différente d'une zone à l'autre. Ko et Au [75, 76] précisent que la croissance de la zone intermédiaire de développement du jet correspond à un taux de croissance faible comparé aux deux autres zones. Ceci est probablement dû à un pincement du jet central par le jet annulaire rapide. Le cône potentiel extérieur a tendance à s'orienter vers l'axe central du jet. De plus, la similitude avec un jet rond simple pour le cas $r_u > 1$ se produit plus loin dans la zone pleinement développée que pour le cas $r_u < 1$ [20]. Les relations de similitude sont établies à partir de notions de diamètres et de vitesses équivalentes, noté D_e et U_e respectivement. Les paramètres équivalents U_e et D_e ont été introduits initialement par Eldred *et al.* en 1971 [45]. Nous détaillerons l'expression de ces paramètres lors des validations de nos simulations des grandes échelles (chapitre 6).

Si il existe une certaine indépendance aux conditions d'entrée des jets coaxiaux dans la zone pleinement développée, la zone proche quant à elle est dépendante de nombreux paramètres. Le nombre de Reynolds de l'écoulement joue un rôle ainsi que les conditions d'amenée du jet comme les vitesses en sortie de buses, les diamètres des buses d'éjection ou encore les épaisseurs des quantités de mouvement des couches limites en sortie [15]... La majorité des expériences menées (Dahm *et al.* [31], Wygnanski et Fiedler [157], Wicker et Eaton [152]) avaient des conditions d'entrée du jet qui généraient des couches limites minces et laminaires. Mais Gladnick *et al.* [58] ont insisté sur l'influence du profil des vitesses en sortie de buse. Ils ont montré par exemple que la vitesse moyenne sur l'axe décroît différemment selon la forme du profil initial, même si le nombre de Reynolds reste le même. De plus, plusieurs auteurs (Warda *et al.* [151], Au et Ko [4], Rehab *et al.* [123]) ont noté le rôle important que jouait le rapport de vitesse pour la valeur de la longueur du cône interne, que l'on note L_{P1}. Au et Ko [4] ont obtenu la loi $L_{P1}/D_1 = 9,9/r_u$ sans en donner d'explication physique. Dix ans plus tard, Rehab *et al.* [123] ont montré, à partir d'un modèle basé sur l'entraînement du fluide interne, qu'effectivement on pouvait modéliser la variation de L_{P1} avec r_u par la loi $L_{P1}/D_1 = A/r_u$ où A dépendait de la forme de l'injecteur. Nous reprendrons ce modèle dans le chapitre 4 afin d'y inclure le rôle l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche cisaillée interne.

Un certain nombre de travaux antérieurs se sont intéressés aux instabilités qui se développent dans les jets coaxiaux et à la dynamique tourbillonnaire qui en découlait. Un cas particulier intéressant est la configuration expérimentée par Dahm *et al.* [31]. Ils ont visualisé des jets coaxiaux de rapport de vitesse $r_u = 1$. Ils ont noté que pour un nombre de Reynolds important une

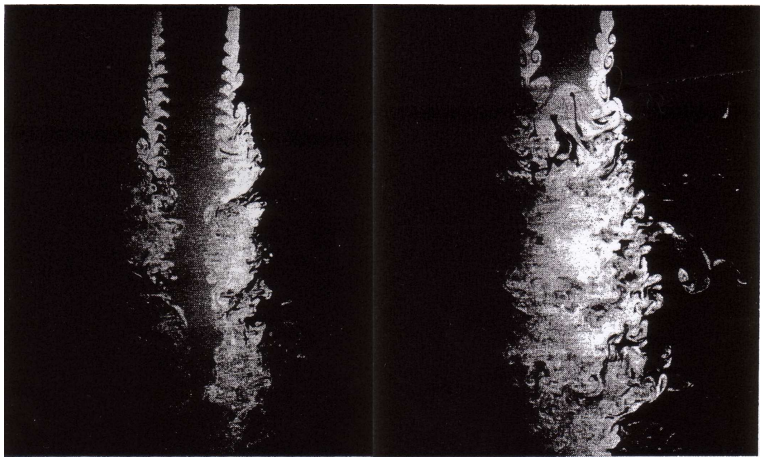


FIG. 2.18 – Visualisations expérimentales du champ proche de deux jets coaxiaux de rapport de vitesse : $r_u = 1$ (gauche) et $r_u = 4,16$ (droite). D'après Dahm *et al.* [31]

instabilité de type sillage se développait au niveau de la couche cisaillée intérieure contrairement à des jets coaxiaux avec $r_u > 1$ où une instabilité de type Kelvin-Helmholtz domine (voir la figure 2.18). Très souvent, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz domine nettement l'instabilité de type sillage dans la couche cisaillée intérieure pour des rapports de vitesse différents de l'unité, surtout pour de faibles valeurs de l'épaisseur de matière séparant la buse externe de la buse interne [14]. Cependant, Buresti *et al.* [15] ont noté que si cette épaisseur est assez grande et pour $1 < r_u < 2$, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pouvait être remplacée par une instabilité de type sillage. Cela revient en réalité aux constatations faites par Dziomba et Fiedler [44] qui avaient déjà noté cette particularité pour une couche de mélange bidimensionnelle sous condition que la lame qui sépare initialement les deux fluides, soit assez épaisse. Nous verrons dans le prochain chapitre que nous nous placerons loin de ces cas particuliers. Nous pourrons alors modéliser le profil initial du jet coaxial par des fonctions en tangente hyperbolique ne tenant pas compte de l'effet de sillage. En dehors de ces cas particuliers, Wicker et Eaton [152] ont noté que le jet coaxial développait une instabilité de mode axisymétrique ($m = 0$) au delà d'une certaine valeur du nombre de Reynolds en dessous de laquelle l'instabilité est sinueuse ($m = 1$). Les fréquences associées aux structures dans le champ proche des jets coaxiaux ont également été explorées dans plusieurs travaux (Au et Ko [4], Gladnick *et al.* [58], Wicker et Eaton [152], Tang et Ko [141]). Leurs mesures montrent que comme dans le cas des jets simples, un mode préférentiel de jet existe au-delà des cônes potentiels. Rehab [122] a d'ailleurs noté que le phénomène de pincement de la fin du cône potentiel intérieur par le courant externe était périodique avec une fréquence correspondant au mode préférentiel du jet. Par contre, avant la fin des cônes potentiels, Dahm *et al.* [31] ont observé que la fréquence de passage des structures de la couche cisaillée interne différait de la valeur prédite par l'analyse de stabilité d'une couche cisaillée simple ayant les mêmes caractéristiques. Ils montrent que l'on ne peut pas considérer le développement des couches cisaillées d'un jet coaxial comme deux couches cisaillées se développant indépendamment l'une de l'autre. Il existe un phénomène de "blocage" entre ces deux couches cisaillées dont nous reparlerons au chapitre 4. Pour conclure sur les structures cohérentes, on peut préciser que les visualisations de Camano-Schettini [16] illustrent la présence de tourbillons longitudinaux. La différence de densité semble favoriser leur développement. Cependant, les visualisation de sections transverses de Rehab *et al.* [122] montrent bien l'existence de ces structures caractérisées

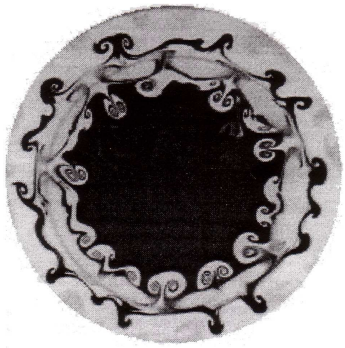


FIG. 2.19 – Visualisation d'une section transverse dans le champ proche d'un jet coaxial. D'après Rehab *et al.* [122].

par les formes en "champignon" (Fig.2.19).

Région de recirculation

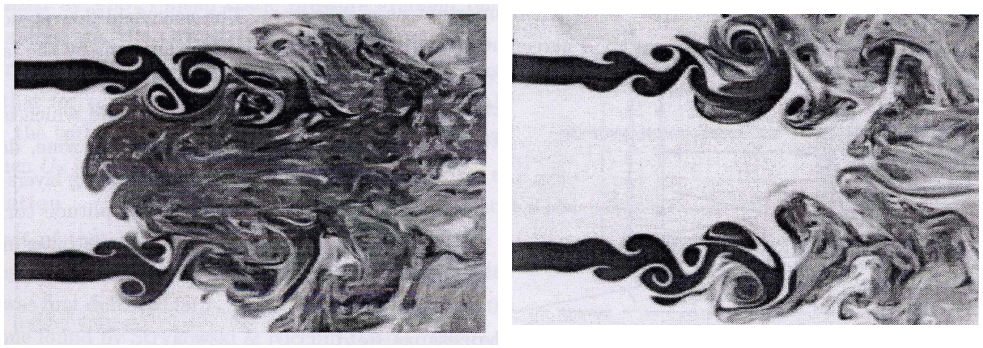


FIG. 2.20 – Visualisation des deux régimes des jets coaxiaux : avec et sans région de recirculation. *(a)* $r_u = 15 > r_{uc}$ et *(b)* $r_u = 3 < r_{uc}$. D'après Rehab [122].

Le jet annulaire pur ($r_u \to \infty$) est un cas limite des jets coaxiaux avec $r_u > 1$. Or, nous avons vu que ces jets étaient composés d'une large région de recirculation au centre. Pour des jets coaxiaux qui ne sont pas des jets annulaires purs, Zawacki *et al.* [160] furent sans doute les premiers, en 1968, à mettre en évidence la présence d'un écoulement de retour. Cette région de recirculation (que nous appellerons également "bulle de recirculation") existe pour des rapports de vitesse assez importants. Owen [116] identifie cette bulle de recirculation pour des jets coaxiaux de $r_u = 12$ et $\beta = 1,4$ en mesurant des vitesses moyennes négatives à l'intérieur de celle-ci. Rehab [122] a noté que la taille de cette bulle augmentait avec le rapport de vitesse jusqu'à atteindre une taille de l'ordre de celle trouvée pour des jets annulaires purs. Le fait que des jets coaxiaux de rapports de vitesse supérieurs à l'unité mais de valeurs modérées ne possèdent pas de région de recirculation, implique qu'il existe un rapport de vitesse critique, noté r_{uc} qui distingue deux régimes des jets coaxiaux : avec ou sans bulle de recirculation (Fig. 2.20). Selon Rehab *et al.* [123], la valeur de r_{uc} semble être comprise entre 5 et 8 selon la forme de l'injecteur. Ils ont

retrouvé cette observation expérimentale à partir d'un modèle basé sur un équilibre de pressions dont nous reparlerons au chapitre 4. Rehab [122] s'est également intéressé au comportement de cette bulle. Dans ses expériences à haut nombre de Reynolds, il a montré que cette bulle de recirculation oscille à une basse fréquence conduisant à un nombre de Strouhal de l'ordre de $St = fD_1/U_2 \approx 0,035$ (Fig.2.21). L'origine de cette oscillation viendrait de l'interaction entre les paquets de fluides convectés via la recirculation et les instabilités de la couche cisaillée [123]. Cette interprétation rapproche ainsi la région de recirculation des jets coaxiaux des mécanismes évoqués précédemment dans des configurations de jets simples multiples ou confinés.

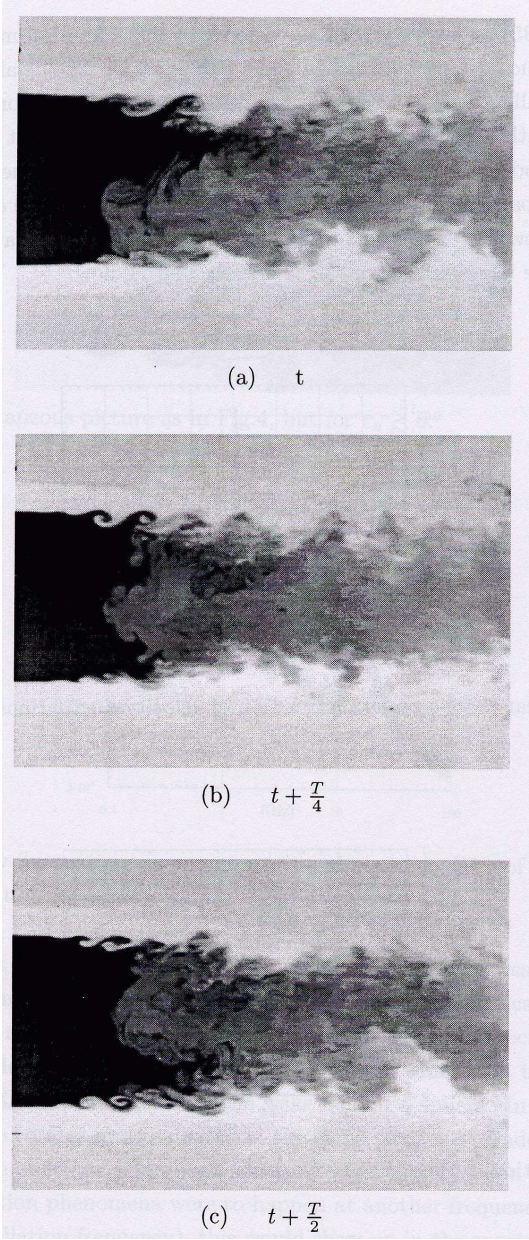


FIG. 2.21 – Visualisations du champ proche d'un jet coaxial (entre $0 < x/D_1 < 3$) montrant une demi-période de rotation de la bulle de recirculation à $r_u = 15$. T est la période d'oscillation de la bulle. D'après Rehab *et al.* [123].

Deuxième partie

Méthodes Numériques

Chapitre 3

Les simulations incompressibles

Dans cette partie, nous allons rappeler les équations gouvernant un écoulement incompressibles et les méthodes numériques employées pour les résoudre. Ces méthodes sont celles mises en place dans le code "SPECOMPACT" et viennent des travaux de Gonze [59]. Ce code a déjà été utilisé et décrit dans le cadre d'études de jets simples et de jets plans (voir da Silva [133]). De plus, Lamballais [87] l'a utilisé pour étudier des canaux plans avec et sans rotation.

L'idée générale est de résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine pavé. L'un des objectif de cette étude étant de mieux comprendre la transition des jets coaxiaux, nous avons réalisé des simulations spatiales. La différence principale entre une simulation temporelle et une simulation spatiale vient des conditions aux limites dans la direction de l'écoulement. Une simulation temporelle a des conditions périodiques dans cette direction alors qu'on distingue une condition d'entrée et une condition de sortie pour une simulation spatiale. En d'autres termes, le domaine de calcul d'une simulation spatiale est placé dans la région de l'écoulement que l'on souhaite étudier et reste fixe. Une simulation spatiale nécessite ainsi un domaine de calcul important afin de couvrir l'ensemble de la région de l'écoulement que l'on souhaite considérer. De plus, la définition des conditions d'entrée et de sortie est délicate. En effet, la condition d'entrée doit être la plus proche possible des conditions d'entrée réelles de l'écoulement et la condition de sortie doit permettre une sortie "naturelle" du fluide sans perturber l'écoulement dans le domaine de calcul. La simulation spatiale nécessite un coût de calcul plus important et reste délicate à mettre en œuvre mais elle est plus réaliste.

3.1 Les équations incompressibles

Ce travail est restreint à la simulation d'écoulement incompressible d'un fluide newtonien. Les évolutions spatio-temporelles exactes des champs de vitesse $\vec{u}(\vec{x},t)$ et de pression $p(\vec{x},t)$ pour des échelles beaucoup plus grandes que l'échelle moléculaire (hypothèse des milieux continus) sont données par les équations de Navier-Stokes incompressibles et instationnaires,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}, \tag{3.1}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0. \tag{3.2}$$

Dans ces équations, $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient et $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ est le vecteur vorticité. Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement, défini par $Re = UR/\nu$ où U et R sont respectivement la vitesse et la longueur caractéristique de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Enfin, $P = \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{u}^2|}{2}$ est la pression dynamique avec ρ la masse volumique du fluide. Les équations (3.1) et (3.2) sont adimensionnalisées par R et U.

3.2 Description du code

Le système d'équations préalablement décrit est résolu dans un domaine de calcul pavé $\mathcal{D}$ qui est défini en coordonnées cartésiennes (x, y et z) par

$$\left\{\vec{x_0}= (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_0 & \in [0, L_x] \\ y_0 & \in [-\frac{L_y}{2}, \frac{L_y}{2}] \\ z_0 & \in [-\frac{L_z}{2}, \frac{L_z}{2}] \end{array} \right\}.$$

Donc ce domaine a une taille de $L_x \times L_y \times L_z$ qui est divisée en $n_x \times n_y \times n_z$ points de façon uniforme. C'est sur l'ensemble de ces points que l'on discrétisera les équations (3.1) et (3.2). On peut alors définir tout nœud $\vec{x}_p = (x_p, y_p, z_p)$ du maillage par trois entiers (i_p, j_p, k_p) tel que $\vec{x}_p = (x_p, y_p, z_p) = ((i_p - 1)\Delta x, (j_p - 1)\Delta y, (k_p - 1)\Delta z))$ (avec $\Delta x_i = L_{xi}/(n_{xi} - 1)$). La figure 3.1 illustre le domaine de calcul.

Avant de préciser les méthodes de discrétisation, nous allons voir les conditions imposées aux limites de ce domaine.

3.2.1 Conditions aux limites

Cette section va traiter des conditions imposées aux frontières de la boite de calcul. Dans cette étude, ce sont des simulations spatiales qui ont été réalisées, ainsi la validité de ces simulations tient en grande partie à la qualité des conditions aux limites.

Conditions aux frontières transverses et latérales (directions y et z)

Dans tous les cas de figure, nous utiliserons des conditions de périodicité au niveau des frontières transverses et latérales. Pour toute variable f considérée (vitesse ou pression) et quelque soit l'ordre n de sa dérivée, on suppose que

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= f(x, y + L_y, z, t), \\ f^{(n)}(x, y, z, t) &= f^{(n)}(x, y + L_y, z, t), \\ f(x, y, z, t) &= f(x, y, z + L_z, t) \text{ et} \\ f^{(n)}(x, y, z, t) &= f^{(n)}(x, y, z + L_z, t). \end{aligned}$$

Nous verrons par la suite que cette condition nous permet d'avoir une discrétisation spatiale plus précise dans ces directions car elle nous permet d'utiliser un schéma spectral. De plus, cette condition n'est pas trop contraignante pour l'écoulement dans la mesure où l'énergie cinétique d'un jet reste confinée au cœur du cisaillement. La seule nécessité est de prévoir une dimension de domaine suffisante pour que la zone cisaillée dont la taille augmente par viscosité et production d'énergie turbulente ne côtoie pas les frontières à la fin du domaine de calcul. En réalité, le calcul ressemble à un empilement d'infinité de jets. Cette condition limite ne permet pas a priori l'entraînement naturel du jet. Cependant, Djeridane [38] a montré que si les frontières était placées suffisamment loin du jet et qu'un faible fluide co-courant était ajouté en entrée, la dynamique du jet simulé était représentative d'un jet libre et qu'un très bon accord statistique était trouvé avec les mesures expérimentales. De plus, comme nous l'avons évoqué au chapitre précédent, Villermaux et Hopfinger [147] donnent un bon critère pour s'assurer que le jet n'est pas confiné. En effet, ils précisent que dans le cas de jets confinés une série temporelle de la vitesse longitudinale exhiberait des "spikes" (forte décroissance ponctuelle de cette vitesse) à une basse fréquence.

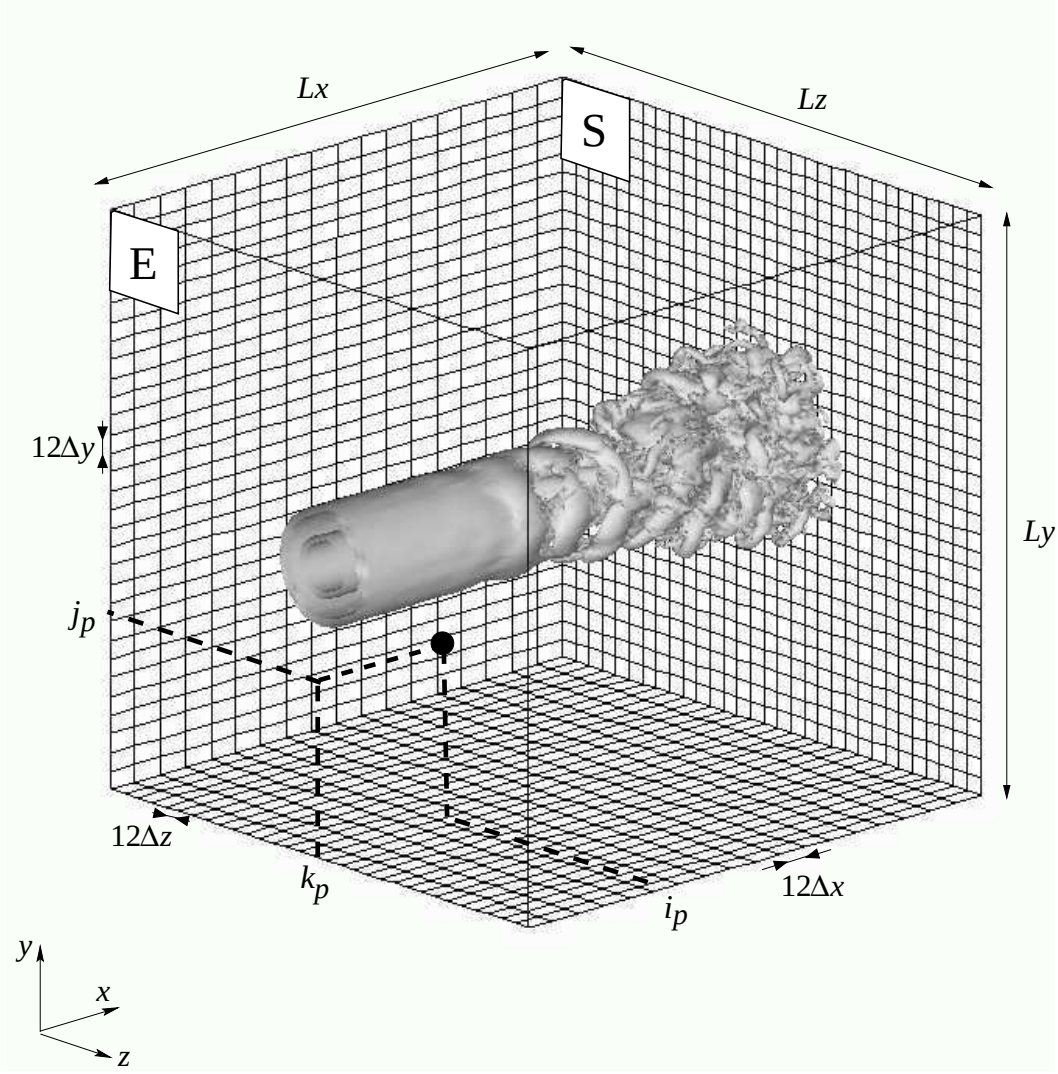


FIG. 3.1 – Illustration du domaine de calcul dans le repère de référence et avec les notations utilisées. Le plan E est le plan d'entrée du jet et le plan S est celui de sortie. Le jet coaxial est représenté par une isosurface de la norme de vorticité.

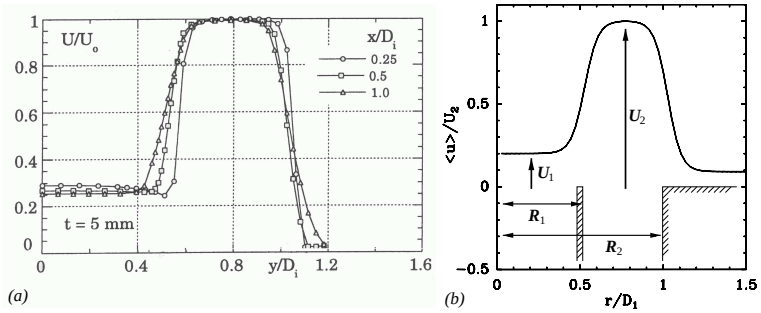


FIG. 3.2 – *(a)* Profils de jets coaxiaux expérimentaux en sortie de buse. D'après Buresti *et al.* [14]. *(b)* Profil en tangentes hyperboliques utilisé comme condition initiale pour nos simulations.

Conditions aux frontières longitudinales (direction x)

Dans la direction longitudinale, nous distinguons deux frontières. La première est la frontière dite "d'entrée" (en $x = 0$). Elle permettra la définition du profil de vitesse initial ce qui définira les caractéristiques du jet étudié. La seconde frontière dite "de sortie" (en $x = L_x$) doit permettre l'évacuation en aval des perturbations générées dans l'écoulement. La frontière "de sortie" est de type ouverte, c'est-à-dire que la prédiction de l'écoulement doit conférer un perméabilité maximale en sortie.

Condition d'entrée En $x = 0$, nous imposons un profil initial de vitesse de forme générale

$$\vec{u}((0, y, z), t) = \vec{u}_{moyen}(y, z) + \vec{u}_{bruit}(y, z, t). \tag{3.3}$$

On définit un profil moyen de vitesse $\vec{u}_{moyen} = (u_{x,moyen}, u_{y,moyen}, u_{z,moyen})$[1] et un bruit résiduel instationnaire $\vec{u}_{bruit}(y, z, t)$ qui déstabilisera l'écoulement moyen.

Dans cette étude $\vec{u}_{moyen}$ représente le profil en sortie de buse d'un jet coaxial. Or, l'une des principales difficultés de la simulation de tels jets est de bien reproduire ce profil. En effet, Dahm *et al.* [31] ont montré que chacune des deux couches cisaillées d'un jet coaxial pouvait être décrite comme une combinaison d'un profil de 'sillage' et de 'couche de mélange'. Cependant, la composante de 'sillage' du profil initial du jet disparaît très rapidement pour des rapports de vitesse élevés comme ce sera le cas dans cette étude (voir le chapitre précédent). En effet, Rehab *et al.* [123] et Buresti *et al.* [14] ont mesuré expérimentalement que bien avant $x/D_1 = 1$, cette composante disparaissait, ce qui est illustré par la figure 3.2 *(a)*. Il semblerait qu'un profil initial de vitesse composée de deux 'tangentes hyperboliques' (en adaptant l'expression analytique en tangente hyperbolique donnée par Michalke et Hermann [110] pour un jet rond) est une bonne approximation d'un profil de vitesse 'réel'. De plus, ce type de définition permet une définition rigoureuse des paramètres globaux du jet. Ce profil idéalisé est illustré par la figure 3.2 *(b)*. Son expression analytique en coordonnées cylindriques (x, r, ϕ)[2] est

$$u_{x,moyen} = \begin{cases} \frac{U_1+U_2}{2} + \frac{U_2-U_1}{2}\tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right) & \text{pour } r \leqslant R_m \\ \frac{U_2+U_3}{2} + \frac{U_2-U_3}{2}\tanh\left(\frac{r-R_2}{2\theta_{02}}\right) & \text{pour } r \geqslant R_m \end{cases} \tag{3.4}$$
$$u_{y,moyen} = 0 \text{ et } u_{z,moyen} = 0.$$

[1] Ici, le champ de vitesse est décrit en coordonnées cartésiennes

[2] Le profil moyen est axisymétrique *i.e.* $u_{x,moyen}$, $u_{y,moyen}$ et $u_{z,moyen}$ sont indépendant de ϕ.

Dans cette équation, R_1, R_2 et $R_m = (R_1 + R_2)/2$ sont respectivement les rayons intérieur, extérieur et moyen du jet coaxial. De plus, $\theta_{01} = \theta_1(0)$ et $\theta_{02} = \theta_2(0)$ sont les épaisseurs initiales de quantité de mouvement des jets intérieur et extérieur respectivement. Les quantités $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ sont définies par

$$\theta_1(x) = \int_0^{R_m} \left(\frac{\langle u_x \rangle(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)} \right) \left(1 - \frac{\langle u_x \rangle(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)} \right) dr \tag{3.5}$$

$$\theta_2(x) = \int_{R_m}^{\infty} \left(\frac{\langle u_x \rangle(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)} \right) \left(1 - \frac{\langle u_x \rangle(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)} \right) dr \tag{3.6}$$

où u_{min} et u_{max} sont respectivement les vitesses longitudinales moyennes minimale et maximale du domaine intégré et où l'opérateur $\langle . \rangle$ représente la moyenne. Enfin, dans l'équation (3.4), U_1, U_2 et U_3 sont respectivement les vitesses du jet central, du jet annulaire et hors du jet coaxial (co-courant). Précisons qu'un très faible co-courant (dans cette étude, il est inférieur à 10%) ne perturbe pas la dynamique du jet et permet l'entraînement nécessaire au développement naturel du jet (Djeridane [38], da Silva [133]).

Dans l'équation (3.3), $\vec{u}_{bruit}(y,z,t)$ représente un bruit que l'on superpose au profil initial afin de provoquer le développement de la turbulence. Ce bruit tridimensionnel est de faible amplitude (de l'ordre de 3% de la vitesse maximale d'entrée). De plus, il balaie une large gamme de spectre (on parle alors de bruit blanc) qui permet une transition naturelle du jet en n'imposant aucun forçage. Les modes les plus instables peuvent croître librement et se sélectionner d'eux-mêmes. Le profil du bruit est de la forme

$$\vec{u}_{bruit}(y,z,t) = A u_{base}(y,z) \vec{u'}. \tag{3.7}$$

Dans cette équation A représente l'amplitude du bruit et $u_{base}(y,z)$ est une fonction qui localise le bruit principalement au niveau des gradients de vitesses

$$u_{base}(y,z) = \begin{cases} 0.2 & \text{si } 0.85 > r/R_1 \\ 1.0 & \text{si } 0.85 < r/R_1 < 1.15 \\ 1.0 & \text{si } 0.85 < r/R_2 < 1.15 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \tag{3.8}$$

cela se justifie à l'aide des travaux de Camano-Schettini [16] qui a mesuré les fluctuations de vitesse en entrée du jet (Fig.3.3). Enfin, chaque composante du vecteur de vitesse aléatoire $\vec{u'} = (u'_x, u'_y, u'_z)$ vient d'un générateur de nombre aléatoire qui est conçu pour donner un spectre d'énergie de la forme,

$$E(k) \propto k^s exp \left[-\frac{s}{2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \right]. \tag{3.9}$$

La pente du spectre de bruit dans la région des grandes échelles s aussi bien que la localisation du nombre d'onde du maximum du spectre d'énergie k_0, peut être choisie pour fournir les caractéristiques statistiques plus réalistes.

Ce bruit numérique permet une transition normale du jet car il se compose en grande partie d'un bruit blanc, dans lequel tous les nombres d'onde présents sont d'égale importance. L'écoulement peut alors "choisir" naturellement parmi tous les modes, ceux qui seront amplifiés pendant le processus de transition.

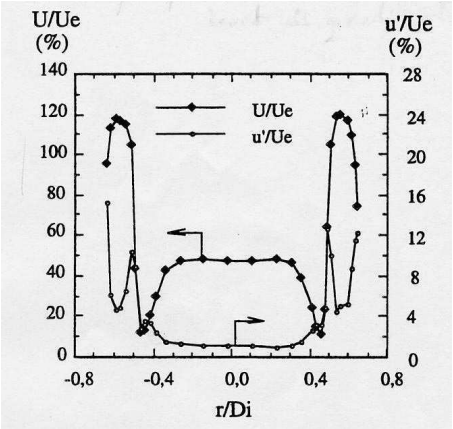


FIG. 3.3 – Profils transversaux expérimentaux des vitesses moyenne et fluctuante d'un jet homogène en $x/D_1 \approx 0,2$. D'après Camano-Schettini [16].

Condition de sortie Comme nous l'avons déjà dit, la frontière "de sortie" est de type ouverte. Elle doit, ainsi, permettre une perméabilité maximale. C'est toujours une condition délicate car on doit s'assurer que l'écoulement dans le domaine de calcul n'est pas altéré par la condition de sortie lors de simulations spatiales. Le code de calcul utilise une condition de sortie non-réflective [115] où les termes convectifs mais également les termes visqueux de l'équation de Navier-Stokes sont explicités. De ce fait, la formulation retenue pour l'équation de prédiction de u_x est l'équation non-linéaire et dissipative suivante

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -C_u(y,z)\frac{\partial u_x}{\partial x} - u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} - u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_x. \tag{3.10}$$

Cette équation ne tient pas compte de la dissipation longitudinale du fluide $\partial^2 u_x/\partial x^2$ et du gradient longitudinal de pression $\partial P/\partial x$. Le terme d'advection longitudinal $C_u \partial u_x/\partial x$ fait ainsi intervenir une vitesse fictive C_u (une nouvelle inconnue du problème) qui sera évaluée de façon à reprendre dans ce terme d'advection la contribution apportée par les termes non pris en compte.

Des validations de cette condition de sortie peuvent être trouvées dans les travaux de Gonze [59] et da Silva [133]. Ils ont montré entre autres que les structures tourbillonnaires cohérentes de l'écoulement n'étaient pas affectées par la condition de sortie. Nous reviendrons sur la mise en place de cette condition de sortie après avoir vu en détails les méthodes de discrétisation spatiale et temporelle du code.

3.2.2 Discrétisation spatiale

Les conditions aux limites étant définies, nous allons, maintenant, définir la discrétisation spatiale adoptée pour calculer les dérivées spatiales de vitesse nécessaires à la résolution des équations (3.1) et (3.2). Le code de calcul utilise des méthodes pseudo-spectrales (Canuto *et al.* [18]) qui permettent pour un nombre de points de grille donné, d'atteindre une précision maximale dans les problèmes sans discontinuité spatiale. Ces schémas ne peuvent être utilisés que le long des directions périodiques. Un schéma "compact" d'ordre élevé est implémenté dans la direction longitudinale.

Schéma pseudo-spectral

Le fait d'avoir deux directions périodiques (y et z) nous permet de développer toutes les variables de l'écoulement en utilisant une transformation inverse de Fourier en 2D. Pour toute variable f de l'écoulement, on peut écrire,

$$f(x,y,z,t) = \sum_{l=-\frac{n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{m=-\frac{n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} \hat{f}(x,k_y,k_z,t) e^{\iota(k_y y + k_z z)} \tag{3.11}$$

où k_y et k_z sont les nombres d'ondes de Fourier définis par

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} l \text{ et } k_z = \frac{2\pi}{L_z} m. \tag{3.12}$$

De plus, ι est l'unité imaginaire ($\iota^2 = -1$). Chaque coefficient de Fourier $\hat{f}(x,k_y,k_z,t)$ peut être obtenu par une transformation directe de Fourier en 2D,

$$\hat{f}(x,k_y,k_z,t) = \frac{1}{n_y n_z} \sum_{l=0}^{n_y-1} \sum_{m=0}^{n_z-1} f(x,y,z,t) e^{-\iota(k_y y + k_z z)} \tag{3.13}$$

Dans l'espace de Fourier, les dérivées d'ordre n se calculent simplement par une multiplication, ainsi

$$\widehat{\frac{\partial^n f}{\partial y^n}} = (\iota k_y)^n \hat{f} \text{ et } \widehat{\frac{\partial^n f}{\partial z^n}} = (\iota k_z)^n \hat{f}. \tag{3.14}$$

Schéma compact

Dans la direction de l'écoulement, les dérivées premières et secondes sont évaluées à partir d'un schéma aux différences finies implicite compact défini par Lele [93]. L'idée est d'exprimer la dérivée en un point i donné en fonction de la dérivée des points voisins. Ces schémas sont donc implicites et nécessiteront la résolution d'un système d'équations linéaires. Dans la suite, pour toute fonction f de x, on note $f_i = f(x_i)$, $f'_i = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i)$ et $f''_i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i)$.

Dérivée première Une formulation globale à partir de développements de Taylor est de la forme

$$\sum_{j=-p}^{p} \alpha_j f'_{i+j} = \sum_{k=-q}^{q} a_k f_{i+k} + O(\Delta x^n) \tag{3.15}$$

où $p, q \in \mathbb{N}$. Les schémas sont dits explicites si pour tout j non nul, le coefficient $\alpha_j = 0$. Dans le cas des schémas compacts, il existe $\alpha_j = 0$ pour $j \neq 0$. Ces schémas sont donc des schémas implicites avec une réduction du domaine de dépendance, c'est-à-dire du nombre de points voisins nécessaires (d'où l'appellation "compact").

Dans le code utilisé, l'évaluation de la dérivée longitudinale f'_i dépend de i puisqu'aux limites du domaine de calcul, il n'y pas autant de points voisins qu'au centre du domaine. Pour les points de la limite du domaine ($i = 1$ et $i = n_x$), on utilise un schéma décentré d'ordre 3 implicite,

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_1 + 4f_2 + f_3)), \tag{3.16}$$

$$f'_{n_x} + 2f'_{n_x-1} = \frac{1}{2\Delta x}(5f_{n_x} - 4f_{n_x-1} - f_{n_x-2}). \tag{3.17}$$

Pour les points les plus proches des points de la limite du domaine ($i = 2$ et $i = n_x - 1$), on utilise un schéma classique d'ordre 4 dit "de Padé",

$$f'_1 + 4f'_2 + f'_3 = \frac{9}{3\Delta x}\left(f_3 - f_1\right), \tag{3.18}$$

$$f'_{n_x-2} + 4f'_{n_x-1} + f'_{n_x} = \frac{9}{3\Delta x}\left(f_{n_x} - f_{n_x-2}\right). \tag{3.19}$$

Enfin, pour le reste du domaine, on utilise un schéma d'ordre 6

$$\frac{1}{3}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{3}f'_{i+1} = \frac{7}{9\Delta x}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right) + \frac{1}{36\Delta x}\left(f_{i+2} - f_{i-2}\right). \tag{3.20}$$

Ce sont des schémas implicites, ils conduisent au système qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix}
1 & \alpha_1 & & & & & & & \\
\alpha_2 & 1 & \alpha_2 & & & & & & \\
 & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\
 & & & & & & \alpha_{n_x-1} & 1 & \alpha_{n_x-1} \\
 & & & & & & & \alpha_{n_x} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{n_x-2} \\ f'_{n_x-1} \\ f'_{n_x} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\Delta x}
\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & \\
-a_2 & 0 & a_2 & & & & & & \\
-b & -a & 0 & a & b & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & -b & -a & 0 & a & b & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & -b & -a & 0 & a & b \\
 & & & & & & -a_{n_x-1} & 0 & a_{n_x-1} \\
 & & & & & & c_{n_x} & b_{n_x} & a_{n_x}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n_x-2} \\ f_{n_x-1} \\ f_{n_x} \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

avec les coefficients suivants,

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = \alpha_{n_x} = 2,\ a_1 = -a_{n_x} = -\tfrac{5}{2},\ b_1 = -b_{n_x} = 2,\ c_1 = -c_{n_x} = \tfrac{1}{2} \\
\alpha_2 = \alpha_{n_x-1} = \tfrac{1}{4},\ a_2 = a_{n_x-1} = \tfrac{3}{4} \\
\alpha = \tfrac{1}{3},\ a = \tfrac{7}{9},\ b = \tfrac{1}{36}
\end{gathered}$$

Dérivée seconde De la même façon que pour le calcul des dérivées premières, l'évaluation des dérivées secondes f''_i dépendent de i. Pour les points de la limite du domaine ($i = 1$ et $i = n_x$), on utilise un schéma d'ordre 3,

$$f''_1 + 11f''_2 = \frac{1}{\Delta x^2}\left(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4)\right), \tag{3.22}$$

$$f''_{n_x} + 11f''_{n_x-1} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(13f_{n_x} - 27f_{n_x-1} + 15f_{n_x-2} - f_{n_x-3}\right). \tag{3.23}$$

Pour les points les plus proches des points de la limite du domaine ($i = 2$ et $i = n_x - 1$), on utilise un schéma classique d'ordre 4 dit "de Padé",

$$f''_1 + 10f''_2 + f''_3 = \frac{12}{\Delta x^2}\left(f_3 - 2f_2 + f_1\right), \tag{3.24}$$

$$f''_{n_x-2} + 10f''_{n_x-1} + f''_{n_x} = \frac{12}{\Delta x^2}\left(f_{n_x} - 2f_{nx-1} + f_{n_x-2}\right). \tag{3.25}$$

Enfin, pour le reste du domaine, on utilise un schéma d'ordre 6

$$f''_{i-1} + \frac{11}{2}f''_i + f''_{i+1} = \frac{6}{\Delta x^2}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right) + \frac{9}{24\Delta x^2}\left(f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}\right) \tag{3.26}$$

Ce sont également des schémas implicites, ils conduisent de la même façon à un système qui s'écrit matriciellement,

$$\begin{pmatrix}
1 & \beta_1 & & & & & & & \\
\beta_2 & 1 & \beta_2 & & & & & & \\
 & \beta & 1 & \beta & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & \beta & 1 & \beta & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & \beta & 1 & \beta & \\
 & & & & & & \beta_{n_x-1} & 1 & \beta_{n_x-1} \\
 & & & & & & & \beta_{n_x} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \\ \vdots \\ f''_i \\ \vdots \\ f''_{n_x-2} \\ f''_{n_x-1} \\ f''_{n_x} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}
\begin{pmatrix}
d_1 & e_1 & f_1 & g_1 & & & & & & \\
d_2 & -2d_2 & d_2 & & & & & & & \\
e & d & -2(d+e) & d & e & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & e & d & -2(d+e) & d & e & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & e & d & -2(d+e) & d & e & \\
 & & & & & & d_{n_x-1} & -2d_{n_x-1} & d_{n_x-1} & \\
 & & & & & g_{n_x} & f_{n_x} & e_{n_x} & d_{n_x} &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n_x-2} \\ f_{n_x-1} \\ f_{n_x} \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

avec les coefficients suivants,

$$\begin{gathered}
\beta_1 = \beta_{n_x} = 11,\ d_1 = d_{n_x} = 13,\ e_1 = -e_{n_x} = -27,\ f_1 = -f_{n_x} = 15,\ g_1 = g_{n_x} = -1 \\
\beta_2 = \beta_{n_x-1} = \tfrac{1}{10},\ d_2 = d_{n_x-1} = \tfrac{12}{10} \\
\beta = \tfrac{2}{11},\ d = \tfrac{12}{11},\ e = \tfrac{3}{44}
\end{gathered}$$

Qualité de la discrétisation

Il est intéressant de comparer l'erreur de discrétisation de différents schéma numérique. Comme le suggèrent Ferziger et Perich [49], on peut se placer dans l'espace de Fourier et utiliser la fonction $f : x \mapsto e^{\iota kx}$. La dérivée de cette fonction est connue analytiquement, $f'(x) = \iota k e^{\iota kx}$. Pour comparer le résultat d'un schéma numérique au résultat analytique, on fait intervenir un nombre d'onde "effectif" k_e en mettant le résultat du schéma considéré sous la forme $\iota k_e e^{\iota kx}$.

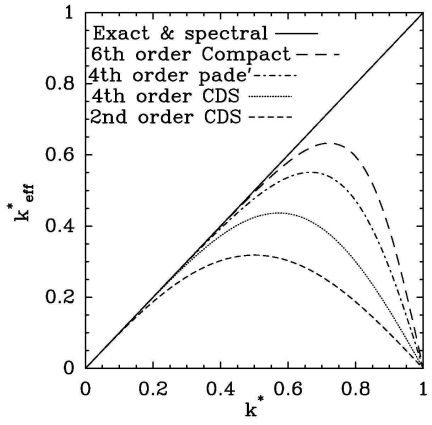


FIG. 3.4 – Comparaison du nombre d'onde effectif k_e avec le nombre d'onde exact k pour le calcul de dérivée première. Les schémas notés CDS font référence aux schémas explicites centrés. Les nombres d'onde sont normalisés : $k^* = k\Delta x/\pi$. D'après da Silva [133].

Il s'agit alors de comparer k (le nombre d'onde exact) à k_e. Si on prend le schéma centré au seconde ordre, on a,

$$\frac{\partial e^{\iota kx}}{\partial x} \approx \frac{e^{\iota k(x-\Delta x)} - e^{\iota k(x+\Delta x)}}{2\Delta x} = \iota \frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x} e^{\iota kx}.$$

Donc, $k_e = \iota \frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}$.

La figure 3.4 illustre la même démarche pour d'autres schémas. Cette figure compare le nombre d'onde effectif k_e au nombre d'onde exact k. Ces nombres d'ondes sont normalisés par $\pi/\Delta x$ qui est le plus grand nombre d'onde permis par le maillage. Les schémas explicites centrés d'ordre 2 et 4 sont également donnés à titre de comparaison. La décomposition de Fourier est exacte comme l'illustre la droite $k_e = k$. Ensuite, on peut voir une erreur dite de "dispersion" liée à la différence entre k_e et k. On voit clairement que le schéma de Padé permet l'existence d'une énergie non négligeable aux grands modes ($k > \pi/2\Delta x$) sans trop de dispersion. Le schéma compact d'ordre 6 est encore plus précis que le schéma de Padé. Aucun de ces schémas ne produit d'erreur de "dissipation" car ils sont centrés (nombre d'onde k_e réel).

3.2.3 Discrétisation temporelle

Il s'agit maintenant de décrire la méthode utilisée pour traiter la dépendance en temps du problème. Le code utilise un schéma explicite pour les termes convectifs et visqueux de l'équation de Navier-Stokes. L'équation (3.1) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = N(\vec{u}) + L(\vec{u}) - \vec{\nabla} P \tag{3.28}$$

où $N(\vec{u})$ et $L(\vec{u})$ sont les termes convectifs et visqueux respectivement,

$$N(\vec{u}) = \vec{u} \times \vec{\omega} \text{ et } L(\vec{u}) = \nu \nabla^2 \vec{u}.$$

Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 est appliqué à cette équation (3.28) et à l'équation de continuité (3.2). Cela peut s'écrire alors,

$$\frac{\vec{u}^{n,p} - \vec{u}^{n,p-1}}{\Delta t} = \gamma_p \left[N(\vec{u}^{n,p-1}) + L(\vec{u}^{n,p-1})\right] + \eta_p \left[N(\vec{u}^{n,p-2}) + L(\vec{u}^{n,p-2})\right] - \vec{\nabla} P^{n,p} \tag{3.29}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u}^{n,p} = 0. \tag{3.30}$$

Dans ces équations, p représente le sous-pas de temps de Runge-Kutta ($p = 1, 2, 3$) et n représente le pas de temps. On a alors $\vec{u}^{n,3} = \vec{u}^{n+1,0}$. Le schéma est donné par les coefficients [156],

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 = 8/15 & \eta_1 = 0 \\ \gamma_2 = 5/12 & \eta_2 = -17/60 \\ \gamma_3 = 3/4 & \eta_3 = -5/12 \end{array} \tag{3.31}$$

Il s'agit ensuite de résoudre les équations (3.29) et (3.30) qui sont fortement couplées. Cela nous conduira à la résolution d'une équation de Poisson.

3.2.4 Couplage pression-vitesse

Equation de Poisson

Le problème de la résolution simultanée du champ de vitesse et de pression est abordé par une méthode à pas fractionnaire - *fractional step method* - (Kim et Moin [74], Le et Moin [91]). Cette procédure assure l'incompressibilité du champ de vitesse à chaque sous-pas de temps p. On définit un champ de vitesse $\vec{u*}^{n,p}$ par la troncature de l'équation (3.29),

$$\frac{\vec{u*}^{n,p} - \vec{u}^{n,p-1}}{\Delta t} = \gamma_p \left[N(\vec{u}^{n,p-1}) + L(\vec{u}^{n,p-1})\right] + \eta_p \left[N(\vec{u}^{n,p-2}) + L(\vec{u}^{n,p-2})\right]. \tag{3.32}$$

Alors, le champ de pression doit vérifier la condition de Neumann à la fin de chaque sous-pas de temps,

$$\frac{\vec{u}^{n,p} - \vec{u*}^{n,p}}{\Delta t} = -\vec{\nabla} P^{n,p} \tag{3.33}$$

qui devient, en prenant la divergence,

$$\frac{\vec{\nabla}.\vec{u}^{n,p} - \vec{\nabla}.\vec{u*}^{n,p}}{\Delta t} = -\nabla^2 P^{n,p}. \tag{3.34}$$

Ce qui conduit avec la condition d'incompressibilité (3.30) à l'équation de Poisson de laquelle on déduira la pression,

$$\nabla^2 P^{n,p} = \frac{\vec{\nabla}.\vec{u*}^{n,p}}{\Delta t}. \tag{3.35}$$

Différenciation de l'équation de Poisson

Dans cette partie, nous allons préciser les choix faits pour résoudre l'équation de Poisson (3.35). On a choisi un schéma explicite centré d'ordre 4 pour la dérivée seconde de la pression selon la direction longitudinale. D'où,

$$f_i'' = \frac{2}{3\Delta x}\left(f'_{i+1} - f'_{i-1}\right) - \frac{1}{12\Delta x}\left(f'_{i+2} - f'_{i-2}\right) \tag{3.36}$$

$$f_i' = \frac{2}{3\Delta x}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right) - \frac{1}{12\Delta x}\left(f_{i+2} - f_{i-2}\right) \tag{3.37}$$

Les bords du domaine ($i = 1$ et $i = n_x$) sont traités de la façon suivante : On a,

$$P'^{n,p}_1 = -\frac{u^{n,p}_1 - u*^{n,p}_1}{\Delta t}, \tag{3.38}$$

$$P'^{n,p}_{n_x} = -\frac{u^{n,p}_{n_x} - u*^{n,p}_{n_x}}{\Delta t}. \tag{3.39}$$

$$\tag{3.40}$$

où $u^{n,p}_1$ est donné par le profil d'entrée et $u^{n,p}_{n_x}$ est donné par la condition de sortie (voir plus loin). Ensuite, on définit $P'^{n,p}_0$ et $P'^{n,p}_{n_x+1}$ qui sont des nœuds fictifs par

$$P'^{n,p}_0 = P'^{n,p}_1, \tag{3.41}$$

$$P'^{n,p}_{n_x+1} = P'^{n,p}_{n_x}. \tag{3.42}$$

$$\tag{3.43}$$

Puis, on définit $P^{n,p}_0$, $P^{n,p}_1$, $P^{n,p}_{n_x}$ et $P^{n,p}_{n_x+1}$ par

$$P^{n,p}_1 = \frac{8}{7}P^{n,p}_2 - \frac{1}{7}P^{n,p}_3 - \frac{6\Delta x}{7}P'^{n,p}_1 \tag{3.44}$$

$$P^{n,p}_0 = P^{n,p}_1 + \Delta x P'^{n,p}_1 \tag{3.45}$$

$$P^{n,p}_{n_x} = \frac{8}{7}P^{n,p}_{n_x-1} - \frac{1}{7}P^{n,p}_{n_x-2} + \frac{6\Delta x}{7}P'^{n,p}_{n_x} \tag{3.46}$$

$$P^{n,p}_{n_x+1} = P^{n,p}_{n_x} + \Delta x P'^{n,p}_{n_x} \tag{3.47}$$

$$\tag{3.48}$$

Le système matriciel ainsi obtenu est composé d'une matrice qui comporte neuf diagonales. Elle peut ainsi être rapidement inversée.

3.2.5 Retour à la condition de sortie

Il ne reste plus qu'à présenter l'utilisation de l'équation (3.10) pour calculer le champ de vitesse en sortie de la boite de calcul.

Dans cette équation, $C_u(y,z)$ est une nouvelle inconnue qu'il faut calculer. A chaque sous-pas de temps p, on calcule $C_u(y,z)$ en $i = n_x - 1$ par l'équation

$$\begin{aligned}\frac{{u_{n_x-1}}^{n,p-1} - {u_{n_x-1}}^{n,p-2}}{\Delta t} = &-C_u(y,z)\frac{u^{n,p}_{n_x-1} - u^{n,p}_{n_x-2}}{\Delta x} - v^{n,p}_{n_x-1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n,p}_{n_x-1} \\ &-w^{n,p}_{n_x-1}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{n,p}_{n_x-1} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u^{n,p}_{n_x-1}\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ensuite, on utilise la même équation à $i = n_x$ et avec le schéma temporel de Runge-Kutta pour calculer $u^{n,p}_{n_x}$:

$$\frac{{u_{n_x}}^{n,p} - {u_{n_x-1}}^{n,p-1}}{\Delta t} = -C_u(y,z)\frac{u^{n,p}_{n_x} - u^{n,p}_{n_x-1}}{\Delta x} + \gamma_p M(\vec{u}^{n,p-1}) + \eta_p M(\vec{u}^{n,p-2}) \tag{3.50}$$

où

$$M(\vec{u}^{n,p}) = -v^{n,p}_{n_x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n,p}_{n_x} - w^{n,p}_{n_x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{n,p}_{n_x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u^{n,p}_{n_x} \tag{3.51}$$

3.2.6 Considération sur la stabilité numérique

Il est difficile de connaître les caractéristiques de stabilité numérique d'un système couplé d'équations différentielles comme celui qui est résolu ici. On peut cependant établir certaines limites auxquelles le schéma numérique est contraint [49, 64]. Ici, les équations du problème sont dominées par la convection. Le paramètre clef dans ce cas est le "nombre de Courant" C défini par

$$C = \frac{|\vec{u}|\Delta t}{|\vec{\Delta x}|}. \tag{3.52}$$

On peut définir un nombre de Courant dans les trois directions spatiales,

$$C_x = \frac{|u_x|\Delta t}{\Delta x} \tag{3.53}$$

$$C_y = \pi\frac{|u_y|\Delta t}{\Delta y} \tag{3.54}$$

$$C_z = \pi\frac{|u_z|\Delta t}{\Delta z} \tag{3.55}$$

où le facteur π apparaît en raison de la nature spectrale des discrétisations suivant y et z. Le pas de temps est fixé de façon à ce que les nombres de Courant locaux n'excèdent pas une valeur limite. L'utilisation d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 permet l'utilisation de pas de temps assez élevé. Une valeur limite de l'ordre de $C = 0,9$ est admise afin de prévenir la formation d'instabilité numérique. C'est cette valeurs qui est utilisé dans le code de calcul.

On peut préciser que les termes visqueux ne posent pas de problème lors de leur intégration temporelle par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3. En effet, la limitation donné par les quantités

$$d_{x_i} = \nu\frac{\Delta t}{{\Delta_{x_i}}^2}$$

qui ne doivent pas excéder une valeur de l'ordre du dixième est moins restrictive que la limitation due à la convection dans le cas des écoulements cisaillés. Par contre, le problème se pose pour des écoulements pariétaux en raison du raffinement proche des parois [87].

3.3 Outils d'analyse : quantités instantanées et statistiques

Avant de conclure ce chapitre, nous allons rapidement définir les principales quantités instantanées et statistiques que nous utiliserons lors des discussions qui suivront.

3.3.1 Quantités instantanées

L'analyse d'un champ instantanée (vitesse, vorticité) peut être une aide précieuse pour la compréhension des mécanismes régissant le mouvement des fluides. Elle permet l'obtention d'information sans modification par un quelconque traitement. Les progrès dans les techniques de visualisation (expérimental ou numérique) ont ainsi contribué à une meilleur connaissance de la turbulence. L'un des objectifs importants est la détection de structures tourbillonnaires cohérentes[3] qui jouent un rôle important dans les mécanismes de mélange, de génération de bruit, etc... La visualisation de ces structures permet l'analyse de la dynamique tourbillonnaire à grande échelle.

Nous présentons ici quelques critères de visualisation utilisés dans les études numériques.

[3]Le chapitre d'introduction générale a abordé cette notion.

Norme de vorticité

Par définition, dans un tourbillon cohérent, la concentration de vorticité est suffisamment importante pour permettre le retournement local du fluide environnant. La norme de la vorticité a été l'un des premiers critères pour identifier les structures cohérentes. Cependant, les écoulements cisaillés peuvent avoir des nappes vorticitaires ayant une amplitude de vorticité importante sans que ces régions définissent pour autant un tourbillon. Dans ce cas, l'identification à l'aide de ce seul critère paraît ardue.

Extrema de pression

On rappelle qu'au voisinage d'un tourbillon les parcelles fluides sont en équilibre local (dans un repère se déplaçant avec elles) entre les forces centrifuges et les forces dues au gradient de pression. De cet équilibre cyclostrophique, on peut déduire qu'un tube tourbillonnaire possède un minimum local de pression dynamique (voir Lesieur [96]). Jeong et Hussain [71] et Dubief et Delcayre [41] ont utilisé ce critère pour visualiser les structures tourbillonnaires cohérentes dans une couche de mélange. Ce critère semble efficace pour la détection de tourbillons intenses comme les rouleaux transversaux de la couche de mélange ou les anneaux tourbillonnaires axisymétriques des jets ronds (tous les deux dus à une instabilité de Kelvin-Helmholtz). Cependant, il ne permet pas de visualiser correctement à la fois les tourbillons de Kelvin-Helmholtz et les tourbillons longitudinaux.

Critère Q

Hunt *et al.* [67] ont également proposé d'utiliser le second invariant du tenseur des gradients de vitesse afin d'améliorer la visualisation de ces structures. Cet invariant, noté Q, est défini par

$$Q = -1/2(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{3.56}$$

où,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ et } S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.57}$$

définissent respectivement la partie anti-symétrique et symétrique du tenseur des gradients de vitesse. Ω_{ij} mesure la rotation et S_{ij} mesure le cisaillement. Les régions où Q est positifs sont des régions où les effets de rotation locale dominent ceux de cisaillement. Le critère $Q > 0$ matérialise donc bien les tourbillons cohérents. De plus, on peut montrer facilement que ce critère peut être relié à la pression dans le cas des fluides incompressibles. En prenant la divergence de l'équation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$Q = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\nabla^2 P. \tag{3.58}$$

Les régions où Q est positif correspondent bien à des minima de pression. Ce critère est désormais reconnu comme un moyen efficace de détecter les structures cohérentes de l'écoulement [98, 41]. C'est ce critère qui a été utilisé dans ce travail.

3.3.2 Quantités statistiques

Une autre approche de l'étude des mouvements turbulents consiste à traiter statistiquement les informations. Le but est alors de quantifier les résultats. De plus, les données statistiques sont

reproductibles contrairement à l'aspect imprévisible de données instantanées. Ceci permettra entre autres la comparaison avec d'autres simulations numériques ou avec des expériences.

Nous utilisons une décomposition en moyenne de Reynolds, c'est à dire qu'une quantité f instantanée se décompose en une partie moyenne, notée $\langle f \rangle$, et une partie fluctuante, f'. Par construction, $\langle f' \rangle = 0$. Statistiquement, nous évaluerons les fluctuations de f autour de sa valeur moyenne par son écart-type, racine carrée de la variance, $\sqrt{\langle f'^2 \rangle}$.

Dans cette étude, les statistiques seront calculées en coordonnées cylindriques (x, r, ϕ). C'est dans ce repère que nous calculerons par exemple le tenseur des contraintes de Reynolds défini par $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$.

Le calcul des quantités moyennes est fait en supposant l'ergodicité temporelle et spatiale (selon la direction azimutale du jet). On suppose ainsi que la turbulence est statistiquement stationnaire et connaît une direction ($\vec{e_\phi}$) d'homogénéité. La moyenne de f sera donc

$$\langle f(x,r,\phi,t) \rangle (x,r) = \frac{1}{4N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{3} f(x,r,m\frac{\pi}{2}, n\Delta t). \tag{3.59}$$

Les statistiques présentées ont été calculées sur plus de 6000 pas de temps qui correspondent au passage d'une trentaine de tourbillons de Kelvin-Helmholtz dans le domaine de calcul.

Nous introduirons tout au long de ce travail un certain nombre de quantités statistiques.

Troisième partie

Résultats et Discussions

Chapitre 4

Jets coaxiaux à un nombre de Reynolds modéré : Simulations Numériques Directes

Résumé du chapitre *Ce chapitre présente les résultats de jets coaxiaux à un nombre de Reynolds modéré ($Re = 3000$), issus de simulations numériques directes (SND). Ils portent essentiellement sur la transition du jet vers un état de turbulence pleinement développée. La transition au nombre de Reynolds considéré possède des étapes bien distinctes ce qui permet une étude fine. Nous avons pu mettre en évidence le comportement de certaines quantités globale comme le phénomène de pincement du cône potentiel extérieur qui se traduit par un léger déficit du taux d'épanouissement du jet. Les mécanismes d'apparition de la bulle de recirculation ainsi que le comportement de cette bulle sont également détaillés. Nous avons ensuite étudié la transition à travers l'évolution des structures cohérentes du jet. Le phénomène de "locking" entre les structures primaires intérieures (qui se situent entre les jets interne et externe) et extérieures (qui se situent entre le jet externe et le fluide ambiant) est mis en évidence. En effet, les tourbillons intérieurs se logent dans l'espace laissé libre entre deux tourbillons extérieurs consécutifs. Ces tourbillons sont donc convectés avec la même fréquence de passage. Plus loin, lors de la transition, les tourbillons longitudinaux qui apparaissent permettent la tridimensionnalisation du jet. Ces tourbillons sont prédominants au niveau du jet extérieur caractérisant ainsi la domination de ce dernier. L'étude des tourbillons cohérents se termine par l'influence de la bulle de recirculation sur ces derniers. Cette bulle a deux actions distinctes. Tout d'abord, elle ralentit les structures intérieures qui passent dans son voisinage. Dans ce cas, les fréquences de passage des structures intérieures et extérieures ne sont plus égales. De plus, la fin de la bulle de recirculation agit comme une source de vorticité longitudinale. Cela permet un fort étirement des structures, accélérant ainsi la transition. Enfin, nous avons examiné l'influence de l'épaisseur de quantité de mouvement intérieure initiale du jet. Ce paramètre a une forte influence sur la dynamique du jet. Cela est illustré par le développement de deux modèles théoriques. Le premier évalue la longueur du cône potentiel en fonction du rapport de vitesse et de l'épaisseur de quantité de mouvement et le second permet la détermination du rapport de vitesse critique en fonction de cette épaisseur de quantité de mouvement.*

Dans ce premier chapitre de résultats, nous allons présenter la dynamique des jets coaxiaux. Après avoir précisé les paramètres physiques et numériques de nos simulations (section 4.1), nous allons faire une première description des jets coaxiaux, en particulier au sujet de l'émergence d'un bulle de recirculation (section 4.2). Ensuite, nous détaillerons la dynamique des structures tourbillonnaires cohérentes lors de la transition (section 4.3). Nous soulignerons certaines particularités des jets coaxiaux comme le phénomène de "blocage" (locking) entre les structures primaires intérieures et extérieures ou comme le rôle particulier que joue la bulle de recirculation dans la dynamique tourbillonnaire. Enfin, nous étudierons dans la dernière section (section 4.4) le rôle que peut jouer l'épaisseur de quantité de mouvement intérieure. Cela se traduira, entre autres, par le développement de deux modèles théoriques évaluant la longueur du cône potentiel intérieur et le rapport de vitesse critique au-delà duquel une région de recirculation émerge.

4.1 Paramètres physiques et numériques des simulations

L'ensemble des simulations présentées dans ce chapitre sont des simulations numériques directes. Elles ont été réalisées dans une grille comportant $231 \times 384 \times 384$ nœuds et couvrant un domaine de calcul d'une taille de $10,8D_1 \times 10,65D_1 \times 10,65D_1$. Toutes ces simulations représentent des jets coaxiaux ayant le même nombre de Reynolds, $Re = U_2R_2/\nu = 3000$. De plus, un certain nombre de paramètres sont communs à toutes ces simulations. Ainsi, nous avons simulé des jets coaxiaux de rapport de diamètre d'entrée $\beta = D_2/D_1 = 2$. Dans la définition du profil de vitesse d'entrée, Eq.(3.4), la vitesse du fluide co-courant est telle que $U_3/U_2 = 9,1\%$ et l'épaisseur de quantité de mouvement initiale extérieure est déterminée par $R_2/\theta_{02} = 25$. Enfin, l'amplitude des perturbations introduites en entrée du jet (bruit blanc) a été limitée à 3% de U_2.

En d'autres termes, les différentes simulations présentées dans ce chapitre ne diffèrent que par le rapport de vitesse r_u entre le jet externe et le jet interne et par l'épaisseur de quantité de mouvement initiale intérieure, θ_{01}. Les différentes simulations sont résumées dans le tableau 4.1. Par la suite, on s'y référera par les noms SNDX_Y où X caractérise la valeur de θ_{01} (SNDX est la catégorie de la simulation) et Y est la valeur de r_u.

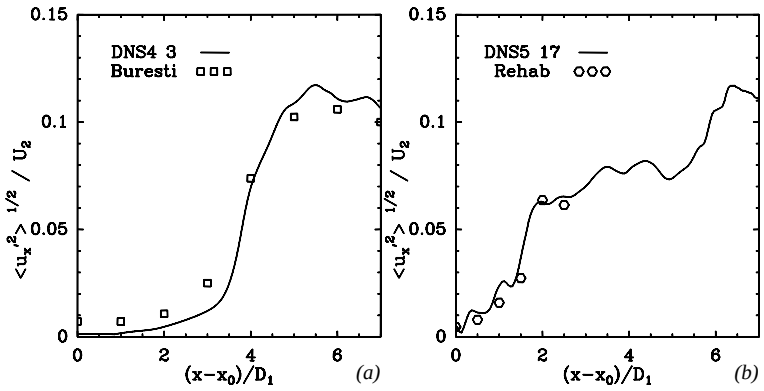


FIG. 4.1 – Evolution longitudinale de l'écart-type de vitesse longitudinale $\langle u_x'^2 \rangle^{1/2}$ le long de la ligne centrale du jet : *(a)* SND4_3 et *(b)* SND5_17. Les résultats numériques sont comparés aux mesures expérimentales de Buresti *et al.* [14] et de Rehab *et al.* [123].

TAB. 4.1 – Description des différentes simulations

Catégorie	**Nom**	r_u	R_1/θ_{01}	θ_{01}/R_1
SND1	SND1_3	3	10	0,1
	SND1_10	10	10	0,1
	SND1_17	17	10	0,1
SND2	SND2_1.5	1,5	12,5	0,08
	SND2_3	3	12,5	0,08
	SND2_3,3	3,3	12,5	0,08
	SND2_5	5	12,5	0,08
	SND2_6	6	12,5	0,08
	SND2_7	7	12,5	0,08
	SND2_10	10	12,5	0,08
	SND2_13	13	12,5	0,08
	SND2_17	17	12,5	0,08
	SND2_30	30	12,5	0,08
SND3	SND3_11	11	15	0,0667
	SND3_13	13	15	0,0667
SND4	SND4_3	3	20	0,05
	SND4_10	10	20	0,05
	SND4_12	12	20	0,05
	SND4_17	17	20	0,05
SND5	SND5_10	10	25	0,04
	SND5_11	11	25	0,04
	SND5_17	17	25	0,04

Il est important de remarquer que les sources potentielles d'erreurs numériques et de modélisation sont minimisées puisque nous réalisons des simulations numériques directes à l'aide de méthodes numériques précises. La contrepartie est que la valeur du nombre de Reynolds des jets coaxiaux que nous simulons est plus faible que les valeurs habituellement rencontrées dans les études expérimentales de jets coaxiaux [123, 151, 15]. De plus, afin de pouvoir discrétiser suffisamment les gradients de vitesse, nous considérons des valeurs relativement importantes des épaisseurs de quantité de mouvement, θ_{01} et θ_{02}. Ceci rend difficile des comparaisons expérimentales pour le champ proche des jets coaxiaux. La figure 4.1 montre l'évolution longitudinale de l'écart-type de vitesse longitudinale, $\langle u_x'^2 \rangle^{1/2}$ le long de la ligne centrale du jet pour deux simulations : SND4_3 ($r_u = 3$ et $R_1/\theta_{01} = 20$) et SND5_17 ($r_u = 17$ et $R_1/\theta_{01} = 25$). La première simulation correspond au cas sans région de recirculation alors qu'une bulle de recirculation est présente dans la seconde. Ces résultats sont comparés à deux expériences réalisées par Buresti *et al.* [14] et par Rehab *et al.* [123] respectivement. La première correspond à $r_u = 3$, $Re \approx 160000$ et $R_1/\theta_{01} \approx R_1/\theta_{02} \approx 70$ et ne possède pas de région de recirculation, alors que la seconde correspond à $r_u = 9$, $Re \approx 200000$ et $R_1/\theta_{01} \approx R_1/\theta_{02} \approx 100$ et possède une région de recirculation. Malgré les différences en termes de nombre de Reynolds ou d'épaisseur des gradients on peut observer un bon accord entre les données expérimentales et numériques. Précisons qu'une origine virtuelle, x_0 de l'ordre de D_1 a été utilisée pour les deux SND afin de tenir compte du fait que la turbulence se développe plus rapidement pour de grands nombres de Reynolds.

4.2 Vue globale de l'écoulement et influence du rapport de vitesse

Dans cette première section, nous allons donner une première "image" de l'écoulement étudié. Dans un premier temps, nous allons faire une description générale de la transition basée sur des visualisations instantanées et sur l'étude de quantités globales comme les cônes potentiels et le taux d'épanouissement du jet. Puis, nous allons détailler un phénomène caractéristique des jets coaxiaux qui est l'émergence d'une bulle de recirculation dans certaines conditions d'écoulement.

4.2.1 Description globale de la transition

Avant de revenir plus en détail sur des traits spécifiques des jets coaxiaux, nous allons décrire d'une façon plus générale le comportement de ces écoulements lors de la transition vers la turbulence pleinement développée.

Visualisations instantanées

Dans cette partie, on considère essentiellement les simulations SND2_5 et SND2_17. Cependant, les résultats présentés sont valables pour toutes les simulations réalisées. Les différences dues à la variation des paramètres d'entrée du jet seront discutées dans les sections suivantes de ce chapitre.

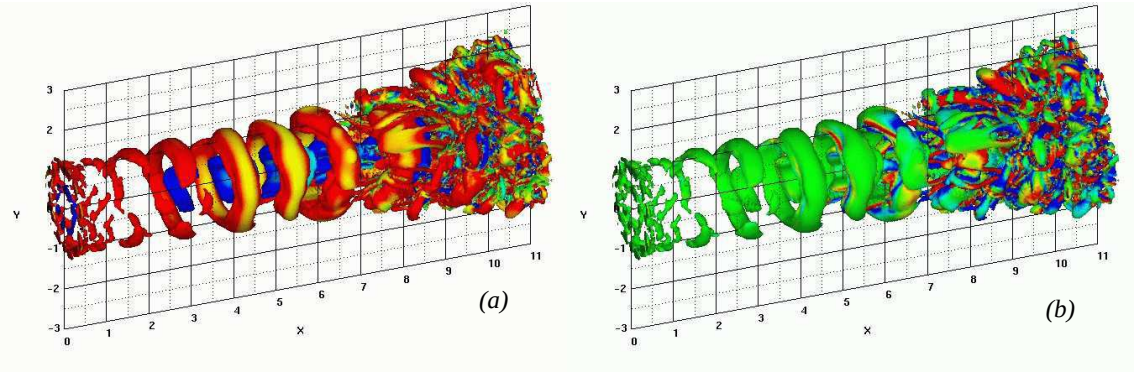


FIG. 4.2 – Vue d'ensemble des jets coaxiaux (simulation SND2_5). Isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ illustrant les structures tourbillonnaires colorées par la vorticité tangentielle *(a)* et par la vorticité longitudinale *(b)*.

On peut se donner une première image des jets coaxiaux à partir de la figure 4.2. Cette figure montre un champ instantané d'isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorées par la composante azimutale *(a)* et par la composante longitudinale *(b)* de la vorticité. Cette figure nous permet donc d'identifier les différentes étapes de transition vers une turbulence pleinement développée des jets coaxiaux d'un point de vue de la dynamique tourbillonnaire. Comme pour les jets ronds, cette transition est initiée par le développement d'instabilités de Kelvin-Helmholtz au niveau des couches cisaillées. De cette instabilité résulte des tourbillons formant des anneaux. Ces anneaux sont localisé soit entre le jet intérieur et le jet extérieur (ce sont les structures primaires internes du jet), soit entre le jet extérieur et le fluide ambiant (ce sont les structures externes du jet). Les structures internes et externes des jet coaxiaux de rapport de vitesse élevé ($r_u > 1$) tournent en sens opposés. La coloration de l'isosurface de Q par la vorticité tangentielle

(Fig.4.2*(a)*) permet donc de distinguer les structures de Kelvin-Helmholtz internes (en bleu) des structures de Kelvin-Helmholtz externes (en rouge). Les structures primaires sont espacées d'une distance constante λ_0 jusqu'à $x/D_1 \approx 7$ ce qui signifie qu'il n'y a pas d'appariements des tourbillons lors de cette première étape de transition. La figure 4.2 *(b)* illustre la seconde étape de transition. Au-delà de $x/D_1 \approx 7$, en accord avec le scénario classique des jets ronds, des paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs apparaissent entre deux structures primaires consécutives. Ces tourbillons ont une composante de vorticité longitudinale importante, ils sont ainsi mis en évidence en bleu et en rouge (selon le sens de rotation) dans la figure 4.2*(b)*. Cette étape initie réellement la tridimensionnalisation du jet coaxial. La section suivante reviendra en détail sur la dynamique de ces tourbillons cohérents. Enfin, à partir de $x/D_1 \approx 9$, les structures de l'écoulement n'ont plus de direction préférentielle. Cette région est le lieu de déchirures et d'appariements fractionnels des structures tourbillonnaires. Il y a, alors, une augmentation brutale de la turbulence au niveau des petites échelles. A la fin du domaine de calcul, le jet est dans un état de turbulence pleinement développée. La figure 4.3 montre les spectres temporels

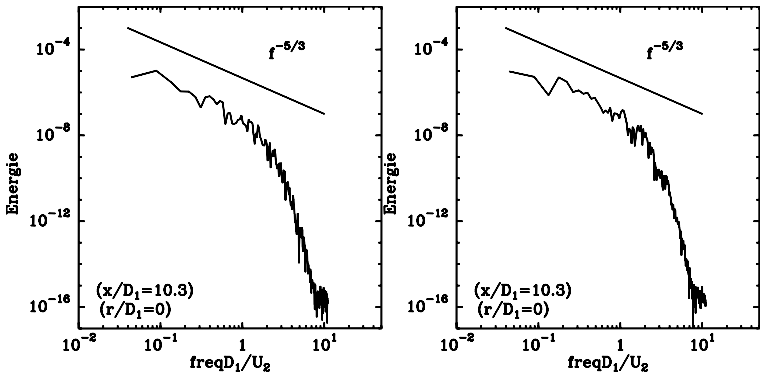


FIG. 4.3 – Spectre temporel du signal de la vitesse longitudinale relevé en $x/D_1 = 10,3$ pour deux simulations : SND2_5 (gauche) et SND2_17 (droite).

calculés à partir du signal de la vitesse longitudinale relevé en $x/D_1 \approx 10$ pour deux simulations : SND2_5 et SND2_17. Ces spectres possèdent un zone inertielle avec une loi de puissance en $-5/3$ sur plus d'une décade qui est suivie d'une région dissipative. Cette pente en $-5/3$ est une bonne indication sur le fait que l'écoulement a atteint un état de turbulence pleinement développée.

Le développement des tourbillons peut également être observé sur la figure 4.4 *(a)* qui représente des isolignes de la norme de la vorticité dans le plan central du jet. Il apparaît que le développement des instabilités est assez lent. En effet, les enroulements de la nappe de vorticité ne sont réellement visibles qu'à partir de $x/D_1 \approx 5$. Ceci vient du fait que les jets simulés sont des jets non forcés, le bruit ajouté en entrée est un faible bruit blanc. De plus, le nombre de Reynolds est modéré pour permettre la réalisation de SND. La principale remarque inspirée par cette figure est le développement "couplé" des tourbillons internes et externes de Kelvin-Helmholtz. En effet, les tourbillons internes semblent bloqués entre deux tourbillons externes consécutifs. Un paragraphe de ce chapitre reviendra en détails sur ce "blocage". Enfin, la description globale des jets coaxiaux peut être conclue par l'observation des isolignes de vitesses longitudinales dans le plan central du jet (Figure 4.4 *(b)* et *(c)*). La figure 4.4 *(b)* (correspondant à la simulation SND2_5) révèle qu'au début du jet, les vitesses longitudinales au centre du jet interne et du jet externe (respectivement, $y/D_1 = 0$ et $y/D_1 = 0.75$) se conservent sur près de la moitié du domaine de calcul. C'est ce que nous allons détailler par la suite en étudiant

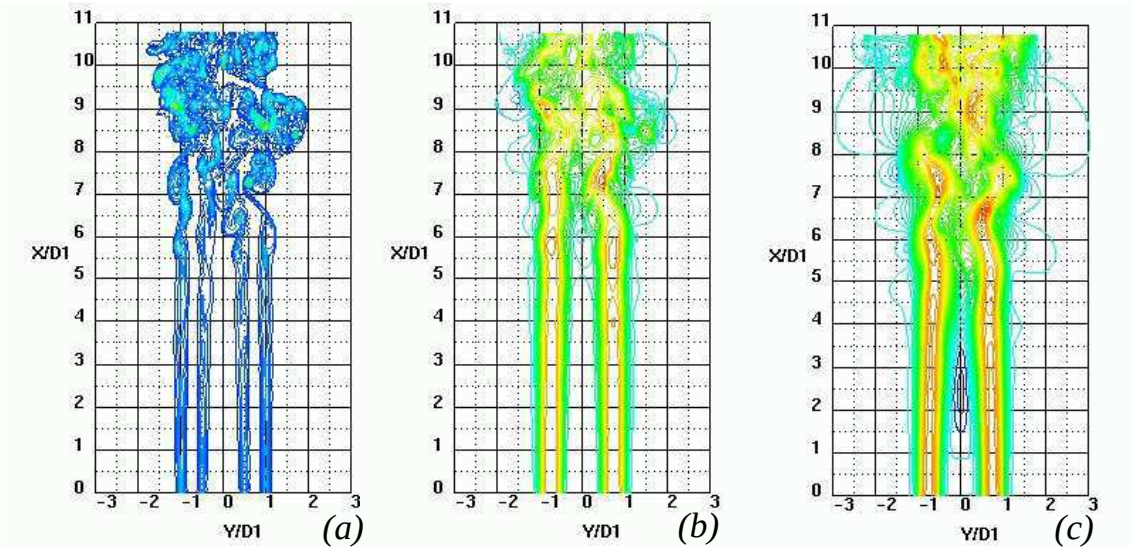


FIG. 4.4 – Isolignes de la norme de vorticité dans le plan central du jet pour la simulation SND2_5 *(a)*. Isolignes de la vitesse longitudinale dans le plan central du jet pour les simulations SND2_5 *(b)* et SND2_17 *(c)*. Les isolignes en bleu foncé dans le cas de la simulation SND2_17 mettent en évidence la bulle de recirculation.

les cônes potentiels des jets coaxiaux. Inversement, la figure 4.4 *(c)* (correspondant à la simulation SND2_17) illustre une rapide décroissance de la vitesse longitudinale au centre du jet interne (en $y/D_1 = 0$). Cette vitesse devient négative aux environs de $x/D_1 \approx 2$. Ces vitesses négatives témoignent de l'existence d'une bulle de recirculation au centre du jet coaxial dans cette configuration d'écoulement. On a ainsi retrouvé les deux régimes d'écoulement identifiés expérimentalement [122]. Les mécanismes d'apparition de la bulle ainsi que son comportement seront étudiés juste après avoir décrit l'évolution de quantités globales du jet comme les cônes potentiels et le taux d'épanouissement.

Cônes potentiels et taux d'épanouissement

Pour des jets ronds simples (voir le chapitre "Etat de l'art"), le cône potentiel du jet est défini comme la région où l'écoulement reste libre de la viscosité et où il n'y a ni gradient longitudinal, ni gradient radial de vitesses. Dans cette région en forme de cône, l'écoulement est potentiel, c'est-à-dire qu'il conserve la vitesse longitudinale de l'entrée et que la vorticité est nulle. Pour les jets coaxiaux, il y a deux régions distinctes qui répondent à cette définition : l'une au niveau du jet interne et la seconde au niveau du jet externe. On parle ainsi du cône potentiel intérieur et du cône potentiel extérieur (Figure 4.5). On peut, de plus, définir les quantités L_{P1} et L_{P2} qui ont respectivement les longueurs des cônes potentiels intérieur et extérieur et la quantité R_{P2} qui est la localisation radiale du sommet du cône potentiel extérieur par rapport à l'axe du jet[1] (Figure 4.5). Ces deux cônes potentiels ont un comportement distinct selon le régime de l'écoulement (avec ou sans bulle de recirculation). La figure 4.6 représente l'évolution des vitesses longitudinales suivant le long de l'écoulement au centre de chacun des deux cônes potentiels. On peut ainsi évaluer L_{P1} et L_{P2}. On note que le premier régime d'écoulement (sans bulle de recirculation, Figures 4.6 *(a)* et *(b)*) possède bien deux cône potentiels, par contre le cône

[1]La localisation radiale du sommet du cône potentiel intérieur est nulle, $R_{P1} = 0$.

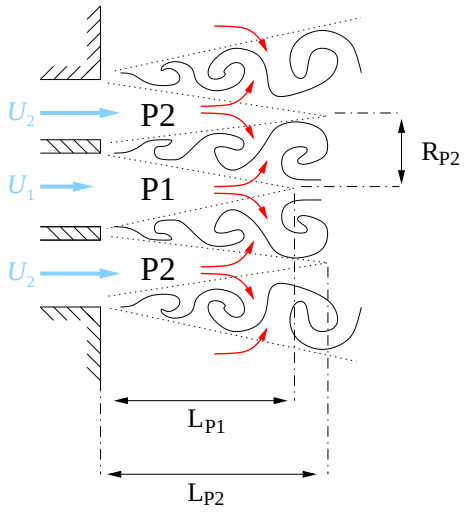


FIG. 4.5 – Schématisation d'un jet coaxial. Les flèches rouges représentent l'entraînement du fluide dans les couches de mélange. Les régions notées P1 et P2 représentent les cônes potentiels intérieur et extérieur, respectivement.

potentiel intérieur est altéré par la présence de la bulle de recirculation dans le second régime (Figure 4.6 *(c)*). Cette figure suggère également que la longueur du cône potentiel extérieur L_{P2} n'est pas influencée par la valeur du rapport de vitesse r_u. En effet, dans toutes les simulations de catégorie SND2 (voir tableau 4.1), nous trouvons $L_{P2}/D_1 \approx 7$. Par contre, la figure 4.7 montre que R_{P2} est fortement influencé par r_u. Cette quantité varie de $R_{P2}/D_1 = R_m/D_1 = 0.75$ pour de faible rapport de vitesses[2] jusqu'à une valeur limite $R_{P2}/D_1 \approx 0.63$ pour $r_u \geq 13$. Ce phénomène a déjà été observé expérimentalement par Rehab [122]. En effet, il avait noté que le cône potentiel extérieur avait tendance à "pincer" l'intérieur du jet lorsque le rapport de vitesse était important. Cette déviation du cône potentiel extérieur vers le centre du jet est dû à l'envahissement progressif du jet central, ce qui entraînera une courbure des lignes de courant vers l'axe du jet. Cet envahissement est directement relié au fait que le fluide susceptible d'être entraîné par la couche cisaillée interne est en quantité limitée. C'est ce même phénomène qui implique un décalage du pic de vitesse du jet extérieur au cours de la transition comme l'illustre la figure 4.8. La comparaison entre les trois simulations représentées à la figure 4.8 montre que ce décalage augmente avec r_u car l'intensité de l'entraînement augmente. Ce phénomène impliquera une évolution spécifique du taux de croissance des jets coaxiaux. De plus, cette figure montre qu'au-delà des cône potentiels, il existe un fort transfert radial de la quantité de mouvement. Les vitesses dans le jet s'homogénéisent conduisant ainsi le profil radial de vitesse du jet à une évolution similaire au profil radial d'un jet simple.

