



HAL
open science

Egalisation aveugle de systèmes multi-utilisateurs

Ludwig Rota

► **To cite this version:**

Ludwig Rota. Egalisation aveugle de systèmes multi-utilisateurs. Autre [cs.OH]. Université Nice Sophia Antipolis, 2004. Français. NNT: . tel-00121138

HAL Id: tel-00121138

<https://theses.hal.science/tel-00121138>

Submitted on 19 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Nice-Sophia Antipolis – UFR Sciences
École Doctorale de Sciences & Technologies de l'Information et de la
Communication

T H È S E

pour obtenir le titre de
DOCTEUR EN SCIENCES

Discipline : Automatique, Traitement du Signal et des Images

présentée et soutenue par
Ludwig ROTA

ÉGALISATION AVEUGLE DE SYSTÈMES MULTI-UTILISATEURS

Thèse dirigée par **Sylvie ICART**
soutenue le 15 décembre 2004

Jury :

M.	Joos VANDEWALLE Professeur à K. U. Leuven, Belgique	Président
M.	Eric MOREAU Professeur à l'Université de Toulon et du Var	Rapporteur
M.	Jean-Christophe PESQUET Professeur à l'Université de Marne la Vallée	Rapporteur
M.	Lieven DE LATHAUWER Chargé de recherche au CNRS	Examinateur
Mme.	Sylvie ICART Maître de conférences à l'UNSA	Directeur
M.	Pierre COMON Directeur de recherche au CNRS	Co-directeur

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia Antipolis (I3S) Unité Mixte de Recherche (UMR - 6070) au CNRS et à l'Université de Nice - Sophia Antipolis (UNSA).

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté lors de l'aboutissement de ce mémoire et plus particulièrement:

Je remercie Monsieur Joos Vandewalle, Professeur à la Katholieke Universiteit Leuven en Belgique, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Je remercie Messieurs Eric Moreau, Professeur à l'Université de Toulon et du Var, Jean-Christophe Pesquet, Professeur à l'Université de Marne la Vallée, pour leur spontanéité, leur rigueur et leurs remarques qui ont contribué à améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie Monsieur Lieven De Lathauwer, Chargé de Recherche au CNRS au laboratoire ETIS à Cergy-Pontoise, pour ses compétences, sa disponibilité, son accueil lors de ma visite à Leuven (Belgique).

Je remercie Madame Sylvie Icart, Maître de conférences à l'UNSA, et Monsieur Pierre Comon pour leur disponibilité, leurs conseils et l'aide précieuse qu'ils ont su m'apporter durant cette thèse.

Pour finir, je remercie bien chaleureusement tous les membres du laboratoire I3S que j'ai pu côtoyer durant ces trois années de thèse.

Résumé

Nous étudions à travers cette thèse le problème d'égalisation aveugle de canaux de communications. L'égalisation aveugle dans un environnement multi-utilisateurs, appelée aussi séparation aveugle de sources, trouve sa place dans un grand nombre d'applications telles que les télécommunications, le traitement de la parole, ou encore le domaine biomédical. L'objectif de la séparation aveugle de sources est de restituer les sources émises uniquement à partir des observations issues des capteurs. Les méthodes aveugles n'ont donc connaissance a priori ni des signaux émis ni du canal de transmission. La plupart des méthodes aveugles considèrent que les sources sont non gaussiennes et statistiquement indépendantes. Elles visent à réduire par transformation linéaire la dépendance statistique des signaux des observations aux ordres supérieurs à deux, et donc à restituer les sources.

Cette thèse présente trois algorithmes de séparation de sources. Le premier, l'algorithme PAJOD (Partial Approximative JOint Diagonalization), considère que la matrice de la réponse impulsionnelle du canal est une matrice para-unitaire. Cette hypothèse est vérifiée lorsque les observations ont été préalablement blanchies. Le problème peut être alors réduit en une diagonalisation partielle et conjointe (donc approximative) d'un ensemble de matrices contenant les multi-corrélations cumulantes des observations. Cependant, dans un souci de simplification, l'algorithme PAJOD retourne une matrice semi-unitaire et non para-unitaire. Cela nous mène au deuxième algorithme qui est l'algorithme PAFA (PAra-unitary FActorisation). Cet algorithme se base sur la même hypothèse de blanchiment des observations mais, contrairement à PAJOD, utilise une factorisation exacte des matrices para-unitaires afin d'obtenir la matrice réponse impulsionnelle de l'égaliseur sous forme para-unitaire. Tout comme PAJOD, le critère utilisé pour cette factorisation para-unitaire utilise les multi-corrélations cumulantes des observations. Le dernier algorithme APF (Alphabet Polynomial Fitting) est différent des deux premiers dans le sens où il ne considère pas le canal comme para-unitaire et a par ailleurs connaissance des modulations employées. La connaissance des modulations permet entre autres de pouvoir extraire des signaux de modulations connues à partir d'un mélange instantané ou convolutif. En effet, si tous les signaux émis utilisent des modulations différentes, il est ainsi possible d'extraire un à un les signaux. Pour cela, l'algorithme effectue une extraction par déflation régie par la maximisation d'un critère de contraste adapté à chaque modulation.

Abstract

This work studies the problem of blind equalization of digital communication channels. In a multi-user environment, this problem is also known as blind source separation (BSS), and arises in a vast number of applications, such as telecommunications, speech processing, and biomedical signal processing. The goal of BSS is to recover the emitted sources from the only observation of the sensor output. Blind methods do not have prior knowledge of the emitted signals and the transmission channel. Most blind methods only assume that the source signals are non-Gaussian and statistically independent. To accomplish the source separation, blind techniques aim at reducing, via a linear transformation, the degree of statistical dependence of the observed signals at orders higher than two.

The present thesis introduces three algorithms for BSS. The first algorithm, called PAJOD (Partial Approximate JOint Diagonalization), assumes that the channel impulse response matrix is para-unitary. This hypothesis is verified when the observations have been previously whitened. The problem can then be reduced to a joint partial (thus approximate) diagonalization of a matrix set containing the sensor-output higher-order cumulants at different time lags. In a bid to reduce complexity, the PAJOD algorithm is only designed to find a semi-unitary matrix and not para-unitary. This motivates the development of the second algorithm, so-called PAFA (PARa-unitary FActorization), which is also based on the pre-whitening assumption. Contrary to PAJOD, PAFA exploits an exact parameterization of para-unitary matrices to obtain the equalizer impulse response matrix with the appropriate structure. Like PAJOD, the criterion for para-unitary factorization exploits the observation higher-order cumulants at different lags. The last algorithm, APF (Alphabet Polynomial Fitting), is different from the other two in that it does not make the para-unitary channel assumption and requires prior knowledge of the input modulations. This knowledge enables the extraction of input signals with known modulation in an instantaneous or convolutive mixture. Indeed, if all emitted signals employ different modulations, it is possible to extract the signals one by one. To this end, the algorithm carries out a deflation-based extraction driven by the maximization of a contrast criterion adapted to each modulation.

Table des matières

Remerciements	1
Résumé	3
Abstract	5
Abréviations	15
Notations	17
1 Introduction	19
1.1 Contexte et motivations	19
1.2 Bref historique de l'égalisation	20
1.3 Objectifs de la thèse	21
1.4 Organisation du document	21
1.5 Publications issues de ce travail	22
2 Égalisation aveugle et séparation de sources	25
2.1 Les systèmes de communications numériques	25
2.1.1 L'émetteur	25
2.1.2 Le canal	26
2.1.3 Le récepteur	27
2.2 Modélisation	27
2.2.1 Modèle SISO	28
2.2.2 Modèle MIMO	29
2.3 Problématique et hypothèses	30
2.3.1 Problématique de l'égalisation aveugle	30
2.3.2 Indétermination de l'égaliseur	31
2.3.3 Les hypothèses	32
2.4 Les matrices para-unitaires	33
2.5 Statistiques d'ordre supérieur	36
2.5.1 Standardisation	37
2.5.2 Fonctions caractéristiques	37
2.5.3 Moments et Cumulants	38
2.5.4 Statistiques du second ordre	43
2.5.5 Statistiques d'ordre 4	44
2.6 Les critères de contraste	44
2.7 Les mesures de performances	45
2.7.1 Le taux d'erreur symboles	45
2.7.2 La distance entre \mathbf{G} et $\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}$	45

3	Algorithme PAJOD	47
3.1	Cumulants des observations	47
3.2	Signaux réels	48
3.2.1	Contraste \mathcal{J}_4^0	48
3.2.2	Tenseur des cumulants $\mathbf{T}_{a,b}^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	50
3.2.3	Égalisation avec $\mathcal{J}_4^0(\mathbf{H}; \mathbf{w})$	50
3.3	Signaux complexes	52
3.3.1	Contrastes \mathcal{J}_2^2 et \mathcal{J}_3^1	53
3.4	Dimensions du tenseur	54
3.5	Algorithme algébrique	55
3.5.1	Balayage de Jacobi	55
3.5.2	Travail sur les paires	57
3.5.3	Diagonalisation avec le contraste \mathcal{J}_2^2	58
3.5.4	Diagonalisation avec le contraste \mathcal{J}_4^0	65
3.6	Performances de PAJOD	66
3.7	Conclusion du chapitre	70
4	Algorithme PAFA	73
4.1	Factorisation para-unitaire	73
4.2	Relations multilinéaires sur les cumulants	74
4.3	Rotations de Givens	75
4.4	Critère d'optimisation	76
4.5	Algorithme itératif de type Jacobi	77
4.6	Performances de PAFA	80
4.7	Conclusion du chapitre	83
5	Contrastes APF	85
5.1	Les critères polynomiaux	85
5.2	Méthode du gradient à pas optimal	87
5.3	Performances des algorithmes APF	89
5.3.1	Comparaison avec la solution MMSE	89
5.3.2	Algorithme APF-QPSK	90
5.3.3	Algorithme APF-QAM16	90
5.3.4	Comparaison avec le CMA	92
5.4	Extraction d'un signal	92
5.5	Performances de l'extraction	95
5.6	Conclusion du chapitre	95
	Conclusion	97
	Annexes	99
	A Système polynomial de l'algorithme PAFA	101
	B Preuves des propriétés de para-unitarité	103

C	Calcul des coefficients \mathcal{K} de l'algorithme PAFA	109
C.1	Décomposition des \mathcal{K}	109
C.2	Méthode de calcul	109
D	Détails de PAJOD	113
D.1	Expression de [8]	113
D.2	Simplification de (3.59)	113
D.3	Simplification de (3.59)	114
D.4	Expressions des $P_x(t)$	114
D.5	Expressions des $Q_x(t)$	114
D.6	Déterminant de Sylvester	115

Table des figures

2.1	Chaîne de transmission de l'émetteur.	26
2.2	Canal de transmission multi-trajets et multi-utilisateurs.	26
2.3	Chaîne de transmission de du récepteur.	27
2.4	Modèle SISO	29
2.5	Modèle MIMO	29
3.1	Placement des éléments de $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ dans une matrice $\mathbf{O}(\mathbf{b},\boldsymbol{\beta})$	50
3.2	Structure du tenseur $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	51
3.3	Diagonalisation conjointe d'un ensemble de N^2L^2 sous-matrices $N \times N$	56
3.4	Diagonalisation conjointe des tenseurs \mathbf{M} , \mathbf{N} ou \mathbf{O}	57
3.5	Maximisation lorsque $j \leq N$	59
3.6	Maximisation lorsque $j > N$	62
3.7	Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 3$	67
3.8	Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 4$	68
3.9	Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 4$	68
3.10	Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des observations de 800 symboles, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 2,3,4$	69
3.11	Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en QAM-16, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 3$	69
3.12	Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en QAM-16, des observations de 800 symboles, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 2,3,4$	70
3.13	Taux d'erreur symbole obtenus lorsque 3 signaux de modulations différentes sont mélangés. Les longueurs sont telles que $K = 3$ et $L = 3$	71
4.1	Factorisation de l'égaliseur para-unitaire.	74
4.2	Exemple d'évolution du contraste $\mathcal{J}_{1,4}(\mathbf{H},\mathbf{x})$ RSB= 25dB et $L = 3$ et 1000 échantillons.	77
4.3	Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QPSK et $K = L = 3$	81
4.4	Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés PSK-8 et $K = L = 3$	82

4.5	Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QAM16 et $K = L = 3$	82
4.6	Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QPSK et $K = L = 4$	83
4.7	Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés PSK-8 et $K = L = 4$	83
4.8	Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QAM16 et $K = L = 4$	84
5.1	Taux d'erreur symboles de l'algorithme APF-QPSK avec un canal de longueur $K=5$ and et un égaliseur de longueur $L=20$	91
5.2	Taux d'erreur symboles de l'algorithme APF-QAM16 avec un canal de longueur $K=4$ and et un égaliseur de longueur $L=16$	91
5.3	Comparaison des algorithmes APF-QPSK et APF-QAM16 face au CMA avec $K=3$ $L=10$	92
5.4	Taux d'erreur symboles des extractions avec $K = 3$ et $L = 13$ et une fenêtre d'observation de 1000 échantillons	96

Liste des tableaux

5.1	Alphabets et polynômes relatifs aux modulations numériques.	86
C.1	Description des $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(2\beta+\alpha-4)}$ (1ère partie).	111
C.2	Description des $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(2\beta+\alpha-4)}$ (2ème partie)	112

Abréviations

APF	Alphabet Polynomial Fitting
CMA	Constant Modulus Algorithm
FIR	Finite Impulse Response
GSM	Global System for Mobile communications
HOS	High Order Statistics
IIR	Infinite Impulse Response
ISI	Inter-Symbol-Interference
LTI	Linear Time Invariant
MIMO	Multiple Input - Multiple Output
MMSE	Minimum Mean Square Error
PAFA	PAraunitary FActorization
PAJOD	PArtial JOint Diagonalization
PSK	Phase Shift Keying
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
RSB	Rapport Signal à Bruit (cf. SNR)
SIMO	Single Input - Multiple Output
SISO	Single Input - Single Output
SNR	Signal to Noise Ratio (cf. RSB)
SOS	Second Ordre Statistics
ZF	Zero Forcing
i.i.d.	indépendant et identiquement distribué

Notations

$(\cdot)^T$	Transposition d'un vecteur ou d'une matrice
$(\cdot)^H$	Transposition Hermitienne (complexe conjugué) d'un vecteur ou d'une matrice
j	Nombre complexe tel que $j = \sqrt{-1}$
$(\cdot)^*$	Complexe conjugué d'un scalaire, d'un vecteur ou d'une matrice
$ \cdot $	Module d'un scalaire
$\ \cdot\ $	Norme
$\ \cdot\ _F$	Norme de Frobenius
$s[t]$	Un signal aléatoire à temps continu
$s(n)$	Un signal aléatoire à temps discret
\mathbf{s}	Un vecteur de signaux aléatoires
$h(i)_{i=1,\dots,q}$	i ème coefficient de la réponse impulsionnelle d'un modèle FIR d'ordre 'q'
$\mathbf{H}(z)$	Matrice de transfert d'un filtre FIR
$\text{Diag}\{\cdot\}$	Diagonale d'une matrice
$\det\{\cdot\}$	Déterminant d'une matrice
$E[\cdot]$	Moment statistique
$C_q^{p,x}$	Cumulant d'ordre $p + q$ associé au signal aléatoire x
$\mathcal{J}(\mathbf{w})$	Critère de contraste basé sur le vecteur des observations \mathbf{w}
$\delta(\cdot)$	Impulsion de Dirac
\mathbf{I}_n	Matrice identité de taille $n \times n$
\star	Produit de convolution

$\Re\{\cdot\}$	Partie réelle
$\Im\{\cdot\}$	Partie imaginaire
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers positifs
\mathbb{N}^+	Ensemble des nombres entiers strictement positifs
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres entiers relatifs
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}[z]$	Ensemble des polynômes en z^{-1} à coefficients réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}[z]$	Ensemble des polynômes en z^{-1} à coefficients complexes
$\mathbb{C}(z)$	Ensemble des fractions rationnelles en z^{-1} à coefficients complexes
\mathcal{H}	Ensemble des filtres égaliseurs
\mathcal{S}	Ensemble des processus sources
\mathcal{T}	Ensemble des filtres triviaux
\mathcal{A}	Ensemble des valeurs prises par un signal (alphabet)

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et motivations

Les nouvelles technologies de communications numériques ont fait apparaître de nouveaux services mais inévitablement de nouveaux problèmes se sont présentés. La largeur de bande et la puissance utilisée influant sur la qualité du signal transmis, il devient nécessaire de tenir compte de la multitude des trajets empruntés par le signal pour arriver au récepteur, ainsi que des interférences causées par les émetteurs voisins.

Lorsque les interférences sont limitées, la solution usuelle pour lutter contre les trajets multiples consiste à utiliser des séquences d'apprentissage pour informer l'égaliseur. Pendant la transmission de la séquence d'apprentissage, le récepteur dispose d'une copie du signal transmis, et peut ainsi ajuster les paramètres de l'égaliseur pour compenser les effets du canal. Les algorithmes de traitement qui fonctionnent en exploitant exclusivement ce type d'information sont qualifiés d'*égaliseurs informés*. D'un autre côté, quand les interférences sont importantes, la transmission d'une séquence d'apprentissage devient difficilement exploitable: l'égaliseur informé doit se ré-initialiser constamment. Il en est de même lorsque la réponse impulsionnelle du canal est longue ou quand les paramètres du canal changent rapidement, par exemple lorsque l'émetteur se déplace rapidement. Dans de telles circonstances, il est bien plus intéressant d'égaliser le canal sans utiliser de séquences d'apprentissage. Ces méthodes sont communément appelées méthodes d'*égalisation aveugle* ou *autodidactes*. Comme la tendance actuelle est à l'augmentation du débit, l'utilisation des séquences d'apprentissage devient un inconvénient majeur pour les communications numériques. En effet, avec l'envoi périodique des séquences d'apprentissage, le débit maximum du système n'est jamais atteint. La solution consiste à supprimer les séquences d'apprentissage, on comprend alors l'intérêt croissant pour les méthodes *aveugles*.

Parmi les domaines d'application, nous pouvons citer les radiocommunications, l'audio, la parole, les radars, les sonars, la sismologie, la radio astronomie, la médecine, l'interception de communications.

1.2 Bref historique de l'égalisation

Les algorithmes d'égalisation aveugle sont apparus dans la littérature après les premiers travaux de Yoiki Sato [62] sous le nom d'algorithme à égalisation dit "*en boucle*" (*self recovering*). Cette technique était présentée dans le cadre des réseaux de communications numériques à multiplexage fréquentiel (*FDM: frequency division multiplexed*). Cet article permit de développer de nouvelles techniques d'égalisation car il démontrait que les séquences d'apprentissage n'étaient pas forcément nécessaires pour égaliser des signaux à modulation d'amplitude différente. L'algorithme proposé était une modification de l'algorithme d'égalisation des moindres carrés adaptatifs [39], mais souffrait malheureusement d'un temps de convergence trop important.

D'autres techniques *en boucle* suivirent la même idée que celle de Sato [6][36][54]. Elles avaient la capacité d'identifier un canal avec la seule connaissance de l'alphabet du signal émis et de la période symbole. Ces techniques ont donné des algorithmes qui utilisaient une descente de gradient stochastique afin de minimiser un critère quadratique et la plupart étaient basées sur la théorie des processus stochastiques de Bussgang [7].

Le début des années 90 a vu apparaître des méthodes s'appuyant sur les statistiques d'ordre supérieur (*HOS: High Order Statistics*) [51] [34] [10] [35] [3] [66] [71]. En effet, les algorithmes informés peuvent être efficacement implantés à l'aide des statistiques du second ordre (*SOS: Second Order Statistics*) des entrées et des sorties, éventuellement bruitées. En revanche, la plupart des techniques aveugles ont recours aux HOS, soit implicitement comme l'algorithme de Godard [36], soit explicitement comme dans l'algorithme de maximisation du contraste (*COM: CONtrast Maximization*) [12]. L'avantage des méthodes HOS, face aux méthodes SOS, est que l'information de phase du canal est préservée [30]. Cette information est essentielle pour l'identification des systèmes à phase non minimale ou à phase mixte [64].

L'égalisation aveugle des systèmes linéaires et invariants dans le temps (*LTI: Linear Time Invariant*) a été largement étudiée durant ces dix dernières années [64] [30] [75]. Pour des systèmes ne comportant qu'une seule entrée (ou plusieurs sorties) et plusieurs sorties (respectivement une seule sortie) (*SIMO: Single-Input Multiple-Output* ou *MISO: Multiple-Input Single-Output*) [33], les statistiques du second ordre suffisent, à condition de respecter un ensemble d'hypothèses d'identifiabilité [27] [68] [13]. Pour les systèmes à entrées et sorties multiples (*MIMO: Multiple-Input Multiple-Output*) et à entrée et sortie unique (*SISO: Single-Input Single-Output*), l'utilisation des HOS est presque toujours obligatoire [72] [67] [41] [59] [46] [47] [11] [13] [30] [73] [42] [29] [40, ch.5], sauf dans les cas particuliers tels que la non stationnarité [53], la non circularité [38], la coloration des sources [2] [4], ou le caractère discret des sources [38]. Cette égalisation peut se faire de manière implicite à travers des critères utilisant la propriété du module constant [31] [26] [52] [69] ou la propriété de la puissance constante [38]. Enfin, une des propriétés des systèmes MIMO est qu'un filtre à réponse impulsionnelle finie (*FIR: Finite Impulse Response*) peut avoir un inverse FIR [48] si la matrice de transfert de ce filtre est de rang plein pour tout z . Cette propriété n'existe évidemment pas pour les systèmes SISO non triviaux.

On pourrait penser que les méthodes HOS nécessitent un temps de convergence impor-

tant, mais cette idée fautive est due aux algorithmes *en ligne* (*on-line*), et donc récursifs dans le temps. En effet, les algorithmes d'égalisation aveugle *en ligne* convergent au bout d'un grand nombre d'échantillons. Ils souffrent généralement d'un certain nombre d'inconvénients comme le cumul des temps de convergence des algorithmes d'optimisation, et la sensibilité à l'initialisation. De plus, ils peuvent conduire à des minima locaux, et donc à des solutions non-optimales si le pas de convergence est mal estimé ou si le nombre d'itération est limité. C'est pourquoi il devient plus intéressant d'utiliser des algorithmes par *blocs* dits *hors ligne* (*off-line*), pouvant converger pour certains avec plusieurs centaines de symboles. De plus, ces algorithmes exploitent entièrement les blocs d'information, ce qui correspond aux formats de transmission utilisés en communication numériques comme le format TDMA (*Time-Division Multiple Access*), et permettent la mise en oeuvre de solutions algébriques. De tels algorithmes ont l'avantage d'éviter les solutions parasites. Ils sont donc très efficaces quand ils sont appliqués à des blocs d'information de petites tailles, ce qui est notamment le cas lorsque les paramètres du canal varient rapidement dans le temps [25] [72]. Pendant longtemps, leur principal inconvénient a été la complexité de calcul, mais cette limitation s'atténue avec l'utilisation de processeurs plus puissants et plus rapides qu'auparavant.

1.3 Objectifs de la thèse

Cette thèse fait l'étude de deux techniques d'égalisation aveugle qui s'appuient toutes deux sur les statistiques d'ordre supérieur des signaux observés. Une implémentation *bloc* de ces deux algorithmes est présentée, ce qui permet une égalisation rapide moyennant des blocs d'information très courts. Par ailleurs, nous présentons une famille de critères basés sur la connaissance des alphabets des modulations des signaux émis. Ces critères permettent d'extraire des sources de modulations connues au moyen d'un algorithme de déflation.

1.4 Organisation du document

Le présent mémoire est composé, outre ce chapitre d'introduction, de quatre chapitres:

- *Chapitre 2*

Le chapitre 2 introduit la problématique de la séparation de sources. Nous fixons dans ce chapitre les notations et les hypothèses considérées dans le reste de ce mémoire. Nous présentons les propriétés des matrices para-unitaires utilisées dans les chapitres suivants. Nous rappelons par ailleurs les outils statistiques utilisés par les méthodes aveugles. Nous définissons aussi les mesures qui permettent d'évaluer les performances des algorithmes.

- *Chapitre 3*

Le chapitre 3 présente un algorithme original nommé PAJOD. Le problème traité dans ce chapitre peut être vu comme la diagonalisation d'un tenseur HOS, c'est-à-dire d'un tenseur contenant les multi-corrélations cumulantes du système [24] [23] [15], mais il peut être traité comme la diagonalisation approximative d'un sous-ensemble de tranches matricielles [8].

- *Chapitre 4*

Nous présentons dans le chapitre 4 l'algorithme PAFA dédié à l'égalisation aveugle MIMO. La particularité de cet algorithme est qu'il est basé sur la factorisation de filtres para-unitaires définis dans [74] [43]. La condition de para-unitarité [63] [43] sur la matrice de transfert du canal est vérifiée dès lors qu'on effectue un pré-blanchiment des observations [5]. L'algorithme qui résulte de notre méthode a été ensuite implémenté sous forme d'un algorithme *bloc*.

- *Chapitre 5*

Le chapitre 5 présente une famille de critères de contraste pour l'égalisation aveugle. Chaque critère de cette famille est défini en fonction de la modulation du signal transmis. Une première étude pour des modèles SISO aboutit à un algorithme d'égalisation aveugle. Ce dernier est repris pour les modèle MIMO dans un algorithme de déflation. La recherche des filtres égaliseurs s'effectue par la méthode du gradient à pas optimal.

1.5 Publications issues de ce travail

- *Chapitre 3*

- [20] P. COMON and L. ROTA, "*Blind source separation: a Partial Joint Diagonalization (PAJOD) approach*", In **3rd workshop on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France, 29-31 January 2003**,
- [19] P. COMON, E. MOREAU, and L. ROTA, "*Séparation de Mélanges convolutifs par Diagonalization Conjointe*", In **18eme Colloque GRETSI, Toulouse, France, 10-13 Sept 2001**,
- [18] P. COMON, E. MOREAU, and L. ROTA, "*Blind Separation of Convolutional Mixtures: a Contrast-Based Joint Diagonalization Approach*", In **3rd Int. Conf. Independent Component Analysis, San Diego, Dec. 9-13 2001, pp.686-691**,
- [21] P. COMON and L. ROTA, "*Blind Separation of Independent Sources from Convolutional Mixtures*", **IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences, E86-A(3) March 2003, invited paper.**

- *Chapitre 4*

- [59] L. ROTA, P. COMON and S. ICART, "*Blind Equalization of MIMO Channels*", In **2003 IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications**, Rome, Italy, 15-18 June 2003,
- [60] L. ROTA, P. COMON, and S. ICART, "*Blind MIMO Paraunitary Equalizer*", In **IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, Hong Kong, 6-10 April 2003
- [61] L. ROTA, P. COMON, and S. ICART, "*Egalisation aveugle de mélanges convolutifs MIMO*", In **19eme Colloque GRETSI**, Paris, France, 8-11 Sept, 2003
- [58] L. ROTA, P. COMON, and S. ICART, "*Blind MIMO Equalization Under Paraunitary Constraint*", **I3S Report RR-2002-35-FR**, Sept. 10, 2002.

- *Chapitre 5*

- [56] L. ROTA, P. COMON, "*Alphabet Polynomial Fitting Criteria for Blind Equalization*", In **XII European Signal Processing Conference**, Vienna, Austria, Sept. 7-10, 2004
- [57] L. ROTA, P. COMON, "*Blind Equalizers Based on Polynomial Criteria*", In **IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, Montreal, 17-21 May, 2004.

Chapitre 2

Égalisation aveugle et séparation de sources

Ce chapitre présente les outils utilisés dans cette thèse. Ces outils sont nécessaires à la compréhension, d'une part, de la problématique générale de l'égalisation aveugle, et d'autre part, des méthodes présentées dans les chapitres suivants. Dans un premier temps, nous présentons les systèmes de communications numériques avec un bref descriptif de la chaîne de transmission d'un signal. Ensuite, nous introduisons les modèles SISO et MIMO ainsi que les notations afférentes. Nous posons alors la problématique de la séparation de sources sous certaines hypothèses. Nous définissons ce qu'est un *contraste*, c'est à dire un critère d'optimisation permettant de séparer des sources mélangées. Pour finir, nous nous appuyons sur certaines mesures de performances que nous utiliserons pour comparer les algorithmes des chapitres 3, 4 et 5.

2.1 Les systèmes de communications numériques

L'objectif d'un système de communication numérique est d'acheminer un message, modélisé par une suite de symboles, entre deux éléments distincts, l'un appelé *émetteur*, l'autre *récepteur*. Le milieu de propagation qui sépare ces deux éléments prend le nom de *canal de transmission*. Nous appelons *signal* un message qui a été codé puis modulé afin d'être transmis sous forme d'ondes dans le canal de transmission.

2.1.1 L'émetteur

Le dispositif d'émission a pour objectif de mettre en forme le message analogique avant de l'émettre à travers un canal de transmission. Ce message analogique est échantillonné puis quantifié par un convertisseur analogique-numérique (CAN). La séquence obtenue en

sortie est constituée de symboles appartenant à un alphabet fini. Deux types de codage sont ensuite appliqués sur la séquence : le codage source et le codage canal. Le codage source permet de réduire la taille de la séquence en réduisant les redondances par une technique de compression. Le codage canal introduit volontairement une redondance contrôlée afin de détecter ou de corriger les erreurs au niveau du récepteur. Ce codage est nécessaire lorsque le canal de transmission perturbe fortement le message transmis. La séquence codée est ensuite adaptée aux propriétés spectrales du canal de transmission grâce aux modulations. Celles-ci peuvent par exemple translater le spectre d'un message autour d'une fréquence pour en assurer la transmission. Le signal modulé est finalement diffusé par l'antenne dans le milieu de propagation sous forme d'ondes. La figure 2.1 illustre la chaîne de transmission de l'émetteur.

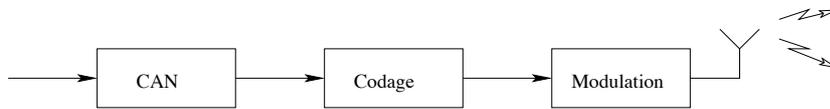


FIG. 2.1 – Chaîne de transmission de l'émetteur.

2.1.2 Le canal

L'onde émise peut emprunter différents chemins pour arriver au récepteur. On peut ainsi dire qu'il y a un trajet direct (droite directe séparant l'émetteur du récepteur), et des trajets réfléchis. Comme dans l'air ou dans le vide une onde se propage à la même vitesse dans toutes les directions, on comprend aisément que le temps de propagation est différent pour chaque trajet. Ainsi, le récepteur observe la superposition de plusieurs versions décalées dans le temps et atténuées du signal émis. On parle alors d'interférence entre symboles (*ISI Interference Inter Symbol*). La figure 2.2 illustre un canal multi-trajets lorsqu'il y a plusieurs émetteurs-récepteurs.

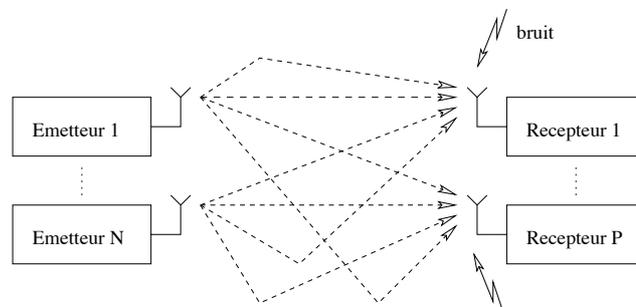


FIG. 2.2 – Canal de transmission multi-trajets et multi-utilisateurs.

2.1.3 Le récepteur

Le rôle du récepteur est de récupérer le message initialement émis. Ce récepteur est donc constitué des dispositifs qui permettent d'inverser les effets de l'émetteur. Ainsi, dans un premier temps, le signal capté par l'antenne est démodulé en bande de base (bande spectrale du message avant modulation). Cependant, le signal démodulé n'est généralement pas interprétable et nécessite un traitement plus spécifique afin de compenser les distorsions introduites par le canal. Le dispositif de récupération de porteuse va permettre de compenser un éventuel décalage entre les fréquences porteuses utilisées par le modulateur et le démodulateur. Ce dispositif permet également de compenser les déphasages liés à l'effet Doppler. Ensuite, le dispositif de synchronisation va faire coïncider l'échantillonnage en réception avec le rythme d'émission des symboles. Le rôle de l'égaliseur va être de compenser toutes les distorsions dues au canal de transmission. Quand ces trois dispositifs remplissent leurs rôles, il est alors possible de récupérer le message émis. On applique ensuite le décodage canal puis le décodage source afin de récupérer le message transmis dans son intégralité. Le convertisseur numérique-analogique (CNA) permet finalement de retrouver le message émis sous une forme analogique. La figure 2.3 reprend les différents éléments qui constituent le récepteur.

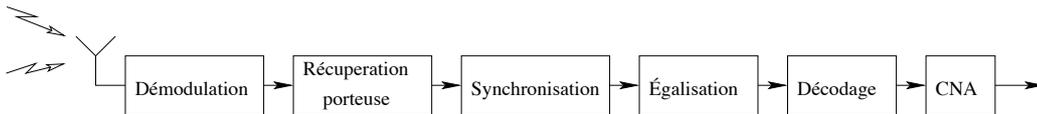


FIG. 2.3 – Chaîne de transmission de du récepteur.

2.2 Modélisation

A travers cette thèse, nous nous limiterons aux systèmes de communications numériques causaux. Nous supposons par ailleurs que ces systèmes sont cyclo-stationnaires¹ et invariants dans le temps (*LTI: Linear Time Invariant*). En effet, un canal réel varie dans le temps, mais sur une courte durée d'observation (suffisante pour mener à bien l'égalisation) il est considéré comme linéaire et invariant dans le temps. On suppose de plus que les signaux émis se propagent dans un milieu de propagation linéaire, et que l'émetteur utilise aussi une modulation linéaire. De plus, nous considérons uniquement des modèles *convolutifs*, c'est à dire lorsque la réponse impulsionnelle du canal s'étale dans le temps et lorsque les sources sont à large bande. Le cas des modèles *statiques* ou *instantanés* [40] (signaux à bande étroite) n'est pas abordé dans cette thèse.

La modélisation du canal en temps discret permet de classer les systèmes en fonction de leur réponse impulsionnelle. Celle-ci peut être finie (*FIR: Finite Impulse Response*) ou infinie (*IIR: Infinite Impulse Response*). Les systèmes numériques sont décrits sous forme polynomiale à l'aide de la transformée en Z de leur réponse impulsionnelle. On obtient ainsi une

1. définition ?? page ??

matrice dont les coefficients sont des polynôme en z^{-1} dans le cas FIR ou une matrice dont les coefficients sont des fractions rationnelles [44] dans le cas IIR.

2.2.1 Modèle SISO

Le modèle SISO représente les systèmes ne comportant qu'un seul émetteur et un seul récepteur. Notons $s[t]$ le signal transmis à temps continu et $s(k)$ le signal transmis à temps discret tels que $s(k) = s[kT_s]$ où T_s est la période d'échantillonnage. L'enveloppe complexe d'un signal transmit $s[t]$ devient en bande de base: $s[t] = \sum_k f[t - kT_s]s(k)$. Après propagation à travers le canal, le signal reçu sur l'antenne s'écrit:

$$w[t] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[t - kT_s]s(k) + b[t] \quad (2.1)$$

où $c[t]$ est la réponse impulsionnelle globale du canal de propagation (convolution du filtre d'émission, du canal et du filtre de réception), et $b[t]$ le bruit perturbant la réception du signal. En échantillonnant le signal reçu au débit des symboles $1/T_s$, nous obtenons le modèle discret:

$$w(n) = \sum_k c(n - k)s(k) + b(n) \quad (2.2)$$

où $c(k) \stackrel{\text{def}}{=} c[kT_s]$. Le filtre $c[t]$ sera assimilé à un FIR de longueur K et nous noterons en temps discret sa réponse impulsionnelle de longueur K par $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_{K-1}]$ avec $c_n \stackrel{\text{def}}{=} c(n)$. L'objectif de l'égalisation pour un système SISO consiste à trouver le filtre égaliseur de longueur L , c'est à dire le vecteur $\mathbf{h} = [h_0, \dots, h_{L-1}]$, de manière à ce que le signal obtenu en sortie soit une bonne estimation du signal d'entrée $s(k)$:

$$\hat{s}(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} h_\ell w(n - \ell). \quad (2.3)$$

Le filtre global du système est noté $\mathbf{g} = \mathbf{c} \star \mathbf{h}$, où \star est l'opérateur de convolution. Dans (2.2), toutes les variables, exceptés les indices temporels, prennent leurs valeurs aussi bien dans le corps des réels que dans celui des complexes (on note $j = \sqrt{-1}$), ce qui permet l'écriture en bande de base des signaux observés. Dans le cas complexe, les signaux traités correspondent aux enveloppes complexes des signaux émis. De plus, chaque symbole de la suite $s(k)|_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à un alphabet de taille finie noté \mathcal{A} issu de la modulation employée. On admettra dans toute la thèse que cette suite est constituée de symboles indépendants et identiquement distribués² (*i.i.d.*). Ceci limite légèrement notre étude, qui ne s'applique pas, par exemple, aux modulations à phase continue.

La figure 2.4 illustre le modèle SISO: la source s est filtrée par le canal \mathbf{c} , les observations bruitées sont ensuite égalisées par \mathbf{h} .

