

Approximation récursive du régime stationnaire d'une Equation Differentielle Stochastique avec sauts

Fabien Panloup

▶ **To cite this version:**

Fabien Panloup. Approximation récursive du régime stationnaire d'une Equation Differentielle Stochastique avec sauts. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT : . tel-00120508

HAL Id: tel-00120508

https://theses.hal.science/tel-00120508

Submitted on 15 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS–VI

présentée par

Fabien PANLOUP

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS–VI

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Approximation récursive du régime stationnaire d'une Équation Différentielle Stochastique avec sauts

Directeur :	M.	Gilles	PAGÈS	Université Paris–VI
Rapporteurs :	M.	Serge	COHEN	Université Paul Sabatier, Toulouse
	M.	Étienne	PARDOUX	Université de Provence, Marseille

Soutenue publiquement le **13 décembre 2006** devant le jury composé de

M. Serge	COHEN	Université Paul Sabatier, Toulouse
M. Jean	JACOD	Université Paris–VI
M. Damien	LAMBERTON	Université de Marne la Vallée
M. Gilles	PAGÈS	Université Paris–VI
M. Étienne	PARDOUX	Université de Provence, Marseille
M. Denis	TALAY	INRIA Sophia–Antipolis

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à mon directeur Gilles Pagès, pour avoir accepté d'encadrer ma thèse et pour la qualité de sa direction. Je le remercie spécialement pour sa disponibilité associée à ses nombreuses suggestions et relectures.

Serge Cohen et Étienne Pardoux ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je les en remercie très sincèrement.

Je remercie également Jean Jacod, Damien Lamberton et Denis Talay de me faire l'honneur de participer à ce jury.

Merci aussi à l'ensemble des thésards du bureau 4D1 avec qui j'ai passé de très bons moments durant ces trois ans.

Enfin, mes derniers remerciements sont adressés à ma famille, à la "Tribu" et surtout à Claire pour son soutien et sa présence.

Table des matières

I Introduction **5**

1 Introduction générale **7**
1.1 Présentation 7
1.2 Approximation de la probabilité invariante 9
1.2.1 Différentes approches du problème 9
1.2.2 Spécificités liées aux sauts 11
1.3 Structure et résultats de la thèse 12
1.3.1 Stabilité à temps continu 12
1.3.2 Approximation de la probabilité invariante 13
1.3.3 Approximation de la loi du processus en régime stationnaire 14
1.4 Notations 16

2 Généralités et Résultats à temps continu **19**
2.1 Présentation de l'EDS 19
2.1.1 Processus de Lévy 19
2.1.2 Formulation de l'EDS 21
2.2 Générateur infinitésimal et stationnarité 23
2.2.1 Définition et calcul 23
2.2.2 Le théorème d'Echeverria-Weiss 25
2.3 Stabilité à temps continu 27
2.3.1 Rappels dans un cadre général 27
2.3.2 Stabilité du processus (X_t) solution de (2.6) 29
2.4 Preuve du Théorème 2.19 30
2.4.1 Lemmes préliminaires 30
2.4.2 Preuve du Théorème 2.19 35
2.5 Annexe 38
2.5.1 Fonctions p-Hölder 38
2.5.2 Preuve de la proposition 2.18 39

II Approximation de la probabilité invariante **41**

3 Recursive computation of the invariant distribution of a stochastic differential equation driven by a Lévy process **43**
3.1 Introduction 43
3.1.1 Objectives and motivations 43

3.1.2 The stochastic differential equation . . . 44
3.1.3 Background on this problem for Brownian diffusions . . . 45
3.1.4 Difficulties induced by the jumps of the Lévy process . . . 46
3.1.5 Construction of the procedures . . . 47
3.1.6 Organization of the chapter . . . 48
3.2 Main results . . . 48
3.3 Almost sure tightness of $(\bar{\nu}_n(w, dx))_{n\in\mathbb{N}}$ . . . 52
3.3.1 A recursive stability relation . . . 54
3.3.2 Proof of Proposition 3.10 . . . 59
3.3.3 Consequences of Proposition 3.10 . . . 62
3.4 Identification of the weak limits of $(\bar{\nu}_n(\omega, dx))_{n\geq 1}$ . . . 64
3.4.1 Proof of Proposition 3.18 . . . 65
3.5 Proof of the main theorems for Schemes (P) and (C) . . . 70
3.5.1 Almost sure tightness of $\bar{\nu}_n^P(\omega, dx)$ and $\bar{\nu}_n^C(\omega, dx)$ . . . 70
3.5.2 Identification of the limit of $(\bar{\nu}_n^P)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\bar{\nu}_n^C)_{n\in\mathbb{N}}$ . . . 71
3.6 A theoretical application . . . 73
3.7 Simulations . . . 76

4 Computation of the invariant distribution for SDE's driven by a Lévy process: Rate of convergence 79
4.1 Introduction . . . 79
4.2 Setting and Background on convergence results . . . 81
4.3 Main results . . . 83
4.4 Proof of Theorem 4.6 . . . 88
4.4.1 Decomposed computation of the rate of $\bar{\nu}_n(Af)$. . . 88
4.4.2 Synthesis and proof of Theorem 4.6 . . . 93
4.4.3 Proof of Lemma 4.15 . . . 94
4.5 Proof of Theorem 4.8 . . . 100
4.6 An additional result . . . 106
4.7 Numerical comparison of Schemes (P) and (W). . . . 108

5 Approximation de la probabilité invariante pour des diffusions à stabilité "semi-critique" 111
5.1 Introduction . . . 111
5.1.1 Présentation du problème . . . 111
5.1.2 Résultat principal . . . 112
5.1.3 Applications . . . 114
5.1.4 Organisation de la preuve du théorème 5.2 . . . 115
5.2 Invariance des valeurs d'adhérence de $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ . . . 115
5.3 Tension de la suite de mesures empiriques . . . 118
5.3.1 Un contrôle récursif . . . 118
5.3.2 Critère de tension . . . 123

III Approximation de la loi du processus en régime stationnaire 127

6 Approximation de la loi d'une diffusion avec sauts en régime stationnaire et application au pricing d'options pour des modèles à volatilité stationnaire. 129
6.1 Introduction . . . 129
6.1.1 Objectifs et Motivations . . . 129
6.1.2 Notations et Rappels . . . 130
6.1.3 Organisation du chapitre. . . . 132
6.2 Résultats principaux . . . 132
6.3 Preuve du théorème 6.3 . . . 134
6.3.1 Lemmes préliminaires . . . 134
6.3.2 Preuve du Théorème 6.3 . . . 137
6.4 Preuve du Théorème 6.5 . . . 138
6.4.1 Tension de la suite de mesures empiriques . . . 139
6.4.2 Identification de la limite . . . 142
6.4.3 Extension aux fonctionnelles non bornées . . . 147
6.5 Pricing d'options pour des modèles à volatilité stochastique stationnaire . . . 149
6.5.1 Modèle de Heston. . . . 149
6.5.2 Pricing d'options Européennes dans le modèle de Heston. . . . 150
6.5.3 Pricing d'options asiatiques dans le modèle de Heston. . . . 155
6.5.4 Pricing d'options asiatiques dans des variantes du modèle de Heston . . . 156
6.6 Annexe . . . 158
6.6.1 Caractérisation de la convergence étroite *p.s.* sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ . . . 167

7 Convergence en loi du schéma d'Euler à pas décroissant vers le régime stationnaire 169
7.1 Présentation des Résultats principaux . . . 169
7.2 Tension de la suite de processus $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ . . . 171
7.3 Caractérisation de la limite . . . 175
7.4 Asymptotique confluence. . . . 177
7.4.1 Condition adaptée à l'EDS (7.1) . . . 177
7.4.2 Preuve de la proposition 7.12. . . . 179

8 Un théorème limite pour le maximum de variables aléatoires i.i.d. 181
8.1 Introduction . . . 181
8.1.1 Rappels et Notations . . . 181
8.1.2 Hypothèses et Résultat principal . . . 182
8.2 Tension . . . 184
8.3 Identification de la limite . . . 190

Bibliographie 195

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Présentation

L'existence de situations d'équilibre pour un système dynamique ainsi que la connaissance de son comportement dans une telle situation sont des questions importantes dans de nombreux domaines scientifiques. En effet, de telles informations permettent au praticien d'assurer la stabilité d'un système et également de contrôler l'évolution du phénomène dans une telle situation. On peut penser à l'évolution d'une structure soumise à des phénomènes météorologiques, à des vibrations ou à des séismes par exemple, au contrôle de l'évolution d'un prix, au développement d'une maladie, ...

Quand ce type de phénomène est modélisé par un processus aléatoire (ce qui est généralement le cas à partir du moment où on a trop de paramètres à gérer), l'existence de situations d'équilibre se caractérise par celle d'une probabilité invariante, *i.e.* d'une loi de probabilité telle que le processus aléatoire muni de cette loi initiale est en régime stationnaire (cela signifie que la loi du processus est invariante par translation du temps). Connaître sa probabilité invariante et plus généralement son régime stationnaire est alors utile dans deux situations : lorsque le processus est réellement en régime stationnaire (on verra un tel exemple en modélisation financière) et lorsque le processus admet une probabilité invariante mais a une valeur initiale donnée. Dans cette deuxième situation qui est certainement la plus courante en pratique, le processus n'est pas en régime stationnaire mais dans de bonnes situations, il tend vers son régime stationnaire quand $t \to +\infty$ (dans un sens qui sera précisé dans la suite). Ce type de convergence signifie pour le praticien qu'au bout d'un temps t plus ou moins long, le phénomène tend vers une situation stable (dont on connaît le comportement si on sait calculer le régime stationnaire).

L'objectif de cette thèse est de proposer et d'étudier des méthodes implémentables par ordinateur pour approcher la probabilité invariante et plus généralement la loi du processus en régime stationnaire dans le cadre des équations différentielles stochastiques avec sauts. On s'intéressera également à certaines applications ou à certains domaines proches dans lesquels nos méthodes permettent de résoudre des problèmes théoriques (voir TCL *p.s.* pour les stables, Théorème limite pour des valeurs extrêmes).

D'un point de vue modélisation, une équation différentielle stochastique (EDS) peut être vue comme un système dynamique régi par un système différentiel perturbé par un bruit aléatoire généralement supposé centré. La modélisation la plus standard de bruit aléatoire consiste à supposer que le bruit est dirigé par un mouvement Brownien, *i.e.* que le bruit est dirigé par un processus continu centré à accroissements indépendants et stationnaires. Cependant, ce type de

modélisation apparaît dans certaines situations comme peu adapté ou trop restrictif. D'une part, ce type de modèle ne permet pas d'obtenir une bonne reproduction des "événements exceptionnels" (phénomènes météorologiques, séismes à forte amplitude, cracks boursiers). Une manière naturelle de modéliser ces phénomènes est d'ajouter une composante de sauts. D'autre part, le Brownien impose également un comportement local particulier qui n'est pas nécessairement adapté à toutes les situations.
Dans cette thèse, nous proposons donc de nous intéresser à une classe d'EDS plus générales : les EDS dirigées par des processus à accroissements indépendants et stationnaires généraux, *i.e.* par des processus de Lévy :
Soit (L_t) un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^l$ de mesure de Lévy π. D'après la décomposition de Lévy-Khintchine (pour ce résultat et pour une introduction aux processus de Lévy, voir *e.g.* Bertoin [Ber96], Protter [Pro90] ou Sato [Sat99]), pour tout seuil de troncation $h > 0$, (L_t) admet la décomposition suivante : $L_t = \alpha_h t + \sqrt{Q}W_t + Y_t^h + N_t^h$ où $\alpha_h \in \mathbb{R}^l$, Q est une matrice symétrique positive appartenant à $\mathbb{M}_{l,l}$ (ensemble des matrices réelles à l lignes et l colonnes), (W_t) est un mouvement Brownien standard l-dimensionnel, (Y_t^h) est un processus de Lévy l-dimensionnel purement discontinu à sauts bornés par h dont la fonction caractéristique est donnée pour tout $t \geq 0$ par

$$\mathbb{E}\{e^{i<u,Y_t^h>}\} = \exp\left[t\Big(\int_{\{|y|\leq h\}} e^{i<u,y>} - 1 - i < u, y > \pi(dy)\Big)\right]$$

et (N_t^h) est un processus de Poisson composé d'intensité $\lambda_h = \pi(|y| > h)$ et de loi de sauts $\mu^h(dy) = 1_{\{|y|>h\}}\pi(dy)/\pi(|y| > h)$. De plus, (W_t), (Y_t^h) et (N_t^h) sont des processus indépendants. En accord avec cette décomposition, nous considérons dans la majeure partie de la thèse un processus càdlàg (X_t) solution de l'EDS

$$dX_t = b^h(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t^h \tag{1.1}$$

où $b^h : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ et $\kappa : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ sont continues à croissance sous-linéaire et $Z_t^h = Y_t^h + N_t^h$.
Il est ici primordial de distinguer chaque partie du processus de Lévy dans la formulation de l'EDS car celles-ci ne jouent pas le même rôle dans le système dynamique. D'un côté, le drift produira le plus souvent une force de rappel assurant l'ergodicité de l'EDS. De l'autre, on distinguera deux sortes de bruit ayant un comportement différent : un bruit Brownien et un bruit à sauts.
Si (X_t) est solution de l'EDS pour un certain $h > 0$, il est facile de voir qu'en adaptant artificiellement le drift et la partie sauts, (X_t) est également solution du même type d'EDS pour tout $h' \in (0, +\infty)$. Dans le cadre général, le choix du paramètre h n'est fondé sur aucune justification structurelle. C'est pourquoi dans ce cadre, nous conservons une formulation dépendante de h et veillerons dans la suite à ce que ce paramètre non structurel n'ait pas d'implications sur les hypothèses. Dans de bonnes situations, on verra cependant que ce paramètre h peut être supprimé car il existe alors une formulation intrinsèque de l'EDS. C'est par exemple le cas si (Z_t^h) est localement intégrable ou à variation finie.
Si ce travail semble être le premier à aborder le problème de l'approximation du régime stationnaire pour ce type de processus, il existe en revanche une littérature importante pour d'autres problèmes d'approximation numérique en temps fini. Le problème consistant à approcher $\mathbb{E}\{g(X_T)\}$ $(T > 0)$ pour une fonction g suffisament régulière, a d'abord été étudié

par Protter&Talay [PrTa97]. Dans cet article, les auteurs fondent leur approximation sur un schéma d'Euler "exact", *i.e.* construit avec les vrais accroissements du processus. Comme on le verra plus en détail dans la suite, ce type de schéma de discrétisation pose souvent un problème de simulabilité. En effet, les accroissements d'un processus de Lévy ne sont pas simulables en général (exceptés quelques cas particuliers comme les processus stables ou les processus de Poisson composés). Dans [JKMP05], Jacod, Kurtz, Méléard et Protter s'intéressent alors au même problème en utilisant cette fois un schéma d'Euler "approché", *i.e.* dans lequel l'accroissement exact est remplacé par une approximation (Nous reviendrons sur les possibilités d'approximation dans la partie 1.2.2).
Un autre problème en temps fini consiste à approcher la loi d'une fonctionnelle G de la trajectoire $(X_t, 0 \leq t \leq T)$. Lorsque le schéma d'approximation est un schéma d'Euler exact, ce problème a été étudié dans Jacod&Protter [JaPr95], et Jacod [Jac04] . Pour remédier au problème de simulabilité évoqué précédemment, Rubenthaler [Rub03] dans un cadre général, puis Rubenthaler&Wiktorsson [RuWi03] dans un cadre plus spécifique, étudient ensuite le même problème en s'appuyant sur un schéma d'Euler approché.

1.2 Approximation de la probabilité invariante

Le premier objectif de cette thèse est de développer des méthodes pour approcher la probabilité invariante d'une EDS dirigée par un processus de Lévy général. Dans le cas particulier où $\kappa = 0$, *i.e.* dans le cas où (X_t) est une diffusion Brownienne, ce problème a fait l'objet d'un certain nombre d'articles. C'est pourquoi avant de s'intéresser au problème général, nous commençons par un rappel d'une partie de ces travaux ainsi que des approches associées.

1.2.1 Différentes approches du problème

Excepté le cas où (X_t) est une diffusion brownienne unidimensionnelle et certains cas particuliers comme les processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on ne sait en général pas calculer la probabilité invariante associée à une EDS de type (1.1). Il faut alors envisager un algorithme d'approximation. Pour un processus de Markov ergodique (X_t) de semi-groupe (P_t), on a principalement deux types de résultat dans lesquels la probabilité invariante ν du processus apparaît comme limite (faible) :

- Convergence en loi de (X_t) : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $P_t(x, dy) \xrightarrow{t \to +\infty} \nu(dy)$.

- Convergence de la mesure d'occupation : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s^x \in dy\}} ds \xrightarrow{t \to +\infty} \nu(dy)$ $p.s.$

Ces deux types de résultats génèrent deux approches différentes pour l'estimation numérique de la probabilité invariante. Le premier type de résultat mène à des méthodes de Monte-Carlo. Pour des travaux dans cette direction dans le cadre des diffusions Browniennes, nous renvoyons à Kushner [Kus84] (resp. Pflug [Pfl84], Basak, Hu et Wei [BHW97]) pour une approximation basée sur un schéma d'Euler à pas constant (resp. sur un schéma d'Euler à pas décroissant). Nous nous intéresserons plus en détail à l'approche de [BHW97] dans les chapitres 7 et 8. Cependant, dans la majeure partie de la thèse, nous nous inspirons du deuxième type de résultat qui possède un avantage important du point de vue numérique : il est trajectoriel et ne nécessite donc la simulation que d'une seule trajectoire. Dans ce cadre, le but est alors de construire une suite de

mesures empiriques $(\bar{\nu}_n)$ simulable telle que

$$\bar{\nu}_n(\omega, dy) \overset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \nu(dy) \quad p.s.$$

Ce type d'approche a fait l'objet de plusieurs travaux dans le cadre des diffusions Browniennes. Talay (cf. [Tal90]) considère un schéma d'Euler* $(\bar{X}_k^\gamma)_{k\geq 1}$ à pas constant γ et construit pour tout $\gamma > 0$, une suite $(\bar{\nu}_n^\gamma)$ de la manière suivante : $\bar{\nu}_n^\gamma := 1/n \sum_{k=1}^n \delta_{\bar{X}_{k-1}^\gamma}$. Sous les conditions qui suivent, il montre d'abord que la chaîne de Markov homogène $(\bar{X}_n^\gamma)$ est ergodique pour tout $\gamma > 0$: b et σ sont $\mathcal{C}^\infty$ à dérivées bornées, σ est bornée, la diffusion est uniformément elliptique, et l'hypothèse de Lyapounov suivante est satisfaite :

$$\exists \alpha > 0,\ \exists \beta \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \langle x, b(x)\rangle \leq -\alpha|x|^2 + \beta.$$

En notant ν^γ l'unique probabilité invariante de $(\bar{X}_k^\gamma)_{k\geq 1}$, il montre que

$$\forall f \in L^1(\nu^h), \quad \bar{\nu}_n^\gamma(f) \xrightarrow{n\to+\infty} \nu^\gamma(f) \quad p.s.,$$

puis que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à croissance polynomiale, $\bar{\nu}_n^\gamma(f) - \nu(f) \to 0$ quand $\gamma \to 0$.
Une autre approche plus récemment développée par Lamberton&Pagès (cf. [LaPa02, LaPa03]) est fondée sur un schéma d'Euler $(\bar{X}_n)$ à pas décroissant : soit (γ_n) une suite décroissante de réels strictements positifs telle que $\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k \to +\infty$ et $\lim \gamma_n = 0$ quand $n \to +\infty$, et (U_n) un bruit blanc ayant suffisamment de moments polynomiaux. Le schéma $(\bar{X}_n)$ est défini récursivement par

$$\bar{X}_0 = x \in \mathbb{R}^d, \quad \bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_n b(\bar{X}_n) + \sqrt{\gamma_n}\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1}, \tag{1.2}$$

et la suite de mesures empiriques $(\bar{\nu}_n)$ est alors construite comme une moyenne pondérée par des poids strictement positifs η_k de somme infinie : $\bar{\nu}_n = \frac{1}{\eta_1+\ldots+\eta_n} \sum_{k=1}^n \eta_k \delta_{\bar{X}_{k-1}}$. Les auteurs admettent alors l'existence d'une fonction de Lyapounov V $\mathcal{C}^2$ à croissance sous-quadratique telle qu'il existe $a \in (0, 1]$† tel que

$$|b|^2 + Tr(\sigma\sigma^*) = O(V^a), \quad \text{et} \quad AV \leq \beta - \alpha V^a.$$

Sous cette hypothèse, ils montrent alors que, sous des conditions peu contraignantes sur les pas et les poids‡, $(\bar{\nu}_n)$ est tendue et que toute valeur d'adhérence $(\bar{\nu}_n)$ est invariante pour l'EDS. En particulier, si l'EDS admet une unique probabilité invariante,

$$\bar{\nu}_n(f) \xrightarrow{n\to+\infty} \nu(f) \quad p.s.$$

pour un ensemble de fonctions f contenant l'ensemble des fonctions continues bornées (Le résultat est valable pour toute fonction f à croissance polynomiale§ si $Tr(\sigma\sigma^*) = o(V^a)$).
Sous une forme légèrement différente, ce type d'approche peut être étendu au cas où le drift

*Des schémas de Milschtein et du second ordre sont également étudiés.

†a représente l'intensité de la force de rappel

‡Conditions automatiquement satisfaites si (η_n/γ_n) est décroissante. Pour des conditions plus générales, voir [Lem05] (on y remarque par exemple qu'il est souvent possible de choisir $\eta_n = 1$).

§Pour des extensions au cas où f est à croissance exponentielle, voir [Lem05].

n'est plus à croissance linéaire. Dans ce cadre, le schéma (1.2) peut exploser mais Lemaire montre qu'en remplaçant le pas γ_n par un pas stochastique dominé par γ_n, le même type de résultat reste encore valable (voir [Lem06]).
L'approche de Talay et celle de Lamberton et Pagès sont relativement différentes du point de vue de la construction de la suite de mesures empiriques mais également du point de vue des méthodes de démonstration. En effet, Talay s'appuie sur le caractère Markovien homogène du schéma d'approximation qui permet de prouver l'ergodicité de ce schéma grâce à des arguments "à la Meyn&Tweedie" (irréductibilité, positive récurrence, uniforme ellipticité, ..., voir [MeTw93]). Le schéma d'Euler à pas décroissant n'étant pas homogène, les seconds auteurs fondent leurs preuves sur la stabilité de la chaîne de Markov (non homogène) associée à des méthodes de martingales (voir [Duf97] pour des résultats dans cette direction) ainsi que sur un critère d'invariance fondé sur le générateur infinitésimal : le théorème d'Echeverria-Weiss (voir théorème 2.10). En particulier, cette preuve ne nécessite pas d'hypothèse d'uniforme ellipticité (voir [Pag01] pour une discussion sur ces questions).

Dans la suite, on se basera principalement sur l'approche développée par Lamberton et Pagès.

1.2.2 Spécificités liées aux sauts

L'introduction des sauts du processus de Lévy dans ce problème engendre principalement deux types de spécificités ou de difficultés associées à la stabilité du système dynamique et à la simulation du schéma d'Euler.

• Stabilité : Alors que le mouvement Brownien a un moment exponentiel, les moments de la composante de sauts d'un processus de Lévy ne sont pas prédéterminés. En particulier, celle-ci peut n'avoir que très peu de moments comme par exemple, dans le cas important des processus stables. La stabilité globale du système dynamique est alors fortement dépendante de la composante de sauts ou plus exactement des grands sauts qui déterminent les moments de (Z_t^h). En conséquence, contrairement aux diffusions Browniennes, ce moment devient le paramètre principal de l'hypothèse de Lyapounov associée au système. De plus, on verra que le comportement au voisinage de 0 des moments de (Z_t^h) génère une raideur supplémentaire dans l'hypothèse de Lyapounov (voir Chapitre 3).

• Simulation : La généralisation naturelle de l'approche de Lamberton et Pagès consiste à construire une suite $(\bar{\nu}_n)$ de la même manière que pour les diffusions browniennes mais fondées cette fois sur le schéma d'Euler à pas décroissant suivant :

$$\bar{X}_0 = x, \quad \bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_{n+1} b^h(\bar{X}_n) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1} + \kappa(\bar{X}_n)\bar{Z}_{n+1}$$

où $\bar{Z}_n$ désigne l'accroissement de la partie saut du processus de Lévy, *i.e.* $\bar{Z}_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z^h_{\gamma_n}$. Cependant, comme cela a déjà été expliqué précédemment, la simulation exacte des accroissements de (Z_t^h) n'est en général pas possible car la simulation de ceux de (Y_t^h) ne l'est pas (en un temps raisonnable). Il faut alors remplacer le schéma "exact" (noté (E) dans la suite) par des schémas de discrétisation "approchés" simulables en remplaçant l'accroissement exact par une approximation.
L'approximation naturelle consiste à tronquer les petits sauts de (Y_t^h) : soit (u_n) une suite de

réels strictement positifs tel que $u_n < h$ et $u_n \to 0$ et $(Y^h_{.,n})$, la suite de processus de Lévy construite de la manière suivante :

$$Y^h_{t,n} = \sum_{0<s\leq t} \Delta Y_s 1_{\{\Delta Y_s \in D^h_n\}} - t\int_{D^h_n} y\pi(dy) \qquad \forall t \geq 0$$

où $D^h_n = \{y \in \mathbb{R}^d, |y| \in (u_n, h]\}$ et $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s^-}$. Le processus $Y^{n,h}$ est un processus de Poisson composé compensé de paramètres $\lambda_n = \pi(D^h_n)$ et $\mu_n(dy) = 1_{D^h_n}(y)\pi(dy)/\pi(D^h_n)$. De plus, $Y^{n,h}$ converge localement uniformément dans L^2 ver Y^h, *i.e*, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{E}\{\sup_{0<t\leq T} |Y^h_t - Y^h_{t,n}|^2\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

La suite $(Y^h_{.,n})_n$ permet donc de construire un premier schéma approché noté (P) en remplaçant dans la construction de $(\bar{X}_n)$ les accroissements de (Z^h_t) par ceux de $(Z^h_{t,n})$ où $Z^h_{t,n} = Y^h_{t,n} + N^h_t$. Naturellement, la qualité de ce schéma est dépendante du niveau de troncation (u_n). En particulier, plus (u_n) décroît vite, plus on a rapidement une "bonne" approximation des accroissements. Cependant, un tel choix peut entrer en conflit avec le temps de simulation. En effet, le temps de simulation de la partie sauts à chaque pas de temps est fonction du nombre de sauts du processus $(Z^h_{t,n})$ sur l'intervalle $[0, \gamma_n]$ dont la moyenne est égale à $\theta_n = \pi(|y| > u_n)\gamma_n$. En particulier, si π n'est pas une mesure finie, *i.e.* si la composante de saut n'est pas un processus de Poisson composé, (θ_n) et le temps de simulation peuvent exploser. C'est pourquoi en pratique, on demandera que la suite (θ_n) soit uniformément bornée, *i.e.* que la *complexité moyenne de l'algorithme* soit linéaire[¶].
Quand les variations locales de (Z^h_t) sont trop irrégulières (dans un sens que nous préciserons dans la suite), cette hypothèse rend ce schéma peu efficace. Cela signifie que la troncation des petits sauts génère une erreur trop lourde pour notre problème. Pour remédier à ce problème, il nous faut alors corriger cette erreur. Ceci est possible par une *wienerisation des petits sauts* : d'après un article de Asmussen&Rosinski (cf. [GnKo54]), on sait que les petits sauts d'un processus de Lévy unidimensionnel se comportent asymptotiquement comme un mouvement Brownien (voir aussi Cohen&Rosinski (cf. [CoRo05]) pour une extension en dimension supérieure). Ainsi, en adaptant cette idée à notre cadre à pas décroissant, on construit un schéma noté (W) en remplaçant l'accroissement exact par l'accroissement de la somme de $Y^h_{.,n}$ et d'une composante Brownienne. On verra que ce raffinement permet de conserver la vitesse de convergence du schéma exact pour une grande classe de processus de Lévy (voir Chapitre 4).

1.3 Structure et résultats de la thèse

1.3.1 Stabilité à temps continu

L'objectif de cette première partie est d'introduire le sujet et de présenter des résultats à temps continu. Nous rappellerons quelques propriétés générales de l'EDS (1.1) puis nous nous focaliserons sur des résultats de convergence vers la probabilité invariante. Le résultat principal

[¶]On verra également que si (θ_n) tend vers 0, on peut à chaque pas de temps arrêter $(Y^h_{t,n})$ à son premier temps de saut car alors les autres sauts ont une valeur négligeable pour la convergence de la procédure (voir schéma (C)).

de cette partie est le Théorème 2.19 dans lequel nous obtenons, par des méthodes de martingales, la convergence étroite *p.s.* de la mesure d'occupation à temps continu vers la probabilité invariante. Ce théorème est une extension d'un résultat déjà existant dans le cadre des diffusions Browniennes (voir [Pag01]).
N.B. Dans la plupart des résultats proposés dans ce chapitre ainsi que dans la suite de la thèse, on admet l'existence d'une fonction de Lyapounov pour le système dynamique mais on n'aborde pas ici la question de l'exhibition effective d'une telle fonction pour un système dynamique donné. Il s'agit d'un problème spécifique (et souvent difficile en pratique). Ce type d'hypothèse est classique. Typiquement, en Mécanique classique, l'énergie du système est une fonction de Lyapounov d'un système déterministe lorsqu'il est dissipatif ou hamiltonien, le potentiel en présence de système gradient,... (voir [Soi94] pour la Mécanique hamiltonienne et plus généralement [Has81] pour une discussion à ce sujet).

1.3.2 Approximation de la probabilité invariante

La seconde partie est dédiée à l'approximation de la probabilité invariante pour des EDS de type (1.1).
Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la convergence vers l'ensemble des probabilités invariantes de l'EDS des suites de mesures empiriques induites par les schémas exacts et approchés. Ce travail est réalisé dans un cadre très général dans lequel nous supposons seulement que le processus de Lévy a un moment strictement positif. En introduisant, une hypothèse de Lyapounov adaptée au moment du processus de Lévy, nous obtenons d'abord un théorème simple d'utilisation (Théorème 3.4). Ce théorème permet en particulier de retrouver le Théorème Central Limite *p.s.* pour les processus stables symétriques (mis en évidence par Berkes, Horvath et Khoshnevisan dans [BHK98]).
Les conditions de Lyapounov devenant très restrictives quand le processus de Lévy a peu de moments, nous présentons ensuite une extension de ce résultat (Théorème 3.5) dans lequel nous montrons que sous des contraintes plus fortes sur les pas et les poids, il est possible d'assouplir les conditions sur les coefficients de l'EDS (1.1).
Excepté le schéma (C), la convergence vers la probabilité invariante des mesures empiriques induites par les schémas approchés ne nécessite pas d'hypothèses supplémentaires (vis-à-vis du schéma exact) : il suffit que le niveau de troncation u_n tende vers 0. Cependant, comme nous l'avons déjà souligné, la qualité de ces schémas, *i.e.* la vitesse de convergence des suites de mesures empiriques associées en est fortement dépendante.

Cette question fait l'objet du Chapitre 4 dans lequel nous étudions la vitesse de convergence de ces procédures et évaluons l'impact de l'approximation des sauts. De manière à ne pas cumuler les difficultés techniques, nous nous plaçons dans un cadre plus restrictif en supposant que le processus de Lévy a au moins un moment d'ordre 2. Dans le théorème 4.6, nous montrons dans un premier temps que si le processus de Lévy a un moment d'ordre supérieur à 4, la vitesse associée au schéma exact est la même que pour les diffusions Browniennes. En particulier, la vitesse optimale est de l'ordre de $n^{\frac{1}{3}}$. La question principale relative aux schémas approchés est alors la suivante : sous quelles conditions peut-on conserver cette vitesse ?
La réponse est donnée par le théorème 4.8 et la proposition 4.10. Ces résultats montrent en particulier que sous la condition de simulation $\sup_{n\geq 1}\theta_n < +\infty$ (voir partie 1.2.2 pour la notation), la vitesse de convergence associée au schéma exact est conservée dans les cas suivants :

• schéma (P) : si la composante de saut est à variation intégrable.
• schéma (W) : si la composante de saut est à variation 3/2-intégrable.
• schéma (W) : sans conditions si la mesure de Lévy est symétrique.
On montre également une extension partielle de ces résultats quand le processus de Lévy a moins de moments.

Dans le dernier chapitre de cette partie (Chapitre 5), nous revenons au cas des diffusions browniennes. Nous montrons que si le bruit blanc est symétrique, il est possible d'affaiblir les hypothèses de stabilité introduites dans [LaPa03] permettant d'assurer la convergence de la suite de mesures empiriques $(\bar{\nu}_n)$. Ce travail permet alors d'étendre les résultats de [LaPa03] à des diffusions que l'on qualifie de "semi-critiques" car on est proche du stade pour lequel la stabilité est trop faible pour assurer l'existence de probabilité invariante. Nos résultats sont par exemple applicables aux cas suivants : lorsque la force de rappel induite par le terme de drift est très faible (dans un sens précisé dans la suite) ou lorsque le terme de drift qui crée le plus souvent cette force de rappel est nul. Dans ce deuxième exemple, il ne s'agit plus d'un système dynamique standard car la fonction de Lyapounov agit cette fois sur le facteur diffusif. Ceci signifie que le facteur diffusif peut lui-même engendrer une force de rappel.
Bien qu'en apparence assez différents, l'approche à sauts et celle développée dans cette extension sont assez proches : dans le cadre des EDS dirigées par des Lévy, la contrainte du moment du processus de Lévy nécessite la mise en oeuvre d'un raisonnement plus fin et l'utilisation de fonction de Lyapounov à croissance de plus en plus faible. Dans le cadre des diffusions Browniennes, cette nécessité n'apparaît pas car le mouvement Brownien a un moment exponentiel. Cependant, quand les conditions deviennent critiques, c'est ce même type de contrainte dynamique qui est généré.
Dans ce chapitre, nous prouvons en particulier que sous la condition de symétrie sur le bruit blanc, l'invariance des probabilités limites de $(\bar{\nu}_n)$ est complètement indépendante de la stabilité du système. Cela signifie que les seules valeurs d'adhérence potentielles d'une telle suite sont nécessairement des probabilités invariantes.

1.3.3 Approximation de la loi du processus en régime stationnaire

La dernière partie de la thèse est consacrée à l'approximation de la loi du processus en régime stationnaire, *i.e.* de la loi du processus (X_t) solution de (1.1) de loi initiale une probabilité invariante ν de l'EDS. Nous la notons $\mathbb{P}_\nu$ dans la suite.
Dans le chapitre 6, nous nous intéressons à une version fonctionnelle de l'approche développée dans la partie précédente en vue d'une application au pricing d'options vanille et/ou trajectoires dépendantes.
Soit (γ_n) une suite de réels strictement positifs décroissants telle que $\lim \gamma_n = 0$ et $\Gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Soit $(\bar{X}_t^{(0)})$ le processus càdlàg défini récursivement par $\bar{X}_0^{(0)} = x$ et

$$\bar{X}_t^{(0)} = \bar{X}_{\Gamma_n}^{(0)} + (t-\Gamma_n) b^h(X_{\Gamma_n}^{(0)}) + \sigma(\bar{X}_{\Gamma_n}^{(0)})(W_t - W_{\Gamma_n}) + \kappa(\bar{X}_{\Gamma_n}^{(0)})(Z_t^h - Z_{\Gamma_n}^h) \quad \forall t \in (\Gamma_n, \Gamma_{n+1}].$$

Le processus $(\bar{X}_t^{(0)})$ est une version à temps continu du schéma d'Euler "exact" défini dans la partie 1.2.2. On note $(\bar{X}_t^{(n)})$ la suite de processus translatés définis par $(\bar{X}_t^{(n)}) = (\bar{X}_{\Gamma_n+t}^{(0)})$ et on construit alors une suite de mesures empiriques $(\nu^{(\mathbf{n})})$ sur l'espace des processus càdlàg de la

manière suivante :

$$\nu^{(\mathbf{n})} = \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \delta_{(X_t^{(k-1)})_{t\geq 0}}. \tag{1.3}$$

où (η_k) est une suite de poids définie comme précédemment. L'objectif théorique de ce chapitre est de s'intéresser à la convergence de cette suite de mesures empiriques vers le régime stationnaire $\mathbb{P}_\nu$. L'idée générale des résultats obtenus est la suivante : si $(\bar{\nu}_n)$ converge vers la probabilité invariante ν, alors, sous une hypothèse supplémentaire peu contraignante, $(\nu^{(\mathbf{n})})$ converge $p.s.$ vers $\mathbb{P}_\nu$ pour la topologie de Skorokhod (nous renvoyons au chapitre 6 pour des précisions). Deux démonstrations sont proposées pour ce résultat. Dans la première, on utilise une méthode élégante et rapide où la convergence $p.s.$ de $(\nu^{(\mathbf{n})})$ est caractérisée par celle de fonctionnelles bornées et lipschitziennes pour une distance sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ adaptée au problème. La seconde démonstration est fondée sur une approche du type "Tension + convergence fini-dimensionnelle". L'intérêt principal de cette seconde preuve est de montrer que l'on peut alors s'affranchir du critère de caractérisation des probabilités invariantes souvent utilisé jusqu'alors : le théorème d'Echeverria-Weiss. En un sens, cette seconde approche fournit en fait une preuve de ce théorème adaptée à ce type de processus.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, on montre sur des exemples concrets que ce travail donne une nouvelle méthode numérique de valorisation d'options dans des modèles à volatilité stochastique stationnaire[‖]. L'idée globale est la suivante : lorsque la volatilité est en régime stationnaire, on peut écrire l'option comme l'espérance d'une fonctionnelle explicite :
• du processus de volatilité seul dans des cas particuliers comme les options européennes Call-Put dans le modèle de Heston (grâce à la formule de Black-Scholes).
• d'un processus multi-dimensionnel en régime stationnaire dans le cas général.[**]
Si les processus ci-dessus sont solutions d'EDS dirigées par des Lévy, alors notre méthode est applicable.
Nous testons d'abord cette méthode numérique sur le modèle de Heston pour des options européennes Call-Put. Pour ce type d'options, il existe une formule semi-fermée. Ainsi, cet exemple constitue un banc d'essai numérique. Ensuite, nous valorisons des options asiatiques Call-Put dans ce même modèle de Heston, cadre dans lequel on peut constater que cette méthode fournit de bons résultats numériques. Nous valorisons enfin des options asiatiques dans des variantes du modèle de Heston : d'abord dans un exemple où la volatilité contient elle-même un paramètre stochastique puis dans le modèle de Bates dans lequel on suppose qu'il a des sauts dans le processus de prix. L'ensemble des résultats numériques obtenus montre que cette méthode peut s'avérer compétitive pour ce problème.

Dans les deux derniers chapitres, on s'intéresse toujours à l'approximation fonctionnelle d'un processus solution d'une EDS avec sauts mais cette fois sous l'angle, non abordé jusqu'à présent, de la convergence en loi.
Dans le chapitre 7, nous nous intéressons à la convergence en loi de la suite de processus $(\bar{X}^{(n)})$.

[‖] Nous renvoyons au chapitre 6 pour la justification pratique de l'utilisation de tels modèles.

[**] La seconde méthode est en réalité basée sur une construction artificielle d'un processus stationnaire car en réalité, dans les modèles classiques, le prix S_t de l'actif est une fonctionnelle de la volatilité et d'une intégrale stochastique dirigée par un Lévy. Ce dernier processus n'a pas de propriété de stationnarité mais peut être artificiellement écrit comme une fonctionnelle d'un processus stationnaire. Par exemple, pour un mouvement Brownien (W_t), on peut toujours écrire $W_t = X_t - X_0 - \int_0^t X_s ds$ où (X_t) est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ainsi, de manière indirecte, on se ramène à une fonctionnelle d'un processus stationnaire.

Nous nous inspirons d'un travail de Basak, Hu et Wei [BHW97] réalisé dans le cadre des diffusions Browniennes. Nous montrons que cette approche se généralise aux EDS dirigées par des Lévy et prouvons que $(\bar{X}^{(n)})$ converge en loi pour la topologie de Skorokhod vers la solution de l'EDS en régime stationnaire. Pour ce résultat, nous n'utilisons pas le théorème d'Echeverria-Weiss pour caractériser la probabilité invariante mais une technique proposée par les auteurs qui se base sur une convergence uniforme sur les compacts du semi-groupe vers la probabilité invariante. C'est pourquoi ce résultat nécessite des hypothèses supplémentaires qui assurent ce type de conditions. Les EDS asymptotiquement *confluentes* vérifiant cette condition, nous terminons donc ce chapitre par une présentation explicite de conditions d'asymptotique confluence pour ce type de processus.

Dans le dernier chapitre, nous obtenons un résultat limite fonctionnel pour le maximum de variables i.i.d. en adaptant les résultats du chapitre 7. On s'intéresse à $M_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ où $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. lorsque ξ_1 appartient au domaine d'attraction d'une loi *max-stable*, (ce qui signifie que l'on peut construire des suites (a_n) et (b_n) telles que $(\bar{X}_n = \frac{M_n - b_n}{a_n})$ converge en loi vers une distribution non dégénérée). L'idée principale de ce travail est de montrer que $(\bar{X}_n)$ peut être vu comme l'approximation d'un schéma d'Euler à pas décroissant associé à une EDS avec sauts Markovienne et ergodique. Nous établissons alors un résultat de convergence en loi de la suite de processus constants par morceaux $(\bar{X}_t^{(n)})$ sous-jacente à la suite $(\bar{X}_k)_{k\geq n}$. L'objet limite obtenu est une EDS avec sauts Markovienne mais il ne s'agit pas d'une EDS dirigée par un processus de Lévy car la taille et l'intensité des sauts dépendent de la position du processus.