On étudie maintenant l'évolution de la longueur du cône potentiel intérieur L_{P1} avec r_u dans le cas des simulations de catégorie SND2 (Figure 4.9). La figure 4.9 montre que cette longueur[3] diminue fortement lorsque r_u augmente. Ceci est du à l'entraînement du fluide issu du jet interne par la couche cisaillée intérieure. En effet, cet entraînement implique une diminution de la vitesse le long de l'axe central du jet. De plus, l'intensité de cet entraînement est directement liée à la différence de vitesse à travers la couche cisaillée et donc à r_u. Quand r_u augmente,

[2] R_m est le rayon moyen du jet, voir l'équation (3.4).

[3] Le critère choisi pour évaluer L_{P1} est de dire que L_{P1} est la plus petite valeur tel que $\|\langle u_x(0,0)\rangle - \langle u_x(L_{P1},0)\rangle\| < 5\%$.

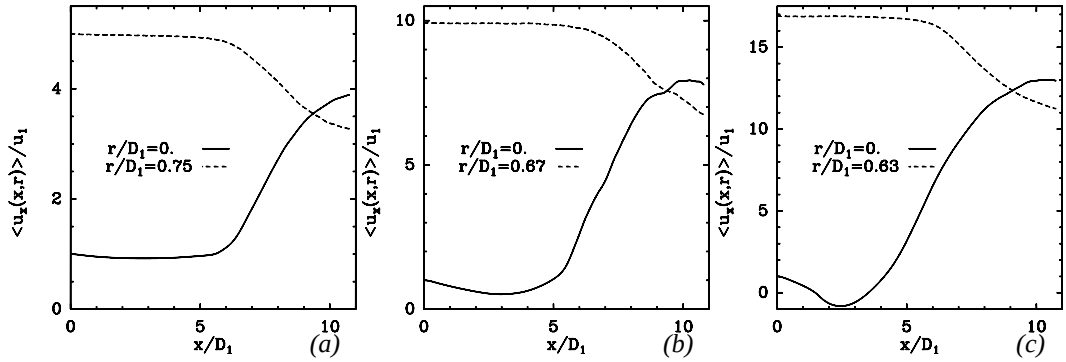


FIG. 4.6 – Evolution longitudinale de la vitesse longitudinale moyenne au centre des cônes potentiels intérieur et extérieur pour trois simulations : SND2_5 *(a)*, SND2_10 *(b)* et SND2_17 *(c)*.

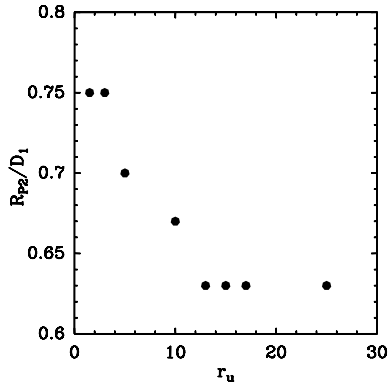


FIG. 4.7 – Evolution de R_{P2} en fonction de r_u pour les simulations de catégorie SND2.

l'entraînement est plus important, la vitesse sur l'axe central du jet diminue donc plus tôt et la longueur L_{P1} est réduite. Notons qu'ensuite la vitesse le long de l'axe central du jet augmente fortement (Figure 4.6). Ceci est dû au fort transfert de quantité de mouvement qui a tendance à homogénéiser les vitesses des jets externes et internes, mais cela se produit au-delà du cône potentiel intérieur. Nous verrons par la suite que l'épaisseur initiale de quantité de mouvement intérieur θ_{01} influence également ces quantités.

Le taux de croissance des jets coaxiaux a aussi un comportement spécifique. Nous avons évalué la croissance des jets coaxiaux par l'évolution de l'épaisseur du jet défini par analogie à la définition des jets simples (Eq.(2.1)). $\delta(x)$ est alors défini comme l'épaisseur du jet coaxial à l'abscisse x si :

$$\begin{aligned} &1.\ \delta(x) > r_{max}(x) \text{ et} \\ &2.\ \langle u_x(x,\delta(x))\rangle = 1/2\,(\langle u_x(x,r_{max}(x))\rangle - \langle u_x(x,r=\infty)\rangle) \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $r_{max}(x)$ est tel que $\langle u_x(x,r_{max}(x))\rangle = \max(\langle u_x(x,r)\rangle)$. La figure 4.10 montre l'évolution de $\delta(x)$ pour trois simulations différentes : SND2_3, SND2_10 et SND2_17. Pour un rapport de vitesse modéré (cas SND2_3), cette évolution est proche de celle d'un jet rond simple. Il y a

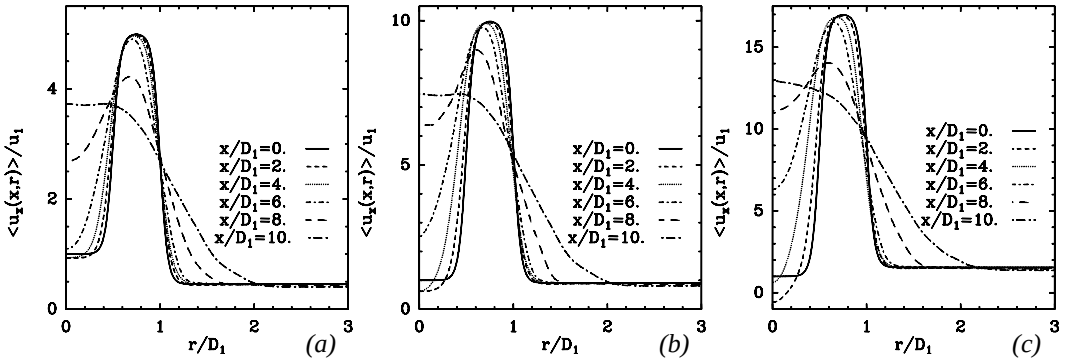


FIG. 4.8 – Evolution radiale de la vitesse longitudinale moyenne à différentes sections du jet pour trois simulations : SND2_5 *(a)*, SND2_10 *(b)* et SND2_17 *(c)*.

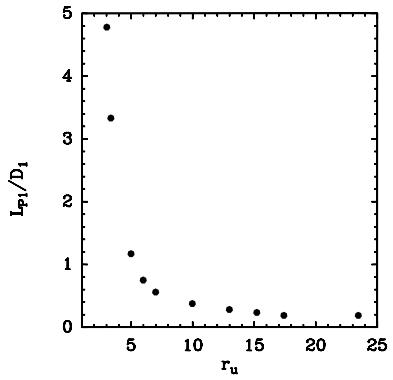


FIG. 4.9 – Evolution de L_{P1} en fonction de r_u pour les simulations de catégorie SND2.

une première phase, jusqu'à $x/D_1 \approx 7$, où l'épaisseur varie très peu. Ceci est caractéristique du début de la transition du jet. Puis, pour $x/D_1 > 7$, l'épaisseur croît avec une pente constante. Ceci caractérise le début de la tridimensionnalisation du jet avec l'émergence des tourbillons longitudinaux d'un point de vue de la dynamique tourbillonnaire. La pente de l'épaisseur du jet est la même que celle d'un jet simple [70, 136]. Pour un rapport de vitesses élevé, la phase où l'épaisseur est quasi constante est suivie d'une légère décroissance de l'épaisseur du jet aux alentours de $x/D_1 \approx 2$. Ce phénomène est de plus en plus prononcé lorsque r_u augmente comme l'illustre la comparaison entre SND2_10 et SND2_17. Cette décroissance est impliquée par le même phénomène d'envahissement du jet central qui conduit au pincement du centre du jet par le cône potentiel extérieur (Fig.4.8). Ensuite, lors de la tridimensionnalisation du jet, l'épaisseur croît avec la même pente indépendemment de r_u. Ceci implique qu'un jet coaxial du premier régime (sans bulle de recirculation) de rapport de vitesse important restera moins épanoui spatialement qu'un jet de rapport de vitesse plus faible comme l'illustre la comparaison des cas SND2_3 et SND2_10 sur la figure 4.10. Par contre, pour des jets coaxiaux du second régime (possédant une bulle de recirculation), l'épaisseur croît plus tôt (comme le montre le cas SND2_17 sur la figure 4.10). Nous verrons par la suite que la bulle de recirculation favorise la tridimensionnalisation du jet impliquant, ainsi, une augmentation de l'épaisseur du jet plus près de l'entrée.

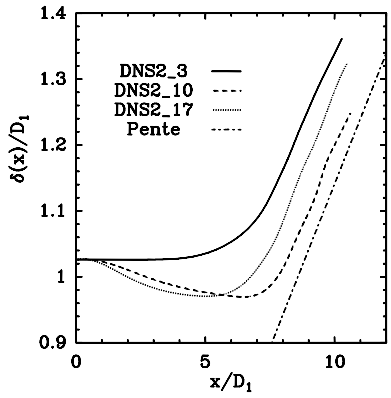


FIG. 4.10 – Evolution de l'épaisseur du jet coaxial lors de la transition pour trois simulations : SND2_3, SND2_10 et SND2_17. Le taux de croissance des jets simples est également représenté [70, 136].

4.2.2 La bulle de recirculation

La bulle de recirculation qui apparaît pour des rapports de vitesses élevés est une particularité des jets coaxiaux qui a déjà été observée expérimentalement [123]. Comme nous l'avons déjà dit, c'est la présence de cette bulle de recirculation qui distingue les deux régimes d'écoulement des jets coaxiaux.

Mécanismes d'apparition

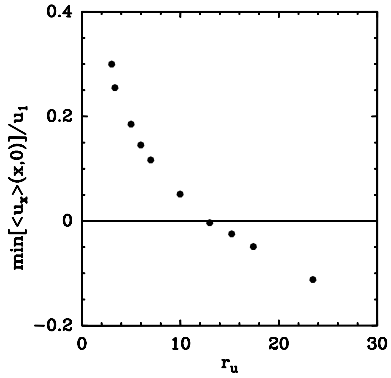


FIG. 4.11 – Evolution du minimum de la vitesse longitudinale sur la ligne centrale en fonction de rapport de vitesse r_u pour les simulations de type SND2.

C'est essentiellement un phénomène d'entraînement qui est à l'origine de l'émergence de la bulle de recirculation. En effet, le fluide issu du jet intérieur est entraîné par la couche cisaillée intérieure. L'intensité de cet entraînement est directement lié à la différence de vitesses à travers cette couche cisaillée [69]. Lorsque le rapport de vitesse r_u augmente, l'entraînement s'intensifie impliquant une diminution de la vitesse sur la ligne centrale du jet comme l'illustre le figure 4.11. Finalement, si r_u dépasse une valeur critique, l'entraînement est tel que le fluide apporté par le jet interne n'est plus suffisant et cela nécessite donc un retour du fluide issu de l'aval. Il se crée alors une zone où les vitesses longitudinales sont négatives. C'est la bulle de recirculation (Figure 4.12).

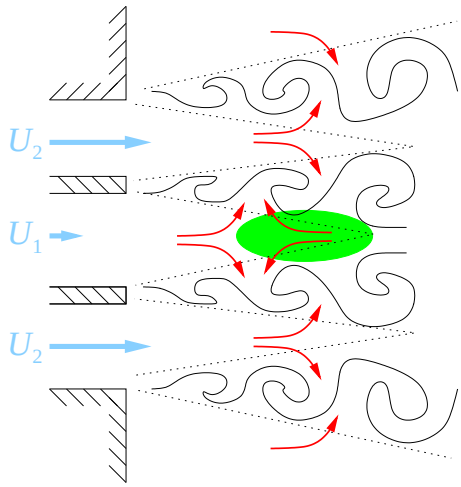


FIG. 4.12 – Schématisation d'un jet coaxial possédant une bulle de recirculation (schématisée en vert).

La figure 4.11 nous indique que dans le cas des simulations de type SND2, la valeur du rapport de vitesse critique (noté r_{uc}) distinguant les deux régimes de l'écoulement (avec et sans bulle de recirculation) est de 13. Ce résultat diffère de celui trouvé par les expérimentateurs. En effet, Rehab *et al.* [123] évaluaient r_{uc} autour de 8. Nous verrons dans la suite qu'en réalité, r_{uc} n'est pas universel, c'est-à-dire que sa valeur dépend du jet coaxial considéré.

Comportement de la bulle de recirculation

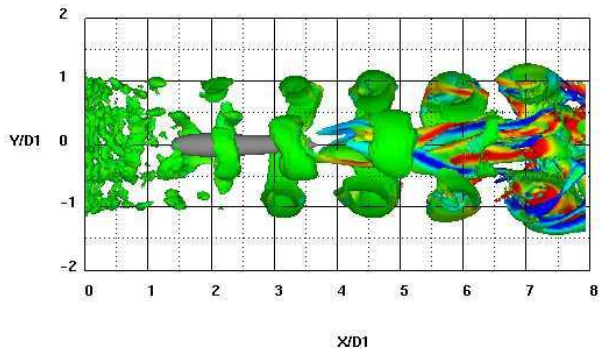


FIG. 4.13 – Illustration de la bulle de recirculation par une isosurface de vitesse longitudinale nulle (en gris). Les tourbillons cohérents autour de la bulle sont illustrés par une isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité longitudinale. Une partie des structures cohérentes extérieures ont été coupées artificiellement.

La figure 4.13 montre la bulle de recirculation dans le cas de la simulation SND2_17. Elle se situe aux alentours de $x/D_1 \approx 2,5$. Elle est de forme ovale et des animations ont pu montrer qu'elle était stationnaire pour le type de simulations considéré ici. Ces remarques diffèrent des premières observations expérimentales qui décrivaient une oscillation de la bulle et dont les

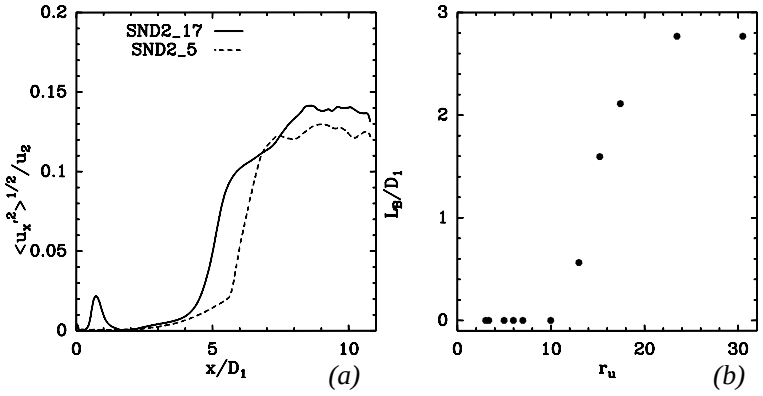


FIG. 4.14 – *(a)* Evolution longitudinale de l'écart-type de vitesse longitudinale ($\langle {u'_x}^2 \rangle^{1/2}$) le long de la ligne centrale du jet pour deux simulations (avec et sans bulle de recirculation). *(b)* Evolution de la longueur moyenne de la bulle de recirculation en fonction de r_u pour les simulations de type SND2.

visualisations semblaient montrer que la bulle de recirculation avait une forme plus complexe. Ces différences peuvent s'expliquer par le nombre de Reynolds des jets coaxiaux étudiés. En effet, dans le travail expérimental de Rehab [122], il considère des jets coaxiaux à des nombres de Reynolds de l'ordre de $4,5 \times 10^4$ (dans nos simulations, $Re = 3000$). Dans les simulations présentées dans ce chapitre, l'écoulement qui entoure la bulle de recirculation est laminaire alors que dans les travaux expérimentaux cités, l'écoulement était déjà fortement déstabilisé conduisant à une bulle de recirculation turbulente. Nous verrons dans un prochain chapitre que nous retrouvons le comportement instationnaire de la bulle de recirculation pour des simulations des grandes échelles de jets coaxiaux à plus haut nombre de Reynolds. On confirmera ainsi que la bulle de recirculation est fortement dépendante de l'activité turbulente de l'écoulement qui l'entoure.

La figure 4.14 *(a)* confirme le comportement laminaire de la bulle de recirculation. En effet, cette figure montre que l'intensité turbulente dans la bulle de recirculation est nulle. La comparaison avec une simulation du premier régime (sans bulle de recirculation) montre également que cette intensité turbulente croît plus tôt en présence de la bulle de recirculation. Ceci vient du fait que la bulle de recirculation favorise la tridimensionnalisation du jet comme nous le verrons lors de l'étude des structures tourbillonnaires de l'écoulement. Cette tridimensionnalisation favorise l'activité turbulente du jet (et implique une augmentation précoce de l'épaisseur du jet comme nous l'avons vu à la section précédente - Fig.4.10). Une première conséquence de la présence de la bulle de recirculation peut être observée sur la figure 4.14 *(a)*. En effet, il existe un pic de l'intensité turbulente longitudinale juste avant la bulle de recirculation. Ceci peut s'expliquer en considérant la surface de la bulle comme un plan d'arrêt de l'écoulement. Il y a donc un fort gradient de la vitesse longitudinale dans cette région, ce qui implique une augmentation de la production d'intensité longitudinale $P_{\langle {u'_x}^2 \rangle}$,

$$P_{\langle {u'_x}^2 \rangle} = -2 \left(\langle {u'_x}^2 \rangle \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x} + \langle u'_x u'_y \rangle \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y} + \langle u'_x u'_z \rangle \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z} \right) \tag{4.2}$$

Un raisonnement similaire permet d'expliquer la forte croissance de l'intensité turbulente longitudinale juste après la bulle de recirculation.

Enfin la figure 4.14 *(b)* montre l'évolution de la taille longitudinale de la bulle (notée L_B)

en fonction de r_u pour les simulations de type SND2. Cette longueur est bornée entre 0 (cas sans bulle) et $2,8D_1$ lorsque r_u dépasse une valeur de l'ordre de 20. D'une façon plus générale, nous avons noté que la bulle de recirculation devenait sensiblement indépendante du rapport de vitesse au-delà de cette valeur et cette longueur est de l'ordre des valeurs que l'on peut trouver dans le cas de jet annulaire (correspondant à un rapport de vitesse infini) [86].

4.3 Structures tourbillonnaires cohérentes

Dans cette section, nous allons traiter des structures tourbillonnaires cohérentes (voir le chapitre d'introduction) qui existent durant la transition des jets coaxiaux vers un état de turbulence pleinement développée. L'étude de ces structures est importante pour la compréhension de nombreux phénomènes (comme le bruit ou le mélange). Il est intéressant de comprendre leur dynamique, dans le but d'essayer de les manipuler comme nous le verrons dans un prochain chapitre. Les structures tourbillonnaires cohérentes des jets coaxiaux sont similaires à celles d'un jet simple. Nous ferons ainsi référence à des notions évoquées dans le chapitre d'état de l'art. Dans un premier temps, nous traiterons des structures primaires des jets coaxiaux qui sont directement liées à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Nous verrons ainsi qu'il existe un phénomène de couplage entre la dynamique des structures intérieures et extérieures. Dans un second temps, nous traiterons les structures secondaires qui sont des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Nous verrons qu'ils impliquent la tridimensionnalisation du jet. Enfin, l'interaction qui existe entre la bulle de recirculation et les structures tourbillonnaires sera étudiée.

4.3.1 Structures primaires : phénomène de "locking"

Plusieurs auteurs se sont posés la question de l'existence d'une éventuelle interaction entre les deux types de tourbillons primaires (les tourbillons de Kelvin-Helmholtz extérieurs et intérieurs) qui sont présents dans les jets coaxiaux. Les travaux expérimentaux de Dahm *et al.* [31] ont montré que le rapport entre la fréquence de passage intérieur f_1 et la fréquence de passage des tourbillons extérieurs f_2 était dépendant de la valeur du rapport de vitesse. En effet, ils ont mesuré $F = f_1/f_2 \approx 2$ pour $r_u \approx 1.14$ alors que $F = f_1/f_2 \approx 1$ pour $r_u \approx 4.16$. L'objectif de ce paragraphe est de mieux comprendre ces mesures et ainsi d'expliquer la nature des interactions entre les structures primaires. Nous ne nous occuperons ici que de jets coaxiaux du premier régime (sans bulle de recirculation), le second régime sera traité par la suite lorsque nous étudierons l'influence de la bulle de recirculation sur les structures cohérentes.

Les figures 4.15 et 4.16 montrent les spectres de fréquences pour deux simulations (SND2_1.5 et SND2_5) à deux abscisses x proches de l'entrée du jet. Les valeurs des pics de fréquences sont comparées à la valeur théorique déduite de la théorie de stabilité linéaire basée sur la couche cisaillée extérieure du jet coaxial (tel que $St = f_2\theta_{02}/U_{c2} = 0,033$ - voir le chapitre d'état de l'art). On déduit de ces figures que le pic de fréquence de la couche cisaillée extérieure est très proche de la valeur théorique. Par contre, le pic de fréquence de la couche cisaillée intérieure ne correspond pas à la théorie. En effet, pour la simulation SND2_1.5, f_1 est identique à f_2 dès que $x/D_1 > 3$ et pour la simulation SND2_5, $f_1 = f_2$ dès l'entrée du jet[4]. Afin de comprendre ces observations, nous avons tracé des diagrammes de Hovmöller. Ces diagrammes - très souvent utilisés en océanographie - consistent à colorer un plan par la quantité dont on souhaite suivre l'évolution. Ce plan est constitué par une ligne longitudinale de l'écoulement

[4]si $f_1 = f_2$ alors $f_1\theta_{01}/U_{c1} = \frac{f_2\theta_{02}}{U_{c2}}\frac{U_{c2}}{U_{c1}} \approx 0.033\frac{U_3/U_1+r_u}{U_3/U_1+1} \neq 0.033$ (nombre de Strouhal théorique de la couche cisaillée intérieur). On rappelle que dans les simulations de type SND2, $\theta_{01} = \theta_{02}$.

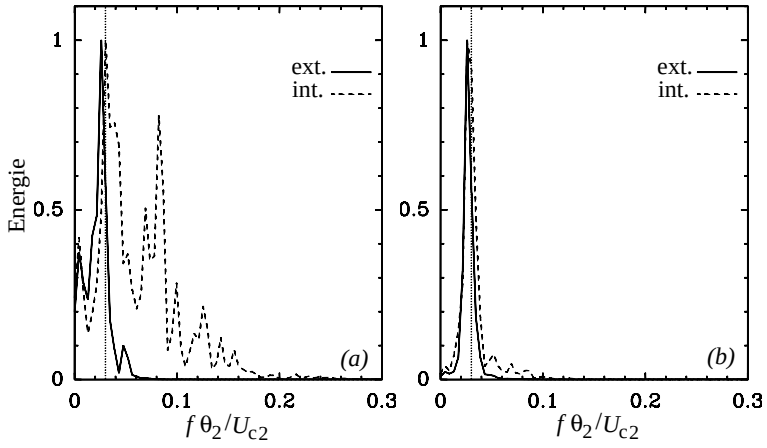


FIG. 4.15 – Spectre de fréquence du signal de vitesse longitudinale pour la simulation SND2_1.5 au niveau des couches cisaillées intérieure et extérieure et pour deux abscisses : $x/D_1 = 1,5$ *(a)* et $x/D_1 = 3,5$ *(b)*. Les fréquences sont normées par les quantités caractéristiques de la couche cisaillée extérieure et l'énergie est normée par sa valeur maximum. La ligne verticale représente la valeur théorique pour la couche cisaillée extérieure.

et par le temps. Dans cette étude la ligne longitudinale est une ligne par laquelle passent les tourbillons primaires : pour les tourbillons intérieurs nous prenons $y/D_1 = 0,5$ et $z/D_1 = 0$ et pour les tourbillons extérieurs nous fixons $y/D_1 = 1$ et $z/D_1 = 0$. Enfin, les plans (x,t) sont colorés par Q. La figure 4.17 illustre la construction des diagrammes de Hovmöller. La figure 4.18 montre l'évolution des structures intérieures *(a)* et extérieures *(b)* pour la simulation SND2_1,5. On voit ainsi que les tourbillons extérieurs ont une vitesse convective et une longueur d'onde constante (correspondant à la théorie comme l'a montré l'étude des fréquences). Par contre, les tourbillons intérieurs sont plus rapides que les tourbillons extérieurs au début du jet et aux alentours de $x/D_1 \approx 3$, ces tourbillons sont ralentis pour finalement être convectés à la même vitesse que les anneaux extérieurs.

Ces différentes observations peuvent s'interpréter par le scénario suivant. Les structures extérieures se développent suivant le scénario traditionnel de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (avec un nombre de Strouhal de l'ordre de 0,033). Par contre, la dynamique des tourbillons intérieurs est fortement influencée par les tourbillons externes. Une fois développés, les tourbillons intérieurs initialement plus rapides sont ralentis par les structures externes. En effet, les structures internes sont piégées entre deux tourbillons extérieurs consécutifs, ils sont ainsi convectés à la même vitesse. Ce phénomène conduit à l'égalité des fréquences constatée précédemment. Bien entendu, la distance au bout de laquelle les structures internes sont piégées par les tourbillons extérieurs (qui est de l'ordre de $x/D_1 \approx 3$ dans le cas SND2_1,5) est fonction de la valeur du rapport de vitesse r_u car le développement des tourbillons internes est lié à la couche cisaillée interne du jet coaxial. C'est pour cette raison que les fréquences relevées à $x/D_1 \approx 1,5$ sont déjà couplées pour la simulation SND2_5 contrairement à la simulation SND2_1,5.

Nous verrons dans la suite de ce chapitre que la bulle de recirculation jouera un rôle important sur la dynamique des tourbillons intérieures.

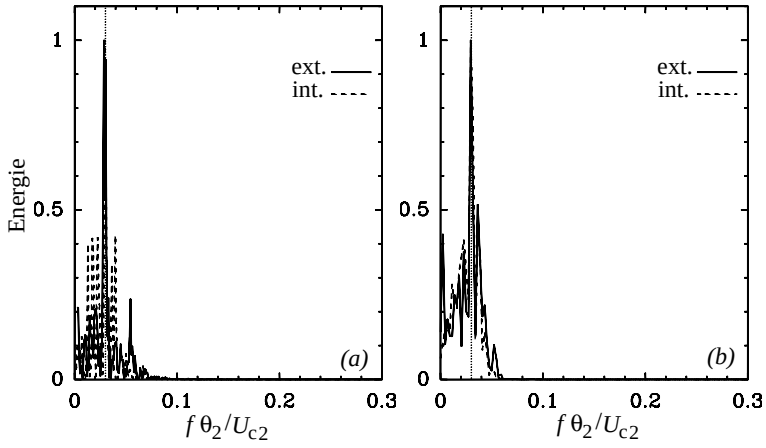


FIG. 4.16 – Spectre de fréquence du signal de vitesse longitudinale pour la simulation SND2_5 au niveau des couches cisaillées intérieure et extérieure et pour deux abscisses : $x/D_1 = 1,5$ *(a)* et $x/D_1 = 3,5$ *(b)*. Les fréquences sont normées par les quantités caractéristiques de la couche cisaillée extérieure et l'énergie est normée par sa valeur maximum. La ligne verticale représente la valeur théorique pour la couche cisaillée extérieure.

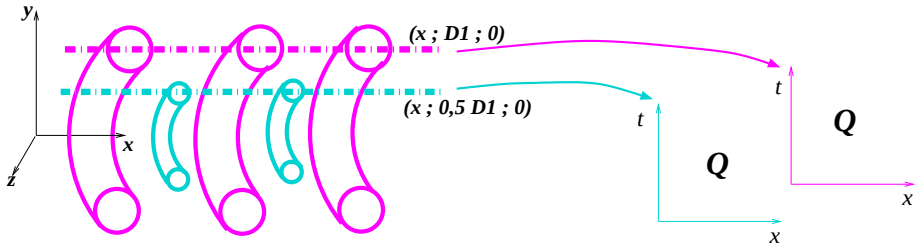


FIG. 4.17 – Schématisation de la construction de diagrammes de Hovmöller dans le cadre de notre étude. Les anneaux intérieurs sont schématisés en vert et les anneaux extérieurs sont schématisés en violet.

4.3.2 Structures secondaires : vers une tridimensionnalisation du jet

Comme pour les jets simples, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz des couches cisaillées interne et externe des jets coaxiaux est suivie par une instabilité azimutale secondaire qui se caractérise par l'émergence de paires de tourbillons contra-rotatifs possédant une vorticité de forte composante longitudinale. Ces tourbillons apparaissent autour de $x/D_1 \approx 7$ pour la simulation SND2_5 comme nous avons déjà pu le voir à la figure 4.2 *(b)*. L'évolution longitudinale des valeurs maximales de l'écart-type de chaques composantes de la vorticité pour SND2_5 confirme que $\langle {\omega'_x}^2 \rangle^{1/2}$ devient prépondérante au-delà de $x/D_1 \approx 6$ (Fig.4.19 *(a)*). Avant, c'est la composante azimutale, $\langle {\omega'_\phi}^2 \rangle^{1/2}$ qui domine légèrement due aux tourbillons de Kelvin-Helmholtz. L'émergence de ces tourbillons longitudinaux contra-rotatifs aura une forte influence sur l'écoulement.

La figure 4.19 *(b)* illustre l'évolution des invariants du tenseur d'anisotropie le long de l'axe central du jet pour la simulation SND2_5. Le tenseur d'anisotropie est défini par les composantes b_{ij},

$$b_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} K \delta_{ij}}{2K} \tag{4.3}$$

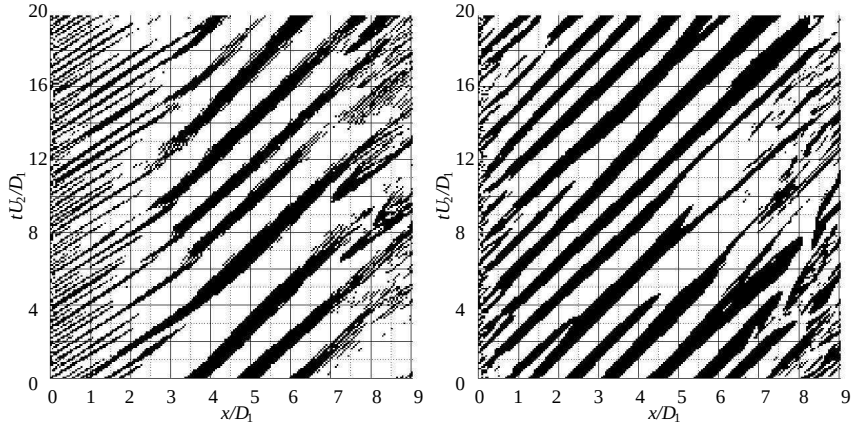


FIG. 4.18 – Diagrammes de Hovmöller des structures intérieures (gauche) et extérieures (droite) pour la simulation SND2_1,5. Les bandes noires montrent les régions où $Q > 0$ *i.e.* les tourbillons cohérents.

où K est l'énergie cinétique turbulente[5]. Les trois invariants de ce tenseur sont

$$I = b_{ii} \tag{4.4}$$

$$II = -\frac{b_{ij}b_{ji}}{2} \tag{4.5}$$

$$III = \frac{b_{ij}b_{jk}b_{ki}}{3} \tag{4.6}$$

Lumley et Newman [104] ont démontré que l'état de turbulence de l'écoulement pouvait être vu dans le plan des invariants (II,III). L'isotropie est caractérisée par des invariants nuls : $II = III = 0$. On voit ainsi que l'apparition des tourbillons longitudinaux permet à l'écoulement de se rapprocher d'une turbulence tridimensionnelle isotrope puisque au-delà de $x/D_1 = 6$ les deux invariants sont proches de zéro. Notons qu'avant l'apparition des tourbillons longitudinaux, nous avons $-II > 0$ et $III < 0$ qui est caractéristique de structures bi-dimensionnelles axisymétriques.

La figure 4.19 *(c)* illustre l'évolution longitudinale des composantes radiale et azimutale du tenseur des contraintes de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente pour la simulation SND2_5. Ces quantités sont définies par analogie au jet simple [33]. D'òu, pour la couche cisaillée intérieure

$$E_r(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_0^{R_m} \langle u_r'^2\rangle(x,r) r dr}, \tag{4.7}$$

$$E_\phi(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_0^{R_m} \langle u_\phi'^2\rangle(x,r) r dr}, \tag{4.8}$$

et pour la couche cisaillée extérieure

$$E_r(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_{R_m}^{\infty} \langle u_r'^2\rangle(x,r) r dr}, \tag{4.9}$$

[5] $K = \frac{\langle u_i' u_i'\rangle}{2}$

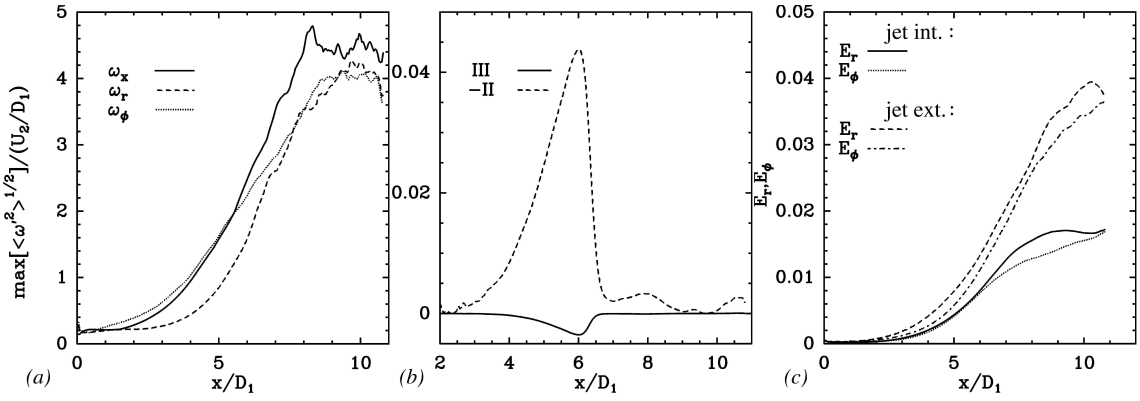


FIG. 4.19 – *(a)* Evolution longitudinale des valeurs maximales de l'écart-type de chaque composantes de la vorticité pour SND2_5. *(b)* Evolution des invariants du tenseur d'anisotropie (II et III - Eq.(4.5) et Eq.(4.6)) le long de l'axe central du jet pour SND2_5. *(c)* Evolution longitudinale des contributions des composantes radiale (E_r) et azimutale (E_ϕ) du tenseur des contraintes de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente pour les couches cisaillées intérieure et extérieure de SND2_5 (Eq.(4.7)-(4.10)).

$$E_\phi(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z} \int_{R_m}^{\infty} \langle u_\phi'^2 \rangle (x,r) r dr}. \tag{4.10}$$

La contribution radiale E_r est associée à l'instabilité primaire et à la croissance des anneaux tourbillonnaires [10, 33] alors que la contribution azimutale E_ϕ est associé à l'instabilité secondaire qui est à l'origine des tourbillons longitudinaux [33, 136]. On voit ainsi que E_r domine E_ϕ jusqu'à $x/D_1 = 10$ montrant que l'instabilité primaire domine l'évolution des instabilités azimutales. Il apparaît surtout que les contributions énergétiques de la couche cisaillée intérieure sont beaucoup moins importantes que celles de la couche cisaillée extérieure traduisant la domination de cette dernière. Nous utiliserons ces quantités dans la suite de ce travail afin de mieux comprendre les différences entre les jets coaxiaux étudiés.

4.3.3 La bulle de recirculation et les structures cohérentes

Afin de comprendre l'influence que pouvait avoir la bulle de recirculation sur les structures cohérentes de l'écoulement nous avons relevé les fréquences de passage des structures primaires avant la bulle de recirculation (Fig.4.20 *(a)*) et au niveau de cette dernière (Fig.4.20 *(b)*). Avant la bulle de recirculation, nous retrouvons une égalité entre les fréquences de passage extérieur et intérieur comme constaté précédemment pour des jets coaxiaux du premier régime à rapport de vitesse élevé (Fig.4.16). Par contre, au niveau de la région de recirculation, les deux pics de fréquences ne sont plus égaux. Il y a toujours la fréquence de passage des tourbillons cohérents extérieurs qui correspond à la théorie de stabilité linéaire (avec un nombre de Strouhal proche de $0,033$), mais, la fréquence de passage des tourbillons internes est légèrement plus faible. Les diagrammes de Hovmöller précisant la dynamique des structures tourbillonnaires internes et externes sont tracés figure 4.21. On peut déjà noter que le diagramme de Hovmöller des tourbillons externes est très similaire à celui des jets coaxiaux du premier régime (Fig.4.18). Il semble donc que la dynamique des tourbillons extérieurs soit insensible à la présence de la bulle de recirculation et à r_u en général. Par contre, la dynamique des tourbillons internes est très différente entre les deux régimes d'écoulement. La figure 4.21 montre effectivement que les

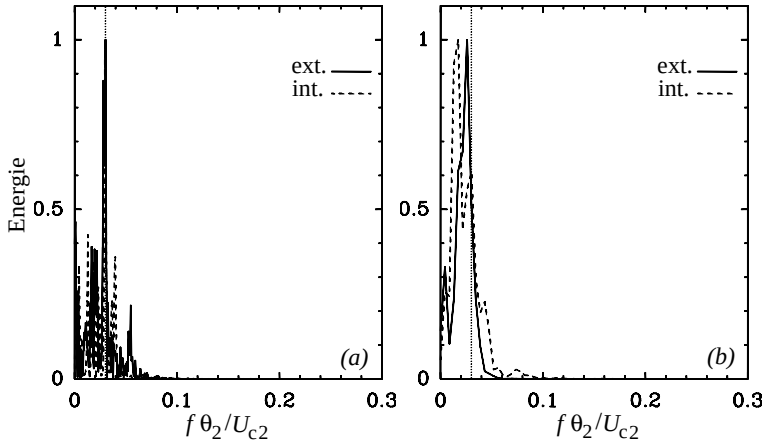


FIG. 4.20 – Spectre de fréquence du signal de vitesse longitudinale pour la simulation SND2_17 au niveau des couches cisaillées intérieure et extérieure et pour deux abscisses : $x/D_1 = 1,5$ *(a)* et $x/D_1 = 2,5$ *(b)*. Les fréquences sont normées par les quantités caractéristiques de la couche cisaillée extérieure et l'énergie est normée par sa valeur maximum. La ligne verticale représente la valeur théorique pour la couche cisaillée extérieure.

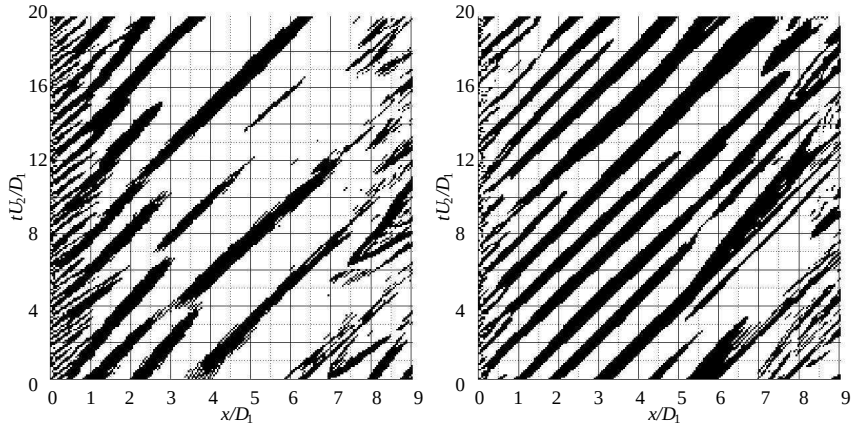


FIG. 4.21 – Diagrammes de Hovmöller des structures intérieures (gauche) et extérieures (droite) pour la simulation SND2_17. Les bandes noires montrent les régions où $Q > 0$ *i.e.* les tourbillons cohérents.

tourbillons internes et externes ont la même vitesse convective dès le début du jet puis que les tourbillons internes sont ralentis autour de $2 < x/D_1 < 3$. Cela signifie que le phénomène de blocage ("locking") évoqué plus haut reste présent dans le cas du second régime d'écoulement des jets coaxiaux, mais lorsque les structures cohérentes internes passent au niveau de la bulle de recirculation, la proximité avec cette dernière les ralentit, diminuant alors leur fréquence de passage.

Le diagramme de Hovmöller des tourbillons internes illustre également un comportement particulier à la suite de la bulle de recirculation. En effet, on voit que peu de structures tourbillonnaires internes passent par la ligne $(y/D_1 = 0,5\,;\ z/D_1 = 0)$. Ceci vient du fait que les structures à la suite de la bulle de recirculation sont particulièrement allongées et resserrées vers le centre comme on peut le voir sur la figure 4.13. Cela s'explique par le resserrement des lignes de courant à la suite de la recirculation qui s'accompagne d'un déplacement du gradient de vitesse longitudinale vers le centre, entraînant ainsi un resserrement radial et un allongement longitudinal des structures tourbillonnaires intérieures. De plus, ces structures intérieures sont caractérisées par une valeur importante de la vorticité longitudinale. Ceci peut s'expliquer en considérant le terme de production de la vorticité longitudinale :

$$P(\omega_x) = \omega_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \tag{4.11}$$

Comme pour les autres écoulements ayant une région de recirculation, les jets coaxiaux possèdent une région de forts gradients de vitesse $\partial u_x/\partial x$ juste après cette dernière. Et il se trouve que c'est dans cette région que les tourbillons longitudinaux commencent à se développer. Par conséquent, cette région contribue à la création de vorticité longitudinale ω_x par étirement des tourbillons intérieurs. La région de recirculation est alors une source supplémentaire de production de la vorticité longitudinale. Une observation similaire avait été faite par da Silva et Métais [134] sur un jet coaxial forcé. Ce mécanisme implique une tri-dimensionalisation plus précoce du jet en présence de la bulle de recirculation. Il aura pour conséquence une intensité turbulente qui croît plus tôt (Fig.4.14 *(a)*) et un épanouissement plus précoce du jet (Fig.4.10) comme nous l'avons vu précédemment. Notons que les tourbillons longitudinaux créés par la bulle ne sont pas de même nature que les tourbillons longitudinaux issus de l'instabilité azimutale du scénario classique de transition. En effet, comme nous l'avons rappelé dans l'état de l'art (Chapitre 2), les tourbillons longitudinaux "classiques" naissent de l'étirement de la "tresse" (nappe fine de vorticité existant entre deux anneaux de Kelvin-Helmholtz successifs) contrairement aux tourbillons longitudinaux créés par la bulle de recirculation qui sont directement le résultat de l'étirement longitudinal des anneaux de Kelvin-Helmholtz intérieurs (Fig.4.13).

4.4 Un paramètre important : l'épaisseur de quantité de mouvement intérieure

Dans la dernière section de ce chapitre, nous allons étudier l'influence d'un paramètre important dans la dynamique des jets coaxiaux : l'épaisseur de quantité de mouvement intérieure, notée θ_{01}. Expérimentalement, la valeur de ce paramètre dépend de la buse en entrée du jet. Une buse réalisée à l'aide d'un divergent donnera une épaisseur de quantité de mouvement plus faible qu'une buse réalisée à l'aide d'un tube. De plus, θ_{01} variera avec l'épaisseur de l'entrefer qui sépare la buse interne de la buse externe. La valeur de cette quantité pouvant être modifiée relativement facilement lors d'applications, il est donc intéressant de connaître l'influence de ce paramètre sur le jet.

4.4.1 Influence sur la dynamique de l'écoulement

Dans un premier temps, nous allons regarder comment ce paramètre modifie la transition du jet et des quantités globales de l'écoulement. Le comportement de la bulle de recirculation sera également discuté.

Mécanisme de transition

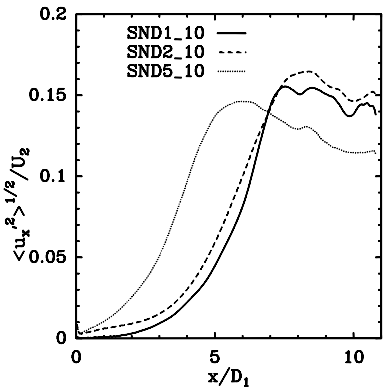


FIG. 4.22 – Evolution longitudinale de la composante longitudinale de la fluctuation de vitesse au niveau de la couche cisaillée interne $\langle u_x'^2\rangle^{1/2}(x, r = R_1)$ pour trois simulations (SND1_10, SND2_10 et SND5_10).

Nous allons tout d'abord considérer le cas de jets coaxiaux sans bulle de recirculation. L'influence de l'épaisseur de la quantité de mouvement intérieure est étudiée en comparant principalement trois simulations : SND1_10 ($r_u = 10\,;\, \theta_{01}/R_1 = 0.1$), SND2_10 ($r_u = 10\,;\, \theta_{01}/R_1 = 0.08$) et SND5_10 ($r_u = 10\,;\, \theta_{01}/R_1 = 0.04$). Pour caractériser la transition d'un régime quasi-laminaire (en entrée du jet) à un régime de turbulence pleinement développée, la figure 4.22 montre l'évolution longitudinale de $\langle u_x'^2\rangle^{1/2}$ en $r/D_1 = 0.5$ (c'est la localisation radiale où la vorticité initiale est maximale pour la couche cisaillée intérieure). Pour les trois simulations étudiées, cette quantité croît faiblement avant de connaître une transition soudaine caractérisée par une croissance beaucoup plus forte. La localisation de cette transition est de plus en plus proche de l'entrée du jet quand θ_{01} diminue. En effet, elle est de l'ordre de $x/D_1 \approx 5$ pour SND1_10 jusqu'à $x/D_1 \approx 2$ pour SND5_10. Cette transition plus rapide peut être expliquée par le fait que l'instabilité de la couche cisaillée intérieure conduit à la génération de plus petites échelles plus tôt (dans le jet) pour des valeurs faibles de θ_{01}.

Ce dernier point est clairement illustré par la figure 4.23 qui montre des isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ pour les trois simulations. Nous voyons effectivement que les tourbillons de Kelvin-Helmholtz intérieurs se forment plus tôt pour de faibles valeurs de θ_{01}. De plus, il est intéressant de noter que les tourbillons extérieurs se forment également plus tôt lorsque θ_{01} diminue (alors que θ_{02} est identique dans les trois simulations). On peut attribuer ce phénomène à l'interaction mutuelle entre les couches cisaillées intérieure et extérieure : la croissance plus rapide de la perturbation de la couche cisaillée intérieure induira une déstabilisation plus précoce de la couche extérieure. Le cas SND5_10 ayant un développement tourbillonnaire plus précoce, connaîtra plus rapidement un processus de tri-dimensionalisation. Ceci est illustré par la figure 4.24 qui montre l'évolution des contributions radiale (E_r) et azimutale (E_ϕ) des tensions de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente (ces quantités ont été étudiées précédemment dans ce

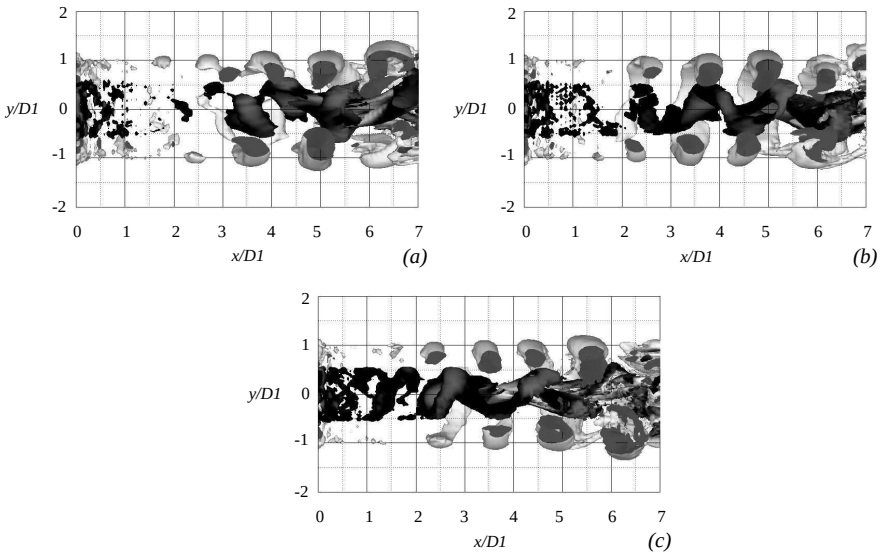


FIG. 4.23 – Visualisation des structures cohérentes pour trois simulations SND1_10 *(a)*, SND2_10 *(b)* et SND5_10 *(c)*. L'isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ a été artificiellement coupée afin de mieux voir les structures intérieures. De plus l'isosurface est colorée par la vorticité tangentielle afin de distinguer les structures internes (gris foncé) des structures externes (gris clair).

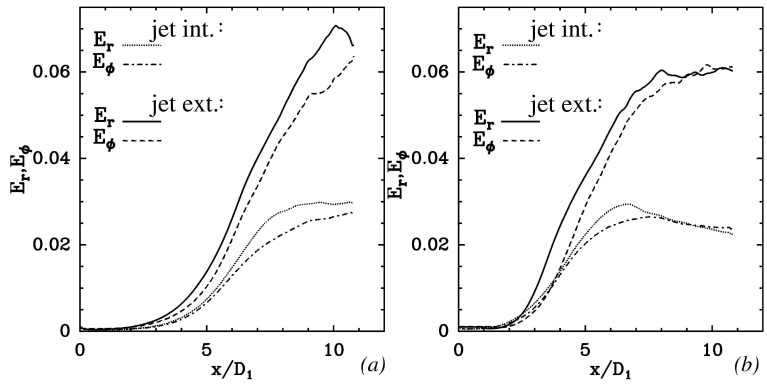


FIG. 4.24 – Evolution longitudinale des contributions radiale (E_r) et azimutale (E_ϕ) des tensions de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente pour deux simulations, SND2_10 *(a)* et SND5_10 *(b)*.

chapitre). Pour les deux simulations, SND2_10 (Fig. 4.24 *(a)*) et SND5_10 (Fig. 4.24 *(b)*), E_r qui est associé à la croissance des anneaux de Kelvin-Helmholtz domine E_ϕ dans les premières étapes de la transition, indiquant ainsi un faible niveau de tri-dimensionnalisation de l'écoulement. Plus en aval, E_ϕ devient équivalent à E_r indiquant que l'écoulement est tridimensionnel. La figure 4.24 montre que ce processus de tri-dimensionnalisation apparaît plus tôt dans le jet pour la simulation SND5_10 que pour la simulation SND2_10. Ce processus de tri-dimensionnalisation

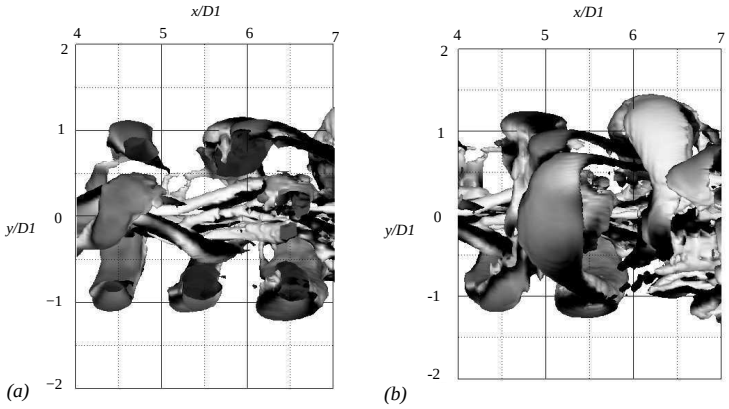


FIG. 4.25 – Isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorées par la vorticité longitudinale afin de distinguer les tourbillons longitudinaux de sens de rotation positif (gris clair) et négatif (gris foncé). Zoom montrant les tourbillons longitudinaux dans la simulation SND5_10 : *(a)* tourbillons étirés entre deux tourbillons internes consécutifs (une partie des tourbillons externes a été coupée artificiellement) ; *(b)* tourbillons étirés entre deux tourbillons externes consécutifs.

du jet est fortement lié à l'apparition des tourbillons longitudinaux secondaires (comme l'illustre la figure 4.23). Ils apparaissent plus tôt pour de faibles valeurs de θ_{01} et, ainsi, étirent les anneaux de Kelvin-Helmholtz intérieurs et extérieurs conduisant par conséquent à une transition du jet vers la turbulence pleinement développée plus rapide. La figure 4.25 montre un zoom sur les tourbillons longitudinaux dans la région de transition (entre $x/D_1 = 4$ et $x/D_1 = 7$) pour la simulation SND5_10. Les tourbillons longitudinaux apparaissent et s'étirent entre deux tourbillons primaires intérieurs (Fig. 4.25 *(a)*) et extérieurs (Fig. 4.25 *(b)*) consécutifs. On peut noter que dans le cas de la simulation SND5_10, les tourbillons longitudinaux entre deux tourbillons intérieurs apparaissent plus tôt que les tourbillons longitudinaux entre deux tourbillons extérieurs. Ce processus s'accompagne d'une amplification des fluctuations de la vorticité longitudinale comme l'illustre la figure 4.26 qui montre des profils de $\langle {\omega'_x}^2 \rangle$ pour trois abscisses différentes ($x/D_1 = 1$, 3 et 5). Cette figure compare également les simulations SND2_10 et SND5_10. La simulation SND2_10 correspond au cas où $\theta_{01} = \theta_{02}$, ainsi, la croissance de la tridimensionnalisation dans les deux couches cisaillées (intérieure et extérieure) est similaire. Ceci conduit à deux pics de fluctuations de la vorticité longitudinale d'intensité comparable situés à $r/D_1 = 0.5$ et $r/D_1 = 1$. Le phénomène d'étirement des tourbillons longitudinaux conduit à une augmentation significative de ces fluctuations le long de la transition. Par contre, pour la simulation SND5_10 (correspondant au cas où $\theta_{01} = \theta_{02}/2$), les tourbillons longitudinaux sont étirés plus tôt au niveau de la couche cisaillée intérieure. Il y a alors une forte amplification du pic de $\langle {\omega'_x}^2 \rangle$ en $r/D_1 = 0.5$ (Fig. 4.26 *(b)*). La figure 4.27 compare les fluctuations des trois composantes de la vorticité ($\langle {\omega'_x}^2 \rangle$, $\langle {\omega'_r}^2 \rangle$ et $\langle {\omega'_\phi}^2 \rangle$) pour les deux simulations : SND2_10 (Fig. 4.27 *(a)*) et SND5_10 (Fig. 4.27 *(b)*). Cette figure confirme que le facteur dominant du processus

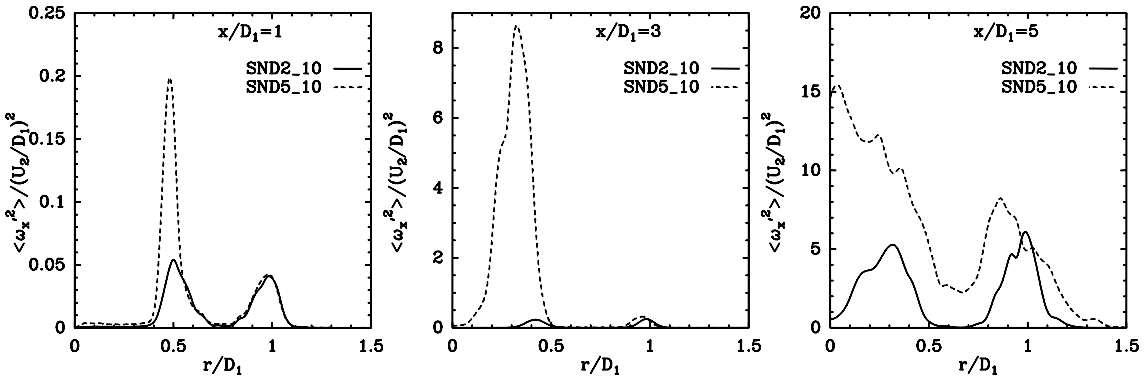


FIG. 4.26 – Profil de $\langle {\omega'_x}^2 \rangle$ en$x/D_1 = 1$, 3 et 5 pour deux simulations (SND2_10 et SND5_10).

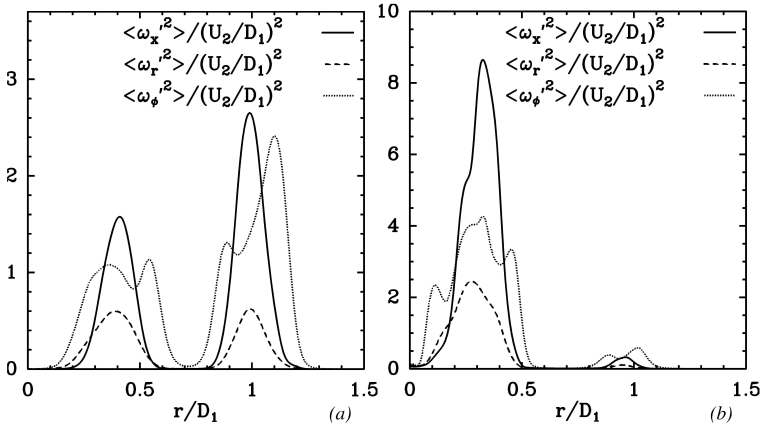


FIG. 4.27 – Comparaison entre les profils de $\langle {\omega'_x}^2 \rangle$, $\langle {\omega'_r}^2 \rangle$ et $\langle {\omega'_\phi}^2 \rangle$ pour : *(a)* simulation SND2_10 à $x/D_1 = 6$; *(b)* simulation SND5_10 à $x/D_1 = 3$.

de transition vers une turbulence pleinement développée du jet coaxial est l'étirement longitudinal. En effet, nous voyons que la valeur des fluctuations de vorticité longitudinale domine les valeurs des deux autres composantes de la vorticité. Par exemple, les rapports maximaux qui ont pu être mesurés étaient de l'ordre de $\langle \omega_x'^2 \rangle / \langle \omega_r'^2 \rangle \approx 5$ et $\langle \omega_x'^2 \rangle / \langle \omega_\phi'^2 \rangle \approx 2$ pour la simulation SND5_10.

L'influence de l'épaisseur de quantité de mouvement intérieure (θ_{01}) sur le processus de transition qui conduit les jets coaxiaux vers un état de turbulence pleinement développée se répercutera sur les quantités globales du jet comme son taux d'épanouissement ou les longueurs des cônes potentiels. L'objectif du paragraphe suivant est de détailler ces modifications.

Cônes potentiels et taux d'épanouissement

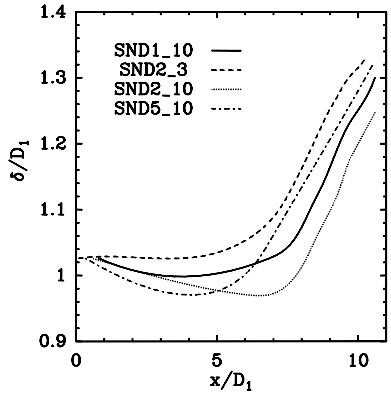


FIG. 4.28 – Evolution longitudinale du taux d'épanouissement du jet pour quatre simulations.

Le taux d'épanouissement du jet, défini par l'équation (4.1), est représenté sur la figure 4.28 pour quatre simulations : SND1_10, SND2_3, SND2_10 et SND5_10. Le cas de la simulation SND2_3 qui a déjà été discuté et représenté par la figure 4.10 est montré à titre de comparaison. On retrouve dans les simulations avec un rapport de vitesse r_u important (SND1_10, SND2_10 et SND5_10), la légère décroissance de l'épaisseur du jet liée à l'envahissement du jet central que nous avons déjà évoquée dans ce chapitre. Il est intéressant de remarquer que cette légère décroissance est fortement liée à la valeur de θ_{01}. En effet, cette décroissance est plus importante pour de petites valeurs de θ_{01}. Ceci peut s'expliquer par l'intensité de l'entraînement au niveau de la couche cisaillée intérieure qui est plus importante pour de petites valeurs de l'épaisseur de quantité de mouvement conduisant ainsi à un envahissement plus important du jet central. L'épaisseur du jet croît ensuite de façon linéaire (et avec la même pente) pour toute les simulations. Cependant, le début de cette croissance diffère d'une simulation à une autre : cette croissance débute plus tôt pour des épaisseurs de quantité de mouvement plus faibles. Ceci est dû à une transition vers la turbulence plus rapide pour θ_{01} plus faible qui a déjà été évoquée lors de la discussion de la figure 4.22 et qui conduira à un transfert de quantité de mouvement (responsable de l'homogénéisation des profils) plus précoce. En d'autres termes, il y a deux phénomènes distincts qui contrôlent la croissance du jet : l'envahissement du jet central par le jet externe qui imposera une légère décroissance du jet et le fort transfert radial de quantité de mouvement qui permettra sa croissance. On peut noter qu'il y a un léger retard des effets dus à la croissance de la turbulence sur $\delta(x)$ comparé à la croissance rapide de $\langle u'^2_x \rangle^{1/2}$ illustrée par la

figure 4.22. Ceci vient du fait que la génération plus rapide de la turbulence pour de faibles valeurs de θ_{01} débute initialement au niveau de la couche cisaillée intérieure. Le taux de croissance du jet n'est alors affecté de manière significative que plus loin en aval, le temps que la turbulence se diffuse vers la couche extérieure. Cela aura des effets sur les longueurs des cônes potentiels

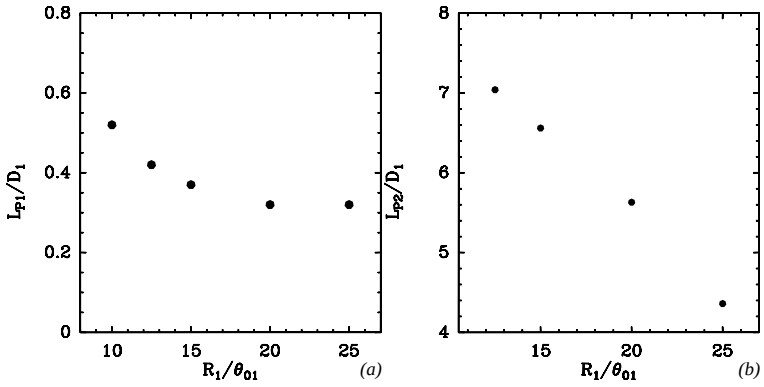


FIG. 4.29 – Evolution des longueurs des cônes potentiels intérieur *(a)* et extérieur *(b)* avec R_1/θ_{01} ($r_u = 10$).

intérieur et extérieur, L_{P1} et L_{P2}. Nous avons vu précédemment que L_{P1} diminue avec la croissance de r_u alors que L_{P2} semble en être indépendante. La figure 4.29 illustre la dépendance de ces quantités avec l'épaisseur de quantité de mouvement initiale. L_{P1} et L_{P2} diminuent pour de faibles valeurs de θ_{01}. Pour L_{P1}, c'est dû à l'intensité de l'entraînement du fluide intérieur par la couche cisaillée intérieure qui augmente pour une couche cisaillée plus raide (et donc une épaisseur de quantité de mouvement plus faible). Alors que pour L_{P2}, cette diminution est due à la génération précoce de turbulence pour de faibles valeurs de θ_{01} qui permet un transfert de quantité de mouvement plus intense, homogénéisant ainsi plus rapidement les vitesses.

Bulle de recirculation

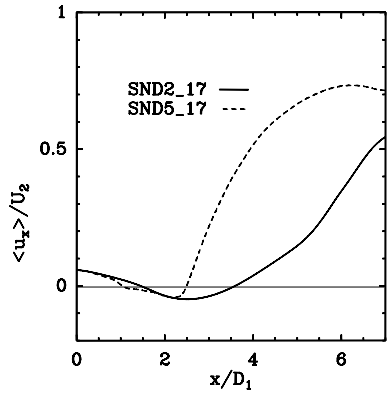


FIG. 4.30 – Evolution de la vitesse moyenne longitudinale le long de la ligne centrale du jet pour les simulations SND2_17 et SND5_17.

Dans ce paragraphe, nous considérons l'influence de θ_{01} sur le second régime d'écoulement (comportant une bulle de recirculation). La figure 4.30 montre l'évolution de la vitesse longitu-

dinale le long de la ligne centrale du jet pour deux configurations du second régime : SND2_17 et SND5_17. Dans les deux cas, une région de vitesse longitudinale négative est visible près de l'entrée du jet caractérisant la bulle de recirculation. On peut noter que la taille de cette région de recirculation diminue pour de faibles valeurs de θ_{01} : elle est de l'ordre de $1,5D_1$ pour SND5_17 au lieu de $2D_1$ pour SND2_17. De plus, la croissance de vitesse longitudinale le long de la ligne centrale au-delà de la bulle de recirculation est plus brutale. Cela est dû à la production de vorticité longitudinale au-delà de la bulle de recirculation (déjà vu, précédemment dans ce chapitre) qui est plus intense pour de faibles valeurs de θ_{01}.

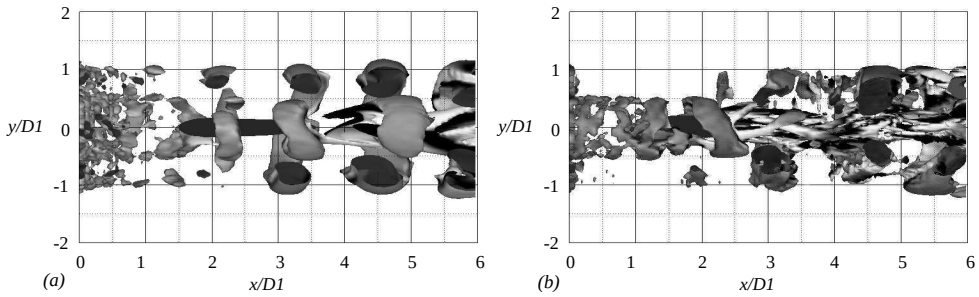


FIG. 4.31 – Isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorées par la vorticité longitudinale afin de distinguer les tourbillons longitudinaux de sens de rotation positif (gris clair) et négatif (gris foncé). Visualisation des structures cohérentes des simulations SND2_17 *(a)* et SND5_17 *(b)*. Une partie des structures externes a été coupée artificiellement.

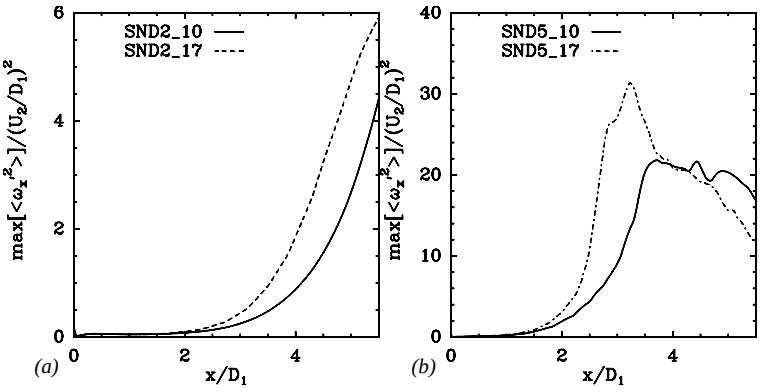


FIG. 4.32 – Evolution longitudinale de la valeur maximale de $\langle \omega_x'^2 \rangle$: *(a)* SND2_10 et SND2_17 et *(b)* SND5_10 et SND5_17.

C'est ce qu'illustre la figure 4.31 montrant des isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorées par la vorticité longitudinale. Il apparaît clairement que les structures longitudinales sont plus nombreuses à la suite de la bulle pour SND5_17. Ceci est également confirmé par la figure 4.32 qui compare l'évolution longitudinale des valeurs maximales de la fluctuation de la vorticité longitudinale $\langle \omega_x'^2 \rangle$ pour les simulations : SND2_10 et SND2_17 (Fig.4.32 *(a)*) ; SND5_10 et SND5_17 (Fig.4.32 *(b)*). On voit ainsi la croissance précoce de la composante longitudinale de la fluctuation de vorticité dans la région aval de la bulle de recirculation. Cette figure montre

également que les valeurs maximales de $\langle {\omega'_x}^2 \rangle$ sont plus importantes pour de faibles valeurs de θ_{01}.

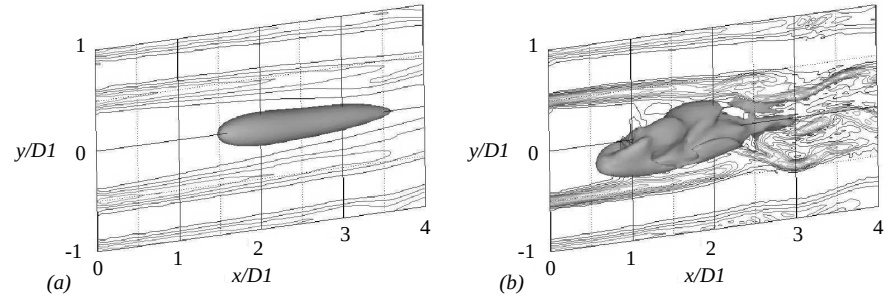


FIG. 4.33 – Isosurface de vitesse longitudinale nulle illustrant la bulle de recirculation et isolignes de la norme de la vorticité dans le plan central du jet : *(a)* SND2_17 et *(b)* SND5_17.

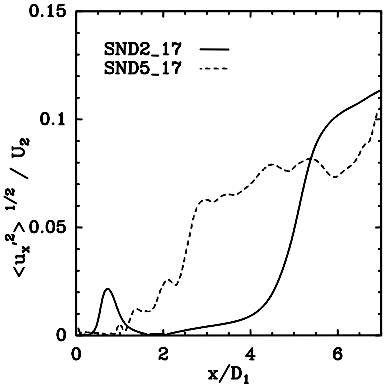


FIG. 4.34 – Evolution longitudinale de la composante longitudinale des fluctuations de vitesse $\langle {u'_x}^2 \rangle^{1/2}$ le long de la ligne centrale du jet pour deux simulations SND2_17 et SND5_17.

Comme nous l'avons vu précédemment, diminuer θ_{01} a aussi pour conséquence une transition plus rapide vers la turbulence. Pour la simulation SND5_17, l'écoulement entourant la bulle est déjà fortement déstabilisé (Fig.4.31 *(b)*). Contrairement au cas SND2_17, la bulle de recirculation est perturbée par les structures tourbillonnaires de la couche cisaillée intérieure. Cela donne une forme de bulle plus complexe que pour SND2_17 qui possède à une bulle de forme bien ovale car l'écoulement qui l'entoure est quasi-laminaire (Fig.4.33). Le comportement de cette région de recirculation diffère alors fortement dans les deux cas. La figure 4.34 montre l'évolution longitudinale de $\langle {u'_x}^2 \rangle^{1/2}$ le long de la ligne centrale (donnant ainsi une mesure de l'activité turbulente à l'intérieur de la région de recirculation). La bulle qui était laminaire pour SND2_17 connaît une activité turbulente importante pour le cas SND5_17.

4.4.2 Développement de modèles théoriques

La section précédente a montré que θ_{01} était un paramètre important pour la description de la transition vers la turbulence des jets coaxiaux. Ce chapitre confirme ce point en montrant que des quantités du jet peuvent être déterminées par des modèles théoriques simples prenant en compte

ce paramètre. Rehab *et al.* [123] avait proposé un modèle théorique donnant la variation de la longueur du cône potentiel intérieur en fonction de r_u. Leur procédure expérimentale conduisant à des jets coaxiaux de profil raide ($R_1/\theta_{01} \approx 100$), ils avaient considéré le cas $R_1/\theta_{01} \to \infty$. Nous reprenons ce modèle dans cette section afin de prendre en compte la dépendance avec θ_{01}. De plus, nous modélisons le rapport de vitesse critique conduisant à l'émergence de la bulle de recirculation en fonction de θ_{01}. Ces modèle sont ensuite comparés aux résultats donnés par les SND avec un accord satisfaisant au vu des hypothèses faites.

Evaluation de la longueur du cône potentiel intérieur

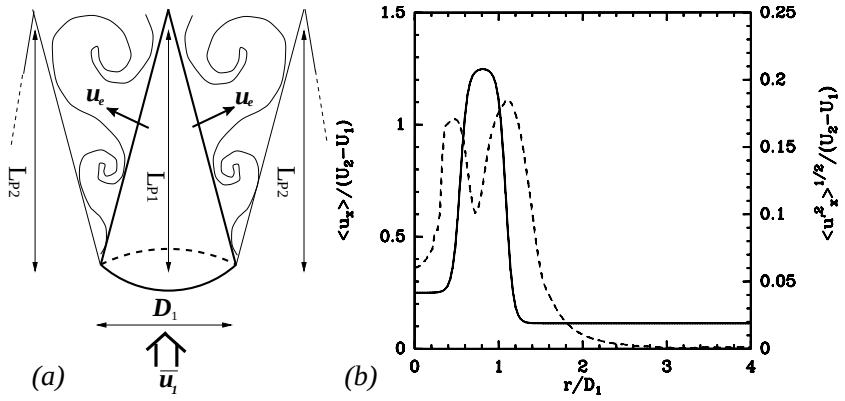


FIG. 4.35 – *(a)* Schématisation du cône potentiel intérieur : $\overline{u_1}$ désigne la vitesse débitante du jet interne et u_e désigne la vitesse d'entraînement du fluide issu du jet interne dans la couche cisaillée intérieure. *(b)* Profils des vitesses longitudinales moyenne (ligne continue) et de son écart-type (ligne pointillée) à $x/D_1 = 1$ pour SND2_5.

Le raisonnement de Rehab *et al.* [123] pour bâtir leur modèle prédisant L_{P1} est le suivant : le cône potentiel intérieur est supposé parfaitement conique avec un base de rayon R_1 et une longueur L_{P1}. L'entraînement du fluide dans ce cône vers l'extérieur impliqué par la couche cisaillée est supposé se faire avec une vitesse u_e considérée constante et de direction normale à la surface du cône (voir Fig.4.35 *(a)*). Le flux massique injecté dans le jet intérieur est donc égal au flux massique traversant le cône potentiel. Considérant le fluide incompressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\pi {D_1}^2}{4}\overline{u_1} = \frac{\pi D_1}{2}\sqrt{\frac{{D_1}^2}{4} + (L_{P1})^2}\; u_e, \tag{4.12}$$

qui conduit à l'évaluation suivante pour L_{P1},

$$\frac{L_{P1}}{D_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\overline{u_1}}{u_e}\right)^2 - 1}, \tag{4.13}$$

où $\overline{u_1}$ est la vitesse débitante du jet interne en entrée. Afin d'évaluer la vitesse u_e, Rehab *et al.* [123] utilisent une hypothèse d'entraînement supposant que cette vitesse d'entraînement est proportionelle à la fluctuation de la vitesse longitudinale $u'_{x,\mathrm{rms}}$ au niveau de la couche cisaillée (qui est la couche interne dans notre cas),

$$u_e \approx C u'_{x,\mathrm{rms}}, \tag{4.14}$$

où C est une constante qui dépend de l'écoulement considéré et qui sera déterminée à partir des résultats de nos simulations. Les expériences de Rehab *et al.* [123] et d'Hussain et Zedan [69] montrent que $u'_{x,\mathrm{rms}}$ peut être évalué par

$$u'_{x,\mathrm{rms}}/U_1 \approx 0.17(r_u - 1). \tag{4.15}$$

Une évaluation similaire a été déduite de nos simulations numériques comme l'illustre la figure 4.35 *(b)*. Des équations (4.14) et (4.15), on déduit alors l'évaluation de la vitesse d'entraînement,

$$u_e/U_1 \approx 0.17C(r_u - 1). \tag{4.16}$$

Il reste à évaluer la vitesse débitante $\overline{u_1}$ à partir du profil en tangente hyperbolique (Eq.3.4). On a

$$\begin{aligned} \frac{\pi {D_1}^2}{4U_1}\overline{u_1} &= \frac{2\pi}{U_1}\int_0^{R_1} u_{x,moyen}(r) r dr \\ &= 2\pi \int_0^{R_1} \left(\frac{r_u+1}{2} + \frac{r_u-1}{2}\tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right)\right) r dr, \end{aligned} \tag{4.17}$$

qui conduit à l'expression de $\overline{u_1}$ suivante :

$$\frac{\overline{u_1}}{U_1} = \frac{r_u+1}{2} + (r_u-1)B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right). \tag{4.18}$$

avec $B(R_1/\theta_{01})$ une fonction de R_1/θ_{01} vérifiant

$$B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right) = \frac{1}{{R_1}^2}\int_0^{R_1} r\tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right) dr. \tag{4.19}$$

Les équations (4.13), (4.16) et (4.18) donnent une nouvelle version du modèle de Rehab *et al.* [123] tenant compte de la valeur de R_1/θ_{01},

$$\frac{L_{P1}}{D_1} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(0.17C)^2}\left(\frac{1}{2}\frac{r_u+1}{r_u-1} + B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right)\right)^2 - 1}. \tag{4.20}$$

La figure 4.36 compare les résultats de nos simulations avec le modèle modifié (Eq.(4.20)) et le modèle ne tenant pas compte de R_1/θ_{01} (c'est-à-dire que dans l'équation (4.13), on prend $\overline{u_1} \approx U_1$ qui correspond à un profil de vitesse en 'haut de forme'). C'est pour $C = 0.85$ qu'il y a le meilleurs accord entre le modèle et les simulations. Bien qu'il soit basé sur des hypothèses très simplifiées, ce modèle décrit bien la décroissance de la longueur du cône potentiel intérieur avec l'augmentation de r_u due à l'amplification de l'entraînement. De plus, l'avantage du modèle modifié est de reproduire assez correctement la variation de L_{P1} avec θ_{01}. La décroissance de L_{P1} due à des niveaux de turbulence plus élevés pour des profils de vitesse plus raides est prise en compte.

Evaluation du rapport de vitesse critique

La détermination théorique du rapport de vitesse critique r_{uc} proposée par Rehab *et al.* [123] est basée sur des arguments de pression. La pression au centre du jet interne est plus faible que la pression extérieure à cause de la courbure des lignes de courants moyennes. A partir d'arguments phénoménologiques, Villermaux *et al.* [150] estiment cette différence de pression ΔP de l'ordre de

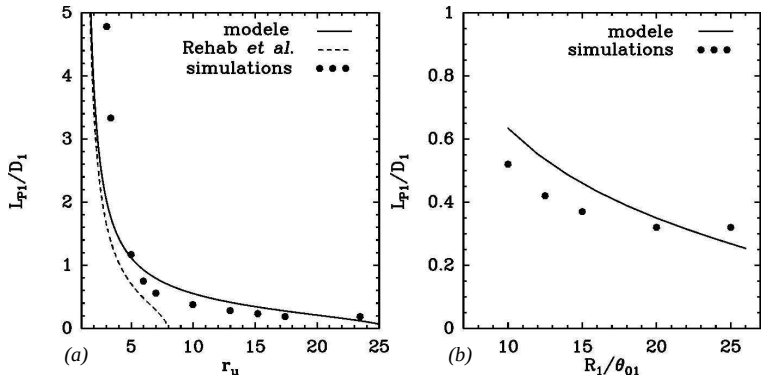


FIG. 4.36 – *(a)* Evolution de L_{P1} avec r_u (pour $R_1/\theta_{01} = 12,5$). *(b)* Evolution de L_{P1} avec R_1/θ_{01} (pour $r_u = 10$). Les points représentent les résultats des simulations, la ligne continue représente les résultats du modèle donné par l'Eq.(4.20) et la ligne pointillée représente les résultats du modèle en faisant l'hypothèse que $\overline{u_1} \approx U_1$ (hypothèse de Rehab *et al.* [123]).

$1/2\rho {u'^2}_{x,\mathrm{rms}}$ (ρ est la masse volumique du fluide supposé constante). La figure 4.37 *(a)* montre le plan central du jet coloré par la pression moyenne pour la simulation SND1_13. La pression est normée par $1/2\rho {u'^2}_{x,\mathrm{rms}}$ et cette figure semble confirmer l'évaluation faite par Villermaux *et al.* [150]. En effet, la pression moyenne au centre du jet est de l'ordre de $P_{ext} - 1/2\rho {u'^2}_{x,\mathrm{rms}}$, où P_{ext} est la pression extérieure de référence. L'apparition d'une région de recirculation sera nécessairement liée à un point de stagnation à sa limite. La pression au niveau de ce point sera donc de l'ordre : $P_S = P_{ext} - 1/2\rho {u'^2}_{x,\mathrm{rms}} + 1/2\rho \overline{u_1}^2$. Si $P_S < P_{ext}$, un écoulement de retour existe et le cas limite conduit à l'égalité suivante :

$$1/2\rho {u'^2}_{x,\mathrm{rms}} = 1/2\rho \overline{u_1}^2. \tag{4.21}$$

En reprenant l'évaluation de ${u'^2}_{x,\mathrm{rms}}$ (Eq.(4.15)) et en remplaçant $\overline{u_1}$ par son expression (Eq.(4.18)), on obtient

$$0,17(r_{uc} - 1) = \frac{r_{uc} + 1}{2} + (r_{uc} - 1)B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right). \tag{4.22}$$

Ainsi, le modèle évaluant r_{uc} devient

$$r_{uc} = \frac{B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right) - 0,67}{B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right) + 0,33}. \tag{4.23}$$

La figure 4.37 *(b)* compare le modèle de l'équation 4.23 aux résultats déduits de nos simulations. Les résultats de nos simulations prédisent effectivement une variation de r_{uc} avec θ_{01} [6] et le modèle prend bien en compte le rôle de ce paramètre dans l'évaluation de r_{uc}. Notons que de ce modèle, on peut déduire le cas limite : Si $\theta_{01} \to 0$ alors $r_{uc} \to 7$ ainsi, il semble qu'un écoulement de retour ne peut pas exister pour $r_u < 7$.

[6] corroborant ainsi les travaux expérimentaux de Rehab *et al.* [124] qui ont montré que le rapport de vitesse critique r_{uc} était dépendant de la forme de l'injecteur.

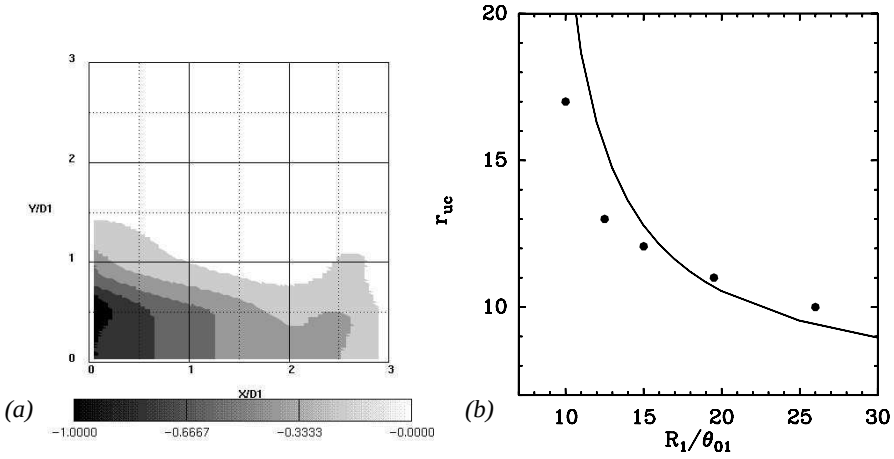


FIG. 4.37 – *(a)* Contours de la pression moyenne $(P - P_{ext})/(1/2\rho u'^2_{x,\mathrm{rms}})$ dans le plan central du jet. P_{ext} est la pression extérieure prise comme référence. *(b)* Evolution du rapport de vitesse critique r_{uc} avec R_1/θ_{01}. Les points représentent les résultats des simulations et la ligne continue représente le modèle donné par l'Eq.(4.23).