2. voir l'hypothèse **S1** page 32

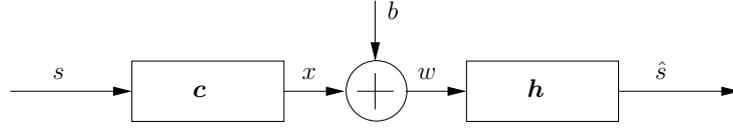


FIG. 2.4 – Modèle SISO

2.2.2 Modèle MIMO

Le modèle MIMO permet de modéliser un système de communication utilisé simultanément par plusieurs utilisateurs. En général, un tel modèle est utilisé lorsqu'un réseau d'antennes capte les signaux émis par plusieurs émetteurs, ou lorsqu'on sur-échantillonne le signal reçu par une antenne [65]. On suppose que N signaux source sont reçus par P capteurs, après s'être propagés à travers un canal FIR. En échantillonnant les signaux reçus au débit des symboles $1/T_s$, nous obtenons le vecteur des observations \mathbf{w} tel que:

$$\mathbf{w}(n) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}(n-k) \mathbf{s}(k) + \mathbf{b}(n) \quad (2.4)$$

où $\mathbf{w}(n) = [w_1(n), \dots, w_P(n)]^T$ est le vecteur des P observations, $\mathbf{s}(k) = [s_1(k), \dots, s_N(k)]^T$ le vecteur des N sources, $\mathbf{b}(k)$ le vecteur bruit, et $\mathbf{C}(k)|_{k=0, \dots, K-1}$ la suite des K matrices $P \times N$ de la réponse impulsionnelle du canal. Chaque matrice $\mathbf{C}(k)$ est constituée des éléments $c_{ij}(k)$ correspondant à la réponse impulsionnelle liant le capteur i et la source j à l'instant k . La matrice de transfert du canal est alors:

$$\mathbf{C}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}(k) z^{-k}. \quad (2.5)$$

Nous pouvons voir sur la figure 2.5 les sources s_i filtrées par le canal $\mathbf{C}(z)$ ainsi que les

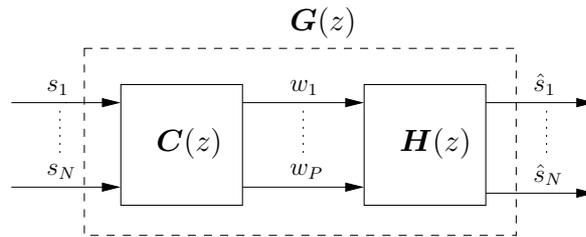


FIG. 2.5 – Modèle MIMO

observations w_i égalisées par $\mathbf{H}(z)$. Nous obtenons ainsi la $m^{\text{ème}}$ sortie du système:

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^P h_{mi}(l) w_i(n-l) \quad (2.6)$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^P \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=1}^N h_{mi}(l) c_{ij}(k) s_j(n-l-k). \quad (2.7)$$

L'égaliseur \mathbf{H} est choisi invariant dans le temps et FIR de longueur L . Sa matrice de transfert est notée

$$\mathbf{H}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}(l)z^{-l}. \quad (2.8)$$

Soit $\mathbf{G}(z)$ la matrice de transfert globale du système composé du canal et de l'égaliseur comme indiqué dans la figure 2.5, \mathbf{G} vérifie

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{C}(z), \quad (2.9)$$

où la matrice de transfert $\mathbf{G}(z)$ est définie par:

$$\mathbf{G}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau} \mathbf{G}(\tau)z^{-\tau}. \quad (2.10)$$

Nous obtenons ainsi la relation entre les entrées et les sorties du système global:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \sum_{m=0}^{K+L} \mathbf{G}(m)\mathbf{s}(n-m). \quad (2.11)$$

2.3 Problématique et hypothèses

2.3.1 Problématique de l'égalisation aveugle

Les méthodes *aveugles* de séparation de sources et d'égalisation ont le même objectif: séparer les contributions individuelles de chacune des sources reçues par un réseau de capteurs afin de restituer l'information véhiculée par chacune d'entre elles. Le terme *aveugle* signifie que l'information est restituée à partir de la seule mesure des mélanges bruités, mais avec peu de connaissance sur les signaux émis et sur le canal de propagation. Par exemple, les modulations employées sont inconnues dans les chapitres 3 et 4 (algorithmes PAJOD et PAFA), mais pas dans le chapitre 5 (algorithme APF). Cependant, la période symbole est supposée connue dans chacun de ces cas. L'expression *égalisation aveugle* est souvent associée à celle de *déconvolution aveugle* qui est l'action d'inverser le filtre décrivant le système. Ce dernier pouvant être à minimum de phase (tous les zéros à l'intérieur du cercle unité), à maximum de phase (tous les zéros à l'extérieur), ou à phase mixte (des zéros à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité). On dit de ces deux derniers filtres qu'ils sont à phase non-minimale. La difficulté de l'égalisation provient de l'inversion des systèmes à phase non-minimale. En effet, pour ces filtres, les zéros situés à l'extérieur du cercle unité deviennent après inversion des pôles situés eux aussi à l'extérieur du cercle unité. Dans ce cas pour les systèmes SISO, l'inverse du filtre est instable et le système devient irréalisable. L'approche utilisée pour égaliser un système dépend du modèle utilisé:

- pour un système SISO IIR ayant pour fonction de transfert:

$$c(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad (2.12)$$

l'égaliseur parfait est le filtre inverse de réponse impulsionnelle $h_{ZF}(z) = 1/c(z)$ si celui-ci est stable et causal [45]. Cet inverse est causal et stable s'il y a autant de pôles que de zéros dans $c(z)$ et si les pôles et les zéros sont dans le cercle unité.

- pour un système MIMO, on parle de *séparation de sources* car le canal mélange les signaux entre eux. Pour un canal FIR, la matrice de transfert est polynomiale. Si cette matrice est *unimodulaire*, c'est-à-dire carrée de rang plein pour tout z , alors le meilleur égaliseur en l'absence de bruit est l'inverse de cette matrice de transfert. La question de stabilité ne se pose pas puisque cet inverse est polynomial et donc stable. En effet, si $\mathbf{C}(z)$ est carrée polynomiale, alors $\mathbf{C}^{-1}(z) = \alpha \mathbf{H}(z)$, où $\mathbf{H}(z)$ est polynomiale. On considère alors que le coefficient α fait parti des indéterminations de l'égalisation.

2.3.2 Indétermination de l'égaliseur

Modèle SISO

Pour des systèmes SISO, le signal estimé en sortie de l'égaliseur est retardé et amplifié d'un facteur λ par rapport au signal d'entrée s . On peut dire que \mathbf{g} appartient à l'ensemble des filtres triviaux³, si il est de la forme:

$$\mathbf{g} = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{d-1}, \lambda, \underbrace{0, \dots, 0}_{L+K-1-d} \right] \quad (2.13)$$

où d est le retard observé en sortie. On estime ainsi $\hat{s}(n) = \lambda s(n-d)$.

Modèle MIMO

Les méthodes de séparation de sources cherchent à produire une estimation du vecteur source. Ceci ne peut se faire qu'à un facteur d'échelle et une permutation près. En effet, les signaux estimés peuvent être réorganisés par une matrice de permutation \mathbf{P} , et retardés par un filtre diagonal $\mathbf{\Lambda}(z)$, par rapport aux signaux initialement émis sans que cela n'affecte leur indépendance. Le problème consiste donc à déterminer le filtre $\mathbf{G}(z)$ tel que

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{P}[\mathbf{\Lambda} \star \mathbf{s}](n) = [\mathbf{G} \star \mathbf{s}](n) \quad (2.14)$$

où $\hat{\mathbf{s}}(n) = [\hat{s}_1(n), \hat{s}_2(n), \dots, \hat{s}_N(n)]^T$ est le vecteur des N sources estimées. Nous avons ainsi le $i^{\text{ème}}$ signal émis qui est reçu à la $j^{\text{ème}}$ position dans le vecteur $\hat{\mathbf{s}}$ avec un retard τ et un déphasage θ : $\hat{s}_j = s_i(k - \tau)e^{j\theta}$. Si la source $\mathbf{s}(n)$ est une séquence i.i.d. issue d'un processus non gaussien, $\mathbf{\Lambda}(z)$ contient uniquement des retards purs correspondant à des entiers multiples de la période d'échantillonnage, à des facteurs complexes près. Les éléments diagonaux de $\mathbf{\Lambda}(z)$ sont alors de la forme γz^k , avec $k \in \mathbb{Z}$ et $|\gamma| = 1$.

En utilisant (2.9), nous obtenons:

$$\mathbf{H}(z)\mathbf{C}(z) = \mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}. \quad (2.15)$$

3. tel que $\lambda \in \mathcal{T}$. Voir définition 2.6.1

Toutes les sources interférantes sont considérées comme du bruit, de sorte que l'égaliseur doit séparer uniquement les N signaux d'origine. Les étapes permettant d'égaliser le système sont:

1. rejeter le bruit et les interférences,
2. compenser les effets du canal de propagation,
3. séparer les contributions des différentes sources d'intérêt.

2.3.3 Les hypothèses

La séparation de sources repose sur certaines hypothèses concernant les sources et les canaux. Voici une liste de toutes les hypothèses qui seront utilisées à travers cette thèse.

Hypothèses sur les sources $\mathbf{s}(n)$

- S1.** Les entrées $s_i(n), \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall n \in \mathbb{N}$, sont des processus aléatoires *i.i.d.* centrés et de variance égale à 1.
- S2.** Le vecteur $\mathbf{s}(n)$ est stationnaire jusqu'à l'ordre r considéré, $r \geq 3$, ainsi $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, les cumulants⁴ marginaux d'ordre r :

$$C_p^{q, s_i}[\underbrace{i, \dots, i}_r; \underbrace{0, \dots, 0}_r] = \text{Cum}(\underbrace{s_i(n), \dots, s_i(n)}_{p \text{ termes}}, \underbrace{s_i^*(n), \dots, s_i^*(n)}_{q=r-p \text{ termes}}) \quad (2.16)$$

ne dépendent pas de n .

- S3.** Une source au plus possède un cumulant d'ordre r nul.
- S4.** Les sources ont des distributions discrètes (ex: M-PSK, GMSK, QAM16).
- S5.** Les sources sont blanches à l'ordre 2.
- S6.** Les sources sont de variance unité. Avec l'hypothèse **S5**, cette condition nous donne une matrice spectrale égale à \mathbf{I}_N (spectre constant et égale à 1).
- S7.** Les sources \mathbf{s} appartiennent à un alphabet fini \mathcal{A} caractérisé par les d racines complexes distinctes du polynôme $Q(s(n)) = 0$, d étant le nombre de symboles possibles dans la constellation.

Hypothèses sur les observations $\mathbf{w}(n)$

- O1.** Toutes les observations w_i sont de variance unité.
- O2.** Le vecteur des observations $\mathbf{w}(n)$ est blanc spatialement et temporellement à l'ordre 2: $\mathbf{E}[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)^H] = \mathbf{I}$.

4. voir définition 2.5.4 page 39

Lorsque **O2**, **S5** et **S6** sont satisfaites, la matrice de transfert du canal vérifie $\mathbf{C}(z)\mathbf{C}^H(1/z^*) = \mathbf{I}$, ce qui implique en particulier que les lignes de $\mathbf{C}(z)$ sont *normalisées*⁵.

Hypothèses sur les filtres

- F1.** Les filtres \mathbf{C} (canal), \mathbf{H} (égaliseur) et \mathbf{G} (global) sont invariants dans le temps.
- F2.** La matrice carrée $\mathbf{C}(z)$ est unimodulaire. En particulier, si $\mathbf{C}(z)$ est FIR, alors l'inverse est FIR.
- F3.** Le filtre $\mathbf{C}(z)$ est FIR de longueur connue K .
- F4.** La fonction de transfert du canal $\mathbf{C}(z)$ vérifie $\mathbf{C}^H(1/z^*)\mathbf{C}(z) = \mathbf{I}$, c'est-à-dire qu'elle est *para-unitaire* (voir section 2.4 ci-après).
- F5.** La fonction de transfert du système global $\mathbf{G}(z)$ est para-unitaire.

Notons qu'il est toujours possible de blanchir les observations $\mathbf{w}(n)$ en utilisant un filtre qui factorise la densité spectrale de puissance d'ordre deux⁶. Les hypothèses **O2** et donc **F4** sont ainsi vérifiées. Les filtres para-unitaires peuvent donc être obtenus par une standardisation spatio-temporelle des observations.

De même, si les **F4** et **O2** sont vérifiées, alors $\mathbf{H}(z)$ et donc $\mathbf{G}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{C}(z)$ sont para-unitaires (**F5**). Il est alors possible d'écrire:

$$\mathbf{H}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{C}^H(1/z^*)\mathbf{H}^H(1/z^*) = \mathbf{I}_N. \quad (2.17)$$

Hypothèses sur le bruit $\mathbf{b}(n)$

- B1.** Le bruit $\mathbf{b}(n)$ suit une distribution gaussienne.
- B2.** Le bruit $\mathbf{b}(n)$ est temporellement blanc.
- B3.** Le bruit $\mathbf{b}(n)$ est de covariance $\mathbf{R}_b = \mathbf{E}[\mathbf{b}(n)\mathbf{b}(n)^H]$.

2.4 Les matrices para-unitaires

Nous rappelons dans ce paragraphe la définition d'une matrice para-unitaire et nous détaillons les propriétés vérifiées par de telles matrices. Ces propriétés sont utilisées dans les chapitres 3 et 4 où l'on suppose que les matrices de transfert du canal sont para-unitaires. Dans ce paragraphe, l'élément à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{H} est noté h_{ij} ou $[\mathbf{H}]_{i,j}$. Les preuves des propriétés sont toutes données dans l'annexe B.

5. c'est-à-dire: $\forall i \in [1,P], \forall j \in [1,N], \sum_{k=0}^{K-1} C_{ij}^2(k) = 1$

6. c'est à dire un pré-blanchiment classique des observations [63] [43]

Définition 2.4.1 (Para-unitarité). Soit une matrice rationnelle $\mathbf{H}(z) \in \mathbb{C}(z)^{N \times N}$, $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire si [74, p. 288]:

$$\mathbf{H}^H(1/z^*)\mathbf{H}(z) = \mathbf{I}_N \quad (2.18)$$

où $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice identité de taille $N \times N$.

On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes:

Propriété 2.4.1 Soient $\mathbf{h}_{:,j}(z)$ les colonnes de $\mathbf{H}(z)$:

$$\mathbf{h}_{:,i}^H(1/z^*)\mathbf{h}_{:,j}(z) = \delta_{ij}$$

Propriété 2.4.2 Soit $\mathbf{H}(z) = \sum_m \mathbf{H}(m)z^{-m}$, si $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire alors les $\mathbf{H}(m)$ vérifient:

$$\sum_m \mathbf{H}^H(m)\mathbf{H}(m-l) = \delta_l \mathbf{I}$$

Corollaire 2.4.1 Dans le cas d'une matrice FIR $\mathbf{H}(z)$ de longueur L , les matrices $\mathbf{H}(0)$ et $\mathbf{H}(L-1)$ sont singulières.

Propriété 2.4.3 Les coefficients des matrices de la réponse impulsionnelle vérifient

$$\sum_m \sum_k h_{ki}^*(m)h_{kj}(m-l) = \delta_{ij} \delta_l \quad (2.19)$$

Remarquons que dans le cas de la déconvolution, ce qui nous intéresse c'est la transformée en z de la fonction d'autocorrélation des sorties du système global (canal + égaliseur): $\mathbf{R}_{\hat{s}}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{R}_s(z)\mathbf{G}^H(1/z^*)$, les sources étant supposée i.i.d. et mutuellement indépendantes, $\mathbf{R}_s(z) = \mathbf{I}$ et donc la fonction $\mathbf{R}_{\hat{s}}(z)$ est telle que $\mathbf{R}_{\hat{s}}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{G}^H(1/z^*)$ dont on voudrait après égalisation qu'elle soit égale à la matrice identité. Ce ne sont donc pas des matrices para-unitaires si on suit la définition précédente (le produit n'est pas dans le bon ordre). Heureusement dans le cas carré (autant de sources que de sorties de l'égaliseur), on peut se ramener au cas des matrices para-unitaires.

Propriété 2.4.4 Si $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire et carrée alors $\mathbf{H}^H(1/z^*)$, $\mathbf{H}^H(z)$ et $\mathbf{H}^H(z^*)$ sont également para-unitaires.

Corollaire 2.4.2 Si $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire et carrée, les coefficients des matrices de la réponse impulsionnelle vérifient

$$\sum_m \sum_k h_{ik}^*(m)h_{jk}(m-l) = \delta_{ij} \delta_l \quad (2.20)$$

Propriété 2.4.5 La somme (sur l'indice temps) des colonnes des $\mathbf{H}(m)$ est normée, soit en notant $\mathbf{h}_{:,j}(m)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{H}(m)$:

$$\sum_m \|\mathbf{h}_{:,j}(m)\|^2 = 1 \quad \forall j \quad (2.21)$$

Propriété 2.4.6 Avec les mêmes notations que 2.4.5, on a "orthogonalité" des colonnes des $\mathbf{H}(m)$ en sommant sur le temps:

$$\sum_m \mathbf{h}_{:,i}^H(m) \mathbf{h}_{:,j}(m) = \delta_{ij} \quad (2.22)$$

Corollaire 2.4.3 Si $\mathbf{H}(z)$ est une matrice para-unitaire et carrée, les vecteurs ligne des matrices de la réponse impulsionnelle associée, soit $\mathbf{h}_{i,:}(m)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{H}(m)$, vérifient:

$$\sum_m \|\mathbf{h}_{i,:}(m)\|^2 = 1 \quad \forall i \quad (2.23)$$

$$\sum_m \mathbf{h}_{i,:}(m) \mathbf{h}_{j,:}^H(m) = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad (2.24)$$

Propriété 2.4.7 Une matrice para-unitaire triangulaire est nécessairement diagonale.

Propriété 2.4.8 Le déterminant d'une matrice para-unitaire carrée est un filtre passe-tout.

Corollaire 2.4.4 Si $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire carrée FIR (matrice polynomiale), alors on a nécessairement $\det \mathbf{H}(z) = az^{-k}$, $k > 0$, $|a| = 1$.

Une matrice polynomiale carrée ne comporte pas d'autre zéro que ceux à l'infini.

Cas des matrices 2×2 réelles

Propriété 2.4.9 Toute matrice polynomiale para-unitaire $\mathbf{H}(z) \in \mathbb{R}[z]^{2 \times 2}$ peut se factoriser en [74]:

$$\mathbf{H}(z) = \alpha \mathbf{Q}_N \cdot \mathbf{Z}(z) \cdot \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{Z}(z) \dots \mathbf{Q}_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

où $\alpha = \pm 1$, $\mathbf{Z}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$, \mathbf{Q}_m est une matrice de Givens: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix}$, et N est le degré du déterminant de $\mathbf{H}(z)$.

Il y a donc $N + 2$ paramètres dans cette structure: $N + 1$ angles θ_m et le nombre réel α .

Cas des matrices 2×2 complexes

Nous avons étendu la factorisation de [74] au cas des matrices complexes. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 2.4.1 *Tout vecteur complexe peut s'écrire sous la forme: $\mathbf{u} = \rho e^{j\psi} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{j\varphi} \sin \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.*

Propriété 2.4.10 *Soient \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 deux vecteurs complexes non nuls tels que*

$$\mathbf{u}_i = \rho_i e^{j\psi_i} \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ e^{j\varphi_i} \sin \theta_i \end{pmatrix}, \theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}], i \in \{1, 2\}.$$

\mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont orthogonaux si et seulement si

$$\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 = 0, \quad (2.26)$$

et donc $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$ et $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi [2\pi]$.

Propriété 2.4.11 *Factorisation d'une matrice unitaire: Toute matrice unitaire 2×2 peut être décomposée en*

$$\mathbf{U} = e^{j\psi} \begin{pmatrix} \cos \theta & -e^{-j\varphi} \sin \theta \\ e^{j\varphi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Propriété 2.4.12 *Toute matrice polynomiale para-unitaire $\mathbf{H}(z) \in \mathbb{C}[z]^{2 \times 2}$ peut être factorisée en:*

$$\mathbf{H}(z) = \alpha \mathbf{Q}_N \cdot \mathbf{Z}(z) \cdot \mathbf{Q}_{N-1} \mathbf{Z}(z) \cdots \mathbf{Q}_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha_0} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

où α est un nombre complexe de module 1, $\mathbf{Z}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$, \mathbf{Q}_m est une matrice de Givens complexe: $\mathbf{Q}_m = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & e^{j\varphi_m} \sin \theta_m \\ -e^{-j\varphi_m} \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix}$, et N est le degré du déterminant de $\mathbf{H}(z)$.

2.5 Statistiques d'ordre supérieur

Nous présentons dans ce paragraphe les propriétés statistiques relatives aux signaux considérés dans ce mémoire.

2.5.1 Standardisation

Soit X une variable aléatoire, considérons la variable aléatoire \tilde{X} associée à X par la relation linéaire $\tilde{X} = \mathbf{T}X$. On dit alors de \tilde{X} qu'elle est *standardisée* ou *blanchie spatialement* lorsque la matrice \mathbf{T} est choisie de façon à ce que la covariance circulaire vérifie $\mathbf{E}[\tilde{X}\tilde{X}^H] = \mathbf{I}$ [49]. Par exemple, si on note \mathbf{R}_X la matrice de covariance circulaire $\mathbf{E}[XX^H]$, alors \mathbf{T}^{-1} peut être une racine carrée de \mathbf{R}_X si celle-ci est de rang plein. Il y a donc une infinité de matrices \mathbf{T} qui vérifient cette relation. En pratique, la matrice des données blanchies $\tilde{\mathbf{X}}$ est obtenue en prenant la matrice des vecteurs singuliers à droite de la matrice des données \mathbf{X} , associée aux valeurs singulières non nulles [12]. Plus précisément, on note la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice des données \mathbf{X} sous la forme

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}_0\tilde{\mathbf{X}} \quad (2.29)$$

où $\tilde{\mathbf{X}}$ est de rang plein r , $\mathbf{\Sigma}_0$ une matrice diagonale positive de taille $K \times r$, et \mathbf{V} la matrice des vecteurs singuliers à gauche. Ainsi, il est possible de choisir la matrice \mathbf{T} telle que

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}_0^+ \mathbf{V}^H \quad (2.30)$$

où $\mathbf{\Sigma}_0^+$ est la pseudo-inverse [37] de la matrice diagonale rectangulaire $\mathbf{\Sigma}_0$.

Si les observations sont bruitées et si la covariance du bruit \mathbf{R}_b est connue, on préfère construire la matrice \mathbf{T} à partir de la covariance non bruitée $\mathbf{R}_{\tilde{x}} = \mathbf{R}_w - \mathbf{R}_b$ et non à partir de \mathbf{R}_w . Dans ce cas, \tilde{x} est une estimation de la sortie non-bruitée du canal.

2.5.2 Fonctions caractéristiques

Nous prendrons l'exemple d'une variable aléatoire réelle nommée X . Nous appellerons $F_X(x_0)$ la fonction de répartition de X au point x_0 . $F_X(x_0)$ définit la probabilité que X se trouve dans l'intervalle $]-\infty, x_0]$:

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0). \quad (2.31)$$

Une variable aléatoire X est entièrement identifiée par sa densité de probabilité que nous notons $p_X(x_0)$ lorsque celle-ci est prise au point x_0 . Par définition la densité de probabilité correspond à la dérivée de la fonction de répartition au point x_0 :

$$p_X(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{dF_X(x_0)}{dx} \right|_{X=x_0}. \quad (2.32)$$

Les moments généralisés de X sont définis par:

$$\mathbf{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)dx \quad (2.33)$$

où $g(x)$ est une fonction (polynomiale) pouvant conduire aux moments et aux cumulants. En effet, avec les fonctions exponentielles, on obtient les fonctions caractéristiques de la variable aléatoire X :

Définition 2.5.1 (Première fonction caractéristique) Pour une variable aléatoire X , la première fonction caractéristique $\Phi_X(\omega)$ est définie comme la valeur moyenne de $e^{j\omega X}$, avec $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[e^{j\omega X}]. \quad (2.34)$$

Cette première fonction caractéristique correspond au complexe conjugué de la transformée de Fourier de $p_X(x)$:

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} p_X(x) dx. \quad (2.35)$$

La première fonction caractéristique est continue en tout point et vaut 1 à l'origine. Étant donné que cette fonction caractéristique n'est pas nulle dans le voisinage autour de l'origine, nous pouvons définir son logarithme népérien, ce qui nous donne la seconde fonction caractéristique:

Définition 2.5.2 (Seconde fonction caractéristique) Pour une variable aléatoire X , la seconde fonction caractéristique $\Psi_x(\omega)$ est définie comme le logarithme népérien de la première fonction caractéristique:

$$\Psi_X(\omega) = \ln(\Phi_X(\omega)) \quad (2.36)$$

Notons que ces fonctions caractéristiques permettent de décrire complètement la variable aléatoire X . Cependant, les densités de probabilité ne sont pas facilement exploitables car il n'existe pas de relation simple liant les densités de probabilité d'entrée et de sortie d'un système. Pour pallier cette difficulté, on préfère utiliser les moments et les cumulants obtenus après le développement en série de Taylor des fonctions caractéristiques.

2.5.3 Moments et Cumulants

Moments

En posant $g(u) = X^r$ dans la définition du moment généralisé (2.33), on obtient les moments d'ordre r de la variable aléatoire X :

Définition 2.5.3 (Moment) Le moment d'ordre r d'une variable aléatoire réelle X est défini comme la valeur moyenne de la $r^{\text{ème}}$ puissance de X :

$$m_r^X \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[X^r] \quad (2.37)$$

Le moment du premier ordre (m^X) correspond à la *moyenne* et celui du deuxième ordre est appelé *variance* quand $m^X = 0$. Lorsque $m^X = 0$ et $m_2^X = 1$, on dit que la variable aléatoire X est centrée et réduite.

Les moments peuvent aussi être obtenus à partir de la première fonction caractéristique. En effet, en développant la fonction (2.35) au voisinage de 0, on obtient les coefficients de ω^r dans le développement en série de Taylor:

$$m_r^X = (-j)^r \frac{d^r \Phi_X(\omega)}{d\omega^r} \Big|_{\omega=0} \quad (2.38)$$

Dans le cas multivariable, le moment joint d'un ensemble de N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N est défini comme la valeur moyenne du produit des N variables:

$$\text{Mom}(X_1, X_2, \dots, X_N) \stackrel{\text{def}}{=} E[X_1 X_2 \dots X_N]. \quad (2.39)$$

Pour un processus stochastique $X(t)$ stationnaire jusqu'à l'ordre r , les moments d'ordre r sont définis par:

$$m_r^X(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mom}(X(t)X(t + \tau_1) \dots X(t + \tau_{r-1})). \quad (2.40)$$

Lorsque la variable aléatoire X est complexe, nous avons différentes définitions du moment d'ordre r , suivant le nombre de X et de X^* pris en compte. Le moment d'ordre r de la variable aléatoire complexe X devient:

$$M_p^{q,X} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mom}(\underbrace{X \dots X}_p \underbrace{X^* \dots X^*}_q) \quad (2.41)$$

avec la relation $p + q = r$.

Cumulants

De la même manière que pour les moments, nous pouvons définir les cumulants à partir de la seconde fonction caractéristique [49]:

Définition 2.5.4 (Cumulant) *Le cumulant d'ordre r d'une variable aléatoire réelle X est défini comme le résultat du développement en série de Taylor au voisinage de 0 de la seconde fonction caractéristique $\Psi_X(\omega)$:*

$$\text{Cum}(X^r) = (-j)^r \frac{d^r \Psi_X(\omega)}{d\omega^r} \Big|_{\omega=0} \quad (2.42)$$

De même que pour les moments, les cumulants d'ordre r d'un processus stochastique $X(t)$ stationnaire jusqu'à l'ordre r s'écrivent:

$$\mathbf{C}_r^{0,X}[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cum}(X(t + \tau_1)X(t + \tau_2) \dots X(t + \tau_r)). \quad (2.43)$$

Le cumulante joint de N variables aléatoires est noté $\text{Cum}(X_1, X_2, \dots, X_N)$, et dans le cas où ces variables sont complexe nous avons:

$$\mathbf{C}_p^{q,X}[\mathbf{i}; \boldsymbol{\tau}] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cum}(\underbrace{X_{i_1}(t + \tau_1) \dots X_{i_p}(t + \tau_p)}_p \underbrace{X_{i_{p+1}}^*(t + \tau_{p+1}) \dots X_N^*(t + \tau_N)}_{q=N-p}) \quad (2.44)$$

où $\mathbf{i} = [i_1, \dots, i_N]$ et $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_N]$.

Les cumulants sont pour les HOS ce que l'autocorrélation est au SOS. Les cumulants d'ordre 3 et 4 sont souvent utilisés pour l'estimation des paramètres de canaux à moyenne ajustée (MA), mais une grande quantité d'information est nécessaire afin d'estimer convenablement les cumulants à partir des observations.

Par exemple le cumulante du premier ordre de la variable aléatoire X est égale à la moyenne m^X , et le moment d'ordre deux correspond à la variance $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[|X - m^X|^2]$.

Précisons que la corrélation croisée entre les variables aléatoires complexes X et Y est définie par $\mathbb{E}[(X - m^X)(Y - m^Y)^H]$. Ainsi, nous obtenons les cumulants standardisés d'ordre quatre:

Définition 2.5.5 (Kurtosis) Pour une variable aléatoire centrée X , le kurtosis κ_X est défini comme le cumulante d'ordre 4 de X , normalisé par sa variance $\text{Var}(X)$, par exemple:

$$\kappa_X = \frac{\text{Cum}_2^{2,X}}{\text{Var}(X)^2} = \frac{\mathbb{E}[|X|^4] - |\mathbb{E}[X^2]|^2}{\mathbb{E}[|X|^2]^2} - 2. \quad (2.45)$$

Relations entre moments et cumulants

Les moments et les cumulants sont des représentations différentes d'une variable aléatoire. Le choix de l'utilisation de l'un ou de l'autre dans les calculs se fera pour une question de simplicité de calcul. Il existe bien évidemment des liens entre les moments et les cumulants. La relation générale entre les moments et les cumulants d'ordre r , pour un ensemble de variables X_1, X_2, \dots, X_r est donnée par:

$$\text{Cum}(X_1, \dots, X_r) = \sum (-1)^{k-1} (k-1)! \mathbb{E} \left[\prod_{i \in \mathcal{A}_1} X_i \right] \mathbb{E} \left[\prod_{j \in \mathcal{A}_2} X_j \right] \dots \mathbb{E} \left[\prod_{k \in \mathcal{A}_p} X_k \right] \quad (2.46)$$

où la sommation s'étend sur tous les ensembles $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p : 1 \leq p \leq r\}$ formant une partition de $\{1, 2, \dots, r\}$, et k le nombre d'éléments composant la partition. Ainsi pour des

variables aléatoires réelles de moyennes nulles, le cumulante d'ordre 4 s'écrit à partir des moments:

$$\begin{aligned} \text{Cum}(X_1, X_2, X_3, X_4) &= \mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] - \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] - \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] \\ &\quad - \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Notons par ailleurs la relation directe entre les moments et les cumulants du second ordre:

$$C_1^{1,X} = \tilde{m}_2^X \stackrel{\text{def}}{=} m_2^X - |m_1^X|^2. \quad (2.48)$$

Ainsi lorsque la variable aléatoire est centrée, le cumulante d'ordre 2 de X est égal au moment d'ordre 2.

Remarque 1. Loi Gaussienne. Les variables aléatoires gaussiennes sont entièrement décrites par les statistiques du second ordre, les cumulants d'ordre supérieur à 2 étant nuls. En communications numériques, le bruit est généralement assimilé à un processus gaussien, c'est pourquoi on utilise les cumulants d'ordre supérieur à 2 pour séparer les signaux bruités.

Propriétés des moments et des cumulants

Nous reprenons ci-dessous les propriétés les plus utilisées en égalisation aveugle et dont nous avons besoin dans la suite de ce mémoire. Toutes les preuves sont basées sur les définitions des moments et des cumulants.

Considérons N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N , nous avons:

Propriété 2.5.1 (Echelle) Si X_1, X_2, \dots, X_N sont multipliées par des constantes a_1, a_2, \dots, a_N , alors nous avons:

$$\text{Mom}(a_1 X_1, a_2 X_2, \dots, a_N X_N) = \left(\prod_{i=1}^N a_i \right) \text{Mom}(X_1, X_2, \dots, X_N), \quad (2.49)$$

$$\text{Cum}(a_1 X_1, a_2 X_2, \dots, a_N X_N) = \left(\prod_{i=1}^N a_i \right) \text{Cum}(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (2.50)$$

Propriété 2.5.2 (Somme) Les moments et cumulants d'une somme sont la somme des moments et cumulants:

$$\text{Mom}(X_1 + Y_1, X_2, \dots, X_N) = \text{Mom}(X_1, X_2, \dots, X_N) + \text{Mom}(Y_1, X_2, \dots, X_N), \quad (2.51)$$

$$\text{Cum}(X_1 + Y_1, X_2, \dots, X_N) = \text{Cum}(X_1, X_2, \dots, X_N) + \text{Cum}(Y_1, X_2, \dots, X_N), \quad (2.52)$$

avec Y_1 une variable aléatoire réelle.

Propriété 2.5.3 (Multilinéarité) Soit deux variables aléatoires réelles X et \hat{X} liées telles que $\hat{X} = \mathbf{A}X$, avec une matrice quelconque $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{J \times N}$. Les moments et cumulants de \hat{X} sont des fonctions linéaires de chacune des composantes A_{ij} de \mathbf{A} . Par exemple à l'ordre 4 :

$$\text{Mom}(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k, \hat{X}_l) = \sum_{a,b,c,d} A_{ia}A_{jb}A_{kc}A_{ld} \text{Mom}(X_a, X_b, X_c, X_d) \quad (2.53)$$

$$\text{Cum}(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k, \hat{X}_l) = \sum_{a,b,c,d} A_{ia}A_{jb}A_{kc}A_{ld} \text{Cum}(X_a, X_b, X_c, X_d) \quad (2.54)$$

Pour des vecteurs aléatoires complexes, \mathbf{A} doit être hermitienne⁷ si $q \neq 0$ dans (2.44).

La propriété de multilinéarité se déduit des propriétés (2.5.1) et (2.5.2).

Propriété 2.5.4 (Parité) Si X est une variable aléatoire réelle dont la densité de probabilité $p_X(x)$ est paire⁸, alors les moments et cumulants impairs sont nuls. Il en est de même pour une variable aléatoire complexe Z dont la densité de probabilité $p_Z(z)$ est symétrique par rapport au point des origines.

Propriété 2.5.5 (Translation) Pour une constante a quelconque, nous avons :

$$\text{Mom}(a + X_1, X_2, \dots, X_N) = a \text{Mom}(X_2, \dots, X_N) + \text{Mom}(X_1, X_2, \dots, X_N), \quad (2.55)$$

$$\text{Cum}(a + X_1, X_2, \dots, X_N) = a \text{Cum}(X_2, \dots, X_N) + \text{Cum}(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (2.56)$$

Les cumulants d'ordres supérieurs à 1 ne dépendent pas de la moyenne de la variable aléatoire, ce qui n'est pas le cas pour les moments. La translation $\hat{X} = X_0 + \mathbf{A}X$, où X_0 est une constante, provoque un déphasage de la première fonction caractéristique, et une translation de la seconde fonction caractéristique. Cependant cette translation n'affecte que la moyenne.

Propriété 2.5.6 (Circularité) Une variable aléatoire X est dite circulaire si $\forall \theta \in \mathbb{R}$, X et $Xe^{j\theta}$ ont les mêmes propriétés statistiques. Ceci implique que, pour $1 \leq i_k, j_k \leq K$ et pour $q \neq p$:

$$\text{Cum}(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}, X_{j_1}^*, \dots, X_{j_q}^*) = 0 \quad (2.57)$$

et

$$\text{E}(X_{i_1} \dots X_{i_p} X_{j_1}^* \dots X_{j_q}^*) = 0 \quad (2.58)$$

Le vecteur aléatoire X est dit circulaire à l'ordre r si la propriété précédente est vérifiée pour tous les indices tels que $p + q = r$.

7. égale à sa complexe conjuguée: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$

8. symétrique suivant l'axe des ordonnées

Nous avons vu que les variables aléatoires gaussiennes sont entièrement caractérisées par leurs moments d'ordres 1 et 2, et que la notion de circularité se réduisait à la circularité à l'ordre 2. On montre en effet qu'une variable aléatoire gaussienne est circulaire si et seulement si $E[XX^T] = 0$.

Propriété 2.5.7 (Indépendance) *Pour N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N indépendantes entre elles, nous avons:*

$$\text{Cum}(X_1, X_2, \dots, X_N) = 0 \quad (2.59)$$

Cette propriété n'est pas vraie en règle générale pour les moments. Une conséquence de la propriété 2.5.7 est que tout cumulants d'ordre supérieur d'un vecteur aléatoire, constitué de composantes mutuellement indépendantes, est un tenseur diagonal. Cette condition algébrique est la base des méthodes d'*Analyse en Composantes Indépendantes (ICA)*. Une autre conséquence est que les cumulants d'un processus aléatoire i.i.d. $X(t)$ s'écrivent sous la forme:

$$C_N^{0,X}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = C_N^{\bar{0},X} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \dots \delta(\tau_N), \quad (2.60)$$

où $C_N^{\bar{0},X}$ est le cumulants d'ordre N de $X(t)$ à un instant quelconque t_0 , et $\delta(t)$ le symbole de Kronecker⁹.