1.4 Notations

Avant de terminer ce chapitre d'introduction, nous souhaitons indiquer les notations les plus fréquemment utilisées au cours de la thèse.
Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ est noté $\langle ., . \rangle$ et la norme euclidienne $|\,.\,|$. L'ensemble des matrices réelles à d lignes et l colonnes est noté $\mathbb{M}_{d,l}$. Pour $M \in \mathbb{M}_{d,l}$, on note $\|M\| := \sup_{\{|x|\leq 1\}} |Mx|/|x|$. Si $M \in \mathbb{M}_{d,d}$, $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de M. Si de plus, M est symétrique, on note $\lambda_M = \max(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont les valeurs propres de M. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$Mx^{\otimes 2} = x^* Mx \leq \lambda_M |x|^2. \tag{1.4}$$

L'ensemble des fonctions continues bornées (resp. nulles à l'infini) est noté $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$). De même, pour $l \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_K^l(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^l$ à support compact. Une fonction $f : E \mapsto F$ (où E et F sont des espaces vectoriels normés) est dite p-Hölder

$$[f]_p = \sup_{x,y\in E} \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E^p} < +\infty.$$

Dans le cas particulier où f est lispchitzienne, on pose $[f]_L := [f]_1$.
Enfin, une fonction $V : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ sera dite *Essentiellement Quadratique* si elle est strictement positive, de classe $\mathcal{C}^2$, si $V(x) \xrightarrow{|x|\to+\infty} +\infty$ et si

$$|\nabla V|^2 \leq CV \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|D^2 V(x)\| < +\infty. \tag{1.5}$$

On note alors $\underline{v} := \min_{\mathbb{R}^d} V$ ($\underline{v}$ est strictement positif). L'ensemble $\mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ désigne alors l'ensemble des fonctions V essentiellement quadratiques sur $\mathbb{R}^d$. ($\mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ contient l'ensemble des fonctions de la forme $V(x) = \rho + Sx^{\otimes 2}$ où ρ est un nombre strictement positif et S est une matrice $d \times d$ symétrique et définie positive).

Chapitre 2

Généralités et Résultats à temps continu

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de présenter des résultats de convergence vers la probabilité invariante pour un processus (X_t) solution d'une EDS dirigée par un Lévy. Après une présentation sommaire des processus de Lévy puis du type d'EDS que nous étudions, nous rappelons quelques résultats d'existence et d'unicité de la probabilité invariante pour un processus de Markov général. Enfin, nous présentons un résultat spécifique aux EDS dirigées par des Lévy (Théorème 2.19) dans lequel nous obtenons la convergence de la mesure d'occupation vers la probabilité invariante par un raisonnement basé sur des méthodes de martingales.

2.1 Présentation de l'EDS

2.1.1 Processus de Lévy

Dans cette partie, on rappelle quelques propriétés des processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^l$ qui nous seront utiles dans la suite (pour une introduction aux processus de Lévy, voir *e.g.* [Ber96], [Sat99] ou [Pro90]). Rappelons-en d'abord une définition.

Définition 2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles et $(L_t)_{t\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^l$ ($l \in \mathbb{N}^*$) tel que $L_0 = 0$. Alors, le processus (L_t) est un processus de Lévy si*
(i) $(L_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants, i.e. pour tout $n \geq 1$, pour tous $t_0, \dots t_n$ tels que $0 \leq t_0 < t_1 \dots < t_n$, L_{t_0}, $L_{t_1} - L_{t_0}, \dots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ sont (globalement) indépendants.
(ii) $(L_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires, i.e. pour tous s, t tels que $0 \leq s < t$, $L_t - L_s$ a la même loi que L_{t-s}.
(iii) $(L_t)_{t\geq 0}$ est un processus à trajectoires p.s. càdlàg.

Notons $\Delta L_t = L_t - L_{t^-}$. On définit alors la mesure de comptage aléatoire $n_t(\omega, dy)$ sur $\mathbb{R}^l \backslash \{0\}$ par : pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l \backslash \{0\})$, $n_t(\omega, \Lambda) = \sum_{0<s\leq t} 1_\Lambda(\Delta L_s)$. On appelle alors mesure de Lévy, la mesure définie sur $\mathbb{R}^l \backslash \{0\}$ par

$$\pi(\Lambda) = \mathbb{E}\{n_1(., \Lambda)\} \quad \forall \Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l \backslash \{0\}).$$

(ΔL_t) est un processus ponctuel de Poisson à valeurs dans $\mathbb{R}^l\backslash\{0\}$ de mesure d'intensité π (voir [Ber96]). En particulier, on bénéficie alors d'une formule de compensation qui sera souvent utilisée dans la suite :

Proposition 2.2 *Soit H un processus défini sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^l$, $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ mesurable tel que $H(s,\omega,0) = 0$. Alors,*
(i) Si H est positif,

$$\mathbb{E}\Big\{ \sum_{0<s\leq t} H(s,\omega,\Delta L_s)\Big\} = \mathbb{E}\Big\{ \int_0^t ds \int \pi(dy) H(s,\omega,y)\Big\}.$$

(ii) Supposons que $\mathbb{E}\{\int_0^t ds \int \pi(dy)|H(s,\omega,y)|\} < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Le processus (M_t) défini par $M_t := \sum_{0<s\leq t} H(s,\omega,\Delta L_s) - \int_0^t ds \int \pi(dy) H(s,\omega,y)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.
(iii) Supposons que $\int_0^t ds \int \pi(dy)|H(s,\omega,y)| < \infty$ p.s. pour tout $t \geq 0$. Le processus (M_t) défini ci-dessus est alors une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.

Preuve : Nous renvoyons à [ReYo91], p.475 pour une preuve de (i) et (ii).
(iii) Posons $A_t = \int_0^t ds \int \pi(dy)|H(s,\omega,y)|$ et $\tau_n = \inf\{t > 0, A_t \geq n\}$. Le processus (A_t) étant $p.s.$ continu, on en déduit que $|A_{t\wedge\tau_n}| \leq n$. Ainsi, d'après (ii), $(M_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ est une martingale. $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\tau_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ $p.s.$ (M_t) est donc une martingale locale. □

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $u_n \to 0$. Soit $h > 0$ et $(Y^h_{t,n})$ la suite de processus définis par

$$Y^h_{t,n} = \sum_{0<s\leq t} \Delta L_s 1_{\{\Delta L_s \in D^h_n\}} - t\int_{D^h_n} y\pi(dy) \qquad \forall t \geq 0$$

où $D^h_n = \{y \in \mathbb{R}^l, u_n < |y| \leq h\}$. Le processus $Y^h_{\cdot,n}$ est un processus de Poisson composé compensé d'intensité $\lambda^h_n = \pi(D^h_n)$ dont la loi des sauts est donnée par $\mu^h_n(dy) = 1_{D^h_n}(y)\pi(dy)/\pi(D^h_n)$. En particulier, en tant que processus de Lévy centré, $(Y^h_{t,n})_{t\geq 0}$ est une martingale. La suite de martingales $(Y^h_{\cdot,n})$ converge localement uniformément dans L^2 vers un processus Y^h, *i.e.* pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{E}\{\sup_{0<t\leq T} |Y^h_t - Y^h_{t,n}|^2\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{2.1}$$

On rappelle alors la décomposition de Lévy-Khintchine d'un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^l$:

Théorème 2.3 *Soit (L_t) un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^l$. Alors, $\int(|y|^2 \wedge 1)\pi(dy) < +\infty$ et pour tout $h > 0$, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\{e^{i\langle u, L_t\rangle}\} = e^{-t\psi(u)}$ où*

$$\psi(u) = i\langle\alpha_h, u\rangle + \frac{1}{2}\langle Qu, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^l} (1 - e^{i\langle u,y\rangle} + i\langle u, y\rangle 1_{\{|y|\leq h\}})\pi(dy).$$

$\alpha_h \in \mathbb{R}^l$ et Q est une matrice $l \times l$ symétrique positive. Le processus (L_t) admet alors la décomposition suivante :

$$L_t = \alpha_h t + \sqrt{Q}W_t + Y^h_t + N^h_t$$

où (W_t), (Y_t^h) et (N_t^h) sont des processus indépendants tels que (W_t) est un mouvement Brownien standard l-dimensionnel, (Y_t^h) est défini par (3.2) et (N_t^h) défini par $N_t^h := \sum_{0<s\leq t} \Delta L_s 1_{\{|\Delta L_s|>h\}}$ est un processus de Poisson composé de paramètres $\lambda^h = \pi(|y| > h)$ et $\mu^h(dy) = \frac{\pi(dy)}{\pi(|y|>h)} 1_{\{|y|>h\}}$.

Un processus de Lévy est donc composé d'un terme de drift, d'une une partie brownienne, d'une martingale purement discontinue et d'un processus de Poisson.
Nous nous intéressons maintenant aux moments et au comportement local d'un processus de Lévy. D'abord, un processus de Lévy à sauts bornés a des moments de tous ordres pour tout $t \geq 0$. En particulier, (Y_t^h) a des moments de tous ordres. Cela signifie que les moments d'un processus de Lévy sont dictés par ceux de (N_t^h). Or, on peut montrer que pour $p > 0$,

$$\mathbb{E}\{|N_t^h|^{2p}\} < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{|y|>h} \pi(dy)|y|^{2p} < +\infty.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\{|L_t^h|^{2p}\} < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{|y|>h} \pi(dy)|y|^{2p} < +\infty. \tag{2.2}$$

En revanche, les variations locales d'un processus de Lévy sont dictées par celles du mouvement Brownien et de (Y_t^h). Le mouvement Brownien est à variation quadratique intégrable tandis que les variations de (Y_t^h) sont données par la mesure de Lévy. Pour $q > 0$,

$$\mathbb{E}\{\sum_{0<s\leq t} |\Delta Y_s^h|^{2q}\} < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{|y|\leq h} \pi(dy)|y|^{2q} < +\infty.$$

En particulier, comme $\int(|y|^2 \wedge 1)\pi(dy) < +\infty$, il existe nécessairement $q \leq 1$ pour lequel la propriété ci-dessus est satisfaite.
On introduit alors deux hypothèses fondamentales pour toute la suite :

$$(\mathbf{H_p^1}) \quad : \quad \int_{|y|>1} \pi(dy)|y|^{2p} < +\infty \qquad p \geq 0 \tag{2.3}$$

$$(\mathbf{H_q^2}) \quad : \quad \int_{|y|\leq 1} \pi(dy)|y|^{2q} < +\infty. \qquad 0 \leq q \leq 1.$$

2.1.2 Formulation de l'EDS

Soit $h > 0$. Notons $Z_t^h = Y_t^h + N_t^h$. Avec les notations introduites dans la décomposition de Lévy-Khintchine, nous considérons $(X_t)_{t\geq 0}$, processus càdlàg solution de l'EDS suivante :

$$dX_t = b^h(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t^h \tag{2.4}$$

où b^h, σ et κ sont continues et sous-linéaires à valeurs respectives dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{M}_{d,l}$, $\mathbb{M}_{d,l}$ (ensemble des matrices réelles à d lignes et l colonnes).

Sous cette forme, l'équation (2.4) n'admet pas de représentation unique à cause de la troncation (sauf si π est symétrique car alors $\int_{|y|\geq h} y\pi(dy) = 0$ pour tout $h > 0$). On remarque que pour $h' \neq h$, l'équation s'écrit aussi :

$$dX_t = b^{h'}(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t^{h'}$$

où,

$$b^{h'} = \begin{cases} b^h + \kappa(x) \int_{h<|y|\leq h'} y\pi(dy) & \text{si } h' \in (0,h) \\ b^h - \kappa(x) \int_{h<|y|\leq h'} y\pi(dy) & \text{si } h' \in (h,+\infty). \end{cases} \tag{2.5}$$

Cependant, dans de nombreuses situations, il est possible de privilégier une forme canonique de (2.4). C'est le cas lorsque $(N_t^h)_{t\geq 0}$ est intégrable, car on peut alors compenser les grands sauts du processus de Lévy (*i.e.* prendre $h = +\infty$), ou lorsque $(Y_t^h)_{t\geq 0}$ est à variation localement finie, car alors on peut à l'inverse ne pas compenser les petits sauts du processus de Lévy (*i.e.* prendre $h = 0$).
C'est pourquoi dans la suite, nous adopterons l'écriture générique suivante :

$$dX_t = b(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t \tag{2.6}$$

où la définition de b et Z dépend de p et q : soient $p \geq 0$ et $q \leq 1$ tels que $(\mathbf{H_p^1})$ et $(\mathbf{H_q^2})$ soient satisfaites. Alors, si :

Cas 1 : $p > 1/2$,

$$b(x) = b^h(x) + \int_{\{|y|>h\}} y\pi(dy)\kappa(x) = b^\infty(x), \qquad Z_t = Z_t^\infty = Y_t + N_t \qquad \text{avec}$$
$$Y_t = Y_t^h \qquad \text{et} \qquad N_t = N_t^h - t\int_{\{|y|>h\}} y\pi(dy).$$

Cas 2 : $p, q \leq 1/2$,

$$b(x) = b^h(x) + \int_{\{|y|\leq h\}} y\pi(dy)\kappa(x) = b^0(x), \qquad Z_t = Z_t^0 = Y_t + N_t \qquad \text{avec}$$
$$Y_t = Y_t^h + t\int_{\{|y|\leq h\}} y\pi(dy) \qquad \text{et} \qquad N_t = N_t^h.$$

Cas 3 : $p \leq 1/2 < q$,

$$b(x) = b^h(x) \qquad Z_t = Z_t^h = Y_t + N_t \qquad \text{avec}$$
$$Y_t = Y_t^h \qquad \text{et} \qquad N_t = N_t^h.$$

N.B : Les notations ci-dessus seront maintenues dans toute la suite de la thèse.

Remarque 2.4 Les cas 1 et 2 sont des formulations réellement indépendantes de h tandis que le cas 3 est simplement une convention d'écriture. Bien que la formulation associée au cas 1 ait un sens dans le cas critique $p = 1/2$, nous choisissons pour des raisons techniques d'adopter les notations du cas 3. Dans le cadre de notre problème, l'avantage des formulations 1 et 2 et de distinguer de manière claire la force de rappel et le bruit du système dynamique. En effet, dans le cas 1, la composante de saut génère du drift si elle est non centrée. La formulation 1 permet alors d'écrire le système dynamique sous une forme standard "système différentiel pertubé par un bruit centré". Quand $p < 1/2$, la composante de saut n'est pas intégrable, on est alors obligé de la considérer comme une composante ne générant que du bruit (même si elle est décentrée). La formulation 2 permet alors d'isoler clairement cette composante de saut.
Le cas 1 contient par exemple les processus de Poisson composé ayant un moment strictement supérieur à 1 et les processus stables d'ordre $\alpha > 1$. Le cas 2 contient les processus de Poisson composé de moment inférieur à 1 et les processus stables d'ordre $\alpha < 1$. Le cas 3 contient les processus stables d'ordre 1.

Rappelons un résultat concernant l'existence, l'unicité et la structure Markovienne des solutions de (2.6) (voir [Pro90]).

Théorème 2.5 *Supposons que b, σ et κ soient localement Lipschitziennes et sous-linéaires. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles et X_0 une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien $(W_t)_{t\geq 0}$, pour tout processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini comme précédemment $(\mathcal{F}_t)$-mesurable, l'EDS (2.6) admet une unique solution càdlàg $(X_t)_{t\geq 0}$ de valeur initiale X_0. De plus, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov Fellérien.*

Remarque 2.6 Parmi les EDS dirigées par des semi-martingales, l'ensemble des EDS dirigées par des Lévy constitue la classe maximale pour laquelle les solutions bénéficient d'une structure Markovienne. En effet, d'après un résultat de Jacod et Protter (voir [JaPr91]) sous des conditions appropriées sur les coefficients, un processus stochastique solution d'une EDS dirigée par une semimartingale homogène est un processus de Markov si et seulement si le processus dirigeant l'équation est un processus de Lévy.

2.2 Générateur infinitésimal et stationnarité

2.2.1 Définition et calcul

Plusieurs définitions peuvent correspondre à la notion de générateur. Nous utiliserons ici une définition adaptée à des processus Fellériens à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.7 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de semi-groupe de transition $(P_t)_{t\geq 0}$ Fellérien. On appelle générateur infinitésimal de $(P_t)_{t\geq 0}$, un couple $(A, \mathcal{D}(A))$ où $\mathcal{D}(A)$ est contenu dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et A désigne un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, et vérifiant :*

$$\forall\, f \in \mathcal{D}(A),\ \forall\, t \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s(Af)(x)ds. \tag{2.7}$$

N.B. Dans cette définition et dans toute la suite, $\mathcal{D}(A)$ désigne simplement un sous-ensemble de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ sur lequel A est bien défini et (2.7) est satisfait. En particulier, il ne s'agit pas nécessairement du plus grand sous-ensemble de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ pour lequel les deux propriétés ci-dessus sont satisfaites.
Cette définition implique que $\frac{d}{dt}P_t f(x)_{t=0} := \lim_{t\to 0}\frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = Af(x)$. Le générateur a donc la qualité d'apporter une information dynamique sur le processus, la précision de cette information étant fonction de la taille de $\mathcal{D}(A)$. Si $\mathcal{D}(A)$ est suffisament grand, alors, en quelque sorte, l'information dynamique est suffisante pour que le générateur caractérise le semi-groupe.

Notons $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de transition de $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de (2.6) et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Proposition 2.8 *Soit A l'opérateur de $\mathcal{C}^2_K(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ défini par :*

$$Af(x) = \langle \nabla f, b^h \rangle(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(x) + \int H^{f,h}(x, y)\pi(dy) \tag{2.8}$$

où, $H^{f,h}(x,y) = f(x+\kappa(x)y) - f(x) - \langle \nabla f, \kappa(x)y\rangle 1_{\{|y|\leq h\}}$. *Alors,*
(i) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$, $P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s(Af)(x)ds$.
(ii) Si de plus, $\|\kappa(x)\| = o(|x|)$ *quand* $|x| \to +\infty$, *alors pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d))$, Af *appartient à l'ensemble* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ *des fonctions continues nulles à l'infini.*

Remarque 2.9 On note que dans le cas 1, on peut écrire :

$$Af(x) = \langle \nabla f, b\rangle(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(x) + \int H^{f,\infty}(x,y)\pi(dy)$$

et que dans le cas 2,

$$Af(x) = \langle \nabla f, b\rangle(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(x) + \int H^{f,0}(x,y)\pi(dy).$$

L'assertion (ii) sera nécessaire dans la suite pour satisfaire les conditions du théorème d'Echeverria-Weiss (voir théorème 2.10). On note que la condition $\|\kappa(x)\| \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$ ne peut être affaiblie en général. Il suffit pour cela de prendre $\kappa(x) = x$ et Z un processus de Poisson standard.

Preuve : (i) Soit $f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $C = (c_{i,j}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}_{d,l}$ et M une martingale locale, on notera

$$\int_0^t \langle \nabla g(X_{s^-}), C(X_{s^-})dM_s\rangle := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^l \int_0^t (\nabla g)_i(X_{s^-})c_{i,j}(X_{s^-})dM_s^j. \tag{2.9}$$

Supposons que $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$. D'après la formule d'Itô,

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t \langle \nabla f, b^h\rangle(X_{s^-})ds + \int_0^t \langle \nabla f(X_{s^-}), \sigma(X_{s^-})dW_s\rangle$$
$$+ \int_0^t \langle \nabla f(X_{s^-}), \kappa(X_{s^-})dY_s^h\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(X_{s^-})ds + \sum_{0<s\leq t} H^{f,h}(X_{s^-}, \Delta Z_s^h).$$

Comme κ est sous-linéaire,

$$|x + \kappa(x)y)| \geq |x| - C|y|(1+|x|) \geq \frac{|x|-1}{2}$$

dès que $|y| \leq 1/2C$. On pose alors $\delta = 1/2C$. Comme f est à support compact, il existe $R > 0$ tq supp $f \subset B(0,R)$. Posons $M = 2R+1$. On remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ tel que $|x| > M$, et $|y| \in (0,\delta]$, $H^{f,h}(x,y) = 0$. Ainsi, d'après la formule de Taylor, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|H^{f,h}(x,y)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}\|D^2 f\|_\infty \big(\sup\limits_{z\in B(0,M)} \|\kappa(z)\|^2\big)|y|^2 & \text{si } |y| \leq \delta. \\ 2\|f\|_\infty + 1_{B(0,M)\times(0,h]}(x,y)|\nabla f(x)|.\|\kappa(x)\|.|y| & \text{si } |y| > \delta. \end{cases} \tag{2.10}$$

On en déduit que

$$|H^{f,h}(x,y)| \leq C_1|y|^2 1_{|y|\leq\delta} + C_2 1_{|y|\geq\delta} \leq C(|y|^2 \wedge 1).$$

Ainsi, comme $\int(|y|^2 \wedge 1)\pi(dy) < \infty$,

$$\mathbb{E}\Big\{ \int_0^t \int \pi(dy)|H^f(X_{s^-}, y)|\Big\} < \infty \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Cette condition est suffisante d'après la proposition 2.2 pour que le processus compensé (A_t^f) défini par :

$$A_t^f = \sum_{0<s\leq t} H^f(X_{s^-}, \Delta Z_s^h) - \int_0^t \int \pi(dy) H^f(X_{s^-}, y)$$

soit une vraie martingale centrée. D'autre part, comme Y^h est un processus de Lévy centré, il en est de même pour chaque composante. Ainsi, pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, $(Y^h)^j$ est une martingale. De même, chaque W^j est une martingale, et donc : $\int_0^{\cdot}(\nabla f)_i f(X_{s^-})\sigma_{i,j}(X_{s^-})dW_s^j$ et $\int_0^{\cdot}(\nabla f)_i f(X_{s^-})\kappa_{i,j}(X_{s^-})d(Y_s^h)^j$ sont de vraies martingales car leurs intégrands respectifs sont bornés. On obtient alors :

$$\mathbb{E}\{f(X_t)\} = f(x) + \mathbb{E}\Big\{ \int_0^t \Big(\langle \nabla f, b^h\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)\Big)(X_{s^-}) + \int \pi(dy) H^f(X_{s^-}, y) ds\Big\}.$$

On en déduit *(i)* grâce au théorème de Fubini.

(ii) On remarque que la fonction $Af \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $g(x) = \int \pi(dy) H^f(x, y) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. La fonction g est continue via l'inégalité (2.10) et le théorème de continuité de Lebesgue. Comme $\|\kappa(x)\| \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$, à y fixé, il existe $\tilde{M}(y) > 0$ tel que pour tout $|x| > \tilde{M}(y)$, $|x + \kappa(x)y| > R$ et $|x| > R$. On en déduit

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, H^f(x, y) \overset{|x|\to+\infty}{\to} 0.$$

L'inégalité (2.10) et le théorème de convergence dominée impliquent alors que

$$\int \pi(dy) H^f(x, y) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0.$$

□

2.2.2 Le théorème d'Echeverria-Weiss

Au cours de l'exposé, nous privilégierons la notion de générateur à celle de semi-groupe. Nous rappelons ici un critère basé sur le générateur assurant qu'une probabilité est invariante pour un processus (voir [EtKu86], p. 238, [LaPa02], [Lem05]).

Théorème 2.10 *Soit E un espace polonais localement compact et $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}_0(E) \mapsto \mathcal{C}_0(E)$ un opérateur satisfaisant le principe du maximum positif *. Si $\mathcal{D}(A)$ contient une algèbre dense dans $(\mathcal{C}_0(E), \|.\|_\infty)$, sur laquelle il existe une suite $(f_n)_n$ satisfaisant :*

$$(i) \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|f_n\|_\infty + \|Af_n\|_\infty) < +\infty \qquad (ii) \quad \forall\, x \in E,\ f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \text{ et } Af_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (2.11)$$

*Un opérateur A défini sur $\mathcal{D}(A)$ à valeurs dans $\mathcal{C}_0(E)$ vérifie le principe du maximum positif si

$$\forall\, f \in \mathcal{D}(A),\ \sup_{x\in E} f(x) = f(x_0) \Rightarrow Af(x_0) \leq 0.$$

alors, pour toute probabilité ν définie sur $(E, Bor(E))$ satisfaisant $\int_E Af d\nu = 0 \ \forall f \in \mathcal{D}(A)$, il existe une solution stationnaire au problème de martingale (A, ν).

Remarque 2.11 Nous renvoyons à [EtKu86] pour une preuve de ce résultat quand E est un espace compact. Dans le cas localement compact, la condition (2.11) n'apparaît pas dans [EtKu86] mais semble pourtant nécessaire pour assurer l'existence de solution au problème de martingale. Nous renvoyons donc à [Lem05] pour une preuve de ce théorème dans le cas localement compact.

Corollaire 2.12 *Soit A l'opérateur défini par (2.8) et ν probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tels que :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} Af d\nu = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d).$$

Si b, σ et κ sont continues et sous-linéaires et que $\|\kappa(x)\| \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$, alors il existe un processus de Markov stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ de générateur A tel que $\mathbb{P}_{X_0} = \nu$. En particulier, si b, σ et κ sont localement lipschitziennes, alors ν est invariante pour $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de (2.6).

Preuve : On vérifie les hypothèses du théorème 2.10. Posons $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit d'une algèbre dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. A vérifie le principe du maximum positif (c'est évident pour tout générateur car $Af(x) = \lim_{t\to 0}(P_t f(x) - f(x))/t$). Soit $\phi \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi(0) = 1$. La condition (2.11) est satisfaite par la suite de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \phi(\frac{x}{n})$. En effet, $(f_n)_{n\geq 1}$ est contenue dans $\mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$ et $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1$. D'autre part,

$$Af_n(x) = \frac{1}{n}\langle \nabla\phi(\frac{x}{n}), b(x)\rangle + \frac{1}{2n^2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2\phi\,\sigma)(\frac{x}{n}) + \int \bar{H}^n(x,y)\pi(dy)$$

$$\text{où,} \quad \bar{H}^n(x,y) = \phi(\frac{x+\kappa(x)y}{n}) - \phi(\frac{x}{n}) - \frac{1}{n}\langle \nabla\phi(\frac{x}{n}), \kappa(x)y 1_{\{|y|\leq h\}}\rangle.$$

D'une part, il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{n}\langle \nabla\phi(\frac{x}{n}), b(x)\rangle + \frac{1}{2n^2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2\phi\,\sigma)(\frac{x}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

D'autre part, on remarque par la formule de Taylor que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|\bar{H}^n(x,y)|1_{\{|y|\leq h\}} \leq \frac{1}{n^2}\|D^2\phi\|_\infty \|\kappa(x)\|^2 |y|^2 1_{|y|\leq h} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$|\bar{H}^n(x,y)|1_{|y|>h} \leq \frac{1}{n}|\nabla\phi|_\infty \|\kappa(x)\|.|y| 1_{\{|y|>h\}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

La première inégalité montre en particulier que $\bar{H}^n(x,y)$ est dominé par une fonction intégrable par rapport à $\pi(dy)1_{|y|\leq h}$. Comme $\bar{H}^n(x,y)$ est également bornée sur l'ensemble $\{|y| > h\}$ et que $\pi(dy)1_{\{}|y| > h\}$ est une mesure finie, on déduit finalement du théorème de convergence dominée que $Af_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Enfin, $\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|Af_n(x)| < +\infty$. En effet, soit $R > 0$ tq supp ϕ est inclus dans $B(0,R)$. Alors supp f_n est inclus dans $B(0, nR)$. Comme b, σ et κ sont à croissance linéaire, on a alors $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|Af_n(x)| \leq C\{\frac{1+nR}{n} + \frac{1+n^2R^2}{2n^2} + 1\}$, d'où le résultat.

Les conditions du théorème 2.10 sont bien satisfaites. Ainsi, il existe un processus de Markov

stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ de générateur A tel que $\mathbb{P}_{X_0} = \nu$. Si de plus, b, σ et κ sont localement lipschitziennes, alors on a unicité pour le problème de martingale (A, ν). Or, comme $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de (2.6) de loi initiale ν est solution du problème de martingale, $(X_t)_{t\geq 0}$ est nécessairement stationnaire sous $\mathbb{P}_\nu$. □

2.3 Stabilité à temps continu

L'objectif principal de cette section est d'établir, sous une hypothèse de Lyapounov, la convergence de la mesure d'occupation du processus (X_t) solution de l'EDS (2.6) vers la probabilité invariante ν de l'EDS (2.6). Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ continue bornée, notons

$$\nu_t^x(\omega, f) = \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s^x(\omega))ds \tag{2.12}$$

la mesure d'occupation du processus (X_t^x) (solution de l'EDS (2.6) issue de x). Sous une hypothèse de Lyapounov, nous montrons dans le Théorème 2.19 que la famille $(\nu_t^x(\omega, dy))_{t\geq 1}$ est *p.s.* tendue et que toute valeur d'adhérence de cette suite est nécessairement invariante pour l'EDS (2.6). La propriété établie ci-dessus est généralement appelée *stabilité* du processus (X_t) si on a de plus l'unicité de la probabilité invariante.
Avant d'énoncer ce théorème spécifique au type de processus que nous étudions, nous rappelons d'abord quelques notions et résultats généraux pour un processus de Markov fellérien. Etant donné que dans le théorème 2.19, nous ne nous plaçons pas dans un cadre où on a nécessairement unicité de la probabilité invariante, nous rappelons en particulier dans cette première partie deux types d'hypothèses classiques qui permettent d'assurer l'unicité de la probabilité invariante : l'irréductibilité et l'*asymptotique confluence*.

2.3.1 Rappels dans un cadre général

Définition 2.13 *Soit (X_t) un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de générateur infinitésimal A. Nous dirons que $\mathcal{V} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapounov pour (X_t) si elle est continue, strictement positive et si,*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \mathcal{V}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{|x|\to+\infty} A\mathcal{V}(x) < 0.$$

Proposition 2.14 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov Fellérien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ et de générateur infinitésimal A tel que $\mathcal{V}$ est fonction de Lyapounov pour (X_t). Alors, supposons qu'il existe $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\sup_{\mathbb{R}^d} g(x) < +\infty$ et,*

$$A\mathcal{V} \leq g, \quad \limsup_{|x|\to+\infty} g(x) < 0 \quad \text{et} \quad P_t\mathcal{V}(x) \leq \mathcal{V}(x) + \int_0^t P_s g(x)ds. \tag{2.13}$$

Alors, $(X_t)_{t\geq 0}$ admet au moins une probabilité invariante ν.

La fonction g la plus naturelle est $g = A\mathcal{V}$. Cependant, comme on va le voir dans le cas des EDS dirigées par des Lévy (voir proposition 2.18), il est souvent plus facile de dominer la fonction $A\mathcal{V}$ de manière à se ramener à une fonction bornée.

Proposition 2.15 *Supposons que les hypothèses de la proposition 2.14 soient satisfaites. Supposons de plus que $(P_t)_{t\geq 0}$ satisfasse l'hypothèse suivante :*

(Lebesgue)-Irréductibilité : Il existe $t_0 > 0$ tel que $P_{t_0}(x, dy) \sim \lambda_d(dy)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Alors, il existe une unique probabilité invariante ν pour le processus (X_t). De plus, $\nu(dx) \sim \lambda_d(dx)$ et pour toute fonction f localement bornée ν-intégrable,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}_x - p.s, \quad \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds \xrightarrow{t\to+\infty} \int f d\nu. \tag{2.14}$$

Ôn dit alors que $(X_t)_{t\geq 0}$ est positif récurrent.

Nous renvoyons à [Pag01] pour une preuve des résultats ci-dessus (la preuve du second résultat s'appuie pour l'essentiel sur le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff). L'irréductibilité est une hypothèse contraignante mais sa force est de pouvoir alors obtenir la convergence le long de l'ensemble des fonctions localement bornées ν-intégrables. Pour des conditions d'irréductibilité pour un processus solution de (2.6), nous renvoyons à Fournier ([Fou99] et [FoGi04]).

Nous terminons par un résultat d'unicité sous une hypothèse d'asymptotique confluence.

Définition 2.16 *Soit (X_t) un processus de Markov de semi-groupe (P_t). (X_t) est dit asymptotiquement confluent si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, pour toute fonction f continue bornée,*

$$P_t f(x) - P_t f(y) \xrightarrow{t\to+\infty} 0. \tag{2.15}$$

En particulier, si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $X_t^x - X_t^y \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ en probabilité, alors (X_t) est asymptotiquement confluent.

Proposition 2.17 *Supposons que les hypothèses de la proposition 2.14 soient satisfaites. Si de plus, (X_t) est asymptotiquement confluent, alors, il existe une unique probabilité invariante pour le processus (X_t). En particulier, si $(\nu_t^x(\omega, dy))_{t\geq 1}$ est $\mathbb{P}_x - p.s.$ tendue pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors le processus est stable, i.e. pour toute fonction f continue bornée,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}_x - p.s, \quad \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds \xrightarrow{t\to+\infty} \int f d\nu. \tag{2.16}$$

Ce second résultat donne une nouvelle possibilité pour assurer l'unicité de la probabilité invariante notamment dans des cas où l'hypothèse d'irréductibilité n'est pas satisfaite. C'est le cas par exemple pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck d-dimensionnel de la forme $dX_t = -X_t dt + \Sigma dW_t$ où $\mathrm{rg}(\Sigma) < d$. En revanche, sous la forme très faible sous laquelle elle est énoncée, l'hypothèse d'asymptotique confluence ne permet pas d'établir la $\mathbb{P}_x - p.s.$ convergence étroite de la famille $(\nu_t^x(\omega, dy))_{t\geq 1}$. Nous devons donc nous replacer dans le cadre du Théorème 2.19 dont la première partie a pour objet d'établir cette tension.
Notons cependant que certaines formes plus fortes de l'hypothèse d'asymptotique confluence (cf [Lem05] ou partie 7.4) entraînent l'hypothèse dite de rappel énoncée dans le théorème 2.19. Une telle hypothèse renforcée est notamment vérifiée pour les processus de Ornstein-Uhlenbeck. Un critère d'asymptotique confluence "forte" pour des processus solutions de (2.6) est établi dans le

chapitre 7 (voir proposition 7.12).
Preuve de la proposition 2.17. Soit ν une probabilité invariante associée à (X_t). Soit f lipschitzienne bornée. Comme $\nu P_t = \nu$,

$$P_t f(x) - \nu(f) = \int (P_t f(x) - P_t f(y))\nu(dy).$$

Sous la condition (2.15), pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $(P_t f(x) - P_t f(y)) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que pour toute fonction lispchitzienne bornée,

$$P_t f(x) \xrightarrow{t\to+\infty} \nu(f) \tag{2.17}$$

ce qui prouve l'unicité. La suite est évidente.

2.3.2 Stabilité du processus (X_t) solution de (2.6)

Dans toute cette partie, V désigne une fonction essentiellement quadratique, *i.e.* $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ (Notation introduite dans la partie 1.4). Avant d'énoncer le résultat principal, nous donnons dans la proposition suivante un critère d'existence de probabilité invariante pour (X_t) solution de (2.6) dont la preuve est établie en annexe.

Proposition 2.18 *Soit $p > 0$ tel que l'hypothèse $(\mathbf{H_p^1})$ soit satisfaite. Supposons qu'il existe une fonction $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ telle que V^p soit fonction de Lyapounov pour (X_t) solution de (2.6). Alors, l'EDS (2.6) admet au moins une probabilité invariante.*

On introduit maintenant un nouveau paramètre $a \in (0, 1]$ relatif à l'intensité de la force de rappel du système dynamique. On obtient le théorème suivant :

Théorème 2.19 *Soient $p > 0$, $q \in [0, 1]$, $a \in (0, 1]$. Supposons que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ ainsi que les deux hypothèses ci-dessous soient satisfaites.*

$$(i) \quad \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \le C\,V^a, \quad \begin{cases} \|\kappa\|^{2p} \le CV^{a+p-1} \text{ et } \|\kappa\|^{2q} \le CV^{\theta(p+a-1)},\ (\theta \in [0,1)) & \text{si } p \le 1 \\ \|\kappa\|^2 \le CV^a & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

(ii) Hypothèse de rappel : Il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ $AV^p \le \beta - \alpha V^{a+p-1}$.

Notons (X_t^x) une solution de l'E.D.S (2.6) issue de x. Alors :
(a) Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroissante telle que $\psi(0) = 1$ et $\int_0^{+\infty} \psi(s)ds < +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\big\{V^{a+p-1}(X_s^x)\big\}\psi(s)ds < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \psi(t)\mathbb{E}\{V^p(X_t^x)\} < \infty.$$

Si, de plus $a = 1$, $\sup \mathbb{E}\{V^p(X_t^x)\} < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Supposons que $|b|^2 \le CV^r$ avec $1 \le r < 1 + p$. Alors,

$$\sup_{t\ge 1} \frac{1}{t} \int_0^t V^{\frac{p}{2}+a-1}(X_s^x)ds < \infty \quad p.s.$$

En conséquence, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la famille $(\nu_t^x(.,dy))_{t\geq 1}$ définie par $\nu_t^x(.,dy) = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s^x \in dy\}} ds$ est p.s. tendue dès que $p/2 + a - 1 > 0$.

(c)

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d), \qquad p.s, \qquad \frac{1}{t}\int_0^t Af(X_s^x)ds \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

En conséquence, d'après le corollaire (2.12), si b est supposée sous-linéaire et si $\|\kappa(x) \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$, alors, p.s., pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour toute suite $(t_n)_{n\geq 1}$ telle que $t_n \to +\infty$, toute valeur d'adhérence de $(\nu_{t_n}^x(\omega,dy))_{t\geq 1}$ est invariante pour $(P_t)_{t\geq 0}$.

Remarque 2.20 Comme le montre le résultat ci-dessus, le paramètre structurel majeur pour ce résultat est le moment du processus de Lévy. Une fois p fixé, q apparaît seulement quand $p < 1$ (cf Hypothèse (i)). Dans ce cas, on observe une sorte de conflit entre petits sauts et grands sauts. On peut noter ici que pour obtenir un résultat de tension, on a besoin d'une hypothèse sur b qui est plus faible que la sous-linéarité. Par exemple, si la mesure de Lévy associée au processus a des moments de tous ordres, alors il suffit que b soit à croissance polynomiale. La condition de sous-linéarité sur b n'est utilisée que pour que les conditions du théorème d'Echeverria-Weiss soient vérifiées. En revanche, dans le cadre discrétisé, nous aurons besoin de cette hypothèse dès la recherche de critères de tension car le drift génère un terme d'erreur que l'on ne sait pas contrôler si b n'est pas sous-linéaire. Lemaire (cf. [Lem06]) montre dans le cadre des diffusions Browniennes qu'il est alors possible de s'affranchir de cette hypothèse en introduisant un pas stochastique pour le schéma d'Euler à pas décroissant.

2.4 Preuve du Théorème 2.19

2.4.1 Lemmes préliminaires

Lemme 2.21 *Soit $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ et $p > 0$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in (0,1]$. Alors,*
(i)

$$|V^p(x+y) - V^p(y)| \leq \begin{cases} [V^p]_\alpha |y|^\alpha & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \in [2p,1] \\ C\Big(V^{p-\frac{1}{2}}(x)|y| + |y|^{2p}\Big) & \text{si } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(ii) Notons :

$$H^{f,h}(x,y) = f(x+\kappa(x)y) - f(x) - \langle \nabla f(x), \kappa(x)y\rangle 1_{\{|y|\leq h\}}.$$

Alors, pour tout $|y| \leq h$,

$$|H^{V^p,h}(x,y)| \leq \begin{cases} [V^p]_\alpha \|\kappa(x)\|^\alpha |y|^\alpha + CV^{p-\frac{1}{2}}(x)\|\kappa(x)\||y| & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \in [2p,1] \\ [\nabla(V^p)]_\alpha \|\kappa(x)\|^{\alpha+1}|y|^{\alpha+1} & \text{si } p \leq 1 \text{ et } \alpha \in [2p-1,1] \\ C\Big(V^{p-1}(x)\|\kappa(x)\|^2|y|^2 + \|\kappa(x)\|^{2p}|y|^{2p}\Big) & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$$

Preuve : (i) D'après la proposition 2.28, si $p \leq 1/2$, V^p est α-Holder pour tout $\alpha \in [2p, 1]$, ce qui fournit la première inégalité. En utilisant l'inégalité élémentaire,

$$|v^r - u^r| \leq r2^{r-1}\Big(|v-u|u^{r-1} + |v-u|^r\Big) \quad \forall u, v \geq 0, \quad \forall r \geq 1 \tag{2.18}$$

avec $u = \sqrt{V}(x)$, $v = \sqrt{V}(x+y)$ et $r = 2p$ et le caractère lipschitzien de la fonction $\sqrt{V}$, on obtient la seconde inégalité de *(i)*.
(ii) La première inégalité est simplement une conséquence de *(i)* et du fait que $|\nabla(V^p)| \leq CV^{p-\frac{1}{2}}$. On obtient la seconde grâce à la formule de Taylor et au corollaire 2.28. Enfin, pour la dernière, on commence par noter grâce à la formule de Taylor que

$$|H^{V^p,h}(x,y)|1_{\{|y|\leq h\}} \leq \sup_{\theta\in[0,1]} \|D^2(V^p)(x+\theta\kappa(x)y)\|.\|\kappa(x)\|^2.|y|^2.$$

Or,

$$D^2(V^p) = pV^{p-1}\Big(D^2V + (p-1)\frac{\nabla V \otimes \nabla V}{V}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \|D^2(V^p)\| \leq CV^{p-1}.$$

De plus, comme $\sqrt{V}$ est Lipschitzienne, pour tout $p > 1$,

$$V^{p-1}(z+\kappa(x)y) \leq (|\sqrt{V}(x) + [\sqrt{V}]_L\|\kappa(x)\||y|)^{2(p-1)} \leq C(V^{p-1}(x) + \|\kappa(x)\|^{2(p-1)}|y|^{2(p-1)}), \tag{2.19}$$

ce qui nous permet d'obtenir le résultat. □

Lemme 2.22 *Soit $p > 0$ tel que $(\mathbf{H_p^1})$ est satisfaite. Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $t \geq 0$,*

$$\psi(t)V^p(X_t^x) = V^p(x) + \int_0^t \psi'(s)V^p(X_s^x) + \psi(s)AV^p(X_s^x)ds + M_t \tag{2.20}$$

où (M_t) est une martingale locale nulle en 0.

