



Calculs explicites dans les groupes de Grotendieck et de Chow des variétés homogènes projectives

Franck Doray

► To cite this version:

Franck Doray. Calculs explicites dans les groupes de Grotendieck et de Chow des variétés homogènes projectives. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00120949

HAL Id: tel-00120949

<https://theses.hal.science/tel-00120949>

Submitted on 19 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)
préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS - UJF*

Calculs explicites dans les groupes de Grothendieck et de Chow des variétés homogènes projectives

Franck DORAY

Soutenue à Grenoble le 9 octobre 2006 devant le jury :

*Emmanuel Peyre (Université de Grenoble I), Directeur
Michel Brion (Université de Grenoble I)
Bruno Kahn (Institut mathématique de Jussieu)
Nikita Karpenko (Institut mathématique de Jussieu)
Laurent Manivel (Université de Grenoble I)*

Au vu des rapports de Bruno Kahn et Nikita Karpenko

Franck Doray

Institut Fourier, UMR 5582, 100, rue des Maths, BP 74,
F-38402 Saint Martin d'Hères.

E-mail : `doray@ujf-grenoble.fr`

**CALCULS EXPLICITES DANS LES
GROUPES DE GROTHENDIECK ET DE
CHOW DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES
PROJECTIVES**

Franck Doray

REMERCIEMENTS

Un jour, se désaltérant à un puits, un paysan très pauvre qui, à 40 ans, n'avait jamais rien appris s'émerveilla devant une pierre trouée par l'eau qui coulait sur elle goutte à goutte. « Si cette petite goutte peut trouer la pierre, se dit-il, qu'en est-il de mon cœur, de chair et de sang ? Ne peut-il pas être pénétré des enseignements de la Torah ? ». Rachel, la fille d'un riche notable, dont il était amoureux, lui promit le mariage s'il partait étudier. Après de secrètes noces, il partit donc étudier. Vingt-quatre ans plus tard, très riche, Rabbi Akiva avait 12 000 disciples et était un très grand maître.

L'histoire de Akiva, il y a plus de vingt siècles, nous enseigne que l'Etude en soi est un bien précieux qui permet à chacun de progresser.

Je voudrais tout d'abord remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, Emmanuel Peyre. Sa grande écoute, sa disponibilité exemplaire, ses conseils m'ont énormément aidé. J'ai appris beaucoup à ses côtés.

Je suis très reconnaissant envers les membres du Jury pour leur participation. Je tiens à remercier chaleureusement Bruno Kahn et Nikita Karpenko qui ont accepté d'être rapporteurs, d'avoir lu le présent travail alors même qu'il comportait encore énormément d'erreurs.

J'ai une pensée pour les nombreuses personnes qui m'ont « accompagné » pendant mes études de mathématiques à Orsay, Paris puis à Grenoble, et lors de conférences et séminaires externes, puis pour ma famille et mes amis qui m'ont soutenu.

RÉSUMÉ

Fixons un corps k . Les variétés homogènes projectives X sous un groupe G semi-simple déployé ont une géométrie assez simple. La décomposition de Bruhat ([3, 14.12]) fournit, en effet, une décomposition cellulaire de ces variétés. Il en résulte que si $(X_w)_w$ désigne les variétés de Schubert, alors l'anneau de Chow est un module libre sur les $[X_w]$, et l'anneau de K -théorie $K_0(X)$ est un module libre sur les $[\mathcal{O}_{X_w}]$, classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert. On en déduit en particulier que l'anneau de Chow est sans torsion. En fait, la base des $([\mathcal{O}_{X_w}])_w$ fournit la filtration topologique sur $K_0(X)$ et redonne par passage au gradué la base $([X_w])_w$. D'autre part, l'anneau $K_0(X)$ admet une seconde base introduite par Pittie et Steinberg ([50], [57]). Cette seconde base a, quant à elle, l'avantage d'être invariante par l'action du groupe de Galois.

Restreignons-nous au cas des variétés de drapeaux complets associés à un espace vectoriel V . Le chapitre II regroupe des résultats connus sur la géométrie de telles variétés et la combinatoire donnant les expressions des classes des faisceaux structuraux dans l'anneau de Grothendieck en fonctions de classes de fibrés tautologiques (polynômes de Grothendieck), puis donne la matrice de changement de bases entre les deux bases citées plus haut, de manière combinatoire, grâce au produit scalaire introduit par Lascoux ([39]) dont le pendant géométrique est donné par ([6]). Ce chapitre permet outre de résumer les résultats connus, de mettre en parallèle les techniques combinatoires et géométriques. Dans le cas $n = 3$, nous donnons des résolutions explicites des classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert en termes de fibrés de la base due à Pittie et Steinberg.

Les groupes de Chow en codimension 1 des variétés homogènes projectives sont connus (voir par exemple [48, théorème 2.1]). N. Karpenko a calculé les groupes de Chow en codimension 2 des variétés de Severi-Brauer, cas particulier de variétés homogènes projectives sous $\mathrm{PGL}(A)$ pour une algèbre simple centrale A . Le calcul des motifs des variétés homogènes projectives sous $\mathrm{PGL}(A)$ se ramène sous certaines conditions, grâce à une suite de fibrations en variétés de Grassmann, au calcul du motif d'une variété de Severi-Brauer, comme l'ont montré Calmès, Petrov, Semenov et Zainouline dans [7]. Dans le chapitre III, nous construisons des isomorphismes explicites permettant de décrire les variétés homogènes projectives sous $\mathrm{PGL}(A)$ comme chaînes de fibrations en variétés de Severi-Brauer généralisées. Ceci permet de donner une expression explicite des groupes de Chow de certaines variétés homogènes projectives sous $\mathrm{PGL}(A)$ en fonction de groupes de Chow de variétés de Severi-Brauer ou Severi-Brauer généralisées ([34, définition 1.16]).

Les techniques utilisées au chapitre III sont employées au chapitre IV pour redonner une preuve d'un résultat de Karpenko ([31, Section 1]) qui consiste à décomposer pour un certain entier r et une algèbre A simple centrale sur k , le motif de $\mathrm{SB}(\mathcal{M}_r(A))$ en fonction du motif de $\mathrm{SB}(A)$. Cela rend par exemple plus explicite la projection Pr et l'immersion fermée In définis par Karpenko dans [31, Section 1.1].

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce chapitre d'introduction a deux objectifs : tout d'abord présenter de façon succincte les résultats de ce texte et d'autre part, décrire rapidement les principaux outils et objets qui y interviennent, comme les groupes de Chow, la K -théorie, les motifs de Chow, ou le vocabulaire des groupes algébriques.

1.1. Description

Fixons un corps k .

Les variétés homogènes projectives X sous un groupe G semi-simple déployé sur k ont une géométrie assez simple. La décomposition de Bruhat ([3, Proposition 14.12]) fournit, en effet, une décomposition cellulaire de ces variétés sur k ([3, Proposition 21.29]). Il en résulte que si $(X_w)_w$ désigne les variétés de Schubert, alors l'anneau de Chow est un module libre sur les $[X_w]$ [28, Lemme 5], et l'anneau de K -théorie $K_0(X)$ est un module libre sur les $[\mathcal{O}_{X_w}]$, classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert (cf. [51, Chapitre 7, proposition 3.2] et [58, Proposition 9.3, p. 2577]). On en déduit en particulier que l'anneau de Chow est sans torsion.

Il est alors légitime de calculer les groupes de Chow et groupe de K -théorie des variétés homogènes projectives, autrement dit d'explorer la situation dans le cas non déployé.

Dans son article *On the algebraic K-theory of twisted flag varieties* ([47]), Panin calcule la K -théorie des variétés homogènes projectives, résultat qui généralise le calcul de la K -théorie des variétés de Severi-Brauer faite par Quillen [51] et celui pour les quadriques dû à Swan [59].

Pour ce faire, Panin utilise le fait que l'anneau de K -théorie des variétés homogènes projectives déployées admet une base, invariante sous le groupe de Galois. Cette base a été introduite par Pittie [50], et Steinberg [57].

En outre, si X est une k -variété lisse, l'anneau de K -théorie admet une filtration topologique $(F^n K_0(X))_{n \geq 0}$, et il existe un lien entre l'anneau gradué associée à cette filtration que l'on notera $\text{Gr } F K(X)$ et l'anneau de Chow $\text{CH}^*(X) = \sum_i \text{CH}^i(X)$. Ainsi, pour toute k -variété lisse, ces deux anneaux sont isomorphes après tensorisation par $\mathbf{Q}$ ([15, Exemple 15.2.16 b]). Un lien plus fin, c'est-à-dire sans dénominateurs, est fourni par la suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen ([51, Chapitre 7, théorème 5.4] ou [58]).

Puisque dans le cas déployé, l'anneau $K_0(X)$ admet deux bases naturelles, celle constituée des classes des variétés de Schubert, et la base due à Pittie et Steinberg, invariante sous l'action du groupe de Galois, la première base étant adaptée à la filtration topologique de l'anneau de Grothendieck et la seconde étant adaptée aux extensions des scalaires, pour calculer les groupes de Chow des variétés homogènes projectives, il est légitime de vouloir calculer la matrice de changement de bases.

Plaçons-nous dans le cas des groupes simples de types A_n ([46, p. 560]). Ceci revient à ne considérer que les groupes $G = \text{PGL}(A)$ pour A une algèbre simple centrale (ou algèbre d'Azumaya) sur k . Dans le cas déployé, la variété X homogène projective sous G sera simplement une variété de drapeaux sur k .

Dans ce cas, si l'on considère la variété de drapeaux complets, la matrice de changement de bases décrite ci-dessus se calcule grâce à la combinatoire introduite par Lascoux et Schützenberger ([38], [39], [41], [42]...). Tout est fondé sur l'existence d'une base duale, qui a une expression géométrique grâce aux variétés de Schubert opposées, y compris dans le cas des variétés de drapeaux non complets ([6]).

Une question simple dont la réponse est non triviale est de calculer les groupes de Chow des variétés homogènes sous un $\text{PGL}(A)$ ou de calculer leur torsion. Il est facile de montrer que la torsion de CH^0 et de CH^1 est nulle. Pour CH^2 , puisque l'on a un isomorphisme $\text{CH}^2 X \simeq F^2 K(X)/F^3 K(X)$, on peut se ramener au calcul de la filtration topologique. Les cas les plus simples sont les variétés de Severi-Brauer, et dans le cas où l'indice de A coïncide avec son exposant, Karpenko a calculé cette filtration ([32]), et en a déduit que CH^2 est sans torsion.

De plus, dans [30] et [33, Chapitre 1], Karpenko en étudiant avec précision la filtration topologique et la filtration gamma sur l'anneau de K -théorie des variétés de Severi-Brauer, arrive à calculer la torsion des groupes de Chow en codimension 2 de telles variétés.

Le résultat du chapitre III montre que sous certaines hypothèses, incontournables en vu de la formule de réduction de l'indice de [2] et [46, (5.11)], le calcul de la torsion des variétés homogènes sous $\mathrm{PGL}(A)$ pour une algèbre simple centrale A se ramène au calcul de la torsion des groupes de Chow de la variété de Severi-Brauer associée à A .

On considère ensuite une seconde réduction : les groupes de Chow des variétés de Severi-Brauer associées à une algèbre simple centrale A et ceux de la variété de Severi-Brauer associée à $\mathcal{M}_r(A)$ pour un certain r sont liés par une décomposition du motif de la seconde, d'après un théorème de Karpenko [31], que nous redémontrons au chapitre IV.

Ceci permet entre autres de réduire, modulo quelques hypothèses, le calcul des groupes de Chow d'une variété homogène projective sous $\mathrm{PGL}(A)$ pour une algèbre simple centrale quelconque A , au calcul des groupes de Chow de la variété de Severi-Brauer associée au corps gauche D , tel que $A = \mathcal{M}_r(D)$.

Le présent travail s'articule donc autour de deux parties distinctes. Premièrement, dans le cas des variétés de drapeaux complets d'un k -espace vectoriel V , variété homogène déployée de type A_n , on étudiera la combinatoire associée aux polynômes de Grothendieck et au changement de bases entre les deux bases naturelles de l'anneau de K -théorie décrites plus haut. D'autre part, toujours dans le cadre des variétés de type A_n mais cette fois non nécessairement déployées, on donnera deux résultats permettant de réduire le calcul des groupes de Chow de telles variétés sous certaines conditions au calcul des groupes de Chow des variétés de Severi-Brauer généralisées associées à un corps gauche.

1.2. Rappels sur les groupes de Chow

L'étude des cycles algébriques a une longue histoire, remontant à la fin du XIX^e siècle avec l'étude des systèmes linéaires sur les courbes algébriques.

Donnons la définition des groupes de Chow et quelques propriétés. On pourra se référer au livre de Fulton [15] pour de plus amples détails.

1.2.1. Cycles algébriques

Considérons un k -schéma⁽¹⁾ X . On note par $Z_i(X)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés intègres Y de X de dimension i . Si X est une variété intègre non singulière, on pourra définir les groupes $Z^i(X)$, groupes libres abéliens engendrés par les sous-variétés intègres Y de codimension i . Si X est de dimension n , on a alors :

$$Z^i(X) = Z_{n-i}(X).$$

Le groupe $Z_i(X)$ sera le groupe des cycles algébriques sur X de dimension i .

1.2.1.1. Image directe. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas. Si W est une sous-variété intègre fermée de Y , $f(W)$ ne sera pas nécessairement fermé. Ainsi on ne peut raisonnablement définir l'image directe f_* de cycles algébriques pour un morphisme f quelconque. Par contre, si on suppose que f est un morphisme propre, et si l'on pose $V = f(W)$, V (muni de la structure réduite de schéma) est une sous-variété intègre. De plus dès que $\dim_k V = \dim_k W$, $k(V) \rightarrow k(W)$ est une extension finie de corps ([15, Appendice B.2.2]). On pose alors la définition suivante ([15, paragraphe 1.4]) :

Définition 1.2.1. — Soient X et Y deux k -schémas, $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas et W une sous-variété intègre de Y . On définit son image directe comme suit :

$$f_*([W]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim f(W) < \dim W \\ [k(W) : k(f(W))][f(W)] & \text{si } \dim f(W) = \dim(W) \end{cases}$$

où $[k(W) : k(f(W))]$ désigne le degré de l'extension $k(f(W))/k(W)$, et $f(W)$ est le schéma, dont l'espace topologique sous-jacent est le fermé $f(W)$ muni de la structure naturelle de schéma réduit. Par $\mathbf{Z}$ -linéarité, on définit l'image directe $f_* : Z_i(Y) \rightarrow Z_i(X)$ pour tout i .

Si X, Y, Z sont des k -schémas et si on dispose de deux morphismes propres f, g , comme suit :

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

alors $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

⁽¹⁾un k -schéma désignera dans ce travail un schéma de type fini sur $\text{Spec}(k)$.

1.2.1.2. Image inverse. — Conservons les notations précédentes : on a un morphisme de k -schémas $f : Y \rightarrow X$. Construire une image inverse de cycles est légèrement plus délicat. Nous supposons ici et dans la suite que les morphismes plats sont toujours de dimension relative d , pour un certain entier d .

Soit donc $f : Y \rightarrow X$ un morphisme plat de k -schémas de dimension relative d . Fixons une sous-variété intègre V de X de dimension i . De manière heuristique, $f^*([V])$ est une somme des composantes irréductibles du sous-schéma fermé $f^{-1}(V)$, avec coefficients, où le coefficient de la composante irréductible $Z \subset f^{-1}(V)$ est la *multiplicité* de Z dans $f^{-1}(V)$. Toutes les composantes irréductibles Z de l'espace topologique sous-jacent de $f^{-1}(V)$ muni de la structure de schéma réduit ont pour dimension $d+i$. Considérons l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,Z}$ de Y localisé le long de Z . On notera par $m(Z, f^{-1}(V))$ la longueur (Cf. [45, paragraphe 1.2]) du $\mathcal{O}_{Y,Z}$ -module $\mathcal{O}_{f^{-1}(V),Z}$, on pose alors la définition suivante :

Définition 1.2.2. — Conservons les notations précédentes. On rappelle que le morphisme f est supposé plat. Pour toute sous-variété intègre V de X , on pose :

$$f^*([V]) = \sum_Z m(Z, f^{-1}(V)) [Z] \in Z_{i+d}(Y)$$

où la somme est prise sur toutes les composantes irréductibles Z de $f^{-1}(V)$. Ceci permet de définir une application $f^* : Z_i(X) \rightarrow Z_{i+d}(Y)$ pour tout i .

On a aussi une propriété de fonctorialité pour les morphismes plats. Si X, Y, Z sont trois k -schémas et $f : Y \rightarrow X$, $g : Z \rightarrow Y$ sont deux morphismes plats alors $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

1.2.2. Groupes de Chow

Le groupe des cycles algébriques sur un k -schéma X est trop grand pour être intéressant. C'est pourquoi, on le quotientte par une relation d'équivalence.

1.2.2.1. Construction. — Commençons par rappeler la définition de la fonction ord :

Définition 1.2.3. — Soient X une variété intègre sur k et Y une sous-variété irréductible de codimension 1. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,Y}$ est de dimension 1 et si $\phi \in k(X)^*$ (où $k(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles

sur X), on pose :

$$\text{ord}_V(\phi) = \ell(\mathcal{O}_{X,Y}/(\phi))$$

où ℓ est la longueur d'un module.

Remarque 1.2.4. — Conservons les mêmes notations. Si on suppose de plus que $\mathcal{O}_{X,Y}$ est un anneau de valuation discrète et si on note par π un générateur de l'idéal maximal, alors il existe un entier n et une unité u tels que $\phi = u\pi^n$ et $\text{ord}_V(\phi) = n$. ([15, Exemple A.3.2]).

Définition 1.2.5. — Soient donc X un k -schéma, $Y \subset X$ une sous-variété intègre de X de dimension $i + 1$ pour un i donné et $\phi \in k(Y)^*$. On définit l'élément $\text{div}(\phi) \in Z_i(X)$ comme étant la somme :

$$\text{div}(\phi) = \sum_{V \subset X} \text{ord}_V(\phi)[V]$$

où la somme est prise sur toutes les sous-variétés intègres V de dimension i de Y .

Remarque 1.2.6. — La somme a un sens, car $\text{ord}_V(\phi)$ est nul sauf pour un nombre fini de V ([15, Appendice B.4.3]).

Remarque 1.2.7. — Conservons les notations de la définition précédente, si ψ est un autre élément de $k(Y)^*$, on a :

$$\text{div}(\phi\psi) = \text{div}(\phi) + \text{div}(\psi)$$

et

$$\text{div}(\phi^{-1}) = -\text{div}(\phi).$$

On notera alors par $R_i(X)$ le sous-groupe de $Z_i(X)$ engendré par les $\text{div}(\phi)$ où Y est une sous-variété intègre de X de dimension $i + 1$ et $\phi \in k(Y)^*$.

Définition 1.2.8. — Soient X un k -schéma et i un entier positif. Le groupe de Chow de X de dimension i , $\text{CH}_i(X)$ est le groupe quotient :

$$\text{CH}_i(X) = Z_i(X)/R_i(X).$$

1.2.2.2. Image directe et image réciproque. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas. Nous avons vu que, si f est propre, on dispose d'une image directe f_* sur les groupes de cycles. En fait, f_* passe au quotient, comme le montre le théorème suivant [15, Théorème 1.4] :

Théorème 1.2.9. — *Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme propre de k -schémas, et si $\alpha \in R_i(Y)$ pour un entier positif i , alors $f_*(\alpha) \in R_i(X)$.*

Définition 1.2.10. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme propre de k -schémas. L'image directe f_* des cycles algébriques passe au quotient et définit une application pour tout i :

$$f_* : \mathrm{CH}_i(Y) \rightarrow \mathrm{CH}_i(X).$$

Pour l'image inverse, nous avons le résultat suivant [15, Théorème 1.7] :

Théorème 1.2.11. — *Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme plat de dimension relative d de k -schémas, et si $\alpha \in R_i(X)$ pour un entier positif i , alors $f^*(\alpha) \in R_{i+d}(Y)$.*

Définition 1.2.12. — Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme plat de dimension relative d de k -schémas, l'image réciproque des cycles passe au quotient et permet de définir une application image réciproque sur les groupes de Chow de dimension i pour tout entier positif i :

$$f^* : \mathrm{CH}_i(X) \rightarrow \mathrm{CH}_{i+d}(Y).$$

1.2.2.3. Structure d'anneaux. — Nous supposons ici que X est une k -variété lisse.

La construction des produits d'intersection dans les groupes de Chow est délicate mais permet de munir $\mathrm{CH}^*(X) = \bigoplus_i \mathrm{CH}^i(X)$ d'une structure d'anneau gradué ([15, 8.3]).

1.3. Rappels de K -théorie

Nous ferons un bref rappel des principales constructions en K -théorie. Pour de plus amples informations, on pourra consulter l'article fondateur de Quillen [51].

1.3.1. Anneau de Grothendieck d'un schéma

Définition 1.3.1. — Si $\mathfrak{A}$ est une catégorie abélienne, on définit le groupe de Grothendieck associé à $\mathfrak{A}$ comme suit : $K_0(\mathfrak{A})$ est le groupe abélien engendré par les symboles $[A]$ où A est un objet de $\mathfrak{A}$, assujettis aux relations :

$$[A'] + [A''] = [A]$$

dès qu'il existe une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 .$$

En particulier, $[A]$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de A .

On peut associer deux groupes de Grothendieck à un schéma, groupes qui seront isomorphes dans le cas où X est lisse ([15, Section 15.1]).

Pour un schéma noëthérien quelconque X , le groupe $K'_0(X)$ est le groupe de Grothendieck associé à la catégorie des faisceaux cohérents sur X .

Le groupe $K_0(X)$ est le groupe de Grothendieck associé à la catégorie des fibrés vectoriels, c'est-à-dire des faisceaux localement libres de rang fini sur X .

Le produit tensoriel par un fibré vectoriel étant exact, on peut mettre une structure d'anneau commutatif sur $K_0(X)$ qui est aussi muni d'une involution induite par la dualité. De même, $K'_0(X)$ a une structure de $K_0(X)$ -module. On a naturellement une flèche induite par l'inclusion des catégories $K_0(X) \rightarrow K'_0(X)$.

Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de k -schémas, on a un morphisme :

$$\begin{aligned} f^* : K_0(X) &\rightarrow K_0(Y) \\ [\mathcal{E}] &\mapsto [f^*(\mathcal{E})]. \end{aligned}$$

Ainsi, K_0 est un foncteur contravariant.

De plus si une k -variété X est lisse, alors le morphisme naturel $K_0(X) \rightarrow K'_0(X)$ est un isomorphisme [51, p. 124]. Ainsi dans le cas de telles variétés, nous confondrons les deux groupes et les noterons simplement $K_0(X)$.

1.3.2. Construction des groupes de K -théorie supérieure

La K -théorie supérieure n'intervient pas dans ce travail mais la suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen (cf. 1.3.3) relie les groupes de K -théorie aux groupes de Chow et fournit le lien entre les deux parties de ce texte. Ces objets font donc partie des outils usuels pour le calcul de

groupes de Chow. La construction de la K -théorie supérieure a été menée à bien par Quillen dans [51]. Partant d'une catégorie abélienne $\mathfrak{M}$, on construit la catégorie $Q\mathfrak{M}$ dont les objets sont les objets de $\mathfrak{M}$ et dont les morphismes entre deux objets A et B sont les classes d'isomorphisme de diagrammes :

$$A \xleftarrow{p} C \xrightarrow{i} B$$

où C est un objet de $\mathfrak{M}$, p est un épimorphisme et i un monomorphisme dans $\mathfrak{M}$.

On construit alors l'espace classifiant $B(Q\mathfrak{M})$ [51, Chapitre 1], et on définit les groupes de K -théorie supérieure comme suit :

$$K_i\mathfrak{M} = \pi_{i+1}(B(Q\mathfrak{M}), 0)$$

où π_n est le n -ème groupe fondamental de l'espace topologique $B(Q\mathfrak{M})$ et 0 désigne le point de $B(Q\mathfrak{M})$ correspondant à l'objet initial de $\mathfrak{M}$.

Nous renvoyons à Quillen pour les détails de la construction.

Le résultat suivant montre que cette définition étend bien la définition habituelle des groupes de Grothendieck :

Théorème 1.3.2 (Quillen). — *Si $\mathfrak{A}$ est une petite catégorie abélienne, alors le groupe $\pi_1(B(Q\mathfrak{M}), 0)$ est isomorphe au groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathfrak{A}$ défini en 1.3.1.*

Démonstration. — [51, Section 2, Théorème 1]. □

Supposons que X soit un schéma noethérien séparé. Pour un entier positif n , on notera par $K_n(X)$ le n -ème groupe de K -théorie associé à la catégorie des fibrés vectoriels sur X , et $K'_n(X)$, le n -ème groupe de K -théorie associé à la catégories des faisceaux cohérents sur X ([51, Chapitre 7]).

Les propriétés suivantes données plus haut pour $K_0(X)$ et $K'_0(X)$ s'étendent aux groupes de K -théorie supérieure.

L'inclusion des catégories étant un foncteur exact, on a un morphisme pour tout entier positif n :

$$K_n(X) \rightarrow K'_n(X).$$

Cette application est un isomorphisme si X est un schéma régulier.

Pour tout entier positif n , $K'_n(X)$ est un $K_0(X)$ -module. En outre, K_n est un foncteur contravariant et K'_n est contravariant sur les morphismes plats ([51, Chapitre 7, 2.1]).

Enfin, K'_n est un foncteur covariant pour les morphismes finis $f : Y \rightarrow X$ et pour les morphismes $Y \rightarrow X$ où Y est projectif [51, Chapitre 7, 2.7].

1.3.3. Filtrations

Soit X une variété lisse sur k de dimension n pour un certain entier n , et considérons l'anneau de K -théorie $K_0(X)$.

Définissons la filtration par la codimension du support de l'anneau $K_0(X)$. On pose pour i un entier : $F^i(K_0(X))$ est le groupe engendré par les $[\mathcal{F}]$ tels que la codimension du support de $\mathcal{F}$ soit $\geq i$.

On a donc :

$$K_0(X) = F^0 K_0(X) \supset F^1 K_0(X) \supset \dots \supset F^n K_0(X) \supset F^{n+1} K_0(X) = 0.$$

On notera par $\text{Gr } F K_0(X)$ l'anneau gradué associé.

L'anneau $K_0(X)$ est muni aussi d'une autre filtration naturelle, la γ -filtration que l'on notera par $F_\gamma^i K_0(X)$ [17, Chapitre III].

1.3.4. Suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen

Si F est un corps et i un entier positif, on notera par $K_i(F)$ le i -ème groupe de K -théorie associé à la catégorie des F -espaces vectoriels de dimension finie. Il coïncide avec $K_i(\text{Spec}(F))$.

Soit X un k -schéma séparé. Il existe une suite spectrale, dite de Brown-Gersten-Quillen, reliant les groupes de K -théorie des points de X et la K' -théorie du schéma X ([51, Section 7, Théorème 5.4]) :

Théorème 1.3.3. — *Pour un entier p , nous noterons $X_{(p)}$ l'ensemble des points de X de codimension p dans X . Il existe une suite spectrale :*

$$E_1^{p,q}(X) = \coprod_{x \in X_{(p)}} K_{-p-q}(\kappa(x)) \implies K'_{-p-q}(X)$$

où $\kappa(x)$ est le corps résiduel au point x . Cette suite est contravariante pour les morphismes plats. La filtration fournie sur $K'_n(X)$ est la filtration topologique.

Le terme E_2 de cette suite exacte est calculable [51, Section 7, Proposition 5.8] et [51, Section 7, Corollaire 5.10] :

Proposition 1.3.4 (Gersten). — *Soit X une k -variété lisse. Notons pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{K}'_n$ le faisceau sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K'_n(U)$.*

Il existe alors un isomorphisme canonique :

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(X, \mathcal{K}'_{p+q}).$$

Cette suite spectrale permet entre autres, d'avoir une expression des groupes de Chow ([51, Section 7, Théorème 5.19]) :

Théorème 1.3.5. — *Soit X une k -variété irréductible et lisse. Il existe un isomorphisme canonique :*

$$H^p(X, \mathcal{K}'_p) \simeq \mathrm{CH}^p(X).$$

1.4. Rappels sur les motifs

Cette section est une brève présentation des motifs, s'appuyant sur [44], [29, Section 10.1], [62, Paragraphe 1]. La construction de la catégorie des motifs se fait en trois étapes.

1.4.1. Catégorie des correspondances

La catégorie des variétés lisses et projectives sur un corps k n'est pas une catégorie additive. On peut la plonger dans une catégorie additive, la catégorie des correspondances en « agrandissant » l'ensemble des morphismes entre deux variétés.

Notation 1.4.1. — Soient X et Y , deux k -variétés projectives et lisses. Notons X_i les composantes connexes de X . On note

$$\mathcal{C}(X, Y) = \bigoplus_i \mathrm{CH}_{\dim X_i}(X_i \times Y).$$

Ce sont les correspondances (finies) de X vers Y .

Soient X_1 , X_2 et X_3 trois k -variétés projectives et lisses sur k . Notons pour $1 \leq i < j \leq 3$, π_{ij} la projection de $X_1 \times X_2 \times X_3$ sur $X_i \times X_j$. Soient $\alpha \in \mathcal{C}(X_1, X_2)$ et $\beta \in \mathcal{C}(X_2 \times X_3)$. On peut alors définir un élément de $\mathcal{C}(X_1, X_3)$ comme suit : par image inverse plate, $p_{12}^*(\alpha)$ et $p_{23}^*(\beta)$ sont deux éléments de $\mathrm{CH}(X_1 \times X_2, X_3)$. Il suffit alors de considérer leur produit d'intersection et de le pousser (le morphisme p_{13} est propre) :

$$\gamma = p_{13*}(p_{12}^*(\alpha) \cdot p_{23}^*(\beta)).$$

On a ainsi construit un élément γ de $\mathcal{C}(X_1 \times X_3)$.

Définition 1.4.2. — On définit la catégorie des correspondances sur k notée $\mathfrak{Corr}_k$ comme suit :

- (i) Les objets de $\mathfrak{Corr}_k$ sont les $[X]$ où X est une variété projective et lisse sur k .
- (ii) Pour $[X]$ et $[Y]$ deux objets de $\mathfrak{Corr}_k$, on définit $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Corr}_k}([X], [Y]) = \mathcal{C}(X, Y)$.

Remarque 1.4.3. — On a un foncteur $\mathfrak{ProjSm}_k \rightarrow \mathfrak{Corr}_k$, de la catégorie des k -variétés projectives et lisses sur k vers la catégorie des correspondances sur k . À X , il associe $[X]$ et à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{ProjSm}_k}(X, Y)$ il associe le graphe de f , noté Γ_f , qui est un élément de $\mathcal{C}(X, Y)$.

La catégorie $\mathfrak{Corr}_k$ est naturellement une catégorie additive et tensorielle où $[X] \oplus [Y] = [X \amalg Y]$ et $[X] \otimes [Y] = [X \times_k Y]$.

1.4.2. Catégorie des motifs de Chow effectifs

Rappelons que l'on construit la catégorie des motifs de Chow effectifs sur k en *adjoignant* à $\mathfrak{Corr}_k$ les noyaux des projecteurs (voir [44, Section 5]). Rappelons qu'un projecteur p dans une catégorie $\mathfrak{C}$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, X)$ pour un objet X de $\mathfrak{C}$, tel que $p^2 = p$.

Définition 1.4.4. — Une catégorie additive $\mathcal{C}$ est dite pseudo-abélienne si pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, et tout projecteur $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, p possède un noyau $\ker p$ dans $\mathcal{C}$ et si le morphisme canonique

$$\ker p \oplus \ker(\mathrm{Id}_X - p) \rightarrow X$$

est un isomorphisme.

Proposition 1.4.5. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Il existe une catégorie additive pseudo-abélienne $\mathcal{C}_{ps}$ et un foncteur additif fidèle

$$\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{ps}$$

tels que si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur additif vers une catégorie pseudo-abélienne $\mathcal{D}$, il existe un unique foncteur $F_{ps} : \mathcal{C}_{ps} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $F_{ps} \circ \alpha$ et F soient équivalents. Autrement dit, $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se factorise :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}_{ps} & & \end{array}$$

La catégorie $\mathcal{C}_{ps}$ est appelée l'enveloppe pseudo-abélienne (ou enveloppe karoubienne) de la catégorie $\mathcal{C}$.

Démonstration. — On va construire la catégorie $\mathcal{C}_{ps}$. Les objets de $\mathcal{C}_{ps}$ sont les paires (X, p) où $X \in \mathcal{C}$ et $p \in \text{Hom}(X, X)$ est un projecteur. Soient donc (X, p) et (Y, q) deux telles paires. On définit :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{ps}}((X, p), (Y, q)) = q \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)p \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'une catégorie, pseudo-abélienne. Le foncteur α est défini comme suit : si X est un objet de $\mathcal{C}$, $\alpha(X) = (X, \text{Id})$ et si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ alors $\alpha(f) = f$. $\square$

Définition 1.4.6. — La catégorie des motifs de Chow effectifs sur k notée $\mathcal{Chow}_k^{\text{eff}}$ est l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie des correspondances sur k , $\mathcal{Corr}_k$.

Notation 1.4.7. — Nous noterons h le foncteur composé $\mathfrak{ProjSm}_k \rightarrow \mathcal{Corr}_k \rightarrow \mathcal{Chow}_k^{\text{eff}}$. La catégorie $\mathcal{Chow}_k^{\text{eff}}$ hérite de $\mathcal{Corr}_k$ d'une structure de catégorie tensorielle. Enfin nous noterons $1 = h(\text{Spec}(k))$. C'est le neutre pour le produit tensoriel de cette catégorie.

Le motif de Chow de la droite projective sur k se décompose dans la catégorie des motifs de Chow effectifs (voir [44, Section 6, Lemme]) :

Proposition 1.4.8. — (i) L'objet $h(\mathbf{P}^1)$ se décompose dans $\mathcal{Chow}_k^{\text{eff}}$. Plus précisément, on a :

$$h(\mathbf{P}^1) = ([\mathbf{P}^1], p_1) \oplus ([\mathbf{P}^1], p_2),$$

où p_1 est le projecteur correspondant au 1-cycle $[\{\text{pt}\} \times \mathbf{P}^1] \in \text{CH}_1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ (pt désigne un point) et p_2 le projecteur $\text{Id} - p_1$ qui correspond au 1-cycle $[\mathbf{P}^1 \times \{\text{pt}\}] \in \text{CH}_1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$
(ii) $([\mathbf{P}^1], p_1) \simeq h(\text{Spec}(k))$.