4.5 Animations liées au chapitre

Afin d'illustrer certains résultats de ce chapitre, nous avons joint cinq animations au format MPEG dont voici le détail :

anim41.mpg Simulation SND2_3. Isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité tangentielle. Mise en évidence des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz externes sont coupés artificiellement au cours de l'animation afin de mieux visualiser les tourbillons internes.

anim42.mpg Simulation SND2_5. Isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité longitudinale. Mise en évidence de l'apparition des tourbillons longitudinaux entre deux tourbillons de Kelvin-Helmholtz consécutifs.

anim43.mpg Simulation SND2_17. Isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité tangentielle et isosurface de vitesse longitudinale nulle (en vert) illustrant la bulle de recirculation. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz sont coupés artificiellement au cours de l'animation afin de mieux visualiser la région de recirculation.

anim44.mpg Simulation SND2_1,5. Isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité tangentielle. Une partie des tourbillons de Kelvin-Helmholtz externes sont coupés artificiellement. Mise en évidence du phénomène de blocage.

anim45.mpg Simulation SND2_17. Isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité tangentielle. Une partie des tourbillons de Kelvin-Helmholtz externes sont coupés artificiellement. Mise en évidence de l'influence de la région de recirculation sur les structures tourbillonnaires cohérentes.

Chapitre 5

Etude des propriétés de mélange des jets coaxiaux

Résumé du chapitre *Dans ce chapitre, une équation de transport d'un scalaire passif est résolue simultanément aux équations de Navier-Stokes. Après avoir validé la procédure numérique sur une configuration de jet plan, les propriétés de mélange des jets coaxiaux sont étudiées. Les jets coaxiaux ont un nombre de Reynolds modéré ($Re = 3000$) permettant la réalisation de simulations numériques directes. Une attention particulière est portée au rôle des structures cohérentes de l'écoulement dans les processus de mélange. Après une phase de diffusion moléculaire, il y a une pulsation périodique radiale du traceur due aux anneaux de Kelvin-Helmholtz générées au début de la transition. Puis, le mélange turbulent est réellement initié par des éjections radiales de traceur donnant des structures de "champignons". Ces éjections sont dues à des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Finalement, à la fin du domaine de calcul, la configuration de jet coaxial pris comme cas de référence montre encore de larges poches de traceur pur et donc de fluide non mélangé. La suite de ce chapitre va exposer différentes configurations de jets coaxiaux afin d'améliorer le mélange. On étudie d'abord l'influence des conditions d'entrée. Les modifications sur les propriétés de mélange du jet coaxial sont expliquées à partir des modifications imposées par les différentes conditions d'entrée sur la dynamique des structures cohérentes. Les améliorations sont principalement dues à une génération intense ou précoce de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Ceci peut venir de l'existence de la bulle de recirculation ou d'épaisseurs de quantité de mouvement plus faibles. Puis nous forçons directement le jet coaxial avec une amplitude modérée. Nous testons deux types d'excitations basés sur les informations obtenues de jets coaxiaux naturels : une excitation axisymétrique et une excitation azimutale. L'excitation axisymétrique permet la génération précoce de tourbillons de Kelvin-Helmholtz intenses et permet ainsi d'accélérer le processus de transition vers un état de turbulence pleinement développée. L'excitation azimutale déforme les anneaux de Kelvin-Helmholtz situés sur la couche cisaillée extérieure dès leur génération et permet une émergence précoce des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Cela améliorera efficacement le mélange avec une apparition rapide du phénomène d'ejection du traceur.*

Comme nous l'avons dit dans le chapitre d'état de l'art, les jets coaxiaux sont une configuration d'écoulement efficace pour mélanger deux fluides. L'étude des jets coaxiaux porte souvent sur le champ proche des jets coaxiaux puisque la plus grande part du mélange a lieu dans la région de développement du jet au niveau des cônes potentiels selon Champagne et Wygnanski [20]. De plus, Warda *et al.* [151] ont noté que les jets coaxiaux avec $r_u > 1$ se développaient plus rapidement que des jets de rapport de vitesse inférieur à l'unité. Pour une configuration de buse fixée, les jets coaxiaux de rapports de vitesse élevés permettent ainsi un mélange rapide entre les deux fluides. Plusieurs auteurs ont étudié le rôle des tourbillons cohérents dans le processus de mélange puisque les structures cohérentes à grande-échelle induites par les écoulements cisaillés jouent un rôle important dans le transport turbulent [30]. Villermaux et Rehab [149] ont montré que l'interface entre les deux fluides augmentait avec l'instabilité de la couche cisaillée extérieure et donc que l'épaisseur de vorticité de cette couche cisaillée était un paramètre important. Ferrao *et al.* [48] ont montré que le mélange au niveau du jet interne était influencé par la dynamique de la couche cisaillée extérieure.

Dans ce chapitre, nous allons résoudre l'équation de transport d'un scalaire passif parallèlement aux équations de Navier-Stokes. Nous validons cette procédure par une simulation de jet plan (section 5.1). Ensuite, nous étudierons le mélange dans les jets coaxiaux à partir d'une simulation numérique directe d'un jet coaxial correspondant à la configuration SND2_5 du chapitre précédent (section 5.2). Ce cas de référence sera alors comparé à des jets coaxiaux de conditions d'entrée différentes. Les modifications impliquées sur le processus de mélange seront expliquées par rapport à l'influence de ces conditions sur la dynamique des structures tourbillonnaires cohérentes (section 5.3). Enfin, nous utiliserons des forçages déterministes afin de contrôler les structures de l'écoulement en vue d'améliorer le mélange (section 5.4).

5.1 Validation

5.1.1 Equation de transport d'un scalaire

Afin d'étudier le mélange dans la configuration des jets coaxiaux, nous étudions l'évolution d'un traceur "numérique" introduit initialement dans le jet annulaire ou dans le jet central selon les configurations. L'évolution du mélange de ce traceur est donnée par l'évolution de la fraction de mélange, notée f, que l'on peut considérer comme la concentration du traceur : $f = 1$ quand le fluide ne contient que du traceur et $f = 0$ quand le fluide en est complètement dépourvu. L'équation d'évolution de la fraction de mélange est résolue simultanément aux équations de Navier-Stokes (Eq.(3.1)-(3.2)). Cette équation correspond à l'équation de transport d'un scalaire passif (voir par exemple Lesieur [96]). Cette équation s'écrit sous sa forme adimensionnalisée par la vitesse U_2 et le rayon R_2 :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla} f = \frac{1}{ReSc}\nabla^2 f, \tag{5.1}$$

où Sc est le nombre de Schmidt, $Sc = \nu/\kappa_D$ avec κ_D la diffusivité du traceur et Re est le nombre de Reynolds défini précédemment. Le nombre de Schmidt est égal à 1 dans la suite de ce chapitre. Nous allons détailler les méthodes numériques mises en place pour résoudre cette équation.

Discrétisation

Discrétisation temporelle La discrétisation temporelle de l'équation (5.1) utilise également un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (comme pour les équations (3.1) et (3.2)). On écrit

$$\frac{f^{n,p}-f^{n,p-1}}{\Delta t}=\gamma_p\left(N_f^{n,p-1}+L_f^{n,p-1}\right)+\eta_p\left(N_f^{n,p-2}+L_f^{n,p-2}\right). \tag{5.2}$$

Dans cette équation, n est le pas de temps et p est le sous-pas de temps du schéma de Runge-Kutta ($p = 1$, 2 ou 3). Les coefficients γ_p et η_p ont déjà été définis par l'équation (3.31). Dans l'équation (5.2), N_f est le terme convectif, $N_f = -\vec{u}.\vec{\nabla}f$ et L_f est le terme diffusif, $L_f = 1/(ReSc)\nabla^2 f$.

Discrétisation spatiale Le terme L_f est discrétisé de façon similaire aux méthodes mises en place pour les équations de Navier-Stokes. Par contre, il a été établi que des schémas centrés pour le terme convectif N_f conduisaient à des oscillations spatiales non physiques (appelées "wiggles" en anglais). Ces oscillations dues aux erreurs de dispersion peuvent être limitées par l'utilisation de schémas décentrés. Ces schémas sont connus pour avoir des effets d'atténuation sur les spectres d'énergie, mais ces effets sont moins importants sur l'advection du scalaire car le transport scalaire est linéaire (sans interaction d'échelle). L'atténuation des petites échelles n'affecte pas la dynamique des grandes (voir par exemple Pierce [118] pour plus de détails). Pour le terme convectif N_f nous avons alors utilisé un schéma TVD du second ordre semi-discrétisé avec limiteur (voir Hirsch [64]) dans les trois directions. Ces schémas garantissent que la quantité totale du scalaire (intégrée sur tout le domaine calcul) n'augmente pas au cours du temps et il n'y a jamais $f < 0$ ou $f > 1$. Pour la direction $\vec{x}$, on écrit alors :

$$\left(u_x\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i=\frac{1}{\Delta x}\left(u_i^+.\tau_i^+ + u_i^-.\tau_i^-\right). \tag{5.3}$$

Pour une meilleure clarté, nous n'avons pas noté les indices de temps et les indices dans les deux autres directions. Dans cette équation, $u_i^+ = \max(u_i, 0)$ et $u_i^- = \min(u_i, 0)$, u_i étant la vitesse selon la direction $\vec{x}$ au point considéré. Les termes (τ_i^+) et (τ_i^-) sont définis par :

$$\tau_i^+=(f_i-f_{i-1})+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{f_i-f_{i-1}}\right)(f_i-f_{i-1})-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{f_{i-1}-f_{i-2}}\right)(f_{i-1}-f_{i-2}), \tag{5.4}$$

$$\tau_i^-=(f_{i+1}-f_i)+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{f_{i+1}-f_i}\right)(f_{i+1}-f_i)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{f_{i+2}-f_{i+1}}\right)(f_{i+2}-f_{i+1}). \tag{5.5}$$

Dans ces équations, Φ est la fonction limiteur de flux "Roe superbee" [127] défini tel que :

$$\Phi(r)=\max\left(0,\min(2r,1),\min(r,2)\right). \tag{5.6}$$

Ce schéma a été utilisé dans les trois directions pour le terme convectif. Les bords ne posent pas de problème dans les directions $\vec{y}$ et $\vec{z}$ puisque nous utilisons l'hypothèse de périodicité. Par contre, pour la direction $\vec{x}$, on définit pour les points en $i = 2$ et $i = n_x - 1$:

$$\left(u_x\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{n_x-1}=\begin{cases} u_{n_x-1}\frac{2f_{n_x}+3f_{n_x-1}-6f_{n_x-2}+f_{n_x-3}}{6\Delta x} & \text{si } u_{n_x-1}>0 \\ u_{n_x-1}\frac{f_{n_x}-f_{n_x-1}}{\Delta x} & \text{si } u_{n_x-1}<0 \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\left(u_x \frac{\partial f}{\partial x}\right)_2 = \begin{cases} u_2 \frac{f_2 - f_1}{\Delta x} & \text{si } u_2 > 0 \\ u_2 \frac{-f_4 + 6f_3 - 6f_2 - 2f_1}{6\Delta x} & \text{si } u_2 < 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Et pour $i = n_x$,

$$\left(u_x \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{n_x} = u_{n_x} \frac{f_{n_x} - f_{n_x - 1}}{\Delta x}. \tag{5.9}$$

Avant de valider la résolution de l'équation de transport d'un scalaire passif sur un cas de jet plan, nous allons détailler les conditions aux limites nécessaires à cette équation.

Conditions aux limites

Condition d'entrée En entrée, nous introduisons le traceur soit dans le jet central, soit dans le jet annulaire. Le profil initial de la fraction de mélange est ainsi défini par une fonction en tangentes hyperboliques comme pour la vitesse longitudinale. En entrée, on a donc :

$$f(x = 0, r, t) = \begin{cases} \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{f_1 - f_2}{2} \tanh\left(\frac{r - R_1}{2\theta_{01}}\right) & \text{pour } r < R_m \\ \\ \frac{f_2}{2} + \frac{f_2}{2} \tanh\left(\frac{r - R_2}{2\theta_{02}}\right) & \text{pour } r > R_m \end{cases} \tag{5.10}$$

Les profils sont définis à l'aide des épaisseurs initiales de quantité de mouvement θ_{01} et θ_{02}. Dans le cas où le traceur est introduit dans le jet annulaire, on fixe : $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$ et si le traceur est introduit dans le jet central, on fixe : $f_1 = 1$ et $f_2 = 0$. Le fluide ambiant (co-courant) est dans tous les cas dépourvu de traceur.

Condition de sortie En sortie, on résout l'équation (5.1) directement. Le seul point particulier est dans la discrétisation de $\partial^2 f / \partial x$, où nous utilisons :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x}\right)_{n_x} = \frac{5f_{n_x} - 12f_{n_x - 1} + 8f_{n_x - 2} - 1f_{n_x - 3}}{12\Delta x^2}. \tag{5.11}$$

5.1.2 Validation dans le cas d'un jet plan

Afin de s'assurer que la procédure que nous avons mise en place pour l'étude du mélange est valable, nous avons réalisé une simulation de jet plan dont nous allons comparer les résultats à la SND de Stanley *et al.* [139]. Le jet plan que nous simulons correspond à une des SND de da Silva et Métais [135] qui a déjà été validée en ce qui concerne la dynamique.

Configuration du jet plan

Le jet plan a les mêmes paramètres que celui de Stanley *et al.* [139] ou celui noté DNS1 de da Silva et Métais [135]. Le domaine de calcul comporte $310 \times 300 \times 72$ points couvrant un domaine d'une taille de $12,4h \times 12h \times 2,9h$ dans les directions x, y et z respectivement. La largeur de la buse d'éjection est de h. Le profil initial de vitesse est donné par

$$U(x = 0, y, z) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{h}{4\theta_0}\left(1 - \frac{2|y|}{h}\right)\right), \tag{5.12}$$

où θ_0 est l'épaisseur initiale de quantité de mouvement du jet plan, U_1 est la vitesse au centre du jet et U_2 est la faible vitesse du co-courant ($U_2/U_1 \approx 0.08$). Le traceur est placé en entrée dans le jet plan avec un profil similaire. Précisons, enfin, que le nombre de Reynolds de l'écoulement est $Re_h = (U_1 - U_2)h/\nu = 3000$. L'ensemble des détails de cette simulation est donné par da Silva et Métais [135].

Comparaison

Il ne s'agit pas de traiter la physique de l'écoulement en jet plan dans ce paragraphe (voir Stanley *et al.* [139] et da Silva et Métais [135] pour cela), mais seulement de valider la résolution de l'équation de transport du scalaire passif avant d'étudier le mélange dans les jets coaxiaux. Nous allons nous concentrer uniquement sur la comparaison entre les résultats de notre simulation et ceux de la SND de Stanley *et al.* [139]. La SND de Stanley *et al.* [139] a été validée sur les résultats expérimentaux de Davies *et al.* [35] ou encore Ramaprian et Chandrasekhara [121].

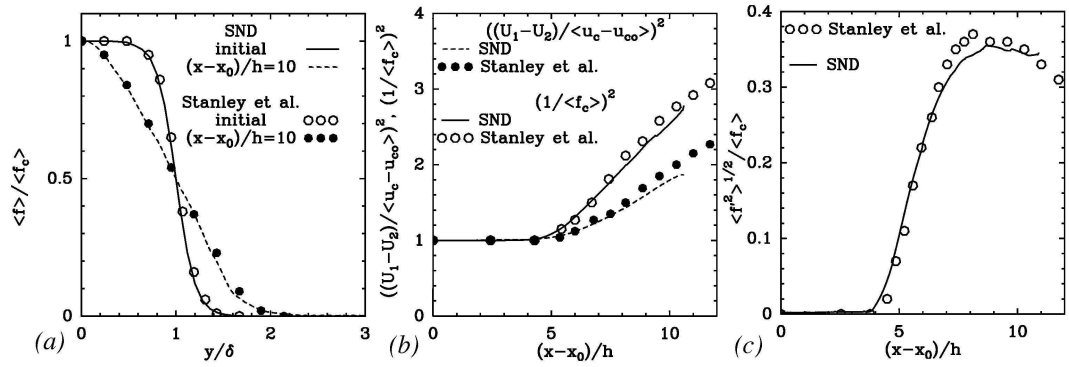


FIG. 5.1 – Comparaison des résultats de jet plan concernant la fraction de mélange avec la simulation numérique directe de Stanley *et al.* [139]. *(a)* Profils de la fraction de mélange moyenne initiale et en $(x-x_0)/h = 10$. *(b)* Evolution longitudinale de $((U_1 - U_2)/\langle u_c - u_{co}\rangle)^2$ et $(1/\langle f_c\rangle)^2$ le long du centre du jet. *(c)* Evolution longitudinale de l'écart-type de fraction de mélange le long du centre du jet. Sur ces figures, $\langle f_c\rangle$ est la fraction de mélange moyenne au centre du jet, $\langle u_c\rangle$ est la vitesse longitudinale moyenne au centre du jet et u_{co} est la vitesse du co-courant. De plus, δ_f est l'épaisseur de la fraction de mélange telle que $\langle f\rangle(x, r = \delta_f) = 1/2\langle f_c\rangle(x)$.

La figure 5.1 compare les quantités statistiques liées au processus de mélange. Le jet plan de Stanley *et al.* [139] est forcé à la fréquence du mode fondamental. Nous avons alors pris en compte une origine virtuelle x_0 de l'ordre de $1,5h$ afin de permettre une meilleure comparaison. Une excellente correspondance entre les résultats de nos simulations et ceux de Stanley *et al.* [139] est obtenue. L'auto-similitude du profil moyen de la fraction de mélange apparaît aux environs de $(x-x_0)/h \approx 10$ dans les deux cas (Fig.5.1 *(a)*). De plus, l'évolution de la fraction de mélange moyenne le long de la ligne centrale, notée $\langle f_c\rangle(x)$ a bien un comportement en $\langle f_c\rangle(x) \propto x^{-1/2}$ au-delà du cône potentiel (Fig.5.1 *(b)*) et nous retrouvons les mêmes coefficients que ceux de Stanley *et al.* [139] : $(1/\langle f_c\rangle)^2 = 0,308\,((x-x_0)/h - 1,48)$. Une bonne correspondance est également obtenue pour l'écart-type de fraction de mélange, on retrouve la croissance brutale de $\langle f'^2\rangle^{1/2}$ au-delà du cône potentiel (Fig.5.1 *(c)*).

Pour affiner cette validation, nous pouvons comparer les fonctions de densité de probabilité. Les fonctions de densité de probabilité, notées DDP (ou PDF pour *probability density function*),

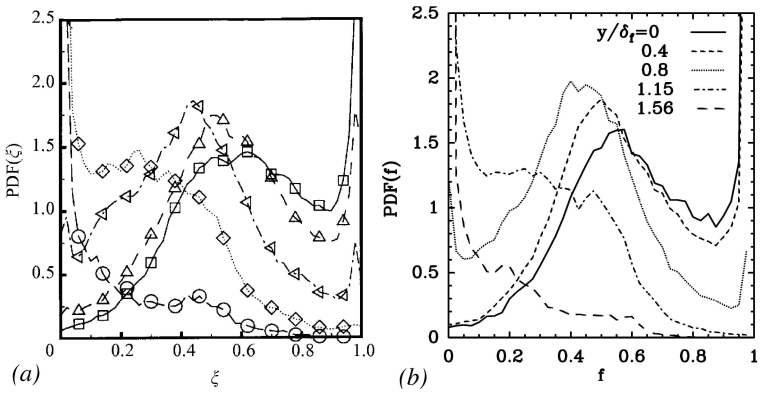


FIG. 5.2 – Fonctions de densité de probabilité dans le cas du jet plan en $(x - x_0)/h = 9$. *(a)* Jet plan de Stanley *et al.* [139] : $\square$, $y/\delta_f = 0$; $\triangle$, $y/\delta_f = 0,41$; $\triangleleft$, $y/\delta_f = 0,78$; $\Diamond$, $y/\delta_f = 1,15$; $\bigcirc$, $y/\delta_f = 1,56$. *(b)* Jet plan issu de notre SND.

sont définies par

$$\mathrm{DDP}(f_1) = \frac{PROB(f_1 \leq f < f_1 + \mathrm{d}f_1)}{\mathrm{d}f_1}, \tag{5.13}$$

où $PROB(f_1 \leq f < f_1 + df_1)$ est la probabilité (comprise entre 0 et 1) que la fraction de mélange soit comprise entre f_1 et $f_1 + \mathrm{d}f_1$. On peut noter que par définition,

$$\int_0^1 \mathrm{DDP}(f_1)\mathrm{d}f_1 = 1 \tag{5.14}$$

La figure 5.2 compare les DDP en $(x - x_0)/h = 9$, c'est-à-dire juste avant que la fraction de mélange ait un comportement auto-similaire. Ces DDP sont relevées en différentes localisations radiales de la couche cisaillée du jet. Les DDP de notre simulation et celles obtenues par Stanley *et al.* [139] sont très similaires. Par exemple, nous retrouvons la forte probabilité de trouver du traceur pur ($f = 1$) au centre du jet. Nous reviendrons plus en détails sur les interprétations de ces quantités lorsque nous caractériserons le mélange dans la configuration des jets coaxiaux dans la suite de ce chapitre.

Finalement, nous avons retrouvé des résultats très proches de ceux de Stanley *et al.* [139] pour l'ensemble des quantités liées au processus de mélange. Cela valide donc notre résolution de l'équation de transport du scalaire passif introduit précédemment. Nous allons pouvoir nous concentrer sur l'étude du mélange dans le cas des jets coaxiaux.

5.2 Mélange dans les jets coaxiaux - Cas de référence

Dans cette section nous allons étudier les mécanismes de mélange prenant place dans les jets coaxiaux. Le jet étudié correspond à la simulation SND2_5 du chapitre précédent et le traceur est introduit au niveau du jet extérieur. La fraction de mélange, modélisée par un scalaire passif f, a un profil initial tel que $f = 1$ dans le courant annulaire et $f = 0$ dans le jet intérieur et dans le co-courant.

Les contours instantanés de la fraction de mélange dans le plan central du jet (Fig.5.3 *(a)*) donnent une première illustration qualitative du mélange. Proche de la buse de sortie jusqu'à $x/D_1 = 5$, les perturbations sont faibles et le mélange entre les espèces du jet annulaire et du

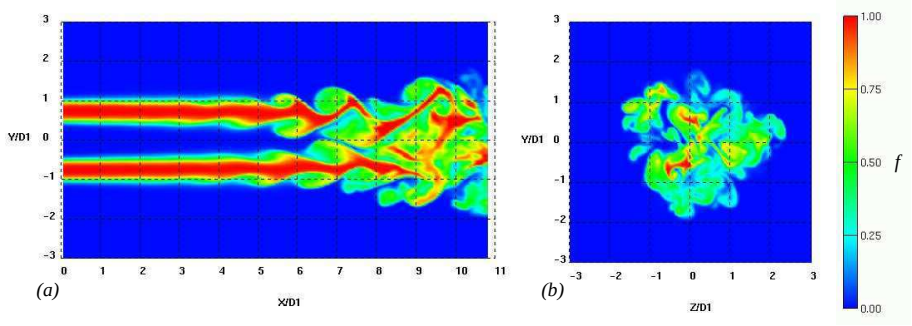


FIG. 5.3 – Contours instantanés de la fraction de mélange *(a)* dans le plan central du jet et *(b)* dans une section transverse à $x/D_1 = 10$. f varie de 0 (en bleu) à 1 (en rouge) suivant l'échelle de couleur montrée sur la figure.

jet central, ainsi qu'entre les espèces du jet annulaire et du fluide ambiant, est principalement dû à la diffusion moléculaire. La région où la diffusion moléculaire domine est étendue du fait que le nombre de Reynolds des simulations est modéré et que nous utilisons un bruit de faible amplitude pour permettre le développement naturel des instabilités au niveau des couches cisaillées. Au-delà de $x/D_1 = 5$, le mélange turbulent est initié par l'émergence de tourbillons cohérents. Finalement, à la fin du domaine de calcul (au-delà de $x/D_1 \approx 10$), la turbulence au niveau de petites-échelles permet un mélange turbulent plus intense comme l'illustre la figure 5.3 *(b)*. La figure 5.4 montre l'isosurface de la fraction de mélange $f = 0,5$. C'est un bon

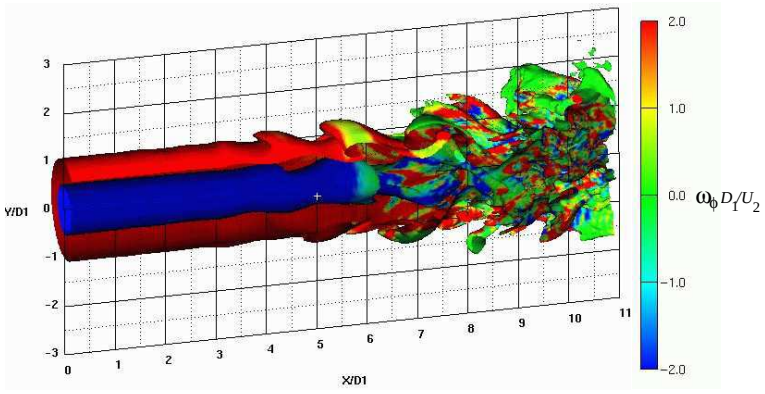


FIG. 5.4 – Isosurface de la fraction de mélange $f = 0,5$ colorée par la vorticité tangentielle. Une partie de la couche de mélange extérieure a été artificiellement coupée afin de voir la couche de mélange intérieure.

indicateur de la qualité d'un mélange turbulent. De plus, la caractérisation géométrique des surfaces où les espèces sont en proportions égales est importante pour la compréhension des processus de combustion, par exemple. La figure montre que l'isosurface se déforme après l'amplification des instabilités du jet. Cette isosurface met en évidence les structures à grande échelle de l'écoulement. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz intérieurs et extérieurs s'étant intensifiés au-delà de $x/D_1 \approx 4$, ils transportent avec eux les espèces favorisant le transfert radial de f de chaque côté des couches cisaillées. Dans la figure 5.4, les isosurfaces sont colorées par la vorticité tangentielle (comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent pour distinguer les structures

cohérentes intérieures et extérieures). On voit ainsi que les isosurfaces ont deux formes distinctes : jusqu'à $x/D_1 \approx 7$, les deux isosurfaces (correspondant aux couches cisaillées intérieure et extérieure) sont complètement dissociées alors qu'au-delà de $x/D_1 \approx 7$, elles ont fusionné et on ne peut plus distinguer une couche de mélange extérieure et une couche de mélange intérieure. Cela montre une interpénétration des espèces issues de chaque jet. C'est une conséquence de la tridimensionalisation du jet due à l'émergence des tourbillons longitudinaux. Ces tourbillons qui apparaissent par paires contra-rotatives permettent l'éjection du traceur (issu du jet annulaire) dans le jet central et dans le fluide ambiant. La figure 5.5 illustre ce mécanisme d'éjection où

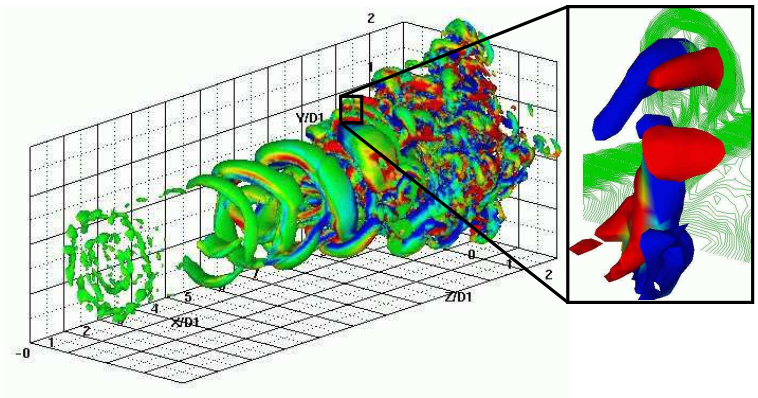


FIG. 5.5 – Illustration des éjections de traceur (en vert sur le zoom) par les tourbillons longitudinaux contra-rotatifs qui sont illustrés par une isosurface de $Q = (U_2/D_1)^2$ et colorés en bleu et rouge selon leur sens de rotation (coloration par la vorticité longitudinale).

le traceur est "pompé" du jet annulaire pour être éjecté dans le fluide ambiant. Ce mécanisme conduit le traceur à des forme en "champignon" pour des vues dans des plans transverses. Des animations (voir anim51.mpg) montrant le traceur dans le plan central et dans différents plans transverses, révèlent que la spécificité intermittente du mélange turbulent lors de la transition provient d'une combinaison de pulsation radiale due aux anneaux de Kelvin-Helmholtz et de ces structures en "champignon" qui caractérisent le phénomène d'éjection impliqué par les tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. L'animation et la figure 5.3 *(b)* montrent également que d'importantes quantités de traceur pur (et donc de fluide non mélangé) persistent sous forme de "poches" à la fin du domaine de calcul, dans la région de turbulence pleinement développée.

La figure 5.6 montre l'évolution de la fraction de mélange moyenne dans la direction longitudinale *(a)* et pour différentes sections transverses *(b)*. Jusqu'à $x/D_1 = 5$, la fraction de mélange dans le jet central et dans le jet annulaire garde sa valeur initiale : $\langle f \rangle = 0$ et $\langle f \rangle = 1$, respectivement. De plus, les profils de la fraction de mélange moyenne montrent que les couches de mélange interne et externe s'épaississent faiblement. Ce comportement est dû à la diffusion moléculaire qui permet un faible mélange radial des espèces. Au-delà de $x/D_1 = 5$, le traceur diffuse de façon plus importante sous l'action des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Le fort transfert de quantité de mouvement discuté au chapitre précédent permet une forte invasion du traceur issu du jet annulaire vers le centre du jet et vers le fluide ambiant. Cela impliquera un confinement du fluide issu du jet central comme nous le verrons par la suite en plaçant le traceur dans le jet central. A cause de l'entraînement du fluide impliqué par l'émergence des tourbillons de Kelvin-Helmholtz, la fraction de mélange moyenne diminue dans le jet annulaire et augmente dans le jet central (Fig.5.6 *(a)*). Cependant, l'augmentation de $\langle f \rangle$ dans le jet central est plus importante que la diminution de $\langle f \rangle$ dans le jet annulaire montrant ainsi que les quantités de traceur envahissant

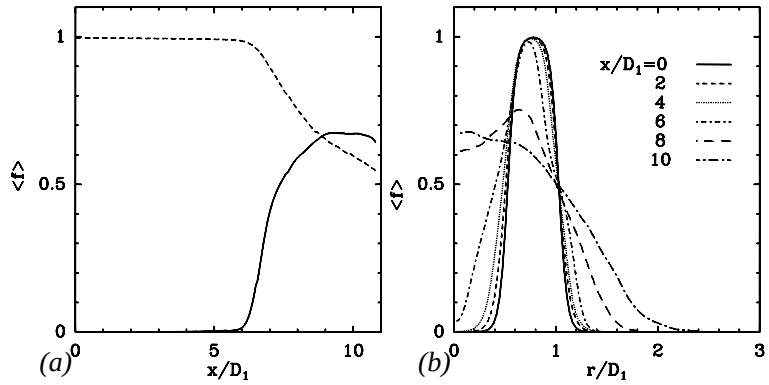


FIG. 5.6 – Fraction de mélange moyenne. *(a)* Evolution longitudinale dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée). *(b)* Profil à différentes localisations axiales.

le jet central sont plus importantes que les quantités de fluide pur (sans traceur) envahissant le jet annulaire. L'écart-type de fraction de mélange est illustré par les figures 5.7 *(a)* et *(b)*. Au

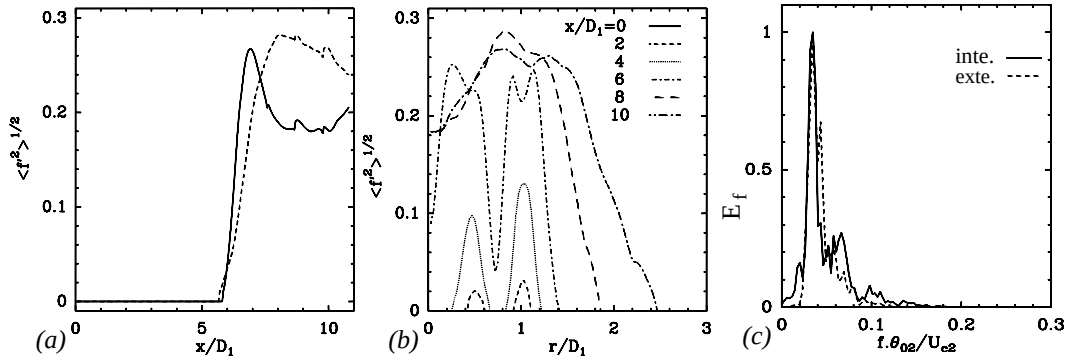


FIG. 5.7 – Fluctuations de la fraction de mélange. *(a)* Evolution longitudinale dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée). *(b)* Profil à différentes localisations axiales. *(c)* Spectres des fréquences calculées à partir du signal de f dans le champ proche du jet au niveau des couches cisaillées interne et externe.

début du jet, les profils de $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ montrent deux pics distincts localisés au niveau des couches cisaillées interne et externe, respectivement. Ces deux pics sont la signature des anneaux tourbillonnaires qui initient le mélange turbulent dans les jets coaxiaux. Proche de l'entrée de la buse, les fréquences calculées à partir du signal de f dans chacune des couches cisaillées sont égales en raison du phénomène de blocage discuté dans le chapitre précédent (Fig.5.7 *(c)*). De plus, les figures 5.7 *(a)* et *(b)* montrent que le mélange turbulent devient important au-delà de $x/D_1 = 6$ c'est-à-dire au moment de l'émergence des tourbillons longitudinaux. On peut noter que le pic d'écart-type de fraction de mélange au niveau du jet central correspond à la région où le traceur finit par envahir le centre du jet. C'est une région d'intense mélange turbulent. Enfin, au-delà de $x/D_1 = 8$, la figure 5.6 *(b)* montre que la fraction de mélange moyenne est maximale au centre du jet. De grandes quantités de traceur ont ainsi envahi le centre du jet et les couches de mélange externe et interne ont fusionné conduisant à la création d'une seule couche de mélange similaire à un jet rond simple. Cependant, pour les profils de l'écart-type

de fraction de mélange, un pic au niveau du jet extérieur persiste dans cette région. C'est une conséquence de la domination du jet extérieur dans la dynamique des jets coaxiaux.

Afin de caractériser le développement du processus de mélange dans les jets coaxiaux, il est intéressant d'étudier les fonctions de densité de probabilité en différents points du jet. Les fonctions de densité de probabilité DDP ont été définies par l'équation (5.13) lors du paragraphe de validation (section 5.1.2). Les densités de probabilité de la fraction de mélange pour trois

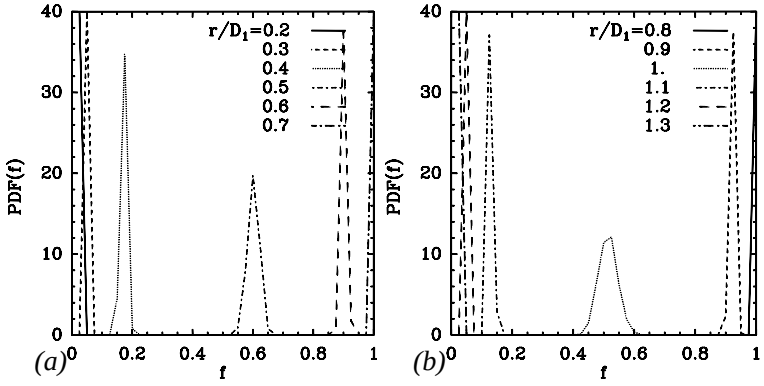


FIG. 5.8 – Fonctions de densité de probabilité au niveau des couches de mélange interne *(a)* et externe *(b)* en $x/D_1 = 2$.

localisations axiales couvrant les différentes étapes de la transition sont montrées par les trois figures suivantes. Tout d'abord, la figure 5.8 montre les DDP dans les couches cisaillées intérieure *(a)* et extérieure *(b)* en $x/D_1 = 2$. Il y a une très faible probabilité de trouver une valeur de f différente de la valeur moyenne car dans cette région du jet, il n'y a pas encore de mélange turbulent. Il sera par la suite intéressant de comparer cette figure à des DDP de jet de conditions initiales différentes. Les figure 5.9 *(a)* et *(b)* illustrent les DDP au niveau des couches de mélange

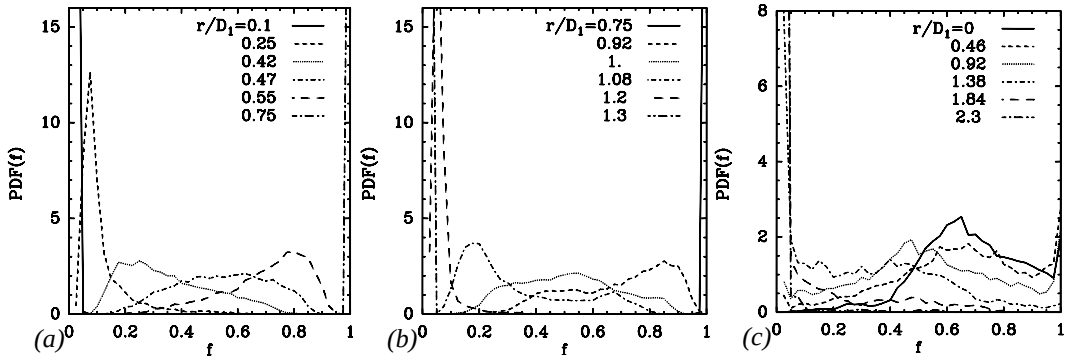


FIG. 5.9 – Fonctions de densité de probabilité au niveau des couches de mélange interne *(a)* et externe *(b)* en $x/D_1 = 5$. *(c)* Fonctions de densité de probabilité au niveau de la seule couche de mélange existante en $x/D_1 = 10$.

en $x/D_1 = 5$. Pour chaque position radiale, il existe une large gamme où la probabilité de trouver une valeur donnée de la fraction de mélange est non nulle. Ceci est dû à la périodicité du processus de mélange turbulent lié à la fréquence d'apparition des tourbillons de Kelvin-Helmholtz au niveau des deux couches cisaillées. Dans cette région, le mélange entre les espèces n'est pas

distribué de façon homogène à l'intérieur des structures à grandes échelles. A $x/D_1 = 10$, les deux couches cisaillées ont fusionné en une seule comme nous l'avons vu précédemment. La figure 5.9 *(c)* montre les DDP au niveau de cette unique couche de mélange. Dans cette région de l'écoulement, les DDP sont de type "non-marching". Le type "non-marching" est caractérisé par des valeurs les plus probables de la fraction de mélange quasi indépendantes de la position radiale à travers la couche cisaillée. Ce type de DDP s'oppose au type "marching" qui est caractérisé par des valeurs les plus probables de f correspondantes aux valeurs moyennes de la fraction de mélange pour chaque position radiale. Pickett et Gandhi [117] ont montré que des DDP de type "non-marching" étaient produites par la persistance d'un mélange au niveau des grandes échelles alors que les DDP de type "marching" étaient la signature d'un mélange petite échelle. Dans cette configuration d'écoulement, l'activité de mélange turbulent reste importante et le mélange n'est pas encore homogène à la fin du domaine de calcul (où l'état de turbulence pleinement développée est atteint). Cela se traduit entre autres par la persistance de traceur non mélangé au centre du jet. C'est ce qu'illustrent les DDP en $r/D_1 = 0$, $r/D_1 = 0,46$ et $r/D_1 = 0,92$ avec des probabilités non nulles de trouver $f = 1$. La suite de ce chapitre se concentrera sur des modifications des conditions d'entrée du jet afin d'obtenir un mélange plus homogène à la fin du domaine de calcul.

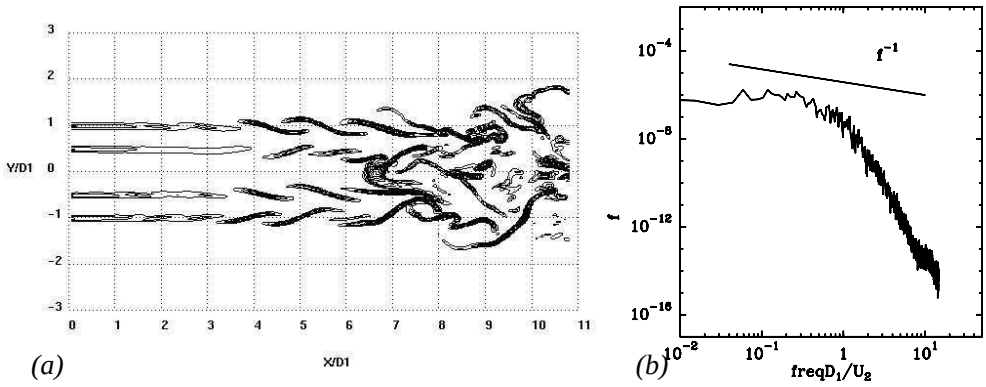


FIG. 5.10 – *(a)* Champ instantané de la dissipation de la fraction de mélange dans le plan central du jet. *(b)* Spectre de fréquences du signal de la fraction de mélange en $x/D_1 = 10$.

Pour conclure cette section, la figure 5.10 *(a)* montre un champ instantané de la dissipation de la fraction de mélange. Les régions d'intense dissipation scalaire sont structurées en nappe et localisées au niveau des limites des tourbillons cohérents comme l'avait noté précédemment Buch et Dahm [13] dans les écoulements cisaillés turbulents. Cela confirme la nature intermittente du scalaire passif comme l'avait observé précédemment Métais et Lesieur [108] en turbulence isotrope. En effet, Métais et Lesieur [108] avaient montré que l'activité du scalaire était concentrée au niveau des nappes entre les tourbillons cohérents en accord avec nos observations. De plus, Lesieur et Rogallo [99] et Métais et Lesieur [108] observèrent que l'intermittence du scalaire était associée à une loi de puissance en k^{-1} (où k est un nombre d'onde) pour le spectre de la variance scalaire. Lesieur et Rogallo [99] proposent d'interpréter ce comportement spectral comme le résultat de l'étirement par les gradients de vitesse grandes échelles. En supposant que les grandes échelles sont associées à un nombre d'onde k_i donné et en utilisant un raisonnement similaire à la théorie d'Oboukhov (voir par exemple Lesieur [96]), on peut écrire

$$\epsilon_f \sim kE_f(k,t)/\tau(k_i). \tag{5.15}$$

Dans l'équation (5.15), $E_f(k,t)$ est le spectre de la variance scalaire et $\tau(k_i)$ est le temps caractéristique de k_i. On obtient

$$E_f(k,t) \sim \epsilon_f \tau(k_i) k^{-1}. \tag{5.16}$$

Lesieur et Rogallo [99] observent une loi de puissance en k^{-1} au voisinage de k_i pour $k > k_i$ correspondant à leur prédiction théorique (Eq.(5.16)). Ce comportement est confirmé par la figure 5.10 *(b)* qui montre que le spectre de fréquences du signal temporel de la fraction de mélange est en k^{-1} au niveau des grandes échelles[1]. Villermaux et Rehab [149] trouvent également un comportement en k^{-1} sur leurs spectres dans le cas de jets coaxiaux et ils l'expliquent également par la persistance de l'étirement dû aux grandes échelles. Le spectre de la variance scalaire suit ensuite une loi en $k^{-5/3}$ comme la donne le spectre de Corrsin-Oboukhov (voir par exemple [96]). On peut toutefois noter qu'un travail expérimental récent [148] a montré que la loi en k^{-1} débutait au voisinage de k_d et pour $k > k_d$ où k_d est le nombre d'onde de l'échelle d'injection du scalaire dans l'écoulement (qui correspond à k_i dans notre cas). Il semblerait possible que le spectre en $k^{-5/3}$ soit "court-circuité" par la loi en k^{-1}.

5.3 Influence des conditions d'entrée

Dans cette partie, nous réalisons des simulations numériques directes de jets coaxiaux afin d'étudier l'influence des conditions d'entrée du jet sur le processus de mélange. Chacune des nouvelles simulations varie d'un paramètre initial par rapport au cas pris comme référence et présenté dans la partie précédente. Les modifications du processus de mélange sont alors expliquées par les modifications sur la dynamique des structures tourbillonnaires entraînées par les différentes configurations d'entrée.

5.3.1 Traceur introduit dans le jet interne

Dans cette partie, nous allons étudier les modifications sur le processus de mélange dans le cas où le traceur est introduit initialement dans le jet central et où le reste de l'écoulement (jet annulaire et fluide ambiant) contient du fluide sans traceur. Les paramètres dynamiques du fluide restent inchangés (correspondant toujours à la simulation SND2_5) et le profil initial de la fraction de mélange est tel que $f = 1$ dans le jet central et $f = 0$ dans le reste du domaine. La figure 5.11 donne une image globale du mélange dans cette configuration. Comme précédemment, il y a une région initiale importante dominée par la diffusion moléculaire. Puis, l'apparition des tourbillons de Kelvin-Helmholtz initie le mélange turbulent. Dans cette configuration, seuls les tourbillons internes participent au mélange. En effet, les tourbillons extérieurs sont entourés uniquement de fluide dépourvu de traceur ($f = 0$ de chaque côté de la couche cisaillée extérieure). Cette étape est suivie de l'émergence des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs qui éjectent les espèces comme le montre l'animation "anim52.mpg". Cependant, la figure 5.11 montre un confinement du traceur au centre du jet. L'isosurface de $f = 0,5$ est montrée à la figure 5.12. Comme dans le cas précédent, l'isosurface se déforme avec l'amplification des instabilités au début de la transition. Mais, au-delà de $x/D_1 = 6$, cette isosurface reste fortement confinée. Les animations révèlent que le traceur passe par paquets dans cette région. C'est une conséquence de la domination des structures tourbillonnaires extérieures. En effet, ces structures ne participent pas directement au processus de mélange puisqu'elles ne transportent pas le traceur. Cependant,

[1] Cette loi en k^{-1} ne doit pas être confondu avec la loi en k^{-1} de la zone "visqueuse-convective" proposé par Batchelor [6]. En effet, cette dernière est au niveau des petites échelles et n'existe que pour des nombres de Schmidt grands devant l'unité (voir Lesieur [96]).

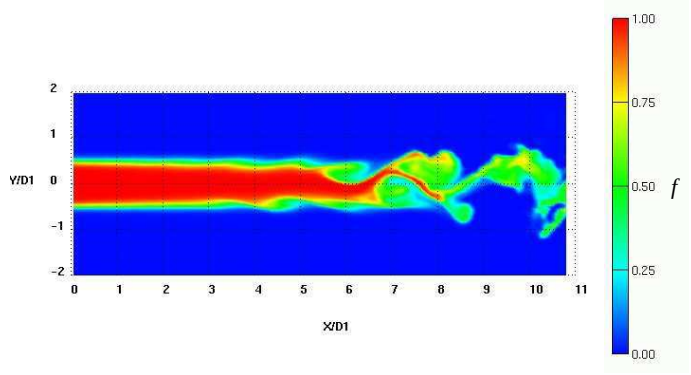


FIG. 5.11 – Contours instantanées de la fraction de mélange dans le plan central du jet. f varie de 0 (en bleu) à 1 (en rouge) suivant l'échelle de couleur montrée sur la figure.

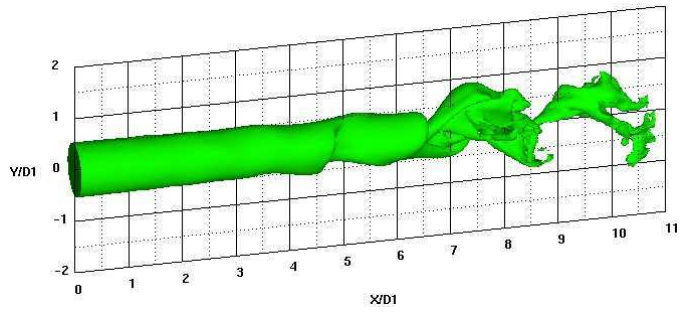


FIG. 5.12 – Isosurface de la fraction de mélange $f = 0,5$.

elles empêchent le développement radial des structures internes et donc la diffusion radiale du traceur.

Ces observations qualitatives basées sur des visualisations instantanées sont corroborées par les statistiques. Les figures 5.13 *(a)* et *(b)* montrent l'évolution de la fraction de mélange moyenne. Au niveau du jet central, la fraction de mélange moyenne garde sa valeur initiale ($\langle f \rangle = 1$) avant de connaître une forte décroissance après $x/D_1 = 6$ alors que $\langle f \rangle$ reste faible tout le long de la transition au niveau du jet extérieur. Les profils de la fraction de mélange moyenne en différentes sections montrent que la majorité du mélange reste limitée au jet central ($0 < r/D_1 < 0,75$). Seulement une très faible quantité de traceur se retrouve dans le jet annulaire et la diffusion radiale du traceur n'atteint jamais le fluide ambiant. Le mélange ne profite pas de l'intense activité turbulente au niveau du jet extérieur. A la fin du domaine de calcul, les fluctuations de la fraction de mélange restent localisées dans le centre du jet et leur intensité reste plus faible que dans le cas précédent où le traceur était issu du jet annulaire (Fig.5.13 *(c)* comparé à Fig.5.7 *(b)*).

Afin de conclure cette partie, nous allons examiner les DDP de cette configuration. La figure 5.14 *(a)* montre les DDP en $x/D_1 = 5$ avant que le jet ne soit en état de turbulence pleinement développée. Comme dans la configuration étudiée précédemment, au niveau du centre de la couche cisaillée[2] ($r/D_1 = 0,44$), la probabilité de trouver une valeur de f dans une gamme

[2]Dans cette configuration, seule la couche cisaillée intérieure est prise en compte étant donné que la couche cisaillée extérieure n'est entourée que de fluide dépourvu de traceur.

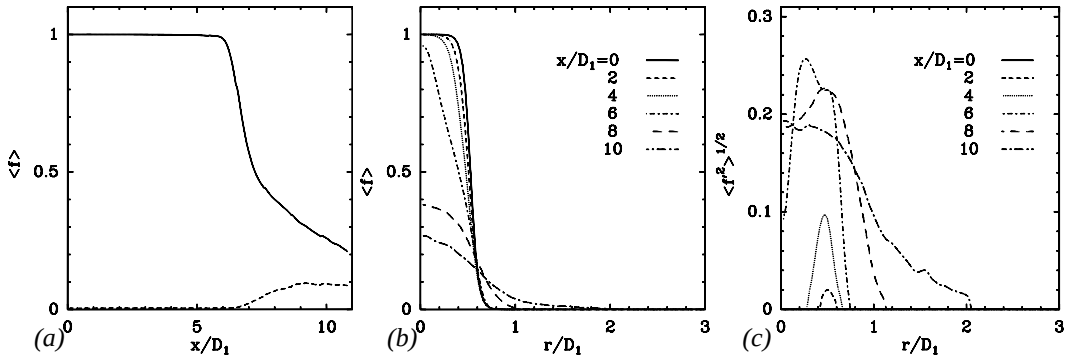


FIG. 5.13 – Fraction de mélange moyenne : *(a)* évolution longitudinale dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée) ; *(b)* profils à différentes localisations axiales. *(c)* Profils de l'écart-type de fraction de mélange à différentes localisations axiales.

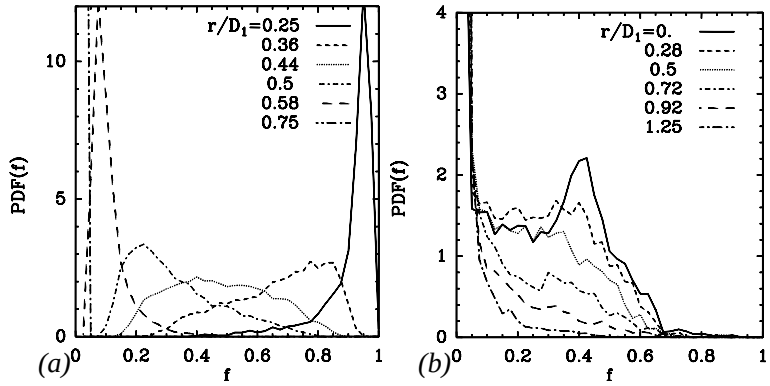


FIG. 5.14 – *(a)* Fonctions de densité de probabilité au niveau de la couche de mélange externe en $x/D_1 = 5$. *(b)* Fonctions de densité de probabilité au niveau de la seule couche de mélange existante en $x/D_1 = 10$.

allant de $0,2$ à $0,7$ est pratiquement la même. Cela montre que le traceur n'est pas distribué de façon homogène dans les tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Les DDP en $x/D_1 = 10$ (Fig.5.14 *(b)*) sont très différentes du cas précédent. Tout d'abord, il y a une probabilité importante de trouver la fraction de mélange entre 0 et $0,4$ pour des positions radiales proches du centre. Ceci vient du fait que le traceur passe par paquet dans cette configuration comme l'illustrent les animations. En conséquence, le mélange est encore fortement tributaire des mouvements à grande échelle, ce que traduit le type "non-marching" des DDP. Enfin, il est intéressant de noter que la probabilité de trouver $f > 0,7$ est nulle dans cette région de l'écoulement, ce qui montre que le traceur est totalement mélangé. De plus, au-delà de $r/D_1 = 1,25$, il n'y a que du fluide pur (sans traceur) dû au confinement du jet central.

5.3.2 Jets coaxiaux avec bulle de recirculation

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence de la bulle de recirculation sur le processus de mélange. Pour cela, nous avons réalisé un jet coaxial de paramètres similaires au cas de référence mais où le rapport de vitesse est de 17 ce qui est supérieur au rapport de vitesse critique r_{uc}.

Les paramètres dynamiques du jet correspondent donc au cas SND2_17 du chapitre précédent. Dans ces conditions, une bulle de recirculation apparaît entre $x/D_1 \approx 1,5$ et $x/D_1 = 3,5$. Le traceur est initialement placé dans le jet annulaire comme dans le cas de référence.

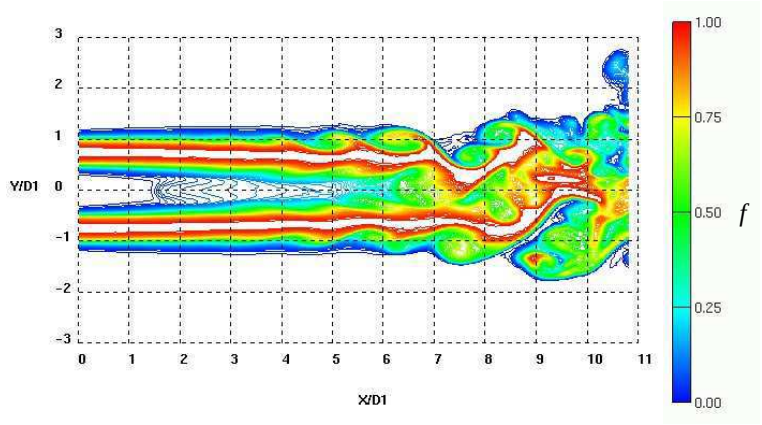


FIG. 5.15 – Contours instantanées de la fraction de mélange dans le plan central du jet. f varie de 0 (en bleu) à 1 (en rouge) suivant l'échelle de couleur montré sur la figure.

La figure 5.15 montre les isolignes instantanées de la fraction de mélange dans le plan central du jet. Les premières modifications du processus de mélange dues à la bulle de recirculation y sont observables. Le traceur envahit le centre du jet plus tôt, dès $x/D_1 = 1,5$, alors que dans le cas de référence le centre du jet est dépourvu de traceur jusqu'à $x/D_1 = 6$. Ceci est directement dû au phénomène d'entraînement qui crée l'écoulement de retour allant du jet annulaire (où se trouve le traceur) vers le centre du jet. La figure 5.16 montre l'isosurface $f = 0,5$ qui est déformée

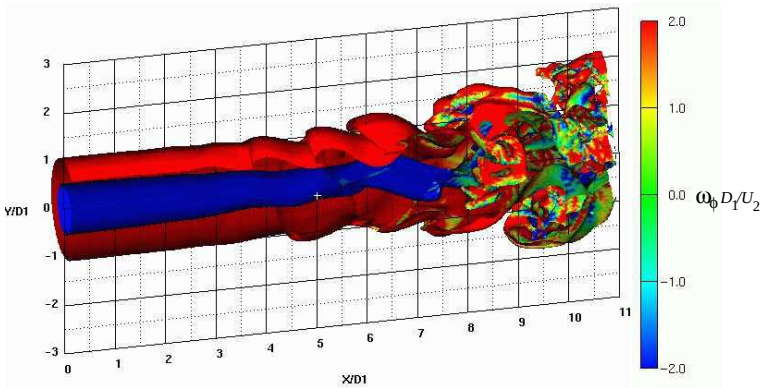


FIG. 5.16 – Isosurface de la fraction de mélange $f = 0,5$ colorée par la vorticité tangentielle. Une partie de la couche de mélange extérieure a été artificiellement coupée afin de voir la couche de mélange intérieure.

suivant la croissance des tourbillons de Kelvin-Helmholtz comme dans les cas précédents. Les deux isosurfaces correspondant respectivement aux couches de mélange intérieure et extérieure sont fortement distinctes dans le début de la transition, mais la section de l'isosurface interne commence à diminuer à partir de $x/D_1 = 3$. Ceci est dû au phénomène de pincement du centre du jet par le jet annulaire, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Ce phénomène

est plus prononcé pour des valeurs importantes de r_u et ainsi, l'isosurface interne est de forme plus conique.

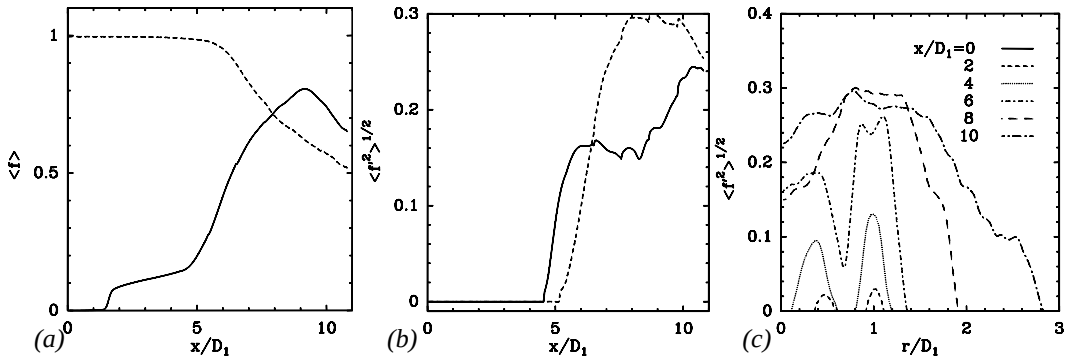


FIG. 5.17 – *(a)* Evolution longitudinale de la fraction de mélange moyenne dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée). *(b)* Evolution longitudinale de l'écart-type de fraction de mélange dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée). *(c)* Profils radiaux de l'écart-type de fraction de mélange à différentes sections du jet.

L'évolution longitudinale de $\langle f \rangle$ (Fig.5.17 *(a)*) confirme que la bulle de recirculation permet une invasion du traceur au centre du jet dès $x/D_1 = 1,5$. La valeur de la fraction de mélange moyenne est de l'ordre de $0,1$ dans la bulle de recirculation puis augmente fortement à la suite de cette dernière. L'augmentation brutale de $\langle f \rangle$ le long de la ligne centrale débute à $x/D_1 = 5$ au lieu de $x/D_1 = 6$ dans le cas de référence. L'écart-type de fraction de mélange confirment ce comportement puisque $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ croît brutalement juste après la bulle de recirculation ($x/D_1 \approx 4$) soit presque $2D_1$ plus tôt que dans le cas de référence. Ceci vient de la bulle de recirculation qui est une région de production d'intenses tourbillons longitudinaux comme nous l'avons dit dans le chapitre précédent. Le développement précoce de tourbillons longitudinaux intérieurs renforce le mélange turbulent au centre du jet mais également au niveau du jet extérieur puisque $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ croît autour de $x/D_1 = 5$ au lieu de $x/D_1 = 6$ dans la configuration de référence. Le fait que le mélange turbulent se déclenche plus tôt lors de la transition permettra d'avoir une zone de mélange plus étendue à la fin du domaine de calcul : jusqu'à $r/D_1 \approx 2,8$ au lieu de $r/D_1 \approx 2,4$ (comme le montre la comparaison des figures 5.17 *(c)* et 5.7 *(b)*).

La figure 5.18 *(a)* montre les DDP au niveau de la couche cisaillée intérieure en $x/D_1 = 2$. Le centre du jet est déjà légèrement envahi de traceur comme nous l'avons déjà dit. Cependant, le mélange est exclusivement dû à la diffusion moléculaire au voisinage de la bulle (qui est laminaire dans cette configuration d'écoulement comme nous l'avons vu au chapitre précédent). En $x/D_1 = 5$, le centre du jet reste dominé par la diffusion moléculaire, montrant que l'étirement longitudinal n'a pas encore déstabilisé suffisamment le centre du jet. Il est également intéressant de noter que le resserrement de la couche de mélange interne est visible sur les DDP puisque la DDP en $r/D_1 = 0,44$ dans cette configuration est similaire à la DDP en $r/D_1 = 0,55$ dans la configuration de référence. Enfin, les DDP en $x/D_1 = 10$ semblent être de type "marching" dans cette configuration, révélant une meilleure homogénéisation du mélange que le cas de référence. La bulle de recirculation semble améliorer sensiblement le mélange dans les jets coaxiaux. Cependant, la probabilité de trouver du traceur non mélangé ($f = 1$) au centre du jet à la fin du domaine de calcul reste importante.

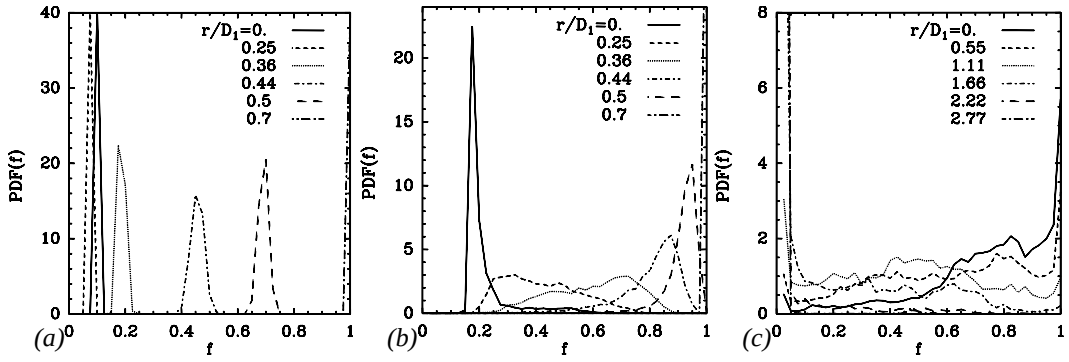


FIG. 5.18 – Fonctions de densité de probabilité au niveau de la couche cisaillé intérieure en $x/D_1 = 2$ *(a)*, $x/D_1 = 5$ *(b)*. *(c)* Fonctions de densité de probabilité au niveau de la seule couche cisaillée existante en $x/D_1 = 10$.

5.3.3 Quantités de mouvement initiales

Dans cette partie, nous étudions l'influence des épaisseurs de quantité de mouvement sur la dynamique de l'écoulement et sur le processus de mélange. Nous avons réalisé une simulation similaire au cas de référence mis à part que $R_1/\theta_{01} = R_1/\theta_{02} = 25$ dans ce cas au lieu de $R_1/\theta_{01} = R_1/\theta_{02} = 12,5$. Cette configuration n'a pas été étudiée dans le chapitre précédent. Avant de traiter les modifications apportées par cette configuration sur le processus de mélange, il est intéressant d'étudier les modifications sur les structures de l'écoulement.

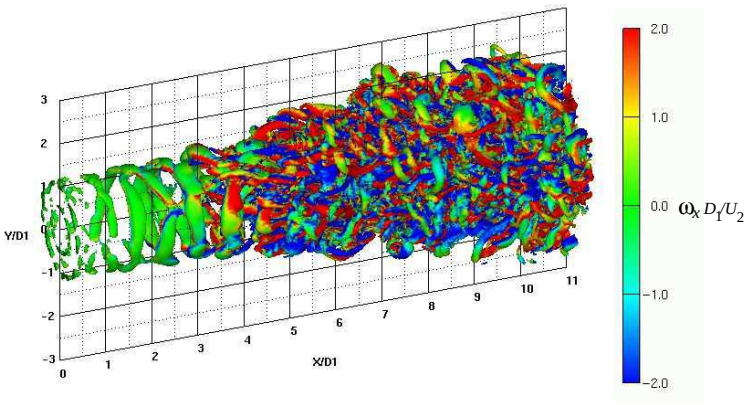


FIG. 5.19 – Isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité longitudinale.

La figure 5.19 illustre les structures tourbillonnaires dans cette configuration de jet coaxial par une isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$. Le scénario de transition de l'écoulement reste similaire aux jets coaxiaux étudiés précédemment : émergence des tourbillons de Kelvin-Helmholtz au niveau des couches cisaillées intérieure et extérieure, apparition de tourbillons longitudinaux entre deux tourbillons de Kelvin-Helmholtz consécutifs suivie d'une croissance de la turbulence au niveau des petites échelles. Cependant, les épaisseurs de quantité de mouvement étant initialement plus faibles, les différentes étapes de la transition apparaissent plus tôt. Le développement des tourbillons longitudinaux a lieu dès $x/D_1 = 4$ (au lieu de $x/D_1 = 7$ dans le cas de référence) et l'émergence d'une turbulence significative au niveau des petites échelles a lieu dès $x/D_1 = 7$.

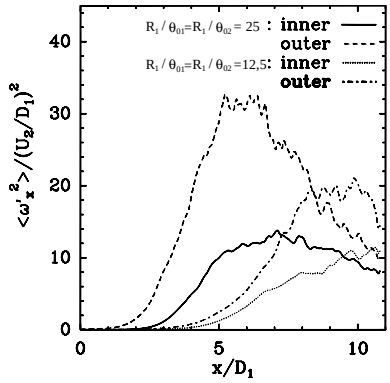


FIG. 5.20 – Evolution longitudinale de $\langle \omega_x'^{\,2} \rangle$ en $r/D_1 = 0,5$ (inner) et $r/D_1 = 1$ (outer), localisation initiale des couches cisaillée intérieure et extérieure, respectivement. Comparaison avec le cas de référence.

D'un point de vue statistique, cela se traduira par un croissance précoce et plus intense de $\langle \omega_x'^{\,2} \rangle$ (Fig.5.20) puisque l'étirement longitudinal est le phénomène dominant de la transition vers la turbulence.

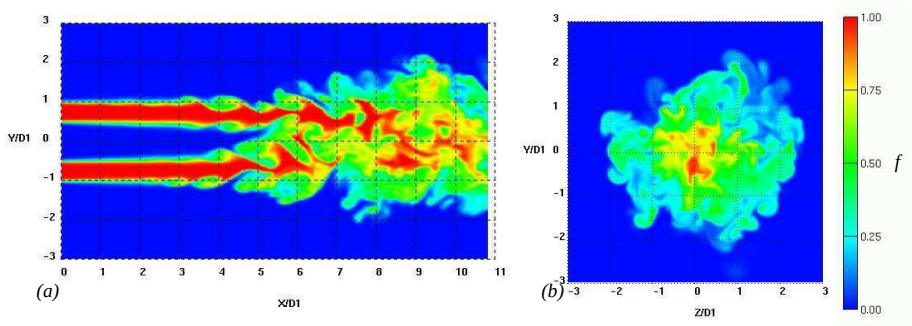


FIG. 5.21 – Contours instantanés de la fraction de mélange *(a)* dans le plan central du jet et *(b)* dans une section transverse à $x/D_1 = 10$. f varie de 0 (en bleu) à 1 (en rouge) suivant l'échelle de couleur montrée sur la figure.

La figure 5.21 illustre qualitativement les mécanismes de mélange dans cette configuration d'écoulement. Il apparaît que la première étape dominée par la diffusion moléculaire est plus courte que dans la configuration de référence. En effet, le développement précoce des tourbillons de Kelvin-Helmholtz permet l'invasion des espèces dans les couches cisaillées plus tôt. Cela implique la fusion des couches de mélange intérieure et extérieure en $x/D_1 \approx 6$ (au lieu de $x/D_1 \approx 8$ dans le cas référence) permettant alors une invasion du traceur plus rapide dans le centre du jet. A la fin du domaine de calcul, le traceur semble alors mieux mélangé, sans qu'il y aît une persistance de "poche" de traceur pur contrairement au cas précédent. Les statistiques illustrent la même tendance. Au-delà de $x/D_1 = 4$, la phase dominée par la diffusion moléculaire est déjà remplacée par l'action des tourbillons de Kelvin-Helmholtz qui permettent un envahissement important des espèces dans les couches cisaillées (Fig.5.22 *(a)*). Le mélange turbulent débute peu après avec une croissance brutale de $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ dans les jets central et annulaire (Fig.5.22 *(b)*). Ce mélange turbulent est initié par l'émergence précoce des tourbillons longitudinaux par rapport au

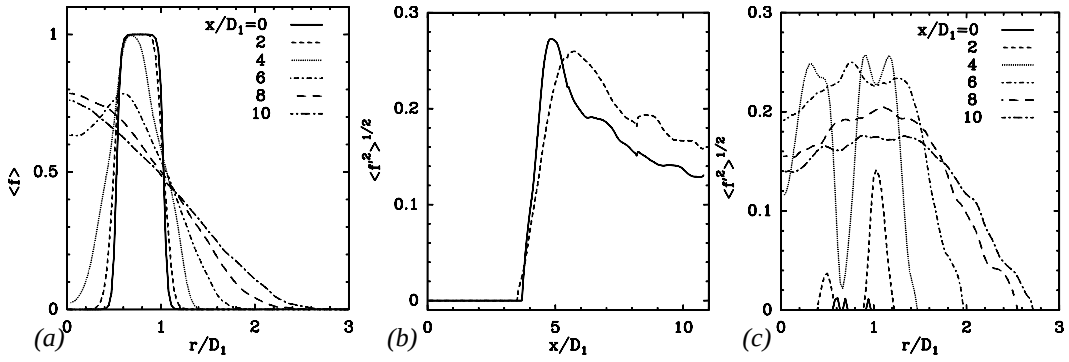


FIG. 5.22 – *(a)* Profils de la fraction de mélange moyenne en différentes sections du jet. *(b)* Evolution longitudinale de l'écart-type de fraction de mélange dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée). *(c)* Profils de l'écart-type de fraction de mélange en différentes sections du jet.

cas de référence. Cela permet également un épanouissement radial du mélange qui conduit à une zone de mélange allant jusqu'à $r/D_1 \approx 2,8$ à la fin du domaine de calcul (au lieu de $r/D_1 \approx 2,2$ pour des épaisseurs initiale de quantité de mouvement deux fois plus épaisses). De plus, $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ est sensiblement plus faible à la fin du domaine de calcul comme le montre la comparaison entre les figures 5.22 *(c)* et 5.7 *(b)*. Cela montre que dans cette région l'intensité du mélange turbulent est plus faible car le mélange est plus homogène. Les DDP donnent également des renseignements

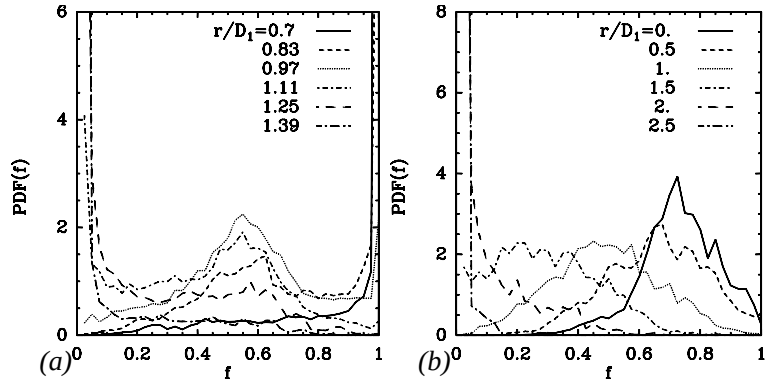


FIG. 5.23 – *(a)* Fonctions de densité de probabilité au niveau de la couche cisaillé intérieure en $x/D_1 = 5$. *(b)* Fonctions de densité de probabilité au niveau de la seule couche cisaillée existante en $x/D_1 = 10$.

intéressants sur les modifications du processus de mélange dans cette configuration. Les DDP à travers la couche cisaillée extérieure en $x/D_1 = 5$ (Fig.5.23 *(a)*) ont un type "non-marching" assez net. Cela révèle une intense activité de mélange due aux structures tourbillonnaires intenses dans cette région de l'écoulement contrairement au cas de référence, où les structures émergeaient à peine dans cette région, ne faisant qu'initier le mélange turbulent. Les DDP en $x/D_1 = 10$ (Fig.5.23 *(b)*) sont alors fortement différentes. Un type "marching" apparaît clairement révélant une bonne homogénéité du mélange. De plus, la probabilité de trouver du traceur pur ($f = 1$) est quasi nulle prouvant l'intérêt de cette configuration pour un mélange efficace.

5.3.4 Comparaison entre les différents cas

Afin de conclure l'étude de l'influence des conditions d'entrée sur le processus de mélange dans les jets coaxiaux, nous allons examiner le "mixedness" global des différents cas étudiés. Cette quantité peut être considérée comme une mesure de l'efficacité du mélange relativement commode à calculer. Introduite par Cetegen et Mohamad [19] elle est définie comme le second moment de la fraction de mélange,

$$Z(x) = \frac{4}{S}\int_S \langle f(x,r)\rangle(1-\langle f(x,r)\rangle)rdrd\phi. \tag{5.17}$$

Dans cette équation, S est la section circulaire transverse sur laquelle l'intégration est réalisée et ϕ est l'angle en coordonnées cylindriques (x, r, ϕ). Le rayon de S est égal à $3D_1$ afin de s'assurer que l'ensemble de la région où $\langle f\rangle \neq 0$ est prise en compte dans tous les cas étudiés. $Z(x)$ varie entre 0 lorsqu'il n'y a pas de mélange entre les deux espèces (il y a seulement $f = 1$ et $f = 0$ dans la section considérée) et 1 pour un mélange complet. Cette définition est appropriée si on considère un mélange bi-moléculaire où les espèces doivent être présentes dans les mêmes proportions.

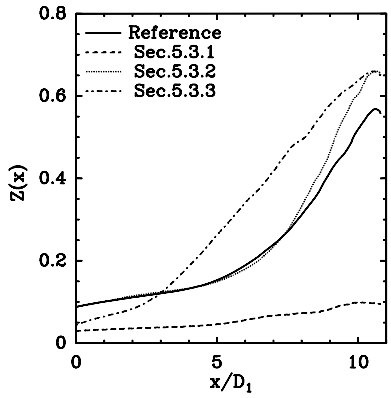


FIG. 5.24 – Evolution du "mixedness" global, $Z(x)$ pour les différents cas étudiés dans cette partie : Sec.5.3.1 correspond au cas où le traceur est issu du jet interne, Sec.5.3.2 correspond au cas où $r_u = 17$ et Sec.5.3.3. correspond au cas où les épaisseurs de quantité de mouvement initiales sont plus faibles. Comparaison avec le cas de référence.

La figure 5.24 montre l'évolution de $Z(x)$ pour les différents cas examinés. Il ressort qu'effectivement la configuration avec la bulle de recirculation (section 5.3.2) et la configuration ayant initialement des épaisseurs de quantité de mouvement plus faibles (section 5.3.3) permettent un meilleur mélange à la fin du domaine de calcul. Ce bénéfice est dû à des étapes de transition plus rapides qui permettent un développement précoce du mélange turbulent dans le cas de faibles épaisseurs de quantité de mouvement. Dans le cas d'un jet coaxial possédant une bulle de recirculation, $Z(x)$ est d'abord similaire au cas de référence, mais il augmente ensuite plus rapidement car la présence de la bulle permet un étirement des structures internes du jet et donc une intensification du mélange turbulent au-delà de la recirculation. Notons enfin que la configuration où le traceur est issu du jet interne (section 5.3.1) est défavorable pour un mélange bi-moléculaire car la quantité de traceur introduite est beaucoup plus faible que la quantité de fluide pur et la couche cisaillée extérieure ne participe pas directement au mélange comme nous l'avons vu.

5.4 Contrôle des structures cohérentes pour améliorer le mélange

Dans cette dernière partie, nous allons présenter des simulations numériques directes de jets coaxiaux forcés. Les jets coaxiaux étudiés dans cette partie ne diffèrent du cas de référence que par le forçage, c'est-à-dire qu'ils ont le même rapport de vitesse, $r_u = 5$ et les mêmes épaisseurs initiales de quantité de mouvement, $R_1/\theta_{01} = R_1/\theta_{02} = 12,5$. Les forçages sont définis à l'aide des informations obtenues sur les jets coaxiaux naturels (non forcés). Nous allons ainsi utiliser deux types d'excitations : axisymétrique et azimutale. Ces excitations sont utilisées avec des amplitudes modérées. L'objectif est de contrôler la dynamique tourbillonnaire du jet afin d'améliorer ses propriétés de mélange. Avant, de présenter ces forçages, nous allons faire une brève revue des travaux portant sur le contrôle dans les jets simples et coaxiaux.

5.4.1 Notion de contrôle

Il y a depuis plusieurs années un fort intérêt pour le contrôle de jets simples en raison des potentialités en termes d'applications industrielles. La dynamique des jets étant largement définie par le mouvement des tourbillons cohérents lors de leurs premiers développement, il est intéressant de comprendre la dynamique de ces structures et de pouvoir les contrôler dans un second temps. Une manipulation efficace du comportement de ces tourbillons cohérents pourra permettre une amélioration des procédés industriels liés aux phénomènes de mélange. Un autre intérêt du contrôle des structures tourbillonnaires des jets est la possibilité de réduire le bruit émis. En effet, de nombreuses études ont lié le bruit généré par un jet à la forme et à la dynamique des tourbillons cohérents dans sa région de transition (voir par exemple, Bogey *et al.* [9]). Le contrôle du développement du jet à travers le contrôle des structures cohérentes peut se faire au moyen de contrôles actifs ou passifs. Le contrôle passif concerne tous les processus qui ne nécessitent pas d'énergie supplémentaire. Il peut s'agir par exemple de modifications de la forme de la buse (voir Gutmark et Grinstein [62]). Le contrôle actif est défini par l'ajout de perturbations déterministes qui sont superposées au jet.

Crow et Champagne [30] ont utilisé un "haut parleur" (il s'agit alors d'excitations acoustiques) pour superposer des forçages à différentes fréquences. Comme nous l'avons vu dans l'état de l'art, ils ont ainsi mis en évidence l'existence de la fréquence "fondamentale" du jet qui permettait une amplification maximale de la perturbation initiale à la fin du cône potentiel. Cette fréquence correspond à la fréquence de passage des structures tourbillonnaires à la fin du cône potentiel. D'autres travaux portant sur le contrôle des jets simples se sont concentrés sur le taux d'épanouissement des jets forcés (Lee et Reynolds [92], Corke et Kusek [29], Longmire et Duong [103]). Une configuration particulière des jets, appelés "jets bifurcants", a pu être mise en évidence. Ces jets ont un important épanouissement dans un plan appelé "plan de bifurcation" alors que le plan perpendiculaire (appelé "plan de bissection") a une évolution normale ou contractée. Lee et Reynolds [92] ont étudié ce type de jet à l'aide d'un forçage combinant une excitation axisymétrique (ou variqueuse) et une excitation hélicoïdale. Numériquement, Urbin et Métais [144] ont utilisé des simulations numériques des grandes échelles pour étudier la réponse d'un jet à une excitation alternée. Ils ont retrouvé l'épanouissement remarquable dans le plan de bifurcation déjà observé expérimentalement par Lee et Reynolds [92]. Plus récemment, Danaila et Boersma [32] ont retrouvé des résultats similaires pour des jets ayant un faible nombre de Reynolds en utilisant des simulations numériques directes. Da Silva et Métais [136] ont montré qu'un forçage combinant une excitation variqueuse au mode préférentiel et une excitation alternée au premier mode sous-harmonique permettait l'élargissement le plus efficace du jet. Enfin, plus récemment, Maidi et Lesieur [105] ont procédé à une étude similaire dans le cas de jets simples

subsoniques et supersoniques.

Le contrôle de jets coaxiaux est plus récent et il a suivi le développement des Micro-Systèmes Electro-Mécaniques (MEMS). Les travaux de Suzuki et de ses collaborateurs [3, 140, 83, 82] ont permis le développement de forçages à partir de micro-actionneurs de battement placés au niveau de la buse. Ils ont montré que des forçages brisant l'axisymétrie du jet développaient plus rapidement les tourbillons longitudinaux, conjecturant ainsi un bénéfice pour le processus de mélange. Ils ont appliqué leur forçage uniquement au niveau de la couche cisaillée extérieure en raison de sa domination sur la dynamique de l'écoulement. Ritchie *et al.* [126] ont contrôlé activement le mélange à l'aide de micro-jets placés à la circonférence de la buse. Ils en déduisent que les modifications des structures à grande échelle ont un effet important sur le mélange, en particulier au niveau de la couche cisaillée extérieure.

5.4.2 Définition des forçages

Le principe de ces forçages est d'ajouter un bruit déterministe à la condition d'entrée afin d'exciter le jet. On ajoute alors une vitesse $\vec{U}_{forc}(\vec{x}_0, t)$ à la condition d'entrée définie précédemment par l'équation (3.3). Comme nous l'avons vu, la dynamique tourbillonnaire des jets coaxiaux de rapports de vitesse importants (supérieurs à l'unité) est dominée par les tourbillons extérieurs dans les premiers développements du jet. De plus, la fréquence de passage de ces tourbillons, notée f_2, est telle que le nombre de Strouhal basé sur la vitesse convective des tourbillons U_{c2} et l'épaisseur initiale de la quantité de mouvement de la couche cisaillée extérieure θ_{02} correspond à la valeur prédite par la théorie de stabilité linéaire, $St = f_2\theta_{02}/U_{c2} \approx 0,033$. Les deux types d'excitations considérés sont basés sur cette fréquence la plus instable. L'excitation concerne uniquement la vitesse axiale, $\vec{U}_{forc}(\vec{x}_0, t) = (U_{forc}(\vec{x}_0, t), 0, 0)$. De plus, elle est appliquée seulement au niveau de la couche cisaillée extérieure et avec une amplitude modérée afin de minimiser l'énergie ajoutée par le forçage. $U_{forc}(\vec{x}_0, t)$ est également défini de façon à être toujours positif (les forçages consistent uniquement en un processus de soufflage, sans phase d'aspiration). L'objectif est d'avoir un forçage réaliste et intéressant en terme d'applications industrielles.

Dans un premier temps, nous considérons une excitation axisymétrique. Ainsi, $U_{forc}(\vec{x}_0, t)$ est défini par

$$U_{forc}(\vec{x}_0, t) = \epsilon U_{loc}(\vec{x}_0)(1/2 + 1/2\sin(2\pi f_2 t)), \tag{5.18}$$

où $U_{loc}(\vec{x}_0)$ est une fonction qui localise l'excitation uniquement au niveau de la couche cisaillée extérieure. L'amplitude maximale fixée par ϵ est égale à 8% de U_2 pour tous les forçages réalisés. Les excitations de type axisymétrique ont souvent été utilisées dans les études de contrôle de jets simples [136, 105, 98].