Preuve : D'après le lemme 2.21, on vérifie que AV^p a bien un sens sous l'hypothèse $(\mathbf{H_p^1})$.
Par la formule d'Itô appliquée à $F(t,y) = \psi(t)V^p(y)$, on montre avec les notations (2.9) que

$$\psi(t)V^p(X_t^x) = V^p(x) + \int_0^t \psi'(s)V^p(X_{s^-}^x) + \psi(s)AV^p(X_{s^-}^x)ds \tag{2.21}$$

$$+ \int_0^t \psi(s)\langle \nabla V^p(X_{s^-}^x), \sigma(X_{s^-}^x)dW_s\rangle + \int_0^t \psi(s)\langle \nabla V^p(X_{s^-}^x), \kappa(X_{s^-}^x)dY_s^h\rangle \tag{2.22}$$

$$+ \sum_{0<s\leq t} \psi(s)H^{V^p,h}(X_{s^-}^x, \Delta Z_s^h) - \int_0^t ds \int \pi(dy)\psi(s)H^{V^p,h}(X_{s^-}^x, y) \tag{2.23}$$

où (2.22) désigne une martingale locale nulle en 0. D'après la proposition 2.2, pour qu'il en soit de même pour (2.23), il suffit que $t \mapsto \int_0^t ds \int \pi(dy)|H^{V^p}(X_{s^-}^x, y)| < +\infty$ $p.s$ pour tout $t \geq 0$. D'après le lemme 2.21, *(i)* (avec $\alpha = 2p$ dans la première inégalité),

$$|H^{V^p,h}(X_{s^-}^x, y)|1_{\{|y|>h\}} \leq \begin{cases} C\|\kappa(X_{s^-}^x)\|^{2p}|y|^{2p} & \text{si } p \leq 1/2 \\ C\Big(V^{p-\frac{1}{2}}(X_{s^-}^x)\|\kappa(X_{s^-}^x)\|.|y| + \|\kappa(X_{s^-}^x)\|^{2p}.|y|^{2p}\Big) & \text{si } p > 1/2 \end{cases} \tag{2.24}$$

ce qui, sous $(\mathbf{H_p^1})$, nous assure que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t ds \int |H^{V^p,h}(X_{s^-}^x, y)| 1_{\{|y|>h\}} \pi(dy) < +\infty \qquad p.s.$$

car $(X_{s^-}^x)$ est localement borné $p.s.$ en tant que processus càglàd. D'après la deuxième inégalité du lemme 2.21(ii) avec $\alpha = 1$ si $p \leq 1$ et la troisième inégalité du lemme 2.21(ii) si $p \geq 1$, on obtient

$$|H^{V^p,h}(X_{s^-}^x, y)| 1_{\{|y|\leq h\}} \leq \begin{cases} C\big((\|\kappa(X_{s^-}^x)\|.|y|)^2 & \text{si } p \leq 1 \\ C\Big(\|\kappa(X_{s^-}^x)\|^2 V^{p-1}(X_{s^-}^x)|y|^2 + \|\kappa(X_{s^-}^x)\|^{2p}|y|^{2p}\Big) & \text{si } p \geq 1. \end{cases} \tag{2.25}$$

Comme $\int_{\{|y|\leq h\}} |y|^{2(p\vee 2)} \pi(dy) < +\infty$ et que (X_{s^-}) est localement borné, on en déduit :

$$\int_0^t ds \int \pi(dy) |H^{V^p,h}(X_{s^-}^x, y)| 1_{\{|y|\leq h\}} < +\infty$$

Finalement, (2.23) est bien une martingale locale nulle en 0 ce qui prouve le résultat. □

Lemme 2.23 *Soient $p > 0$, $q \in (0,1]$ et $a \in (0,1]$ tels que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ et les hypothèses (i) et (ii) du Théorème 2.19 soient satisfaites. Si de plus, $|b^h|^2 \leq CV^r$ avec $r \in [1, 1+p)$, alors il existe $\alpha' > 0$, $\beta' \in \mathbb{R}$, tels que ,*

$$AV^{\frac{p}{2}}(x) \leq \beta' - \alpha' V^{a+\frac{p}{2}-1}(x). \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.26}$$

Preuve : La première étape de la preuve consiste à prouver que

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t V^{\frac{p}{2}}(x) - V^{\frac{p}{2}}(x)}{t} = AV^{\frac{p}{2}}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{2.27}$$

D'après le lemme 2.22 appliqué à $\psi = 1$

$$V^p(X_t^x) = V^p(x) + \int_0^t AV^p(X_s^x) ds + M_t$$

où (M_t) est une martingale locale. En localisant (M_t) par une suite de temps d'arrêt (T_n), il vient :

$$\mathbb{E}\{V^p(X_{t\wedge T_n}^x)\} = V^p(x) + \mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge T_n} AV^p(X_s^x) ds\} \tag{2.28}$$

Comme $AV^p \leq \beta$, on a :

$$\mathbb{E}\{V^p(X_{t\wedge T_n}^x)\} \leq V^p(x) + \beta t \tag{2.29}$$

On en déduit par le lemme de Fatou que

$$\mathbb{E}\{V^p(X_t^x)\} \leq V^p(x) + \beta t. \tag{2.30}$$

Si l'hypothèse $(\mathbf{H_p^1})$ est satisfaite, alors nécessairement $(\mathbf{H_{\frac{p}{2}}^1})$ l'est aussi. Ceci nous permet d'appliquer le lemme 2.22 en remplaçant p par $p/2$:

$$\mathbb{E}\{V^{\frac{p}{2}}(X_{t\wedge T_n}^x) = V^{\frac{p}{2}}(x) + \mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge T_n} AV^{\frac{p}{2}}(X_s^x) ds\}.$$

On souhaite passer à la limite en n dans cette équation. D'abord, on remarque, d'après (2.29), que la suite $(V^{\frac{p}{2}}(X^x_{t\wedge T_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable car elle est bornée dans L^2. Comme d'autre part, $V^{\frac{p}{2}}(X^x_{t\wedge T_n}) \xrightarrow{n\to+\infty} V^{\frac{p}{2}}(X^x_t)$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{2}}(X^x_{t\wedge T_n})\} = \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{2}}(X^x_t)\}.$$

Ensuite, on vérifie qu'il existe $\vartheta > 1$ tel que

$$|AV^{\frac{p}{2}}| \le CV^{\frac{p}{\vartheta}}. \tag{2.31}$$

En effet, d'abord, comme $|b^h| \le CV^{\frac{r}{2}}$ avec $r < 1 + p$,

$$|\langle\nabla(V^{\frac{p}{2}}), b^h\rangle| = \frac{p}{2}V^{\frac{p}{2}-1}|\langle\nabla V, b^h\rangle| \le CV^{\frac{p-1+r}{2}} = CV^{\frac{p}{\vartheta_1}}$$

avec $\vartheta_1 > 1$. D'autre part, d'après l'hypothèse *(i)* du théorème 2.19 et le fait que $\|D^2(V^{\frac{p}{2}})\| \le CV^{\frac{p}{2}-1}$, il est évident que

$$\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 V^{\frac{p}{2}}\sigma) \le CV^{\frac{p}{2}}.$$

Enfin, pour le terme associé à la partie saut, on distingue les ensembles $\{|y| \le h\}$ et $\{|y| > h\}$. D'une part, grâce à l'inégalité (2.24) appliquée avec $\bar{p} = p/2$, on a

$$\int \left|H^{V^{\frac{p}{2}},h}(x,y)\right| 1_{\{y>h\}}\pi(dy) \le CV^{\frac{p+a-1}{2}}(x).$$

D'autre part, en utilisant la première inégalité du lemme 2.21*(ii)* avec $\alpha = p \vee 2q$ si $p \vee 2q \le 1$, la seconde du lemme 2.21*(ii)* avec $\alpha = p \vee 2q - 1$ si $p \vee (2q) \in (1, 2]$ et enfin la dernière si $p > 2$, on obtient

$$|H^{V^{\frac{p}{2}},h}(X^x_{s^-}, y)|1_{|y|\le h} \le \begin{cases} C\big(\|\kappa(X^x_{s^-})\|^{p\vee 2q}|y|^{p\vee 2q} + \|\kappa(X^x_{s^-})\|V^{\frac{p-1}{2}}(X^x_{s^-})|y|\big) & \text{si } p \vee (2q) \le 1 \\ C\|\kappa(X^x_{s^-})\|^{p\vee 2q}|y|^{p\vee 2q} & \text{si } 1 < p \vee (2q) \le 2 \\ C\Big(\|\kappa(X^x_{s^-})\|^2 V^{p-1}(X^x_{s^-})|y|^2 + \|\kappa(X^x_{s^-})\|^p|y|^p\Big) & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

D'après l'hypothèse (i) du Théorème 2.19, si $p \le 1$, $\|\kappa\|^{p\vee 2q} \le CV^{\bar{p}}$ avec $\bar{p} < p$. De même, si $p \in (1, 2]$, $p \vee (2q) \le 2$, donc $\|\kappa\|^{p\vee 2q} \le CV^a$ où $a \le 1 < p$. Enfin, si $p > 2$, $\|\kappa\|^p \le CV^{\frac{ap}{2}}$. Finalement, sous les hypothèses $(\mathbf{H^1_p})$ et $(\mathbf{H^2_q})$, on en déduit,

$$\int |H^{V^{\frac{p}{2}},h}(X^x_{s^-}, y)|1_{|y|\le h}\pi(dy) \le CV^{\frac{p}{\vartheta_2}}(x) \quad \text{avec } \vartheta_2 > 1.$$

L'inégalité (2.31) est bien satisfaite. Ainsi, en particulier, comme $p/\vartheta < p$,

$$1_{[0\,t\wedge T_n]}|AV^{\frac{p}{2}}(X^x_s)| \le CV^p(X^x_s)1_{[0\,t]}(s) \in L^1(\lambda\otimes\mathbb{P})$$

car $\mathbb{E}\{V^p(X^x_s)\} \le V^p(x) + \beta t$. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge T_n} AV^{\frac{p}{2}}(X^x_s)ds\} = \mathbb{E}\{\int_0^t AV^{\frac{p}{2}}(X^x_s)ds\} \underset{Fubini}{=} \int_0^t \mathbb{E}\{AV^{\frac{p}{2}}(X^x_s)\}ds$$

et donc :

$$P_t(V^{\frac{p}{2}})(x) = V^{\frac{p}{2}}(x) + \int_0^t P_s(AV^{\frac{p}{2}})(x)ds$$

d'où :

$$\frac{P_tV^{\frac{p}{2}}(x) - V^{\frac{p}{2}}(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t P_s(AV^{\frac{p}{2}})(x)ds.$$

Pour obtenir (2.27), il nous suffit maintenant de montrer que : $s \mapsto P_s(AV^{\frac{p}{2}})(x)$ est continue en 0 car pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue en 0 :

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds \to f(0)$$

Considérons $\vartheta > 1$ vérifiant l'inégalité (2.31). D'après (2.30), pour tout $T > 0$,

$$\sup_{0\le s\le T} \mathbb{E}\{|AV^{\frac{p}{2}}(X_s^x)|^\vartheta\} \le C(V^p(x) + T) < +\infty.$$

Comme $\vartheta > 1$, on en déduit que pour tout $T > 0$, la famille $(AV^{\frac{p}{2}}(X_s^x))_{0\le s\le T}$ est équiintégrable. Comme de plus, $AV^{\frac{p}{2}}(X_s^x) \xrightarrow{s\to 0} AV^{\frac{p}{2}}(x)$, il suit que

$$\lim_{s\to 0} P_s(AV^{\frac{p}{2}})(x) = AV^{\frac{p}{2}}(x),$$

ce qui conclut la première étape.
Nous prouvons maintenant le résultat. D'après (2.28) et l'hypothèse *(ii)* :

$$\mathbb{E}\{V^p(X^x_{t\wedge T_n})\} \le V^p(x) + \beta t - \mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge T_n} V^{p+a-1}(X_s^x)ds\}$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}\{V^p(X^x_{t\wedge T_n})\} + \alpha\mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge T_n} V^{p+a-1}(X_s^x)ds\} \le V^p(x) + \beta t.$$

Par le lemme de Fatou et le théorème de Fubini-Tonelli, on en déduit

$$P_tV^p(x) + \alpha\int_0^t P_sV^{p+a-1}(x)ds \le V^p(x) + \beta t$$
$$\text{ou encore} \quad P_tV^p(x) \le V^p(x) + \beta t - \alpha\int_0^t P_sV^{p+a-1}(x)ds.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité élémentaire $\sqrt{1+u} \le 1 + \frac{u}{2}$ (valable pour tout $u \ge -1$), on en déduit :

$$P_tV^{\frac{p}{2}}(x) \le \sqrt{P_tV^p(x)} \le \sqrt{V^p(x) + \beta t - \alpha\int_0^t P_sV^{p+a-1}(x)ds}$$
$$\le V^{\frac{p}{2}}(x)\Big(1 + \frac{\beta t}{2V^p(x)} - \frac{\alpha}{2V^p(x)}\int_0^t P_sV^{p+a-1}(x)ds\Big),$$

d'où :

$$\frac{P_t V^{\frac{p}{2}}(x) - V^{\frac{p}{2}}(x)}{t} \leq \frac{\beta}{2V^{\frac{p}{2}}(x)} - \frac{\alpha}{2V^{\frac{p}{2}}(x)t}\int_0^t P_s V^{p+a-1}(x)ds$$
$$\leq \frac{\beta}{2V^{\frac{p}{2}}(x)} - \frac{\alpha}{2V^{\frac{p}{2}}(x)t}\int_0^t P_s V^{p+a-1}(x) \wedge K ds$$

pour tout $K > 0$. $(P_t)_{t\geq 0}$ est Fellérien donc :

$$\forall K > 0 \qquad P_s V^{a+p-1} \wedge K \xrightarrow{s\to 0} V^{a+p-1} \wedge K.$$

Posons $\beta' = \beta/(2V^{\frac{p}{2}}(x))$ et $\alpha' = \alpha/2$. En passant à la limite en t, on obtient d'après (2.27)

$$AV^{\frac{p}{2}}(x) \leq \beta' - \alpha' \frac{V^{a+p-1}(x) \wedge K}{V^{\frac{p}{2}}(x)} \leq \beta' - \alpha' V^{a+\frac{p}{2}-1}(x) \qquad \text{pour } K \text{ assez grand.}$$

□

Nous rappelons enfin une version à temps continu du lemme de Kronecker.

Lemme 2.24 (Lemme de Kronecker) *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale càdlàg réelle et $(\xi_t)_{t\geq 1}$ définie par $\xi_t = \int_1^t \frac{dM_s}{s}$. Supposons que $\xi_t \xrightarrow{t\to+\infty} \xi_\infty$ p.s. où ξ_∞ est une variable aléatoire finie p.s. Alors, $\frac{M_t}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ p.s.*

Remarque 2.25 En particulier, si (ξ_t) est une martingale bornée dans L^2 ou dans L^s avec $s > 1$, on peut remarquer que les conditions du lemme sont satisfaites. Nous nous servirons de cette dernière condition.

Preuve : Pour tout $t \geq 1$, $M_t - M_1 = \int_1^t s d\xi_s$. Par une intégration par parties, on en déduit que

$$\frac{M_t - M_1}{t} = \xi_t - \frac{\xi_1}{t} - \frac{1}{t}\int_1^t \xi_s ds.$$

Le résultat suit facilement en remarquant que $1/t \int_1^t \xi_s ds \xrightarrow{t\to+\infty} \xi_\infty$ p.s. □

2.4.2 Preuve du Théorème 2.19

(a) Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $AV^p \leq \beta - \alpha V^{p+a-1}$. Quitte à remplacer β par $\beta \vee 1$, on peut supposer que β est strictement positif. Soit alors (G_t^x) le processus défini par

$$G_t^x = \psi(t)V^p(X_t^x) + \alpha\int_0^t \psi(s)V^{a+p-1}(X_s^x)ds + \beta\int_t^{+\infty}\psi(s)ds.$$

G_t^x a bien un sens car on a supposé que $\int_0^\infty \psi(s)ds < +\infty$. D'après le lemme 2.22, on remarque que (G_t^x) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$G_t^x = V^p(x) + \beta\int_0^{+\infty}\psi(s)ds + \int_0^t \psi'(s)V^p(X_s^x) + \psi(s)\left(AV^p(X_s^x) + \alpha V^{a+p-1}(X_s^x) - \beta\right)ds + M_t$$
$$= G_0^x + K_t + M_t$$
$$\text{où} \qquad K_t = \int_0^t \psi'(s)V^p(X_s^x) + \psi(s)\left(AV^p(X_s^x) + \alpha V^{a+p-1}(X_s^x) - \beta\right)ds$$

et (M_t) est une martingale locale. Via l'hypothèse *(ii)*, on voit que l'intégrand de K_t est négatif ce qui implique que (K_t) est décroissant. (G_t^x) est donc un processus positif s'écrit donc comme la somme d'un processus décroissant et d'une martingale locale ayant une valeur initiale constante (donc en particulier intégrable). Comme de plus, (G_t^x) est positif, il est alors standard d'en déduire que (G_t^x) est une surmartingale positive. D'où,

$$G_t^x \xrightarrow{t\to+\infty} G_\infty^x \in L^1 \qquad \text{et} \quad \sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\{G_t^x\} < +\infty.$$

Ceci assure que : $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\psi(t)\mathbb{E}\{V^p(X_t^x)\} < +\infty$. D'autre part, comme $\int_0^\cdot \psi(s)V^{a+p-1}(X_s)ds$ est presque sûrement croissant, on en déduit également que : $\int_0^\infty \psi(s)\mathbb{E}\{V^{a+p-1}(X_s)\}ds$ existe et est finie.
Si, de plus $a = 1$, on a un résultat plus fort. D'abord, on applique la formule d'Itô à $F(t,x) = e^{\alpha t}V^p(x)$ pour obtenir :

$$e^{\alpha t}V^p(X_t^x) = V^p(x) + \int_0^t e^{\alpha s}(\alpha V^p + AV^p)(X_s^x)ds + M_t$$

L'hypothèse *(ii)* et une localisation de $(M_t)_{t\geq 0}$ par une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\geq 0}$ donnent

$$\mathbb{E}\{e^{\alpha(t\wedge T_n)}V^p(X_{t\wedge T_n})\} \leq V^p(x) + \beta\,\mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge T_n} e^{\alpha s}ds\} \leq V^p(x) + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)$$

On peut alors passer à la limite dans le terme de gauche via le lemme de Fatou et en déduire que $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\{V^p(X_t^x)\} < +\infty$.

(b) D'après le lemme 2.23 et la locale bornitude de (X_s), on remarque que

$$\sup_{t\geq 0}\frac{1}{t}\int_0^t V^{\frac{p}{2}+a-1}(X_s)ds < +\infty \quad \text{si} \quad \limsup_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\int_0^t AV^{\frac{p}{2}}(X_s)ds < +\infty.$$

On va donc prouver que l'assertion de droite est vraie. D'abord, d'après le lemme 2.22 appliqué avec $p/2$, on a

$$\begin{aligned} V^{\frac{p}{2}}(X_t^x) &= V^{\frac{p}{2}}(x) + \int_0^t AV^{\frac{p}{2}}(X_s)ds + M_{t,1} + M_{t,2} + M_{t,3} \\ \text{où} \quad M_{t,1} &= \frac{p}{2}\int_0^t \langle V^{\frac{p}{2}-1}\nabla V(X_{s^-}), \sigma(X_{s^-}^x)dW_s\rangle, \\ M_{t,2} &= \frac{p}{2}\int_0^t \langle V^{\frac{p}{2}-1}\nabla V(X_{s^-}^x), \kappa(X_{s^-}^x)dY_s^h\Big\rangle, \\ M_{t,3} &= \sum_{0<s\leq t} H^{V^{\frac{p}{2}}}(X_{s^-}^x, \Delta Z_s) - \int_0^t ds\int \pi(dy)H^{V^{\frac{p}{2}}}(X_{s^-}^x, y). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $V^{\frac{p}{2}} \geq 0$, on a

$$\frac{1}{t}\int_0^t -AV^{\frac{p}{2}}(X_s^x)ds \leq \frac{V^{\frac{p}{2}}(x) + M_{t,1} + M_{t,2} + M_{t,3}}{t}.$$

On va maintenant prouver que le membre de droite tend vers 0 quand $t \to +\infty$ en faisant usage du lemme 2.24 (Kronecker). Pour $i = 1, 2, 3$, on définit alors $\xi_{t,i} := \int_1^t \frac{dM_{s,i}}{s}$.
On rappelle que pour une semimartingale X à valeurs réelles, $[X]$ désigne sa variation quadratique et celle-ci est définie pour tout t par :

$$[X]_t = X_t^2 - X_0^2 - 2\int_0^t X_{s^-} dX_s =< X^c >_t + \sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2$$

$$[\xi_{.,1}]_t = \frac{p^2}{4}\int_0^t V^{p-2}(X_{s^-}^x)\mathrm{Tr}\big(\sigma^*(\nabla V \otimes \nabla V)\sigma\big)(X_{s^-}^x)ds.$$

Comme $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \leq CV^a$ et que $|\nabla V|^2 \leq CV$, on a :

$$[\xi_{.,1}]_t \leq \int_1^t \frac{\mathbb{E}\{V^{a+p-1}(X_s^x)\}}{s^2} ds$$

En appliquant *(a)* à une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\psi(s) = 1/s^2$ sur $[1, +\infty)$, on obtient

$$\int_1^t \frac{\mathbb{E}\{V^{a+p-1}(X_s^x)\}}{s^2} ds < +\infty, \tag{2.32}$$

ce qui permet d'en déduire que $\mathbb{E}\{[\xi_{.,1}]_\infty\} < +\infty$. $(\xi_{t,1})$ est donc une vraie martingale bornée dans L^2. On considère maintenant $\xi_{.,2} + \xi_{.,3}$:

$$[\xi_{.,2} + \xi_{.,3}]_t = \sum_{0<s\leq t} \frac{\Big(V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x + \kappa(X_{s^-}^x)\Delta Z_s^c) - V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x)\Big)^2}{s^2}$$

D'après la formule de compensation,

$$\mathbb{E}\{[\xi_{.,2} + \xi_{.,3}]_\infty\} = \int_1^{+\infty} ds \int \pi(dy) \frac{\Big(V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x + \kappa(X_{s^-}^x)y) - V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x)\Big)^2}{s^2}$$

Le lemme 2.21(i) nous permet alors de contrôler l'intégrand. Si $p \leq 1$, on obtient par la première inégalité du lemme appliquée avec $\alpha = p$ si $|y| > h$ et $\alpha = p \vee q$ si $|y| \leq h$:

$$\Big(V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x + \kappa(X_{s^-}^x)y) - V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x)\Big)^2 \leq \begin{cases} C\|\kappa(X_{s^-}^x)\|^{2p}|y|^{2p} & \text{si } |y| > h \\ C\|\kappa(X_{s^-}^x)\|^{2(p\vee q)}|y|^{2(p\vee q)} & \text{si } |y| \leq h. \end{cases}$$

Si $p \geq 1$, on utilise la seconde inégalité du lemme 2.21(i) et on obtient :

$$\Big(V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x + \kappa(X_{s^-}^x)y) - V^{\frac{p}{2}}(X_{s^-}^x)\Big)^2 \leq C\Big(\|\kappa(X_{s^-}^x)\|^2 V^{p-1}(X_{s^-}^x) + \|\kappa\|^{2p}(X_{s^-}^x)|y|^{2p}\Big).$$

Ainsi, d'après les hypothèses $(\mathbf{H_p^1})$ et $(\mathbf{H_q^2})$ et l'hypothèse *(i)* du théorème 2.19, on en déduit

$$\mathbb{E}\{[\xi_{.,2} + \xi_{.,3}]_\infty\} \leq C\int_1^\infty \frac{\mathbb{E}\{V^{(a+p-1)}(X_s^x)\}}{s^2} ds,$$

où on a utilisé que $ap \leq p + a - 1$ si $p \geq 1$. Ainsi, $\mathbb{E}\{[\xi_{.,2} + \xi_{.,3}]_\infty\} < +\infty$ d'après (2.32). Finalement $(\xi_t) := (\xi_{t,1} + \xi_{t,2} + \xi_{t,3})$ est une martingale L^2. D'après le lemme de Kronecker, on en déduit

$$\frac{M_{t,1} + M_{t,2} + M_{t,3}}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0 \quad p.s. \implies \limsup_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\int_0^t AV^{\frac{p}{2}}(X_s^x)ds < +\infty.$$

(c) Soit $f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$. On doit montrer que

$$\frac{1}{t}\int_0^t Af(X_s^x)ds \xrightarrow{t\to\infty} 0 \quad p.s.$$

Par la formule d'Itô,

$$\frac{1}{t}\int_0^t Af(X_s)ds = \frac{f(X_t^x) - f(x)}{t} - \frac{1}{t}\int_0^t \langle \nabla f(X_{s^-}^x), \sigma(X_{s^-}^x)dW_s\rangle - \frac{1}{t}\int_0^t \langle \nabla f(X_{s^-}^x), \kappa(X_{s^-}^x)dYs\rangle$$
$$- \frac{1}{t}\Big(\sum_{0<s\leq t} H^f(X_{s^-}^x, \Delta Z_s) - \int_0^t ds \int \pi(dy) H^f(X_{s^-}^x, y)\Big).$$

Le suite du raisonnement est alors similaire à celui employé ci-dessus. Elle consiste à utiliser le lemme de Kronecker pour prouver que le membre de droite tend vers 0 $p.s.$ et ne présente pas de difficultés particulières par rapport à (a).

2.5 Annexe

2.5.1 Fonctions p-Hölder

Définition 2.26 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une fonction $f : E \mapsto F$ est dite p-Hölder si*

$$\exists\, C_f,\ \forall\ (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq C_f \|x - y\|_E^p$$

Voici un petit critère pour déterminer si une fonction est p-Hölder.

Lemme 2.27 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et $0 < p \leq 1$. Alors, si $|f|^{\frac{1}{p}}$ est Lipschitzienne, f est p-Hölder.*

Preuve : Posons $\phi_p = |f|^{\frac{1}{p}}$. D'après l'hypothèse, il existe $C > 0$ tel que $|\phi_p(y) - \phi_p(x)| \leq C|y - x|_1$ où pour $u \in \mathbb{R}^d$, $|u|_1 = \sum_{i=1}^d |u_i|$. Si $f(y) \geq f(x) \geq 0$, on a

$$|f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) = (\phi_p)^p(y) - (\phi_p)^p(x).$$

Par l'inégalité élémentaire $|u^p - v^p| \leq |u - v|^p$ si $p \leq 1$, on en déduit

$$|f(y) - f(x)| \leq |\phi_p(y) - \phi_p(x)|^p \leq C^p |x - y|_1^p. \tag{2.33}$$

Si $f(x) \leq f(y) \leq 0$, on applique le raisonnement précédent à $-f$. Enfin, si $f(x) \leq 0 \leq f(y)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $z \in \mathbb{R}^d$, tq, $f(z) = 0$, d'où,

$$|f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) = (\phi_p)^p(y) + (\phi_p)^p(x) \leq |\,\phi_p(y) + \phi_p(x)|^p$$
$$\leq |\,\phi_p(y) - \phi_p(z)| + \phi_p(z)| - \phi_p(x)|^p \leq C^p(|y - z|_1 + |z - x|_1)^p.$$

Or, $|y-z|_1 = \sum_{i=1}^d |y_i - z_i|$ et $|x-z|_1 = \sum_{i=1}^d |z_i - x_i|$ et $\forall\, i \in \{1,d\}$, $z_i \in [x_i\ y_i]$ donc, $|y_i - z_i| + |z_i - x_i| = |y_i - x_i|$ et ainsi, $|f(y) - f(x)| \leq C^p |x-y|_1^p$. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, on peut évidemment remplacer $|\,.\,|_1$ par $|\,.\,|_2$. □

Proposition 2.28 *Soit $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ et $p > 0$. Alors,*
(i) Si $p \leq \frac{1}{2}$, , V^p est α-Hölder pour tout $\alpha \in [2p, 1]$.
(ii) Si $p \leq 1$, $W : x \to p(\nabla V)V^{p-1}(x)$ est α-Hölder pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha \in [2p-1, 1]$.

Preuve : *(i)* $\sqrt{V}$ est lipschitzienne donc V^p est $2p$-Holder. Comme de plus, V^p est lipschitzienne, on en déduit qu'elle α-Holder pour $\alpha \in [2p, 1]$.
(ii) Il suffit d'établir que $W_i(x) = p(\nabla V)_i V^{p-1}(x)$ est α-Holder pour $\alpha \in [2p-1, 1]$ et $\alpha > 0$. Notons $D = \{x, \nabla V(x) = 0\}$ et $g_i(x) = |W_i(x)|^{\frac{1}{\alpha}}$. Pour tout $x \in D^c$,

$$\nabla g_i(x) = \frac{p}{\alpha}(D^2V)_i(x)|(\nabla V)_i(x)|^{\frac{1}{\alpha}-1} V^{\frac{p-1}{\alpha}}(x)\mathrm{sgn}((\nabla V)_i(x)) + \frac{p(p-1)}{\alpha}|(\nabla V)_i(x)|^{\frac{1}{\alpha}+1} V^{\frac{p-1}{\alpha}}(x).$$

Comme $\alpha \leq 1$, ∇g_i est en fait continue sur $\mathbb{R}^d$. De plus, $|\nabla V| \leq \sqrt{V}$. Ainsi, $|\nabla g_i| \leq C V^{\frac{2p-1}{2\alpha} - \frac{1}{2}}$. On en déduit que ∇g_i est une fonction bornée si $\alpha \geq (2p-1)$. On en déduit le résultat. □

2.5.2 Preuve de la proposition 2.18

D'abord, d'après le lemme 2.21, AV^p a bien un sens sous l'hypothèse $(\mathbf{H_p^1})$ et AV^p est localement bornée. En particulier, d'après l'hypothèse du lemme, il existe des réels strictement positifs R, α et β tels que

$$AV^p(x) \leq g(x) = \beta 1_{\{|x|<R\}} - \alpha 1_{\{|x|>R\}}.$$

D'après le lemme 2.22 avec $\psi = 1$,

$$V^p(X_t^x) = V^p(x) + \int_0^t AV^p(X_s^x)ds + M_t$$

où (M_t) est une martingale locale nulle en 0. En conséquence, il existe une suite (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\tau_n \to +\infty$ *p.s.* et $(M_{t\wedge\tau_n})$ est une martingale pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{V^p(X^x_{t\wedge\tau_n})\} &= V^p(x) + \mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge\tau_n} AV^p(X_s^x)ds\} \\ &\leq V^p(x) + \mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge\tau_n} g(X_s^x)ds\}.\end{aligned}$$

D'après le lemme de Fatou, on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{V^p(X_t^x)\} &\leq V^p(x) + \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge\tau_n} g(X_s^x)ds\} \\ &\leq V^p(x) + \mathbb{E}\{\int_0^t g(X_s^x)ds\} = V^p(x) + \int_0^t P_s g(x)ds.\end{aligned}$$

où dans les deux dernières assertions, on a utilisé le théorème de convergence dominée puis le théorème de Fubini tous les deux applicables car la fonction g est bornée. La fonction g vérifie les hypothèses de la proposition 2.14 d'où le résultat.

Deuxième partie

Approximation de la probabilité invariante

Chapter 3

Recursive computation of the invariant distribution of a stochastic differential equation driven by a Lévy process*

Abstract

We study some recursive procedures based on exact or approximate Euler schemes with decreasing step to compute the invariant distribution of Lévy driven SDE's. We prove the convergence of these procedures towards the invariant distribution under weak conditions on the moment of the Lévy process and on the mean-reverting of the dynamical system. We also show that an $a.s.$ CLT for stable processes can be derived from our main results. Finally, we illustrate our results by several simulations.

3.1 Introduction

3.1.1 Objectives and motivations

This chapter is devoted to the computation of the invariant distribution (denoted by ν) of ergodic stochastic processes which obey a stochastic differential equation (SDE) driven by a Lévy process. Practically, we want to construct a sequence of empirical measures $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ which can be recursively simulated and such that, $\bar{\nu}_n(\omega, f) \to \nu(f)$ $a.s.$ for a range of functions f containing bounded continuous functions.
In the case of Brownian diffusions, some methods have already been developed by several authors to approximate the invariant distribution (see subsection 3.1.3) but this work seems to be the first one that deals with this problem in the case of general Lévy driven SDE's. The motivation for this generalization is the study of dynamical systems that are widely used in modelling. Indeed, there are many situations where the noise of the dynamical system is discontinuous or too intensive to be modelled by a Brownian motion. Let us consider an example that comes from the fragmentation-coalescence theory. In situations such as polymerization phenomenons, when temperature is near to its critical value, molecules constantly break-up and recombine. This

*This chapter and the following have been submitted for publication. Only some minor changes of the submitted versions have been made here. That is why some notions developed in the introduction of these chapters may have already been tackled in the first part of the thesis.

situation has been modelled by Berestycki ([Ber04]) through what he terms EFC (Exchangeable Fragmentation-Coalescence) process. The mass of the dust generated by this process (see [Ber04] for more details) is a solution to a mean-reverting SDE for which the noise component is driven by a subordinator (an increasing Lévy process). We come back to this example in section 4.7.
For other examples of situations where models that use a Lévy driven SDE are adapted, we refer to Barndorff-Nielsen *et al.* ([BMR01]) for examples in financial modelling (where ergodic Lévy driven SDE's are usually used to model the volatility of a financial market), Protter&Talay ([PrTa97], for financial examples and a telephone noise model) or Deng ([Den00], who models the spot prices of electricity by a mean-reverting Brownian diffusion perturbed by a compound Poisson noise).

3.1.2 The stochastic differential equation

Let h be a positive number and let π be a Lévy measure on $\mathbb{R}^l$. We denote by $(X_t)_{t\geq 0}$, a càdlàg process solution to the S.D.E.

$$dX_t = b^h(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t^h$$

where $b^h : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ (set of $d \times l$ real matrices) and $\kappa : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ are continuous with sublinear growth, $(W_t)_{t\geq 0}$ is a l-dimensional Brownian motion and $(Z_t^h)_{t\geq 0}$ is a purely discontinuous Lévy process independent of $(W_t)_{t\geq 0}$ with characteristic function given for every $t \geq 0$ by

$$\mathbb{E}\{e^{i<u,Z_t^h>}\} = \exp\big[t\big(\int e^{i<u,y>} - 1 - i<u,y>1_{\{|y|\leq h\}}\pi(dy)\big)\big].$$

(Z_t^h) can be written $Z_t^h = Y_t^h + N_t^h$ where $(Y_t^h)_{t\geq 0}$ and $(N_t^h)_{t\geq 0}$ are two independent Lévy processes such that the characteristic function of Y_t^h is given for every $t \geq 0$ by

$$\mathbb{E}\{e^{i\langle u,Y_t^h\rangle}\} = \exp\big[t\big(\int_{\{|y|\leq h\}} e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - i\langle u,y\rangle\pi(dy)\big)\big]$$

and such that $(N_t^h)_{t\geq 0}$ is a compound Poisson process with intensity $\lambda = \pi(|y| > h)$ and law of jumps $\mu(dy) = 1_{\{|y|>h\}}\pi(dy)/\pi(|y| > h)$. (Y_t^h) (resp. (N_t^h)) is called the small jump (resp. big jump) component of (Z_t^h).
In most papers dealing with Lévy driven SDE's, the SDE reads $dX_t = f(X_{t^-})dL_t$ where $(L_t)_{t\geq 0}$ is a Lévy process. Here, we separate each part of the Lévy process because they act differently on the dynamical system. We isolate the drift term because it usually produces the mean-reverting effect (which in turn induces the ergodicity of the SDE). The two other terms are both noises but we distinguish them because they do not have the same behavior.
With the above formulation, the SDE does not admit a unique representation because of the truncation function (except if π is symmetrical). However, in many situations, we can rewrite the SDE with a formulation which does not depend on h. So is the case if $(N_t^h)_{t\geq 0}$ is integrable (then we can compensate for the big jumps, *i.e.* we can set $h = +\infty$) or if $(Y_t^h)_{t\geq 0}$ has locally bounded variations (then we are not compelled to compensate the small jumps, *i.e.* it is possible to set $h = 0$).
To this end, we introduce assumptions $(\mathbf{H_p^1})$ (resp. $(\mathbf{H_q^2})$) on the moments of the Lévy measure at $+\infty$ (resp. at 0) which will be used for rewriting the SDE:

$$(\mathbf{H_p^1}) \quad : \quad \int_{|y|>1} \pi(dy)|y|^{2p} < +\infty, \qquad (\mathbf{H_q^2}) \quad : \quad \int_{|y|\leq 1} \pi(dy)|y|^{2q} < +\infty.$$

Assumption ($\mathbf{H_p^1}$) is satisfied if, and only if, $\mathbb{E}|Z_t^h|^{2p} < +\infty$ for every $t \geq 0$ (see [BMR01], Theorem 6.1). By the compensation formula (see [Ber96]), ($\mathbf{H_q^2}$) is satisfied if and only if $\mathbb{E}\{\sum_{0<s\leq t} |\Delta Y_t^h|^{2q}\} < +\infty$, *i.e.* if and only if (Y_t^h) has locally *$2q$-integrable variation*. We recall that ($\mathbf{H_q^2}$) is always satisfied for $q = 1$ since $\int_{\{|y|\leq 1\}} |y|^2 \pi(dy) < \infty$ for any Lévy measure π.
Accordingly to these assumptions , we afterwards adopt the following representation for the SDE:

$$dX_t = b(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t \tag{3.1}$$

where the definition of b and Z depends on p and q: Let $p \geq 0$ and $q \in [0,1]$ such as ($\mathbf{H_p^1}$) and ($\mathbf{H_q^2}$) are satisfied. Then, if

Case 1 : $p > 1/2$,

$$b(x) = b^h(x) + \int_{\{|y|>h\}} y\pi(dy)\kappa(x) = b^\infty(x), \qquad Z_t = Z_t^\infty = Y_t + N_t \qquad \text{with,}$$
$$Y_t = Y_t^h \qquad \text{and} \qquad N_t = N_t^h - t\int_{\{|y|>h\}} y\pi(dy).$$

Case 2 : $0 \leq p, q \leq 1/2$,

$$b(x) = b^h(x) + \int_{\{|y|\leq h\}} y\pi(dy)\kappa(x) = b^0(x), \qquad Z_t = Z_t^0 = Y_t + N_t \qquad \text{with,}$$
$$Y_t = Y_t^h + t\int_{\{|y|\leq h\}} y\pi(dy) \qquad \text{and} \qquad N_t = N_t^h.$$

Case 3 : $p \leq 1/2 < q$,

$$b(x) = b^h(x) \qquad Z_t = Z_t^h = Y_t + N_t \qquad \text{with,} \quad Y_t = Y_t^h \qquad \text{and} \qquad N_t = N_t^h.$$

Remark 3.1 In cases 1 and 2, the representation is really independent of h whereas in case 3, we adopt the convention which seems to be the most natural. For technical arguments, in the critical case $p = 1/2$, we choose the notation associated with case 3.

3.1.3 Background on this problem for Brownian diffusions

This problem has already been studied by several authors when (X_t) is a Brownian difusion, *i.e.* when $\kappa = 0$. In [Tal90], Talay approximates $\nu(f)$ by $\bar{\nu}_n^\gamma(f) = 1/n\sum_{k=1}^n f(\bar{X}_{k-1}^\gamma)$ where $(\bar{X}_n^\gamma)_n$ denotes the Euler scheme with constant step γ. Denoting by ν^γ the invariant distribution of the homogeneous Markov chain $(\bar{X}_n^\gamma)_n$, he shows that $\bar{\nu}_n^\gamma \overset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \nu^\gamma$ and that $\nu^\gamma \overset{\gamma\to 0}{\Longrightarrow} \nu$, under some uniform ellipticity and Lyapunov-type stability assumptions. In this procedure, γ and n correspond to the two types of errors that the discretization of this long time problem generates. Practically, one cannot efficiently manage them together. Indeed, when one implements this algorithm, one sets a positive real γ and then, one approximates the biased target ν^γ. In order to get rid of this problem, Lamberton&Pagès (see [LaPa02, LaPa03]) replace the standard Euler scheme with constant step γ with an Euler scheme with decreasing step γ_n. Denoting by $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ this Euler scheme and by $(\eta_k)_{k\geq 1}$ a sequence of weights such that $H_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$,

they define a sequence of *weighted* empirical measures $(\bar{\nu}_n)$ and show under some Lyapunov assumptions (but without ellipticity assumptions) that if (η_n/γ_n) is nonincreasing,

$$\bar{\nu}_n(f) = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k f(\bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} \nu(f) \qquad a.s.,$$

for every continuous function f with polynomial growth (see [LaPa02, LaPa03] for more details).

Remark 3.2 These two approaches are significantly different. Talay's method strongly relies on the homogeneous Markovian structure of the constant step Euler scheme and on its classical "toolbox" (irreducibility, positive recurrence, ..., see *e.g.* [MeTw93]). Since the Euler scheme with decreasing step is no longer homogeneous, Lamberton and Pagès develop another method based on stability of Markov chains and on martingale methods which can be extended to a non homogeneous setting (see [Duf97]). This is why they do not need any ellipticity assumptions on the coefficients.

3.1.4 Difficulties induced by the jumps of the Lévy process

In this work, we adapt Lamberton and Pagès's approach. In order to obtain some similar results in the case of Lévy driven SDE's, one mainly has two kinds of obstacles to overcome.
From a dynamical point of view, the difficulty comes from the moments of the jump component. Indeed, oppositely to the Brownian motion, the jump component can have only few moments (stable processes for instance), and it then generates some instability for the SDE. Moreover, the local behavior of the moments of the jump component is relatively different from that of the moments of the Brownian motion. It will induce some stiffness on the mean-reverting assumption (see Assumption $(\mathbf{S_{a,p,q}})$ and Remark 3.12).
The second obstacle appears in the simulation of the Euler scheme. Actually, only in some very particular cases can the jump component of a Lévy process be simulated (compound Poisson processes, stable processes...). In those cases, the Euler scheme (that we call *exact* Euler scheme and denote by (E)) can be built by using the true increments of (Z_t). Otherwise, one has to study some *approximate* Euler schemes where we replace the increments of Z_t with some approximations that can be simulated. The canonical way for approximating the jump component is to truncate its small jumps. Let $(u_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of positive numbers such that $u_n < h$ and (u_n) decreases to 0. Let $(Y^h_{.,n})_{n\geq 1}$ be the sequence of càdlàg processes defined by

$$Y^h_{t,n} = \sum_{0<s\leq t} \Delta Y^h_s 1_{\{\Delta Y^h_s \in D^h_n\}} - t\int_{D^h_n} y\pi(dy) \qquad \forall t \geq 0$$

with $D^h_n = \{y \in \mathbb{R}^l, u_n < |y| \leq 1\}$ and $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s^-}$. The process $Y^h_{t,n}$ is a compensated compound Poisson process with parameters $\lambda^h_n = \pi(D^h_n)$ and $\mu^h_n(dy) = 1_{D^h_n}(y)\pi(dy)/\pi(D^h_n)$. It converges locally uniformly in L^2 to Y^h, *i.e.*, for every $T > 0$,

$$\mathbb{E}\{\sup_{0<t\leq T} |Y^h_t - Y^h_{t,n}|^2\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad \text{(see [Ber96])}. \tag{3.2}$$

We denote by $Z_{.,n}$ the process defined by

$$Z_{t,n} = Y_{t,n} + N_t \tag{3.3}$$

where the definition of N is given in subsection 3.1.2 depending on cases 1, 2 and 3 and

$$Y_{t,n} = \begin{cases} Y^h_{t,n} & \text{in cases 1 and 3} \\ Y^h_{t,n} + t\int_{D_n^h} y\pi(dy) & \text{in case 2.} \end{cases} \tag{3.4}$$

The Euler scheme built with the increments of $(Z_{t,n})$ will be denoted by (P). In the three cases, $(Z_{t,n})$ is the sum of a drift term (which is null in case 2) and of a compound Poisson process with parameters $\lambda_n = \lambda_n^\infty$ and $\mu_n = \mu_n^\infty$. Thus, the increments of $(Z_{t,n})$ can be simulated if λ_n and the coefficient of the drift term can be calculated, and if μ_n can be simulated for all $n \geq 1$. This is the case for a broad class of Lévy processes, thanks to classical techniques (rejection method, integral approximation, ...). If there exists $(u_n)_{n\geq 1}$ such that the increments of $(Z_{t,n})_{t\geq 0}$ can be simulated for all $n \geq 1$, we say that *the Lévy measure can be simulated.* However, the simulation time of Z_t^n depends on the average number of its jumps, *i.e.* on $\pi(|y| > u_n)t$. When the truncation threshold tends to 0 (this is necessary to approach the true increment of the jump component), $\pi(|y| > u_n)$ explodes as soon as the Lévy measure is not finite (*i.e* as soon as the true jump component is not a compound Poisson process). It implies that the simulation time of Z_t^n explodes for a fixed t. However, thanks to the decreasing step, it is possible to adapt the time step γ_n and the truncation threshold u_n so that the expectation of the number of jumps at each time step remains uniformly bounded. Following the same idea, it is also possible to choose some steps and some truncation thresholds so that the average number of jumps at each time step tends to 0. In this case, approximating the true component by the preceding compound Poisson process stopped at its first jump time (the first time when it jumps) can be also efficient (see Scheme (C)).