Démonstration. — (i) Il suffit de voir que $\text{Id} - p_1 = \mathbf{P}^1 \times \{\text{pt}\}$. Notons par $\Delta_{\mathbf{P}^1}$ la diagonale dans $\mathbf{P}^1 \times_k \mathbf{P}^1$, c'est aussi le graphe de l'application $\text{Id} : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$. On a que $[\mathbf{P}^1 \times \{\text{pt}\}] + [\{\text{pt}\} \times \mathbf{P}^1] - [\Delta_{\mathbf{P}^1}]$ est égal à $\text{div}(\phi)$ avec

$$\phi = \frac{x_1 y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

où $[x_1 : x_2]$ et $[y_1 : y_2]$ sont les coordonnées homogènes des facteurs de $\mathbf{P}^1 \times_k \mathbf{P}^1$.

(ii) Le 0-cycle $\{\text{pt}\} \times \{\text{pt}\}$ fournit un morphisme dans $\mathfrak{Chow}_k^{\text{eff}}$:

$$h(\text{Spec}(k)) \rightarrow h(\mathbf{P}^1)$$

et le 1-cycle $\mathbf{P}^1 \times \{\text{pt}\}$ fournit un morphisme

$$h(\mathbf{P}^1) \rightarrow h(\text{Spec}(k))$$

Ainsi, on a des morphismes :

$$(\text{Spec}(k), \text{Id}) \rightarrow (\mathbf{P}^1, p_1)$$

et

$$(\mathbf{P}^1, p_1) \rightarrow (\text{Spec}(k), \text{Id}).$$

Ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre et fournissent un isomorphisme :

$$([\mathbf{P}^1], p_1) \simeq ([\text{Spec}(k)], \text{Id}).$$

□

Définition 1.4.9. — Le motif $([\mathbf{P}^1], p_2)$ est le motif de Tate, noté $\mathbf{L}$.

Remarque 1.4.10. — La proposition 1.4.8 se réécrit :

$$h(\mathbf{P}^1) = 1 \oplus \mathbf{L}.$$

Notation 1.4.11. — Pour un entier m positif, on notera :

$$\mathbf{L}^{\otimes m} = \underbrace{\mathbf{L} \otimes \dots \otimes \mathbf{L}}_{m \text{ fois}}.$$

Proposition 1.4.12. — Si $m \geq 0$, on a la décomposition suivante dans la catégorie $\mathfrak{Chow}_k^{\text{eff}}$:

$$h(\mathbf{P}^m) = 1 \oplus \mathbf{L} \oplus \dots \oplus \mathbf{L}^{\otimes m}.$$

Démonstration. — [44, Section 6, Formule 8].

□

Si X est une k -variété lisse projective et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X de rang n , pour un certain entier $n \geq 1$, alors on a une formule pour calculer le motif de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ qui généralise la proposition 1.4.12 ([44, Section 7, Corollaire]) :

Théorème 1.4.13. — *Conservons les notations ci-dessus. On a la formule suivante dans $\mathcal{C}\mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{w}_k^{\text{eff}}$:*

$$h(\mathbf{P}(\mathcal{E})) = \sum_{i=0}^n h(X) \otimes \mathbf{L}^{\otimes i}.$$

1.4.3. Motifs de Chow

Pour obtenir la catégorie des motifs de Chow sur k , on *inverse* le motif de Tate $\mathbf{L}$ à partir de la catégorie des motifs de Chow effectifs [62, Section 1].

Définition 1.4.14. — La catégorie des motifs de Chow sur k , notée $\mathcal{C}\mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{w}_k$, est ainsi définie :

- (i) les objets de $\mathcal{C}\mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{w}_k$ sont les paires (A, m) où A est un objet de $\mathcal{C}\mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{w}_k^{\text{eff}}$ et $m \in \mathbf{Z}$,
- (ii) si (A, n) et (B, m) sont deux telles paires, on pose :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}\mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{w}_k}((A, n), (B, m)) = \varinjlim_{i \geq \max(-m, -n)} \text{Hom}_{\mathcal{C}\mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{w}_k^{\text{eff}}}(A \otimes \mathbf{L}^{\otimes n+i}, B \otimes \mathbf{L}^{\otimes m+i}).$$

où la limite est une limite inductive.

1.5. Rappels sur les variétés homogènes

Cette section présente le langage des groupes algébriques et des variétés homogènes projectives. Les principales références sont [3], [26], [46] ...

1.5.1. Groupes algébriques

1.5.1.1. Définitions des objets. — Commençons par les définitions de bases.

Définition 1.5.1. — [3, Chapitre I, Paragraphe 1.1] Un k -groupe algébrique est une variété sur k munie de :

- (i) un élément $e \in G(k)$,
 - (ii) un morphisme $i : G \rightarrow G$ noté $x \mapsto x^{-1}$,
 - (iii) un morphisme $\mu : G \times_k G \rightarrow G$ noté $(x, y) \rightarrow xy$
- tels que les morphismes i , μ et p (où p est la composée du morphisme structural $G \rightarrow \text{Spec}(k)$ avec $e : \text{Spec}(k) \rightarrow G$) rendent les diagrammes

suivants commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 G \times_k G \times_k G & \xrightarrow{\mu \times \text{Id}} & G \times_k G \\
 \text{Id} \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 G \times_k G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{(p, \text{Id})} & G \times_k G \\
 (1, p) \downarrow & \searrow \text{Id} & \downarrow \mu \\
 G \times_k G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{(i, \text{Id})} & G \times_k G \\
 (1, i) \downarrow & \searrow p & \downarrow \mu \\
 G \times_k G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}$$

Par la suite, nous dirons *groupe algébrique* au lieu de *k-groupe algébrique*, si aucune ambiguïté n'est à craindre. Dans notre définition, les groupes algébriques sont supposés réduits. Naturellement, on a les notions de sous-groupes algébriques et morphismes de groupes algébriques. Si un morphisme entre deux groupes algébriques définis sur k est lui aussi défini sur k , nous parlerons alors de *k-morphisme*. Un groupe algébrique sur k est lisse [3, Chapitre I, Section 1.2, Proposition].

Pour un entier $n \geq 1$, le groupe GL_n est un groupe algébrique défini sur $\mathbf{Z}$, et l'ensemble des A -points pour un anneau A consiste en l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans A inversibles. Le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ est le groupe GL_1 .

Tout groupe algébrique affine est isomorphe à un sous-groupe fermé de GL_n , pour un certain n [3, Chapitre I, Proposition 1.10]. Nous nous bornerons aux groupes affines, si bien que l'on omettra l'adjectif affine pour désigner un *k-groupe algébrique affine*.

Comme en topologie, on peut définir les notions de sous-groupe algébrique fermé, ouvert ou connexe.

Un sous-groupe algébrique H d'un groupe algébrique G sera normal, si l'action de G sur lui-même par conjugaison stabilise H . Ceci est équivalent à dire que $H(\bar{k})$ est normal dans $G(\bar{k})$ en tant que groupe.

Comme en théorie des groupes, on peut définir la notion de groupes algébriques résolubles ou nilpotents. [3, Chapitre I, 2.4].

La composante connexe de e dans un k -groupe algébrique G sera noté G° , c'est un k -groupe algébrique [3, Chapitre I, 1.1].

On peut aussi définir la partie unipotente d'un groupe G et sa partie semi-simple. La partie unipotente G_u est définie sur k et est un ensemble fermé ([3, Chapitre I, 4.5]).

Le résultat suivant [3, Chapitre I, Théorème 6.8] est fondamental dans l'étude des variétés homogènes :

Théorème 1.5.2. — *Soient G un k -groupe algébrique affine, et H un k -sous-groupe fermé de G . Alors le quotient $G \rightarrow G/H$ existe sur k et G/H est une variété quasi-projective lisse sur k . Si de plus H est normal, G/H est un k -groupe algébrique affine, et la projection est un k -morphisme de groupes algébriques.*

Un groupe algébrique G est dit diagonalisable s'il existe une extension algébrique L/k telle que son groupe des caractères sur L c'est-à-dire $\text{Hom}(G_L, \mathbf{G}_m)$ engendre $k[G_L]$, anneau des fonctions régulières sur G_L [3, 8.2]. On dira alors qu'il est déployé sur L .

Un groupe algébrique T est un tore algébrique (on dira tore par la suite pour simplifier si aucune ambiguïté n'est à redouter) s'il est isomorphe sur une extension de k à l'ensemble des matrices diagonales de GL_n pour un n donné. Ceci est équivalent à dire que T est diagonalisable et connexe de dimension n , ou encore que T est diagonalisable et que son groupe des caractères sur $\bar{k}$, $X^*(T) = \text{Hom}(T_{\bar{k}}, \mathbf{G}_m)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^n$ [3, 8.5], où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k .

Soit T un groupe algébrique diagonalisable déployé sur k . Soit V un k -espace vectoriel et $\rho : T \rightarrow \text{GL}(V)$ un morphisme de groupes algébriques. Si $t \in T$ et $v \in V$, on notera pour simplifier $t.v = \rho(t).v$. Pour $\alpha \in X^*(T)$, on note :

$$V_\alpha = \{v \in V, t.v = \alpha(t)v, \forall t \in T\}.$$

Puisque T est diagonalisable, V est somme directe des V_α . Les $\alpha \in X^*(T)$ tels que $V_\alpha \neq 0$ sont appelés les poids de T dans V . Il y en a un nombre fini.

Soit G un groupe algébrique. Introduisons $\mathfrak{g} = L(G)$ l'algèbre de Lie associée à G . Par définition, c'est l'espace tangent de G en son élément neutre e (voir [3, Chapitre I, Section 3]). C'est un k -espace vectoriel. Considérons pour tout $x \in G(k)$ le morphisme de conjugaison intérieure :

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto xyx^{-1} \end{aligned}$$

On notera par $\text{Ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ sa différentielle. C'est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ ([26, Section 9.1, théorème]). Il induit un morphisme de groupes algébriques :

$$G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{GL}(\mathfrak{g})$$

appelé la représentation adjointe de G . Supposons que l'on dispose de plus, d'un sous-tore $T \subset G$ déployé sur k . On a la décomposition suivante, où $\Phi(G, T)$ est l'ensemble des poids de T dans $\mathfrak{g}$, en restreignant Ad à T :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \oplus \sum_{\alpha \in \Phi(T, G)} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\mathfrak{g}^T$ est formé des éléments de $\mathfrak{g}$ invariants sous T . Les poids de T dans $\mathfrak{g}$ sont appelés les racines de G relativement à T . Pour une racine α , la k -dimension de $\mathfrak{g}_\alpha$ sera la multiplicité de α . ([3, Chapitre III, 8.17]).

On se donne un k -groupe algébrique affine G supposé connexe.

Un sous-groupe de Borel B de G est un sous-groupe sur $\bar{k}$, maximal de G parmi les sous-groupes connexes résolubles de G . Ils sont tous conjugués [3, Chapitre IV, 11.1]. De plus, si B est défini sur k , le quotient G/B a une structure de k -variété quasi-projective par le théorème 1.5.2, mais elle est en faite projective. Nous noterons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des sous-groupe de Borel de G . Le stabilisateur d'un $B \in \mathcal{B}$ n'est autre que le normalisateur de B dans G qui est égal à B d'après [3, Chapitre IV, 11.16]. Si H est un sous-groupe de G , l'ensemble des points fixes de H dans $\mathcal{B}$ est :

$$\mathcal{B}^H = \{B \in \mathcal{B}, H \subset B\}$$

Si B_0 est un sous-groupe de Borel de G , alors on a une bijection

$$G/B_0(\bar{k}) \simeq \mathcal{B}$$

[3, Chapitre IV, Théorème 11.18], ce qui permet de munir l'ensemble des sous-groupes de Borel de G d'une structure de variété projective. De même, on a une bijection : $(G/B_0(\bar{k}))^H \simeq \mathcal{B}^H$.

Un sous-groupe P de G sur $\bar{k}$ est un sous-groupe parabolique si P est fermé et si G/P est une variété projective. Et, d'après [3, Chapitre IV, Corollaire 11.2], P est un sous-groupe parabolique de G , si et seulement si P contient un sous-groupe de Borel. Un sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique connexe est connexe et est égal à son normalisateur d'après un théorème de Chevalley [3, Chapitre IV, Théorème 11.16].

Soit T un tore maximal de G . Le groupe de Weyl associé est [3, Chapitre IV, 11.19] :

$$W(T, G) = N_G(T)/Z_G(T)$$

où N_G désigne le normalisateur, et Z_G le centralisateur. C'est un groupe fini. Puisque les tores maximaux de G sont tous conjugués, le groupe $W(T, G)$ ne dépend pas de T , et on l'appelle *groupe de Weyl de G* .

On notera par $\mathcal{R}(G)$ le radical de G ainsi défini ([3, Chapitre IV, 11.21]) :

$$\mathcal{R}(G) = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \right)^\circ.$$

C'est un sous-groupe résoluble connexe normal de G , maximal pour ces propriétés. Sa partie unipotente $\mathcal{R}(G)_u$ parfois notée $\mathcal{R}_u(G)$ est appelée le radical unipotent de G . C'est un sous-groupe unipotent connexe normal de G et il est maximal pour ses propriétés.

On dit que G est semi-simple si $\mathcal{R}(G) = \{e\}$ et réductif si $\mathcal{R}_u(G) = \{e\}$.

Définition 1.5.3. — Un k -groupe semi-simple G est dit déployé si G contient un tore maximal déployé défini sur k , G est dit quasi-déployé s'il contient un sous-groupe de Borel défini sur k .

On note $X_*(G)$ l'ensemble des sous-groupes multiplicatifs à un paramètre, $X_*(G) = \text{Hom}(\mathbf{G}_m, G)$. Puisque $X^*(G) = \text{Hom}(G, \mathbf{G}_m)$, par composition on obtient une application :

$$\begin{aligned} X^*(G) \times X_*(G) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (\chi, \lambda) &\longmapsto \langle \chi, \lambda \rangle \end{aligned}$$

définie comme suit : $\langle \chi, \lambda \rangle = m$ si $\chi \circ \lambda(x) = x^m$.

Un élément g de G sera dit régulier si l'inégalité $\dim Z_G(g_s) \geq \dim G^T$ est une égalité où T est un tore maximal contenant g [3, Chapitre IV, 12.2], et g_s est la partie semi-simple de g .

Soit T un tore de G . On dira que T est régulier s'il contient un élément régulier, il sera dit semi-régulier si $\mathcal{B}^T$ est fini, et singulier si $\mathcal{B}^T$ est infini. Un tore régulier est semi-régulier [3, Chapitre IV, 13.1]. Un tore maximal est toujours régulier.

Fixons un tore semi-régulier T de G . Soit $\lambda \in X_*(T)$. Nous noterons par $X_*(T)_{sr}$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre λ , tel que le tore $\text{Im } \lambda$ soit semi-régulier [3, Chapitre IV, 13.8], on dira alors que λ est

semi-régulier :

$$X_*(T)_{sr} = \{\lambda \in X_*(T), \forall \alpha \in \Phi(G, T), \langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0\}.$$

À chaque $\lambda \in X_*(T)_{sr}$, on associe un sous-groupe de Borel $B(\lambda)$ de G contenant T [3, Chapitre IV, 13.8, Proposition].

On utilisera la théorie des systèmes de racines. Pour une définition et les propriétés afférentes aux systèmes de racines, on pourra consulter [5, Chapitre VI].

L'intérêt d'avoir défini la notion de groupe réductif se trouve dans le théorème suivant [3, Chapitre IV, 14.8, Théorème] :

Théorème 1.5.4. — *Supposons que G soit réductif. Soit T un tore maximal de G . Notons $Z(G)$ le centre de G et $Z(G)^\circ$ la composante connexe de ce dernier contenant e . Posons $V = X^*(T/Z(G)^\circ) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ qui est canoniquement isomorphe à un sous-espace de $X^*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Alors $\Phi = \Phi(G, T)$ est un système de racines réduit dans V ayant pour groupe de Weyl $W = W(G, T)$.*

Dans le cas où G est semi-simple, alors $\mathcal{R}(G) = Z(G)^\circ = \{e\}$ [3, Chapitre IV, 11.21 Proposition].

Supposons toujours G semi-simple. Soit T un tore maximal de G . Si $B \in \mathcal{B}^T$, alors on note $\Delta = \Delta(B)$ l'ensemble des $\alpha \in \Phi(B, T)$ qui ne sont pas somme de 2 éléments de $\Phi(B, T)$. L'ensemble Δ forme une base de $\Phi(G, T)$, on appellera les éléments de Δ les racines simples associées à B . Les éléments de $\Phi(B, T)$ sont les racines positives. Si on écrit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, pour un certain n , on notera par $\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$ les poids fondamentaux associés [5, VI.1.10, p. 107]. Le groupe engendré par les poids fondamentaux forme un réseau Λ qui contient le réseau des racines Λ_r , groupe engendré par les racines. Le groupe $X^*(T)/\Lambda$ est appelé le groupe fondamental de G et G est dit simplement connexe si $\Lambda = X^*(T)$. Le groupe algébrique G est de type adjoint si $X^*(T) = \Lambda_r$ [26, 31.1].

Supposons de plus que G est semi-simple. Si A désigne le groupe des automorphismes de G et I les automorphismes intérieurs de G , alors A/I s'injecte dans le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin $\text{Dynkin}(\Phi, B)$ associé au système de racines. Notons $A_{B,T}$ les automorphismes de G stabilisant T et B , alors $A = IA_{B,T}$ ([3, Chapitre IV, 14.9, Corollaire]).

On suppose toujours que G est semi-simple et que l'on dispose d'un tore maximal T dans G . Tout sous-groupe normal connexe fermé non réduit à $\{e\}$ est encore semi-simple car son radical est normal dans G .

Notons par $(G_i)_i$ l'ensemble des sous-groupes connexes normaux minimaux de dimension positive de G , alors cet ensemble est fini disons de cardinal n , et l'application $G_1 \times_k \dots \times_k G_n \rightarrow G$ est surjective et admet un noyau fini et la décomposition $G = G_1 \dots G_n$ correspond exactement à la décomposition de $\Phi(G, T)$ en composantes connexes. Les G_i sont non commutatifs et ne possèdent pas de sous-groupes fermés connexes normaux autres qu'eux-mêmes et $\{e\}$. Un tel groupe est dit simple. [26, 27.5]. La classification des systèmes de racines des groupes simples est connue. Dans le cas d'un système de racines A_n , le groupe simple simplement connexe correspondant est SL_n .

Nous utiliserons aussi les systèmes de Tits. On pourra consulter [5, Chapitre IV Section 2] pour leur définition et une présentation détaillée. Avec les notations précédentes, (G, B, N, S) forme un système de Tits [3, Chapitre IV, 14.15], où $N = N_G(T)$ et S est l'ensemble des réflexions associées aux racines simples [3, Chapitre IV, 13.18]. Son groupe de Weyl $W = N/T$ est engendré par S . Supposons $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ pour un certain n . Soit $w \in W$. Le minimum des r tel qu'il existe des entiers $i_1, \dots, i_r$ compris entre 1 et n tels que $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$ est appelé la longueur de w , noté $\ell(w)$. Une telle écriture de w sera dite *réduite*.

Pour $I \subset S$, notons W_I le sous-groupe de W engendré par I , et $P_I = BW_I B$, c'est un sous-groupe parabolique de G contenant B , et réciproquement tout sous-groupe parabolique P contenant B est de la forme P_I pour un $I \subset S$ [26, 29.3 Théorème].

1.5.1.2. Décomposition de Bruhat. — Le théorème suivant nous donne une décomposition des groupes réductifs, la décomposition de Bruhat ([3, Chapitre IV, 14.12, Théorème]) :

Théorème 1.5.5. — *Soit G un groupe algébrique réductif déployé sur k . Soient T un k -tore déployé maximal de G et B un sous-groupe de Borel de G contenant T . Notons par W le groupe de Weyl associé. Alors G est la réunion disjointe des doubles classes BwB , avec $w \in W$.*

De plus, l'application de $(U \cap {}^wU^-) \times B$ dans BwB définie par $(x, y) \mapsto xwy$ est un isomorphisme où $U = B_u$ (resp. U^-) est la partie unipotente du groupe de Borel (resp. du groupe de Borel opposé), et ${}^wU^-$ est le conjugué du groupe U^- par w .

La version géométrique est :

Théorème 1.5.6. — *Conservons les mêmes notations. La variété projective G/B est réunion disjointe des BwB/B , que l'on appellera cellules de Schubert. Ce sont des espaces affines.*

Notation 1.5.7. — Conservons les notations du théorème 1.5.6. Nous noterons C_w la cellule de Schubert $BwB/B \subset G/B$. On désigne par $X_w = \bar{C}_w$ sa fermeture. Les X_w sont appelées variétés de Schubert.

Dans le cas où l'on travaille avec un sous-groupe parabolique, on a un résultat similaire [3, Chapitre IV, 14.16 et Chapitre V, 21.16] :

Théorème 1.5.8. — *Soit G un groupe algébrique réductif déployé. On dispose d'un tore maximal T , d'un Borel B et d'un parabolique P , $T \subset B \subset P$, tous définis sur k . Il existe une partie $I \subset S$ (S ensemble des réflexions s_α associé aux racines simples $\alpha \in \Delta(B)$), tel que $P = P_I$. Le groupe G est la réunion disjointe des BwP_I , où w parcourt W/W_I .*

Autrement dit, la variété projective G/P admet une décomposition cellulaire :

$$G/P = \coprod_{w \in W/W_I} BwP_I/P_I.$$

Nous appellerons cellule de Schubert associée à w , le quotient $C_w = BwP_I/P_I$; c'est un espace affine. Sa fermeture notée X_w est la variété de Schubert associée à w .

1.5.1.3. Calcul des anneaux de K -théorie et de Chow. — Si on considère une variété de drapeaux G/P pour un parabolique P , alors la décomposition de Bruhat nous fournit une décomposition cellulaire de cette variété, ainsi l'anneau de K -théorie et l'anneau de Chow se calculent facilement.

Proposition 1.5.9. — *Si X une k -variété et Y une sous-variété fermé de X , alors la suite suivante est exacte :*

$$(1) \quad \mathrm{CH}_k(Y) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}_k(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{CH}_k(U) \longrightarrow 0.$$

où i est l'inclusion $Y \rightarrow X$ et j l'inclusion ouverte $U = X \setminus Y \rightarrow X$.

Démonstration. — [15, Proposition 1.8]. □

Le résultat suivant se trouve dans [28] :

Théorème 1.5.10. — *Supposons que l'on soit sous les hypothèses du théorème 1.5.8 On a alors :*

$$\mathrm{CH}^*(G/P) = \bigoplus_{w \in W/W_I} \mathbf{Z}[X_w].$$

Démonstration. — Il résulte de [28] que la suite exacte (1) se scinde dans le cas des variétés cellulaires. On démontre alors le résultat par récurrence. $\square$

On a le même résultat pour l'anneau de K -théorie :

Proposition 1.5.11. — *Si X est une k -variété lisse et Y une sous-variété fermée de X , alors la suite suivante est exacte :*

$$K_0(Y) \xrightarrow{i_*} K_0(X) \xrightarrow{j^*} K_0(U) \longrightarrow 0$$

où i est l'inclusion $Y \rightarrow X$ et j l'inclusion ouverte $U = X \setminus Y \rightarrow X$.

Démonstration. — [51, Section 7, Proposition 3.2]. $\square$

Théorème 1.5.12. — *Supposons que l'on soit sous les hypothèses du théorème 1.5.8. On a alors :*

$$K_0(G/P) = \bigoplus_{w \in W/W_I} \mathbf{Z}[\mathcal{O}_{X_w}].$$

Démonstration. — Tout élément de W/W_I admet un unique représentant de longueur minimal dans W . On note W^I l'ensemble de ces éléments. La proposition 1.5.11 montre que $K_0(G/P)$ est engendré par les classes $[\mathcal{O}_{X_w}]$ pour $w \in W^I$. Par définition de la filtration topologique, et par [3, Chapitre V, 21.22] :

$$F^i K_0(G/P) \supset \sum_{w \in W^I, \ell(w) < i} [\mathcal{O}_{X_w}].$$

En utilisant la description des groupes de Chow et le fait que l'application

$$\mathrm{CH}^p(G/P) \rightarrow F^p K_0(G/P) / F^{p+1} K_0(G/P)$$

est dans ce cas une bijection puisque le groupe de Chow est sans torsion, on en déduit par récurrence le résultat annoncé. $\square$

Remarque 1.5.13. — Naturellement, si $P = B$, alors la somme se fait sur le groupe de Weyl W , dans les deux théorèmes 1.5.10 et 1.5.12.

1.5.1.4. Anneau des représentations - Base de Pittie. — Fixons dans cette section un groupe algébrique G simplement connexe et semi-simple déployé. On dispose d'un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T de G inclus dans B . Notons $\Phi = \Phi(G, T)$ son système de racines et Δ la base des racines positives (pour le sous-groupe de Borel B), et n son cardinal. On note par W le groupe de Weyl associé. On note enfin par W_P l'ensemble des $w \in W$, $wPw^{-1} = P$. C'est le groupe de Weyl W_I si $P = P_I$ est le parabolique correspondant à $I \subset S$, S ensemble des réflexions. Si $\Delta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la base de W pour le Borel B , on notera $(\varpi_1, \dots, \varpi_n)$ les poids fondamentaux associés.

1.5.1.5. Base de $R(G)$. — Notons $R_k(G)$ l'anneau des k -représentations de G , et $R_k(T)$ celui de T . Puisque $B = TU$ où U est un groupe unipotent, alors $R(T)$ est aussi l'anneau des représentations de B . Soit P un sous-groupe parabolique contenant B . Il est clair que l'on a une flèche (par restriction) : $R_k(G) \rightarrow R_k(P)$. Ainsi $R_k(P)$ est un $R_k(G)$ -module. De plus on a le résultat de Chevalley :

Théorème 1.5.14 (Chevalley). — *Les anneaux des représentations de T , P et G sont donnés par :*

$$\begin{aligned} R_k(T) &= \mathbf{Z}[X], \\ R_k(G) &= \mathbf{Z}[X]^W, \\ R_k(P) &= \mathbf{Z}[X]^{W_P}. \end{aligned}$$

Démonstration. — [47, Théorème 2.3]. □

Le $R_k(G)$ -module $R_k(B)$ est libre de rang le cardinal de W . C'est un résultat de Pittie ([50]) :

Théorème 1.5.15. — *Posons pour $w \in W$:*

$$\lambda_w = \prod_{\alpha_i, w^{-1}\alpha_i < 0} w^{-1}.\varpi_i$$

Alors $R_k(B)$ est un $R_k(G)$ -module libre de base $(\lambda_w)_{w \in W}$.

Si en lieu et place du sous-groupe de Borel, on a un parabolique P , on a également un résultat similaire. Notons W^P l'ensemble des $w \in W$, tels que w transforme (via son action naturelle) les racines associées au parabolique P en des racines positives. C'est un ensemble de représentants pour W/W_P . Et on note $e^P : W^P \rightarrow R_k(P)$ l'application envoyant un w sur $\sum_v \lambda_v$ où la somme est prise sur les $v \in W$ faisant partie de la

même classe que w dans W/W_P . ([47, 12.7]). On peut alors énoncer le résultat [57, Théorème 2.2]. :

Théorème 1.5.16. — *La famille $\{e^P(w), w \in W^P\}$ est une base du $R_k(G)$ -module libre $R_k(P)$.*

1.5.1.6. Base de l'anneau de K -théorie de G/P . — Si (ρ, E) est une k -représentation de P , on peut obtenir un fibré vectoriel sur G/P de la manière suivante : sur $G \times E$, on a une action de P à droite : $(g, v).p = (gp, \rho(p)^{-1}v)$. On notera $G \times^P E$ l'ensemble quotient. C'est un fibré vectoriel sur G/P . On notera par p la projection canonique $G \times^P E \rightarrow G/P$. Le fibré vectoriel est muni naturellement d'une action à gauche de G . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times (G \times^P E) & \longrightarrow & G \times^P E \\ \text{Id} \times p \downarrow & & \downarrow p \\ G \times G/P & \longrightarrow & G/P \end{array}$$

On a une équivalence de catégories entre d'une part la catégorie des k -représentations de P et la catégorie des fibrés vectoriels G -homogènes (au sens précédent) sur G/P (voir [47, Lemme 1.3]). En passant aux groupes de Grothendieck de ces catégories, si $K^G(G/P)$ désigne le groupe de K -théorie de la catégorie des fibrés vectoriels G -homogènes sur G/P alors on a :

$$K^G(G/P) \simeq R_k(P).$$

La dimension d'une représentation fournit un morphisme d'anneaux de $R_k(G)$ dans $\mathbf{Z}$. Par suite, on peut munir les groupes $K_i(k)$ d'une structure de $R_k(G)$ -module. Pour l'anneau $K_*(G/P)$, on obtient donc :

Théorème 1.5.17. — *Si E est une représentation de P , alors $G \times^P E$ est un fibré vectoriel G -homogène au-dessus de G/P et si V est un k -espace vectoriel, $(G \times^P E) \otimes_k V$ est un fibré au-dessus de G/P . On obtient une application naturelle :*

$$R_k(P) \otimes_{R_k(G)} K_i(k) \rightarrow K_i(G/P)$$

qui est un isomorphisme.

Démonstration. — [47, Théorème 2.2]

□

Corollaire 1.5.18. — *On a un isomorphisme canonique :*

$$R_k(P) \otimes_{R_k(G)} \mathbf{Z} \simeq K_0(G/P).$$

Notation 1.5.19. — A chaque $e^P(w)$, on associe un fibré vectoriel sur G/P , comme ci-dessus, noté $\mathcal{E}^P(w)$.

Théorème 1.5.20. — *Les $[\mathcal{E}^P(w)]$ forment une $\mathbf{Z}$ -base de $K_0(G/P)$.*

Démonstration. — Ils forment une base du $R_k(G)$ -module $R_k(P)$. Le résultat découle alors du corollaire ci-dessus. $\square$

Remarque 1.5.21. — Si $P = B$ est un sous-groupe de Borel de G , alors on associe à chaque λ_w un fibré en droite sur G/B que l'on notera $\mathcal{L}(\lambda_w)$. Les $[\mathcal{L}(\lambda_w)]$ forment une $\mathbf{Z}$ -base de $K_0(G/B)$.

1.5.2. Variétés homogènes

Fixons k_s une clôture séparable de k .

Si G est un k -groupe algébrique et X une k -variété quasi-projective, dire que G agit sur X au-dessus de k signifie que l'on a un k -morphisme $G \times_k X \rightarrow X$ vérifiant les hypothèses habituelles pour une action de groupes [3, Chapitre I, 1.7]. Pour toute extension de corps L/k , $G(L)$ agit sur $X(L)$ au sens des actions de groupes sur un ensemble. On dit alors que X est une G -variété et l'on a naturellement la notion de G -morphisms entre G -variétés : ce seront des morphismes compatibles aux actions de G .

Avant d'aller plus loin, faisons une digression sur les formes :

1.5.3. Formes tordues

Nous utiliserons également le langage et les notations de la cohomologie des groupes que l'on peut trouver dans [55] ou [56].

En suivant Serre [55, Section III.1], si X est une variété sur k ou un groupe algébrique sur k et si L/k est une extension galoisienne, on dira qu'une k -variété Y (ou un k -groupe algébrique) est une L/k -forme de X , si X et Y sont isomorphes sur L en tant que L -variétés (ou L -groupes algébriques). Plus généralement, Y sera une k -forme de X , s'il existe une extension galoisienne L/k , telle que Y soit une L/k -forme de X . Notons aussi que la définition peut être élargie au cas où X est un objet algébrique sur k , comme un k -espace vectoriel, une k -algèbre, etc...

Soient donc X une k -variété et L/k une extension galoisienne de groupe de Galois Γ , alors si on note $\mathcal{F}_L(X)$ l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme de L/k formes de X (l'élément remarquable de $\mathcal{F}_L(X)$ est X_L), on a d'après [55, III.1.3 Proposition 5] une application injective d'ensembles pointés :

$$\mathcal{F}_L(X) \rightarrow H^1(L/k, \text{Aut}(X_L)).$$

Ainsi, si $\gamma \in Z^1(L/k, \text{Aut}(X_L))$, nous noterons ${}_\gamma X$, si elle existe, la L/k -forme de X correspondant au cocycle γ . Si X est quasi-projective, cette application est aussi surjective.

Soit k_s une clôture séparable de k , et notons pour toute variété Y , $Y_s = Y \times_k k_s$.

Soient G un k -groupe algébrique et X une k -variété. On suppose que l'on dispose d'une k -action $G \times_k X \rightarrow X$. On dispose donc d'un morphisme de groupes :

$$G(k_s) \rightarrow \text{Aut}(X_s)$$

et donc d'une application d'ensembles pointés :

$$\phi : Z^1(k_s, G(k_s)) \rightarrow Z^1(k_s, \text{Aut}(X_s)).$$

Si $\gamma \in Z^1(k_s, G(k_s))$, on notera ${}_\gamma X$ en place de ${}_{\phi(\gamma)} X$.

1.5.4. Variétés de drapeaux

Soient G un k -groupe algébrique réductif et X une G -variété projective. La variété X est appelée une G -variété de drapeaux ou variété de drapeaux tordue, s'il existe un sous-groupe parabolique de G_s , P , tel que $X_s \simeq G_s/P$ en tant que G_s -variétés. La variété X sera alors lisse, réduite, puisqu'il en est de même pour G_s/P .

Un k -groupe semi-simple G' est une forme intérieure d'un groupe algébrique semi-simple G s'il existe $\delta \in Z^1(k, \bar{G}(k_s))$ tel que $G' = {}_\delta G$, où $\bar{G}$ désigne le groupe adjoint associé à G , c'est-à-dire le quotient $G/Z(G)$, $Z(G)$ est le noyau schématique de l'application $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$. Néanmoins, puisque l'application $H^1(k, \bar{G}(k_s)) \rightarrow H^1(k, \text{Aut}(G_s))$ n'est pas nécessairement injective, la classe de δ dans $H^1(k, \bar{G}(k_s))$ associée à la classe d'isomorphisme de G' n'est pas unique. Cela se rencontre avec les groupes de type D_n [46, Section 5.IV].