Le second type d'excitation est défini par

$$U_{forc}(\vec{x}_0, t) = \epsilon U_{loc}(\vec{x_0})(1/2 + 1/2\sin(2\pi f_2 t))(1/2 + 1/2\sin(\phi_0 N)) \tag{5.19}$$

où ϕ_0 est l'angle azimutal du point $\vec{x}_0$ en coordonnées cylindriques. De plus, N est le nombre d'onde azimutal de l'excitation. Cette excitation cherche à reproduire le rôle joué par N "micro-jets" placés autour de la buse extérieure et soufflant périodiquement à une fréquence f_2. Une schématisation de cette excitation azimutale est donnée par la figure 5.25. Comme nous l'avons déjà évoqué lors du chapitre d'état de l'art, Saffman [128] a établi le nombre d'onde azimutal le plus instable pour un anneau tourbillonnaire isolé en fonction du nombre de Reynolds[3]. Dans

[3]Ces travaux faisaient suite à ceux de Widnall *et al.* [153] qui traitaient de cas inviscides.

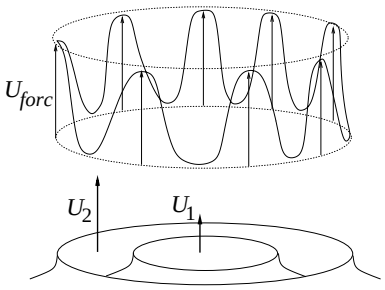


FIG. 5.25 – Schématisation de l'excitation azimutale.

notre cas, il semble que le nombre d'onde de l'instabilité azimutale serait de 10. Nous allons présenter les résultats pour trois nombres d'onde azimutaux : 5, 10 et 15.

5.4.3 Excitation axisymétrique

Dynamique de l'écoulement

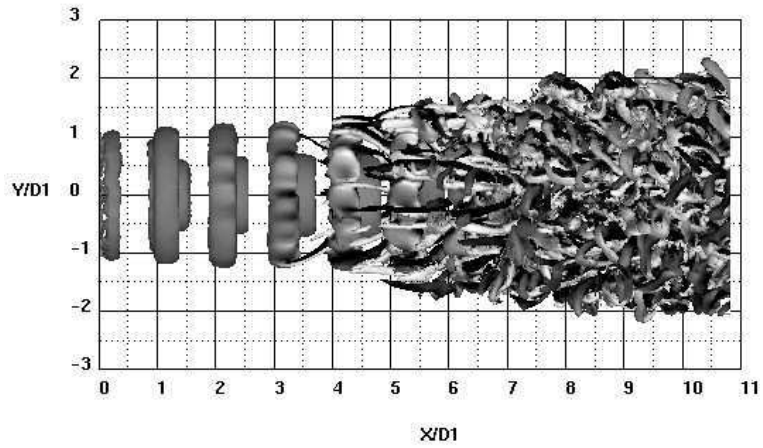


FIG. 5.26 – Structures cohérentes du jet coaxial forcé par une excitation axisymétrique. Isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorées par la vorticité longitudinale afin de distinguer les tourbillons longitudinaux contra-rotatifs.

Nous étudions dans un premier temps la dynamique tourbillonnaire d'un jet coaxial excité par le forçage axisymétrique (Eq.(5.18)). La figure 5.26 montre une vue instantanée des tourbillons cohérents à l'aide d'une isosurface de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité longitudinale. Il apparaît que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche cisaillée extérieure connaît une amplification rapide. Les anneaux de Kelvin-Helmholtz extérieurs sont parfaitement formés dès le début du jet. De plus, ces anneaux sont parfaitement axisymétrique contrairement au cas naturel (non forcé). Ces points sont des conséquences directes du type d'excitation utilisé. Les anneaux de Kelvin-Helmholtz intérieurs sont également modifiés par le forçage en raison de la domination des tourbillons extérieurs sur la dynamique du jet. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent que les tourbillons extérieurs imposaient leur mouvement aux structures tour-

billonnaires internes. Les anneaux internes apparaissent également plus tôt et ils sont également fortement axisymétriques. L'amplification rapide de l'instabilité permet une accélération de la phase de transition. Les premiers tourbillons longitudinaux commencent à se former entre deux anneaux extérieurs consécutifs dès $x/D_1 = 3$ au lieu de $x/D_1 \approx 5$ dans le cas naturel. Au-delà de $x/D_1 \approx 4$, ces tourbillons longitudinaux sont bien formés et nous avons pu en dénombrer environ 15 paires contra-rotatives. Contrairement à la couche cisaillée extérieure, les anneaux

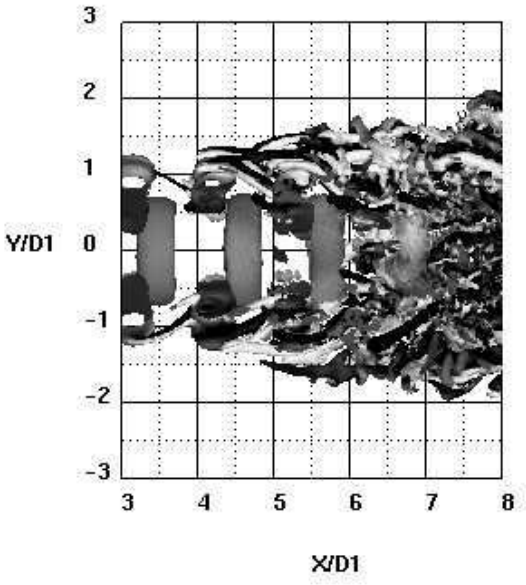


FIG. 5.27 – Structures cohérentes intérieures du jet coaxial forcé par une excitation axisymétrique. Isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorées par la vorticité longitudinale afin de distinguer les tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Les structures cohérentes extérieures ont été artificiellement coupées.

de Kelvin-Helmholtz issus de la couche cisaillée intérieure persistent sans avoir de déformation azimutale jusqu'à $x/D_1 = 5$. En effet, la figure 5.27 montre les structures tourbillonnaires intérieures (les structures extérieures ont été arficiellement coupées) et nous pouvons observer que le premier anneau intérieur déformé apparaît en $x/D_1 = 6$. Par la suite, nous verrons que la perturbation azimutale de la couche cisaillée extérieure ne semble pas influencer la couche cisaillée intérieure. Finalement, le phénomène d'étirement tourbillonnaire lié à la génération des tourbillons longitudinaux permet une croissance plus rapide des structures turbulentes à petite échelle comparativement au cas naturel.

Une meilleure compréhension des modifications de l'écoulement causées par le forçage peut être donnée en termes d'énergie cinétique turbulente. Nous allons étudier les quantités E_r et E_ϕ qui représentent, respectivement, les contributions radiale et azimutale des tensions de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente. Ces quantités ont été définies par les équations (4.7) et (4.8) pour la couche cisaillée intérieure et par les équations (4.9) et (4.10) pour la couche cisaillée extérieure. Nous rappelons que E_r est associé au développement de l'instabilité de Kevin-Helmholtz et à la croissance des anneaux tourbillonnaires alors que E_ϕ est associé aux instabilités azimutales du jet. La figure 5.28 *(a)* montre l'évolution longitudinale de E_r et E_ϕ pour la couche cisaillée extérieure dans le cas d'un jet coaxial forcé par une excitation axisymétrique. Les mêmes quantités dans le cas du jet coaxial naturel sont également représentées. Le forçage implique une

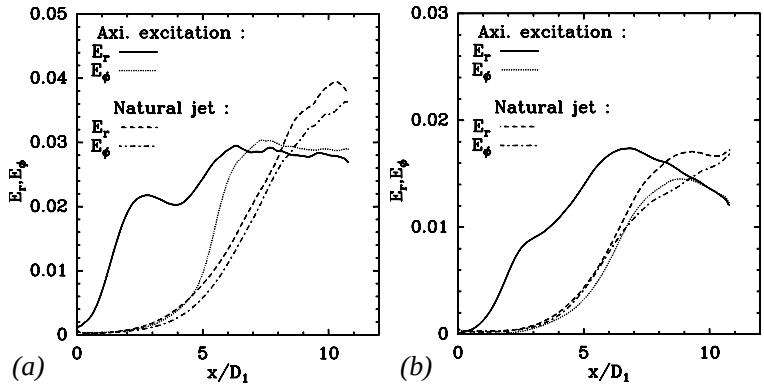


FIG. 5.28 – Evolution longitudinale de E_r et E_ϕ pour le jet coaxial forcé axisymétriquement et pour le jet coaxial naturel au niveau de la couche cisaillée extérieure *(a)* et intérieure *(b)*.

croissance précoce de ces quantités comparées au cas naturel. De plus, dans les premières étapes de la transition, la principale contribution à l'énergie cinétique turbulente est la contribution radiale et $E_\phi \approx 0$ dans cette région. Ce résultat corrobore les visualisations qui montraient des anneaux tourbillonnaires parfaitement axisymétriques. E_ϕ a ensuite une contribution significative au-delà de $x/D_1 = 4$ qui correspond à l'émergence des tourbillons longitudinaux au niveau de la couche cisaillée extérieure. Il est intéressant de noter que l'évolution de ces quantités au niveau de la couche cisaillée intérieure est légèrement différente, comme nous pouvons le voir sur la figure 5.28 *(b)*. En effet, la contribution radiale reste également la principale contribution à l'énergie cinétique turbulente proche de la buse de sortie, mais E_ϕ garde un comportement similaire au jet coaxial naturel. Contrairement à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, la perturbation azimutale de la couche cisaillée extérieure ne semble pas influencer la couche cisaillée interne. Cela explique la persistance de l'axisymétrie des anneaux internes observés sur les visualisations. Finalement, dans le cas de l'excitation axisymétrique, E_ϕ devient de l'ordre de E_r au-delà de $x/D_1 = 7$ révélant ainsi une tridimensionalisation du jet, contrairement au cas naturel.

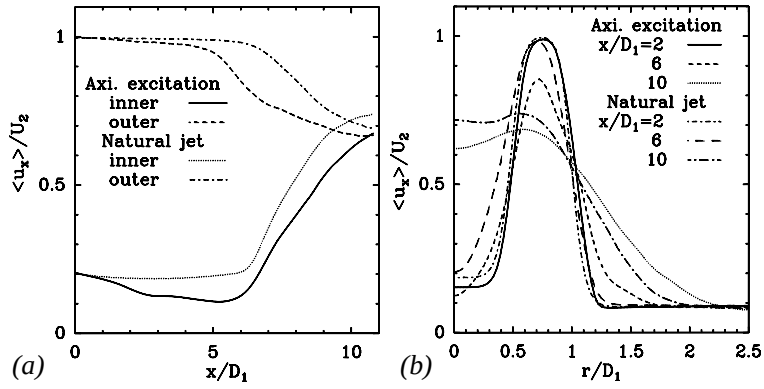


FIG. 5.29 – *(a)* Evolution suivant la direction longitudinale de la vitesse longitudinale moyenne des jets coaxiaux naturel et forcé par l'excitation axisymétrique. *(b)* Profils de la la vitesse longitudinale moyenne en différentes sections du jet.

Les modifications de la transition causées par le forçage ont une influence importante sur

l'écoulement moyen. Il y a une diminution des longueurs des cônes potentiels intérieur et extérieur (Fig.5.29 *(a)*). La diminution de la longueur du cône potentiel intérieur est due à une diminution importante de la vitesse longitudinale moyenne le long de la ligne centrale du jet. Cette diminution est produite par les tourbillons de Kelvin-Helmholtz internes intenses qui entraînent une part importante du fluide issu du jet central. De plus, la couche cisaillée extérieure s'épaissit fortement au cours de la transition dans le cas forcé comme l'illustre les profils de la vitesse longitudinale moyenne en différentes sections du jet (Fig.5.29 *(b)*). En effet, l'épaisseur de la couche cisaillée extérieure est quasi similaire à l'épaisseur initiale dans le cas naturel en $x/D_1 = 6$ (avec une vitesse longitudinale maximale proche de U_2) alors que cette épaisseur est beaucoup plus large dans le cas forcé (avec une vitesse longitudinale maximale de l'ordre de $0,85U_2$) à la même abscisse. Ceci s'explique par un transfert plus important de quantité de mouvement du jet annulaire vers le fluide ambiant produit par l'émergence précoce des tourbillons longitudinaux. A la fin du domaine de calcul ($x/D_1 = 10$), le profil de vitesse est plus large (jusqu'à $r/D_1 \approx 3$ au lieu de $r/D_1 \approx 2$). Cependant, le fort transfert de quantité de mouvement du jet annulaire vers le jet central que nous avons évoqué dans le chapitre précédent et qui permet une homogénéisation des vitesses dans la région de turbulence pleinement développée est plus faible dans le cas forcé. Un pic de vitesse longitudinale moyenne persiste au niveau du jet extérieur contrairement au cas naturel. Cela vient sans doute de la persistance de l'axisymétrie au niveau de la couche cisaillée interne qui renforce l'entraînement du fluide interne dans cette dernière mais limite ce transfert de quantité de mouvement lié au phénomène d'étirement longitudinal des structures tourbillonnaires. Les quantités globales du jet sont également influencées par les étapes de tran-

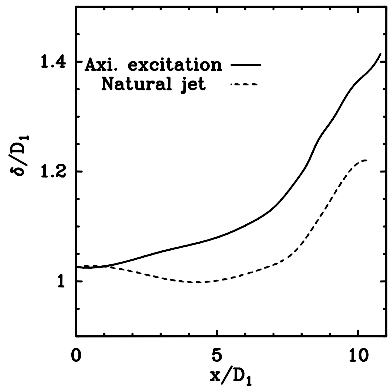


FIG. 5.30 – Taux d'épanouissement du jet forcé axisymétriquement comparé au taux d'épanouissement du jet naturel.

sition rapides dues à l'excitation. La figure 5.30 montre l'évolution du taux d'épanouissement du jet $\delta(x)$ (défini par l'équation (4.1)) dans les cas forcé et naturel. Proche du début du jet, le léger déficit de $\delta(x)$ dans le cas naturel est dû au phénomène de pincement du jet central par le jet annulaire comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre précédent. Ce déficit n'a cependant pas lieu dans le cas forcé puisque $\delta(x)$ croît dès le début de la transition. Ceci est dû au fort transfert de quantité de mouvement entre le jet annulaire et le fluide ambiant qui permet un épaississement important du jet. Finalement, $\delta(x)$ évolue avec la même croissance linéaire (correspondant également à la croissance d'un jet rond simple) dans les deux cas, mais les modifications dans les premières étapes de développement du jet confèrent au jet forcé un épanouissement plus important que pour le jet naturel.

Processus de mélange

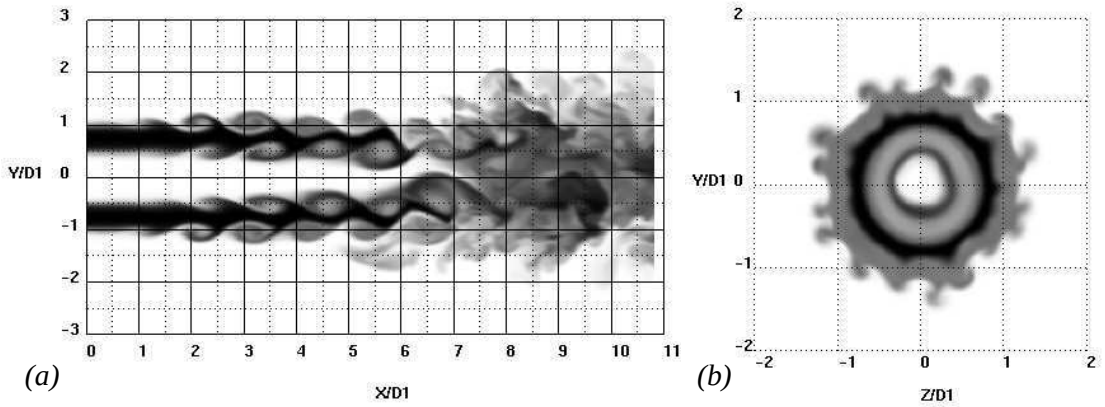


FIG. 5.31 – Contours instantanés de la fraction de mélange dans le cas d'un jet coaxial forcé axisymétriquement : *(a)* dans le plan central du jet et *(b)* dans une section transverse en $x/D_1 = 4,5$. f varie de 0 (blanc) à 1 (noir).

La figure 5.31 montre les contours instantanés de la fraction de mélange dans le plan central du jet coaxial forcé par l'excitation axisymétrique. Les premières modifications du processus de mélange y sont visibles. La région dominée par la diffusion moléculaire est plus courte que dans le cas de référence. Cela vient des tourbillons de Kelvin-Helmholtz intenses qui permettent l'entraînement du fluide extérieur dès $x/D_1 = 1,5$. Ce phénomène d'entraînement du fluide est plus intense au niveau des deux couches cisaillées. Au-delà de $x/D_1 \approx 4,5$, cette étape est suivi par le phénomène d'éjection qui est caractérisé par l'apparition de structures en "champignon" dans les visualisations de plans transverses dans cette région (Fig.5.31 *(b)*). Les tourbillons longitudinaux générant ce phénomène d'éjection sont également plus intenses dans le cas forcé, ainsi, ce phénomène est plus prononcé. Finalement, aucune poche de fluide pur (non mélangé) au centre du jet n'est présente à la fin du domaine de calcul.

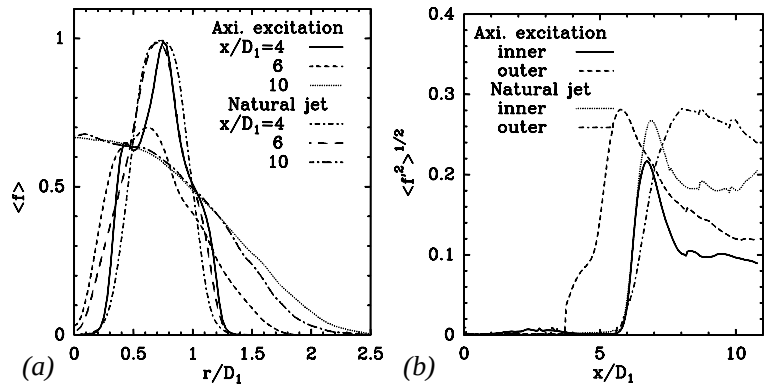


FIG. 5.32 – *(a)* Profils de la fraction de mélange moyenne en différentes sections du jet naturel et du jet forcé. *(b)* Evolution longitudinale de l'écart-type de fraction de mélange des jets coaxiaux naturel et forcé.

Ces observations sont corroborées par les statistiques. La figure 5.32 *(a)* montre des profils de la fraction de mélange moyenne en différentes sections du jet. Le profil de la fraction de mélange moyenne en $x/D_1 = 4$ confirme que les tourbillons de Kelvin-Helmholtz permettent une large diffusion des espèces issues du jet annulaire dans le jet central et dans le fluide ambiant. De plus, en $x/D_1 = 6$, l'action des tourbillons longitudinaux de la couche cisaillée extérieure permet un important élargissement du profil de la fraction de mélange moyenne vers le fluide ambiant. Cependant, on peut noter que la part de traceur qui envahit le jet central est moins importante que la part envahissant le fluide ambiant. C'est parce qu'il n'y a pas de génération précoce des tourbillons longitudinaux au niveau de la couche cisaillée intérieure pour favoriser le mélange entre les deux jets. C'est ce que nous avons vu lors de l'étude de la dynamique de l'écoulement. Contrairement à la couche cisaillée extérieure, le mélange est uniquement dû aux tourbillons de Kelvin-Helmholtz dans cette région. C'est ce que confirme l'évolution longitudinale de l'écart-type de fraction de mélange (Fig.5.32 *(b)*). En effet, au niveau du jet extérieur, $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ croît plus tôt dans le cas forcé (en $x/D_1 = 4$ au lieu de $x/D_1 = 6$) caractérisant une apparition rapide du mélange turbulent. Alors qu'au niveau du jet interne, l'écart-type de fraction de mélange croît autour de $x/D_1 = 6$ dans les deux cas : forcé et naturel. Au-delà de $x/D_1 = 8$, les fluctuations de la fraction de mélange sont moins intenses dans la cas forcé, montrant ainsi une diminution du mélange turbulent lié à une bonne homogénéisation des espèces. La figure 5.33 montre les DDP

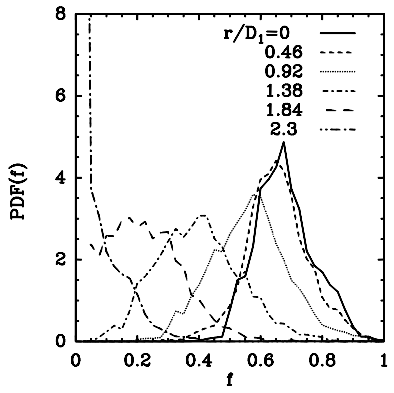


FIG. 5.33 – Fonctions de densité de probabilité de la fraction de mélange en $x/D_1 = 10$ dans la cas du jet coaxial forcé par une excitation axisymétrique.

de la fraction de mélange au niveau de la couche cisaillée en $x/D_1 = 10$. Contrairement au cas de référence, les DDP sont de type "marching" puisque la valeur la plus probable de la fraction de mélange correspond à la valeur moyenne pour chaque localisation radiale. Cela indique un mélange homogène dans cette région. De plus, la probabilité de trouver des "poches" de fluide non mélangé ($f = 1$) est nulle contrairement au cas naturel. Le forçage axisymétrique apparaît donc comme un bon moyen d'améliorer les qualités de mélange du jet.

5.4.4 Excitations azimutales

Dynamique de l'écoulement

Nous étudions ici la dynamique de l'écoulement d'un jet coaxial sous des excitations azimutales (Eq.(5.19)). Des vues instantanées des tourbillons cohérents sont montrées par la figure 5.34 pour trois nombre d'onde azimutaux de forçage différents. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz extérieurs sont bien formés dès le début du jet avec ce type d'excitation comme c'était le cas

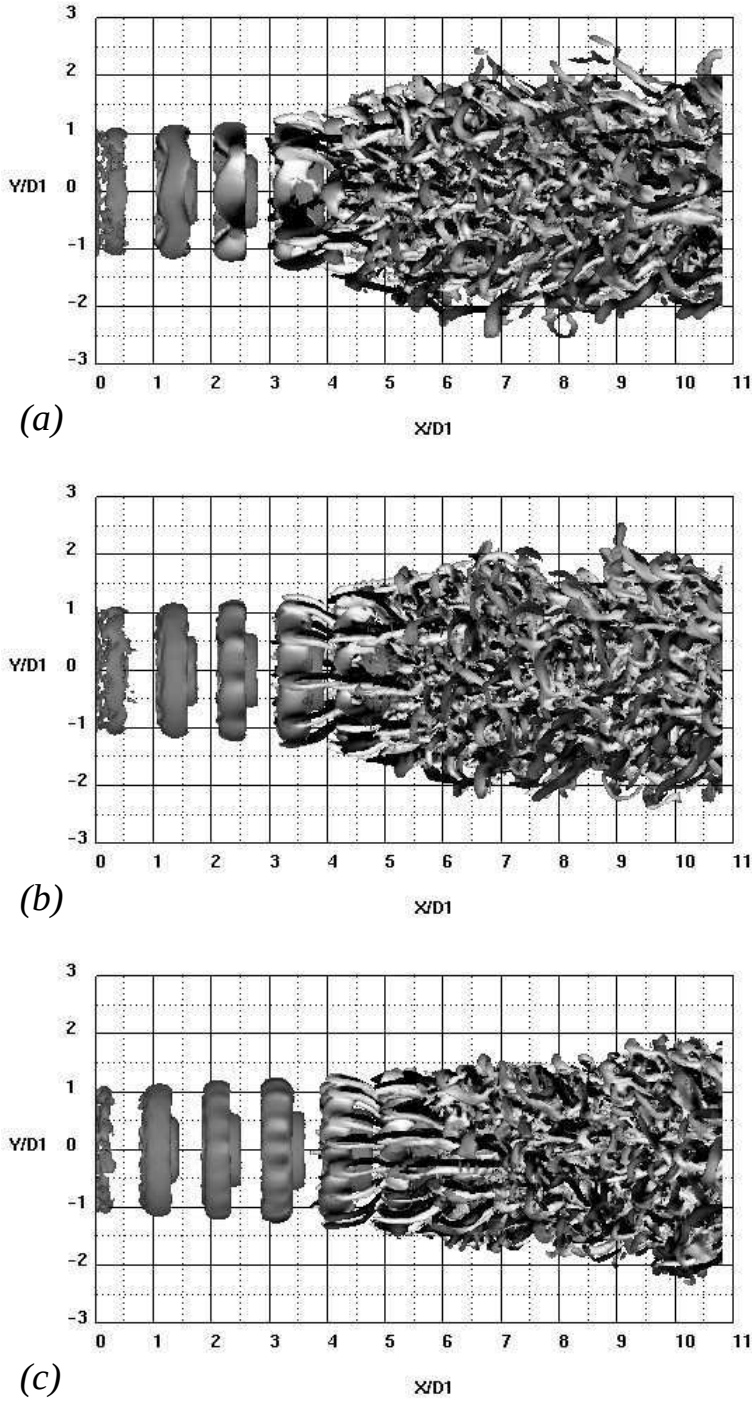


FIG. 5.34 – Structures cohérentes de jets coaxiaux forcés par des excitations azimutales (*(a)* $N = 5$, *(b)* $N = 10$ et *(c)* $N = 15$). Isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorées par la vorticité longitudinale.

précédemment avec l'excitation axisymétrique. C'est une conséquence directe de la composante temporelle du forçage commune aux deux excitations. Cependant, contrairement à l'excitation précédente, les anneaux extérieurs ne sont pas axisymétriques car l'excitation azimutale conduit à une déformation spatiale de ces structures. La figure 5.35 permet une meilleure observation

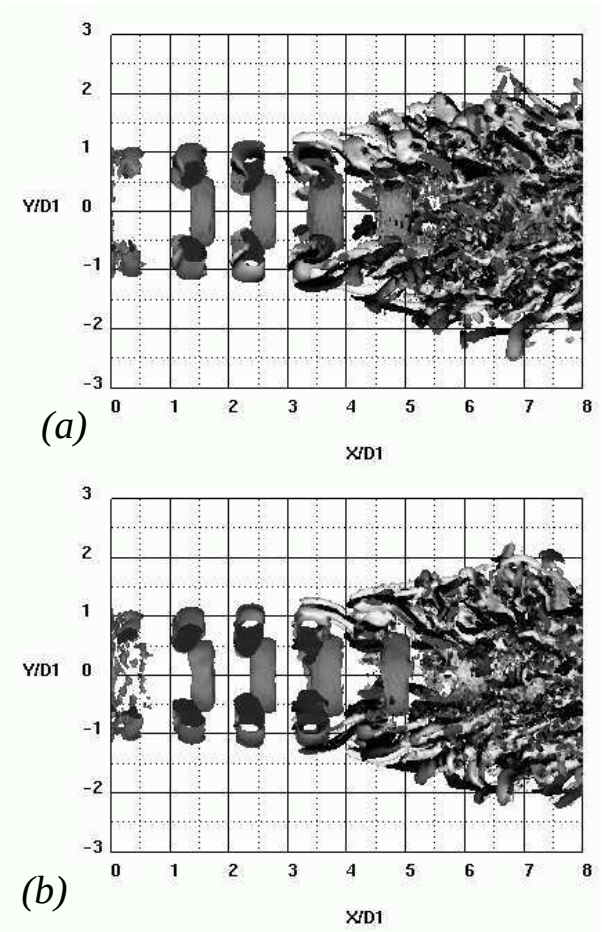


FIG. 5.35 – Structures cohérentes de jets coaxiaux forcés par des excitations azimutales (*(a)* $N = 5$ et *(b)* $N = 15$). Une partie des structures de la couche cisaillée extérieure a été artificiellement coupée afin de mieux distinguer les structures intérieures.

du comportement des structures internes. Contrairement aux tourbillons extérieurs, les tourbillons intérieurs paraissent parfaitement axisymétriques sans avoir de déformations spatiales. Cela confirme une précédente observation : la couche cisaillée extérieure contrôle la génération des tourbillons de Kelvin-Helmholtz intérieurs mais l'instabilité azimutale externe ne semble pas avoir d'influence sur les premiers développement des instabilités de la couche cisaillée interne. Les anneaux extérieurs sont rapidement suivis par l'apparition de N paires contra-rotatives de tourbillons longitudinaux. Ces tourbillons longitudinaux apparaissent plus tôt avec ce type d'excitation qu'avec l'excitation axisymétrique : autour de $x/D_1 \approx 3$ au lieu de $x/D_1 \approx 4$. De plus, les anneaux extérieurs ont une déformation azimutale plus intense pour un faible nombre d'onde azimutal de forçage. Les tourbillons longitudinaux apparaissent plus tôt pour $N = 5$ que pour $N = 15$. La perturbation azimutale associée à un petit nombre d'onde semblent ainsi être plus rapidement amplifiée. Enfin, après l'émergence des tourbillons longitudinaux, de nombreuses

structures à petite échelle sont générées et l'écoulement est turbulent.

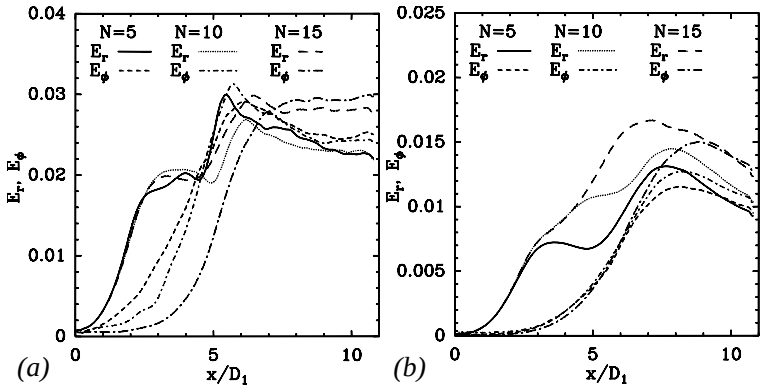


FIG. 5.36 – Evolution longitudinale de E_r et E_ϕ pour les jet coaxiaux forcés par des excitations azimutales au niveau de la couche cisaillée extérieure *(a)* et intérieure *(b)*.

Pour mieux comprendre la transition des jets coaxiaux forcés par une excitation azimutale, la figure 5.36 montre la contribution radiale et azimutale des tensions de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente dans les couches cisaillées extérieure et intérieure (Eqs.(4.7)-(4.10)). L'évolution de ces quantités au niveau de la couche cisaillée extérieure est donnée par la figure 5.36 *(a)*. Elles augmentent plus tôt que la configuration non forcée comme pour le forçage axisymétrique. Cependant, E_ϕ augmente dès le début du jet contrairement au premier type d'excitation. Cela explique les déformations azimutales des anneaux de Kelvin-Helmholtz extérieurs dès leur apparition. De plus, la croissance de E_ϕ débute plus tôt pour un faible nombre d'onde azimutal de forçage. C'est ce que confirme la figure 5.37 qui montre l'évolution longitu-

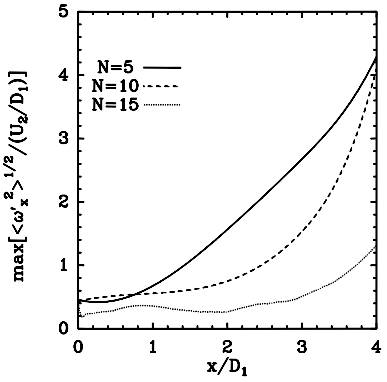


FIG. 5.37 – Evolution longitudinale de la valeur maximale d'écart-type de vorticité longitudinale $\langle {\omega'_x}^2 \rangle^{1/2}$ pour les jet coaxiaux forcés par des excitations azimutales.

dinale de la valeur maximale d'écart-type de vorticité longitudinale $\langle {\omega'_x}^2 \rangle^{1/2}$ (qui est localisée au niveau de la couche cisaillée extérieure). Le phénomène d'étirement tourbillonnaire longitudinal conduisant aux tourbillons longitudinaux débute plus tôt pour une petite valeur de N comme le montraient les visualisations. Par contre, E_r semble indépendant de N au niveau de la couche cisaillée extérieure. Les comportements de E_r et E_ϕ sont différents au niveau de la couche cisaillée intérieure (Fig.5.36 *(b)*). En effet, E_ϕ a un comportement quasi indépendant de

N et similaire au cas naturel lors de la transition car la perturbation azimutale de la couche cisaillée extérieure n'influence pas directement la couche cisaillée intérieure. Par contre, au niveau de la couche cisaillée intérieure, E_r domine E_ϕ jusqu'à $x/D_1 \approx 6$ pour $N = 15$ alors que cela se limite à $x/D_1 \approx 5$ pour $N = 5$. Cela révèle la persistance de l'axisymétrie des anneaux intérieurs pour de grands nombres d'onde azimutaux. Ceci est dû au fait que la déformation azimutale des anneaux extérieurs apparaît plus tard pour un grand nombre d'onde azimutal. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz extérieurs intensifient alors plus longtemps l'axisymétrie des anneaux intérieurs dans ce cas. Enfin, on peut noter que $E_r \approx E_\phi$ à la fin du domaine de calcul pour les trois forçages azimutaux, montrant une tridimensionalisation de l'écoulement contrairement au cas naturel.

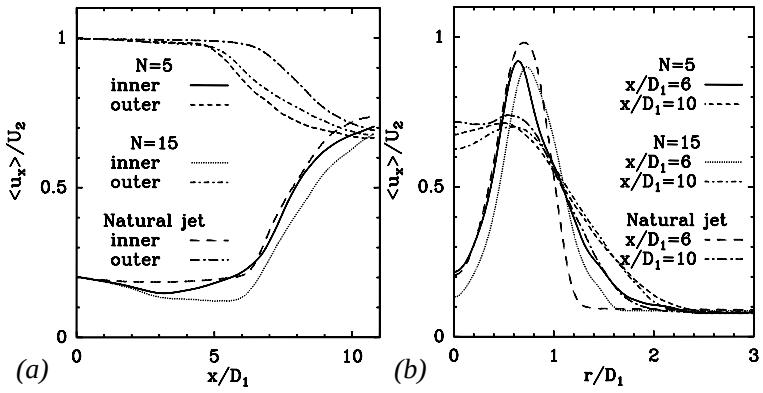


FIG. 5.38 – *(a)* Evolution suivant la direction longitudinale de la vitesse longitudinale moyenne des jets coaxiaux naturel et forcés par les excitations azimutales. *(b)* Profils de la la vitesse longitudinale moyenne en différentes sections du jet.

Il y a également des modifications remarquables de l'écoulement moyen dû à une excitation de type azimutal. La figure 5.38 *(a)* montre une diminution des longueurs des cônes potentiels intérieur et extérieur comme dans le cas d'un forçage axisymétrique. De plus, le vitesse longitudinale moyenne au niveau du jet annulaire décroît légèrement plus tôt pour $N = 5$ que pour $N = 15$ car les tourbillons longitudinaux apparaissent plus tôt dans ce cas. La diminution de la longueur du cône potentiel intérieur est accompagnée par une diminution de la vitesse le long de la ligne centrale du jet. Ceci est dû au fort entraînement du fluide issu du jet central causé par les intenses tourbillons de Kelvin-Helmholtz internes. Il est également intéressant de noter que la vitesse moyenne le long de la ligne centrale croît ensuite plus tôt pour $N = 5$ que pour $N = 15$. Cela s'explique en rappelant qu'il y a une "compétition" entre deux phénomènes aux conséquences opposées dans cette région. Tout d'abord, il y a cet entraînement de fluide par les anneaux de Kelvin-Helmholtz qui a pour conséquence la diminution de la vitesse longitudinale moyenne au centre du jet. Mais, ensuite, il y a le phénomène de transfert de quantité de mouvement entre le jet annulaire et le jet central initié par le phénomène d'étirement longitudinal des structures qui permet une homogénéisation des vitesses du jet annulaire et du jet central (comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent). Dans le cas où $N = 15$, la perturbation azimutale des anneaux externes apparaissant tardivement, ces derniers intensifient l'axisymétrie des anneaux internes, limitant alors le phénomène naturel d'étirement au niveau de la couche cisaillée intérieure. La conséquence est une importante diminution de la vitesse au centre du jet. Par contre, dans le cas où $N = 5$, les anneaux extérieurs de Kelvin-Helmholtz sont déjà déformés spatialement et le phénomène naturel d'étirement tourbillonnaire n'est pas limité, permettant

le transfert de quantité de mouvement entre les deux jets. La conséquence est une croissance de la vitesse au centre du jet ainsi qu'un décalage du pic de vitesse du jet annulaire en direction du centre du jet comme l'illustre le profil de la vitesse longitudinale moyenne en $x/D_1 \approx 6$ (Fig.5.38 *(b)*). Finalement, les profils de vitesse des différentes excitations azimutales sont similaires en $x/D_1 = 10$ (Fig.5.38 *(b)*). Ces profils sont plus larges que pour le cas naturel (jusqu'à $r/D_1 \approx 2,3$ au lieu de $r/D_1 \approx 2$) en raison du transfert de quantité de mouvement à travers la couche cisaillée extérieure qui est intensifié par le forçage. On peut conclure ce paragraphe sur

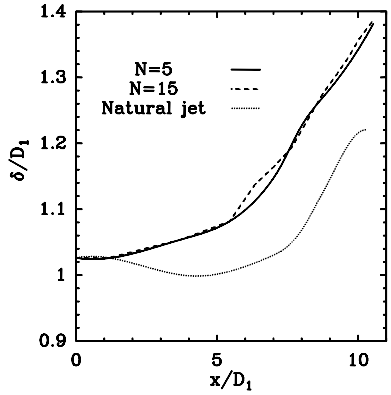


FIG. 5.39 – Taux d'épanouissement des jets coaxiaux forcés par les excitations azimutales.

la dynamique de l'écoulement des jets coaxiaux forcés par une excitation azimutale en étudiant les modifications impliquées sur le taux d'épanouissement du jet (Fig.5.39). L'évolution de $\delta(x)$ est similaire pour $N = 5$ et $N = 15$ car $\delta(x)$ est une mesure de l'épanouissement global du jet (calculé sur la couche cisaillée extérieure) et donc le comportement de la couche cisaillée intérieure discuté précédemment ne l'influence pas. $\delta(x)$ croît légèrement dès le début du jet (sans diminuer comme dans le cas naturel) puis il évolue avec la même croissance qu'un jet coaxial naturel après l'apparition des tourbillons longitudinaux comme nous l'avions déjà noté dans le cas du forçage axisymétrique.

Processus de mélange

La composante temporelle du forçage commune aux deux types d'excitation (axisymétrique et azimutale) conduit à certaines similarités au niveau du processus de mélange. L'étape de diffusion moléculaire est plus courte comparée au cas de référence car les tourbillons de Kelvin-Helmholtz sont intensifiés par la composante temporelle du forçage. L'entraînement des espèces introduites initialement dans le jet extérieur débute plus tôt.

Cependant, des visualisations instantanées de la fraction de mélange dans des sections transverses des jets coaxiaux avec un forçage azimutal (Fig.5.40) montrent d'intéressantes différences par rapport à l'excitation axisymétrique. En effet, le nombre d'éjections (caractérisées par les formes en "champignons") est égal au nombre d'onde azimutal du forçage. De plus, ces éjections semblent mieux organisées que dans le cas du forçage axisymétrique. Ceci vient du fait que les excitations azimutales définissent exactement la localisation des paires de tourbillons longitudinaux (et donc des éjections de scalaire). Le point le plus intéressant est que l'intensité des éjections (caractérisée par la taille des structures en "champignon") est plus grande pour de petits nombres d'onde azimutaux. En effet, la figure 5.40 montre que la taille de ces éjections est de l'ordre de $0,7D_1$ pour $N = 5$ alors qu'elle n'est que de $0,4D_1$ pour $N = 15$.

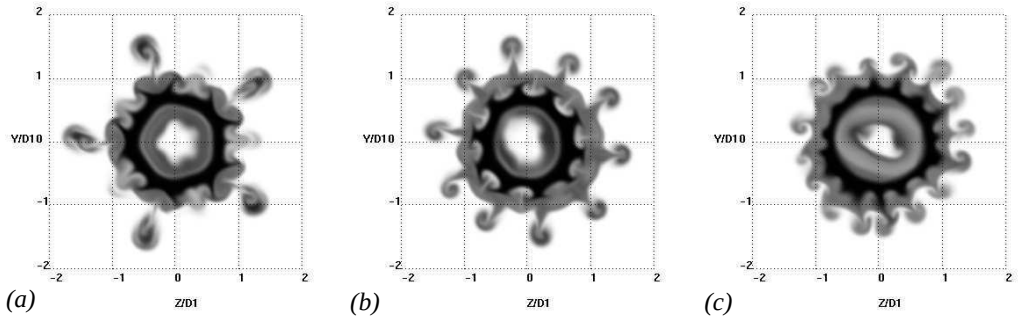


FIG. 5.40 – Contours instantanés de la fraction de mélange dans un plan transverse en $x/D_1 = 4,5$ pour les trois excitations azimutales : *(a)* $N = 5$, *(b)* $N = 10$ et *(c)* $N = 15$. f varie de 0 (blanc) à 1 (noir).

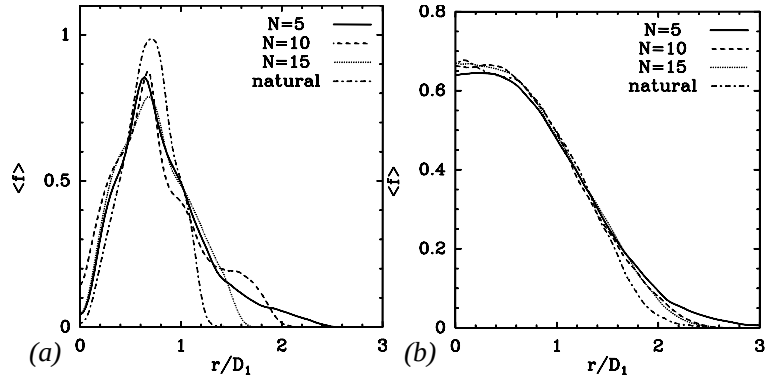


FIG. 5.41 – Profils de la fraction de mélange moyenne des trois excitations azimutales comparés au cas naturel en $x/D_1 = 6$ *(a)* et en $x/D_1 = 10$ *(b)*.

Ce dernier point est corroboré par les profils de la fraction de mélange moyenne en $x/D_1 = 6$ (Fig.5.41 *(a)*). En effet, ce profil s'élargit plus pour $N = 5$ en raison de l'intensité des éjections. Il y a un important épanouissement de la couche de mélange externe en direction du fluide ambiant dans ce cas : $\langle f \rangle \neq 0$ jusqu'à $r/D_1 = 2,4$ pour $N = 5$ au lieu de $r/D_1 = 1,3$ pour le jet coaxial naturel. Cependant, les profils de la fraction de mélange moyenne en $x/D_1 = 10$ sont ensuite relativement similaires. Le profil du cas $N = 5$ n'est que légèrement plus élargi dans cette région en comparaison des différences relevées lors de la transition. Les DDP des trois excitations azimutales sont similaires à la fin du domaine de calcul (la figure 5.42 montre uniquement le cas $N = 5$). En effet, les DDP montrent un type "marching" comme dans le cas de l'excitation axisymétrique. Cela révèle une bonne homogénéité du mélange contrairement au cas naturel. De plus, il n'y a pas de "poches" de fluide pur (non mélangé) avec ce type d'excitation.

5.4.5 Comparaison globale entre les différents forçages

Les forçages présentés permettent une nette amélioration du mélange par comparaison au cas naturel. Dans cette dernière partie, nous allons traiter de l'efficacité du mélange à partir de quantités caractéristiques comme le "mixedness" global et l'intensité de ségrégation afin d'avoir

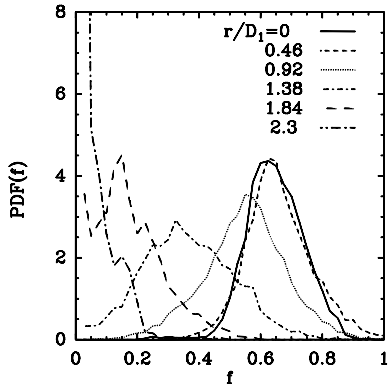


FIG. 5.42 – Fonctions de densité de probabilité de la fraction de mélange en $x/D_1 = 10$ dans la cas du jet coaxial forcé par une excitation azimutale de nombre d'onde $N = 5$.

une meilleure compréhension de ces améliorations. La figure 5.43 *(a)* montre l'évolution du

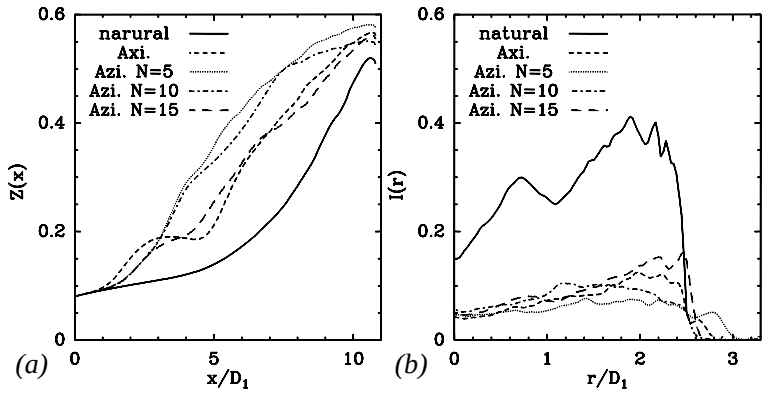


FIG. 5.43 – *(a)* Evolution longitudinale du "mixedness" global pour les différents cas de forçage et pour le jet coaxial naturel. *(b)* Evolution radiale de l'intensité de ségrégation en $x/D_1 = 10$ pour les différents cas de forçage et pour le jet coaxial naturel.

"mixedness" global $Z(x)$ déjà défini par l'équation (5.17). Précisons juste que le rayon[4] de S dans l'équation (5.17) est fixé à $3,5D_1$ pour prendre en compte toute la région où $\langle f \rangle \neq 0$. Le processus de mélange donné par l'évolution de $Z(x)$ indique clairement un développement du mélange en deux parties pour l'excitation axisymétrique. Le mélange est d'abord dû au développement d'intenses tourbillons de Kelvin-Helmholtz jusqu'à $x/D_1 \approx 4$. Cela implique une première croissance de $Z(x)$. Puis, $Z(x)$ connaît une nouvelle croissance plus importante lorsque les tourbillons longitudinaux apparaissent. Par contre, $Z(x)$ croît de façon monotone durant la transition dans les cas de forçages azimutaux en raison de la déformation azimutale des tourbillons dès le début du jet. On peut de plus noter que $Z(x)$ est plus grand lors de la transition pour une petite valeur de N en raison de l'intensité des éjections comme nous l'avons décrit précédemment. Une autre quantité donnant une idée de l'homogénéité du mélange à la fin de la transition est l'intensité de ségrégation. Cette quantité a été introduite par Danckwerts

[4]Nous avions fixé ce rayon à $3D_1$ dans la section 5.3.4

[34] et elle est définie par

$$I = \frac{\langle f'^2 \rangle}{\langle f \rangle (1 - \langle f \rangle)}. \tag{5.20}$$

Cette quantité varie entre 0 et 1. $I = 1$ lorsque les espèces restent ségréguées alors que $I = 0$ quand un mélange homogène est atteint. La figure 5.43 *(b)* montre une bonne homogénéisation des espèces dans les cas de forçages contrairement au jet coaxial naturel. De plus, il semble se confirmer que l'excitation azimutale avec un petit N conduit à un mélange plus homogène à la fin de la transition et particulièrement à l'interface entre le jet et le fluide ambiant. En effet, il y a des valeurs de I plus importantes en $x/D_1 \approx 2,5$ pour l'excitation axisymétrique et pour l'excitation azimutale avec $N = 15$ montrant que les espèces sont agitées mais qu'elles restent ségréguées dans cette région.

5.5 Animations liées au chapitre

Afin d'illustrer certains résultats de ce chapitre, nous avons joint quatre animations au format MPEG dont voici le détail :

anim51.mpg Simulation de référence (section 5.2). Isosurface de $f = 0,5$ et contours de la fraction de mélange dans trois sections transverses. La fraction de mélange va du noir ($f = 0$) au blanc ($f = 1$) en passant par un dégradé de rouge. Mise en évidence des principales étapes du processus de mélange.

anim52.mpg Cas où le traceur est issu du jet central (section 5.3.1). Isosurface de $f = 0,5$ et contours de la fraction de mélange dans trois sections transverses. La fraction de mélange va du noir ($f = 0$) au blanc ($f = 1$) en passant par un dégradé de rouge. Mise en évidence du confinement des espèces issues du fluide interne.

anim53.mpg Contours de la fraction de mélange en une section placée en $x/D_1 = 10$. Comparaison entre le cas de référence (section 5.2) et la configuration d'épaisseurs initiales de quantité de mouvement plus faibles (section 5.3.3). La fraction de mélange est comprise entre 0 (bleu) et 1 (rouge). Mise en évidence d'une activité de mélange petite échelle plus intense dans le cas décrit à la section 5.3.3.

anim54.mpg Plan central coloré par la fraction de mélange dans le cas du jet coaxial de référence (section 5.2). On montre également trois sections transverses. La fraction de mélange va du bleu ($f = 0$) au rouge ($f = 1$).

Chapitre 6

Simulations des grandes échelles de jets coaxiaux à grand nombre de Reynolds

Résumé du chapitre *Dans ce chapitre, nous nous rapprochons des applications réelles des jets coaxiaux en simulant des jets à des nombres de Reynolds plus importants. Dans ces conditions, des simulations numériques directes (SND) ne sont plus envisageables. Nous avons donc réalisé des simulations des grandes échelles (SGE). La technique de simulation des grandes échelles consiste en une séparation d'échelles de l'écoulement. Les grandes échelles énergétiques sont simulées directement alors que l'influence des plus petites échelles est modélisée par un modèle sous-maille. Nous utilisons le modèle de la fonction de structure filtrée (FSF). La technique de simulation des grandes échelles nous a permis de réaliser des jets coaxiaux avec des nombres de Reynolds allant jusqu'à* 30000*. Nos SGE de jets coaxiaux ont été validées par comparaison avec des résultats expérimentaux. La comparaison entre différents jets coaxiaux est possible en raison de l'existence d'une auto-similitude statistique du jet dans la région de turbulence pleinement développée. La normalisation des quantités statistiques conduisant à l'auto-similitude nécessite l'introduction de notions de diamètre et de vitesse équivalents. Nous avons étudié l'influence du nombre de Reynolds de l'écoulement sur la transition du jet vers une turbulence pleinement développée. Le phénomène de "mixing transition" est évoqué. Introduit par Dimotakis [36], il se traduit par une tridimensionnalisation immédiate du jet lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur de l'ordre de* 10000*. Les tourbillons longitudinaux contra-rotatifs apparaissent dès le début de la transition. Les quantités globales du jet (comme son taux d'épanouissement) sont quasi-indépendantes du nombre de Reynolds dans l'état de "mixing transition" alors que ces quantités en sont fortement tributaires pour des nombres de Reynolds plus faibles. Nous avons également établi que la croissance du taux d'épanouissement du jet connaissait un changement de pente lorsque la couche cisaillée extérieure fusionne au centre du jet, c'est-à-dire au-delà du point de rattachement. La bulle de recirculation est également fortement influencée par le nombre de Reynolds puisque cette région est façonnée par l'écoulement qui l'entoure. De plus, nous avons retrouvé un comportement instationnaire de cette bulle de recirculation déjà évoquées dans la littérature. Enfin, nous avons étudié les conséquences de ces modifications sur le processus de mélange. L'émergence précoce des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs permet d'initier plus tôt le mélange turbulent en générant des éjections de traceur au travers des couches cisaillées. Le mélange est ainsi nettement amélioré. De plus, les conséquences de la bulle de recirculation sur le mélange déjà évoqué dans le chapitre précédent sont retrouvées pour des jets coaxiaux à nombre de Reynolds élevé.*

Les deux précédents chapitres ont présenté les résultats portant sur la dynamique et des propriétés de mélange dans le cas de jets coaxiaux à nombre de Reynolds modéré. Ceci nous a permis de bien distinguer les différentes étapes de la transition vers un état de turbulence pleinement développée et du processus de mélange dans les jets coaxiaux. Dans ce dernier chapitre de résultats, nous allons nous rapprocher des configurations réelles en simulant des jets coaxiaux à des nombres de Reynolds plus importants. Dans ce cas, la technique de simulation numérique directe n'est plus envisageable. Nous avons alors réalisé des simulations des grandes échelles (SGE). Après avoir présenté brièvement cette technique de modélisation (section 6.1), nous validerons nos SGE de jets coaxiaux en introduisant les notions de diamètre et de vitesse équivalents (section 6.2). Nous étudierons alors l'influence du nombre de Reynolds sur la dynamique de l'écoulement en mettant en évidence le phénomène de "mixing transition" et en portant une attention particulière au comportement de la région de recirculation quand elle existe (section 6.3). Enfin, à la lumière des modifications impliquées par un important nombre de Reynolds sur la dynamique tourbillonnaire, nous étudierons les propriétés de mélange des jets coaxiaux à grand nombre de Reynolds (section 6.4).

6.1 La simulation des grandes échelles

6.1.1 Philosophie générale

La résolution des équations de Navier-Stokes nécessite de prendre en compte toutes les échelles spatio-temporelles de la solution. D'un point de vue numérique, la représentation de toutes ces échelles implique une discrétisation suffisamment fine. Il faut ainsi que le pas de discrétisation spatiale Δx et le pas de discrétisation temporelle Δt soient respectivement de l'ordre de la longueur caractéristique et du temps caractéristique associé à la plus petite échelle de l'écoulement. C'est la technique de simulation numérique directe qui a été utilisée jusqu'à présent. Cette technique reste cependant restreinte à un faible domaine d'applications en raison de son contraignant critère de résolution. Une des limitations principales est le nombre de Reynolds de l'écoulement. En effet, dans le cas d'une turbulence homogène isotrope, le rapport entre l'échelle intégrale L et l'échelle de Kolmogorov η peut être évalué par

$$\frac{L}{\eta} = O(Re^{3/4}).$$

La résolution d'un volume cubique de côté L nécessite alors environ $Re^{9/4}$ points de grille. Ce type de calcul est irréalisable à grand nombre de Reynolds avec les ressources informatiques actuelles[1]. D'autres méthodes de calcul ont donc été imaginées pour dépasser ces limitations. Il s'agit alors de ne plus résoudre directement la dynamique de toutes les échelles. La simulation des grandes échelles (SGE) est l'une de ces techniques. Dans la SGE, on distingue les grandes échelles qui seront calculées directement des petites échelles qui seront modélisées. Cette approche a l'avantage de donner accès à la dynamique à grande échelle (conditionnant une part importante de l'écoulement). De plus, la dynamique des petites échelles modélisées étant plus universelle que celles des grandes échelles (car elle est moins contrainte par la géométrie de l'écoulement), on peut espérer que les modèles de SGE puissent être utilisés dans un grand nombre de configurations d'écoulements sans ajustement[2].

[1] le record actuel est de 4096^3 points pour une turbulence homogène isotrope à un nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor de 1200 [73]

[2] C'est l'un des problème des simulations statistiques qui sont moins coûteuses mais dont il n'existe pas de modèle universel applicable facilement à une gamme importante d'écoulements.

6.1.2 Opération de filtrage et équations de Navier-Stokes filtrées

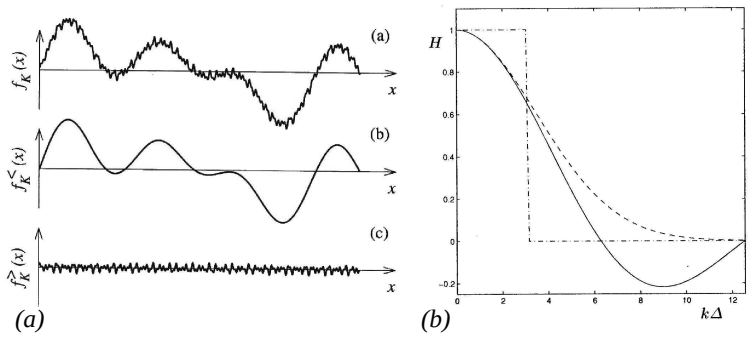


FIG. 6.1 – *(a)* Exemple de la séparation d'échelle d'un fonction f dans l'espace physique. $f^<$ et $f^>$ représentent respectivement les parts grande et petite échelle. D'après Frisch [54]. *(b)* Représentation des trois opérateurs de filtrage classique dans l'espace de Fourier : le filtre passe-bas (ligne continue), le filtre gaussien (ligne pointillée) et le filtre droit (ligne point-tiret). D'après Geurts [57].

Cette séparation d'échelles se traduit mathématiquement par l'application d'un filtre passe-bas aux équations de Navier-Stokes. Il s'agit bien entendu d'un filtre passe-bas en fréquence (ou filtre passe-haut en échelle) afin de ne prendre en compte que les grandes échelles directement simulées. On se place ici dans le cas d'un filtre homogène. Ce filtrage consiste en un produit de convolution. Si $f(\vec{x},t)$ est la solution du problème, la partie directement résolue est la partie filtrée, notée $\bar{f}(\vec{x},t)$. $\bar{f}(\vec{x},t)$ est définie formellement par :

$$\bar{f}(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{y},t)\Phi_\Delta(\vec{x}-\vec{y})d\vec{y} \tag{6.1}$$

qui équivaut dans l'espace de Fourier à un produit :

$$\bar{\hat{f}}(\vec{k},\omega) = \hat{f}(\vec{k},\omega)\hat{\Phi}_\Delta(\vec{k},\omega) \tag{6.2}$$

où Φ_Δ est l'opérateur (ou noyau) de filtrage qui supprimera toutes les contributions associées aux échelles inférieures à l'échelle de coupure Δ[3]. $f(\vec{x},t)$ se décompose en un terme résolu et un terme sous-maille : $f(\vec{x},t) = \bar{f}(\vec{x},t) + f^{sgs}(\vec{x},t)$ (voir la figure 6.1 *(a)*).

Afin de pouvoir manipuler les équations de Navier-Stokes filtrées, on impose un certain nombre de propriétés au filtre utilisé. Dans un premier temps, il s'agit d'une propriété de conservation des constantes. Ces dernières ne doivent pas être modifiées par le filtrage :

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R} \text{ alors } \bar{a} = a$$

De plus, le filtre doit être linéaire :

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}.$$

Cette propriété est toujours satisfaite par définition du produit de convolution (indépendamment de Φ_Δ). Enfin, on doit avoir une commutativité avec les dérivations spatiales et temporelles :

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}.$$

[3] Δ doit être supérieur ou égal à la taille de la maille. Concrètement, nous prendrons Δ égal à la taille de la maille.

Par contre, on peut préciser que l'idempotence de Φ_Δ n'est pas impliquée. Généralement, $\overline{f^{sgs}}(\vec{x},t) \neq 0$.

Les trois opérateurs de filtrage les plus communément utilisés sont les suivants (nous les définissons dans le cas unidimensionnel) :

- Le "filtre passe-bas" qui est défini localement dans l'espace physique par

$$\Phi_\Delta(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{si } |x-y| \leq \frac{\Delta}{2} \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où une définition non-locale dans l'espace de Fourier

$$\hat{\Phi}_\Delta(k) = \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2}$$

Ce filtre est le plus naturel lorsqu'il s'agit d'une discrétisation par des méthodes de différences finies.

- Le "filtre gaussien" est donné dans l'espace physique par

$$\Phi_\Delta(x-y) = \left(\frac{\gamma}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma|x-y|^2}{\Delta^2}\right)$$

d'où,

$$\hat{\Phi}_\Delta(k) = \exp\left(\frac{-\Delta^2 k^2}{4\gamma}\right)$$

Usuellement, γ est pris égal à 6. Ce filtre a la particularité d'être non local à la fois dans l'espace physique et dans l'espace de Fourier.

- Enfin, le "filtre droit" qui est défini localement dans l'espace de Fourier

$$\hat{\Phi}_\Delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| < k_c \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k_c est le nombre d'onde de coupure : $k_c = \pi/\Delta$. Ce filtre devient ainsi non local dans l'espace physique

$$\Phi_\Delta(x-y) = \frac{\sin(k_c(x-y))}{k_c(x-y)}.$$

On peut noter que ce filtre est indempotent dans l'espace de Fourier : $\hat{\Phi}_\Delta\hat{\Phi}_\Delta = \hat{\Phi}_\Delta$. La figure 6.1 *(b)* représente ces trois filtres dans l'espace de Fourier.

Les équations de Navier-Stokes (Eq.(3.1)-(3.2)) s'écrivent après l'opération de filtrage (et par commutation du filtre et des opérations de dérivations)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j}) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \tag{6.4}$$

L'équation de transport de la quantité de mouvement filtrée fait apparaître le terme non-linéaire $\overline{u_i u_j}$. C'est ce terme qui doit être manipulé et modélisé afin de déterminer le champ de vitesse filtré $\vec{u}$ à partir de la résolution de des équations (6.3) et (6.4). En posant

$$\overline{u_i u_j} = -\tau_{ij} + \bar{u}_i \bar{u}_j,$$

l'équation (6.3) s'écrit

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \tag{6.5}$$

Dans cette équation, le tenseur sous-maille $\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}$ est le seul terme qui ne s'exprime pas directement à partir de $\vec{u}$. Il est responsable des échanges de quantité de mouvement entre les échelles sous-mailles et les échelles plus grandes que la taille du filtre. C'est ce terme qui est modélisé lors de simulations des grandes échelles.

6.1.3 Modélisation sous-maille

Dans cette partie, nous allons uniquement présenter le modèle sous-maille utilisé dans nos simulations des grandes échelles. Des compléments intéressants peuvent être trouvé dans les livres de Sagaut [129] et Lesieur *et al.* [98].

En supposant que la turbulence est localement isotrope, le développement de ce modèle sous-maille repose sur deux hypothèses principales :

Hypothèse de viscosité sous-maille On suppose que le mécanisme de transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles sous-mailles (c'est-à-dire ce que l'on souhaite modéliser) est analogue aux mécanismes moléculaires représentés par le terme de diffusion faisant apparaître la viscosité. En d'autres termes, on peut faire apparaître une viscosité sous-maille ν_T afin de définir le tenseur sous-maille à partir du tenseur des gradients de vitesses filtrées. Ainsi,

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right). \tag{6.6}$$

L'équation (6.5) devient alors

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + (\nu + \nu_T)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right). \tag{6.7}$$

Dans cette équation la pression filtrée $\bar{P}$ est une pression modifiée (ou macropression) : $\bar{P} = \bar{p}/\rho + |\vec{\bar{u}}|^2/2 - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}$. L'objectif devient alors la modélisation de cette viscosité sous-maille ν_T.

Hypothèse d'équilibre local On suppose que les petites échelles de la turbulence sont toujours en équilibre énergétique. C'est-à-dire qu'au niveau des petites échelles, l'énergie provenant des grandes échelles est instantanément dissipée par viscosité moléculaire. Il y a donc égalité entre la production, la dissipation et le flux d'énergie à travers la coupure.

Dans l'espace spectral, l'équilibre entre la dissipation ϵ et l'énergie échangée à la coupure s'écrit

$$\epsilon(t) = \int_0^{k_c} 2\nu_T(t) k^2 E(k,t) dk \text{ avec } k_c = \pi/\Delta \text{ l'échelle de coupure.} \tag{6.8}$$

En supposant un spectre de Kolmogorov,

$$E(k,t) = C_K \epsilon(t)^{2/3} k^{-5/3}, \tag{6.9}$$

on a

$$\nu_T(t) = \frac{2}{3} C_K^{-1} \epsilon(t)^{1/3} k_c^{-4/3}.$$

En rappelant que

$$\epsilon(t)^{1/3} = E(k_c,t)^{1/2} C_K^{-1/2} k_c^{5/6}$$

si on suppose un spectre de Kolmogorov à la coupure (Eq.(6.9) en k_c), on peut évaluer $\nu_T(t)$ comme

$$\nu_T(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{C_K^{3/2}}\sqrt{\frac{E(k_c,t)}{k_c}}. \tag{6.10}$$

Cela revient a définir une viscosité turbulente spectrale [24] en négligeant sa dépendance en k.

Métais et Lesieur [108] propose d'utiliser la formulation (6.10) dans l'espace physique en prenant une viscosité turbulente variant spatialement,

$$\nu_T(\vec{x},t) = \frac{2}{3}\frac{1}{C_K^{3/2}}\sqrt{\frac{E_{\vec{x}}(k_c,t)}{k_c}}, \tag{6.11}$$

où $E_{\vec{x}}(k_c,t)$ est un spectre d'énergie cinétique locale en $\vec{x}$. Il doit être évalué à l'aide de quantités de l'espace physique. L'idée, initialement proposée par Métais et Lesieur [108], est d'utiliser la fonction de structure du second ordre de la vitesse,

$$F_2(\vec{x},\Delta,t) = \langle (\vec{u}(\vec{x},t) - \vec{u}(\vec{x}+\vec{r},t))^2 \rangle_{|\vec{r}|=\Delta}.$$

En turbulence isotrope, cette fonction peut être reliée à $E(k,t)$ selon une formulation proposée par Batchelor,

$$F_2(\Delta,t) = 4\int_0^\infty E(k,t)\left(1 - \frac{\sin(k\Delta)}{k\Delta}\right)dk.$$

En supposant un spectre de Kolmogorov en k_c, on a

$$E(k_c,t) = \frac{1}{4,82\pi^{5/3}}\Delta F_2(\Delta,t) \tag{6.12}$$

Pour le problème de modélisation sous-maille, on utilise la fonction de structure locale basée sur le champ de vitesse filtrée,

$$\bar{F}_2(\vec{x},\Delta,t) = \langle \left(\vec{\bar{u}}(\vec{x},t) - \vec{\bar{u}}(\vec{x}+\vec{r},t)\right)^2 \rangle_{|\vec{r}|=\Delta}.$$

Métais et Lesieur [108] montrent que cette fonction[4] peut être reliée à $F_2(\vec{x},\Delta,t)$ par

$$F_2(\vec{x},\Delta,t) = 2,53\bar{F}_2(\vec{x},\Delta,t) \tag{6.13}$$

L'équation (6.11) devient avec les équations (6.12) et (6.13) et en rappelant que $k_c = \pi/\Delta$,

$$\nu_T(\vec{x},t) = 0,105 C_K^{-3/2}\Delta\left(\bar{F}_2(\vec{x},\Delta,t)\right)^{1/2} \tag{6.14}$$

qui est le modèle sous-maille connu sous le nom de *modèle de la fonction de structure*.

Ce modèle se comporte très bien en turbulence homogène isotrope [108]. Cependant, il est assez dissipatif pour des écoulements inhomogènes en raison de sa forte sensibilité aux grandes échelles. Pour pallier à ce problème des variantes du modèle de la fonction de structure ont été développées (voir Lesieur et Métais [97]). L'une de ces variantes est le *modèle de la fonction de structure filtrée*. L'idée est de supprimer la contribution des grandes échelles inhomogènes. Ducros *et al.* [42] proposent de filtrer le champ de vitesse à l'aide d'un filtre Laplacien avant de

[4] qui est calculée à l'aide des six points de l'espace les plus proches de $\vec{x}$ sur notre grille de calcul.

calculer la fonction de structure locale. Les tests effectués par Ducros *et al.* [42] ont montré que les meilleurs comportements du modèle étaient obtenus lorsque le champ de vitesse était filtré trois fois par le filtre Laplacien [5]. La formulation finale de ce modèle devient (voir Ducros *et al.* [42] et Lesieur [96] pour les détails)

$$\nu_T = 0,0014 C_K^{-3/2} \Delta \left(\tilde{F}_2(\vec{x}, \Delta) \right)^{1/2}, \tag{6.15}$$

où $\tilde{F}_2(\vec{x}, \Delta)$ est la fonction de structure calculée sur le champ de vitesse filtrée 3 fois par le filtre Laplacien. Il a été largement validé (voir Lesieur *et al.* [98])[6]. Nous utiliserons donc ce modèle pour réaliser des simulations des grandes échelles des jets coaxiaux.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne traiterons que des quantités filtrées lors de l'étude des résultats des simulations des grandes échelles. Pour ne pas surcharger les notations, nous omettrons le symbole $\bar{(.)}$.

6.2 Validation dans le cas des jets coaxiaux

Les travaux de da Silva [133, 136] ont largement validé les simulations des grandes échelles réalisées avec le code de calcul "SPECOMPACT" dans le cas de jets simples qui est une configuration très proche de celle des jets coaxiaux. Dans cette partie, nous allons valider plus spécifiquement les simulations de jets coaxiaux en rappelant les notions de vitesse et de diamètre équivalents.

6.2.1 Paramètres des simulations

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de simulations des grandes échelles de jets coaxiaux. Comme nous l'avons précisé précédemment, la simulation des grandes échelles nous permet de simuler des jets coaxiaux à des nombres de Reynolds inabordables par les simulations directes. Nous concentrerons notre étude uniquement sur l'influence du nombre de Reynolds au niveau de la dynamique tourbillonnaire et du mélange. Les autres paramètres des simulations restent alors inchangés par rapport aux SND présentées dans les chapitres précédents afin de permettre une meilleure comparaison. Dans l'équation (3.4) définissant le profil initial, nous reprenons $D_1/\theta_{01} = D_1/\theta_{02} = 25$ et $U_3/U_2 = 9,1\%$. Le rapport de diamètre reste $\beta = D_2/D_1 = 2$. Nous avons toutefois simulé deux rapports de vitesse différents afin d'étudier les deux régimes d'écoulement des jets coaxiaux : sans région de recirculation ($r_u = 5$) et avec une région de recirculation ($r_u = 17$).

La gamme de nombres de Reynolds simulés est comprise entre 3000 et 30000. Le cas du jet coaxial avec $Re = 3000$ est le cas issu de simulations directes présentées dans les chapitres précédents. Enfin, précisons qu'afin de prévenir tout problème de confinement du jet, la taille du domaine de calcul a été augmentée en conservant toutefois la taille de maille. La taille du domaine de calcul est désormais de $10,8D_1 \times 13,3D_1 \times 13,3D_1$ qui est discrétisé par $231 \times 480 \times 480$ points.

[5] par exemple, dans les trois directions (x, y et z), l'opération de filtrage itéré une fois donne

$$L(\bar{u}_{i,j,k}) = -6\bar{u}_{i,j,k} + \bar{u}_{i-1,j,k} + \bar{u}_{i+1,j,k} + \bar{u}_{i,j-1,k} + \bar{u}_{i,j+1,k} + \bar{u}_{i,j,k-1} + \bar{u}_{i,j,k+1}$$

[6] On peut également lire l'article récent de da Silva et Pereira [137] qui montre que le modèle FSF est parmi les meilleurs en ce qui concerne la prédiction du champ de vorticité filtré

6.2.2 Notion de vitesse et de diamètre équivalents

L'une des difficultés dans l'étude des jets coaxiaux est le nombre important de paramètres initiaux pouvant varier d'un jet à l'autre. A priori, cette particularité rend difficile une comparaison entre deux jets coaxiaux n'ayant pas les mêmes paramètres initiaux comme le rapport de vitesse ou le rapport de diamètre. Cependant, Ko et Chan [77] ont montré que dans la région pleinement développée des jets coaxiaux, il existait une relation de similitude rendant les profils de vitesses et les tensions de Reynolds indépendants du nombre de Reynolds.

Ces relations de similitude sont établies à partir d'un diamètre équivalent D_e et d'une vitesse équivalente U_e. Cette notion de paramètres équivalents a été introduite par Eldred *et al.* [45]. On suppose que les jets coaxiaux sont équivalent à un jet simple de diamètre initial D_e et de vitesse initiale U_e. On doit avoir initialement conservation du débit,

$$\frac{\pi}{4}\left(D_1^2 U_1 + \left(D_2^2 - D_1^2\right) U_2\right) = \frac{\pi}{4} D_e^2 U_e, \tag{6.16}$$

et conservation de la quantité de mouvement,

$$\frac{\pi}{4}\left(D_1^2 U_1^2 + \left(D_2^2 - D_1^2\right) U_2^2\right) = \frac{\pi}{4} D_e^2 U_e^2. \tag{6.17}$$

On peut noter que pour les équations ci-dessus, nous avons supposé un profil initial en "haut de forme" (correspondant à des épaisseurs de quantité de mouvement nulles) qui reste une bonne approximation et qui facilite les calculs. La résolution du système composé des équations (6.16) et (6.17) conduit aux définitions des paramètres équivalents. On obtient

$$\frac{D_e}{D_2} = \frac{1}{\beta}\frac{1 + r_u\left(\beta^2 - 1\right)}{\sqrt{1 + r_u^2\left(\beta^2 - 1\right)}} \qquad \frac{U_e}{U_2} = \frac{1}{r_u}\frac{1 + r_u^2\left(\beta^2 - 1\right)}{1 + r_u\left(\beta^2 - 1\right)}.$$

ou

$$\frac{D_e}{D_1} = \frac{1 + r_u\left(\beta^2 - 1\right)}{\sqrt{1 + r_u^2\left(\beta^2 - 1\right)}} \qquad \frac{U_e}{U_1} = \frac{1 + r_u^2\left(\beta^2 - 1\right)}{1 + r_u\left(\beta^2 - 1\right)}.$$

On peut vérifier que ces expressions redonnent $U_e = U_1$ et $D_e = D_1$ dans le cas limite du jet simple ($r_u = 0$ et $\beta = 1$) et $U_e = U_2$ dans le cas du jet annulaire ($r_u \mapsto \infty$)[7].

6.2.3 Validation

La figure 6.2 compare les résultats de nos SGE aux mesures expérimentales du jet annulaire ($U_1 = 0$ et $Re = 160000$) de Ko et Chan [77] dans la région de turbulence pleinement développée. Les quantités sont normalisées selon la relation de similitude donnée par Ko et Chan [77]. On peut déduire de nos simulations que la vitesse longitudinale moyenne et son écart-type sont effectivement auto-similaires dans la région de turbulence pleinement développée. De plus, nos résultats numériques correspondent parfaitement aux résultats expérimentaux.

L'existence d'une similitude des profils dans la région de turbulence pleinement développée permet une comparaison immédiate entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux. Cependant, avant cette région (lors de la transition) les comparaisons sont moins évidentes.

[7] On peut noter qu'une erreur s'est sans doute glissée dans les calculs de Ko et Kwan [78] et de Fisher *et al.* [50] car ils trouvent

$$\frac{D_e}{D_1} = \sqrt{1 + r_u^2\left(\beta^2 - 1\right)}$$

qui paraît incorrect car il donne des résultats incohérents pour des rapports de vitesse élevés ($D_e \mapsto \infty$ pour un jet annulaire).

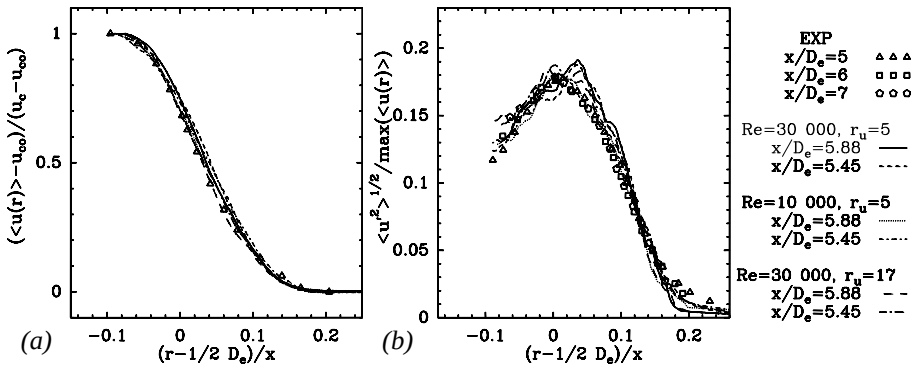


FIG. 6.2 – Comparaison des résultats de nos SGE avec les mesures expérimentales du jet annulaire de Ko et Chan [77] dans la région de turbulence pleinement développée. *(a)* Profil radial (normé par D_e) de la vitesse longitudinale moyenne. *(b)* Profil radial (normé par D_e) de l'écart-type de vitesse longitudinale. Sur ces figures, $\langle u_c \rangle$ est la vitesse longitudinale moyenne au centre du jet, u_{co} est la vitesse du co-courant et $\max(\langle u \rangle)$ est la valeur maximale de la vitesse longitudinale moyenne à l'abscisse considérée.

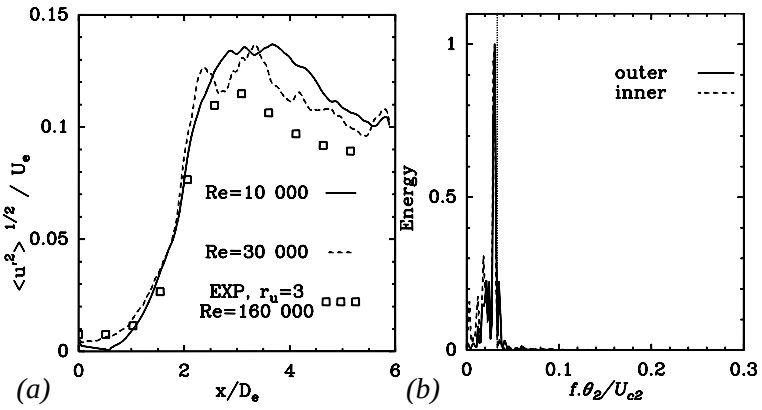


FIG. 6.3 – *(a)* Evolution longitudinale de l'écart-type de vitesse longitudinale le long de la ligne centrale. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux de Buresti *et al.* [14]. *(b)* Spectre de fréquence du signal de vitesse longitudinale pour une SGE de jet coaxial ayant un nombre de Reynolds de 30000 au niveau des couches cisaillées extérieure et intérieure en $x/D_1 = 1,5$. Les fréquences sont normées par les quantités caractéristiques de la couche cisaillée extérieure et l'énergie est normée par sa valeur maximale. La ligne verticale représente la valeur théorique pour la couche cisaillée extérieure.

La figure 6.3 *(a)* montre toutefois que nos résultats sont assez cohérents avec les résultats expérimentaux de Buresti *et al.* [14] qui ont réalisé un jet coaxial avec $r_u = 3$ et $Re = 160000$, l'intensité des fluctuations semblant diminuer avec une augmentation du nombre de Reynolds. Enfin, il y a un dernier point qui nous permet de conclure la validation de nos SGE. En effet, nous avons vu dans le chapitre 4 que la fréquence des instabilités primaires de Kelvin-Helmholtz de la couche cisaillée extérieure correspondait à la fréquence déduite de la théorie de l'instabilité linéaire en prenant un nombre de Strouhal basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement initiale de la couche cisaillée extérieure de l'ordre de $0,033$. De plus, nous avons établi qu'il y avait une égalité entre les fréquences des couches cisaillées extérieure et intérieure. Ces résultats sont indépendants du nombre de Reynolds (ils supposent uniquement un nombre de Reynolds suffisamment élevé). La figure 6.3 *(b)* montre effectivement que les fréquences caractéristiques de l'instabilité primaire relevées dans nos SGE correspondent à ces observations.

Nos simulations des grandes échelles semblent donc être bien validés. Nous allons pouvoir dans la suite de ce chapitre essayer de comprendre l'influence du nombre de Reynolds sur la dynamique de l'écoulement et les conséquences sur le mélange.

6.3 Dynamique des jets coaxiaux à grand nombre de Reynolds

6.3.1 Dynamique tourbillonnaire

Dans un premier temps, nous allons étudier l'influence du nombre de Reynolds sur le scénario de transition des jets coaxiaux vers une turbulence pleinement développée. Dans le chapitre 4, nous avions établi le scénario pour des jets coaxiaux à nombre de Reynolds modéré. Dans ce cas, la transition débute par l'émergence de tourbillons primaires au niveau des couches cisaillées extérieure et intérieure. Ces tourbillons naissent de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et conduisent à des structures toriques en raison de l'axisymétrie de l'écoulement. Au niveau de la couche cisaillée extérieure, ces structures sont caractérisées par une fréquence de passage correspondant à la théorie de stabilité linéaire. De plus, nous avons vu que les structures intérieures étaient bloquées entre deux structures extérieures consécutives, impliquant une égalité des fréquences de passages. Cette étape est alors suivie du développement de paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs dus à une instabilité azimutale. Ces tourbillons longitudinaux se connectent à deux structures primaires consécutives et sont responsables de la croissance importante de l'épaisseur du jet. Il en résulte une étape de déchirures et d'appariements des structures tourbillonnaires conduisant à une augmentation brutale de la turbulence au niveau des petites échelles. Au-delà, le jet est dans un état de turbulence pleinement développée.

Les simulations à nombre de Reynolds modéré (Fig.6.4 *(a)* et *(b)*) suivent effectivement ce scénario. Il faut toutefois noter une différence au niveau de l'apparition des différentes étapes de la transition. L'émergence des tourbillons longitudinaux (en bleu et rouge sur la figure 6.4) a lieu aux environs de $x/D_1 \approx 7$ pour $Re = 3000$ alors qu'ils sont présents dès $x/D_1 = 3$ pour $Re = 5000$. De la même façon, l'écoulement semble pleinement turbulent vers $x/D_1 \approx 8$ pour $Re = 5000$ alors qu'il ne semble l'être que proche de la fin du domaine de calcul à un nombre de Reynolds de 3000. Afin d'estimer l'influence du nombre de Reynolds sur la longueur de la région de transition, nous avons calculé la longueur du cône potentiel extérieur L_{P2} qui est la longueur de la région où le jet annulaire conserve sa vitesse d'entrée sans être influencé par la viscosité. Cette longueur est directement liée à la longueur de la transition. La figure 6.5 *(a)* montre effectivement que L_{P2} diminue fortement lorsque le nombre de Reynolds augmente jusqu'à une valeur de l'ordre de 10000. Au-delà, il semblerait que la longueur L_{P2} varie très peu et reste

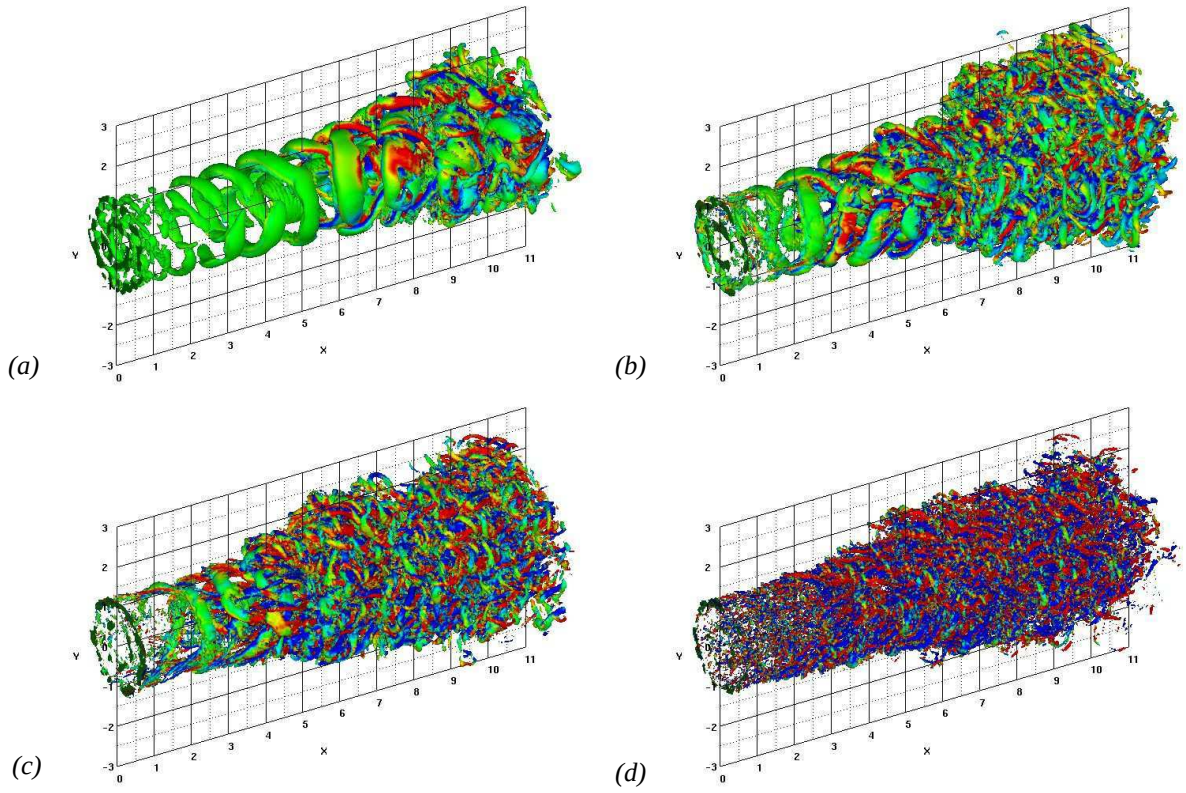


FIG. 6.4 – Vue d'ensemble de la transition des jets coaxiaux illustrée par des isosurfaces de $Q = 0,5(U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité longitudinale pour quatre nombres de Reynolds : *(a)* $Re = 3000$ (SND), *(b)* $Re = 5000$ (SGE), *(c)* $Re = 10000$ (SGE) et *(d)* $Re = 30000$ (SGE).