2.5.4 Statistiques du second ordre

Pour un vecteur \mathbf{w} , nous définissons la corrélation circulaire par

$$\mathbf{R}_w^c(n, \tau) = E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n + \tau)^H], \quad (2.61)$$

et la corrélation non circulaire

$$\mathbf{R}_w(n, \tau) = E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n + \tau)^T]. \quad (2.62)$$

Dans le cas stationnaire, ces matrices ne dépendent pas de l'instant n . Par ailleurs, la plupart des égaliseurs utilisant les HOS ne se basent que sur l'information contenue dans les matrices de corrélation des données pour $\tau = 0$. En notant \mathbf{R}_w la matrice de corrélation $\mathbf{R}_w(\tau = 0)$, nous obtenons d'après (2.4) les matrices de covariance des observations à partir de celles du bruit et du signal:

$$\mathbf{R}_w^c = \mathbf{C}\mathbf{R}_s^c\mathbf{C}^H + \mathbf{R}_b^c \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_s^c + \mathbf{R}_b^c, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{R}_w = \mathbf{C}\mathbf{R}_s\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_b \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_b. \quad (2.64)$$

où \mathbf{C} est une matrice Toeplitz formée à partir de la matrice de transfert du canal. Pour des observations circulaires, la corrélation non circulaire est nulle ($\mathbf{R}_w = 0$). Cependant, lorsque des sources discrètes sont échantillonnées à la période symbole, les processus sont stationnaires à l'ordre deux (\mathbf{R}_w^c ne dépend pas de n) et la non circularité est préservée ($\mathbf{R}_w \neq 0$) [45]. Ce qui se produit pour les signaux BPSK.

9. $\delta(\tau) = 1$ pour $t = \tau$ et $\delta(\tau) = 0$ ailleurs

2.5.5 Statistiques d'ordre 4

D'après (2.58), nous pouvons dire que les cumulants $C_4^{0,\mathbf{w}}$ et $C_3^{1,\mathbf{w}}$ sont nuls lorsque des variables aléatoires sont circulaires. Dans ces conditions, les séparateurs utilisent les cumulants circulaires $C_2^{2,\mathbf{w}}$.

Définition 2.5.6 (Quadricovariance) *La quadricovariance d'un vecteur complexe \mathbf{s} est le cumulants d'ordre 4:*

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{s}}^c = C_2^{2,\mathbf{s}}[i,j,k,l; \mathbf{0}] = \text{Cum}(s_i(0), s_j(0), s_k^*(0), s_l^*(0)). \quad (2.65)$$

Ainsi, en rangeant convenablement les valeurs des cumulants observés, nous obtenons la quadricovariance des observations à partir de (2.1) sous forme de matrice hermitienne:

$$\mathbf{Q}_w = [\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^*] \mathbf{Q}_{\mathbf{s}}^c [\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^*]^H + \mathbf{Q}_b \quad (2.66)$$

où \otimes est le produit de Kronecker, $\mathbf{Q}_{\mathbf{s}}^c$ la matrice de covariance circulaire de $\mathbf{s}(n)$ et \mathbf{Q}_b celle de $\mathbf{b}(n)$. Le placement des valeurs des cumulants dans la matrice de covariance en fonction des indices $\{i,j,k,l\}$ permet de conserver une symétrie quand les i et j représentent les indices des lignes, et k et l les indices des colonnes. Rappelons que la matrice de quadricovariance ne dépend pas de l'instant n , et que pour un bruit gaussien \mathbf{Q}_b est nulle.

2.6 Les critères de contraste

Cette section définit les *contrastes*, c'est à dire les critères d'optimisation pour la séparation aveugle de sources. Deux définitions permettent de présenter les contrastes. La première concerne l'ensemble des filtres qui n'affectent pas l'indépendance des sources, point clé des méthodes de séparation aveugle de sources. La seconde rappelle les trois relations que vérifie un contraste.

Définition 2.6.1 (Filtres triviaux) *Soit un vecteur source $\mathbf{s}(n)$ issue de l'ensemble \mathcal{S} des processus sources. $\mathbf{s}(n)$ vérifie les hypothèses **S1**, **S2** et **S3**. On définit l'ensemble \mathcal{T} des filtres triviaux, comme l'ensemble contenant tous les filtres qui n'affectent pas ces hypothèses.*

En d'autres termes, \mathcal{S} reste stable si on lui applique \mathcal{T} . Par exemple, les filtres de la forme $\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}$, où \mathbf{P} est une matrice de permutation et $\mathbf{\Lambda}(z)$ une matrice diagonale, n'affectent pas l'indépendance mutuelle entre les composantes de $\mathbf{s}(n)$.

Définition 2.6.2 (Contraste) *Soit \mathcal{H} un ensemble de filtres, et soit $\mathcal{H} \cdot \mathcal{S}$ l'ensemble des processus linéaires standardisés obtenus après l'application des filtres de l'ensemble \mathcal{H} sur des processus de \mathcal{S} .*

Un critère d'optimisation $\mathcal{J}(\mathbf{H}; \mathbf{w})$ sera appelé "contraste" et sera défini sur l'égaliseur $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$, et sur les observations $\mathbf{w} \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{S}$, s'il satisfait aux trois propriétés suivantes [13]:

- **Invariance:** Le contraste ne doit pas changer sur l'ensemble des solutions possibles, c'est à dire $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{S}, \forall \mathbf{H} \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{J}(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \mathcal{J}(\mathbf{I}; \mathbf{w}), \quad (2.67)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité,

- **Domination:** Si les sources sont déjà séparées, alors tout filtre n'appartenant pas à \mathcal{T} réduit le contraste, c'est à dire si $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{S}, \forall \mathbf{H} \in \mathcal{H}$:

$$\mathcal{J}(\mathbf{H}; \mathbf{w}) \leq \mathcal{J}(\mathbf{I}; \mathbf{w}), \quad (2.68)$$

- **Discrimination:** Le maximum de contraste est atteint uniquement pour des filtres liés les uns aux autres par des filtres triviaux, c'est à dire si $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{J}(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \mathcal{J}(\mathbf{I}; \mathbf{w}), \text{ alors: } \mathbf{H} \in \mathcal{T}. \quad (2.69)$$

2.7 Les mesures de performances

Dans les chapitres 3, 4 et 5, nous comparons les performances des algorithmes pour des sources utilisant diverses modulations. Nous citons ci-dessous trois mesures permettant de comparer ces algorithmes.

2.7.1 Le taux d'erreur symboles

Soit \mathbf{s} la séquence émise et $\hat{\mathbf{s}}$ la sortie de l'égaliseur. La mesure du taux d'erreur symboles (*SER: Symbol Error Rate*) consiste à comptabiliser le nombre de symboles différents entre les séquences $\hat{\mathbf{s}}$ et \mathbf{s} . Lors de l'utilisation de signaux BPSK, le SER est assimilé au taux d'erreurs bits (*BER: Bit Error Rate*) dans la mesure ou un bit représente un symbole. La principale difficulté provient de l'indétermination inhérente au problème d'égalisation. En effet, comme nous l'avons vu dans la section 2.3.2 avec l'équation (2.15), les sorties de l'égaliseur sont retardées et peuvent être permutées. Une mise en relation entre les séquences $\hat{\mathbf{s}}$ et \mathbf{s} est alors nécessaire afin de calculer le SER. Pour cela, nous calculons les intercorrélations entre chaque entrée et chaque sortie afin de trouver les "pics" les plus significatifs. Ces derniers permettent de déterminer la matrice de permutation \mathbf{P} et la matrice des retards et des déphasages $\mathbf{\Lambda}(z)$ du système global comme indiqué en (2.14).

2.7.2 La distance entre \mathbf{G} et $\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}$

La distance entre \mathbf{G} et $\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}$ prend en compte les interférences mutuelles entre les signaux. La mesure de cette distance est proche du rapport signal sur bruit plus interférences (*SINR*):

Signal to Interference plus Noise Ratio) [9] de chaque source sur chaque sortie de l'égaliseur. Nous définissons la *distance* entre le système global théorique $\mathbf{D}(z) = \mathbf{A}(z)\mathbf{P}$ et le filtre global effectif $\mathbf{G}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{C}(z)$ comme la norme de Frobenius de la différence $\mathbf{D}(z) - \mathbf{G}(z)$.

Pour cela, on considère la fonction de transfert globale définie en (2.10) et nous disposons les matrices des coefficients de la réponse impulsionnelle $\mathbf{G}(m)$ les unes à la suite des autres dans une matrice unique de taille $N \times N(K + L - 1)$, notée \mathbb{G} :

$$\mathbb{G} = [\mathbf{G}(0), \mathbf{G}(1), \dots, \mathbf{G}(K + L - 1)] \quad (2.70)$$

A partir de \mathbb{G} il est possible de chercher le filtre $\mathbf{D}(z)$ le plus proche. Pour cela on cherche les entrées de plus grand module dans chacune des lignes de \mathbb{G} , sous la contrainte que les colonnes doivent être différentes modulo N . On peut éventuellement utiliser la méthode d'intercorrélacion évoquée précédemment.

Par exemple dans le cas de la séparation de 2 sources ($N = 2$), nous avons 2 cas possibles:

- cas 1: on cherche la colonne paire j_1 et la colonne impaire j_2 où sont situées les entrées de plus grand module de la ligne 1 et 2, que nous noterons \mathbb{G}_{1,j_1} , \mathbb{G}_{2,j_2} respectivement. On normalise ensuite la ligne 1 par \mathbb{G}_{1,j_1} et la ligne 2 par \mathbb{G}_{2,j_2} , puis on calcule la norme de Frobenius entre la matrice $\bar{\mathbb{G}}$ ainsi obtenue et la matrice \mathbb{D} , de la même taille que \mathbb{G} et remplie de zeros sauf pour $\mathbb{D}_{1,j_1} = \mathbb{D}_{2,j_2} = 1$.
- cas 2: on cherche l'indice j_1 dans les colonnes impaires et l'indice j_2 dans les colonnes paires. On normalise comme dans le cas 1 et on calcule la norme de Frobenius de la matrice obtenue.

La *distance* retenue est celle qui retourne le minimum de la norme $\epsilon(\mathbb{G}) = \|\bar{\mathbb{G}} - \mathbb{D}\|_F$, soit aussi:

$$\epsilon(\mathbb{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \underset{\mathbf{P}, \nu_1, \alpha_1, \nu_2, \alpha_2}{\text{Min}} \quad \|\mathbb{G}\mathbf{P}\text{Diag}(\nu_1 z^{\alpha_1}, \nu_2 z^{\alpha_2})\|_F \quad (2.71)$$

Chapitre 3

Algorithme PAJOD

Le présent chapitre introduit l'algorithme PAJOD (Partial Approximative JOint Diagonalization) destiné à l'égalisation de systèmes multi-utilisateurs spatio-temporels. L'originalité de cet algorithme est d'identifier la partie para-unitaire du mélange en diagonalisant approximativement et conjointement un ensemble de matrices des multi-corrélations cumulantes des observations [17]. L'hypothèse d'un blanchiment préalable des observations nous permet de considérer que le mélange est *para-unitaire*. Nous montrons que l'algorithme bloc PAJOD peut être utilisé avec trois contrastes différents, tous basés sur les cumulants d'ordre quatre des observations. Une série de simulations avec diverses tailles de blocs d'information est finalement présentée afin d'évaluer les performances de l'algorithme.

3.1 Cumulants des observations

Nous plaçons le problème dans un environnement multi-utilisateurs tel que nous l'avons décrit dans la section 2.2.2, et en tenant compte de l'aspect temporel qui subsiste lorsque les sources sont à large bande. Le modèle spatio-temporel admet les cumulants d'ordre 4 suivants:

$$C_4^{0,\hat{\mathbf{s}}}[i,i,\mathbf{j};0,0,\boldsymbol{\ell}] = \text{Cum}(\hat{s}_i(n), \hat{s}_i(n), \hat{s}_{j_1}(n - \ell_1), \hat{s}_{j_2}(n - \ell_2)) \quad (3.1)$$

$$C_3^{1,\hat{\mathbf{s}}}[i,i,\mathbf{j};0,0,\boldsymbol{\ell}] = \text{Cum}(\hat{s}_i(n), \hat{s}_i(n)^*, \hat{s}_{j_1}(n - \ell_1), \hat{s}_{j_2}(n - \ell_2)) \quad (3.2)$$

$$C_2^{2,\hat{\mathbf{s}}}[i,i,\mathbf{j};0,0,\boldsymbol{\ell}] = \text{Cum}(\hat{s}_i(n), \hat{s}_i(n)^*, \hat{s}_{j_1}(n - \ell_1), \hat{s}_{j_2}(n - \ell_2)^*) \quad (3.3)$$

avec $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$ et $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2)$. En posant l'ensemble des indices $\mathbb{J} = [1, N]$ ainsi que l'ensemble des retards $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^q$, nous avons $\mathbf{j} \in \mathbb{J}^2$ et $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{L}^2$.

Nous pouvons remarquer que la notation (3.1) n'utilise pas les conjugués des observations. On préfère donc utiliser les cumulants définis par (3.1) pour des signaux réels, obtenus par

exemple avec une modulation BPSK. Les contrastes (3.2) et (3.3) sont quant à eux utilisés avec des signaux complexes.

3.2 Signaux réels

Nous présentons dans ce paragraphe un contraste permettant d'égaliser aveuglément un système MIMO convolutif à l'aide des cumulants des observations défini en (3.1). Par exemple, pour des signaux modulés BPSK ou PAM, les alphabets \mathcal{A} de ces signaux appartiennent à l'ensemble des réels.

3.2.1 Contraste \mathcal{J}_4^0

Les cumulants définis en (3.1) permettent de définir le contraste¹ suivant afin d'égaliser une système MIMO:

Proposition 3.2.1 *La fonction*

$$\mathcal{J}_4^0(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathbb{J}} \sum_{\ell \in \mathbb{L}} |C_4^{0, \hat{\mathbf{s}}} [i, i, j; 0, 0, \ell]|^2 \quad (3.4)$$

est un contraste pour les observations $\mathbf{w} \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{S}$ standardisées au 2^{ème} ordre, et pour le filtre $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$.

Preuve. Pour montrer que (3.4) est un contraste, nous devons montrer que les 3 propriétés énoncées dans la définition 2.6.2 sont respectées. Pour cela, commençons par réécrire la relation entre l'entrée et la sortie du système global \mathbf{G} exprimée en (2.11, page 30):

$$\hat{s}_i(n) = \sum_{q,m} G_{iq}(m) s_q(n-m), \quad (3.5)$$

où $G_{iq}(m)$ correspond à l'élément de la matrice $\mathbf{G}(m)$ liant l'entrée i à la sortie q .

La propriété de multilinéarité des cumulants présentée par la définition 2.5.3 (page 42) permet de développer le contraste (3.4):

$$\mathcal{J}_4^0 = \sum_i \sum_{j_1, j_2} \sum_{\ell_1, \ell_2} \left| \sum_{q,m} \sum_{q',m'} \sum_{k_1, p_1} \sum_{k_2, p_2} G_{iq}(m) G_{iq'}(m') G_{j_1 k_1}(p_1) G_{j_2 k_2}(p_2) \right. \\ \left. \text{Cum}[s_q(n-m), s_{q'}(n-m'), s_{k_1}(n-\ell_1-p_1), s_{k_2}(n-\ell_2-p_2)] \right|^2. \quad (3.6)$$

1. définition 2.6.2 page 44

Avec l'hypothèse **S1**, nous considérons les sources $s_i(n)$ *i.i.d.*. Ainsi, seuls les cumulants obtenus pour $m = m' = \ell_1 + p_1 = \ell_2 + p_2$ ne sont pas nuls, et comme les $s_i(n)$ sont mutuellement indépendants, les cumulants non nuls sont aussi obtenus lorsque $q = q' = k_1 = k_2$. Nous pouvons alors simplifier l'expression (3.6) en supprimant les termes nuls et en développant le module au carré, ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4^0 &= \sum_i \sum_{j_1, j_2} \sum_{\ell_1, \ell_2} \sum_{q, m} \sum_{q', m'} G_{iq}^2(m) G_{iq'}^{2*}(m') G_{j_1q}(m - \ell_1) G_{j_1q'}^*(m' - \ell_1) \\ &\quad G_{j_2q}(m - \ell_2) G_{j_2q'}^*(m' - \ell_2) \mathcal{C}_4^{0, s_q} \left(\mathcal{C}_4^{0, s_q'} \right)^* \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les hypothèses **F4** et **F5** permettent de dire que le filtre global est standardisé², car dans ce cas $\mathbf{G} \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{S}$. Ceci se traduit par la relation:

$$\sum_{j, \ell} G_{jq}(k - \ell) G_{jq'}^*(k' - \ell) = \delta_{qq'} \delta_{kk'}, \quad (3.8)$$

où δ est le symbole de Kronecker défini tel que:

$$\delta_{kk'} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = k', \\ 0 & \text{'' } k \neq k'. \end{cases} \quad (3.9)$$

Si nous appliquons cette propriété aux paires d'indices (j_1, ℓ_1) et (j_2, ℓ_2) , ceci nous donne:

$$\mathcal{J}_4^0 = \sum_{i, q, m} |G_{iq}^2(m)|^2 |\mathcal{C}_4^{0, s_q}|^2. \quad (3.10)$$

La standardisation de \mathbf{G} évoquée précédemment permet de borner les sommes sur les indices i et m par:

$$\sum_{i, m} |G_{ij}(m)|^4 \leq 1, \quad (3.11)$$

ce qui nous conduit à la borne du critère (3.4) [13] [68]:

$$\mathcal{J}_4^0 \leq \sum_i |\mathcal{C}_4^{0, s_i}|^2. \quad (3.12)$$

Ainsi, pour tout filtre $\mathbf{G} \in \mathcal{H}$ et pour toutes les sources $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$, nous avons:

$$\mathcal{J}_4^0(\mathbf{H}; \mathbf{w}) \leq \mathcal{J}_4^0(\mathbf{I}; \mathbf{w}). \quad (3.13)$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $\sum_{k, i} |G_{ij}(k)|^4 = 1$, ce qui n'est possible que pour les filtres *triviaux*³. Le critère d'optimisation (3.4) est donc un contraste tel que nous l'avons défini page 44. \diamond

2. ses colonnes sont orthogonales et de module unité. Annexe B

3. définition 2.6.1 page 44

3.2.2 Tenseur des cumulants $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

Le critère (3.4) utilise les cumulants des observations qui tiennent compte des retards ℓ_1 et ℓ_2 . Or, nous devons placer convenablement les valeurs des cumulants dans un tenseur afin de pouvoir diagonaliser conjointement l'ensemble des matrices qui composent ce tenseur. Définissons le tenseur des cumulants des observations:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cum}(w_{a_1}(n - \alpha_1), w_{a_2}(n - \alpha_2), w_{b_1}(n - \beta_1), w_{b_2}(n - \beta_2)) \quad (3.14)$$

où $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2]$ et $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2]$. Par construction, nous avons $\mathbf{a} \in \mathbb{J}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{J}^2$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{J}^2$, et $\boldsymbol{\alpha} \in \{0, 1, \dots, L-1\}^2$.

Le tenseur $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ peut être disposé dans un ensemble de N^2L^2 matrices $NL \times NL$ que nous notons $\mathbf{O}(\mathbf{b},\boldsymbol{\beta})$. En effet, pour toute paire $(\mathbf{b},\boldsymbol{\beta})$ fixée, les éléments des matrices $\mathbf{O}(\mathbf{b},\boldsymbol{\beta})$ correspondent aux éléments du tenseur $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ tels que

$$\mathbf{O}_{\eta\mu}(\mathbf{b},\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), \quad (3.15)$$

où l'indice des lignes η et l'indice des colonnes μ correspondent à $\eta = \alpha_1 N + a_1$ et $\mu = \alpha_2 N + a_2$. Nous pouvons voir sur la figure 3.1 le classement des cumulants du tenseur $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ dans l'ensemble des matrices $\mathbf{O}(\mathbf{b},\boldsymbol{\beta})$.

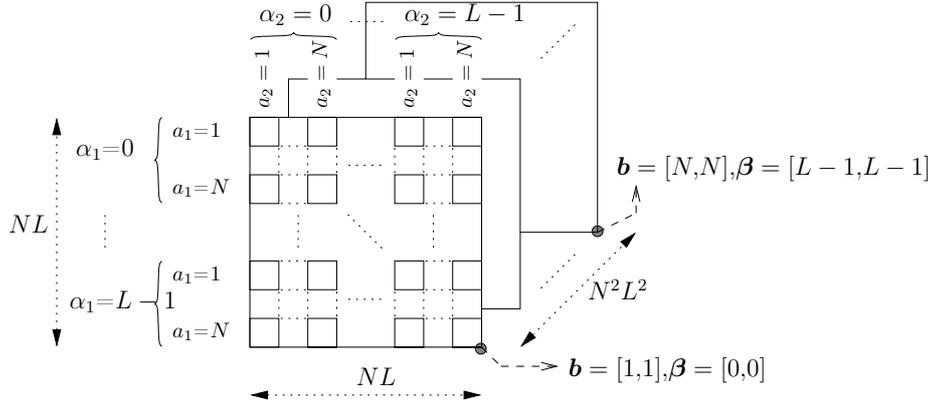


FIG. 3.1 – Placement des éléments de $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ dans une matrice $\mathbf{O}(\mathbf{b},\boldsymbol{\beta})$.

3.2.3 Égalisation avec $\mathcal{J}_4^0(\mathbf{H}; \mathbf{w})$

Considérons maintenant l'égaliseur FIR $\mathbf{H}(z)$ dont la réponse impulsionnelle $\{\mathbf{H}(l), 0 \leq l \leq L-1\}$ est rangée dans la matrice \mathbb{H} telle que:

$$\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{H}(0), \mathbf{H}(1), \dots, \mathbf{H}(L-1)]. \quad (3.16)$$

Notons $\mathbf{Diag}\{\mathbf{A}\}$ la diagonale d'une matrice quelconque \mathbf{A} , et définissons le carré de la norme de cette diagonale:

$$\|\mathbf{Diag}\{\mathbf{A}\}\|^2 = \sum_i |A_{ii}|^2. \quad (3.17)$$

Nous pouvons ainsi réécrire le contraste (3.4) sous forme d'une diagonalisation conjointe:

Proposition 3.2.2 *Le contraste \mathcal{J}_4^0 peut être réécrit comme un critère de diagonalisation approximative et conjointe (PAJOD) d'un ensemble de matrices de taille $NL \times NL$:*

$$\mathcal{J}_4^0(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\gamma} \|\text{Diag}\{\mathbb{H} \mathbf{O}(\mathbf{b}, \gamma) \mathbb{H}^\top\}\|^2 \quad (3.18)$$

où \mathbb{H} est semi-unitaire⁴ de taille $N \times NL$, et $\mathbf{O}(\mathbf{b}, \gamma)$ est définie en (3.15) avec $\beta \in \mathbb{J}^2$ et $\gamma \in \mathbb{Z}^2$.

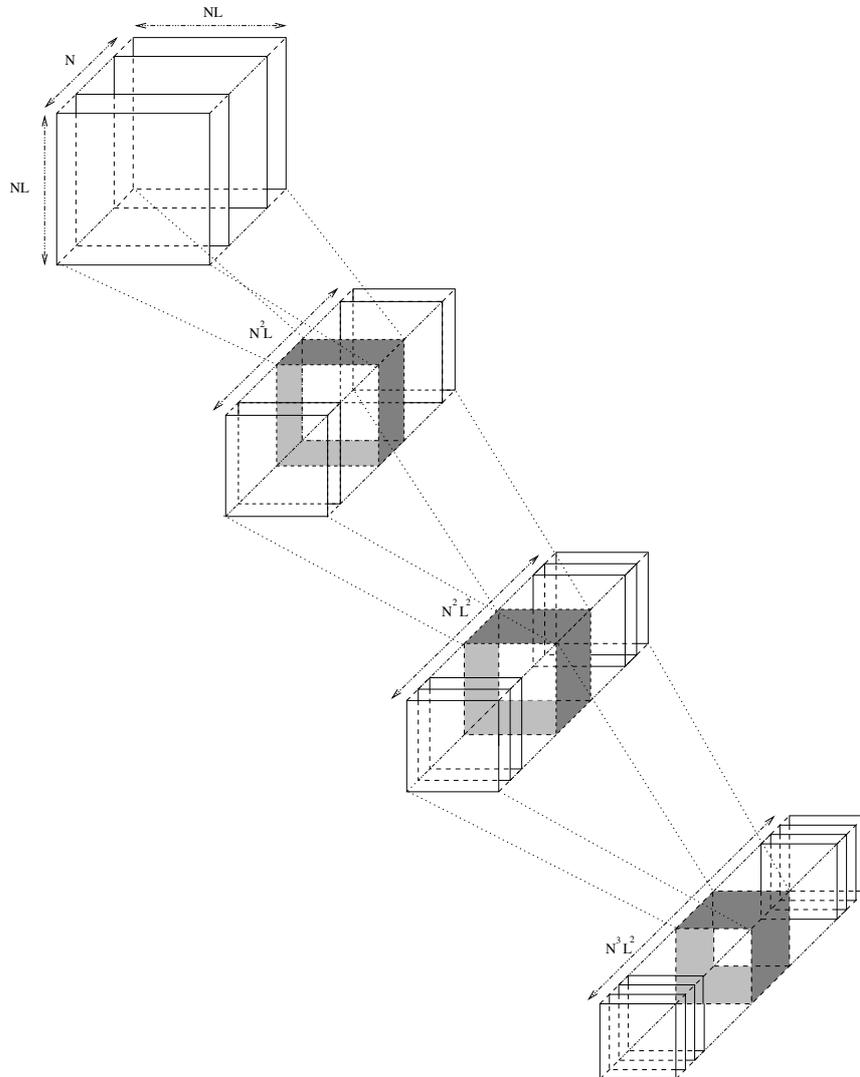


FIG. 3.2 – Structure du tenseur $T_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\alpha, \beta)$.

4. vérifie $\mathbb{H} \mathbb{H}^\top = \mathbf{I}$

Preuve. La relation multilinéaire qui lie les cumulants observés en entrée de l'égaliseur $\mathbf{H}(z)$ et ceux obtenus en sortie du même égaliseur s'écrit

$$\mathbf{C}_4^{0,\hat{s}}[i,i,j;0,0,\ell] = \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} H_{ia_1}(\alpha_1) H_{ia_2}(\alpha_2) H_{j_1b_1}(\beta_1) H_{j_2b_2}(\beta_2) T_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} + \ell). \quad (3.19)$$

Les hypothèses **F4** et **F5** permettent de dire que l'égaliseur $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire. Ceci nous conduit à la même propriété d'orthogonalité que (3.8):

$$\sum_{j\ell} H_{jr}^*(\tau + \ell) H_{jr'}(\tau' + \ell) = \delta_{rr'} \delta_{\tau\tau'}. \quad (3.20)$$

Ainsi, en prenant le carré du module de (3.19) puis en effectuant le changement de variable $\gamma_k = \beta_k + \ell_k$, nous obtenons une écriture plus complète du critère:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4^0 = & \sum_i \sum_{\mathbf{a}\mathbf{a}'} \sum_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'} \sum_{\mathbf{b}\mathbf{b}'} \sum_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}'} H_{ia_1}(\alpha_1) H_{ia_2}(\alpha_2) H_{ia_1}^*(\alpha_1') H_{ia_2}^*(\alpha_2') \\ & \cdot T_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) T_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}^{0*}(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\gamma}') \delta(\mathbf{b} - \mathbf{b}') \delta(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}'), \end{aligned} \quad (3.21)$$

qui nous permet d'écrire plus simplement:

$$\mathcal{J}_4^0(\mathbf{H}; \mathbf{x}) = \sum_{i\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}} \left| \sum_{\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}} H_{ia_1}(\alpha_1) H_{ia_2}(\alpha_2) \cdot T_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) \right|^2. \quad (3.22)$$

En regroupant les indices a_j et α_j dans un seul indice p_j tel que $p_j = \alpha_j N + a_j$, nous pouvons ranger les L matrices $\mathbf{H}(\alpha_j)$, $\alpha_j \in [0, L-1]$, $j \in [1, 2]$ dans la matrice \mathbb{H} de taille $N \times NL$ que nous avons défini en (3.16). Nous obtenons alors le contraste suivant:

$$\mathcal{J}_4^0 = \sum_{i\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}} \left| \sum_{p_1 p_2} \mathbb{H}_{ip_1} \mathbb{H}_{ip_2} O_{p_1 p_2}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}) \right|^2. \quad (3.23)$$

L'hypothèse de para-unitarité de $\mathbf{H}(z)$ implique également que $\mathbb{H}\mathbb{H}^\top = \mathbf{I}_N$. \diamond

Nous pouvons remarquer que la para-unitarité de l'égaliseur $\mathbf{H}(z)$ implique que \mathbb{H} est semi-unitaire, mais la réciproque n'est pas vraie. L'objectif étant de séparer N sources et non pas NL , seules les N premières valeurs de la diagonale des $\mathbf{O}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$ sont utilisées. Ainsi, \mathbb{H} correspond aux N premières colonnes de la matrice carrée qui diagonalise l'ensemble des $\mathbf{O}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$. En d'autres termes, seule une partie de la para-unitarité est exploitée.

3.3 Signaux complexes

Le cas des signaux ayant un alphabet complexe est pratiquement similaire au cas précédent. Le critère \mathcal{J}_4^0 peut éventuellement être utilisé pour séparer de tels signaux. Nous préférons cependant utiliser deux autres contrastes issus des cumulants (3.2) et (3.3).

3.3.1 Contrastes \mathcal{J}_2^2 et \mathcal{J}_3^1

Nous pouvons reprendre la proposition 3.2.1 en l'adaptant aux deux autres cumulants. Nous obtenons la proposition suivante, adaptée aux signaux complexes:

Proposition 3.3.1 *Les fonctions*

$$\mathcal{J}_2^2(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{J}} \sum_{\ell \in \mathbb{L}} |\mathcal{C}_2^{2, \hat{\mathbf{s}}}[i, i, \mathbf{j}; 0, 0, \ell]|^2 \quad (3.24)$$

et

$$\mathcal{J}_3^1(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{J}} \sum_{\ell \in \mathbb{L}} |\mathcal{C}_3^{1, \hat{\mathbf{s}}}[i, i, \mathbf{j}; 0, 0, \ell]|^2 \quad (3.25)$$

sont des contrastes pour les observations $\mathbf{w} \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{S}$ standardisées au 2^{ème} ordre, et pour le filtre $\mathbf{H} \in \mathcal{H}$.

La démonstration prouvant que \mathcal{J}_2^2 et \mathcal{J}_3^1 sont des contrastes est identique à la démonstration du contraste \mathcal{J}_4^0 . De ce fait, nous aboutissons là encore au critère PAJOD suivant:

Proposition 3.3.2 *Les contrastes \mathcal{J}_2^2 et \mathcal{J}_3^1 peuvent être réécrit comme des critères PAJOD:*

$$\mathcal{J}_2^2(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\gamma} \|\text{Diag}\{\mathbb{H} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \gamma) \mathbb{H}^{\mathbb{H}}\}\|^2 \quad (3.26)$$

et

$$\mathcal{J}_3^1(\mathbf{H}; \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\gamma} \|\text{Diag}\{\mathbb{H} \mathbf{N}(\mathbf{b}, \gamma) \mathbb{H}^{\mathbb{H}}\}\|^2 \quad (3.27)$$

où \mathbb{H} est semi-unitaire, $\mathbf{b} \in \mathbb{L}^2$, $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ et où les matrices $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \gamma)$ et $\mathbf{N}(\mathbf{b}, \gamma)$ ont la même structure que (3.15):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^2(\alpha, \gamma) \\ &\equiv \text{Cum}[w_{a_1}(n - \alpha_1), w_{a_2}(n - \alpha_2)^*, w_{b_1}(n - \gamma_1), w_{b_2}(n - \gamma_2)^*] \end{aligned} \quad (3.28)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{b}, \gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^1(\alpha, \gamma) \\ &\equiv \text{Cum}[w_{a_1}(n - \alpha_1), w_{a_2}(n - \alpha_2)^*, w_{b_1}(n - \gamma_1), w_{b_2}(n - \gamma_2)]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

La preuve est semblable à celle de la proposition 3.2.2.

Les critères \mathcal{J}_2^2 est différent de celui proposé par Cardoso et Souloumiac dans [8] sur plusieurs points:

- les matrices $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \gamma)$, $\mathbf{N}(\mathbf{b}, \gamma)$ et $\mathbf{O}(\mathbf{b}, \gamma)$ sont construites de manière différente à cause du modèle convolutif,
- les matrices recherchées ne sont pas des matrices carrés unitaires mais rectangulaires para-unitaires, ce qui implique des algorithmes différents.

3.4 Dimensions du tenseur

Nous avons vu dans le chapitre 2 que le système global \mathbf{G} résulte de la convolution entre le canal et l'égaliseur. S'ils sont tous deux FIR, il est donc possible de ne prendre qu'un ensemble fini de matrices des cumulants pour égaliser le système. Nous avons alors la proposition suivante:

Proposition 3.4.1 *Si l'égaliseur est de longueur finie L , et si le canal est de longueur finie K , alors les contrastes \mathcal{J}_{4-q}^q définis dans les propositions 3.2.2 et 3.3.2, peuvent être réécrits comme des critères PAJOD d'un ensemble fini de $(2K + L - 2)^2 N^2$ matrices au plus, où \mathbb{H} est semi-unitaire, \mathbf{b} varie dans \mathbb{J}^2 , et $\boldsymbol{\gamma}$ dans \mathbb{M}^2 , avec $\mathbb{M} = [-K + 1, K + L - 2]$.*

Lemme 3.4.1 *Si le canal et l'égaliseur sont tous deux de longueur respective K et L , alors les tenseurs de cumulants $\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^q(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$, $q \in [0,2]$, sont nuls quelque soit l'entrée γ_k de $\boldsymbol{\gamma}$ en dehors de l'intervalle \mathbb{M} .*

Preuve. Prenons par exemple la proposition 3.2.2 avec $q = 0$. A partir de la définition (3.14) et des relations d'entrée-sortie du canal \mathbf{C} , nous avons la $i^{\text{ème}}$ observation:

$$w_i(n) = \sum_{qm} C_{iq}(m) s_q(n - m). \quad (3.30)$$

En appliquant la propriété de multilinéarité⁵ sur les cumulants des observations, nous obtenons le tenseur des cumulants

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i,j=0}^{K-1} \sum_{\boldsymbol{\ell}} \sum_{u,v=1}^N \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{J}} \left(C_{a_1 u}(i) C_{a_2 v}(j) C_{b_1 k_1}(\ell_1) C_{b_2 k_2}(\ell_2) \right. \\ \left. \text{Cum}[s_u(t - \alpha_1 - i), s_v(t - \alpha_2 - j), s_{k_1}(t - \gamma_1 - \ell_1), s_{k_2}(t - \gamma_2 - \ell_2)] \right), \quad (3.31)$$

avec $\boldsymbol{\ell} \in [0, K - 1]^2$. Étant donné que les processus $s_u(n)$ sont i.i.d. (hypothèse **S1**), l'expression (3.31) est nulle sauf lorsqu'il y a égalité entre les indices

$$\alpha_1 + i = \alpha_2 + j = \gamma_1 + \ell_1 = \gamma_2 + \ell_2. \quad (3.32)$$

Les $s_u(n)$ étant mutuellement indépendants, les termes de l'expression (3.31) sont toujours nuls sauf lorsque $u = v = w_1 = w_2$. Ceci nous conduit donc à l'expression:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{u=1}^N \left(C_{a_1 u}(i) C_{a_2 u}(i + \alpha_1 - \alpha_2) C_{b_1 u}(i + \alpha_1 - \gamma_1) C_{b_2 u}(i + \alpha_1 - \gamma_2) C_4^{0,s_u} \right). \quad (3.33)$$

5. définition 2.5.3 page 42

De plus, comme le canal a une réponse impulsionnelle de longueur K , c'est à dire $\{\mathbf{C}(k), 0 \leq k \leq K - 1\}$, alors l'expression (3.33) est nulle en dehors de l'intervalle

$$0 \leq i + \alpha_1 - \gamma_k \leq K - 1 \quad (3.34)$$

pour tout k tel que $1 \leq k \leq 2$. Le fait que α_1 vérifie $0 \leq \alpha_1 \leq L - 1$ prouve éventuellement le lemme 3.4.1. La preuve est similaire pour la proposition 3.3.2. \diamond

En pratique, il suffit de faire varier les entrées γ_k dans le tiers central de l'ensemble \mathbb{K} , c'est à dire $[0, L - 1]$.

3.5 Algorithme algébrique

Nous montrons dans ce paragraphe que le filtre \mathbf{H} peut être trouvé à partir d'une méthode algébrique visant à chercher les racines d'un polynôme. Les méthodes algébriques ont l'avantage d'utiliser un nombre fini d'opérations afin de converger vers une solution optimale. Ceci permet d'implémenter des algorithmes blocs.