La théorie des groupes algébriques semi-simples (voir 1.5 et [60]) permet de dire qu'il existe un unique (à isomorphisme près) groupe semi-simple déployé G^d tel que $G_s \simeq G^d$. Autrement dit, G est une forme

tordue de G^d . Si G est une forme intérieure de G^d , on dit que G est de type intérieur.

1.6. Quelques notations et définitions

Introduisons ici quelques notations et définitions que nous utiliserons par la suite.

Nous utiliserons la théorie des algèbres simples centrales que nous appellerons aussi algèbres d’Azumaya :

Définition 1.6.1. — Notons k_s une clôture séparable de k . Soit A une k -algèbre. On dira que A est une algèbre d’Azumaya s’il existe un entier $r \geq 1$ tel que

$$A \otimes_k k_s = \mathcal{M}_r(k_s).$$

Une telle algèbre est de dimension r^2 , r est appelé le degré de A .

Si X est un schéma, rappelons [20] qu’une algèbre $\mathcal{A}$ sur X est une algèbre d’Azumaya si, localement pour la topologie étale, $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathcal{M}_r(\mathcal{O}_X)$ pour un certain r . Si $X = \text{Spec}(k)$ est le spectre d’un corps, une algèbre d’Azumaya A sur X n’est rien d’autre qu’une algèbre simple centrale sur k .

Définition 1.6.2. — Soient A une algèbre d’Azumaya sur k de degré n et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. On notera par $\text{SB}_{i_1, \dots, i_r}(A)$ le k -schéma représentant le foncteur qui à une k -algèbre R associe l’ensemble des r -uplets $(I_1, \dots, I_r)$ d’idéaux à gauche de $A \otimes_k R$, tels que $A \otimes_k R/I_j$ soit localement libre de rang $n^2 - ni_j$ et $I_1 \subset \dots \subset I_r$.

Remarque 1.6.3. — Tout groupe algébrique G , forme intérieure de type A_{n-1} s’écrit $\text{PGL}(A)$ pour une algèbre d’Azumaya A de degré n , et toute variété projective homogène X sur G s’écrit $\text{SB}_{i_1, \dots, i_r}(A)$ pour un entier r et un r -uplet $(i_1, \dots, i_r)$ [46, 5.2].

Remarque 1.6.4. — En particulier $\text{SB}_i(A)$ est une variété de Severi-Brauer généralisée [34, définition 1.16]. Par exemple, $\text{SB}_1(A)$ coïncide avec $\text{SB}(A)$, variété de Severi-Brauer « habituelle », définie pour la première fois par Châtelet [9].

Remarque 1.6.5. — Si L/k est une extension de corps déployant A (un tel L existe d’après le théorème de Wedderburn, [34, théorème 1.1]), alors $\text{SB}_i(A) \otimes_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(L)$ est simplement une variété de Grassmann, d’après [34, théorème 1.18].

Notation 1.6.6. — Soit V un k -espace vectoriel de dimension n . Soient $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. La variété de drapeaux sur V associée à la suite $(1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$ est notée $\text{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(V)$. C'est le k -schéma représentant le foncteur qui à une k -algèbre R associe l'ensemble des r -uplets $(V_1, \dots, V_r)$ de R -modules de $V \otimes_k R$ tels que $V \otimes_k R/V_i$ soit localement libre de rang $n - i_j$ et $V_1 \subset \dots \subset V_r$. Par exemple, ses L -points pour une extension de corps L/k sont $\text{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(V)(L) = \{V_1 \subset \dots \subset V_r \subset V, \text{ pour tout } j, V_j, L\text{-espace vectoriel de dimension } i_j\}$.

Définition 1.6.7. — Soient $\mathcal{V}$ un fibré de rang n sur un k -schéma X , et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ une suite d'entiers. On notera $\text{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{V})$ le fibré en variétés de drapeaux associé à $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ défini comme suit : si U est un ouvert de X trivialisant $\mathcal{V}$, alors on a le diagramme commutatif suivant dont le carré est cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_k^n \times U & \xleftarrow[\sim]{\phi} & \mathcal{V}|_U & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & U & \longrightarrow & X \end{array}$$

On définit un fibré en variétés de drapeaux $\mathcal{E}_U$ sur U comme étant égal à $\phi^{-1}(\text{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(k^n) \times U)$. Pour tout ouvert U trivialisant $\mathcal{V}$, on construit ainsi un fibré en variétés de drapeaux $\mathcal{E}_U$. Il est évident qu'ils se recollent pour donner naissance à un fibré en variétés de drapeaux $\mathcal{E}$ sur X tel que si U est un ouvert trivialisant $\mathcal{V}$, on a : $\mathcal{E}|_U = \mathcal{E}_U$. Finalement, on pose : $\text{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{V}) = \mathcal{E}$.

Notation 1.6.8. — Si $\mathcal{B}$ est une algèbre d'Azumaya de degré n , sur un schéma X , et si $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ sont des entiers, alors on peut définir une fibration en variétés de drapeaux tordues $\text{SB}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{B}) \rightarrow X$ qui revient à étendre la définition 1.6.2 « en famille » (construction analogue à la définition 1.6.7). Par exemple, si $x \in X$ est un point, alors

$$\text{SB}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{B})_x = \text{SB}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{B}_x).$$

Nous noterons $\text{SB}(\mathcal{B}) = \text{SB}_1(\mathcal{B})$.

CHAPITRE 2

COMBINATOIRE

2.1. Introduction

Considérons un k -espace vectoriel E de dimension n pour un certain entier n . Fixons une base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Le but de ce chapitre est d'étudier la géométrie de la variété de drapeaux complets $X = \text{Drap}_{1, \dots, n}(E)$ (voir 1.6.6 pour la définition). Via la base $\mathbf{e}$, le groupe SL_n agit naturellement sur X de manière transitive, et le stabilisateur du drapeau $(\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \dots)$ est constitué des matrices triangulaires supérieures, que l'on notera par B , c'est un sous-groupe de Borel de $G = \text{SL}_n$, et X s'identifie à G/B . Rappelons que SL_n est de type A_{n-1} .

Dans ce chapitre, nous allons introduire la combinatoire associée à une variété de drapeaux complets dans le cas déployé. L'anneau de Chow d'une telle variété possède en effet une base canonique, formée des classes des variétés de Schubert, appelées aussi cycles de Schubert, indexée par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Ces classes ont une expression polynomiale en les classes de Chern de fibrés vectoriels tautologiques sur la variété, donnée par les polynômes de Schubert.

De même, l'anneau de Grothendieck d'une telle variété, possède une base naturelle formée des classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert indexée sur $\mathfrak{S}_n$. Ces classes ont une expression polynomiale en les classes de fibrés vectoriels tautologiques, donnée par les polynômes de Grothendieck.

En outre, il existe une base fondamentale de l'anneau de K -théorie de telle variété, $(\mathcal{L}_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$, base qui est invariante sous l'action du groupe de Galois. Cette base définie par Pittie [50] a été cruciale dans le calcul de la K -théorie des variétés homogènes fait par Panin [47].

Ainsi l'on dispose de deux bases importantes de l'anneau de K -théorie, l'une est invariante sous l'action du groupe de Galois, et l'autre constituée des classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert, donc qui est adaptée à la filtration topologique de l'anneau de K -théorie. Il est naturel de vouloir chercher le lien entre les deux bases et donc de donner une expression de la matrice de changement de bases.

Pour ce faire, on introduit un produit scalaire sur l'anneau de K -théorie, et on introduit les polynômes $\mathbf{H}$ de Lascoux ([39]), qui donneront une base adjointe à celle formée par les polynômes de Grothendieck. Ces polynômes se calculent aisément grâce à des opérations de *différences divisées*.

Nous donnerons les définitions et algorithmes afférents aux calculs des trois séries de polynômes évoquées, ainsi que la combinatoire associée au produit scalaire, intimement liée aux fonctions de Schur. Enfin nous relierons les objets combinatoires à la géométrie. Nous finirons par présenter un exemple en petite dimension.

Le chapitre repose sur l'étude des lieux de dégénérescence Ω_w de la variété de drapeaux. Fulton dans [15, Chapitre 14] a étudié ces lieux pour la variété de Grassmann, puis pour les variétés plus générales, toujours sous un groupe de type A_n . Si le groupe n'est plus du type A_n mais est un groupe classique, on dispose aussi de polynômes de Schubert [35].

2.2. Variétés de drapeaux complets de type A_{n-1}

Dans le chapitre de rappels, on a donné le vocabulaire relatif aux groupes algébriques et variétés homogènes (Cf. 1.5.1). Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'aux variétés de drapeaux complets de type A_{n-1} . La présente section a pour but d'explicitier G , B , W , etc ... dans ce contexte particulier, afin de stabiliser les notations.

2.2.1. Variétés homogènes

La présente section est fondée sur [5, Planche 1].

On se place dans ce chapitre, dans le cas où $G = \mathrm{SL}_n$ pour un certain entier n . Comme tore maximal, on prend l'ensemble des matrices

diagonales de SL_n :

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

avec $t_1, \dots, t_n \in k^*$, et

$$B = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \star \end{pmatrix}$$

l'ensemble des matrices de SL_n triangulaires supérieures est un groupe de Borel contenant T . Le groupe T est un tore maximal déployé de dimension n (définition [3, Chapitre III, 8.5]), inclus dans B . La partie unipotente de B est :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on a : $B = TU$.

La variété projective G/B s'identifie avec $\text{Drap}_{1,\dots,n}(k^n)$ où Drap a été introduit en 1.6.6.

Le groupe de Weyl associé est $W = \mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Notons Δ l'ensemble des racines simples (pour le Borel B) du système de racines $\Phi(G, T)$ du groupe G . Si on note ϵ_i le morphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T & \rightarrow & \mathbf{G}_m \\ \left(\begin{array}{ccc} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{array} \right) & \mapsto & t_i \end{array}$$

alors $\Delta = \{\alpha_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_2), \dots, \alpha_{n-1} = (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)\}$. Les poids fondamentaux associés sont $\{\varpi_1, \dots, \varpi_{n-1}\}$, avec : $\varpi_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$ pour $i = 1 \dots (n-1)$.

L'ensemble S des réflexions de W associées aux racines simples $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ sont les transpositions $s_i = (i \ i+1)$, pour $i = 1 \dots (n-1)$.

Nous avons encore ici la notion de longueur d'une permutation $w \in W$. C'est le plus petit r tel que w soit produit de r éléments de S . On le notera $\ell(w)$.

En suivant [14, Equation 3.7], on pose la définition suivante :

Définition 2.2.1. — Soient n un entier et $w \in \mathfrak{S}_n$. Pour $p, q \leq n$, on définit la fonction rang ainsi :

$$r_w(p, q) = |\{i \leq p, w(i) \leq q\}|$$

où $|\cdot|$ désigne le cardinal d'un ensemble.

La fonction rang jouera un rôle important pour connaître avec précision les points des variétés de Schubert.

Remarque 2.2.2. — Conservons les mêmes notations. On a les relations suivantes :

1. $\forall i, s_i^2 = 1,$
2. $\forall i, j, |i - j| > 1, s_i s_j = s_j s_i,$
3. $\forall i, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}.$

Le groupe symétrique est donc un groupe de Coxeter [24, Section I.1]. En fait dès que l'on a un système de Tits (G, B, N, T, S) , N/T est un groupe de Coxeter dont l'ensemble des réflexions simples est S [3, Chapitre IV, 14.15].

La signature sur le groupe $\mathfrak{S}_n$ se réécrit : $\epsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$ pour $w \in \mathfrak{S}_n$. On peut également lier la longueur d'un élément de $\mathfrak{S}_n$ au nombre d'inversions :

Proposition 2.2.3. — Soit w un élément de $\mathfrak{S}_n$ pour un certain n . Alors

$$\ell(w) = i(w) = |\{(i, j) \in \{1 \dots n\} \times \{1 \dots n\}, i < n, w(i) > j\}|.$$

où $|\cdot|$ désigne le cardinal d'un ensemble.

Notation 2.2.4. — On note w_0 l'élément de longueur maximale de $\mathfrak{S}_n$.

2.2.2. Variétés de Schubert - Variétés de Schubert opposées

Rappelons la décomposition de Bruhat (cas particulier du théorème 1.5.6) ([6, Proposition 1.2.1]) :

Lemme 2.2.5. — *Conservons les notations précédentes. La variété G/B admet la décomposition suivante :*

$$G/B = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB/B$$

où pour $w \in \mathfrak{S}_n$, w représente la matrice $n \times n$, $(w_{i,j})_{i,j}$ tel que $w_{i,j} = \delta_{j,wi}$ (δ est le symbole de Kronecker). On appelle cellule de Schubert le quotient $C_w = BwB/B$, c'est un espace affine de dimension $\ell(w)$. Notons que $X_{w_0} = G/B$.

Suivant [24, Section I.6], donnons la définition suivante :

Définition 2.2.6. — Introduisons un ordre partiel sur $W = \mathfrak{S}_n$, ordre engendré par $w < tw$ si $\ell(w) + 1 = \ell(tw)$ pour t un conjugué d'une des s_i (ie. une transposition). C'est l'ordre de Bruhat.

On peut alors décrire les variétés de Schubert en fonction des cellules de Schubert [6, Proposition 1.2.1] :

Proposition 2.2.7. — *Soit $w \in \mathfrak{S}_n$.*

$$X_w = \coprod_{v \leq w} C_v.$$

La variété X des drapeaux complets de $E = k^n$ (muni du drapeau standard $(\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \dots)$) admet donc une décomposition cellulaire. On a une expression simple en termes de drapeaux des cellules de Schubert et des variétés de Schubert.

Notons tout d'abord $E_\bullet$ le drapeau complet standard de E :

$$E_\bullet = (E_1, \dots, E_n)$$

avec pour tout i :

$$E_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle.$$

Proposition 2.2.8. — *On a :*

$$C_w = \{V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset E \mid \forall p, q \dim_k(V_q \cap E_p) = r_w(q, p)\}$$

et

$$X_w = \{V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset E \mid \forall p, q \dim_k(V_q \cap E_p) \geq r_w(q, p)\}$$

où $r_w(q, p)$ est la fonction rang définie en 2.2.1.

Démonstration. — Donnons la preuve pour C_w , pour la variété de Schubert X_w , c'est similaire. On note ${}^wE_\bullet$ le drapeau : $({}^wE_1, \dots, {}^wE_n)$ avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$${}^wE_i = \langle e_{w(1)} \dots, e_{w(i)} \rangle.$$

C'est l'image de $E_\bullet$ par w . Alors par définition-même de la cellule de Schubert C_w , $C_w = B {}^wE_\bullet$. Soit $F_\bullet = (F_1, \dots, F_n)$ un drapeau.

Le fait que $F_\bullet$ appartienne à C_w revient à dire que pour tout i , l'espace vectoriel F_i est de la forme

$$\langle e_{w(i)} + \dots, e_{w(i-1)} + \dots, \dots, e_{w(1)} + \dots \rangle$$

où les pointillés dans l'expression $e_{w(i)} + \dots$ représentent une combinaison linéaire de e_j avec $j < w(i)$. Ceci est donc équivalent à dire que pour tout i, j :

$$\dim_k(F_i \cap E_j) = |\{\mu \leq i, w(\mu) \leq j\}|$$

i.e. :

$$\dim_k(F_i \cap E_j) = r_w(i, j).$$

□

Nous avons introduit un sous-groupe de Borel B de SL_n . Introduisons le sous-groupe de Borel opposé (définition [3, Chapitre IV, 14.1, Théorème]) que nous noterons $B^- = w_0 B w_0$, où w_0 est l'élément de longueur maximale de $\mathfrak{S}_n$ (ie. $w_0 = (n, n-1, \dots, 1)$). Autrement dit, B^- est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de SL_n . En suivant [6, Section 12], on définit les cellules de Schubert opposées et les variétés de Schubert opposées :

Définition 2.2.9. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. La cellule de Schubert opposée associée à w est :

$$C^w = w_0 C_{w_0 w}.$$

La variété de Schubert opposée associée à w est :

$$X^w = w_0 X_{w_0 w}.$$

Bien sûr, on a :

Proposition 2.2.10. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$.

$$X^w = \coprod_{v \geq w} C^v.$$

Démonstration. — C'est un corollaire de la proposition 2.2.7, en sachant qu'ici l'ordre est renversé car on compose avec w_0 . $\square$

Définition 2.2.11. — Fixons un w . Le bord de la variété de Schubert X_w est :

$$\partial X_w = X_w \setminus C_w = \coprod_{v < w} C_v.$$

De même, le bord de la variété de Schubert opposée X^w est :

$$\partial X^w = X^w \setminus C^w = \coprod_{v > w} C^v.$$

2.2.3. Base de l'anneau de K -théorie - Dualité

Le théorème 1.5.12 permet de voir que l'anneau de Grothendieck de G/B admet une base formée des faisceaux structuraux des variétés de Schubert $[\mathcal{O}_{X_w}]$. Pour exprimer les $[\mathcal{O}_{X_w}]$ dans la base de Pittie, nous allons mettre un produit scalaire sur $K_0(G/B)$ puis chercher une base duale. Sur le plan combinatoire, les polynômes adjoints $\mathbf{H}$ de Lascoux répondent au problème, sur le plan géométrique, il faudra étudier les variétés de Schubert opposées. Énonçons tout d'abord un résultat qui montre qu'on dispose effectivement d'un produit scalaire ([47, Théorème 8.1]).

Commençons par un rappel :

Remarque 2.2.12. — On notera par f le morphisme structural $G/B \rightarrow \text{Spec}(k)$. L'application f induit un morphisme f_* sur les groupes de Grothendieck :

$$K_0(G/B) \rightarrow \mathbf{Z}$$

Ce morphisme est la caractéristique d'Euler-Poincaré, notée χ .

Théorème 2.2.13 (Hulsurkar [25]). — *L'accouplement :*

$$\begin{aligned} K_0(G/B) \times K_0(G/B) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \chi(\alpha\beta) \end{aligned}$$

est non dégénéré.

2.3. Polynômes

Nous allons définir trois séries de polynômes dans cette section, les polynômes (doubles) de Schubert $\mathbf{X}$ qui généralisent les fonctions de Schur, les polynômes (doubles) de Grothendieck $\mathbf{G}$, d'après Lascoux et Schützenberger ([38]) et enfin des polynômes $\mathbf{H}$ que nous appellerons polynômes de Lascoux. Nous ferons toujours opérer les fonctions *à gauche*, a contrario de la convention prise par Lascoux, Schützenberger dans [39], [42].

Fixons les notations pour la présente section. Pour être le plus général possible, nous allons travailler sur l'anneau $\mathbf{Z}$. Soit $n \geq 1$ un entier. Considérons une première suite d'indéterminées (ou alphabet) $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Posons $A = \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_n, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}]$. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur A en permutant les variables a_i . Si $w \in \mathfrak{S}_n$, nous noterons encore par w l'endomorphisme de A déduit de la permutation w . Par exemple pour $s_i = (i \ i+1) \in \mathfrak{S}_n$, s_i sera l'opérateur :

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ f &\mapsto f(a_1, \dots, a_{i+1}, \underset{i}{a_i}, \underset{i+1}{a_{i+1}}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Nous noterons par $A^{\mathfrak{S}_n}$ le sous-anneau de A constitué des éléments fixés par $\mathfrak{S}_n$.

De plus, si R est un anneau quelconque, il pourra être utile d'étudier les polynômes en les a_i non plus à coefficients dans $\mathbf{Z}$, mais dans R . On prolongera alors l'action de $\mathfrak{S}_n$ à $A_R = R[a_1, \dots, a_n, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}] = A \otimes_{\mathbf{Z}} R$. Et $A_R^{\mathfrak{S}_n} = A^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbf{Z}} R$. Si aucune confusion n'est à craindre sur l'anneau des scalaires R , nous noterons par abus de langage A au lieu de A_R .

Soit $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ un second alphabet. Il nous arrivera régulièrement de prendre comme anneau R :

$$R = \mathbf{Z} \left[b_1, \dots, b_n, \frac{1}{b_1}, \dots, \frac{1}{b_n} \right].$$

Il faudra alors noter que le groupe $\mathfrak{S}_n$ laisse fixes les b_i .

Les trois séries de $n!$ polynômes que nous allons construire seront des bases de A , vu comme module sur l'ensemble des polynômes symétriques en les a_i à coefficients dans R .

2.3.1. Opérateurs de symétrisation

Posons

$$A = \mathbf{Z} \left[a_1, \dots, a_n, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right].$$

Nous allons définir sur A des opérateurs $A^{\mathfrak{S}_n}$ -linéaires.

Définition 2.3.1. — Définissons 3 séries d'opérateurs de l'anneau A . Pour tout $i = 1 \dots n-1$ et $f \in A$, on pose :

$$\begin{aligned} \partial_i : A &\rightarrow A \\ f &\mapsto \partial_i(f) = \frac{s_i(f) - f}{a_{i+1} - a_i} \\ \pi_i : A &\rightarrow A \\ f &\mapsto \pi_i(f) = \frac{a_{i+1}s_i(f) - a_i f}{a_{i+1} - a_i} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_i : A &\rightarrow A \\ f &\mapsto \psi_i(f) = \pi_i(f) - f. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.2. — On a pour tout $f \in A$, et tout entier $i < n$, $\pi_i(f) = \partial_i(a_i f)$, et $\psi_i(f) = a_{i+1} \partial_i(f)$. D'autre part, si $f \in A$, alors pour tout i , $a_{i+1} - a_i$ divise $s_i(f) - f$ et donc $\partial_i(f) \in A$.

Remarque 2.3.3. — Soient $f \in A$ et $i \in \{1 \dots (n-1)\}$ un entier, alors $\partial_i(f)$ et $\pi_i(f)$ sont invariants sous l'action de s_i . Nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_i^2 &= 0 \\ \pi_i^2 &= \pi_i \\ \psi_i^2 &= -\psi_i. \end{aligned}$$

En outre, π_i et ψ_i permettent d'avoir une décomposition de A :

$$A = \ker \pi_i \oplus \ker \psi_i.$$

On calcule :

$$\ker \psi_i = A^{s_i}$$

et

$$\ker \pi_i = \text{Im } \psi_i = a_{i+1} A^{s_i}.$$

Bien entendu, $a_{i+1} A^{s_i}$ est l'ensemble des fonctions s'écrivant $a_{i+1} f$ avec $f \in A^{s_i}$. Finalement, les deux projecteurs π_i et ψ_i nous fournissent la décomposition suivante :

$$A = A^{s_i} \oplus a_{i+1} A^{s_i}.$$

Lemme 2.3.4. — Soient i un entier compris entre 1 et $(n-1)$, T_i un des opérateurs ∂_i , π_i , ou ψ_i . Alors on a les relations suivantes (appelées relations de Moore-Coxeter) :

$$\begin{aligned} \forall p, q = 1 \dots (n-1) \text{ tels que } |p-q| \geq 2 \quad & T_p T_q = T_q T_p \\ \forall p = 1 \dots (n-2) \quad & T_p T_{p+1} T_p = T_{p+1} T_p T_{p+1}. \end{aligned}$$

Démonstration. — La vérification est immédiate. $\square$

Proposition 2.3.5. — Soient $T_1, \dots, T_{n-1}$ des opérateurs de l'anneau A , tels que les $(T_i)_i$ vérifient les relations de Moore-Coxeter ci-dessus. Alors pour tout $w \in \mathfrak{S}_n$, il existe un opérateur de A noté T_w de sorte que

1. $T_e = 1$
2. $\forall i, T_{s_i} = T_i$
3. $T_w T_{w'} = T_{w'w}$, si $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$.

Démonstration. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Il existe une suite d'entiers compris entre 1 et $n-1$, $i_1, \dots, i_r$ où $r = \ell(w)$, telle que l'on a l'écriture suivante : $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$ (écriture réduite). Il suffit alors de poser :

$$T_w = T_{i_r} \dots T_{i_1}.$$

Il ne reste plus qu'à voir que la définition de T_w ne dépend pas du choix de l'écriture réduite. Or cela découle du fait que les $(T_i)_i$ vérifient les relations de Moore-Coxeter. Voir [39, lemme 1.4]. $\square$

Grâce d'une part à la proposition précédente, et au fait que les opérateurs, ∂_i , π_i et ψ_i vérifient les relations de Moore-Coxeter, on peut poser la définition suivante :

Définition 2.3.6. — Pour $w = s_{i_1} \dots s_{i_r} \in \mathfrak{S}_n$ un élément de longueur r , on définit trois opérateurs associés à w : $\partial_w = \partial_{i_r} \dots \partial_{i_1}$, $\pi_w = \pi_{i_r} \dots \pi_{i_1}$ et $\psi_w = \psi_{i_r} \dots \psi_{i_1}$.

Remarque 2.3.7. — Ce sont des *différences divisées*, dont les 2 dernières sont *isobares* (i.e. conservent le degré total), et la première fait décroître le degré de 1. Leurs noms proviennent des différences divisées utilisées par Newton pour produire des polynômes « approximant » une fonction. Plus exactement, si n est un entier positif, $x_0, x_1, \dots, x_n$ $n+1$

des éléments de k , et si f est une fonction de $k \rightarrow k$, on cherche le polynôme P de degré n tel que pour tout $i \in \{0 \dots n\}$, $P(x_i) = f(x_i) = y_i$. Si on écrit le polynôme sous la forme

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

Trouver les coefficients a_i revient à trouver les coefficients de P dans la base de Newton $\prod_{i=0}^j (x-x_i)$. La théorie de Newton nous dit que l'on a : $a_j = [y_0, \dots, y_j]$ avec : $[y_\nu] = y_\nu$ et :

$$[y_\nu, \dots, y_{\nu+j}] := \frac{[y_{\nu+1}, \dots, y_{\nu+j}] - [y_\nu, \dots, y_{\nu+j-1}]}{x_{\nu+j} - x_\nu}, \quad \nu = 0, \dots, n-j, j = 1, \dots, n-1.$$

Voir [23, Chapitre 2], pour plus de précisions sur la méthode de Newton.

Lemme 2.3.8. — Soient f et g deux éléments de A et $i \leq n-1$ un entier. Si $s_i(f) = f$, on a : $T_i(fg) = fT_i(g)$, où T_i est une des 3 différences divisées définies plus haut, à savoir ∂_i, π_i ou ψ_i .

Démonstration. — C'est évident vu la définition des différences divisées à partir de s_i . $\square$

2.3.2. Fonctions de Schur

On ne peut parler de polynômes de Schubert ou de polynômes de Grothendieck sans évoquer les fonctions de Schur. En effet, ce sont elles qui ont été étudiées en premier et se retrouvent au cœur de la combinatoire. Elles permettent d'obtenir une base du $A^{\mathfrak{S}_n}$ -module A . (voir [43] pour un traité complet sur les fonctions symétriques).

Rappelons que nous disposons d'un alphabet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

Définition 2.3.9. — Dans l'anneau $A[[t]]$ des séries formelles en t à coefficients dans A , pour tout $a \in A$, $(1-at)$ est inversible, et l'on définit les fonctions symétriques complètes ou fonctions aleph de Wronsky $S_j(a_1, \dots, a_n)$ comme suit :

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i t} = \sum_{j \geq 0} S_j(a_1, \dots, a_n) t^j.$$

Exemple 2.3.10. — On a $S_0(a_1, \dots, a_n) = 1$.

Supposons $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} S_1(a_1, a_2, a_3) &= a_1 + a_2 + a_3, \\ S_2(a_1, a_2, a_3) &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \\ S_3(a_1, a_2, a_3) &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_1^2a_2 + a_1^2a_3 + a_2^2a_3 + a_1a_2a_3. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.11. — Ces fonctions sont symétriques en les a_i . En effet si $s_i = (i \ i + 1)$, on a :

$$s_i \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - a_i t} \right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - a_i t}$$

et par suite

$$s_i(S_j(a_1, \dots, a_n)) = S_j(a_1, \dots, a_n).$$

Généralisons la construction précédente (voir [37, paragraphe 1.3]) :

Définition 2.3.12. — Soient $I = (i_1, \dots, i_r)$ et $J = (j_1, \dots, j_r)$ deux r -uplets d'entiers. La fonction de Schur $S_{I/J}$ est :

$$S_{I/J} = \det((S_{i_k - j_h + k - h}(a_1, \dots, a_n))_{h,k=1 \dots n})$$

avec la convention $S_j = 0$ si $j < 0$. Ceci est compatible à la définition 2.3.9.

Remarque 2.3.13. — Lorsque $J = (0, \dots, 0)$, on note S_I au lieu de $S_{I/(0, \dots, 0)}$. Lascoux dans [37] les appelle *fonctions de Schur* alors qu'il utilise le vocable *skew Schur function* pour le cas où J n'est pas nul. Ici, nous parlerons simplement de fonctions de Schur.

Exemple 2.3.14. — Essayons de comprendre à quoi ressemble le déterminant, expression de $S_I(a_1, \dots, a_n)$, pour un n -uplet $I = (i_1, \dots, i_n)$. Tout d'abord, sur la diagonale, à la place (μ, μ) pour un $\mu = 1 \dots n$, le coefficient de la matrice est $S_{i_\mu}(a_1, \dots, a_n)$. Fixons une colonne disons la colonne μ , les éléments intervenant dans cette colonne se déduiront du coefficient en (μ, μ) (i.e. : à l'intersection de la diagonale et de la colonne μ). En effet, à partir de la position (μ, μ) , on remplira la colonne μ avec des fonctions de Schur dont l'indice sera incrémenté de 1 (respectivement décrémenté de 1) si l'on monte d'un cran (i.e. : on passe de la ligne ν à $\nu + 1$) (respectivement si l'on descend).

Supposons que $n = 3$ et $I = (2, 13, 5)$. Tout d'abord, on sait que :

$$\mathbf{S}_{(2,13,5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2 & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{S}_{13} & \dots \\ \dots & \dots & \mathbf{S}_5 \end{bmatrix}$$

puis on *complète* :

$$\mathbf{S}_{(2,13,5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_{14} & \mathbf{S}_7 \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_6 \\ \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_5 \end{bmatrix}$$

Définition 2.3.15. — Considérons n alphabets (ou suite d'indéterminées) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de cardinal fini quelconque. Soit $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}^n$. La multi-fonction de Schur (appelée fonction de Schur si aucune ambiguïté n'est à craindre) est :

$$\mathbf{S}_J(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det((\mathbf{S}_{j_k+k-h}(\mathbf{x}_k))_{k,h=1\dots n})$$

Pour simplifier un peu l'écriture, introduisons la notation classique suivante :

Notation 2.3.16. — La notation $|\cdot|$ désignera le déterminant.

Exemple 2.3.17. — Le déterminant donnant ces multi-fonctions de Schur s'écrit aussi facilement qu'avec des fonctions de Schur *normales*, en sachant que sur chaque colonne on a le même alphabet. Par exemple,

$$\mathbf{S}_{(2,7,5)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{S}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{S}_8(\mathbf{y}) & \mathbf{S}_7(\mathbf{z}) \\ \mathbf{S}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{S}_7(\mathbf{y}) & \mathbf{S}_6(\mathbf{z}) \\ \mathbf{S}_0(\mathbf{x}) & \mathbf{S}_6(\mathbf{y}) & \mathbf{S}_5(\mathbf{z}) \end{vmatrix}$$

Les fonctions de Schur permettent d'avoir une nouvelle écriture des monômes a priori plus complexe, mais qui sera utile par la suite.

Proposition 2.3.18. — Soit $I = (i_1, \dots, i_n)$ une suite d'entiers positifs. Construisons les alphabets tronqués $\mathbf{a}_i$ comme suit : pour i appartenant à $\{1 \dots n\}$, on pose $\mathbf{a}_i = (a_1, \dots, a_i)$. On a alors :

$$\mathbf{S}_{(i_n, \dots, i_1)}(\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_1) = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}.$$

Démonstration. — Notons $\mathbf{a}' = (a_2, \dots, a_n) = \mathbf{a} \setminus \{a_1\}$, l'alphabet $\mathbf{a}$, auquel on a *enlevé* la première lettre. Soit j un entier, on a l'égalité suivante, qui sera prouvée ci-dessous :

$$\mathbf{S}_j(\mathbf{a}') = \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) - a_1 \mathbf{S}_{j-1}(\mathbf{a}).$$

Par définition même des multi-fonctions de Schur, on a :

$$\mathbf{S}_{(i_n, \dots, i_1)}(\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{S}_{i_n}(\mathbf{a}_n) & \mathbf{S}_{i_{n-1}+1}(\mathbf{a}_{n-1}) & \dots & \mathbf{S}_{i_1+(n-1)}(\mathbf{a}_1) \\ \mathbf{S}_{i_{n-1}}(\mathbf{a}_n) & \mathbf{S}_{i_{n-1}}(\mathbf{a}_{n-1}) & \dots & \mathbf{S}_{i_1+(n-2)}(\mathbf{a}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{i_{n-(n-1)}}(\mathbf{a}_n) & \mathbf{S}_{i_{n-1}-(n-2)}(\mathbf{a}_{n-1}) & \dots & \mathbf{S}_{i_1}(\mathbf{a}_1) \end{vmatrix}$$

Soustrayons à chaque ligne sauf la dernière, $a_1 \times$ la ligne suivante. On obtient donc :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{S}_{i_n}(\mathbf{a}_n) - a_1 \mathbf{S}_{i_{n-1}}(\mathbf{a}_n) & \dots & \mathbf{S}_{i_1+(n-1)}(\mathbf{a}_n) - a_1 \mathbf{S}_{i_1+(n-2)}(\mathbf{a}_n) \\ \mathbf{S}_{i_{n-1}}(\mathbf{a}_n) - a_1 \mathbf{S}_{i_{n-2}}(\mathbf{a}_n) & \dots & \mathbf{S}_{i_1+(n-2)}(\mathbf{a}_1) - a_1 \mathbf{S}_{i_1+(n-2)}(\mathbf{a}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}_{i_{n-(n-1)}}(\mathbf{a}_n) & \dots & \mathbf{S}_{i_1}(\mathbf{a}_1) \end{vmatrix}$$

Ceci se réécrit, d'après le résultat préliminaire :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{S}_{i_n}(\mathbf{a}_n \setminus \{a_1\}) & \mathbf{S}_{i_{n-1}+1}(\mathbf{a}_{n-1} \setminus \{a_1\}) & \dots & \mathbf{S}_{i_1+(n-1)}(\mathbf{a}_1 \setminus \{a_1\}) \\ \mathbf{S}_{i_{n-1}}(\mathbf{a}_n \setminus \{a_1\}) & \mathbf{S}_{i_{n-1}}(\mathbf{a}_{n-1} \setminus \{a_1\}) & \dots & \mathbf{S}_{i_1+(n-2)}(\mathbf{a}_1 \setminus \{a_1\}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{i_{n-(n-1)}}(\mathbf{a}_n) & \mathbf{S}_{i_{n-1}-(n-2)}(\mathbf{a}_{n-1}) & \dots & \mathbf{S}_{i_1}(\mathbf{a}_1) \end{vmatrix}$$

Ainsi, la dernière colonne ne contient que des 0 sauf sur la dernière ligne, où l'on trouve $\mathbf{S}_{i_1}(\mathbf{a}_1) = a_1^{i_1}$. Il suffit de réitérer le procédé pour conclure. $\square$

Lemme 2.3.19. — Avec les notations de la preuve ci-dessus, on a :

$$\mathbf{S}_j(\mathbf{a}') = \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) - a_1 \mathbf{S}_{j-1}(\mathbf{a}).$$

Démonstration. — Il suffit de considérer les fonctions génératrices dans l'anneau $A[[t]]$.

$$\prod_{i=2 \dots n} \frac{1}{1 - a_i t} = (1 - a_1 t) \prod_{i=1 \dots n} \frac{1}{1 - a_i t}.$$

Cela se réécrit :

$$\sum_j \mathbf{S}_j(\mathbf{a}') t^j = \sum_j \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) t^j - \sum_i a_1 \mathbf{S}_i(\mathbf{a}) t^{i+1}.$$

Ceci permet de conclure. $\square$

2.3.3. Fonctions de Schur et différences divisées

Les opérateurs ∂_i et π_i agissent de manière assez simple sur les fonctions de Schur.