3.1.5 Construction of the procedures

Let $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ be a decreasing sequence of positive real numbers such that $\lim\gamma_n = 0$ and $\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k \to +\infty$ when $n \to +\infty$. Let $(U_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of i.i.d. square integrable centered $\mathbb{R}^l$-valued random variables with $\Sigma_{U_1} = I_d$. Finally, let $(\bar{Z}_n)_{n\geq 1}$, $(\bar{Z}_n^P)_{n\geq 1}$ and $(\bar{Z}_n^C)_{n\geq 1}$ be sequences of independent $\mathbb{R}^l$-valued random variables independent of $(U_n)_{n\geq 1}$, such that,

$$\bar{Z}_n \overset{(\mathbb{R}^l)}{=} Z_{\gamma_n}, \qquad \bar{Z}_n^P \overset{(\mathbb{R}^l)}{=} Z_{\gamma_n,n} \quad \text{and} \quad \bar{Z}_n^C \overset{(\mathbb{R}^l)}{=} Z_{\gamma_n\wedge T^n,n} \qquad \forall n \geq 1,$$

with $(Z_{t,n})$ defined by (3.3) and $T^n = \inf\{s > 0, |\Delta Z_{s,n}| > 0\}$. Let $x \in \mathbb{R}^d$. The Euler Schemes (E), (P) and (C) are recursively defined by $\bar{X}_0 = \bar{X}_0^P = \bar{X}_0^C = x$ and for every $n \geq 1$,

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1} + \kappa(\bar{X}_n)\bar{Z}_{n+1} \tag{E}$$
$$\bar{X}_{n+1}^P = \bar{X}_n^P + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n^P) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n^P)U_{n+1} + \kappa(\bar{X}_n^P)\bar{Z}_{n+1}^P \tag{P}$$
$$\bar{X}_{n+1}^C = \bar{X}_n^C + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n^C) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n^C)U_{n+1} + \kappa(\bar{X}_n^C)\bar{Z}_{n+1}^C. \tag{C}$$

We set $\mathcal{F}_n = \sigma(\bar{X}_k, k \leq n)$, $\mathcal{F}_n^P = \sigma(\bar{X}_k^P, k \leq n)$ and $\mathcal{F}_n^C = \sigma(\bar{X}_k^C, k \leq n)$. Let $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence of positive numbers such that $H_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \to +\infty$. For each scheme, we define a sequence of weighted empirical measures by

$$\bar{\nu}_n = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\delta_{\bar{X}_{k-1}} \quad \bar{\nu}_n^P = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\delta_{\bar{X}_{k-1}^P} \quad \text{and} \quad \bar{\nu}_n^C = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\delta_{\bar{X}_{k-1}^C}. \tag{3.5}$$

For a function $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $(\bar{\nu}_n(f))$ can be recursively computed (so is the case for the two other schemes). Indeed, we have $\bar{\nu}_1(f) = f(x)$ and for every $n \geq 1$,

$$\bar{\nu}_{n+1}(f) = \bar{\nu}_n(f) + \frac{\eta_{n+1}}{H_{n+1}}(f(\bar{X}_{n+1}) - \bar{\nu}_n(f)).$$

Some comments about the approximate Euler schemes. In Scheme (P), since (u_n) decreases to 0, we discard fewer and fewer jumps of the true component when n grows. We will see in Theorem 3.4 below that this is the only condition on (u_n) for the convergence of $(\bar{\nu}_n^P)$. This means that we only need the law of $Z_{\gamma_n,n}$ to be an "asymptotically good approximation" of the law of Z_{γ_n}. Yet, as previously mentioned, there is a hidden constraint induced by the simulation time which is proportional to the average number $\pi(|y| > u_n)\gamma_n$ of jumps of $(Z_{t,n})$ on $[0, \gamma_n]$. In practice, we require $(\pi(|y| > u_n)\gamma_n)$ to be bounded.
Furthermore, if $\pi(|y| > u_n)\gamma_n \to 0$ (*i.e.* the average number of jumps at each step tends to 0), we will see that the first jump of $(Z_{t,n})$ is all that matters for the convergence of the empirical measure. This means that Scheme (C) becomes efficient.

3.1.6 Organization of the chapter

The main results (Theorems 3.4 and 3.5) are stated in Section 4.3 and are proved in the three following sections (6.3, 6.4 and 3.5). Firstly, we focus on the proof of these theorems for the exact Euler Scheme (E): in Section 6.3, we prove the almost sure tightness of $(\bar{\nu}_n)$ and in Section 6.4, we establish that every weak limiting distribution of $(\bar{\nu}_n)$ is invariant for the SDE (4.2). Secondly, in Section 3.5, we point out the main differences which arise in the proofs when considering the approximate Euler Schemes (P) and (C). In Section 3.6, we show that the almost sure central limit theorem for symmetric stable processes (see [BHK98]) can be obtained as a consequence of our main theorems. Finally, in Section 4.7, we simulate the procedure on some concrete examples.

3.2 Main results

In Theorem 3.4, we obtain a result under simple conditions on the steps and on the weights. In Theorem 3.5, we show that under more stringent conditions on the steps and on the weights, some assumptions on the coefficients of the SDE can be relaxed. Let us introduce the joint assumptions.
For $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ (see Section 1.4 for this notation and for those of (3.6)) and for $p > 0$, one checks that $\|D^2(V^p)\| \leq CV^{p-1}$, that V^p is a $2p$-Holder function if $p \leq 1/2$, and that $V^{p-1}\nabla V$ is a $(2p-1)$-Holder function if $p \in (1/2, 1)$ (see Lemma 3.13 and Section 2.5). Hence, λ_p and c_p given by

$$\lambda_p := \frac{1}{2p} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \lambda_{V^{1-p}D^2(V^p)(x)} \quad \text{and} \quad c_p := \begin{cases} [\frac{V^p}{p}]_{2p} & \text{if } p \in (0, 1/2] \\ [V^{p-1}\nabla V]_{2p-1} & \text{if } p \in (1/2, 1] \end{cases} \tag{3.6}$$

are finite positive numbers.
Then, we introduce the following Lyapunov assumption. Let $a \in (0, 1]$, $p > 0$ and $q \in [0, 1]$:

($\mathbf{S_{a,p,q}}$) : There exists $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ such that

1. GROWTH CONTROL: $|b|^2 \le CV^a$, and, $\begin{cases} \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \|\kappa\|^{2(p\vee q)} \le CV^{a+p-1} & \text{if } p < 1 \\ \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \|\kappa\|^2 \le CV^a & \text{if } p \ge 1. \end{cases}$

2. MEAN-REVERSION: there exist $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ such that,
$\langle \nabla V, b\rangle + \phi_{p,q}(\sigma,\kappa,\pi,V) \le \beta - \alpha V^a$ where $\phi_{p,q}$ is given by

$$\phi_{p,q}(\sigma,\kappa,\pi,V) = \begin{cases} c_p \int |y|^{2p}\pi(dy)\|\kappa\|^{2p} V^{1-p} 1_{q\le p} & \text{if } p < 1 \\ d_p\lambda_p\big(\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \int |y|^2\pi(dy)\|\kappa\|^2 + e_p \int |y|^{2p}\pi(dy)\frac{\|\kappa\|^{2p}}{V^{p-1}}\big) & \text{if } p \ge 1 \end{cases}$$

with $d_p = 2^{(2(p-1)-1)_+}$, c_p and λ_p given by (3.6), and $e_p = 0$ (resp. $[\sqrt{V}]_1^{2(p-1)}$) if $p = 1$ (resp. $p > 1$).

Assumption ($\mathbf{S_{a,p,q}}$).2 can be viewed as a discretized version of "$AV^p \le \beta - \alpha V^{a+p-1}$" where A denotes the infinitesimal generator of (X_t) (see (3.53)). We will say that V^p is a Lyapunov function for the Euler scheme $(\bar{X}_n)$ (Note that V^p is also a Lyapunov function for (X_t) since under ($\mathbf{S_{a,p,q}}$), $\limsup AV^p(x) = -\infty$ when $|x| \to +\infty$). In the continuous time framework, assumption "$AV^p \le \beta - \alpha V^{a+p-1}$" provides the following type of control: $\mathbb{E}\{V^p(X_t^x)\} \le V^p(x) + \int_0^t (\beta - \alpha\mathbb{E}\{V^{p+a-1}(X_s^x)\})ds$ (see Chapter 2). The role of ($\mathbf{S_{a,p,q}}$).2 is to provide the same type of control for the Euler scheme (see Proposition 3.10).
The left-hand side of ($\mathbf{S_{a,p,q}}$).2 is the sum of two conflicting components: $\langle \nabla V, b\rangle$ produces the mean-reverting effect (see Example 1 for concrete cases) whereas the positive function $\phi_{p,q}$ expresses the noise induced by the Brownian and jump components. If the assumption on the growth of σ and κ is more stringent, the second component becomes negligible against the mean-reverting effect. In that case, ($\mathbf{S_{a,p,q}}$) can be replaced with the simpler assumption: There exists $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ such that

$$\begin{cases} \langle \nabla V, b\rangle \le \beta - \alpha V^a, \quad |b|^2 \le CV^a, \quad \text{and} \quad \text{when } |x| \to +\infty, \\ \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(x) = o(V^{a-(1-p)_+}(x)) \quad \text{and} \quad \|\kappa(x)\|^2 = o(V^{\eta_{a,p,q}}(x)) \end{cases} \tag{3.7}$$

with $\eta_{a,p,q} = (p\vee q)^{-1}(a+p-1)$ if $p \le 1$ and $\eta_{a,p,q} = a$ if $p > 1$.

Remark 3.3 Assumption ($\mathbf{S_{a,p,q}}$) does not depend on the truncation parameter h in cases 1 and 2. This can be viewed as a consequence of the existence of an intrinsic formulation in these cases. In case 3, since b^h depends on h, the left-hand side of ($\mathbf{S_{a,p,q}}$).2 also depends on h. However, under the growth assumption on κ, one can check that $\langle \nabla V, b^h\rangle = \langle \nabla V, b^1\rangle + o(V^a)$. This implies that the same conclusion holds in this case.

We now state our first main result.

Theorem 3.4 *Let $a \in (0,1]$, $p > 0$ and $q \in [0,1]$ such that ($\mathbf{H_p^1}$), ($\mathbf{H_q^2}$) and ($\mathbf{S_{a,p,q}}$) are satisfied. Suppose that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$ and that the sequence $(\eta_n/\gamma_n)_{n\ge1}$ is nonincreasing. Then,*

(1) If $p/2 + a - 1 > 0$, the sequence $(\bar{\nu}_n)_{n\ge1}$ is almost surely tight. Moreover, if $\kappa(x) \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$ and $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \|\kappa\|^{2q} \le CV^{\frac{p}{2}+a-1}$, then every weak limit of this sequence is an invariant probability for the SDE (4.2). In particular, if $(X_t)_{t\ge0}$ admits a unique invariant probability ν, for every

continuous function f such that $f = o(V^{\frac{p}{2}+a-1})$, $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(f) = \nu(f)$.

(2) The same result holds for $(\bar{\nu}_n^P)_{n\geq 1}$.

(3) The same result holds for $(\bar{\nu}_n^C)_{n\geq 1}$ under the additional condition:

$$\pi(|y| > u_n)\gamma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{3.8}$$

We present below some examples which fulfill the conditions of Theorem 3.4. In the first, we suppose that the dynamical system has a radial drift term and a noise generated by a centered jump component with a Lévy measure close to that of a symmetric stable process. In the second, we consider an SDE driven by a purely discontinuous Lévy process. We suppose that this Lévy process is not centered. This implies that even if the SDE has seemingly no drift term, a mean-reverting assumption can be still satisfied.

Example 1 Let ϕ and ψ be positive, bounded and continuous functions on $\mathbb{R}^d$ with positive infimum $\underline{\phi}$ and $\underline{\psi}$. Moreover, assume that $\phi(y) = \phi(-y)$ and consider (Z_t) defined as in the SDE (4.2) with Lévy measure π given by $\pi(dy) = \phi(y)/|y|^{d+r}\lambda_d(dy)$ where $r \in (0,2)$. When $\phi = C > 0$, the increments of $(\bar{Z}_t)$ can be exactly simulated because $(\bar{Z}_t)$ is a symmetric $\mathbb{R}^d$-stable process with order r. Otherwise, $\bar{Z}_n^P$ and $\bar{Z}_n^C$ can be simulated by the rejection method since the density of π is dominated by the density of a Pareto's law).
Let $\rho \in [0,2)$ and let M be a positive number. We assume that b is a continuous function such that $b(x) = -\psi(x)x/|x|^\rho$ for every $x \in B(0,M)^c$. Then, we consider (X_t) solution to

$$dX_t = b(X_{t^-})dt + \kappa(X_{t^-})dZ_t \tag{3.9}$$

where κ is a continuous function. In this case, the formulation does not depend on p and q. Indeed, since $\phi(y) = \phi(-y)$, we have $\int_{\{|y|>h\}} y\pi(dy) = 0$ for every $h > 0$. A natural candidate for the function V is $V(x) = 1 + |x|^2$. Indeed, one checks that there exists $\beta \in \mathbb{R}$ such that

$$\langle \nabla V(x), b(x)\rangle = -\psi(x)|x|^{2-\rho} \leq \beta - \frac{1}{2}\underline{\psi} V(x)^{1-\frac{\rho}{2}}$$

for every $x \in \mathbb{R}^d$. We set $a = 1 - \rho/2$. $(\mathbf{H_p^1})$ and $(\mathbf{H_q^2})$ are satisfied for all $0 < p < r/2 < q \leq 1$. According to (3.7), the conditions on the coefficients of Theorem 3.4 are fulfilled if $p/2+a-1 > 0$ and $\|\kappa\|^{2q} \leq CV^{\frac{p}{2}+a-1}$. It follows that we can find p and q such that the assumptions on the coefficients are satisfied if $2\rho \leq r$ and $\|\kappa(x)\| \leq C(1+|x|^\epsilon)$ with $\epsilon \in [0, 1/2 - \rho/r)$.

Example 2 Let π be a Lévy measure on $\mathbb{R}$ such that $\int_{|y|\leq 1} |y|\pi(dy) < +\infty$, $\int_{|y|>1} |y|^{2p}\pi(dy) < +\infty$ with $p \geq 2$ and $\int y\pi(dy) > 0$. Let (Z_t^0) be a real Lévy process with characteristic measure given by

$$\mathbb{E}\{e^{i\langle u, Z_t^0\rangle}\} = \exp\big[t\big(\int (e^{i\langle u,y\rangle} - 1)\pi(dy)\big)\big].$$

For $\rho \in [0,2)$, we assume that there exists $M > 0$ such that for every $x \in B(0,M)^c$, $\kappa(x) = -\psi(x)x/|x|^\rho$ where ψ is a positive and bounded continuous function with positive infimum $\underline{\psi}$. We then consider the SDE: $dX_t = \kappa(X_{t^-})dZ_t^0$ that we rewrite accordingly to case 1 :

$$dX_t = \kappa(X_{t^-}) \int y\pi(dy)dt + \kappa(X_{t^-})dZ_t$$

where $Z_t = Z_t^0 - t\int y\pi(dy)$. As in the preceding example, one set $V(x) = 1+x^2$ and checks that there exists $\beta \in \mathbb{R}$ such that $V'b\rangle \leq \beta - (\underline{\psi}/2)V^{1-\frac{\rho}{2}}$. We set $a = 1-\rho/2$. Since $(\mathbf{H_p^1})$ and $(\mathbf{H_q^2})$ are fulfilled with $p \geq 2$ and $q \leq 1/2$, we necessarily have: $p/2+a-1 > 0$ and $\|\kappa\|^{2q} \leq CV^{\frac{p}{2}+a-1}$. According to (3.7), it follows that the conditions on the coefficients are satisfied if $\|\kappa\|^2 = o(V^a)$, *i.e.* if $\rho > 0$. Hence, Theorem 3.4 applies for every $\rho \in (0,2)$.

The interest of Theorem 3.4 lies in the facility with which it can be put to use in concrete situations. For instance, in Scheme (E), we only have to take a sequence $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ decreasing to 0, with infinite sum and $\eta_n = \gamma_n$. The next theorem (Theorem 3.5) requires tougher conditions on the sequences (γ_n) and (η_n) but it can be applied to SDE's where the coefficients do not necessarily verify all conditions of Theorem 3.4. It broadens the class of SDE's for which we can find an efficient procedure for the approximation of the invariant distribution.

Theorem 3.5 *Let $a \in (0,1]$, $p > 0$ and $q \in [0,1]$ such that $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ and $(\mathbf{S_{a,p,q}})$ are satisfied. Suppose that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$. Then,*
(1) Let $s \in (1,2]$ such that

$$\begin{cases} s > \frac{2p}{2p+(a-1)(\frac{2p-1}{p})} & \text{if } \frac{1}{2} < p \leq 1 \\ s > \frac{2p}{2p+a-1} & \text{if } p \geq 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

If $p/s + a - 1 > 0$, there exist some sequences $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ and $(\eta_n)_{n\geq 1}$ such that $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ is almost surely tight. Moreover, if $\kappa(x) \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$ and $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \|\kappa\|^{2q} \leq CV^{\frac{p}{s}+a-1}$, then every weak limit of this sequence is an invariant probability for the SDE (4.2). In particular, if $(X_t)_{t\geq 0}$ admits a unique invariant probability ν, for every continuous function f such that $f = o(V^{\frac{p}{s}+a-1})$, $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(f) = \nu(f)$.
(2) The same result holds for $(\bar{\nu}_n^P)_{n\geq 1}$.
(3) The same result holds for $(\bar{\nu}_n^C)_{n\geq 1}$ under the additional condition (3.8).

Remark 3.6 The sequences $(\eta_n)_{n\geq 1}$ and $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ must verify an explicit condition given in Proposition 3.7 below (see Remark 3.8 for a version adapted to polynomial steps and weights).

In the following example, we consider the same class of SDE's as in Example 1 in the non-integrable case (*i.e.* $r \leq 1$). One can observe that the mean-reversion condition and the growth condition on the coefficient κ can be both relaxed. We also give some explicit polynomial weights and steps for which Theorem 3.5 applies in this case.

Example 3 Let $\rho \in [0,2)$ and $r \in (0,1]$, let b and κ be continuous functions, b being defined as in Example 1. Consider a solution (X_t) to the SDE (3.9). For every $s \in (1,2]$, one can find p and q such that the conditions of Theorem 3.5 are satisfied if $s\rho < r$ and $\|\kappa(x)\| \leq C(1+|x|^\epsilon)$ with $\epsilon \in [0, 1/s - \rho/r)$. Under these conditions, Theorem 3.5 can be applied with (γ_n) and (η_n) given by $\gamma_n = Cn^{-r_1}$, $\eta_n = Cn^{-r_2}$ with $r_1 \leq r_2$ and

$$0 < r_1 < 2(1-\frac{1}{s}) \quad \text{and} \quad r_2 < 1 \quad \text{or} \quad 0 < r_1 \leq 2(1-\frac{1}{s}) \quad \text{and} \quad r_2 = 1.$$

3.3 Almost sure tightness of $(\bar{\nu}_n(w,dx))_{n\in\mathbb{N}}$

The main result of this section is Proposition 3.7. We need to introduce the function $f_{a,p}$ defined for all $s \in (1,2]$ by

$$f_{a,p}(s) = \begin{cases} s & \text{if } s \geq 2p \\ \frac{p+a-1}{\frac{p}{s}+\frac{a-1}{2(p\wedge 1)}} \wedge s & \text{if } s < 2p. \end{cases} \tag{3.11}$$

Assume that $p + a - 1 > 0$. Then, $s \mapsto f_{a,p}(s)$ is a nondecreasing function which satisfies $f_{1,p}(s) = s$ for all $p > 0$ and $f_{a,p}(2) = 2$. Note that $f_{a,p}(s) > 1$ if and only if s satisfies Assumption (3.10).

Proposition 3.7 *Let $a \in (0,1]$, $p > 0$ and $q \in (0,1]$ such that $(\mathbf{H}^1_{\mathbf{p}})$, $(\mathbf{H}^2_{\mathbf{q}})$ and $(\mathbf{S}_{\mathbf{a},\mathbf{p},\mathbf{q}})$ are satisfied. Assume that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$ and $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ is nonincreasing.*
(1) Then,

$$\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{2}+a-1}) < +\infty \qquad a.s.$$

Consequently, if $\frac{p}{2} + a - 1 > 0$, the sequence $(\bar{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a.s. tight.
(2) Let $s \in (1,2)$ such that Assumption (3.10) is satisfied. Assume that $(\eta_n)_{n\geq 1}$ and $(\gamma_n)_{n\geq 1}$

$$\Big(\frac{1}{\gamma_n}\Big(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}}\Big)^{f_{a,p}(s)}\Big) \text{ is nonincreasing and } \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}}\Big)^{f_{a,p}(s)} < +\infty. \tag{3.12}$$

Then, $\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{s}+a-1}) < +\infty$ a.s. and the sequence $(\bar{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a.s. tight as soon as $p/s + a - 1 > 0$.

Remark 3.8 If $\gamma_n = Cn^{-r_1}$ and $\eta_n = Cn^{-r_2}$ with $r_1 \leq r_2$, then Assumption (3.12) reads :

$$0 < r_1 < \bar{r}_1 = 2\Big(1 - \frac{1}{f_{a,p}(s)}\Big) \text{ and } r_2 < 1 \quad \text{or} \quad 0 < r_1 \leq \bar{r}_1 \text{ and } r_2 = 1. \tag{3.13}$$

The proof of Proposition 3.7 is organized as follows: firstly, in subsection 3.3.1 (see Proposition 3.10), we establish a fundamental recursive control of the sequence $(V^p(\bar{X}_n))$: we show that

($\mathbf{R}_{\mathbf{a},\mathbf{p}}$): There exist $n_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ such that $\forall n \geq n_0$,

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} \leq V^p(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1} p V^{p-1}(\bar{X}_n)\Big(\beta' - \alpha' V^a(\bar{X}_n)\Big). \tag{3.14}$$

For this step, we rely on Lemma 3.11 that provides a control of the moments of the increments of the jump component in terms of p and q.
Secondly, in subsection 3.3.3, we show by using arguments similar to [LaPa03] that an L^p-control of the Euler scheme can be obtained as a consequence of ($\mathbf{R}_{\mathbf{a},\mathbf{p}}$) (see Lemma 3.15) and that

($\mathbf{C}_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$) : There exists $\rho \in (1,2]$ such that

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{\eta_n}{H_n\gamma_n}\Big)^{\rho}\mathbb{E}\{|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1})|^{\rho}\} < +\infty. \tag{3.15}$$

This property is established in Corollary 3.17 with $\rho = 2$ (resp. $\rho = f_{a,p}(s)$) if $s = 2$ (resp. $s \in (1,2]$).
In Lemma 3.9, we show that Proposition 3.7 follows from $(\mathbf{R_{a,p}})$ and $(\mathbf{C_{p,s}})$.

Lemma 3.9 *Let $p > 0$, $a \in (0,1]$ and $s \in (1,2]$ such that $(\mathbf{R_{a,p}})$ and $(\mathbf{C_{p,s}})$ are fulfilled. Then, the assertions of Proposition 3.7 are satisfied.*

Proof: By a convexity argument (see Lemma 3 of [LaPa03]), one shows that $(\mathbf{R_{a,p}}) \Longrightarrow (\mathbf{R_{a,\bar{p}}})$ for all $\bar{p} \in (0,p]$. Hence, for all $s \in (1,2]$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$, $\hat{\alpha} > 0$ and $\hat{\beta} > 0$ such that $\forall k \geq n_0$,

$$\mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1}) + \gamma_k V^{\frac{p}{s}-1}(\bar{X}_{k-1})\Big(\hat{\beta} - \hat{\alpha}V^a(\bar{X}_{k-1})\Big). \tag{3.16}$$

As V is locally bounded and $V(x) \to +\infty$ when $|x| \to +\infty$, one checks that for all $\varepsilon > 0$, there exists $C_\varepsilon > 0$ such that $V^{\frac{p}{s}-1} \leq \varepsilon V^{\frac{p}{s}+a-1} + C_\varepsilon$. By setting $\varepsilon = \hat{\alpha}/(2\hat{\beta})$, $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}/2$ and $\tilde{\beta} = \hat{\beta}C_\varepsilon$, we deduce that $V^{\frac{p}{s}-1}(\hat{\beta} - \hat{\alpha}V^a) \leq \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}V^{\frac{p}{s}+a-1}$. Hence, we derive from (3.16) that

$$V^{\frac{p}{s}+a-1}(\bar{X}_{k-1}) \leq \frac{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1}) - \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}}{\tilde{\alpha}\gamma_k} + \tilde{\beta} \quad \forall k \geq n_0.$$

It follows that $\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{s}+a-1}) < +\infty$ if

$$\sup_{n\geq n_0+1}\Big(\frac{1}{H_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}\big(V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1}) - \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\big)\Big) < \infty \quad a.s. \tag{3.17}$$

We then prove (3.17): we decompose the above sum as follows

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}(V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1}) - \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}) \\
&= \frac{1}{H_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}\Delta V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) + \frac{1}{H_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}\Big(V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\Big)
\end{aligned}$$

where $\Delta V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) = V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1}) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)$. Firstly, an Abel's transform yields

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}\Delta V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) &= \frac{1}{H_n}\Big(\frac{\eta_{n_0}}{\gamma_{n_0}}V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n_0}) - \frac{\eta_n}{\gamma_n}V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n)\Big) \\
&+ \frac{1}{H_n}\Big(\sum_{k=n_{0+1}}^{n}(\frac{\eta_k}{\gamma_k} - \frac{\eta_{k-1}}{\gamma_{k-1}})V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1})\Big) \leq \frac{1}{H_n}\frac{\eta_{n_0}}{\gamma_{n_0}}V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n_0})
\end{aligned}$$

where we used in the last inequality that $(\frac{\eta_n}{\gamma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ is nonincreasing. Hence, since $H_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$,

$$\sup_{n\geq n_0}\Big(\frac{1}{H_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}\Big(V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1}) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)\Big)\Big) < +\infty. \tag{3.18}$$

Secondly, one denotes by $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ the martingale defined by

$$M_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{H_k\gamma_k}\big(V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\big).$$

Denote by G_{k-1} an $\mathcal{F}_{k-1}$-measurable random variable and $\rho \in (1,2]$ such that $(\mathbf{C_{p,s}})$ is fulfilled. As $|u+v|^\rho \le 2^{\rho-1}(|u|^\rho + |v|^\rho)$ for $\rho \ge 1$, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\{ |V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}|^\rho \Big\} &\le C\mathbb{E}\Big\{ |V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) - G_{k-1}|^\rho \Big\} \\ &\quad + C\mathbb{E}\Big\{ |\mathbb{E}\big\{ (G_{k-1} - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k))/\mathcal{F}_{k-1}\big\}|^\rho \Big\} \\ &\le C\mathbb{E}\Big\{ |V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) - G_{k-1}|^\rho \Big\}\end{aligned}$$

thanks to the Jensen inequality. Setting $G_{k-1} = V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))$, we derive from $(\mathbf{C_{p,s}})$ that $\sum_{k\ge1} |\Delta M_k|^\rho < +\infty$ $a.s.$ Hence, since $\rho > 1$, it follows from Chow's theorem (see [HaHe80]) that $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty$ $a.s.$ where M_∞ is finite $a.s.$ Then, Kronecker's Lemma yields

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\eta_k}{\gamma_k}\Big(V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3.19}$$

Finally, (3.17) follows from (3.18) and (3.19). □

3.3.1 A recursive stability relation

Proposition 3.10 *Let $p > 0$, $q \in [0,1]$ and $a \in (0,1]$. Assume $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ and $(\mathbf{S_{a,p,q}})$. If $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee1)}\} < +\infty$, then $(\mathbf{R_{a,p}})$ holds true.*

The idea of the proof of Proposition 3.10 is to obtain an inequality of the following type:

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n)/\mathcal{F}_n\} \le \gamma_{n+1} p V^{p-1}(\bar{X}_n)\Phi(\bar{X}_n) + R_n$$

where $\Phi = \langle \nabla V, b\rangle + \phi_{p,q}(\sigma,\kappa,\pi,V)$ (see $(\mathbf{S_{a,p,q}}).2$) and R_n is asymptotically negligible in a sense made clear in the proof. To this end, we begin by three lemmas. In Lemma 3.11, we study the behavior of the moments of (Z_t) near 0. Then, in Lemma 3.13, we state some properties of the derivatives of V^p in terms of p and in the last one (Lemma 3.14), we establish a control of the expectation of the jump part of the increment $V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n)$.

Lemma 3.11 *(i) Let $p > 0$ such that $\int_{|y|>1} |y|^{2p}\pi(dy) < +\infty$ and let $h > 0$. Then, there exists a locally bounded function ψ_h such that*

$$\forall t \ge 0, \quad \mathbb{E}\{|N_t^h|^{2p}\} = \textstyle\int_{|y|>h} |y|^{2p}\pi(dy)(t + \psi_h(t)t^2).$$

(ii) Let $q \in [0,1]$ such that $\int_{|y|\le1} |y|^{2q}\pi(dy) < +\infty$, $h > 0$ and $T > 0$. Then,

$$\forall t \in [0,T], \begin{cases} \mathbb{E}\{|Y_t^h + t\int_{|y|\le h} y\pi(dy)|^{2q}\} \le t\int_{|y|\le h} |y|^{2q}\pi(dy) & \text{if } q \le 1/2 \\ \mathbb{E}\{|Y_t^h|^{2q}\} \le C_q t\int_{|y|\le h} |y|^{2q}\pi(dy) + C_{h,T,q}t^2 & \text{if } q \in (1/2,1]. \end{cases}$$

(iii) Let $p \in [1,+\infty)$ such that $\int_{|y|>h} |y|^{2p}\pi(dy) < \infty$. For every $T > 0$, for every $\varepsilon > 0$, there exists $C_{\varepsilon,T,p} > 0$ such that,

$$\forall t \in [0,T], \quad \mathbb{E}\{|Z_t|^{2p}\} \le t\Big(\int |y|^{2p}\pi(dy) + \varepsilon\Big) + C_{\varepsilon,T,p}t^\eta$$

where $\eta > 1$. In particular, $\mathbb{E}|Z_t|^2 = t\int |y|^2\pi(dy)$.

Remark 3.12 In this lemma, we obtain in particular, a control of the expansion of $t \mapsto \mathbb{E}\{|D_t|^r\}$ in the neighborhood of 0 (where D denotes one of the above jump components and r, a positive number): we have the following type of inequality: $\mathbb{E}\{|D_t|^r\} \leq c_r t + O(t^\eta)$ where c_r is a non-negative real constant and $\eta > 1$. The value of c_r is important since it appears in the left-hand side of the mean-reverting assumption. Note that we cannot have $c_r = 0$ in the inequalities of Lemma 3.11. Indeed, according to the Kolmogorov criterion, a Lévy process D that satisfies $\mathbb{E}\{|D_t|^r\} \leq Ct^\eta$ in the neighborhood of 0, is pathwise continuous (For the Brownian motion, $c_r = 0$ as soon as $r > 2$ since $\mathbb{E}\{|W_t|^r\} = o(t^{\frac{r}{2}})$). This specific feature of the jump component generates some stiffness in the mean-reverting assumption $((\mathbf{S_{a,p,q}}), 2)$. Thus, $\phi_{p,q}$ contains a term of order $2p$ coming only from the jump component.

Proof: *(i)* $(N_t^h)_{t\geq 0}$ is a compound Poisson process with parameters $\lambda_h = \pi(|y| > h)$ and $\mu^h(dy) = \pi(dy)/\pi(|y| > h)$. We can set $N_t^h = \sum_{n\geq 1} R_n 1_{T_n \leq t}$, where $(R_n)_{n\geq 1}$ is a sequence of i.i.d. r.v. with law μ^h and $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is the sequence of the jump times of a Poisson process with parameter λ_h independent of $(R_n)_{n\geq 1}$. We have

$$\mathbb{E}\{|N_t^h|^{2p}\} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\{|\sum_{i=1}^n R_i|^{2p}\} e^{-\lambda_h t} \frac{(\lambda_h t)^n}{n!} = \lambda_h t \mathbb{E}\{|R_1|^{2p}\} F_{\lambda_h}(t)$$

$$\text{where} \qquad F_{\lambda_h}(t) = e^{-\lambda_h t} \sum_{n\geq 0} \frac{\mathbb{E}\{|\sum_{i=1}^{n+1} R_i|^{2p}\}}{\mathbb{E}\{|R_1|^{2p}\}} \frac{(\lambda_h t)^n}{(n+1)!}.$$

By the elementary inequality:

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^l,\ \forall \alpha > 0, \quad |\sum_{i=1}^n a_i|^\alpha \leq n^{(\alpha-1)_+} \sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha, \tag{3.20}$$

we obtain

$$\frac{\mathbb{E}\{|\sum_{i=1}^{n+1} R_i|^{2p}\}}{(n+1)!\mathbb{E}\{|R_1|^{2p}\}} \leq \frac{(n+1)^{(2p-1)_+}}{n!}.$$

It follows that F_{λ_h} is an analytic function on $\mathbb{R}$ such that $F_{\lambda_h}(0) = 1$. Therefore,

$$F_{\lambda_h}(t) = 1 + t\psi_h(t) \quad \text{with } |\psi_h(t)| \leq C(p, h, \lambda_h) \quad \forall t \in [0, T].$$

Since $\mathbb{E}\{|R_1|^{2p}\} = \frac{1}{\lambda_h} \int_{\{|y|>c\}} |y|^{2p} \pi(dy)$, the first equality is obvious.
(ii) If $\int_{|y|\leq h} |y|^{2q} \pi(dy) < +\infty$ with $q \leq 1/2$, then Y^h has locally bounded variations and $Y_t^h + t\int_{|y|\leq h} y\pi(dy) = \sum_{0<s\leq t} \Delta Y_t^h$. Inequality (3.20) with $\alpha = 2q$ and the compensation formula yield

$$\mathbb{E}\{|Y_t^h + t\int_{|y|\leq h} y\pi(dy)|^{2q}\} \leq \mathbb{E}\{\sum_{0<s\leq t} |\Delta Y_t^h|^{2q}\} = t\int_{y\leq h} |y|^{2q}\pi(dy).$$

Now, let $q \in (1/2, 1]$. As Y^h is a martingale, we derive from the Burkholder-Davis-Gundy (BDG) inequality (see [Ber96]) that

$$\mathbb{E}\{|Y_t^h|^{2q}\} \leq C_q \mathbb{E}\{(\sum_{0<s\leq t} |\Delta Y_s^h|^2)^q\}.$$

The second inequality follows from Inequality (3.20) with $\alpha = q(\leq 1)$ and from the compensation formula.

(iii) One first considers case $p = 1$. The process (M_t) defined by $M_t = |Z_t|^2 - t\int |y|^2\pi(dy)$ is a martingale. Then, in particular, $\mathbb{E}\{|Z_t|^2\} = t\int |y|^2\pi(dy)$. When $p > 1$, the BDG inequality yields

$$\mathbb{E}\{|Y_t^h|^{2p}\} \le C_p\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\le t} |\Delta Y_s^h|^2)^p\}. \tag{3.21}$$

For every integer $k \ge 1$, $M_{t,k} := \sum_{0<s\le t} |\Delta Y_s^h)|^{2^k} - t\int_{\{|y|\le h\}} |y|^{2^k}\pi(dy)$ is a martingale. By Inequality (3.20) and the BDG inequality applied to $(M_{t,k})$, we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\le t} |\Delta Y_s^h|^{2^k})^{\frac{p}{2^{k-1}}}\} &\le C\Big(\mathbb{E}\{|M_{t,k}|^{\frac{p}{2^{k-1}}}\} + \big(t\int_{\{|y|\le h\}} |y|^{2^k}\pi(dy)\big)^{\frac{p}{2^{k-1}}}\Big)\\ &\le C\Big(\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\le t} |\Delta Y_s^h|^{2^{k+1}})^{\frac{p}{2^k}}\} + \big(t\int_{\{|y|\le h\}} |y|^{2^k}\pi(dy)\big)^{\frac{p}{2^{k-1}}}\Big).\end{aligned}$$

Set $k_0 = \inf\{k \ge 1, 2^k \ge p\}$. Iterating the preceding relation yields

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\le t} |\Delta Y_s^h|^2)^p\} &\le C\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\le t} |\Delta Y_s^h|^{2^{k_0+1}})^{\frac{p}{2^{k_0}}}\}\\ &\quad + C\sum_{k=1}^{k_0}\big(t\int_{\{|y|\le h\}} |y|^{2^k}\pi(dy)\big)^{\frac{p}{2^{k-1}}}.\end{aligned}$$

By construction, $p/2^{k_0} \le 1$. We then derive from Inequality (3.20) with $\alpha = p/2^{k_0}$, from the compensation formula and from (3.21) that,

$$\mathbb{E}\{|Y_t^h|^{2p}\} \le C_p\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\le t} |\Delta Y_s^h|^2)^p\} \le C_p t\int_{\{|y|\le h\}} |y|^{2p}\pi(dy) + Ct^{\eta_1} \tag{3.22}$$

with $\eta_1 = p/2^{k_0-1} > 1$. We now consider (Z_t). For every $h \in (0, +\infty)$, we have $Z_t = Y_t^h + \hat{N}_t^h$ where $\hat{N}_t^h = N_t^h - t\int_{|y|>h} y\pi(dy)$. Using the elementary inequality,

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, \alpha \ge 1 \qquad (u+v)^\alpha \le u^\alpha + \alpha 2^{\alpha-1}(u^{\alpha-1}v + v^\alpha), \tag{3.23}$$

we deduce from the independence between (N_t^h) and (Y_t^h) that

$$\mathbb{E}\{|Z_t|^{2p}\} \le \mathbb{E}\{|\hat{N}_t^h|^{2p}\} + C\Big(\mathbb{E}\{|\hat{N}_t^h|\}\mathbb{E}\{Y_t^h|^{2p-1}\} + \mathbb{E}\{Y_t^h|^{2p}\}\Big).$$

Using the Jensen inequality if $2p - 1 < 1$ and Inequality (3.22) if $2p \ge 1$, we have $\mathbb{E}\{Y_t^h|^{2p-1}\} \le Ct^{(p-\frac{1}{2})\wedge 1}$. By (3.23), we can also check that if $p \ge 1/2$,

$$\mathbb{E}\{|\hat{N}_t^h|^{2p}\} \le t\int_{|y|>h} |y|^{2p}\pi(dy) + C_{T,p,h}t^{2(p\wedge 1)}. \tag{3.24}$$

Hence, by (3.22), it follows that for every $h > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{|Z_t|^{2p}\} &\le t\int_{\{|y|>h\}} |y|^{2p}\pi(dy) + C\Big(t^{(p+\frac{1}{2})\wedge 2} + t\int_{\{|y|\le h\}} |y|^{2p}\pi(dy) + t^{\eta_1}\Big)\\ &\le \Big(\int |y|^{2p}\pi(dy) + C\int_{\{|y|\le h\}} |y|^{2p}\pi(dy)\Big)t + Ct^\eta\end{aligned}$$

with $\eta > 1$. As $\int_{|y|\le h}|y|^{2p}\pi(dy) \xrightarrow{h\to 0} 0$, for every $\varepsilon > 0$, we can choose $h_\varepsilon > 0$ such that $C\int_{|y|\le h_\varepsilon}|y|^{2p} \le \varepsilon$. That yields the announced inequality. □

Lemma 3.13 *Let $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$. Then,*
(a) If $p \in [0,1/2]$, V^p is α-Holder for any $\alpha \in [2p,1]$ and if $p \in (0,1]$, $\nabla(V^p)$ is α-Holder for any $\alpha \in [2p-1,1]\cap(0,1]$.
(b) Let x, $y \in \mathbb{R}^d$ and $\xi \in [x, x+y]$ and set $\underline{v} = \min\{V(x), x \in \mathbb{R}^d\}$. If $p \le 1$,

$$\frac{1}{2}D^2(V^p)(\xi)y^{\otimes 2} \le p\underline{v}^{p-1}\lambda_p|y|^2. \tag{3.25}$$

If moreover, $|y| \le (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{V}(x)}{[\sqrt{V}]_1}$ with $\varepsilon \in (0,1]$, then,

$$\frac{1}{2}D^2(V^p)(\xi)y^{\otimes 2} \le p\lambda_p\varepsilon^{2(p-1)}V^{p-1}(x)|y|^2. \tag{3.26}$$

If $p > 1$,

$$\frac{1}{2}D^2(V^p)(\xi)y^{\otimes 2} \le p\lambda_p 2^{(2(p-1)-1)+}\big(V^{p-1}(x) + [\sqrt{V}]_1|y|^{2(p-1)}\big)|y|^2. \tag{3.27}$$

Proof: Consider a continuous function $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ such that $|f|^{\frac{1}{\alpha}}$ is Lipschitz. Then, f is α-Holder. This argument yields *(a)* (see Section 2.5 for details). Now, let us pass to (b). We have

$$D^2(V^p) = pV^{p-1}\big(D^2V + (p-1)\frac{\nabla V\otimes\nabla V}{V}\big), \tag{3.28}$$

where $(\nabla V\otimes\nabla V)_{i,j} = (\nabla V)_i(\nabla V)_j$. Since $V^{p-1} \le \underline{v}^{p-1}$ if $p \le 1$, we derive (3.25) from relations (1.4) and (3.6). For (3.26), we consider $\xi = x+\theta y$ with $\theta \in [0,1]$ and $|y| \le (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{V}(x)}{[\sqrt{V}]_1}$. As $\sqrt{V}$ is a Lipschitz function,

$$\sqrt{V}(\xi) \ge \sqrt{V}(x) - [\sqrt{V}]_1|y| \ge \varepsilon\sqrt{V}(x) \Rightarrow V^{p-1}(\xi) \le \varepsilon^{2(p-1)}V^{p-1}(x).$$

Hence, Inequality (3.26) follows from (3.6). If $p > 1$,

$$\sqrt{V}(\xi) \le \sqrt{V}(x) + [\sqrt{V}]_1|y| \qquad \Rightarrow \qquad V^{p-1}(\xi) \le (\sqrt{V}(x) + [\sqrt{V}]_1|y|)^{2(p-1)}.$$

We then derive (3.27) from (3.20) (with $\alpha = 2(p-1)$ and $n = 2$) and from (3.6). □

Lemma 3.14 *Let $p \in (0,1)$, $q \in [0,1]$ and $a \in (0,1]$. Assume $(\mathbf{H^1_p})$, $(\mathbf{H^2_q})$ and $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.1. Then, for every $\varepsilon > 0$, there exists $h_\varepsilon \in [0,+\infty]$, $T_\varepsilon > 0$ and $C_\varepsilon > 0$ such that for every $x, z \in \mathbb{R}^d$, for every $t \le T_\varepsilon$,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{V^p(z+\kappa(x)Z^{h_\varepsilon}_t) - V^p(z)\}&\\ \le t\Big(pc_p\int|y|^{2p}\pi(dy)1_{\{q\le p\}}\|\kappa(x)\|^{2p} + \varepsilon V^{p+a-1}(x) + C_\varepsilon\Big)&\end{aligned} \tag{3.29}$$

with c_p given by (3.6), $h_\varepsilon \in (0,1]$ if $p \le 1/2 < q$, $h_\varepsilon = 0$ if $p,q \le 1/2$ and $h_\varepsilon = +\infty$ if $p \in (1/2,1)$.