"bloquée" autour de $L_{P2}/D_1 \approx 3,8$. Une première explication peut être donnée en observant les figures 6.4 *(c)* et *(d)* qui montrent le développement des structures tourbillonnaires pour des jets coaxiaux à nombre de Reynolds supérieur à 10000. Ces figures (ainsi que des animations) montrent un scénario de transition assez différent de celui précédemment décrit. En effet, pour ces grands nombres de Reynolds, les paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs apparaissent dès le début du jet. Il semblerait ainsi que l'instabilité azimutale se développe en entrée du jet. Cela conduit alors à des fluctuations de vorticité longitudinale au niveau des couches cisaillées dès le début du jet comme l'illustre la figure 6.5 *(b)*. Des observations similaires ont déjà été faites par Dimotakis [36] dans le cas de couches de mélange et de jets simples. En effet, il avait noté que passé un nombre de Reynolds de l'ordre de 10000, il y avait une déstabilisation tridimensionnelle de l'écoulement dès le début de la transition[8]. Cette déstabilisation se caractérise par l'émergence de tourbillons longitudinaux comme nous avons pu l'observer sur nos simulations. Ce phénomène a été baptisé "mixing transition" (transition de mélange) en raison d'une nette amélioration du mélange à travers la couche cisaillée. La longueur du cône potentiel extérieur étant fortement dépendante du lieu d'apparition des tourbillons cohérents (puisque ce sont ces tourbillons qui permettent la tridimensionnalisation du jet), le phénomène de "mixing transition" explique le blocage de cette longueur. Ce phénomène implique plus généralement une certaine indépendance des quantités globales du jet par rapport à la valeur du nombre de Reynolds de l'écoulement

[8]Il semble également que les SGE de jets simples de da Silva [133] montrent le même comportement

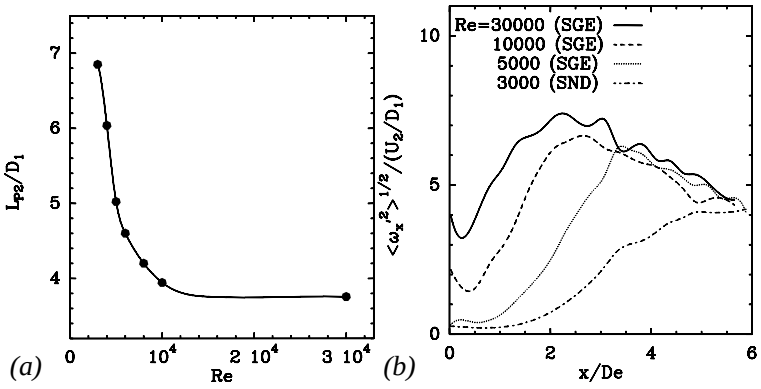


FIG. 6.5 – *(a)* Influence du nombre de Reynolds sur la longueur du cône potentiel extérieur. *(b)* Evolution longitudinale de l'écart-type de vorticité longitudinale pour plusieurs nombres de Reynolds.

comme nous le verrons par la suite.

La figure 6.6 montre l'évolution longitudinale des valeurs maximales des écarts-type de chaque composante de la vorticité pour différents nombres de Reynolds. Dans le chapitre 4, ces quantités nous avaient permis de caractériser l'émergence des tourbillons longitudinaux par une domination de $\langle \omega_x'^2 \rangle^{1/2}$ sur les autres composantes. On voit qu'effectivement les tourbillons longitudinaux apparaissent de plus en plus tôt avec la croissance du nombre de Reynolds puisque $\langle \omega_x'^2 \rangle^{1/2}$ domine les autres composantes de plus en plus tôt. Il est également intéressant de noter que $\langle \omega_\phi'^2 \rangle^{1/2}$ domine proche de l'entrée du jet pour des valeurs modérées du nombre de Reynolds puisque $\langle \omega_\phi'^2 \rangle^{1/2}$ est associé aux tourbillons toriques de Kelvin-Helmholtz. Par contre, pour $Re = 30000$, $\langle \omega_x'^2 \rangle^{1/2}$ domine $\langle \omega_\phi'^2 \rangle^{1/2}$ dès l'entrée du jet en raison du phénomène de "mixing transition". La figure 6.7 illustre les contributions radiale E_r et azimutale E_ϕ des tensions de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente. Ces quantités ont été définies respectivement par les équations (4.7) et (4.8) pour la couche cisaillée intérieure et par les équations (4.9) et (4.10) pour la couche cisaillée extérieure. Pour tous les nombres de Reynolds étudiés, nous retrouvons une domination des quantités liées à la couche cisaillée extérieure. On peut de plus voir l'accélération de la transition avec la croissance du nombre de Reynolds puisque ces quantités augmentent de plus en plus tôt pour des nombres de Reynolds croissants. Cela conduit a une tridimensionnalisation de plus en plus rapide du jet coaxial pour des nombres de Reynolds élevés. Cette tridimensionnalisation précoce se traduit par des contributions radiale et azimutale du même ordre, $E_r \approx E_\phi$. Le phénomène de "mixing transition" est également caractérisé sur la figure 6.7. En effet, pour des nombres de Reynolds modérés, au début de la transition, E_r qui est associé à l'instabilité primaire du jet (et donc au développement des tourbillons de Kelvin-Helmholtz) domine E_ϕ qui est associé au développement des tourbillons longitudinaux. Par contre, pour des nombres de Reynolds plus élevés (Fig.6.7 *(d)*), E_r et E_ϕ sont du même ordre dès le début de la transition car les tourbillons longitudinaux apparaissent dès le début du jet. Précisons pour finir qu'à l'heure actuelle aucune explication n'a été donnée pour expliquer l'état de "mixing transition" et le changement de comportement du jet au-delà d'un nombre de Reynolds de l'ordre de 10000. On aurait envie d'associer ce comportement à une singularité de l'équation de Navier-Stokes au bout d'un temps fini pour des viscosités infinitésimales, comme l'ont obtenu André et Lesieur [2] en utilisant la théorie EDQNM de la turbulence (voir aussi Lesieur [96]). Ceci illustre aussi les conjectures de Leray [94] sur le comportement singulier de l'équations de Navier-Stokes

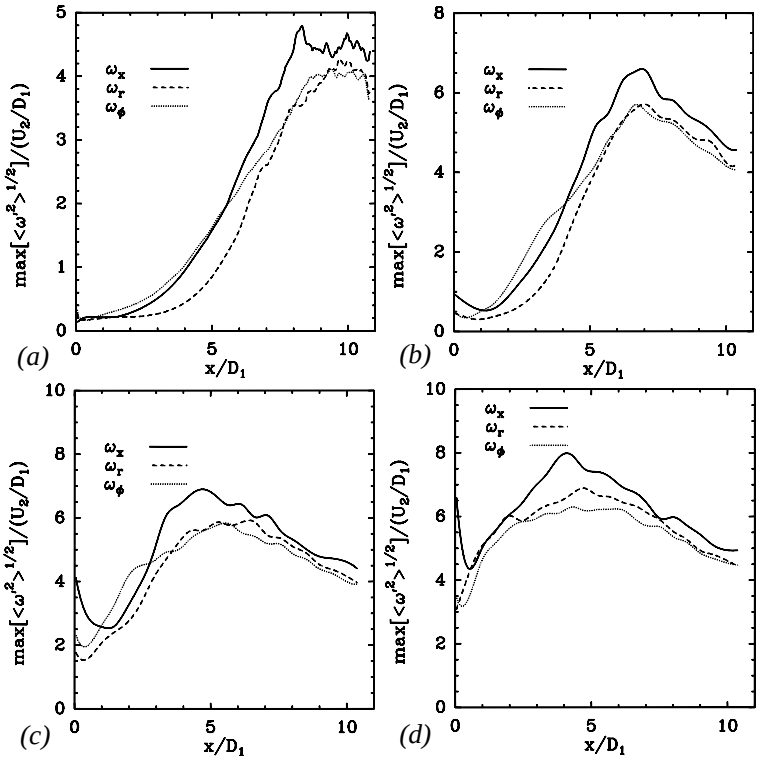


FIG. 6.6 – Evolution longitudinale des valeurs maximales de l'écart-type de chaque composante de la vorticité pour différents nombres de Reynolds : *(a)* $Re = 3000$ (SND), *(b)* $Re = 5000$ (SGE), *(c)* $Re = 10000$ (SGE) et *(d)* $Re = 30000$ (SGE).

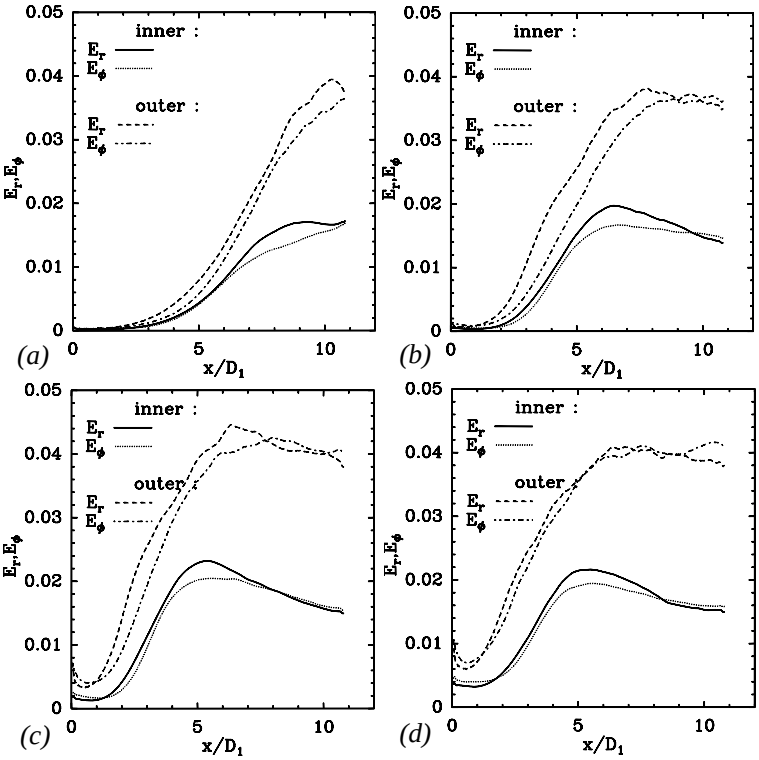


FIG. 6.7 – Evolution longitudinale des contributions des composantes radiale (E_r) et azimutale (E_ϕ) du tenseur des contraintes de Reynolds à l'énergie cinétique turbulente pour les couches cisaillées intérieure et extérieure (Eq.(4.7)-(4.10)) pour différents nombres de Reynolds : *(a)* $Re = 3000$ (SND), *(b)* $Re = 5000$ (SGE), *(c)* $Re = 10000$ (SGE) et *(d)* $Re = 30000$ (SGE).

à grand Reynolds pour expliquer la turbulence.

6.3.2 Quantités globales

Nous avons vu dans la section précédente que la dynamique tourbillonnaire était fortement dépendante du nombre de Reynolds du jet jusqu'à une valeur de l'ordre de $Re = 10000$. Au-delà de cette valeur, le jet est dans un état de "mixing transition" avec une tridimensionnalisation du jet (caractérisée par l'émergence des tourbillons longitudinaux) dès le début de la transition. Ces observations auront des conséquences importantes sur le développement global du jet. Le nombre de Reynolds affectera les quantités globales du jet comme son taux d'épanouissement. C'est ce que nous allons voir dans cette section.

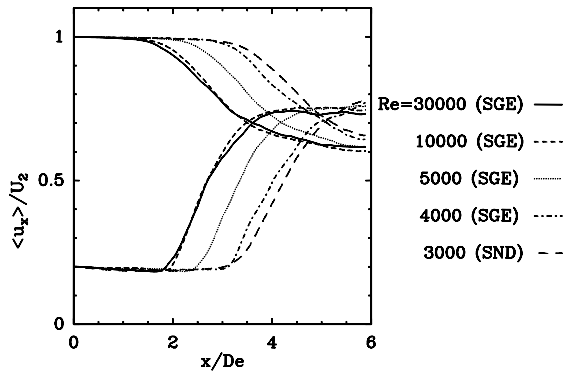


FIG. 6.8 – Evolution longitudinale de la vitesse longitudinale moyenne au milieu du jet central et du jet annulaire pour différents nombres de Reynolds.

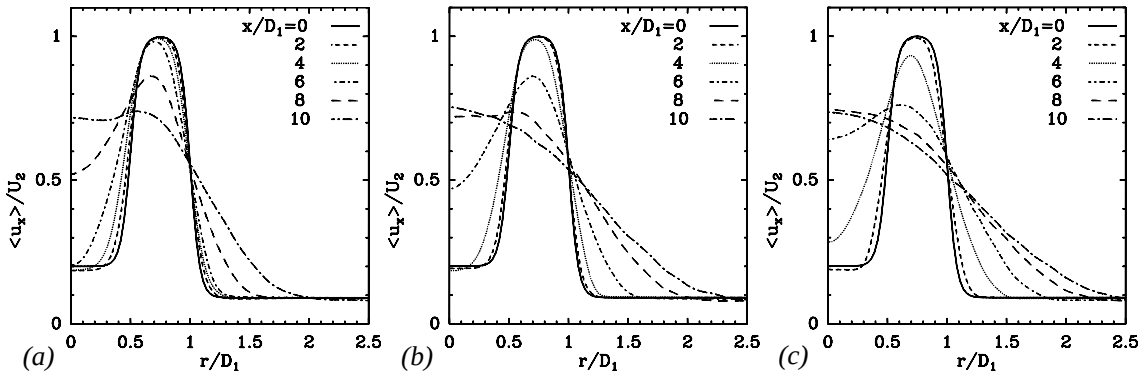


FIG. 6.9 – Profils de la vitesse longitudinale moyenne en différentes sections du jet pour trois nombres de Reynolds : *(a)* $Re = 3000$, *(b)* $Re = 5000$ et *(c)* $Re = 30000$.

La figure 6.8 montre l'évolution longitudinale de la vitesse longitudinale moyenne au centre des deux jets composant le jet coaxial pour différents nombres de Reynolds. Le nombre de Reynolds influence fortement l'évolution de ces quantités puisque l'émergence des tourbillons longitudinaux permet l'homogénéisation des vitesses issues du jet central et du jet annulaire. Pour d'importants nombres de Reynolds, les vitesses s'homogénéiseront alors plus rapidement (Fig.6.9) conduisant à une croissance de la vitesse du jet central et une décroissance de la vitesse

du jet annulaire plus précoces. Comme nous l'avons vu avec la longueur du cône potentiel extérieur, la figure 6.8 montre qu'au-delà d'un nombre de Reynolds de l'ordre de 10000, les vitesses moyennes sont quasi-indépendantes du nombre de Reynolds corroborant les observations de Dimotakis [36]. Il est également intéressant de comparer la figure 6.8 aux figures similaires (Fig.5.29 *(a)* et Fig.5.38 *(a)*) tracées dans le cas de forçages (pour un nombre de Reynolds de 3000). En effet, on peut noter que l'on ne retrouve pas la forte décroissance des vitesses moyennes en entrée du jet constatée dans le cas des forçages. Cela vient du fait que cette décroissance est due à l'entraînement causé par des tourbillons de Kelvin-Helmholtz plus intenses en raison de la composante temporelle du forçage. Or, les tourbillons de Kelvin-Helmholtz ne sont pas plus intenses pour d'importants nombres de Reynolds. L'entraînement en début de jet reste du même ordre et on ne retrouve alors qu'une légère décroissance de la vitesse moyenne au niveau du jet central en entrée du jet pour tous les nombres de Reynolds simulés. Cette constatation laisse penser que le modèle d'évaluation de la longueur du cône potentiel intérieur L_{P1} formulé par l'équation (4.20) reste valable à grand nombre de Reynolds.

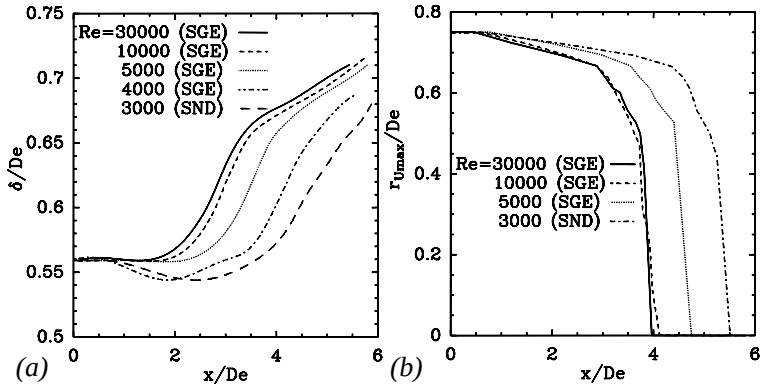


FIG. 6.10 – *(a)* Evolution de l'épaisseur du jet coaxial pour différents nombres de Reynolds. *(b)* Evolution de la localisation radiale du pic de vitesse longitudinale pour différents nombres de Reynolds.

L'influence du nombre de Reynolds sur les quantités globales du jet est essentiellement due à la tridimensionnalisation plus ou moins précoce du jet. La figure 6.10 *(a)* illustre l'évolution du taux d'épanouissement du jet pour différents nombres de Reynolds. La définition de cette quantité avait été donnée par analogie à la définition de l'épaisseur d'un jet simple par l'équation (4.1). Cette définition fait intervenir la localisation radiale de la vitesse maximale du jet en x notée $r_{max}(x)$ et définie tel que $\langle u_x(x, r_{max}(x))\rangle = \max(\langle u_x(x,r)\rangle)$. Lors de l'étude des jets coaxiaux à un nombre de Reynolds modéré, nous avions établi une évolution de $\delta(x)$ en deux étapes. Au début de la transition, $\delta(x)$ reste quasi-constant ou diminuait légèrement (en raison de l'envahissement du jet central par le jet annulaire) puis, l'épaisseur du jet croît de façon similaire à un jet simple (voir la discussion de la figure 4.10 au chapitre 4). Ce scénario se retrouve pour des nombres de Reynolds modérés (cas $Re = 3000$ et $Re = 4000$ sur la figure 6.10 *(a)*). Bien entendu, en raison d'une transition de plus en plus rapide pour d'importants nombres de Reynolds, la croissance de $\delta(x)$ débute de plus en plus tôt. Cependant, l'information la plus intéressante donnée par la figure 6.10 *(a)* est l'existence d'une troisième étape dans l'évolution de $\delta(x)$ pour d'importants nombres de Reynolds qui n'apparaissait pas dans nos SND. Nous voyons dans nos simulations de jets coaxiaux à nombre de Reynolds supérieur à 3000 que la croissance de $\delta(x)$ avec une pente identique à celle d'un jet rond est suivie par une croissance

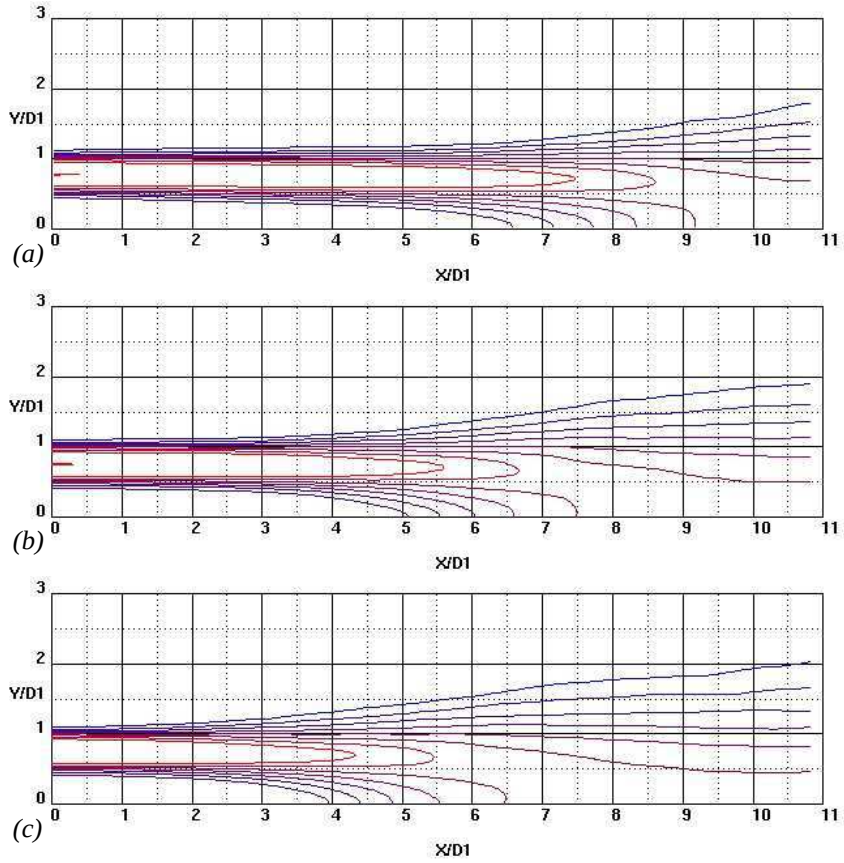


FIG. 6.11 – Isolignes de la vitesse longitudinale moyenne pour trois nombres de Reynolds : *(a)* $Re = 3000$, *(b)* $Re = 5000$ et *(c)* $Re = 30000$.

de $\delta(x)$ avec une pente plus faible. Ce changement de pente se rapproche de l'entrée du jet avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Ce changement de pente est caractéristique des jets coaxiaux de rapport de vitesse supérieur à l'unité. En effet, la région de transition dans ces jets coaxiaux est une région où il existe un intense transfert de quantité de mouvement qui aura pour conséquence l'homogénéisation des vitesses (conduisant ainsi le jet coaxial à un profil de vitesse proche d'un jet simple dans la région de turbulence pleinement développée) comme l'illustre la figure 6.9. La localisation radiale du pic de vitesse, initialement au niveau du jet extérieur ($r_{max} = R_m$), sera ainsi déplacé vers le centre du jet au cours de la transition. La région où r_{max} devient nul, c'est-à-dire lorsque le pic de vitesse est localisé au centre du jet coaxial, est définie comme le "point de rattachement" du jet car c'est le point où la couche cisaillée extérieure fusionne (voir Fig.6.10 *(b)*). Or, au-delà de ce point de rattachement, la fusion de la couche cisaillée extérieure implique une convergence des isolignes de vitesses moyennes au niveau de cette couche en direction du centre comme l'illustre la figure 6.11 qui montre l'évolution des isolignes de la vitesse longitudinale moyenne pour différents nombres de Reynolds. C'est la raison pour laquelle au-delà du point de rattachement, le jet croît avec une pente plus faible. Dans le cas des SND, le point de rattachement est trop proche de la fin du domaine de calcul pour que ce changement de pente soit remarquable. On peut également noter que les quantités globales $\delta(x)$ et r_{max} semblent quasi-indépendantes au nombre de Reynolds lorsque le jet est dans un état de "mixing transition".

6.3.3 Bulle de recirculation

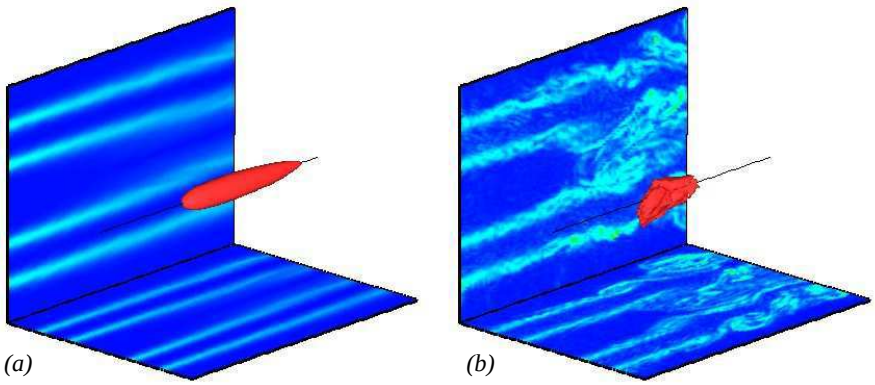


FIG. 6.12 – Illustration de la bulle de recirculation par une isosurface de vitesse nulle pour deux nombres de Reynolds : *(a)* $Re = 3000$ et *(b)* $Re = 10000$. L'écoulement autour de la bulle est également illustré par les plans centraux colorés par la norme de la vorticité. Pour une meilleure lisibilité les plans ont été artificiellement décalés du centre du jet.

Dans cette section, nous allons considérer le second régime d'écoulement des jets coaxiaux caractérisé par l'existence d'une bulle de recirculation proche de l'entrée du jet. Lorsque le rapport de vitesse r_u augmente, l'entraînement du fluide issu du jet intérieur par la couche cisaillée intérieure est de plus en plus prononcé. Si r_u dépasse une valeur critique r_{uc}, cet entraînement devient trop important et un écoulement de retour (associé à des vitesses longitudinales négatives) se crée définissant ainsi la bulle de recirculation. La figure 6.12 montre cette bulle de recirculation dans le cas de deux nombres de Reynolds différents : *(a)* $Re = 3000$ et *(b)* $Re = 10000$. Le nombre de Reynolds influence cette bulle de recirculation puisque la forme de la bulle est fortement dépendante de l'écoulement qui l'entoure comme nous l'avions déjà évoqué au chapitre 4. La bulle d'un jet coaxial ayant un nombre de Reynolds de 3000 a une forme "lisse" car elle est entourée par un écoulement quasi-laminaire alors que l'écoulement est déjà fortement déstabilisé pour $Re = 10000$ conduisant à une bulle de forme beaucoup plus complexe.

Le nombre de Reynolds influence non seulement la forme de la région de recirculation mais également la taille de cette région. En effet, le transfert de quantité de mouvement qui permet l'homogénéisation des vitesses entre le jet central et le jet annulaire a lieu plus tôt car la diffusion turbulente est plus importante à grand nombre de Reynolds. Cela implique une croissance plus rapide de la vitesse au centre du jet, avec pour conséquence une diminution de la région de recirculation pour les jets coaxiaux à grand Reynolds comme l'illustre la figure 6.13 *(a)*. Si la taille et la forme de la bulle sont fortement influencées par l'écoulement, la région de recirculation modifie également l'écoulement. En effet, nous avions vu au chapitre 4 que la région de recirculation agissait comme une source de vorticité axiale pour l'écoulement. Ceci persiste à grand Reynolds avec une croissance importante de l'écart-type de vorticité axiale juste après la bulle et donc bien plus proche du début du jet que des jets coaxiaux à même nombre de Reynolds mais sans bulle de recirculation (Fig.6.13 *(b)*). L'écoulement sera fortement déstabilisé par un mécanisme d'étirement longitudinal des tourbillons conduisant à une transition vers la turbulence plus rapide. La déstabilisation de l'écoulement induite par la recirculation est illustrée par la figure 6.14.

Les animations de jets coaxiaux à grand Reynolds (voir les animations liées au chapitre) ont

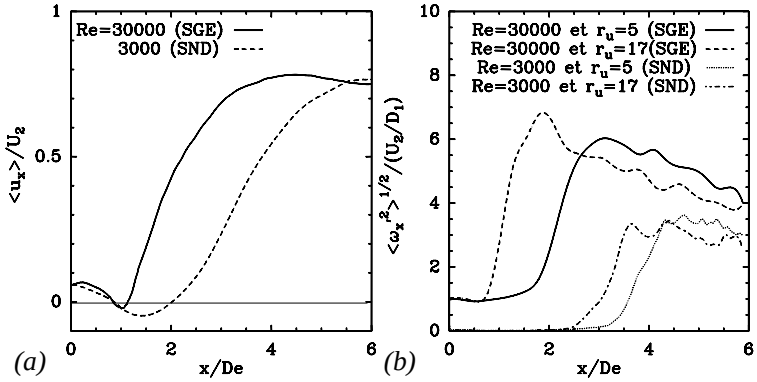


FIG. 6.13 – *(a)* Evolution de la vitesse longitudinale moyenne le long de l'axe central de jets coaxiaux possédant une région de recirculation pour deux nombres de Reynolds. *(b)* Evolution de l'écart-type de vorticité longitudinale le long de l'axe central du jet pour quatre simulations.

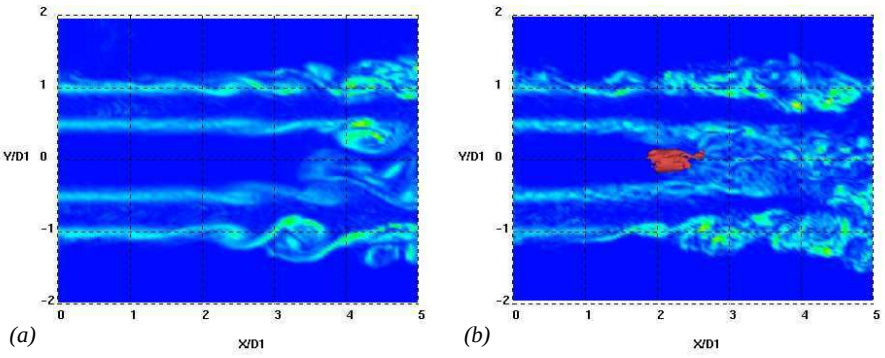


FIG. 6.14 – Contours de la norme de vorticité illustrant le champ proche de jets coaxiaux ($Re = 10000$) pour les deux régimes d'écoulement : sans bulle de recirculation *(a)* et avec une bulle de recirculation (en rouge sur la figure) *(b)*.

montré que la bulle n'était plus stationnaire contrairement aux cas à Reynolds plus modérés. En effet, il semble que la bulle de recirculation ait un mouvement oscillant comme l'avait déjà évoqué Rehab *et al.* [123] (voir la figure 2.21). Nous avons relevé la fréquence d'oscillation de la bulle de recirculation (Fig.6.15). Cette basse fréquence est de l'ordre d'un dixième de la fréquence de la couche cisaillée extérieure. Ce résultat corrobore les expériences de Rehab *et al.* [123] mais également les résultats d'autres configurations d'écoulement avec une région de recirculation : jets multiples [147], marche descendante [138]... Comme nous l'avons évoqué au chapitre 2, l'origine de cette oscillation viendrait de l'interaction entre les paquets de fluides convectés via la recirculation et les instabilités de la couche cisaillée [123]. On peut noter que cette interprétation est cohérente avec le fait que l'oscillation de la bulle de recirculation n'apparaît qu'à grand nombre de Reynolds, c'est-à-dire lorsque la couche cisaillée au niveau de la bulle de recirculation est déstabilisée.

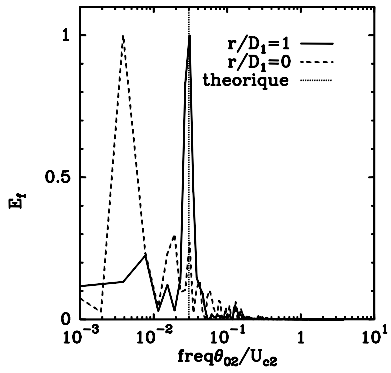


FIG. 6.15 – Spectres de fréquence du signal de vitesse longitudinale pour une jet coaxial ayant une région de recirculation, à Reynolds 10000. Les signaux sont relevés en $x/D_1 = 2$, pour $r/D_1 = 0$ (dans la bulle de recirculation) et pour $r/D_1 = 1$ (au niveau de la couche cisaillée extérieure). Les fréquences sont normées par les quantités caractéristiques de la couche cisaillée extérieure et l'énergie est normée par sa valeur maximum. La ligne verticale représente la valeur théorique pour la couche cisaillée extérieure. Les fréquences suivent une échelle logarithmique.

6.3.4 Turbulence pleinement développée

Avant d'étudier les propriétés de mélange des jets coaxiaux à grand Reynolds, nous allons examiner la région de turbulence pleinement développée de ces jets. Nous avons vu dans la section de validation de nos simulations (section 6.2) que les vitesses moyennes et les contraintes de Reynolds étaient auto-similaires dans cette région. Les relations de similitude sont établies à partir de notions de diamètre et de vitesse équivalents. En raison de cette auto-similitude, dans cette partie, nous allons étudier uniquement la région de turbulence pleinement développée du jet coaxial à Reynolds 30000 et un rapport de vitesse de 5.

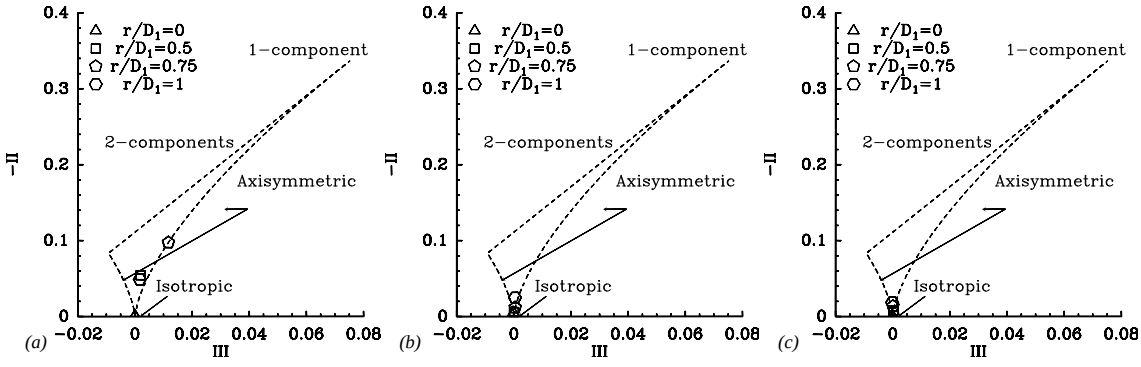


FIG. 6.16 – Carte d'anisotropie dans le cas du jet coaxial à Reynolds 30000 en trois positions longitudinales : *(a)* $x/D_e = 2,72$ $(x/D_1 = 5)$, *(b)* $x/D_e = 3,80$ $(x/D_1 = 7)$ et *(c)* $x/D_e = 4.9$ $(x/D_1 = 9)$.

La figure 6.16 montre les cartes d'anisotropie du jet en différentes sections longitudinales. Cette carte permet de connaître l'état de turbulence dans différentes régions de l'écoulement. Elle est construite à partir de deux des trois invariants du tenseur d'anisotropie (II et III) que nous avons définis au chapitre 4 (Eq.(4.3)-(4.6)). Dans le plan $(III, -II)$, le domaine admissible

se réduit à une triangle illustré en pointillé sur la figure. Dans ce plan, l'origine $II = III = 0$ caractérise l'isotropie et les deux segments en pointillé qui partent de cette origine (et qui sont les limites du domaine admissible) caractérisent une turbulence axisymétrique. Le long de ces segments, on peut distinguer la turbulence caractérisée par des structures dites "en cigares" pour $III > 0$ (où la composante axiale est prépondérante) et la turbulence caractérisée par des structures dites "en disques" pour $III < 0$ (donnant lieu à des structures bi-dimensionnelles axisymétriques). La figure 6.16 *(a)* montre cette carte pour $x/D_e = 2,72$ ($x/D_1 = 5$). On voit que le centre du jet coaxial ($r/D_1 = 0$) est déjà isotrope. Par contre, la couche cisaillée intérieure ($r/D_1 = 0,5$), le centre du jet annulaire $r/D_1 = 0,75$ et la couche cisaillée extérieure ($r/D_1 = 1$) sont encore le lieu d'un turbulence axisymétrique avec des structures "en cigares". Ces structures "en cigares" attestent de la prédominance des structures vorticitaires longitudinales comme nous l'avons évoqué plus haut. La turbulence dans ces régions tend rapidement vers l'isotropie (Fig.6.16 *(b)*). L'ensemble du cœur du jet est le lieu d'une turbulence isotrope dès $x/D_1 = 9$ (Fig.6.16 *(c)*). Cela indique que cette région est suffisamment loin du l'entrée du jet et que l'on peut y considérer l'auto-similitude.

La figure 6.17 montre les profils radiaux du tenseur de Reynolds normalisé par la relation de similitude dans la région de turbulence pleinement développée,

$$\frac{u_i' u_j'}{(\max(u_x(x,r)) - u_{co})^2} = f\left(\frac{r - 1/2D_e}{x}\right),$$

où u_{co} est la vitesse du faible co-courant. On peut noter que dans cette région, $\max(u_x(x,r))$ est la vitesse au centre du jet coaxial. Ces profils peuvent être comparés aux cas de jets ronds simples dont les profils auto-similaires sont représentés par la figure 6.18. Champagne et Wygnanski [20] avaient trouvé que les jets coaxiaux de rapport de vitesse inférieur à l'unité étaient semblables à des jets ronds dans la région de turbulence pleinement développée. Il est intéressant de remarquer que ce ne semble pas être le cas pour des jets coaxiaux de rapport de vitesse supérieur à l'unité. En effet, même si le profil de vitesse longitudinale moyen est proche de celui du jet rond simple dans cette région (voir Fig.6.2 *(a)*), il existe certaines différences entre les profils des tensions de Reynolds des jets coaxiaux et ceux des jets ronds simples. En effet, les contraintes normales (Fig.6.17 *(a)*, *(b)* et *(c)*) sont moins intenses dans le cas des jets coaxiaux. De plus, leur pic n'est plus situé au centre comme pour les jets simples. Ces pics sont décalés aux alentours de $r - 0,5D_e = 0$ c'est-à-dire au niveau de l'emplacement originel du jet annulaire. Cela est sans doute une conséquence de la domination du jet extérieur dans la dynamique des jets coaxiaux à forts rapports de vitesse. Une activité turbulente plus importante dans cette région peut être vue comme une réminiscence du profil initial du jet. Enfin, on peut noter que la contrainte de cisaillement (Fig.6.17 *(d)*) s'annule sur l'axe du jet et son pic correspond au point d'inflexion du profil de $\langle u_x \rangle$ (Fig.6.2 *(a)*)[9].

6.4 Mélange dans les jets coaxiaux à grand nombre de Reynolds

Dans cette partie, nous allons étudier le processus de mélange dans les jets coaxiaux à grand Reynolds. Nous nous plaçons dans le cas d'un jet coaxial à Reynolds 30000. Le traceur est initialement introduit dans le jet annulaire extérieur : $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$ dans l'équation (5.10).

[9]Cela est conforme à une loi gradient entre la contrainte de cisaillement et la vitesse moyenne :

$$-\langle u_x' u_r' \rangle \propto \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial r}$$

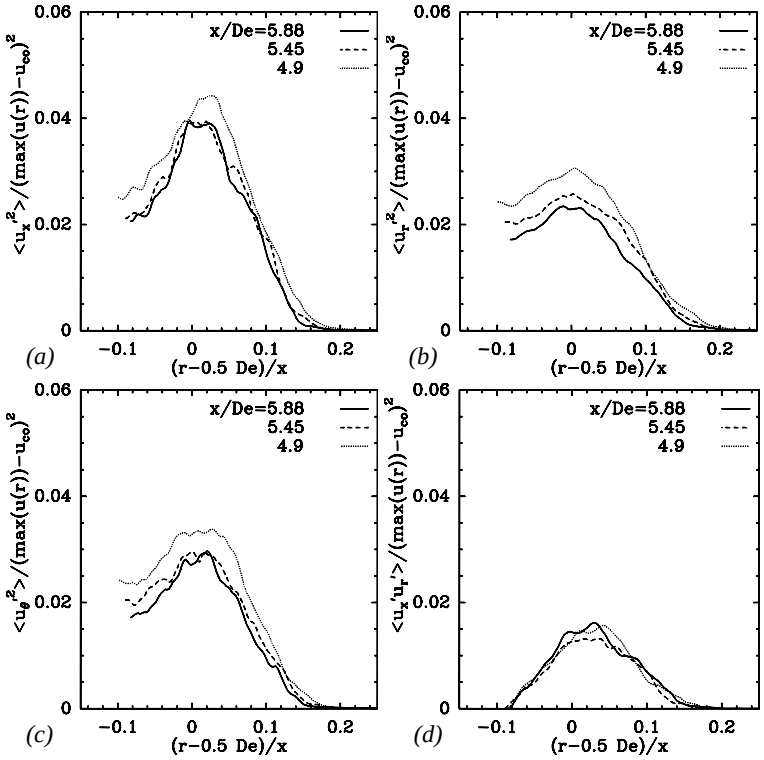


FIG. 6.17 – Profil des composantes du tenseur de Reynolds dans la région de turbulence pleinement développée pour le cas du jet coaxial à Reynolds 30000.

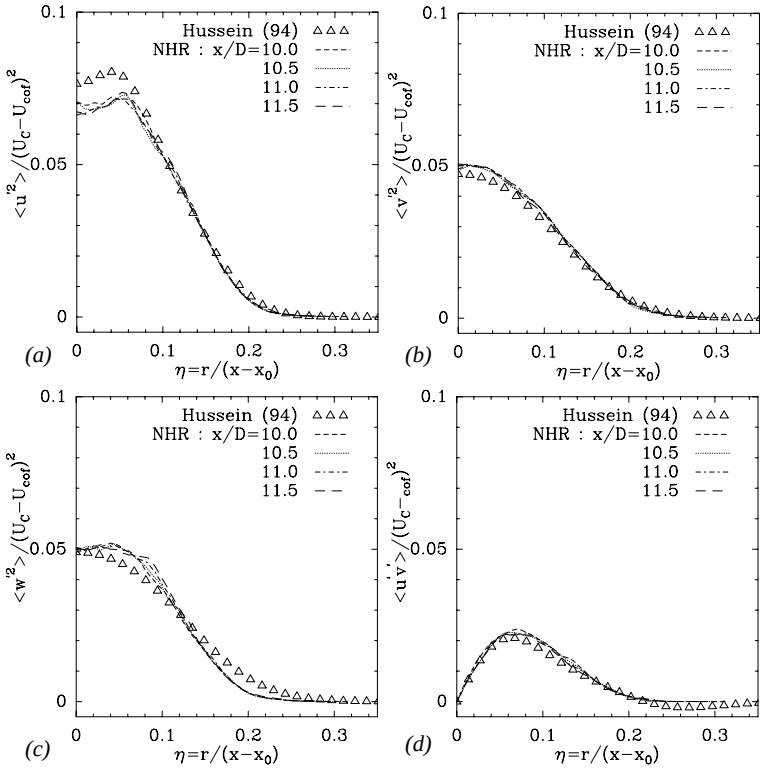


FIG. 6.18 – Profil des composantes du tenseur de Reynolds dans la région de turbulence pleinement développée pour un jet rond simple d'après les données expérimentales de Hussein *et al.* [70] et les données numériques de da Silva [133].

Nous simulons deux rapports de vitesses, $r_u = 5$ et $r_u = 17$ afin d'étudier les cas avec et sans bulle de recirculation. Afin de pouvoir réaliser cette simulation, nous devons résoudre numériquement l'équation filtrée de transport du traceur.

6.4.1 Simulation des grandes échelles de l'équation de transport d'un scalaire passif

De la même façon que nous avons obtenu les équations (6.3) et (6.4) du filtrage des équations (3.1) et (3.2), nous obtenons l'équation filtrée de transport d'un scalaire passif à partir de l'équation (5.1) :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{f u_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa_D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\right). \tag{6.18}$$

Cette équation fait ainsi apparaître le terme $\overline{f u_i}$ qui doit être modélisé pour permettre la fermeture de l'équation. On peut faire intervenir le flux de scalaire sous-maille $T_i = \bar{f}\bar{u_i} - \overline{f u_i}$ et l'équation (5.1) devient :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}\bar{u_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa_D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} + T_i\right). \tag{6.19}$$

En faisant l'hypothèse d'une diffusivité sous-maille κ_T de façon identique à l'hypothèse de viscosité sous-maille (Eq.(6.6)), le flux de scalaire sous-maille peut-être modélisé par :

$$T_i = \kappa_T \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}. \tag{6.20}$$

L'équation (6.19) devient alors

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}\bar{u_i}}{\partial x_i} = (\kappa_D + \kappa_T)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial {x_i}^2}. \tag{6.21}$$

Afin d'évaluer la diffusivité sous-maille κ_T, on peut faire une hypothèse d'équilibre local en disant que le taux de dissipation de la variance du scalaire ϵ_f est égal au flux scalaire échangé entre les échelles résolues et les échelles sous-mailles (voir Métais et Lesieur [108]). Ainsi,

$$\int_0^{k_c} 2\kappa_T k^2 E_f(k) dk = \epsilon_f, \tag{6.22}$$

avec E_f le spectre de la variance scalaire. Si on suppose un spectre suivant la loi de Corrsin-Oboukhov,

$$E_f(k) = C_{CO}\epsilon_f \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} \text{ (C_{CO} constante de Corrsin-Oboukhov)},$$

on a

$$1 = \frac{3}{2}\kappa_T C_{CO} \epsilon^{-1/3} k_c^{4/3}.$$

En reprenant l'expression de ν_T déduite de l'équation (6.8),

$$\nu_T = \frac{2}{3} C_K^{-1} \epsilon^{1/3} k_c^{-4/3},$$

on obtient l'expression d'un nombre de Schmidt turbulent Sc_T,

$$Sc_T = \frac{\nu_T}{\kappa_T} = \frac{C_{CO}}{C_K}. \tag{6.23}$$

Cette expression conduit à un nombre de Schmidt turbulent constant de l'ordre de $0,7$.

La modélisation sous-maille avec un nombre de Schmidt turbulent constant est la modélisation sous-maille la plus simple. Elle reste fortement répandue pour la simulation des grandes échelles en raison de son faible coût de calcul. Cependant, des modèles plus sophistiqués existent. Par exemple, Moin *et al.* [112] ont généralisé la procédure dynamique proposée par Germano *et al.* [56] au transport d'un scalaire. Ce modèle conduit à un nombre de Schmidt turbulent non constant qui reproduit, entre autre, sa dépendance avec le nombre de Schmidt moléculaire ou avec la direction du gradient du scalaire. Ce modèle reste cependant assez coûteux en temps de calcul et il est donc difficile de l'utiliser systématiquement.

6.4.2 Influence du nombre de Reynolds

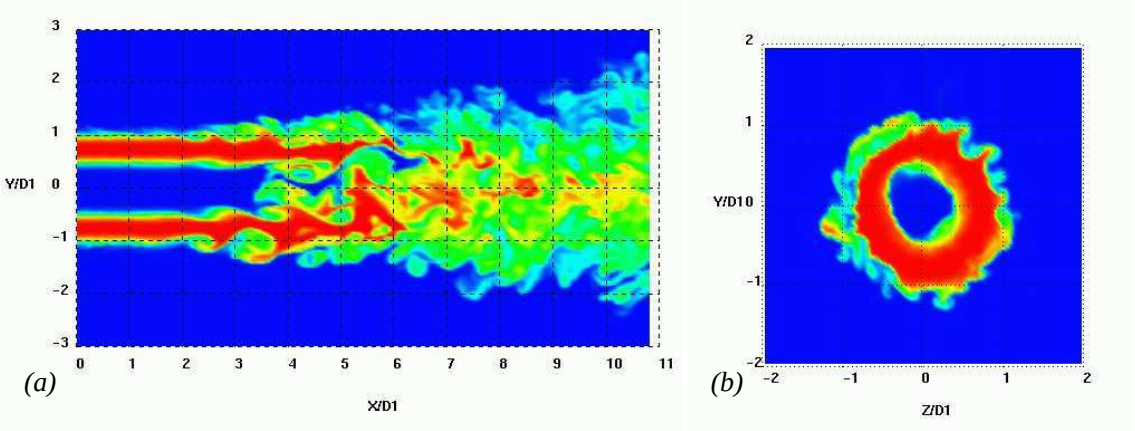


FIG. 6.19 – Contours instantanés de la fraction de mélange f dans un jet coaxial avec $Re = 30000$ et $r_u = 5$: *(a)* dans le plan central du jet et *(b)* dans une section transverse à $x/D_1 = 2,5$. f varie de 0 (en bleu) à 1 (en rouge).

La figure 6.19 *(a)* montre les contours instantanés de la fraction de mélange dans le plan central d'un jet coaxial à grand Reynolds. Elle permet une première illustration qualitative du mélange. Dans le chapitre étudiant le mélange dans des jets coaxiaux à nombre de Reynolds modéré, nous avions vu que la première étape du mélange était dominée par la diffusion moléculaire du traceur à travers les deux couches cisaillées. Pour des nombres de Reynolds élevés, cette étape est sensiblement réduite. En effet, l'émergence dès le début du jet des tourbillons longitudinaux (en raison du phénomène de "mixing transition") permet d'initier très rapidement un mélange turbulent au niveau des couches cisaillées. Ces tourbillons longitudinaux impliquent des éjections du traceur issu du jet annulaire conduisant à des structures en "champignon" comme nous l'avons déjà vu. Ces éjections sont très rapidement visibles à grand Reynolds comme le montre la figure 6.19 *(b)*. De plus, on voit que le nombre d'éjections est plus important, en accord avec la théorie de Saffmann [128] qui montre que le nombre de paires de tourbillons longitudinaux augmentait avec le nombre de Reynolds. D'une façon générale, le phénomène de "mixing transition" améliore la qualité du mélange turbulent. La figure 6.19 *(a)* montre qu'au-delà de $x/D_1 \approx 4$, le traceur envahit le centre du jet. Ensuite, l'émergence rapide de petites structures turbulentes permet d'homogénéiser le mélange. A la fin du domaine de calcul, il n'y a plus de poches de fluide pur (non mélangé) contrairement aux simulations à plus faibles nombres de Reynolds.

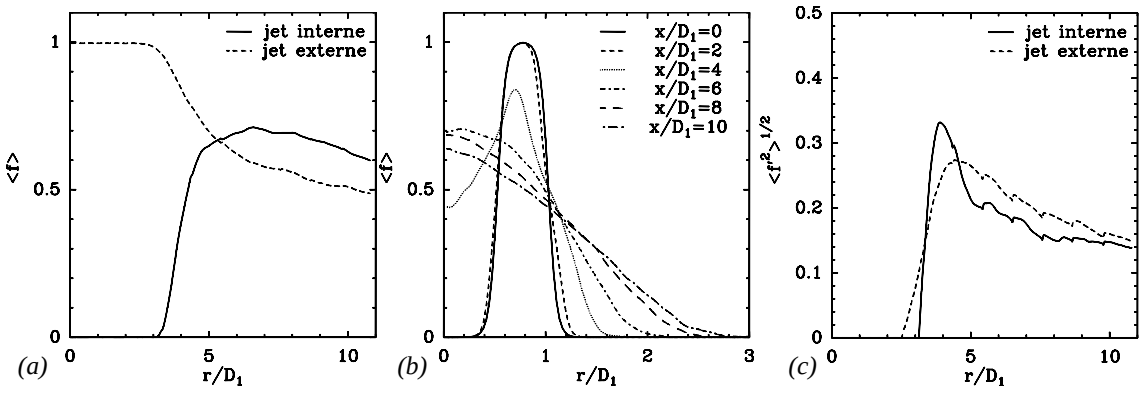


FIG. 6.20 – Statistiques concernant le mélange dans un jet coaxial à $Re = 30000$ et $r_u = 5$. *(a)* Evolution longitudinale de la fraction de mélange moyenne. *(b)* Profils radiaux de la fraction de mélange moyenne en différentes sections du jet. *(c)* Evolution longitudinale de l'écart-type de fraction de mélange.

Les statistiques de la fraction de mélange illustrées par la figure 6.20 confirment quantitativement les conclusions tirées des visualisations instantanées. La figure 6.20 *(a)* illustre l'évolution de la fraction de mélange moyenne dans le jet interne et dans le jet annulaire. On voit que $\langle f \rangle$ diminue et augmente respectivement dans le jet interne et le jet externe dès $x/D_1 \approx 3$ au lieu de $x/D_1 \approx 5$ pour le jet de nombre de Reynolds de 3000 (Fig.5.6 *(a)*). Cela est dû au rapide développement des structures turbulentes qui raccourcit la phase dominée par la diffusion moléculaire. Le mélange turbulent est alors initié plus tôt comme le montre l'écart-type de fraction de mélange (Fig.6.20 *(c)*). On peut noter que le pic d'écart-type de fraction de mélange au niveau du jet interne en $x/D_1 \approx 4$ est important car c'est dans cette région que le traceur commence à envahir le centre du jet. C'est donc une région d'intense mélange turbulent. On retrouve également (Fig.6.20 *(a)*) que l'augmentation de $\langle f \rangle$ dans le jet interne est plus importante que la diminution de $\langle f \rangle$ dans le jet annulaire, montrant ainsi que la quantité de traceur envahissant le centre du jet est plus importante que la quantité de fluide pur (sans traceur) envahissant le jet annulaire. Cela est dû à l'important transfert de quantité de mouvement qui aura pour conséquence de confiner le fluide issu du jet central (voir section 5.3.1). La forte invasion du traceur au centre du jet est illustrée par la figure 6.20 *(b)*) qui représente des profils de la fraction de mélange moyenne en différentes sections du jet. Si on compare au cas à nombre de Reynolds modéré (Fig.5.6 *(b)*), on remarque bien entendu qu'ici cette invasion se produit plus tôt. De plus, l'étape où la fraction de mélange au centre des jets est conservée et où l'épaisseur des couches cisaillées croît sous l'action des tourbillons de Kelvin-Helmholtz n'apparaît pas dans les simulations à grand Reynolds car il y a rapidement apparition des éjections dues aux paires de tourbillons longitudinaux.

6.4.3 Influence de la bulle de recirculation

Dans cette partie, nous étudions le rôle joué par la bulle de recirculation sur le processus de mélange. Nous allons retrouver des effets semblables à ceux déjà évoqués lors de l'étude à nombre de Reynolds modéré. La figure 6.21 montre les contours instantanés de la fraction de mélange dans le plan central d'un jet coaxial à grand Reynolds et possédant une région de recirculation. L'écoulement de retour qui crée la région de recirculation permet une invasion du traceur dès

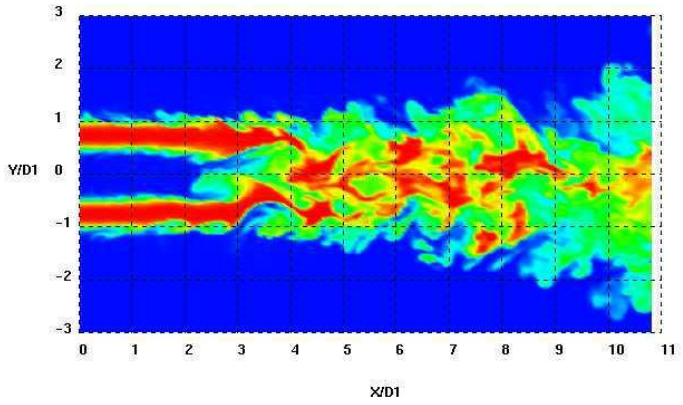


FIG. 6.21 – Contours instantanés de la fraction de mélange f dans un jet coaxial à $Re = 30000$ et $r_u = 17$ (avec une bulle de recirculation) dans le plan central du jet.

$x/D_1 \approx 2$ (qui correspond à la localisation de la bulle). Cela permet au mélange entre les espèces de se produire plus tôt. Par exemple, la figure 6.21 montre que le centre du jet annulaire (en $y/D_1 \approx 0,75$) ne contient plus uniquement du traceur ($f < 1$) dès $x/D_1 \approx 3,5$ alors que dans le cas sans bulle de recirculation cela n'arrive que pour $x/D_1 \approx 4,5$ (Fig.6.19 *(a)*).

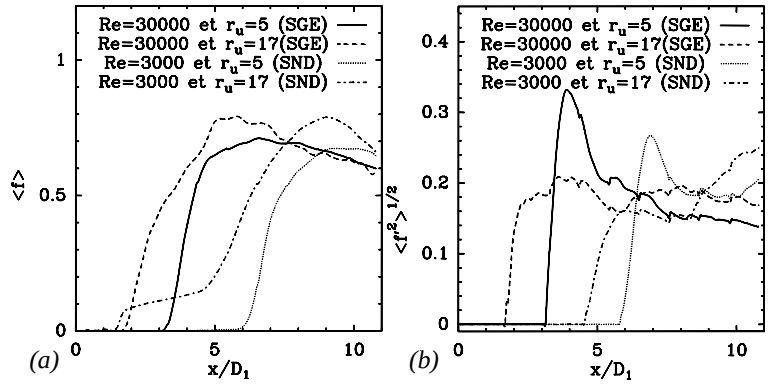


FIG. 6.22 – *(a)* Evolution de la fraction de mélange moyenne le long de la ligne centrale du jet pour quatre simulations. *(b)* Evolution de l'écart-type de fraction de mélange le long de la ligne centrale du jet pour quatre simulations.

Ces observations sont corroborées pas les statistiques de la fraction de mélange. La figure 6.22 montre l'évolution de la fraction de mélange moyenne *(a)* et de l'écart-type de fraction de mélange *(b)* le long de l'axe du jet pour quatre simulations : à grand et faible nombre de Reynolds et avec et sans région de recirculation. On retrouve pour les deux nombres de Reynolds considérés une invasion précoce du traceur au centre du jet en présence d'une bulle de recirculation (Fig.6.22 *(a)*). Dans le cas à grand Reynolds, la région de recirculation ayant un comportement turbulent (contrairement au cas à faible Reynolds), la croissance de $\langle f \rangle$ ne se fait plus en deux étapes comme nous l'avions vu au chapitre précédent. De plus, l'activité turbulente induite par la bulle de recirculation (due au mécanisme d'étirement longitudinal) permet d'initier le mélange turbulent plus tôt (Fig.6.22 *(b)*). Enfin, il est intéressant de noter

que la présence de la bulle de recirculation permet une invasion plus progressive du traceur au centre du jet. Le pic d'écart-type de fraction de mélange est plus proche de l'entrée du jet mais il est de moindre intensité dans le cas de la bulle de recirculation (à grand et faible nombre de Reynolds).

6.4.4 Qualité du mélange

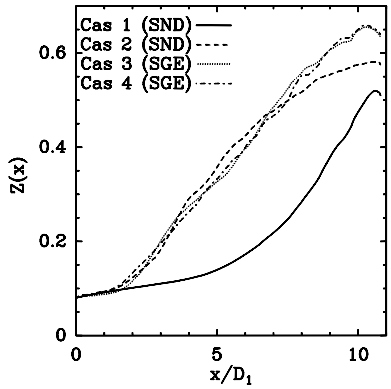


FIG. 6.23 – Evolution longitudinale du "mixedness" global pour quatre simulations. Cas 1 : jet coaxial naturel à $Re = 3000$ et $r_u = 5$ - SND / Cas 2 : jet coaxial à $Re = 3000$ et $r_u = 5$ forcé par une excitation azimutale de nombre d'onde 5 - SND / Cas 3 : jet coaxial à $Re = 30000$ et $r_u = 5$ - SGE / Cas 4 : jet coaxial à $Re = 30000$ et $r_u = 17$ (avec une bulle de recirculation) - SGE.

Pour conclure ce chapitre, nous pouvons examiner le "mixedness" global du processus de mélange dans les jets coaxiaux à grand Reynolds. Le "mixedness" global, noté $Z(x)$, a été défini par l'équation (5.17). Cette quantité, relativement commode à calculer, peut être vue comme une mesure de l'efficacité de mélange. Si on considère un mélange bi-moléculaire, $Z(x)$ varie entre 0 quand il n'y a pas de mélange entre les espèces et 1 pour un mélange complet. $Z(x)$ est calculé sur une section circulaire. Afin de prendre en compte l'ensemble de la région où il y a du mélange, le rayon de la section considéré est de $3,5D_1$.

La figure 6.23 montre l'évolution du "mixedness" global pour quatre simulations. Les deux premiers cas sont des simulations directes de jets coaxiaux de nombre de Reynolds 3000. Le premier cas correspond à un jet naturel sans région de recirculation alors que le second cas correspond au jet forcé par une excitation azimutale de nombre d'onde 5 (voir le chapitre 5). Le deux derniers cas correspondent aux simulations des grandes échelles de jets coaxiaux à Reynolds 30000 avec et sans bulle de recirculation. Le phénomène de "mixing transition" dans le cas des jets coaxiaux à grand Reynolds permet une nette amélioration du mélange lors de la transition du jet car le mélange turbulent débute plus tôt. Il est intéressant de noter que durant la transition, $Z(x)$ est identique dans les cas à grand Reynolds et dans le cas du jet forcé à faible Reynolds. Cela contribue à montrer l'efficacité du forçage en ce qui concerne le mélange. Enfin, la domination de $Z(x)$ en fin de domaine de calcul dans le cas à grand nombre de Reynolds sur le cas du jet à faible nombre de Reynolds forcé s'explique par l'existence de petites échelles qui homogénéisent mieux les espèces. En effet, le forçage permet un développement précoce de petites structures turbulentes mais ne permet pas de diminuer la taille des plus petites échelles turbulentes qui est définie par la viscosité (et donc par le nombre de Reynolds).

6.5 Animations liées au chapitre

Afin d'illustrer certains résultats de ce chapitre, nous avons joint trois animations au format MPEG dont voici le détail :

anim61.mpg Simulation d'un jet coaxial de nombre de Reynolds de 10000 et de rapport de vitesse de 5. Isosurface de $Q = (U_2/D_1)^2$ colorée par la vorticité longitudinale. Mise en évidence de l'apparition précoce des tourbillons longitudinaux.

anim62.mpg Illustration de la bulle de recirculation pour deux simulations : $Re = 3000$ (gauche) et $Re = 10000$ (droite). La bulle est visualisée par une isosurface de vitesse longitudinale nulle. L'écoulement autour de la bulle est également illustré par les plans centraux colorés par la norme de la vorticité et qui ont été artificiellement décalés du centre du jet pour une meilleure lisibilité.

anim63.mpg Plan central coloré par la fraction de mélange dans le cas d'un jet coaxial à Reynolds 30000 (sans région de recirculation). On montre également deux sections transverses. La fraction de mélange va du bleu ($f = 0$) au rouge ($f = 1$).

Chapitre 7

Conclusions générales

Ce travail avait pour objectif d'étudier numériquement le développement de jets coaxiaux turbulents où le jet annulaire extérieur et plus rapide que le jet rond central. Cette étude s'est poursuivie suivant trois axes principaux. Le premier portait sur l'étude de la dynamique tourbillonnaire et l'influence des paramètres d'entrée pour un jet coaxial à nombre de Reynolds modéré. Le second consistait à étudier le processus de mélange de ces jets en s'attachant à comprendre le rôle des structures cohérentes. Le troisième axe a porté sur les modifications de la dynamique de l'écoulement et son influence sur le processus de mélange pour des jets coaxiaux à grand nombre de Reynolds.

L'étude de jets coaxiaux à nombre de Reynolds modéré a été réalisée à l'aide de simulations numériques directes. Les différentes étapes de la transition du jet vers un état de turbulence pleinement développée étant bien distinctes, nous avons pu étudier finement la dynamique de l'écoulement. Nous avons ainsi mis en évidence certains comportements spécifiques des jets coaxiaux comme le pincement du jet central par le cône potentiel extérieur qui implique un léger déficit du taux d'épanouissement du jet au début de la transition. De plus, nous avons détaillé le mécanisme d'apparition d'une région de recirculation sous certaines conditions d'écoulement. En effet, lorsque le rapport de vitesse entre le jet annulaire et le jet central dépasse une valeur critique, le fluide entraîné par la couche cisaillée intérieure est plus important que le fluide amené par le jet central nécessitant ainsi un retour du fluide issu de l'aval et créant une bulle de recirculation. Dans la configuration d'écoulement considérée, le fluide entourant la bulle est peu déstabilisé et cette bulle a un comportement stationnaire. L'étude a ensuite porté sur la dynamique des structures cohérentes dans cette configuration d'écoulement. On a ainsi montré que les anneaux tourbillonnaires naissant de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz au niveau des couches cisaillées intérieure et extérieure étaient couplés. En effet, les anneaux naissant sur la couche cisaillée extérieure sont conformes aux prédictions de la théorie de stabilité linéaire avec une fréquence de passage conduisant à un nombre de Strouhal de $0,033$. Par contre, les anneaux internes ne suivent pas cette théorie. Les anneaux internes se logent entre deux anneaux externes consécutifs et sont donc convectés avec la même fréquence de passage. C'est le phénomène de "locking". La suite de la transition consiste en l'émergence de tourbillons longitudinaux qui apparaissent par paires contra-rotatives. Le mécanisme d'étirement tourbillonnaire qu'ils induisent mène à la tridimensionnalisation du jet. La bulle de recirculation modifie sensiblement la dynamique tourbillonnaire. Elle ralentit les anneaux de Kelvin-Helmholtz intérieurs passant à sa proximité. De ce fait, les fréquences des couches cisaillées interne et externe ne sont plus égales. De plus, elle agit comme une source de vorticité longitudinale conduisant à un étirement longitudinal des anneaux et accélérant ainsi la tridimensionnalisation du jet. L'étude s'est terminée par l'analyse de l'influence de l'épaisseur de quantité de mouvement intérieur initiale du jet.

De faibles valeurs de cette épaisseur impliquent une transition plus précoce du jet en raison de la déstabilisation rapide de la couche cisaillée interne. De plus, l'influence de ce paramètre sur les quantités globales du jet a pu être mis en évidence par le développement de deux modèles théoriques prédisant la longueur du cône potentiel intérieur et la valeur du rapport de vitesse critique au-delà duquel la région de recirculation émerge.

Afin d'étudier le processus de mélange dans les jets coaxiaux, nous avons implémenté la résolution de l'équation de transport d'un scalaire passif dans notre code de calcul. Cette équation est résolue simultanément aux équations de Navier-Stokes. La résolution de cette équation de transport a été validée par une configuration de jet plan. Dans un premier temps, nous avons étudié le mélange dans une configuration de jets coaxiaux à un nombre de Reynolds modéré afin de pouvoir réaliser des simulations numériques directes. Nous avons étudié le mélange en introduisant initialement un traceur "numérique" par le jet annulaire et en suivant l'évolution spatiale et temporelle de la proportion de ce traceur (ou fraction de mélange). Le processus de mélange a été étudié en portant une attention particulière au rôle joué par les structures cohérentes de l'écoulement. Après une phase dominée par la diffusion moléculaire, le développement des anneaux de Kelvin-Helmholtz permet un mélange des espèces aux niveaux des couches cisaillées. Ensuite, le mélange turbulent est nettement amélioré lors de l'émergence des tourbillons longitudinaux. Ces paires de tourbillons contra-rotatifs sont responsables d'éjections radiales du traceur en périphérie du jet annulaire. Ces éjections conduisent le traceur à des structures en "champignon" dans les sections transverses. Le fort transfert de quantité de mouvement du jet annulaire vers le centre du jet (caractéristique des jets coaxiaux à fort rapport de vitesse) implique une forte invasion du traceur au centre du jet au-delà du cône potentiel interne et un confinement du fluide issu du jet central (confirmé par l'étude d'une configuration où le traceur est introduit par le jet central). Cependant, d'importantes quantités de traceur non mélangé persistent sous forme de poches à la fin du domaine de calcul dans la configuration initiale de l'écoulement. La suite de l'étude s'est alors poursuivie en considérant l'influence des paramètres d'entrée du jet. La diminution des quantités de fluide non mélangé à la fin de la transition est principalement due à une génération intense ou précoce des tourbillons longitudinaux. C'est ce que permet la bulle de recirculation par le phénomène d'étirement tourbillonnaire longitudinal ou encore c'est ce que permettent des valeurs plus faibles des épaisseurs initiales de quantité de mouvement en déstabilisant plus rapidement les couches cisaillées. Finalement, cette étude s'est achevée en examinant le mélange dans des jets coaxiaux forcés. Nous avons testé deux types d'excitations d'amplitude modérée : l'excitation axisymétrique et l'excitation azimutale. Les paramètres de ces excitations sont définis à partir de l'étude des jets coaxiaux naturels. Nous ne forçons que la couche cisaillée extérieure en raison de sa domination sur la dynamique de l'écoulement. La composante temporelle de ces forçages permet la génération d'intenses tourbillons de Kelvin-Helmholtz qui accélèrent le mélange des espèces au niveau des couches cisaillées. De plus, la déformation azimutale des anneaux de Kelvin-Helmholtz extérieurs impliquée par le second type de forçage permet une apparition rapide des tourbillons longitudinaux améliorant sensiblement le mélange en conduisant rapidement à des éjections intenses du traceur. Ces forçages permettent alors une meilleure homogénéisation des espèces à la fin de la transition.

Pour finir, afin de se rapprocher des applications réelles, nous avons simulé des jets coaxiaux à des nombres de Reynolds plus importants. Les simulations directes n'étant plus envisageables, nous avons réalisé des simulations des grandes échelles. Cette technique de simulation consiste à simuler directement les mouvements à grande échelle du fluide et à modéliser l'influence des plus petites échelles. Nous avons utilisé le modèle de la fonction de structure filtrée pour prendre en compte l'action des petites échelles. Nos simulations des grandes échelles de jets coaxiaux

pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 30000 ont été validées par comparaison à des résultats expérimentaux. Ces comparaisons sont possibles grâce à une auto-similitude des jets en turbulence pleinement développée. La relation d'auto-similitude fait intervenir les notions de diamètre et vitesse équivalents. L'influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement est important. Nous avons mis en évidence le phénomène de "mixing transition" qui implique une tridimensionnalisation immédiate du jet pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10000. Cette tridimensionnalisation est due à l'émergence de tourbillons longitudinaux dès le début du jet et elle permet une transition rapide. Les quantités globales de l'écoulement sont également influencées par le nombre de Reynolds. Alors qu'elles dépendent fortement du nombre de Reynolds pour $Re < 10000$, ces quantités sont quasi-indépendantes du nombre de Reynolds pour des jets en état de "mixing transition". L'étude de jets à grand nombre de Reynolds a également permis de constater un comportement particulier du taux d'épanouissement des jets coaxiaux. En effet, la croissance de ce taux connaît un changement de pente (et croît alors avec une pente plus faible) lorsque la couche cisaillée extérieure fusionne au centre du jet, c'est-à-dire au point de rattachement. Ceci est dû à la courbure des isolignes moyennes impliquée par l'invasion du jet annulaire dans le jet central. La bulle de recirculation, existante pour de très grands rapports de vitesse, est dépendante de l'écoulement qui l'entoure. La bulle de recirculation d'un jet coaxial à haut nombre de Reynolds sera alors plus courte en raison d'une diffusion turbulente de la quantité de mouvement plus importante. De plus, nous avons retrouvé le comportement instationnaire de la bulle de recirculation évoqué dans la littérature. L'étude de la turbulence pleinement développée des jets coaxiaux à fort rapport de vitesse a montré l'auto-similitude des tensions de Reynolds. Les profils des composantes du tenseur de Reynolds ont des pics localisés au niveau du jet externe et non au centre du jet. A la lumière de ces observations, nous avons examiné les modifications du processus de mélange dues au phénomène de "mixing transition". Cela permet une nette amélioration du mélange avec un phénomène d'éjection du traceur proche de l'entrée du jet. De plus, la bulle de recirculation permet une invasion du traceur au centre du jet plus précoce et le phénomène d'étirement longitudinal des tourbillons dû à la présence de la bulle conduit à un mélange turbulent qui débute plus tôt.

Une suite logique de ce travail serait l'étude de jets coaxiaux composés d'un jet interne et d'un jet externe de densités différentes. Dans ce cas, il ne faudrait plus considérer le rapport de vitesse mais le rapport des flux de quantité de mouvement entre les deux jets. Sous certaines conditions d'écoulemement, la domination du jet externe sur la dynamique tourbillonnaire pourrait être remise en cause. Dans un premier temps, un code numérique utilisant des méthodes "faible Mach" [28] pourrait être développé afin de ne considérer que les effets dus à la différence de densité sans tenir compte d'effet de compressibilité. Ensuite, ces effets pourraient être pris en compte par des calculs de jets coaxiaux compressibles. A plus long terme, on peut également envisager de ne plus considérer un scalaire passif mais d'inclure les réactions chimiques dans notre code de calcul. Finalement, afin de se rapprocher des configurations réelles d'utilisation de ces jets coaxiaux, des calculs diphasiques devraient être envisagés. Il faudrait également envisager des calculs plus complexes incluant la buse dans le domaine de calcul. En effet, la géométrie de cette buse peut avoir une influence importante sur le développement du jet (en dehors de l'influence sur les épaisseurs initiales de quantité de mouvement). Par exemple, Juniper et Candel [72] ont récemment montré qu'un retrait de la buse du jet interne pouvait conduire à l'apparition d'une large région absolument instable (entre la fin de la buse interne et la fin de la buse externe).

Quatrième partie

Articles

JoT JOURNAL OF TURBULENCE

http://jot.iop.org/

Transition in high velocity ratio coaxial jets analysed from direct numerical simulations

Carlos B da Silva[1], Guillaume Balarac and Olivier Métais[2]

Equipe MoST/LEGI/Institut de Mécanique de Grenoble, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 09, France
E-mail: olivier.metais@hmg.inpg.fr

Received 25 April 2003
Published 8 July 2003

Abstract. Direct numerical simulations are performed to analyse the instability, transition scenario and resulting topology from high velocity ratio coaxial jets ($r_u = 3.3$ and 23.5). The inner and outer shear layers roll up into axisymmetric vortex rings due to the Kelvin–Helmholtz instability. For $r_u = 3.3$ the outer primary vortices evolve according to the theory considering an isolated mixing layer profile, and impose their evolution upon the inner structures which are 'locked' into the outer ones. For $r_u = 23.5$ there is a big recirculation region that does not affect the development of the Kelvin–Helmholtz instabilities. The preferred mode for simple (non-coaxial) round jets is well recovered at the end of the potential core region in the case $r_u = 3.3$ but not when $r_u = 23.5$ due to the presence of the backflow region. The structure of the preferred mode is the same in both cases, however, and consists in a helical arrangement ($m = 1$). Finally, when the bubble is present one can see that the inner streamwise structures, corresponding to the secondary instabilities, are stretched by the presence of the bubble which acts as an additional source of axial vorticity production.

PACS numbers: 47.27.Wg, 47.27.Eq, 47.27.Cn

[1] Present address: Instituto Superior Ticnico, LASEF, Dep. Eng. Mecbnica, Pav. Mecbnica 1, 1: andar, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal.
[2] Author to whom any correspondence should be addressed.

2003 IOP Publishing Ltd PII: S1468-5248(03)62644-5 1468-5248/03/000001+18$30.00

Contents

1 Introduction **2**

2 Numerical method **4**

3 Direct numerical simulations of coaxial jets **4**

4 Results and discussion **6**

4.1 Global flow picture 6

4.1.1 Visualizations. 6

4.1.2 Statistics. 8

4.2 Instabilities and transition 12

4.2.1 Primary instabilities: jet shear layer mode. 12

4.2.2 Primary instabilities: jet preferred mode. 14

4.2.3 Secondary instabilities. 16

5 Conclusions **17**

Acknowledgment **17**

References **18**

1. Introduction

Coaxial jet flows are often used in industrial applications as an effective way of mixing two different fluid streams (e.g. mixing air and combustible in jet engines). A coaxial jet is made when a fluid stream with velocity U_2, issuing from an outer annulus of diameter D_2, is added into a round jet flow with velocity U_1, and (inner) nozzle diameter D_1 ($D_1 < D_2$). Annular jets correspond to the case when there is no inner fluid stream, $U_1 = 0$.

It is well known that small scale mixing is mainly governed by the small scale turbulence level, whereas large scale mixing is controlled by the large scale coherent structures. It is therefore very important to understand the detailed dynamics of these structures, even in simpler flow configurations (i.e. constant density and low Reynolds numbers). In this context, several authors analysed the impact of the global flow parameters in the subsequent topology of coaxial jets [1, 2].

The existence of two (inner and outer) shear layer regions was evidenced by Ko and Kwan [3] and Kwan and Ko [4] in coaxial jets, through the observation of two different peak spectrum frequencies corresponding to the passing frequencies of vortices originated in the inner and outer shear layers. They also noticed the formation of two potential cores, corresponding to each of these regions. In their case ($U_2 < U_1$ and U_2 relatively small) the outer stream acts mainly as a coflowing velocity which does not modify substantially the inner jet dynamics. Djeridane [5] analysed the effect of superimposing a small co-flow into a round jet and concluded that for co-flowing velocities smaller than 10% of the jet velocity the co-flow has only a minor influence on the spatial jet evolution.

Dahm *et al* [1] highlighted the importance of the initial outer to inner velocity ratio $r_u = U_2/U_1$, in the selection of the several existing flow regimes. For low initial velocity ratios ($0.59 < r_u < 0.71$) the outer shear layer instability rolls up into axisymmetric vortex rings ($m = 0$) that turn further downstream into a helical shaped structure ($m = 1$), in agreement with the linear stability theory results for a single-jet flow. These primary rings travel downstream at a frequency which agrees well with the value predicted by the linear instability theory considering

JoT 4 (2003) 024

an initial 'wake + mixing layer' velocity profile. The inner shear layer, on the other hand, has a lethargic behaviour and never rolls up into vortical structures before being dominated by the helical vortices from the outer layer. But for large initial velocity ratios ($r_u = 2.56$) the inner shear layer also develops into ring shaped vortices which interact with the outer vortex structures. One of the most important results from this study was the observation of a 'locking' phenomenon between the two shear layers. It was observed that the vortex passage frequency from the inner shear layer differs from the value predicted by the stability analysis of a single shear layer with the same characteristics. The reason for this comes from the fact that the vortices from the inner shear layer are trapped into the free spaces left between two consecutive outer layer vortices. The latter modify the 'normal' inner shear layer development which is in this way 'locked' into the outer layer dynamics. Another important observation is related to the initial vorticity thickness of the inner and outer shear layers. For the same initial velocity ratio ($r_u = 1.0$), but using different absolute velocities, a dramatically different flow topology could be observed, due to the difference in the initial shear layer momentum thicknesses. In general, smaller initial vorticity thicknesses lead to a faster roll-up process (for the same velocity jump), thus causing very different flow topologies.

The influence of the velocity ratio r_u in the flow regimes of coaxial jets was also analysed by Rehab *et al* [2]. They considered only $r_u > 1$ cases and found the existence of a critical velocity ratio r_{uc} above which the flow develops a big reverse flow region. The value of r_{uc} depends on the shape of the inlet velocity profiles (nozzle shape) and varies in the range of about $5 < r_{uc} < 8$. A big recirculation bubble is always present in annular jets, which can be viewed as coaxial jets with $r_u = U_2/U_1 = \infty$ [6]. For smaller than critical velocity ratios ($1 < r_u < r_{uc}$) the structures from the fast stream 'pinch' the central jet at the end of the potential core x_{1p}. The pinching frequency is equal to the outer jet mode, $fD_2/U_2 \approx 0.4$. The value of x_{1p} decreases with increasing r_u. For greater than critical velocity ratios ($r_u > r_{uc}$) a large recirculating bubble forms with a size of the order of the inner diameter D_1, which grows with increasing velocity ratio, r_u. One of the more interesting features of this backflow region is the fact that it oscillates and rotates with the same frequency in a pure precession mode. This frequency is fixed by D_1 and U_2 and is one order of magnitude smaller than the original Kelvin–Helmholtz instability mode. Finally, Rehab [7] also analysed the influence of the inlet nozzle geometry in the flow regimes of coaxial jets. An important parameter for this study is the ratio of outer to inner nozzle diameters $\beta = D_2/D_1$. It was observed that an increase in the value of β causes an increase in both the inner potential core x_{1p} and in the critical velocity ratio r_{uc}.

Numerical studies of coaxial jets are very rare and are often restricted to 2D cases, due to the need for massive computer resources. Among the limited number of numerical works on coaxial jets are the works of Akselvoll and Moin [8] who studied coannular jets by large-eddy simulations in a fully developed turbulent configuration. Salvetti [9] made direct numerical simulations (DNSs) of axisymmetric (2D) coaxial jets to analyse the effects of the inlet condition on the dynamics of the vortical structures. Salvetti [10] also studied numerically the effect of inner/outer mutual interactions. It was observed that vortical inner/outer interactions tend to increase with increasing velocity ratio r_u. Finally, da Silva and Métais [11] carried out what is maybe the first DNS of a coaxial jet, in order to study the flow topology in an excited (*varicose*) configuration.

The present work uses DNS to analyse the instability, transition scenario and resulting topology from high velocity ratio coaxial jets. DNSs are restricted to low Reynolds numbers but a correct understanding of the flow topology at low Reynolds numbers or in transition regions can be useful to understand the dynamics of high Reynolds number cases since, as in single-jet flows, there are still 'vestiges' of some 'coherence' caused mainly by vortex related features that persist even in high Reynolds numbers (e.g. the preferred mode in single-jet flows).

JoT 4 (2003) 024

This article is organized as follows. The next section 2 describes the governing equations and numerical methods. Section 3 details the physical and computational parameters of the various calculations. The results obtained from DNSs of coaxial jets are analysed and discussed in section 4. Section 5 reviews the main results and conclusions.

2. Numerical method

All the simulations presented here were performed with a code that solves the full, three-dimensional, incompressible Navier–Stokes equations. The code is a finite difference solver that uses both sixth order 'compact' [12] and pseudo-spectral [13] schemes for spatial discretization. Pressure–velocity coupling is assured by a fractional step method [14], requiring the resolution of a Poisson equation to insure incompressibility of the velocity field. A three-step, third order Runge–Kutta scheme [15] is used for temporal discretization. As inlet boundary condition, each time step a given velocity profile is prescribed at the inlet, the details of which will be given in the next section. The outlet boundary condition is of non-reflective type [16].

This code was developed by Gonze [17] and was intensively validated both in round and plane jet configurations [18, 19]. Full numerical discretization details can be found in [20].

The code was parallelized using the PVM library and the calculations were carried out on a ten-node Linux Beowulf cluster. Details can be found in [21].

3. Direct numerical simulations of coaxial jets

Two DNSs were carried out (DNS1, DNS2). In both cases the shape of the inlet velocity profile is

$$\vec{U}(\vec{x_0}, t) = \vec{U}_{med}(\vec{x_0}) + \vec{U}_{noise}(\vec{x_0}, t), \tag{1}$$

where $\vec{U}(\vec{x_0}, t)$ is the instantaneous inlet velocity vector, which is prescribed as inlet condition, for each time step. In equation (1) $\vec{U} = (U, V, W)$, where U, V and W are the streamwise, normal and spanwise velocities, respectively. We will also use the cylindrical coordinates $\vec{U} = (u_x, u_r, u_\theta)$, where u_x, u_r and u_θ represent the axial, radial and tangential velocity components, respectively.