Proposition 2.3.20. — Soit i un entier et notons $\mathbf{a}_i = (a_1, \dots, a_i)$ l'alphabet tronqué. Alors

$$\begin{aligned}\partial_i \mathbf{S}_j(\mathbf{a}_i) &= \mathbf{S}_{j-1}(\mathbf{a}_{i+1}) \\ \pi_i \mathbf{S}_j(\mathbf{a}_i) &= \mathbf{S}_j(\mathbf{a}_{i+1}).\end{aligned}$$

Si, de plus, on considère les fonctions de Schur sur un alphabet ne contenant ni a_i ni a_{i+1} , ou contenant a_i et a_{i+1} (i.e. : sur $\mathbf{a}_j$ pour $j < i$ ou $j > i$) alors, elles sont annulées par ∂_i et π_i .

Démonstration. — La seconde assertion de la proposition est évidente puisqu'alors les fonctions de Schur sont invariantes sous s_i . Pour la première partie, fixons un i et considérons la fonction génératrice $s(t) = \prod_{j=1 \dots i} \frac{1}{1 - a_j t}$.

$$\begin{aligned}\partial_i s(t) &= \frac{s_i s(t) - s(t)}{a_{i+1} - a_i} \\ &= \frac{(1 - a_i t) - (1 - a_{i+1} t)}{a_{i+1} - a_i} \prod_{j=1 \dots (i+1)} \frac{1}{1 - a_j t} \\ &= t \prod_{j=1 \dots (i+1)} \frac{1}{1 - a_j t}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\pi_i s(t) &= \frac{a_{i+1} s_i s(t) - a_i s(t)}{a_{i+1} - a_i} \\ &= \frac{a_{i+1}(1 - a_i t) - a_i(1 - a_{i+1} t)}{a_{i+1} - a_i} \prod_{j=1 \dots (i+1)} \frac{1}{1 - a_j t} \\ &= \prod_{j=1 \dots (i+1)} \frac{1}{1 - a_j t}.\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. $\square$

On peut calculer aisément les différences divisées d'un monôme quelconque. En effet si l'on considère le monôme $a^I = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$ pour des entiers $I = (i_1, \dots, i_n)$ donnés, on a, d'après la proposition 2.3.18, que

$a^I = \mathbf{S}_{i_n, \dots, i_1}(\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_1)$, où pour un i donné, $\mathbf{a}_i = (a_1, \dots, a_i)$ est l'alphabet tronqué. Mais alors pour un j donné, seule une colonne de la matrice donnant la fonction de Schur n'est pas invariante par s_j (la $(n+1-j)$ -ème), ainsi vu le résultat de la proposition précédente, on a :

$$\partial_j \mathbf{S}_{i_n, \dots, i_1}(\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_1) = \mathbf{S}_{i_n, \dots, i_{j-1}, \dots, i_1}(\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_1).$$

$n+1-j$

Les fonctions de Schur permettent d'avoir une base de A comme $A^{\mathfrak{S}_n}$ -module (voir [39, Section 2] et [19]) :

Théorème 2.3.21. — *Les monômes $a^I = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$ pour $0 \leq i_1 \leq n-1, 0 \leq i_2 \leq n-2, \dots, 0 \leq i_{n-1} \leq 1, i_n = 0$ forment une base de A en tant que $A^{\mathfrak{S}_n}$ -module.*

Lemme 2.3.22. — *Pour un monôme $a^I = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$, on a si $\rho = (n-1, \dots, 1, 0)$,*

$$\partial_{w_0} a^{I+\rho} = \mathbf{S}_{(i_n, \dots, i_1)}(a_1, \dots, a_n).$$

Démonstration. — Cf. [40, (7.3.1)] □

2.3.4. Symétriseurs maximaux - Produit scalaire

Pour $w_0 \in \mathfrak{S}_n$ de longueur maximale, on a les trois opérateurs de différences divisées de $A \rightarrow A$ $\partial_{w_0}, \pi_{w_0}, \psi_{w_0}$, correspondant à la permutation de longueur maximale w_0 .

Le théorème suivant (voir [37, Proposition 2.4.1]) donne une expression des symétriseurs maximaux.

Théorème 2.3.23. — *Soit $f \in A$. Posons $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$ et $a^\rho = a_1^{n-1} a_2^{n-2} \dots a_{n-1}^1 a_n^0$ et $a^{\tilde{\rho}} = a_1^0 a_2^1 \dots a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1} = w_0 \cdot a^\rho$. On a :*

$$\begin{aligned} \partial_{w_0} f &= \frac{\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\ell(w)} w \cdot f}{\Delta}, \\ \pi_{w_0} f &= \frac{\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\ell(w)} w \cdot (a^\rho f)}{\Delta}, \\ \psi_{w_0} f &= \frac{a^{\tilde{\rho}} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\ell(w)} w \cdot f}{\Delta}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit de restreindre les calculs à la base de A sur $A^{\mathfrak{S}_n}$ décrite plus haut. Voir [37, proposition 2.4.1] pour les détails. □

Définition 2.3.24. — On définit la fonction $p : A \rightarrow A^{\mathfrak{S}_n}$ par

$$f \mapsto \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\frac{f}{\prod_{i < j} \left(1 - \frac{a_j}{a_i} \right)} \right)$$

Il faut vérifier que l'image de f par p est bien symétrique. Ceci se voit aisément grâce à une nouvelle expression de la fonction p :

Proposition 2.3.25. — On a :

$$p = \pi_{w_0} = \partial_{w_0} a^\rho$$

où

$$a^\rho = a_1^{n-1} \dots a_{n-1}^1 a_n^0.$$

Démonstration. — C'est immédiat vu le théorème 2.3.23. $\square$

On définit alors un produit scalaire sur le $A^{\mathfrak{S}_n}$ -module A :

Notation 2.3.26. — Pour $f, g \in A$, on note $\langle f, g \rangle = p(fg) = \pi_{w_0}(fg)$.

Théorème 2.3.27. — Le produit scalaire p du $A^{\mathfrak{S}_n}$ -module libre A est non dégénéré.

Démonstration. — Ce sera le corollaire d'un résultat sur les bases duales, théorème 2.3.33. $\square$

Lemme 2.3.28. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Alors π_w et $\pi_{w^{-1}}$ sont adjoints relativement à p .

Démonstration. — On peut se ramener au cas où $\ell(w) = 1$. On a alors $w = s_i$ pour un $i = 1 \dots (n-1)$. Soient donc f, g deux éléments de A .

On a $\langle \pi_i f, g \rangle = \pi_{w_0}((\pi_i f)g)$. Or $\pi_i \pi_i(f) = \pi_i(f)$, et puisque les π_j vérifient les relations de Moore-Coxeter, alors $\pi_{w_0} \pi_i = \pi_{w_0}$. En effet par les relations de Moore-Coxeter, on a $\pi_{i+1} \pi_i = \pi_i \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1}$ et $\pi_{i-1} \pi_i = \pi_i \pi_{i-1} \pi_i \pi_{i-1}$, donc il existe un w tel que $\pi_{w_0} \pi_i = \pi_w \pi_{w_0}$. Or tout élément de l'image de π_{w_0} appartient en fait à $A^{\mathfrak{S}_n}$ d'après la proposition 2.3.25 puisque l'image de ∂_{w_0} est incluse dans $A^{\mathfrak{S}_n}$, finalement $\pi_{w_0} \pi_i = \pi_{w_0}$. Ainsi : $\pi_{w_0}((\pi_i f)g) = \pi_{w_0} \pi_i((\pi_i f)g)$. En outre, $\pi_i f$ est invariant par s_i , donc $\pi_{w_0} \pi_i((\pi_i f)g) = \pi_{w_0}((\pi_i f) \pi_i g)$. Ainsi $\langle \pi_i f, g \rangle = \pi_{w_0}((\pi_i f) \pi_i g)$. De même, on a : $\langle f, \pi_i g \rangle = \pi_{w_0}((\pi_i f) \pi_i g)$. Ceci permet de conclure. $\square$

2.3.5. Définitions des polynômes

Désormais, nous utiliserons un second alphabet $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Nous ferons l'extension des scalaires :

$$\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \left[b_1, \dots, b_n, \frac{1}{b_1}, \dots, \frac{1}{b_n} \right]$$

Pour A on prend un anneau plus grand, on se place donc dans l'anneau :

$$A = \mathbf{Z} \left[a_1, \dots, a_n, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}, b_1, \dots, b_n, \frac{1}{b_1}, \dots, \frac{1}{b_n} \right]$$

L'action du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{Z}[a_1, \dots, a_n, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}]$ par permutation des lettres $(a_i)_{i=1\dots n}$ se prolonge en une action sur le produit tensoriel A par $w \otimes \text{Id}$. Nous continuerons de noter par $A^{\mathfrak{S}_n}$ le sous-anneau de A constitué des éléments fixés par l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Nous allons construire trois séries de polynômes, chacune indexée sur $\mathfrak{S}_n$. Notons w_0 l'élément de longueur maximale (c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$) de $\mathfrak{S}_n$. La définition de chacune de ces séries se fait par récurrence. Définissons le premier élément de chaque famille :

Notation 2.3.29. — On pose :

$$\mathbf{X}_{w_0}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{i,j, i+j \leq n} (a_i - b_j),$$

$$\mathbf{G}_{w_0}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{i,j, i+j \leq n} \left(1 - \frac{b_j}{a_i} \right),$$

et

$$\mathbf{H}_{w_0}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{a_j}{b_i} \right).$$

Remarque 2.3.30. — On a une seconde expression pour le dernier polynôme :

$$\mathbf{H}_{w_0}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{i,j, i+j \leq n} \left(1 - \frac{a_{n+1-i}}{b_j} \right).$$

Définissons les polynômes de Schubert qui sont une généralisation des fonctions de Schur, puis les polynômes de Grothendieck et enfin les polynômes adjoints (voir [39, Section 2]) :

Définition 2.3.31. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Le polynôme (double) de Schubert associé à la permutation w est :

$$\mathbf{X}_w(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \partial_{w_0 w} \mathbf{X}_{w_0}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Le polynôme (double) de Grothendieck associé à la permutation w est :

$$\mathbf{G}_w(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \pi_{w_0 w} \mathbf{G}_{w_0}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Le polynôme (double) adjoint associé à la permutation w est :

$$\mathbf{H}_w(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \psi_{w_0 w} \mathbf{H}_{w_0}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Remarque 2.3.32. — Le terme *adjoint* pour désigner les polynômes $\mathbf{H}$ sera explicité plus bas, ils formeront une base, adjointe de celle formée par les polynômes de Grothendieck, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini en 2.3.26.

Nous donnerons dans le dernier paragraphe quelques exemples.

2.3.6. Bases duales

Nous avons déjà défini un produit scalaire sur la $A^{\mathfrak{S}_n}$ -algèbre A . Le théorème suivant justifie d'une part l'introduction des polynômes $\mathbf{H}$ et d'autre part leur appellation. C'est un résultat de Lascoux [39, théorème 2.8], dans la preuve duquel les fonctions de Schur jouent un rôle crucial.

Théorème 2.3.33. — Soient w_1, w_2 deux éléments de $\mathfrak{S}_n$, w_0 l'élément de longueur maximale de $\mathfrak{S}_n$ et δ le symbole de Kronecker. On a :

$$\langle \mathbf{H}_{w_0 w_1}, \mathbf{G}_{w_2} \rangle = \delta_{w_1, w_2}.$$

Corollaire 2.3.34. — Le $A^{\mathfrak{S}_n}$ -module A admet deux bases $(\mathbf{G}_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$ et $(\mathbf{H}_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$ adjointes par le produit scalaire p qui est non dégénéré.

Démonstration. — Les deux familles de polynômes sont de cardinal $n!$, et vu le résultat du théorème les familles sont libres. Or au vu du théorème 2.3.21, le $A^{\mathfrak{S}_n}$ -module A est libre de rang $n!$. Par suite, $\bigoplus_w (A^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{G}_w)$ est un sous-groupe d'indice fini. Donc, un élément orthogonal à tous les $\mathbf{H}_w$ est nul. Si $f \in A$, alors $f - \sum_w \langle f, \mathbf{H}_{w_0 w} \rangle \mathbf{G}_w$ est orthogonal à tous les $\mathbf{H}_w$, donc il est nul. Ainsi les deux familles $(\mathbf{G}_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$ et $(\mathbf{H}_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$ de cardinal $n!$ sont des bases. D'autre part, on en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénéré. $\square$

2.4. Géométrie des variétés de drapeaux

Le but de la présente section est de donner un sens géométrique aux objets combinatoires décrits ci-dessus.

2.4.1. Fibrés tautologiques

Le but de cette sous-section est d'introduire des notations utiles pour la suite.

Soient X une k -variété lisse, n un entier, et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur X . Nous poserons $Y = \text{Drap}_{1,\dots,n}(\mathcal{E})$ la k -variété des drapeaux complets de $\mathcal{E}$ (voir 1.6.6 pour la définition) et π la projection canonique $Y \rightarrow X$.

La variété Y est munie d'un fibré tautologique $\pi^*\mathcal{E}$, et d'un drapeau tautologique $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ de $\pi^*\mathcal{E}$. Plus précisément, si $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ avec $V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathcal{E}_x$ est un point de Y au-dessus de $x \in X$, alors pour tout $i = 1 \dots (n-1)$, $\mathcal{U}_i \mathbf{V} = V_i$.

La variété Y est aussi munie d'une autre série de fibrés tautologiques. Pour $i = 1 \dots (n-1)$, on pose $\mathcal{Q}_i = \pi^*\mathcal{E}/\mathcal{U}_{n-i}$. C'est un fibré vectoriel de rang i . Si $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ avec $V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathcal{E}_x$ est un point de Y au-dessus de $x \in X$, alors pour tout $i = 1 \dots (n-1)$, $\mathcal{Q}_i \mathbf{V} = \mathcal{E}_x/V_{n-i}$. Nous parlerons de fibrés quotients tautologiques.

La variété Y des drapeaux complets de $\mathcal{E}$ peut être construite de proche en proche à l'aide de fibrés projectifs. Plus précisément, on peut *décomposer* la projection $Y \rightarrow X$ en projections π_i comme suit :

$$\begin{array}{c}
 Y = \text{Drap}_{1,\dots,n-1}(\mathcal{E}) \\
 \downarrow \pi_{n-1} \\
 \text{Drap}_{1,\dots,n-2}(\mathcal{E}) \\
 \downarrow \pi_{n-2} \\
 \vdots \\
 \downarrow \pi_3 \\
 \text{Drap}_{1,2}(\mathcal{E}) \\
 \downarrow \pi_2 \\
 \text{Drap}_1(\mathcal{E}) \\
 \downarrow \pi_1 \\
 X
 \end{array}$$

Et pour un $i = 1 \dots (n-2)$ donné, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Drap}_{1,\dots,i+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Drap}_1(\pi_i^* \dots \pi_1^* \mathcal{E} / \mathcal{U}_i) \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 \text{Drap}_{1,\dots,i}(\mathcal{E}) & &
 \end{array}$$

où $\pi_i^* \dots \pi_1^* \mathcal{E} / \mathcal{U}_i$ est un fibré vectoriel de rang $n - i$.

Ainsi, $Y \rightarrow X$ se réécrit comme une succession de fibrations en espaces projectifs de dimension $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$, et par suite Y est une k -variété lisse de dimension relative $\frac{n(n-1)}{2}$ sur X .

2.4.2. Fibré projectif

Soient X une k -variété et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur X . Notons π le morphisme canonique $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$, où $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ désigne la k -variété des droites de $\mathcal{E}$. On a le résultat classique suivant [15, Théorème 3.3 et Remarque 3.2.4] :

Proposition 2.4.1. — *Conservons les notations précédentes. L'application :*

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^*(X)[t] &\rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbf{P}(\mathcal{E})) \\ \sum_i a_i t^i &\mapsto \sum_i \pi^*(a_i) c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})})^i \end{aligned}$$

est surjective et conduit à une bijection

$$\mathrm{CH}^*(X)[t]/(P(t)) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$$

où $P(t) = \sum_{i=0 \dots n} c_i(\mathcal{E}) t^{n+1-i}$.

L'anneau de K -théorie de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ se calcule aussi aisément :

Proposition 2.4.2. — *Conservons les notations précédentes. L'application :*

$$\begin{aligned} K_0(X)[t] &\rightarrow K_0(\mathbf{P}(\mathcal{E})) \\ \sum_i a_i t^i &\mapsto \sum_i \pi^*(a_i) [\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)]^i \end{aligned}$$

est surjective et conduit à une bijection

$$K_0(X)[t]/(P(t)) \rightarrow K_0(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$$

où $P(t) = \sum_{i=0 \dots n} (-1)^i [\Lambda^i \mathcal{E}] t^{n+1-i}$.

Démonstration. — [17, Chapitre V, Théorème 2.3]. □

2.4.3. Fibrés en drapeaux - Lieu de dégénérescence

Conservons les notations précédentes. On dispose d'une k -variété X et d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X de rang n . On suppose de plus que l'on dispose d'un drapeau complet dans $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_{n-1} \subset \mathcal{E}$. Pour tout i , $\mathcal{E}_i$ est un fibré vectoriel de rang i sur X .

Notons par $\mathcal{Q}_i$ les fibrés quotients tautologiques et par $\mathcal{U}_i$ les sous-fibrés tautologiques sur $\mathrm{Drap}_{1, \dots, n}(\mathcal{E})$.

En appliquant successivement la proposition 2.4.1, nous pouvons calculer aisément les groupes de Chow de Y en fonction de ceux de X ([14, équation 5.2]) :

Proposition 2.4.3. — *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^*(X)[x_1, \dots, x_n]/I &\rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathrm{Drap}_{1, \dots, n}(\mathcal{E})) \\ x_i &\mapsto c_1(\ker(\mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{Q}_{i-1})) = c_1(\mathcal{U}_{n+1-i}/\mathcal{U}_{n-i}) \end{aligned}$$

où I est l'idéal engendré par les $\sigma_i(x_1, \dots, x_n) - c_i(\mathcal{E})$, $i = 1, \dots, n$ avec σ_i la i -ème fonction symétrique.

Remarque 2.4.4. — Les opérateurs ∂_i agissant sur l’alphabet $(x_1, \dots, x_n)$ deviennent des opérateurs sur $\mathrm{CH}^*(X)[x_1, \dots, x_n]$. De plus, ils passent au quotient et nous noterons encore ∂_i les opérateurs de $\mathrm{CH}^*(\mathrm{Drap}_{1,\dots,n}(\mathcal{E}))$ déduits des ∂_i .

De même, en utilisant la proposition 2.4.2 en récurrence, on a une expression simple de l’anneau de K -théorie de Y en fonction de celui de X ([18, Introduction v]) :

Proposition 2.4.5. — *Gardons les mêmes notations. On a un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} K_0(X)[x_1, \dots, x_n]/J &\rightarrow K_0(Y) \\ x_i &\mapsto [\mathcal{U}_{n+1-i}/\mathcal{U}_{n-i}] \end{aligned}$$

où l’idéal J est engendré par les $\sigma_i(x_1, \dots, x_n) - \sigma_i([\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n-1}], \dots, [\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0])$ pour $i = 1 \dots n$, et σ_i désigne la i -ème fonction symétrique avec la convention $\mathcal{E}_0 = 0$.

Remarque 2.4.6. — Les opérateurs π_i agissant sur l’alphabet $(x_1, \dots, x_n)$ deviennent des opérateurs sur $K_0(X)[x_1, \dots, x_n]$. De plus, ils passent au quotient et nous noterons encore π_i les opérateurs de $K_0(Y)$ ainsi déduits. Et, l’opérateur π_{w_0} est une application $K_0(Y) \rightarrow K_0(X)$ qui correspond à l’image directe ([39, p.19]). Si $X = \mathrm{Spec}(k)$, il s’agit simplement de la caractéristique d’Euler-Poincaré.

Suivant [14, Section 4], on pose la définition :

Définition 2.4.7. — On définit pour chaque permutation $w \in \mathfrak{S}_w$, le lieu de dégénérescence comme suit :

$$\Omega_w = \{x \in X, \forall p, q \in \{1, \dots, n\}, \mathrm{Rg}(\mathcal{E}_p(x) \rightarrow \mathcal{Q}_q(x)) \leq r_w(q, p)\}.$$

Remarque 2.4.8. — Notons que Ω_w a une structure naturelle de k -sous-schéma fermé de X . En effet, c’est simplement le lieu d’annulation pour tout p, q des applications $\Lambda^{r_w(q,p)+1} \mathcal{E}_p \rightarrow \Lambda^{r_w(q,p)+1} \mathcal{Q}_p$.

Remarque 2.4.9. — On peut généraliser la définition précédente, dans le cas où les $\mathcal{Q}_q$ ne sont plus les fibrés quotients tautologiques. On obtient alors des variétés de carquois.

2.4.4. Variétés de Schubert

Le but de cette sous-section est de voir ce qui se passe lorsque X est réduite à un point, i.e. : $X = \text{Spec}(k)$. Notre drapeau de fibrés sur X $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ deviendra un drapeau de k -espaces vectoriels $(E_1, \dots, E_n = E)$.

Fixons un k -espace vectoriel E de dimension n . Fixons un drapeau $\{E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{n-1} \subset E\}$ dans E . Notons Y la k -variété des drapeaux complets de E , $\text{Drap}_{1, \dots, n}(E)$.

Il y a un lien entre les variétés de Schubert X_w et les lieux de dégénérescence Ω_w .

Proposition 2.4.10. — Pour tout $w \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\Omega_w = X_{ww_0}.$$

Démonstration. — La sous-variété Ω_w est définie par le fait que le rang de $E_p \rightarrow Q_q$ est au plus $r_w(q, p)$. Ceci est équivalent à dire que le noyau $E_p \cap V_{n-q}$ est au moins de dimension $p - r_w(q, p)$. Donc :

$$\begin{aligned} \dim(E_p \cap V_q) &\geq p - r_w(n - q, p) \\ &= |\{i \leq p, w^{-1}(i) > n - q\}| \\ &= |\{i \leq p, w_0 w^{-1}(i) \leq q\}| \\ &= r_{ww_0}(q, p). \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. □

Notation 2.4.11. — Soit m un entier compris entre 1 et $(n-1)$. notons $Z(m)$ la sous-variété fermée de $Y \times_k Y$ suivante :

$$Z(m) = \{((V_1, \dots, V_{n-1}), (W_1, \dots, W_{n-1})), i \neq m \Rightarrow V_i = W_i\}$$

et notons p_1 et p_2 les deux projections évidentes $Z(m) \rightarrow Y$.

$$\begin{array}{ccc} & Z(m) & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ Y & & Y \end{array}$$

Remarque 2.4.12. — Les morphismes p_1 et p_2 permettent d'identifier $Z(m)$ à un fibré projectif au-dessus de $Y = \text{Drap}_{1,\dots,n}(E)$:

$$\begin{array}{ccc} Z(m) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{P}(\mathcal{U}_{m+1}/\mathcal{U}_{m-1}) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

avec $\varphi : (V_1 \subset \dots, V_{n-1}, W_1 \subset \dots, W_{n-1}) \mapsto W_m/V_{m-1}$. Pour p_2 , on a la même chose.

La proposition suivante [14, Lemme 6.3] est fondamentale pour la suite :

Proposition 2.4.13. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$.

(i) Si $w(m) < w(m+1)$, alors p_1 envoie de manière birationnelle $p_2^{-1}(X_w)$ sur X_{ws_m} .

(ii) Si $w(m) > w(m+1)$, alors p_1 envoie $p_2^{-1}(X_w)$ dans X_w .

Remarque 2.4.14. — La dichotomie entre le cas (i) et (ii) peut aussi se faire selon le critère suivant

$$\begin{cases} (i) & \ell(ws_m) = \ell(w) + 1, \\ (ii) & \ell(ws_m) = \ell(w) - 1. \end{cases}$$

Nous reprenons ici la démonstration de Fulton [14, Lemme 6.3] en la détaillant.

Démonstration. — Rappelons que pour chaque v de $\mathfrak{S}_n$, C_v désigne la cellule de Schubert associé à v ; c'est un ouvert de X_v .

(i) Supposons $w(m) < w(m+1)$. Notons Δ la diagonale de $Y \times Y$. Montrons que p_1 réalise une bijection $p_2^{-1}(C_w) \setminus \Delta \rightarrow C_{ws_m}$. Soit $(W_1, \dots, W_n)$ un point de C_w . Se donner un point $((V_1, \dots, V_n), (W_1, \dots, W_n))$ au-dessus de $(W_1, \dots, W_n)$ n'appartenant pas à Δ est équivalent à se donner un V_m de dimension m tel que $V_m \neq W_m$ et $W_{m-1} \subset V_m \subset W_{m+1}$. Soit donc $((V_1, \dots, V_n), (W_1, \dots, W_n))$ un point de $Z(m)$ tel que $(W_1, \dots, W_n)$ appartienne à C_w . Vérifions tout d'abord que $(V_1, \dots, V_n) \in C_{ws_m}$. Il est clair que pour $q \neq m$, et pour tout p , on a : $r_{ws_m}(q, p) = r_w(q, p)$. Puisque pour tout $q \neq m$, $V_q = W_q$, il suffit de voir que l'on a pour tout p :

$$\dim(V_m \cap E_p) = r_{ws_m}(m, p).$$

(a) Supposons $p < w(m) < w(m+1)$. Alors si on pose

$$\kappa_p = r_w(m-1, p) = r_{ws_m}(m-1, p),$$

on a :

$$\begin{aligned}\dim(W_{m-1} \cap E_p) &= \kappa_p, \\ \dim(W_m \cap E_p) &= \kappa_p, \\ \dim(W_{m+1} \cap E_p) &= \kappa_p.\end{aligned}$$

Puisque $W_{m-1} \subset V_m \subset W_{m+1}$, on a $\dim(V_m \cap E_p) = r_{ws_m}(m, p)$.

(b) Supposons $w(m) \leq p < w(m+1)$, et posons

$$\kappa_p = r_w(m-1, p).$$

On a :

$$\begin{aligned}\dim(W_{m-1} \cap E_p) &= \kappa_p, \\ \dim(W_m \cap E_p) &= \kappa_p + 1, \\ \dim(W_{m+1} \cap E_p) &= \kappa_p + 1.\end{aligned}$$

Si $\dim(V_m \cap E_p) = \kappa + 1$, alors il existe $u \in W_{m+1} \cap E_p$ tel que $V_m \cap E_p = ku \oplus W_{m-1} \cap E_p = W_m \cap E_p = W_{m+1} \cap E_p$. Ainsi, $V_m = W_{m-1} \oplus ku$. Mais pour le même u , $W_m = W_{m-1} \oplus ku$. Bref $V_m = W_m$, ceci est absurde. Donc $\dim(V_m \cap E_p) = \kappa = r_{ws_m}(m, p)$.

(c) Supposons $w(m) < w(m+1) \leq p$. Posons $\kappa_p = r_w(m-1, p)$. On a :

$$\begin{aligned}\dim(W_{m-1} \cap E_p) &= \kappa_p, \\ \dim(W_m \cap E_p) &= \kappa_p + 1, \\ \dim(W_{m+1} \cap E_p) &= \kappa_p + 2.\end{aligned}$$

Et l'on veut : $\dim(V_m \cap E_p) = \kappa_p + 1$. Puisque $W_{m-1} \subset V_m \subset W_{m+1}$ est une chaîne de sous-espaces vectoriels stricte dont chacun est de dimension 1 de plus que le précédent, on a nécessairement :

$$\dim(V_m \cap E_p) \in \{\dim(W_{m-1} \cap E_p), \dim(W_{m-1} \cap E_p) + 1\},$$

et

$$\dim(W_{m+1} \cap E_p) \in \{\dim(V_m \cap E_p), \dim(V_m \cap E_p) + 1\}.$$

Donc : $\dim(V_m \cap E_p) = \kappa_p + 1 = r_{ws_m}(m, p)$.

Ainsi l'application $p_1 : p_2^{-1}(C_w) \setminus \Delta \rightarrow C_{ws_m}$ est bien définie. Il reste à voir qu'il s'agit d'un isomorphisme. Soit $(V_1 \subset \dots \subset V_n)$ un point de C_{ws_m} . La préimage de ce point est constituée des $((V_1 \subset \dots \subset V_n), (W_1 \subset W_n))$ avec $W_i = V_i$ pour tout $i \neq m$ et $W_m \neq V_m$, $V_{m-1} \subset W_m \subset V_{m+1}$, et

$$\dim(V_q \cap E_p) = r_{ws_m}(q, p).$$

D'après la première partie, on a, nécessairement pour tout $q \neq m$, $\dim(W_q \cap E_p) = r_{ws_m}(q, p)$.

De plus, si on pose $p = w(m) < w(m+1)$, on a toujours d'après la première partie, avec $\kappa = r_w(m-1, p) = r_{ws_m}(m-1, p)$:

$$\begin{aligned} \dim(V_{m-1} \cap E_p) &= \kappa, \\ \dim(V_m \cap E_p) &= \kappa, \\ \dim(W_m \cap E_p) &= \kappa + 1, \\ \dim(V_{m+1} \cap E_p) &= \kappa + 1. \end{aligned}$$

Donc, $V_{m+1} \cap E_p = W_m \cap E_p$ et par suite pour des raisons de dimensions, on a nécessairement

$$W_m = V_{m-1} + (V_{m+1} \cap E_{w(m)}).$$

Finalement, la préimage de $(V_1, \dots, V_n)$ ne contient qu'un point, et la fonction réciproque est donnée par :

$$(V_1, \dots, V_n) \mapsto ((V_1, \dots, V_n), (V_1, \dots, V_{m-1}, V_{m-1} + (V_{m+1} \cap E_{w(m)}), V_{m+1}, \dots, V_n))$$

On vérifie que ce point est bien dans $p_2^{-1}(X_w)$.

(ii) Supposons que $w(m) > w(m+1)$.

Soit $((V_1, \dots, V_n), (W_1, \dots, W_n)) \in p_2^{-1}(X_w)$. Il suffit de voir que l'on a :

$$\dim(V_m \cap E_p) = r_w(m, p)$$

Ce sont les mêmes raisonnements que plus haut.

□

2.4.5. Cycles de Schubert

Le but de cette section est de montrer que les polynômes de Schubert ou les polynômes doubles de Schubert après spécialisation, représentent bien les classes des variétés de Schubert dans l'anneau de Chow de la variété de drapeaux, bref de montrer le théorème suivant ([14, proposition 7.5]) :

Théorème 2.4.15. — Soient X une k -variété lisse, $n \geq 1$ un entier, $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X de rang n , $\mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_{n-1}$ un drapeau complet de sous-fibrés de $\mathcal{E}$. On a :

$$[\Omega_w] = \mathbf{X}_w(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

où $x_i = c_1(\text{Ker}(\mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{Q}_{i-1}))$ et $y_i = c_1(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$.