Proof: Set $\Delta(z,x,U) = V^p(z+\kappa(x)U) - V^p(z)$. We first consider the case $p \le 1/2$ and $q > 1/2$. Let $h \in (0,\infty)$. Since $Z_t^h = Y_t^h + N_t^h$, we can decompose $\Delta(z,x,Z_t^h)$ as follows:

$$\Delta(z,x,Z_t^h) = \Delta(z+\kappa(x)N_t^h, x, Y_t^h) + \Delta(z,x,N_t^h).$$

One controls each term of the right-hand side. On the one hand, as V^p is $2p$-Holder with constant $[V^p]_{2p} = pc_p$ (see Lemma 3.13), we deduce from Lemma 3.11(i) that

$$\mathbb{E}\{\Delta(z,x,N_t^h)\} \le pc_p\|\kappa(x)\|^{2p}\mathbb{E}\{|N_t^h|^{2p}\} \tag{3.30}$$

$$\le pc_p \int_{|y|>h} |y|^{2p}\pi(dy)\|\kappa(x)\|^{2p}(t+\psi_h(t)t^2) \tag{3.31}$$

where ψ_h is a locally bounded function. On the other hand, we set $\tilde{z} = z + \kappa(x)N_t^h$. By the Taylor formula,

$$\Delta(\tilde{z},x,Y_t^h) = \langle \nabla(V^p)(\tilde{z}), \kappa(x)Y_t^h\rangle + \langle \nabla(V^p)(\xi) - \nabla(V^p)(\tilde{z}), \kappa(x)Y_t^h\rangle$$

with $\xi \in [\tilde{z}, \tilde{z}+\kappa(x)Y_t^h]$. As (N_t^h) and (Y_t^h) are independent and Y_t^h is centered, $\mathbb{E}\{\langle \nabla(V^p)(\tilde{z}), \kappa(x)Y_t^h\rangle\} = 0$. By Lemma 3.13, $V^{p-1}\nabla V = \nabla(V^p)/p$ is $(2q-1)$-Holder. Then, it follows from Lemma 3.11(ii).2 that

$$\mathbb{E}\{\Delta(z+\kappa(x)N_t^h, x, Y_t^h)\} \le p[V^{p-1}\nabla V]_{2q-1}\|\kappa(x)\|^{2q}\mathbb{E}\{|Y_t^h|^{2q}\}$$

$$\le C\|\kappa(x)\|^{2q}t\Big(\int_{|y|\le h}|y|^{2q}\pi(dy) + C_h t\Big). \tag{3.32}$$

By $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.1, $\|\kappa(x)\|^{2q} \le CV^{p+a-1}$. Since $\int_{|y|\le h}|y|^{2q}\pi(dy) \to 0$ when $h \to 0$, we can find $h_\varepsilon \in (0,1]$ such that

$$\mathbb{E}\{\Delta(z+\kappa(x)N_t^{h_\varepsilon}, x, Y_t^{h_\varepsilon})\} \le tV^{p+a-1}(x)\big(\varepsilon + C_\varepsilon^1 t\big). \tag{3.33}$$

Now, as $p < q$, for every $\delta > 0$, there exists C_δ such that $\|\kappa(x)\|^{2p} \le \delta V^{p+a-1} + C_\delta$. Hence, by (3.31), for every $\varepsilon > 0$, we have

$$\mathbb{E}\{\Delta(z,x,N_t^{h_\varepsilon})\} \le t\big((\varepsilon + t\psi_{h_\varepsilon}(t))V^{p+a-1}(x) + C_\varepsilon^2\big) \tag{3.34}$$

Then, adding up (3.33) and (3.34) and taking T_ε sufficiently small yields the result when $p \le 1/2 < q$.

When $p, q \le 1/2$, *i.e.* in Case 2, we deal with $Z_t = Z_t^0$. For every $h > 0$, we can write $Z_t = \check{Y}_t^h + N_t^h$ where $\check{Y}_t^h = Y_t^h + t\int_{\{|y\le h\}} y\pi(dy)$. Hence, for every $h > 0$,

$$\Delta(z,x,Z_t) = \Delta(z+\kappa(x)N_t^h, x, \check{Y}_t^h) + \Delta(z,x,N_t^h).$$

If $q \le p$, π satisfies $(\mathbf{H_p^2})$. Since $p \le 1/2$, V^p is $2p$-Holder. Therefore, by Lemma 3.11(ii).1,

$$\mathbb{E}\{\Delta(z+\kappa(x)N_t^h, x, \check{Y}_t^h)\} \le pc_p t\|\kappa(x)\|^{2p}\int_{|y|>h}|y|^{2p}\pi(dy).$$

By summing up this inequality and (3.31), we deduce (3.29). When $p < q \le 1/2$, we use that V^p is $2q$-Holder (see Lemma 3.13) and a proof analogous to the case $p \le 1/2 < q$ yields the result.

Finally, we consider the case $p > 1/2$. With the notations of Case 3, we deal with $Z_t = Z_t^\infty$. For every $h > 0$, we have $Z_t = Y_t^h + \hat{N}_t^h$ where $\hat{N}_t^h = N_t^h - \int_{\{|y|>h\}} y\pi(dy)$. For every $h > 0$, $\Delta(z, x, Z_t)$ can be written as follows

$$\Delta(z,x,Z_t) = \Delta(z+\kappa(x)\hat{N}_t^h, x, Y_t^h) + \Delta(z,x,\hat{N}_t^h). \tag{3.35}$$

On the one hand, by the same process as that used for (3.32) and by the inequality (3.24), we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\Delta(z,x,\hat{N}_t^h)\} &\le p[V^{p-1}\nabla V]_{2p-1}\|\kappa(x)\|^{2p}\mathbb{E}\{|\hat{N}_t^h|^{2p}\}\\ &\le t\|\kappa(x)\|^{2p}\Big(\int_{|y|>h}|y|^{2p}\pi(dy) + C_h t^{2p-1}\Big).\end{aligned}$$

On the other hand, by Lemma 3.13, $V^{p-1}\nabla V$ is $(2(p\vee q)-1)$-Holder. Hence, (3.32) is still valid in this case if we replace q with $p\vee q$. By using these controls of the terms of the right-hand side, we obtain if $q \le p$

$$\mathbb{E}\{\Delta(z,x,Z_t)\} \le t\|\kappa(x)\|^{2p}\Big(\int|y|^{2p}\pi(dy) + \int_{|y|\le h}|y|^{2p}\pi(dy) + C_h t^{2p-1}\Big)$$

where we have used that $\int_{\{|y|\le h\}}|y|^{2p}\pi(dy) \le \int|y|^{2p}\pi(dy) < +\infty$. When $h\to 0$, $\int_{|y|\le h}|y|^{2p}\pi(dy)\to 0$ and the result follows in this case by taking a small enough h. If $q > p$, the same process as in the case $p \le 1/2 < q$ yields the result. □

3.3.2 Proof of Proposition 3.10

For this proof, one needs to study separately the $p < 1$ and $p \ge 1$ cases. We detail the $p < 1$ case and indicate the process of the proof for the $p \ge 1$ case.

Case p < 1. We firstly consider Cases 1 and 2 and set

$$\bar{X}_{n+1,k} = \bar{X}_n + \sum_{i=1}^k \Delta\bar{X}_{n+1,i} \quad \text{with} \quad \begin{cases}\Delta\bar{X}_{n+1,1} = \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)\\ \Delta\bar{X}_{n+1,2} = \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1}\\ \Delta\bar{X}_{n+1,3} = \kappa(\bar{X}_n)\bar{Z}_{n+1}.\end{cases} \tag{3.36}$$

The idea is to study the difference $V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n)$ as the sum of three terms that correspond to the above decomposition.

i) First term: There exists $n_1 \in \mathbb{N}$ such that for every $n \ge n_1$

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1,1}) - V^p(\bar{X}_n)/\mathcal{F}_n\} \le p\gamma_{n+1}\frac{\langle\nabla V, b\rangle}{V^{1-p}}(\bar{X}_n) + C\gamma_{n+1}^2 V^{a+p-1}(\bar{X}_n). \tag{3.37}$$

Indeed, from Taylor's formula,

$$V^p(\bar{X}_{n+1,1}) - V^p(\bar{X}_n) = p\gamma_{n+1}\frac{\langle\nabla V, b\rangle}{V^{1-p}}(\bar{X}_n) + \frac{1}{2}D^2(V^p)(\xi_{n+1}^1)(\Delta\bar{X}_{n+1,1})^{\otimes 2}$$

where $\xi_{n+1}^1 \in [\bar{X}_n,\ \bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)]$. Set $x = \bar{X}_n$ and $y = \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)$. Since $\gamma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ and $|b| \le C\sqrt{V}$, there exists $n_1 \in \mathbb{N}$ such that for $n \ge n_1$, $|y| \le \frac{\sqrt{V}(x)}{2[\sqrt{V}]_1}$ *a.s.* Thus, we can apply the

second inequality of Lemma 3.13(b) with $\varepsilon = 1/2$ and deduce (3.37).
ii) Second term: For every $\varepsilon > 0$, there exists $n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq n_{2,\varepsilon}$,

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1,2}) - V^p(\bar{X}_{n+1,1})/\mathcal{F}_n\} \leq \varepsilon\gamma_{n+1}V^{a+p-1}(\bar{X}_n) + C_\varepsilon^1\gamma_{n+1}. \tag{3.38}$$

Let us prove this inequality. Since $\mathbb{E}\{U_{n+1}/\mathcal{F}_n\} = 0$, we deduce from Taylor's formula that

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1,2}) - V^p(\bar{X}_{n+1,1})/\mathcal{F}_n\} = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{D^2(V^p)(\xi_{n+1}^2)(\Delta\bar{X}_{n+1,2})^{\otimes 2}/\mathcal{F}_n\}$$

with $\xi_{n+1}^2 \in [\bar{X}_{n+1,1}; \bar{X}_{n+1,2}]$. Set $x = \bar{X}_{n+1,1}$ and $y = \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(x)U_{n+1}$. Since $\|\sigma(x)\| \leq C_\sigma\sqrt{V}(x)$, the conditions of (3.26) are satisfied with $\varepsilon = 1/2$ if $|U_{n+1}| \leq \rho_{n+1} = 2/(C_\sigma[\sqrt{V}]_1\sqrt{\gamma_{n+1}})$. Therefore,

$$\mathbb{E}\{D^2(V^p)(\xi_{n+1}^2)(\Delta\bar{X}_{n+1,2})^{\otimes 2}1_{\{|U_{n+1}|\leq\rho_{n+1}\}}/\mathcal{F}_n\} \leq CV^{p-1}(\bar{X}_n)\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(\bar{X}_n).$$

By (3.25), we also have

$$\mathbb{E}\{D^2(V^p)(\xi_{n+1}^2)(\Delta\bar{X}_{n+1,2})^{\otimes 2}1_{\{|U_{n+1}|>\rho_{n+1}\}}/\mathcal{F}_n\} \leq C\delta_n V^{p+a-1}(\bar{X}_n)$$

where $\delta_n = \mathbb{E}\{|U_{n+1}|^2 1_{\{|U_{n+1}|>\rho_{n+1}\}}\}$. Now, let $\varepsilon > 0$. Firstly, by $(\mathbf{S_{a,p,q}})$, $V^{p-1}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \leq CV^{a+2(p-1)}$. Since $a + 2(p-1) < a + p - 1$ when $p < 1$, there exists $C_\varepsilon > 0$ such that $V^{p-1}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \leq \varepsilon V^{a+p-1} + C_\varepsilon$. Secondly, since $\rho_n \to +\infty$, $\delta_n \to 0$. Thus, there exists $n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq n_{2,\varepsilon}$, $C\delta_n V^{p+a-1} \leq \varepsilon V^{p+a-1}$. The combination of these two arguments yields (3.38).
iii) Third term: For every $\varepsilon > 0$, there exists $C_\varepsilon^2 > 0$ and $n_{3,\varepsilon}$ such that for all $n \geq n_{3,\varepsilon}$

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_{n+1,2})/\mathcal{F}_n\} \leq \gamma_{n+1}\|\kappa(\bar{X}_n)\|^{2p}\Big(pc_p\int|y|^{2p}\pi(dy)1_{\{q\leq p\}} + \varepsilon V^{p+a-1}(\bar{X}_n) + C_\varepsilon^2\Big). \tag{3.39}$$

Since U_{n+1} and $\bar{Z}_{n+1}$ are independent, we have

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_{n+1,2})/\mathcal{F}_n\} = \mathbb{E}\{G(\bar{X}_{n+1,2}, \bar{X}_n)/\mathcal{F}_n\}$$

where $G(z,x) = \mathbb{E}\{V^p(z + \kappa(x)Z_t) - V^p(z)\}$. Since $Z_t = Z_t^\infty$ (resp $Z_t = Z_t^0$) in Case 1 (resp. in Case 2), (3.39) follows from Lemma 3.14.

We can now prove the proposition in Cases 1 and 2: by summing (3.37), (3.38) and (3.39), we obtain: for every $\varepsilon > 0$, there exists $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq n_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} &\leq V^p(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1}(\varepsilon V^{p+a-1}(\bar{X}_n) + C_\varepsilon)\\ &\quad + p\gamma_{n+1}\Big(V^{p-1}\langle\nabla V, b\rangle(\bar{X}_n) + 1_{q\leq p}c_p\int|y|^{2p}\pi(dy)\|\kappa(\bar{X}_n)\|^{2p}\Big).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Then, we recognize the left-hand side of $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.2 in the term (3.40). Therefore, by $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.2, we obtain

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} \leq V^p(\bar{X}_n) + p\gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\Big(\beta - \alpha V^a(\bar{X}_n)\Big) + \gamma_{n+1}(\varepsilon V^{p+a-1}(\bar{X}_n) + C_\varepsilon). \tag{3.41}$$

Taking $\epsilon = \alpha/2$ yields the result in Cases 1 and 2.
In Cases 3, by following the same process as above and using Lemma 3.14, we obtain that for every $\varepsilon > 0$, there exists $h_\epsilon \in (0,\infty)$ and $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq n_\varepsilon$,

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} \leq V^p(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1}(\varepsilon V^{p+a-1}(\bar{X}_n) + C_\varepsilon) \\ + p\gamma_{n+1}\Big(V^{p-1}\langle\nabla V, b^{h_\epsilon}\rangle(\bar{X}_n) + 1_{q\leq p}c_p\int |y|^{2p}\pi(dy)\|\kappa(\bar{X}_n)\|^{2p}\Big). \quad (3.42)$$

In this case, the term which appears in (3.42) is not exactly the left-hand side of $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.2. However, one observes that $\langle\nabla V, b^{h_\varepsilon}\rangle = \langle\nabla V, b\rangle + \Phi_{h_\varepsilon}$ where $\Phi_h(x) = \langle\nabla V(x), \kappa(x)\int_{\{|y|\in(h_\varepsilon,h)\}} y\pi(dy)\rangle$. Then, by $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.1, one checks that for every $\varepsilon > 0$, there exists $C_\varepsilon > 0$ such that $V^{p-1}|\phi_h| \leq \varepsilon V^{p+a-1} + C_\varepsilon$. This means that (3.42) is the sum of the left-hand side of $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.2 and of a negligible term and the result follows.

Case $\mathbf{p \geq 1}$. Thanks to Taylor's formula, we derive from the assumptions on the noise terms that

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} = V^p(\bar{X}_n) + p\gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\langle\nabla V, b\rangle(\bar{X}_n) + \mathbb{E}\{D^2(V^p)(\xi_{n+1})\Delta\bar{X}_{n+1}^{\otimes 2}/\mathcal{F}_n\}$$

where $\xi_{n+1} \in [\bar{X}_n, \bar{X}_{n+1}]$. From Lemma 3.25, we have

$$D^2(V^p)(\xi_{n+1})\Delta\bar{X}_{n+1}^{\otimes 2} \leq p\lambda_p 2^{(p-1)\vee 1-1}\left(V^{p-1}(\bar{X}_n)|\Delta\bar{X}_{n+1}|^2 + [\sqrt{V}]_1^{2(p-1)}|\Delta\bar{X}_{n+1}|^{2p}1_{p>1}\right).$$

Then, by using Lemma 3.11.(iii), independence properties and $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.1, we show that

$$\mathbb{E}\{V^{p-1}(\bar{X}_n)|\Delta\bar{X}_{n+1}|^2/\mathcal{F}_n\} \leq \gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\big(\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(\bar{X}_n) + \int |y|^2\pi(dy)\|\kappa(\bar{X}_n)\|^2\big) \quad (3.43) \\ + C\gamma_{n+1}^2 V^{p+a-1}(\bar{X}_n).$$

Next, by Inequality (3.23), we have

$$|\Delta\bar{X}_{n+1}|^{2p} \leq \|\kappa(\bar{X}_n)\|^{2p}.|\bar{Z}_{n+1}|^{2p} \\ + C_p\Big(\|\kappa(\bar{X}_n)\|^{2p-1}|\bar{Z}_{n+1}|^{2p-1}\sqrt{\gamma_{n+1}}V^{\frac{a}{2}}(\bar{X}_n)(1+|U_{n+1}|) + \gamma_{n+1}^p V^{ap}(\bar{X}_n)(1+|U_{n+1}|^{2p})\Big).$$

Then, we derive from Lemma 3.11.(iii) and $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.1

$$\mathbb{E}\{|\Delta\bar{X}_{n+1}|^{2p}/\mathcal{F}_n\} \leq \gamma_{n+1}\int |y|^{2p}\pi(dy)\|\kappa(\bar{X}_n)\|^{2p} + \gamma_{n+1}\big(\varepsilon + C_\varepsilon\gamma_{n+1}^{\frac{1}{2}\wedge(p-1)}\big)V^{ap}(\bar{X}_n). \quad (3.44)$$

Thus, adding up (3.43) and (3.44) yields a control $\mathbb{E}\{D^2(V^p)(\xi_{n+1})\Delta\bar{X}_{n+1}^{\otimes 2}/\mathcal{F}_n\}$. By (**??**), it follows that

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} \leq V^p(\bar{X}_n) + C\gamma_{n+1}\big(\varepsilon + C_\varepsilon\gamma_{n+1}^{(p-\frac{1}{2})\wedge 1}\big)V^{a+p-1}(\bar{X}_n) \\ + p\gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\Big(\langle\nabla V, b\rangle(\bar{X}_n) + \phi_{p,q}(\sigma,\kappa,\pi,V)(\bar{X}_n)\Big)$$

where $\phi_{p,q}(\sigma,\kappa,\pi,V)$ is defined in Assumption $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.2. Then, the result follows by applying $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.2 and taking ε sufficiently small.

3.3.3 Consequences of Proposition 3.10

In Proposition 3.10, we established $(\mathbf{R_{a,p}})$. According to Lemma 3.9, it suffices now to prove $(\mathbf{C_{p,s}})$. This property is established in Corollary 3.17 and is a consequence of Proposition 3.10 (under additional assumptions on (γ_n) and (η_n) when $s < 2$). More precisely, we first show in Lemma 3.15 that a supermartingale property can be derived from $(\mathbf{R_{a,p}})$ and that this property provides an L^p-control of the sequence $(V(\bar{X}_n))$ (see (3.45)). Secondly, we show (in Corollary 3.17) that this L^p-control implies $(\mathbf{C_{p,s}})$.

Lemma 3.15 *Let $a \in (0,1]$ and $p > 0$. Assume $(\mathbf{H_p^1})$ and $(\mathbf{R_{a,p}})$. Let $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a nonincreasing sequence of nonnegative numbers such that $\sum_{n\geq 1}\theta_n\gamma_n < \infty$. Then, there exists $n_0 \geq 0$, $\hat{\alpha} > 0$ and $\hat{\beta} > 0$ such that $(S_n)_{n\geq n_0}$ defined by*

$$S_n = \theta_n V^p(\bar{X}_n) + \hat{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\gamma_k V^{p+a-1}(\bar{X}_{k-1}) + \hat{\beta}\sum_{k>n}\theta_k\gamma_k$$

is a nonnegative L^1-supermartingale. In particular,

$$\sum_{n\geq 1}\theta_n\gamma_n\mathbb{E}\{V^{p+a-1}(\bar{X}_{n-1})\} < +\infty \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} \overset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{\theta_n}). \tag{3.45}$$

Remark 3.16 In the particular case $a = 1$, one can ckeck that we have a better L^p-control. Indeed, in this case, $(\mathbf{R_{a,p}})$ implies that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})\} \leq \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} + \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\}$$

where $\tilde{\alpha}$ is a positive number. Then, a simple induction shows that $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} < +\infty$.

Proof: Since b, σ and κ have sublinear growth and $\bar{Z}_n \in L^{2p}$ for every $n \geq 1$, we can check by induction that for every $n \geq 0$, $V^p(\bar{X}_n)$ is integrable. Denote by $(\Delta M_n)_{n\geq 1}$ the sequence of martingale increments defined by: $\Delta M_n = V^p(\bar{X}_n) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)/\mathcal{F}_{n-1}\}$. By $(\mathbf{R_{a,p}})$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}V^p(\bar{X}_{n+1}) &\leq \theta_{n+1}(V^p(\bar{X}_{n+1}) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} + \theta_{n+1}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\}\\ &\leq \theta_{n+1}\Delta M_{n+1} + \theta_{n+1}\left(V^p(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1}pV^{p-1}(\bar{X}_n)(\beta' - \alpha' V^a(\bar{X}_n))\right).\end{aligned}$$

By the same argument as in the proof of Lemma 3.9, one can find $\hat{\alpha} > 0$ and $\hat{\beta} > 0$ such that $V^{p-1}(\beta' - \alpha' V^a) \leq \hat{\beta} - \hat{\alpha}V^{p+a-1}$. Since (θ_n) is nonincreasing, we deduce that

$$\theta_{n+1}(V^p(\bar{X}_{n+1}) + \hat{\alpha}\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n)) \leq \theta_n V^p(\bar{X}_n) + \theta_{n+1}\Delta M_{n+1} + \theta_{n+1}\gamma_{n+1}\hat{\beta}.$$

Adding "$\alpha\sum_{k=1}^{n}\theta_k\gamma_k V^{p+a-1}(\bar{X}_{k-1}) + \beta\sum_{k>n+1}\theta_k\gamma_k$" to both sides of the inequality yields

$$S_{n+1} \leq S_n + \theta_{n+1}\Delta M_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\{S_{n+1}/\mathcal{F}_n\} \leq S_n \qquad \forall n \geq n_0.$$

Since $S_{n_0} \in L^1$, it follows that $(S_n)_{n\geq n_0}$ is a nonnegative supermartingale and then, that $\sup\mathbb{E}\{S_n\} < +\infty$. The result is obvious. □

Corollary 3.17 *Let* $a \in (0,1]$, $p > 0$ *and* $q \in [0,1]$. *Assume* $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ *and* $(\mathbf{S_{a,p,q}})$. *If* $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$ *and* $(\eta_n/\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is nonincreasing,*

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{\eta_n}{H_n\gamma_n})^2\mathbb{E}\{|V^{\frac{p}{2}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{2}}(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^2\} < +\infty. \tag{3.46}$$

Furthermore, if conditions (3.10) *and* (3.12) *are satisfied for* $s \in (1,2)$,

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{\eta_n}{H_n\gamma_n})^{f_{a,p}(s)}\mathbb{E}\{|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^{f_{a,p}(s)}\} < +\infty. \tag{3.47}$$

Proof: Let us begin the proof by two useful remarks. Firstly, (3.46) is a particular case of (3.47) since $f_{a,p}(2) = 2$ and (3.12) is always satisfied in this case. Indeed, as $(\eta_n/\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is nonincreasing, so is $(\frac{1}{\gamma_n}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^2)$ and,

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^2 \leq \frac{\eta_1}{\gamma_1}\sum_{n\geq 1}\frac{\eta_n}{H_n^2} \leq \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} < \infty. \tag{3.48}$$

Then, it suffices to prove (3.47). Secondly, by Lemma 3.15 applied with $\theta_n = \frac{1}{\gamma_n}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^{f_{a,p}(s)}$

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^{f_{a,p}(s)}\mathbb{E}\{V^{p+a-1}(\bar{X}_{n-1})\} < +\infty. \tag{3.49}$$

(3.47) Hence, one checks that (5.24) holds as soon as

$$\mathbb{E}\{|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^{f_{a,p}(s)}\} \leq C\gamma_n^{\frac{f_{a,p}(s)}{2}}\mathbb{E}\{V^{p+a-1}(\bar{X}_{n-1})\} \tag{3.50}$$

Thus, we only need to prove (5.24). We inspect the $p/s \leq 1/2$ and $p/s > 1/2$ cases successively.

Case $\mathbf{p/s \leq 1/2}$. In this case , $f_{a,p}(s) = s$ and $V^{\frac{p}{s}}$ is a $2p/s$-Holder function(see Lemma 3.13). If $q/s \leq 1/2$, then $V^{\frac{p}{s}}$ is also a $2q/s$-Holder function. We have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^s/\mathcal{F}_{n-1}\} \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}\mathbb{E}\Big\{\big|\langle V^{\frac{p}{s}-1}\nabla V(\xi_n), \sqrt{\gamma_n}\sigma(\bar{X}_{n-1})U_n\rangle\big|^s/\mathcal{F}_{n-1}\Big\}\\ + C\Big(\mathbb{E}\{|\kappa(\bar{X}_{n-1})\bar{N}_n|^{2p}/\mathcal{F}_{n-1}\} + \mathbb{E}\{|\kappa(\bar{X}_{n-1})\bar{Y}_n|^{2q}/\mathcal{F}_{n-1}\}\Big)\end{aligned}$$

where $\xi_n \in [\bar{X}_{n,1}; \bar{X}_{n,2}]$. According to Lemma 3.11, we have under $(\mathbf{H_p^1})$ and $(\mathbf{H_q^2})$

$$\mathbb{E}\{|\bar{N}_n|^{2p}\} + \mathbb{E}\{|\bar{Y}_n|^{2q}\} = O(\gamma_n).$$

Hence, since $V^{\frac{p}{s}-1}\nabla V$ is bounded, it follows from $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.1 that

$$\mathbb{E}\{|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_n))|^s/\mathcal{F}_{n-1}\} \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}V^{a+p-1}(\bar{X}_{n-1}) \tag{3.51}$$

We recognize (5.24). If $q/s > 1/2$, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_n))|^s/\mathcal{F}_{n-1}\} \leq C\mathbb{E}\{|\kappa(\bar{X}_{n-1})\bar{N}_n|^{2p}/\mathcal{F}_{n-1}\}\\ + C\gamma_n^{\frac{s}{2}}\mathbb{E}\Big\{\big|\langle V^{\frac{p}{s}-1}\nabla V(\xi_n), \sqrt{\gamma_n}\sigma(\bar{X}_{n-1})U_n + \kappa(\bar{X}_{n-1})\bar{Y}_n\rangle\big|^s/\mathcal{F}_{n-1}\Big\}\end{aligned}$$

where $\xi_n \in [\bar{X}_{n,1}; \bar{X}_{n,1} + \sqrt{\gamma_n}\sigma(\bar{X}_{n-1})U_n + \kappa(\bar{X}_{n-1})\bar{Y}_n]$. Since $\mathbb{E}\{|\bar{Y}_n|^2\} = O(\gamma_n)$, we deduce from Jensen's inequality that $\mathbb{E}\{|\bar{Y}_n|^s\} = O(\gamma_n^{\frac{s}{2}})$. Moreover, by $(\mathbf{S_{a,p,q}}).1$, $\|\kappa\|^s \leq CV^{p+a-1}$ because $s \leq 2q$. Then,

$$\mathbb{E}\{|\kappa(\bar{X}_{n-1})\bar{Y}_n|^s/\mathcal{F}_n\} \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}\|\kappa(\bar{X}_{n-1})\|^s \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}V^{a+p-1}(\bar{X}_{n-1})$$

and (5.24) easily follows.

Case $\mathbf{p/s > 1/2}$. Applying the following inequality,

$$\forall u, v \geq 0, \quad \forall \alpha \geq 1, \qquad |u^\alpha - v^\alpha| \leq C_\alpha \left(|u-v|u^{\alpha-1} + |u-v|^\alpha\right) \tag{3.52}$$

with $u = \sqrt{V(\bar{X}_n)}$, $v = \sqrt{V(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))}$ and $\alpha = (2p)/s$, we obtain

$$\begin{aligned}|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))| &\leq C|\sqrt{V}(\bar{X}_n) - \sqrt{V}(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|V^{\frac{p}{s}-\frac{1}{2}}(\bar{X}_{n-1}) \\ &\quad + C|\sqrt{V}(\bar{X}_n) - \sqrt{V}(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^{\frac{2p}{s}}(\bar{X}_{n-1}).\end{aligned}$$

We deduce from $(\mathbf{S_{a,p,q}}).1$ that

$$|\bar{X}_n - (\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))| \leq \begin{cases} CV^{\frac{a+p-1}{2p}}(\bar{X}_{n-1})\left(\sqrt{\gamma_n}|U_n| + |\bar{Z}_n|\right) & \text{if } p < 1, \\ CV^{\frac{a}{2}}(\bar{X}_{n-1})\left(\sqrt{\gamma_n}|U_n| + |\bar{Z}_n|\right) & \text{if } p \geq 1. \end{cases}$$

Since $\sqrt{V}$ is Lipschitz, one then checks that

$$|V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_n) - V^{\frac{p}{s}}(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))| \leq CV^r(\bar{X}_{n-1})\left(\sqrt{\gamma_n}|U_n| + |\bar{Z}_n| + \gamma_n^{\frac{p}{s}}|U_n|^{\frac{2p}{s}} + |\bar{Z}_n|^{\frac{2p}{s}}\right)$$

where

$$r = \begin{cases} (\frac{p}{s} + \frac{a-1}{2p}) \vee (\frac{a+p-1}{s}) & \text{if } p < 1, \\ (\frac{p}{s} + \frac{a-1}{2}) \vee \frac{ap}{s} & \text{if } p \geq 1. \end{cases}$$

Firstly, we derive from Lemma 3.11 that $\mathbb{E}\{|\bar{Z}_n|^\alpha\} = O(\gamma_n^{\frac{\alpha}{2}})$. Therefore, since $2p/s \geq 1/2$, we have

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sqrt{\gamma_n}|U_n| + |\bar{Z}_n| + \gamma_n^{\frac{p}{s}}|U_n|^{\frac{2p}{s}} + |\bar{Z}_n|^{\frac{2p}{s}}\right)^{f_{a,p}(s)}\right\} = O(\gamma_n^{\frac{f_{a,p}(s)}{2}}).$$

Secondly, one checks that $rf_{a,p}(s) \leq a + p - 1$. Therefore, Inequality (5.24) follows. □

3.4 Identification of the weak limits of $(\bar{\nu}_n(\omega, dx))_{n\geq 1}$

In this section, we show that every weak limiting distribution of $(\bar{\nu}_n(\omega, dx))_{n\geq 1}$ is invariant for $(X_t)_{t\geq 0}$. For this purpose, we will rely on the Echeverria-Weiss Theorem (see Theorem 2.10). This is a criterion for invariance based on the infinitesimal generator A of (X_t). A is given for every $\mathcal{C}^2$-function f with compact support by

$$Af(x) = \langle \nabla f, b^h\rangle(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(x) + \int \left(f(x + \kappa(x)y) - f(x) - \langle \nabla f(x), \kappa(x)y\rangle 1_{\{|y|\leq h\}}\right)\pi(dy). \tag{3.53}$$

By Corollary 2.12, a probability ν is invariant for the SDE (4.2) if for every $f \in \mathcal{C}^2_K(\mathbb{R}^d)$, $\nu(Af) = 0$ and if $\|\kappa(x)\| \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$ (and this condition can not be improved in general). Then, the main result of this section is the following proposition.

Proposition 3.18 *Let $a \in (0,1]$, $p > 0$ and $q \in [0,1]$. Assume $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$, $(\mathbf{S_{a,p,q}})$.1. Assume that $\|\kappa(x)\| \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$ and that $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ is nonincreasing. If moreover,*

$$\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(\|\kappa\|^{2q} + \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)) < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{k\geq 1} \frac{\eta_k^2}{H_k^2 \gamma_k} \mathbb{E}\{V^{a+p-1}(\bar{X}_{k-1})\} < +\infty, \tag{3.54}$$

then,

$$\forall f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d),\ a.s.,\ \int A f d\bar{\nu}_n \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3.55}$$

Consequently, a.s., every weak limiting distribution of $(\bar{\nu}_n(\omega, dx))_{n\geq 1}$ is invariant for the SDE (4.2).

Remark 3.19 The two assumptions in (3.54) hold under the assumptions of Theorem 3.4 (resp. Theorem 3.5). Indeed, since $\|\kappa\|^{2q} + \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \leq C V^{\frac{p}{s}+a-1}$ with $s = 2$ in Theorem 3.4 (resp. with s satisfying (3.10) in Theorem 3.5, the first is a consequence of Proposition 3.7. Likewise, the second is a consequence of Lemma 3.15 applied with $\theta_n = (\eta_n/(H_n\gamma_n))^2$ (see (3.48)).

3.4.1 Proof of Proposition 3.18

The proof of Proposition 3.18 is built in two successive steps that are represented by Propositions 3.20 and 3.22. In Proposition 3.20, we claim that, showing that $\bar{\nu}_n(Af) \to 0\ a.s$ is equivalent to showing that $1/H_n \sum_{k=1}^n (\eta_k/\gamma_k)\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1})/\mathcal{F}_{k-1}\} \to 0$. Then, in Proposition 3.22, we show that this last term does tend to 0.

Proposition 3.20 *Assume that the assumptions of Proposition 3.18 are fulfilled. Then, for every $f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^n \eta_k \Big(\frac{\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1})/\mathcal{F}_{k-1}\}}{\gamma_k} - Af(\bar{X}_{k-1}) \Big) = 0 \quad a.s. \tag{3.56}$$

We begin the proof by a technical lemma.

Lemma 3.21 *Let $\Phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^l$ be a continuous function with compact support, $\Psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$, a locally bounded function, $(h_1^\theta)_{\theta\in[0,1]}$ and $(h_2^\theta)_{\theta\in[0,1]}$ two families of Borel functions defined on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ with values in $\mathbb{R}^d$ satisfying the following assumptions:*
There exists $\delta_0 > 0$ such that

$$\inf_{\theta\in[0,1],\gamma\in[0,\delta_0]} \Big(|h_1^\theta|(x,\gamma) + |h_2^\theta|(x,\gamma) \Big) \xrightarrow{|x|\to+\infty} +\infty. \tag{3.57}$$

For every compact set K,

$$\sup_{x\in K, \theta\in[0,1]} |h_1^\theta(x,\gamma) - h_2^\theta(x,\gamma)| \xrightarrow{\gamma\to 0} 0. \tag{3.58}$$

Then, for every sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of $\mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^n \sup_{\theta\in[0,1]} \|\Phi(h_1^\theta(x_{k-1},\gamma_k)) - \Phi(h_2^\theta(x_{k-1},\gamma_k))\| \Psi(x_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Proof: Φ has a compact support therefore, we derive from (3.57) that there exists $M_{\delta_0} > 0$ such that for every $|x| > M_{\delta_0}$, $\gamma \leq \delta_0$ and $\theta \in [0,1]$,

$$\Phi(h_1^\theta(x,\gamma)) = \Phi(h_2^\theta(x,\gamma)) = 0.$$

Consider $\rho \mapsto w(\rho,\Phi) = \sup\{\eta > 0, \sup_{|x-y|\leq\eta} |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \rho\}$. As Φ is uniformly continuous, $w(\rho,\Phi) > 0$ for every $\rho > 0$. Thanks to (3.58), for every $\rho > 0$, there exists $\delta_\rho \leq \delta_0$ such that for every $\gamma \leq \delta_\rho$, $\theta \in [0,1]$,

$$\sup_{|x|\leq M_{\delta_0}} |h_1^\theta(x,\gamma) - h_2^\theta(x,\gamma)| \leq w(\rho,\Phi).$$

As $\gamma_k \xrightarrow{k\to+\infty} 0$, there exists $k_\rho \in \mathbb{N}$ such that $\gamma_k \leq \delta_\rho$ for $k \geq k_\rho$. Since $H_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, we deduce that

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{\theta\in[0,1]} \|\Phi(h_1^\theta(x_{k-1},\gamma_k)) - \Phi(h_2^\theta(x_{k-1},\gamma_k))\|\Psi(x_{k-1}) \leq \rho\overline{\Psi}_{\delta_0}$$

where $\overline{\Psi}_{\delta_0} := \sup\{|\Psi(x)|, |x| \leq M_{\delta_0}\} < +\infty$ since Ψ is locally bounded. The result follows. □

Proof of Proposition 3.20. We have to inspect successively the $q \in (1/2, 1]$ and $q \in [0, 1/2]$ cases.