Nous supposons par la suite que le canal est de longueur connue K , et que l'égaliseur est de même longueur $L = K$, et enfin nous prendrons $\mathbb{L} = \{0, 1, \dots, L - 1\}^2$.

L'objectif de la séparation de source avec un critère PAJOD consiste à trouver itérativement une matrice semi-unitaire \mathbb{H} de taille $N \times NL$, permettant de maximiser les critères (3.4), (3.27) ou (3.26). Or, d'après les propositions 3.2.2 et 3.3.2, il suffit de procéder à une diagonalisation conjointe de l'ensemble des matrices \mathbf{M}, \mathbf{N} ou \mathbf{O} afin d'obtenir la matrice de séparation \mathbb{H} . Cette diagonalisation approximative s'opère donc sur des ensembles de $N^2 L^2$ matrices de taille $NL \times NL$ que nous noterons par la suite $\mathbf{M}(b_1, b_2, \gamma_1, \gamma_2)$ pour le contraste \mathcal{J}_2^2 , $\mathbf{N}(b_1, b_2, \gamma_1, \gamma_2)$ pour \mathcal{J}_3^1 , et $\mathbf{O}(b_1, b_2, \gamma_1, \gamma_2)$ pour \mathcal{J}_4^0 .

Ainsi, notre algorithme a pour objectif de maximiser la somme des modules au carré des N premières valeurs en diagonale des ensembles des matrices. La figure 3.3 illustre les sous-matrices à diagonaliser (zones grisées) sur l'ensemble des matrices.

3.5.1 Balayage de Jacobi

Pour atteindre cet objectif, il nous faut trouver une matrice \mathbf{V} , de taille $NL \times NL$ grâce à laquelle nous prélevons les N premières colonnes pour obtenir la matrice \mathbb{H} de taille $N \times NL$. La matrice unitaire \mathbf{V} peut être construite grâce à l'accumulation de rotations de Givens complexes, comme le suggère l'algorithme de Jacobi [37]:

$$\mathbf{V} = \prod_{1 \leq i < j \leq NL} \Theta[i, j]^{\mathbb{H}}, \quad (3.35)$$

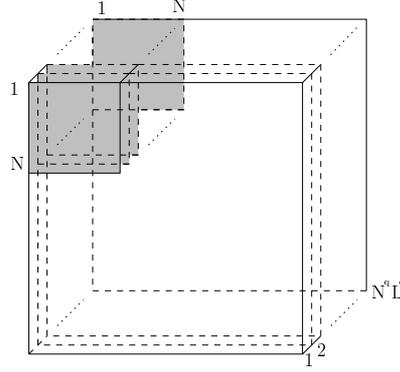


FIG. 3.3 – Diagonalisation conjointe d'un ensemble de $N^2 L^2$ sous-matrices $N \times N$.

où $\Theta[i,j]$ est égale à la matrice identité \mathbf{I}_N sauf pour les éléments $\Theta_{ii}[i,j] = \Theta_{jj}[i,j] = \cos(\theta[i,j])$ et $\Theta_{ji}[i,j] = -\Theta_{ij}^*[i,j] = \sin(\theta[i,j]) e^{\mathcal{J}\psi[i,j]}$, soit:

$$\Theta[i,j] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cos(\theta[i,j]) & \cdots & -\sin(\theta[i,j])e^{-\mathcal{J}\psi[i,j]} & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{I}_{n_2} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \sin(\theta[i,j])e^{\mathcal{J}\psi[i,j]} & \cdots & \cos(\theta[i,j]) & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{I}_{n_3} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

où $n_1 + n_2 + n_3 = NL - 2$.

Pour chaque paire (i,j) nous devons donc trouver la paire d'angles $(\theta[i,j], \psi[i,j])$ qui maximise le contraste choisi pour l'égalisation du système. Nous pouvons ainsi réécrire les contrastes (3.24), (3.25) et (3.4) en fonction de la matrice Θ :

$$\mathcal{J}_2^2 = \sum_{\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}} \sum_{k=1}^N \left| \sum_{\eta, \mu=1}^{NL} \Theta_{\eta k}[i,j]^* \Theta_{\mu k}[i,j] M_{\eta\mu}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}) \right|^2, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{J}_3^1 = \sum_{\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}} \sum_{k=1}^N \left| \sum_{\eta, \mu=1}^{NL} \Theta_{\eta k}^*[i,j] \Theta_{\mu k}[i,j] N_{\eta\mu}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}) \right|^2, \quad (3.38)$$

et

$$\mathcal{J}_4^0 = \sum_{\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}} \sum_{k=1}^N \left| \sum_{\eta, \mu=1}^{NL} \Theta_{\eta k}[i,j] \Theta_{\mu k}[i,j] O_{\eta\mu}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}) \right|^2. \quad (3.39)$$

On effectue alors une diagonalisation approximative et conjointe (PAJOD) d'un ensemble de matrices $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{N}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$ ou $\mathbf{O}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$. Cela revient à dire que les matrices de taille $NL \times NL$

qui résultent des produits

$$\mathbf{V} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}) \mathbf{V}^{\mathbf{H}}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{V} \mathbf{N}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}) \mathbf{V}^{\mathbf{H}} \quad (3.41)$$

ou

$$\mathbf{V} \mathbf{O}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}) \mathbf{V}^{\mathbf{T}} \quad (3.42)$$

ont des diagonales de taille $N \times N$.

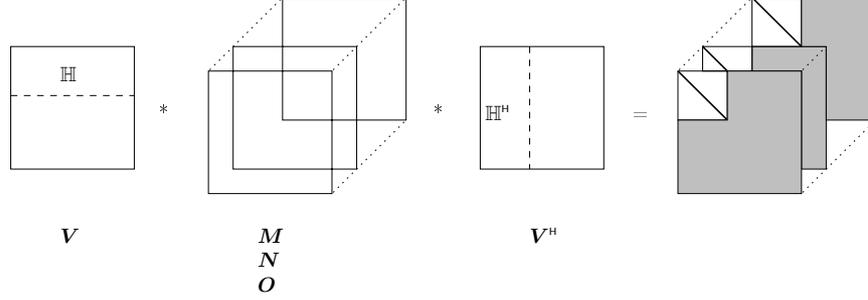


FIG. 3.4 – Diagonalisation conjointe des tenseurs \mathbf{M} , \mathbf{N} ou \mathbf{O} .

Déterminons maintenant la manière dont va s'opérer cette diagonalisation conjointe.

3.5.2 Travail sur les paires

Pour simplifier les démonstrations et pour éviter les répétitions, nous travaillons uniquement avec le tenseur des cumulants $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$, la méthode étant la même pour $\mathbf{N}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$ ou $\mathbf{O}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$. Comme le montre la partie grisée de la figure 3.3, les indices $[i, j]$ ne décrivent pas toutes les paires de l'ensemble $\{1, \dots, NL\}^2$. En effet, comme l'indice k du contraste (3.37) est inférieur ou égale à N , il suffit que l'indice i balaye les N premières lignes et colonnes des matrices de \mathbf{M} , soit $i \leq N$. De plus, comme nous utilisons les rotations de Givens, nous devons toujours avoir $i < j$ afin d'ordonner convenablement les rotations. Par conséquent, nous avons deux possibilités:

- si $j \leq N$, alors maximiser $\sum_{\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}} (M_{ii}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}) + M_{jj}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}))$
- si $j > N$, alors maximiser $\sum_{\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}} M_{ii}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$.

Dans les deux cas, la maximisation d'un contraste revient à trouver les racines d'un polynôme, c'est à dire les points stationnaires du contraste. Notons $\cos \theta = \cos(\theta[i, j])$ et $\sin \theta e^{\mathcal{J}\psi} = \sin(\theta[i, j]) e^{\mathcal{J}\psi[i, j]}$. Dans le cas d'un système MIMO de taille 2×2 , l'équation (3.36) devient:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta e^{-\mathcal{J}\psi} \\ \sin \theta e^{\mathcal{J}\psi} & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

et les matrices $\mathbf{M}(k)$ de même taille:

$$\mathbf{M}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii}(k) & \mathbf{M}_{ij}(k) \\ \mathbf{M}_{ji}(k) & \mathbf{M}_{jj}(k) \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Ainsi, pour plus de clarté dans les démonstrations, nous oublions momentanément la dépendance de $M_{ij}(k)$ sur $(\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta})$. En définissant l'ensemble \mathbb{K} par $\mathbb{K} = \{1, \dots, N^q L^q\}$, nous avons donc $k \in \mathbb{K}$.

Nous détaillons ci-dessous l'algorithme uniquement pour le contraste \mathcal{J}_2^2 , cet algorithme étant le même que pour le contraste \mathcal{J}_3^1 . Le troisième algorithme basé sur le contraste \mathcal{J}_4^0 est construit de la même manière sauf qu'il ne tient pas compte des valeurs complexes: la transposition hermitienne $(\cdot)^H$ devient une transposition simple $(\cdot)^T$.

3.5.3 Diagonalisation avec le contraste \mathcal{J}_2^2

Commençons par déterminer analytiquement le produit $\mathbf{M}'(k) = \Theta_k^H \mathbf{M}(k) \Theta_k$ pour une seule matrice hermitienne⁶ $M(k)$ de $\mathbf{M}(k)$:

$$M'(k) = \begin{bmatrix} M'_{ii}(k) & M'_{ij}(k) \\ M'_{ji}(k) & M'_{jj}(k) \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

avec les composantes

$$M'_{ii}(k) = \cos^2 \theta_k M_{ii}(k) + \cos \theta_k \sin \theta_k (M_{ji}(k) e^{-\mathcal{J}\psi_k} + M_{ij}(k) e^{\mathcal{J}\psi_k}) + \sin^2 \theta_k M_{jj}(k) \quad (3.46)$$

$$M'_{ij}(k) = -\cos \theta_k \sin \theta_k e^{-\mathcal{J}\psi_k} M_{ii}(k) - \sin^2 \theta_k e^{-2\mathcal{J}\psi_k} M_{ji}(k) + \cos^2 \theta_k M_{ij}(k) + \cos \theta_k \sin \theta_k e^{-\mathcal{J}\psi_k} M_{jj}(k) \quad (3.47)$$

$$M'_{ji}(k) = -\cos \theta_k \sin \theta_k e^{\mathcal{J}\psi_k} M_{ii}(k) - \sin^2 \theta_k e^{2\mathcal{J}\psi_k} M_{ij}(k) + \cos \theta_k \sin \theta_k e^{\mathcal{J}\psi_k} M_{jj}(k) + \cos^2 \theta_k M_{ji}(k) \quad (3.48)$$

$$M'_{jj}(k) = -\cos \theta_k (\sin \theta_k e^{-\mathcal{J}\psi_k} M_{ji}(k) + \sin \theta_k e^{\mathcal{J}\psi_k} M_{ij}(k)) + \sin^2 \theta_k M_{ii}(k) + \cos^2 \theta_k M_{jj}(k) \quad (3.49)$$

Déterminons aussi le carré du module de $M'_{ii}(k)$

$$|M'_{ii}(k)|^2 = \cos^4 \theta_k |M_{ii}(k)|^2 + \sin^4 \theta_k |M_{jj}(k)|^2 + \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \Lambda_{1,k} + \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \Lambda_{2,k} + \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (\Lambda_{3,k} + \Lambda_{4,k}), \quad (3.50)$$

avec les coefficients réels $\Lambda_{i,k}, i \in \{1, \dots, 4\}, \forall k \in \mathbb{K}$

$$\Lambda_{1,k} = 2\Re\left\{ \underbrace{(M_{ij}(k)M_{ii}^*(k) + M_{ji}^*(k)M_{ii}(k))}_{\alpha_{1,k}} e^{\mathcal{J}\psi_k} \right\}, \quad (3.51)$$

$$\Lambda_{2,k} = 2\Re\left\{ \underbrace{(M_{ij}(k)M_{jj}^*(k) + M_{ji}^*(k)M_{jj}(k))}_{\alpha_{2,k}} e^{\mathcal{J}\psi_k} \right\}, \quad (3.52)$$

$$\Lambda_{3,k} = 2\Re\{M_{ii}(k)M_{jj}^*(k)\} + |M_{ij}(k)|^2 + |M_{ji}(k)|^2, \quad (3.53)$$

$$\Lambda_{4,k} = 2\Re\left\{ \underbrace{M_{ji}^*(k)M_{ij}(k)}_{\gamma_k} e^{2\mathcal{J}\psi_k} \right\}. \quad (3.54)$$

6. $M'(k) = M'(k)^H, \forall k \in \mathbb{K}$

Nous pouvons en faire de même avec $M'_{jj}(k)$

$$\begin{aligned} |M'_{jj}(k)|^2 &= \cos^4 \theta_k |M_{jj}(k)|^2 + \sin^4 \theta_k |M_{ii}(k)|^2 - \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \Lambda_{2,k} \\ &\quad - \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \Lambda_{1,k} + \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (\Lambda_{3,k} + \Lambda_{4,k}), \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nous pouvons maintenant chercher les angles θ_k et ψ_k qui permettent d'obtenir le maximum de contraste pour tout $k \in \mathbb{K}$. Pour cela, nous devons étudier le cas où l'indice j du balayage de Jacobi est inférieur ou égale à N , et le cas où j est supérieur à N .

Pour $j \leq N$

Lorsque $j \leq N$, la maximisation du contraste \mathcal{J}_2^2 s'effectue à travers la maximisation de la somme des N premiers termes de la diagonale de chaque matrice du tenseur:

$$\mathcal{J}_2^2|_{j \leq N} = \sum_{k \in \mathbb{K}} |M'_{ii}(k)|^2 + |M'_{jj}(k)|^2. \quad (3.56)$$

Ainsi nous retrouvons l'expression classique de [8] (voir annexe D section D.1). Pour chaque

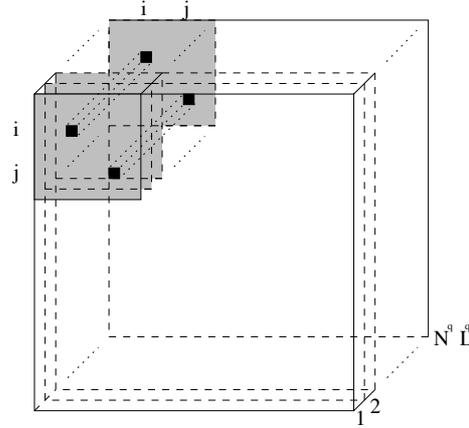


FIG. 3.5 – Maximisation lorsque $j \leq N$.

matrice indexée par k , nous devons calculer le carré des modules des N cumulants concernés. Ainsi nous obtenons une expression algébrique regroupant les termes communs de (3.50) et de (3.55). La somme (3.56) s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j \leq N} &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \left((\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) \Lambda_{5,k} + \cos^3 \theta_k \sin \theta_k (\Lambda_{1,k} - \Lambda_{2,k}) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (2\Lambda_{3,k} + 2\Lambda_{4,k}) + \cos \theta_k \sin^3 \theta_k (\Lambda_{2,k} - \Lambda_{1,k}) \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

avec le coefficient

$$\Lambda_{5,k} = |M_{ii}(k)|^2 + |M_{jj}(k)|^2. \quad (3.58)$$

Nous pouvons alors réécrire (3.57):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j \leq N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \left((\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) \Lambda_{5,k} + 2 \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \Re\{\alpha_k e^{j\psi_k}\} \right. \\ & \left. - 2 \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \Re\{\alpha_k e^{j\psi_k}\} + 2 \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (\Lambda_{3,k} + 2 \Re\{\gamma_k e^{2j\psi_k}\}) \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

avec $\alpha_k = \alpha_{1,k} - \alpha_{2,k}$. Cette écriture permet d'isoler les exponentielles qui contiennent l'inconnue ψ . Ensuite, nous effectuons les changements de variables (voir annexe D section D.2) afin de pouvoir mettre le critère $\mathcal{J}_2^2|_{j \leq N}$ sous forme quadratique. Nous pouvons faire ressortir du critère $\mathcal{J}_2^2|_{j \leq N}$ les paramètres inconnus θ_k et ψ_k pour une valeur de k fixée. On obtient ainsi une forme simplifiée de (3.57)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j \leq N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \left(\Lambda_{5,k} (\cos^2 2\theta_k + 0.5 \sin^2 2\theta_k) + \cos 2\theta_k \sin 2\theta_k (\Re\{\alpha_k\} \cos \psi_k \right. \\ & \left. - \Im\{\alpha_k\} \sin \psi_k) + \sin^2 2\theta_k (0.5 \Lambda_{3,k} + \Re\{\gamma_k\} \cos 2\psi_k - \Im\{\gamma_k\} \sin 2\psi) \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Il est alors possible de réarranger (3.60) en utilisant les relations trigonométriques (voir annexe D section D.3). Nous obtenons alors une autre écriture de (3.57) qui va nous permettre de mettre $\mathcal{J}_2^2|_{j \leq N}$ sous forme quadratique:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j \leq N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \left(\Lambda_{5,k} (\cos^2 2\theta_k + 0.5 \sin^2 2\theta_k) + \cos 2\theta_k \sin 2\theta_k (\Re\{\alpha_k\} \cos \psi_k \right. \\ & - \Im\{\alpha_k\} \sin \psi_k) + \sin^2 2\theta_k (0.5 \Lambda_{3,k} (\cos^2 \psi_k + \sin^2 \psi_k) \\ & \left. + \Re\{\gamma_k\} (\cos^2 \psi_k - \sin^2 \psi_k) - \Im\{\gamma_k\} (2 \cos \psi_k \sin \psi_k)) \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Le développement de l'expression (3.61) nous donne:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j \leq N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \underbrace{(\Lambda_{5,k})}_{B_{11,k}} \cos^2 2\theta_k + \sum_{k \in \mathbb{K}} \underbrace{(\Re\{\alpha_k\})}_{2B_{12,k}} \cos 2\theta_k \sin 2\theta_k \cos \psi_k \\ & - \sum_{k \in \mathbb{K}} \underbrace{(\Im\{\alpha_k\})}_{-2B_{13,k}} \cos 2\theta_k \sin 2\theta_k \sin \psi_k \\ & + \sum_{k \in \mathbb{K}} \underbrace{\left(\frac{\Lambda_{5,k} + \Lambda_{3,k}}{2} + \Re\{\gamma_k\} \right)}_{B_{22,k}} \sin^2 2\theta_k \cos^2 \psi_k \\ & + 2 \sum_{k \in \mathbb{K}} \underbrace{(\Im\{\gamma_k\})}_{B_{23,k}} \sin^2 2\theta_k \cos \psi_k \sin \psi_k \\ & + \sum_{k \in \mathbb{K}} \underbrace{\left(\frac{\Lambda_{5,k} + \Lambda_{3,k}}{2} - \Re\{\gamma_k\} \right)}_{B_{33,k}} \sin^2 2\theta_k \sin^2 \psi_k \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ainsi, nous pouvons mettre le contraste $\mathcal{J}_2^2|_{j \leq N}$ sous forme quadratique:

$$\mathbf{v}_k^\top \mathbf{J}_k \mathbf{v}_k \quad (3.63)$$

avec

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \sin 2\theta_k \cos \psi_k \\ \sin 2\theta_k \sin \psi_k \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} J_{11,k} & J_{12,k} & J_{13,k} \\ J_{12,k} & J_{22,k} & J_{23,k} \\ J_{13,k} & J_{23,k} & J_{33,k} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

et les coefficients de la matrice \mathbf{J}_k

$$J_{11,k} = \Lambda_{5,k} \quad (3.66)$$

$$J_{12,k} = \Re\{\alpha_k\}/2 \quad (3.67)$$

$$J_{13,k} = -\Im\{\alpha_k\}/2 \quad (3.68)$$

$$J_{23,k} = -\Im\{\gamma_k\} \quad (3.69)$$

$$J_{22,k} = \frac{\Lambda_{5,k}}{2} + \frac{\Lambda_{3,k}}{2} + \Re\{\gamma_k\} \quad (3.70)$$

$$J_{33,k} = \frac{\Lambda_{5,k}}{2} + \frac{\Lambda_{3,k}}{2} - \Re\{\gamma_k\}. \quad (3.71)$$

Pour une valeur de k fixée, il est facile de trouver le vecteur propre ($\mathbf{v}_{k,\lambda=\lambda_{max}}$) correspondant à la plus grande valeur propre (λ_{max}) de la matrice \mathbf{J}_k . Le vecteur propre $\mathbf{v}_{k,\lambda=\lambda_{max}} = [v_1, v_2, v_3]$ nous permet alors de trouver les angles θ_k et ψ_k qui maximisent le contraste (3.62). Ces angles sont déterminés grâce aux relations:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_k &= v_1/r, & \cos \theta_k &= \sqrt{\frac{v_1+r}{2r}} = \sqrt{\frac{v_1+1}{2}} \\ \sin 2\theta_k \cos \psi_k &= v_2/r, & \sin \theta_k &= \frac{v_2/r + jv_3/r}{\sqrt{2r(v_1+r)}} = \frac{v_2 + jv_3}{2 \cos \theta} \\ \sin 2\theta_k \sin \psi_k &= v_3/r, & \tan \psi_k &= \frac{v_3}{v_2} \end{aligned}$$

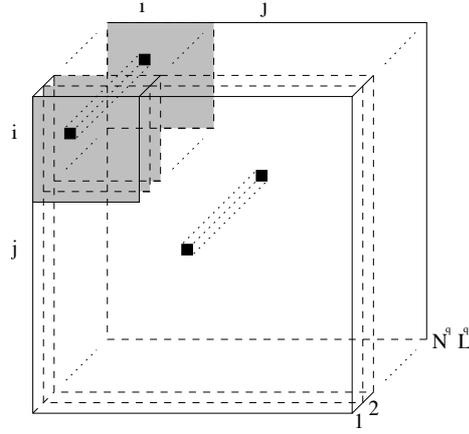
avec r la norme du vecteur \mathbf{v} telle que $r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = 1$.

Pour $j > N$

Dans le cas où l'indice j est supérieur à N , seul les termes indexés par i doivent être maximisés. Le critère à optimiser devient alors:

$$\mathcal{J}_2^2|_{j>N} = \sum_{k \in \mathbb{K}} |M'_{ii}(k)|^2. \quad (3.72)$$

Le système constitué des inconnues θ et ψ est différent du précédent car il n'y a pas de symétrie dans l'expression de \mathcal{J}_2^2 . Nous pouvons procéder de diverses façons pour maximiser

FIG. 3.6 – Maximisation lorsque $j > N$.

ce contraste. Dans cette étude, nous utilisons la méthode du *résultant*⁷ afin de trouver le maximum du critère. Le critère n'utilise alors que l'expression (3.50):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j>N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \left(\cos^4 \theta_k |M_{ii}(k)|^2 + \sin^4 \theta_k |M_{jj}(k)|^2 + \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \Lambda_{1,k} \right. \\ & \left. + \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \Lambda_{2,k} + \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (\Lambda_{3,k} + \Lambda_{4,k}) \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

où les coefficients $\Lambda_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ sont définis de (3.51) à (3.54). Nous utilisons les relations trigonométriques (D.2) et (D.3) afin de faire ressortir les angles θ_k et ψ_k . Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j>N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \left(\cos^4 \theta_k |M_{ii}(k)|^2 + \sin^4 \theta_k |M_{jj}(k)|^2 \right. \\ & + 2 \cos^3 \theta_k \sin \theta_k (\Re\{\alpha_{1,k}\} \cos \psi_k - \Im\{\alpha_{1,k}\} \sin \psi_k) \\ & + 2 \cos \theta_k \sin^3 \theta_k (\Re\{\alpha_{2,k}\} \cos \psi_k - \Im\{\alpha_{2,k}\} \sin \psi_k) \\ & + 2 \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (\Re\{\gamma_k\} \cos 2\psi_k - \Im\{\gamma_k\} \sin 2\psi_k) \\ & \left. + \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k \Lambda_{3,k} \right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

En faisant le changement de variables classique $z = \tan \theta$, nous obtenons les cosinus

$$\cos \theta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_k^2}}, \quad (3.75)$$

et les sinus

$$\sin \theta_k = \frac{\tan \theta_k}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_k}} = \frac{z_k}{\sqrt{1 + z_k^2}}. \quad (3.76)$$

⁷ méthode consistant à chercher les racines du déterminant d'une matrice de Sylvester avec une seule variable [50].

Ainsi, nous pouvons exprimer (3.74) en fonction des z_k :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j>N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \frac{1}{(1+z_k^2)^2} \left(|M_{ii}(k)|^2 + z_k^4 |M_{jj}(k)|^2 \right. \\ & + 2z_k (\Re\{\alpha_{1,k}\} \cos \psi_k - \Im\{\alpha_{1,k}\} \sin \psi_k) \\ & + 2z_k^3 (\Re\{\alpha_{2,k}\} \cos \psi_k - \Im\{\alpha_{2,k}\} \sin \psi_k) \\ & + 2z_k^2 (\Re\{\gamma_k\} \cos 2\psi_k - \Im\{\gamma_k\} \sin 2\psi_k) \\ & \left. + z_k^2 \Lambda_{3,k} \right), \end{aligned} \quad (3.77)$$

Procédons de la même façon avec les angles ψ_k en posant $\psi_k = 2\omega_k$ ainsi que $t_k = \tan \omega_k$. Ce changement de variable nous fait utiliser les relations suivantes:

$$\cos \psi_k = \frac{1-t_k^2}{1+t_k^2} \quad (3.78)$$

$$\sin \psi_k = \frac{2t_k}{1+t_k^2} \quad (3.79)$$

$$\cos 2\psi_k = \frac{(1-t_k^2)^2 - 4t_k^2}{(1+t_k^2)^2} \quad (3.80)$$

$$\sin 2\psi_k = \frac{4t_k - 4t_k^3}{(1+t_k^2)^2} \quad (3.81)$$

Ainsi nous obtenons une dernière écriture du critère

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2|_{j>N} = & \sum_{k \in \mathbb{K}} \frac{1}{(1+z_k^2)^2} \left(|M_{ii}(k)|^2 + z_k^4 |M_{jj}(k)|^2 \right. \\ & + \frac{2z_k}{1+t_k^2} (\Re\{\alpha_{1,k}\}(1-t_k^2) - 2\Im\{\alpha_{1,k}\}t_k) \\ & + \frac{2z_k^3}{1+t_k^2} (\Re\{\alpha_{2,k}\}(1-t_k^2) - 2\Im\{\alpha_{2,k}\}t_k) + z_k^2 \Lambda_{3,k} \\ & \left. + \frac{2z_k^2}{(1+t_k^2)^2} (\Re\{\gamma_k\}((1-t_k^2)^2 - 4t_k^2) - \Im\{\gamma_k\}(4t_k - 4t_k^3)) \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

La maximisation du critère $\mathcal{J}_2^2|_{j>N}$ dépend maintenant de l'ensemble des couples (z_k, t_k) . Nous utilisons dans ce paragraphe une méthode de résolution à deux inconnues classique appelée méthode du résultant.

La première étape consiste à dériver l'expression (3.82) en fonction de z (première équation du système) et de t (deuxième équation du système). Pour un k fixé, le couple (z, t) qui maximise le critère $\mathcal{J}_2^2|_{j>N}$ appartient à l'ensemble des couples qui annulent les deux dérivées, cet ensemble est noté \mathbb{S} avec $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2$. Nous prendrons les notations suivantes pour ces deux dérivées:

$$P(z, t) = \frac{\partial \mathcal{J}_2^2|_{j>N}}{\partial z}, \quad (3.83)$$

$$Q(z, t) = \frac{\partial \mathcal{J}_2^2|_{j>N}}{\partial t}. \quad (3.84)$$

- **Dérivée en z** Après multiplication de $P(z,t)$ par le dénominateur commun $(1+z^2)^3(1+t^2)^2$, nous obtenons une équation de degré global 8 (4 en z et 4 en t):

$$P(z,t) = z^4P_4(t) + z^3P_3(t) + z^2P_2(t) + zP_1(t) + P_0(t) \quad (3.85)$$

avec les expressions $P_x(t), x \in \{0, \dots, 4\}$ décrites dans la section D.4 de l'annexe D.

- **Dérivée en t** Pour $Q(z,t)$, nous multiplions par $(1+z^2)^2(1+t^2)^3$ pour éliminer le dénominateur commun, puis simplifions un z en commun au numérateur. La dérivée $Q(z,t)$ est de degré global 6 (2 en z et 4 en t):

$$Q(z,t) = z^2Q_2(t) + zQ_1(t) + Q_0(t) \quad (3.86)$$

avec les expressions $Q_x(t), x \in \{0, \dots, 2\}$ décrites dans la section D.5 de l'annexe D.

Déterminant de Sylvester

La factorisation de (3.85) et de (3.86) en la variable z permet d'obtenir une matrice de Sylvester plus petite qu'avec une factorisation en la variable t . En effet, si on cumule les degrés maximum en z de (3.85) et (3.86), nous obtenons un degré total de 6, alors qu'avec la variable t ce total serait de 8. Nous obtenons alors la matrice de Sylvester de taille 6×6 suivante:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} Q_2(t) & 0 & 0 & 0 & P_4(t) & 0 \\ Q_1(t) & Q_2(t) & 0 & 0 & P_3(t) & P_4(t) \\ Q_0(t) & Q_1(t) & Q_2(t) & 0 & P_2(t) & P_3(t) \\ 0 & Q_0(t) & Q_1(t) & Q_2(t) & P_1(t) & P_2(t) \\ 0 & 0 & Q_0(t) & Q_1(t) & P_0(t) & P_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & Q_0(t) & 0 & P_0(t) \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

qui est une matrice polynomiale en t . Le système se simplifie en un système à une inconnue et en une équation lorsque l'on annule le déterminant:

$$\det(\mathbf{W}) = 0 \quad (3.88)$$

Nous obtenons alors un polynôme de degré 24 en t . La recherche des racines de $\det(\mathbf{W})$ peut alors se faire par un algorithme rapide⁸. Étant donné que $(z,t) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}$, nous ne gardons que les racines réelles. Ces racines sont ensuite testées, les unes après les autres dans $Q(z,t)$ afin de trouver les racines en z . Nous obtenons ainsi 2 racines en z pour une racine en t . Les couples (z,t) ainsi formé sont finalement testés dans le critère (3.82) afin de trouver le couple qui maximise le critère pour un indice k fixé, . Le déterminant de Sylvester est donné dans la section D.6 de l'annexe D :

8. ex: avec *Matlab*, les racines d'un polynôme sont les valeurs propres d'une matrice compagnon [37]

3.5.4 Diagonalisation avec le contraste \mathcal{J}_4^0

Nous procédons de la même façon que pour le contraste \mathcal{J}_2^2 , mais avec le produit $\mathbf{O}'(k) = \Theta_k^\top \mathbf{O}(k) \Theta_k$ où les composantes de $\mathbf{O}'(k)$ sont:

$$\begin{aligned} O'_{ii}(k) &= \cos^2 \theta_k O_{ii}(k) + \cos \theta_k \sin \theta_k e^{\mathcal{J}\psi_k} (O_{ji}(k) + O_{ij}(k)) \\ &\quad + \sin^2 \theta_k e^{2\mathcal{J}\psi_k} O_{jj}(k), \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} O'_{ij}(k) &= \cos^2 \theta_k O_{ij}(k) + \cos \theta_k (\sin \theta_k e^{\mathcal{J}\psi_k} O_{jj}(k) - \sin \theta_k e^{-\mathcal{J}\psi_k} O_{ii}(k)) \\ &\quad - \sin^2 \theta_k O_{ji}(k), \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} O'_{ji}(k) &= \cos^2 \theta_k O_{ji}(k) + \cos \theta_k (\sin \theta_k e^{\mathcal{J}\psi_k} O_{ii}(k) - \sin \theta_k e^{-\mathcal{J}\psi_k} O_{jj}(k)) \\ &\quad - \sin^2 \theta_k O_{ij}(k), \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} O'_{jj}(k) &= \cos^2 \theta_k O_{jj}(k) - \cos \theta_k \sin \theta_k e^{-\mathcal{J}\psi_k} (O_{ji}(k) + O_{ij}(k)) \\ &\quad + \sin^2 \theta_k e^{-2\mathcal{J}\psi_k} O_{ii}(k). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Le carré du module de $O'_{ii}(k)$ s'écrit:

$$\begin{aligned} |O'_{ii}(k)|^2 &= \cos^4 \theta_k |O_{ii}(k)|^2 + \sin^4 \theta_k |O_{jj}(k)|^2 + \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \Gamma_{1,k} \\ &\quad + \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \Gamma_{2,k} + \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (\Gamma_{3,k} + \Gamma_{4,k}), \end{aligned} \quad (3.93)$$

et celui de $O'_{jj}(k)$:

$$\begin{aligned} |O'_{jj}(k)|^2 &= \cos^4 \theta_k |O_{jj}(k)|^2 + \sin^4 \theta_k |O_{ii}(k)|^2 - \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \Gamma_{2,k} \\ &\quad - \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \Gamma_{1,k} + \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k (\Gamma_{3,k} + \Gamma_{4,k}), \end{aligned} \quad (3.94)$$

où les coefficients $\Gamma_{i,k}, i \in \{1, \dots, 4\}, \forall k \in \mathbb{K}$ sont les suivants:

$$\Gamma_{1,k} = 2\Re \left\{ \underbrace{O_{ii}^*(k)(O_{ij}(k) + O_{ji}(k))}_{\beta_{1,k}} e^{\mathcal{J}\psi_k} \right\}, \quad (3.95)$$

$$\Gamma_{2,k} = 2\Re \left\{ \underbrace{O_{jj}(k)(O_{ij}^*(k) + O_{ji}^*(k))}_{\beta_{2,k}} e^{\mathcal{J}\psi_k} \right\}, \quad (3.96)$$

$$\Gamma_{3,k} = 2\Re \{ O_{ij}^*(k) O_{ji}(k) \} + |O_{ij}(k)|^2 + |O_{ji}(k)|^2, \quad (3.97)$$

$$\Gamma_{4,k} = 2\Re \left\{ \underbrace{O_{ii}^*(k) O_{jj}(k)}_{\delta_k} e^{2\mathcal{J}\psi_k} \right\}, \quad (3.98)$$

$$\Gamma_{5,k} = |O_{ii}(k)|^2 + |O_{jj}(k)|^2. \quad (3.99)$$

Nous pouvons remarquer que la structure des matrices complexes $\mathbf{O}'(k)$ est différente de celle des matrices $\mathbf{M}'(k)$. En effet les matrices $\mathbf{O}'(k)$ sont symétriques réelles, c'est à dire $\mathbf{O}'(k) = \mathbf{O}'(k)^\top, \forall k \in \mathbb{K}$, et non pas hermitiennes comme les matrices de $\mathbf{M}(k)$.

Nous ne réécrivons pas tout le développement pour ce critère car nous prenons les mêmes méthodes de résolution que celles que nous avons utilisées pour le critère \mathcal{J}_2^2 .

Pour $j \leq N$

La recherche des couples (θ_k, ψ_k) qui maximisent le critère

$$\mathcal{J}_4^0|_{j \leq N} = \sum_{k \in \mathbb{K}} |O'_{ii}(k)|^2 + |O'_{jj}(k)|^2. \quad (3.100)$$

s'effectue en cherchant les vecteurs propres dominants des matrices \mathbf{J}_k de (3.65), mais avec les coefficients suivants:

$$J_{11,k} = \Gamma_{5,k} \quad (3.101)$$

$$J_{12,k} = \Re\{\beta_k\}/2 \quad (3.102)$$

$$J_{13,k} = -\Im\{\beta_k\}/2 \quad (3.103)$$

$$J_{23,k} = -\Im\{\delta_k\} \quad (3.104)$$

$$J_{22,k} = \frac{\Gamma_{5,k} + \Gamma_{3,k}}{2} + \Re\{\delta_k\} \quad (3.105)$$

$$J_{33,k} = \frac{\Gamma_{5,k} + \Gamma_{3,k}}{2} - \Re\{\delta_k\}. \quad (3.106)$$

où $\beta_k = \beta_{1,k} - \beta_{2,k}$.

Pour $j > N$

Le critère devient:

$$\mathcal{J}_4^0|_{j > N} = \sum_{k \in \mathbb{K}} |O'_{ii}(k)|^2. \quad (3.107)$$

Nous utilisons également la méthode du résultant pour résoudre le système constitué des deux dérivées. En effet, la structure de (3.93) est identique à celle (3.50), avec les changements suivants

$$\Lambda_3 \Rightarrow \Gamma_3, \quad (3.108)$$

$$\alpha_i \Rightarrow \beta_i, \quad i \in \{1,2\}, \quad (3.109)$$

$$\gamma \Rightarrow \delta \quad (3.110)$$

3.6 Performances de PAJOD

Nous avons testé l'algorithme PAJOD pour différentes valeurs des paramètres K (longueur du canal), L (longueur de l'égaliseur), n (taille des blocs d'observation) et ρ (variance du bruit) à partir de la relation:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \sum_{m=0}^{K+L} \mathbf{G}(m)\mathbf{s}(n-m) + \rho \sum_{m=0}^{L-1} \mathbf{H}(m)\mathbf{b}(n-m) \quad (3.111)$$

où \mathbf{G} est le filtre global (canal et égaliseur) et \mathbf{b} le bruit de variance unité. Les coefficients complexes du canal de transmission sont générés aléatoirement suivant une loi gaussienne centrée et réduite.