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes (comme la définition des dits polynômes). Tout d'abord, on calcule *à la main* $[X_{w_0}]$ où w_0 est la permutation de longueur maximale, puis on analyse le comportement de ∂_i sur les classes de Schubert. On peut déjà en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.16. — *Notons par X_w la variété de Schubert de SL_n/B associé à la permutation $w \in \mathfrak{S}_n$, on a :*

$$[X_w] = \mathbf{X}_{w_0 w}(x_1, \dots, x_n, 1, \dots, 1).$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 2.4.10 au théorème précédent en sachant qu'ici $y_i = 1$. $\square$

2.4.5.1. Calcul de $[X_{w_0}]$. — La permutation w_0 est l'élément de $\mathfrak{S}_n$ qui envoie i sur $n+1-i$. Ainsi, Ω_{w_0} est exactement donné par l'annulation des applications $\pi^* \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{Q}_{n-p}$. C'est l'image de la section de $X \rightarrow Y$ donnée par le drapeau $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$. C'est aussi le lieu des zéros d'une section du fibré vectoriel suivant :

$$\mathcal{K} = \ker \left(g : \bigoplus_{p=1}^{n-1} \mathrm{Hom}(\pi^* \mathcal{E}_p, \mathcal{Q}_{n-p}) \rightarrow \bigoplus_{p=1}^{n-2} \mathrm{Hom}(\pi^* \mathcal{E}_p, \mathcal{Q}_{n-p-1}) \right)$$

où la flèche g surjective est définie comme suit : Si $\alpha_p : \pi^* \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{Q}_{n-p}$, alors $g(\sum_p \alpha_p) = \sum_p \beta_p$ où $\beta_p : \pi^* \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{Q}_{n-p-1}$ est donnée par

$$\beta_p = \alpha_{p+1} \circ i - \mathrm{pr} \circ \alpha_p$$

avec i et pr les injections entre les $\mathcal{E}_i$ et projections entre les $\mathcal{Q}_j$. Les projections naturelles $\pi^* : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{Q}_{n-p}$ fournissent alors une section canonique de $\mathcal{K}$ dont Ω_{w_0} est le lieu des zéros. Le fibré $\mathcal{K}$ est de rang $N = \frac{n(n-1)}{2}$, la codimension de Ω_{w_0} , donc :

Lemme 2.4.17. — *Avec les mêmes notations, si Z désigne le lieu des zéros d'une section sur $\mathcal{K}$, alors la classe de Z dans l'anneau de Chow de X est : $[Z] = c_N(\mathcal{K})$.*

Démonstration. — C'est un résultat classique (cf. [15, Section 14.1]). $\square$

Ainsi on est en mesure de donner une expression pour $[\Omega_{w_0}]$:

Proposition 2.4.18. — *Avec les notations du théorème 2.4.15, on a la relation suivante :*

$$[\Omega_{w_0}] = c_N(\mathcal{K}) = \prod_{i+j \leq n} (x_i - y_i) = \mathbf{X}_{w_0}(x, y).$$

Démonstration. — La première égalité est exactement le lemme précédent en sachant que Ω_{w_0} est le lieu des zéros d'une section de $\mathcal{K}$. La seconde égalité résulte du calcul de la n -ème classe de Chern de $\mathcal{K}$. La troisième égalité est la définition même $\mathbf{X}_{w_0}(x, y)$. $\square$

2.4.5.2. Les opérateurs ∂_i . — Pour un k compris entre 1 et $n - 1$, définissons la sous-variété fermée Z_k de $Y \times_X Y$ comme suit (généralisation de la notation Z_m introduite en 2.4.11) :

Notation 2.4.19. — On considère la sous-variété fermée Z_{n-k} de $Y \times_X Y$ dont la fibre au-dessus d'un point $x \in X$ est donnée par

$$Z_{n-k}x = \{((V_1, \dots, V_{n-1}), (W_1, \dots, W_{n-1})) \in Y_x \times_{\kappa(x)} Y_x, i \neq n-k \Rightarrow V_i = W_i\}$$

où $\kappa(x)$ désigne le corps résiduel du point $x \in X$.

Remarque 2.4.20. — Fixons un k . Comme dans le cas de 2.4.12, si p_1 et p_2 sont les deux projections $Z_{n-k} \rightarrow Y$, alors les morphismes p_1 et p_2 identifient Z_{n-k} à $\mathbf{P}(\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k-1})$.

La proposition suivante est une formule de Giambelli pour les fibrés en drapeaux ([14, lemme 7.2]).

Proposition 2.4.21. — *Conservons les mêmes notations. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^*(\mathrm{Drap}_{1,\dots,n-1}(\mathcal{E})) & \xrightarrow{p_1 \circ p_2^*} & \mathrm{CH}^*(\mathrm{Drap}_{1,\dots,n-1}(\mathcal{E})) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{CH}^*(X)[x_1, \dots, x_n]/I & \xrightarrow{\partial_k} & \mathrm{CH}^*(X)[x_1, \dots, x_n]/I \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont donnés par la proposition 2.4.3.

Remarque 2.4.22. — Notons tout d'abord que p_2 est plat donc on peut considérer l'image inverse par p_2 et p_1 est propre, donc p_{1*} a un sens.

Démonstration. — Commençons par le cas particulier $n = 2$ et $k = 1$. Alors $Y = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ et $Z_1 = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X \mathbf{P}(\mathcal{E})$. L'anneau de Chow de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ est engendré par $x_1 = c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)) = c_1(\mathcal{Q}_1)$. Remarquons que l'on a : $\partial_1 1 = 0$ et $\partial_1 x_1 = 1$. Pour des raisons de dimensions, on a $p_{1*} \circ p_2^*(1) = 0$ et $p_{1*} \circ p_2^*(x_1) \in \mathrm{CH}^0(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$, donc il existe un entier d tel que $p_{1*} \circ p_2^*(x_1) = d$. Il reste donc à voir que $d = 1$. Pour ce faire, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(k)$. Alors $c_1(\mathcal{Q}_1)$ est la classe d'un point Q de $\mathbf{P}^1$, et p_1 induit un isomorphisme de $p_2^{-1}(P)$ sur $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, donc $d = 1$.

Le cas général se déduit de ce cas particulier. Notons

$$\tilde{X} = \text{Drap}_{1, \dots, n-k-1, n-k+1, \dots, n-1}(\mathcal{E})$$

et $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$ la projection canonique. Nous noterons par $\mathcal{P}$ le fibré vectoriel sur $\tilde{X}$:

$$\mathcal{P}_{(V_1 \subset \dots \subset V_{n-k-1} \subset V_{n-k+1} \subset \dots \subset V_{n-1})} = V_{n-k+1}/V_{n-k-1}.$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{P}(\mathcal{P}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \tilde{X} & \end{array}$$

Ceci identifie Y à un fibré en droites projectives au-dessus de $\tilde{X}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{p_1} & Z_{n-k} & \xrightarrow{p_2} & Y \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbf{P}(\mathcal{P}) & \xleftarrow{p_1} & \mathbf{P}(\mathcal{P}) \times_{\tilde{X}} \mathbf{P}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{P}(\mathcal{P}) \end{array}$$

L'anneau de Chow de $\mathbf{P}(\mathcal{P})$ est engendré sur $\text{CH}^*(\tilde{X})$ par 1 et par

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(1)) = c_1(\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k}) = c_1(\text{Ker}(\mathcal{Q}_k \rightarrow \mathcal{Q}_{k-1})) = x_k.$$

D'après ce que l'on vient de voir $p_{1*} \circ p_2^*(\alpha) = 0$ et $p_{1*} \circ p_2^*(\alpha x_k) = \alpha$ pour $\alpha \in \text{CH}^* \tilde{X}$. Ceci permet alors de conclure. $\square$

Le sous-schéma Ω_w est de codimension $\ell(w)$ dans $Y = \text{Drap}_{1, \dots, n}(\mathcal{E})$. C'est une sous-variété irréductible, elle détermine donc un élément $[\Omega_w] \in \text{CH}^{\ell(w)}(Y)$.

Lemme 2.4.23. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Soit k un entier. Si $w(k) > w(k+1)$, alors $p_{1*} \circ p_2^*[\Omega_w] = [\Omega_{ws_m}]$. Si $w(k) < w(k+1)$, alors $p_{1*} \circ p_2^*[\Omega_w] = 0$.

Démonstration. — C'est la proposition 2.4.13 en famille. En effet, si on reprend les notations de cette proposition, il suffit de poser $k = w_0 m$ où w_0 est la permutation de longueur maximale. Ainsi $w(k) > w(k+1)$ est équivalent à $w(m) < w(m+1)$ et pareillement pour l'autre condition. $\square$

On en déduit donc :

Corollaire 2.4.24. — Soit $w \in \mathfrak{S}_n$ Soit $k < n$ un entier. Si $w(k) > w(k+1)$, on a :

$$\partial_k[\Omega_w] = [\Omega_{ws_m}]$$

Si non :

$$\partial_k[\Omega_w] = 0.$$

2.4.5.3. Conclusion. — Puisque $[\Omega_{w_0}]$ est égale à $\mathbf{X}_{w_0}(x, y)$ et que les $\mathbf{X}_w$ et les $[\Omega_w]$ se déduisent les uns des autres par les mêmes opérations (les ∂_k) on a bien que pour tout $w \in \mathfrak{S}_n$, $[\Omega_w] = \mathbf{X}_w(x, y)$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ avec $x_i = c_1(\text{Ker}(\mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{Q}_{i-1}))$ et $y_i = c_1(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$.

2.4.6. Faisceaux structuraux des variétés de Schubert

Dans cette section, nous allons montrer que les classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert sont égales aux polynômes de Grothendieck. Il s'agit d'un résultat de Fulton et Lascoux [18, théorème 3]. La preuve est assez analogue à celle montrant la correspondance entre les polynômes de Schubert d'une part et les cycles de Schubert d'autre part. On conserve les mêmes notations que dans la section précédente.

Théorème 2.4.25. — Si x_i désigne la classe du fibré $\mathcal{U}_{n+1-i}/\mathcal{U}_{n-i}$ et y_i la classe de $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ dans $K_0(X)$, alors pour tout $w \in \mathfrak{S}_n$:

$$[\mathcal{O}_{\Omega_w}] = \mathbf{G}_w(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Nous pouvons aussi en tirer le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.26. — Notons X_w la variété de Schubert de SL_n/B associée à la permutation $w \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$[\mathcal{O}_{X_w}] = \mathbf{G}_{w_0 w}(x_1, \dots, x_n, 1, \dots, 1).$$

2.4.6.1. Calcul de $[\mathcal{O}_{\Omega_{w_0}}]$. — Dans la sous-section sur le calcul de $[\Omega_{w_0}]$, on a vu que Ω_{w_0} est le lieu des zéros d'une section régulière du fibré $\mathcal{K}$. Or, $[\mathcal{K}] = \sum_{i+j \leq n} \frac{x_i}{y_j}$ où x_i est la classe de $\mathcal{U}_{n+1-i}/\mathcal{U}_{n-i}$ et y_j celle de $\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1}$. Ainsi, puisque le complexe de Koszul fournit une résolution du faisceau structural, on obtient :

$$[\mathcal{O}_{\Omega_{w_0}}] = \sum_k (-1)^k [\Lambda^k \mathcal{K}] = \prod_{i+j \leq n} \left(1 - \frac{b_j}{a_i}\right).$$

2.4.6.2. *Opérateurs π_k .* — Tout d'abord, on a besoin de deux résultats techniques. Le théorème suivant dû à Ramanathan [52] est crucial :

Théorème 2.4.27. — *Les variétés de Schubert ont des singularités rationnelles.*

Le lemme suivant classique (voir [12]) est aussi utile :

Théorème 2.4.28. — *Si $f : X \rightarrow Y$ est une application propre birationnelle entre k -variétés avec des singularités rationnelles, alors $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ et $R^i f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$.*

En conservant les notations introduites dans la preuve de la formule de Giambelli pour les classes de Schubert, il est suffisant de montrer les deux propositions suivantes :

Proposition 2.4.29. — *L'endomorphisme $p_{1*} \circ p_2^*$ de $K_0(Y)$ coïncide avec l'opérateur π_k via l'identification de $K_0(Y)$ avec $K_0(X)[x_1, \dots, x_n]/J$ de la proposition 2.4.5.*

Démonstration. — La preuve de ce résultat peut être mise en parallèle avec la preuve de la proposition 2.4.21.

Posons

$$\tilde{X} = \text{Drap}_{1, \dots, \widehat{n-k}, \dots, n}(\mathcal{E}).$$

On dispose d'un fibré de rang 2 sur $\tilde{X}$

$$\mathcal{P} = \mathcal{U}_{n+1-k}/\mathcal{U}_{n-1-k}$$

tel que le diagramme en cube suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbf{P}(\mathcal{P}) \times_{\tilde{X}} \mathbf{P}(\mathcal{P}) \\
 & & & \nearrow \cong & \searrow \\
 & Z_{n-k} & & \mathbf{P}(\mathcal{P}) & \searrow \\
 \nearrow p_1 & & \nearrow p_2 & & \nearrow \cong \\
 Y & & Y & & \mathbf{P}(\mathcal{P}) \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & \tilde{X} & & \tilde{X} & \\
 & \nearrow \cong & & \nearrow & \\
 & & \tilde{X} & &
 \end{array}$$

On est donc ramené au cas où $n = 2$ et $k = 1$. On a donc : $Y = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ et $Z_1 = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X \mathbf{P}(\mathcal{E})$. L'anneau de Grothendieck de Y est engendré par 1 et x_1 . On calcule alors leurs images et on obtient le résultat. $\square$

Proposition 2.4.30. — *Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Si $w(k) > w(k+1)$, alors $p_{1*} \circ p_2^*([\mathcal{O}_{\Omega_w}]) = [\mathcal{O}_{\Omega_{ws_k}}]$. Et si $w(k) < w(k+1)$, alors $p_{1*} \circ p_2^*([\mathcal{O}_{\Omega_w}]) = [\mathcal{O}_{\Omega_w}]$*

Démonstration. — (i) Supposons $w(k) > w(k+1)$. Puisque p_1 réalise une application birationnelle $p_2^{-1}(\Omega_w) \rightarrow \Omega_{ws_k}$, alors $p_{1*}(\mathcal{O}_{p_2^{-1}(\Omega_w)}) = \mathcal{O}_{\Omega_{ws_k}}$, et $R^i p_{1*}(\mathcal{O}_{p_2^{-1}(\Omega_w)}) = 0$. En effet, il suffit de vérifier cela de manière locale. Mais alors il suffit d'utiliser les deux théorèmes 2.4.27 et 2.4.28.

(ii) Supposons $w(k) < w(k+1)$, alors $p_1 : p_2^{-1}\Omega_w \rightarrow \Omega_w$ est un fibré en $\mathbf{P}^1$, et on a $p_{1*}(\mathcal{O}_{p_2^{-1}(\Omega_w)}) = \mathcal{O}_{\Omega_w}$, et $R^i p_{1*}(\mathcal{O}_{p_2^{-1}(\Omega_w)}) = 0$. $\square$

2.5. Bases de l'anneau de K -théorie

On reprend les notations $G = SL_n$ et B est le Borel des matrices triangulaires supérieures. Ainsi, l'anneau $K_0(X)$ admet une base, dite base de Pittie formée des $\mathcal{L}(\lambda_w)$ (les fibrés en droites $\mathcal{L}(\lambda_w)$ sont définis en 1.5.19). Pour connaître l'expression de la matrice de changement de bases entre la base précédente et la base formée des classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert, vu les résultats précédents, il *suffit* de faire des produits scalaires, i.e. de calculer des caractéristiques d'Euler-Poincaré.

Théorème 2.5.1. — *Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. On a la décomposition suivante :*

$$[\mathcal{L}(\lambda_w)] = \sum_v \langle \mathcal{L}(\lambda_w), \mathbf{H}_{w_0 v}(x, y) \rangle \mathbf{G}_v(x, y)$$

De plus, on a vu que l'anneau de Grothendieck de G/B possède un produit scalaire (2.2.13) qui est le *même* que celui défini en combinatoire par π_{w_0} (notation 2.3.26 et remarque 2.4.6). Cela suggère donc de trouver des objets géométriques dont les faisceaux structuraux formeront une base duale. Le théorème suivant permet de voir de manière géométrique les résultats combinatoires de Lascoux sur le produit scalaire et la base duale.

Théorème 2.5.2. — Dans l'anneau $K_0(X \times_k X)$ de K -théorie, on a la décomposition suivante de la diagonale (Δ_X) :

$$[\mathcal{O}_{\Delta_X}] = \sum_w [\mathcal{O}_{X^w}] \times [\mathcal{O}_{X^w}(-\partial X^w)].$$

L'accouplement

$$\begin{aligned} K_0(X) \otimes K_0(X) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \chi(\alpha\beta) \end{aligned}$$

est non dégénéré où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Les bases $([\mathcal{O}_{X^w}])_w$ et $([\mathcal{O}_{X^w}(-\partial X^w)])_w$ sont des bases duales.

Démonstration. — [6, Théorème 3.4.1]. □

Remarque 2.5.3. — Ce résultat sur la décomposition de la diagonale, peut se voir comme une décomposition du motif de X dans la catégorie des motifs de Chow.

Grâce au théorème 2.5.2, on a la relation :

Corollaire 2.5.4. — Pour tout w de $\mathfrak{S}_n$, on a :

$$[\mathcal{L}(\lambda_w)] = \sum_v \chi([\mathcal{O}_{X^{w_0v}}(-\partial X^{w_0v})] \cdot [\mathcal{L}(\lambda_w)]) [\mathcal{O}_{X^v}].$$

où les $\mathcal{L}(\lambda_w)$ ont été définis en 1.5.19.

Ce résultat permet donner un sens géométrique aux polynômes $\mathbf{H}$ introduits par Lascoux :

Corollaire 2.5.5. — Pour tout w , $\mathbf{H}_w(x, y)$ représente $[\mathcal{O}_{X^w}(-\partial X^w)]$ dans l'anneau $K_0(X)$.

2.6. Exemple

Nous allons traiter totalement le cas $n = 3$ et faire tous les calculs à la main. Pour ce faire, nous allons donner des résolutions explicites des faisceaux structuraux des variétés de Schubert.

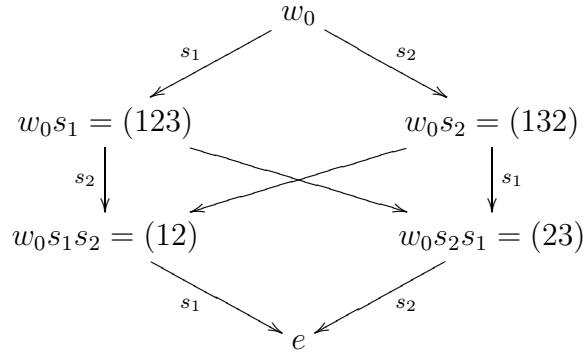
Pour cet exemple, on posera $G = \mathrm{SL}_3$, son sous-groupe de Borel B sera le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de G . Comme tore maximal déployé, on prend les matrices diagonales de G . Le groupe de Weyl associé est donc $W = \mathfrak{S}_3$.

2.6.1. Système de racines

Notons Δ la base des racines positives (pour le Borel B) du système de racines $\Phi(G, T)$ du groupe G . Si on note ϵ_i le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} T &\rightarrow k^* \\ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} &\mapsto t_i \end{aligned}$$

alors $\Delta = \{\alpha_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_2), \alpha_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_3)\}$. A chacune de ces 2 racines, on associe un poids fondamental $\varpi_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$ pour $i = 1, 2$. Les réflexions associées sont les deux transpositions de $\mathfrak{S}_3$, à savoir s_1 et s_2 . On peut représenter les éléments du groupe de Weyl $W = \mathfrak{S}_3$ sur un graphe (hexagramme, qui nous suivra tout au long de cet exemple).



où w_0 est l'élément de longueur maximale de $\mathfrak{S}_3$, égal à $(12)(23)(12)$. Le graphe ci-dessus présente les éléments de $\mathfrak{S}_3$ avec l'ordre partiel de Bruhat (2.2.6), le plus grand étant en haut.

Ici $R(T) = \mathbf{Z}[\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]/(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 - 1)$. Si on pose :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ \sigma_2 &= \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3 \\ \sigma_3 &= \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \end{aligned}$$

on a :

$$R(G) = \mathbf{Z}[\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3, \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3]/(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 - 1) = \mathbf{Z}[\sigma_1, \sigma_2].$$

La base de Pittie du $R(G)$ -module $R(T)$ se calcule aisément :

w	λ_w
e	1
(12)	ϵ_2
(23)	$\epsilon_1 \epsilon_3$
(123)	ϵ_3
(132)	$\epsilon_2 \epsilon_3$
(13)	$\epsilon_2 \epsilon_3^2$

Une des difficultés dans les calculs que nous allons faire pour tenter d'avoir une expression dans l'anneau de Grothendieck de G/B des classes des faisceaux structuraux en fonction des éléments de la base de Pittie est le fait que naturellement, dans les calculs interviennent non les λ_w mais les λ_w^{-1} .

Remarque 2.6.1. — Grâce à l'involution qui, à un fibré en droites $\mathcal{L}$, associe le fibré inverse $\mathcal{L}^*$, on remarque que les $\frac{1}{\lambda_w}$ forment aussi une $\mathbf{Z}$ -base de $K_0(G/B)$. Toutefois, il est utile d'avoir une expression explicite de la matrice de changement de bases, ce que nous donne la proposition suivante.

Proposition 2.6.2. — La matrice de changement de bases entre la base constituée des λ_w^{-1} et celle constituées des λ_w est :

	λ_e^{-1}	$\lambda_{(12)}^{-1}$	$\lambda_{(23)}^{-1}$	$\lambda_{(123)}^{-1}$	$\lambda_{(132)}^{-1}$	$\lambda_{(13)}^{-1}$
λ_e	1	0	0	3	3	8
$\lambda_{(12)}$	0	0	1	0	-1	-3
$\lambda_{(23)}$	0	1	0	-1	0	-3
$\lambda_{(123)}$	0	0	0	0	-1	0
$\lambda_{(132)}$	0	0	0	-1	0	0
$\lambda_{(13)}$	0	0	0	0	0	-1

Démonstration. — On a :

$$K_0(G/B) \simeq \mathbf{Z} \left[\frac{1}{\epsilon_1}, \frac{1}{\epsilon_2}, \frac{1}{\epsilon_3} \right] / \left(3 - \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_3}, 3 - \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_2 \epsilon_3}, \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3} - 1 \right).$$

On peut aussi calculer la matrice de changement de bases :

$$\lambda_e^{-1} = \lambda_e.$$

$$\text{On a : } \lambda_{(123)}^{-1} = \frac{1}{\epsilon_3} = 3 - \epsilon_1 \epsilon_3 - \epsilon_2 \epsilon_3. \text{ Ainsi : } \lambda_{(123)}^{-1} = 3\lambda_e - \lambda_{(23)} - \lambda_{(132)}.$$

$$\text{On a : } \lambda_{(132)}^{-1} = \frac{1}{\epsilon_2 \epsilon_3} = \epsilon_1 = 3 - \epsilon_2 - \epsilon_3. \text{ Ainsi : } \lambda_{(132)}^{-1} = 3\lambda_e - \lambda_{(12)} - \lambda_{(123)}.$$

$$\text{On a : } \lambda_{(12)}^{-1} = \frac{1}{\epsilon_2} = \epsilon_1 \epsilon_3 = \lambda_{(23)}.$$

On a : $\lambda_{(23)}^{-1} = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_3} = \epsilon_2 = \lambda_{(12)}$.

On a : $\lambda_{(13)}^{-1} = \epsilon_2^{-1} \epsilon_3^{-2}$. Or

$$\begin{aligned} \epsilon_2^{-1} \epsilon_3^{-2} &= \epsilon_1^2 \epsilon_2 \\ &= (3 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \epsilon_1 \epsilon_2 \\ &= (3\epsilon_1 - \epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_3) \epsilon_2 \\ &= 3\epsilon_1 \epsilon_2 - 3\epsilon_2 + (3 - \epsilon_1 - \epsilon_3) \epsilon_2 \epsilon_3. \end{aligned}$$

Avec les notations originelles, on obtient :

$$\lambda_{(13)}^{-1} = 8\lambda_e - 3\lambda_{(12)} - 3\lambda_{(23)} - \lambda_{(13)}.$$

On met tous ces résultats dans une matrice (verticalement se trouvent les vecteurs λ_w^{-1}) :

	λ_e^{-1}	$\lambda_{(12)}^{-1}$	$\lambda_{(23)}^{-1}$	$\lambda_{(123)}^{-1}$	$\lambda_{(132)}^{-1}$	$\lambda_{(13)}^{-1}$
λ_e	1	0	0	3	3	8
$\lambda_{(12)}$	0	0	1	0	-1	-3
$\lambda_{(23)}$	0	1	0	-1	0	-3
$\lambda_{(123)}$	0	0	0	0	-1	0
$\lambda_{(132)}$	0	0	0	-1	0	0
$\lambda_{(13)}$	0	0	0	0	0	-1

Notons Λ cette matrice. On calcule :

$$\det(\Lambda) = -1 \in \mathbf{Z}^*.$$

□

2.6.2. Réalisation géométrique

Soit V un k -espace vectoriel de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note x_1, x_2, x_3 les coordonnées sur V et y_{12}, y_{13}, y_{23} les coordonnées de $\Lambda^2 V$ associées à la base $\mathcal{B}$ et à la base $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$, respectivement. On pose $X = G/B = \text{Drap}_{1,2}(V)$.

À $w \in W$, on associe une sous-variété X_w de G/B : $X_w = \overline{BwB/B}$, variété de Schubert. Notons L la projection $X \rightarrow \mathbf{P}(V)$ qui à (L, P) associe L , et P la projection $X \rightarrow \mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ qui à (L, P) associe P . Ceci permet de définir un morphisme qui est en fait une immersion fermée :

$$\begin{aligned} G/B &\rightarrow \mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(\Lambda^2 V) \\ gB &\mapsto ([ge_1], [ge_1 \wedge ge_2]). \end{aligned}$$

Ainsi G/B peut être vu comme une sous-variété fermée du produit $\mathbf{P}V \times \mathbf{P}(\Lambda^2 V)$, donnée par l'équation d'incidence :

$$x_1 y_{23} - x_2 y_{13} + x_3 y_{12} = 0.$$

2.6.3. Fibrés en droites particuliers

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 G/B & \xrightarrow{j} & \mathbf{P}(V) \times_k \mathbf{P}(\Lambda^2 V) \\
 & \searrow L & \swarrow p_1 \\
 & \mathbf{P}(V) & \\
 & \nearrow P & \searrow p_2 \\
 & \mathbf{P}(\Lambda^2 V) &
 \end{array}$$

On a un fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$ sur $\mathbf{P}(V)$ et un autre $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\Lambda^2 V)}(1)$ sur $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$. On notera donc :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}(1, 0) &= L^* \mathcal{O}(1), \\
 \mathcal{O}(0, 1) &= P^* \mathcal{O}(1).
 \end{aligned}$$

Puisque pour tout ouvert U de G/B , les sections de $\mathcal{O}(1, 0)$ sur U correspondent aux fonctions $f \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))$, où π désigne la projection canonique $G \rightarrow G/B$, telles que pour tout $g \in G$ et pour tout $b \in B$, $f(gb) = \frac{1}{\epsilon_1}(b^{-1})f(g)$, alors la classe de $\mathcal{O}(1, 0)$ est $\frac{1}{\epsilon_1}$. De même, la classe de $\mathcal{O}(0, 1)$ est $\frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{\epsilon_2}$.

2.6.4. Calculs de $[X_w]$ en terme de ϵ_i et ϵ_i^{-1}

Introduisons deux notations :

Définition 2.6.3. — Si X est une variété et ϕ une section d'un fibré sur X , alors $V(\phi)$ désignera le sous-schéma défini par l'annulation de ϕ et $D^+(\phi)$ sera son complémentaire.

On a $X_{w_0} = X$, d'où :

$$[\mathcal{O}_{X_{w_0}}] = 1.$$

On a : $X_{w_0 s_1} = X_{w_0(12)} = \{(L, P) \in X, L \subset \langle e_1, e_2 \rangle\}$, donc $X_{w_0(12)} = X \cap V(x_3)$. La suite suivante est donc exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1, 0) \xrightarrow{\times x_3} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{w_0(12)}} \longrightarrow 0$$

Donc, sa classe est :

$$[\mathcal{O}_{X_{w_0(12)}}] = 1 - \epsilon_1.$$

On a : $X_{w_0(23)} = \{(L, P) \in X, e_1 \in P\}$, donc $X_{w_0(12)} = X \cap V(y_{23})$. La suite suivante est donc exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(0, -1) \xrightarrow{\times y_{23}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{(23)}} \longrightarrow 0.$$

Donc :

$$[\mathcal{O}_{X_{w_0(23)}}] = 1 - \epsilon_1 \epsilon_2.$$

On remarque que la sous-variété $X_{w_0 s_1 s_2} = \{(L, P) \in X, P = \langle e_1, e_2 \rangle\}$ peut être définie par :

$$\begin{aligned} X_{w_0 s_1 s_2} \cap D^+(x_1) &= X \cap V(x_3, y_{31}) \cap D^+(x_1) \\ X_{w_0 s_1 s_2} \cap D^+(x_2) &= X \cap V(x_3, y_{32}) \cap D^+(x_2) \\ X_{w_0 s_1 s_2} \cap D^+(x_3) &= X \cap V(x_3, y_{33}) \cap D^+(x_3) = \emptyset \end{aligned}$$

avec la convention que $y_{ij} = -y_{ji}$ et $y_{ii} = 0$.

Sur chaque ouvert $D^+(x_i)$, on définit le faisceau libre de rang 2, $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}(-1, 0)_{|D^+(x_i)} \oplus \mathcal{O}(0, -1)_{|D^+(x_i)}$. On définit des flèches ϕ_i de ces $\mathcal{E}_i$ vers $\mathcal{O}_X|_{D^+(x_i)}$ ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &\rightarrow \mathcal{O}_X|_{D^+(x_i)} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \times x_3 + \beta \times y_{3i}. \end{aligned}$$

Pour tout i, j , on définit sur $D^+(x_i) \cap D^+(x_j)$, une application (dite de transition) $p_{ji} : \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_j$, représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{y_{ji}}{x_j} \\ 0 & \frac{x_i}{x_j} \end{pmatrix}$$

On remarque que les p_{ji} sont compatibles, et permettent de définir, par recollement, un faisceau que l'on notera $\mathcal{E}$ sur X , avec $\mathcal{E}_{|D^+(x_i)} = \mathcal{E}_i$. De plus sur $D^+(x_i) \cap D^+(x_j)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_i|_{D^+(x_i) \cap D^+(x_j)} & \xrightarrow{\phi_i} & \mathcal{O}_X|_{D^+(x_i) \cap D^+(x_j)} \\ \downarrow p_{ji} & & \downarrow = \\ \mathcal{E}_j|_{D^+(x_j) \cap D^+(x_i)} & \xrightarrow{\phi_j} & \mathcal{O}_X|_{D^+(x_j) \cap D^+(x_i)} \end{array}$$

Ainsi les ϕ_i se recollent et nous permettent de définir une flèche :

$$\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Et, l'on remarque que :

$$\text{Coker}(\phi) = \mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}}.$$

D'autre part, sur $D^+(x_i)$, on a une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}(-1, 0)_{|D^+(x_i)} & \rightarrow & \mathcal{E}_i & \rightarrow & \mathcal{O}(1, -1)_{|D^+(x_i)} \rightarrow 0 \\ & & \alpha & \mapsto & (\alpha, 0) & & \\ & & & & (\alpha, \beta) & \mapsto & x_i \beta \end{array}$$

Or sur $D^+(x_i) \cap D^+(x_j)$, le diagramme suivant à lignes exactes est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1, 0)_{|D^+(x_i) \cap D^+(x_j)} & \xrightarrow{\text{inj}_1} & \mathcal{E}_i_{|D^+(x_i) \cap D^+(x_j)} & \xrightarrow{x_i \times \text{proj}_2} & \mathcal{O}(1, -1)_{|D^+(x_i) \cap D^+(x_j)} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow p_{ji} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1, 0)_{|D^+(x_i) \cap D^+(x_j)} & \xrightarrow{\text{inj}_1} & \mathcal{E}_j_{|D^+(x_j) \cap D^+(x_i)} & \xrightarrow{x_j \times \text{proj}_2} & \mathcal{O}(1, -1)_{|D^+(x_j) \cap D^+(x_i)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ceci permet d'avoir une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1, 0) \xrightarrow{\text{inj}_1} \mathcal{E} \xrightarrow{\times x} \mathcal{O}(1, -1) \longrightarrow 0.$$

Et on peut alors déduire les deux résultats suivants : d'une part :

$$[\mathcal{E}] = \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

et d'autre part le complexe suivant (complexe de Koszul) est localement exact, donc exact, et il fournit une résolution de $\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}}$:

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}} \longrightarrow 0.$$

Ainsi :

Proposition 2.6.4. —

$$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}}] = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 = (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2).$$

On a : $X_{w_0 s_2 s_1} = \{(L, P) \in X, L = \langle e_1 \rangle\}$, donc $X_{w_0 s_2 s_1} = X \cap V(x_2, x_3)$, en posant $\mathcal{E} = \mathcal{O}(-1, 0) \oplus \mathcal{O}(-1, 0)$, on a la suite exacte suivante donnée par le complexe de Koszul :

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{w_0 s_2 s_1}} \longrightarrow 0.$$

Ainsi :

$$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2 s_1}}] = 1 - 2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 = (1 - \epsilon_1)^2.$$

Étudions X_e .

La sous-variété X_e peut être vue ainsi :

$$\begin{cases} X_e \cap D^+(x_1) &= X \cap V(x_2, x_3, y_{31}) \cap D^+(x_1) \\ X_e \cap D^+(x_2) &= X \cap V(x_2, x_3, y_{32}) \cap D^+(x_2) \\ X_e \cap D^+(x_3) &= X \cap V(x_2, x_3, y_{33}) \cap D^+(x_3) \end{cases}$$

Notons $\mathcal{E}$ le faisceau localement libre de rang 2 qui intervient dans la résolution de $X_{w_0 s_1 s_2}$ et gardons les notations de ce paragraphe. Posons :

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}(-1, 0).$$

Le conoyau de

$$\tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\phi \oplus (\times x_2)} \mathcal{O}_X$$

est

$$X_e.$$

Donc le complexe suivant (complexe de Koszul) permet d'avoir une résolution de X_e

$$0 \longrightarrow \Lambda^3 \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \Lambda^2 \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_e} \longrightarrow 0.$$

Donc on obtient :

Proposition 2.6.5. —

$$[X_e] = 1 - 2\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_1^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_1^2\epsilon_2 = (1 - \epsilon_1)^2(1 - \epsilon_2).$$

2.6.5. Expression des $[X_w]$ dans la base des λ_w

Résumons les résultats de la sous-section précédente sur un hexagramme :

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{O}_{X_{w_0}}] = 1 & \\ \swarrow & & \searrow \\ [\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1}}] = 1 - \epsilon_1 & & [\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2}}] = 1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}}] = (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) & & [\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2 s_1}}] = (1 - \epsilon_1)^2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & [\mathcal{O}_{X_e}] = (1 - \epsilon_1)^2(1 - \epsilon_2) & \end{array}$$

Proposition 2.6.6. — *On a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_{X_{w_0}}] &= 1 \\
[\mathcal{O}_{X_{w_0(12)}}] &= 1 - \lambda_{(132)}^{-1} \\
[\mathcal{O}_{X_{w_0(23)}}] &= 1 - \lambda_{(123)}^{-1} \\
[\mathcal{O}_{X_{w_0(123)}}] &= 1 + \lambda_{(123)}^{-1} - \lambda_{(132)}^{-1} - \lambda_{(23)}^{-1} \\
[\mathcal{O}_{X_{w_0(132)}}] &= 1 + \lambda_{(132)}^{-1} - \lambda_{(123)}^{-1} - \lambda_{(12)}^{-1} \\
[\mathcal{O}_{X_{w_0(13)}}] &= 1 + \lambda_{(123)}^{-1} + \lambda_{(132)}^{-1} - \lambda_{(12)}^{-1} - \lambda_{(23)}^{-1} - \lambda_{(13)}^{-1}
\end{aligned}$$

ou encore, la matrice de changement de bases est donnée par :

	$[\mathcal{O}_{X_{w_0}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2 s_1}}]$	$[\mathcal{O}_{X_e}]$
λ_e^{-1}	1	1	1	1	1	1
$\lambda_{s_1}^{-1}$	0	0	0	0	-1	-1
$\lambda_{s_2}^{-1}$	0	0	0	-1	0	-1
$\lambda_{s_1 s_2}^{-1}$	0	0	-1	1	-1	1
$\lambda_{s_2 s_1}^{-1}$	0	-1	0	-1	1	1
$\lambda_{w_0}^{-1}$	0	0	0	0	0	-1

On notera $P(\lambda_w^{-1})$ cette matrice.