One of the main difficulties in the numerical simulation of coaxial jets results from the complexity of the inlet velocity profile which has to be accurately represented. As stressed by Dahm *et al* [1], each one of the two shear layers can be described as a combined 'wake + mixing layer' profile. But, as shown by Rehab *et al* [2], the 'wake' part of the mean streamwise velocity profiles disappears very fast. In the experimental measurements by Rehab *et al* [2] one can notice that the whole 'wake' part of the velocity profile disappears long before $x/D_1 = 1$. Therefore, it seems that an inlet velocity profile made up of two 'hyperbolic tangent' velocity profiles could be a good approximation to the 'real' velocity profile. In addition to this, this makes possible a rigorous definition of the governing global parameters.

Figure 1 shows a sketch of a typical idealized inlet velocity profile. Each velocity jump is represented by a typical mixing layer (hyperbolic tangent) velocity profile. This was the methodology adopted in the present study. The mean velocity profile is therefore represented as

$$U_{med}(\vec{x_0}) = \begin{cases} \dfrac{U_1 + U_2}{2} + \dfrac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\dfrac{r - R_1}{2\theta_{01}}\right) & \text{for } r < R_m \\ \dfrac{U_2 + U_3}{2} + \dfrac{U_2 - U_3}{2} \tanh\left(\dfrac{r - R_2}{2\theta_{02}}\right) & \text{for } r > R_m. \end{cases}$$

Here U_1 is the inner coaxial jet velocity, U_2 is the outer velocity and U_3 is a very small co-flow. R_1, R_2 and $R_m = (R_1 + R_2)/2$ are the inner, outer and mean radii, and θ_{01} and θ_{02} are the initial

JoT 4 (2003) 024

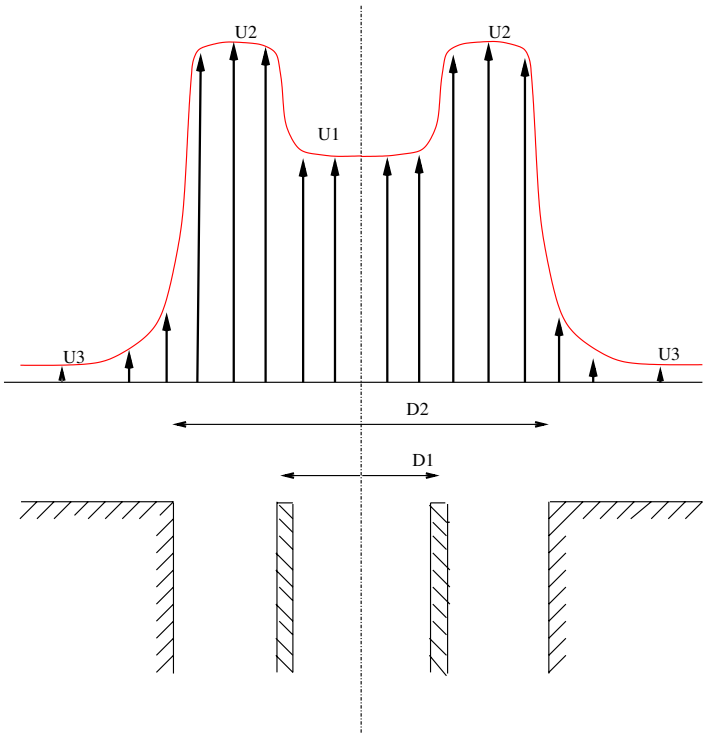


Figure 1. Sketch of the inlet velocity profile. U_1 is the inner jet velocity coming out of a nozzle with a diameter D_1. U_2 is the velocity of the outer jet stream, issuing from a diameter $D_2 > D_1$. θ_1 and θ_2 are the momentum thicknesses from the inner shear layer (velocity jump from U_1 to U_2) and outer shear layer (velocity jump from U_1 to U_2), respectively.

momentum thicknesses from the inner and outer shear layers, respectively. For each station x, the inner and outer momentum thicknesses are defined by

$$\theta_1(x) = \int_0^{R_m} \left[\frac{u_x(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)}\right]\left[1 - \frac{u_x(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)}\right] \mathrm{d}r \tag{2}$$

$$\theta_2(x) = \int_{R_m}^{\infty} \left[\frac{u_x(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)}\right]\left[1 - \frac{u_x(x,r) - u_{min}(x)}{u_{max}(x) - u_{min}(x)}\right] \mathrm{d}r \tag{3}$$

where $u_{max}(x)$ and $u_{min}(x)$ are the maximum and minimum velocities from the inner or outer shear layers.

Notice that the mean normal and spanwise velocities were set to zero at the inlet

$$V_{med}(\vec{x_0}) = W_{med}(\vec{x_0}) = 0. \tag{4}$$

$\vec{U}_{noise}(\vec{x_0}, t)$ is the inlet noise profile which is given by

$$\vec{U}_{noise}(\vec{x_0}, t) = A_n \; U_{base}(\vec{x_0})\vec{f'}. \tag{5}$$

A_n is the maximum amplitude of the incoming noise and $U_{base}(\vec{x_0})$ is a function that sets the noise location mainly in the shear layer gradients:

JoT 4 (2003) 024

$$U_{base}(\vec{x_0}, r) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } 0.85 > r/R_1 \\ 1.0 & \text{if } 0.85 < r/R_1 < 1.15 \\ 1.0 & \text{if } 0.85 < r/R_2 < 1.15 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\vec{f'}$ is a random noise designed to satisfy a given energy spectrum

$$E(k) \propto k^s \exp\left[-\frac{s}{2}(k/k_0)^2\right]. \tag{6}$$

$k = (k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ is the wavenumber norm in the (y, z) plane. The exponent s, and peak wavenumber k_0, were chosen to have an energy input at small scales (high k_0) and a large-scale spectral behaviour typical of decaying isotropic turbulence ($s \leq 4$). Note that the random noise is imposed on the three velocity components.

Both simulations were carried out on the same grid which consists in $231 \times 256 \times 256$ points and allows a domain size of $10.8D_1 \times 7.1D_1 \times 7.1D_1$, along the streamwise ($x$) and the two transverse directions (y, z), respectively. The mesh size is uniform in all three directions. In both simulations the Reynolds number and the ratio of outer to inner diameters was $Re_{D_1} = \frac{U_2 D_1}{\nu} = 3000$ and $\beta = \frac{D_2}{D_1} = 2$, respectively. The ratio of the jet radius to the initial shear layer momentum thicknesses was $\frac{R_1}{\theta_{01}} = \frac{R_2}{\theta_{02}} = 13$ and the maximum noise amplitude was limited to $A_n = 4.0\%$.

The difference between the two simulations concerns the initial velocity ratio $r_u = U_2/U_1$. In the first simulation (DNS1), this ratio was set to $r_u = U_2/U_1 = 3.3$. The second simulation (DNS2) uses $r_u = U_2/U_1 = 23.5$. The co-flow was such that $U_3/U_2 = 0.04$, for both simulations. The co-flow is then very small, and does not influence the jet dynamics [5, 20].

4. Results and discussion

This section analyses the results from simulations DNS1 and DNS2. We start looking into the global picture of the flow, mainly through visualization of instantaneous quantities. After that, the details of the transition process in coaxial jets will be analysed.

4.1. Global flow picture

4.1.1. Visualizations. One can form a first picture of the whole coaxial jet flow from simulations DNS1 and DNS2 by looking at figures 2(a) and (b). The figures show instantaneous fields of positive Q [22, 23] coloured by the azimuthal vorticity, Ω_θ

$$\Omega_\theta = \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}\right). \tag{7}$$

Blue/red corresponds to positive/negative values of Ω_θ, respectively. The main features of both flows can be appreciated here. In the early transition stages ($x/D_1 < 2$), both the inner/outer shear layers roll up into vortex rings. Since the Q isosurfaces are coloured by Ω_θ the fact that the inner/outer rings appear in blue and red shows that the vortices turn in opposite sense. These structures appear in both simulations, and at each shear layer (inner/outer) and are an expected consequence of the Kelvin–Helmholtz instability created by the shape of the initial velocity profiles. Notice that the rings seem to preserve the same wavelength spacing λ_0, until $x/D_1 \approx 7$ where they begin to disappear, 'swallowed' by the growth of small scale turbulence. Around the middle of the computational domain $x/D_1 \approx 7$, pairs of streamwise vortices appear between two consecutive outer rings, in agreement with the classical scenario of transition in free

JoT 4 (2003) 024

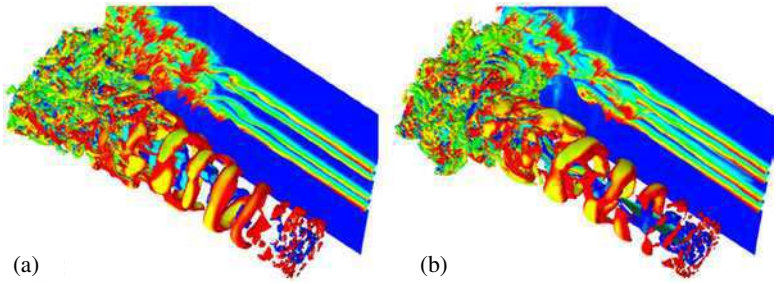


Figure 2. Isosurfaces of positive Q, coloured by the azimuthal vorticity, Ω_θ in DNS1 (see animation) (a) and DNS2 (see animation) (b). Blue/red stands for positive/negative values of Ω_θ, respectively.

JoT 4 (2003) 024

shear layers. Further downstream, just before the end of the computational domain, the growth of small scale turbulence near the structures as well as their breakdown makes their identification very difficult. By $x/D_1 \approx 8$ the structures no longer exhibit any preferential direction and seem 'isotropic'. This is an indication that the flow is quickly reaching a state of fully developed turbulence.

We continue the flow characterization with figures 3(a) and (b) showing contours of streamwise velocity for both simulations. The streamwise velocity contours remain smooth until $x/D_1 \approx 5$, in both simulations. The most important observation from this figure, however, is the existence of a strong back-flow region in DNS2 which can be seen through blue contours of $u_x(x, r)$, corresponding to a region of $u_x(x, r) < 0$. The recirculation bubble is centred at $x/D_1 \approx 2.5$ (see figure 3(b)). Similar back-flow regions were observed in experimental studies of coaxial jets with high velocity ratios [2] and are always present in co-annular jets [6], where no inner jet exists and therefore can be seen as a coaxial jet with velocity ratio $r_u = U_2/U_1 = \infty$. Notice that around this location the flow evolves smoothly, therefore indicating that the recirculation bubble is either stationary or evolving slowly, since it seems to be surrounded by laminar flow. It is also interesting to note the downstream evolution of the two outer shear layers (i.e. the two layers of maximum streamwise velocity, starting at $r/D_1 = 0.5$). Whereas in DNS1 (no recirculation bubble) the outer shear layer thickness grows as the flow evolves downstream, in DNS2 the two outer streams converge after the back-flow region, leading to a decrease in the overall shear layer thickness at $x/D_1 \approx 7$ (see figure 5(e)).

Next (figures 4(a) and (b)) give some insight into the vortical structures of the flow. Again, one sees that the initial evolution of the (inner/outer) shear layers is very smooth. This shows that the present 'synthetic' noise used at the inflow boundary allows the flow to evolve 'naturally' and to 'choose' its primary instabilities from the initial velocity profile characteristics. In DNS1 the first Kelvin–Helmholtz vortices appear at $x/D_1 \approx 5$ both at the outer and inner shear layers. For DNS2, the same structures appear slightly later at $x/D_1 \approx 5.5$ (outer and inner layer). The figures show also what appears to be the occurrence of merging between the primary Kelvin–Helmholtz rollers at $x/D_1 \approx 7$ for the outer shear layers of both flows. The most interesting feature one can observe with these figures is that in each simulation the evolution of the inner and outer layers is not independent. As can be seen in figures 4(a) and (b) after $x/D_1 \approx 5$, the vortices from the inner shear layer are trapped in the free spaces between two consecutive outer layer vortices. This issue will be analysed in detail below. Finally, one can also observe that the outer vortex structures pinch the central jet at $x/D_1 \approx 5$ (for DNS1 and DNS2), in close similarity to the experimental visualizations from [2].

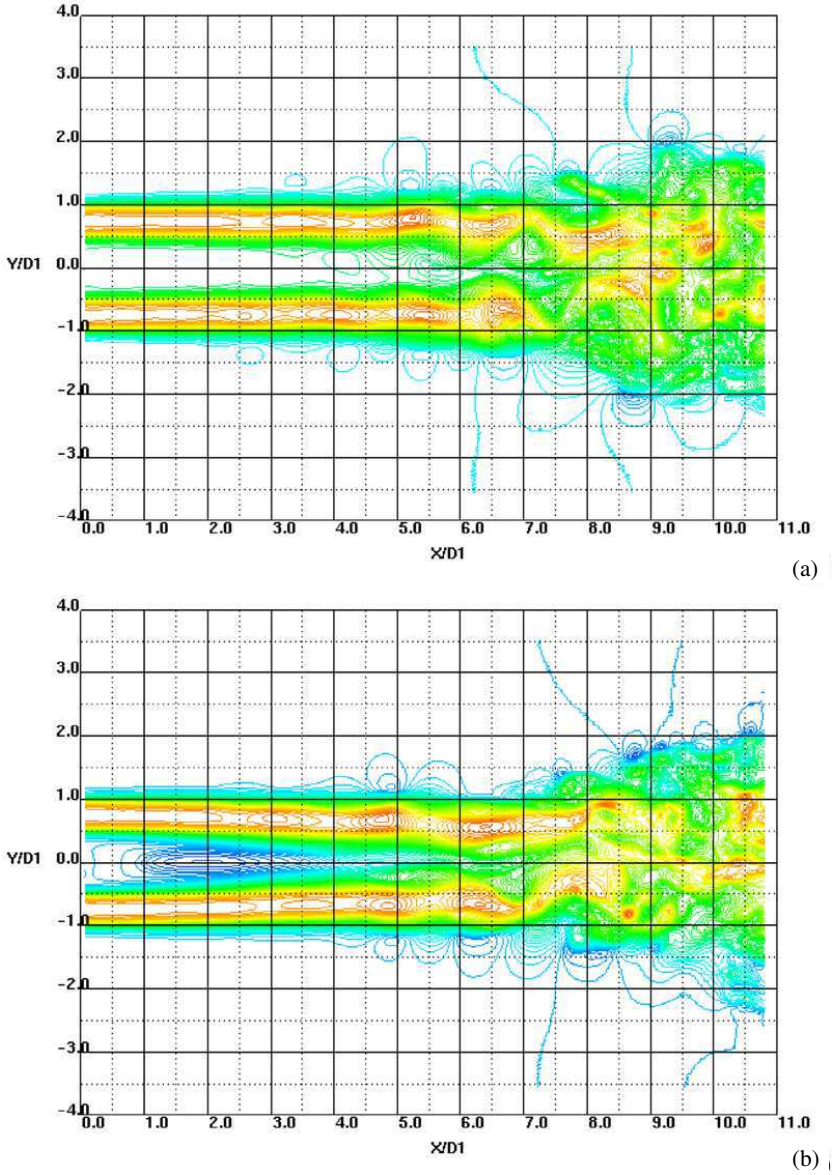
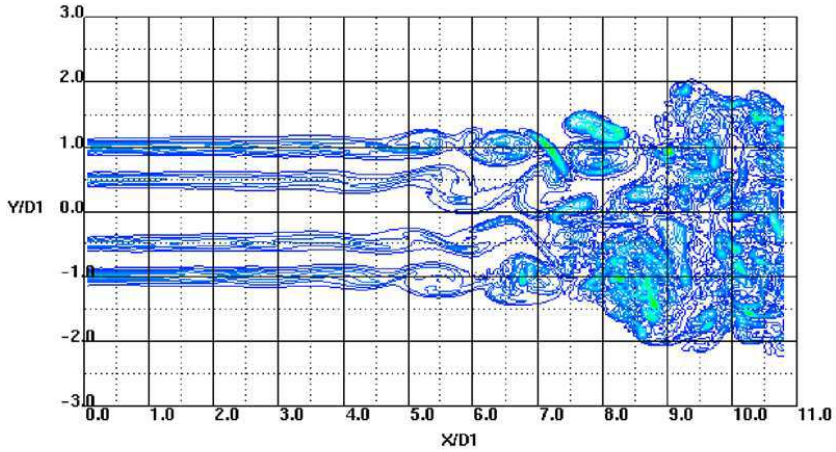


Figure 3. Contours of streamwise velocity $u_x(x, r)$, in DNS1 (a) and DNS2 (b). The contour lines are in a slice which passes through the plane $(x, y, z = 0)$. Negative values of $u_x(x, r)$ are indicated in blue. In simulation DNS2 one can observe a big back-flow region in the first half of the computational domain.

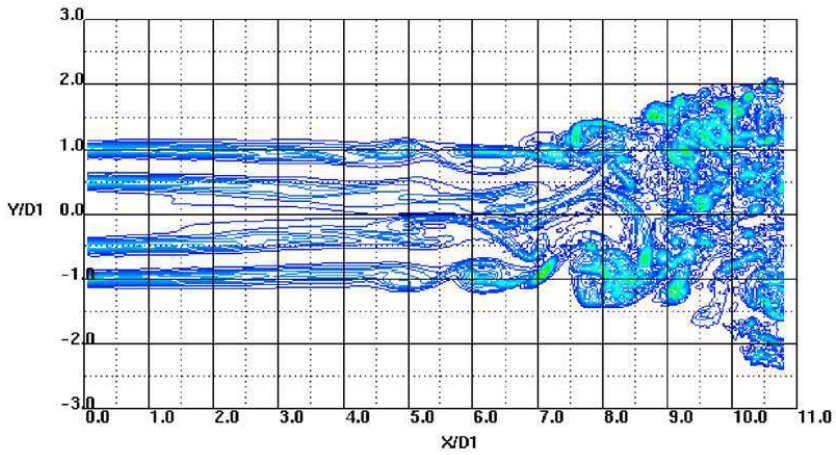
4.1.2. Statistics. To conclude on the flow characterization figures 5(a)–(e) show some one-point statistics for the DNS1 and DNS2 simulations. We use the Reynolds decomposition where an instantaneous field ϕ can be decomposed into $\phi = \langle\phi\rangle + \phi'$, in which $\langle\phi\rangle$ and ϕ' stand for its mean and fluctuating parts, respectively. Here the mean operator $\langle\phi\rangle$, consists in combined space and time averages.

In DNS1 the axial velocity is constant in a region extending to $l^{in}_{core} \approx 5D_1$ at the centreline $(r = 0)$ and $l^{out}_{core} \approx 5D_1$ at the centre of the outer jet $(r = R_m)$ (figure 5(a)). This shows that in DNS1, two potential core regions exist, one at the inner and another at the outer jet. Similar

JoT 4 (2003) 024



(a)



(b)

Figure 4. Contours of vorticity modulus $|\vec{\Omega}|$, in DNS1 (a) and DNS2 (b). The contour lines are in a slice which passes through the plane $(x, y, z = 0)$.

coaxial potential cores have been observed experimentally [3, 4]. In DNS2 (see figure 5(b)) the outer jet also exhibits a potential core region, with length $l_{core}^{out} \approx 6D_1$, but the same does not occur in the inner jet. Here the centreline axial velocity is negative between $x/D_1 \approx 0.5$ and $x/D_1 \approx 4.0$, due to the presence of the back-flow region. The axial length of this structure is $l_{bx} \approx 3.5D_1$. Figure 5(b) can also be used to measure the minimum back-flow velocity, and its location. We have $\langle u_x(x, r)\rangle = -3U_1$ at $x/D_1 = 0.75$. The evolution of the axial velocity after the end of each potential core is governed by radial diffusion of linear momentum which transfers momentum from the outer into the inner shear layers. This idea is confirmed in figures 5(c) and (d) showing profiles of axial velocity at several stations for simulations DNS1 and DNS2. Notice that for $x/D_1 = 10$ the velocity profile (for DNS1 and DNS2) has lost its two-layer structure, and the maximum velocity is located at the centreline. Figure 5(d) can help to measure the radial extent of the recirculation bubble: one has roughly, $l_{br} \approx D_1$ at $x/D_1 = 2$.

Finally, figure 5(e) displays the downstream evolution of the shear layer thickness $\delta(x)$ for DNS1 and DNS2, defined as

$$\langle u_x(x, r = \delta(x))\rangle = \tfrac{1}{2}(\langle u_x(x, r = r_{max})\rangle - \langle u_x(x, r = \infty)\rangle), \tag{8}$$

JoT 4 (2003) 024

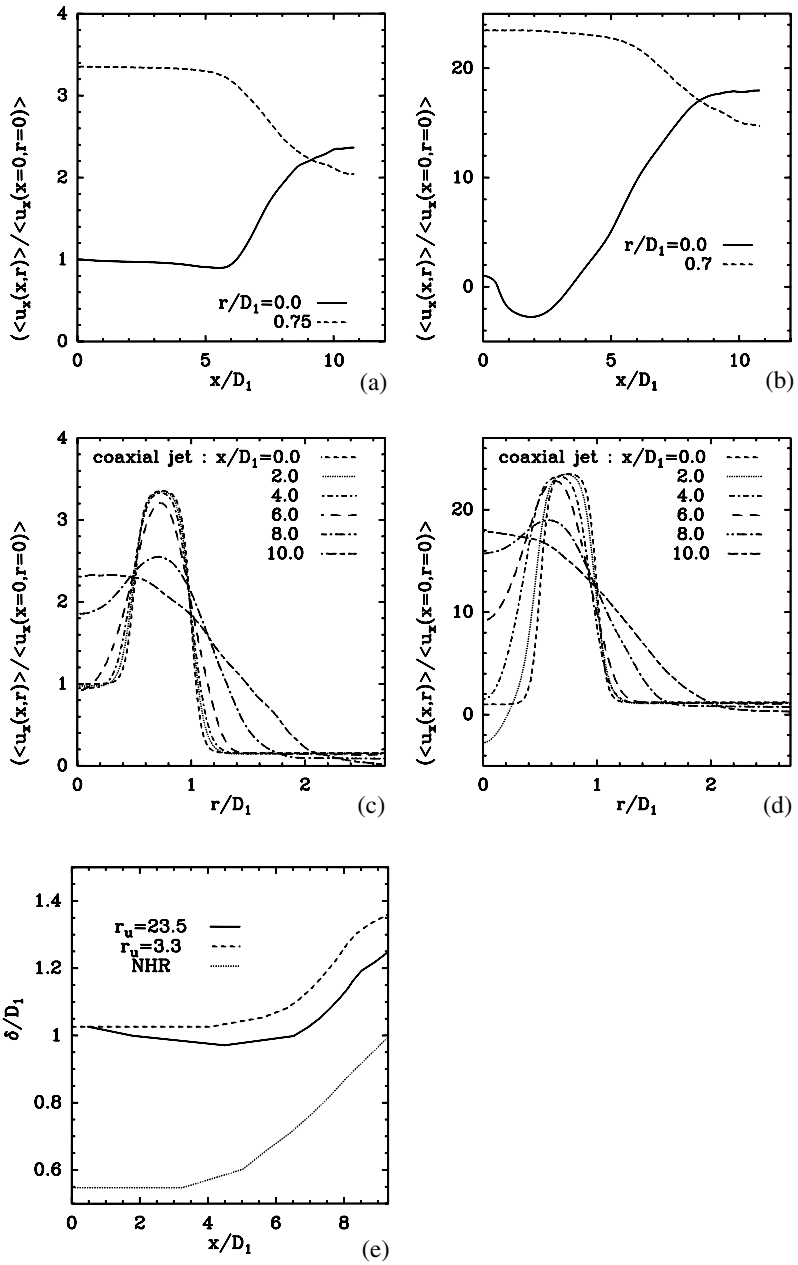


Figure 5. (a) Downstream evolution of the axial velocity component at $r/D_1 = 0$ and $r/D_1 = 0.75$ for DNS1; (b) the same for DNS2; (c) axial velocity profiles for DNS1; (d) the same for DNS2; (e) downstream evolution of the shear layer thickness for DNS1 and DNS2. NHR stands for a round jet at $Re_D = 25\,000$ (from [18]).

where r_{max} is the radial distance at which the axial velocity attains its maximum value, $\max\{\langle u_x(x,r)\rangle\} = \langle u_x(x, r = r_{max})\rangle$. There is an accentuated difference between the curves in the range $0 < x/D_1 < 7$, where the shear layer thickness for DNS2 decreases. This can be explained by the convergence of the streamlines which tends to follow a recirculation bubble, as already discussed. After $x/D_1 > 7$, however both curves seem to grow with a similar slope and it

JoT 4 (2003) 024

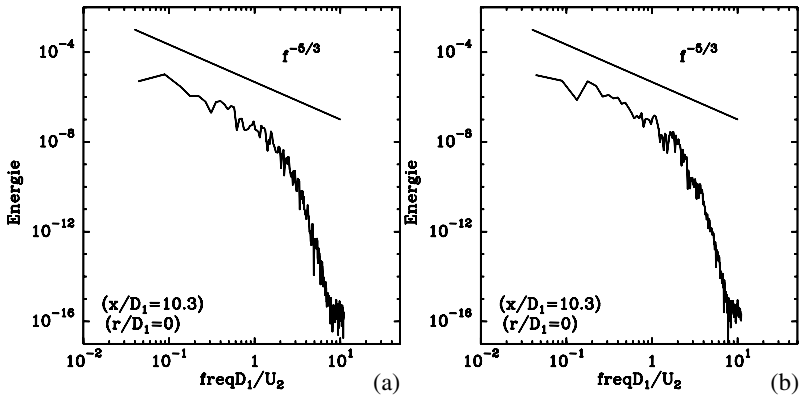


Figure 6. Frequency spectra of the axial velocity signal at $x/D_1 \approx 10$ for DNS1 and DNS2. (a) DNS1; (b) DNS2.

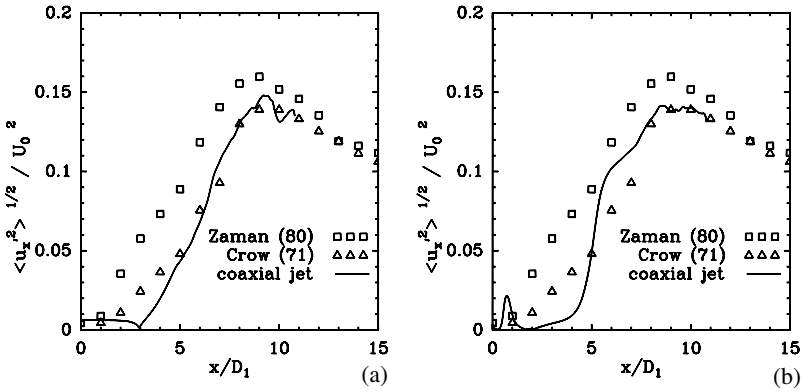


Figure 7. Downstream evolution of the axial normal stresses at the centreline in DNS1 (a) and DNS2 (b), compared with the measurements by Zaman and Hussain [24] and Crow and Champagne [25].

is interesting to note that this slope is the same as found by da Silva and Métais [18] in a round jet (NHR) within the self-similar turbulent regime, at much higher Reynolds number (NHR). In fact, all evidence points to the existence of a fully developed turbulent regime for $x/D_1 = 10$ in both DNS1 and DNS2. To show this, figures 6(a) and (b) show time spectra computed from the axial velocity component at $x/D_1 = 10.3$. The spectra exhibit a $-5/3$ range over about one decade followed by a smooth transition into the dissipative region. This $-5/3$ slope is a good indication that, by that point, the flow has reached a fully developed turbulent state.

Finally, it is also instructive to see the downstream evolution of the axial normal stresses at the centreline in DNS1 and DNS2 (see figure 7). The stresses compare well with the measurements made by Zaman and Hussain [24] and Crow and Champagne [25] in round jets at high Reynolds number. The maximum is roughly the same value ($\langle u'^2 \rangle / U_2^2 = 0.14$) and is obtained at the same location ($x/D_1 = 10$), both in the simulations and the experimental data. This peak is followed by a decrease in the stresses at a rate which is also similar in the simulations and experimental data. Note that the difference between DNS1 and DNS2 occurs mainly in the transition region ($x/D_1 < 7$), due to the recirculation bubble. In DNS2 there is a peak in the stresses just before the bubble ($x/D_1 = 0.5$) and a big growth rate just after it ($x/D_1 = 5$). In between, the stresses are smaller than in DNS1 and confirm the visualizations, showing that the

JoT 4 (2003) 024

Table 1. Strouhal numbers of the most amplified modes in the outer (o) and inner (i) shear layers for simulations DNS1 and DNS2. The Strouhal number is based on the initial momentum thickness, $Str_{\theta_0} = \frac{f\theta_0}{\Delta U_0}$, where $\Delta U_0 = 0.5(U_{max} + U_{min})$, with U_{max} and U_{min} being the maximum and minimum velocities across each shear layer, respectively. The spectra were computed using time series of the streamwise velocity component located at $(r/D_1, x/D_1) = (1, 3)$ (outer layer) and $(r/D_1, x/D_1) = (0.5, 3)$ (inner layer).

Simulation	Str_θ^o	Str_θ^i
DNS1	0.028	0.011
DNS2	0.03	0.01

bubble is a quasi-laminar flow. The evolution of the stresses around it can be explained by the high levels of $\partial\langle u\rangle/\partial x$ at those locations, as often occurs near separation regions, which causes high production of axial normal stresses

$$P_{\langle u'^2\rangle} = -\left[2\langle u'^2\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} + 2\langle u'v'\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} + 2\langle u'w'\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z}\right]. \tag{9}$$

4.2. Instabilities and transition

This section analyses the details of the transition process in DNS1 and DNS2. In particular, the interplay between the inner and outer shear layers is used to account for the particular evolution of the coaxial jet flows.

4.2.1. Primary instabilities: jet shear layer mode. As described before, in the initial stages of transition, the two (inner/outer) shear layers roll up into vortex rings due to the well known Kelvin–Helmholtz instability. The theoretical value of the Strouhal number of the most unstable wave resulting from this instability is [26]

$$Str_{\theta_0} = \frac{f\theta_0}{\Delta U_0} = 0.033, \tag{10}$$

where $\Delta U_0 = 0.5(U_{max} + U_{min})$ and U_{max} and U_{min} are the maximum and minimum velocities across the shear layer, respectively. But we saw also that each shear layer is in some way influenced by the presence of its neighbour. The most visible aspect of this interaction is the existence of some kind of 'locking' phenomenon, where the inner vortex rings occupy the spaces left free between each pair of consecutive outer rings (or vice versa). One question arises from these observations: what is the impact of this inner/outer interaction in the evolution of the '*shear-layer*' mode?

In order to answer this question one has to check out whether each (inner/outer) shear layer evolves according to the Kelvin–Helmholtz instability theory. In particular, the Strouhal numbers of the most amplified modes have to be the same values as predicted by the '*linear stability theory*' for a mixing layer profile [27]. To analyse this we computed time spectra from the streamwise velocity signal at two locations. All spectra computed this way show peaks at a given Strouhal number. The results are listed in table 1.

Here we see that, whereas the outer shear layer instabilities agree very well with the expected value, the inner shear layers do not. A possible explanation for this fact can be gained by looking into the values of the actual frequencies. This is shown in table 2. This table shows that for DNS1 (no recirculation bubble), the inner and outer frequencies are exactly the same. This

JoT 4 (2003) 024

Table 2. Frequencies f of the most amplified modes in the outer (o) and inner (i) shear layers for simulations DNS1 and DNS2. The frequencies are the same as displayed in table 1.

Simulation	f^o	f^i
DNS1	0.40	0.40
DNS2	0.45	0.30

suggests that the outer shear layer grows according to the theory (without 'feeling' the inner shear layer) and then imposes its evolution upon the inner shear layer.

The fact that the outer shear layer is dominating the inner layer can be explained in the following way. In DNS1 the initial vorticity of the outer shear layer is much larger than the inner one (see the initial inner and outer velocity ratios) which not only causes the outer vortex rings to appear sooner than the inner ones (see figure 9(a)), but also creates outer rings with total vorticity

$$\Omega_T^o(x) = \int_{R_m}^{\infty} |\vec{\Omega}(x,r)|\,\mathrm{d}r, \tag{11}$$

which is higher than the total vorticity associated with the inner rings

$$\Omega_T^i(x) = \int_{0}^{R_m} |\vec{\Omega}(x,r)|\,\mathrm{d}r, \tag{12}$$

$$\Omega_T^o(x) > \Omega_T^i(x). \tag{13}$$

This is likely to make the outer vortices dominant over the inner rings through inviscid vorticity induction (Biot–Savart), and therefore explains that the evolution of the inner structures is dictated by the motion of the outer, more important structures.

Things seem to be more complicated in DNS2. In this case also, the bigger intensity of the outer vortices, associated with the fact that the instability of the outer shear layer agrees with the theoretical value predicted by the Kelvin–Helmholtz instability (see table 1), makes one think that the same phenomenon might occur here. However, the existence of a back-flow region in this case greatly complicates the question. In this case the inner structures are not convected at the same speed as the outer ones, as can be assessed by the different values of their dimensional frequencies (see table 2). One possible explanation is that the back-flow region, being so close to the inner rings, will turn to decrease their travelling speed, thus making $f_*^i < f_*^o$ in this case. This phenomenon should be investigated with greater depth in future works.

To compare the evolution of the inner and outer shear layers, it is instructive to look into the downstream evolution of the following quantities:

$$E_r^i(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_0^{R_m} \langle u_r'^2(x,r)\rangle r\,\mathrm{d}r} \tag{14}$$

$$E_\theta^i(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_0^{R_m} \langle u_\theta'^2(x,r)\rangle r\,\mathrm{d}r} \tag{15}$$

$$E_r^o(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_{R_m}^{\infty} \langle u_r'^2(x,r)\rangle r\,\mathrm{d}r} \tag{16}$$

JoT 4 (2003) 024

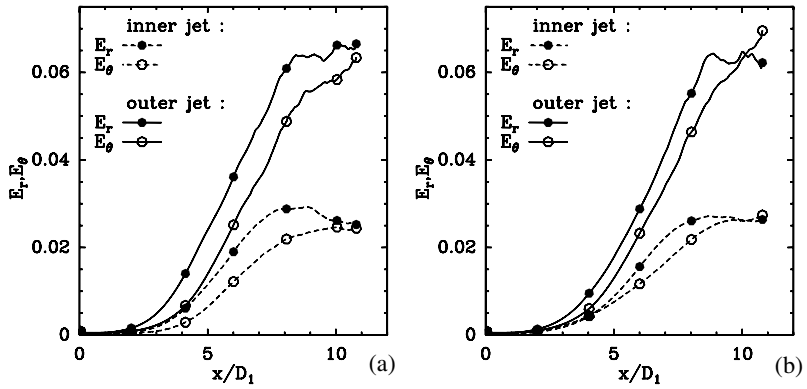


Figure 8. Downstream evolution of the radial, E_r (equations (14) and (16)) and tangential E_θ (equations (15) and (17)) contributions for the total kinetic energy in the inner (i) and outer (o) shear layers. (a) DNS1; (b) DNS2.

Table 3. Strouhal numbers of the most amplified modes at the end of the potential cores for DNS1 and DNS2, in the outer (o) and inner (i) shear layers. The Strouhal number is based on the inner and outer diameters, $Str_D^i = \frac{fD_1}{U_1}$ and $Str_D^o = \frac{fD_2}{U_2}$. The spectra were computed using time series of the streamwise velocity component located at $(r/D_1, x/D_1) = (0.75, 6)$ (outer layer) and $(r/D_1, x/D_1) = (0, 6)$ (inner layer).

Simulation	Str_D^o	Str_D^i
DNS1	0.40	0.60
DNS2	(5.0)	(5.0)

$$E_\theta^o(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z} \int_{R_m}^{\infty} \langle u_\theta'^2(x,r)\rangle r \, \mathrm{d}r}. \tag{17}$$

In the above, $E_r(x)$ and $E_\theta(x)$, are the contributions of the radial and azimuthal Reynolds stresses to the turbulent kinetic energy at a given x location, respectively [28, 29]. The superscripts i and o define the inner and outer shear layers.

The downstream evolution of these quantities confirms the previous observations, showing that the outer instabilities begin to grow before the inner ones and dominate the whole transition region (i.e. $E_r^o(x) > E_r^i(x)$ and $E_\theta^o(x) > E_\theta^i(x)$) in DNS1 and DNS2 (figure 8).

4.2.2. Primary instabilities: jet preferred mode. In simple (non-coaxial) jets one often speaks of the so-called *preferred* jet mode which characterizes virtually all round jets, at sufficiently high Reynolds numbers. The frequency of the preferred jet mode is the frequency at which the vortex rings cross the end of the potential core and corresponds to a Strouhal number which is $0.24 < Str_D = fD/U_0 < 0.5$ [26]. It has been observed experimentally that coaxial jets also display this preferred jet frequency at the end of the central potential core [2]. Therefore, it is interesting to see whether the same happens in the present case. For this purpose table 3 shows the Strouhal numbers of the most unstable modes found at the end of the inner and outer potential cores for DNS1 and DNS2.

The table shows that for DNS1, the preferred mode is well recovered in the outer shear layer, but not in the inner layer. Since the preferred mode follows the evolution of the shear

JoT 4 (2003) 024

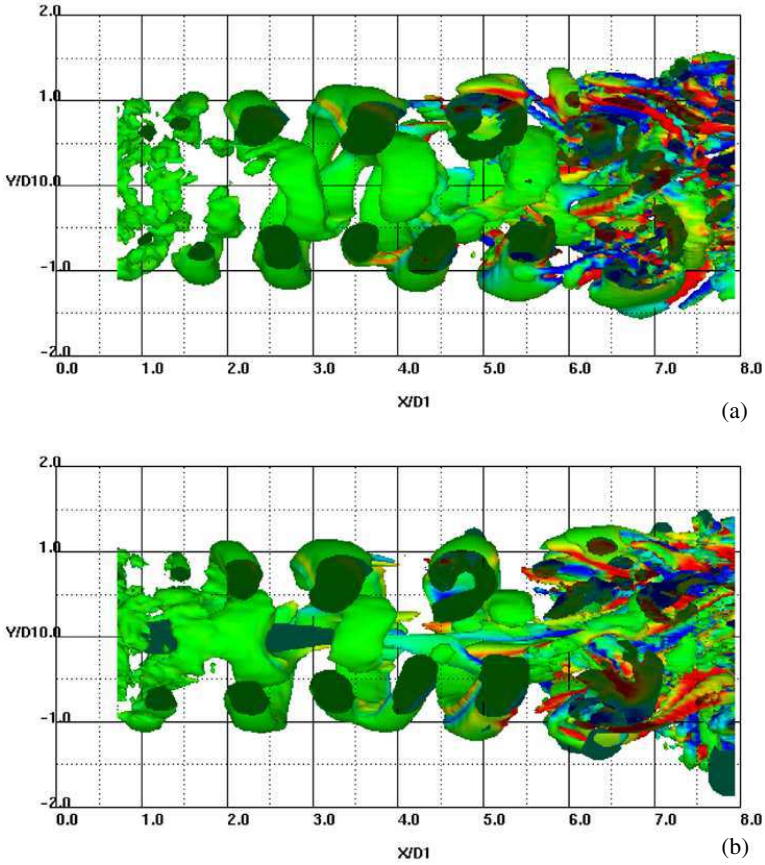


Figure 9. Cut view of positive Q isosurfaces coloured by the streamwise vorticity in DNS1 (a) and DNS2 (b).

JoT 4 (2003) 024

layer mode, this fact can be explained as before: the outer vortex rings being more important; they evolve according to the theory and impose their evolution to the inner ones. As discussed before the same applies to the evolution of DNS2, although in this case the preferred mode is not well recovered. The value $Str_D^i = 5$ falls far outside the accepted range cited before. One way to explain this is through the quick convergence of the streamlines just after the recirculation bubble. The inner structures will have to cross, in that case, a much smaller section, which explains their acceleration (and higher passing frequency). Furthermore, these structures, being stretched in this way, will tend to increase their axial vorticity level, thus also increasing the level of small scale turbulence within themselves. It was observed, in agreement with this explanation, that in DNS2, unlike DNS1, the spectra show a range of high frequencies, rather than a given distinct peak (table 3 shows only the frequency corresponding to the highest energy). This point will be further discussed below.

The structure of the preferred mode can be studied in figure 9 showing isosurfaces of positive Q coloured by the streamwise vorticity for DNS1 and DNS2. Here we see that both the outer and inner vortices are organized into single helix shaped structures. The helices turn in the same sense due to the locking phenomenon described before. These observations raise one question: what is the most amplified mode in the present coaxial jets? To answer this question we recall the work of Cohen and Wygnanski [30], who made the connection between the form of the most

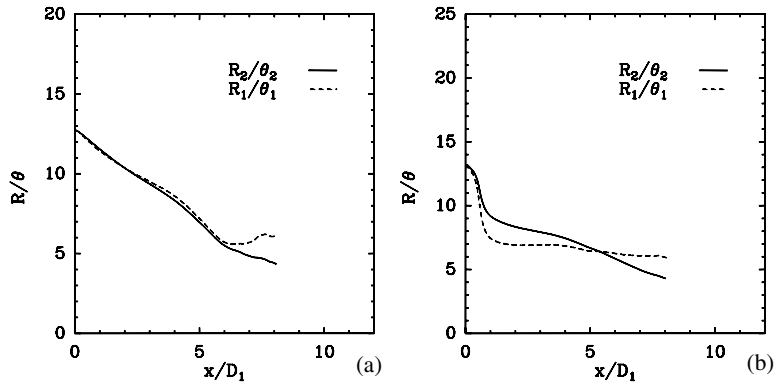


Figure 10. Downstream evolution of the ratio R/θ for the inner and outer jets ($R_1/\theta_1(x)$ and $R_2/\theta_2(x)$ where $\theta(x)$ is the local momentum thickness). (a) DNS1; (b) DNS2.

unstable wave and the resulting primary structures at the end of the potential core[3]. They showed that in single (non-coaxial) round jets the ratio R/θ dictates the most unstable mode as well as the resulting topology. For $R/\theta > 6.5$ the most unstable mode is axisymmetric $m = 0$ and axisymmetric structures are formed (vortex rings). For $R/\theta < 6.5$ the first non-symmetric mode ($m = 1$) has the highest amplification rate and leads to the formation of one helical structure. Although we have not computed the most unstable modes directly, we see that in DNS1 and DNS2 we have structures which correspond to the first helical mode ($m = 1$) (see figure 9). Moreover, figures 10(a) and (b) show that $R/\theta < 6.5$ for DNS1 and DNS2 at the end of the potential core. Therefore, it seems that the present results are consistent with the analysis from [30] and may indicate that their results are also valid for coaxial jets. Clearly, this point needs further investigation but the present results are encouraging. Note that the fact that R/θ is greater than 6.5 for most of the transition region ($x/D_1 < 4$) does not invalidate this result, as the helical arrangement found at the end of the potential core is likely to affect the flow upstream by a feed-back mechanism, thus selecting the first helical mode $m = 1$ as the most unstable, right from the inlet region.

4.2.3. Secondary instabilities. We have already seen the evolution of the primary structures in DNS1 and DNS2 which culminates in the formation of a single helix structure $m = 1$, made with the primary vortex rings. In the classical transition scenario for simple (non-coaxial) round jets, once the rings have been formed, one usually observes the emergence of a wavy structure along the azimuthal direction in each vortex ring. One usually speaks of azimuthal perturbations of mode n. Unlike the forced coaxial jets observed by da Silva and Métais [11], it is very difficult to discern an azimuthal perturbation in the rings from DNS1 and DNS2. Indeed, the primary rings show very little sign of any azimuthal perturbation in their shape. This agrees with what we can see in figures 8(a) and (b). In DNS1 and DNS2, $E_r(x)$, associated with the growth of the vortex rings, dominates $E_\theta(x)$, associated with the growth of the azimuthal perturbations $E_r(x) > E_\theta(x)$, until about $x/D_1 \approx 10$ where $E_r(x) \approx E_\theta(x)$. It seems than the growth of the vortex rings is dominating the evolution of the other instabilities until quite late in the transition process ($x/D_1 \approx 10$).

[3] The most unstable wave is supposed to be of the form $p(x, r, \phi, t) = \widetilde{p}(r) \exp[\mathrm{i}(\alpha x + m\phi - \beta t)]$, where $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit, β is the perturbation frequency, m the azimuthal wavenumber and $\alpha = \alpha_r + \mathrm{i}\alpha_i$ a complex number in which α_r stands for the downstream wavenumber and α_i the rate of spatial amplification. If $m = 0$ the instability mode is axisymmetric (also called varicose mode); if $m \neq 0$ the wave has a helical shaped structure.

JoT 4 (2003) 024

In DNS2 the presence of a back-flow region decreases the degree of domination of $E_r(x)$ over $E_\theta(x)$, i.e.

$$|E_r^i(x) - E_\theta^i(x)|_{DNS2} < |E_r^i(x) - E_\theta^i(x)|_{DNS1}, \tag{18}$$

and

$$|E_r^o(x) - E_\theta^o(x)|_{DNS2} < |E_r^o(x) - E_\theta^o(x)|_{DNS1}. \tag{19}$$

The recirculation bubble then acts as a 'destabilizing' effect in this predominance of the vortex rings in the transition mechanism.

Concerning the streamwise vortices, there is an interesting difference between DNS1 and DNS2. As discussed before, just after the back-flow region in DNS2 ($x/D_1 > 6.5$) the streamwise inner vortices not only appear much sooner than in DNS1, but are particularly elongated (figure 9(a)). Furthermore, these inner structures are characterized by extremely high values of vorticity reaching as high as twice the vorticity of the outer streamwise structures. It is possible to explain these observations by considering the production term in the axial vorticity equation

$$P_{(\Omega_x)} = \Omega_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \tag{20}$$

As in other flows with a recirculation bubble, there is a high streamwise velocity gradient $\partial u_x/\partial x$ in the region just after it. In the coaxial jet flow, this region is where the streamwise vortices begin to develop, and therefore contributes to create axial vorticity, Ω_x, by vortex stretching of the inner streamwise vortices, $\Omega_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$. Thus, the back-flow region creates an additional source of axial vorticity production. A similar observation was made by da Silva and Métais [11] in a DNS of a forced coaxial jet with a back-flow region.

5. Conclusions

In the present work two DNSs (DNS1 and DNS2) were carried out in order to analyse the instabilities and transition in high velocity ratio coaxial jets ($r_u = 3.3$ and 23.5). In DNS1 two potential core regions form in the centre of the inner and outer jets, in agreement with the findings of Ko and Kwan [3] and Kwan and Ko [4]. For DNS2 ($r_u = 23.5$) the inner potential core does not exist due to the formation of a large recirculation region in $x/D_1 < 5$. In the present case the bubble encloses laminar flow and is in stationary motion, unlike the case of Rehab *et al* [2] who observed a similar structure undergoing solid body motion.

For both flows the Kelvin–Helmholtz instability in the inner and outer shear layers results in vortex rings which form, further downstream, an inner and outer helical structure. This corresponds to the development of a helical instability (mode $m = 1$) which agrees with the linear stability theory for a single jet, considering the ratio R/θ [30]. It was observed that the inner rings are 'locked' into the outer ones. Due to their higher vorticity, the latter impose their evolution upon the inner structures. It seems that the backflow region has only a minor influence on this process until the end of the potential core (for DNS2). The frequency of the preferred mode for single (non-coaxial) jets is well recovered in DNS1 ($r_u = 3.3$), but not in DNS2 ($r_u = 23.5$) due to the presence of the backflow region which greatly complicates the flow downstream. In this case it was observed that the secondary structures (pairs of streamwise vortices) have unusually high values of vorticity modulus. This can be explained by the recirculation bubble which stretches these structures, thus being an additional source of axial vorticity production.

Acknowledgment

The help of P Begou with the numerical-code parallelization is greatly acknowledged.

JoT 4 (2003) 024

References

[1] Dahm W J A, Friedler C E and Tryggvason G 1992 Vortex structure and dynamics in the near field of a coaxial jet *J. Fluid Mech.* **241** 371–402
[2] Rehab H, Villermaux E and Hopfinger E J 1997 Flow regimes of large-velocity-ratio coaxial jets *J. Fluid Mech.* **345** 357–81
[3] Ko N W M and Kwan A S H 1976 The initial region of subsonic coaxial jets *J. Fluid Mech.* **73** 305–32
[4] Kwan A S K and Ko N W M 1977 The initial region of subsonic coaxial jets. Part 2. *J. Fluid Mech.* **82** 237–87
[5] Djeridane T 1994 Contribution à l'étude expérimentale de jets turbulents axisymétriques à densité variable *PhD Aix-Marseille II*
[6] Ko N W M and Chan W T 1979 The inner regions of annular jets *J. Fluid Mech.* **93** 549–84
[7] Rehab H 1997 Structure de l'écoulement et melange dans le champ proche des jets coaxiaux *PhD Grenoble*
[8] Akselvoll K and Moin P 1996 Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets *J. Fluid Mech.* **315** 387–411
[9] Salvetti M V 1996 Numerical simulations of transitional axisymmetric coaxial jets *AIAA J.* **34** 736–43
[10] Salvetti M V 2000 Effects of the velocity ratio on vorticity dynamics and mixing in coaxial jet flows *1st Turbulent Shear Flow Phenomena*
[11] da Silva C B and Métais O 2001 Coherent structures in excited spatially evolving round jets *Direct and Large-Eddy Simulation* vol 4 (New York: Kluwer)
[12] Lele S K 1992 Compact finite difference schemes with spectral-like resolution *J. Comput. Phys.* **103** 15–42
[13] Canuto C, Hussain M Y, Quarteroni A and Zang T A 1987 *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (New York: Springer)
[14] Le H and Moin P 1991 An improvement of fractional-step methods for the incompressible Navier–Stokes equations *J. Comput. Phys.* **92** 369–79
[15] Williamson J H 1980 Low-storage Runge–Kutta schemes *J. Comput. Phys.* **35** 48–56
[16] Orlansky I 1976 A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows *J. Comput. Phys.* **21** 251–69
[17] Gonze M A 1993 Simulation numérique des sillages en transition à la turbulence *PhD Grenoble*
[18] da Silva C B and Métais O 2002 Vortex control of bifurcating jets: a numerical study *Phys. Fluids* **14** 3798–819
[19] da Silva C B and Métais O 2002 On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets *J. Fluid Mech.* **473** 103–45
[20] da Silva C B 2001 The role of coherent structures in the control and interscale interactions of round, plane and coaxial jets *PhD Grenoble*
[21] Comte P, Silvestrini J and Begou P 1998 Streamwise vortices in the large-edy simulations of mixing layers *J. Mech. B/Fluids* **17** 4:615–37
[22] Hunt J C R, Wray A A and Moin P 1988 Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows *Annual Research Briefs* Center for Turbulence Research, Stanford University, Stanford
[23] Dubief I and Delcayre F 2000 On coherent-vortex identification in turbulence *J. Turbulence* **1** 011
[24] Zaman K B M Q and Hussain K M F 1980 Vortex pairing in a circular jet under controlled excitation. Part 1. General jet response *J. Fluid Mech.* **101** 449–91
[25] Crow S C and Champagne F H 1971 Orderly structure in jet turbulence *J. Fluid Mech.* **48** 547–91
[26] Gutmark E and Ho C-M 1983 Preferred modes and the spreading rates of jets *Phys. Fluids* A **26** 2932–8
[27] Michalke A and Hermann G 1982 On the inviscid instability of a circular jet with external flow *J. Fluid Mech.* **114** 343–59
[28] Danaila I, Dusek J and Anselmet F 1997 Coherent structures in a round, spatially evolving, unforced, homogeneous jet at low Reynolds numbers *Phys. Fluids* **9** 3323–42
[29] Brancher P, Chomaz J M and Huerre P 1993 Direct numerical simulations of round jets: vortex induction and side jets *Phys. Fluids* **6** 1768–74
[30] Cohen J and Wygnanski I 1987 The evolution of instabilities in the axisymmetric jet. Part 1. The linear growth of the disturbances near the nozzle *J. Fluid Mech.* **176** 191–219

JoT 4 (2003) 024

HTML ABSTRACT + LINKS

PHYSICS OF FLUIDS **17**, 065102 (2005)

The near field of coaxial jets: A numerical study

Guillaume Balarac[a] and Olivier Métais
Équipe MoST/LEGI, Boîte Postale 53, 38041 Grenoble Cedex 09, France

(Received 27 May 2004; accepted 22 February 2005; published online 12 May 2005)

The near-field behavior of coaxial jets is studied through direct numerical simulation (DNS) with a particular focus on the influence of the inner shear layer steepness characterized by its momentum thickness θ_{01} thus mimicking the variation in the lip thickness of a real jet nozzle. We investigate the two distinct jet regimes $r_u > r_{uc}$ for which a recirculation bubble is present near the jet inlet and $r_u < r_{uc}$ without any recirculation bubble, r_u being the velocity ratio between the outer jet and inner jet velocities. It is shown that small values of θ_{01} lead to a fast transition to turbulence. The various mechanisms leading to this transition are investigated in detail: the three-dimensionality growth, the appearance of secondary vortices superimposed on the main ring vortices, and the subsequent longitudinal stretching of streamwise vortices. This stretching mechanism is shown to play a dominant role in the transition processes towards a fully developed turbulent state. For high enough values of r_u, a pinching of the jet is observed near the inlet and it is shown that this pinching phenomenon lasts on a shorter downstream distance for small values of θ_{01} due to a more efficient turbulent mixing. In the $r_u > r_{uc}$ case, variations of θ_{01} strongly affect the shape and the downstream extent of the recirculation bubble. The DNS allow to show the strong dependency of the inner and outer potential core lengths and of the critical value r_{uc} on the jet inlet velocity profile. We finally revisit the theoretical model originally proposed by Rehab, Villermaux, and Hopfinger ["Flow regimes of large-velocity-ratio coaxial jets," J. Fluid Mech. **345**, 357 (1997)] first aimed at the prediction of the variations of various jet characteristics as a function of r_u. The model is extended to determine the dependency of the jet characteristics with θ_{01}. A very good correspondence between the theoretical predictions and the numerical results is obtained. © *2005 American Institute of Physics*. [DOI: 10.1063/1.1900786]

I. INTRODUCTION

Coaxial jets are present in various industrial devices: they effectively constitute an efficient way of mixing species for combustion applications. They are also used in aeroacoustics: the noise produced by a single jet can indeed be reduced thanks to the addition of a surrounding coaxial stream (e.g., Williams, Ali, and Anderson[1]).

Coaxial jets are composed of an inner jet issued from a nozzle of diameter D_1 and an outer annular jet issued from an outer annulus of diameter $D_2 (D_2 > D_1)$. U_1 and U_2 designate the respective velocities of the inner and outer jets. One of the important parameters characterizing the coaxial jet dynamics is the ratio between the outer to the inner jet momentum flux, $M = \rho_2 U_2^2 / \rho_1 U_1^2$ where ρ_1 and ρ_2 are, respectively, the inner and outer density (see Favre-Marinet and Camano Schettini[2]). For constant density jets ($\rho_1 = \rho_2$), the momentum flux ratio reduces to the velocity ratio, $r_u = U_2 / U_1$.

In the present study, we consider constant density coaxial jets for which the outer velocity is larger than the inner one ($r_u > 1$). These jets are situated in-between two limiting cases: a single round jet ($r_u = 1$) and a purely annular jet ($r_u \to \infty$). Purely annular jets are characterized by the presence of a big recirculation bubble near the jet axis (Ko and Chan[3]). This backflow region was experimentally observed by Rehab[4] and numerically by da Silva, Balarac, and Métais[5] for $r_u \gg 1$. Since this backflow is absent for small enough values of r_u, there exists a critical velocity ratio r_{uc} which separates the two different main flow regimes, without recirculation bubble for $1 < r_u < r_{uc}$ and with recirculation bubble for $r_u > r_{uc}$.

Rehab, Villermaux, and Hopfinger[6] experimentally showed that the coaxial jet dynamics and its vortex topology are strongly dependent on the shape of the inlet nozzle. Indeed, different shapes lead to significant variations of the two shear layers which are present in the coaxial jet: the inner shear layer at the interface between the inner and the outer jets and the outer shear layer on the external border of the outer jet. In the following, we will characterize the respective thicknesses of the inner and outer shear layers by their momentum thicknesses θ_{01} and θ_{02}. The previous experimental works[6] have mainly focused on the influence of r_u considering very small values of θ_{01} and θ_{02}. However, even for high Reynolds number jets, a variation of the inner lip thickness of the jet yields a significant variation of θ_{01}. The present paper completes the previous experimental and numerical works on coaxial jets by investigating the influence of θ_{01} on the transitional processes in the jet near field. We also vary the ratio r_u and the two distinct jet regimes are successively considered: the case without recirculation bubble ($r_u < r_{uc}$) and with recirculation bubble ($r_u > r_{uc}$). In particular, we will show that the value of r_{uc} varies widely with θ_{01}. This completes Rehab, Villermaux, and Hopfinger[7] observations

[a]Electronic mail: guillaume.balarac@hmg.inpg.fr

 © 2005 American Institute of Physics

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

showing a strong dependence of r_{uc} with the jet nozzle shape with values located between 7 and 9.

As far as numerical investigations of coaxial jets are concerned, da Silva, Balarac, and Métais[5] (referred to as SBM) previously performed direct numerical simulations (DNS) of spatially growing coaxial jets for two values of r_u: r_u=3.3 and r_u=23.5. The ratio of the jet radius to the initial momentum thicknesses was fixed with $R_1/\theta_{01}=13$ and $\theta_{01}=\theta_{02}$. In the present study, we widely vary the values of θ_{01}/R_1 and r_u. We furthermore develop simple theoretical models inspired by the ones originally proposed by Rehab, Villermaux, and Hopfinger[6] allowing to predict the variation laws of various statistical quantities in function of θ_{01}/R_1 and r_u.

In Sec. II, the numerical method, physical, and computational parameters of the DNS are detailed. Section III investigates how θ_{01} influences the near-field jet dynamics and the mechanisms of transition towards a fully developed turbulent state. The two flow regimes $r_u<r_{uc}$ and $r_u>r_{uc}$ are successively considered. Section IV extends the theoretical model originally proposed by Rehab, Villermaux, and Hopfinger[6] to predict the variation laws of various jet statistics as a function of θ_{01} and r_u.

II. NUMERICAL METHOD AND COMPUTATIONAL PARAMETERS

All the simulations presented here were performed with the same numerical code as the one used by SBM. The full three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations, assuming constant density, are solved with a very precise numerical technique combining sixth-order "compact" (Lele[8]) scheme in the flow direction and pseudospectral (Canuto *et al.*[9]) schemes in the two-transverse directions. This code was originally developed by Gonze[10] and has been intensively validated both for round jets and plane jets configurations (see da Silva and Métais,[11] da Silva and Métais[12]). The detailed discretization procedure is described by Gonze[10] and by da Silva[13].

The velocity vector is decomposed as $\vec{U}=(u_x,u_y,u_z)$, where u_x designates the streamwise component, u_y and u_z are the two-transverse components. We also use a cylindrical coordinate system (x,r,θ) with x the streamwise (longitudinal) distance along the jet axis, r the distance from the jet axis, and θ the azimuthal angle. Any vector $\vec{a}$ will be decomposed, in this system, as $\vec{a}=(a_x,a_r,a_\theta)$ For all the simulated cases, the inlet velocity profile is given by

$$\vec{U}(\vec{x}_0,t)=\vec{U}_{\text{med}}(r)+\vec{U}_{\text{noise}}(\vec{x}_0,t), \tag{1}$$

where $\vec{U}(\vec{x}_0,t)$ is the instantaneous inlet velocity vector, which is prescribed at each time step. The inlet velocity profile $\vec{U}_{\text{med}}(r)$ mimics a realistic experimental profile: it is constructed with two hyperbolic tangent velocity profiles as shown in Fig. 1. It consists in a one-dimensional flow orientated along the x direction whose modulus is given by

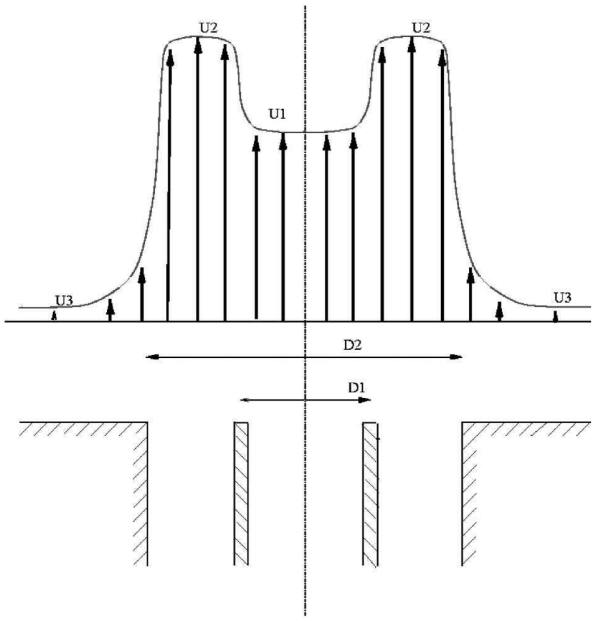


FIG. 1. Sketch of the inlet velocity profile. θ_{01} and θ_{02} are the momentum thicknesses for the inner shear layer (velocity jump from U_1 to U_2) and for the outer shear layer (velocity jump from U_2 to U_3), respectively.

$$U_{\text{med}}(r)=\begin{cases}\frac{U_1+U_2}{2}+\frac{U_1-U_2}{2}\tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right) & \text{for } r<R_m\\ \frac{U_2+U_3}{2}+\frac{U_2-U_3}{2}\tanh\left(\frac{r-R_2}{2\theta_{02}}\right) & \text{for } r>R_m,\end{cases} \tag{2}$$

where U_1 is the inner coaxial jet velocity, U_2 is the outer velocity, and U_3 is a very small coflow. R_1, R_2, and $R_m=(R_1+R_2)/2$ are the inner, outer, and averaged radii, and θ_{01} and θ_{02} are the inlet momentum thicknesses from the inner and outer shear layers, respectively. For each station x, the inner and outer momentum thicknesses are defined by (3) and (4),

$$\theta_1(x)=\int_0^{R_m}\left[\frac{U_x(x,r)-U_{\min}(x)}{U_{\max}(x)-U_{\min}(x)}\right]\times\left[1-\frac{U_x(x,r)-U_{\min}(x)}{U_{\max}(x)-U_{\min}(x)}\right]dr, \tag{3}$$

$$\theta_2(x)=\int_{R_m}^{\infty}\left[\frac{U_x(x,r)-U_{\min}(x)}{U_{\max}(x)-U_{\min}(x)}\right]\times\left[1-\frac{U_x(x,r)-U_{\min}(x)}{U_{\max}(x)-U_{\min}(x)}\right]dr, \tag{4}$$

where $U_{\max}(x)$ and $U_{\min}(x)$ are, respectively, the maximum and minimum mean streamwise velocities for the inner or outer streams and $U_x(x,r)$ is the local mean streamwise velocity. The mean normal and spanwise velocities are set to zero at the inlet

$$V_{\text{med}}(\vec{x}_0)=W_{\text{med}}(\vec{x}_0)=0. \tag{5}$$

Note that the mean values are obtained through a temporal averaging based on a time interval long enough to reach statistical convergence. In the following, $\langle f\rangle(x,r)$ designates

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

the mean value of any quantity $f(x,r,\theta,t)$: $\langle f\rangle$ is independent of the azimuthal angle θ due to the axisymmetry of the flow configuration.

$\vec{U}_{\text{noise}}(\vec{x}_0,t)$ is the noise superimposed on the inlet profile. It is given by

$$\vec{U}_{\text{noise}}(\vec{x}_0,t) = A_n U_{\text{base}}(\vec{x}_0)\vec{f}'. \tag{6}$$

A_n is the maximum amplitude of the incoming noise and $U_{\text{base}}(\vec{x}_0)$ is a function that mainly locates the noise in the shear layer gradients:

$$U_{\text{base}}(\vec{x}_0) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } 0.85 > r/R_1 \\ 1.0 & \text{if } 0.85 < r/R_1 < 1.15 \\ 1.0 & \text{if } 0.85 < r/R_2 < 1.15 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$\vec{f}'$ is a random noise designed to satisfy a given energy spectrum (see SBM for details). The random noise is applied on the three velocity components.

All simulations are carried out on the same computational grid consisting in $231\times384\times384$ points for a domain size of $10.8D_1\times10.65D_1\times10.65D_1$, along the streamwise ($x$) and the two transverse directions (y,z), the mesh size being uniform in all three directions. In all simulations, the Reynolds number and the ratio of the outer to the inner diameter are $\text{Re}_{D_1}=U_2D_1/\nu=3000$ and $D_2/D_1=2$, respectively. The ratio of the jet outer radius to the outer initial shear layer momentum thickness is fixed with $R_2/\theta_{02}=25$. The maximum noise amplitude is set to $A_n=3.0\%$. A very small coflow is imposed such that $U_3/U_2=0.04$: it was shown not to influence the jet dynamics (see da Silva[13]).

As previously pointed out, the goal of the present study is mainly to look at the influence of the parameter θ_{01}. r_u is also varied to investigate the two flow regimes, with and without recirculation bubble. Table I synthesizes the various runs which were carried out: θ_{01}/R_1 varies from 0.04 to 0.1 and r_u widely ranges from 3 to 30. Note that each simulation series DNS*i* (with *i* varying from 1 to 5) corresponds with a fixed value of the parameter θ_{01}/R_1. For convenience, both parameters θ_{01}/R_1 and its opposite R_1/θ_{01} will be successively used.

It is important to note that the potential sources of numerical and modeling errors have been minimized in the present study. Indeed, precise numerical methods, a well-resolved regular mesh and direct numerical simulations are used. The price to pay is that the Reynolds number for our simulations ($\text{Re}_{D_1}=3000$) is lower than the values usually encountered in the experimental studies (see, i.e., Rehab *et al.*,[6] Warda, Kassab, Elshorbagy, and Elsaadawy,[14] Buresti, Petagna, and Talamelli[15]). Furthermore, to properly discretize the velocity gradient, relatively large values of θ_{01} and θ_{02} have to be considered. The values usually considered in previous experiments are usually much smaller: this renders any validation by comparison with experimental data difficult. Previous experimental studies (Ko and Kwan[16] and Ko and Chan[3]) have however shown that in the far field of coaxial jets a self-similar state is reached similar to the one reached in a single jet. SBM recovered this result with the present numerical code (see their Fig. 7). We here complete this previous validation by considering the near-field behavior in the vicinity of the jet inlet. Figure 2 displays the downstream evolution of the rms velocity component $\langle u'^{2}_{x}\rangle^{1/2}(x,r)$ at the jet centerline for the two simulations DNS4_3 ($r_u=3$; $R_1/\theta_{01}=20$) and DNS5_17 ($r_u=17$; $R_1/\theta_{01}=25$). Note that the first simulation corresponds with the case with no recirculation bubble while a bubble is present in the second simulation. The numerical results are compared with two different experiments: the first by Buresti *et al.*[15] corresponding to $r_u=3$, $\text{Re}_{D_1}\approx160\,000$, $R_1/\theta_{01}\approx70$, and $R_2/\theta_{02}\approx130$, the second by Rehab *et al.*[6] ($r_u=9$, $\text{Re}_{D_1}\approx200\,000$, $R_1/\theta_{01}\approx100$, and $R_2/\theta_{02}\approx100$). In the first experiment, $r_u<r_{uc}$ while $r_u>r_{uc}$ in the second. Despite the difference in the Reynolds numbers and the steepness of the velocity gradients a good agreement is observed between the numerical and experimental data. Note that a virtual origin x_0, with $x_0\approx1D_1$ has been used for the two DNS to account for the Reynolds number difference with the experimental value: indeed, the turbulence develops at much shorter downstream distance in a high Reynolds number jet.

TABLE I. Description of the various runs.

Category	Name	r_u	R_1/θ_{01}	θ_{01}/R_1
	DNS1_3	3	10	0.1
DNS1	DNS1_10	10	10	0.1
	DNS1_17	17	10	0.1
	DNS2_3	3	12.5	0.08
	DNS2_5	5	12.5	0.08
	DNS2_6	6	12.5	0.08
DNS2	DNS2_7	7	12.5	0.08
	DNS2_10	10	12.5	0.08
	DNS2_13	13	12.5	0.08
	DNS2_17	17	12.5	0.08
	DNS2_30	30	12.5	0.08
	DNS3_11	11	15	0.0667
DNS3	DNS3_13	13	15	0.0667
	DNS4_3	3	20	0.05
	DNS4_10	10	20	0.05
DNS4	DNS4_12	12	20	0.05
	DNS4_17	17	20	0.05
	DNS5_10	10	25	0.04
DNS5	DNS5_11	11	25	0.04
	DNS5_17	17	25	0.04

III. INFLUENCE OF THE INNER SHEAR LAYER THICKNESS ON THE JET DYNAMICS

A. Coaxial jet without recirculation bubble $r_u<r_{uc}$

1. Mechanisms leading to turbulent transition

We first consider the case where no recirculation bubble is present. The influence of the shear layer thickness θ_{01} is investigated by first focusing on the comparison of the three simulations DNS1_10 ($r_u=10$; $\theta_{01}/R_1=0.1$), DNS2_10 (r_u

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

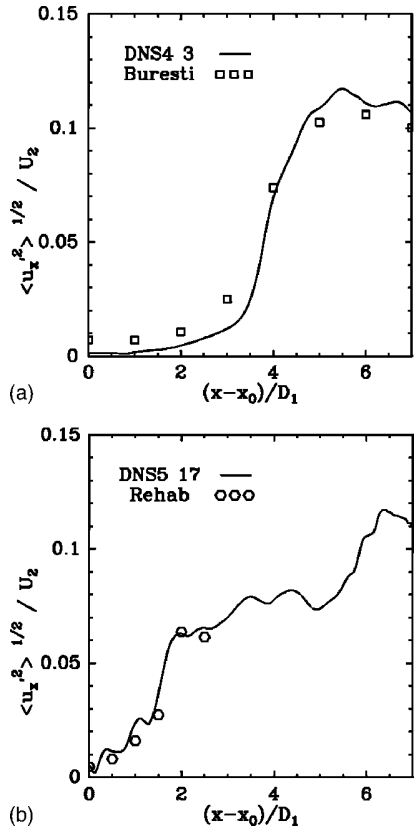


FIG. 2. Downstream evolution of the axial velocity component rms $\langle u'^2_x \rangle^{1/2}(x, r=0)$ at the jet centerline: (a) DNS4_3 and (b) DNS5_17. The numerical results are compared with the measurements by Buresti *et al.* (Ref. 15) and Rehab *et al.* (Ref. 6).

$=10$; $\theta_{01}/R_1=0.08$), and DNS5_10 ($r_u=10$; $\theta_{01}/R_1=0.04$). To characterize, the transition from a quasilaminar regime near the inlet to a fully developed turbulent regime we first consider the downstream evolution of $\langle u'^2_x \rangle^{1/2}(x,r)$ (Fig. 3). r is here taken equal to R_1 corresponding to the radial location of the vorticity local maximum within the inner shear layer of the inlet profile. For the three considered cases, the

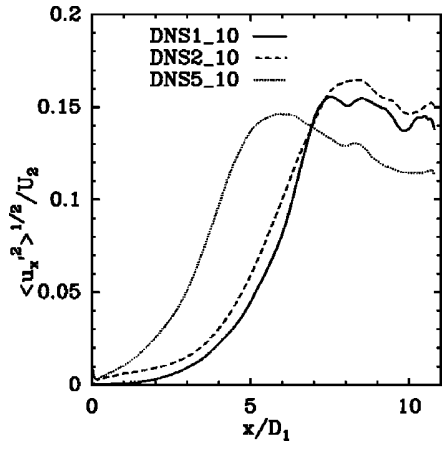


FIG. 3. Downstream evolution of the axial velocity component rms $\langle u'^2_x \rangle^{1/2}(x, r=R_1)$ at the inner shear layer for the three simulations (DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10).

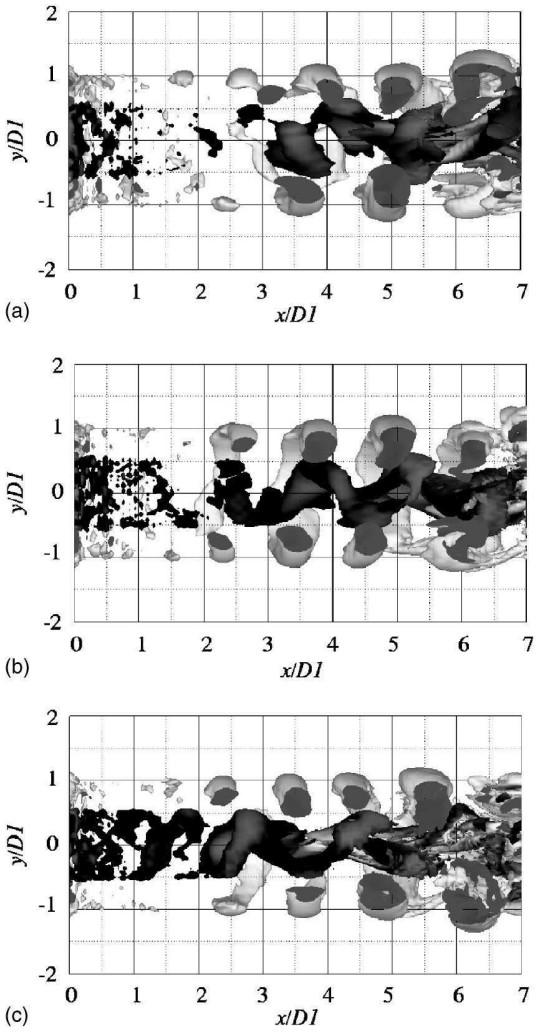


FIG. 4. Visualization of the coherent structures for the three simulations DNS1_10 (a), DNS2_10 (b), and DNS5_10 (c). Cut view of isosurfaces of positive $Q=0.5(U_2/D_1)^2$ colored by the azimuthal vorticity. Light gray corresponds with negative values and dark gray with positive values.

turbulence first undergoes a slow downstream growth before exhibiting a sudden transition characterized by a much faster growth. The transition location is situated further and further downstream as θ_{01} increases: it is indeed located around $x/D_1 \approx 5$ for DNS1_10, $x/D_1 \approx 4$ for DNS2_10, and $x/D_1 \approx 2$ for DNS5_10. This faster transition can be explained by the fact that the instability of the inner shear layer leads to the generation of smaller scales for smaller values of θ_{01} and the transition towards turbulence is consequently faster.

This is clearly illustrated by Fig. 4 which shows isosurfaces of positive Q for the three simulations DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10. We recall that Q is the second invariant of the velocity gradient tensor defined as

$$Q = \tfrac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}), \tag{7}$$

where Ω_{ij} and S_{ij} are the antisymmetrical and symmetrical part of the velocity gradient tensor, respectively. The positive Q criterion was first proposed by Hunt, Wray, and Moin[17] and is now well recognized as a good way to identify the flow coherent vortices (see, e.g., Dubief and Delcayre[18]). In

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

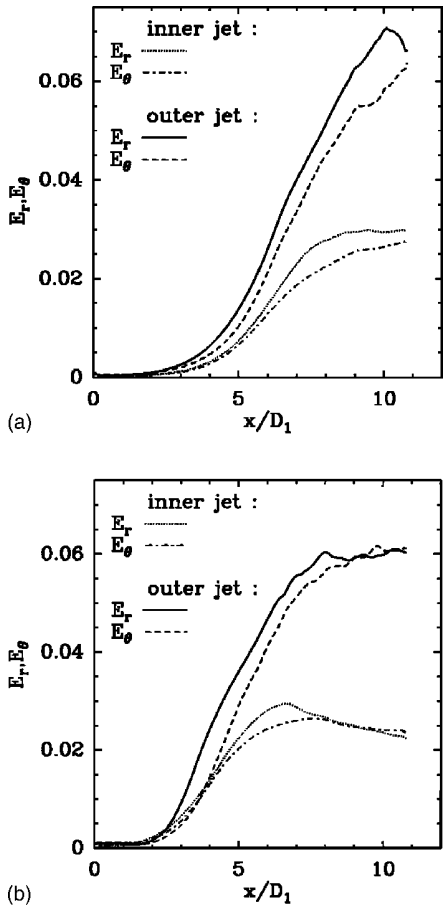


FIG. 5. Downstream evolution of radial and azimuthal contributions for the turbulent kinetic energy E_r and E_θ [see Eqs. (8)–(11) for definition] calculated in the inner and outer shear layer for the two simulations: (a) DNS2_10 and (b) DNS5_10.

particular, it can been showed that the positive Q regions are in good correspondence with low-pressure regions and thus constitute good tracors of intense vortices (see Métais[19]). Figure 4 shows the coherent structures development near the jet inlet ($0<x/D_1<7$). As pointed out by SBM, we assist in the shedding of both outer and inner vortices, respectively, associated with the instability of the outer and inner shear layers. For $r_u<r_{uc}$, the outer vortices impose their shedding frequency to the inner vortices and the latter are trapped between two consecutive larger vortex rings.[20] As previously pointed out, the instability develops faster when θ_{01} is decreased and the inner layer vortices are shed at shorter and shorter locations when we go from DNS1_10 to DNS5_10 simulation. Although the value of θ_{02} is identical in the three simulations, it is interesting to note that the outer vortices are also shed at shorter downstream distances for the smaller values of θ_{01}. This is attributable to the mutual interaction between the inner and outer shear layers: the faster growth of the disturbance within the inner shear layer induces an earlier destabilization of the outer layer. Since the DNS5_10 case is associated with an early development of the vortices, these are more rapidly subject to a three-dimensionalization process. It is clearly illustrated on Fig. 5 which shows the downstream evolution of E_r and E_θ for the inner shear layer and the outer shear layer. Only the two runs DNS2_10 and DNS5_10 are compared here. These quantities are the contributions of the radial (E_r) and azimuthal (E_θ) Reynolds stresses to the turbulent kinetic energy at a given x location (see SBM). They are defined as

$$E_r(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_0^{R_m} \langle u_r'^2\rangle(x,r) r\, dr}, \tag{8}$$

$$E_\theta(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_0^{R_m} \langle u_\theta'^2\rangle(x,r) r\, dr} \tag{9}$$

for the inner shear layer and as

$$E_r(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_{R_m}^{\infty} \langle u_r'^2\rangle(x,r) r\, dr}, \tag{10}$$

$$E_\theta(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{L_y L_z}\int_{R_m}^{\infty} \langle u_\theta'^2\rangle(x,r) r\, dr} \tag{11}$$

for the outer shear layer. u_r' and u_θ' are, respectively, the radial and azimuthal components of the fluctuating velocity field. Note that, for a purely axisymmetric vortex ring with no swirl, the component E_θ would be identically zero. E_θ then represents the departure from axisymmetry and therefore constitutes a measure of the three-dimensionality level. For both DNS2_10 and DNS5_10 cases, E_r, associated with the growth of the vortex rings, dominates E_θ during the first stage of the transition: this indicates a weak degree of three-dimensionalization in this early stage. Further downstream, E_θ catches up with E_r showing a full three-dimensionalization of the jet (see da Silva and Métais[11]). The comparison of Figs. 5(a) and 5(b) clearly indicates that the three-dimensionalization processes become dominant on a shorter downstream distance for the DNS5_10 simulation than for the DNS2_10 simulation. A fully developed turbulent state is reached at $x/D_1 \approx 8$ for DNS5_10 when the computational box is too short for such a state to be observed for DNS2_10.

It is clear from Fig. 4 that the three-dimensionalization process is strongly linked with the appearance of streamwise secondary vortices. These appear much sooner when θ_{01} is smaller and induce a strong three-dimensionalization of the inner and outer vortices between which they are stretched and consequently trigger an earlier transition towards a fully turbulent regime. Figures 6(a) and 6(b) display a zoom of the three-dimensional coherent structures in the transition region situated between $x/D_1=3$ and $x/D_1=7$ for DNS5_10 simulation. The secondary streamwise vortices appear and are stretched both between two consecutive inner vortices [Fig. 6(a)] and between two consecutive outer vortices [Fig. 6(b)]. Note that, for DNS5_10 simulation, the inner streamwise vortices form at a shorter downstream distance than the outer vortices which appear further downstream. This difference in behavior between the inner and outer shear layer is explained below.

The strong amplification of the streamwise vorticity as one moves downstream is illustrated in Fig. 7 which shows the profile of $\langle \omega'^2_x \rangle(x,r)$ as a function of r for several down-

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

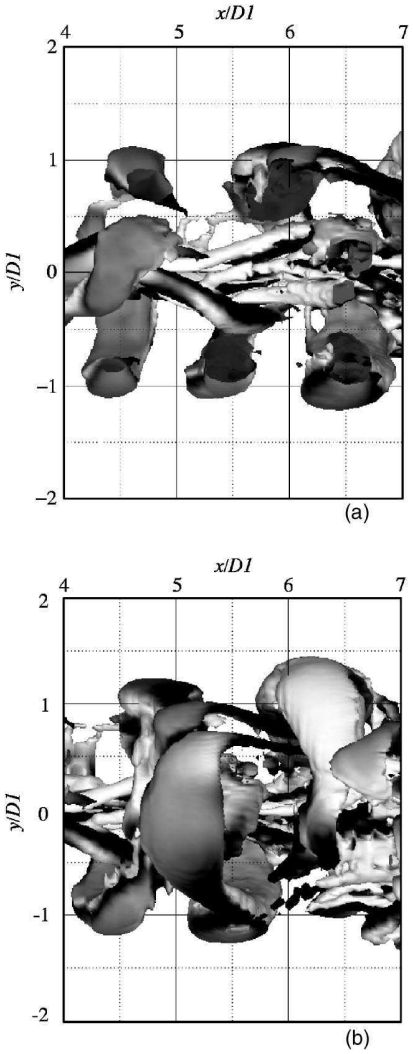


FIG. 6. Zoom showing the secondary streamwise vortices in simulation DNS5_10: (a) vortices stretched between two consecutive inner vortices (cut view); (b) vortices stretched between two consecutive outer vortices. Isosurfaces of positive $Q=0.5(U_2/D_1)^2$ colored by the axial vorticity. Light gray corresponds with negative values and dark gray with positive values.

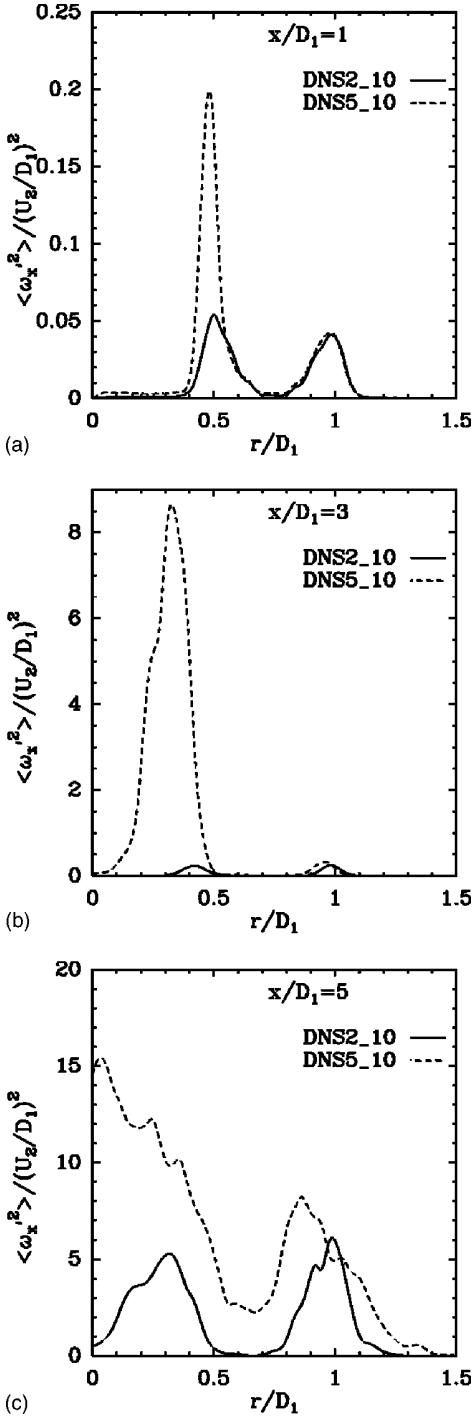


FIG. 7. Radial profile of $\langle \omega'^2_x \rangle(x,r)$ at three downstream location ($x/D_1=1$, 3, and 5) for the two simulations (DNS2_10 and DNS5_10).

stream locations $x/D_1=1$, 3, and 5. The two simulations DNS2_10 and DNS5_10 are here compared. DNS2_10 corresponds with a case where the momentum thicknesses of the inner and outer shear layers are identical ($\theta_{01}=\theta_{02}$). The growth of the three dimensionality takes place at a similar rate within both shear layers: this gives rise to two longitudinal vorticity peaks of comparable intensity, respectively, situated at $r/D_1 \approx 0.5$ and $r/D_1 \approx 1$. The longitudinal vorticity stretching between the main jet vortices, previously mentioned, yields a significant increase of the vorticity peak amplitude as we move downstream. Conversely, DNS5_10 corresponds to a case where the two momentum thicknesses differ: here $\theta_{01}=\theta_{02}/2$. In that case, the streamwise vortices are first stretched between two consecutive vortices of the inner layer yielding a strong amplification for $r/D_1 \leqslant 0.5$ (see Fig. 7 at $x/D_1=3$). The stretching between two consecutive outer vortices takes place only further downstream leading to a later longitudinal vorticity enhancement in the outer shear layer region near $r/D_1 \approx 1$ (Fig. 7 at $x/D_1=5$).