Nous avons par ailleurs effectué les simulations avec des modulations QPSK, PSK-8 et QAM-16. Les simulations ont été répétées 25 fois chacune et, comme les paramètres des canaux sont générés aléatoirement, seule la médiane est retenue pour les performances. Chaque égaliseur retourné est testé avec une séquence différente (10000 symboles) de la séquence utilisée par l'algorithme, permettant ainsi de tester la fiabilité de l'algorithme.

Les figures 3.7 illustrent les performances de PAJOD pour un modulation PSK-8 et pour des longueurs de canaux et d'égaliseurs identiques: $K = L = 3$. Nous remarquons que des blocs de 400 symboles suffisent pour égaliser puisque pour un rapport signal à bruit (RSB) supérieur à 20dB, il n'y a plus aucune erreur, quelque soit la longueur des séquences d'observation. La *distance*⁹ confirme le bon comportement de PAJOD avec de si petites séquences. Pour 400 symboles, la distance reste en dessous de 0.2 à partir de 15dB de RSB.

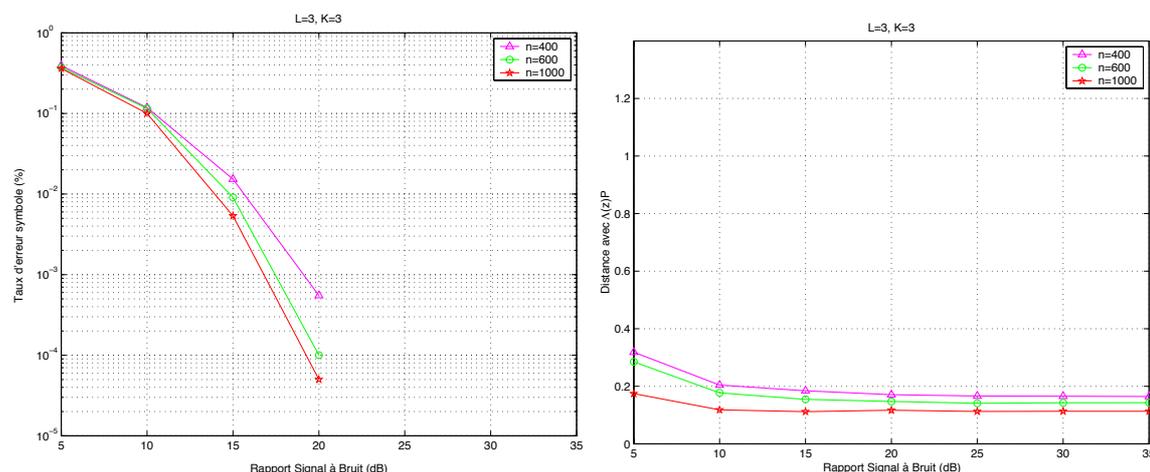


FIG. 3.7 – Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 3$.

Nous avons alors testé l'algorithme PAJOD avec des séquences plus petites de l'ordre de 200 symboles. Les résultats sont présentés figure 3.8. Nous constatons bien évidemment que les performances se dégradent: le taux d'erreur symboles est supérieur à 1% pour un RSB de 20dB et la distance reste au dessus de 0.2. Par ailleurs, cette figure affine les performances obtenues pour 600 et 1000 symboles pour un RSB compris entre 2 et 20dB.

Les figures 3.9 ont été obtenues avec les mêmes paramètres que précédemment sauf que la longueur de l'égaliseur a été augmentée: $L = 4$ et $K = 3$. Nous constatons que les performances se dégradent un peu puisque maintenant pour 400 symboles, le taux d'erreur symboles ne s'annule jamais pour un RSB inférieur à 35dB. La distance pour de telles séquences reste au dessus de 0.2, et il en est de même avec des séquences de 800 symboles.

9. voir section 2.7.2 page 45

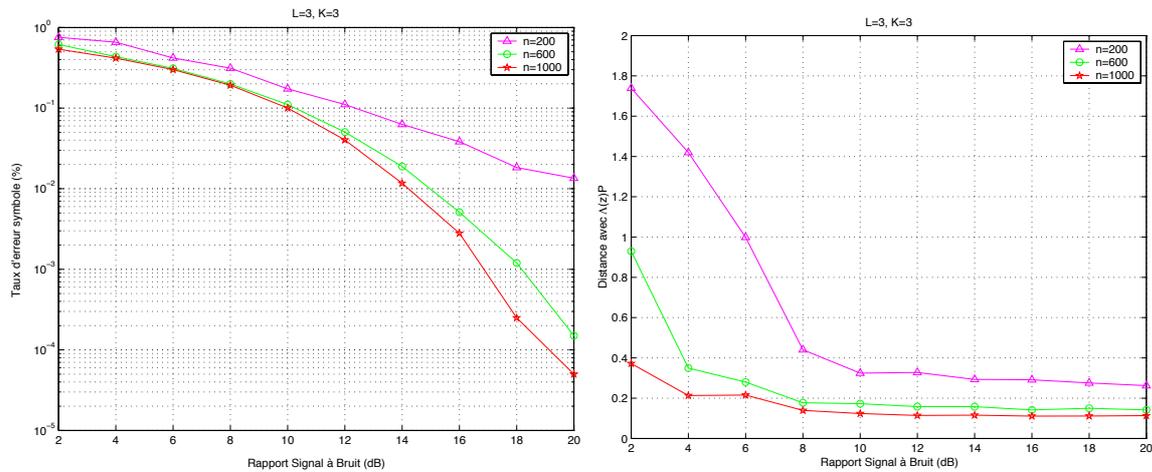


FIG. 3.8 – Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 4$.

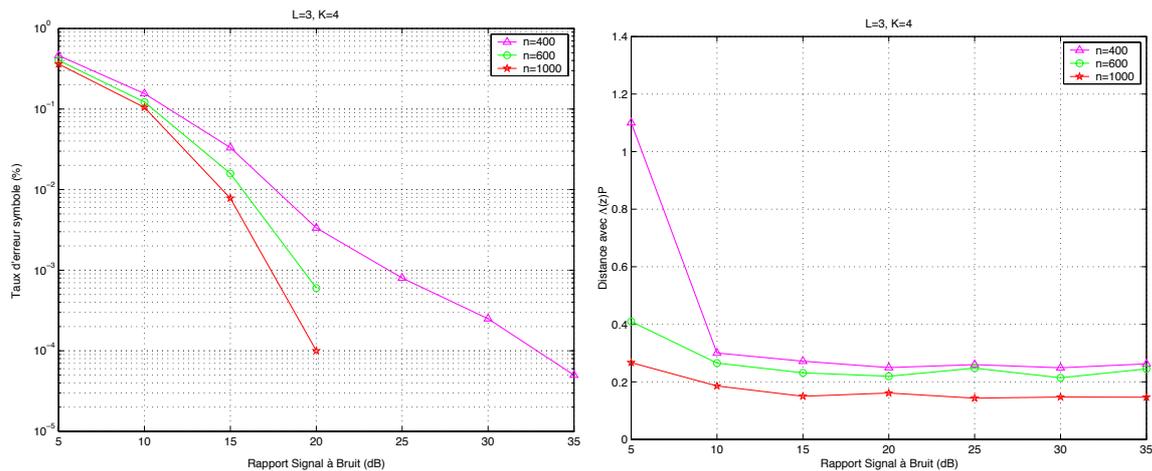


FIG. 3.9 – Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 4$.

Ainsi, nous constatons que la longueur de l'égaliseur est importante pour l'égalisation. L'égalisation avec l'algorithme PAJOD ne fonctionne que lorsque $K \leq L$. Les figures 3.10 permettent de comparer les taux d'erreur symboles et les distances avec des égaliseurs de tailles différentes et pour 800 symboles. Nous voyons clairement que lorsque $L < K$, il n'y a pratiquement pas d'égalisation, mais lorsque $L \geq K$, les performances sont pratiquement les mêmes. Les meilleurs performances sont obtenues lorsque $K = L$.

Nous avons ensuite testé l'algorithme PAJOD avec des signaux modulés QAM-16. Les figures 3.11 nous montrent les performances obtenues avec de tels signaux, pour $K = L = 3$. Étant donné le nombre de valeurs de l'alphabet d'une modulation QAM-16, nous devons utiliser des observations plus grandes. En effet, il s'avère insuffisant d'utiliser 600 symboles pour

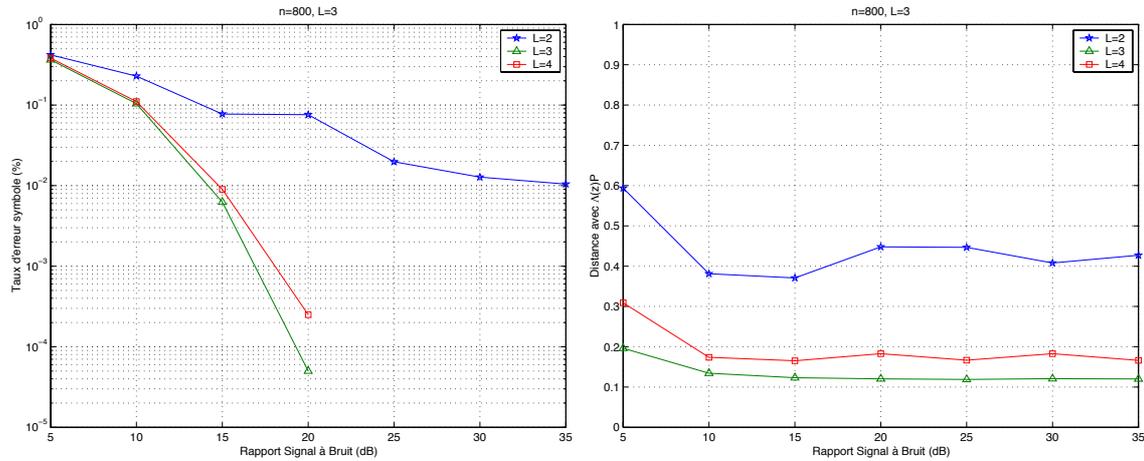


FIG. 3.10 – Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en PSK-8, des observations de 800 symboles, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 2,3,4$.

égaliser le système. Pour 1200 symboles nous obtenons de bonnes performances puisque nous sommes en dessous de 0.01% d'erreur pour un RSB de 26dB, ce que nous obtenons avec 1800 symboles pour 2dB de moins de RSB. Les distances sont quasiment identiques pour 1000 et 1200 symboles. Seule la distance pour 600 symboles témoigne de l'insuffisance du nombre de symboles observés permettant de mener à bien l'égalisation.

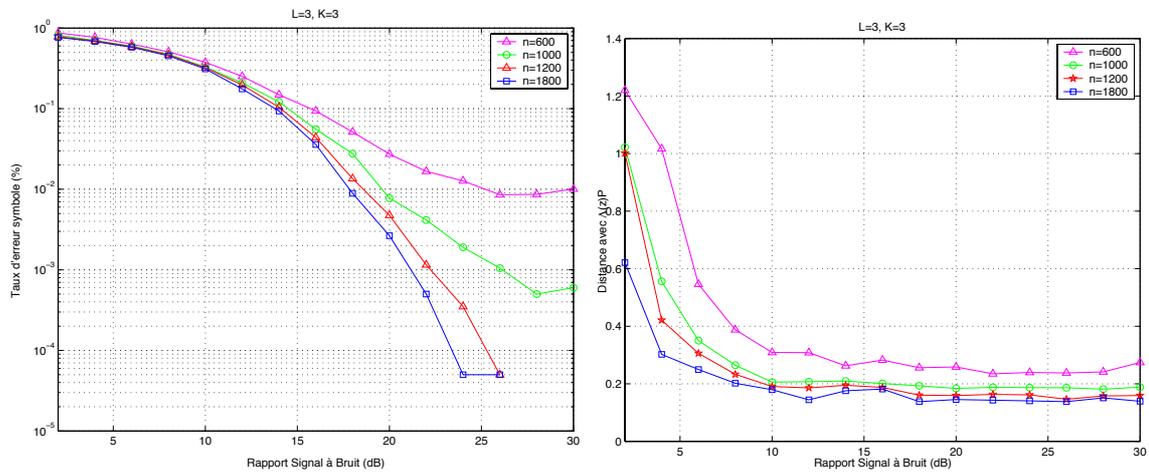


FIG. 3.11 – Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en QAM-16, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 3$.

Nous pouvons remarquer grâce à la figure 3.12 que la longueur de l'égaliseur a une influence plus importante avec des signaux QAM-16 qu'avec des signaux PSK-8. En effet, lorsque $L > K$, les taux d'erreur symboles restent importants puisqu'ils ne descendent pas en dessous de 0.6% d'erreur jusqu'à 35dB de RSB. Les distances restent au dessus de 0.2. Les meilleurs résultats sont obtenus pour $K = L$ puisque nous n'avons que 0.02% d'erreur à

35dB, soit 30 fois moins qu'avec un égaliseur de longueur $K + 1$.

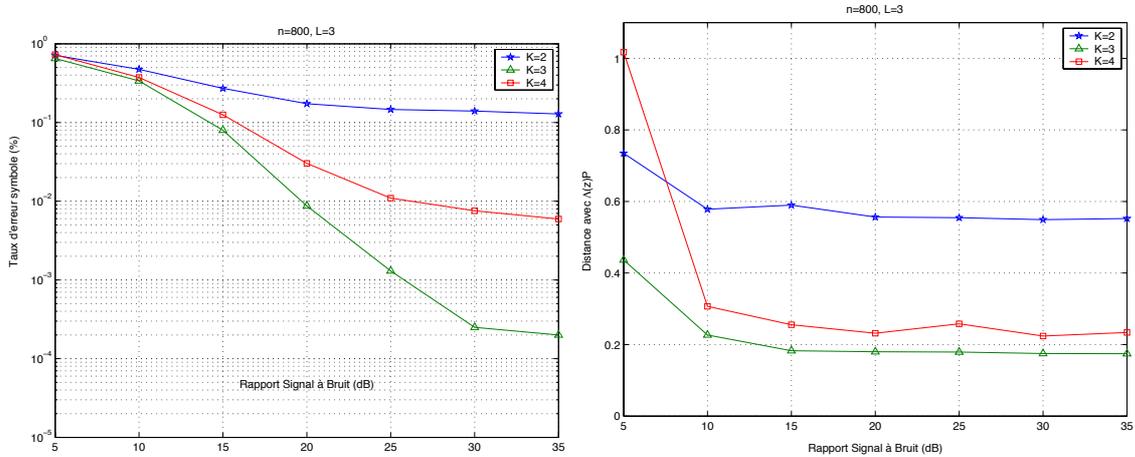


FIG. 3.12 – Taux d'erreur symboles et distance obtenus avec 2 signaux modulés en QAM-16, des observations de 800 symboles, des canaux de longueur $K = 3$ et des égaliseurs de longueur $L = 2,3,4$.

Nous avons ensuite testé l'algorithme PAJOD avec des observations constituées de 3 signaux de modulations différentes (QPSK, PSK-8 et QAM16). Les taux d'erreur symboles obtenus correspondent aux moyennes des taux d'erreur symboles de chacun des signaux. Nous avons testé l'algorithme avec des canaux et des égaliseurs de longueurs identiques $K = L = 3$ avec des séquences d'observations de 400, 800 et 1200 symboles. La figure 3.13 illustre ces performances. Le taux d'erreur est bien plus important qu'avec seulement 2 signaux identiques, mais nous devons remarquer qu'avec 1200 symboles uniquement, nous passons en dessous de 0.8% d'erreur à partir d'un RSB de 20dB. Cependant, nous voyons clairement que les séquences de 400 symboles sont insuffisantes. Les distances confirment cela car les distances sont supérieures à 1 quelle que soit la longueur des observations.

3.7 Conclusion du chapitre

Nous avons vu dans ce chapitre un algorithme d'égalisation aveugle destiné aux systèmes multi-utilisateurs spatio-temporels. L'objectif de cet algorithme est de diagonaliser conjointement un ensemble de tranches d'un tenseur des cumulants. Pour cela, nous avons considéré un blanchiment préalable des observations afin de d'obtenir un mélange para-unitaire. Finalement, nous avons montré que l'algorithme pouvait utiliser trois contrastes différents, en fonction de la nature des signaux observés. Les simulations nous montrent le bon comportement de l'algorithme. Cependant, les égaliseurs retournés par PAJOD sont semi-unitaires et non para-unitaire. Ainsi, nous présentons dans le chapitre qui suit, un algorithme ayant les mêmes hypothèses que PAJOD, mais qui impose la contrainte de para-unitarité sur l'égaliseur.

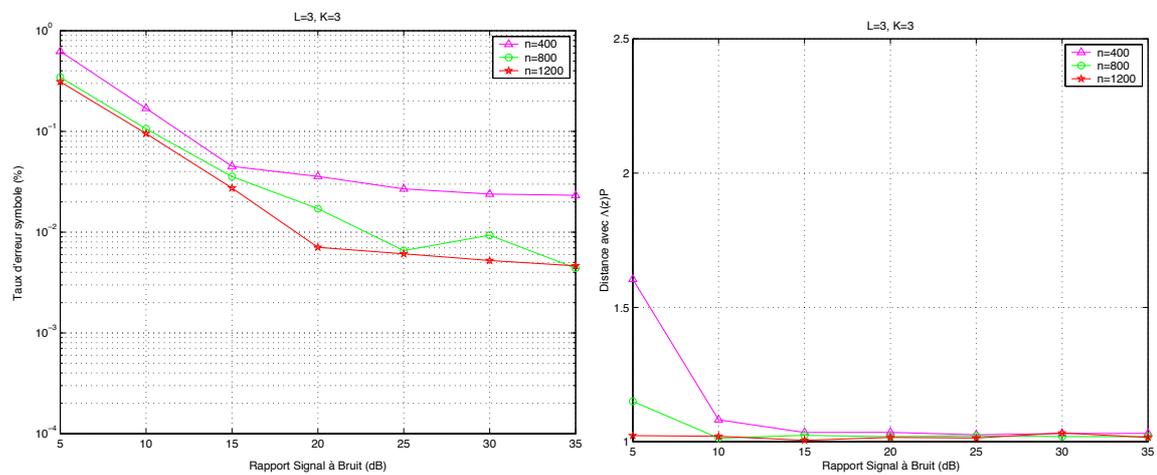


FIG. 3.13 – Taux d'erreur symbole obtenus lorsque 3 signaux de modulations différentes sont mélangés. Les longueurs sont telles que $K = 3$ et $L = 3$

Chapitre 4

Algorithme PAFA

Ce chapitre présente un algorithme d'égalisation aveugle basé sur la factorisation para-unitaire (PAFA) exacte du filtre égaliseur. Comme nous l'avons vu dans la chapitre 3, la matrice de transfert du canal est para-unitaire lorsque les signaux observés sont spatialement et temporellement blancs à l'ordre 2. Cependant, l'algorithme PAJOD du chapitre 3 retourne un égaliseur semi-unitaire et non para-unitaire. Notre principale motivation pour ce chapitre est alors d'obtenir un égaliseur para-unitaire afin de séparer les sources. Pour cela, nous présentons dans un premier temps la factorisation para-unitaire de l'égaliseur. Puis dans un deuxième temps, nous déterminons les paramètres de cette factorisation à l'aide des angles des matrices de rotation et d'un critère de contraste. Pour clore ce chapitre, nous montrons les performances de l'algorithme ainsi construit.

4.1 Factorisation para-unitaire

Nous utilisons les mêmes hypothèses **S1**, **S2**, **S3** et **F4** que pour l'algorithme PAJOD du chapitre 3, avec un système de communications numériques multi-utilisateurs MIMO tel que nous le décrivons page 29.

L'algorithme de ce chapitre utilise la factorisation para-unitaire de Vaidyanathan [74] étendue au cas des matrices à coefficients complexes. Cette factorisation fait appel aux matrices de rotation de Givens, ce qui permet de développer un algorithme itératif de type *Jacobi*, comme l'algorithme PAJOD. La factorisation para-unitaire de l'égaliseur est décrite par la proposition suivante:

Proposition 4.1.1 *Soit $\mathbf{H}(z) \in \mathbb{C}[z]^{N \times N}$ un filtre FIR para-unitaire de longueur $L \geq 0$ et de degré de McMillan¹ λ_h . On peut factoriser la matrice polynomiale $\mathbf{H}(z)$ sous la forme:*

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{A}(z)\mathbf{Q}\mathbf{B}(z) \quad (4.1)$$

1. c'est-à-dire le degré du déterminant de la matrice polynomiale [74, p. 737] [44]

où $\mathbf{A}(z)$ et $\mathbf{B}(z)$ sont des filtres FIR para-unitaires de degrés de McMillan respectifs λ_a et λ_b telles que $\lambda_a, \lambda_b \in [0, \lambda_h]$, $\lambda_a + \lambda_b = \lambda_h$, et $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est une matrice unitaire.

Preuve. Il suffit d'étendre la factorisation para-unitaire de [32] à des matrices polynomiales à coefficients complexes:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{Q}_{\lambda_h} \mathbf{Z}(z) \mathbf{Q}_{\lambda_h-1} \dots \mathbf{Z}(z) \mathbf{Q}_1 \mathbf{Z}(z) \mathbf{Q}_0 \quad (4.2)$$

où les matrices $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{C}^{N \times N}$ sont unitaires pour tout $p \in \mathbb{P} = [0, \lambda_h]$, avec le degré de McMillan de $\mathbf{H}(z)$ vérifiant $\lambda_h \geq L$, et $\mathbf{Z}(z) \in \mathbb{C}[z]^{N \times N}$ la matrice diagonale:

$$\mathbf{Z}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Lorsque la longueur du filtre \mathbf{A} vérifie $0 < \lambda_a \leq \lambda_h - p$, nous posons:

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{Q}_{\lambda_h} \mathbf{Z}(z) \dots \mathbf{Q}_{p+1} \mathbf{Z}(z) \quad (4.4)$$

et lorsque la longueur λ_b vérifie $0 < \lambda_b \leq p$, nous avons:

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{Z}(z) \mathbf{Q}_{p-1} \dots \mathbf{Z}(z) \mathbf{Q}_0. \quad (4.5)$$

De plus, lorsque $\lambda_a = 0$ (respectivement $\lambda_b = 0$), on peut remplacer la matrice polynomiale $\mathbf{A}(z)$ (respectivement $\mathbf{B}(z)$) par \mathbf{I}_N .

Ainsi, pour un indice $p \in \mathbb{P}$, il est possible de factoriser tout filtre para-unitaire de degré de McMillan λ_h tel que $\mathbf{H}(z) = \mathbf{A}(z) \mathbf{Q}_p \mathbf{B}(z)$ \diamond

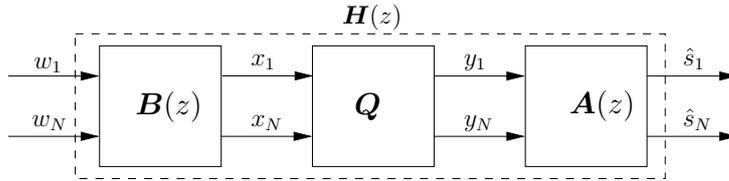


FIG. 4.1 – Factorisation de l'égaliseur para-unitaire.

La figure 4.1 illustre cette factorisation para-unitaire de l'égaliseur $\mathbf{H}(z)$ pour le vecteur des observations \mathbf{w} . On obtient en sortie du filtre para-unitaire $\mathbf{B}(z)$ le vecteur \mathbf{x} , en sortie du filtre unitaire \mathbf{Q}_p le vecteur \mathbf{y} et en sortie de l'égaliseur \mathbf{H} , le vecteur des signaux estimés $\hat{\mathbf{s}}$.

4.2 Relations multilinéaires sur les cumulants

Dans la section 2.5 nous avons vu que les cumulants d'ordre 4 permettent de mesurer l'indépendance statistique, et donc de séparer les signaux mélangés. Nous utilisons ici les mêmes

outils statistiques que ceux utilisés avec PAJOD. Commençons par définir les cumulants d'ordre 4 des observations \mathbf{w} :

$$\mathbb{C}_2^{2,\mathbf{w}}[\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}] = \text{Cum}(w_{j_1}(n - \nu_1), w_{j_2}^*(n - \nu_2), w_{j_3}(n - \nu_3), w_{j_4}^*(n - \nu_4)) \quad (4.6)$$

où les éléments du vecteur $\mathbf{j} = [j_1, \dots, j_4]$ prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[1, N]$ et les éléments de $\boldsymbol{\nu}$ dans \mathbb{N}^+ .

En développant les relations linéaires entre les entrées et les sorties du filtre $\mathbf{H}(z)$, nous obtenons les signaux estimés $\hat{\mathbf{s}}$ en fonction des observations \mathbf{w} :

$$\hat{s}_i(n) = \sum_{q_1, q_2, q_3, m, l} A_{iq_1}(m) Q_{q_1 q_2} B_{q_2 q_3}(l) w_{q_3}(n - m - l) \quad (4.7)$$

$$= \sum_{q_1, q_2, m} A_{iq_1}(m) Q_{q_1 q_2} x_{q_2}(n - m), \quad (4.8)$$

avec $\{q_1, q_2, q_3\} \in [1, N]$, et où les x_{q_2} sont les sorties du filtre $\mathbf{B}(z)$ et s'expriment en fonction des observations

$$x_{q_2}(n - m) = \sum_{q_3, l} B_{q_2 q_3}(l) w_{q_3}(n - m - l). \quad (4.9)$$

Écrivons par ailleurs la sortie du filtre \mathbf{Q} en fonction des observations:

$$y_{q_1}(n - m) = \sum_{q_2, q_3, l} Q_{q_1 q_2} B_{q_2 q_3}(l) w_{q_3}(n - m - l). \quad (4.10)$$

À partir de la relation (4.8) nous pouvons exprimer les relations multi-linéaires (définition 2.5.3 page 42) entre les cumulants du vecteur \mathbf{x} et les cumulants du vecteur $\hat{\mathbf{s}}$:

$$\mathbb{C}_2^{2,\hat{\mathbf{s}}}[\mathbf{i}; \mathbf{o}] = \sum_{\mathbf{a}} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \sum_{\mathbf{q}} A_{i_1 q_1}(\tau_1) A_{i_2 q_2}^*(\tau_2) A_{i_3 q_3}(\tau_3) A_{i_4 q_4}^*(\tau_4) Q_{q_1 a_1} Q_{q_2 a_2}^* Q_{q_3 a_3} Q_{q_4 a_4}^* \mathbb{C}_2^{2,\mathbf{x}}[\mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}] \quad (4.11)$$

avec $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_4]$, $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_4]$, $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_4]$ et $\mathbf{o} = [0, 0, 0, 0]$ où toutes les composantes des vecteurs \mathbf{i} , \mathbf{q} et \mathbf{a} prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[1, N]$. Comme $\hat{\mathbf{s}}$ est la sortie du filtre $\mathbf{A}(z)$, alors τ_i appartient à l'intervalle $[0, \lambda_a]$.

Écrivons maintenant la relation multilinéaire liant les cumulants des observations \mathbf{w} à ceux obtenus en sortie du filtre $\mathbf{B}(z)$:

$$\mathbb{C}_2^{2,\mathbf{x}}[\mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}] = \sum_{\boldsymbol{\rho}} \sum_{\mathbf{j}} B_{a_1 j_1}(\rho_1) B_{a_2 j_2}^*(\rho_2) B_{a_3 j_3}(\rho_3) B_{a_4 j_4}^*(\rho_4) \mathbb{C}_2^{2,\mathbf{w}}[\mathbf{j}; \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\rho}] \quad (4.12)$$

avec $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \dots, \rho_4]$ et $\mathbf{j} = [j_1, \dots, j_4]$, où chaque ρ_i appartient à l'intervalle $[0, \lambda_b]$.

4.3 Rotations de Givens

Nous avons vu dans la proposition 4.1.1 (page 73) que toutes les matrices \mathbf{Q}_p sont unitaires $\forall p \in \mathbb{P}$. Nous pouvons donc utiliser les rotations de Givens introduites dans le chapitre 3

afin de paramétrer ces matrices unitaires. En effet, toute matrice unitaire de taille $N \times N$ peut être écrite comme le produit de $M = N(N - 1)/2$ rotations de Givens [37, p. 215]. Ces M rotations décrivent toutes les combinaisons possibles des indices (i, j) telles que $1 \leq i < j \leq N$. Notons $\Theta[i, j](\theta, \phi)$ la matrice de rotation de Givens qui agit sur la paire (i, j) avec les angles θ et ϕ (voir (3.36) page 56). Ces rotations nous permettent de mettre en place un algorithme itératif afin de calculer l'égaliseur $\mathbf{H}(z)$ para-unitaire, pouvant séparer les signaux tout en respectant l'hypothèse **F4**.

Remarquons que d'après la proposition 4.1.1, la factorisation de l'égaliseur nécessite $\lambda_h + 1$ matrices unitaires. Par exemple, le filtre para-unitaire défini par $\text{diag}(\mathbf{H}(z)) = [-z^{-1}, z^{-1}]$ et 0 ailleurs, nécessite $\lambda_h = \text{deg}[\det(\mathbf{H}(z))] = 2$ matrices diagonales $\mathbf{Z}(z)$ afin d'être factorisée. En effet, $\mathbf{H}(z)$ peut être factorisée de la façon suivante:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Z}(z) \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Z}(z) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (4.13)$$

avec

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Les angles correspondants sont dans ce cas $(\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \phi_2 = 0)$ et $(\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \phi_1 = \frac{\pi}{2})$. L'exponentielle, quant à elle, fait partie de la matrice inconnue $\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}$, comme cela est expliqué dans la section 2.3.2 page 31. Lorsque $L \geq 1$, il est possible de regrouper toutes les exponentielles dans la matrice $\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}$. En utilisant la proposition 4.1.1, nous pouvons factoriser une simple matrice de reflection:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

La factorisation (4.1) est donc capable de factoriser n'importe quelle matrice unitaire (dans ce cas $\mathbf{A}(z) = \mathbf{B}(z) = \mathbf{I}$).

4.4 Critère d'optimisation

La recherche de l'égaliseur permettant de séparer les sources peut être conduite à l'aide du contraste défini dans [13]. Celui-ci utilise les statistiques d'ordre supérieur des observations par l'intermédiaire des cumulants que nous avons définis précédemment. La proposition suivante reprend ce contraste pour notre factorisation:

Proposition 4.4.1 *Considérons des sources avec des kurtosis² de même signe, $\epsilon = \pm 1$, la séparation de ces sources uniquement à partir des observations \mathbf{w} est réalisée en maximisant le contraste [13]:*

$$\mathcal{J}_{1,4}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}) = \epsilon \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_2^{2, \hat{\mathbf{s}}}[i, i, i, i; \mathbf{o}] \quad (4.16)$$

2. voir définition 2.5.5 page 40

où les cumulants des estimations $\hat{\mathbf{s}}$ sont définis d'après (4.11):

$$\mathcal{C}_2^{2,\hat{\mathbf{s}}}[i,i,i,i;\mathbf{o}] = \sum_{\mathbf{a}} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \sum_{\mathbf{q}} A_{iq_1}(\tau_1) A_{iq_2}^*(\tau_2) A_{iq_3}(\tau_3) A_{iq_4}^*(\tau_4) Q_{q_1 a_1} Q_{q_2 a_2}^* Q_{q_3 a_3} Q_{q_4 a_4}^* \mathcal{C}_2^{2,\mathbf{x}}[\mathbf{a};\boldsymbol{\tau}]. \quad (4.17)$$

L'égaliseur $\mathbf{H}(z)$ est alors estimé par

$$\mathbf{H} = \underset{\mathbb{Q}}{\text{Arg max}} \mathcal{J}_{1,4}(\mathbf{H},\mathbf{x}) \quad (4.18)$$

où \mathbb{Q} représente l'ensemble des rotations de Givens de dimensions $N \times N$.

Le critère d'optimisation $\mathcal{J}_{1,4}$ est un contraste tel que nous l'avons défini dans la section 2.6.2 page 44. La maximisation de $\mathcal{J}_{1,4}$ s'effectue pour chacune des paires (θ,ϕ) traitées. Les valeurs de $\mathcal{J}_{1,4}$ convergent alors vers un maximum comme l'illustre l'exemple de la figure 4.2 obtenu avec l'algorithme PAFA.

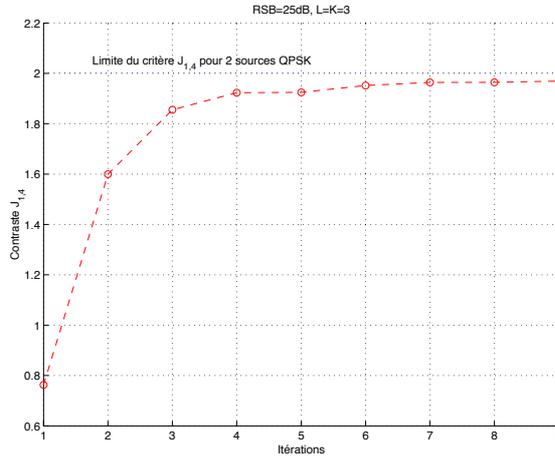


FIG. 4.2 – Exemple d'évolution du contraste $\mathcal{J}_{1,4}(\mathbf{H},\mathbf{x})$ $RSB= 25dB$ et $L = 3$ et 1000 échantillons.

4.5 Algorithme itératif de type Jacobi

Pour détailler la méthode permettant d'atteindre le maximum du contraste (4.16), nous prendrons l'exemple d'une seule itération de l'algorithme, c'est à dire une seule rotation de Givens. L'algorithme effectue quant à lui un balayage des $M = \frac{N(N-1)}{2}$ paires pour chaque matrice unitaire \mathbf{Q}_p .

L'objectif à chaque itération est de trouver la paire (θ,ϕ) qui maximise le contraste (4.16) indépendamment des autres paires. Pour cela, nous devons réécrire l'équation (4.17) en fonction de θ et ϕ . Nous développons donc l'expression de cumulants (4.17), puis nous regroupons les termes en fonction de θ ou de ϕ , ce qui nous donne pour les cumulants des

estimations $\hat{\mathbf{s}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2^{2,\hat{\mathbf{s}}}[i,i,i,i;\mathbf{o}] &= \mathcal{K}_{(4)}^{(0)} \cos^4 \theta + \mathcal{K}_{(3)}^{(1)} \cos^3 \theta \sin \theta e^{j\phi} + \mathcal{K}_{(3)}^{(-1)} \cos^3 \theta \sin \theta e^{-j\phi} + \mathcal{K}_{(2)}^{(0)} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&\quad + \mathcal{K}_{(2)}^{(2)} \cos^2 \theta \sin^2 \theta e^{2j\phi} + \mathcal{K}_{(2)}^{(-2)} \cos^2 \theta \sin^2 \theta e^{-2j\phi} + \mathcal{K}_{(1)}^{(1)} \cos \theta \sin^3 \theta e^{j\phi} \\
&\quad + \mathcal{K}_{(1)}^{(-1)} \cos \theta \sin^3 \theta e^{-j\phi} + \mathcal{K}_{(1)}^{(3)} \cos \theta \sin^3 \theta e^{3j\phi} + \mathcal{K}_{(1)}^{(-3)} \cos \theta \sin^3 \theta e^{-3j\phi} \\
&\quad + \mathcal{K}_{(0)}^{(0)} \sin^4 \theta + \mathcal{K}_{(0)}^{(4)} \sin^4 \theta e^{4j\phi} + \mathcal{K}_{(0)}^{(-4)} \sin^4 \theta e^{-4j\phi} \\
&\quad + \mathcal{K}_{(0)}^{(2)} \sin^4 \theta e^{2j\phi} + \mathcal{K}_{(0)}^{(-2)} \sin^4 \theta e^{-2j\phi}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

où les coefficients $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)}$, avec $\alpha \in [0,4]$ et $\eta \in [-4,4]$, sont les quadricovariances définies par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)} \cos^\alpha \theta \sin^{4-\alpha} \theta e^{j\eta\phi} \\
= \sum_{\boldsymbol{\tau}} A_{i_{q_1}}(\tau_1) A_{i_{q_2}}^*(\tau_2) A_{i_{q_3}}(\tau_3) A_{i_{q_4}}^*(\tau_4) \mathbf{C}_2^{2,\mathbf{x}}[\mathbf{a};\boldsymbol{\tau}] \cos^\alpha \theta \sin^{4-\alpha} \theta e^{j\eta\phi}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Chaque coefficient $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)}$ dépend des indices des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{q} puisque nous effectuons le remplacement suivant:

$$Q_{q_1 a_1} Q_{q_2 a_2}^* Q_{q_3 a_3} Q_{q_4 a_4}^* \leftrightarrow \cos^\alpha \theta \sin^{4-\alpha} \theta e^{j\eta\phi}.$$

L'annexe C.1 détaille les valeurs des indices des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{q} pour chaque coefficient $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)}$.