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_{X_{w_0(123)}}] &= 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \\
&= 1 - \lambda_{(132)}^{-1} - \lambda_{(23)}^{-1} + \lambda_{(123)}^{-1}.
\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
[X_{w_0(132)}] &= 1 - 2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 \\
&= 1 - 2\epsilon_1 + (3 - \epsilon_2 - \epsilon_3)\epsilon_1 \\
&= 1 + \epsilon_1 - \epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_3 \\
&= 1 + \lambda_{(132)}^{-1} - \lambda_{(123)}^{-1} - \lambda_{(12)}^{-1}.
\end{aligned}$$

Pour la classe $[\mathcal{O}_{X_e}]$, on a :

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_{X_e}] &= (1 - \epsilon_1)^2(1 - \epsilon_2) \\
&= 1 - 2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \epsilon_2 \\
&= 1 + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_3 - \epsilon_1^2 \epsilon_2 \\
&= 1 + \lambda_{(132)}^{-1} - \lambda_{(23)}^{-1} + \lambda_{(123)}^{-1} - \lambda_{(12)}^{-1} - \lambda_{(13)}^{-1}.
\end{aligned}$$

□

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.6.7. — *La matrice donnant $[\mathcal{O}_w]$ en fonction des λ_w est :*

	$[\mathcal{O}_{X_{w_0}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2 s_1}}]$	$[\mathcal{O}_{X_e}]$
λ_e	1	-2	-2	1	1	-1
λ_{s_1}	0	1	0	0	-1	1
λ_{s_2}	0	0	1	-1	0	1
$\lambda_{s_1 s_2}$	0	1	0	1	-1	-1
$\lambda_{s_2 s_1}$	0	0	1	-1	1	-1
λ_{w_0}	0	0	0	0	0	1

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la matrice Λ de changement de bases (expression des λ_w^{-1} dans la base des λ_w . Autrement dit : $P(\lambda_w) = \Lambda \times P(\lambda_w^{-1})$. □

2.6.6. Polynômes de Grothendieck et applications

Avant de continuer plus loin, attardons-nous un peu à donner la liste des six polynômes de Grothendieck $\mathbf{G}$ et des six polynômes adjoints de Lascoux $\mathbf{H}$. Dans notre cas où $X = G/B$, nous prenons $b_i = 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{G}_{w_0} = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) & & \\
 \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 \\
 \mathbf{G}_{w_0 s_1} = \mathbf{G}_{(123)} = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) & & \mathbf{G}_{w_0 s_2} = \mathbf{G}_{(132)} = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)^2 \\
 \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_1 \\
 \mathbf{G}_{w_0 s_1 s_2} = \mathbf{G}_{(12)} = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) & & \mathbf{G}_{w_0 s_2 s_1} = \mathbf{G}_{(23)} = \left(1 - \frac{1}{a_1 a_2}\right) \\
 \swarrow \pi_1 & & \nwarrow \pi_2 \\
 & \mathbf{G}_e = 1 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbf{H}_{w_0} = (1 - a_2)(1 - a_3)^2 & \\
& \swarrow \psi_1 \quad \searrow \psi_2 & \\
\mathbf{H}_{w_0 s_1} = \mathbf{H}_{(123)} = a_2(1 - a_3)^2 & & \mathbf{H}_{w_0 s_2} = \mathbf{H}_{(132)} = a_3(1 - a_2)(1 - a_3) \\
\downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_1 \\
\mathbf{H}_{w_0 s_1 s_2} = \mathbf{H}_{(12)} = a_3(1 - a_2 a_3) & & \mathbf{H}_{w_0 s_2 s_1} = \mathbf{H}_{(23)} = a_2 a_3(1 - a_3) \\
& \swarrow \psi_1 \quad \searrow \psi_2 & \\
& \mathbf{H}_e = a_2 a_3^2 &
\end{array}$$

L'élément a_1 représente la classe du fibré tautologique de rang 1 sur X . On dispose de même sur X d'un fibré tautologique de rang 2 ; la classe du quotient de ce dernier par le fibré tautologique de rang 1 est a_2 . Finalement, a_3 est la classe du quotient du fibré tautologique de rang 3 par le fibré tautologique de rang 2 de X . Ainsi, pour tout i , on a :

$$a_i = \frac{1}{\epsilon_i}.$$

Selon la théorie développée plus haut, il est nécessaire de calculer les produits scalaires $\langle \mathbf{H}_w, \lambda_v \rangle$. On passe les détails du calcul. Regroupons les résultats dans un tableau .

	λ_e	λ_{s_1}	λ_{s_2}	$\lambda_{s_1 s_2}$	$\lambda_{s_2 s_1}$	λ_{w_0}
$\mathbf{H}_{w_0}$	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{H}_{w_0 s_1}$	0	1	-1	0	1	1
$\mathbf{H}_{w_0 s_2}$	0	-1	1	1	0	1
$\mathbf{H}_{w_0 s_1 s_2}$	0	-1	0	1	0	2
$\mathbf{H}_{w_0 s_2 s_1}$	0	0	-1	0	1	2
$\mathbf{H}_e$	0	0	0	0	0	1

Ainsi chaque colonne de la matrice M précédente représente un vecteur λ_w dans la base des $[\mathcal{O}_{X_{w_0}}]$. On calcule $\det M = 1$ et en inversant M , on a :

Proposition 2.6.8. —

	$[\mathcal{O}_{X_{w_0}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_1 s_2}}]$	$[\mathcal{O}_{X_{w_0 s_2 s_1}}]$	$[\mathcal{O}_{X_e}]$
λ_e	1	-2	-2	1	1	-1
λ_{s_1}	0	1	0	0	-1	1
λ_{s_2}	0	0	1	-1	0	1
$\lambda_{s_1 s_2}$	0	1	0	1	-1	-1
$\lambda_{s_2 s_1}$	0	0	1	-1	1	-1
λ_{w_0}	0	0	0	0	0	1

On obtient les mêmes résultats qu'en 2.6.7.

CHAPITRE 3

VARIÉTÉS HOMOGÈNES SOUS PGL_n

3.1. Introduction

Si une k -variété projective X est supposée cellulaire, alors l'anneau de Chow gradué $\bigoplus_i \mathrm{CH}^i(X)$ est le $\mathbf{Z}$ -module libre sur les classes des adhérences des cellules de X ([28]). En particulier, les variétés de drapeaux déployées, c'est-à-dire les variétés projectives homogènes sous un groupe algébrique semi-simple déployé ont des groupes de Chow libres de type fini sur $\mathbf{Z}$. Il est alors légitime de vouloir étudier les groupes de Chow de variétés projectives homogènes non déployées. Considérons une telle k -variété projective homogène X et supposons-la déployée sur une extension L/k . Alors la flèche naturelle $\mathrm{CH}^i(X) \rightarrow \mathrm{CH}^i(X_L)$ permet de voir que tout élément de torsion de $\mathrm{CH}^i(X)$ s'envoie sur 0, et en fait le noyau est exactement constitué d'éléments de torsion (la formule de projection permet en effet de voir que la composée $\mathrm{CH}^i(X) \rightarrow \mathrm{CH}^i(X_L) \rightarrow \mathrm{CH}^i(X)$ coïncide avec la multiplication par le degré de l'extension L/k).

Les groupes de Chow en codimension 1 sont connus (voir par exemple [48, lemme 5.1]). N. Karpenko a calculé les groupes de Chow en codimension 2 des variétés de Severi-Brauer, cas particulier de variétés homogènes projectives sous $\mathrm{PGL}(A)$ pour une algèbre simple centrale A . Le calcul des motifs des variétés homogènes projectives sous un groupe G , forme interne d'un groupe de Chevalley se ramène dans certains cas au calcul de motifs de variétés homogènes projectives « plus simples » (i.e. : G/P où P est un parabolique maximal) comme l'ont montré Calmès, Petrov, Semenov et Zainouline dans [7]. Le présent chapitre a pour but de calculer de manière tout-à-fait explicite les groupes de Chow de variétés homogènes projectives sous PGL_n en fonction des groupes de Chow de

variétés de Severi-Brauer ou Severi-Brauer généralisées ([34, définition 1.16]).

3.2. Résultats

Nous utiliserons les notations introduites en 1.6. Énonçons le premier théorème :

Théorème 3.2.1. — *Soit A une algèbre d’Azumaya sur k de degré n . Soient $r > 1$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. Supposons $i_1 = 1$, alors il existe un fibré de rang $n - 1$, $\mathcal{V}$ sur $\mathrm{SB}_{i_1}(A) = \mathrm{SB}(A)$, tel que l’on ait un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SB}_{i_1, i_2, \dots, i_r}(A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Drap}_{n-i_r, \dots, n-i_2}(\mathcal{V}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{SB}(A) & \end{array}$$

Si i_1 est quelconque, on a le résultat général suivant :

Théorème 3.2.2. — *Soit A une algèbre d’Azumaya sur k de degré n . Soient $r > 1$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. Fixons un $s \in \{1, \dots, r\}$. Il existe deux algèbres d’Azumaya $\mathcal{B}_+$ et $\mathcal{B}_-$ sur $\mathrm{SB}_{i_s}(A)$ de degrés respectifs $n - i_s$ et i_s telles que l’on ait un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SB}_{i_1, \dots, i_r}(A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{SB}_{i_1, \dots, i_{s-1}}(\mathcal{B}_-) \times_{\mathrm{SB}_{i_s}(A)} \mathrm{SB}_{i_{s+1}-i_s, \dots, i_r-i_s}(\mathcal{B}_+) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{SB}_{i_s}(A) & \end{array}$$

Il admet pour corollaires :

Corollaire 3.2.3. — *Conservons les notations du théorème 3.2.2. Si l’indice de A , $\mathrm{ind} A$, (cf. notation 3.3.2) est premier avec un des i_j , disons i_s , alors la projection naturelle :*

$$\mathrm{SB}_{i_1, \dots, i_r}(A) \rightarrow \mathrm{SB}_{i_s}(A)$$

est une fibration en produits de variétés de drapeaux non tordues.

Corollaire 3.2.4. — *Conservons les notations du théorème 3.2.2. Si $\text{ind } A$ est une puissance d'un nombre premier et si $(\text{ind } A, i_1, \dots, i_r) = 1$ alors il existe un $s \in \{1 \dots r\}$ tel que la projection naturelle :*

$$\text{SB}_{i_1, \dots, i_r}(A) \rightarrow \text{SB}_{i_s}(A)$$

soit une fibration en produits de variétés de drapeaux non tordues.

3.3. Preuve des résultats

3.3.1. Espaces vectoriels sur un corps gauche - Annulateurs

Rappelons un résultat classique de Wedderburn pour fixer les notations :

Théorème 3.3.1 (Wedderburn). — *Si A est une algèbre d'Azumaya sur k de degré n , alors il existe un corps gauche D sur k et un D -espace vectoriel à droite E , tels que*

$$A = \text{End}_D(E)$$

L'anneau des D -endomorphismes de E opère à gauche sur E .

Démonstration. — [34, théorème 1.1]. □

Nous utiliserons librement ce résultat dans la suite avec les mêmes notations.

Notation 3.3.2. — La dimension de D est nécessairement un carré, sa racine carrée sera l'indice de A , noté $\text{ind } A$. Si r est la D -dimension de E , alors le degré de A est égal à rd , où $d = \text{ind } A$.

Définition 3.3.3. — Soit A une algèbre d'Azumaya sur k , de degré n . Soit $I \subset A$, alors on définit son *annulateur* à droite comme suit : $I^\circ = \{a \in A, Ia = 0\}$.

Remarque 3.3.4. — Si I est un sous-ensemble quelconque de A , alors I° est un idéal à droite de A .

La proposition classique suivante est d'une importance cruciale pour mieux comprendre les objets utilisés :

Proposition 3.3.5. — *Soient D un corps gauche de centre k , E un D -espace vectoriel à droite de dimension finie et posons $A = \text{End}_D(E)$, algèbre d'Azumaya sur k . L'application $V \rightarrow \text{Hom}_D(E/V, E)$ définit une*

bijection entre, d'une part, les sous- D -espaces vectoriels de E de D -dimension l et, d'autre part, les idéaux à gauche de A de k -dimension $\deg A(\deg A - l \operatorname{ind} A)$. De même, $V \rightarrow \operatorname{Hom}_D(E, V)$ définit une bijection entre d'une part les sous- D -espaces vectoriels de E de D -dimension l et d'autre part les idéaux à droite de A de k -dimension $l \deg A \operatorname{ind} A$.

Démonstration. — [34, Proposition 1.12]. $\square$

Remarque 3.3.6. — Avec les notations précédentes, si $d = \operatorname{ind} A = \deg D$, $n = \deg A$, et si r est la D -dimension de E ($n = dr$), alors le sous- D -espace vectoriel correspondant à un idéal à gauche I de A de k -dimension ni (pour un certain i) est de D -dimension $\frac{n-i}{d}$.

Corollaire 3.3.7. — *Conservons les notations de la proposition. Si I est un idéal à gauche de A s'écrivant $\operatorname{Hom}_D(E/V, E)$ pour un sous- D -espace vectoriel V de E , alors I° s'identifie canoniquement à l'idéal $\operatorname{Hom}_D(E, V)$.*

Démonstration. — [34, Preuve de la proposition 1.14.] $\square$

Lemme 3.3.8. — *Soit A une algèbre d'Azumaya sur k , de degré n .*

- (i) *Si $I \subset A$ est un idéal à gauche de k -dimension ni alors I° est un idéal à droite de k -dimension $n(n-i)$.*
- (ii) *Si I et J sont des idéaux à gauche de A de k -dimensions respectives ni et nj alors $I^\circ J = I^\circ \cap J$ est un sous- k -espace vectoriel de A de dimension $(n-i)j$.*

Démonstration. — On peut écrire : $A = \operatorname{End}_D(E)$.

(i) La remarque 3.3.4 permet de voir que I° est un idéal à droite ; la proposition 3.3.5 nous donne sa dimension.

(ii) Si $I = \operatorname{Hom}_D(E/V, E)$ et $J = \operatorname{Hom}_D(E/W, E)$ où V et W sont des sous- D -espaces vectoriels de E , alors $I^\circ = \operatorname{Hom}_D(E, V)$, et un simple calcul permet de voir que $I^\circ \cap J = I^\circ J = \operatorname{Hom}_D(E/W, V)$. Par suite (proposition 3.3.5) $\dim_k I^\circ J = \dim_k I^\circ \cap J = (n-i)j$. $\square$

Le lemme suivant est à rapprocher des propositions 1.15 et 1.20 de [34].

Lemme 3.3.9. — *Conservons les notations de la proposition 3.3.5. Si I est un idéal à gauche de A s'écrivant $\operatorname{Hom}_D(E/V, E)$ pour un sous- D -espace vectoriel V de E alors $I^\circ/I^\circ I$ est canoniquement isomorphe à*

$\text{Hom}_D(V, V)$. Si de plus, J est un idéal à gauche de A contenant I s'écrivant $\text{Hom}_D(E/W, E)$, avec $W \subset V$ alors $I^\circ J/I^\circ I$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_D(V/W, V)$.

Démonstration. — Si $V \subset E$, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow E/V \longrightarrow 0$$

et en appliquant le foncteur $\text{Hom}_D(-, V)$ qui est exact, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_D(E/V, V) \longrightarrow \text{Hom}_D(E, V) \longrightarrow \text{Hom}_D(V, V) \longrightarrow 0.$$

Puisque d'après 3.3.8 $\text{Hom}_D(E/V, V) = I^\circ I$, la suite exacte se réécrit :

$$0 \longrightarrow I^\circ I \longrightarrow I^\circ \longrightarrow \text{Hom}_D(V, V) \longrightarrow 0.$$

Par suite : $I^\circ/I^\circ I$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_D(V, V)$.

Supposons que $J = \text{Hom}_D(E/W, E)$. Un raisonnement analogue appliqué à la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow V/W \longrightarrow E/W \longrightarrow E/V \longrightarrow 0$$

nous permet de voir que $I^\circ J/I^\circ I = \text{Hom}_D(V/W, V)$. $\square$

Corollaire 3.3.10. — Soit A une algèbre d'Azumaya sur k , de degré n . Si I est un idéal à gauche de A , alors on a un isomorphisme canonique :

$$I^\circ/I^\circ I \rightarrow \text{End}_A(I^\circ)$$

induite par l'application $x \mapsto (y \mapsto xy)$. De plus : $\text{ind}(\text{End}_A I^\circ) = \text{ind } A$ ([34, proposition 1.10]). Le groupe $I^\circ/I^\circ I$ est muni d'une structure d'algèbre d'Azumaya sur k dont la classe est égale à celle de A dans le groupe $\text{Br}(k)$ et est de degré $n - i$ si $\dim_k I = ni$.

Démonstration. — On peut supposer que $A = \text{End}_D(E)$ avec les notations précédentes. I s'écrit alors $\text{Hom}_D(E/V, E)$ pour un certain V . D'après [34, proposition 1.12], $\text{Hom}_D(V, V)$ s'identifie canoniquement à $\text{End}_A(I^\circ) = \text{End}_A(\text{Hom}_D(E, V))$ grâce à la multiplication à gauche. L'assertion sur le degré est une conséquence du lemme 3.3.8. $\square$

Lemme 3.3.11. — Conservons les notations précédentes. Alors $J/J^\circ J$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_D(E/W, E/W)$ et $I/J^\circ I$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_D(E/V, E/W)$.

Démonstration. — La preuve est analogue à celle du lemme 3.3.9 $\square$

Corollaire 3.3.12. — Soit A une algèbre d’Azumaya sur k , de degré n . Si I est un idéal à gauche de A , alors on a un isomorphisme canonique :

$$I/I^\circ I \rightarrow \mathrm{End}_A I$$

induite par l’application $x \mapsto (y \mapsto yx)$. De plus : $\mathrm{ind}(\mathrm{End}_A I^\circ) = \mathrm{ind} A$. Le groupe $I/I^\circ I$ est muni d’une structure d’algèbre d’Azumaya sur k dont la classe est égale à celle de A dans le groupe $\mathrm{Br}(k)$ et est de degré i si $\dim_k I = ni$.

Démonstration. — La preuve est identique à celle du corollaire 3.3.10. $\square$

3.3.2. Bijections

La proposition suivante est la clef de la preuve du théorème 3.2.1 :

Proposition 3.3.13. — Soit A une algèbre d’Azumaya sur k . Notons n son degré. Soit $I \subset A$ un idéal à gauche de k -dimension n . On a une bijection canonique :

$$\left\{ \begin{array}{c} J \\ I \subset J \subset A \\ J \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J = nj \\ J \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\quad} \\ \mapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{c} W \\ W \subset I^\circ I \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = (n - j) \\ J^\circ I \end{array} \right\}$$

Démonstration. — D’après le lemme 3.3.8, $\dim_k J^\circ I = (n - j)$, et donc on a bien une flèche notée ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{c} J \\ I \subset J \subset A \\ J \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J = nj \end{array} \right\} \xrightarrow{\phi} \left\{ \begin{array}{c} W \\ W \subset I^\circ I \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = (n - j) \end{array} \right\}$$

Remarquons déjà que l’existence de I force $d = \mathrm{ind} A = 1$. A est donc déployée. D’après le théorème de Wedderburn, il existe un k -espace vectoriel E tel que l’on ait $A \simeq \mathrm{End}_k(E)$. Par suite, grâce au lemme 3.3.5, on dispose de $V \subset E$ tel que I s’identifie à $\mathrm{Hom}_k(E/V, E)$ via l’isomorphisme $A \simeq \mathrm{End}_k(E)$. En particulier $\dim_k V = n - 1$. Puisque $\dim_k E/V = 1$,

on a une bijection canonique :

$$\left\{ \begin{array}{c} U \subset \text{Hom}(E/V, V) \\ \text{sous-espace vectoriel de dimension } l \end{array} \right\} \xrightleftharpoons{f} \left\{ \begin{array}{c} U \subset V \\ \dim_k U = l \end{array} \right\}$$

$$U \longmapsto \bigcup_{u \in U} \text{Im } u$$

Par suite, le diagramme commutatif suivant permet de conclure :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} J \\ I \subset J \subset A \\ J \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J = nj \end{array} \right\} & \xrightarrow{\phi} & \left\{ \begin{array}{c} W \\ W \subset I^\circ I \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = n - j \end{array} \right\} \\ \updownarrow \scriptstyle 3.3.5 & & \updownarrow \scriptstyle 3.3.5 \\ & & \left\{ \begin{array}{c} W \\ W \subset \text{Hom}(E/V, V) \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = n - j \end{array} \right\} \\ & & \updownarrow \scriptstyle f \\ \left\{ \begin{array}{c} W \\ W \subset V \subset E \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = n - j \end{array} \right\} & = & \left\{ \begin{array}{c} W \\ W \subset V \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = n - j \end{array} \right\} \end{array}$$

□

Lemme 3.3.14. — Soit A une algèbre d'Azumaya sur k de degré n . Soient $r > 1$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. Soit $I_1 \subset A$ un idéal de k -dimension ni_1 (i.e. : un point rationnel de $\text{SB}_{i_1}(A)$). On a alors une

bijection canonique :

$$\left\{ \begin{array}{c} (I_2, \dots, I_r) \\ I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_r \subset A \\ I_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I_j = ni_j \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (J_2, \dots, J_r) \\ J_2 \subset \dots \subset J_r \subset I_1^\circ/I_1^\circ I_1 \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = (n - i_1)(i_j - i_1) \end{array} \right\}$$

$$(I_2, \dots, I_r) \longmapsto (I_1^\circ I_2/I_1^\circ I_1, \dots, I_1^\circ I_r/I_1^\circ I_1).$$

Démonstration. — Posons $B = \mathrm{End}_A(I_1^\circ) = I_1^\circ/I_1^\circ I_1$ (corollaire 3.3.10). C'est une algèbre d'Azumaya sur k d'indice $d = \mathrm{ind} A$ et de degré $n - i_1$. Pour tout j , posons $J_j = I_1^\circ I_j/I_1^\circ I_1$. On a $J_j \subset B$, et les J_j sont des idéaux à gauche de B de k -dimension $(n - i_1)(i_j - i_1)$ d'après 3.3.8. On a alors une flèche ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{c} (I_2, \dots, I_r) \\ I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_r \subset A \\ I_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I_j = ni_j \end{array} \right\} \xrightarrow{\phi} \left\{ \begin{array}{c} (J_2, \dots, J_r) \\ J_2 \subset \dots \subset J_r \subset I_1^\circ/I_1^\circ I_1 \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = (n - i_1)(i_j - i_1) \end{array} \right\}$$

On peut supposer que $A = \mathrm{End}_D(E)$ pour un corps gauche D de dimension d^2 sur k et un D -espace vectoriel à droite E de dimension r . Alors $n = rd$. Soit $V_1 \subset E$ tel que $I_1 = \mathrm{Hom}_D(E/V_1, E)$. Ainsi $B = \mathrm{End}_A(I_1^\circ) = I_1^\circ/I_1^\circ I_1 = \mathrm{Hom}(V_1, V_1)$ (lemme 3.3.9).

Le diagramme commutatif suivant dont les flèches verticales sont données par la proposition 3.3.5 permet de conclure :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} (I_2, \dots, I_r) \\ I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_r \subset A \\ I_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I_j = ni_j \end{array} \right\} & \xrightarrow{\phi} & \left\{ \begin{array}{c} (J_2, \dots, J_r) \\ J_2 \subset \dots \subset J_r \subset I_1^\circ/I_1^\circ I_1 \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = (n - i_1)(i_j - i_1) \end{array} \right\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left\{ \begin{array}{c} (V_2, \dots, V_r) \\ E \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_r \\ V_j \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_D V_j = \frac{n-i_j}{d} \end{array} \right\} & \xlongequal{\quad} & \left\{ \begin{array}{c} (W_2, \dots, W_r) \\ V_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_r \\ W_j \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_D W_j = \frac{(n-i_1)-(i_j-i_1)}{d} \end{array} \right\} \end{array}$$

□

De même, on a :

Lemme 3.3.15. — Soit A une algèbre d’Azumaya sur k de degré n . Soient $r > 1$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. Soit $I_r \subset A$ un idéal de k -dimension ni_r (i.e. : un point rationnel de $\text{SB}_{i_r}(A)$). On a alors une bijection canonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1, \dots, I_{r-1}) \\ I_1 \subset \dots \subset I_{r-1} \subset I_r \subset A \\ I_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I_j = ni_j \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (J_1, \dots, J_{r-1}) \\ J_1 \subset \dots \subset J_{r-1} \subset I_r/I_r^\circ I_r \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = i_j i_r \end{array} \right\}$$

$$(I_j)_{j=1 \dots (r-1)} \longmapsto (I_j/I_r^\circ I_j)_{j=1 \dots (r-1)}$$

Démonstration. — La preuve est analogue à celle qui précède. Posons $B = \text{End}_A(I_r) = I_r/I_r^\circ I_r$ (corollaire 3.3.12). C’est donc une algèbre d’Azumaya sur k d’indice $d = \text{ind } A$ et de degré i_r . Pour $j \leq (r-1)$, posons $J_j = I_j/I_r^\circ I_j$. La multiplication nous donne une action de I_r (à gauche) sur I_j . Cette action donne naissance à une action de I_r sur J_j puisque $I_r I_r^\circ = 0$. Finalement, elle permet d’obtenir une action (multiplication à gauche) de B sur J_j . Ainsi J_j est muni d’une structure de B -module. De plus, l’injection canonique $I_j \rightarrow I_r$ nous donne une application $I_j \rightarrow I_r/I_r^\circ I_r$ dont le noyau est $I_r^\circ I_j$, ainsi on a une application injective $J_j \rightarrow B$. Cette injection est compatible avec la structure de B -module et nous appellerons encore J_j son image dans B . Ainsi, les J_j sont des idéaux à gauche de B de k -dimension $i_j i_r$ d’après 3.3.8. On a donc une flèche ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1, \dots, I_{r-1}) \\ I_1 \subset \dots \subset I_{r-1} \subset I_r \subset A \\ I_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I_j = ni_j \end{array} \right\} \xrightarrow{\phi} \left\{ \begin{array}{l} (J_1, \dots, J_{r-1}) \\ J_1 \subset \dots \subset J_{r-1} \subset I_r/I_r^\circ I_r \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = i_j i_r \end{array} \right\}$$

On peut supposer que $A = \text{End}_D(E)$ pour un corps gauche D de dimension d^2 sur k et un D -vecteuriel à droite E de dimension r . Alors $n = rd$. Soit $V_r \subset E$ tel que $I_r = \text{Hom}_D(E/V_r, E)$. On a alors $B = \text{End}_A(I_r) = I_r/I_r^\circ I_r = \text{Hom}(E/V_r, E/V_r)$ (corollaire 3.3.12).

Le diagramme commutatif suivant dont les flèches verticales sont données par la proposition 3.3.5 permet de conclure :

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{l} (I_2, \dots, I_{r-1}) \\ I_1 \subset \dots \subset I_{r-1} \subset I_r \subset A \\ I_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I_j = ni_j \end{array} \right\} & \xrightarrow{\phi} & \left\{ \begin{array}{l} (J_1, \dots, J_{r-1}) \\ J_1 \subset \dots \subset J_{r-1} \subset I_r/I_r^\circ I_r \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = i_j i_r \end{array} \right\} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} (V_1, \dots, V_{r-1}) \\ E \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_r \\ V_j \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_D V_j = \frac{n-i_j}{d} \end{array} \right\} & \xrightleftharpoons{\pi} & \left\{ \begin{array}{l} (W_1, \dots, W_{r-1}) \\ E/V_r \supset W_1 \supset \dots \supset W_{r-1} \\ W_j \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_D W_j = \frac{i_r-i_j}{d} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

où π est la projection naturelle : $E \rightarrow E/V_r$. $\square$

La proposition suivante est la clef de la preuve du théorème 3.2.2.

Proposition 3.3.16. — *Soit A une algèbre d'Azumaya sur k de degré n . Soient $r > 1$ et $i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. Soit $s \in \{1 \dots r\}$. Soit $I_s \subset A$ un idéal de k -dimension ni_s (i.e. : un point rationnel de $\mathrm{SB}_{i_s}(A)$). L'application :*

$$\begin{array}{c}
 (I_1, \dots, \hat{I}_s, \dots, I_r) \\
 \downarrow \\
 ((I_j/I_r^\circ I_j)_{j=1..(s-1)}, (I_s^\circ I_j/I_s^\circ I_s)_{j=(s+1)..r})
 \end{array}$$

définit une bijection :

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l} (I_1, \dots, \hat{I}_s, \dots, I_r) \\ I_1 \subset \dots \subset I_r \subset A \\ I_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I_j = ni_j \end{array} \right\} \\
 \updownarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} (J_1, \dots, J_{s-1}) \\ J_1 \subset \dots \subset J_{s-1} \subset I_s/I_s^\circ I_s \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = i_j i_s \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} (J_{s+1}, \dots, J_r) \\ J_{s+1} \subset \dots \subset J_r \subset I_s^\circ/I_s^\circ I_s \\ J_j \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J_j = (n - i_s)(i_j - i_s) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Démonstration. — Ce sont les deux lemmes précédents. $\square$

Remarque 3.3.17. — Les propositions et lemmes précédents s'étendent au cas où A est une algèbre d'Azumaya sur une k -algèbre R . En effet, les flèches ϕ introduites à la proposition 3.3.13 puis aux lemmes 3.3.14 et 3.3.15 et enfin à la proposition 3.3.16 ont toujours un sens si A est une algèbre d'Azumaya sur une k -algèbre R . Il en est de même de leur réciproque.

3.3.3. Preuve du théorème 3.2.1

Grâce aux résultats du paragraphe précédent, on est en mesure de prouver le théorème 3.2.1 :

Démonstration. — Fixons $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ une suite d'entiers. Notons $S = \text{SB}_{i_1}(A) = \text{SB}(A)$ et $X = \text{SB}_{1,i_2,\dots,i_r}(A)$. Et posons, pour $j > 1$, $a_j = (n - i_j)$. Considérons l'application identité : $S \rightarrow S$. Elle nous fournit de facto un S -point de S i.e. un élément de $S(S)$. Il correspond à un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset A \otimes_k \mathcal{O}_S$. Soit s un L -point de S , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(L) & \xrightarrow{s} & S \\ & \searrow s & \nearrow \mathcal{I} \\ & & S \end{array}$$

Or s correspond à un idéal à gauche de k -dimension n , I_s de $A \otimes_k L$, on a : $\mathcal{I}_s = I_s$. Ou de manière abusive : $\mathcal{I}_I = I$ en confondant $I = I_s$ et s , abus que l'on fera dans la suite si aucune ambiguïté n'est à craindre. Comme nous avons défini l'annulateur de I , I° , nous pouvons définir l'annulateur de $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^\circ$. On considère alors le fibré sur S suivant : $\mathcal{V} = \mathcal{I}^\circ \mathcal{I}$. Pour tout point I de S , on a : $\mathcal{V}_I = I^\circ I$. C'est un fibré vectoriel de rang $n - 1$ d'après le lemme 3.3.8.

Considérons la flèche suivante :

$$(I_1, \dots, I_r) \rightarrow (I_r^\circ I_1, I_{(r-1)}^\circ I_1, \dots, I_2^\circ I_1 \subset I_1^\circ I_1)$$

Elle permet de définir pour toute k -algèbre R une application bijective (proposition 3.3.13 et remarque 3.3.17) $X(R) \rightarrow \text{Drap}_{n-i_r, \dots, n-i_2}(\mathcal{V})(R)$. Et par suite, elle correspond à un isomorphisme :

$$X \rightarrow \text{Drap}_{n-i_r, \dots, n-i_2}(\mathcal{V}). \quad \square$$

3.3.4. Preuve du théorème 3.2.2

Démonstration. — Fixons $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ une suite d'entiers. Notons $S = \text{SB}_{i_s}(A)$ et $X = \text{SB}_{i_1, i_2, \dots, i_r}(A)$.

À partir du fibré $\mathcal{I}$ sur S défini dans la preuve du théorème 3.2.2, définissons $\mathcal{B}_+ = \mathcal{I}^\circ / \mathcal{I}^\circ \mathcal{I}$ et $\mathcal{B}_- = \mathcal{I} / \mathcal{I}^\circ \mathcal{I}$. D'après le lemme 3.3.9 et le corollaire 3.3.10, $\mathcal{B}_+$ est une algèbre d'Azumaya sur S de degré $n - i_s$ canoniquement isomorphe à $\mathrm{End}_S \mathcal{I}^\circ$. De même (3.3.11 et 3.3.12), $\mathcal{B}_-$ est une algèbre d'Azumaya sur S de degré i_s canoniquement isomorphe à $\mathrm{End}_S \mathcal{I}$.