Case $q \in (1/2, 1]$. First, we recall that the construction of the Euler scheme depends on h and on p and q. However, it is easy to check that it is possible to transform $\bar{Z}_n$ and b in order to obtain the Euler scheme adapted to Case 3 with $h = 1$. That is why in this proof, we adopt the notations of Case 3 with $h = 1$.
Let $f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$. Decompose the infinitesimal generator as the sum of three terms defined by

$$A_1 f(x) = \langle \nabla f, b\rangle(x), \qquad A_2 f(x) = \mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(x),$$
$$A_3 f(x) = \int (f(x + \kappa(x)y) - f(x) - \langle \nabla f(x), \kappa(x)y\rangle 1_{\{|y|\leq 1\}})\pi(dy).$$

Set $\bar{X}_{k,1} = \bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1})$, $\bar{X}_{k,2} = \bar{X}_{k,1} + \sqrt{\gamma_k}\sigma(\bar{X}_{k-1})U_k$ and $\bar{X}_{k,3} = \bar{X}_{k,2} + \sqrt{\gamma_k}\kappa(\bar{X}_{k-1})\bar{Z}_k$. We then part the proof into three steps:

Step 1. $\mathbb{E}\Big\{ \dfrac{f(\bar{X}_{k,1}) - f(\bar{X}_{k-1})}{\gamma_k} / \mathcal{F}_{k-1} \Big\} = A_1 f(\bar{X}_{k-1}) + R_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1})$
with $\dfrac{1}{H_n} \sum_1^n \eta_k R_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Step 2. $\mathbb{E}\Big\{ \dfrac{f(\bar{X}_{k,2}) - f(\bar{X}_{k,1})}{\gamma_k} / \mathcal{F}_{k-1} \Big\} = A_2 f(\bar{X}_{k-1}) + R_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1})$
with $\dfrac{1}{H_n} \sum_1^n \eta_k R_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Step 3. $\dfrac{1}{\gamma_k}\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k,2})/\mathcal{F}_{k-1}\} = A_3 f(\bar{X}_{k-1}) + R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1})$

with $\dfrac{1}{H_n}\displaystyle\sum_1^n \eta_k R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

The combination of the three steps yields Proposition 3.20. We refer to Proposition 4 of [LaPa03] for steps 1 and 2 and focus on the last step where the specificity of our jump Lévy setting appears. Since $\bar{X}_{k-1}$ is $\mathcal{F}_{k-1}$- measurable and $\bar{Z}_k$, U_k and $\mathcal{F}_{k-1}$ are independent, we have

$$\mathbb{E}\{f(\bar{X}_{k,2} + \kappa(\bar{X}_{k-1})\bar{Z}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\} = Q_{\gamma_k} f(\bar{X}_{k-1})$$
$$\text{with} \quad Q_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{f(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_\gamma)\}\mathbb{P}_{U_1}(du),$$

where $S(x,\gamma,u) = x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma}\sigma(x)u$. Set $V_t = S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_t$. By applying Ito's formula to $(f(V_t))_{t\geq 0}$, we obtain

$$f(V_t) = f(S(x,\gamma,u)) + \int_0^t \langle \nabla f(V_{s^-}), \kappa(x)dY_s\rangle \tag{3.59}$$
$$+ \sum_{0<s\leq t} \tilde{H}^f\big(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{s^-}, x, \Delta Z_s\big) \quad \text{where,} \tag{3.60}$$
$$\tilde{H}^f(z,x,y) = f(z + \kappa(x)y) - f(z) - \langle \nabla f(z), \kappa(x)y\rangle 1_{\{|y|\leq 1\}}. \tag{3.61}$$

The process $(\int_0^t \langle \nabla f(V_{s^-}), \kappa(x)dY_s\rangle)$ is a true martingale since ∇f is bounded. The compensation formula and a change of variable yield

$$\mathbb{E}\{f(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_\gamma)\} = \mathbb{E}\{f(V_\gamma)\}$$
$$= f(S(x,\gamma,u)) + \gamma\mathbb{E}\Big\{\int_0^1 dv \int \pi(dy)\tilde{H}^f(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{v\gamma}, x, y)\Big\}.$$

Since $A_3 f(x) = \int \pi(dy)\tilde{H}^f(x,x,y) = \mathbb{E}\Big\{\int_0^1 dv \int \pi(dy)\tilde{H}^f(x,x,y)\Big\}$, it follows from the previous inequality that

$$\frac{1}{\gamma_k}\mathbb{E}\big\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k,2})/\mathcal{F}_{k-1}\big\} = A_3 f(\bar{X}_{k-1}) + R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1})$$
$$\text{where,} \quad R_3(\gamma,x) = \int \mathbb{E}\Big\{\int_0^1 dv \int \pi(dy)\Delta\tilde{H}^f(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{v\gamma}, x, x, y)\Big\}\mathbb{P}_{U_1}(du)$$

with $\Delta\tilde{H}^f\big(z_1,z_2,x,y\big) = \tilde{H}^f(z_1,x,y) - \tilde{H}^f(z_2,x,y)$. We upper-bound R_3 by two terms: $R_{3,1}$ and $R_{3,2}$ that are associated to the small and big jumps components of (Z_t), namely

$$R_{3,1}(\gamma,x) = \int\int_0^1 dv \int_{\{|y|\leq 1\}} \pi(dy)\mathbb{E}\Big|\Delta\tilde{H}^f\big(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{v\gamma}, x, x, y\big)\Big|\mathbb{P}_{U_1}(du),$$
$$R_{3,2}(\gamma,x) = \int\int_0^1 dv \int_{\{|y|>1\}} \pi(dy)\mathbb{E}\Big|\Delta\tilde{H}^f\big(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{v\gamma}, x, x, y\big)\Big|\mathbb{P}_{U_1}(du).$$

We study successively $R_{3,1}$ and $R_{3,2}$. From Taylor's formula, we have for every y such that $|y| \leq 1$

$$\left|\Delta\tilde{H}^f\big(S(x,\gamma,u)+\kappa(x)Z_{v\gamma},x,x,y\big)\right| \leq \frac{1}{2}R(Z,\gamma,x,u,v,y)|\kappa(x)y|^2,$$
$$\text{where}\quad R(Z,\gamma,x,u,v,y) = \sup_{\theta\in[0,1]}\|D^2f\big(S(x,\gamma,u)+\kappa(x)(Z_{v\gamma}+\theta y)\big) - D^2f(x+\theta\kappa(x)y)\|.$$

By setting $\Phi = D^2f$, $\Psi(x) = \|\kappa(x)\|.|y|^2$ and

$$h_1^\theta(x,\gamma) = S(x,\gamma,u)+\kappa(x)(Z_{v\gamma}+\theta y), \quad h_2^\theta(x,\gamma) = x+\theta\kappa(x)y,$$

we show that the assumptions of Lemma 3.21 are *a.s.* fulfilled for every *fixed* u, v and y. First, since $\kappa(x) \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$, there exists a continuous function ε such that $\kappa(x) = |x|\varepsilon(x)$ and $\varepsilon(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$. Therefore, as b and σ have sublinear growth, there are some positive real constants C_1 and C_2 such that

$$\begin{cases} |S(x,\gamma,u)+\kappa(x)(Z_{v\gamma}+\theta y)| \geq |x|\big(1-\gamma C_1-(|Z_{v\gamma}|+|y|)|\varepsilon(x)|\big)-C_2 \\ \\ |x+\theta\kappa(x)y| \geq |x|\big(1-|\varepsilon(x)|.|y|\big). \end{cases}$$

Let δ_0 be a positive number such that $1-\delta_0C_1 > \rho > 0$. Since (Z_t) is locally bounded (as a càdlàg process) and $\varepsilon(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$, there *a.s.* exists $M > 0$ such that for every x such that $|x| > M$, $(|Z_{v\gamma}|+|y|)|\varepsilon(x)| \leq \rho/2$. It follows that for every $\gamma \leq \delta_0$ and $\theta \in [0,1]$, *a.s.*,

$$\inf_{\theta\in[0,1],\gamma\in[0,\delta_0]}\Big(|h_1^\theta|(x,\gamma)+|h_2^\theta|(x,\gamma)\Big) \xrightarrow{|x|\to\infty} +\infty. \tag{3.62}$$

Now, let K be a compact set of $\mathbb{R}^d$. We have

$$\sup_{x\in K,\theta\in[0,1]}|h_1^\theta(x,\gamma)-h_2^\theta(x)| \leq \sup_{x\in K}\big(|b|(x)+\|\sigma(x)\|+\|\kappa\|(x)\big)(\gamma+\sqrt{\gamma}|u|+|Z_{v\gamma}|) \xrightarrow{\gamma\to0} 0 \quad a.s. \tag{3.63}$$

because b, σ, κ are locally bounded and $\lim_{t\to0}Z_t = 0$ *a.s.* Thus, by Lemma 3.21, for any sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of $\mathbb{R}^d$, for every $(u,v,y) \in \mathbb{R}^d\times[0,1]\times B_d(0,1)$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\Delta\tilde{H}^f(S(x_{k-1},\gamma_k,u)+\kappa(x_{k-1})Z_{v\gamma_k},x_{k-1},x_{k-1},y) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad a.s. \tag{3.64}$$

Now, since ∇f and D^2f are bounded, we derive from Taylor's formula that for every z_1, $z_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$|\tilde{H}^f(z_2,x,y)-\tilde{H}^f(z_1,x,y)|1_{\{|y|\leq1\}} \leq \begin{cases} 2\|\nabla f\|_\infty\|\kappa(x)\|.|y| \\ 2\|D^2f\|_\infty\|\kappa(x)\|^2|y|^2. \end{cases}$$

Then, for every $q \in (1/2,1]$,

$$\left|\Delta\tilde{H}^f\big(S(x,\gamma,u)+\kappa(x)Z_{v\gamma},x,x,y\big)\right|1_{\{|y|\leq1\}} \leq C\|\kappa(x)\|^{2q}|y|^{2q} \tag{3.65}$$

where $C = 2\max(\|\nabla f\|_\infty, \|D^2 f\|_\infty)$. Therefore, by Assumption $(\mathbf{H_q^2})$, we finally derive from (3.64), (3.65) and from the Lebesgue dominated convergence Theorem that

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k R_{3,1}(\gamma_k, x_{k-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ if } \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\|\kappa(x_{k-1})\|^{2q} < \infty. \tag{3.66}$$

We apply this result to $(x_k) = (\bar{X}_k)$. By (3.54), $\sup_{n\in\mathbb{N}}\bar{\nu}_n(\|\kappa\|^{2q}) < \infty$ $a.s.$ Hence, it follows that $\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k R_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $a.s.$
Now, let us focus on $R_{3,2}$. Set $\Delta f(z_1, z_2) = f(z_1) - f(z_2)$. Then,

$$R_{3,2}(\gamma, x) = \int \mathbb{E}\Big\{\int_0^1 dv \int_{\{|y|>1\}} \pi(dy)\Delta f\Big(x, S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{v\gamma}\Big)\Big\}\mathbb{P}_{U_1}(du)$$
$$+ \int \mathbb{E}\Big\{\int_0^1 dv \int_{\{|y|>1\}} \pi(dy)\Delta f\Big(S(x,\gamma,u) + \kappa(x)(Z_{v\gamma}+y), x + \kappa(x)y\Big)\Big\}\mathbb{P}_{U_1}(du).$$

One proceeds as before. By using Lemma 3.21, one begins by showing that for any sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, for every $(u, v, y) \in [0,1]\times\mathbb{R}^d \times B_d(0,1)^c$, $a.s.$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Delta f\Big(x_{k-1}, S(x_{k-1},\gamma_k,u) + \kappa(x_{k-1})Z_{u\gamma_k}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{and} \tag{3.67}$$
$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Delta f\Big(S(x_{k-1},\gamma_k,u) + \kappa(x_{k-1})(Z_{v\gamma_k}+y), x_{k-1} + \kappa(x_{k-1})y\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

By the dominated convergence Theorem (which can be applied because $\pi(|y| > 1) < \infty$ and f is bounded), we deduce that for any sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k R_{3,2}(\gamma_k, x_{k-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad a.s.$$

This completes the proof of Step 3 when $q \in (1, 2]$.
Case $\mathbf{q \leq 1/2}$. The reader can check that the assumption $q \in (1/2, 1]$ is used only once: when we want to apply the dominated convergence theorem for $R_{3,1}$ (see (3.65)). In order to overcome this problem, the idea is to decompose the infinitesimal generator in a slightly different way:

$$A_1 f(x) = \langle\nabla f, b^0\rangle(x), \qquad A_2 f(x) = \mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f\sigma)(x),$$
$$A_3 f(x) = \int (f(x+\kappa(x)y) - f(x))\pi(dy).$$

Note that this decomposition is only possible when $q \leq 1/2$. That means that with the notations (3.36), we decompose $\Delta\bar{X}_k$ with $h = 0$ and inspect the three induced steps. We do not go into further details since the proof is similar to the case $q > 1/2$.

Proposition 3.22 *Assume that the assumptions of Proposition 3.18 are fulfilled. Then,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1})/\mathcal{F}_{k-1}\} = 0 \quad a.s.$$

Proof: We do not detail the proof of this proposition which is an adaptation of Proposition 3 in [LaPa03]. □

3.5 Proof of the main theorems for Schemes (P) and (C)

The aim of this section is to give a general idea of the proof for Schemes (P) and (C) and to overcome the main difficulties induced by the approximation of the jump component. For Scheme (E), main theorems have been proved in two successive steps. First, we focused on tightness results (Proposition 3.7) and then proved that every weak limiting distribution is invariant for $(X_t)_{t\geq 0}$ (Proposition 3.18). We follow the same process for Schemes (P) and (C). We will successively explain for both schemes why Proposition 3.7 and Proposition 3.18 remain valid.

3.5.1 Almost sure tightness of $\bar{\nu}_n^P(\omega, dx)$ and $\bar{\nu}_n^C(\omega, dx)$

The tightness result for Schemes (P) and (C) is strictly identical to Proposition 3.7 (In particular, Assumption (3.8) is not necessary for tightness). Looking carefully into the proof of this theorem for Scheme (E) shows that the properties of jumps that we use, are: control of the moment of the jump components(Lemma 3.11) which is fundamental for Proposition 3.10, and independence between $(\bar{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\bar{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. We show in Lemma 3.23 below that the controls of Lemma 3.11 hold true for the moments of the jump components of Schemes (P) and (C). Then, since Scheme (P) satisfies the independence properties, Proposition 3.7 follows in this case. In Scheme (C), $(\bar{Y}_n^C)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\bar{N}_n^C)_{n\in\mathbb{N}}$ are no longer independent. It raises several technical difficulties in the proof of Proposition 3.10 in case $p < 1$ but the process of the proof is the same. So, we only state a variant of Lemma 3.11.

Lemma 3.23 *Let T_0 be a positive number and $T^n = \inf\{s > 0, |\Delta Z_{t,n}| > 0\}$.*
(i) Let $p > 0$ such that $\int_{|y|>h} \pi(dy)|y|^{2p} < +\infty$. Then, for any $t \leq T_0$,

$$\mathbb{E}\{|N^h_{t\wedge T^n}|^{2p}\} \leq t \int_{|y|>h} |y|^{2p}\pi(dy) \quad \text{if} \quad p > 0.$$

(ii) Let τ be an $(\mathcal{F}_t)$-stopping time and $q \in [0,1]$ such that $\int_{|y|\leq h} |y|^{2q}\pi(dy) < +\infty$. Set $Y^h_{t,n} = \sum_{0<s\leq t} \Delta Y^h_s 1_{\{\Delta Y^h_s \in D^h_n\}} - t\int_{D^h_n} y\pi(dy)$ where $D^h_n = \{y, |y| \in (u_n, h]\}$. Then, for any $t \leq T_0$,

$$\mathbb{E}\{|Y^h_{t\wedge\tau,n} + (t\wedge\tau)\int_{|y|\leq h} |y|^{2q}\pi(dy)\} \leq t\int_{|y|\leq h} |y|^{2q}\pi(dy) \quad \text{if} \quad q \leq 1/2$$

$$\mathbb{E}\{|Y^h_{t\wedge\tau,n}|^{2q}\} \leq C_q t\int_{|y|\leq h} |y|^{2q}\pi(dy) + C_{h,T_0,q}t^2 \qquad \text{if } 1/2 < q \in (1/2, 1).$$

(iii) Let $p \geq 1$ such that $\int \pi(dy)|y|^{2p} < +\infty$. For every $\varepsilon > 0$, there exists $C_\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for every $t \geq T_0$ and $n \geq n_0$,

$$\mathbb{E}\{|Z_{t,n}|^{2p}\} \leq t\Big(\int |y|^{2p}\pi(dy) + \varepsilon\Big) + C_\varepsilon t^{p\wedge 2} \quad \text{and,}$$

$$\mathbb{E}\{|Z_{t\wedge T^n,n}|^{2p}\} \leq t\Big(\int |y|^{2p}\pi(dy) + \varepsilon\Big) + C_\varepsilon t^{p\wedge 2}.$$

Proof: The proof is left to the reader. □

Remark 3.24 In *(iii)*, the control is only valid for n sufficiently large but that does not make any problem since $(\mathbf{R_{a,p}})$ just needs to be valid for sufficiently large n.

3.5.2 Identification of the limit of $(\bar{\nu}_n^P)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\bar{\nu}_n^C)_{n\in\mathbb{N}}$

The theorem which is obtained for $(\bar{\nu}_n^P)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\bar{\nu}_n^C)_{n\in\mathbb{N}}$ is strictly identical to Proposition 3.18 under the additional condition (3.8) for Scheme (C). We recall that the proof of Proposition 3.18 is based on two steps: Propositions 3.20 and 3.22. Proposition 3.22 is still valid without additional difficulties. However, the proof of the analogous result to Proposition 3.20 raises some new difficulties. Denote by $A^{k,P}$ and $A^{k,C}$ the operators on $\mathcal{C}_2^K(\mathbb{R}^d)$ with values in $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ defined by

$$A^{k,P}f(x) = \langle \nabla f, b\rangle(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(x) + \int_{\{|y|\geq u_k\}} \tilde{H}^f(x,x,y)\pi(dy)$$
$$A^{k,C}f(x) = A^{k,P}f(x) - (1-\alpha_k(\gamma_k))\int_{\{|y|\geq u_k\}} \tilde{H}^f(x,x,y)\pi(dy).$$

where $\alpha_k(t) = \frac{1-e^{-\pi(|y|>u_k)t}}{\pi(|y|>u_k)t}$. "$Af - A^{k,P}f$" and "$Af - A^{k,C}f$" can be viewed as the principal part or the weak error induced by the approximation in Schemes (P) and (C) ($A^{k,P}$ is the infinitesimal generator of (X_t^k) where (X_t^k) is solution to the SDE (4.2) driven by (Z_t^k)). Thus, one may expect that this error be negligible in the sense of our problem. This is the aim of Lemma 3.25.

Lemma 3.25 *Assume* $(\mathbf{H_q^2})$. *Let* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *be a sequence such that*

$$\sup_{n\geq 1}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\|\kappa\|^{2q}(x_{k-1}) < \infty. \tag{3.68}$$

Then, for every function $f\in\mathcal{C}_2^K(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\Big(Af(x_{k-1}) - A^{k,P}f(x_{k-1})\Big) = 0$$
$$\text{and if } \pi(D_n)\gamma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\Big(Af(x_{k-1}) - A^{k,C}f(x_{k-1})\Big) = 0.$$

Proof: Note that $A^{k,P}f(x) - Af(x) = \int_{\{|y|<u_k\}}\tilde{H}^f(x,x,y)\pi(dy)$. When $q\geq 1/2$, we deduce from Taylor's formula and the boundedness of ∇f and $D^2 f$ that there exists $C_q>0$ such that

$$|\tilde{H}^f(x,x,y)|1_{\{|y|\leq u_k\}} \leq C_q\|\kappa(x)\|^{2q}|y|^{2q}1_{\{|y|\leq u_k\}}.$$

When $q\leq 1/2$, since f is a $2q$-Holder function,

$$|\tilde{H}^f(x,x,y)|1_{\{|y|\leq u_k\}} \leq [f]_{2q}\|\kappa(x)\|^{2q}|y|^{2q}1_{\{|y|\leq u_k\}} + \sup_{x\in suppf}|\nabla f(x)|.\|\kappa(x)\|.|y|1_{\{|y|\leq u_k\}}.$$

By setting $v_{k,q} = \int_{\{|y|\leq u_k\}}|y|^{2q}\pi(dy)$, we have

$$|Af(x_{k-1}) - A^{k,P}f(x_{k-1})| \leq \begin{cases} C\big(v_{k,q}\|\kappa(x_{k-1})\|^{2q} + v_{k,1}\big) & \text{if } q\leq 1/2 \\ Cv_{k,q}\|\kappa(x_{k-1})\|^{2q} & \text{if } q\geq 1/2. \end{cases}$$

Since $v_{k,\alpha} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ for every $\alpha \geq q$ under assumption $(\mathbf{H_q^2})$, the first result follows from (3.68). One deduces the second one by checking that

$$|A^{k,P}f(x) - A^{k,C}f(x)| \leq C\pi(D_k)\gamma_k(1 + \|\kappa(x)\|^{2q}).$$

□

Set

$$R_3^{P,k}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P) = \frac{\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k^P) - f(\bar{X}_{k-1}^P)/\mathcal{F}_{k-1}^P\}}{\gamma_k} - A^{k,P}f(\bar{X}_{k-1}^P),$$
$$R_3^{C,k}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^C) = \frac{\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k^C) - f(\bar{X}_{k-1}^C)/\mathcal{F}_{k-1}^C\}}{\gamma_k} - A^{k,C}f(\bar{X}_{k-1}^C).$$

The rest of the proof then amounts to proving that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k R_3^{P,k}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k R_3^{C,k}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^C) = 0.$$

We want to explain why these assertions are true. Here, we only treat Case $q \in (1/2, 1)$ and adopt the notations of Case 3 with $h = 1$. First, one can check that, with the notations of the proof of Proposition 3.20, $R_3^{P,k}$ can be upper-bounded by $R_{3,1}^{P,k} + R_{3,2}^{P,k}$ where $R_{3,1}^{P,k}$ and $R_{3,2}^{P,k}$ are defined by

$$R_{3,1}^{P,k}(\gamma, x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 dv \int_{u_k<|y|\leq 1} \pi(dy)\mathbb{E}\Big|\Delta\tilde{H}^f\Big((S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{v\gamma,k}), x, x, y\Big)\Big|\mathbb{P}_{U_1}(du),$$
$$R_{3,2}^{P,k}(\gamma, x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 dv \int_{|y|>1} \pi(dy)\mathbb{E}\Big|\Delta\tilde{H}^f\Big((S(x,\gamma,u) + \kappa(x)Z_{v\gamma,k}), x, x, y\Big)\Big|\mathbb{P}_{U_1}(du).$$

We focus on $R_{3,1}^{P,k}$. We use the same process as for $R_{3,1}$ but some arguments used for $R_{3,1}$ no longer work: the dependence on k induces some problems in (3.62) and (3.63) where an uniform control is needed for applying Lemma 3.21. Since $R_{3,1}^{P,k}$ only depends on the law of Z^k, an idea is to use the Skorokhod representation Theorem (see *e.g.* [RoWi87]) in order to replace $(Z_{.,k})$ by a sequence which is uniformly controllable *a.s.*:

Lemma 3.26 *There exist a sequence of càdlàg processes $(\tilde{Z}_{.,n})_{n\in\mathbb{N}}$ and a càdlàg process $\tilde{Z}$ such that $\tilde{Z}_{.,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z_{.,n}$, $\tilde{Z} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z$ and $\tilde{Z}_{.,n} \to \tilde{Z}$ a.s. for the Skorokhod topology. In particular,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{0\leq s\leq T}|\tilde{Z}_{s,n}| < +\infty \quad \forall T > 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{n\to+\infty,\gamma\to 0}\sup_{0\leq s\leq\gamma}|\tilde{Z}_{s,n}| = 0 \qquad a.s. \tag{3.69}$$

Proof: $(Z_{.,n})$ converges locally uniformly in L^2 toward Z, hence in distribution for the Skorokhod (Polish) topology. Thanks to the Skorokhod representation Theorem, there exists $(\tilde{Z}_{.,n})_{n\in\mathbb{N}}$ and $\tilde{Z}$ with $\tilde{Z}_{.,n} \stackrel{\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)}{=} Z_{.,n}$ and $\tilde{Z} \stackrel{\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)}{=} Z$ such that $\tilde{Z}_{.,n}$ tends a.s. towards $\tilde{Z}$ for Skorokhod topology. The assertion (3.69) easily follows from the continuity of $\alpha \mapsto \|\alpha\|_{\sup}$ and $\alpha \mapsto \alpha(0)$ for the Skorokhod topology. □

Then, by replacing $(Z_{.,k})$ with $(\tilde{Z}_{.,k})$, we obtain the following alternatives of (3.62) and (3.63): set

$$h_1^{\theta,k}(x,\gamma) = S(x,\gamma,u) + \kappa(x)(\tilde{Z}_{v\gamma,k} + \theta y), \quad \text{and} \quad h_2^{\theta,k}(x,\gamma) = x + \theta\kappa(x)y.$$

Assume that u, v, y et ω are fixed. Then, there exists $\delta_0 > 0$ such that for every $\gamma \leq \delta_0$, $\theta \in [0,1]$,

$$\inf_{k\geq 1} |h_1^{\theta,k}(x,\gamma)| \xrightarrow{|x|\to\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{k\geq 1} |h_2^{\theta,k}(x,\gamma)| \xrightarrow{|x|\to\infty} +\infty,$$

and for all compact set $K \subset \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x\in K,\theta\in[0,1]} |h_1^{\theta,k}(x,\gamma) - h_2^{\theta,k}(x,\gamma)| \xrightarrow{\gamma\to 0,k\to+\infty} 0 \quad a.s.$$

Then, by setting $\Phi = D^2 f$ and $\psi(x) = \|\kappa(x)\|.|y|^2$, the sequel of the proof is the same as for $R_{3,1}^{P,k}$ thanks to a variant of Lemma 3.21:

Lemme 3.27 *Let $\Phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^l$ be a continuous function with compact support, $\Psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^+$, a locally bounded function, $(h_1^{\theta,n})_{\theta\in[0,1],n\in\mathbb{N}}$ and $(h_2^{\theta,n})_{\theta\in[0,1],n\in\mathbb{N}}$ be families of functions on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ with values in $\mathbb{R}^d$ satisfying the two following assumptions:*
There exists $\delta_0 > 0$ such that

$$\inf_{n\geq 1,\theta\in[0,1],\gamma\in[0,\delta_0]} |h_1^{\theta,n}|(x,\gamma) \xrightarrow{|x|\to+\infty} +\infty \quad \text{and} \quad \inf_{n\geq 1,\theta\in[0,1],\gamma\in[0,\delta_0]} |h_2^{\theta,n}|(x,\gamma) \xrightarrow{|x|\to+\infty} +\infty.$$

For every compact set K,

$$\sup_{x\in K,\theta\in[0,1]} |h_1^{\theta,n}(x,\gamma) - h_2^{\theta,n}(x,\gamma)| \xrightarrow{\gamma\to 0,n\to+\infty} 0$$

Then, for every sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \sup_{\theta\in[0,1]} \|\Phi(h_1^{\theta,n}(x_{k-1},\gamma_k)) - \Phi(h_2^{\theta,n}(x_{k-1},\gamma_k))\|\Psi(x_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

The same idea works for $R_{3,2}^{P,k}$.
Finally, for Scheme (C), since $Z_{t,k} = 0$ on $[0, T^k)$, one can check that

$$R_3^{C,k}(\gamma,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{1\wedge\frac{T^k}{\gamma}} dv \int_{|y|>u_k} \pi(dy)\mathbb{E}\Big\{\Delta\tilde{H}^f\Big(S(x,\gamma,u),x,x,y\Big)\Big\}\mathbb{P}_{U_1}(du).$$

Then, this scheme does not induce any difficulties.

3.6 A theoretical application

The "classical" *a.s.* CLT due to Brosamler ([Bro88]) and Schatte ([Sch88]) is the following result. Let $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of i.i.d. random vectors with values in $\mathbb{R}^d$ such that $\mathbb{E}\, U_1 = 0$ and $\Sigma_{U_1} = I_d$. Then,

$$\mathbb{P} - a.s \qquad \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\delta_{\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k} U_i} \overset{(\mathbb{R}^d)}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0, I_d).$$

This result is naturally associated with the Central Limit Theorem which expresses the fact that every square-integrable random variable is in the domain of attraction of the normal law. When the square-integrability no longer holds, Berkes, Horvath and Khoshnevisan ([BHK98]) obtained an extension of this result associated with the non square-integrable attractive laws which are stable laws (with index $\alpha \in (0,2)$). We are going to show that we can obtain this extension as an application of Theorem 3.4.
Denote by $(Z_t^{\alpha,c})_{t\geq 0}$ a symmetrical one-dimensional α-stable process such that the characteristic function ϕ of $Z_1^{\alpha,c}$ satisfies $\phi(u) = e^{-\rho|u|^\alpha}$ where $\rho = 2c\int_0^{+\infty} y^{-\alpha}\sin y dy$. Consider a sequence of symmetrical i.i.d. r.v. $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that for $x > 0$,

$$\mathbb{P}(V_1 \geq x) = \frac{c}{x^\alpha} + \delta(x)(x^{-\alpha}(\ln x)^{-\gamma}) \quad \text{with } \gamma > 0 \text{ and } \delta(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0. \tag{3.70}$$

Under these conditions, $\frac{V_1+\ldots+V_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \overset{(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} \bar{Z}_1^{\alpha,c}$ (see [GnKo54]). We have the following result:

Theorem 3.28 *Let $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a positive sequence with infinite sum such that $(k\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is non-increasing and $\mu = \mathcal{L}(Z_1^{\alpha,c})$. Then, if $\gamma > \frac{1}{\alpha}$,*

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \delta_{\frac{V_1+\ldots+V_k}{k^{\frac{1}{\alpha}}}} \overset{(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} \mu \quad a.s. \qquad \text{In particular,} \quad \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\delta_{\frac{V_1+\ldots+V_k}{k^{\frac{1}{\alpha}}}} \overset{(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} \mu \quad a.s.$$

In order to prove this theorem, we first need an almost sure invariance principle due to Stout ([Sto79]).

Proposition 3.29 *Let $(V_n)_{n\geq 1}$ and $(\bar{Z}_n)_{n\geq 1}$ be sequences of i.i.d. random variables such that $\bar{Z}_1 \overset{\mathcal{L}}{=} Z_1^{\alpha,c}$ and V_1 is defined as above. Then, if $\gamma > \frac{1}{\alpha}$, there exists a probability space $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ and sequences $(\hat{V}_n)_{n\geq 1}$ and $(\hat{Z}_n)_{n\geq 1}$ with $\hat{V}_1 = V_1$ and $\hat{Z}_1 = \bar{Z}_1$ such that*

$$\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i - \sum_{i=1}^n \hat{V}_i \overset{n\to+\infty}{=} o(n^{\frac{1}{\alpha}}(\ln n)^{-\rho}) \quad \text{with} \quad 0 < \rho < \gamma - \frac{1}{\alpha}.$$

Proof of Theorem 3.28 : First, we assume that $V_1 = \bar{Z}_1 \overset{\mathcal{L}}{=} Z_1^{\alpha,c}$. Set

$$S_0 = 0 \qquad \text{and} \qquad S_n = \frac{\bar{Z}_1 + \ldots + \bar{Z}_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad \forall n \geq 1.$$

We observe that $S_{n+1} = S_n - \frac{1}{\alpha}\gamma_{n+1}S_n + \gamma_{n+1}^{\frac{1}{\alpha}}\bar{Z}_{n+1} + R_{n+1}$ with $\gamma_n = \frac{1}{n}$ and $R_{n+1} = O(\frac{1}{n^2}S_n)$. The idea of the proof is to compare $(\bar{Z}_n)_{n\geq 0}$ with the exact Euler Scheme (E) with initial value 0 associated with the SDE $(\mathbf{E}_{\alpha,\mathbf{c}})$ defined by $dX_t = -\frac{1}{\alpha}X_{t^-}dt + dZ_t^{\alpha,c}$. Since $(Z_t^{\alpha,c})_{t\geq 0}$ is a self-similar process with index $\frac{1}{\alpha}$, its Euler scheme can be written

$$\bar{X}_0 = 0 \qquad \text{and} \qquad \bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n - \frac{1}{\alpha}\gamma_{n+1}\bar{X}_n + \gamma_{n+1}^{\frac{1}{\alpha}}\bar{Z}_{n+1}.$$

Assumptions of Theorem 3.4 are clearly fulfilled with $a = 1$ for any $p \in (0, \alpha/2)$ and $q \in (\alpha/2, 1)$. Now, we know that $(\mathbf{E}_{\alpha,\mathbf{c}})$ admits a unique invariant distribution μ such that $\mu = \mathcal{L}(Z_1^{\alpha,c})$ (see

[Sat99], p. 188). Thus, by Theorem 3.4,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\delta_{\bar{X}_{k-1}} \overset{(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} \mu. \tag{3.71}$$

Then, consider $\Delta_n = S_n - \bar{X}_n$. We have $\Delta_0 = 0$ and $\Delta_{n+1} = (1 - \frac{1}{\alpha(n+1)})\Delta_n + R_{n+1}$. Setting $k_0 = \inf\{k \geq 0, k - \frac{1}{\alpha} > 0\}$, we deduce that $\Delta_n = \frac{\Delta_{k_0}}{c_n} + \frac{1}{c_n}\sum_{k=k_0+1}^{n} c_k R_k$ for every $n \geq k_0 + 1$ with $c_n = \prod_{k=k_0+1}^{n}(1 - \frac{1}{\alpha k})^{-1}$. We show that $\Delta_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ *a.s.* We observe that

$$c_n = \exp\Big(-\sum_{k=k_0+1}^{n}\ln(1-\frac{1}{\alpha k})\Big) = \exp\Big(\frac{1}{\alpha}\sum_{k=k_0}^{n} 1/k + O(\frac{1}{k^2})\Big) \overset{n\to+\infty}{\sim} C' n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On the one hand, if $\alpha > 1$, $\bar{Z}_1$ is integrable, therefore,

$$\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}\{|R_k|\} \leq C\sum_{k\geq 1}\frac{k}{k^{\frac{1}{\alpha}+2}}\mathbb{E}\{|\bar{Z}_1|\} \leq C\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{\alpha}}} < +\infty$$

We deduce that $\sum_{k\geq 1}|R_k| < +\infty$. Since $c_n \to +\infty$, we derive from Kronecker's Lemma that

$$\frac{1}{c_n}\sum_{k=k_0+1}^{n} c_k R_k \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad a.s. \text{ if } \alpha > 1.$$

On the other hand , if $\alpha \leq 1$, $\bar{Z}_1$ has a moment of order θ for every $\theta < \alpha$. It follows:

$$\mathbb{E}\{|R_k|^\theta\} \leq C\frac{n}{n^{2\theta+\frac{\theta}{\alpha}}}\mathbb{E}\{|X_1|\}^\theta = \frac{C'}{n^{\theta(2+\frac{1}{\alpha})-1}}$$

Therefore, if θ satisfies: $\theta(2+\frac{1}{\alpha}) - 1 > 1$, i.e. if $\frac{2\alpha}{2+\alpha} < \theta < \alpha$, we have $\sum_{k\geq 1}|R_k|^\theta < +\infty$. This implies that

$$\frac{1}{c_n^\theta}\sum_{k=k_0+1}^{n} c_k^\theta |R_k|^\theta \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Now, as $\theta \leq 1$, $\Big|\frac{1}{c_n}\sum_{k=k_0+1}^{n} c_k R_k\Big|^\theta \leq \frac{1}{c_n^\theta}\sum_{k=k_0+1}^{n} c_k^\theta |R_k|^\theta$. It follows that $\Delta_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ *a.s.* We derive from (3.71) that

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\delta_{\frac{\bar{Z}_1+\ldots+\bar{Z}_k}{k^{\frac{1}{\alpha}}}} \overset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu \qquad a.s. \tag{3.72}$$

Now, consider a sequence $(V_n)_{n\geq 0}$ of i.i.d. symmetrical random variables satisfying (3.70). As (3.72) is almost surely valid and $(\bar{Z}_n)_{n\geq 1}$ is a sequence of i.i.d. random variables, we observe that (3.72) is also valid for every sequence $(\hat{Z}_n)_{n\geq 1}$ of i.i.d. random variables such that $\hat{Z}_1 \overset{\mathcal{L}}{=} \bar{Z}_1$. By Proposition 3.29, we obtain that there exists a sequence of i.i.d. random variables $(\hat{V}_n)_{n\geq 0}$ such that $V_1 = \hat{V}_1$ and:

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\delta_{\frac{\hat{V}_1+\ldots+\hat{V}_k}{k^{\frac{1}{\alpha}}}} \overset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu \qquad \text{a.s.} \tag{3.73}$$

As $(V_n)_{n\geq 1}$ and $(\hat{V}_n)_{n\geq 1}$ are sequences of i.i.d. random variables such that $V_1 = \hat{V}_1$, (3.73) is also true for $(V_n)_{n\geq 1}$.

3.7 Simulations

Example 1. Denote by $(Z_t)_{t\geq 0}$ a Cauchy process with parameter 1. Its Lévy measure is then defined by $\pi(dy) = 1/y^2 dy$. Consider the Ornstein-Uhlenbeck process solution to $dX_t = -X_{t^-}\,dt + dZ_t$ corresponding to $(E_{1,1})$ in the previous subsection. The unique invariant distribution of $(X_t)_{t\geq 0}$ is the Cauchy law (see [Sat99], p.188) and the assumptions of Theorem 3.4 are fulfilled with $V(x) = 1 + x^2$, $a = 1$ and every $p \in (0, 1/2)$ and $q \in (1/2, 1)$. Therefore,

$$\bar{\nu}_n(f),\ \bar{\nu}_n^P(f),\ \bar{\nu}_n^C(f) \xrightarrow{n\to+\infty} \int \frac{f(x)}{\pi(1+x^2)}dx \qquad a.s.$$

for every f such that $f = O(|x|^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ for every $\varepsilon \in [0, 1/2)$. In the following figures, one compares the theoretical density of the invariant distribution with the density obtained by convolution of each of the empirical measures by a Gaussian kernel for $N = 5.10^4$. We choose $\eta_n = \gamma_n = 1/\sqrt{n}$, $u_n = \sqrt{\gamma_n}$ (in order to have $\pi(D_n)\gamma_n \to 0$) and t indicates the CPU time. In order to have a

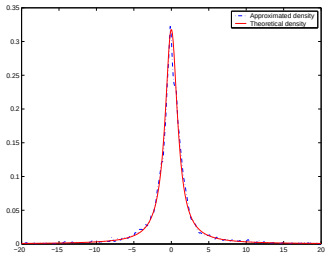


Figure 3.1 : Sch. (E), $t = 12.5$

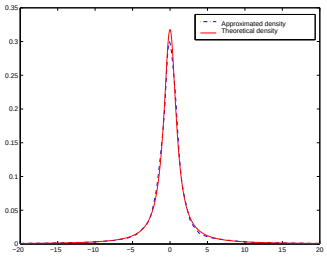


Figure 3.2 : Sch. (P), $t = 16.6$

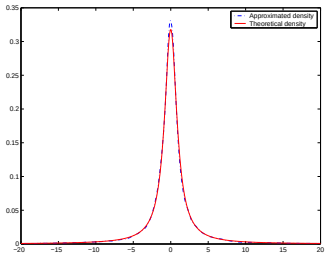


Figure 3.3 : Sch. (C), $t = 16.4$

more precise idea of the differences between the three Euler schemes, let us observe $n \mapsto \bar{\nu}_n(f)$ where $f(x) = |x|^{0.4}$ for several choices of polynomial steps. We set $\gamma_n = \eta_n = 1/n^\theta$ and $u_n = \gamma_n$ (resp. $u_n = \sqrt{\gamma_n}$) for Scheme (P) (resp. for Scheme (C)). We observe that among the tested

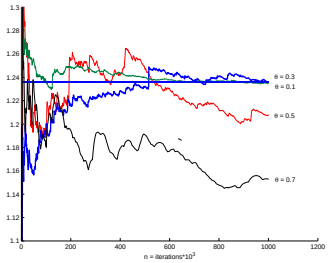


Figure 3.4 : Scheme (E)

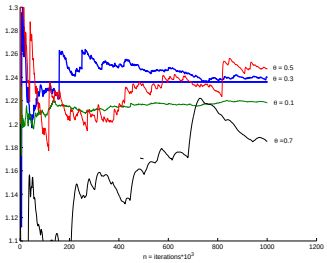


Figure 3.5 : Scheme (P)

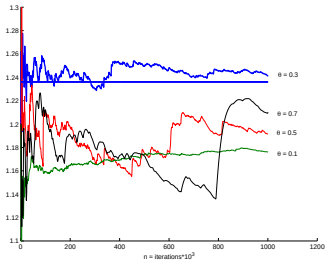


Figure 3.6 : Scheme (C)

steps, the best rate seems to be obtained for $\theta = 0.3$. Notably, in Schemes (P) and (C), we see that on the one hand, if the step decreases too slowly (for instance, $\theta = 0.7$), the variance is too strong and, on the other hand, if the steps decreases too fast (for instance when $\theta = 0.1$), there is to much bias.

Remark 3.30 These first numerical illustrations are enlightened in Chapter 4 where we study the rate of convergence of these procedures in terms of steps, weights and truncation thresholds.

Example 2. Now, we deal with the following SDE:

$$dX_t = (1 - X_{t^-})dt - X_{t^-}dZ_t$$

where $(Z_t)_{t\geq 0}$ is a drift-free subordinator with Lévy measure π defined by

$$\pi(dy) = \frac{f_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(y)}{y^2}dy,$$

where $f_{a,b}$ is the density function of the $\beta(a,b)$-distribution. This SDE models the dust generated by a particular EFC process (see Introduction) whose sudden dislocations do not create dust, having parameters (according to the notations of [Ber04]):

$$c_k = 0, \quad c_e = 1 \quad \nu_{coag}(dy) = f_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(y)dy.$$

We observe that $(\mathbf{S}_{\mathbf{1},\mathbf{1},\frac{1}{2}})$ and $(\mathbf{R}_{\mathbf{1},\mathbf{1},\frac{1}{2}})$ are satisfied with $V(x) = 1 + x^2$ However, we do not have $\kappa(x) = o(x)$ but, since $\mathrm{supp}(\pi)$ is restrained to $[0,1]$ without singularities in 0 or 1, we are able to show that Assumption $\kappa(x) = o(x)$ is no longer necessary in this very case. Then, let us represent the computation of the invariant distribution obtained for Schemes (P) and (C). (We are not able to simulate Scheme (E) in that case).

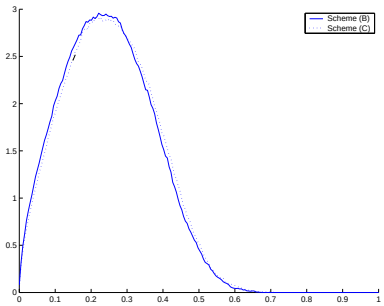


Figure 3.7 : Approximated density, $N = 10^6$

Chapter 4

Computation of the invariant distribution for SDE's driven by a Lévy process: Rate of convergence

Abstract

We study the rate of convergence of some recursive procedures based on some "exact" or "approximate" Euler schemes which converge to the invariant distribution of an ergodic SDE driven by a Lévy process. The main interest of this work is to compare the rates induced by "exact" and "approximate" Euler schemes. In our main result, we show that replacing the small jumps by a Brownian component in the approximate case preserves the rate of the exact Euler scheme for a large class of Lévy processes.

4.1 Introduction

In Chapter 3, we investigated several weighted empirical measures based on some Euler schemes with decreasing step in order to approximate recursively the invariant distribution ν of an ergodic jump diffusion process $X = (X_t)_{t\geq 0}$ solution to a SDE driven by a Lévy process. More precisely, let $(\bar{X}_k)_{k\geq 1}$ be such an Euler scheme, let $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ denote its sequence of decreasing steps and let $(\eta_k)_{k\geq 1}$ be a sequence of weights. We showed under some Lyapunov-type mean-reverting assumptions on the coefficients of the SDE and some easy conditions on the steps and on the weights that,

$$\bar{\nu}_n(\omega, f) = \frac{1}{\eta_1 + \ldots + \eta_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k f(\bar{X}_{k-1}(\omega)) \xrightarrow{n\to+\infty} \nu(f) \qquad a.s., \tag{4.1}$$

for a broad class of functions f including bounded continuous functions (see Theorems 3.4 and 3.5). We obtained this result for two types of Euler schemes: the "exact" Euler scheme that is built with the true increment of the Lévy process and some "approximate" Euler schemes in which the Lévy process increment is replaced by an approximation of it which can be simulated. The aim of this work is to study the rate of $a.s.$ weak convergence of $(\bar{\nu}_n)$ toward ν for these schemes and to devise some variants of our schemes which speed up this rate. This problem has already been studied for strongly mean-reverting Brownian diffusions * : first, by

*This corresponds to the case $a = 1$ in Chapter 3

Lamberton&Pagès ([LaPa02]) when $\eta_n = \gamma_n$, and then, by Lemaire ([Lem05]) for more general weight sequences (see also [LaPa03] and [Lem06]). In particular, Lemaire established in [Lem05] that considering some more general weights never improves the rate obtained with $\eta_n = \gamma_n$ (although it may improve the "sharp" rate). Following this remark and in order to limit the technicalities, we will focus on the case $\eta_n = \gamma_n$.
As a first result, we show that the rate induced by the exact Euler scheme (see Scheme (E)) is the same as that obtained for Brownian diffusions, provided the Lévy process has moments up to order 4. In particular, the fastest possible rate is of order $n^{\frac{1}{3}}$ (see Theorems 4.6 and 4.22). However, in practice, this "exact" scheme needs that the increments of the jump component of the Lévy process be simulated in an exact way. This is not possible in general except in some particular cases (stable processes, compound Poisson process, Gamma processes,...). That is why we need to consider some approximate Euler schemes built with some approximations of the jump component, especially when the Lévy process jumps infinitely often on any compact time interval.
The canonical way to approximate the jump component is to truncate its small jumps (see Scheme (P)). This amounts to replacing this jump component by a compensated compound Poisson process (CCPP). For this type of approximation, the smaller the truncation threshold is, the closer the law of the corresponding CCPP is to that of the true jump component and conversely, the higher the intensity of its jumps is. So, there is a conflict between the approximation of the jump component increment and the complexity of its simulation procedure (when there are too many jumps). The choice of the truncation threshold is the result of a compromise between these constraints. It is time varying depending on the sequence (γ_n) and on the Lévy measure. When the jump component has integrable variation, we show that it is possible to find a compromise which preserves the optimal rate of the exact Euler scheme. We mean that it is possible to construct the step sequence (γ_n) and a sequence of truncation thresholds such that the optimal rate induced by this type of approximation is of order $n^{\frac{1}{3}}$ (see Proposition 4.10) and such that the mean number of jumps at each time step remains uniformly bounded. This implies that the algorithm has a linear mean-complexity. Otherwise, respecting this constraint of simulation reduces the optimal rate. In particular, when the local behavior of the jump component is very irregular, Scheme (P) provides some very slow rates of convergence.
We propose to overcome this problem by adapting a work of Asmussen&Rosinski ([GnKo54]) in which it is shown that when the truncation threshold tends to 0, the small jump component of a one-dimensional Lévy process has asymptotically a Brownian behavior. It can be extended to d-dimensional Lévy processes (see Cohen&Rosinski, [CoRo05]). We then construct another Euler scheme (see Scheme (W)) based on a *wienerization of the small jumps*. For this scheme, the compromise between the simulation and the approximation of the jump component is less stringent. Actually, we show that if the jump component has 3/2-integrable variation, it is possible to preserve the optimal rate of the exact Euler scheme and to respect the simulation constraint. Furthermore, if π is symmetric in a neighborhood of 0, the preceding assertion is valid without any conditions on the small jumps (see Theorem 4.8 and Proposition 4.10).