Notons que l'expression (4.19) s'écrit plus simplement en posant $\beta = \frac{\eta-\alpha+4}{2}$:

$$\mathbf{C}_2^{2,\hat{\mathbf{s}}}[i,i,i,i;\mathbf{o}] = \sum_{\alpha=0}^4 \left(\sum_{\beta=0}^{4-\alpha} \mathcal{K}_{(\alpha)}^{(2\beta+\alpha-4)} \cos^\alpha \theta \sin^{4-\alpha} \theta e^{j(2\beta+\alpha-4)\phi} \right). \tag{4.21}$$

Le calcul terme à terme de chaque valeur de $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)}$ ralentit l'algorithme si ce calcul n'est pas optimisé. Pour éviter cela, nous réduisons le nombre de boucles de l'algorithme en rangeant les valeurs des cumulants dans un vecteur et les coefficients $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)}$ dans une matrice. Les simplifications de l'algorithme sont décrites dans l'annexe C.2. Grâce à cette méthode, le nombre de boucles utilisées pour le calcul de $\mathbf{C}_2^{2,\hat{\mathbf{s}}}[i,i,i,i;\mathbf{o}]$ est divisé par N^4 car sans ces simplifications le calcul nécessite $(L+1)^4 N^8$ boucles (équation (4.17)) alors qu'avec la méthode commentée dans l'annexe C.2 le calcul s'effectue avec $((L+1)N)^4$ boucles. Par ailleurs, cette méthode utilise moins de mémoire pour conserver les matrices durant les calculs. Seul le tenseur des cumulants $\mathbf{C}_2^{2,\mathbf{x}}[\mathbf{a};\boldsymbol{\tau}]$, qui est calculé au début de chaque boucle, nécessite une taille mémoire plus importante pouvant conserver les $N^4(L+1)^4$ valeurs.

Nous effectuons dans (4.19) le changement de variables classique $t = \tan \frac{\phi}{2}$ et $u = \tan \theta$, ce qui revient à remplacer les éléments suivants: $\cos \phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin \phi = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et $\sin \theta = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$.

Le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle obtenue sont tous deux de degré global maximum $t^8 u^4$. Pour trouver les points stationnaires de $\mathcal{J}_{1,4}$, il suffit de chercher les racines du système polynomial constitué des deux dérivées de notre critère et de prendre les racines en u qui maximisent $\mathcal{J}_{1,4}$. Soit le système

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(u,t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{J}_{1,4}}{\partial u} \\ \Phi_2(u,t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{J}_{1,4}}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (4.22)$$

Le polynôme $\Phi_2(u,t)$ présente une racine évidente $u = 0$, ce qui nous permet de simplifier le système. Les polynômes obtenus sont alors de degrés différents: degré global $t^8 u^4$ pour $\Phi_1(u,t)$, et degré global $t^8 u^3$ pour $\Phi_2(u,t)$. En considérant uniquement la variable u pour $\Phi_1(u,t)$ et $\Phi_2(u,t)$, nous pouvons regrouper tous les termes de même degré en u . Le système (4.22) s'écrit sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(u,t) &= \sum_{k=0}^4 \chi_{4-k}(t) u^k \\ \Phi_2(u,t) &= \sum_{k=0}^3 \xi_{3-k}(t) u^k \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

où les polynomes $\chi_k(t)$ et $\xi_k(t)$ sont décrit dans l'annexe A.

Le système polynomial (4.23) admet une solution si et seulement si son résultant³ est nul [22]. Nous devons donc résoudre:

$$\begin{vmatrix} \xi_0(t) & 0 & 0 & 0 & \chi_0(t) & 0 & 0 \\ \xi_1(t) & \xi_0(t) & 0 & 0 & \chi_1(t) & \chi_0(t) & 0 \\ \xi_2(t) & \xi_1(t) & \xi_0(t) & 0 & \chi_2(t) & \chi_1(t) & \chi_0(t) \\ \xi_3(t) & \xi_2(t) & \xi_1(t) & \xi_0(t) & \chi_3(t) & \chi_2(t) & \chi_1(t) \\ 0 & \xi_3(t) & \xi_2(t) & \xi_1(t) & \chi_4(t) & \chi_3(t) & \chi_2(t) \\ 0 & 0 & \xi_3(t) & \xi_2(t) & 0 & \chi_4(t) & \chi_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & \xi_3(t) & 0 & 0 & \chi_4(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.24)$$

Le polynôme obtenu est de degré global t^{56} . Cependant, nous avons remarqué que ce système n'admet généralement pas plus de 16 racines réelles. Celles-ci sont ensuite remplacées dans le cumulatif (4.19) afin de sélectionner la solution qui permet d'atteindre le maximum global de la fonction de contraste (4.18).

L'algorithme PAFA est résumé ci-dessous:

Algorithme:

Calculer $C_2^{2,w}(j; \tau + \rho)$

Poser $M := N(N-1)/2$ et $T := \lceil \sqrt{L} \rceil + 1$

3. déterminant de la matrice de Sylvester du système

Poser $t := 1..T$ et $k := 0..M\lambda_b$
Initialiser $\forall k: \theta_k = 0, \phi_k = 0$
Pour chaque t **faire**
 Pour chaque k **faire**
 Calculer $\mathbf{C}_2^{2,\mathbf{x}}(\mathbf{a}; \boldsymbol{\tau})$
 Chercher θ_k et ϕ_k qui maximisent $\mathcal{J}_{1,4}$
 Actualiser filtres \mathbf{Q}_p , $\mathbf{A}(z)$ et $\mathbf{B}(z)$
Retourner $\mathbf{H}(z)$

Le tenseur des cumulants $\mathbf{C}_2^{2,\mathbf{x}}(\mathbf{a}; \boldsymbol{\tau})$ est composé de $N^2(L - \lambda_b + 1)^2$ matrices, chacune de taille $N(L - \lambda_b + 1) \times N(L - \lambda_b + 1)$. L'algorithme doit donc enregistrer $N^4(L - \lambda_b + 1)^4$ valeurs en mémoire. Ce calcul ne peut généralement pas être simplifié puisqu'il est nécessaire d'avoir des valeurs exactes pour le calcul des racines du système polynomial (4.23).

Il est possible d'augmenter la précision des calculs des angles θ et ϕ en effectuant $T = \lceil \sqrt{L} \rceil + 1$ balayages. En effet, la première boucle permet d'avoir une estimation des angles, mais ceux-ci ne sont pas forcément précis étant donné que dans cette première boucle, les autres angles sont tous nuls (fixés à l'étape **Initialiser**). Il est donc possible d'avoir une plus grande précision dans les valeurs de ces angles lorsque la boucle pour chaque k est répétée plusieurs fois.

4.6 Performances de PAFA

Nous avons testé l'algorithme PAFA avec des signaux de modulations QPSK, PSK-8 et QAM16, pour différentes tailles de blocs d'information. Les canaux de communication sont para-unitaires afin de conserver des signaux blancs à l'ordre deux. Pour chaque canal généré aléatoirement (loi gaussienne, centrée et réduite), on génère une séquence d'observations bruitées telle que:

$$\mathbf{w}(n) = \sum_{k=0}^K \mathbf{C}(k)\mathbf{s}(n-k) + \rho\mathbf{v}(n)$$

où $\mathbf{v}(n)$ est un bruit blanc gaussien complexe et circulaire, et où le paramètre ρ est introduit de manière à contrôler le RSB, et est défini par:

$$RSB_{dB} = -20 \log_{10} \rho. \quad (4.25)$$

Nous pouvons comparer les *distances* des égaliseurs obtenus avec celles des égaliseurs qui minimisent l'erreur quadratique moyenne (MMSE). L'égaliseur MMSE, dans le cadre de mélanges convolutifs MIMO, est défini par:

$$\mathbf{H}_{MMSE}(z) = \mathbf{R}_s(z)\mathbf{C}^H(1/z^*)\mathbf{R}_w^{-1}(z) \quad (4.26)$$

où $\mathbf{R}_s(z)$ est la matrice de corrélation des signaux d'entrée $\mathbf{s}(n)$, $\mathbf{R}_w(z)$ la matrice de corrélation des observations $\mathbf{w}(n)$, et $\mathbf{C}(z)$ est la matrice de transfert du canal.

Nous comparons aussi les taux d'erreur symboles obtenus avec l'algorithme PAFA avec les taux d'erreur symboles des solutions ZF. Pour un mélange convolutif MIMO, la solution ZF consiste à inverser la matrice du canal. Ainsi, quand $K = L$, la fonction de transfert globale avec l'égaliseur ZF $\mathbf{H}_{ZF}(z) = [\mathbf{G}(z)]^{-1}$ est

$$\mathbf{G}(z) = \sum_n \sum_m \mathbf{C}(m) \mathbf{H}_{ZF}(n) z^{-(n-m)} = \mathbf{I} z^{-L}. \quad (4.27)$$

Nous commençons par tester l'algorithme PAFA avec des signaux modulés QPSK. Pour cela, nous générons des canaux de longueur $K = 3$ et nous cherchons un égaliseur de longueur identique $L = 3$. Les figures 4.3 illustrent les performances obtenues avec ces paramètres. Les taux d'erreur symboles des égaliseurs ZF ont été ajoutés ainsi que les distances entre \mathbf{G} et $\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{P}$ des solutions MMSE (les solutions ZF étant para-unitaires, la distance est nulle). Nous remarquons que les performances de l'algorithme PAFA sont très proches des performances du ZF. La distance est pratiquement toujours en dessous de 0.2. L'égalisation pour de tels signaux est quasiment parfaite, ce qui n'était pas le cas pour l'algorithme PAJOD comme nous l'avons vu avec la figure 3.7.

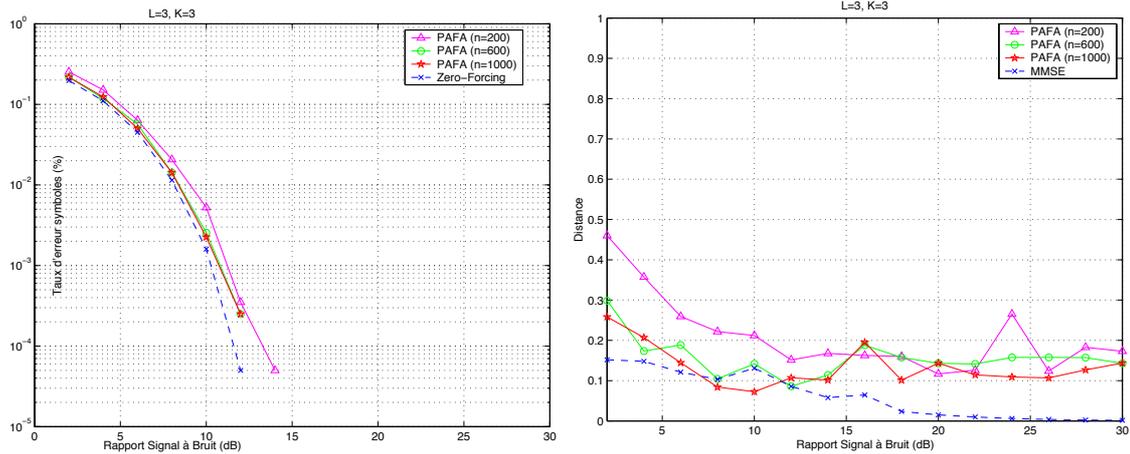


FIG. 4.3 – Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QPSK et $K = L = 3$.

Nous avons effectué la même série de tests avec des signaux modulés PSK-8. Les figures 4.4 témoignent du bon comportement de l'algorithme pour de tels signaux.

Les figures 4.5 nous montrent les performances obtenues avec PAFA pour des signaux QAM-16 et toujours pour $K = L = 3$. Là encore, les performances sont très bonnes et même meilleures qu'avec des signaux PSK-8. En effet les distances sont moins importantes avec des signaux QAM-16 qu'avec des signaux PSK-8. D'autre part, en comparant cette figure avec la figure 3.11 obtenue avec PAJOD, nous observons nettement l'amélioration apportée par la contrainte de para-unitarité imposée par PAFA.

Nous avons ensuite testé l'algorithme PAFA avec les mêmes modulations que précédemment mais avec des filtres plus longs: $K = L = 4$. Les figures 4.6 illustrent les performances pour des signaux QPSK. Celles-ci sont très proches des performances obtenues avec les longueurs

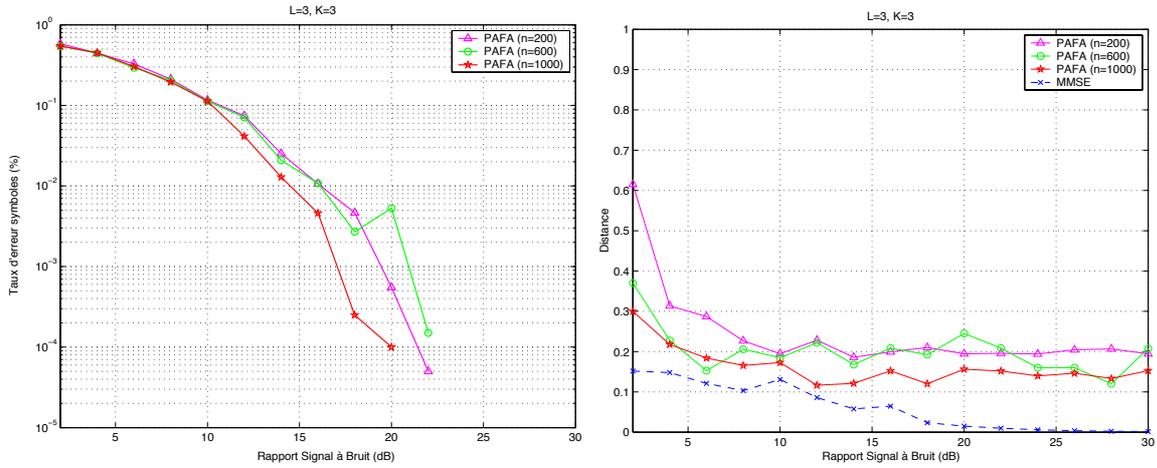


FIG. 4.4 – Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés PSK-8 et $K = L = 3$.

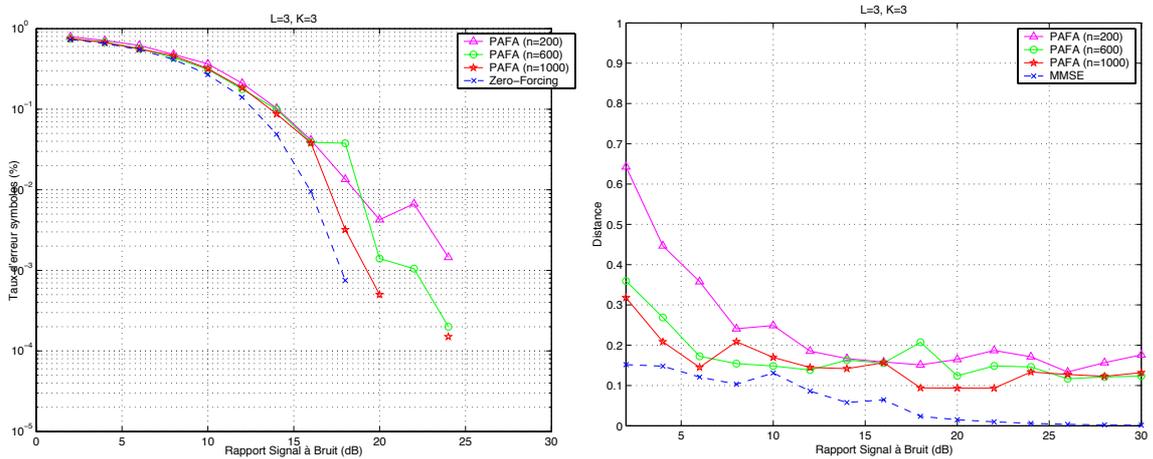
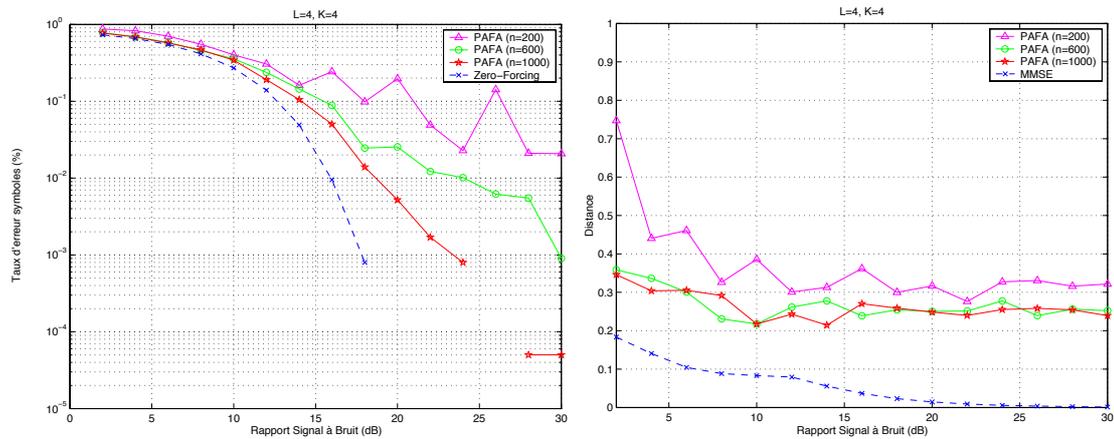
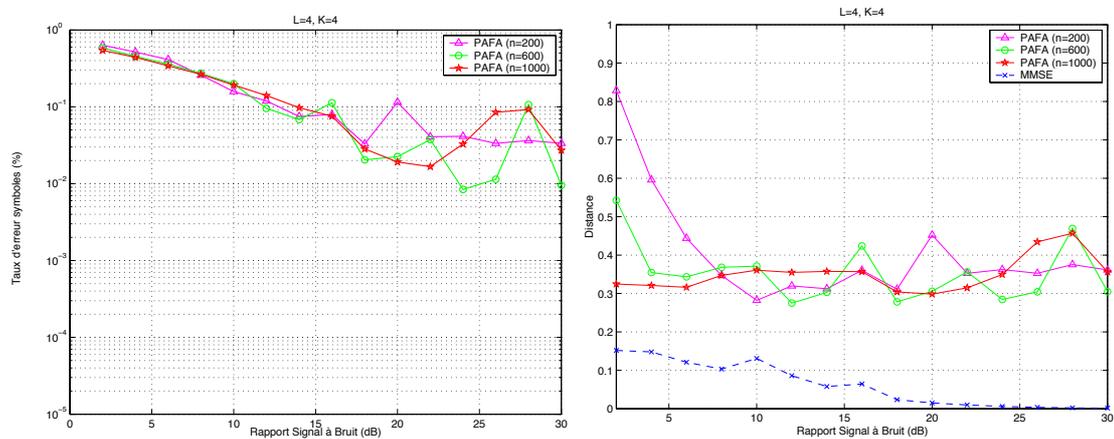


FIG. 4.5 – Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QAM16 et $K = L = 3$.

$K = L = 3$. Cependant, les distances sont plus élevées, elles sont notamment supérieures à 0.2.

La figure 4.7 nous montre clairement que l'algorithme PAFA éprouve des difficultés à séparer des sources PSK-8 lorsque $K = L = 4$. Les distances témoignent elles aussi de ces difficultés car elles sont nettement supérieures à 0.2.

Pour finir, nous testons l'algorithme PAFA avec les mêmes longueurs de canaux et d'égaliseurs mais avec des signaux QAM-16. Contrairement aux signaux PSK-8, les signaux QAM-16 peuvent être égalisés convenablement moyennant des séquences d'observations plus longues. En effet, pour 1000 symboles, nous obtenons des SER inférieurs à 0.01% à partir de 26dB de RSB, alors que pour des signaux PSK-8, le taux d'erreur symbole ne descend pratiquement pas en dessous de 1%. Les distances sont quant à elles plus proches de la limite

FIG. 4.6 – Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QPSK et $K = L = 4$.FIG. 4.7 – Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés PSK-8 et $K = L = 4$.

des 0.2 que les distances obtenues avec les modulations PSK-8.

4.7 Conclusion du chapitre

Nous avons vu à travers ce chapitre que le problème d'égalisation aveugle MIMO après blanchiment pouvait être réduit à un modèle plus simple composé d'un canal et d'un égaliseur para-unitaires. Nous avons alors présenté la factorisation de l'égaliseur afin de mener à bien la séparation aveugle des signaux sources. Nous avons ensuite montré que le calcul de l'égaliseur pouvait être effectué par une méthode algébrique, donc efficace pour un algorithme bloc. Contrairement à l'algorithme PAJOD, l'égaliseur retourné par l'algorithme PAFA est para-unitaire et non plus semi-unitaire. Nous avons alors effectué une série de simulations avec PAFA. Les performances affichées par cet algorithme sont proches des performances

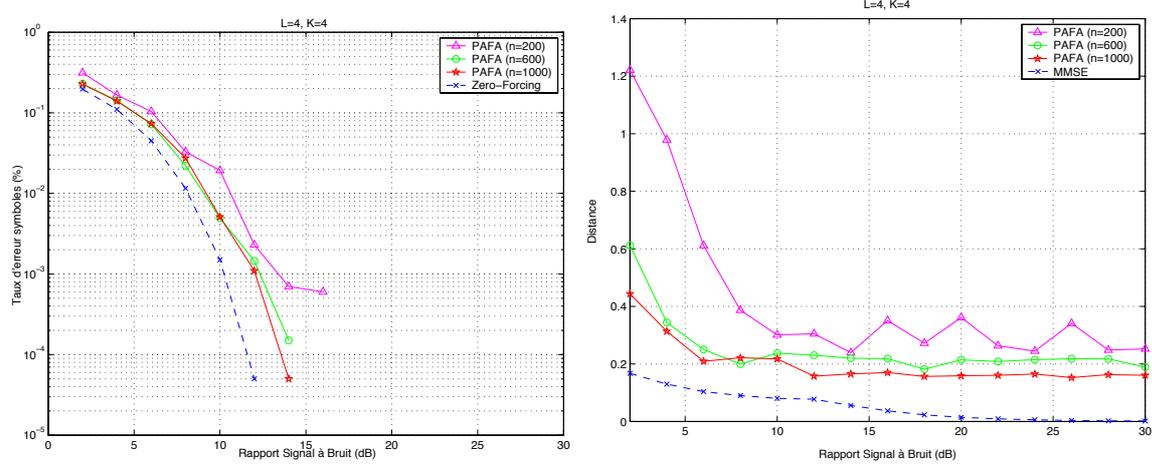


FIG. 4.8 – Taux d'erreur symboles et distances avec 2 signaux modulés QAM16 et $K = L = 4$.

des égaliseurs Zero Forcing. D'autre part, en comparant les performances de PAFA avec celles de PAJOD, nous avons pu observer l'amélioration qu'engendre PAFA sur les taux d'erreur symboles. Ces améliorations sont dues à la contrainte de para-unitarité imposée à l'égaliseur. Néanmoins, en terme de complexité, PAJOD est plus intéressant que PAFA car ce dernier n'a aucune simplification dans le calcul des points stationnaires du critère.

Chapitre 5

Contrastes APF

Ce chapitre présente une famille de critères de contrastes pour l'égalisation aveugle. L'originalité de ces contrastes provient de l'utilisation des alphabets des modulations numériques (*APF: Alphabet Polynomial Fitting*) pour mener à bien l'égalisation du système. Chacun de ces critères est défini par un polynôme caractérisant la modulation utilisée pour la génération du signal. L'objectif est alors d'aligner les sorties du système sur une modulation supposée connue. Le maximum de ces critères polynomiaux est alors atteint lorsque la sortie appartient à un alphabet correspondant à la modulation recherchée. Nous proposons dans un premier temps une méthode d'égalisation pour des canaux de communications SISO, où la recherche du maximum de contraste est conduite par une méthode du gradient à pas optimal. Cette première étude nous permet ensuite d'introduire l'extraction d'un signal grâce à un algorithme de déflation pour des systèmes MIMO. Nous présentons finalement les performances de certains algorithmes APF pour des canaux SISO, ainsi que des performances de l'algorithme d'extraction.

5.1 Les critères polynomiaux

Nous commençons ce chapitre par une présentation des critères polynomiaux APF basés sur les modulations numériques. Nous considérons que les sources vérifient les hypothèses **S1**¹, **S2**, **S4** ainsi que l'hypothèse **S7**. Cette dernière hypothèse est à la base des critères polynomiaux APF. Par exemple, une entrée discrète modulée PSK- q est caractérisée par les racines du polynôme $Q(s) = s^q - 1$. Le tableau 5.1 reprend certaines modulations numériques et donne pour chacune d'elles l'alphabet \mathcal{A} des symboles ainsi que les polynômes Q associés.

Remarquons qu'un signal s de modulation PSK- q est circulaire² jusqu'à l'ordre $q - 1$, mais non circulaire à l'ordre q . Ainsi, chaque symbole de la constellation vérifie $s^q = 1$, et donc $E[s^q] = 1$ mais $E[s^m] = 0, \forall m < q$.

1. voir section 2.3.3 page 32
2. voir définition 2.5.6 page 42

Modulation	\mathcal{A}	$Q(s)$
BPSK	$\{-1, +1\}$	$s^2 - 1$
QPSK	$\{-1, +1\}, \{-j, +j\}$	$s^4 - 1$
PSK-q	$\{e^{j2k\pi/q}\}_{k \in 0, \dots, q-1}$	$s^q - 1$
QAM16	$\{\pm 1, \pm 3\}, \{\pm j, \pm 3j\}$	$s^{16} + 17s^{12} - \frac{221}{8}s^8 + \frac{12529}{16}s^4 + \frac{50625}{256}$

TAB. 5.1 – Alphabets et polynômes relatifs aux modulations numériques.

En tenant compte des hypothèses précédentes et en considérant les entrées discrètes dans un canal SISO, il est possible d'égaliser le canal en utilisant le critère polynomial [16]:

Théorème 5.1.1 Soit \mathcal{S} l'ensemble des processus qui prennent leurs valeurs dans l'alphabet \mathcal{A} et \mathcal{H} l'ensemble des filtres FIR. Le critère

$$\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{h}, \hat{s}) = - \sum_n |Q(\hat{s}(n))|^2 \quad (5.1)$$

est un contraste sous les hypothèses **S1**, **S2**, **S4** et **S7**.

Le critère 5.1 est défini pour un système SISO et non MIMO comme cela a été fait dans [16]. Nous l'utilisons ainsi afin de pouvoir séparer des signaux de modulations différentes car dans ce cas les critères sont différents. Montrons que le critère \mathcal{J}_{APF} respecte les trois propriétés d'un contraste (définition 2.6.2):

Preuve.

- **Invariance:** pour tout filtre trivial $\lambda \in \mathcal{T}$, nous avons

$$-\mathcal{J}_{APF}(\lambda; \hat{s}) = \sum_n |Q(\lambda \hat{s}(n + \tau))|^2 \quad (5.2)$$

avec $\tau \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\hat{s}(m)$ appartient à l'ensemble \mathcal{S} , alors les valeurs de $\hat{s}(m)$ appartiennent à l'alphabet \mathcal{A} , et donc il en est de même pour les valeurs de $\lambda \hat{s}(m)$. Ainsi, nous avons bien $Q(\lambda z(m)) = 0$.

- **Domination:** comme $\sum_n |Q(w(n))|^2 \geq 0$, alors $\sum_n |Q(w(n))|^2 \geq \sum_n |Q(s(n))|^2$, car le critère est nul quand $s(n) \in \mathcal{S}$. Nous avons ainsi

$$-\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{h}; s) \geq -\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{I}, s). \quad (5.3)$$

- **Discrimination:** nous devons montrer que si nous avons l'égalité $\sum_n |Q(w(n))|^2 = 0$, alors $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{T}$. Notons $w(n) = \sum_k c_k s(n-k)$, avec $s(n) \in \mathcal{A}$ et c_k le $k^{\text{ème}}$ coefficient du canal \mathbf{c} . Si nous avons $\forall n, Q(w(n)) = 0$ alors nous avons $Q(\sum_k c_k s(n-k)) = 0$. Nous sommes alors sous la condition du lemme 17 de [16], et nous devons en conclure qu'un seul élément c_k n'est pas nul. De plus, cet élément c_k vérifie nécessairement $c_k \in \mathbb{C}$ puisque $c_k \hat{s} \in \mathcal{A}$ pour tout $\hat{s} \in \mathcal{A}$. Nous en déduisons que la réponse impulsionnelle \mathbf{c} a une entrée non nulle et une seule.

◇

L'idée du lemme 17 [16] est de montrer que tout filtre \mathbf{h} ne faisant pas partie de l'ensemble des filtres triviaux \mathcal{T} , génère des symboles qui n'appartiennent pas à l'alphabet \mathcal{A} .

Le critère APF de (5.1) est basé uniquement sur la modulation utilisée pour la transmission de la séquence. Ainsi, nous obtenons un critère polynomial pour chaque modulation numérique. Si des modulations PSK sont utilisées dans le système, alors les critères \mathcal{J}_{APF} sont similaires au critère du module constant (*CMA: Constant Power Algorithm*) décrit dans l'article [14] car ils peuvent être mis sous la forme $\mathcal{J}(\mathbf{h}) = \|\hat{s}(n)^q - d(n)\|^2$. En effet, toutes les modulations PSK- q peuvent être caractérisées avec $d(n)$ et q comme cela est mentionné dans [14]. Néanmoins, contrairement aux algorithmes APF, le CMA n'est pas capable d'égaliser des signaux avec des amplitudes différentes comme les modulations QAM. De plus, nous pouvons combiner les critères grâce au théorème suivant:

Théorème 5.1.2 Soient $\mathcal{J}_k(w)$ des contrastes définis sur $\mathcal{H} \cdot \mathcal{S}_k$, et soient $\{a_k\}$ des nombres strictement positifs, alors $\mathcal{J}(w) = \sum_k a_k \mathcal{J}_k(w)$ est un contraste sur $\mathcal{H} \cdot \bigcup_k \mathcal{S}_k$.

Preuve. La propriété de *Domination* d'un contraste est obtenue immédiatement car tous les termes sont positifs:

$$\mathcal{J}(\hat{s}) = \sum_k a_k \mathcal{J}_k(\hat{s}) \leq \sum_k a_k \mathcal{J}_k(s) = \mathcal{J}(s). \quad (5.4)$$

S'il y a égalité alors $\sum_k a_k [\mathcal{J}_k(s) - \mathcal{J}_k(\hat{s})] = 0$, ce qui est possible uniquement si tous les termes s'annulent car ils sont tous positifs. Ainsi $\mathcal{J}_k(\hat{s}) = \mathcal{J}_k(s), \forall k$. Cependant, par hypothèse $\hat{s} \in \mathcal{S}_k$ pour des valeurs de k . Comme \mathcal{J}_k est un contraste, on peut en conclure que $\hat{s} = \mathbf{g} \star s$, pour les filtres triviaux \mathbf{g} de \mathcal{H} . ◇

5.2 Méthode du gradient à pas optimal

La méthode décrite dans ce paragraphe utilise une descente de gradient afin de calculer les coefficients du filtre \mathbf{h} permettant d'égaliser le système. L'actualisation du vecteur \mathbf{h} se fait par:

$$\mathbf{h}^{(k)} = \mathbf{h}^{(k-1)} + \mu^{(k-1)} \nabla^{(k-1)} \quad (5.5)$$

où $\mathbf{h}^{(k-1)}$ est le vecteur égaliseur à l'itération $k-1$, $\nabla^{(k-1)}$ le gradient du critère J_{APF} calculé à partir du vecteur $\mathbf{h}^{(k-1)}$, et $\mu^{(k-1)}$ le pas du gradient à l'itération k .

La plupart des algorithmes itératifs utilisant un pas fixe éprouvent quelques difficultés lorsque le critère contient plusieurs points stationnaires. En effet, plus le pas est petit, plus le temps de convergence est long. Par ailleurs, si le pas est trop grand, l'algorithme peut ne jamais atteindre les points stationnaires et donc ne jamais trouver le filtre optimal pour égaliser le système. De même, si le pas est modifié dynamiquement comme dans l'algorithme de Newton, cela n'empêche pas les itérations de rester un long moment dans le voisinage des points stationnaires et de quitter brusquement le bassin d'attraction pour atteindre un autre point stationnaire. Dans ce cas le temps de convergence n'est pas non plus optimal.

Il est possible d'améliorer significativement le temps de convergence en déterminant un pas qui serait optimal pour le critère. En effet, le critère \mathcal{J}_{APF} est une fonction rationnelle des variables h_l mais c'est aussi une fonction rationnelle de la variable μ si l'on pose le critère avec (5.5). Le critère $\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{h}^{(k-1)} + \mu^{(k-1)}\nabla^{(k-1)})$ est donc une autre écriture du critère $\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{h}^{(k)})$ à l'itération k . Ainsi, tous les points stationnaires sont calculés explicitement grâce aux racines d'un polynôme en la seule variable μ .

La réécriture (2.3) sous forme d'un produit de vecteurs nous donne:

$$\hat{s}(n) = \mathbf{h}^\top \mathbf{w}_n \quad (5.6)$$

où $\mathbf{w}_n = [w(n), w(n-1), \dots, w(n-L+1)]^\top$ est le vecteur des L dernières observations à l'instant n , et \mathbf{h} la réponse impulsionnelle du canal. Le critère sous met alors sous la forme

$$\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{h}) = - \sum_n Q(\mathbf{h}^\top \mathbf{w}_n) Q(\mathbf{w}_n^H \mathbf{h}^*). \quad (5.7)$$

Le gradient ∇ de $\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{h})$ est obtenu en dérivant (5.7) par rapport aux composantes de \mathbf{h} :

$$\nabla = - \sum_n \mathbf{w}_n Q'(\mathbf{h}^\top \mathbf{w}_n) Q(\mathbf{w}_n^H \mathbf{h}^*) \quad (5.8)$$

où la fonction $Q'(\hat{s})$ est la dérivée du polynôme $Q(\hat{s})$.

Considérons maintenant \mathcal{J}_{APF} comme une fonction rationnelle en μ en substituant $\hat{s}(n)$ par $(\mathbf{h} + \mu\nabla)^\top \mathbf{w}_n$ dans (5.7):

$$\mathcal{J}_{APF}(\mu) = - \sum_n Q((\mathbf{h} + \mu\nabla)^\top \mathbf{w}_n) Q(\mathbf{w}_n^H (\mathbf{h}^* + \mu\nabla^*)), \quad (5.9)$$

et prenons la dérivée de (5.9) par rapport à la variable μ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}_{APF}(\mu)}{\partial \mu} &= - \sum_n \frac{\partial Q((\mathbf{h} + \mu\nabla)^\top \mathbf{w}_n)}{\partial \mu} Q(\mathbf{w}_n^H (\mathbf{h}^* + \mu\nabla^*)) \\ &\quad - \sum_n \frac{\partial Q(\mathbf{w}_n^H (\mathbf{h}^* + \mu\nabla^*))}{\partial \mu} Q((\mathbf{h} + \mu\nabla)^\top \mathbf{w}_n). \end{aligned}$$

Il suffit de remplacer les racines de cette dérivée dans le critère $\mathcal{J}_{APF}(\mu)$ afin de trouver la racine en μ qui maximise ce critère. Ainsi, cette racine correspond au pas optimal pour la descente du gradient. Cette méthode de recherche du pas optimal n'est pas uniquement dédiée aux critères APF mais peut aussi être utilisée avec les critères CMA ou KMA (*Kurtosis Maximisation Algorithm*) [13].

5.3 Performances des algorithmes APF

Chaque modulation numérique donne naissance à un algorithme basé sur un critère APF. Dans cette thèse nous ne présenterons que deux algorithmes: l'un pour la modulation QPSK (applicable aussi aux modulations PSK- n) et l'autre pour la modulation QAM-16.

5.3.1 Comparaison avec la solution MMSE

Nous comparons les performances de nos algorithmes avec les égaliseurs linéaires obtenus en minimisant l'erreur des moindres-carrés (*MMSE: Minimum Mean-Square Error*). En effet, le critère MSE prend en compte le bruit et ainsi, les filtres MMSE permettent de compenser aussi bien les interférences inter-symboles (ISI) que les distorsions dues au bruit. Commençons par écrire l'erreur des moindres-carrés (MSE):

$$\sigma_{MMSE-LE}^2 = \min_{\mathbf{h}} \mathbb{E}[|s(n) - \hat{s}(n)|^2]. \quad (5.10)$$

A partir de ce critère, nous obtenons la réponse FIR de l'égaliseur linéaire MMSE :

$$\mathbf{h}_{MMSE} = \arg \min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{h}^\top \mathbf{w}_n - s(n)\|^2. \quad (5.11)$$

La solution sous forme factorisée est alors [55]:

$$\mathbf{h}_{MMSE} = \mathbf{r}_{sw}^* (\mathbf{R}_w^c)^{-1}, \quad (5.12)$$

où la matrice de corrélation circulaire³ des observations est définie par $\mathbf{R}_w^c = \mathbb{E}[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^H]$, et le vecteur d'intercorrélation par $\mathbf{r}_{sw} = \mathbb{E}[s(n-\Delta) \mathbf{w}_n^H]$. Le retard Δ a peu d'influence lorsque la longueur L de l'égaliseur est grande, cependant nous fixons sa valeur à $\Delta = \left\lfloor \frac{L+K-1}{2} \right\rfloor$, ce qui correspond au centre de la réponse impulsionnelle du filtre global \mathbf{g} . Cette matrice et ce vecteur de corrélation sont définies en fonction du canal \mathbf{c} par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{C} :

$$\mathbf{r}_{sw} = \mathbf{C} \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{\Delta-1}, \sigma_s^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{L+K-1-\Delta} \right]^\top \quad (5.13)$$

et

$$\mathbf{R}_w^c = \sigma_s^2 \mathbf{C} \mathbf{C}^H + \rho^2 \mathbf{I} \quad (5.14)$$

3. voir section 2.5.4 page 43

où σ_s^2 est ρ^2 sont respectivement les variances du signal d'entrée $s(n)$ et du bruit gaussien $b(n)$, et \mathbf{C} une matrice bloc Toeplitz de taille $L \times (L + K - 1)$ constituée de la réponse impulsionnelle du canal \mathbf{c} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_K & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_{K-1} & c_K \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

où les coefficients $c_i, i \in [1, K]$ sont les coefficients de \mathbf{c} .