Figure 8 compares the profiles of the three rms vorticity components $\langle \omega'^2_x \rangle(x,r)$, $\langle \omega'^2_r \rangle(x,r)$, and $\langle \omega'^2_\theta \rangle(x,r)$ for the two simulations DNS2_10 ($x/D_1=6$) and DNS5_10 ($x/D_1=3$). This figure confirms that longitudinal stretching is the dominant factor leading to transition to a fully developed turbulent regime: indeed, the longitudinal vorticity component clearly dominates the other two components. We have

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

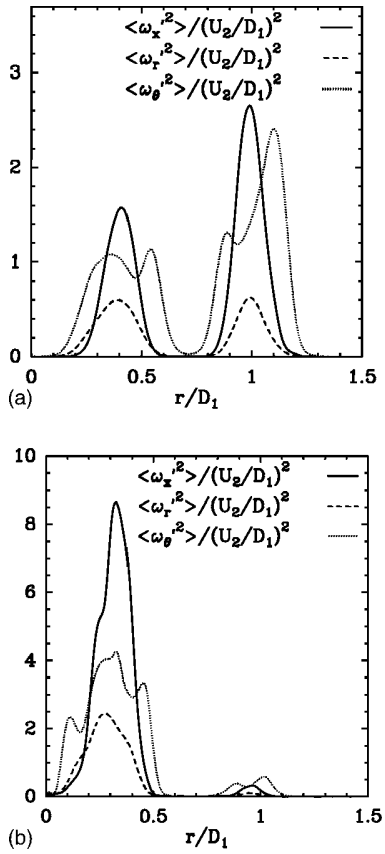


FIG. 8. Comparison between $\langle \omega'^{2}_{x} \rangle(x,r)$, $\langle \omega'^{2}_{r} \rangle(x,r)$, and $\langle \omega'^{2}_{\theta} \rangle(x,r)$ profiles: (a) simulation DNS2_10 at the location $x/D_1=6$; (b) simulation DNS5_10 at $x/D_1=3$.

checked that the ratio between the peak values of ω'_x and ω'_r reaches a maximum of 4.5 for DNS2_10 and 5 for DNS5_10 as we move downstream: this maximum being respectively reached at $x/D_1=4.5$ (DNS2_10) and at $x/D_1=2.5$ (DNS5_10). Similarly, the corresponding maximal ratio between ω'_x and ω'_θ are, respectively, 1.5 for DNS2_10 and 2 for DNS5_10 and take place at $x/D_1=6$ and $x/D_1=3.5$.

2. Jet spreading and potential cores

We now investigate the influence of θ_{01} on more global quantities. We first consider the jet spreading rate defined through a global shear layer thickness by analogy with the definition used for single jets. Let $r_{\max}(x)$ be the radial distance for which the mean streamwise velocity reaches its maximum value, $\max[U_x(x,r)]=U_x(x,r_{\max}(x))$. $\delta(x)$ is then chosen as the radial distance such that

$$U_x(x,\delta(x)) = \tfrac{1}{2}[U_x(x,r_{\max}(x)) - U_3], \tag{12}$$

where U_3 is the streamwise velocity in the irrotational region. Since we are interested in the global spreading rate of the jet, we furthermore choose $\delta(x)$ such that $\delta(x) > r_{\max}(x)$: $\delta(x)$ therefore characterizes the jet width. The downstream evolution of $\delta(x)$ for the three simulations DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10 is shown in Fig. 9. The simulation DNS2_3 corresponding to a smaller value of r_u ($r_u=3$; $\theta_{01}/R_1=0.08$) is also shown for comparison. For

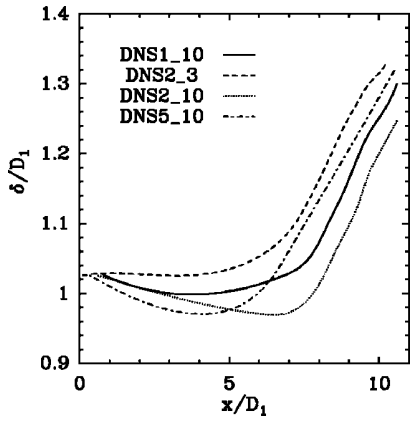


FIG. 9. Downstream evolution of jet spreading rate for the four simulations DNS1_10, DNS2_3, DNS2_10, and DNS5_10.

the simulation with moderate r_u (DNS2_3), $\delta(x)$ behaves similarly to a single jet: it is indeed almost constant for $x/D_1<7$ and undergoes a sudden transition with a rapid growth for $x/D_1>7$. In this second stage, transition to turbulence has taken place and the linear growth characteristic of the turbulent regime is observed. We have checked that the slope in the linear regime closely coincides with the slope for a single jet. For the cases with larger r_u (DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10), a decrease of δ is observed before transition. This corresponds to a so-called pinching phenomenum of the coaxial jet which has previously been observed experimentally.[4] For large enough values of r_u, the velocity difference between the outer jet and the inner jet induces a curvature of the outer mean streamlines towards the jet axis. This is directly related to the fluid entrainment by the outer coaxial jet: a limited amount of fluid can indeed be entrained from the slow part of the jet core and this entrainment eventually leads to a fluid depletion in the core region. This fluid depletion is accompanied by a pressure drop within the jet core leading to a curvature of the streamlines towards the jet axis. As previously mentioned, for r_u larger than the critical value r_{uc} it eventually yields a reverse backflow near the jet axis.

The comparison of DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10 allows to show that the pinching phenomenon is also strongly influenced by the value of the momentum thickness θ_{01}. For a fixed value of r_u, the decrease of θ_{01} is indeed associated with a decrease of the inner jet bulk velocity. One can then anticipate that the fluid depletion leading to a low-pressure region within the jet core will be more pronounced for small values of θ_{01} since a smaller quantity of fluid is injected within the core by the inner jet. This is confirmed by Fig. 9 which shows that the initial decrease of δ is more and more pronounced as we go from DNS1_10 to DNS5_10. The transition towards a turbulent linear growth occurs however at a shorter downstream location when θ_{01} is small. This is due to a faster transition to turbulence in that case as shown in Fig. 3. It is important to remark that the linear growth rate in the turbulent regime is identical for all the considered cases and becomes independent of the initial transitional stage. Note that the comparison of Figs. 3 and 9 indicates

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

that the effect of the turbulence growth has a delayed effect on the spreading rate. Indeed, it was observed on Fig. 3 that the rapid growth of $\langle u'^2_x \rangle^{1/2}$ due to transition was taking place at $x/D_1 \approx 5$, $x/D_1 \approx 4$, and $x/D_1 \approx 2$ for DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10, respectively. As shown on Fig. 9, this turbulence amplification has a direct effect on the spreading rate only for $x/D_1 \geqslant 7$, $x/D_1 \geqslant 7$, and $x/D_1 \geqslant 5$ for DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10, respectively. This is attributable to the fact that the turbulence originates from the inner shear layer and requires some downstream distance to diffuse towards the jet exterior and efficiently affect the jet spreading rate.

We now investigate how the two potential cores of the jet are affected by a variation in the value of θ_{01}. For a single jet, the potential core is the region where the flow remains free from the influence of viscosity. In this cone shaped region the flow is potential and conserves the streamwise velocity it had at the inlet. For the coaxial jet, we can define two potential cores, one for the inner round jet $0 < r < R_1$ and another for the outer annular flow $R_1 < r < R_2$. For these two inner and outer flow regions, the center of the respective potential cores can be identified as the radial locations at which the inlet streamwise velocity is conserved on the longest downstream distance. We call r_{PC1} and r_{PC2} these two radial locations for the inner and outer potential cores. Note that $r_{\mathrm{PC1}} = 0$. We define the length of the potential cores as the two longest distances we just defined: they are designated as $L_{\mathrm{PC}i}$ with $i=1$ for the inner potential core and $i=2$ for the outer one. From a practical point of view, $L_{\mathrm{PC}i}$ are determined as the two downstream distances from the inlet at which the mean streamwise velocity starts to differ by more than 5% from its value at the inlet.

The faster transition to turbulence associated with the decrease of θ_{01}, is clearly illustrated by Fig. 10 which shows the variations with R_1/θ_{01} of L_{PC1} and L_{PC2} at fixed $r_u (r_u = 10)$. The parameter R_1/θ_{01} is used here for a better readability of the figures: the simulations DNS1_10, DNS2_10, and DNS5_10 correspond to $R_1/\theta_{01} = 10$, 12.5, and 25. The increasingly efficient mixing of momentum due to turbulence when θ_{01} decreases yields a diminution of both L_{PC1} and L_{PC2}. Note that L_{PC1} varies with r_u (see below) while previous studies showed that L_{PC2} is independent of r_u (see Rehab, Villermaux, and Hopfinger[7]).

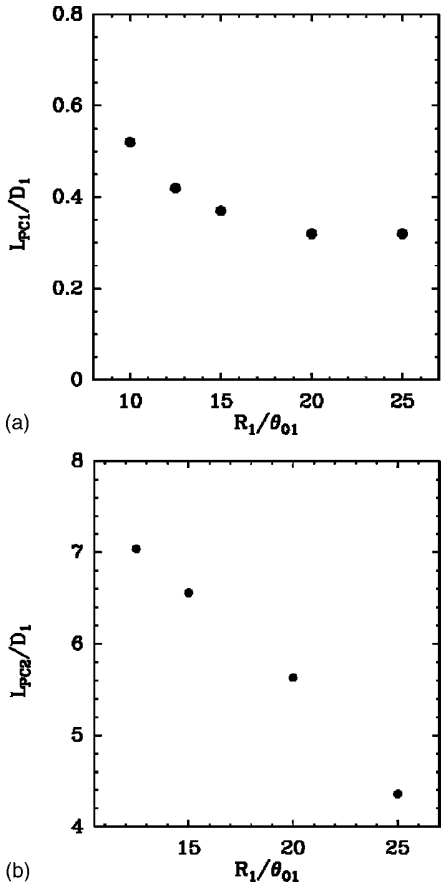


FIG. 10. (a) Evolution of the inner potential core length L_{PC1} with R_1/θ_{01} (at $r_u = 10$). (b) Evolution of the outer potential core length L_{PC2} with R_1/θ_{01} (at $r_u = 10$).

B. Recirculation bubble

We here consider the regime such that $r_u > r_{uc}$. To investigate the influence of θ_{01} two simulations are here compared DNS2_17 ($r_u = 17$; $\theta_{01}/R_1 = 0.08$) and DNS5_17 ($r_u = 17$; $\theta_{01}/R_1 = 0.04$). As r_u increases the entrainment by the outer annular jet and the depletion of the inner fluid is more and more pronounced. When r_u exceeds r_{uc}, the inner potential core breaks and a backflow region establishes associated with negative streamwise velocity near the jet axis. Figure 11 displays the downstream evolution of the mean axial velocity on the jet axis for the two simulations DNS2_17 and DNS5_17. In both cases, a region of negative velocity is apparent near the jet inlet. The longitudinal extent of the recirculation region varies with θ_{01} with a smaller value for sharper velocity gradients: the end of the recirculation bubble is located around $x/D_1 \approx 2.5$ for DNS5_17 when it ends around $x/D_1 \approx 3.5$ for DNS2_17.

The variation in size of the recirculation bubble is confirmed by Fig. 12 which shows positive Q isosurfaces for DNS2_17 and DNS5_17. In both cases, a recirculation bubble is seen to appear near the jet inlet but its longitudinal extension is significantly reduced for DNS5_17. Figure 13 displays a zoom on the recirculation bubble for both simulations. In both cases, the backflow region is centred at $x/D_1 \approx 2$ but the shape of the bubble significantly varies in function of θ_{01}: for DNS2_17 which corresponds to a relatively large value of θ_{01}, the Kelvin–Helmholtz vortices of the inner shear layer have not yet developed at this downstream location. Conversely, DNS5_17 corresponds with a value of θ_{01} which is twice smaller yielding an earlier formation of the Kelvin–Helmholtz vortices. In the first case, the bubble is then surrounded by a quasilaminar flow and it exhibits a very smooth shape. This is no longer the case in the second case where the recirculation bubble is significantly perturbed by the surrounding vortices of the inner shear layer. This has a significant impact on the flow turbulent behavior. Figure 14 indeed shows the downstream evolution of the rms velocity component $\langle u'^2_x \rangle^{1/2}(x,r)$ at the jet centerline for both simulations DNS2_17 and DNS5_17, this rms quantity being a

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

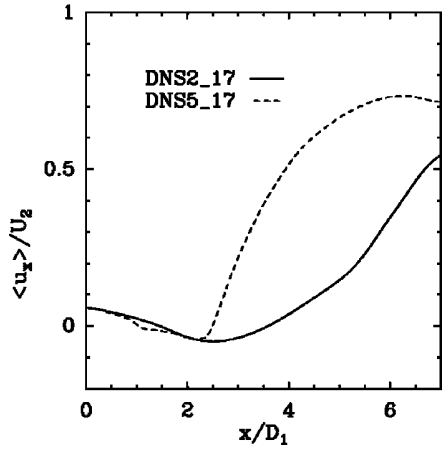


FIG. 11. Downstream evolution of the axial mean velocity at the centerline ($r=0$) for the two simulations DNS2_17 and DNS5_17.

measure of the turbulent activity in the backflow region ($1<x/D_1<4$). The recirculation bubble is seen to be laminar for DNS2_17 with $\langle u'^{2}_{x}\rangle^{1/2}\approx 0$ within the bubble. Conversely, the turbulent activity in the bubble is important for DNS5_17. Note that, in DNS2_17, a peak is present at $x/D_1\approx 0.75$ due to the turbulent production associated with the strong streamwise gradient of the mean streamwise velocity component corresponding to the flow deceleration in the stagnation region at the upstream part of the bubble (see SBM).

As already shown by SBM, Fig. 12 confirms that very elongated and intense longitudinal vortices form just downstream of the bubble. The downstream end of the recirculation bubble corresponds with an important longitudinal gradient of longitudinal velocity and consequently with a significant production of streamwise vorticity. This is confirmed by Figs. 15(a) and 15(b) which, respectively, represent the downstream evolution of the maximum value of the longitudinal vorticity rms $\langle \omega'^{2}_{x}\rangle$. The two simulations, DNS2_17 and DNS5_17, with a recirculation bubble are compared with the corresponding simulations without a recirculation bubble, DNS2_10 and DNS5_10. A strong increase of the longitudinal vorticity component in the flow region just downstream of the recirculation bubble is ob-

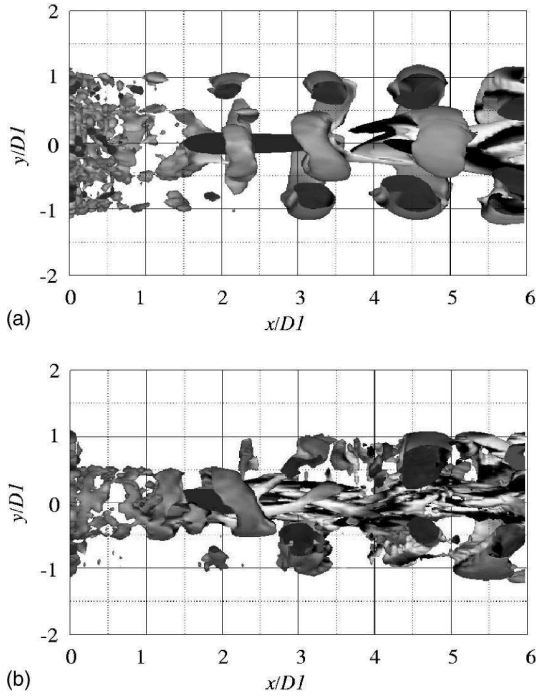


FIG. 12. Visualization of the coherent structures of DNS2_17 (a) and DNS5_17 (b) simulations near the jet inlet. Cut view of the isosurfaces of $Q=0.5(U_2/D_1)^2$ colored by the streamwise vorticity. Light gray corresponds with negative values and dark gray with positive values.

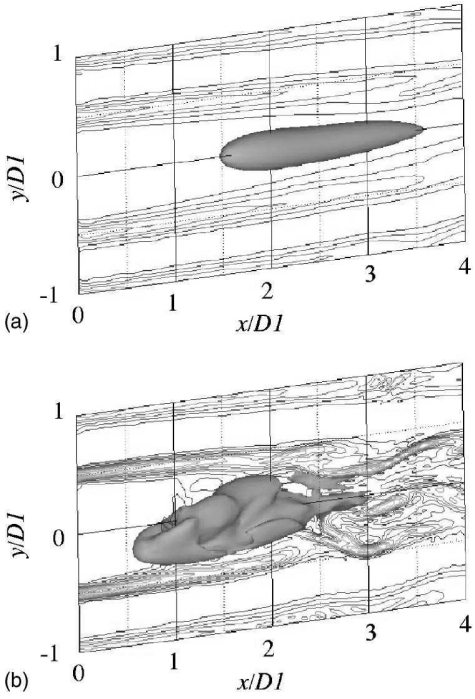


FIG. 13. Isosurface of zero velocity (light gray) showing the recirculation bubble and contours of vorticity modulus in the jet central plane: (a) DNS2_17 and (b) DNS5_17.

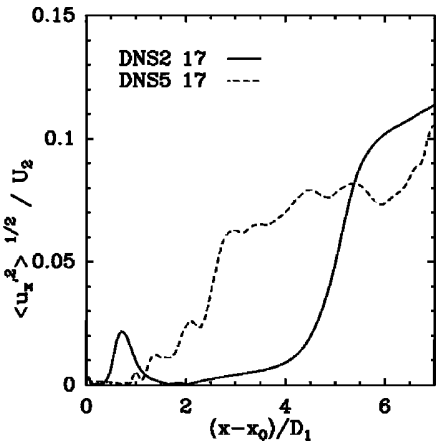


FIG. 14. Downstream evolution of the axial velocity component rms $\langle u'^{2}_{x}\rangle^{1/2}(x,r=0)$ at the jet centerline for the two simulations DNS2_17 and DNS5_17.

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

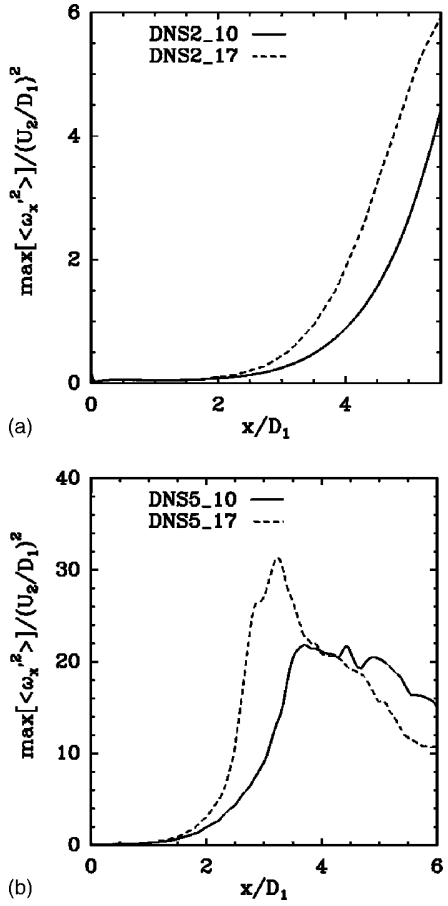


FIG. 15. Downstream evolution of the maximal value of $\langle \omega'^{2}_{x} \rangle$: (a) DNS2_10 and DNS5_17; (b) DNS5_10 and DNS5_17.

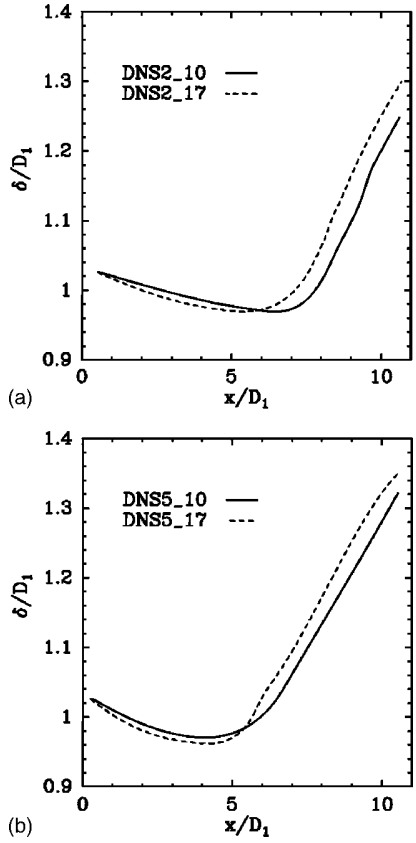


FIG. 16. Downstream evolution of the jet spreading rate δ: (a) DNS2_10 and DNS2_17; (b) DNS5_10 and DNS5_17.

served for both simulations DNS2_17 and DNS5_17. The peak value reached by this maximum is much larger than for the corresponding cases without a recirculation bubble: this indicates that the vortex stretching mechanisms are much more efficient in the presence of the bubble.

The streamwise vorticity generation just downstream the recirculation bubble triggers a fast transition towards a fully developed turbulent regime. This is illustrated by Figs. 16(a) and 16(b) which show the downstream evolution of the jet spreading rate $\delta(x)$ [see Eq. (12) for definition]: DNS2_17 and DNS5_17 are, respectively, compared with DNS2_10 and DNS5_10. The previously mentioned pinching phenomenum is observed in the two cases with the recirculation bubble and is even more pronounced than for the cases where the bubble is not present. However, for the two values of θ_{01} here considered, the enhanced turbulent activity downstream of the recirculation bubble leads to an earlier linear turbulent growth. It is important to note that the pinching phenomenum reaches a limiting value for the $r_u > r_{uc}$: indeed the minimum value reached by δ is almost identical for DNS2_17 and for DNS5_17. This is confirmed by Fig. 17 which shows the variation with r_u of the radial location of the outer potential core r_{PC2} (see preceding section). The DNS2 series of simulations are here considered corresponding to $R_1/\theta_{01}=12.5$. Due to the pinching phenomenum previously mentioned, the radial extension of the outer potential core is more and more reduced when r_u is increased. This is confirmed by the experimental observations of Rehab.[4] We remark that a plateau is reached when r_u exceeds the critical value r_{uc} for which a recirculation bubble appears (here $r_{uc}=13$), showing a limitation of the pinching phenomenum in the presence of a reverse flow region.

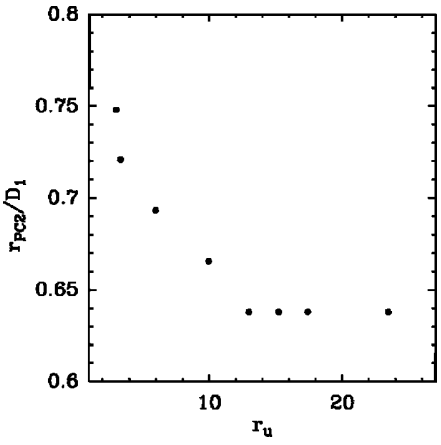


FIG. 17. Evolution with r_u of the radial localization r_{PC2} of the outer potential (at $R_1/\theta_{01}=12.5$).

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

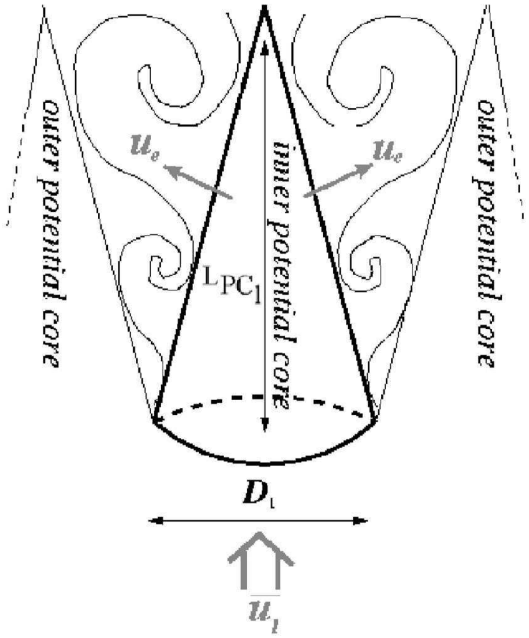


FIG. 18. Schematic diagram of the inner potential core: $\overline{u_1}$ designates the inner jet bulk velocity and u_e the entrainment velocity of the inner jet fluid into the mixing layer.

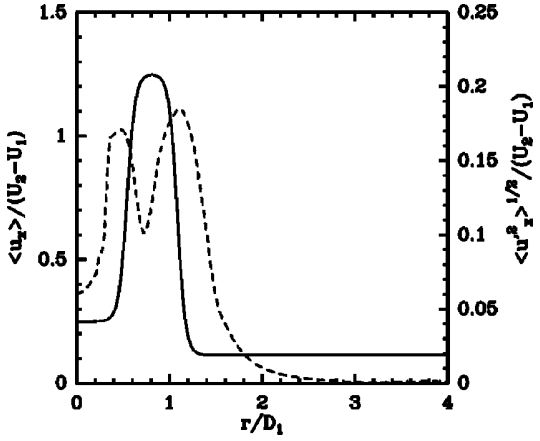


FIG. 19. Radial profiles of the mean axial velocity (continuous line) and of the rms of the longitudinal velocity fluctuation (dashed line) for DNS2_5 simulation. The profiles are computed at $x/D_1=1$.

IV. THEORETICAL MODELS

Rehab *et al.*[6] (referred to as RVH) proposed a theoretical model aimed at the prediction of the variation with r_u of the inner potential core length L_{PC1}. Since for their experimental setup, the inner jet profile was very steep with $R_1/\theta_{01} \approx 100$ they restricted their model to the case $R_1/\theta_{01} \to \infty$. We here extend their model to predict the variations laws with R_1/θ_{01} of both L_{PC1} and the critical ratio r_{uc}. We next validate the extended model by comparing our results with our numerical data.

A. The inner potential core length L_{PC1}

The basic ideas of RVH's model to predict L_{PC1} are the following: the potential core is assumed to be perfectly conical with a basis of radius R_1 and a length L_{PC1}. The entrainment velocity of the fluid within the inner core due to the shear layer on the jet border is assumed to be equal to u_e (see Fig. 18). u_e is assumed to have a constant intensity and to be normal to the side surface of the cone. The mass flux injected in the inner core is equalized with the mass flux crossing the side with the entrainment velocity u_e. For an incompressible fluid, the mass conservation equation can then be written as

$$\frac{\pi {D_1}^2}{4}\overline{u_1} = \frac{\pi D_1}{2}\sqrt{\frac{{D_1}^2}{4} + (L_{PC1})^2}\,u_e, \tag{13}$$

which leads to

$$\frac{L_{PC1}}{D_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\overline{u_1}}{u_e}\right)^2 - 1}. \tag{14}$$

Here $\overline{u_1}$ stands for the inner jet bulk velocity. To evaluate the entrainment velocity, RVH used a so-called entrainment hypothesis assuming that the entrainment velocity is proportional to the rms value of the streamwise velocity fluctuation u'_{xrms} within the shear layer,

$$u_e \approx C u'_{xrms}, \tag{15}$$

where C is a proportionality constant which depends on the shear flow under consideration. For the coaxial jet, we will determined C through fitting with our numerical results. RVH and Hussain and Zedan[21] experiments showed that the u'_{xrms} within a mixing layer is given by

$$u'_{xrms}/U_1 \approx 0.17(r_u - 1). \tag{16}$$

A similar value is found in our numerical simulations (see Fig. 19). Equations (15) and (16) yield the following variation law for the entrainment velocity:

$$u_e/U_1 \approx 0.17C(r_u - 1). \tag{17}$$

For the hyperbolic tangent profile given by Eq. (2), $\overline{u_1}$ is given by

$$\frac{\pi {D_1}^2}{4U_1}\overline{u_1} = \frac{2\pi}{U_1}\int_0^{R_1} U_{med}(r) r\, dr = 2\pi\int_0^{R_1}\left[\frac{r_u+1}{2} + \frac{r_u-1}{2}\tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right)\right] r\, dr. \tag{18}$$

It gives

$$\frac{\overline{u_1}}{U_1} = \frac{r_u+1}{2} + (r_u-1)B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right), \tag{19}$$

with $B(R_1/\theta_{01})$ verifying

$$B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right) = \frac{1}{{R_1}^2}\int_0^{R_1} r\tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right)dr. \tag{20}$$

Equations (14), (17), and (19) provide a new formulation of RVH's model taking into account the variations of L_{PC1}/D_1 with R_1/θ_{01},

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

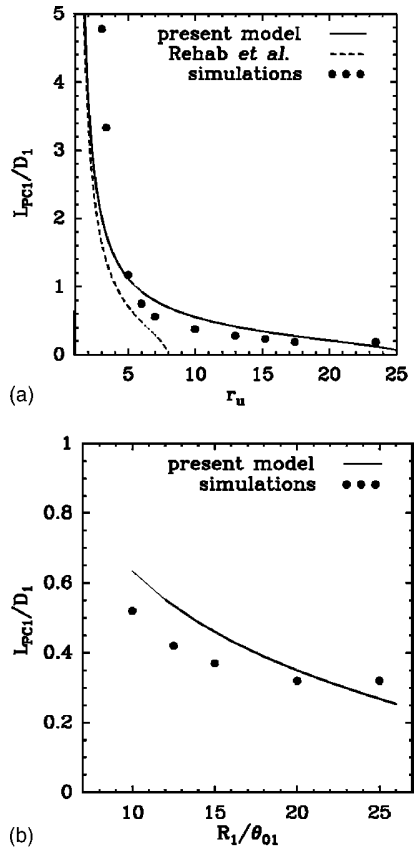


FIG. 20. (a) Evolution with r_u of the inner potential core length L_{PC1} (for $R_1/\theta_{01}=12.5$). (b) Evolution with R_1/θ_{01} of the inner potential core length L_{PC1} (for $r_u=10$). The points represent our simulations, the continuous lines the model given by Eq. (21) and the dashed lines RVH's model [see Eq. (22)].

$$\frac{L_{\mathrm{PC1}}}{D_1} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(0.17C)^2}\left[\frac{1}{2}\frac{r_u+1}{r_u-1}+B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right)\right]^2-1}. \qquad (21)$$

Note that original RVH's model is based on a top-hat velocity profile at the inlet with $\overline{u_1}\approx U_1$ which leads to the following expression for L_{PC1} which is independent of R_1/θ_{01}:

$$\frac{L_{\mathrm{PC1}}}{D_1}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{U_1}{u_e}\right)^2-2}\approx\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(0.17C)^2}\frac{1}{(r_u-1)^2}-1}. \qquad (22)$$

Figure 20 compares the modified model and RVH's model predictions with the results of our numerical simulations. We found that $C=0.85$ corresponds to the best fit between the theoretical model and the numerical results. As far as the dependence of L_{PC1} with r_u is concerned, the modified model yields a better agreement with the numerical values than the original RVH's model. It reproduces the decrease of the inner potential core length with increasing r_u due to the enhanced turbulence level and the amplified entrainment. The advantage of the modified model lies in its ability to reproduce the correct variations of L_{PC1} with θ_{01} and in particular its decrease when the shear layer becomes steeper.

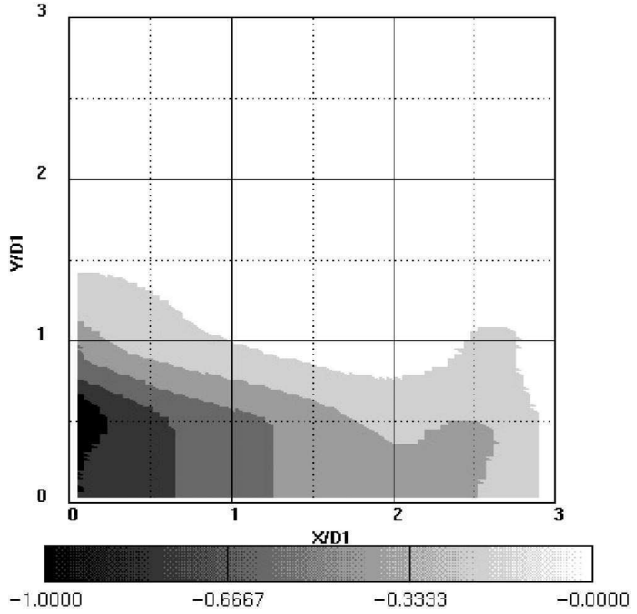


FIG. 21. Normalized mean pressure $(P-P_{\mathrm{ext}})/((1/2)\rho u'^2_{\mathrm{xrms}})$ with P_{ext} reference external pressure plotted in the jet symmetry plane.

B. The critical velocity ratio r_u

The theoretical determination of the critical ratio r_{uc} proposed by RVH is based upon pressure arguments. Due to the curvature of the mean streamlines, the pressure within the inner jet core is lower than the outer pressure. Using phenomenological arguments, Villermaux, Rehab, and Hopfinger[22] estimate this pressure jump ΔP to be of the order of $1/2\rho u'^2_{\mathrm{xrms}}$ with u'_{xrms} the streamwise rms velocity fluctuation within the external shear layer of the inner core and ρ the fluid density assumed to be constant. Figure 21 shows the isocontours of the mean pressure near the jet inlet for DNS1_13. The pressure is normalized by $1/2\rho u'^2_{\mathrm{xrms}}$ and confirms the above phenomenological arguments. The ambient pressure within the inner core is then of the order of $P_{\mathrm{ext}}-1/2\rho u'^2_{\mathrm{xrms}}$, where P_{ext} is the reference external pressure. The apparition of a reversed flow is necessarily associated with a stagnation point near the end of the inner potential core. The pressure at this stagnation point will be of the order of $P_S=P_{\mathrm{ext}}-1/2\rho u'^2_{\mathrm{xrms}}+1/2\rho\overline{u_1}^2$. If $P_S<P_{\mathrm{ext}}$, a reverse flow takes place and the limiting case therefore corresponds to the balance:

$$1/2\rho u'^2_{\mathrm{xrms}}=1/2\rho\overline{u_1}^2. \qquad (23)$$

Using the estimation of u'_{xrms} given by Eq. (16), it yields

$$0.17(r_{uc}-1)U_1=\overline{u_1}. \qquad (24)$$

Replacing $\overline{u_1}$ by its expression given in Eq. (19), we obtain

$$0.17(r_{uc}-1)=\frac{r_{uc}+1}{2}+(r_{uc}-1)B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right), \qquad (25)$$

where $B(R_1/\theta_{01})$ is defined by Eq. (20). Therefore the model to evaluate r_{uc} is

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

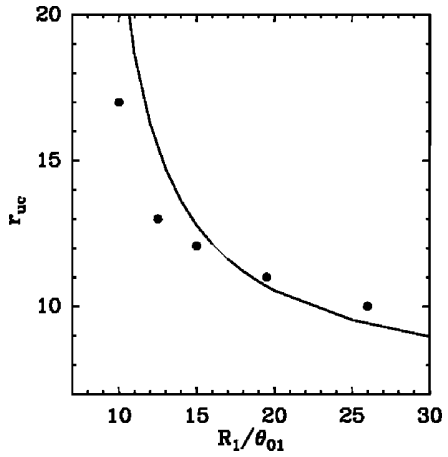


FIG. 22. Evolution with R_1/θ_{01} of the critical velocity ratio r_{uc}. The points represent the numerical simulations and the line the model given by Eq. (26).

$$r_{uc} = \frac{B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right) - 0.67}{B\left(\frac{R_1}{\theta_{01}}\right) + 0.33}. \tag{26}$$

Figure 22 shows that the model is able to satisfactorily predict the variation of r_{uc} with R_1/θ_{01} and confirms the importance of this parameter for the limit between the two flow regimes of coaxial jet. Note that the limiting case $R_1/\theta_{01} \to \infty$ leads to $r_{uc} \to 7$: our computations therefore indicate that no backflow region can exist for $r_u < 7$.

V. CONCLUSION

The goal of the present study is to complete previous experimental and numerical works devoted to the study of coaxial jets. The influence of the velocity ratio between the outer jet and the inner jet $r_u = U_2/U_1$ has experimentally been investigated by Rehab *et al.*[6] In these previous studies very small values of the inner and outer jet shear layers thicknesses were considered. However, Rehab *et al.* showed that the shape of the inlet nozzle strongly influences the near jet behavior and the dynamics of the coherent vortices, since different nozzle shapes induce a variation in the steepness of the inner and outer shear layers. Here, we characterize the respective thicknesses of the two shear layers by their momentum thicknesses called θ_{01} and θ_{02}. Even for high Reynolds number jets, a variation of the inner lip thickness of the jet yields a significant variation of θ_{01}. The present paper uses a series of direct numerical simulations to investigate the influence of θ_{01} on the transitional processes in the jet near-field. As shown by Rehab *et al.*, when r_u exceeds a critical value r_{uc}, the jet exhibits a reverse flow region in its inner part called a recirculation bubble. We therefore vary the ratio r_u and the two distinct jet regimes are successively considered: the case without a recirculation bubble ($r_u < r_{uc}$) and with a recirculation bubble ($r_u > r_{uc}$).

We show that, both for $r_u < r_{uc}$ and for $r_u > r_{uc}$, small values of θ_{01} are associated with an earlier jet transition to turbulence due to a faster destabilization of the inner shear layer. We then study in detail the mechanisms responsible for this transition towards a fully developed turbulent state. For $r_u < r_{uc}$, we show that the three dimensionality of the primary jet vortices is greatly enhanced for small θ_{01} and leads to the appearance of secondary streamwise vortices which are stretched between consecutive vortices of the inner and of the outer shear layer. We observe that the transition towards a fully developed turbulent state is strongly linked with the formation and stretching of these streamwise vortices. The critical value r_{uc} separating the regime without and with recirculation bubble is found to be strongly dependent on θ_{01}. For $r_u > r_{uc}$, the shape and the length of the recirculation bubble is seen to be strongly affected by the shape of the inlet profile: the bubble is indeed significantly shortened when θ_{01} is small. The downstream region of the bubble is the siege of intense longitudinal vorticity production yielding the generation of intense streamwise vortices. Again these vortices are associated with a fast flow three-dimensionalization and rapid transition to turbulence.

The thickness of the inner shear layer also affects the evolution of the global quantities such as the jet spreading rate and the length of its two potential cores. For large enough values of r_u, the entrainment by the outer jet leads to an important depletion of the fluid situated near the jet axis. This depletion is associated with a low-pressure region in the jet core and with a curvature of the main velocity streamlines towards the jet axis: this creates a diminution of the jet width corresponding to a pinching phenomenon. This pinching phenomenon is more and more pronounced when θ_{01} decreases. The initial pinching stage is followed by a stage of linear spreading characteristic of a turbulent regime. The linear growth is reached at shorter downstream distances when θ_{01} is small due to the faster turbulence growth within the jet core. The pinching phenomenon is seen to reach a saturation level for $r_u > r_{uc}$.

Rehab *et al.*[6] proposed a theoretical model based on phenomenological arguments to predict the variations of the inner potential core length with r_u. The direct numerical simulations allow to verify that the main assumptions of Rehab's model are justified. This initial model was however limited to an inlet velocity profile with a top-hat shape corresponding with $\theta_{01} \to 0$. We here extend the model to nonzero values of θ_{01} to theoretically predict the variation laws with θ_{01} of the inner potential core length and of the critical ratio r_{uc}. The variation law of the inner potential length with r_u was also determined for finite values of θ_{01}.

The present numerical study allows one to reach a better understanding of the transitional mechanisms leading to turbulence in coaxial jets. This knowledge could be used for control purposes by making possible an efficient manipulation of the flow coherent vortices.

ACKNOWLEDGMENTS

Patrick Begou's help with the numerical-code parallelization is greatly acknowledged. Moreover, numerous discussions with Carlos B. da Silva have contributed to the success of this work. Part of the computations were carried out at the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS, France).

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

[1]T. J. Williams, M. R. M. H. Ali, and J. S. Anderson, "Noise and flow characteristics of coaxial jets," J. Mech. Eng. Sci. **11**, 133 (1969).
[2]M. Favre-Marinet and E. B. Camano Schettini, "The density field of coaxial jets with large velocity ratio and large density differences," Int. J. Heat Fluid Flow **44**, 1913 (2001).
[3]N. W. M. Ko and W. T. Chan, "The inner regions of annular jets," J. Fluid Mech. **93**, 549 (1979).
[4]H. Rehab, "Structure de l'écoulement et mélange dans le champ proche des jets coaxiaux," Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
[5]C. B. da Silva, G. Balarac, and O. Métais, "Transition in high velocity ratio coaxial jets analysed from direct numerical simulations," J. Turbul. **4**, 24 (2003).
[6]H. Rehab, E. Villermaux, and E. J. Hopfinger, "Flow regimes of large-velocity-ratio coaxial jets," J. Fluid Mech. **345**, 357 (1997).
[7]H. Rehab, E. Villermaux, and E. J. Hopfinger, "Geometrical effects on the near-field flow structure of coaxial jets," AIAA J. **36**, 867 (1998).
[8]S. K. Lele, "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution," J. Comput. Phys. **103**, 16 (1992).
[9]C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer, New York, 1987).
[10]M. A. Gonze, "Simulation numérique des sillages en transition à la turbulence," Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993.
[11]C. B. da Silva and O. Métais, "Vortex control of bifurcating jets: a numerical study," Phys. Fluids **14**, 3798 (2002).
[12]C. B. da Silva and O. Métais, "On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets," J. Fluid Mech. **473**, 103 (2002).
[13]C. B. da Silva, "The role of coherent structures in the control and interscale interactions of round, plane and coaxial jets," Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
[14]H. A. Warda, S. Z. Kassab, K. A. Elshorbagy, and E. A. Elsaadawy, "An experimental investigation of the near-field region of a free turbulent coaxial jet using LDA," Flow Meas. Instrum. **10**, 15 (1999).
[15]G. Buresti, P. Petagna, and A. Talamelli, "Experimental investigation on the turbulent near-field of coaxial jets," Exp. Therm. Fluid Sci. **17**, 18 (1998).
[16]N. W. M. Ko and A. S. H. Kwan, "The initial region of subsonic coaxial jets," J. Fluid Mech. **73**, 305 (1976).
[17]J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin, "Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows," Annual research briefs, Center for Turbulence Research, Stanford, 1988.
[18]Y. Dubief and F. Delcayre, "On coherent vortex identification in turbulence," J. Turbul. **1**, 11 (2000).
[19]O. Métais, "Large-eddy simulations of turbulence," in *New Trends in Turbulence*, edited by M. Lesieur *et al.* (Springer, New York, 2001), pp. 113–186.
[20]G. Balarac and O. Métais, "Coherent vortices in coaxial jets," in *Advances in Turbulence X*, edited by H. I. Anderson and P.-Å. Krogstad (CIMNE, Barcelona, 2004), pp. 149-152.
[21]A. K. M. F. Hussain and M. F. Zedan, "Effects of the initial conditions on the axisymetric free shear layer: effects of the initial momentum thickness," Phys. Fluids **21**, 1100 (1978).
[22]E. Villermaux, H. Rehab, and E. J. Hopfinger, "Breakup regimes and self-sustained pulsations in coaxial jets," Meccanica **29**, 393 (1994).

Downloaded 12 May 2005 to 193.48.255.141. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Mecanique 333 (2005) 622–627
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Mixing and coherent vortices in turbulent coaxial jets

Guillaume Balarac *, Mohamed Si-Ameur

L.E.G.I., B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 09, France

Received 24 June 2005; accepted 28 June 2005

Available online 11 August 2005

Presented by Marcel Lesieur

Abstract

Direct numerical simulations associated with mixing in constant-density round coaxial jets are performed. They are validated by comparison against laboratory experiments. The mixing process is studied by seeding a passive tracer first in the outer annular jet, then in the inner jet. We demonstrate the important role played by coherent vortices in the mixing mechanisms. The turbulent mixing exhibits an intermittent character as a consequence of fluid ejections caused by the counter-rotating streamwise vortices. We quantify also the domination of the outer jet and show that the fluid issuing from the central jet remains confined. ***To cite this article: G. Balarac, M. Si-Ameur, C. R. Mecanique 333 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Mélange et tourbillons cohérents dans des jets coaxiaux turbulents. Nous développons des simulations numériques directes associées au mélange dans des jets ronds coaxiaux de densité uniforme. Ces simulations sont validées par comparaison avec des expériences de laboratoire. Le processus de mélange est étudié en introduisant un traceur passif dans le jet annulaire puis dans le jet central. Nous montrons le rôle important joué par les tourbillons cohérents dans les mécanismes du mélange. Le mélange turbulent présente un caractère intermittent qui est la conséquence d' éjections de fluide causées par les tourbillons longitudinaux contrarotatifs. Nous quantifions également la domination du jet extérieur et montrons que le fluide issu du jet intérieur reste confiné. ***Pour citer cet article : G. Balarac, M. Si-Ameur, C. R. Mecanique 333 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Keywords: Turbulence; Computational fluid mechanics

Mots-clés : Turbulence ; Mécanique des fluides numérique

* Corresponding author.
E-mail addresses: guillaume.balarac@hmg.inpg.fr (G. Balarac), mohamed.si-ameur@hmg.inpg.fr (M. Si-Ameur).

1631-0721/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crme.2005.07.003

1. Introduction

The main objective of the present work is focused on the study and analysis of the effect of the turbulent structures upon the scalar mixing process in free coaxial jets, which form when the streams issuing from the central and co-annular pipes meet and mix in the open environment. The specific interest of mixing studies in such a flow configuration lies in a wide range of industrial applications such as chemical engineering systems or combustion devices (in particular flames linked to flow characteristics in power-producing gas turbines).

Few research works available in the literature have considered the important problem of mixing in coaxial jets [1], and the numerical works were limited to an axisymmetric approximation [2].

Mixing-processes diagnostic or prediction entails thorough informations on the spatio-temporal scalar-field evolution, which are difficult to acquire within the frame of laboratory experiments, and cannot be obtained with the aid of turbulence closure models. Experiments permit high Reynolds numbers and may involve numerous species, but flow and scalar seeding parameters cannot be easily modified, especially as far as chemistry is concerned. On the other hand, direct numerical simulations give an exact information on temporal and spatial flow evolutions, and are a very efficient tool in reproducing flow coherent vortices [3] (which play a major role in mixing). However, they can model only a simplistic chemistry.

In this context, the present work provides a numerical investigation of the scalar mixing by means of Direct Numerical Simulation (DNS) in three-dimensional coaxial round jets. Section 2 gives a brief description of the numerical method. Section 3 presents the results, with emphasis put on relations between flow topological aspects and mixing-fraction field statistics.

2. Inflow conditions and numerical methods

The inlet-velocity profile shape is constructed with two 'hyperbolic-tangent' profiles. This is a good approximation to the inlet mean velocity in coaxial jets, and it allows a rigorous definition of the global flow parameters [3,4]. The velocity ratio between the outer and the inner jets is $r_u = 5$. The domain size is of $10.8D_1 \times 10.65D_1 \times 10.65D_1$ (where D_1 is the inner-jet diameter), along the streamwise (x) and the two transverse directions (y, z), respectively. The mixing of fluids issued from the inner and outer jets is studied through the mixing fraction f considered as a passive scalar. The Reynolds and Schmidt numbers are $Re = U_2 D_1/\nu = 3000$ (U_2 is the velocity of the outer jet) and $Sc = \nu/\kappa = 1$, respectively.

We solve numerically the full incompressible Navier–Stokes equations written in Cartesian coordinates in the parallelepipedic computational domain consisting in $231 \times 384 \times 384$ points with a uniform mesh size in all three directions. The spatial discretization is performed thanks to a sixth-order compact finite difference scheme in the streamwise direction, together with pseudo-spectral method in transverse and spanwise directions. Pressure–velocity coupling is ensured by a fractional step method, with a Poisson equation resolution to guarantee incompressibility. The time stepping is carried out with the aid of a third-order Runge–Kutta scheme. The outlet boundary condition is of a non-reflective type (see [3] for numerical details). The evolution of f is given by a advection–diffusion equation solved by a second-order semi-discretized TVD Roe scheme [5] for the spatial discretization of the advection term.

3. Results and discussion

Fig. 1(a) shows an instantaneous view of three-dimensional positive Q isosurfaces, in order to illustrate the flow structures. We recall that Q is the second invariant of the velocity-gradient tensor, and it is well recognized as a being a good indicator of coherent vortices [6]. The main features of the flow can be seen. Two types of primary vortices appear in the early transition stage ($x/D_1 < 3$): the inner and outer primary vortices. These

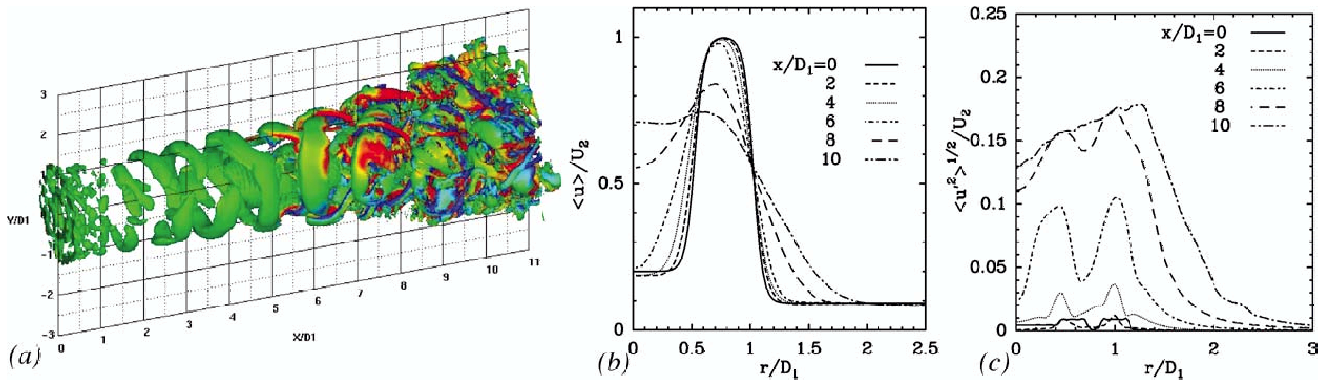


Fig. 1. (a) Isosurfaces of positive Q colored by the axial vorticity. (b) Mean axial velocity profiles at several downstream sections. (c) rms axial velocity profiles at several downstream sections.

Fig. 1. (a) Isosurfaces de Q positif colorées par la vorticité axiale. (b) Profils de vitesse axiale moyenne à plusieurs sections aval. (c) Profil de la fluctuation de la vitesse axiale à plusieurs sections aval.

vortices appear at each shear layer (between the inner and the outer jets and between the outer jet and the co-flow). They are a consequence of Kelvin–Helmholtz instabilities created by the inflexional shape of the upstream velocity profile. For coaxial jets with high velocity ratio ($r_u > 1$), they turn in opposite sense and a 'locking' phenomenon between the outer and the inner primary vortices implies that the inner and outer shear-layer shedding frequencies are equal [7]. Around $x/D_1 \approx 7$, pairs of alternate streamwise vortices appear between two consecutive outer and inner primary vortices, in agreement with the classical scenario of three-dimensionalization in free-shear layers. The streamwise vortices play a dominant role in the transition processes towards a fully-turbulent state, and their location is very dependent of the inlet conditions [4]. The apparition of streamwise vortices is finally followed by an abrupt increase in the level of small-scale turbulence. Then the flow quickly reaches a state of fully-developed turbulence. Indeed, the axial velocity component time-frequency spectrum computed at the downstream end of the computational domain has a $-5/3$ range over about one decade. Fig. 1(b) shows the mean axial velocity $\langle u \rangle$ profile at several downstream locations (brackets indicate a temporal averaging). At the beginning of transition, the jet keeps a profile similar to the inlet one. But downstream of $x/D_1 \approx 8$, the axial velocity profile loses its two-layer structure and the maximum velocity locates at the centerline. At the end of the computational domain, the most-intense turbulent activity is localized in the outer annular jet (Fig. 1(c)). Moreover, there is a 'pinching' of the central jet by the annular jet implying a shift of the outer potential core towards the jet center [4]. This phenomenon is due to a strong momentum transfer from the outer jet to the inner jet for a high velocity ratio. These last points reveal the outer-jet domination for high velocity-ratio coaxial jets.

In order to focus our analysis on scalar mixing, a 'numerical passive tracer' has been set up with two configurations. In the first case, we prescribe $f = 1$ in the outer stream and $f = 0$ elsewhere (inner stream and ambient fluid). The instantaneous planar flow along the central plane (Fig. 2(a)) gives a qualitative illustration of the mixing phenomena. The near-field region is quasi-linear until $x/D_1 = 4$. The consequence on the mean mixing fraction is that $\langle f \rangle$ remains equal to 0 and 1 in the inner and outer jet, respectively (Fig. 3(a)). Whereas the radial mixing fraction profiles indicate clearly a variation of $\langle f \rangle$ at the interfaces of the two fluids issued from the inner and outer jets (Fig. 3(b)). The mixing at this stage is mainly dominated by molecular diffusion, since a weak white-noise perturbation ($\approx 3\%$ of the fast outer stream) was introduced to let the instabilities develop naturally. Downstream of $x/D_1 = 4$, a turbulent mixing activity emerges as far as coherent structures become extensive. Fig. 2(b) shows the mixing-fraction isosurface $f = 0.5$. It is a good indicator of the mixing efficiency in the turbulent mixing conditions. Characterization of the multiscale geometry of the iso-species surfaces is a crucial step for understanding and modeling turbulent mixing linked to turbulent combustion processes. The isosurface $f = 0.5$ is highly convoluted after the instabilities amplification, with evidence of a large-scale structures. Thus, the turbulent mixing starts with an engulfment of the two jet fluids through the shear layers implied by the Kelvin–Helmholtz vortices.

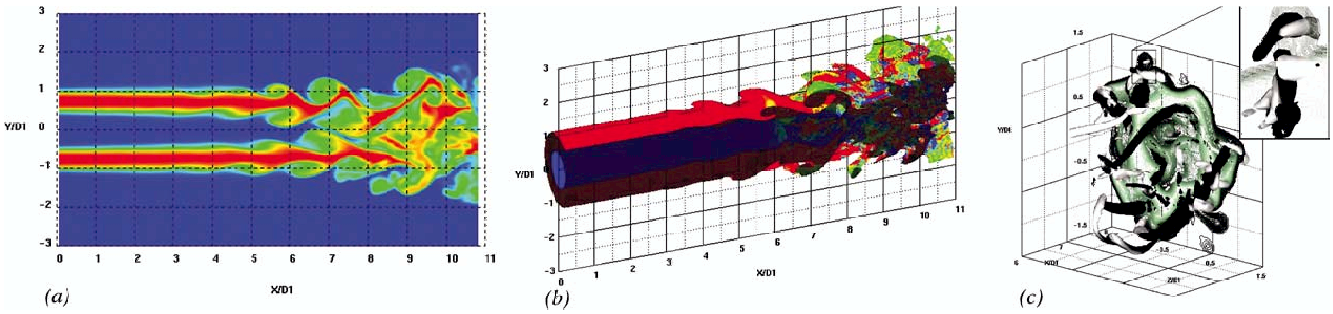


Fig. 2. (a) Instantaneous contours of mixing fraction in the central plane. (b) Cut view of mixing fraction isosurface ($f = 0.5$) coloured by the tangential vorticity. (c) Zoom of passive-scalar ejections by the counter-rotating longitudinal vortices (shown by an isovolume of $Q > 0$ coloured by the axial vorticity).

Fig. 2. (a) Contours instantanés de la fraction de mélange dans le plan central. (b) Vue coupée d'une isosurface de la fraction de mélange ($f = 0{,}5$) colorée par la vorticité tangentielle. (c) Illustration des éjections de scalaire passif par les tourbillons longitudinaux contrarotatifs (montrée par un isovolume de $Q > 0$ coloré par la vorticité axiale).

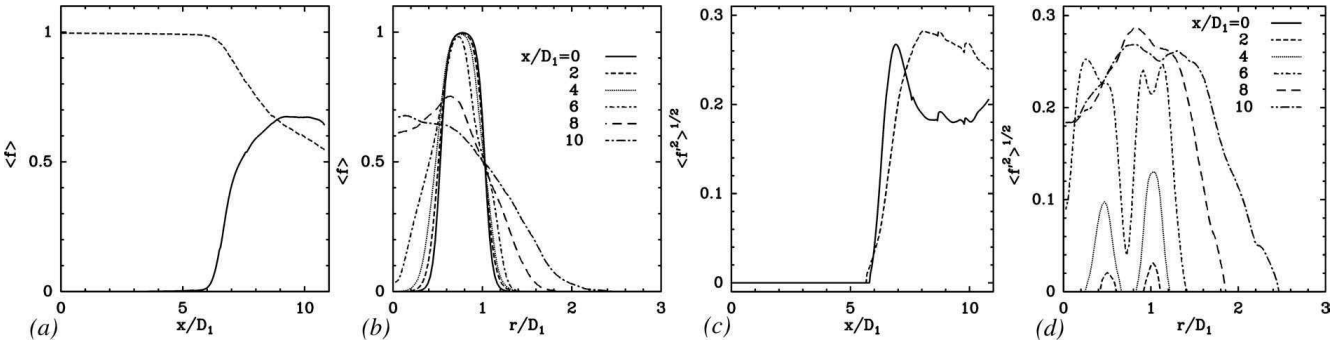


Fig. 3. Mean mixing fraction: (a) Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line); (b) Radial evolution at several downstream locations. Mixing fraction rms: (c) Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line); (d) Radial evolution at several downstream locations.

Fig. 3. Fraction de mélange moyenne : (a) Evolution longitudinale dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée) ; (b) Evolution radiale à différentes sections. Ecart-type de la fraction de mélange : (c) Evolution longitudinale dans le jet central (ligne continue) et dans le jet annulaire (ligne pointillée) ; (d) Evolution radiale à différentes sections.

It explains the two distinct peaks of the mixing-fraction rms $\langle f'^2\rangle^{1/2}$ (noted also f'), located in the inner and the outer shear layers, respectively (Fig. 3(d)). Notice that these peaks have been also detected in experiments [8] with same maximum values (around 0.25). Beyond $x/D_1 = 5$, the presence of coherent structures improves the mixing activity. This is shown by Fig. 3(a) and (b) indicating that the mean mixing fraction increases drastically inside the central jet to reach an asymptotic value around $f = 0.5$, as a consequence of the tracer invasion and diffusion within the inner jet. The two species are then approximately equipartitioned, and reasonably-uniformly distributed inside the shear layers. On Fig. 2(b), where the isosurface is colored by the tangential vorticity field, one can distinguish two noticeable features fulfilling $f = 0.5$. Before $x/D_1 \approx 7$, the two structures are wholly decorrelated, while for $x/D_1 > 7$ they are strongly distorted, allowing interpenetration of species issued from the jets and co-flow. This merging between the two mixing layers is caused by the streamwise counter-rotating vortices which bring three dimensionality to the jet. Indeed, these three-dimensional vortices eject the numerous space-coherent packets of tracer into the ambient fluid and the inner jet, leading to the mushroom-shaped tracer structures. Fig. 2(c) shows clearly this phenomenon. Thus turbulent mixing becomes predominant after this stage with an impressive growth of mixing fraction rms downstream of $x/D_1 \approx 6$ (Fig. 3(c)). Finally, for $x/D_1 > 8$, Fig. 3(b) shows that the mean mixing fraction is maximum in the jet center. Near the outflow, large amounts of tracer invade the central jet and the inner and outer mixing layers merge in order to create a single mixing zone similar to simple

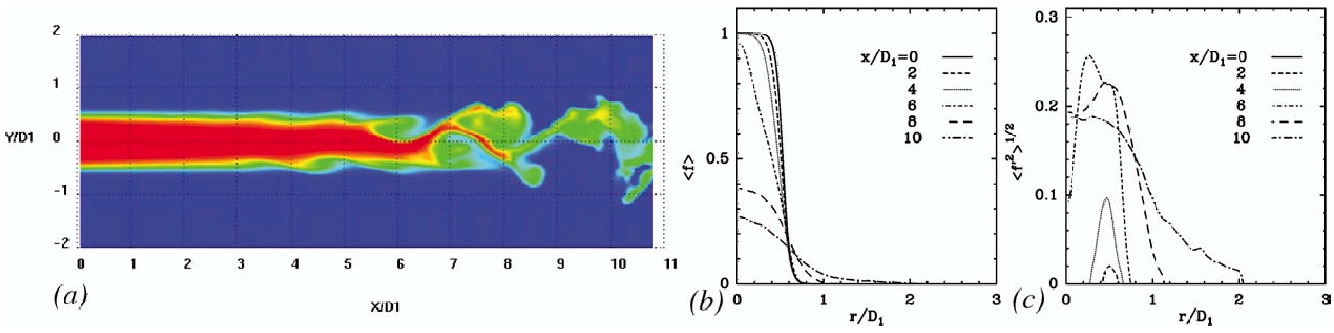


Fig. 4. (a) Instantaneous contours of mixing fraction in the central plane. (b) Radial evolution of the mean mixing fraction at several downstream locations. (c) Radial evolution of the mixing fraction rms at several downstream locations.

Fig. 4. (a) Contours instantanés de la fraction de mélange dans le plan central. (b) Evolution radiale de la fraction de mélange moyenne à différentes sections aval. (c) Evolution radiale de la fluctuation de la fraction de mélange à différentes sections aval.

jets. For the rms profiles of the mixing-fraction fluctuations (Fig. 3(d)), only the outer peak persists in this region. It is a consequence of the outer-jet dominance as far as mixing properties are concerned. Moreover, animations indicate that numerous spots of pure unmixed species are discernible at the end of the computational domain in the results corresponding to Fig. 2(a). They are the consequence of the mixing mechanism intermittent character. An appropriate time periodic forcing of three-dimensional longitudinal structures as well as vortical rings at the inlet boundary could decrease the amount of unmixed species and substantially increase the mixing.

In the last part of the study, we prescribe $f = 1$ in the inner jet and $f = 0$ elsewhere (annular jet and ambient fluid). In this second case, outer vortices do not contribute to the mixing because they do not transport tracer. The engulfment phenomenon is only in the inner shear layer. But the outer vortices hinder the radial development of the inner coherent vortices. Figs. 4(a) and 4(b) allow one to observe that the tracer remains confined between the edge and the centreline of the inner jet, with no more pure unmixed fluid from the inner jet beyond $x/D_1 = 5$. A large amount of fluid from the outer jet invades the inner jet generating mixing fraction values about 0.3–0.4, as a consequence of the domination implied by the outer jet. The peak of the mixing activity remains in the inner jet (Fig. 4(c)) with a weaker value (0.2 instead of 0.25 in the first case).

4. Conclusions

We have performed a study of mixing processes in round coaxial jets using direct numerical simulations. The mixing in flows consisting in an inner jet, annular jet and ambient fluid has been analysed with the aid of the spatio-temporal evolution of the mixing fraction (considered as a passive scalar) during the transition stages. We have shown the important role played by the coherent vortices in the turbulent mixing.

When the tracer is seeded in the annular jet, the turbulent-mixing process begins by an engulfment of species through both shear layers due to Kelvin–Helmholtz vortices. Further downstream, the turbulent mixing exhibits an intermittent character as a consequence of fluid ejections caused by the counter-rotating streamwise vortices. Moreover there is an important invasion of the fluid from the outer jet to the jet center due to the strong momentum transfer from the outer annular jet to the inner jet. Finally, spots of pure unmixed fluid persist in this configuration. This phenomenon represents a disadvantage for the mixing efficiency. This work suggests that an upstream control of the outer shear layer can decrease these amounts of unmixed fluid.

When the tracer is seeded in the inner jet, the mixing process is only due to the inner vortices. The tracer remains confined in the jet center because the outer vortices hinder the radial development of the inner streams. Finally, a large amount of fluid from the outer jet invades the inner jet. Thus, the mixing fraction value decreases strongly at the end of the transition in this mixing configuration.

Acknowledgements

Some of the computations were carried out at the IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique, Paris).

References

[1] E. Villermaux, H. Rehab, Mixing in coaxial jets, J. Fluid Mech. 425 (2000) 161–185.
[2] M.V. Salvetti, P. Orlandi, R. Verzicco, Effects of velocity ratio on vorticity dynamics and mixing in coaxial jet flow, in: 1st International Congress in Turbulent Shear Flows Phenomena, 2000.
[3] C.B. da Silva, G. Balarac, O. Métais, Transition in high velocity ratio coaxial jets analysed from direct numerical simulations, J. Turbulence 4 (2003) 24.
[4] G. Balarac, O. Métais, The near field of coaxial jets: a numerical study, Phys. Fluids, 17 (2005), in press.
[5] C. Hirsch, Numerical Computation of Internal and External Flows, vol. 2, John Wiley & Sons, 2002.
[6] Y. Dubief, F. Delcayre, On coherent vortex identification in turbulence, J. Turbulence 1 (2000) 11.
[7] G. Balarac, O. Métais, Coherent vortices in coaxial jets, in: CIMNE, Barcelona, 2004, pp. 149–152.
[8] B.D. Ritchie, D.R. Mujumdar, J.M. Seitzman, Mixing in coaxial jets using synthetic jet actuators, AIAA Paper, 2000-0404, 2000.

Direct numerical simulations of high velocity ratio coaxial jets: Mixing properties and influence of upstream conditions

Guillaume Balarac*, Mohamed Si-Ameur,
Marcel Lesieur & Olivier Métais
Equipe MoST/LEGI,
B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 09, France

July 17, 2006

To appear in J. of Turbulence

Abstract

Direct Numerical Simulations (DNS) are performed to investigate mixing in free round coaxial jets. A great attention has been put on the influence of upstream conditions upon the global flow structure and the mixing process. The mixing behavior is studied through the spatial and temporal development of the mixture fraction of the annular and the inner fluids, and examined by means of flow visualization and statistics. It is shown that the turbulent mixing process and the mixture fraction field in coaxial jets depends on the upstream conditions, even though a quasi self-similar state is reached. The mixing alterations are explained by the understanding of the flow dynamics modifications implied by the different upstream conditions. These alterations are mainly due to the intense generation of streamwise vortices, favoured by high inlet velocity gradients and velocity ratios, as well as low ratios between the inner and the outer jet diameters. This is associated to a high quality of mixing, as far as global mixedness is concerned. It is also shown that the annular fluid reaches the inner fluid and mixes swiftly into it. Conversely, the latter remains confined. Additionally, spots of pure unmixed species are observed at the end of the computational domain, and shown to be due to the annular jet.

Keywords: Turbulence; Coaxial jets; Mixing properties

1 Introduction

Coaxial jets are widely used in industrial applications, especially in chemical engineering systems and combustion devices. They are for instance linked to flames in power producing gas turbines. Achievement of high rates of molecular mixing between turbulent gaseous jets is a challenging target. A better mixing is

*corresponding author: guillaume.balarac@hmg.inpg.fr

of crucial importance to improve combustion efficiency and reduce pollutant emissions in such technological combustion systems.

In this framework, the present work aims to study qualitatively and quantitatively scalar mixing in free round turbulent coaxial jets, with emphasis put on modifications of the upstream conditions. The key interest is to understand these influences as a preliminary attempt to predict mixing behavior in practical coaxial nozzles for which typical initial conditions are not known. In these situations, mixing is subject to many interacting processes and takes place at all turbulent scales. We will speak here of one kind of mixing, the macro-mixing which is controlled by the dynamics of turbulent eddies. A detailed topological analysis of such structures has already been done in earlier works (da Silva *et al.* [1] and Balarac and Métais [2]). Micro-mixing is relevant when the molecular mixing is deemed and is evaluated in terms of probability density functions (PDF).

In order to place the present study in its context, we present a literature survey. In fact few works have considered the important problem of mixing. The numerical investigation of Salvetti [3] has examined the mixing process but the configuration was limited to an axisymmetric approximation. They have provided informations about the mixing evolution in the early stage of flow development. Jahnke *et al.* [4] have performed a large-eddy simulation (LES) of mixing in a confined coaxial jet. They study the influence of different parameters (like Reynolds number, Schmidt number and density ratio), and consider the case where the inner jet is faster than the outer jet. In a previous experimental work, Villermaux and Rehab [5] have determined the mixing time scale as a function of the Schmidt number. Ferrao *et al.* [6] have also studied the turbulent scalar mixing in the initial region of an axisymmetric coaxial jet of CO_2 and air. They have shown in particular that the structure of the inner jet is affected by fluid from both the inner and annular jet. Additional experiments (Ritchie *et al.* [7], Kurimoto *et al.* [8] and Suzuki *et al.* [9]) studied forced coaxial jets for active mixing control. They provide a thorough instantaneous snapshot of the concentration field and statistical information on the concentration fluctuations. Ritchie *et al.* [7] have highlighted that the active mixing control by synthetic jets was able to influence the inner and outer jets.

In this paper, we present a study of near and far-field structure of constant density round coaxial jets, with emphasis put on mixing properties. We restrict ourselves to mixing without chemical reactions, in order to concentrate on the effect of turbulent vortices and structures on the mixing process, with a particular focus on the influence of upstream conditions. A great attention is paid to the spatio-temporal evolution of the mixture fraction f, with a particular interest in PDF of f. The tool of investigation is DNS, which allows to resolve the smallest scales and hence describes the molecular mixing process itself. Even though the present DNS is restricted to low Reynolds numbers (in order to resolve all the mixing scales), it can be considered as a noteworthy step for our developing work using LES at high Reynolds number [10]. Furthermore, a nearly fully developed flow has been reached in the far field, as demonstrated by the flow dynamics and energy spectra. The maximal local Reynolds number approaches the minimal value required to produce a quasi fully developed turbulence [11], which gives confidence in tracking the mixing process through the increase of the interfacial area between the species which is due to the stirring process linked to the turbulent structures. A successful description and quantification of the mixing behavior in terms of marching and non-marching PDF provides valuable informations for modeling procedures, which are difficult to verify experimentally considering the constraints in measurements resolution. The outline of the paper is as follows: Section 2 presents the numerical method and computational parameters. Section 3 gives a picture of global mixing for the configuration selected as a reference case. Section 4 constitutes the main part of this paper showing the influence of the upstream conditions upon mixing.

2 Numerical method and computational parameters

We solve numerically in a parallelepipedic computational domain the incompressible Navier-Stokes equations written in Cartesian coordinates. The spatial discretization is performed with the aid of a sixth-order compact finite-difference scheme in the streamwise direction, together with pseudo-spectral methods in transverse and spanwise directions which are taken as periodic. Pressure-velocity coupling is assured by a fractional step method, requiring the solution of a Poisson equation to insure incompressibility of the velocity field. The advancement in time is carried out by a third-order Runge-Kutta scheme. The outlet boundary condition is of a non-reflective type where the convective and viscous terms are explicitly advanced [12]. Gonze [13] showed that the coherent structures are not distorted in the computational domain by this condition. Full numerical discretization details can be found in da Silva and Métais [14]. Moreover, we consider the mixture fraction f to study the mixing between two species A and B seeded in the coaxial jets. Thus, $f = 1$ (resp. 0) if only species B (resp. A) is there. The evolution of the mixture fraction is given by a transport equation (convection-diffusion) which is solved simultaneously with the flow equations. For the spatial discretization of the convection term, we use a second-order semi-discretized TVD Roe scheme [15].

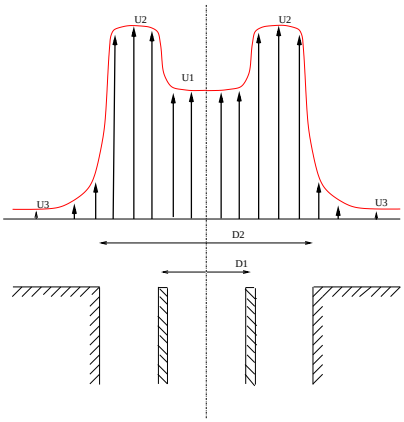


Figure 1: Sketch of the inlet velocity profile. U_1 is the inner jet velocity coming out of the nozzle (diameter D_1). U_2 is the velocity of the outer jet stream, issuing from a diameter $D_2 > D_1$.

The shape of the inlet velocity profile is constructed with two hyperbolic-tangent profiles (see Figure 1). More precisely, the inlet velocity profile

$$\vec{U}_{med}(r) = (U_{med}(r), V_{med}(r), W_{med}(r))$$

in Cartesian coordinates writes

$$U_{med}(r) = \begin{cases} \frac{U_1+U_2}{2} + \frac{U_1-U_2}{2} \tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right) & \text{for} \quad r < R_m \\ \\ \frac{U_2+U_3}{2} + \frac{U_2-U_3}{2} \tanh\left(\frac{r-R_2}{2\theta_{02}}\right) & \text{for} \quad r > R_m \end{cases} \tag{1}$$

with $V_{med}(r) = W_{med}(r) = 0$. In Eq.(1), U_1 is the inner coaxial jet velocity, U_2 is the outer velocity and U_3 is a very small co-flow. Moreover, R_1, R_2 and $R_m = (R_1 + R_2)/2$ are the inner, outer and averaged

Table 1: Characteristics of the simulations. M_1 and M_2 are the initial momentum flux of the inner and outer jet, respectively

Name	r_u	$R_1/\theta_{01} = R_1/\theta_{02}$	β	M_2/M_1	Jet introducing species B
DNS1O	5	12.5	2	27	outer
DNS1I	5	12.5	2	27	inner
DNS2O	17	12.5	2	60	outer
DNS3O	5	25	2	41	outer
DNS4O	5	25	1.54	20	outer

radii, and θ_{01} and θ_{02} the inlet momentum thicknesses of the inner and outer shear layers, respectively. At the beginning of the coaxial jet, a weak-amplitude random noise is superposed on the inlet velocity profile (roughly 3% of the fast outer stream). It is applied to the three velocity components (see [1]). The computational code has been validated in round jets [14], plane jets [16] and coaxial jets [1, 2].

All simulations have been carried out on the same computational grid consisting in $231 \times 384 \times 384$ points with a uniform mesh size in all three directions for a domain size of $10.8D_1 \times 10.65D_1 \times 10.65D_1$, along the streamwise ($x$) and the two transverse directions (y, z). In all the simulations the Reynolds number and the Schmidt number are $Re = U_2R_2/\nu = 3000$ and $Sc = 1$. To study the influence of the upstream conditions, we vary the velocity ratio, $r_u = U_2/U_1$, the initial momentum thicknesses θ_{01} and θ_{02}, and the diameter ratio $\beta = D_2/D_1$. Table 1 summarizes the different flow configurations studied. The initial momentum-fluxes ratio between the outer and the inner jet is also given. The inlet mixture fraction profile is also built with hyperbolic tangents

$$f(x=0,r,t) = \begin{cases} \frac{f_1+f_2}{2} + \frac{f_1-f_2}{2}\tanh\left(\frac{r-R_1}{2\theta_{01}}\right) & \text{for } r < R_m \\ \\ \frac{f_2}{2} + \frac{f_2}{2}\tanh\left(\frac{r-R_2}{2\theta_{02}}\right) & \text{for } r > R_m \end{cases} \tag{2}$$

Note that the co-flow is always composed of species A ($f = 0$), and we seed species B ($f = 1$) either into the inner jet (in this case, $f_1 = 1$ and $f_2 = 0$ in Eq.(2)) or the outer jet (in this case, $f_1 = 0$ and $f_2 = 1$ in Eq.(2)). Of course, we seed species A in the jet where species B is not seeded. The different numerical simulations are called DNSXY where X is a number which stands for the kinematic parameters of the simulation and Y is "O" or "I" if species B is seeded in the outer jet or the inner jet respectively.

3 Picture of global mixing global

In this section we review the main mechanisms of transition to turbulence and the mixing behavior in coaxial jets (see also Balarac and Si-Ameur [17]), through the DNS1O case (where species B is seeded in the annular jet). This configuration is selected as a reference case to study the influence of upstream conditions (velocity ratio, velocity-gradients profile, diameter ratio).

3.1 Flow dynamics

The main features of the flow can be obtained with an observation of the flow structures. Figure 2 shows positive Q isosurfaces for DNS1O coloured by the value of streamwise vorticity ω_x (see colour scale on Fig.2). Note that the green corresponds to a value near zero for ω_x. Q is the second invariant of the

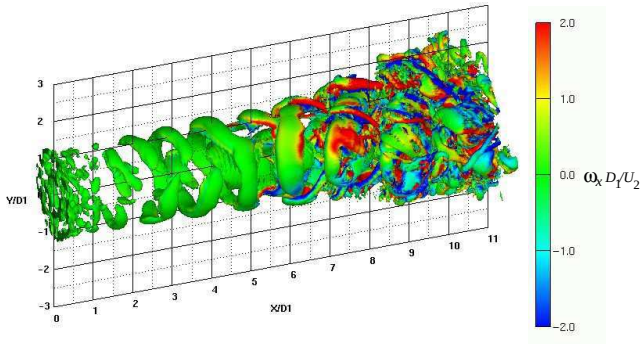


Figure 2: Positive Q isosurfaces ($Q = 0.5(U_2/D_1)^2$) coloured by the streamwise vorticity ω_x following the colour scale shown on the figure, for DNS1O.

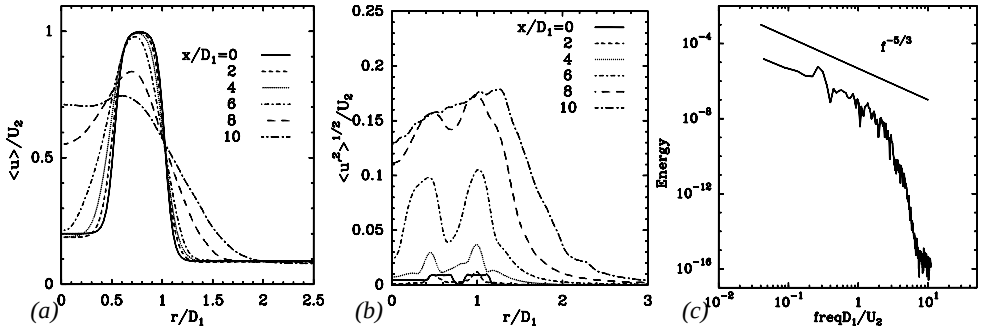


Figure 3: Mean axial velocity profiles *(a)* and rms axial velocity profiles *(b)* of DNS1O at several sections. Frequency spectrum of the axial velocity signal for DNS1O in the center of the jet at the end of the computational domain *(c)*.

velocity-gradient tensor. The positive Q criterion was proposed by Hunt *et al.* [18] and is well recognized as a good coherent-vortex tracer [19]. Thus, in the first stage of transition, the inner and outer shear layers roll up into quasi-axisymmetric vortex rings due to Kelvin-Helmholtz instabilities. For a high velocity ratio coaxial jet ($r_u > 1$), inner and outer vortices turn in opposite sense. Moreover, they undergo a "locking" phenomenon. Indeed, the inner structures are trapped in the free space between two consecutive outer structures. Therefore, the evolution of the inner vortices is dictated by the motion of the outer vortices. This implies for the inner and outer shear layers identical frequencies corresponding to the theoretical value predicted by the linear-instability theory for the outer shear layer [20]. The appearance of primary structures is characterized by two peaks in the rms axial velocity (noted $\langle u'^2 \rangle^{1/2}$, where the brackets stand for a temporal averaging calculated by accumulated data over 6000 instantaneous fields over a time period which allows more than 30 Kelvin-Helmholtz vortices to leave the computational domain) profiles localized on the inner and outer shear layers as shown by Figure 3 *(b)* at locations $x/D_1 < 6$. When $x/D_1 > 6$, there is a rapid spatial growth of rms quantities. This is due to the appearance of pairs of streamwise vortices between two consecutive outer and inner primary vortices (Figure 2) in agreement with

the classical scenario of transition in free shear layers. In a round jet, counter-rotating streamwise vortices cause radial ejection of fluid from the core of the jet to its periphery [21]. Note that the location where streamwise vortices appear is very sensitive to upstream conditions [2]. Before this stage, the coaxial jet keeps a mean velocity profile similar to the upstream profile. But for $x/D_1 > 8$, the axial velocity profile resembles more a single round jet (Figure 3 *(a)*). Indeed, the profile loses its two-layer structure and the maximum velocity moves towards the centerline [22]. At the end of the computational domain, the most intense turbulent activity is localized in the outer annular jet (Figure 3 *(b)*). In this region, there is an abrupt increase in small-scale turbulence level. The flow reaches a fully developed turbulent state and the time-frequency spectrum of the axial velocity component has a $-5/3$ range over about one decade (Figure 3 *(c)*). Moreover, there is a strong momentum transfer from the outer annular jet to the inner jet for a high-velocity ratio. This transfer implies a "pinching" of the central jet by the annular jet [23].

3.2 Species B seeded in the annular jet

In this case species B is seeded in the annular jet and the remainder of the flow (inner jet and co-flow) contains species A. An inlet mixture fraction profile ensuring $f = 1$ in the annular stream and $f = 0$ elsewhere is prescribed.