Before outlining the structure of the chapter, we introduce some notations:
• For $x \in \mathbb{R}^d$ and $k \in \mathbb{N}$, $x^{\otimes k}$ denotes the element of $(\mathbb{R}^d)^k$ defined by $x^{\otimes k}_{i_1,\dots,i_k} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ for every $i_1, \dots i_k \in \{1, \dots, k\}$.

• For every $\mathcal{C}^k$ function $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ and $x, y \in \mathbb{R}^d$, we adopt the following notation :

$$D^k f(x) y^{\otimes k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,k\}} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x) y_{i_1} \ldots y_{i_k}.$$

If $D^k f$ is bounded, we set

$$\|D^k f\|_\infty = \sup_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,k\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x)|.$$

• We set $\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k$, and for $s > 0$, $\Gamma_n^{(s)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k^{(s)}$.

In Section 5.3, we introduce the framework and we recall some results established in Chapter 3 that are needed for this work. In Section 4.3, we state our main results about the rate of convergence induced by the exact and approximate Euler schemes when the Lévy process has moments higher than 4. Sections 4.4 (resp. 4.5) are devoted to the proofs of these results in the exact case (resp. approximate case). In Section 4.9, we state a partial extension of the main results when the Lévy process has less moments. Finally, in Section 4.7, we propose some numerical illustrations of our theoretical results.

4.2 Setting and Background on convergence results

Let π be a Lévy mesure on $\mathbb{R}^l$ satisfying $(\mathbf{H_p^1})$ with $p \geq 1$ (see (2.3)). A Lévy process with such Lévy measure is then at least square-integrable (see (2.2)). In Chapter 3, we studied the convergence to the invariant distribution for every $p > 0$. Here, we only consider the $p \geq 1$ case because our main problem is to observe the impact of the approximation of the jump component which only depends on the small jumps.
Throughout this chapter, we denote by $(X_t)_{t \geq 0}$ a solution to the following SDE

$$dX_t = b(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t \tag{4.2}$$

where $b : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ (set of $d \times l$ real matrices) and $\kappa : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ are continuous with sublinear growth, $(W_t)_{t \geq 0}$ is a l-dimensional Brownian motion and $(Z_t)_{t \geq 0}$ is a centered locally square-integrable purely discontinuous $\mathbb{R}^l$-valued Lévy process independent of $(W_t)_{t \geq 0}$ with Lévy measure π and characteristic function given for every $t \geq 0$ by

$$\mathbb{E}\{e^{i<u,Z_t>}\} = \exp\big[t\big(\int e^{i<u,y>} - 1 - i < u, y > \pi(dy)\big)\big].$$

We recall that $(Z_t)_{t \geq 0}$ is a CCPP if and only if π is a finite measure and that, otherwise, it can be constructed as a limit of CCPP: let $(u_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of positive numbers converging to 0. Let $D_n = \{|y| > u_n\}$ and let $((Z_{t,n})_{t \geq 0})_{n \geq 1}$ denote the sequence of processes defined by

$$Z_{t,n} = \sum_{0 < s \leq t} \Delta Z_s 1_{\{\Delta Z_s \in D_n\}} - t \int_{D_n} y\pi(dy) \qquad \forall t \geq 0. \tag{4.3}$$

For every $n \geq 1$, $(Z_{t,n})_{t\geq 0}$ is a CCPP with intensity $\lambda_n = \pi(D_n)$ and jump distribution $\mu_n(dx) = 1_{D_n}\frac{\pi(dx)}{\pi(D_n)}$. Furthermore, $Z_{.,n} \xrightarrow{n\to+\infty} Z$ in L^2 locally uniformly, *i.e.*

$$\mathbb{E}\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}|Z_t - Z_{t,n}|^2\Big\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad \forall T > 0.$$

Discretization of the SDE. We introduce three Euler schemes. Scheme (E) is constructed with the exact increments of the jump component and is called the exact Euler scheme. Schemes (P) and (W) are approximate Euler schemes. In scheme (P), we truncate the small jumps of the jump component and in scheme (W), we refine the approximation by a *wienerization* of small jumps.

Let $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ be a decreasing sequence of positive numbers such that $\lim\gamma_n = 0$ and such that $\Gamma_n \to +\infty$. Let $(U_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of i.i.d. square integrable centered $\mathbb{R}^l$-valued random variables such that $\Sigma_{U_1} = I_l$. Finally, let $(\bar{Z}_n)_{n\geq 1}$, $(\bar{Z}_n^P)_{n\geq 1}$ and $(\bar{Z}_n^W)_{n\geq 1}$ be sequences of independent $\mathbb{R}^l$-valued random variables independent of $(U_n)_{n\geq 1}$ satisfying

$$\bar{Z}_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z_{\gamma_n}, \qquad \bar{Z}_n^P \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z_{\gamma_n,n} \quad \text{and} \quad \bar{Z}_n^W \stackrel{\mathcal{L}}{=} \bar{Z}_n^P + \sqrt{\gamma_n}Q_n\Lambda_n, \qquad n \geq 1.$$

$(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ is a sequence of i.i.d. random variables independent of $(\bar{Z}_n^P, U_n)_{n\geq 1}$ such that $\mathbb{E}\Lambda_1 = 0$, $\Sigma_{\Lambda_1} = I_l$ and $\mathbb{E}\{\Lambda_1^{\otimes 3}\} = 0$, and (Q_n) is a sequence of $l \times l$ matrices such that

$$(Q_nQ_n^*)_{i,j} = \int_{|y|\leq u_n} y_iy_j\pi(dy).$$

We then denote by $(\bar{X}_n)$, $(\bar{X}_n^P)$ and $(\bar{X}_n^W)$, the Euler schemes recursively defined by $\bar{X}_0 = \bar{X}_0^P = \bar{X}_0^W = x \in \mathbb{R}^d$ and

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1} + \kappa(\bar{X}_n)\bar{Z}_{n+1} \qquad (\mathbf{E})$$

$$\bar{X}_{n+1}^P = \bar{X}_n^P + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n^P) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n^P)U_{n+1} + \kappa(\bar{X}_n^P)\bar{Z}_{n+1}^P \qquad (\mathbf{P})$$

$$\bar{X}_{n+1}^W = \bar{X}_n^W + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n^W) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n^W)U_{n+1} + \kappa(\bar{X}_n^W)\bar{Z}_{n+1}^W. \qquad (\mathbf{W})$$

We respectively denote by $(\mathcal{F}_n)$, $(\mathcal{F}_n^P)$ and $(\mathcal{F}_n^W)$ the natural filtrations induced by $(\bar{X}_n)$, $(\bar{X}_n^P)$ and $(\bar{X}_n^W)$.

Remark 4.1 Note that $\bar{Z}_n^P$ can be simulated if both the intensity and the jump size distribution of $(Z_{t,n})_{t\geq 0}$ can be computed. Its simulation time depends on the number of jumps of $(Z_{t,n})_t$ on the interval $[0, \gamma_n]$. Its mean is $\pi(D_n)\gamma_n$. In order to ensure the linear mean-complexity of the algorithm, we ask in practice its mean to be uniformly bounded at each time step, *i.e.*

$$\sup_{n\geq 1}\pi(D_n)\gamma_n < +\infty. \qquad (4.4)$$

In scheme (W), Q_n can be computed by the Choleski method as an upper triangular matrix if $Q_nQ_n^*$ is definite. Otherwise, we can compute the principal square root of $Q_nQ_n^*$.

The associated sequences of empirical measures are defined by

$$\bar{\nu}_n = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\delta_{\bar{X}_{k-1}} \quad \bar{\nu}_n^P = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\delta_{\bar{X}_{k-1}^P} \quad \text{and} \quad \bar{\nu}_n^W = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k\delta_{\bar{X}_{k-1}^W} \qquad (4.5)$$

where (η_k) is a sequence of positive numbers such that $H_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$.

Remark 4.2 As already mentioned, the rate of convergence will be only studied in the case $\eta_k = \gamma_k$. However, in the proof, we will intensively make use of convergence results for some more general weighted empirical measures. That is why Proposition 4.3 is recalled in a quite general setting.

Let us pass now to the Lyapunov mean-reverting assumption. Let $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ (see Section 1.4). Let $a \in (0,1]$ be a parameter measuring the mean-reversion intensity. Let $r \geq 0$ be a parameter relative to the growth of the noise coefficients σ and κ. We then introduce the following Lyapunov assumptions:

$$\textbf{Assumption } (\mathbf{S_{a,r}}): \qquad |b|^2 \leq CV^a, \quad \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \|\kappa\|^2 \leq CV^r \ \text{ with } r < a.$$
$$\textbf{Assumption } (\mathbf{R_a}): \qquad \langle \nabla V, b\rangle \leq \bar{\beta} - \bar{\alpha}V^a \quad \text{with} \quad \bar{\alpha} > 0 \text{ and } \bar{\beta} \in \mathbb{R}.$$

The first one deals with the growth control of the coefficients at infinity and the second-one is the mean-reverting assumption. These two assumptions respectively imply Assumptions $(\mathbf{S_{a,p,q}})\mathbf{.1}$ and $(\mathbf{S_{a,p,q}})\mathbf{.2}$ introduced in Chapter 3. Hence, we know from Chapter 3 that:

Proposition 4.3 *Let $a \in (0,1]$, $p \geq 1$ and $r \in [0,a)$. Assume $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{R_a})$ and $(\mathbf{S_{a,r}})$. Suppose that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\} + \mathbb{E}\{|\Lambda_1|^{2p}\} < +\infty$ and that (η_n/γ_n) is nonincreasing.*

(a) i) Then,

$$\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{2}+a-1}) < +\infty \quad a.s. \tag{4.6}$$

Hence, the sequence $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ is a.s. tight as soon as $p/2 + a - 1 > 0$.
ii) Moreover, if $\kappa(x) \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|)$ and $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)+\|\kappa\|^2 \leq CV^{\frac{p}{2}+a-1}$, then every weak limit of $(\bar{\nu}_n)$ is an invariant probability for the SDE (4.2). In particular, if $(X_t)_{t\geq 0}$ admits a unique invariant probability ν, then for every continuous function f such that $f = o(V^{\frac{p}{2}+a-1})$, $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(f) = \nu(f)$.
iii) Furthermore, $\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} = O(\Gamma_n)$ and if $a = 1$, $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} < +\infty$.
(b) The same result holds for $(\bar{\nu}_n^P)_{n\geq 1}$ and $(\bar{\nu}_n^W)_{n\geq 1}$.

Remark 4.4 For schemes (E) and (P), the above proposition is a direct consequence of Theorem 3.4 and Proposition 3.10. We did not study scheme (W) in Chapter 3 but it is straightforward to show that the proposition holds true with a similar proof as that used for scheme (P). Note that when $a = 1$, $n \mapsto \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\}$ is bounded whereas when $a < 1$, *i.e.* when the intensity of the mean-reverting is weak, one only has a control of its growth. This induces some difficulties but has no significant consequences on the main results.

4.3 Main results

In this section, we suppose that $\mathbb{E}|Z_t|^{2p} < +\infty$ with $p > 2$ (see Section 4.6 for an extension when $p \in [1,2)$). We evaluate the rate of convergence along some test functions g such that $g = Af + C$ where f is a subquadratic function satisfying the following assumption:
$(\mathbf{C_f^p})$: The function f is a $\mathcal{C}^4$-function such that $f \leq CV$. Its derivatives D^2f, D^3f and D^4f are bounded and Lipschitz continuous functions. Its first derivative satisfies $|\nabla f|^2 = O(V^{\frac{\epsilon}{2}})$ with $\epsilon < p/2 + a - 1 - r$.
Since ν is invariant for the SDE (4.2), we know that $\nu(Af) = 0$ (see *e.g.* [Pag01]) and then, $\nu(g) = C$. It follows that it suffices to evaluate the rate when $C = 0$.

Remark 4.5 We are not able to determine in general the class of functions g which can be represented as $g = Af + C$ with f satisfying $(\mathbf{C_f^p})$. However, in the case of Brownian diffusions processes, some works have been done in that direction. Actually, in [PaVe01], [PaVe03] and [PaVe06], Pardoux&Veretennikov show that existence and unicity hold in a Sobolev framework, for the Poisson equation in $\mathbb{R}^d$ induced by the generator of a positive recurrent diffusion. Moreover, in [LaPa02], Lamberton&Pagès show that when the diffusion is an Ornstein-Uhlenbeck process, the Poisson equation can be solved in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$.

For such functions, the global structure of the rates of convergence is elucidated. For Scheme (E), our main result is Theorem 4.6. We show that for every sequence (γ_n), there exists a sequence (ρ_n) such that $(\rho_n \bar{\nu}_n^E(Af))$ converges weakly: a fast-decreasing sequence (γ_n) (in a sense that we will precise in Theorem 4.6.*a*)) leads to a CLT and a slowly-decreasing sequence (γ_n) leads to a convergence in probability to a deterministic constant (see Theorem 4.6.*b*)). The rate (ρ_n) is maximal for a choice of (γ_n) for which these two types of convergence occur in the same time. In particular, if $\gamma_n = Cn^{-\rho}$ with $\rho \in (0,1]$, the best rate holds for $\rho = \frac{1}{3}$ (see "Particular Case"). In this case, ρ_n is of order $n^{\frac{1}{3}}$.
For the approximate Euler schemes, our main results are Theorem 4.8 and Proposition 4.10. In the first one, we describe the structure of the rate induced by Scheme (P) and (W) as a function of (γ_n) and (u_n). When (u_n) decreases "sufficiently rapidly" in a sense depending on the choice of the scheme, on (γ_n) and on the Lévy measure, the result induced by Scheme (E) remains valid for schemes (P) and (W). Otherwise, the approximation of the jump component dictates the rate of convergence.
Theorem 4.8 can not be directly applied in practice because it does not specify whether the fundamental condition of simulation (4.4) is compatible with the theoretical results. This is the purpose of Proposition 4.10 in which we give the best rates obtained for schemes (P) and (W) under this condition of simulation as a function of the local behavior of the small jumps. In particular, Proposition 4.10 clarifies the impact of the wienerization of the small jumps announced in the introduction and shows that it provides the same rate as that of the exact Euler scheme for a wide class of Lévy processes.

For $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$, we define $\tilde{H}^f$ by

$$\tilde{H}^f(z,x,y) = f(z+\kappa(x)y) - f(z) - \langle \nabla f(z), \kappa(x)y \rangle$$

and $z \mapsto \tilde{H}^f(z,x,y)$ is denoted by $\tilde{H}^f_{\cdot,x,y}$. Then,

Theorem 4.6 *Assume that* $\mathbb{E}|Z_t|^{2p} < +\infty$ *with* $p > 2$ *and that* (4.2) *admits a unique invariant distribution* ν. *Let* $a \in (0,1]$ *and* $r \geq 0$ *such that* $(\mathbf{R_a})$ *and* $(\mathbf{S_{a,r}})$ *are satisfied and such that* $p/2 + a - 1 > 2r$. *If moreover,* $\mathbb{E}\{U_1^{\otimes 3}\} = 0$, $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\} < +\infty$ *and* $\eta_n = \gamma_n$ *for every* $n \geq 1$, *then for every function* $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ *satisfying* $(\mathbf{C_f^p})$,

(a) If $\frac{\Gamma_n^{(2)}}{\sqrt{\Gamma_n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \hat{\gamma} \in [0,+\infty)$, $\sqrt{\Gamma_n}\bar{\nu}_n(Af) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\hat{\gamma}m, \hat{\sigma}_f^2\right)$.

(b) If $\frac{\Gamma_n^{(2)}}{\sqrt{\Gamma_n}} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, $\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n^{(2)}}\bar{\nu}_n(Af) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m$

where $\hat{\sigma}_f^2 = \int \big(|\sigma^* \nabla f|^2(x) + \int \big(f(x+\kappa(x)y) - f(x)\big)^2 \pi(dy)\big)\nu(dx)$ *and,*

$$m = -\int (\phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x))\nu(dx) \text{ with } \phi_1(x) = \frac{1}{2} D^2 f(x) b(x)^{\otimes 2},$$

$$\phi_2(x) = \int \frac{1}{6} D^3 f(x); b(x); (\sigma(x)u)^{\otimes 2} + \frac{1}{24} D^4 f(x)(\sigma(x)u)^{\otimes 4} \mathbb{P}_{U_1}(du)$$

and, $\phi_3(x) = \frac{1}{2} \int \pi(dy_1) \int \pi(dy_2) \tilde{H}^{\tilde{H}^f_{.,x,y_1}}(x,x,y_2)$

$$+ \int \pi(dy_1) \Big(\langle \nabla \tilde{H}^f_{.,x,y_1}(x), b(x) \rangle + \int \mathbb{P}_{U_1}(du) D^2 (\tilde{H}^f_{.,x,y_1})(x)(\sigma(x)u)^{\otimes 2} \Big).$$

Particular Case. Assume that $\gamma_n = Cn^{-\rho}$ with $\rho \in (0,1]$. Then,

$$\begin{cases} \sqrt{C \log n} \bar{\nu}_n(Af) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}\Big(0, \hat{\sigma}_f^2\Big). & \text{if } \rho = 1 \\ \sqrt{\frac{C}{1-\rho}} n^{\frac{1-\rho}{2}} \bar{\nu}_n(Af) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}\Big(\hat{\gamma} m, \hat{\sigma}_f^2\Big). & \text{if } \rho \in [1/3, 1) \\ \frac{1-2\rho}{C(1-\rho)} n^{\rho} \bar{\nu}_n(Af) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} m & \text{if } \rho < 1/3 \end{cases}$$

where $\hat{\gamma} = 0$ if $\rho \in (1/3, 1)$ and $\hat{\gamma} = \sqrt{6C^3}$ if $\rho = 1/3$. On Figure 4.1, one represents $\rho \mapsto h(\rho)$ where $h(\rho)$ denotes the exponent of the rate. One observes that $\max h(\rho) = h(1/3) = 1/3$.

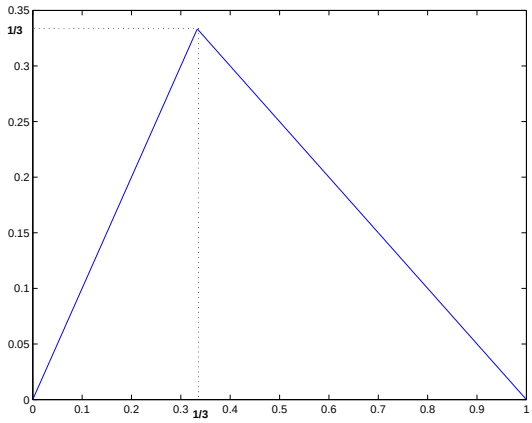


Figure 4.1 : Rate of convergence for polynomial steps

Remark 4.7 Theorem 4.6 shows that the rate is the same as that obtained for Brownian diffusions. In particular, when $\kappa = 0$, Theorem 4.6 extends the rate results of [LaPa02] to weakly mean-reverting diffusions ($a < 1$), for which the convergence to the invariant distribution has been studied in [LaPa03].
Note that the condition $\mathbb{E}\{U_1^{\otimes 3}\} = 0$ is not necessary for the convergence of the empirical measures but plays a role in the rate. Without this condition, the best rate would be of order $n^{\frac{1}{4}}$, obtained for $\rho = 1/2$ (see [LaPa02] in the case of Brownian diffusions).

Let us pass now to the main results for the approximate Euler schemes. Let $(u_k)_{k\geq 1}$ be the sequence of truncation thresholds and set $\beta_{n,\pi}^{(s)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{|y|\leq u_k} |y|^s \pi(dy)$. For $s \in \{2,3,4\}$, we

introduce assumption $(\mathbf{A_s^1})$ which is relative to the impact of the approximation of the jump component as a function of the steps and of the truncation thresholds:

$$(\mathbf{A_s^1}): \quad \frac{\beta_{n,\pi}^{(s)}}{\Gamma_n^{(2)}} \xrightarrow{n\to+\infty} \hat{\alpha}_s \in [0,+\infty] \quad \text{and} \quad \frac{\beta_{n,\pi}^{(s)}}{\sqrt{\Gamma_n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \hat{\beta}_s \in [0,+\infty].$$

Since $s \mapsto \beta_{n,\pi}^{(s)}$ is a decreasing function, $s \mapsto \hat{\alpha}_s$ and $s \mapsto \hat{\beta}_s$ decrease. This can be interpreted as follows: the constraint on (u_k) decreases with s.
For $s \in \{2,3,4\}$, we also introduce another assumption on the Lévy measure that will be necessary to transform some tightness results in some convergence in distribution results:

$$(\mathbf{A_s^2}): \text{ Every coordinate of the sequence } \Big(\frac{\int_{|y|\le u_k} y^{\otimes s}\pi(dy)}{\int_{|y|\le u_k}|y|^s\pi(dy)}\Big)_{k\ge1} \text{ converges.}$$

In the following theorem and in the rest of the chapter, we say that π *is quasi-symmetric in a neighborhood of 0* if $\int_{\{|y|\le u\}} y^{\otimes 3}\pi(dy) = 0$ for u sufficiently small. In particular, this assertion holds if π is symmetric in a neighborhood of 0.
We also say that a real-valued random variable X is *quasi-subgaussian* if there exists $m > 0$ and $\sigma > 0$ such that for all $M > 0$

$$\mathbb{P}(|X| > M) \le \mathbb{P}(|Y| + m > M) \quad \text{with} \quad Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Theorem 4.8 *Let $a \in (0,1]$, $r \ge 0$, $p > 2$ such that the conditions of Theorem 4.6 are satisfied. Assume that $\mathbb{E}\{|\Lambda_1|^{2p}\} < +\infty$ and that $(u_k)_{k\ge1}$ is decreases to 0.*
(a) i. Scheme (P): Assume that $(\mathbf{A_s^1})$ holds with $s = 2$.
- *If $\hat{\alpha}_s = 0$ or $\hat{\beta}_s = 0$, then the conclusions of Theorem 4.6 are still valid for $(\bar{\nu}_n^P)$.*
- *If $\hat{\alpha}_s \in (0,+\infty]$ and $\hat{\beta}_s \in (0,+\infty)$, then $(\frac{\Gamma_n}{\beta_{n,\pi}^{(s)}}\bar{\nu}_n^P(Af))_{n\ge1}$ is tight with quasi-subgaussian limits.*
- *If $\hat{\alpha}_s \in (0,+\infty]$ and $\hat{\beta}_s = +\infty$, then $(\frac{\Gamma_n}{\beta_{n,\pi}^{(s)}}\bar{\nu}_n^P(Af))_{n\ge1}$ is tight with bounded limits.*

ii. Scheme (W): Assume $(\mathbf{A_3^1})$.
Then, the conclusions of (a).i are valid for $(\bar{\nu}_n^W(Af))_{n\ge1}$ with $s = 3$. Furthermore, if π is quasi-symmetric in a neighborhood of 0 and $(\mathbf{A_4^1})$ holds, the conclusions of (a).i are valid for $(\bar{\nu}_n^W(Af))_{n\ge1}$ with $s = 4$.

(b) i. Scheme (P): Assume that $(\mathbf{A_s^1})$ and $(\mathbf{A_s^2})$ hold with $s = 2$. Then,

$$\frac{\Gamma_n}{\beta_{n,\pi}^{(s)}}\bar{\nu}_n^P(Af) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(m/\hat{\alpha}_s - m_s, (\hat{\sigma}_f/\hat{\beta}_s)^2\Big) \qquad \text{if } \hat{\alpha}_s \in (0,+\infty] \text{ and } \hat{\beta}_s \in (0,+\infty)$$

$$\frac{\Gamma_n}{\beta_{n,\pi}^{(s)}}\bar{\nu}_n^P(Af) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m/\hat{\alpha}_s - m_s \qquad \text{if } \hat{\alpha}_s \in (0,+\infty] \text{ and } \hat{\beta}_s \in (0,+\infty),$$

with $|m_2| \le \bar{m}_2 = (d/2)\|D^2 f\|_\infty \int \|\kappa\|^2(x)\nu(dx)$ and m and $\hat{\sigma}_f^2$ like in Theorem 4.6.
ii. Scheme (W): Assume that $(\mathbf{A_3^1})$ and $(\mathbf{A_3^2})$ hold.
Then, the conclusions of (b).i are valid for $(\bar{\nu}_n^W(Af))_{n\ge1}$ with $s = 3$ and a real number m_3 satisfying $|m_3| \le \bar{m}_3 = (d^{\frac{3}{2}}/6)\|D^3 f\|_\infty \int \|\kappa(x)\|^2\nu(dx)$.
Furthermore, if π is quasi-symmetric in a neighborhood of 0 and if $(\mathbf{A_4^1})$ and $(\mathbf{A_4^2})$ hold, the conclusions of (b).i are valid for $(\bar{\nu}_n^W(Af))_{n\ge1}$ with $s = 4$ and a real number m_4 satisfying $|m_4| \le \bar{m}_4 = (d^2/24)\|D^4 f\|_\infty \int \|\kappa(x)\|^4\nu(dx)$.

Remark 4.9 Note that in the one-dimensional case, Assumption $(\mathbf{A_s^2})$ is always satisfied when $s = 2$ or $s = 4$. In those cases, $m_s = \frac{1}{s!}\int f^{(s)}(x)\kappa(x)^s\nu(dx)$. If $s = 3$, Assumption $(\mathbf{A_s^2})$ is satisfied if $\int_{\{|y|\leq u_k\}} y^3\pi(dy)/\int_{\{|y|\leq u_k\}}|y|^3\pi(dy) \to a_3 \in \mathbb{R}$. In this case, $m_3 = a_3\frac{1}{3!}\int f^{(3)}(x)\kappa(x)^3\nu(dx)$. In the multidimensional case, the value of m_s is also explicit but its expression is more complicated (see proof of Lemma 4.20).

Let us now state Proposition 4.10. In (a), we establish some conditions on the Lévy measure in the neighborhood of 0 for which the rate of convergence induced by the exact Euler scheme can be preserved under the condition of simulation (4.4). In (b), we suppose that the Lévy measure has a density closed to that of a α-stable process in the neighborhood of 0 and give in that case the optimal rate for the two schemes as a function of α. For these two parts, we also give some available choices of steps and truncation thresholds.

Proposition 4.10 *Let $a \in (0,1]$, $r \geq 0$, $p \geq 2$ such that the conditions of Theorem 4.6 are satisfied. Assume that $\mathbb{E}\{|\Lambda_1|^{2p}\} < +\infty$.*
(a) Assume that $\int_{\{|y|\leq 1\}}|y|^q\pi(dy) < +\infty$ with $q \in [0,2]$ and set $\gamma_k = k^{-\frac{1}{3}}$ and $u_k = \gamma_k^r$ with $r \in [\frac{1}{q}, \frac{1}{s-q}]$. Then, Condition (4.4) holds and,
i. Scheme (P): If $q \leq 1$ and $s = 2$, $n^{\frac{1}{3}}\bar{\nu}_n^P(Af) \underset{n\to+\infty}{\mathcal{L}} \sqrt{2/3}\mathcal{N}\left(m\sqrt{6}, \hat{\sigma}_f^2\right)$

ii. Scheme (W): If $q \leq 3/2$ and $s = 3$, $n^{\frac{1}{3}}\bar{\nu}_n^W(Af) \underset{n\to+\infty}{\mathcal{L}} \sqrt{2/3}\mathcal{N}\left(m\sqrt{6}, \hat{\sigma}_f^2\right)$.
Furthermore, if π is quasi-symmetric in the neighborhood of 0, the preceding assertion is valid with $s = 4$ and every $q \in [0,2]$.
(b) Assume that there exists $\epsilon_0 > 0$ such that

$$\pi(dy) = \psi(y)\lambda_l(dy) \quad \text{with} \quad 1_{\{0<|y|\leq\epsilon_0\}}\frac{C_1}{|y|^{\alpha+l}} \leq \psi(y) \leq \frac{C_2}{|y|^{\alpha+l}}1_{\{0<|y|\leq\epsilon_0\}}. \tag{4.7}$$

Set $\gamma_k = k^{-(\frac{1}{3}\vee\frac{\alpha}{2s-\alpha})}$, $u_k = \gamma_k^r$ with $r \in [\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{(s-\alpha)\vee\alpha}]$. Then, Condition (4.4) holds and,
i. Scheme (P), $s = 2$: $\left(n^{(\frac{1}{3}\wedge\frac{2-\alpha}{4-\alpha})}\bar{\nu}_n^P(Af)\right)_{n\geq 1}$ is tight.
ii. Scheme (W), $s = 3$: $\left(n^{(\frac{1}{3}\wedge\frac{3-\alpha}{6-\alpha})}\bar{\nu}_n^W(Af)\right)_{n\geq 1}$ is tight.

Remark 4.11 Figure 4.11 represents $\alpha \mapsto h(\alpha)$ where $h(\alpha)$ denotes the exponent of the optimal rate induced by each approximate scheme under the assumptions of Proposition 4.10(b). This figure shows in particular that using scheme (W) is really necessary when the jump component has infinite variation because the optimal rate of convergence induced by scheme (P) decreases very rapidly in that case.

Remark 4.12 The fact that we optimize the rate for the range of sequences $(\gamma_k, u_k)_{k\geq 1}$ such that the linearity of the mean-complexity of the procedure is ensured can be disputable when the optimal rate is not of order $n^{\frac{1}{3}}$. Actually, in this case, even if for a smaller level of truncation, the linearity of the complexity fails, the theoretical rate is better. Hence, another point of view consists in evaluating the order of precision as a function of the complexity. Some precise statements on that question would require some Berry-Esseen type estimates (in our inhomogeneous framework). Nevertheless, heuristic study can be done when (4.7) is satisfied and suggests that the asymptotic order of precision as a function of the mean-complexity is optimized for a class of steps and truncation levels containing the choices of Proposition 4.10.

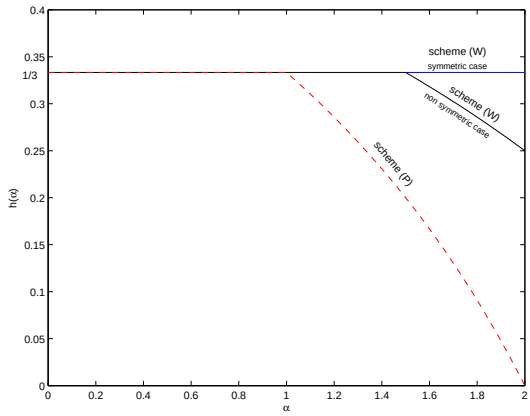


Figure 4.2 : Optimal rate in terms of the local behavior of the Lévy process

4.4 Proof of Theorem 4.6

In this section, we prove the main result induced by the exact Euler scheme: Theorem 4.6. Firstly, we decompose $\bar{\nu}_n(Af)$ (see Lemma 4.13) and then, we compute the rate of each term of the decomposition in Lemmas 4.14, 4.17 and 4.15. (We will principally focus on Lemmas 4.14 and 4.15 where the rate of the jump part of the decomposition is studied). Finally, a synthesis of the previous lemmas is realized in subsection 4.4.2 and completes the proof of Theorem 4.6.

4.4.1 Decomposed computation of the rate of $\bar{\nu}_n(Af)$.

We set

$$\bar{X}_{k,1} = \bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}), \quad \text{and} \quad \bar{X}_{k,2} = \bar{X}_{k,1} + \sqrt{\gamma_k}\sigma(\bar{X}_{k-1})U_k.$$

Denote by $(Z^{(k)})_{k\geq 1}$, a sequence of i.i.d. random variables such that $Z^{(1)} \overset{\mathcal{L}}{=} Z$ and set $\bar{Z}_k = Z^{(k)}_{\gamma_k}$.

Lemma 4.13 *For $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, we have the following decomposition.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \gamma_k Af(\bar{X}_{k-1}) = f(\bar{X}_n) - f(\bar{X}_0) &- \sum_{k=1}^{n} \Big(\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + \xi_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, Z^{(k)})\Big) \\ &- \sum_{k=1}^{n} \Big(\Theta_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) + \Theta_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + \Theta_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)})\Big) \\ &- \sum_{k=1}^{n} \Big((R_1 + R_2)(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)})\Big)\end{aligned}$$

where,

$$\xi_1(\gamma,x,U_k)=\sqrt{\gamma}\langle\nabla f(x),\sigma(x)U_k\rangle,$$
$$\xi_2(\gamma,x,Z)=\int_0^\gamma\langle\nabla f(x),\kappa(x)dZ_s\rangle+\Big(\sum_{0<s\le\gamma}\tilde H^f(x,x,\Delta Z_s)-\gamma\int\tilde H^f(x,x,y)\pi(dy)\Big),$$
$$\Theta_1(\gamma,x)=\gamma\int_0^1\langle\nabla f(x+\theta\gamma b(x))-\nabla f(x),b(x)\rangle d\theta,$$
$$\Theta_2(\gamma,x,u)=\gamma\int_0^1(1-\theta)\big(D^2f(x+\gamma b(x)+\theta\sqrt{\gamma}\sigma(x)u)-D^2f(x)\big)(\sigma(x)u)^{\otimes2}d\theta,$$
$$\Theta_3(\gamma,x,z,Z)=\sum_{0<s\le\gamma}\big(\tilde H^f(x,z,Z_{s^-},\Delta Z_s)-\tilde H^f(x,x,0,\Delta Z_s)\big),$$
$$R_1(\gamma,x,U_k)=\sqrt{\gamma}\langle\nabla f(x+\gamma b(x))-\nabla f(x),\sigma(x)U_k\rangle,$$
$$R_2(\gamma,x,U_k)=\frac{\gamma}{2}\big(D^2f(x)(\sigma(x)U_k)^{\otimes2}-\mathbb{E}\{D^2f(x)(\sigma(x)U_k)^{\otimes2}\}\big),$$
$$R_3(\gamma,x,z,Z)=\int_0^\gamma\langle\nabla f(z+\kappa(x)Z_{s^-})-\nabla f(x),\kappa(x)dZ_s\rangle.$$

Proof: We write

$$f(\bar X_k)-f(\bar X_{k-1})=\Big(f(\bar X_{k,1})-f(\bar X_{k-1})\Big)+\Big(f(\bar X_k^2)-f(\bar X_k^1)\Big)+\Big(f(\bar X_k)-f(\bar X_{k,2})\Big)$$

We expand the first two terms by the Taylor formula and use the Itô formula (with jumps) for the last one. The lemma follows by summing up the equality for $k=1,\dots,n$. □

As mentioned before, we study successively the rate of convergence of each term of the previous decomposition. We start by showing a CLT for the term associated with ξ_1 and ξ_2.

Lemma 4.14 *Assume that* $(\mathbf{H_p^1})$ *holds for* $p>2$. *Let* $f:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}$ *satisfy* $(\mathbf{C_f^p})$. *Then, with the notations of lemma 4.13, we have*
(a)

$$\mathbb{E}\{|\xi_2(\gamma,x,Z)|^2\}=\gamma\int\big(f(x+\kappa(x)y)-f(x)\big)^2\pi(dy)\tag{4.8}$$

and there exists $\delta>0$ *and a locally bounded function* C *such that*

$$\mathbb{E}\{|\xi_2(\gamma,x,Z)|^{2(1+\delta)}\}\le C(x)\gamma\tag{4.9}$$

(b) Moreover, if $(\mathbf{R_a})$ *and* $(\mathbf{S_{a,r}})$ *hold with* $2r<p/2+a-1$ *and* $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\}<+\infty$, *then,*

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n\Big(\xi_1(\gamma_k,\bar X_{k-1},U_k)+\xi_2(\gamma_k,\bar X_{k-1},Z^{(k)})\Big)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\big(0,\hat\sigma_f^2\big),$$

with $\hat\sigma_f^2=\int\Big(|\sigma^*\nabla f|^2(x)+\int\big(f(x+\kappa(x)y)-f(x)\big)^2\pi(dy)\Big)\nu(dx)$.

Proof: (a). Let $(Z_{.,n})_{n\ge1}$ be the sequence of processes defined by (4.3). We know that $\mathbb{E}\{\sup_{\{0\le s\le t\}}|Z_{s,n}-Z_s|^2\}\xrightarrow{n\to+\infty}0$. As $Z_{.,n}$ has bounded variations, $\xi_2(\gamma,x,Z_{.,n})$ can be written

$$\xi_2(\gamma,x,Z_{.,n})=\sum_{0<s\le\gamma}1_{\{|\Delta Z_s|>u_n\}}\big(f(x+\kappa(x)\Delta Z_s)-f(x)\big)-\gamma\int_{\{|y|>u_n\}}\big(f(x+\kappa(x)y)-f(x)\big)\pi(dy).$$

Since $D^2 f$ is bounded and $\mathbb{E}|Z_t|^4 < +\infty$, one easily checks that $\xi_2(\gamma, x, Z_{.,n})$ is a locally square-integrable purely discontinuous martingale. We deduce from the compensation formula that

$$\mathbb{E}\{|\xi_2(\gamma, x, Z_{.,n})|^2\} = \gamma \int_{\{|y|>u_n\}} |f\big(x + \kappa(x)y\big) - f(x)|^2 \pi(dy). \tag{4.10}$$

We also check that

$$\mathbb{E}\{|\xi_2(\gamma, x, Z) - \xi_2(\gamma, x, Z_{.,n})|^2\} \le C_x \int_{\{|y|\le u_n\}} |y|^2 \pi(dy) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Letting $n \to +\infty$ in (4.10) yields the first identity.
Now, let us prove the inequality. $\xi_2(\gamma, x, Z) = \langle \nabla f(x), \kappa(x) Z_\gamma \rangle + M_\gamma$ where M is a martingale defined by

$$\begin{aligned} M_\gamma = &\sum_{0<s\le\gamma} \int_0^1 \langle \nabla f(x + \theta\kappa(x)\Delta Z_s) - \nabla f(x), \kappa(x)\Delta Z_s \rangle d\theta \\ &- \gamma \int \int_0^1 \langle \nabla f(x + \theta\kappa(x)y) - \nabla f(x), \kappa(x)y \rangle d\theta \pi(dy). \end{aligned}$$

Let $\delta \in (0, 1]$ such that $4(1+\delta) \le 2p$. Since ∇f is Liscphitz continuous, we derive from the Burkholder-Davis-Gundy inequality that

$$\mathbb{E}|Z_\gamma|^{2(1+\delta)} \le \mathbb{E}\Big\{ \big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^2 \big)^{1+\delta} \Big\} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}|M_\gamma|^{2(1+\delta)} \le C(x)\mathbb{E}\Big\{ \big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^4 \big)^{1+\delta} \Big\}.$$

It follows that

$$\mathbb{E}\{|\xi_2(\gamma, x, Z)|^{2(1+\delta)}\} \le C_1(x)\mathbb{E}\Big\{ \big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^2 \big)^{1+\delta} \Big\} + C_2(x)\mathbb{E}\Big\{ \big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^4 \big)^{1+\delta} \Big\}.$$

Then, it suffices to prove that

$$\mathbb{E}\Big\{ \big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^{2+\rho} \big)^{1+\delta} \Big\} = O(\gamma) \qquad \text{for } \rho = 0 \text{ and } \rho = 2. \tag{4.11}$$

Denote by $(\tilde{M}_s)$ the martingale defined by $\tilde{M}_s = \sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^{2+\rho} - \gamma \int |y|^{2+\rho} \pi(dy)$. By the elementary inequality

$$\forall u, v \in \mathbb{R}\ \alpha > 0, \quad |u+v|^\alpha \le 2^{\alpha \vee 1 - 1}(|u|^\alpha + |v|^\alpha). \tag{4.12}$$

we have,

$$\mathbb{E}\Big\{ \big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^{2+\rho} \big)^{1+\delta} \Big\} \le C\big(\mathbb{E}|\tilde{M}_\gamma|^{1+\delta} + \gamma^{1+\delta} \int |y|^{2+\rho} \pi(dy) \big).$$

By the Burkhölder-Davis-Gundy inequality,

$$\mathbb{E}|\tilde{M}_\gamma|^{1+\delta} \le C\mathbb{E}\Big\{ \big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^{2(2+\rho)} \big)^{\frac{1+\delta}{2}} \Big\}.$$

Since $(1+\delta)/2 \leq 1$, it follows from (4.12) and from the compensation formula that

$$\mathbb{E}|\tilde{M}_\gamma|^{1+\delta} \leq C\mathbb{E}\Big\{ \sum_{0<s\leq\gamma} |\Delta Z_s|^{(2+\rho)(1+\delta)} \Big\} \leq C\gamma \int |y|^{(2+\rho)(1+\delta)} \pi(dy).$$

Since $2 \leq (2+\rho)(1+\delta) \leq 2p$, $\int |y|^{(2+\rho)(1+\delta)}\pi(dy) < +\infty$. (4.11) follows.