Considérons la flèche suivante :

$$\begin{array}{c} (I_1, \dots, \hat{I}_s, \dots, I_r) \\ \downarrow \\ ((I_j / I_r^\circ I_j)_{j=1..(s-1)}, (I_s^\circ I_j / I_s^\circ I_s)_{j=(s+1)..r}) \end{array}$$

Elle permet de définir pour toute k -algèbre R une application bijective (proposition 3.3.16 et remarque 3.3.17) :

$$X(R) \rightarrow \mathrm{SB}_{i_1, \dots, i_{s-1}}(\mathcal{B}_-) \times_{\mathrm{SB}_{i_s}(A)} \mathrm{SB}_{i_{s+1}-i_s, \dots, i_r-i_s}(\mathcal{B}_+)(R).$$

Et par suite, elle correspond à un isomorphisme

$$X \rightarrow \mathrm{SB}_{i_1, \dots, i_{s-1}}(\mathcal{B}_-) \times_{\mathrm{SB}_{i_s}(A)} \mathrm{SB}_{i_{s+1}-i_s, \dots, i_r-i_s}(\mathcal{B}_+). \quad \square$$

3.3.5. Preuve du corollaire 3.2.3

On est en mesure de prouver le corollaire 3.2.3 :

Démonstration. — Ici $\mathrm{Br}(S)$ désigne le groupe de Brauer de S , puisque S est lisse sur k , S est un schéma régulier. Alors, d'après [21, corollaire 1.10], la flèche naturelle d'évaluation

$$\mathrm{Br}(S) \rightarrow \mathrm{Br} k(S)$$

est injective, où $k(S)$ désigne le corps des fonctions de S . Or pour tout I , $\mathcal{B}_{+I} = \mathrm{End}_A I^\circ$ et $\mathcal{B}_{-I} = \mathrm{End}_A I$. Ainsi, puisque $\mathrm{ind} A_{\kappa(I)} = 1$ et que d'après le corollaire 3.3.10, les classes de $A_{\kappa(I)}$ et de $\mathrm{End}_A I^\circ$ sont égales dans $\mathrm{Br} \kappa(I)$, $\mathcal{B}_+$ est triviale dans $\mathrm{Br} S$. De même, $\mathcal{B}_-$ est triviale dans $\mathrm{Br} S$. Ainsi les deux flèches suivantes

$$\mathrm{SB}_{i_1, \dots, i_{s-1}}(\mathcal{B}^-) \rightarrow \mathrm{SB}_{i_s}(A)$$

et

$$\mathrm{SB}_{i_{s+1}-i_s, \dots, i_r-i_s}(\mathcal{B}^+) \rightarrow \mathrm{SB}_{i_s}(A)$$

sont des fibrations en variétés de drapeaux non tordues, et par suite

$$\begin{array}{c} \mathrm{SB}_{i_1, \dots, i_{s-1}}(\mathcal{B}_-) \times_{\mathrm{SB}_{i_s}(A)} \mathrm{SB}_{i_{s+1}-i_s, \dots, i_r-i_s}(\mathcal{B}_+) \\ \downarrow \\ \mathrm{SB}_{i_s}(A) \end{array}$$

est une fibration en produit de variétés de drapeaux non tordues. $\square$

3.4. Calcul des groupes de Chow de fibrés en drapeaux

3.4.1. Partitions d'entiers.

Définition 3.4.1. — Si n est un entier ≥ 1 , alors une partition de n (cf. [11, Paragraphe 2.1, définition A]) est la représentation de n comme somme d'entiers ≥ 1 , sans considération d'ordre dans la somme. Nous noterons par $p(n)$ le nombre de telles représentations de n . L'entier $P(n, m)$ sera le nombre de telles représentations avec exactement m termes dans la somme (on parlera alors de m -partition stricte de n), et $p(n, m)$ le nombre de telles représentations avec au plus m termes dans la somme, on parlera alors de m -partition de n :

$$p(n, m) = \sum_{i=1}^m P(n, i).$$

Si de plus A est un entier, une (m, A) -partition (resp. stricte) de n est une m -partition (resp. stricte) de n telle que chaque terme intervenant dans la somme soit inférieur à A . Nous noterons $P(n, m, A)$ le nombre de telles partitions strictes, et $p(n, m, A)$ le nombre de (m, A) -partition de n :

$$p(n, m, A) = \sum_{i=1}^m P(n, i, A).$$

Remarque 3.4.2. — si $A \geq n$ alors $P(n, m, A) = P(n, m)$.

Remarque 3.4.3. — Pour des entiers n, m, A , on a :

$$p(n, m, A) = \sum_{i=1}^m P(n, i, A).$$

Ainsi :

$$P(n, m, A) = p(n, m, A) - p(n, m-1, A).$$

On dispose de plusieurs caractérisations pour les m -partitions ([11, définition B et théorème A paragraphe 2.1]) :

Lemme 3.4.4. — *Soit n un entier ≥ 1 . Se donner une partition de n en exactement m termes (au sens de 3.4.1) est équivalent à se donner une solution de*

$$\begin{cases} y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 1, \\ y_1 + \dots + y_m = n. \end{cases}$$

Et cela est encore équivalent à se donner une solution de :

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = m. \end{cases}$$

Démonstration. — Pour la première caractérisation, on a juste à classer les termes de la somme par ordre décroissant. Pour la seconde caractérisation, il suffit de poser $\forall j, x_j = |\{s \in \{1, \dots, m\}, y_s = j\}|$. $\square$

On a des caractérisations semblables pour les (m, A) -partitions :

Lemme 3.4.5. — *Soient $n, m, A \geq 1$ des entiers. Se donner une (m, A) -partition stricte de n est équivalent à se donner une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} A \geq y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 1, \\ y_1 + \dots + y_m = n. \end{cases}$$

Ceci est encore équivalent à se donner une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 + \dots + Ax_A = n, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_A = m. \end{cases}$$

Démonstration. — La preuve est semblable à celle du lemme précédent. $\square$

Lemme 3.4.6. — *Soient $n, m, A \geq 1$ des entiers.*

- (i) $P(n, m, 1) = 1$ si $m = n$ et 0 sinon,
 $p(n, m, 1) = 1$ si $n \geq m$ et 0 sinon.
- (ii) $P(n, 1, A) = 1$ si $A \geq n$,
 $p(n, 1, A) = 1$ si $A \geq n$.

(iii)

$$P(n, m, A) \geq 1 \iff m \leq n \leq mA$$

et

$$p(n, m, A) \geq 1 \iff n \leq mA.$$

Démonstration. — Supposons $n, m, A \geq 1$ donnés. Les assertions (i) et (ii) sont évidentes. Pour (iii), $P(n, m, A) \geq 1$ signifie que l'on dispose de m entiers compris entre 1 et A , disons $x_1, \dots, x_m$ tels que $n = x_1 + \dots + x_m$. Nécessairement, on doit avoir $m \leq n \leq mA$. Inversement, si l'on suppose que $m \leq n \leq mA$, il est immédiat de voir que $P(n, m, A) \geq 1$. Pour $p(n, m, A)$, il suffit de remarquer que $p(n, m, A) = \sum_{i=1}^m P(n, i, A)$. $\square$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème B du paragraphe 2.1 de [11].

Théorème 3.4.7. — Soient $n, m, A \geq 1$ des entiers tels que $n > m$, $m > 1$ et $A > 1$. Alors on a :

$$p(n, m, A) = p(n, m-1, A) + p(n-m, m, A-1)$$

Démonstration. — L'entier $p(n, m, A)$ est le nombre de solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 + \dots + Ax_A = n, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_A \leq m. \end{cases}$$

Or ces solutions se décomposent en 2 groupes, celui consistant en les solutions telles que $x_1 + \dots + x_A = m$ et celui consistant en les solutions telles que $x_1 + \dots + x_A < m$. Dans le second groupe, il y a exactement $p(n, m-1, A)$ éléments. Il reste donc à connaître le cardinal du premier groupe. Or se donner une solution de :

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_A \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 + \dots + Ax_A = n, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_A = m \end{cases}$$

est équivalent à se donner une solution de :

$$\begin{cases} A \geq y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 1, \\ y_1 + \dots + y_m = n, \end{cases}$$

qui est équivalent à se donner une solution pour $s \leq m$ de :

$$\begin{cases} A - 1 \geq y_1 \geq \dots \geq y_s \geq 1, \\ y_1 + \dots + y_s = n - m. \end{cases}$$

Donc le cardinal du premier groupe est $p(n - m, m, A - 1)$. $\square$

Corollaire 3.4.8. — [11, Paragraphe 2.1, Théorème B] *Pour des entiers $n, m \geq 1$ tels que $n > m$ et $m > 1$, on a :*

$$p(n, m) = p(n, m - 1) + p(n - m, m).$$

Démonstration. — Il suffit de prendre A assez grand dans le théorème précédent. $\square$

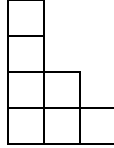
On a une représentation graphique des partitions d'entiers :

Définition 3.4.9. — Un diagramme de Ferrer ou diagramme de Young est la représentation graphique d'une partition d'un entier. Si n est un entier ≥ 1 et

$$\begin{cases} y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 1 \\ y_1 + \dots + y_m = n \end{cases}$$

une partition de n en m termes alors le diagramme de Ferrer associé est le diagramme en deux dimensions constitué de lignes, telles que la i -ème ligne (en partant du bas) comporte exactement y_i carrés.

Exemple 3.4.10. — Le diagramme de Ferrer associé à la partition $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ est le suivant :



Définition 3.4.11. — Soit $\mathcal{T}$ un diagramme de Ferrer associé à une partition. Considérons les colonnes de gauche à droite de $\mathcal{T}$. Si $\tilde{y}_i$ désigne le nombre de carrés de la i -ème colonne, alors on obtient une nouvelle partition de $n = \sum_i \tilde{y}_i$, qui est appelée la partition conjuguée de n .

Proposition 3.4.12. — [11, Paragraphe 2.3, Théorème A] *Soit $n \geq 1$ un entier. Alors le nombre de partition de n en exactement m termes est égal au nombre de partitions de n dont la maximum des termes est m .*

Démonstration. — Il suffit de considérer les partitions conjuguées. En effet si $\mathcal{T}$ est une partition de n en exactement m termes dont le maximum est A alors $\mathcal{T}$ sera contenu dans un rectangle de largeur m et de hauteur A . Et ainsi la partition conjuguée aura exactement A termes dont le maximum sera m . $\square$

Remarque 3.4.13. — Soient $n, m, A \geq 1$ des entiers. L'entier $p(n, m, A)$ compte exactement le nombre de diagrammes de Ferrer à n carrés inclus dans le rectangle de largeur m et de hauteur A .

Le théorème suivant est une variante du théorème d'Euler calculant la fonction génératrice de $P(n)$. Il est à rapprocher du théorème A du paragraphe 2.2 de [11].

Théorème 3.4.14. — Fixons un entier $A \in \mathbf{N}^*$. La fonction génératrice de $P(n, m, A)$ (appartenant à $\mathbf{Z}[[x, y]]$) est :

$$\Xi_A(x, y) = \prod_{i=1}^A \frac{1}{1 - xy^i} = \sum_{n, m} P(n, m, A) x^m y^n.$$

Démonstration. — Développons le produit :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^A \frac{1}{1 - xy^i} &= \prod_{i=1}^A \left(\sum_{j_i \geq 0} x^{j_i} y^{ij_i} \right) \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_A} x^{x_1 + \dots + x_A} y^{x_1 + 2x_2 + \dots + Ax_A} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 3.4.5. $\square$

Définition 3.4.15. — Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $r \geq 1$, $m_1, \dots, m_r$ et $A_1, \dots, A_r$ $2r$ entiers, une $((m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r))$ -partition stricte de n est une solution du système en les $y_{i,j}$ suivant :

$$\begin{cases} \forall i = 1 \dots r \begin{cases} A_i \geq y_{i,1} \geq \dots \geq y_{i,m_i} \geq 1 \\ y_{i,1} + \dots + y_{i,m_i} = n_i \end{cases} \\ n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_r = n \end{cases}$$

Nous noterons $Q(n, (m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r))$ le nombre de telles partitions. L'entier $q(n, (m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r))$ sera le cardinal des $(s_1, A_1), \dots, (s_r, A_r)$ -partitions strictes de n pour $s_1 \leq m_1, \dots, s_r \leq m_r$, i.e. le nombre de

solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \forall i = 1 \dots r \begin{cases} A_i \geq y_{i,1} \geq \dots \geq y_{i,m_i} \geq 0 \\ y_{i,1} + \dots + y_{i,m_i} = n_i \end{cases} \\ n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_r = n \end{cases}$$

On parlera alors de $((m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r))$ -partition de n .

Notation 3.4.16. — Pour des entiers m, A , on notera $\pi_{(m,A)}$ la distribution associée à la fonction p :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ i &\mapsto \pi_{(m,A)}(i) = p(i, m, A). \end{aligned}$$

Rappelons la définition du produit de convolution :

Définition 3.4.17. — Soient f, g deux fonctions sur $\mathbf{N}$. Le produit de convolution est la fonction sur $\mathbf{N}$ définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N} \\ n &\mapsto (f \star g)(n) = \sum_{l=0}^n f(n-l)g(l). \end{aligned}$$

Remarque 3.4.18. — Reprenons les notations de la définition précédente. Si l'on définit les deux séries formelles (appartenant à l'anneau $\mathbf{Z}[[t]]$) :

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_n f(n)t^n \\ G(t) &= \sum_n g(n)t^n \end{aligned}$$

où $\forall n, f(n), g(n) \in \mathbf{Z}$. Alors la série produit FG (i.e. le produit de F et G dans l'anneau $\mathbf{Z}[[t]]$) est exactement :

$$FG(t) = \sum_n f \star g(n)t^n.$$

Remarque 3.4.19. — L'opérateur $\star$ est associatif et commutatif et l'élément unité est la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 ailleurs.

Le théorème suivant permet de calculer les fonctions q à partir des fonctions p :

Théorème 3.4.20. — Soient $r \geq 1$ et $(m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r)$ des entiers. Alors :

$$q(-, (m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r)) = \pi_{(m_1, A_1)} \star \dots \star \pi_{(m_r, A_r)}$$

c'est-à-dire la distribution associée à $q(-, (m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r))$ est le produit de convolution des distributions associées à $p(-, m_i, A_i)$.

Démonstration. — Fixons un n . Pour $r = 1$, c'est clair, puisque $q(n, (m_1, A_1)) = p(n, m_1, A_1)$. En effet, $\pi_{(m_1, A_1)}(n_1) = p(n_1, m_1, A_1)$ est exactement le nombre de solutions de :

$$\begin{cases} A_1 \geq y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 0, \\ y_1 + \dots + y_m = n_1. \end{cases}$$

Supposons donc $r \geq 2$. $q(n, (m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r))$ compte le nombre de solutions de :

$$\begin{cases} \begin{cases} A_1 \geq y_{1,1} \geq \dots \geq y_{1,m_1} \geq 0 \\ y_{1,1} + \dots + y_{1,m_1} = n_1 \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} A_r \geq y_{r,1} \geq \dots \geq y_{r,m_r} \geq 0 \\ y_{r,1} + \dots + y_{r,m_r} = n_r \end{cases} \\ n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_r = n \end{cases}$$

autrement dit, cet entier compte les solutions de :

$$\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases} A_1 \geq y_{1,1} \geq \dots \geq y_{1,m_1} \geq 0 \\ y_{1,1} + \dots + y_{1,m_1} = n_1 \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} A_r \geq y_{r-1,1} \geq \dots \geq y_{r,m_{r-1}} \geq 0 \\ y_{r-1,1} + \dots + y_{r-1,m_{r-1}} = n_r \end{cases} \end{cases} \\ n_1, \dots, n_{r-1} \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_{r-1} = m \\ \begin{cases} \begin{cases} A_r \geq y_{1,r} \geq \dots \geq y_{1,m_r} \geq 0 \\ y_{1,r} + \dots + y_{1,m_r} = n_r \end{cases} \\ n_r \geq 0 \end{cases} \\ m + n_{r-1} = n \end{cases}$$

Donc

$$q(n, (m_1, A_1), \dots, (m_r, A_r)) = \sum_{n_r=1}^n \sum_{m=1}^n \pi_{(m_r, A_r)}(n_r) \times q(m, (m_1, A_1), \dots, (m_{r-1}, A_{r-1})) \times \chi_n(m + n_r)$$

où χ_n est la fonction caractéristique de n qui vaut toujours 0 sauf en n où elle vaut 1. Le résultat est alors acquis par récurrence sur r . $\square$

Remarque 3.4.21. — Dans la suite, on écrira $y = (A \geq y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 0)$ pour désigner la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} A \geq y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 0 \\ y_1 + \dots + y_m = n \end{cases}$$

Et on écrira $|y|$ pour $y_1 + \dots + y_m$. Donc, $y = (A \geq y_1 \geq \dots \geq y_m \geq 0)$ est une (m, A) -partition de $|y|$.

3.4.2. Fibration en grassmanniennes.

Définition 3.4.22. — Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d)$ une partition. Soient c_i pour $i \geq 1$ des indéterminées. On définit le polynôme de Schur correspondant :

$$\Delta_\lambda(c) = \Delta_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}(c) = \det(c_{\lambda_j + j - i}) \in \mathbf{Z}[c_i, i \in \mathbf{N}^*]$$

en posant $c_n = 0$ si $n < 0$, et $c_0 = 1$.

Notation 3.4.23. — Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur une variété X . Soit d un entier plus petit que n , posons $Y = \mathrm{Drap}_d(\mathcal{E})$, le fibré en d -grassmanniennes associé à $\mathcal{E}$. Notons f la projection $Y \rightarrow X$. On dispose d'une suite exacte universelle :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow f^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{S}$ est le sous-fibré tautologique de rang d , et $\mathcal{Q}$ le fibré quotient tautologique de rang $n - d$. On pose pour $i \geq 0$:

$$c_i = c_i(\mathcal{Q} - f^*(\mathcal{E})) = c_i(\mathcal{S})$$

où la fonction c_i est la i -ème classe de Chern ([15, Section 3.2] pour leur définition et propriétés). Pour une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d)$, on notera si aucune ambiguïté n'est à craindre Δ_λ le polynôme de Schur (définition précédente) associé à ces valeurs de c_i .

D'après [15, Proposition 14.6.5], on a le résultat suivant (dit théorème de la base) qui est une généralisation de la formule de Giambella ([15, Proposition 14.6.4]) :

Proposition 3.4.24. — Si X est une variété sur k de dimension N , et $\mathcal{E}$ un fibré de rang n , alors pour $d < n$ et $k \leq d(n - d)$, il existe un isomorphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_\lambda \mathrm{CH}^{k-|\lambda|}(X) & \rightarrow & \mathrm{CH}^k(\mathrm{SB}_d(\mathcal{E})) \\ \alpha_\lambda & \mapsto & \Delta_\lambda \cdot f^*(\alpha_\lambda) \end{array}$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d)$ telles que $n - d \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$, et Δ_λ a été définie précédemment.

Corollaire 3.4.25. — Avec les notations de la proposition précédente, on dispose d'un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(\mathrm{Drap}_d(\mathcal{E})) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^k \mathrm{CH}^{k-i}(X)^{p(i,d,n-d)}$$

où la fonction p a été définie au paragraphe précédent.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que le nombre de partitions $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d)$ avec $n - d \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$ avec $|\lambda| = i$ pour un i donné est exactement le nombre de $(d, n - d)$ -partitions de i . $\square$

Lemme 3.4.26. — Soient S une k -variété et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur S . Soient $r \geq 1$ et $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{r+1} \leq n$ des entiers. Posons $Y = \mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_{r+1}}(\mathcal{E})$ et $X = \mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{E})$. Alors il existe un fibré vectoriel $\mathcal{W}$ sur X de rang $n - i_r$ tel que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_{r+1}}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Drap}_{i_{r+1}-i_r}(\mathcal{W}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{E}) & \\ & \downarrow & \\ & S & \end{array}$$

Démonstration. — On dispose sur $\mathrm{Drap}_{i_r}(\mathcal{E})$ du fibré tautologique $\mathcal{V}_r$ tel que pour tout $W \in \mathrm{Drap}_{i_r}(\mathcal{E})$, on ait $(\mathcal{V}_r)_W = W$ (la construction est la même que dans la preuve du théorème 3.2.1). Notons π_r la projection naturelle $\mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathrm{Drap}_{i_r}(\mathcal{E})$ et π la projection $\mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{E}) \rightarrow S$. On a une inclusion $\pi_r^* \mathcal{V}_r \rightarrow \pi^* \mathcal{E}$. Alors on construit le fibré vectoriel $\mathcal{W}$ sur $\mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_r}(\mathcal{E})$ comme étant le quotient, i.e. tel que la suite suivante soit exacte :

$$0 \longrightarrow \pi_r^* \mathcal{V}_r \longrightarrow \pi^* \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour tout $(V_1, \dots, V_r) \in X$, $\mathcal{W}_{(V_1, \dots, V_r)} = \mathcal{E}_{\pi(V_1, \dots, V_r)} / V_r$. $\mathcal{W}$ est donc un fibré de rang $n - i_r$.

L'application $(V_1, \dots, V_{r+1}) \mapsto V_{r+1}/V_r$ fournit donc pour toute k -algèbre R une application : $\mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_{r+1}}(\mathcal{E})(R) \rightarrow \mathrm{Drap}_{i_{r+1}-i_r}(\mathcal{W})(R)$.

Cette application correspond à un isomorphisme :

$$\mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_{r+1}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Drap}_{i_{r+1}-i_r}(\mathcal{W}). \quad \square$$

3.4.3. Fibration en variétés de drapeaux

En itérant le lemme 3.4.26, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.4.27. — *Si S est une variété sur k , $\mathcal{E}$ un fibré de rang n sur S , $r \geq 1$ un entier, et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ une suite d'entiers, alors pour tout k , on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{CH}^k(\mathrm{Drap}_{i_1, i_2, \dots, i_r}(\mathcal{E})) \rightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \mathrm{CH}^{k-|\lambda_1|-\dots-|\lambda_r|}(S)$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $\lambda_s = (n - i_s \geq \lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}} \geq 0)$ pour $s \in \{1, \dots, r\}$, en définissant $i_0 = 0$.

Démonstration. — Posons $X_0 = S$, et pour $s \in \{1, \dots, n\}$, $X_s = \mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_s}(\mathcal{E})$. D'une part, $X_1 \rightarrow X_0$ étant par construction même une fibration en grassmanniennes, on a, d'après la proposition 3.4.24, un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(X_1) \rightarrow \bigoplus_{\lambda_1} \mathrm{CH}^{k-|\lambda_1|}(X_0)$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $\lambda_1 = (\lambda_{1,1} \geq \dots \geq \lambda_{1,i_1})$ telles que $n - i_1 \geq \lambda_{1,1} \geq \dots \geq \lambda_{1,i_1} \geq 0$.

D'autre part, d'après le lemme 3.4.26, pour tout $s \in \{2 \dots r\}$, la projection naturelle $X_s \rightarrow X_{s-1}$ est une fibration en grassmanniennes, i.e. : il existe un fibré vectoriel $\mathcal{W}_s$ sur X_{s-1} de rang $n - i_{s-1}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_s & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Drap}_{i_s-i_{s-1}}(\mathcal{W}_s) \\ & \searrow & \swarrow \\ & X_{s-1} & \end{array}$$

et ainsi d'après la proposition 3.4.24, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(X_s) \rightarrow \bigoplus_{\lambda_s} \mathrm{CH}^{k-|\lambda_s|}(X_{s-1})$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $\lambda_s = (\lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}} \geq 0)$ telles que $n - i_s \geq \lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}} \geq 0$.

Par récurrence, il suffit alors de considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X_r & \xrightarrow{\sim} & \text{Drap}_{i_r-i_{r-1}}(\mathcal{W}_r) \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 X_{r-1} & \xrightarrow{\sim} & \text{Drap}_{i_{r-1}-i_{r-2}}(\mathcal{W}_{r-1}) \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 X_{r-2} & & \\
 \vdots & & \\
 X_1 & \xrightarrow{\sim} & \text{Drap}_{i_1}(\mathcal{W}_1) \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 X_0 & &
 \end{array}$$

En particulier $\mathcal{W}_1 = \mathcal{E}$. Donc on obtient un isomorphisme :

$$\text{CH}^k(\text{Drap}_{i_1, i_2, \dots, i_r}(\mathcal{E})) \rightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \text{CH}^{k-|\lambda_1|-\dots-|\lambda_r|}(S)$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $\lambda_s = (\lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}})$ telles que $n-i_s \geq \lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}} \geq 0$ pour $s = 1, \dots, r$, en définissant $i_0 = 0$. $\square$

Corollaire 3.4.28. — *Conservons les notations de la proposition précédente, on a un isomorphisme :*

$$\text{CH}^k(\text{Drap}_{i_1, i_2, \dots, i_r}(\mathcal{E})) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^k (\text{CH}^{k-i}(S))^{n_i}$$

où $n_i = q(i, (i_1, n-i_1), (i_2-i_1, n-i_2), \dots, (i_r-i_{r-1}, n-i_r))$ (la fonction q est définie au paragraphe précédent).

Démonstration. — Il suffit de remarquer que pour un i donné, le nombre d'occurrences de i dans la somme $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_r|$ pour toutes les partitions $\lambda_s = (\lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}})$ telles que $n-i_s \geq \lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}} \geq 0$ pour $s \in \{1, \dots, r\}$ est exactement le nombre de $((i_1, n-i_1), (i_2-i_1, n-i_2), \dots, (i_r-i_{r-1}, n-i_r))$ -partitions de i . Donc il y a exactement

$q(i, (i_1, n - i_1), (i_2 - i_1, n - i_2), \dots, (i_r - i_{r-1}, n - i_r))$ occurrences de i dans la somme. $\square$

3.4.4. Fibration en produit de variétés de drapeaux.

Ici encore, il s'agit d'une conséquence du lemme 3.4.26.

Proposition 3.4.29. — *Soient S une variété sur k , $\mathcal{E}_-$ et $\mathcal{E}_+$ deux fibrés vectoriels sur S de rang n_- et n_+ respectivement, $1 \leq s \leq r \leq n$ deux entiers, et $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n_-$ et $1 \leq i_{s+1} < \dots < i_r \leq n_+$ deux suites d'entiers. Posons $X = \mathrm{Drap}_{i_1, \dots, i_s}(\mathcal{E}_-)$ et $Y = \mathrm{Drap}_{i_{s+1}, \dots, i_r}(\mathcal{E}_+)$. Alors pour tout k , on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{CH}^k(X \times_S Y) \rightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \mathrm{CH}^{k - |\lambda_1| - \dots - |\lambda_r|}(S)$$

où la somme est prise sur toutes les partitions :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (n_- - i_1 \geq \lambda_{1,1} \geq \dots \geq \lambda_{1,i_1} \geq 0) \\ \lambda_2 &= (n_- - i_2 \geq \lambda_{2,1} \geq \dots \geq \lambda_{2,i_2-i_1} \geq 0) \\ &\vdots \\ \lambda_s &= (n_- - i_s \geq \lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_s-i_{s-1}} \geq 0) \\ \lambda_{s+1} &= (n_+ - i_{s+1} \geq \lambda_{s+1,1} \geq \dots \geq \lambda_{s+1,i_{s+1}} \geq 0) \\ \lambda_{s+2} &= (n_+ - i_{s+2} \geq \lambda_{s+2,1} \geq \dots \geq \lambda_{s+2,i_{s+2}-i_{s+1}} \geq 0) \\ &\vdots \\ \lambda_r &= (n_+ - i_r \geq \lambda_{r,1} \geq \dots \geq \lambda_{r,i_r-i_{r-1}} \geq 0). \end{aligned}$$

Démonstration. — Considérons le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ \downarrow \pi_Y & \square & \downarrow f_X \\ Y & \xrightarrow{f_Y} & S \end{array}$$

Alors il suffit d'appliquer la proposition 3.4.27 aux deux fibrations en variétés de drapeaux : $X \rightarrow S$ et $X \times_S Y \rightarrow X$. $\square$

Corollaire 3.4.30. — *Conservons les notations de la proposition précédente. On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{CH}^k(X \times_S Y) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^k (\mathrm{CH}^{k-i} S)^{n_i}$$

où $n_i = q(i, (i_1, n_- - i_1), (i_2 - i_1, n_- - i_2), \dots, (i_s - i_{s-1}, n_- - i_s), (i_{s+1}, n_+ - i_{s+1}), (i_{s+2} - i_{s+1}, n_+ - i_{s+2}), \dots, (i_r - i_{r-1}, n_+ - i_r))$. (la fonction q a été définie au paragraphe précédent).

Démonstration. — La preuve est analogue à celle du corollaire 3.4.28. $\square$

3.5. Applications

3.5.1. Groupes de Chow des variétés de drapeaux tordues

Grâce aux résultats sur le calcul des groupes de Chow des variétés de drapeaux du paragraphe précédent, au théorème 3.2.1 et aux corollaires 3.2.3 et 3.2.4, on est en mesure de calculer de façon explicite les groupes de Chow des variétés tordues sous quelques hypothèses.

3.5.1.1. *Cas $i_1 = 1$.* — Si l'on est sous les hypothèses du théorème 3.2.1 :

Proposition 3.5.1. — *Soient A une algèbre d'Azumaya sur k de degré n et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. On suppose que $i_1 = 1$. Alors on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{CH}^k(\mathrm{SB}_{1,i_2,\dots,i_r}(A)) \rightarrow \bigoplus_{\lambda_r,\dots,\lambda_2} \mathrm{CH}^{k-|\lambda_r|-\dots-|\lambda_2|}(\mathrm{SB}(A))$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $\lambda_s = (\lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_{r-s+3}-i_{r-s+2}})$ telles que $i_{r-s+2} - 1 \geq \lambda_{s,1} \geq \dots \geq \lambda_{s,i_{r-s+3}-i_{r-s+2}} \geq 0$ pour $s \in \{2, \dots, r\}$ en posant $i_{r+1} = n$, et un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(\mathrm{SB}_{1,i_2,\dots,i_r}(A)) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^k \mathrm{CH}^{k-i}(\mathrm{SB}(A))^{n_i}$$

avec $n_i = q(i, (i_{r+1} - i_r, i_r - 1), (i_r - i_{r-1}, i_{r-1} - 1), \dots, (i_3 - i_2, i_2 - 1))$.

Démonstration. — C'est l'application de la proposition 3.4.27 et du corollaire 3.4.28 à un fibré de rang $n - 1$ sachant le résultat du théorème 3.2.1. $\square$

3.5.1.2. *Sous les hypothèses du corollaire 3.2.3*

Proposition 3.5.2. — *Soient A une algèbre d'Azumaya sur k de degré n et $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. Conservons les hypothèses du corollaire 3.2.3. Alors on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{CH}^k(\mathrm{SB}_{i_1,i_2,\dots,i_r}(A)) \rightarrow \bigoplus_{\lambda_1,\dots,\widehat{\lambda_s},\dots,\lambda_r} \mathrm{CH}^{k-|\lambda_1|-\dots-|\widehat{\lambda_s}|-\dots-|\lambda_r|}(\mathrm{SB}_{i_s}(A))$$

où la somme est prise sur toutes les partitions

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (i_s - i_1 \geq \lambda_{1,1} \geq \dots \geq \lambda_{1,i_1} \geq 0) \\
\lambda_2 &= (i_s - i_2 \geq \lambda_{2,1} \geq \dots \geq \lambda_{2,i_2-i_1} \geq 0) \\
&\vdots \\
\lambda_{s-1} &= (i_s - i_{s-1} \geq \lambda_{s-1,1} \geq \dots \geq \lambda_{s-1,i_{s-1}-i_{s-2}} \geq 0) \\
\lambda_{s+1} &= (n - i_{s+1} \geq \lambda_{s+1,1} \geq \dots \geq \lambda_{s+1,i_{s+1}-i_s} \geq 0) \\
\lambda_{s+2} &= (n - i_{s+2} \geq \lambda_{s+2,1} \geq \dots \geq \lambda_{s+2,i_{s+2}-i_{s+1}} \geq 0) \\
&\vdots \\
\lambda_r &= (n - i_r \geq \lambda_{r,1} \geq \dots \geq \lambda_{r,i_r-i_{r-1}} \geq 0).
\end{aligned}$$

De plus, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(\mathrm{SB}_{i_1,i_2,\dots,i_r}(A)) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^k \mathrm{CH}^{k-i}(\mathrm{SB}_{i_s}(A))^{n_i}$$

où $n_i = q(i, (i_1, i_s - i_1), (i_2 - i_1, i_s - i_2), \dots, (i_{s-1} - i_{s-2}, i_s - i_{s-1}), (i_{s+1} - i_s, n - i_{s+1}), (i_{s+2} - i_{s+1}, n - i_{s+2}), \dots, (i_r - i_{r-1}, n - i_r))$.

Démonstration. — C'est l'application de la proposition 3.4.29 et du corollaire 3.4.30 sachant les résultats du théorème 3.2.2 et du corollaire 3.2.3. $\square$

Remarque 3.5.3. — Si l'on est sous les hypothèses du corollaire 3.2.4, alors, avec les mêmes notations, on dispose d'un $s \in \{1, \dots, r\}$ tel que le corollaire 3.2.3 puisse s'appliquer. Et par suite, la proposition précédente est encore valable avec ce s .

Remarquons que l'on a $n_0 = 1$. Ainsi, dans les deux propositions précédentes (3.5.1 et 3.5.2), pour un k donné, il existe des entiers n_i tels que l'on ait un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(X) \rightarrow \mathrm{CH}^k(S) \oplus (\oplus_{i \geq 1} \mathrm{CH}^{k-i}(S)^{n_i})$$

où X est la variété de drapeaux considérée et S la base sur laquelle on projette ($\mathrm{SB}(A)$ ou $\mathrm{SB}_{i_s}(A)$). Et, par suite, on a :

Corollaire 3.5.4. — *Plaçons-nous, soit dans les hypothèses de la proposition 3.5.1 soit dans celles de la proposition 3.5.2. Notons X la variété de drapeaux considérée et S la base (variété de Severi-Brauer) sur laquelle on projette. Soit k un entier. Si les groupes de Chow de S n'ont pas de torsion en codimension plus petite que k , alors il en va de même pour ceux de X , et la réciproque est vraie.*

3.5.1.3. Calcul à partir d'une variété de Severi-Brauer. — Fixons une algèbre d'Azumaya A sur k de degré n . Soient $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ des entiers. Supposons que $(\text{ind } A, i_1, \dots, i_r) = 1$. Posons $X = \text{SB}_{i_1, \dots, i_r}(A)$ et $S = \text{SB}(A)$. On souhaite calculer les groupes de Chow de X à partir de ceux de S . Si $i_1 = 1$, alors la proposition 3.5.1 permet de voir que les groupes de Chow de X se calculent explicitement à partir de ceux de S . Supposons donc désormais que $1 < i_1$. Posons $Y = \text{SB}_{1, i_1, \dots, i_r}(A)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ S & & X \end{array}$$

où la flèche f est l'application $(I, I_1, \dots, I_r) \mapsto (I_1, \dots, I_r)$.