To illustrate mixing qualitatively, the instantaneous planar flow along the central plane is shown in Figure 4 *(a)*. In the near field region until $x/D_1 = 5$, the disturbances are weak, in such way that non-linear interactions are insignificant. Thus, species exchange between annular and central jets and between the annular jet and the co-flow are mainly dominated by molecular diffusion in this region. Note that the extension of this region is important because a white-noise perturbation with a weak amplitude is used to allow the development of the 'natural' instabilities and this implies that the initial evolution of the shear layers is very smooth [1]. After $x/D_1 = 5$, a turbulent mixing activity appears because of coherent vortices. Finally, at the end of the computational domain ($x/D_1 > 10$), turbulent small scales allow an intense turbulent mixing as shown by Figure 4 *(b)*. Figure 5 shows the mixture-fraction $f = 0.5$ isosurface. It is a good indicator of mixing efficiency in turbulent mixing conditions. Characterization of the multi-scale geometry of the iso-species surfaces is a crucial step for understanding and modeling turbulent mixing linked to turbulent combustion processes. The $f = 0.5$ isosurface is highly convoluted after the instabilities amplification, with evidence of a large-scale structure. Thus, the inner and outer Kelvin-Helmholtz vortices allow for an engulfment of the two fluid streams placed on each side of the inner and outer shear layers, respectively. This phenomenon initiates the turbulent mixing. In Figure 5 the isosurface is coloured by the azimuthal vorticity field, ω_ϕ defined in the cylindrical coordinate system (x, r, ϕ), to distinguish the inner and the outer mixing layers (as used previously by da Silva *et al.* [1] to study coherent vortices). One can distinguish two noticeable shapes of the isosurface: before $x/D_1 \approx 7$, the two parts of the isosurface (for the outer and the inner mixing layers) are wholly distinct, whereas for $x/D_1 > 7$ they are strongly merged, showing inter-penetration between the species A and B. This merging between both mixing layers is a consequence of the action of streamwise vortices. Indeed, these counter-rotating vortices allow to eject species B into the ambient fluid as shown by Figure 6. An exhaustive observation of an animation (see Animation_1) showing the $f = 0.5$ isosurface and planar visualization in $y - z$ plane reveals that the intermittent specificity of the turbulent process combines a radial periodic pulsation of the ring structures with intermittent mushroom-type structures characterizing the ejection phenomenon due to the longitudinal counter-rotating vortices. Moreover large amounts of unmixed species B persist as spots even far downstream where stirring conditions are strong and the diffusion interface is enlarged (Figure 4). An appropriate frequency forcing of 3D longitudinal structures as well as of vortical

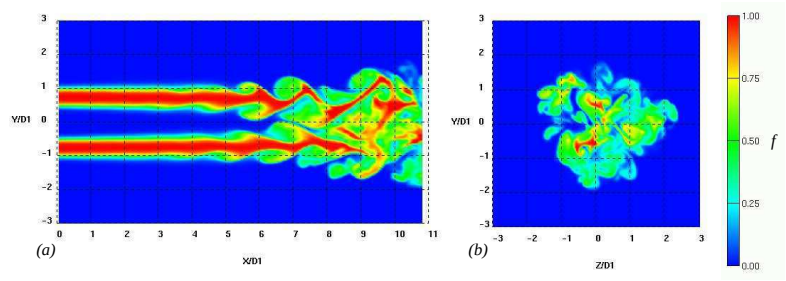


Figure 4: Instantaneous contours of mixture fraction for the DNS1O case: *(a)* in the central plane and *(b)* in the transverse section located at $x/D_1 = 10$. f varies from 0 (blue) to 1 (red) following the colour scale shown on the figure.

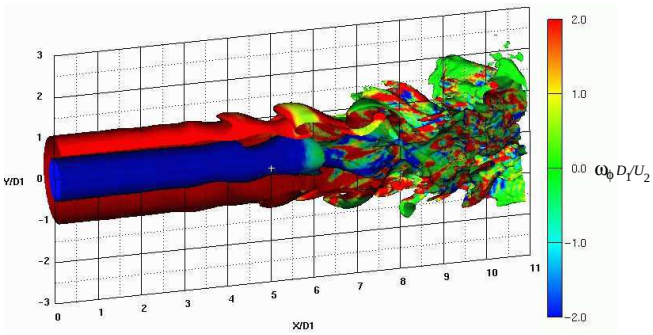


Figure 5: Cut view of $f = 0.5$ mixture-fraction isosurface coloured by the tangential vorticity ω_ϕ following the colour scale shown on the figure, for DNS1O.

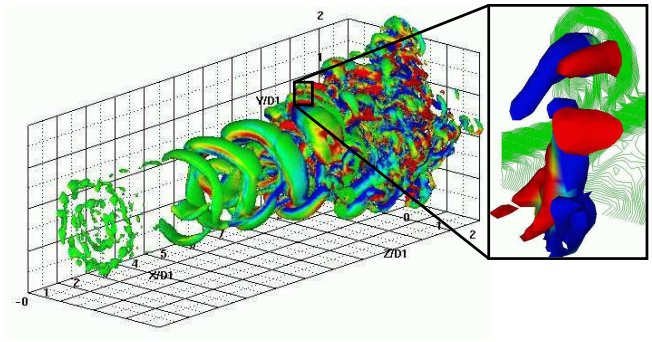


Figure 6: Illustration of passive scalar ejections (shown by green contours on a zoom) by the counter-rotating longitudinal vortices (shown by an isosurface of $Q = 0.7(U_2/D_1)^2$ and coloured in red or blue according to the longitudinal-vorticity sign as used in Fig.2).

rings at the inlet boundary could decrease the amount of pure species [24].

Figure 7 shows the evolution of the mean mixture fraction in the downstream direction *(a)* and at several sections of the jet *(b)*. For $x/D_1 < 5$, one can observe on the axial development of the mixing fraction in both the inner and the outer jet that $\langle f \rangle$ remains equal to 0 and 1 respectively. The radial mean mixture fraction profiles at various downstream sections indicate clearly for $x/D_1 < 5$ a variation of $\langle f \rangle$ at the interface between the two species A and B. This variation is due to molecular diffusion which mixes A and B in the radial direction. Downstream of $x/D_1 = 5$, there is an important invasion of species B into the central jet. This invasion allowed by the momentum transfer already discussed above implies that the fluid issued from the central jet is confined (see the DNS1I case). Moreover, species B of the annular jet diffuses appreciably in the co-flow at these downstream locations. Figure 7 *(a)* shows that the entrainment of species into the shear layers improves the mixing activity beyond $x/D_1 = 5$. The mean mixture fraction respectively decreases in the annular jet and increases in the central jet, to reach an asymptotic value around $\langle f \rangle = 0.5$. The increase of the mixture fraction in the inner jet is more important than the decrease of the mixture fraction in the outer jet. Hence, there is a larger amount of species B invading the inner jet than species A invading the outer jet. The mixture fraction rms is displayed in Figure 8. It confirms that the turbulent mixing becomes significant downstream of $x/D_1 \approx 5$. This is due to longitudinal coherent vortices which allow to eject species B and bring three dimensionality to the jet. Note that the peak of the inner jet is the location where species B invades the center and there is an important turbulent mixing activity in this region. But upstream of $x/D_1 \approx 5$, the radial profiles at various axial positions (Figure 8 *(b)*) indicates two distinct peaks located in the inner and outer shear layers, respectively. The two peaks are the signatures of the large structures which initiate the turbulent mixing. In the near field, the mixture-fraction frequency computed in the inner and outer shear layers are equal (Figure 9) because of the "locking" phenomenon already discussed. For $x/D_1 > 8$, Figure 7 *(b)* shows that the mean mixture fraction is maximum in the jet center. Close to the exit, large amounts of species B invade the central jet and the inner and outer mixing layer merge in order to create a single mixing zone similar to a single jet. When looking at the mixture-fraction rms profiles (Figure 8 *(b)*), it is only the outer peak which persists in this region. It is a consequence of the outer-jet dominance, as far as mixing properties are concerned.

Now, in order to characterize the development of the mixing process, it is of interest to study the variations of the probability density functions at various axial and radial positions [25]. This information is useful in the development of models to describe mixing, especially for combustion issues. The mixture fraction PDF at three streamwise locations covering the transition stages are displayed in the three following figures. Figure 10 shows the PDF in both the inner and outer jets at the upstream position $x/D_1 = 2$. It is obvious from the shape of the profiles that the mixing behavior is solely due to molecular diffusion, since stirring and turbulent mixing are not at hand in the early flow development ($x/D_1 < 5$). This is essential to interpret simulations presented below with regard to the effect of various inlet conditions on the mixing activity of the whole field. In Figure 11, the mixture fraction PDF are shown at $x/D_1 = 5$, preceding the self-similar state. They reveal the existence of a broad range where the probability to find a given value of the mixing fraction is not weak for each radial position r. This is due to the periodicity of the turbulent mixing process that is linked to the frequency at which Kelvin-Helmholtz coherent vortices appear within the two shear regions. Thus at this downstream location, the mixing between species A and B is then not quite homogeneously distributed inside the large-scale structures, prior to turbulent transition. Furthermore, a marching feature is discernible for both the inner and the outer jets. PDFs are called marching if the most probable value of f varies across the layer and equals the free stream value of each side of the layer. They are called non-marching if the most probable value of f is notably independent

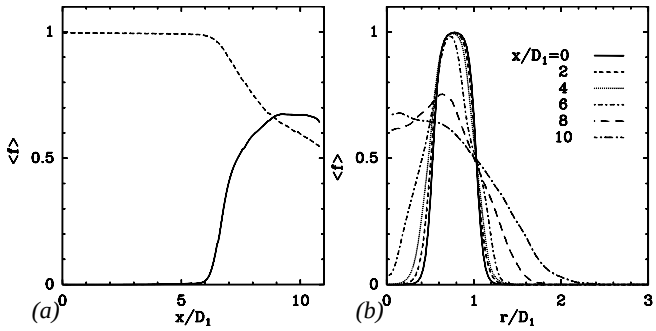


Figure 7: Mean mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

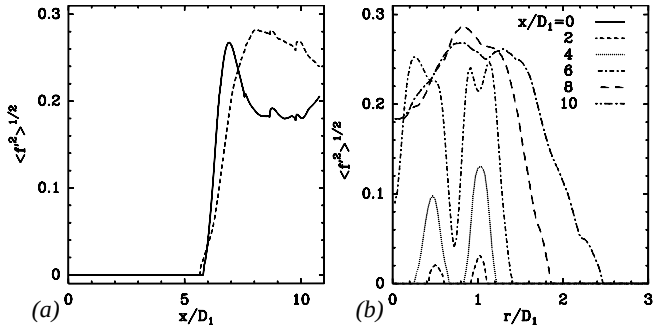


Figure 8: rms of the mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

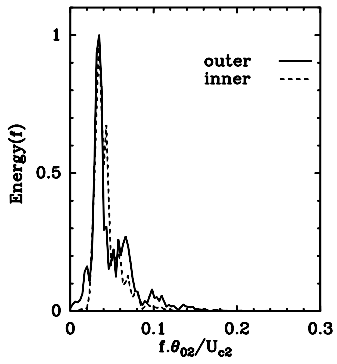


Figure 9: Frequency spectra of the mixture fraction signal for DNS1O in the near field of the jet at the inner and outer shear layers. U_{c2} is the velocity averaged across the outer shear layer and θ_{02} the outer momentum thickness. Energy is normalized by its maximum value.

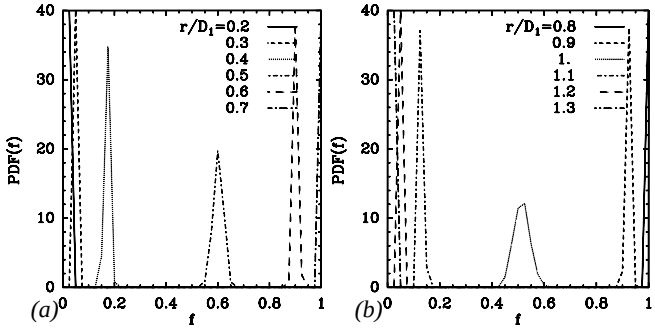


Figure 10: Variation of the mixture fraction PDF across the inner *(a)* and outer *(b)* mixing layer at $x/D_1 = 2$.

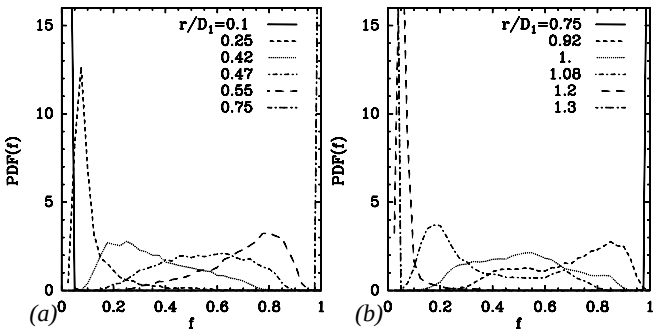


Figure 11: Variation of the mixture fraction PDF across the inner *(a)* and outer *(b)* mixing layer at $x/D_1 = 5$.

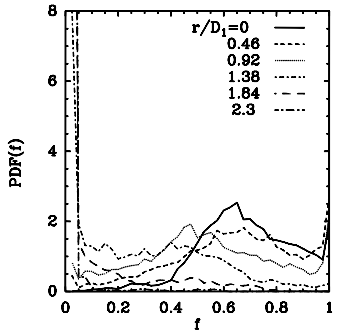


Figure 12: Variation of the mixture fraction PDF across the mixing layer at $x/D_1 = 10$.

of the location within the layer. In the middle of the mixing layers (i.e. the points $r/D_1 = 0.47$ for the inner mixing layer and $r/D_1 = 1$ for the outer mixing layer), the most probable value is $f \approx 0.5$. The A-B mixing therefore occurs in equal proportion at these two radial locations. Furthermore, the trace of unmixed species B is clearly detectable in Figure 11 *(b)* for $r/D_1 = 0.75$ with the high plausible value $f \approx 1$. Figure 12 illustrates the mixture fraction PDF at $x/D_1 = 10$. At this downstream location the inner and outer mixing layers have merged into a single mixing layer, with the domination of the outer mixing layer. A further examination reveals a non-marching PDF for the mixing layer, as the most probable value of f is quasi-independent of the radial positions, and is not the mean value of f. Moreover, pure unmixed species B is also perceptible at this streamwise location for $r/D_1 = 0$, 0.46 and 0.92. These facts show that the turbulent mixing activity is important and that the mixing is not again homogeneous in this region where the turbulent flow has reached a fully developed state.

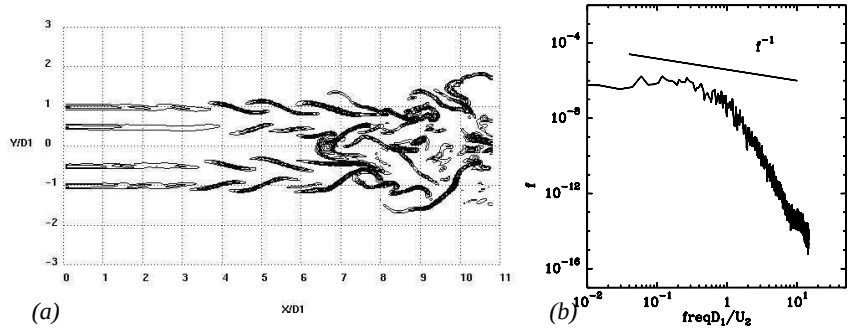


Figure 13: *(a)* Instantaneous mixture fraction dissipation field in the central plane. *(b)* Time-frequency spectrum of the mixture fraction at $x/D_1 \approx 10$

Figure 13 *(a)* shows the instantaneous scalar dissipation field, whose analysis is of great importance for scalar subgrid modeling in large-eddy simulations of reacting flows. The intense scalar dissipation regions have sheet-like structure and are located at the boundaries of the large coherent vortices as seen in turbulent shear flows by Buch and Dahm [26]. This confirms the very intermittent nature of the passive scalar as previously observed by Métais and Lesieur [27] in isotropic turbulence. Métais and Lesieur [27] showed that the scalar activity is indeed concentrated on braids between the coherent vortices in agreement with the present observations. Lesieur and Rogallo [28] and Métais and Lesieur [27] furthermore observed that this scalar intermittency is associated with an anomalous spectral slope following a k^{-1} law (k wavenumber) for the scalar variance. Lesieur and Rogallo [28] propose that the spectral behavior is a result of the shearing by large scale velocity gradients. Let us assume that the large scales are associated with a given wavenumber k_i. Assuming that the scalar variance flux ϵ_f is independent of k and using Oboukhov-type theory, Lesieur and Rogallo [28] write

$$\epsilon_f \sim k E_f(k,t)/\tau(k_i). \tag{3}$$

In Eq.(3), $E_f(k,t)$ is the scalar variance spectrum and $\tau(k_i)$ is the turnover time of k_i. Thus, from Eq.(3), they find

$$E_f(k,t) \sim \epsilon_f \tau(k_i) k^{-1}. \tag{4}$$

Lesieur and Rogallo [28] observe a k^{-1} range in the spectral neighbourhood of k_i for $k > k_i$ in very good correspondence with the theoretical prediction given by Eq.(4). This behavior is confirmed by figure 13

(b) which shows the time frequency spectrum for the mixture fraction: it exhibits a slope close to f^{-1}. Note that Villermaux and Rehab [5] found also a k^{-1} shape on the spectra of scalar fluctuations of coaxial jets which they explained by the persistence of the large scale straining motion. These points however require further analysis which will be the object of a further study.

4 Influence of the upstream conditions on the mixing process

4.1 Species B seeded in the central jet

We study now the alteration on the mixing process if species B is seeded in the low-speed central jet and the remainder of the flow (annular jet and co-flow) contains species A. The coaxial jet keeps the dynamical parameters of DNS1O. This mixing configuration is called DNS1I. We prescribe an inlet mixture fraction profile which ensures a value of $f = 1$ in the central jet and $f = 0$ elsewhere.

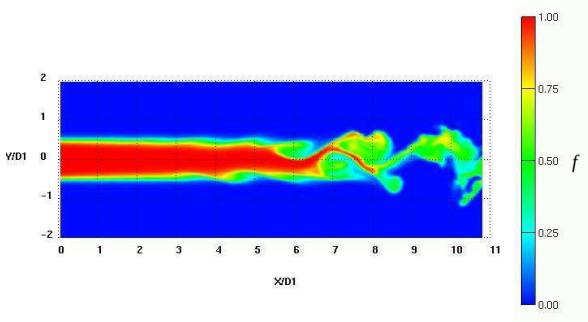


Figure 14: Instantaneous contours of mixture fraction for the DNS1I case in the central plane. f varies from 0 (blue) to 1 (red) following the colour scale shown on the figure.

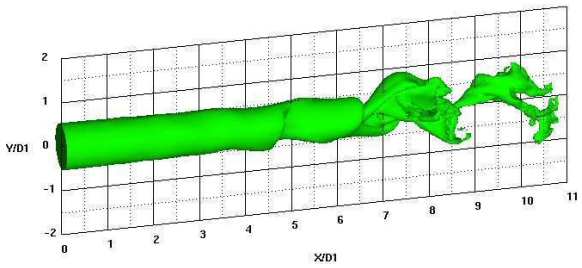


Figure 15: $f = 0.5$ isosurface of mixture fraction for DNS1I.

Figure 14 gives a global picture of the mixing for DNS1I. First, there is an important initial region dominated by molecular diffusion. The appearance of Kelvin-Helmholtz vortices induces the beginning of turbulent mixing. Note that in this configuration, only the inner vortices participate in the mixing. Indeed, the outer vortices are only surrounded by species A ($f = 0$). This stage is followed by the emergence of the streamwise vortices which eject species in mushroom-type structures. This point appears clearly in

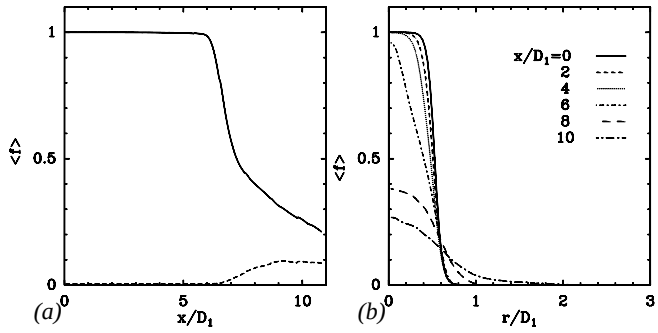


Figure 16: Mean mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

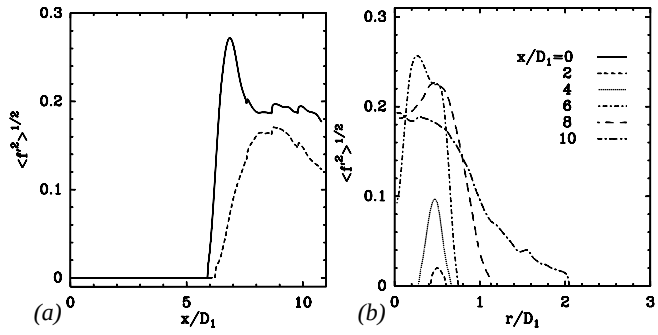


Figure 17: rms of the mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

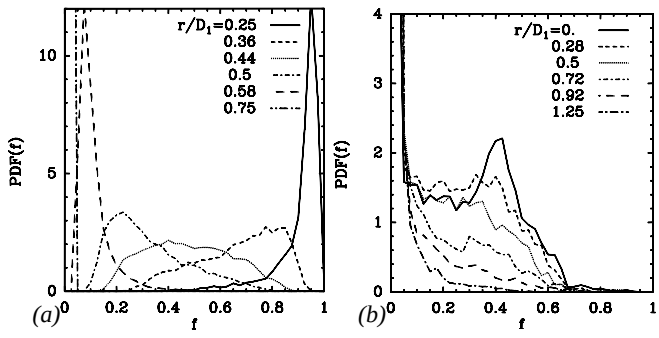


Figure 18: Variation of the mixture fraction PDFs across the mixing layer at $x/D_1 = 5$ *(a)* and $x/D_1 = 10$ *(b)*.

the animation (see Animation_2) of the $y-z$ planes. However, the comparison between Figure 4 *(a)* and Figure 14 shows a confinement of species B in the jet center for DNS1I. Figure 15 shows the $f = 0.5$ isosurface of the mixture fraction It reveals the important difference of the mixing process between DNS1I and DNS1O beyond $x/D_1 = 6$. Indeed, while the isosurface is highly convoluted after the amplification of instabilities in this case, the volumetric aspect of the mixing region is much smaller, due to an important confinement. The animation reveals that at the end of the computational domain the scalar passes by packets. This is a consequence of the domination of the outer vortices which do not contribute to the mixing, because they do not transport species B and hinder the radial development of the inner turbulent structures.

The qualitative observations based on visualizations is also supported by DNS1I statistics. Indeed, Figure 16 *(a)* and *(b)* show the downstream evolution of the mean mixture fraction in the central and the annular jet, as well as its radial evolution at several locations. In the central jet, it keeps a constant value ($f = 1$) before $x/D_1 = 6$ and undergoes an important decrease after, while in the annular jet it has a small value in all the computational domain (Figure 16 *(a)*). The radial mean mixture fraction profiles at various downstream locations (Figure 16 *(b)*) indicates obviously that the maximum variation of f occurs inside the inlet curve for $0 < r/D_1 < 1$. This interval corresponds to the edge of the inner jet and one can observe that a very small amount of species B reaches the annular jet. The mixing cannot take advantage of the important turbulent activity localized in the annular jet because species B does not invade the annular jet (Figure 3 *(b)*). Thus, at the end of the computational domain, the mixture rms peak remains localized in the central jet and its intensity (Figure 17 *(b)*) is smaller than that of the DNS1O localized in the annular jet (Figure 8 *(b)*).

Similarly to the previous case (species B seeded in the annular jet), we examine now PDFs of f at the same downstream locations. Considering that the kinematic inlet conditions are unchanged, it is not useful to plot the PDFs for $x/D_1 < 5$. Figure 18 *(a)* shows the PDFs at $x/D_1 = 5$ prior to the establishment of self-similarity. As in the previous case, in the middle of the inner shear layer ($r/D_1 = 0.44$), the probability to find a given value of f in the range situated between 0.2 and 0.7 is practically the same. The mixing of species A and B is then inhomogenously scattered in the inner vortices. At $r/D_1 = 0.25$, the maximum is close to $f = 1$, and species A has not invaded the jet center, since the Kelvin-Helmholtz vortices are not sufficiently developed to reach a self-similar state. One can also observe the absence of species B beyond $r/D_1 = 0.75$. This result indicates that species B initially seeded in the inner jet (in the case of DNS1I) remains confined between the edge of the inner-outer jets and the centerline. At $x/D_1 = 10$ (Figure 18 *(b)*), the PDFs show an important probability of finding a mixture fraction value in the range $0.2 - 0.4$ for radial positions near the jet center (until $r/D_1 = 0.5$). Additionally, it is interesting to note that the probability to find $f > 0.7$ or unmixed species B ($f = 1$) for all the radial positions is zero. Thus, all the amount of species B initially released in the inner jet is totally mixed with species A, especially just beyond the turbulent transition.

4.2 Velocity ratio and recirculation bubble

When the velocity ratio r_u increases, the entrainment by the outer annular jet and the depletion of the inner fluid is more and more pronounced. If r_u exceeds a critical value r_{uc}, the inner potential core breaks down and a back-flow region establishes associated with negative streamwise velocity around the jet center. The recirculation bubble has been studied experimentally and numerically in previous works [23, 2]. The recirculation bubble is a region where there is a significant production of streamwise vortices. We investigate in this section the influence of the recirculation bubble on the mixing process. The simulation

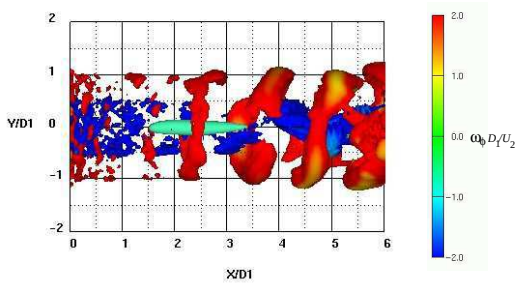


Figure 19: Positive Q isosurfaces ($Q = 0.5(U_2/D_1)^2$) coloured by the tangential vorticity ω_ϕ following the colour scale shown on the figure, for DNS2O. Isosurface of zero velocity in cyan shows the recirculation bubble.

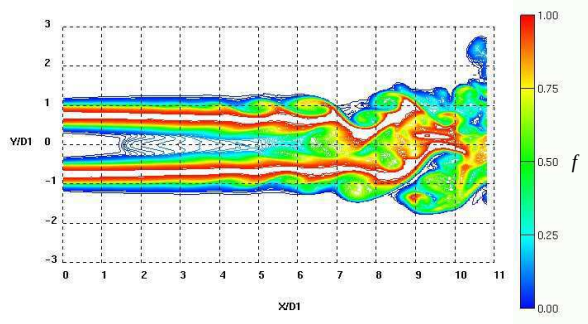


Figure 20: Instantaneous isolines of mixture fraction for the DNS2O case in the central plane. f varies from 0 (blue) to 1 (red) following the colour scale shown on the figure.

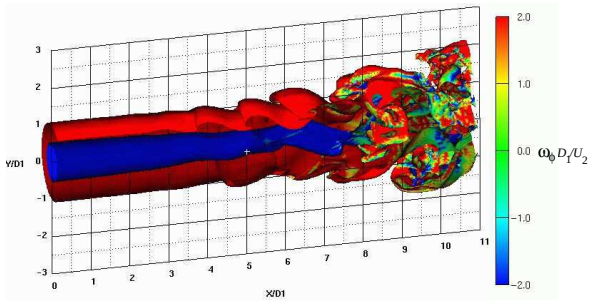


Figure 21: Cut view of $f = 0.5$ mixture-fraction isosurface coloured by the tangential vorticity ω_ϕ following the colour scale shown on the figure, for DNS2O.

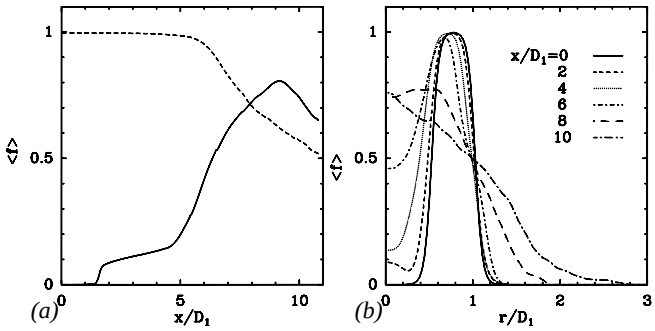


Figure 22: Mean mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

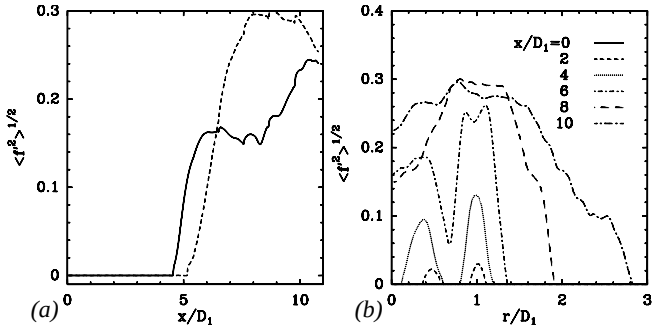


Figure 23: rms of the mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

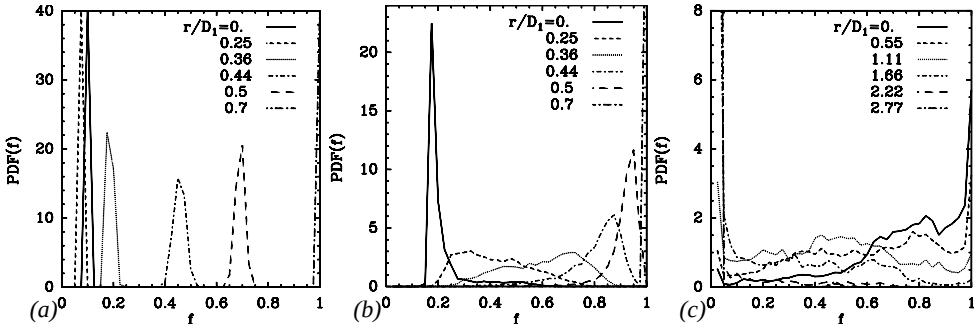


Figure 24: Variation of the mixture fraction PDFs across the mixing layer at $x/D_1 = 2$ *(a)*, $x/D_1 = 5$ *(b)* and $x/D_1 = 10$ *(c)*.

DNS2O is performed with the same parameters as DNS1O except for the velocity ratio $r_u = 17$ (with these initial conditions, $r_{uc} \approx 13$ [2]). With this upstream condition DNS2O has a recirculation bubble in the jet center localized between $x/D_1 \approx 1.5$ and $x/D_1 \approx 3.5$ (Figure 19).

Figure 20 shows instantaneous mixture-fraction isolines in the central plane. The first consequences of the recirculation bubble on the mixing are obviously observable. Species B invades the jet center in the early flow development, e.g. $x/D_1 \approx 1.5$, whereas in DNS1O case, the jet center is devoid of species B until $x/D_1 \approx 6$. This upshot is due to the back-flow issued from the annular jet, which is responsible for the migration of species B in the central jet at this downstream location. Figure 21 shows the $f = 0.5$ isosurface, which is highly convoluted by the large-scale vortices, as shown in the preceding cases. The two isosurfaces (corresponding to the inner and the outer mixing layers, respectively) are wholly decorrelated in the near field of the jet, but the inner isosurface section begins to decrease at $x/D_1 \approx 3$. This is due to a "pinching" phenomenon which increases for high values of the velocity ratio. The inner isosurface shape is more conical. It is implied by the strong momentum transfer existing for very high velocity ratio coaxial jets [1].

The presence of species B within the jet center at $x/D_1 \approx 1.5$ is also confirmed by the statistics of f. Indeed, the profile of $\langle f \rangle$ on the jet axis (Figure 22 *(a)*) indicates obviously that $\langle f \rangle$ varies between 0 and 0.15 for $1.4 < x/D_1 < 5$. Furthermore, the radial profile of $\langle f \rangle$ at $x/D_1 = 2$ (Figure 22 *(b)*), shows that $\langle f \rangle = 0.1$ at the jet center. Another effect of the recirculation bubble is the spreading of species B until $r/D_1 \approx 2.8$ at $x/D_1 = 10$ (Figure 22 *(b)*) instead of $r/D_1 \approx 2.2$ in DNS1O. This interesting result is undoubtedly due to the recirculation bubble. Indeed, as demonstrated previously [2], the tip of the recirculation bubble is a region with a significant production of intense streamwise vortices. The precocious development of inner streamwise vortices induces an earlier development of the outer streamwise vortices and consequently enhances the turbulent mixing activity. In fact, the mixture fraction fluctuations $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ (linked to turbulent mixing) begins to grow earlier at $x/D_1 \approx 4.5$ in the DNS2O case, instead of $x/D_1 \approx 6$ for the DNS1O case without recirculation bubble (see Figure 23 *(a)*). Therefore, the turbulent mixing behavior in the annular jet is activated at $x/D_1 \approx 5$, instead of $x/D_1 \approx 6$ in the DNS1O case. This is why the mixing is considerably improved, especially in the vicinity of the end of the computational domain. Consequently, one can underline that the presence of the recirculation bubble contributes to the decrease of amounts of unmixed species B issued from the annular jet.

Figure 24 *(a)* shows the PDFs at $x/D_1 = 2$. Species B is much earlier mixed into the center of the jet (peak of $f = 0.1$ for $r/D_1 = 0$). However, the mixing activity is exclusively due to the molecular diffusion in the neighborhood of the recirculation bubble which is laminar for this case [2]. At $x/D_1 = 5$ (Figure 24 *(b)*), a marching mode of PDFs is obvious for $r/D_1 > 0.25$. The peak of $f = 0.2$ at the radial positions $r/D_1 = 0$ is located inside the bubble, which explains the persistence of a mixing activity mainly due to molecular diffusion for $r/D_1 < 0.25$. Figure 24 *(c)* shows PDFs at $x/D_1 = 10$. A marching behavior is recurrent at this location, with a reasonably fine homogenization of the mixing which can be much better compared with the case without recirculation bubble (DNS1O). Hence, the benefit of the recirculation bubble is considerable, from the point of view of mixture homogenization. However, at the centerline axis $r/D_1 = 0$, the probability to find an amount of pure species B is again high.

4.3 Initial momentum thicknesses

In this section, we look at the influence of the momentum thicknesses on the flow dynamics and mixing. Parameters correspond to run DNS3O. The same inlet parameters as for DNS1O are used, except for the initial values of the inner and outer momentum thicknesses: $R_1/\theta_{01} = R_1/\theta_{02} = 12.5$ in DNS1O, against 25

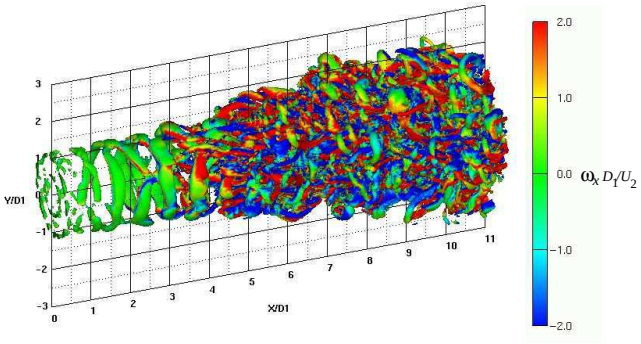


Figure 25: Positive Q isosurfaces ($Q = 0.5(U_2/D_1)^2$) coloured by the streamwise vorticity ω_x following the colour scale shown on the figure, for DNS3O.

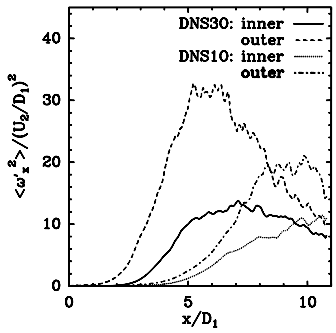


Figure 26: Downstream evolution of $\langle {\omega'_x}^2 \rangle (x, r)$ at the inner and outer shear layers for DNS1O and DNS3O.

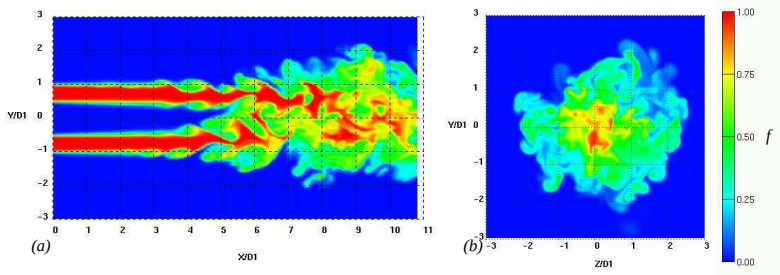


Figure 27: Instantaneous contours of mixture fraction for the DNS3O case: *(a)* in the central plane and *(b)* in the transverse section located at $x/D_1 = 10$. f varies from 0 (blue) to 1 (red) following the colour scale shown on the figure.

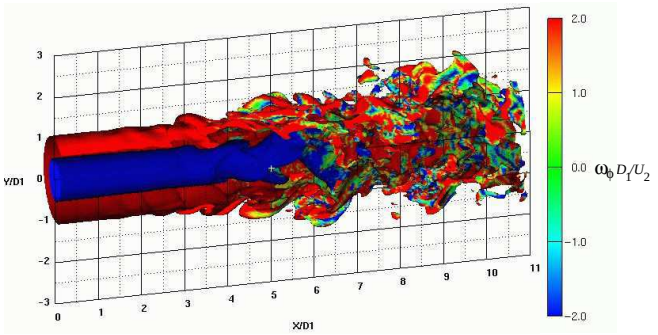


Figure 28: Cut view of $f = 0.5$ mixture-fraction isosurface coloured by the tangential vorticity ω_ϕ following the colour scale shown on the figure, for DNS3O.

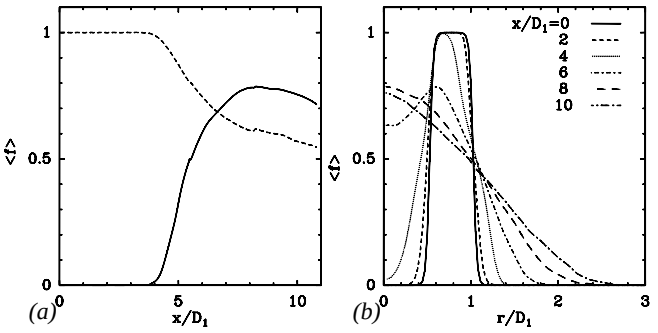


Figure 29: Mean mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

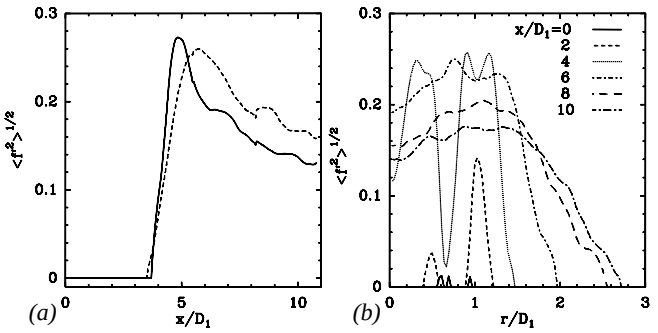


Figure 30: rms of the mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

in DNS3O. Before dealing with the mixing behavior in this case, it is of interest to illustrate the structure of the turbulent flow in DNS3O.

We display isosurfaces of positive Q in Figure 25. It exhibits the fine structure of the shear layers, with some evidence of distinct large rollers and smaller-scale vortices. The scenario of the flow transition is obviously similar to that of DNS1O. Indeed, both the Kelvin-Helmholtz vortices of the inner and outer jets are apparent, with indication of the "locking" phenomenon. The streamwise vortices emerge between two consecutive Kelvin-Helmholtz vortices, followed by an abrupt increase in the level of small-scale turbulence. Although DNS1O and DNS3O involve somewhat similar features, significant differences are visible, such as the earlier development of streamwise vortices at $x/D_1 = 4$, and the breakdown to significantly-small scales for $x/D_1 > 7$. Moreover, Figure 26 shows the enhancement of $\langle {\omega'_x}^2 \rangle (x, r)$ in the inner and the outer shear layers: the longitudinal stretching is thus more intense for DNS3O than DNS1O. It is in agreement with the fact that three-dimensionality is observed earlier in the jet development. It was shown in a previous work [2] that the longitudinal stretching is the dominant phenomenon leading to turbulent transition.

To illustrate basic mixing features, Figures 27 and 28 show visualizations of snapshots of the mixture fraction. The first mixing stage controlled by molecular diffusion is shorter than in the DNS1O case. The earlier development of Kelvin-Helmholtz vortices activates the engulfment of large amounts of fluid species into the shear layers. Mixing layers (inner and outer) merge around $x/D_1 \approx 6$ (instead of $x/D_1 \approx 8$ in the DNS1O case) allowing the species B invasion in the jet center earlier. At the end of the domain, the mixture fraction seems much better distributed. Figure 29 shows the mean mixture fraction in the DNS_3O case. The diffusion of the laminar layer is for $x/D_1 < 4$ in this case. Species B is mixed into the axis centerline much quicker at the downstream locations ($x/D_1 > 4$). Additionally, a large amount of species B invades the co-flow up to a radial position $r/D_1 \approx 2.6$, instead of $r/D_1 \approx 2.2$ for the DNS1O case. This spectacular spreading of the mixture is mainly due to the streamwise vortices which enhance entrainment and mixing. The discrepancy in mixture-fraction rms between DNS3O (Figure 30) and DNS1O, is essentially due to the transitional region, where large coherent vortices are different. Figure 31 *(a)* shows PDFs of the inner mixing layer at $x/D_1 = 2$. A mixing behaviour similar to that observed in the DNS1O case is obvious. However, discrepancies can be observed in the outer mixing layer (Figure 31 *(b)*). The early development of the large-scale vortices, due to small values of θ_{01} and θ_{02}, allows mixing more quickly. At $x/D_1 = 5$, the PDFs (Figure 32 *(a)* and *(b)*) are relatively non-marching showing an important mixing activity. Moreover, Figure 32 *(a)* shows the presence of pure species A near the jet centerline for $r/D_1 = 0$ and $r/D_1 = 0.14$. Nevertheless, a marching-type PDF is obtained at $x/D_1 = 10$ showing homogeneous mixing. The probability to find pure species B ($f = 1$) is much smaller at this downstream location, contrary to the DNS1O case.

4.4 Ratio of outer to inner diameters

In this section the ratio of the outer to the inner diameters is changed, in order to analyze its effect on the flow and the mixing process. The inner diameter is increased until a value of $1.3D_1$ while the outer diameter is fixed to its initial value $2D_1$. In this case, the inner and the outer momentum thicknesses are the same as those of the DNS3O. Figure 34 shows the first picture of the flow dynamics for DNS4O. We recover the same scenario as for DNS3O, which leads to a jet breakdown into fully developed turbulence: the laminar diffusion layer, followed by the formation of Kelvin-Helmholtz and streamwise vortices and catastrophic breakdown into small scales.

There are however differences in the statistics between DNS3O and DNS4O. Figure 35 shows $\langle {\omega'_x}^2 \rangle$ in the inner and outer shear layers for the two cases. The evolution is the same in the outer shear layer, but

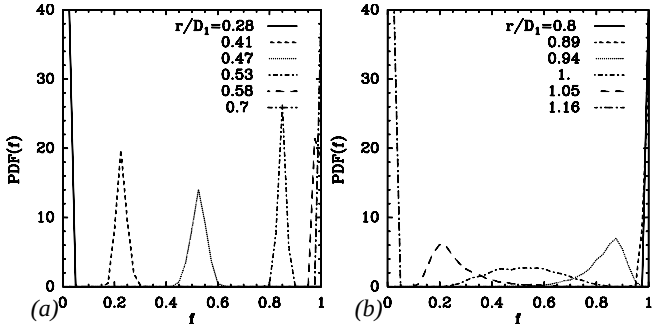


Figure 31: Variation of the mixture fraction PDFs across the inner mixing layer *(a)* and the outer mixing layer *(b)* at $x/D_1 = 2$.

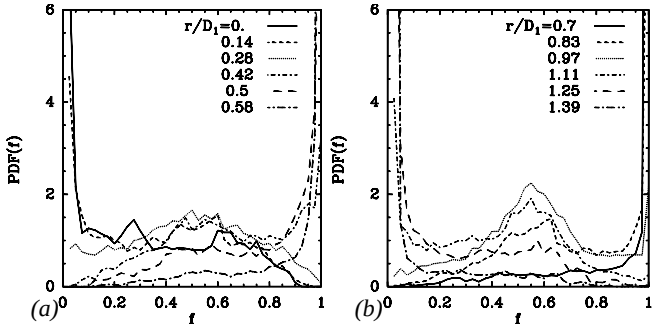


Figure 32: Variation of the mixture fraction PDFs across the inner mixing layer *(a)* and the outer mixing layer *(b)* at $x/D_1 = 5$.

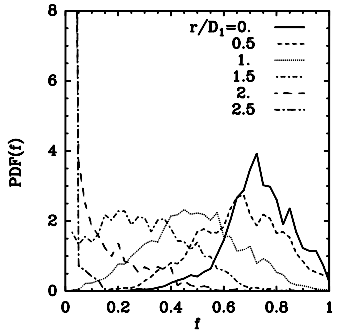


Figure 33: Variation of the mixture fraction PDFs across the mixing layer at $x/D_1 = 10$.

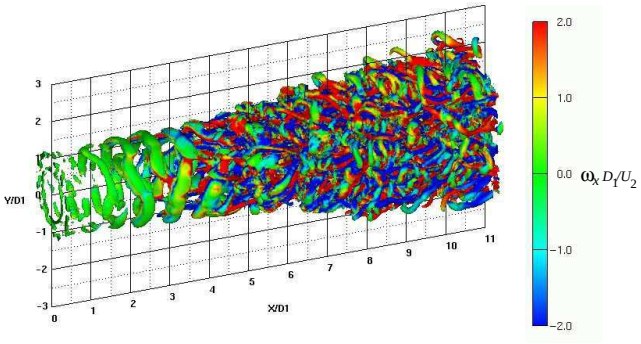


Figure 34: Positive Q isosurfaces ($Q = 0.5(U_2/D_1)^2$) coloured by the streamwise vorticity ω_x following the colour scale shown on the figure, for DNS4O.

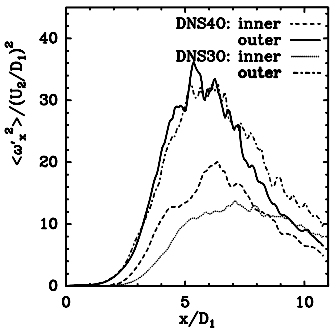


Figure 35: Downstream evolution of $\langle {\omega'_x}^2 \rangle(x, r)$ at the inner and outer shear layers for DNS4O and DNS3O.

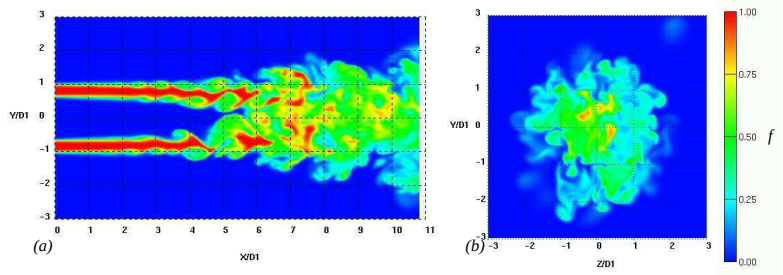


Figure 36: Instantaneous contours of mixture fraction for the DNS4O case: *(a)* in the central plane and *(b)* in the transverse section located at $x/D_1 = 10$. f varies from 0 (blue) to 1 (red) following the colour scale shown on the figure.

in the inner layer the growth is quicker in the DNS4O case. This is due to the proximity between the two layers in this configuration. Thus, instabilities are easily transmitted from the outer to the inner layer, which allows an earlier transition. Figure 36 gives a first picture of the mixing scenario, which can be explained as above: molecular diffusion at the onset of the jet development and domination of the turbulent mixing far downstream. Moreover, unmixed species B is obviously much less present for $x/D_1 > 6$, in contrast to the DNS3O case (Figure 27). This is certainly due to the intensification of streamwise vortices in the inner jet. Figure 37*(b)* shows the mean mixture fraction profiles at several downstream positions. Like DNS3O, the diffusion of the laminar layer is limited to $x/D_1 < 4$. Species B is mixed into the axis centerline quicker than in the DNS30 case (Figure 37 *(a)*). This is certainly due to the increasing intensity of streamwise vortices in the inner jet. Figure 38 shows the rms mixture fraction. The turbulent mixing activity in the outer jet starts quicker than in the DNS3O case. Nevertheless, it begins later in the central jet than in the DNS3O case, as the inner mixing layer is more distant. We believe also that the difference in rms mixture fraction statistics is due to the difference in their transitional states. At $x/D_1 = 5$, a non-marching type PDF is obvious (Figure 39 *(a)*). It indicates a mixing activity that is more intense than that of the DNS3O case at this downstream location. Here, PDFs are calculated only in the inner mixing layer, since the outer mixing layer development is not very much influenced by this reduction in the diameter ratio. At $x/D_1 = 10$, the same behavior (marching-type) of the PDFs as in DNS3O is obtained (Figure 39 *(b)*). We can also note that species B are completely mixed at this downstream location, since the probability to find $f > 0.9$ is zero.

4.5 Global comparison between the different cases

In this section we examine the global mixedness quantitatively for all the cases. Global mixedness can be considered as a measure of the mixing, easy to compute with respect to the mixing efficiency which is determined from the behavior of interfaces stirred by the fluid. This quantity $Z(x)$, introduced by Cetegen and Mohamad [29], is defined as the second moment of the mixture fraction:

$$Z(x) = \frac{4}{S}\int_S \langle f(x,r)\rangle(1 - \langle f(x,r)\rangle) r dr d\phi. \tag{5}$$

In Eq.(5), S is the radial section where the integration is performed and ϕ is the angle in cylindrical coordinates (x, r, ϕ). In the integration the radius of S is equal to $3D_1$ to include all the region where $\langle f\rangle \neq 0$ at the exterior of the computational domain in all the studied cases. $Z(x)$ ranges from 0 for completely unmixed fluids (only $f = 0$ or $f = 1$ in the section) to 1 for complete mixing. Note that this definition is appropriate when the complete mixing is for a bi-molecular mixing. For example, it is a good indicator if each species is needed with the same proportion by the chemical reaction to be considered. Figure 40 shows the evolution of $Z(x)$ for the different cases examined in the present study. It is clear that the cases DNS2O, DNS3O and DNS4O lead to a finer mixing. The benefit in mixing for DNS3O and DNS4O is due to their early transition states and hence the early development of turbulent mixing activity. In DNS3O, the fast transition state is due to the values of the momentum thicknesses, which allow the appearance of the streamwise vortices earlier. For the case with the recirculation bubble (DNS2O), the evolution of $Z(x)$ is the same as for DNS1O for $x/D_1 < 6$. For $x/D_1 > 6$, $Z(x)$ increases more rapidly because the bubble presence enhances the intensity of the streamwise vortices. Run DNS1I is very unfavorable, since the seeding of the inner jet by species B prevents the outer shear layer to participate in the mixing behaviour.

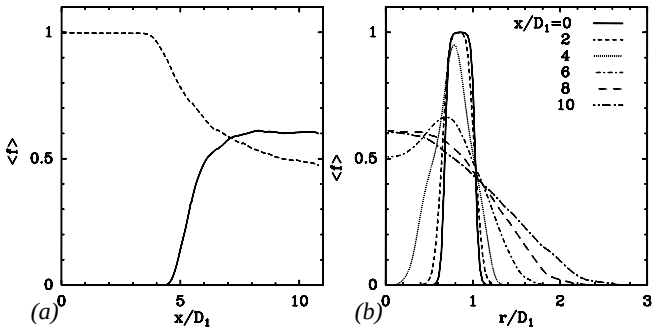


Figure 37: Mean mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

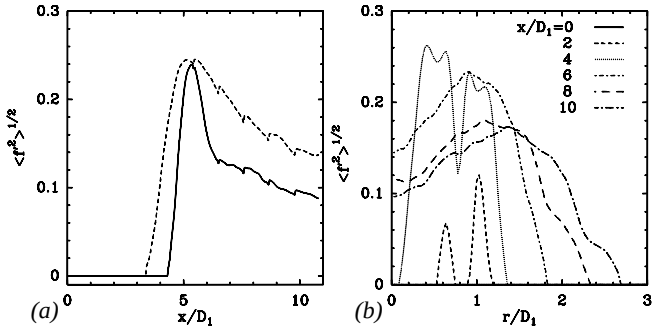


Figure 38: rms of the mixture fraction. *(a)* Downstream evolution in both central (continuous line) and annular jet (dashed line). *(b)* Radial evolution at several downstream locations.

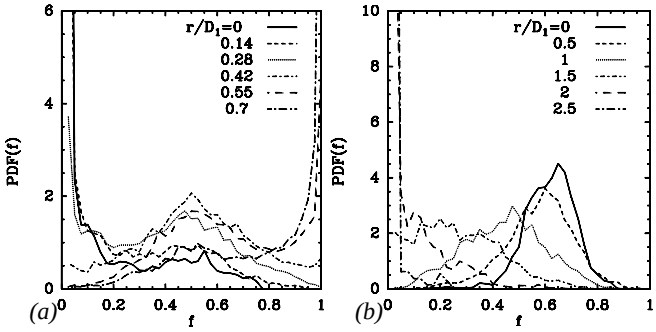


Figure 39: Variation of the mixture fraction PDFs across the mixing layer at $x/D_1 = 5$ *(a)* and $x/D_1 = 10$ *(b)*.

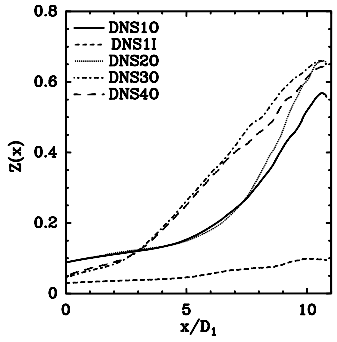


Figure 40: Mixedness of the different cases.

5 Conclusions

In the present study, the mixing behavior in free round coaxial jets has been investigated by means of direct-numerical simulations (DNS). Five computations have been performed to assess the effect of upstream conditions upon the turbulent vortices and structures, and hence on the passive scalar mixing processes. The mixing between two species A and B seeded in the coaxial jets is tracked through the spatial and temporal evolution of the mixture fraction field. The spatially developing approach has permitted to take into account the stages of the mixing process until adequate stirring conditions are obtained. Of particular importance is the appearance of a fully developed turbulent state, as far as dynamic quantities are concerned. The results presented here highlight the fact that the turbulent-mixing process in coaxial jets is affected by the upstream conditions, which modify the transitional state. The peak values of the mixture fraction rms $\langle f'^2 \rangle^{1/2}$ are not the same in the far field for runs DNS1O and DNS3O. Furthermore, the PDF distributions of f at far downstream locations indicate noticeable differences. We think these differences are due to different vortical behaviors, especially the intense production of the streamwise vortices, as obtained in runs DNS2O and DNS4O. We have also shown that, although, a self-similar state is achieved, the mean gradients of the upstream velocity profile affects the mixing behavior even at far locations. Comparison between DNS1O and DNS1I has highlighted that the fluid issued from the central jet remains confined, whereas the annular fluid invades the center jet in a straightforward manner. A great contrast between the width of the jet and the spreading of the mixture has been observed in the case of DNS1I, since only the inner shear layer contributes to the mixing process. Computing the global mixedness (which can be regarded as mixing efficiency) has shown the disadvantage of this configuration. Hence it may be recommended for combustion application to avoid seeding in the coaxial jet, as in DNS1I. Spots of pure species at the exit of the computational domain, shown to be due to the annular jet, are observed in runs DNS1O, DNS2O, DNS3O. Modifications of the inner jet diameter can lead to the decrease of amounts of pure species in the annular fluid far downstream, as it is shown in run DNS4O. Of course, increasing the central jet diameter allows to bring closer the shear layers, which induces a much quicker appearance of the inner streamwise vortices and thus improves the turbulent mixing activity, as it is quantitatively shown by the global mixedness.

Acknowledgments

We thank one referee for a very thorough correction of the paper.

Part of the computations were carried out at the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS, France).

References

[1] C. B. da Silva, G. Balarac, and O. Métais. Transition in high velocity ratio coaxial jets analysed from direct numerical simulations. *J. of Turbulence*, 4(24):1–18, 2003.

[2] G. Balarac and O. Métais. The near field of coaxial jets : A numerical study. *Phys. Fluids*, 17(065102):1–14, 2005.

[3] M. V. Salvetti. Effects of the velocity ratio on vorticity dynamics and mixing in coaxial jet flows, 1999. Proceedings du "1st International Conference on Turbulence and Shear Flows Phenomena", Santa Barbara, California, USA.

[4] S. Jahnke, N. Kornev, I. Tkatchenko, E. Hassel, and A. Leder. Numerical study of influence of different parameter on mixing in coaxial jet mixer using LES. *Heat Mass Transfer*, 41:471–481, 2005.

[5] E. Villermaux and H. Rehab. Mixing in coaxial jets. *J. Fluid Mech.*, 425:161–185, 2000.

[6] P. C. Ferrao, M. V. Heotor, M. F. Matos, and R. K. Salles. Turbulent scalar mixing in coaxial jet flows, 1999. Proceedings du "1st International Conference on Turbulence and Shear Flows Phenomena", Santa Barbara, California, USA.

[7] B. D. Ritchie, D. R. Mujumdar, and J. M. Seitzman. Mixing in coaxial jets using synthetic jet actuators. *AIAA paper*, 2000.

[8] N. Kurimoto, Y. Suzuki, and N. Horiuchi. Active control of coaxial jet mixing and combustion with arrayed micro actuators, 2001. Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Thermodynamics.

[9] Y. Suzuki, N. Kasagi, Y. Horiuchi, and D. Nagoya. Synthesized mixing process in an actively-controlled confined coaxial jet, 2000. 4th JSME-KSME Thermal Engineering Conference.

[10] M. Lesieur, O. Métais, and P. Comte. *Large-eddy simulations of turbulence.* Cambridge University Press, 2005.

[11] M. M. Koochesfahani and P. E. Dimotakis. Mixing and chemical reactions in a turbulent liquid mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 170:83–112, 1986.

[12] I. Orlanski. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comp. Phys.*, 21:251–269, 1976.

[13] M. A. Gonze. Simulation numérique des sillages en transition à la turbulence, 1993. PhD thesis *Institut National Polytechnique de Grenoble.*

[14] C. B. da Silva and O. Métais. Vortex control of bifurcating jets: a numerical study. *Phys. Fluids*, 14(11):3798–3819, 2002.

[15] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 2.* Wiley, John & Sons, 2002.

[16] C. B. da Silva and O. Métais. On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets. *J. Fluid Mech.*, 473:103–145, 2002.

[17] G. Balarac and M. Si-Ameur. Mixing and coherent vortices in turbulent coaxial jets. *C. R. Mécanique*, 333, 2005.

[18] J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. Annual research briefs, Center for Turbulence Research, Stanford, 1988.

[19] Y. Dubief and F. Delcayre. On coherent vortex identification in turbulence. *J. of Turbulence*, 1(11):1–22, 2000.

[20] G. Balarac and O. Métais. Coherent vortices in coaxial jets. Advances in turbulence X, edited by H.I. Anderson and P.-Å. Krogstad, 2004.

[21] D. Liepmann and M. Gharib. The role of the streamwise vorticity in the near-field entrainment of a round jet. *J. Fluid Mech.*, 245:643–668, 1992.

[22] H. Rehab. Structure de l'écoulement et mélange dans le champ proche des jets coaxiaux, 1997. PhD thesis *Institut National Polytechnique de Grenoble*.

[23] H. Rehab, E. Villermaux, and E. J. Hopfinger. Flow regimes of large-velocity-ratio coaxial jets. *J. Fluid Mech.*, 345 :357–381, 1997.

[24] K. P. Angele, N. Kurimoto, Y. Suzuki, and N. Kasagi. Three-dimensional vortical structures in a coaxial jet manipulated with micro-actuators, 2005. Proceedings of "6th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Thermodynamics" Matsushima, Miyagi, Japan.

[25] S. A. Stanley, S. Sarkar, and J. P. Mellado. A study of the flow-field evolution and the mixing in a plane turbulent jet using direct numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, 450:377–407, 2002.

[26] K. A. Buch and W. J. A. Dahm. Experimental study of the fine scale structure of conserved scalar mixing in turbulent shear flows. Part II. Sc$\approx$ 1. *J. Fluid Mech.*, 364:1–29, 1998.

[27] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably-stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239:157–194, 1992.

[28] M. Lesieur and R. Rogallo. Large-eddy simulation of passive scalar diffusion in isotropic turbulence. *Phys. Fluids A*, 1(9):718–722, 1989.

[29] B. M. Cetegen and N. Mohamad. Experiments on liquid mixing and reaction in a vortex. *J. Fluid Mech.*, 249:391–414, 1993.

Cinquième partie

Bibliographie

Bibliographie

[1] K. Akselvoll and P. Moin. Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets. *J. Fluid Mech.*, 315 :387–411, 1996.

[2] J. C. André and M. Lesieur. Influence of helicity on high Reynolds number istropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 81 :187–207, 1977.

[3] K. P. Angele, N. Kurimoto, Y. Suzuki, and N. Kasagi. Three-dimensional vortical structures in a coaxial jet manipulated with micro-actuators, 2005. Proceedings of "6th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Thermodynamics" Matsushima, Miyagi, Japan.

[4] H. Au and N. W. M. Ko. Coaxial jets of different mean velocity ratios. *J. Soundi Vib.*, 116 :427–443, 1987.

[5] C. Bailly and G. Comte-Bellot. Turbulence. *CNRS Edition*, 2003.

[6] G. K. Batchelor. Small scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part I. General discussion and the case of small conductivity. *J. Fluid Mech.*, 5 :113–134, 1959.

[7] L. P. Bernal and A. Roshko. Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 170 :499–525, 1986.

[8] B. J. Boersma, G. Brethouwer, and F. T. M. Nieuwstadt. A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet. *Phys. Fluids*, 10 :899–909, 1998.

[9] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juve. Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible large eddy simulation. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 16 :273–297, 2003.

[10] P. Brancher, J. M. Chomaz, and P. Huerre. Direct numerical simulations of round jets : vortex induction and side jets. *Phys. Fluids*, 6(5) :1768–1774, 1994.

[11] G. Brown and A. Roshko. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 64 :775–816, 1974.

[12] G. Broze and F. Hussain. Transition to chaos in a forced jet : intermittency, tangent bifurcations and hysteresis. *J. Fluid Mech.*, 311 :37–71, 1996.

[13] K. A. Buch and W. J. A. Dahm. Experimental study of the fine scale structure of conserved scalar mixing in turbulent shear flows. Part II. Sc$\approx$ 1. *J. Fluid Mech.*, 364 :1–29, 1998.

[14] G. Buresti, P. Petagna, and A. Talamelli. Experimental investigation on the turbulent near-field of coaxial jets. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 17 :18–26, 1998.

[15] G. Buresti, A. Talamelli, and P. Petagna. Experimental characterization of the velocity-field of a coaxial jet configuration. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 9 :135–136, 1998.

[16] E. B. Camano-Schettini. Etude expérimentale des jets coaxiaux avec différences de densité. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1996.

[17] S. Candel, M. Juniper, G. Singla, P. Scouflaire, and C. Rolon. Structure and dynamics of cryogenic flames at supercritical pressure. *Combust. Sci. and Tech.*, 178 :161–192, 2006.

[18] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1987.

[19] B. M. Cetegen and N. Mohamad. Experiments on liquid mixing and reaction in a vortex. *J. Fluid Mech.*, 249 :391–414, 1993.

[20] F. H. Champagne and I. J. Wygnanski. An experimantal investigation of coaxial turbulent jets. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 14 :1445–1464, 1971.

[21] W. T. Chan and N. W. M. Ko. Coherent structures in the outer mixing region of annular jets. *J. Fluid Mech.*, 89 :515–533, 1978.

[22] P. Chassaing. Turbulence en mécanique des fluides. *CÉPADUÈS Edition*, 2000.

[23] N. A. Chigier and J. M. Beer. The flow region near the nozzle in double concentric jets. *Trans. ASME D : J. Basic Engng*, 86 :794–804, 1964.

[24] J. P. Chollet and M. Lesieur. Parameterization of small scales of the three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, 38 :2747–2757, 1981.

[25] J. Cohen and I. Wygnanski. The evolution of instabilities in the axisymmetric jet. Part I. The linear growth of disturbances near the nozzle. *J. Fluid Mech.*, 176 :191–219, 1987.

[26] P. Comte, Y. Fouillet, and M. Lesieur. Simulation numérique des zones de mélange compressibles. *Revue scientifique et technique de la défense*, 3ème trimestre, 1992.

[27] P. Comte, M. Lesieur, and E. Lamballais. Large- and small-scale stirring of vorticity and a passive scalar in a 3-D temporal mixing layer. *Phys. Fluids A*, 4(12) :2761–2778, 1992.

[28] A. W. Cook and J. J. Riley. Direct numerical simulation of a turbulent reactive plume on a parallel computer. *J. Comp. Phys.*, 129 :263–283, 1996.

[29] T. C. Corke and S. M. Kusek. Resonance in axisymmetrical jets with controlled helical-mode input. *J. Fluid Mech.*, 249 :307–336, 1993.

[30] S. C. Crow and F. H. Champagne. Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech.*, 48 :547–591, 1971.

[31] W. J. A. Dahm, C. E. Frieler, and G. Tryggvason. Vortex structure and dynamics in the near field of a coaxial jet. *J. Fluid Mech.*, 241 :371–402, 1992.

[32] I. Danaila and B. J. Boersma. Direct numerical simulation of bifurcating jets. *Phys. Fluids*, 12 :1255–1257, 2000.

[33] I. Danaila, J. Dusek, and F. Anselmet. Coherent structure in a round, spatially evolving, unforced, homogeneous jet at low Reynolds number. *Phys. Fluids*, 9 :3323–3342, 1997.

[34] P. V. Danckwerts. The definition and measurement of some characteristics of mixture. *Appl Sci Res*, Sect A3 :279–296, 1952.

[35] A. E. Davies, J. F. Keffer, and W. D. Baines. Spread of a heated plane turbulent jet. *Phys. Fluids*, 18 :770–775, 1975.

[36] P. E. Dimotakis. The mixing transition in turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 409 :69–97, 2000.

[37] P. E. Dimotakis, R. C. Miakelye, and D. A. Papantoniou. Structure and dynamics of round turbulent jets. *Phys. Fluids*, 26 :3185–3192, 1983.

[38] T. Djeridane. Contribution à l'étude expérimentale de jets axisymétriques à densité variable. *PhD thesis Université d'Aix-Marseille II*, 1994.

[39] D. S. Dosanjh, J. C. Yu, and A. N. Abdelhamid. Reduction of noise from supersonic jet flows. *AIAA Journal*, 9 :2346–2353, 1971.

[40] S. Drobniak and R. Klajny. Coherent structures of free acoustically stimulated jet. *J. of Turbulence*, 3(1), 2002.

[41] Y. Dubief and F. Delcayre. On coherent vortex identification in turbulence. *J. of Turbulence*, 1(11), 2000.

[42] F. Ducros, P. Comte, and M. Lesieur. Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate. *J. Fluid Mech.*, 326 :1–36, 1996.

[43] D. F. G. Durao and J. H. Whitelaw. Velocity characteristics of the flow in the near wake of a disk. *J. Fluid Mech.*, 85 :369–385, 1978.

[44] B. Dziomba and H. E. Fiedler. Effect of initial conditions on two-dimensional free shear layers. *J. Fluid Mech.*, 152 :419–442, 1985.

[45] K. M. Eldred *et al.* Far-field noise generation by coaxial flow jet exhaust. 1. Detailed discussion. *Wyle Lab. Rep. FAA-RD-71-101*, 1971.

[46] M. Favre-Marinet and E.B. Camano Schettini. The density field of coaxial jets with large velocity ratio and large density differences. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 44 :1913–1924, 2001.

[47] M. Favre-Marinet, E.B. Camano Schettini, and J. Sarboch. Near-field of coaxial jets with large large density differences. *Exp. Fluids*, 26 :97–106, 1999.

[48] P. C. Ferrao, M. V. Heotor, M. F. Matos, and R. K. Salles. Turbulent scalar mixing in coaxial jet flows, 1999. Proceedings du "1st International Conference on Turbulence and Shear Flows Phenomena", Santa Barbara, California, USA.

[49] J. H. Ferziger and M. Perich. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1996.

[50] M. J. Fisher, G. A. Preston, and W. D. Bryce. A modelling of the noise from simple coaxial jets, Part 1 : with unheated primary flow. *J. Sound and Vibration*, 1998.

[51] W. Forstall and A. H. Shapiro. Momentum and mass transfer in coaxial gas jets. *J. Applied Mech.*, 17 :399–408, 1950.

[52] Y. Fouillet. Contribution à l'étude par expérimentation numérique des écoulements cisaillés libres. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1991.

[53] P. Freymuth. On transition in a separated laminar boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 25 :683–704, 1966.

[54] U. Frisch. *Turbulence, the legacy of A.N.Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.

[55] W. K. George. The self-preservation of turbulent flows and its relation to initial conditions and coherent structure. *In Advance in Turbulence (ed. W.K. George & R. Arndt)*, pages 39–73, 1989.

[56] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3(7) :1760–1765, 1991.

[57] B. J. Geurts. *Elements of direct and large-eddy simulation*. Edwards, 2003.

[58] P. G. Gladnick, A. C. Enotiadis, J. C. Larue, and G. S. Samuelsen. Near-field characteristics of a turbulent coflowing jet. *AIAA Journal*, 28 :1405–1414, 1990.

[59] M. A. Gonze. Simulation numérique des sillages en transition à la turbulence. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1993.

[60] F. F. Grinstein, M. N. Glauser, and W. K. George. Fluids vortices (vorticity in jets). *Kluwer Academic Publishers*, pages 65–94, 1995.

[61] E. Gutmark and C. M. Ho. Preferred modes and the spreading rates of jets. *Phys. Fluids*, 26(10) :2932–2938, 1983.

[62] E. J. Gutmark and F. F. Grinstein. Flow control with noncircular jets. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 31 :239–272, 1999.

[63] G. Harran. Analyse physique, modélisation et simulation numérique des mécanismes de mélange dans les jets simples et coaxiaux turbulents. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Toulouse*, 1994.

[64] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 2*. Wiley, John & Sons, 2002.

[65] C. M. Ho and L. S. Huang. Subharmonics and vortex mergings in mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 119 :443, 1982.

[66] C. M. Ho and P. Huerre. Perturbed free shear layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 16 :356–425, 1984.

[67] J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. Annual research briefs, Center for Turbulence Research, Stanford, 1988.

[68] A. K. M. F. Hussain and K. B. M. Q. Zaman. Vortex pairing in a circular jet under controlled excitation. Part II. Coherent structures dynamics. *J. Fluid Mech.*, 101 :493–544, 1980.

[69] A. K. M. F. Hussain and M. F. Zedan. Effects of the initial conditions on the axisymetric free shear layer : effects of the initial momentum thickness. *Phys. Fluids*, 21 :1100–1112, 1978.

[70] H. J. Hussein, S. P. Capp, and W. K. George. Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 258 :31–75, 1994.

[71] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285 :69–94, 1995.

[72] M. P. Juniper and S. M. Candel. The stability of ducted compound ows and consequences for the geometry of coaxial injectors. *J. Fluid Mech.*, 482 :257–269, 2003.

[73] Y. Kaneda and T. Ishihara. High-resolution direct numerical simulation of turbulence. *J. of Turbulence*, 7(20), 2006.

[74] J. Kim and P. Moin. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 59 :308–323, 1985.

[75] N. W. M. Ko and H. Au. Initial region of subsonic coaxial jets of high mean velocity ratio. *J. Fluids Engng.*, 103 :335–338, 1981.

[76] N. W. M. Ko and H. Au. Spreading rate and reattachment of coaxial jets of high mean velocity ratio. *J. Fluids Engng.*, 104 :400–401, 1982.

[77] N. W. M. Ko and W. T. Chan. The inner regions of annular jets. *J. Fluid Mech.*, 93 :549–584, 1979.

[78] N. W. M. Ko and A. S. H. Kwan. The initial region of subsonic coaxial jets. *J. Fluid Mech.*, 73 :305–332, 1976.

[79] N. W. M. Ko and K. M. Lam. Flow structures of a basic annular jet. *AIAA Journal*, 23 :1185–1190, 1985.

[80] N. W. M. Ko and K. C. Leung. Covariance measurements in the initial region of an annular jet. *J. Soundi Vib.*, 80 :339–354, 1982.

[81] M. M. Koochesfahani and P. E. Dimotakis. Mixing and chemical reactions in a turbulent liquid mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 170 :83–112, 1986.

[82] N. Kurimoto, Y. Suzuki, and N. Horiuchi. Active control of coaxial jet mixing and combustion with arrayed micro actuators, 2001. Experimental Heat Transfert, Fluid Mechanics, and Thermodynamics.

[83] N. Kurimoto, Y. Suzuki, and N. Kasagi. Active control of lifted diffusion flames with arrayed micro actuators. *Exp. Fluids*, 39 :995–1008, 2005.

[84] S. M. Kusek, T. C. Corke, and P. Reisenthel. Seeding of helical modes in the initial region of a axisymmetric jet. *Expts. FLuids*, 10 :116–124, 1990.

[85] A. S. H. Kwan and N. W. M. Ko. The initial region of subsonic coaxial jets. Part II. *J. Fluid Mech.*, 82 :273–287, 1977.

[86] G. Lalizel. Caractérisation expérimentale de l'aerodynamique d'un jet annulaire à très grand rapport de diamètres. *PhD thesis Université de Rouen*, 2004.

[87] E. Lamballais. Simulations numériques de la turbulence dans un canal plan tournant. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1996.

[88] J. C. Lasheras, J. C. Cho, and T. Maxworthy. On the origin and evolution of streamwise vortical structures in a plane, free shear-layer. *J. Fluid Mech.*, 172 :231–258, 1986.

[89] J. C. Lasheras and H. Choi. Three-dimensional instability of a plane free shear layer : an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.*, 189 :53–86, 1988.

[90] J. Laufer and P. A. Monkewitz. On turbulent jet flow in a new perspective. *AIAA paper*, pages 80–0962, 1980.

[91] H. Le and P. Moin. An improvement of fractional-step methods to the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 92 :369–379, 1991.

[92] M. Lee and W. C. Reynolds. Bifurcating and blooming jets at high Reynolds number., 1985. In "5th Symposium on Turbulent Shear Flows", New York.

[93] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, 103 :15–42, 1992.

[94] J. Leray. Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace. *J. Acta. Math.*, 63 :193–248, 1934.

[95] M. Lesieur. La turbulence. *PUG*, 1994.

[96] M. Lesieur. Turbulence in fluids. *Kluwer Academic Publisher*, 1997.

[97] M. Lesieur and O. Métais. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28 :45–98, 1999.

[98] M. Lesieur, O. Métais, and P. Comte. *Large-eddy simulations of turbulence*. Cambridge University Press, 2005.

[99] M. Lesieur and R. Rogallo. Large-eddy simulation of passive scalar diffusion in isotropic turbulence. *Phys. Fluids A*, 1(9) :718–722, 1989.

[100] D. Liepmann and M. Gharib. The role of the streamwise vorticity in the near-field entrainment of a round jets. *J. Fluid Mech.*, 245 :643–668, 1992.

[101] T. T. Lim and T. B. Nickels. Vortex rings. *In Fluid vortices. Kluwer Academic Publishers*, pages 95–153, 1995.

[102] J. Lin, Z. Yu, and X. Shao. Coherent structures in the mixing layers of a non-newtonian fluid. *J. of Turbulence*, 5(39), 2004.

[103] E. K. Longmire and L. H. Duong. Bifurcating jets generated with stepped and sawtooth nozzles. *Phys. Fluids*, 8(4) :978–992, 1996.

[104] J. L. Lumley and G. R. Newman. The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 82 :161–178, 1977.

[105] M. Maidi, M. Lesieur, and O. Métais. Vortex control in large-eddy simulations of compressible round jets. *J. of Turbulence*, 7(49), 2006.

[106] G. E. Mattingly and C. C. Chang. Unstable waves on an axisymmetric jet column. *J. Fluid Mech.*, 65 :541–560, 1974.

[107] T. Maxworthy. Some experimental studies of vortex rings. *J. Fluid Mech.*, 81 :465–495, 1977.

[108] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably-stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239 :157–194, 1992.

[109] A. Michalke. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, 23 :521, 1965.

[110] A. Michalke and G. Herman. On the inviscid instability of a circular jet with external flow. *J. Fluid Mech.*, 114 :343–359, 1982.

[111] W. Möhring. On the vortex sound at low Mach number. *J. Fluid Mech.*, 1978 :685–691, 1978.

[112] P. Moin, K. Squires, W. Cabot, and S. Lee. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Phys. Fluids A*, 3(11) :2746–2757, 1991.

[113] P. J. Morris. The spatial viscous instability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.*, 77 :511–529, 1976.

[114] M. Olsson and L. Fuchs. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Phys. Fluids*, 8(8) :2125–2137, 1996.

[115] I. Orlanski. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comp. Phys.*, 21 :251–269, 1976.

[116] F. K. Owen. Measurements and observations of turbulent recirculating jets flows. *AIAA Journal*, 14 :1556–1562, 1976.

[117] L. M. Pickett and J. B. Ghandhi. Passive scalar mixing in a planar shear layer with laminar and turbulent inlet conditions. *Phys. Fluids*, 14(3) :985–998, 2002.

[118] C. D. Pierce. Progress-variable approach for large-eddy simulation of turbulent combustion. *PhD thesis Stanfor University*, 2001.

[119] R. T. Pierrehumbert and S. E. Widnall. The two- and three-dimensional instabilities of spatially periodic shear layer. *J. Fluid Mech.*, 114 :59–82, 1982.

[120] P. Plaschko. Helical instabilities of slowly divergent jets. *J. Fluid Mech.*, 92 :209–215, 1979.

[121] B. R. Ramaprian and M. S. Chandrasekhara. LDA measurements in plane turbulent jets. *J. Fluids Engng.*, 107 :264–271, 1985.

[122] H. Rehab. Structure de l'écoulement et mélange dans le champ proche des jets coaxiaux. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1997.

[123] H. Rehab, E. Villermaux, and E. J. Hopfinger. Flow regimes of large-velocity-ratio coaxial jets. *J. Fluid Mech.*, 345 :357–381, 1997.

[124] H. Rehab, E. Villermaux, and E. J. Hopfinger. Geometrical effects on the near-field flow structure of coaxial jets. *AIAA Journal*, 36 :867–869, 1998.

[125] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct and sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1883.

[126] B. D. Ritchie, D. R. Mujumdar, and J. M. Seitzman. Mixing in coaxial jets using synthetic jet actuators. *AIAA paper*, 2000.

[127] P. L. Roe. Some contributions to the modelling of discontinuous flows, 1985. Proceedings of the 1983 AMS SIAM Summer Seminar on Large Scale Computing in Fluid Mechanics, Lectures in Applied Mathematics, vol. 22. SIAN, Philadelphia, pp.163–193.

[128] P. G. Saffman. Number of waves on unstable vortex rings. *J. Fluid Mech.*, 84 :625–639, 1978.

[129] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*. Springer-Verlag, 1998.

[130] M. V. Salvetti. Effects of the velocity ratio on vorticity dynamics and mixing in coaxial jet flows, 1999. Proceedings du "1st International Conference on Turbulence and Shear Flows Phenomena", Santa Barbara, California, USA.

[131] M. V. Salvetti, P. Orlandi, and R. Verzicco. Numerical simulations of transitional axisymmetric coaxial jets. *AIAA Journal*, 34(4) :736–743, 1996.

[132] H. Schlichting. Boundary layer theory. *Pergamon Press*, 1968.

[133] C. B. da Silva. The role of coherent structures in the control and interscale interactions of round, plane and coaxial jets. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2001.

[134] C. B. da Silva and O. Métais. Coherent structures in excited spatially evolving round jets, 2001. Direct and Large-Eddy Simulation IV, Kluwer Academic Publishers.

[135] C. B. da Silva and O. Métais. On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets. *J. Fluid Mech.*, 473 :103–145, 2002.

[136] C. B. da Silva and O. Métais. Vortex control of bifurcating jets : a numerical study. *Phys. Fluids*, 14(11) :3798–3819, 2002.

[137] C. B. da Silva and J. C. F. Pereira. The effect of subgrid-scale models on the vortices computed from large-eddy simulations. *Phys. Fluids*, 16 :4506–4534, 2004.

[138] A. Silveira, D. Grand, O. Métais, and M. Lesieur. A numerical investigation of the coherent structures of turbulence behind a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 256 :1–25, 1993.

[139] S. A. Stanley, S. Sarkar, and J. P. Mellado. A study of the flowfield evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, 450 :377–407, 2002.

[140] Y. Suzuki, N. Kasagi, Y. Horiuchi, and D. Nagoya. Synthesized mixing process in actively-controlled confined coaxial jet, 2000. Proceedings of the 4th JSME-KSME Thermal Engineering Conference, Kobe, Japan.

[141] S. K. Tang and N. W. M. Ko. Coherent structure interactions in an unexcited coaxial jet. *Exp. Fluids*, 17 :147–157, 1994.

[142] H. Tennekes and J. L. Lumley. First course in Turbulence. *The MIT Press*, 1976.

[143] G. Urbin. Etude numérique par simulation des grandes échelles de la transition à la turbulence dans un jet. *PhD thesis Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1998.

[144] G. Urbin and O. Métais. Large-eddy simulations of three-dimensional spatially-developing round jets. *Direct and large-eddy simulations II, Kluwer Academic Publishers*, pages 539–542, 1997.

[145] L. Vervisch, R. Hauguel, P. Domingo, and M. Rullaud. Three facets of turbulent combustion modelling : DNS of premixed V-flame, LES of lifted nonpremixed flame and RANS of jet-flame. *J. of Turbulence*, 5(4), 2004.

[146] R. Verzicco and P. Orlandi. Direct simulations of the transitional regime of a circular jet. *Phys. Fluids*, 6(2) :751–759, 1994.

[147] E. Villermaux and E. J. Hopfinger. Periodically arranged co-flowing jets. *J. Fluid Mech.*, 263 :63–92, 1994.

[148] E. Villermaux, C. Innocenti, and J. Duplat. Short circuits in the Corrsin-Obukhov cascade. *Phys. Fluids*, 13 :284–289, 2001.

[149] E. Villermaux and H. Rehab. Mixing in coaxial jets. *J. Fluid Mech.*, 425 :161–185, 2000.

[150] E. Villermaux, H. Rehab, and E. J. Hopfinger. Breakup regimes and self-sustained pulsations in coaxial jets. *Meccanica*, 29 :393–401, 1994.

[151] H. A. Warda, S. Z. Kassab, K. A. Elshorbagy, and E. A. Elsaadawy. An experimental investigation of the near-field region of a free turbulent coaxial jet using LDA. *Flow Measurement and Instrumentation*, **10** :15–26, 1999.

[152] R. B. Wicker and J. K. Eaton. Near-field of a coaxial jet with and without axial excitation. *AIAA Journal*, 32 :542–546, 1994.

[153] S. E. Widnall, D. B. Bliss, and C.-Y. Tsai. The instability of short waves on a vortex ring. *J. Fluid Mech.*, 66 :35–47, 1974.

[154] S. E. Widnall and J. P. Sullivan. On the stability of vortex rings. *Proc. Roy. Soc. London*, A332 :335–353, 1972.

[155] T. J. Williams, M. R. M. H. Ali, and J. S. Anderson. Noise and flow characteristics of coaxial jets. *J. Mech. Engng Sci*, 2 :133–141, 1969.

[156] J. H. Williamson. Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. Comp. Phys.*, 35 :48–56, 1980.

[157] I. J. Wygnanski and H. E. Fiedler. Some measurements in the self-preserving jet. *J. Fluid Mech.*, 38 :577–612, 1969.

[158] A. J. Yule. Large-scale structure in the mixing layer of a round jet. *J. Fluid Mech.*, 89 :413–432, 1978.

[159] K. B. M. Q. Zaman and A. K. M. F. Hussain. Vortex pairing in a circular jet under controlled excitation. Part I. General jet response. *J. Fluid Mech.*, 101 :449–491, 1980.

[160] T. S. Zawacki and H. Weinstein. Experimental investigation of turbulence in the mixing region between coaxial streams., 1968. NASA Contractor Report CR-959.