5.3.2 Algorithme APF-QPSK

Nous avons implementé l'algorithme APF-QPSK que nous avons ensuite testé avec des canaux complexes de longueur $K = 5$, et des signaux blancs de modulation QPSK et de variance unité. Pour chaque canal généré aléatoirement, nous ajoutons une séquence de bruit de variance ρ sur les observations afin de tester la sensibilité au bruit de notre algorithme:

$$w(n) = \sum_{k=0}^K c_k s(n-k) + \rho v(n).$$

L'égalisation a été effectuée à partir de blocs d'informations de tailles différentes: 400, 800, 1200 et 1600 symboles. Afin de nous assurer que le canal peut avoir un inverse stable (les coefficients sont générés suivant une loi gaussienne), nous calculons dans un premier temps le MSE obtenu avec l'égaliseur linéaire MMSE. Pour un seuil de tolérance fixé, nous retenons ou pas le filtre ainsi généré afin de le tester avec l'égaliseur APF. Si nous ne réalisons pas cette sélection, les canaux n'ayant pas d'inverse stable retournent inévitablement un taux d'erreur maximum. Dans ce cas, les performances affichées ne sont pas significatives. L'égaliseur de longueur $L = 20$ retourné par l'algorithme est alors testé avec une séquence de 1600 symboles afin de calculer le taux d'erreur symboles. La figure 5.1 nous montre les performances pour une moyenne sur 75 essais. La résolution minimale est donc de $(1600 * 75)^{-1} = 8,3.10^{-6}$.

Nous pouvons voir sur cette figure qu'au delà de 23dB de RSB, l'algorithme égalise très bien le système avec uniquement 1200 symboles. Et pour 1600 symboles, l'algorithme APF-QPSK est très proche de la solution MMSE, mais pour 400 ou 800 symboles, l'erreur reste importante.

5.3.3 Algorithme APF-QAM16

Le deuxième algorithme, appelé APF-QAM16, a été implementé pour les modulations QAM-16. Il a été ensuite testé dans les mêmes conditions que l'algorithme APF-QPSK, mais avec la longueur de canal de $K = 4$ et une longueur $L = 16$ pour les filtres égaliseurs. Avec la modulation QAM16, nous avons augmenté le nombre de symboles pour nos simulations.

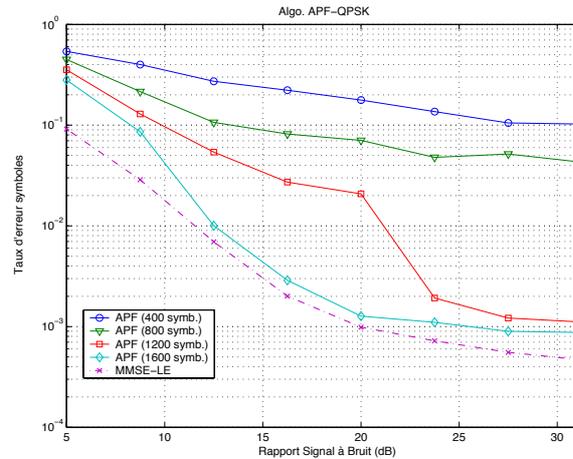


FIG. 5.1 – Taux d'erreur symboles de l'algorithme APF-QPSK avec un canal de longueur $K=5$ and et un égaliseur de longueur $L=20$.

Ainsi, les canaux aléatoires ont été testés avec des blocs d'information contenant 1600, 2400 et 3200 symboles. L'égaliseur retourné par l'algorithme APF-QAM16 est ensuite testé avec une séquence de 3200 symboles. Nous avons effectué une série de 45 simulations, ce qui nous donne une résolution minimum de $(3200 * 45)^{-1} \approx 7.10^{-6}$ pour le taux d'erreur symboles. La figure 5.2 nous montre les performances moyennes de cet algorithme. Nous pouvons

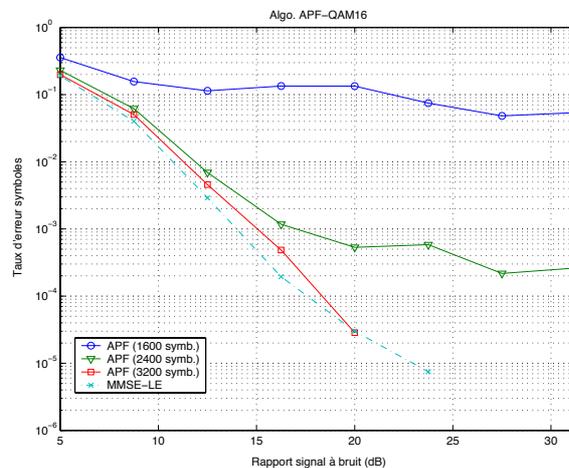


FIG. 5.2 – Taux d'erreur symboles de l'algorithme APF-QAM16 avec un canal de longueur $K=4$ and et un égaliseur de longueur $L=16$.

remarquer qu'avec 1600 symboles nous obtenons les performances les plus faibles. Par contre, pour des blocs constitués de plus de 2400 symboles, les performances sont excellentes, et avec 3200 symboles, l'algorithme APF-QAM16 est très proche des solutions obtenues avec l'égaliseur MMSE-LE. Le taux d'erreur pour un RSB de 20dB n'est alors que de 0,03%.

5.3.4 Comparaison avec le CMA

Nous comparons les performances des algorithmes APF-QPSK et APF-QAM16 avec l'algorithme du module constant [70][28]. Rappelons le critère du module constant :

$$\mathcal{J}_{CM}(\hat{s}) = \mathbb{E}[(1 - \hat{s}^2)^2] \quad (5.16)$$

Les algorithmes CMA et APF ont été testés avec les canaux de longueur $K = 3$ et des blocs d'observations de 1200 symboles. La longueur des égaliseurs est fixée à $L = 10$. Les performances sont calculées à partir d'une séquence de 2000 symboles. La figure 5.3 nous montre que l'algorithme APF-QPSK fonctionne mieux que le CMA pour un RSB supérieur à 10dB. De plus, l'algorithme APF-QAM16 permet d'obtenir des taux d'erreur inférieurs à ceux obtenus avec le CMA. Cette figure témoigne du bon comportement des algorithmes aveugles APF face au CMA.

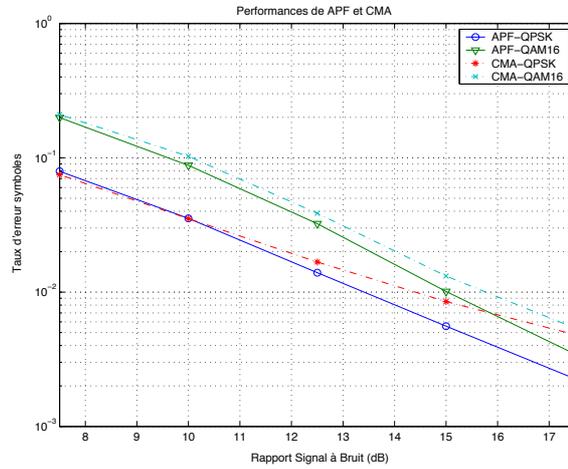


FIG. 5.3 – Comparaison des algorithmes APF-QPSK et APF-QAM16 face au CMA avec $K=3$ $L=10$.

5.4 Extraction d'un signal

Dans le cas de systèmes multi-utilisateurs MIMO, il est possible d'utiliser une approche par déflation pour séparer les signaux issues du mélange convolutif. En effet, si tous les signaux transmis sont de modulations différentes, il est alors possible d'extraire un seul signal grâce à la connaissance de sa modulation et donc de son alphabet. Pour cela, on applique un critère APF sur les observations afin d'extraire le signal souhaité. Nous reprenons ainsi les algorithmes décrits précédemment pour des systèmes SISO avec une méthode de déflation [25] [70] [1] afin d'extraire un à un les signaux mélangés. Le critère (5.1) devient alors sous les mêmes hypothèses [16]:

$$\mathcal{J}_{APF}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}) = - \sum_{n=1}^N \sum_m |Q(\hat{s}_n(m))|^2 \quad (5.17)$$

Nous ne reprendrons pas la description de ce critère car celui-ci est identique au critère (5.1) dans la mesure où chaque signal est extrait un à un. Cependant, pour égaliser un système MIMO convolutif avec la méthode du gradient à pas optimal, nous devons préciser que les tailles des vecteurs changent. En effet, nous pouvons regrouper les vecteurs des observations dans une matrice \mathbf{W} de taille $PL \times M - L + 1$, où P est le nombre de capteurs et M la longueur des séquences observées:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,L} & \mathbf{w}_{1,L+1} & \dots & \mathbf{w}_{1,M} \\ \mathbf{w}_{2,L} & \mathbf{w}_{2,L+1} & \dots & \mathbf{w}_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{w}_{P,L} & \mathbf{w}_{P,L+1} & \dots & \mathbf{w}_{P,M} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

avec $\mathbf{w}_{p,m} = [w_p(m), w_p(m-1), \dots, w_p(m-L+1)]^\top$, où $w_p(m)$ est l'observation à l'instant m sur le $p^{\text{ème}}$ capteur. Les filtres égaliseurs sont alors regroupés dans une matrice \mathbf{H} de la façon suivante:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{1,1} & \dots & \mathbf{h}_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{h}_{P,1} & \dots & \mathbf{h}_{P,N} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

où $\mathbf{h}_{p,n}$ est le vecteur des coefficients de la réponse impulsionnelle de l'égaliseur liant le $p^{\text{ème}}$ capteur au $n^{\text{ème}}$ signal à extraire. Par ailleurs, nous notons \mathbf{H}_n la $n^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{H} , c'est à dire $\mathbf{H}_n = [\mathbf{h}_{1,n}, \dots, \mathbf{h}_{P,n}]$. Signalons que la matrice des gradients ∇ a les mêmes dimensions que \mathbf{H} . Nous prendrons aussi la notation ∇_n pour désigner la $n^{\text{ème}}$ colonne de ∇ . Après égalisation, nous obtenons la matrice des signaux estimés:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{H}^\top \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{s}}_N \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

où $\hat{\mathbf{s}}_n$ est l'estimation du $n^{\text{ème}}$ signal. L'algorithme de déflation utilise les étapes suivantes afin d'extraire le $n^{\text{ème}}$ signal à partir des observations:

Etape 1. Initialisation de certaines valeurs utilisées par l'algorithme:

- les vecteurs de la matrice \mathbf{H} : $\mathbf{h}_{p,n} = \mathbf{I}_{L \times N}$,
- le critère d'arrêt ϵ qui stoppe la recherche du gradient et du pas lors de la convergence de l'algorithme: $\epsilon < \frac{1}{100\sqrt{N}}$.

Etape 2. Pour chaque indice $n \in [1, N]$, l'algorithme doit extraire le $n^{\text{ème}}$ signal. Pour cela, nous construisons la matrice des observations \mathbf{W} définie en (5.18). Tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint, il est nécessaire de calculer le gradient de \mathbf{H}_n , c'est à dire le vecteur

$$\nabla_n = [\nabla_{1,n}, \nabla_{2,n}, \dots, \nabla_{P,n}]^\top. \quad (5.21)$$

Il suffit ensuite de déterminer le pas optimal à partir du vecteur $\mathbf{H}_n^{(k-1)}$ de l'itération précédente ($k-1$) puis d'actualiser la $n^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{H} , à l'itération actuelle (k). Le critère d'arrêt change alors

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{H}_n^{(k-1)} - \mathbf{H}_n^{(k)}\|}{\|\mathbf{H}_n^{(k)}\|}. \quad (5.22)$$

Si $\epsilon < \frac{1}{100\sqrt{(N)}}$, passer à l'**étape 3**.

Étape 3. Quand le filtre égaliseur \mathbf{H}_n est défini, on peut estimer le $n^{\text{ème}}$ signal en sortie du système:

$$\hat{s}_n(m) = \sum_{p=1}^P \sum_{l=0}^{L-1} h_{p,n}(l) w_p(m-l) \quad (5.23)$$

soit sous forme d'un produit de vecteurs: $\hat{\mathbf{s}}_n = \mathbf{H}_n^{(k)\top} \mathbf{W}$.

Étape 4. Nous pouvons extraire la contribution du signal $\hat{s}_n(t)$ dans chacune des observations tant que $n < N$. Pour cela, nous devons estimer le retard engendré par le système global \mathbf{g} ainsi que le facteur d'échelle λ . Nous définissons ainsi la matrice de Toeplitz $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{s}_n(1) & \hat{s}_n(2) & \dots & \hat{s}_n(M) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \hat{s}_n(1) & \dots & \hat{s}_n(M-1) & \hat{s}_n(M) & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \hat{s}_n(1) & \hat{s}_n(2) & \dots & \dots & \hat{s}_n(M+L-T-1) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

où T est assez grand pour contenir le retard d . Dans notre algorithme, nous fixons $T = 2(K+L)$. Nous pouvons alors calculer les corrélations $r_{\hat{s}_n w_p}(\tau)$ entre chacune des observations w_p et le signal estimé \hat{s}_n , ce qui nous donne pour $p \in [1, P]$:

$$r_{\hat{s}_n w_p}(\tau) = \mathbf{E}[\hat{s}_n(\tau) w_p(m-\tau)^*], \quad (5.25)$$

soit la vecteur $\mathbf{r}_{pn} = \mathbf{w}_p \mathbf{\Sigma}^H / M$, où \mathbf{w}_p est le vecteur des $M+L-1$ observations sur le capteur p .

Étape 5. La contribution de $\hat{s}_n(m)$ sur les signaux observés $\mathbf{w}_p(m)$ est estimée à partir de la corrélation $r_{\hat{s}_n w_p}$ par:

$$\hat{w}_{pn}(m) = \sum_{\tau} r_{\hat{s}_n w_p}(\tau) \hat{s}_n(m-\tau). \quad (5.26)$$

Nous pouvons alors extraire la contribution du $n^{\text{ème}}$ signal en le soustrayant aux observations:

$$w_n^{(k)}(m) = w_n^{(k-1)}(m) - \hat{w}_{pn}(m). \quad (5.27)$$

Les observations à l'instant k ne possède plus la contribution du signal $\hat{s}_n(m)$. Si tous les signaux n'ont pas été extrait, alors on retourne à l'étape 1 et on incrémente n .

Cet algorithme de déflation est résumé ci-dessous:

Algorithme:

Initialiser \mathbf{H} , $\epsilon = 1$, $T = 2(K + L)$
Pour $n = 1..N$
 Construire \mathbf{W}
 Tant que $\epsilon > 1/(100\sqrt{N})$ **faire**
 Calculer ∇_n
 Calculer μ
 Actualiser $\mathbf{H}_n^{(k)} = \mathbf{H}_n^{(k-1)} - \mu \nabla_n^{(k-1)}$
 Calculer (5.22)
 Estimer $\hat{\mathbf{s}}_n = \mathbf{H}_n^{(k)\top} \mathbf{W}$
 Si $n < N$
 Construire Σ
 Pour $p = 1..P$
 Calculer $\mathbf{r}_{pn} = \mathbf{w}_{pn} \Sigma^H / M$
 Calculer $\hat{\mathbf{w}}_{pn} = \mathbf{r}_{pn} \Sigma / M$
 Extraire $\mathbf{w}_{pn} = \mathbf{w}_{pn} - \hat{\mathbf{w}}_{pn}$
 Fin p
 Fin n

5.5 Performances de l'extraction

Nous avons effectué une série de simulations afin d'extraire un signal avec une modulation spécifique à partir d'un mélange de longueur $K = 3$. Dans cette simulation, nous avons mélangé des signaux QPSK, PSK-6 et QAM16. L'objectif de l'algorithme était alors d'extraire chaque signal à partir des observations. Cela permet de tester uniquement l'extraction d'un signal, sans se soucier de l'extraction des autres signaux. La figure 5.4 nous montre que les algorithmes APF-QPSK, APF-PSK6 et APF-QAM16 couplés avec un algorithme de déflation permettent d'extraire les signaux avec des taux d'erreur relativement faibles.

5.6 Conclusion du chapitre

Nous avons présenté dans ce chapitre une famille de critères polynomiaux (APF) fondés sur les modulations employées en communications numériques. Nous avons vu qu'à partir de l'alphabet d'une modulation, il est possible d'égaliser un système avec une seule source. Les algorithmes APF pour les modulations QPSK et QAM16 ont été implémentés pour l'égalisation SISO. Nous les avons ensuite couplés avec un algorithme d'extraction afin de pouvoir séparer les signaux issus d'un environnement multi-utilisateurs. Pour cela, nous avons introduit les critères polynomiaux dans un algorithme de déflation afin d'extraire les signaux de modulation connue les uns après les autres. Cependant, le principal inconvénient

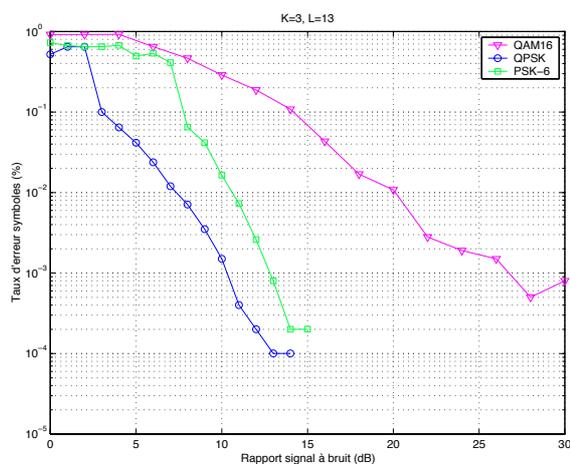


FIG. 5.4 – Taux d'erreur symboles des extractions avec $K = 3$ et $L = 13$ et une fenêtre d'observation de 1000 échantillons

des algorithmes APF réside dans le fait qu'ils ne peuvent actuellement pas compenser un éventuel résidu de porteuse. Ce point fait partie des objectifs à étudier afin d'identifier conjointement le résidu de porteuse, ce qu'on ne peut pas faire avec un critère à module constant.

Conclusion

Nous avons consacré ce travail de thèse à l'étude d'algorithmes d'égalisation aveugle de systèmes multi-utilisateurs permettant de retrouver un signal provenant d'un émetteur inconnu et détérioré par un canal de propagation à trajets multiples.

Nous avons commencé par poser le problème d'égalisation aveugle pour des systèmes multi-utilisateurs convolutifs en présentant l'indétermination inhérente à ce problème. Nous avons ensuite énoncé toutes les hypothèses sur les signaux considérés ainsi que sur les filtres, pour lesquels nous avons introduit la propriété de para-unitarité. Cette propriété de para-unitarité des matrices de transfert est vérifiée dès lors que les observations sont blanchies spatialement et temporellement à l'ordre deux. Nous utilisons cette propriété dans les chapitres 3 et 4. Par ailleurs, nous avons défini un critère de contraste permettant de mener à bien l'égalisation en aveugle.

Nous nous sommes alors intéressés à l'algorithme PAJOD dont l'originalité est de diagonaliser conjointement et partiellement un ensemble de matrices contenant les multi-corrélations cumulantes des observations. En effet, ce travail n'a jamais été fait auparavant pour des systèmes MIMO convolutifs. L'algorithme PAJOD peut fonctionner avec trois contrastes différents, en fonction de la nature réelle ou complexe des signaux circulaires ou non. Notre démarche a été dans un premier temps de définir des critères de contraste en fonction des cumulants des observations. Puis dans un deuxième temps, il était nécessaire d'agencer convenablement les cumulants des observations dans un tenseur afin de diagonaliser conjointement les tranches de ce tenseur. La diagonalisation finale est effectuée par une matrice semi-unitaire provenant de l'accumulation de rotations de Givens. Cela nous a alors permis d'implémenter un algorithme bloc de type *Jacobi*, dont les angles des rotations sont déterminés de manière à maximiser le critère de contraste choisi. Nous avons alors testé les performances de l'algorithme PAJOD pour des modulations et des canaux différents. La mesure de la distance telle que définie au chapitre 2 nous a prouvé que les matrices de transfert des filtres égaliseurs n'étaient pas para-unitaires mais semi-unitaires. Cette approximation de la para-unitarité pouvant influencer l'égalisation du système, nous avons alors cherché à obtenir des égaliseurs para-unitaires grâce à une factorisation exacte des matrices para-unitaires, ce qui nous a mené à l'algorithme PAFA.

L'algorithme PAFA présenté dans le chapitre 4 a pour objectif de retourner un filtre égaliseur

avec une matrice de transfert para-unitaire et non semi-unitaire comme le fait PAJOD. Pour cela, nous avons développé la factorisation de Vaidyanathan afin de l'appliquer à des observations complexes, ce qui n'a jamais été fait auparavant. Nous montrons par ailleurs que cette factorisation englobe toutes les matrices para-unitaires possibles. Cette factorisation est constituée de rotations successives, dont les angles des rotations sont définis afin de maximiser le critère de contraste basé sur les cumulants des observations. Tout comme PAJOD, nous avons pris soin de détailler les calculs permettant de trouver les angles des rotations qui constituent le filtre égaliseur para-unitaire. Nous montrons aussi comment réduire la complexité de l'algorithme en simplifiant les calculs des tenseurs des cumulants.

Pour finir, nous avons présenté les critères APF dédiés à l'égalisation aveugle de systèmes SISO. Nous avons vu que chacun des critères APF est issu de l'alphabet d'une modulation numérique. En effet, lorsque l'alphabet d'une modulation correspond aux racines d'un polynôme, chaque point de la modulation annule le polynôme. Ainsi, la minimisation d'un critère APF s'effectue lorsque le signal en sortie de l'égaliseur appartient à un alphabet proche de celui constitué des racines du polynôme. Dans ce cas, le canal peut être égalisé. Nous avons utilisé la méthode du gradient à pas optimal afin de mener à bien l'égalisation car cette méthode à la particularité de chercher le pas permettant de maximiser le critère de contraste. La convergence vers les minima globaux est donc plus rapide. L'originalité de ces critères ne s'arrête pas là puisque nous avons vu qu'un algorithme de déflation permettait d'extraire les signaux de modulations connues à partir d'un mélange des observations. En effet, chaque modulation possédant son critère APF, nous pouvons appliquer le critère d'une modulation afin d'extraire uniquement les signaux utilisant cette modulation. L'extraction d'un signal spécifique est donc le principal avantage des critères APF.

Certains aspects de ce travail pourraient être étendus. Ainsi, les algorithmes présentés dans ce mémoire supposent que la longueur du canal est connue et qu'un blanchiment préalable des observations a été effectué. Il serait intéressant d'étudier l'influence de la longueur du canal et l'impact du filtre blanchisseur sur les performances des algorithmes. Il serait par ailleurs utile d'étudier le comportement des algorithmes en présence de résidu de porteuse, mais aussi de compenser ces résidus durant l'égalisation. En outre les critères APF étant ciblés sur un alphabet, il est envisageable d'aborder le problème des mélanges comportant plus de sources que de capteurs lorsqu'au plus P sources sont de même alphabet.

Annexes

Annexe A

Système polynomial de l'algorithme PAFA

Le système polynomial (4.23) est constitué des polynômes suivants:

$$\begin{aligned}\xi_0(t) &= -2\alpha_3t^8 - 4\alpha_2t^7 - 4\alpha_3t^6 - 12\alpha_2t^5 - 12\alpha_2t^3 + 4\alpha_3t^2 - 4\alpha_2t + 2\alpha_3, \\ \xi_1(t) &= 4\alpha_6t^8 + 16\alpha_5t^7 - 16\alpha_6t^6 + 16\alpha_5t^5 - 40\alpha_6t^4 - 16\alpha_5t^3 - 16\alpha_6t^2 - 16\alpha_5t + 4\alpha_6, \\ \xi_2(t) &= (-6\alpha_{10} - 2\alpha_8 + 2\alpha_9)t^8 - 4\alpha_7t^7 + (-4\alpha_8 + 4\alpha_9 + 84\alpha_{10})t^6 - 12\alpha_7t^5 \\ &\quad - 12\alpha_7t^3 + (4\alpha_8 - 4\alpha_9 - 84\alpha_{10})t^2 - 4\alpha_7t + 6\alpha_{10} - 2\alpha_9 + 2\alpha_8, \\ \xi_3(t) &= (4\alpha_{15} + 8\alpha_{13})t^8 + (16\alpha_{14} + 64\alpha_{12})t^7 - (16\alpha_{15} + 224\alpha_{13})t^6 + (-448\alpha_{12} + 16\alpha_{14})t^5 \\ &\quad + (-40\alpha_{15} + 560\alpha_{13})t^4 + (-16\alpha_{14} + 448\alpha_{12})t^3 - (224\alpha_{13} + 16\alpha_{15})t^2 \\ &\quad - (16\alpha_{14} + 64\alpha_{12})t + 4\alpha_{15} + 8\alpha_{13},\end{aligned}$$

pour $\Phi_1(u,t)$, et pour $\Phi_2(u,t)$:

$$\begin{aligned}\chi_0(t) &= -\alpha_2t^8 + 2\alpha_3t^7 - 2\alpha_2t^6 + 6\alpha_3t^5 + 6\alpha_3t^3 + 2\alpha_2t^2 + 2\alpha_3t + \alpha_2, \\ \chi_1(t) &= (-4\alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5)t^8 - 8\alpha_6t^7 + (-16\alpha_1 - 8\alpha_5 + 8\alpha_4)t^6 - 8\alpha_6t^5 \\ &\quad + (-24\alpha_1 - 20\alpha_5 + 12\alpha_4)t^4 + 8\alpha_6t^3 + (-16\alpha_1 - 8\alpha_5 + 8\alpha_4)t^2 + 8\alpha_6t + 2\alpha_5 \\ &\quad + 2\alpha_4 - 4\alpha_1, \\ \chi_2(t) &= (-3\alpha_7 + 3\alpha_2)t^8 + (-6\alpha_9 + 18\alpha_{10} + 6\alpha_8 - 6\alpha_3)t^7 + (-6\alpha_7 + 6\alpha_2)t^6 \\ &\quad + (18\alpha_8 - 18\alpha_3 - 18\alpha_9 - 42\alpha_{10})t^5 + (-18\alpha_9 + 18\alpha_8 - 18\alpha_3 - 42\alpha_{10})t^3 \\ &\quad + (6\alpha_7 - 6\alpha_2)t^2 + (18\alpha_{10} - 6\alpha_9 + 6\alpha_8 - 6\alpha_3)t + 3\alpha_7 - 3\alpha_2, \\ \chi_3(t) &= (4\alpha_{11} + 4\alpha_{14} + 4\alpha_{12} - 2\alpha_4 - 2\alpha_5)t^8 + (-16\alpha_{15} + 8\alpha_6 - 32\alpha_{13})t^7 \\ &\quad + (16\alpha_{11} - 112\alpha_{12} - 8\alpha_4 - 16\alpha_{14} + 8\alpha_5)t^6 + (-16\alpha_{15} + 224\alpha_{13} + 8\alpha_6)t^5 \\ &\quad + (24\alpha_{11} + 280\alpha_{12} - 40\alpha_{14} + 20\alpha_5 - 12\alpha_4)t^4 + (16\alpha_{15} - 224\alpha_{13} - 8\alpha_6)t^3 \\ &\quad + (16\alpha_{11} - 112\alpha_{12} - 16\alpha_{14} - 8\alpha_5 - 8\alpha_4)t^2 + (16\alpha_{15} + 32\alpha_{13} - 8\alpha_6)t \\ &\quad - 2\alpha_4 - 2\alpha_5 + 4\alpha_{11} + 4\alpha_{12} + 4\alpha_{14}, \\ \chi_4(t) &= \alpha_7t^8 + (-6\alpha_{10} + 2\alpha_9 - 2\alpha_8)t^7 + 2\alpha_7t^6 + (-6\alpha_8 + 6\alpha_9 + 14\alpha_{10})t^5 \\ &\quad + (14\alpha_{10} - 6\alpha_8 + 6\alpha_9)t^3 - 2\alpha_7t^2 + (-6\alpha_{10} + 2\alpha_9 - 2\alpha_8)t - \alpha_7,\end{aligned}$$

avec les coefficients définis en fonction des $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mathcal{K}_{(4)}^{(0)} \\
\alpha_2 &= \Re\left(\mathcal{K}_{(3)}^{(1)}\right) + \Re\left(\mathcal{K}_{(3)}^{(-1)}\right) \\
\alpha_3 &= \Im\left(\mathcal{K}_{(3)}^{(-1)}\right) - \Im\left(\mathcal{K}_{(3)}^{(1)}\right) \\
\alpha_4 &= \mathcal{K}_{(2)}^{(0)} \\
\alpha_5 &= \Re\left(\mathcal{K}_{(2)}^{(2)}\right) + \Re\left(\mathcal{K}_{(2)}^{(-2)}\right) \\
\alpha_6 &= \Im\left(\mathcal{K}_{(2)}^{(-2)}\right) - \Im\left(\mathcal{K}_{(2)}^{(2)}\right) \\
\alpha_7 &= \Re\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(1)}\right) + \Re\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(-1)}\right) \\
\alpha_8 &= \Im\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(-1)}\right) - \Im\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(1)}\right) \\
\alpha_9 &= \Re\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(3)}\right) + \Re\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(-3)}\right) \\
\alpha_{10} &= \Im\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(-3)}\right) - \Im\left(\mathcal{K}_{(1)}^{(3)}\right) \\
\alpha_{11} &= \mathcal{K}_{(0)}^{(0)} \\
\alpha_{12} &= \Re\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(4)}\right) + \Re\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(-4)}\right) \\
\alpha_{13} &= \Im\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(-4)}\right) - \Im\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(4)}\right) \\
\alpha_{14} &= \Re\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(2)}\right) + \Re\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(-2)}\right) \\
\alpha_{15} &= \Im\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(-2)}\right) - \Im\left(\mathcal{K}_{(0)}^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

Annexe B

Preuves des propriétés de para-unitarité

Propriété 2.4.1 page 34.

Preuve. Il suffit de réécrire la définition de la para-unitarité en faisant apparaître les colonnes de la matrice \mathbf{H} :
$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{h}_{:,1}^{\mathbf{H}}(1/z^*) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{:,n}^{\mathbf{H}}(\frac{1}{z^*}) \end{array} \right) (\mathbf{h}_{:,1}(z) \quad \dots \quad \mathbf{h}_{:,n}(z)) = \mathbf{I} \quad \diamond$$

Propriété 2.4.2 page 34.

Preuve. Par définition, $\mathbf{H}(z) = \sum_m \mathbf{H}(m)z^{-m}$, d'où

$$\mathbf{H}^{\mathbf{H}}(1/z^*) = \left(\sum_m \mathbf{H}(m)(1/z^*)^{-m} \right)^{\mathbf{H}} = \sum_m \mathbf{H}^{\mathbf{H}}(m)z^{+m}. \quad (\text{B.1})$$

Ainsi

$$\mathbf{H}^{\mathbf{H}}(1/z^*)\mathbf{H}(z) = \sum_m \mathbf{H}^{\mathbf{H}}(m)z^{+m} \cdot \sum_n \mathbf{H}(n)z^{-n} = \sum_m \sum_n \mathbf{H}^{\mathbf{H}}(m)\mathbf{H}(n)z^{-(n-m)} \quad (\text{B.2})$$

soit en faisant le changement de variable $l = n - m$:

$$\mathbf{H}^{\mathbf{H}}(1/z^*)\mathbf{H}(z) = \sum_l \left\{ \sum_n \mathbf{H}^{\mathbf{H}}(n-l)\mathbf{H}(n) \right\} z^{-l} \quad (\text{B.3})$$

ce qui par hypothèse vaut la matrice identité et est donc indépendant de z^{-l} , $\forall l \neq 0$ d'où: $\sum_m \mathbf{H}^{\mathbf{H}}(m)\mathbf{H}(m-l) = \delta_l \mathbf{I} \quad \diamond$

Corollaire 2.4.1 page 34.

Preuve. Il suffit d'appliquer la propriété 2.4.2: $\sum_{m=0}^{L-1} \mathbf{H}^H(m)\mathbf{H}(m-l) = \delta_l \mathbf{I}$ lorsque $l = L-1$, dans ce cas la somme se réduit à un seul terme: $\mathbf{H}^H(L-1)\mathbf{H}(0) = 0$. \diamond

Propriété 2.4.3 page 34.

Preuve. On utilise la propriété 2.4.2 que l'on écrit élément par élément:

$$\left[\sum_m \mathbf{H}^H(m)\mathbf{H}(m-l) \right]_{i,j} = \delta_{ij} \delta_l \quad (\text{B.4})$$

soit

$$\begin{aligned} [\sum_m \mathbf{H}^H(m)\mathbf{H}(m-l)]_{i,j} &= \sum_m \sum_k [\mathbf{H}^H(m)]_{i,k} [\mathbf{H}(m-l)]_{k,j} \\ &= \sum_m \sum_k h_{ki}^*(m) h_{kj}(m-l) \end{aligned}$$

\diamond

Propriété 2.4.4 page 34.

Preuve. En effet, si $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire et carrée, $\mathbf{H}^{-1}(z) = \mathbf{H}^H(1/z^*)$, une matrice et son inverse commutent on a: $\mathbf{H}^H(1/z^*)\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{H}^H(1/z^*)$.

Posons $\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}^H(1/z^*)$, alors $\tilde{\mathbf{H}}^H(1/z^*) = \mathbf{H}(z)$ d'où

$$\tilde{\mathbf{H}}^H(1/z^*)\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{H}^H(1/z^*)$$

qui vaut la matrice identité par hypothèse, soit $\tilde{\mathbf{H}}(z)$, c'est à dire $\mathbf{H}^H(1/z^*)$ est para-unitaire.

Posons maintenant $\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}^H(z)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}^H(1/z^*)\tilde{\mathbf{H}}(z) &= \mathbf{H}(1/z^*)\mathbf{H}^H(z) = \{\mathbf{H}(z)\mathbf{H}^H(1/z^*)\}^H \\ &= \{\mathbf{H}^H(1/z^*)\mathbf{H}(z)\}^H = \mathbf{I} \end{aligned}$$

, soit $\tilde{\mathbf{H}}(z)$, c'est à dire $\mathbf{H}^H(z)$ est para-unitaire.

De même, posons $\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{H}^H(z^*)$, $\tilde{\mathbf{H}}^H(1/z^*) = \{\mathbf{H}^H(1/z)\}^H = \mathbf{H}(1/z)$ d'où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}^H(1/z^*)\tilde{\mathbf{H}}(z) &= \mathbf{H}(1/z)\mathbf{H}^H(z^*) \\ &= \{\mathbf{H}(z^*)\mathbf{H}^H(1/z)\}^H \end{aligned}$$

. Or par hypothèse, $\mathbf{H}^H(1/z^*)\mathbf{H}(z) = \mathbf{I}$ pour tout z , c'est donc en particulier vrai pour z^* , donc on a également $\mathbf{H}^H(1/z)\mathbf{H}(z^*) = \mathbf{I}$ donc (cas carré) $\mathbf{H}(z^*)$ et $\mathbf{H}^H(1/z)$ commutent et ainsi $\tilde{\mathbf{H}}^H(1/z^*)\tilde{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{I}$. \diamond

Corollaire 2.4.2 page 34.

Preuve. $\mathbf{H}(z)$ étant para-unitaire et carrée, d'après la propriété 2.4.4, $\mathbf{H}^H(1/z^*)$ est également para-unitaire. Il suffit d'appliquer la propriété 2.4.3 à cette matrice, soit

$$\sum_m \sum_k \tilde{h}_{ki}^*(m) \tilde{h}_{kj}(m-l) = \delta_{ij} \delta_l \quad (\text{B.5})$$

or $\tilde{h}_{ij}(m) = h_{ji}^*(-m)$, d'où

$$\sum_m \sum_k h_{ik}(-m) h_{jk}^*(l-m) = \delta_{ij} \delta_l \quad (\text{B.6})$$

soit en faisant le changement de variable $n = l - m$:

$$\sum_n \sum_k h_{ik}(n-l) h_{jk}^*(n) = \delta_{ij} \delta_l \quad (\text{B.7})$$

◇

Propriété 2.4.5 page 35.

Preuve. Il suffit de remarquer que $\sum_k |h_{kj}(m)|^2 = \|\mathbf{h}_{:,j}(m)\|^2$ et d'appliquer la propriété 2.4.3 dans le cas $i = j$ et $l = 0$:

$$\sum_m \sum_k h_{kj}^*(m) h_{kj}(m) = 1 \quad (\text{B.8})$$

◇

Propriété 2.4.6 page 35.

Preuve. Il suffit d'appliquer la propriété 2.4.3 dans le cas $i \neq j$ et $l = 0$:

$$\sum_m \left(\sum_k h_{ki}^*(m) h_{kj}(m) \right) = 0 = \sum_m \mathbf{h}_{:,i}^H(m) \mathbf{h}_{:,j}(m) \quad (\text{B.9})$$

◇

Corollaire 2.4.3 page 35.