Lemme 3.5.5. — *l'application $f : Y \rightarrow X$ est une fibration en espaces projectifs.*

Démonstration. — L'application f est une fibration en variétés de Severi-Brauer. Puisque $(\text{ind } A, i_1, \dots, i_r) = 1$, alors l'image de la classe de A dans $\text{Br}(k(X))$ est triviale (cf [46, (5.11)]). En outre, la classe de A et celle de $\mathcal{B}_-$ ont même image dans $\text{Br}(k(X))$. On en déduit alors que la classe de $\mathcal{B}_-$ est triviale. $\square$

On a donc, pour un entier k , les deux isomorphismes suivants :

$$\text{CH}^k(Y) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} \text{CH}^{k-i}(X) \quad \text{et} \quad \text{CH}^k(Y) \rightarrow \bigoplus_i \text{CH}^{k-i}(S)^{n_i}$$

avec $n_i = q(i, (n - i_r, i_r - 1), (i_r - i_{r-1}, i_{r-1} - 1), \dots, (i_2 - i_1, i_1 - 1))$. La seconde équation résulte simplement de la proposition 3.5.1. Quant à la première équation, il s'agit de la formule classique du calcul des groupes de Chow d'un fibré projectif en fonction des groupes de Chow de sa base (voir, par exemple, la proposition 2.4.1).

On a donc la proposition suivante :

Proposition 3.5.6. — *Pour tout k on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i \text{CH}^{k-1-i}(S)^{n_i} \longrightarrow \bigoplus_i \text{CH}^{k-i}(S)^{n_i} \longrightarrow \text{CH}^k(X) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — On a en effet une suite exacte pour tout k :

$$0 \longrightarrow \text{CH}^{k-1}(Y) \longrightarrow \text{CH}^k(Y) \longrightarrow \text{CH}^k(X) \longrightarrow 0.$$

$\square$

Remarque 3.5.7. — Ainsi $\mathrm{CH}^k(X)$ s'identifie à un quotient du groupe $\oplus_i \mathrm{CH}^{k-i}(S)^{n_i}$ par $\oplus_i \mathrm{CH}^{k-1-i}(S)^{n_i}$, mais l'injection

$$\oplus_i \mathrm{CH}^{k-1-i}(S)^{n_i} \rightarrow \oplus_i \mathrm{CH}^{k-i}(S)^{n_i}$$

n'est pas simple et fait intervenir les polynômes de Schur liés à la fibration $Y \rightarrow X$.

On peut en déduire aisément le corollaire suivant :

Corollaire 3.5.8. — *Conservons les mêmes notations. Soit k un entier. Si les groupes de Chow de S n'ont pas de torsion en codimension plus petites que k , alors il en va de même pour ceux de X , et la réciproque est vraie.*

3.5.2. Exemple : CH^2 sans torsion

Remarque 3.5.9. — Supposons que $X \rightarrow S$ soit une projection de k -variétés telle qu'il existe des entiers $n_{k,i}$, de sorte que pour tout k , on ait un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(X) \rightarrow \oplus_{i=0}^k (\mathrm{CH}^{k-i}(S))^{n_{k,i}}.$$

Alors, si les groupes de Chow de S en codimension $\leq k_0$ n'ont pas de torsion, alors les groupes de Chow de X en codimension $\leq k_0$ n'ont pas de torsion.

Proposition 3.5.10. — *Si X est une variété projective homogène sous un groupe linéaire, alors $\mathrm{CH}^0(X)_{\mathrm{tors}} = 0$ et $\mathrm{CH}^1(X)_{\mathrm{tors}} = 0$.*

Démonstration. — Pour le CH^0 le résultat est clair. Pour le CH^1 , il suffit de remarquer que $\mathrm{CH}^1 X = \mathrm{Pic} X$. Or d'après [48, lemme 5.1], on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic} X \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{k_s})^\Gamma$$

où k_s est une clôture séparable de k et Γ le groupe de Galois absolu de k . Ainsi, $\mathrm{CH}^1 X$ est sans torsion. $\square$

D'après Karpenko ([32]), on a :

Proposition 3.5.11 (Karpenko). — *Si A est une algèbre d'Azumaya sur un corps k , dont l'indice coïncide avec son exposant, alors*

$$\mathrm{CH}^2(\mathrm{SB}(A))_{\mathrm{tors}} = 0.$$

Proposition 3.5.12. — Si A est une algèbre d’Azumaya de degré n , dont l’indice coïncide avec son exposant et $1 = i_1 < \dots < i_r \leq n$ alors $\mathrm{CH}^2(\mathrm{SB}_{i_1, i_2, \dots, i_r}(A))_{\mathrm{tors}} = 0$.

Démonstration. — Sachant que pour $i \leq 2$, $\mathrm{CH}^i(\mathrm{SB}(A))_{\mathrm{tors}} = 0$, il suffit d’appliquer la remarque du début de section. $\square$

3.5.3. Exemple : variétés de drapeaux complets et torsion dans les CH^i , $i \geq 2$

Commençons par énoncer un résultat de Karpenko :

Proposition 3.5.13 (Karpenko). — Soit e un entier non divisible par un carré. Alors il existe une algèbre d’Azumaya A d’exposant e dont $\mathrm{CH}^2(\mathrm{SB}(A))_{\mathrm{tors}}$ est d’ordre e .

Démonstration. — Corollaire 5.2 du chapitre 1 de [33]. $\square$

Remarque 3.5.14. — Dans cette proposition, on peut en fait choisir A d’indice (et donc de degré) aussi grand que l’on veut (proposition 5.1 du chapitre 1 de [33]). La construction d’une telle algèbre est faite dans l’exemple 4.12 du chapitre 1 de [33].

Examinons le cas des variétés de drapeaux complets. Soit A une algèbre d’Azumaya sur k de degré n . Notons $X = \mathrm{SB}_{1, \dots, n}(A)$ la variété de drapeaux complets. Alors, grâce au théorème 3.2.1, on dispose d’un fibré $\mathcal{V}$ de rang $n - 1$ sur $\mathrm{SB}(A)$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SB}_{1, 2, \dots, n}(A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Drap}_{1, \dots, n-1}(\mathcal{V}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{SB}(A) & \end{array}$$

et donc par la proposition 3.5.1, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{CH}^k(X) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^k (\mathrm{CH}^{k-i} \mathrm{SB}(A))^{n_i}$$

avec $n_i = q(i, (1, n-1), \dots, (1, 2), (1, 1))$. L’entier n_i compte le nombre de solutions de :

$$\begin{cases} \forall j \ x_j \leq j \\ x_1 + \dots + x_{n-1} = i \end{cases}$$

donc pour tout $i \in \{0, \dots, \frac{(n-1)n}{2}\}$, $n_i \geq 1$. Ainsi :

Corollaire 3.5.15. — *Soit e un entier non divisible par un carré. Pour tout entier $k \geq 2$, il existe une algèbre d’Azumaya A d’exposant e et une variété homogène X sous $\mathrm{PGL}(A)$, telles que $\mathrm{CH}^k(X)$ contienne un sous-groupe cyclique d’ordre e .*

Démonstration. — Supposons que A soit une algèbre d’Azumaya d’exposant e telle que $\mathrm{CH}^2(\mathrm{SB}(A))_{\mathrm{tors}}$ soit un groupe cyclique d’ordre e . Si on pose $X = \mathrm{SB}_{1,2,\dots,n}(A)$ où n est le degré de A , alors d’après ce qui précède, $\mathrm{CH}^k(X)$ contiendra nécessairement un sous-groupe cyclique d’ordre e dès qu’il existera un i satisfaisant :

$$\begin{cases} k - i = 2 \\ i \leq \frac{(n-1)n}{2}. \end{cases}$$

Un tel i existe si et seulement si :

$$k \leq \frac{(n-1)n}{2} + 2.$$

Pour un k fixé, il suffit alors de prendre une algèbre d’Azumaya A d’exposant e donnée par la proposition précédente et de degré n assez grand. $\square$

CHAPITRE 4

DÉCOMPOSITION MOTIVIQUE DE $\mathrm{SB}(\mathcal{M}_m(A))$

4.1. Introduction

Fixons un corps k et une k -algèbre d'Azumaya A de degré n . Soit m un entier, et posons $B = \mathcal{M}_m(A)$, qui est aussi une algèbre d'Azumaya sur k . La variété de Severi-Brauer associée à A est une k -variété forme tordue de $\mathbf{P}^{n-1}$, l'espace projectif (sur k) de dimension $n - 1$. De même, la variété de Severi-Brauer associée à B , de degré nm , est une forme de $\mathbf{P}^{mn-1}$.

Comme Manin l'a montré dans son article [44], le motif de $\mathbf{P}^N$ pour un certain N se décompose dans la catégorie des motifs de Chow sur k (voir 1.4.13). Il est légitime de vouloir décomposer le motif d'une forme tordue de $\mathbf{P}^N$, en motifs *simples*. Karpenko dans [31] décompose le motif de $\mathrm{SB}(B)$ en fonction du motif de $\mathrm{SB}(A)$. Le présent chapitre en redonne une preuve, en utilisant les techniques du paragraphe précédent. Cela rend plus explicite la projection Pr et l'immersion fermée In de [31, Section 1.1].

Ainsi, puisque, par le théorème de Wedderburn, toute algèbre d'Azumaya sur k s'écrit $\mathcal{M}_r(D)$ pour un corps gauche D sur k et un entier r , il suffit de connaître les motifs des variétés de Severi-Brauer associées à des corps gauches pour avoir une description complète du motif d'une variété de Severi-Brauer quelconque.

4.2. Décomposition

Nous utiliserons le langage des algèbres d'Azumaya introduit en 1.6, puis nous nous placerons dans la catégorie des motifs de Chow effectifs

dont on a rappelé la définition dans la section 1.4.2. Rappelons que $\mathbf{L}$ désigne le motif de Tate défini en 1.4.9.

On est alors en mesure d'énoncer le théorème qui décrit une « décomposition cellulaire » de la variété $\mathrm{SB}(\mathcal{M}_m(A))$:

Théorème 4.2.1. — *Soient A une algèbre d'Azumaya sur k et $m \geq 2$ un entier. Posons $X = \mathrm{SB}(\mathcal{M}_m(A))$ et $S = \mathrm{SB}(A)$. Il existe une filtration de X en sous-variétés fermées Z_i :*

$$X = Z_m \supset Z_{m-1} \supset \dots \supset Z_1 \supset Z_0 = \emptyset$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Z_i est isomorphe à $\mathrm{SB}(\mathcal{M}_i(A))$
- (ii) Pour tout $i \in \{0, \dots, (m-1)\}$, il existe un fibré vectoriel de rang ni , $\pi_i : Z_{i+1} \setminus Z_i \rightarrow S$.

Cette « décomposition cellulaire » de X est très agréable, elle permet de retrouver le résultat de Karpenko [31] :

Théorème 4.2.2 (Karpenko). — *Conservons les notations du lemme. On a un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{C}\mathrm{how}^{\mathrm{eff}}(k)$ des motifs de Chow effectifs sur k :*

$$h(X) \simeq \bigoplus_{j=0}^{m-1} h(S) \otimes \mathbf{L}^{nj}.$$

Remarque 4.2.3. — Ce résultat est à comparer avec la décomposition du motif de $\mathbf{P}^N$ (proposition 1.4.12).

4.3. Preuves

Pour la preuve de ce résultat, nous utiliserons les mêmes techniques que dans le Chapitre IV à savoir les résultats de la section 3.3.1.

4.3.1. Un peu d'algèbre linéaire

Fixons A une algèbre d'Azumaya sur k et m un entier. Nous noterons $X = \mathrm{SB}(\mathcal{M}_m(A))$ la variété de Severi-Brauer associée à l'algèbre simple centrale $\mathcal{M}_m(A)$. Posons enfin $S = \mathrm{SB}(A)$. On notera d l'indice de A et n son degré. Posons $r = n/d$. D'après le théorème de Wedderburn, on peut supposer que l'on dispose d'un corps gauche D sur k de dimension d^2 et d'un D -espace vectoriel à droite E de D -dimension r , tel que A

soit isomorphe à $\text{End}_D(E)$. Nous supposons dans cette partie que $A = \text{End}_D(E)$.

Notation 4.3.1. — On notera par $\mathfrak{a}$ l'idéal à gauche de A constitué des matrices dont la première colonne ne contient que des 0.

Pour des entiers $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_s \leq m$, $\text{Mineur}_{\nu_1, \dots, \nu_s}$ sera l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_m(\mathbf{Z}) &\rightarrow \mathcal{M}_s(\mathbf{Z}) \\ (x_{i,j})_{i,j} &\mapsto (x_{\nu_i, \nu_j})_{i,j}. \end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants forment la clef du présent chapitre :

Lemme 4.3.2. — On a une bijection naturelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathcal{M}_m(A) \\ I \subset \mathfrak{a}_1 \\ I \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I = nm \\ I \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J \subset \mathcal{M}_{m-1}(A) \\ J \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J = n(m-1) \end{array} \right\}$$

$$\quad \quad \quad \mapsto \quad \text{Mineur}_{2, \dots, m}(I)$$

Démonstration. — On se ramène au cas où $D = k$. Considérons la bijection suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \subset E^m \\ E \times \{0\} \subset V \\ \dim_k V = nm - 1 \\ V \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} W \subset E^{n-1} \\ \dim_k W = n(m-1) - 1 \end{array} \right\}$$

$$\quad \quad \quad \mapsto \quad V/E \times \{0\}$$

Elle permet d'écrire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathcal{M}_m(A) \\ I \subset \mathfrak{a}_1 \\ I \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I = nm \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} J \subset \mathcal{M}_{m-1}(A) \\ J \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J = n(m-1) \end{array} \right\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} V \subset E^m \\ E \times \{0\} \subset V \\ V \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k V = nm - 1 \end{array} \right\} & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} W \subset E^{m-1} \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = n(m-1) - 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par le proposition 3.3.5. Ceci permet de conclure. $\square$

Lemme 4.3.3. — (i) On a une application ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathcal{M}_m(A) \\ I \not\subset \mathfrak{a}_1 \\ I \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I = nm \\ I \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \mapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{l} J \subset A \\ J \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J = n \\ \text{Mineur}_1(I) \end{array} \right\}$$

(ii) Si J est un idéal à gauche de A de k -dimension n , alors $\phi^{-1}(J)$ s'identifie naturellement à un espace vectoriel.

Démonstration. — On se ramène au cas où $D = k$. Considérons l'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \subset E^m \\ E \times \{0\} \not\subset V \\ \dim_k V = nm - 1 \\ V \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \mapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{l} W \subset E \\ \dim_k W = n - 1 \\ V \cap E \times \{0\}^{m-1} \end{array} \right\}$$

On peut alors écrire le diagramme commutatif suivant qui permet de conclure :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathcal{M}_m(A) \\ I \not\subset \mathfrak{a}_1 \\ I \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I = nm \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} J \subset A \\ J \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k J = n \end{array} \right\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} V \subset E^m \\ E \times \{0\} \not\subset V \\ V \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k V = nm - 1 \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} W \subset E \\ W \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k W = n - 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

où les flèches verticales sont donnés par le proposition 3.3.5.

(ii) Soit donc un $J \in A$ idéal à gauche de dimension n . Nécessairement, on doit alors avoir $d = 1$, i.e. : $D = k$. Notons W le sous-espace vectoriel de E définissant J , i.e. : $J = \text{Hom}(E/W, E)$. On a une bijection donnée

par la proposition 3.3.5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathcal{M}_m(A) \\ I \not\subset \mathfrak{a}_1 \\ \text{Mineur}_1(I) = J \\ I \text{ idéal à gauche} \\ \dim_k I = nm \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} V \subset E^m \\ E \times \{0\} \not\subset V \\ V \cap E \times \{0\}^{m-1} = W \\ V \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k V = nm - 1 \end{array} \right\}$$

Or : si l'on note $L = E/W$, on a : $E^m/(W \times \{0\}^{r-1}) = L \oplus E^{m-1}$ donc (en posant $U = V/W$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \subset E^m \\ E \times \{0\} \not\subset V \\ V \cap E \times \{0\}^{m-1} = W \\ V \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k V = nm - 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} U \subset L \oplus E^{m-1} \\ L \not\subset U \\ U \text{ sous-espace vectoriel} \\ \dim_k U = nm - n \end{array} \right\}$$

Il suffit alors de remarquer que ce dernier ensemble s'identifie canoniquement à $\text{Hom}_k(E^{m-1}, L)$. Ainsi la fibre de ϕ en un point J est un espace vectoriel sur k de dimension $nm - n$. $\square$

4.3.2. Preuve du théorème 4.2.1

Proposition 4.3.4. — Soient A une algèbre d'Azumaya sur k et $m \geq 2$ un entier. Posons $X = \text{SB}(\mathcal{M}_m(A))$ et $S = \text{SB}(A)$. Il existe une sous-variété fermée Y de X tel que :

- (i) $Y \simeq \text{SB}(\mathcal{M}_{m-1}(A))$
- (ii) on a un fibré vectoriel de rang $nm - n$: $X \setminus Y \rightarrow S$.

Démonstration. — Considérons le sous-schéma fermé Z de X représentant le foncteur qui à une k -algèbre R associe les $I \in X(R)$ tel que $I \subset \mathfrak{a} \otimes_k R$. D'après le lemme 4.3.2, on a une application bijective pour toute k -algèbre R :

$$Z(R) \rightarrow \text{SB}(\mathcal{M}_{m-1}(A))(R).$$

Et par suite, elle correspond à un isomorphisme de k -variétés

$$Z \rightarrow \text{SB}(\mathcal{M}_{m-1}(A)).$$

De même, le lemme 4.3.3 permet de voir que l'on a une application

$$X \setminus Z \rightarrow S$$

dont chaque fibre en un point $\text{Spec}(L) \rightarrow S$ s'identifie de manière canonique à un espace vectoriel sur L de dimension $n(m-1)$. $\square$

On est alors en mesure de prouver le théorème 4.2.1

Démonstration. — Il suffit de faire une récurrence sur m en s'appuyant sur la proposition précédente. En introduisant les notations suivantes : $\mathfrak{a}_{i,m} \subset \mathcal{M}_m(A)$ sera l'ensemble des matrices $m \times m$ à coefficients dans A dont la i -ème colonne est constituée de 0. Pour tout entier $j \in \{0, \dots, m\}$, la variété X_j est exactement la sous-variété fermée de X représentant le sous-foncteur fermé :

$$R \rightarrow \{I \in X(R) \mid I \subset (\mathfrak{a}_{1,m} \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{j,m}) \otimes_k R\}. \quad \square$$

4.3.3. Preuve du théorème 4.2.2

Théorème 4.3.5 (Chernousov, Gille, Merkurjev [10, Théorème 7.2])

Soit X une variété lisse et complète sur k . On suppose qu'il existe une filtration par des sous-variétés fermées

$$X = X_n \supset \dots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

ainsi que des morphismes plats

$$f_i : X_i \setminus X_{i-1} \rightarrow Y_i$$

de dimension relative constante a_i , où les Y_i sont des variétés lisses et complètes sur k . On suppose, en outre, qu'en tout point $y \in Y_i$ la fibre de f_i est isomorphe à l'espace affine $\mathbf{A}_{\kappa(y)}^{a_i}$. Alors il existe un isomorphisme dans la catégorie des motifs effectifs de Chow :

$$h(X) = \sum_{i=0}^n h(Y_i) \mathbf{L}^{a_i}.$$

Démonstration du théorème 4.2.2. — Vu la « décomposition cellulaire », le théorème 4.2.2 n'est qu'une application directe du théorème précédent. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	5
Résumé	7
1. Introduction	9
1.1. Description	9
1.2. Rappels sur les groupes de Chow	11
1.2.1. Cycles algébriques	12
1.2.2. Groupes de Chow	13
1.3. Rappels de K -théorie	15
1.3.1. Anneau de Grothendieck d'un schéma	16
1.3.2. Construction des groupes de K -théorie supérieure	16
1.3.3. Filtrations	18
1.3.4. Suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen	18
1.4. Rappels sur les motifs	19
1.4.1. Catégorie des correspondances	19
1.4.2. Catégorie des motifs de Chow effectifs	20
1.4.3. Motifs de Chow	23
1.5. Rappels sur les variétés homogènes	23
1.5.1. Groupes algébriques	23
1.5.2. Variétés homogènes	34
1.5.3. Formes tordues	34
1.5.4. Variétés de drapeaux	35
1.6. Quelques notations et définitions	36
2. Combinatoire	39
2.1. Introduction	39

2.2. Variétés de drapeaux complets de type A_{n-1}	40
2.2.1. Variétés homogènes	40
2.2.2. Variétés de Schubert - Variétés de Schubert opposées ..	43
2.2.3. Base de l'anneau de K -théorie - Dualité	45
2.3. Polynômes	46
2.3.1. Opérateurs de symétrisation	47
2.3.2. Fonctions de Schur	49
2.3.3. Fonctions de Schur et différences divisées	53
2.3.4. Symétriseurs maximaux - Produit scalaire	54
2.3.5. Définitions des polynômes	56
2.3.6. Bases duales	57
2.4. Géométrie des variétés de drapeaux	58
2.4.1. Fibrés tautologiques	58
2.4.2. Fibré projectif	59
2.4.3. Fibrés en drapeaux - Lieu de dégénérescence	60
2.4.4. Variétés de Schubert	62
2.4.5. Cycles de Schubert	65
2.4.6. Faisceaux structuraux des variétés de Schubert	69
2.5. Bases de l'anneau de K -théorie	71
2.6. Exemple	72
2.6.1. Système de racines	73
2.6.2. Réalisation géométrique	75
2.6.3. Fibrés en droites particuliers	76
2.6.4. Calculs de $[X_w]$ en terme de ϵ_i et ϵ_i^{-1}	76
2.6.5. Expression des $[X_w]$ dans la base des λ_w	79
2.6.6. Polynômes de Grothendieck et applications	81
3. Variétés homogènes sous PGL_n	85
3.1. Introduction	85
3.2. Résultats	86
3.3. Preuve des résultats	87
3.3.1. Espaces vectoriels sur un corps gauche - Annulateurs ..	87
3.3.2. Bijections	90
3.3.3. Preuve du théorème 3.2.1	95
3.3.4. Preuve du théorème 3.2.2	95
3.3.5. Preuve du corollaire 3.2.3	96
3.4. Calcul des groupes de Chow de fibrés en drapeaux	97
3.4.1. Partitions d'entiers.	97
3.4.2. Fibration en grassmanniennes.	104

3.4.3. Fibration en variétés de drapeaux	106
3.4.4. Fibration en produit de variétés de drapeaux.	108
3.5. Applications	109
3.5.1. Groupes de Chow des variétés de drapeaux tordues	109
3.5.2. Exemple : CH^2 sans torsion	112
3.5.3. Exemple : variétés de drapeaux complets et torsion dans les CH^i , $i \geq 2$	113
4. Décomposition motivique de $SB(\mathcal{M}_m(A))$	115
4.1. Introduction	115
4.2. Décomposition	115
4.3. Preuves	116
4.3.1. Un peu d'algèbre linéaire	116
4.3.2. Preuve du théorème 4.2.1	119
4.3.3. Preuve du théorème 4.2.2	120
Bibliographie	125

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. BERNSTEIN, I. GEL'FAND et S. GEL'FAND – « Schubert cells and cohomology of the spaces G/P », *Russian Math. Survey* **28** (1973), no. 3, p. 1–26.
- [2] A. BLANCHET – « Function fields of generalized Brauer-Severi varieties », *Comm. Algebra* (1991), no. 19, p. 97–118.
- [3] A. BOREL – *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, no. 126, Springer-Verlag, 1991.
- [4] A. BOREL et J.-P. SERRE – « Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de Grothendieck) », *Bulletin de la Société mathématique de France* **86** (1958), p. 97–136.
- [5] N. BOURBAKI – *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV, V et VI*, Éléments de mathématiques, no. Fascicule XXXIV, Hermann, 1968.
- [6] M. BRION – « Lecture on the geometry of flag varieties », *Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties* (Piotr Pragacz, éd.), Birkhäuser, 2005, p. 33–85.
- [7] B. CALMÈS, V. PETROV, N. SEMENOV et K. ZAI-NOULLINE – « Chow motives of twisted flag varieties », <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0741/>, 2005.
- [8] H. CARTAN et S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

- [9] N. A. CHÂTELET – « Variation sur un thème de H. Poincaré », *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **61** (1944), p. 249–300.
- [10] V. CHERNOUSOV, S. GILLE et A. MERKURJEV – « Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties », *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 1, p. 137–159.
- [11] L. COMTET – *Advanced combinatorics. the art of finite and infinite expansions. revised and enlarged edition.*, D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [12] M. DEMAZURE – « Désingularisation des variétés de Schubert généralisées », *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **4 7** (1974), p. 53–88.
- [13] D. EISENBUD – *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics, vol. 150, Springer, 1995.
- [14] W. FULTON – « Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas », *Duke Mathematical Journal* **65** (1992), no. 3, p. 381–420.
- [15] ———, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, no. 2, Springer, 1994.
- [16] W. FULTON et J. HARRIS – *Representation theory*, Graduate texts in mathematics, no. 129, Springer, 1991.
- [17] W. FULTON et S. LANG – *Riemann-Roch algebra*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, no. 277, Springer, 1985.
- [18] W. FULTON et A. LASCOUX – « A Pieri formula in the Grothendieck ring of a flag bundle », *Duke Mathematical Journal* **76** (1994), no. 3, p. 711–729.
- [19] A. GROTHENDIECK – « Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections », *Séminaire Chevalley, Paris*, 1958.
- [20] ———, « Le groupe de Brauer I », *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (A. S. in Pure Mathematics, éd.), 1968, p. 46–66.

- [21] ———, « Le groupe de Brauer II », *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (A. S. in Pure Mathematics, éd.), 1968, p. 67–87.
- [22] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, no. 52, Springer, 1977.
- [23] F. HIDELBRAND – *Introduction to numerical analysis*, Dover books on advanced mathematics, Dover, 1987.
- [24] H. HILLER – *Geometry of Coxeter groups*, Research notes in mathematics, no. 54, Pitman advanced publishing program, 1982.
- [25] S. HULSURKAR – « Proof of Verma’s conjecture on Weyl’s dimension polynomial », *Invent. Math.* **27** (1974), p. 45–52.
- [26] J. HUMPHREYS – *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, no. 21, Springer, 1975.
- [27] J. JAHNEL – « The Brauer-Severi variety associated with a central simple algebra : A survey », <http://cite-seer.ist.psu.edu/599194.html>.
- [28] B. KAHN – « Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties », *Proc. in Symp. in Pure math.* (1999), no. 67, p. 149–174.
- [29] ———, « Formes quadratiques et cycles algébriques », *Séminaire N. Bourbaki*, no. 941, Novembre 2004.
- [30] N. KARPENKO – « Torsion in CH^2 of Severi-Brauer varieties and indecomposibility of generic algebras », *Manuscripta Math.* (1995), no. 88, p. 109–117.
- [31] ———, « Grothendieck-Chow motives of Severi-Brauer varieties », *St. Petersburg Math. J.* **7** (1996), no. 4, p. 649–661.
- [32] ———, « On topological filtration for Severi-Brauer varieties », *AMS Transl. Ser. 2* **174** (1996), p. 45–48.
- [33] ———, « Cohomological invariants of homogeneous varieties (with applications to quadratic forms and central simple algebras », Habilitationsschrift, Fachbereich Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, 1997.

- [34] M.-A. KNUS, A. MERKURJEV, M. ROST et J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, Colloquium Publication, no. 44, American Mathematical Society, 1998.
- [35] A. KRESCH et H. TAMVAKIS – « Double Schubert polynomials and degeneracy loci for the classical groups », *Annales de l'Institut Fourier* **52** (2002), no. 6, p. 1681–1727.
- [36] V. LAKSHMIBAI, C. MUSILI et C. S. SESHADRI – « Cohomology of line bundles on G/B », *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **4** (1974), no. 7, p. 89–137.
- [37] A. LASCOUX – « Operators on polynomials », Ecole d'été ACE, Juillet 2004.
- [38] ———, « Polynômes de Schubert », *Compte Rendu de l'Académie des Sciences* **294** (1982), p. 447–450.
- [39] ———, « Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux », *The Grothendieck Festschrift* (Springer, éd.), 1990, p. 1–34.
- [40] ———, *Symmetric functions and combinatorial operators on polynomials*, Reg. Conf. Series in Math. CBMS, no. 99, AMS, 2003.
- [41] A. LASCOUX et M. SCHÜTZENBERGER – « Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux », *Compte Rendu de l'Académie des Sciences* **295** (1982), p. 629–633.
- [42] ———, « Symmetry and flag manifolds », *Invariant Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 996, Springer, 1983, p. 118–144.
- [43] I. G. MACDONALD – *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford mathematical monographs, Oxford science publication, 1995.
- [44] J. MANIN – « Correspondences, motifs and monoidal transformations », *Math. USSR Sb.* **6** (1968), no. 4, p. 439–470.
- [45] H. MATSUMURA – *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, no. 8, Cambridge university Press, 1989.

- [46] A. MERKURJEV, I. PANIN et A. WADSWORTH – « Index reduction formulas for twisted flag varieties I », *K-theory* **10** (1996), p. 517–596.
- [47] I. PANIN – « On the algebraic K -theory of twisted flag varieties », *K-theory* **8** (1994), p. 541–585.
- [48] E. PEYRE – « Galois cohomology in degree three and homogeneous varieties », *K-theory* **15** (1998), p. 99–145.
- [49] R. S. PIERCE – *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, no. 88, Springer, 1982.
- [50] H. PITTIE – « Homogeneous vector bundles on homogeneous spaces », *Topology* **11** (1972), p. 199–203.
- [51] D. QUILLEN – « Higher algebraic K -theory I », *Higher K -theories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.
- [52] A. RAMANATHAN – « Schubert varieties are arithmetically Cohen-Macaulay », *Invent. Math.* **80** (1985), p. 283–294.
- [53] M. ROST – « Chow groups with coefficients », *Doc Math* **1** (1996), p. 319–393, [http ://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/vol-01/16.html](http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/vol-01/16.html).
- [54] J.-P. SERRE – *Groupes algébriques et corps de classes*, Publication de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, no. VII, Hermann, 1959.
- [55] ———, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, no. 5, Springer-Verlag, 1964.
- [56] ———, *Corps locaux*, Publication de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, no. VIII, Hermann, 1968.
- [57] R. STEINBERG – « On a theorem of Pittie », *Topology* **14** (1975), p. 173–177.
- [58] A. A. SUSLIN – « Algebraic K -theory and the norm residue homomorphism », *Journal of Soviet mathematics* **30** (1985), p. 2556–2611.

- [59] R. SWAN – « K -theory of quadratic hypersurfaces », *Ann. Math.* (1985), no. 121, p. 113–153.
- [60] J. TITS – « Classification of algebraic semisimple groups », *Algebraic groups and discontinuous subgroups* (A. Borel, G. D. Mostow, éd.), Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, p. 33–62.
- [61] ———, « Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque », *J. Reine Angew. Math.* **247** (1971), p. 196–220.
- [62] A. VISHIK – « Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms », *Geometric Methods in the algebraic theory of quadratic forms* (J.-P. Tignol, éd.), Lecture notes in mathematics, vol. 1835, Springer, 2004, p. 25–101.
- [63] V. VOEVODSKY, S. A. et E. M. FRIEDLANDER – *Cycles, transfers and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, no. 143, Princeton University Press, 2000.

RÉSUMÉ

Fixons un corps k . Les variétés homogènes projectives X sous un groupe G déployé ont une géométrie assez simple. La décomposition de Bruhat fournit en effet une décomposition cellulaire de ces variétés. Il en résulte que si on note X_w les variétés de Schubert alors l'anneau de Chow est un module libre sur les $[X_w]$ et l'anneau de K -théorie $K_0(X)$ est un module libre sur les $[\mathcal{O}_{X_w}]$, classes des faisceaux structuraux des variétés de Schubert. On en déduit en particulier que l'anneau de Chow est sans torsion. En fait, la base $[\mathcal{O}_{X_w}]$ fournit la filtration topologique de l'anneau $K_0(X)$ et redonne la base $[X_w]$ par passage au gradué. D'autre part, l'anneau $K_0(X)$ admet une seconde base dite base de Pittie-Steinberg qui, quant à elle, est invariante sous l'action du groupe de Galois.

Le chapitre II de la thèse revient, dans le cas des drapeaux complets associés à un espace vectoriel, sur les résultats connus concernant la combinatoire donnant les expressions des faisceaux structuraux dans l'anneau de Grothendieck, ce qui permet, en suivant les travaux de Las-coux notamment, d'exprimer combinatoirement la matrice de changement de bases entre les deux bases ci-dessus. Dans le cas $n = 3$ nous donnons des résolutions explicites des faisceaux structuraux des variétés de Schubert en termes des fibrés de Pittie-Steinberg.

Les groupes de Chow sont connus en codimension 1 et ont été étudiés en codimension 2 par Karpenko dans le cas des variétés de Severi-Brauer. Si A est une algèbre simple centrale, le calcul des motifs des variétés homogènes projectives sous $\mathrm{PGL}(A)$ se ramènent sous certaines conditions au calcul de motifs de variétés de Severi-Brauer généralisées, formes de grassmanniennes, comme l'ont montré Calmès, Petrov, Semenov et Zainouline. Dans le chapitre III, nous construisons des isomorphismes de variétés explicites qui permettent de ramener le calcul des groupes de Chow de variétés homogènes projectives au calcul de groupes de Chow de variétés de Severi-Brauer généralisées.

Les techniques décrites dans le chapitre III sont réutilisées au chapitre IV pour redémontrer un résultat de Karpenko sur la décomposition du motif de Chow de variétés de Severi-Brauer $\mathrm{SB}(M_n(A))$.

MOTS-CLÉS

Groupe de Chow, K -théorie, Variétés de Severi-Brauer, Polynômes de Grothendieck.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14M17, 14L35, 20G15.