Preuve. Il suffit cette fois d'appliquer les résultats du corollaire 2.4.2. ◇

Propriété 2.4.7 page 35.

Preuve. $\mathbf{H}(z)$ étant triangulaire, on a $\mathbf{h}_{:,1}(z) = \begin{pmatrix} h_{11}(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathbf{H}(z)$ étant paraunitaire, ses colonnes vérifient la propriété 2.4.1, d'où $\mathbf{h}_{:,1}^H(\frac{1}{z^*}) \mathbf{h}_{:,j}(z) = \delta_{1j}$, soit $h_{11}^*(1/z^*) h_{1j}(z) = \delta_{1j}$.

$h_{11}(z)$ étant nécessairement non nul, on obtient $h_{1j}(z) = 0, \forall j \neq 1$. En procédant par récurrence, on montre la propriété énoncée. \diamond

Propriété 2.4.8 page 35.

Preuve. Si $\mathbf{H}(z)$ est para-unitaire carrée, alors $\mathbf{H}^H(1/z^*)\mathbf{H}(z) = \mathbf{I}$ d'où

$$\det \mathbf{H}^H(1/z^*) \det \mathbf{H}(z) = 1$$

, or $\det \mathbf{H}^H(1/z^*) = \{\det \mathbf{H}(1/z^*)\}^*$, donc $\det \mathbf{H}(z) \cdot \det \mathbf{H}(1/z^*)^* = 1$, c'est à dire $\det \mathbf{H}(z)$ est passe-tout. \diamond

Corollaire 2.4.4 page 35.

Preuve. D'après la propriété précédente, $\det \mathbf{H}(z) \cdot \det \mathbf{H}(1/z^*)^* = 1$, les deux déterminants étant polynomiaux, on ne peut plus avoir de compensation pôle zéro. \diamond

Propriété 2.4.9 page 35.

Preuve. $\mathbf{H}(0)$ étant singulière (cf corollaire 2.4.1), il existe un vecteur \mathbf{v} non nul tel que $\mathbf{v}^T \mathbf{H}(0) = \mathbf{0}$. On choisit ce vecteur \mathbf{v} normé, soit donc $(\sin \theta_N \quad \cos \theta_N) \mathbf{H}(0) = \mathbf{0}$.

Soit \mathbf{Q}_N la rotation de Givens associée à l'angle θ_N , la matrice \mathbf{Q}_N^T est la matrice inverse de \mathbf{Q}_N et a comme seconde ligne le vecteur $(\sin \theta_N \quad \cos \theta_N)$.

Calculons $\mathbf{Q}_N^T \mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_N & -\sin \theta_N \\ \sin \theta_N & \cos \theta_N \end{pmatrix} (\mathbf{H}(0) + \mathbf{H}(1)z^{-1} + \dots + \mathbf{H}(L-1)z^{-L+1}) = \begin{pmatrix} \times & \times \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_N^T \mathbf{H}(1)z^{-1} + \dots + \mathbf{Q}_N^T \mathbf{H}(L-1)z^{-L+1}$, la deuxième ligne ne comportant pas de

terme de degré nul, on peut poser: $\mathbf{Q}_N^T \mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0(z) \\ z^{-1} \mathbf{G}_1(z) \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{G}_0(z)$ et $\mathbf{G}_1(z)$ des vec-

teurs ligne polynomiaux de degré $L-1$ et $L-2$. On réécrit $\mathbf{Q}_N^T \mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0(z) \\ \mathbf{G}_1(z) \end{pmatrix}$, et l'on pose $\mathbf{Q}_N^T \mathbf{H}(z) = \mathbf{Z}(z) \mathbf{H}_{N-1}(z)$. On montre facilement que $\mathbf{H}_{N-1}(z)$ est para-unitaire en calculant $\mathbf{H}_{N-1}^T(z^{-1}) \mathbf{H}_{N-1}(z)$.

$\mathbf{H}(z)$ étant para-unitaire, on a $\det \mathbf{H}(z) = \beta z^{-N}$. Or $\mathbf{H}_{N-1}(z) = \mathbf{Z}^{-1}(z) \mathbf{Q}_N^T \mathbf{H}(z)$, d'où $\det \mathbf{H}_{N-1}(z) = z \det \mathbf{H}(z) = \beta z^{-(N-1)}$. En faisant cette factorisation, on a donc baissé le degré du déterminant d'une unité.

On réitère ensuite le processus sur $\mathbf{H}_{N-1}(z)$, et on obtient finalement $\mathbf{H}_0(z)$ tel que $\det \mathbf{H}_0(z) = \beta$ (constant) et $\mathbf{H}_0(z)$ FIR para-unitaire, une telle matrice ne pouvant être que constante, et ainsi unitaire. Les vecteurs colonnes d'une matrice unitaire étant des vecteurs orthonormés, on peut factoriser $\mathbf{H}_0(z) = \alpha \mathbf{Q}_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ avec \mathbf{Q}_0 une rotation et $\alpha = \pm \beta$. \diamond

Lemme 2.4.1 page 36.

Preuve. Soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} r_1 e^{j\alpha_1} \\ r_2 e^{j\alpha_2} \end{pmatrix}$, avec r_1 et r_2 positifs, un vecteur complexe quelconque. On pose $\cos \theta = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ et $\sin \theta = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$, (r_1 et r_2 positifs $\Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$) d'où

$$\mathbf{u} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} e^{j\alpha_1} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} \sin \theta \end{pmatrix} = \rho e^{j\psi} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{j\varphi} \sin \theta \end{pmatrix}, \text{ où } \rho \text{ est le module du vecteur. } \diamond$$

Propriété 2.4.10 page 36.

Preuve. $\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 \rho_2 e^{j(\psi_2 - \psi_1)} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} \sin \theta_1 \sin \theta_2) = 0$, soit $e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = -\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2}$. Le membre de gauche de cette dernière équation étant de module 1, et par hypothèse, $\cos \theta_i$ et $\sin \theta_i$ étant réels positifs, on en déduit que $e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = -1$ et $\cos \theta_1 \cos \theta_2 = \sin \theta_1 \sin \theta_2$, soit $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ [2π] et $\tan \theta_1 = \frac{1}{\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$ car par hypothèse $\theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$. \diamond

Propriété 2.4.11 page 36.

Preuve. Soit $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2)$, \mathbf{U} unitaire $\Leftrightarrow \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{u}_1$ et \mathbf{u}_2 sont orthonormés. Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient $\rho_1 = \rho_2 = 1$ et

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} e^{j\psi_1} \cos \theta_1 & e^{j\psi_2} \cos \theta_2 \\ e^{j(\psi_1 + \varphi_1)} \sin \theta_1 & e^{j(\psi_2 + \varphi_2)} \sin \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} e^{j\psi_1} \cos \theta_1 & e^{j\psi_2} \sin \theta_1 \\ e^{j(\psi_1 + \varphi_1)} \sin \theta_1 & e^{j(\psi_2 + \varphi_1 + \pi)} \cos \theta_1 \end{pmatrix} \\ &= e^{j\psi_1} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -e^{-j\varphi_1} \sin \theta_1 \\ e^{j\varphi_1} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{j(\psi_2 - \psi_1)} e^{j\varphi_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\varphi_1, \psi_1, \psi_2$ étant quelconque, α l'est aussi. \diamond

Propriété 2.4.12 page 36.

Preuve. $\mathbf{H}(0)$ étant singulière (cf corollaire 2.4.1), il existe un vecteur \mathbf{v} non nul tel que $\mathbf{v}^H \mathbf{H}(0) = \mathbf{0}$. On choisit ce vecteur \mathbf{v} normé, soit donc $(e^{-j\varphi_N} \sin \theta_N \quad \cos \theta_N) \mathbf{H}(0) = \mathbf{0}$. Soit \mathbf{Q}_N la rotation de Givens associée à l'angle θ_N , la matrice \mathbf{Q}_N^H est la matrice inverse de \mathbf{Q}_N et a comme seconde ligne le vecteur $(e^{-j\varphi_N} \sin \theta_N \quad \cos \theta_N)$.

Calculons $\mathbf{Q}_N^H \mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_N & -e^{j\varphi_N} \sin \theta_N \\ e^{-j\varphi_N} \sin \theta_N & \cos \theta_N \end{pmatrix} (\mathbf{H}(0) + \mathbf{H}(1)z^{-1} + \dots + \mathbf{H}(L-1)z^{-L+1}) = \begin{pmatrix} \times & \times \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_N^H \mathbf{H}(1)z^{-1} + \dots + \mathbf{Q}_N^H \mathbf{H}(L-1)z^{-L+1}$, la deuxième ligne ne

comportant pas de terme de degré nul, on peut poser: $\mathbf{Q}_N^H \mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0(z) \\ z^{-1} \mathbf{G}_1(z) \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{G}_0(z)$ et $\mathbf{G}_1(z)$ des vecteurs ligne polynomiaux de degré $L - 2$ et $L - 1$. On réécrit $\mathbf{Q}_N^H \mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0(z) \\ \mathbf{G}_1(z) \end{pmatrix}$, et l'on pose $\mathbf{Q}_N^H \mathbf{H}(z) = \mathbf{Z}(z) \mathbf{H}_{N-1}(z)$. On montre facilement que $\mathbf{H}_{N-1}(z)$ est paraunitaire en calculant $\mathbf{H}_{N-1}^H(1/z^*) \mathbf{H}_{N-1}(z)$.

$\mathbf{H}(z)$ étant para-unitaire, on a $\det \mathbf{H}(z) = \beta z^{-N}$. Or $\mathbf{H}_{N-1}(z) = \mathbf{Z}^{-1}(z) \mathbf{Q}_N^H \mathbf{H}(z)$, d'où $\det \mathbf{H}_{N-1}(z) = z \det \mathbf{H}(z) = \beta z^{-(N-1)}$. En faisant cette factorisation, on a donc baissé le degré du déterminant d'une unité.

On réitère ensuite le processus sur $\mathbf{H}_{N-1}(z)$, et on obtient finalement $\mathbf{H}_0(z)$ tel que $\det \mathbf{H}_0(z) = \beta$ (constant). Si $\mathbf{H}_0(z)$ n'est pas une matrice constante, on refait de nouveau une factorisation pour obtenir une matrice causale $\mathbf{H}_{-1}(z)$ dont le déterminant serait βz , ce qui est impossible car non causal, donc $\mathbf{H}_0(z)$ est constante et comme de plus elle est para-unitaire, elle est unitaire. D'après la propriété 2.4.11, on peut ainsi factoriser

$$\mathbf{H}_0(z) = \alpha \mathbf{Q}_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\alpha_0} \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{Q}_0 \text{ une rotation de Givens et } \alpha = \beta e^{-j\alpha_0} \quad \diamond$$

Annexe C

Calcul des coefficients \mathcal{K} de l'algorithme PAFA

C.1 Décomposition des \mathcal{K}

Les tableaux C.1 et C.2 reprennent les coefficients $\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(\eta)}$ de l'algorithme PAFA. Dans ces tableaux, chaque coefficient est défini en fonction des valeurs des indices a_n et q_n de (4.20) $\forall n$ et $\forall \tau_i$. Par exemple $\mathcal{K}_{(4)}^{(0)}$ correspond à la somme:

$$\mathcal{K}_{(4)}^{(0)} = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\boldsymbol{\tau}} A_{iq_1}(\tau_1) A_{iq_2}^*(\tau_2) A_{iq_3}(\tau_3) A_{iq_4}^*(\tau_4) \mathbf{C}_2^{2,\mathbf{x}}[\mathbf{q}; \boldsymbol{\tau}]. \quad (\text{C.1})$$

où le vecteur \mathbf{a} est égal au vecteur \mathbf{q} , c'est à dire $a_1 = q_1$, $a_2 = q_2$, $a_3 = q_3$, $a_4 = q_4$. La relation :

$$\mathcal{K}_{(\alpha)}^{(2\beta+\alpha-4)} \Rightarrow \sum_{\boldsymbol{\tau}} A_{iq_1}(\tau_1) A_{iq_2}^*(\tau_2) A_{iq_3}(\tau_3) A_{iq_4}^*(\tau_4) \mathbf{C}_2^{2,\mathbf{x}}[\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}] \quad (\text{C.2})$$

C.2 Méthode de calcul

Nous pouvons réduire la complexité de calcul de l'algorithme PAFA en construisant une matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{N^4 \times N^4}$ contenant tous les coefficients \mathcal{K} . Cette matrice est issue de la somme suivante:

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\boldsymbol{\tau}, i} \mathbf{f}_i(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{d}(\boldsymbol{\tau})^\top. \quad (\text{C.3})$$

où les vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{d} sont définis pour $N = 2$ par:

$$\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} f_i^{1111}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \\ f_i^{1112}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \\ f_i^{1121}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \\ \vdots \\ f_i^{2222}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{d}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} C_2^{2,\mathbf{x}}[1,1,1,1,\boldsymbol{\tau}] \\ C_2^{2,\mathbf{x}}[1,1,1,2,\boldsymbol{\tau}] \\ C_2^{2,\mathbf{x}}[1,2,1,1,\boldsymbol{\tau}] \\ \vdots \\ C_2^{2,\mathbf{x}}[2,2,2,2,\boldsymbol{\tau}] \end{bmatrix},$$

avec $f_i^{q_1 q_2 q_3 q_4}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = A_{iq_1}(\tau_1) A_{iq_2}^*(\tau_2) A_{iq_3}(\tau_3) A_{iq_4}^*(\tau_4)$.

Ainsi, pour deux sources uniquement, nous avons $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$. Ainsi nous obtenons les $N^8 = 256$ valeurs de (4.17, p. 77) en sommant L^4 matrices 16×16 . Ensuite, grâce au tableaux C.1 et C.2, nous calculons chaque coefficient \mathcal{K} en sommant les éléments de la matrice \mathbf{T} . De plus, comme les éléments des vecteurs $\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\tau})$ et $\mathbf{d}(\boldsymbol{\tau})$ ont le même classement, c'est à dire $q_1 \equiv a_1, q_2 \equiv a_2, q_3 \equiv a_3, q_4 \equiv a_4$, nous pouvons utiliser une seule boucle pour obtenir ces vecteurs. Ainsi nous réduisons le nombre de boucles de N^4 .

Annexe D

Détails de PAJOD

D.1 Expression de [8]

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2^2 = \sum_{\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}} & |\cos^2 \theta M_{ii} + \cos \theta \sin \theta e^{-j\psi} M_{ji} + \cos \theta \sin \theta e^{j\psi} M_{ij} + \sin^2 \theta M_{jj}|^2 \\ & + |\sin^2 \theta M_{ii} - \cos \theta \sin \theta e^{-j\psi} M_{ji} - \cos \theta \sin \theta e^{j\psi} M_{ij} + \cos^2 \theta M_{jj}|^2, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

D.2 Simplification de (3.59)

$$\Re\{\alpha_k e^{j\psi_k}\} = \Re\{\alpha_k\} \cos \psi_k - \Im\{\alpha_k\} \sin \psi_k, \quad (\text{D.2})$$

$$\Re\{\gamma_k e^{2j\psi_k}\} = \Re\{\gamma_k\} \cos 2\psi_k - \Im\{\gamma_k\} \sin 2\psi_k, \quad (\text{D.3})$$

$$\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k = \cos^2 2\theta_k + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_k, \quad (\text{D.4})$$

$$4 \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k = \sin^2 2\theta_k, \quad (\text{D.5})$$

$$4 \cos \theta_k \sin^3 \theta_k = (1 - \cos 2\theta_k) \sin 2\theta_k, \quad (\text{D.6})$$

$$4 \cos^3 \theta_k \sin \theta_k = (1 + \cos 2\theta_k) \sin 2\theta_k, \quad (\text{D.7})$$

$$2(\cos^3 \theta_k \sin \theta_k - \cos \theta_k \sin^3 \theta_k) = \cos 2\theta_k \sin 2\theta_k. \quad (\text{D.8})$$

D.3 Simplification de (3.59)

$$\cos^2 \psi_k + \sin^2 \psi_k = 1 \quad (\text{D.9})$$

$$\cos^2 \psi_k - \sin^2 \psi_k = \cos 2\psi_k \quad (\text{D.10})$$

$$2 \cos \psi_k \sin \psi_k = \sin 2\psi_k \quad (\text{D.11})$$

D.4 Expressions des $P_x(t)$

$$P_4(t) = 2\Re\{\alpha_2\}t^4 + 4\Im\{\alpha_2\}t^3 + 4\Im\{\alpha_2\}t - 2\Re\{\alpha_2\} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} P_3(t) &= (4|M_{jj}(k)|^2 - 2\Lambda_3 - 4\Re\{\gamma\})t^4 - 16\Im\{\gamma\}t^3 \\ &\quad + (8|M_{jj}(k)|^2 - 4\Lambda_3 + 24\Re\{\gamma\})t^2 + 16\Im\{\gamma\}t \\ &\quad + 4|M_{jj}(k)|^2 - 2\Lambda_3 - 4\Re\{\gamma\} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} P_2(t) &= (6\Re\{\alpha_1\} - 6\Re\{\alpha_2\})t^4 + (-12\Im\{\alpha_2\} + 12\Im\{\alpha_1\})t^3 \\ &\quad + (-12\Im\{\alpha_2\} + 12\Im\{\alpha_1\})t + (6\Re\{\alpha_2\} - 6\Re\{\alpha_1\}) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} P_1(t) &= (2\Lambda_3 + 4\Re\{\gamma\} - 4|M_{ii}(k)|^2)t^4 + 16\Im\{\gamma\}t^3 \\ &\quad + (4\Lambda_3 - 8|M_{ii}(k)|^2 - 24\Re\{\gamma\})t^2 - 16\Im\{\gamma\}t \\ &\quad + 2\Lambda_3 + 4\Re\{\gamma\} - 4|M_{ii}(k)|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$$P_0(t) = -2\Re\{\alpha_1\}t^4 - 4\Im\{\alpha_1\}t^3 - 4\Im\{\alpha_1\}t + 2\Re\{\alpha_1\} \quad (\text{D.16})$$

D.5 Expressions des $Q_x(t)$

$$Q_2(t) = 4\Im\{\alpha_2\}t^4 - 8\Re\{\alpha_2\}t^3 - 8\Re\{\alpha_2\}t - 4\Im\{\alpha_2\} \quad (\text{D.17})$$

$$Q_1(t) = -8\Im\{\gamma\}t^4 + 32\Re\{\gamma\}t^3 + 48\Im\{\gamma\}t^2 - 32\Re\{\gamma\}t - 8\Im\{\gamma\} \quad (\text{D.18})$$

$$Q_0(t) = 4\Im\{\alpha_1\}t^4 - 8\Re\{\alpha_1\}t^3 - 8\Re\{\alpha_1\}t - 4\Im\{\alpha_1\} \quad (\text{D.19})$$

D.6 Déterminant de Sylvester

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{W}) = & P_4(t)^2 Q_0(t)^4 + Q_0(t)^3 P_3(t)^2 Q_2(t) - Q_0(t)^3 P_4(t) Q_1(t) P_3(t) \\
& - 2Q_0(t)^3 P_4(t) Q_2(t) P_2(t) - Q_0(t)^2 P_3(t) Q_2(t) Q_1(t) P_2(t) \\
& + 2Q_0(t)^2 P_4(t) Q_2(t)^2 P_0(t) + 3Q_0(t)^2 P_4(t) Q_2(t) Q_1(t) P_1(t) \\
& + Q_0(t)^2 Q_2(t)^2 P_2(t)^2 - 2Q_0(t)^2 P_3(t) Q_2(t)^2 P_1(t) \\
& + Q_0(t)^2 P_4(t) Q_1(t)^2 P_2(t) - Q_0(t) Q_1(t) P_2(t) Q_2(t)^2 P_1(t) \\
& + Q_0(t) Q_2(t)^3 P_1(t)^2 - 2Q_0(t) Q_2(t)^3 P_2(t) P_0(t) \\
& + 3Q_0(t) P_3(t) Q_2(t)^2 P_0(t) Q_1(t) + Q_0(t) P_3(t) Q_2(t) Q_1(t)^2 P_1(t) \\
& - 4Q_0(t) P_4(t) Q_2(t) Q_1(t)^2 P_0(t) - Q_0(t) P_4(t) Q_1(t)^3 P_1(t) \\
& - Q_2(t)^3 P_1(t) P_0(t) Q_1(t) + Q_1(t)^2 P_2(t) Q_2(t)^2 P_0(t) \\
& + Q_2(t)^4 P_0(t)^2 - P_3(t) Q_2(t) Q_1(t)^3 P_0(t) \\
& + P_4(t) Q_1(t)^4 P_0(t)
\end{aligned} \tag{D.20}$$

Bibliographie

- [1] A. HYVÄRINEN and J. KARHUNEN and E. OJA, *Independent Component Analysis*, Wiley, 2001.
- [2] K. ABED-MERAÏM, L. LOUBATON, and E. MOULINES, *Subspace method for blind identification of multichannel FIR filters in noise field with unknown spatial covariance*, Asilomar conference (1994).
- [3] S.A. ALSHEBEILI, N. VENETSANOPOULOS, and A.E. CETIN, *Cumulant based identification approaches for nonminimum phase FIR systems*, IEEE Trans. on Signal Processing **41** (1993), no. 4, 1579–1588.
- [4] A. BELOUHRANI, K. ABED-MERAÏM, J. F. CARDOSO, and E. MOULINES, *A Blind Source Separation Technique using Second Order Statistics*, IEEE Trans. on Signal Processing **45** (1997), no. 2, 434–444.
- [5] A. BELOUHRANI and A. CICHOCKI, *Robust whitening procedure in blind source separation context*, IEE Electronics Letters **36** (2000).
- [6] A. BENVENISTE, M. GOURSAT, and G. RUGET, *Robust identification of a nonminimum phase system: blind adjustment of a linear equalizer in data communications*, IEEE Trans. on Auto. Cont. **25(3)** (1980), 385–399.
- [7] J. J. BUSSGANG, *Cross-Correlation function of amplitude-distorted Gaussian signals*, 1952.
- [8] J. F. CARDOSO and A. SOULOUMIAC, *Blind beamforming for non-Gaussian signals*, IEEE Proceedings Part F **140** (1993), no. 6, 362–370.
- [9] C. CHEVALIER, *On the performance of higher order blind source separation methods*, IEEE-ATHOS Workshop on Higher-Order Statistics (Begur, Spain), 12-14 June 1995.
- [10] H. CHIANG and C.L. NIKIAS, *Adaptive deconvolution and identification of nonminimum phase FIR systems based on cumulants*, IEEE Trans. on AC **35(1)** (1990), 36–47.
- [11] P. COMON, *Analyse en Composantes Indépendantes et identification aveugle*, Traitement du Signal **7** (1990), no. 3, 435–450, Numéro special non lineaire et non gaussien.
- [12] ———, *Independent Component Analysis*, Proc. Int. Sig. Proc. Workshop on Higher-Order Statistics (Chamrousse, France), July 1991, pp. 111–120.
- [13] ———, *Contrasts for Multichannel Blind Deconvolution*, IEEE Signal Processing Letters **3** (1996), no. 7, 209–211.
- [14] ———, *Blind Equalization with Discrete Inputs in the Presence of Carrier Residual*, In Second IEEE Int. Symp. Sig. Proc. Inf. Theory (Marrakech, Morocco), December 2002.

- [15] ———, *Tensor decompositions*, Mathematics in Signal Processing V (Oxford, UK) (I.K. Proudler J.G. McWhirter, ed.), Eds. Oxford University Press, 2002.
- [16] ———, *Contrasts for Independent Component Analysis and Blind Deconvolution*, Research report 2003.06, I3S-CNRS, March 2003.
- [17] P. COMON and E. MOREAU, *Blind MIMO Equalization and Joint Diagonalization Criteria*, Proc. of ICASSP (Salt Lake City), May 7-11. 2001.
- [18] P. COMON, E. MOREAU, and L. ROTA, *Blind Separation of Convolutional Mixtures: a Contrast-Based Joint Diagonalization Approach*, Proc. of Int. Conf. Independent Component Analysis (San Diego), Dec. 9-13 2001, pp. 686-691.
- [19] P. COMON, E. MOREAU, and L. ROTA, *Séparation de Mélanges convolutifs par Diagonalisation Conjointe*, 18eme Colloque Grets (Toulouse, France), 10-13 Sept 2001.
- [20] P. COMON and L. ROTA, *Blind source separation: a Partial Joint Diagonalization (PAJOD) approach*, 3rd workshop on Physics in Signal and Image Processing (Grenoble, France), 29-31 January 2003.
- [21] P. COMON and L. ROTA, *Blind Separation of Independent Sources from Convolutional Mixtures*, IEICE Trans. on Fundamentals of Elec. Com. Comput. Sciences **E86-A** (2003), no. 3, 550-563.
- [22] D. COX, J. LITTLE, and D. O'SHEA, *Using Algebraic Geometry*, Springer Verlag, New York, 1998.
- [23] L. DeLATHAUWER, *Signal Processing on Multilinear Algebra*, Doctorate, Katholieke Universiteit Leuven, Sept. 1997.
- [24] L. DeLATHAUWER and B. DeMOOR, *From matrix to tensor: Multilinear algebra and signal processing*, Mathematics in Sig. Proc., IMA Conf. Series (Warwick), Dec. 17-19 1996.
- [25] N. DELFOSSE and P. LOUBATON, *Adaptive blind separation of independent Sources: a deflation approach*, Signal Processing **45** (1995), 59-83.
- [26] A. J. Van der VEEN and A. PAULRAJ, *An Analytical Constant Modulus Algorithm*, IEEE Trans. on Signal Processing **44** (1996), no. 5, 1136-1155.
- [27] Z. DING, *Matrix Outer-product Decomposition method for Blind Multiple Channel Identification*, IEEE Trans. on Signal Processing **45** (1997), no. 12, 3053-3061.
- [28] Z. DING and Y. LI, *Blind Equalization and Identification*, DEKKER, New York, 2001.
- [29] Z. DING and T. NGUYEN, *Stationary Points of a Kurtosis Maximization Algorithm for Blind Signal Separation and Antenna Beamforming*, IEEE Trans. on Signal Processing **48** (2000), no. 6, 1587-1596.
- [30] D. DONOHO, *On minimum entropy deconvolution*, Applied time series analysis II (Academic Press, ed.), 1981, pp. 565-609.
- [31] I. FIJALKOW, A. TOUZNI, and J. R. TREICHLER, *Fractionally spaced equalization using CMA: Robustness to channel noise and lack of disparity*, IEEE Trans. on Signal Processing **45** (1997), no. 1, 56-66.
- [32] X. GAO, T. Q. NGUYEN, and G. STRANG, *On Factorization of M-Channel Paraunitary Filterbanks*, IEEE Trans. on Signal Processing **49** (2001), no. 7, 1433-1446.
- [33] D. GESBERT and P. DUHAMEL, *Unbiased Blind Adaptive Channel Identification and Equalization*, IEEE Trans. on Signal Processing **48** (2000), no. 1, 148-158.

- [34] G.B. GIANNAKIS and J.M. MENDEL, *Identification of nonminimum phase systems using higher order statistics*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing **37(3)** (1989), 360–377.
- [35] G.B. GIANNAKIS and A. SWAMI, *On estimating noncausal nonminimum phase ARMA models of non-gaussian processes*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing **38(3)** (1990), 478–495.
- [36] D. GODARD, *Self recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems*, IEEE Trans. on Signal Processing **28** (1980), no. 11, 1867–1875.
- [37] G. H. GOLUB and C. F. VAN LOAN, *Matrix Computation*, 3rd ed., The John Hopkins University Press, 1996.
- [38] O. GRELLIER, P. COMON, B. MOURRAIN, and P. TREBUCHET, *Analytical Blind Channel Identification*, IEEE Trans. on Signal Processing **50** (2002), no. 9.
- [39] S. HAYKIN, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, 1995, 3rd edition.
- [40] ———, *Unsupervised Adaptive Filtering*, vol. 1, Wiley, 2000, series in Adaptive and Learning Systems for Communications, Signal Processing, and Control.
- [41] Y. INOUE and T. HABE, *Blind Equalization of Multichannel Linear Time-Invariant Systems*, IEICE **24** (1995), no. 5, 9–16.
- [42] Y. INOUE and R. LIU, *Direct Blind Deconvolution of Multiuser-Multichannel System Driven by Temporally White Source Signals*, Proc. of ICASSP (Phoenix, Arizona, USA), vol. 5, 1999, pp. 2889–2892.
- [43] ———, *A System-Theoretic Foundation for Blind Equalization of an FIR MIMO Channel System*, IEEE Trans. on Circuits and Systems **49** (2002), no. 4, 425–436.
- [44] T. KAILATH, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [45] J. L. LACOUME, P. O. AMBLARD, and P. COMON, *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*, Masson, 1997.
- [46] L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR, and J. VANDEWALLE, *An Algebraic Approach to Blind MIMO Identification*, Proc. 2nd Int. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA 2000) (Helsinki, Finland,), June 19-22 2000.
- [47] ———, *An Algebraic Approach to the Blind Identification of Paraunitary Filters*, Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference (Chicago, USA), September 23-28 2000.
- [48] P. LOUBATON, E. MOULINES, and P. A. REGALIA, *Subspace Method for Blind Identification and Deconvolution*, Signal Processing Advances in Wireless and Mobile Communications (Giannakis, Hua, Stoica, and Tong, eds.), Prentice-Hall, 2001.
- [49] P. McCULLAGH, *Tensor Methods in Statistics*, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1987.
- [50] P. LANCASTER and M. TISMENETSKY, *The Theory of Matrices*, 2nd ed., Computer Science and Applied Mathematics.
- [51] R. PAN and C.L. NIKIAS, *The complex cepstrum of the higher order cumulants and nonminimum phase system identification*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing **36(2)** (1988), 186–205.
- [52] C. B. PAPADIAS, *Globally Convergent Blind Source Separation Based on a Multiuser Kurtosis Maximization Criterion*, IEEE Trans. on Signal Processing **48** (2000), no. 12, 3508–3519.

- [53] D. T. PHAM and P. GARAT, *Blind separation of mixture of independent sources through a quasi-maximum likelihood approach*, IEEE Trans. on Signal Processing **45** (1997), no. 7, 1712–1725.
- [54] G. PICCHI and G. PRATI, *Blind equalization and carrier recovery using 'stop-and-go' decision-directed algorithm*, IEEE Trans. on Communications **35** (1987), no. 9, 877–887.
- [55] J.G. PROAKIS and D. MANOLAKIS, *Introduction to Digital Signal Processing*, Mac-Millan, 1989.
- [56] L. ROTA and P. COMON, *Alphabet Polynomial Fitting Criteria for Blind Equalization*, XII European Signal Processing Conference (Vienna, Austria), 7-10 Sept 2004.
- [57] ———, *Blind Equalizers Based on Polynomial Criteria*, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (Montreal, Quebec), 17-21 May 2004.
- [58] L. ROTA, P. COMON, and S. ICART, *Blind MIMO Equalization under paraunitary constraint*, I3S Report RR-2002-35-FR, Laboratoire I3S, Sept. 2002.
- [59] ———, *Blind Equalization of MIMO Channels*, Proc. of Signal Processing Advances in Wireless Communications (Rome, Italy), June 15-18 2003.
- [60] ———, *Blind MIMO Paraunitary Equalizer*, Proc. of ICASSP (Hong Kong), 6-10 April 2003.
- [61] L. ROTA, P. COMON, and S. ICART, *Égalisation aveugle de mélanges convolutifs MIMO*, 19eme Colloque Grets (Paris, France), 8-11 Sept 2003.
- [62] Y. SATO, *A method of self recovering equalization for multilevel amplitude-modulation systems*, IEEE Trans. on Com. **23** (1975), 679–682.
- [63] A. H. SAYED and T. KAILATH, *A Survey of Spectral Factorization Methods*, Numer. Linear Algebra Appl. **8** (2001), 467–496.
- [64] O. SHALVI and E. WEINSTEIN, *New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems*, IEEE Trans. on Information Theory **36** (1990), no. 2, 312–321.
- [65] D. T. M SLOCK, *Blind joint equalization of multiple synchronous mobile users using oversampling and/or multiple antennas*, In Proc. 28th Asilomar Conf. Sig. Syst. Comp. (Pacific Grove, CA), Oct. 31 - Nov. 2 1994.
- [66] A. STOGIOGLOU and S. McLAUGHLIN, *MA parameter estimation and cumulant enhancement*, IEEE Trans. on Signal Processing **44** (1996), no. 7, 1704–1718.
- [67] A. SWAMI, G. GIANNAKIS, and S. SHAMSUNDER, *Multichannel ARMA processes*, IEEE Trans. on Signal Processing **42** (1994), no. 4, 898–913.
- [68] N. THIRION and E. MOREAU, *New criteria for blind signal separation*, IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing (Pocono Manor, Pennsylvania, Usa), Aug. 14-16 2000, pp. 344–348.
- [69] A. TOUZNI, I. FILJAKOW, M. G. LARIMORE, and J. R. TREICHLER, *A Globally Convergent Approach for Blind MIMO Adaptive Deconvolution*, IEEE Trans. on Signal Processing **49** (2001), no. 6, 1166–1178.
- [70] J.R. TREICHLER and M.G. LARIMORE, *New processing techniques based on the constant modulus algorithm*, IEEE Trans. on Acoust. Speech Sig. Proc. **33** (1985), no. 2, 420–431.
- [71] J. K. TUGNAIT, *Blind equalization and estimation of digital communication FIR channels using cumulant matching*, IEEE Trans. on Communications **43** (1995), no. 2/3/4, 1240–1245.

- [72] ———, *Identification and Deconvolution of Multichannel Non-Gaussian Processes using Higher Order Statistics and Inverse Filter Criteria*, IEEE Trans. on Signal Processing **45** (1997), 658–672.
- [73] ———, *On Blind Separation of Convolutional Mixtures of Independent Linear Signals in Unknown Additive Noise*, IEEE Trans. on Signal Processing **46** (1998), no. 11, 3117–3123.
- [74] P. P. VAIDYANATHAN, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, London, 1993.
- [75] D. YELLIN and E. WEINSTEIN, *Criteria for multichannel signal separation*, IEEE Trans. on Signal Processing **42** (1994), no. 8, 2158–2168.

Égalisation aveugle de systèmes multi-utilisateurs

Ludwig ROTA

Résumé:

Cette thèse présente trois algorithmes de séparation de sources. Le premier, l'algorithme PAJOD (Partial Approximative JOint Diagonalization), considère que la matrice de la réponse impulsionnelle du canal est une matrice para-unitaire. Cette hypothèse est vérifiée lorsque les observations ont été préalablement blanchies. Le problème peut être alors réduit en une diagonalisation partielle et conjointe (donc approximative) d'un ensemble de matrices contenant les multi-corrélations cumulantes des observations. Cependant, dans un souci de simplification, l'algorithme PAJOD retourne une matrice semi-unitaire et non para-unitaire. Cela nous mène au deuxième algorithme qui est l'algorithme PAFA (PAra-unitary FActorisation). Cet algorithme se base sur la même hypothèse de blanchiment des observations mais, contrairement à PAJOD, utilise une factorisation exacte des matrices para-unitaires afin d'obtenir la matrice réponse impulsionnelle de l'égaliseur sous forme para-unitaire. Tout comme PAJOD, le critère utilisé pour cette factorisation para-unitaire utilise les multi-corrélations cumulantes des observations. Le dernier algorithme APF (Alphabet Polynomial Fitting) est différent des deux premiers dans le sens où il ne considère pas le canal comme para-unitaire et a par ailleurs connaissance des modulations employées. La connaissance des modulations permet entre autres de pouvoir extraire des signaux de modulations connues à partir d'un mélange instantané ou convolutif. En effet, si tous les signaux émis utilisent des modulations différentes, il est ainsi possible d'extraire un à un les signaux. Pour cela, l'algorithme effectue une extraction par déflation régie par la maximisation d'un critère de contraste adapté à chaque modulation.

Abstract:

The present thesis introduces three algorithms for blind source separation (BSS). The first algorithm, called PAJOD (Partial Approximate JOint Diagonalization), assumes that the channel impulse response matrix is para-unitary. This hypothesis is verified when the observations have been previously whitened. The problem can then be reduced to a joint partial (thus approximate) diagonalization of a matrix set containing the sensor-output higher-order cumulants at different time lags. In a bid to reduce complexity, the PAJOD algorithm is only designed to find a semi-unitary matrix and not para-unitary. This motivates the development of the second algorithm, so-called PAFA (PAra-unitary FActorization), which is also based on the pre-whitening assumption. Contrary to PAJOD, PAFA exploits an exact parameterization of para-unitary matrices to obtain the equalizer impulse response matrix with the appropriate structure. Like PAJOD, the criterion for para-unitary factorization exploits the observation higher-order cumulants at different lags. The last algorithm, APF (Alphabet Polynomial Fitting), is different from the other two in that it does not make the para-unitary channel assumption and requires prior knowledge of the input modulations. This knowledge enables the extraction of input signals with known modulation in an instantaneous or convolutive mixture. Indeed, if all emitted signals employ different modulations, it is possible to extract the signals one by one. To this end, the algorithm carries out a deflation-based extraction driven by the maximization of a contrast criterion adapted to each modulation.