(b) Let $\{(\xi_k^n), k = 1, \ldots, n, n \geq 1\}$ be a sequence of triangular arrays of square-integrable martingale increments defined by

$$\xi_k^n = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\Big(\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + \xi_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, Z^{(k)})\Big).$$

Since $\Sigma_{U_1} = I_l$, we have

$$\mathbb{E}\{|\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k)|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} = \gamma_k |\sigma^* \nabla f|^2(\bar{X}_{k-1}).$$

Moreover, $\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k)$ and $\xi_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, Z^{(k)})$ are independent conditionally to $\mathcal{F}_{k-1}$ and

$$\mathbb{E}\{\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k)/\mathcal{F}_{k-1}\} = \mathbb{E}\{\xi_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\} = 0.$$

Then, we deduce from (4.8) that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} &= \frac{1}{\Gamma_n}\Big(\mathbb{E}\{|\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k)|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} + \mathbb{E}\{|\xi_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, Z^{(k)})|^2/\mathcal{F}_{k-1}\}\Big) \\ &= \frac{\gamma_k}{\Gamma_n}\Big(|\sigma^* \nabla f|^2(\bar{X}_{k-1}) + \int \big(f(\bar{X}_{k-1} + \kappa(\bar{X}_{k-1})y) - f(\bar{X}_{k-1})\big)^2 \pi(dy)\Big).\end{aligned}$$

Since $D^2 f$ is bounded, we derive from Taylor's formula and from the assumptions on r and on ∇f that

$$\int \big(f(. + \kappa(.)y) - f(.)\big)^2 \pi(dy) + |\sigma^* \nabla f|^2 \leq C V^{(\epsilon+r)\vee(2r)} = o(V^{\frac{p}{2}+a-1}). \tag{4.13}$$

Hence, Proposition 4.3 yields

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} \xrightarrow{n\to+\infty} \int \Big(|\sigma^* \nabla f|^2 + \int \big(f(. + \kappa(.)y) - f(.)\big)^2 \pi(dy)\Big) d\nu. \tag{4.14}$$

Then, the lemma will follow from the central limit theorem for arrays of square-integrable martingale increments (see Hall and Heyde, [HaHe80]) provided the *Lindeberg condition* is fulfilled, *i.e.*

$$R_n^\rho = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2 1_{\{|\xi_k^n|\geq\rho\}}/\mathcal{F}_{k-1}\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad a.s. \quad \forall \rho > 0.$$

Let $A \in (0, +\infty)$ and set

$$\begin{aligned}R_{n,1}^{\rho,A} &= \sum_{k=1}^n 1_{\{|\bar{X}_{k-1}|\leq A\}} \mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2 1_{\{|\xi_k^n|\geq\rho\}}/\mathcal{F}_{k-1}\}, \\ R_{n,2}^{\rho,A} &= \sum_{k=1}^n 1_{\{|\bar{X}_{k-1}|\geq A\}} \mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2 1_{\{|\xi_k^n|\geq\rho\}}/\mathcal{F}_{k-1}\}.\end{aligned}$$

We have $\mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2 1_{\{|\xi_k^n|\geq\rho\}}/\mathcal{F}_{k-1}\} = F_A^n(\bar{X}_{k-1},\gamma_k)$ where

$$F_A^n(x,\gamma) = \frac{1}{\Gamma_n}\mathbb{E}\{|\xi_1(\gamma,x,U_1)+\xi_2(\gamma,x,Z)|^2 1_{\{|\xi_1(\gamma,x,U_1)+\xi_2(\gamma,x,Z)|\geq\rho\sqrt{\Gamma_n}\}}\}.$$

Let $\delta > 0$ such that (4.9) holds. By setting $\bar{p} = 1+\delta$ and $\bar{q} = \frac{1+\delta}{\delta}$, we derive from the Holder inequality that

$$F_A^n(x,\gamma) \leq \frac{1}{\Gamma_n}\mathbb{E}\{|\xi_1(\gamma,x,U_1)+\xi_2(\gamma,x,Z)|^{2(1+\delta)}\}^{\frac{1}{1+\delta}}\Big(\mathbb{P}(|\xi_1(\gamma,x,U_1)+\xi_2(\gamma,x,Z)|\geq\rho\sqrt{\Gamma_n})\Big)^{\frac{\delta}{1+\delta}}$$

On the one hand, we deduce from (4.12) and from (4.9) that

$$\mathbb{E}\{|\xi_1(\gamma,x,U_1)+\xi_2(\gamma,x,Z)|^{2(1+\delta)}\}^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C(x,\delta)(\gamma^{1+\delta}+\gamma)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C_1(x,\delta)\gamma^{\frac{1}{1+\delta}}$$

where $x \mapsto C_1(x,\delta)$ is locally bounded. On the other hand, we deduce from the Chebyschev inequality that,

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{P}(|\xi_1(\gamma,x,U_1)+\xi_2(\gamma,x,Z)|\geq\rho\sqrt{\Gamma_n})\Big)^{\frac{\delta}{2+\delta}} &\leq \frac{1}{(\rho^2\Gamma_n)^{\frac{\delta}{1+\delta}}}\mathbb{E}\{|\xi_1(\gamma,x,U_1)+\xi_2(\gamma,x,Z)|^2\}^{\frac{\delta}{1+\delta}}\\ &\leq C_2(x,\delta,\rho)\Big(\frac{\gamma}{\Gamma_n}\Big)^{\frac{\delta}{1+\delta}}\end{aligned}$$

where $x \mapsto C_2(x,\delta,\rho)$ is locally bounded. Then, for every $A > 0$ and $\rho > 0$,

$$R_{n,1}^{\rho,A} \leq C_{A,\rho}\frac{1}{\Gamma_n^{1+\frac{\delta}{1+\delta}}}\sum_{k=1}^n \gamma_k = C_{A,\rho}\frac{1}{\Gamma_n^{\frac{\delta}{1+\delta}}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad a.s.$$

Now, we observe $R_{n,2}^{\rho,A}$. From (4.13), we have : $\mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq CV^\beta(\bar{X}_{k-1})$ with $\beta < p/2+a-1$. Therefore,

$$R_{n,2}^{A,\rho} \leq \sum_{k=1}^n 1_{\{|\bar{X}_{k-1}|\geq A\}}\mathbb{E}\{|\xi_k^n|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq \sup_{|x|\geq A}\frac{V^\beta(x)}{V^{\frac{p}{2}+a-1}(x)}\sup_{n\in\mathbb{N}}\bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{2}+a-1}) = \phi(A)\bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{2}+a-1})$$

where $\phi(A) \xrightarrow{A\to+\infty} 0$. Since $\sup_{n\in\mathbb{N}}\bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{2}+a-1}) < +\infty$ (see Proposition 4.3), letting $A \to +\infty$ yields

$$R_n^\rho \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad a.s. \quad \forall\rho > 0.$$

□

Lemma 4.15 *Let $a \in (0,1]$, $r \geq 0$ and $p > 2$ such that $(\mathbf{H_p})$, $(\mathbf{R_a})$, $(\mathbf{S_{a,r}})$ hold and $p/2+a-1 > 2r$. Assume that $\mathbb{E}\{U_1^{\otimes 3}\} = 0$ and that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\} < +\infty$. Let $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ satisfying $(\mathbf{C_f^p})$. Then,*
(a) If $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \to 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n \Theta_3(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

(b) If $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \to \hat{\gamma} \in (0,+\infty]$,

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k=1}^n \Theta_3(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \int \phi_3(x)\nu(dx)$$

where ϕ_3 is defined like in Theorem 4.6.

The proof of this Lemma is the subject of subsection 4.4.3.

Remark 4.16 If Z is a compensated compound Poisson process, computing the rate of convergence of Θ_3 consists in evaluating what happens after its first jump. Naturally, this argument has no sense when the Lévy measure is not finite but the proof and the formulation of ϕ_3 show that it keeps some sense in average.

Lemma 4.17 *Let $a \in (0,1]$, $r \geq 0$ and $p > 2$ such that $(\mathbf{H_p})$, $(\mathbf{R_a})$, $(\mathbf{S_{a,r}})$ hold and $p/2+a-1 > 2r$. Assume that $\mathbb{E}\{U_1^{\otimes 3}\} = 0$ and that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\} < +\infty$. Let $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ satisfying $(\mathbf{C_f^p})$. Then,*
(a) If $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \to 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^{n} \Theta_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) + \Theta_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^{n} R_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + R_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

(b) If $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \xrightarrow{n\to+\infty} \hat{\gamma} \in (0, +\infty]$, we have

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k=1}^{n} \Theta_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m_1 \quad \text{and} \quad \frac{1}{\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k=1}^{n} \Theta_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m_2,$$
$$\text{with} \quad m_1 = \frac{1}{2}\int D^2 f(x) b(x)^{\otimes 2} \nu(dx)$$
$$\text{and,} \quad m_2 = \int\int \frac{1}{6} D^3 f(x); b(x); (\sigma(x)u)^{\otimes 2} + \frac{1}{24} D^4 f(x)(\sigma(x)u)^{\otimes 4} \mathbb{P}_{U_1}(du)\nu(dx).$$

At last,

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k=1}^{n} R_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + R_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, U_k) + R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Proof: The arguments of this proof are quite similar to those of the previous lemma. Then, we leave it to the reader. □

4.4.2 Synthesis and proof of Theorem 4.6

• Proof of theorem 4.6 when $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \to 0$: Looking into the decomposition of $\bar{\nu}_n(Af)$ introduced in lemma 4.13, we deduce from lemmas 4.14, 4.15,a) and 4.17,a) that

$$\sqrt{\Gamma_n}\bar{\nu}_n(Af) - \left(\frac{f(\bar{X}_n) - f(\bar{X}_0)}{\sqrt{\Gamma_n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \hat{\sigma}_f^2\right). \tag{4.15}$$

Now, $f \leq CV$. Then, by Proposition 4.3(a).*iii* and Jensen's inequality, $\mathbb{E}\{f(\bar{X}_n)\} \leq \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} \leq C\Gamma_n^{\frac{1}{p}}$. It implies that

$$\frac{f(\bar{X}_n) - f(\bar{X}_0)}{\sqrt{\Gamma_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} 0$$

and theorem 4.6 is obvious.
• Proof of theorem 4.6 when $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \to \hat{\gamma} \in (0, +\infty]$: in this case, $\sqrt{\Gamma_n} \leq C\Gamma_n^{(2)}$. It implies that

$$\frac{f(\bar{X}_n) - f(\bar{X}_0)}{\Gamma_n^{(2)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} 0.$$

According to lemmas 4.14, 4.15.(b) and 4.17.(b), we have

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n^{(2)}}\bar{\nu}_n(Af) - \Big(\frac{f(\bar{X}_n) - f(\bar{X}_0)}{\Gamma_n^{(2)}}\Big) \begin{cases} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m & \text{if } \hat{\gamma} = +\infty \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(\hat{\gamma}m, \hat{\sigma}_f^2\big) & \text{if } \hat{\gamma} < +\infty \end{cases}$$

and the result follows.

4.4.3 Proof of Lemma 4.15

In the proof of Lemma 4.15, we usually need to show that some sequences tend to 0 in probability. The arguments used for this are collected in the following lemma (these arguments also work for the proof of Lemma 4.17).

Lemma 4.18 *Let $a \in (0,1]$, $r \geq 0$ and $p > 2$ such that $(\mathbf{H_p})$, $(\mathbf{R_a})$ and $(\mathbf{S_{a,r}})$ hold. Assume that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\} < +\infty$ and let (F_k) be a sequence of random variables such that F_k is $\mathcal{F}_k$-measurable.*
(a) Assume that $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \to 0$.
i. If $|F_k| \leq C\gamma_k^2 V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}_{k-1})$, then, $1/\sqrt{\Gamma_n}\sum_{k=1}^n F_{k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.
ii. If $\mathbb{E}\{F_k/\mathcal{F}_{k-1}\} = 0$ and $\mathbb{E}\{|F_k|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq C\big(\gamma_k^3 V^p(\bar{X}_{k-1}) + \gamma_k^2 V^{\frac{\epsilon p}{2}}(\bar{X}_{k-1})\big)$ with $\epsilon \in [0,1)$ then, $1/\sqrt{\Gamma_n}\sum_{k=1}^n F_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.
(b) Assume that $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \xrightarrow{n\to+\infty} \hat{\gamma} \in (0, +\infty]$. Then,
i. If $|F_k| \leq C\gamma_k^{2+\delta} V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}_{k-1})$, $1/\Gamma_n^{(2)}\sum_{k=1}^n F_{k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.
ii. If $\mathbb{E}\{F_k/\mathcal{F}_{k-1}\} = 0$ and $\mathbb{E}\{|F_k|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq C\big(\gamma_k^3 V^{\epsilon p}(\bar{X}_{k-1}) + \gamma_k^2 V^{\frac{\epsilon p}{2}}(\bar{X}_{k-1})\big)$ with $\epsilon \in [0,1)$ then, $1/\Gamma_n^{(2)}\sum_{k=1}^n F_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Proof: *(a)* i. By Proposition 4.3*(a).iii*, $\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} \leq C\Gamma_n$. We then derive from Jensen's inequality that

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\mathbb{E}\{\sum_{k=1}^n |F_{k-1}|\} \leq \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \Gamma_k^{\frac{\bar{p}}{p}}$$

with $\bar{p} = p/2 + a - 1$. Hence, the first assertion is obvious if

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \Gamma_k^{\frac{\bar{p}}{p}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{4.16}$$

If (4.16) is not fulfilled, then we have $\liminf \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2\sqrt{\Gamma_k} > 0$ because $\bar{p}/p \leq 1/2$. It follows from the Kronecker Lemma that we have necessary $\sum_{k\geq 1}\gamma_k^2 = +\infty$. By setting $\eta_k = \gamma_k^2$, we can apply Proposition 4.3 and deduce that

$$\sup_{n\geq 1}\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}_{k-1}) < +\infty \quad a.s. \tag{4.17}$$

Since $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, the first assertion follows when (4.16) is not fulfilled.
ii. Since $\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} \leq \Gamma_n$, we derive from Jensen's inequality that $\mathbb{E}\{|F_k|^2\} \leq C(\gamma_k^3\Gamma_k + \gamma_k^2\Gamma_k^{\frac{\epsilon}{2}})$, with $\epsilon \in [0,1)$. On the one hand, one checks that $\sum_{k=1}^n \gamma_k^3\Gamma_k \leq (\Gamma_n^{(2)})^2$. Hence, since $\Gamma_n^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, we have

$$\frac{1}{\Gamma_n}\sum_{k=1}^n \gamma_k^3\Gamma_k \leq C\frac{(\Gamma_n^{(2)})^2}{(\sqrt{\Gamma_n})^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{4.18}$$

On the other hand, one observes that $\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^2\Gamma_k^{\frac{\epsilon}{2}}}{\Gamma_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^2}{(\Gamma_k^{(2)})^{2-\epsilon}} < +\infty$. Hence, the Kronecker lemma implies that

$$\frac{1}{\Gamma_n}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2\Gamma_k^{\frac{\epsilon}{2}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{4.19}$$

It follows that $\frac{1}{\Gamma_n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\{|F_k|^2\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. This yields the second assertion of (a).
(b) i. We derive from the assumptions that

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k=1}^n |F_k| \leq \frac{C}{\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k=1}^n \gamma_k^{2+\delta} V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}_{k-1}). \tag{4.20}$$

Then, $(b).i.$ follows from (4.17) which is still valid because $\sum_{k\geq 1}\gamma_k^2 = +\infty$.
ii. It suffices to check that

$$\frac{1}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\{|F_k|^2\} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty. \tag{4.21}$$

With the same arguments as in $(a).ii$, one checks that

$$\frac{1}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\{|F_k|^2\} \leq \frac{C}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\Gamma_k^{(2)})^\epsilon + \frac{C}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \gamma_k^3\Gamma_k^\epsilon \quad \text{with } \epsilon \in [0,1). \tag{4.22}$$

On the one hand, we deduce from the Kronecker lemma that

$$\frac{1}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\Gamma_k^{(2)})^\epsilon \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

On the other hand, for every $\epsilon \in [0,1)$

$$\frac{1}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \gamma_k^3\Gamma_k^\epsilon \overset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \gamma_k^3\Gamma_k^\epsilon < +\infty$$

because $\sum_{k=1}^n \gamma_k^3\Gamma_k \leq (\Gamma_n^{(2)})^2$. Hence, we derive from (4.22) that

$$\frac{1}{(\Gamma_n^{(2)})^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\{|F_k|^2\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

which completes the proof. □

Proof of Lemma 4.15. (a) In order to alleviate the notations, we prove the lemma in the one-dimensional case. We set

$$\bar{\Theta}_3(\gamma,x,z,Z)=\int_0^\gamma ds\int\pi(dy_1)\Big(\tilde{H}^f(z+\kappa(x)Z_s,x,y_1)-\tilde{H}^f(x,x,y_1)\Big).$$

$\bar{\Theta}_3(\gamma,x,z,Z)$ is the compensator of $\Theta_3(\gamma,x,z,Z)$. Then, since $\Theta_3(\gamma,x,z,Z)$ is a purely discontinuous process, we have

$$\mathbb{E}\{|(\Theta_3-\bar{\Theta}_3)(\gamma,x,z,Z)|^2\}=\mathbb{E}\{\int_0^\gamma ds\int\pi(dy_1)\big|\tilde{H}^f(z+\kappa(x)Z_s,x,y_1)-\tilde{H}^f(x,x,y_1)\big|^2\}.$$

By Taylor's formula,

$$\tilde{H}^f(z,x,y_1)=\int_0^1\big(f'(z+\theta\kappa(x)y_1)-f'(x)\big)\,\kappa(x)y_1d\theta.$$

It follows that,

$$\begin{aligned}|\tilde{H}^f(z+\kappa(x)Z_s,x,y_1)&-\tilde{H}^f(x,x,y_1)|\\&\le\sup_{\theta\in[0,1]}|f'(z+\kappa(x)(Z_s+\theta y_1))-f'(x+\theta\kappa(x)y_1)|.|\kappa(x)y_1|\\&\quad+|f'(z+\kappa(x)Z_s)-f'(x)|.|\kappa(x)y_1|.\end{aligned}$$

f' is a Lipschitz continuous function. Then, by setting $z=x+\gamma b(x)+\sqrt{\gamma}\sigma(x)u$, we deduce from the assumptions on the coefficients and from the fact that $\mathbb{E}\{|Z_s|^2\}=O(s)$ that

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{|(\Theta_3-\bar{\Theta}_3)(\gamma,x,z,Z)|^2\}\\&\quad\le C\mathbb{E}\{\int_0^\gamma ds\int\pi(dy_1)\Big(\gamma^2|b|^2(x)+\gamma|\sigma(x)|^2u^2+|\kappa(x)|^2|Z_s|^2\Big)|\kappa(x)|^2y_1^2\}\\&\quad\le C\big(\gamma^3V^{a+r}(x)+\gamma^2(1+|u|^2)V^{2r}(x)\big).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Set $F_k=(\Theta_3-\bar{\Theta}_3)(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)})$. Since $\mathbb{E}\{F_k/\mathcal{F}_{k-1}\}=0$, $a+r<p$ and $2r<p/2+a-1$, it follows from Lemma 4.18(a).ii and from the preceding inequality that

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n(\Theta_3-\bar{\Theta}_3)(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)})\xrightarrow{\mathbb{P}}0\quad\text{when } n\to+\infty.\tag{4.24}$$

Now, since $f^{(2)}$ is bounded, we deduce from Taylor's formula that

$$|\tilde{H}^f(z+\kappa(x)Z_s,x,y_1)-\tilde{H}^f(x,x,y_1)|\le C\|\kappa(x)\|^2.|y_1|^2.$$

Then,

$$\mathbb{E}\{|\bar{\Theta}_3(\gamma,x,z,Z)|^2\}\le C\gamma^2\|\kappa(x)\|^4\int|y_1|^2\pi(dy_1)^2\le C\gamma^2V^{2r}(x).$$

By Lemma 4.18(a).ii, it follows that,

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n\Big(\bar{\Theta}_3(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)})-\mathbb{E}\{\bar{\Theta}_3(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\}\Big)\xrightarrow[\mathbb{P}]{n\to+\infty}0.\tag{4.25}$$

Then, by (4.24) and (4.25), (a) is obvious if we prove that

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\}\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}}0 \qquad \text{and,} \tag{4.26}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,2}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\}\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}}0 \qquad \text{with} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma,x,z,Z)\\
&=\gamma\bar{\pi}\int_0^1 ds\int\tilde{\pi}(dy_1)\int_0^1 d\theta\left(f^{(2)}(z+\kappa(x)(Z_{s\gamma}+\theta y_1))-f^{(2)}(z+\theta\kappa(x)y_1)\right)(1-\theta)\kappa^2(x),\\
&\bar{\Theta}_{3,2}(\gamma,x,z)=\gamma\int\tilde{\pi}(dy_1)\int_0^1 d\theta\left(f^{(2)}(z+\theta\kappa(x)y_1)-f^{(2)}(x+\theta\kappa(x)y_1)\right)(1-\theta)\kappa^2(x)
\end{aligned}$$

where $\bar{\pi}=\int y_1^2\pi(dy)(<+\infty)$ and $\tilde{\pi}$ is a probability measure defined by $\tilde{\pi}(dy_1)=y_1^2\pi(dy_1)/\bar{\pi}$. Let us prove (4.26). By Itô's formula, we have

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(z+\kappa(x)(Z_{s\gamma}+\theta y_1))-f^{(2)}(z+\theta\kappa(x)y_1)&=\int_0^{s\gamma}f^{(3)}\big(z+\kappa(x)(Z_{v-}+\theta y_1)\big)\kappa(x)dZ_v\\
&\quad+\sum_{0<v<s\gamma}\tilde{H}^{f^{(2)}}\big(z+\kappa(x)(Z_{v-}+\theta y_1),x,\Delta Z_v\big).
\end{aligned}$$

Since $f^{(3)}$ is bounded, the first term of the right-hand side is a martingale. Therefore, we obtain by the compensation formula that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma,x,z,Z)\}\\
&=\gamma\bar{\pi}\int_0^1 ds\int\tilde{\pi}(dy_1)\int_0^1 d\theta\int_0^{s\gamma}dv\int\pi(dy_2)\mathbb{E}\big\{\tilde{H}^{f^{(2)}}(z+\kappa(x)(Z_v+\theta y_1),x,y_2)\big\}(1-\theta)\kappa^2(x).
\end{aligned}$$

Finally, since

$$|\tilde{H}^{f^{(2)}}\big(z+\kappa(x)(Z_v+\theta y_1),x,y_2\big)|\le C\|f^{(4)}\|_\infty\kappa^2(x)y_2^2,$$

we have

$$\mathbb{E}\{|\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2},Z^{(k)})|/\mathcal{F}_{k-1}\}\le C\gamma_k^2\kappa^4(\bar{X}_{k-1})\le C\gamma_k^2V^{2r}(\bar{X}_{k-1}).$$

Since $2r\le p/2+a-1$, (4.26) follows from Lemma 4.18$(a).i$.
Now, let us prove (4.27). Set $z=x+\gamma b(x)+\sqrt{\gamma}\sigma(x)U_1$. By Taylor's formula, there exist

$$\xi_1\in[x+\sqrt{\gamma}\sigma(x)U_1+\theta\kappa(x)y_1,z+\theta\kappa(x)y_1]\quad\text{and}\quad\xi_2\in[x+\theta\kappa(x)y_1,x+\sqrt{\gamma}\sigma(x)U_1+\theta\kappa(x)y_1]$$

such that

$$\begin{aligned}
&f^{(2)}(z+\theta\kappa(x)y_1)-f^{(2)}(x+\kappa(x)\theta\kappa(x)y_1)\\
&\qquad=\gamma f^{(3)}(\xi_2)b(x)+\sqrt{\gamma}f^{(3)}(x+\theta\kappa(x)y_1)\sigma(x)U_1+\gamma f^{(4)}(\xi_1)\sigma^2(x)U_1^2.
\end{aligned}$$

Since $f^{(3)}$ and $f^{(4)}$ are bounded and U_1 is centered,

$$|\mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,2}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1},\bar{X}_{k,2})/\mathcal{F}_{k-1}\}|\le C\gamma_k^2\big(|b|\kappa^2(\bar{X}_{k-1})+\sigma^2\kappa^2(\bar{X}_{k-1})\big)\le C\gamma_k^2V^{a\vee2r}(\bar{X}_{k-1})$$

where we have used that $a/2 + r \leq a \vee 2r$. Since $a \vee 2r \leq p/2 + a - 1$, we deduce (4.27) from Lemma 4.18(a).i.

b) We keep the notations of (a). On the one hand, by (4.23) and Lemma 4.18(b).*ii*, we have

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} (\Theta_3 - \bar{\Theta}_3)(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)}) \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \to +\infty} 0.$$

On the other hand, we have

$$\mathbb{E}\{|\bar{\Theta}_3(\gamma, x, z, Z)|^2\} \leq C\gamma^2 V^{\frac{\epsilon p}{2}}(x)$$

with $\epsilon \in [0, 1)$. Hence, by Lemma 4.18(b).*ii*, it follows that

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \Big(\bar{\Theta}_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)}) - \mathbb{E}\{\bar{\Theta}_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\} \Big) \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \to +\infty} 0.$$

Finally, it suffices to prove that

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} m_{3,1} \tag{4.28}$$

$$\text{and,} \quad \frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,2}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} m_{3,2}. \tag{4.29}$$

with $m_{3,1} + m_{3,2} = \int \phi_3(x)\nu(dx)$. In order to prove (4.28), we first show that

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\} - \bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k-1}, 0) \Big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{4.30}$$

Since $f^{(4)}$ is a bounded and Lipschitz continuous function, we have for every $\delta \in (0, 1/2]$

$$\Big| \tilde{H}^{f^{(2)}}(z + \kappa(x)(Z_v + \theta y_1), x, y_2) - \tilde{H}^{f^{(2)}}(z + \kappa(x)(Z_v + \theta y_1), x, y_2) \Big| \\ \leq C[f^{(4)}]_{2\delta} \Big(|z - x|^{2\delta} + \kappa(x)^{2\delta} |Z_v|^{2\delta} \Big) \kappa(x)^2 y_2^2.$$

By setting $z = x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma}\sigma(x)u$ and taking δ sufficiently small, we have

$$\mathbb{E}\{|\tilde{H}^{f^{(2)}}(z + \kappa(x)(Z_v + \theta y_1), x, y_2) - \tilde{H}^{f^{(2)}}(x + \kappa(x)\theta y_1, x, y_2)|\} \leq C\gamma^{\delta}(1 + |u|^{2\delta}) V^{\frac{p}{2} + a - 1}(x).$$

This implies that

$$\Big| \mathbb{E}\Big\{ \bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)}) - \bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k-1}, 0)/\mathcal{F}_{k-1} \Big\} \Big| \leq C\gamma_k^{2+\delta} V^{\frac{p}{2} + a - 1}(\bar{X}_{k-1}).$$

Then, (4.30) follows from Lemma 4.18(b).*i*.
Now, $\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k-1}, 0)$ is $\mathcal{F}_{k-1}$-measurable and

$$|\bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k-1}, 0)| \leq C\gamma_k^2 V^{2r}(\bar{X}_{k-1}).$$

Since $2r < p/2 + a - 1$, we can apply Proposition 4.3 with $\eta_k = \gamma_k^2$. We obtain

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k-1}, 0) = \frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^2}{2} \phi_{3,1}(\bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} \int \phi_{3,1}(x)\nu(dx) \quad a.s.$$

$$\text{with} \quad \phi_{3,1}(x) = \frac{1}{2} \int \pi(dy_1) \int_0^1 d\theta \int \pi(dy_2) \tilde{H}^{f^{(2)}}\big(x + \kappa(x)\theta y_1, x, y_2\big)(1-\theta)\kappa^2(x) y_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \int \pi(dy_1) \int \pi(dy_2) \tilde{H}^{\tilde{H}^f_{\cdot,x,y_1}}(x, x, y_2).$$

It follows from (4.30) that

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \bar{\Theta}_{3,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2}, Z^{(k)})/\mathcal{F}_{k-1}\} \xrightarrow{n\to+\infty} m_{3,1} = \int \phi_{3,1}(x)\nu(dx) \quad a.s.$$

Finally, we prove (4.29). Since $f^{(3)}$ and $f^{(4)}$ are bounded and Lipschitz continuous, we deduce from Taylor's formula that for every $\delta \in [0, 1/2]$,

$$\mathbb{E}\{\bar{\Theta}_{3,2}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_{k,2})/\mathcal{F}_{k-1}\} = \gamma_k^2(\phi_{3,2}(\bar{X}_{k-1}) + \phi_{3,3}(\bar{X}_{k-1})) + \bar{\rho}_1(\bar{X}_{k-1}, \gamma_k) + \bar{\rho}_2(\bar{X}_{k-1}, \gamma_k)$$

$$\text{with} \quad \phi_{3,2}(x) = \int \pi(dy_1) \int_0^1 d\theta f^{(3)}(x + \theta\kappa(x)y_1) b(x)(1-\theta)(\kappa(x)y_1)^2$$

$$\phi_{3,3}(x) = \int \pi(dy_1) \int_0^1 d\theta \int \mathbb{P}_{U_1}(du) f^{(4)}(x + \theta\kappa(x)y_1)\sigma^2(x)u^2(1-\theta)(\kappa(x)y_1)^2$$

$$|\bar{\rho}_1(x,\gamma)| \le [f^{(3)}]_\delta \gamma^{2+\delta} |b(x)|^{1+\delta} |\kappa(x)|^2 \quad \text{and} \quad |\bar{\rho}_2(x,\gamma)| \le [f^{(4)}]_{2\delta} \gamma^{2+\delta} |\sigma(x)|^{2(1+\delta)} |\kappa(x)|^2.$$

Since $(a/2 + r) \vee (2r) < p/2 + a - 1$, one can find $\delta > 0$ such that

$$|b(x)|^{1+\delta}|\kappa(x)|^2 + |\sigma(x)|^{2(1+\delta)}|\kappa(x)|^2 \le V^{\frac{p}{2}+a-1}(x).$$

On the one hand, Lemma 4.18$(b).i$ and the assumptions on the coefficients allow us to conclude that

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \Big(\bar{\rho}_1(\bar{X}_{k-1}, \gamma_k) + \bar{\rho}_2(\bar{X}_{k-1}, \gamma_k)\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

On the other hand, as $|b|(x)|\kappa|^2(x) + |\sigma|^2(x)|\kappa|^2(x) = o(V^{\frac{p}{2}+a-1}(x))$ when $|x| \to +\infty$, we derive from Proposition 4.3 applied with $\eta_k = \gamma_k^2$ that

$$\frac{1}{\Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2(\phi_{3,2}(\bar{X}_{k-1}) + \phi_{3,3}(\bar{X}_{k-1})) \xrightarrow{n\to+\infty} m_{3,2}$$

with $m_{3,2} = \int(\phi_{3,2}(x) + \phi_{3,3}(x))\nu(dx)$. Checking that

$$\phi_{3,2}(x) + \phi_{3,3}(x) = \int \pi(dy_1)\Big((H^f_{\cdot,x,y_1})'(x)b(x) + \int \mathbb{P}_{U_1}(du)(H^f_{\cdot,x,y_1})^{(2)}(x)(\sigma(x)u)^2\Big).$$

completes the proof.

4.5 Proof of Theorem 4.8

The proof is built as follows. Like in the proof of Theorem 4.6, we firstly decompose $\bar{\nu}_n^P(Af)$ and $\bar{\nu}_n^W(Af)$ (see Lemma 4.19). Some new terms appear due to the approximation of the jump component. That is why in the sequel, we focus on these parts of the decomposition (see Lemmas 4.20 and 4.21). The other terms can be studied by the same process as their corresponding terms in the decomposition of $\bar{\nu}_n(Af)$ and then, are left to the reader. We denote by $(Z^{(k)_P})_{k\geq 1}$, a sequence of independent and càdlàg processes such that

$$(Z_t^{(k)_P})_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Z_{t,k})_{t\geq 0} \quad \text{and} \quad Z_{\gamma_k}^{(k)_P} = \bar{Z}_k^P \quad \forall k \geq 1$$

For a C^2-function f such that $D^2 f$ is bounded, we define $A^{k,P}$ and $A^{k,W}$ by

$$A^{k,P}f(x) = \langle \nabla f, b\rangle(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(x) + \int_{\{|y|>u_k\}} \tilde{H}^f(x,x,y)\pi(dy)$$

$$A^{k,W}f(x) = A^{k,P}f(x) + \frac{1}{2}\int_{\{|y|\leq u_k\}} D^2 f(x)(\kappa(x)y)^{\otimes 2}\pi(dy),$$

These operators correspond respectively to the infinitesimal generators of

$$dX_t = b(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_{t,k} \quad \text{and}$$
$$dX_t = b(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})d(Z_{t,k} + Q_k\tilde{W}_t),$$

where $\tilde{W}$ is a q-dimensional Brownian motion independent of W and $(Z_{t,k})_{t\geq 0}$.

Lemma 4.19 *For a C^2-function f such that $D^2 f$ is bounded, we have the following decompositions*

$$\begin{aligned}
1)\quad \sum_{k=1}^n \gamma_k Af(\bar{X}_{k-1}^P) &= G_n^P + f(\bar{X}_n^P) - f(x) - \sum_{k=1}^n \Big(\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P, U_k) + \xi_{2,P}^k(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P, Z^{(k)_P})\Big) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \Big(\Theta_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P) + \Theta_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P, U_k) + \Theta_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P, \bar{X}_{k,2}^P, Z^{(k)_P})\Big) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \Big((R_1+R_2)(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P, U_k) + R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^P, \bar{X}_{k,2}^P, Z^{(k)_P})\Big),
\end{aligned}$$

where $\bar{X}_{k,2}^P = \bar{X}_{k-1}^P + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}^P) + \sqrt{\gamma_k}\sigma(\bar{X}_{k-1}^P)U_k$, $G_n^P = \sum_{k=1}^n \gamma_k(Af - A^{k,P}f)(\bar{X}_{k-1}^P)$ and for a càdlàg process Y,

$$\xi_{2,P}^k(\gamma, x, Y) = \int_0^\gamma \langle \nabla f(x), \kappa(x)dY_s\rangle + \Big(\sum_{0<s\leq\gamma} \tilde{H}^f(x,x,\Delta Y_s)) - \gamma\int_{D_k} \tilde{H}^f(x,x,y)\pi(dy)\Big).$$

$$\begin{aligned}
2)\sum_{k=1}^n \gamma_k Af(\bar{X}_{k-1}^W) &= G_n^W + J_n^W + f(\bar{X}_n^W) - f(x) - \sum_{k=1}^n \Big(\xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, U_k) + \xi_{2,B}^k(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, Z^{(k)_P})\Big) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \Big(\Theta_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W) + \Theta_2(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, U_k) + \Theta_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, \bar{X}_{k,2}^P, Z^{(k)_P})\Big) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \Big((R_1+R_2)(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, U_k) + R_3(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, \bar{X}_{k,2}^P, Z^{(k)_P})\Big),
\end{aligned}$$

where $\bar{X}^W_{k,2} = \bar{X}^W_{k-1} + \bar{X}^W_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}^W_{k-1}) + \sqrt{\gamma_k}\sigma(\bar{X}^W_{k-1})U_k$,

$$G^W_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k (Af - A^{k,W}f)(\bar{X}^W_{k-1}), \qquad J^W_n = -\sum_{k=1}^n f(\bar{X}^W_k) - f(\bar{X}^W_{k,3}) + \gamma_k (A^{k,P}f - A^{k,W}f)(\bar{X}^W_{k-1}),$$

with $\bar{X}^W_{k,3} = \bar{X}^W_k - \kappa(\bar{X}^W_{k-1})Q_k\Lambda_k$.

The two following lemmas are devoted to the additional terms of the preceding decomposition. In lemma 4.20, we compute the rate of G^P_n and G^W_n and in lemma 4.21, we show that J^W_n does not have any consequences on the rate of the procedure.

Lemma 4.20 *Let* $a \in (0,1]$, $r \geq 0$ *and* $p > 2$ *such that* $(\mathbf{H_p})$, $(\mathbf{R_a})$, $(\mathbf{S_{a,r}})$ *hold and* $2r < p/2 + a - 1$. *Suppose that* $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\} < +\infty$ *and* $\mathbb{E}\{|\Lambda_1|^{2p}\} < +\infty$. *Let* $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ *satisfying* $(\mathbf{C^p_f})$. *Then,*

(1) i. If $\lim_{n\to+\infty} \beta^{(2)}_{n,\pi} < +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}} \sum_{k=1}^n \gamma_k (Af - A^{k,P}f)(\bar{X}^P_{k-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

ii. If $\lim_{n\to+\infty} \beta^{(2)}_{n,\pi} = +\infty$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta^{(2)}_{n,\pi}} \sum_{k=1}^n \gamma_k \left|(Af - A^{k,P}f)(\bar{X}^P_{k-1})\right| \leq \bar{m}_2 \quad a.s.$$

where $\bar{m}_2 = \frac{\|D^2 f\|_\infty}{2} \int \|\kappa\|^2(x)\nu(dx)$. *Furthermore, if* $(\mathbf{A^2_2})$ *holds,*

$$\frac{1}{\beta^{(2)}_{n,\pi}} \sum_{k=1}^n \gamma_k (Af - A^{k,P}f)(\bar{X}^P_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} m_2 \quad a.s. \quad \text{with } |m_2| \leq \bar{m}_2. \tag{4.31}$$

(2) Assume that $s = 3$ *or that* $s = 4$ *if* π *is quasi-symmetric in the neighborhood of 0.*

i. If $\lim_{n\to+\infty} \beta^{(s)}_{n,\pi} < +\infty$ $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}} \sum_{k=1}^n \gamma_k (Af - A^{k,W}f)(\bar{X}^W_{k-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

ii. If $\lim_{n\to+\infty} \beta^{(s)}_{n,\pi} = +\infty$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta^{(3)}_{n,\pi}} \sum_{k=1}^n \gamma_k \left|(Af - A^{k,W}f)(\bar{X}^W_{k-1})\right| \leq \bar{m}_s \quad a.s.$$

where $\bar{m}_s = C_s \|D^s f\|_\infty \int \|\kappa(x)\|^s \nu(dx)$ *with* $C_3 = \frac{d^{\frac{3}{2}}}{6}$ *and* $C_4 = \frac{d^2}{24}$. *Furthermore, if ,* $(\mathbf{A^2_s})$ *holds,*

$$\frac{1}{\beta^{(s)}_{n,\pi}} \sum_{k=1}^n \gamma_k (Af - A^{k,W}f)(\bar{X}^W_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} m_s \quad a.s. \quad \text{with } |m_s| \leq \bar{m}_s. \tag{4.32}$$

Proof: (1)*i*. By Taylor's formula, we have

$$|Af(x) - A^{k,P}f(x)| = \frac{1}{2}\int D^2 f(\xi_y)(\kappa(x)y)^{\otimes 2}\pi(dy) \leq \frac{\|D^2 f\|_\infty}{2} \int \sum_{i,j} |(\kappa(x)y)_i (\kappa(x)y)_j| \pi(dy).$$

For $z \in \mathbb{R}^d$, $|\sum_{i,j} z_i z_j| \leq |z|_1^2 \leq d|z|^2$. It follows that

$$|Af(\bar{X}^P_{k-1}) - A^{k,P}f(\bar{X}^P_{k-1})| \leq \frac{\|D^2 f\|_\infty}{2} \|\kappa\|^2(\bar{X}^P_{k-1}) \int_{|y|\leq u_k} |y|^2 \pi(dy). \tag{4.33}$$

Since $r \le p/2$ and $\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{k-1}^P)\} \le \Gamma_k$, we deduce that

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathbb{E}\{|Af(\bar{X}_{k-1}^P) - A^{k,P} f(\bar{X}_{k-1}^P)|\} \le \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \int_{|y|\le u_k} |y|^2 \pi(dy) \sqrt{\Gamma_k}.$$

Now, as $\lim_{n\to+\infty} \beta_{n,\pi}^{(2)} < +\infty$, the Kronecker lemma yields

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \int_{|y|\le u_k} |y|^2 \pi(dy) \sqrt{\Gamma_k} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

The first assertion is obvious.
ii. Since $\lim_{n\to+\infty} \beta_{n,\pi}^{(2)} = +\infty$, we deduce from Proposition 4.3 with $\eta_k = \gamma_k \int_{|y|\le u_k} |y|^2 \pi(dy)$ that

$$\frac{1}{\beta_{n,\pi}^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \int_{|y|\le u_k} |y|^2 \pi(dy) \|\kappa(\bar{X}_{k-1}^P)\|^2 \xrightarrow{n\to+\infty} \int \|\kappa(x)\|^2 \nu(dx) \quad a.s.$$

because $\|\kappa\|^2 = o(V^{\frac{p}{2}+a-1})$. Then, the second assertion follows from (4.33).
Assume now that $(\mathbf{A_2^2})$ holds. Since $D^2 f$ is Lipschitz continuous, we deduce from Taylor's formula that

$$Af(x) - A^{k,P} f(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j} \rho_k(i,j) \psi_{i,j}(x) + R_{i,j}^k(x) \Big)$$

$$\text{with} \quad \rho_k(i,j) = \int_{\{|y|\le u_k\}} y_i y_j \pi(dy), \quad \psi_{i,j}(x) = \sum_{l,m} \kappa_{i,l} \frac{\partial^2 f}{\partial_l \partial_m} \kappa_{m,j}(x))$$

and $|R_{i,j}^k(x)| \le \int_{\{|y|\le u_k\}} |y|^3 \pi(dy) \|\kappa(x)\|^3$.
According to $(\mathbf{A_2^2})$, for every i,j, $\lim \rho_k(i,j) / \int_{\{|y|\le u_k\}} |y|^2 \pi(dy) = \alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$. Set $\eta_k = \gamma_k \int_{\{|y|\le u_k\}} |y|^2 \pi(dy)$ and $H_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$. Then,

$$\frac{1}{\beta_{n,\pi}^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \rho_k(i,j) \psi_{i,j}(\bar{X}_{k-1}^P) = \frac{\alpha_{i,j}}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_{i,j}(\bar{X}_{k-1}^P) + \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^1 \eta_k \psi_{i,j}(\bar{X}_{k-1}^P)$$

with $\varepsilon_k^1 = (\rho_k(i,j) - \alpha_{i,j}\eta_k)/\eta_k$. Firstly, since $\psi_{i,j} \le CV^r$ and $r < p/2 + a - 1$, Proposition 4.3 applied with $\eta_k = \gamma_k \int_{\{|y|\le u_k\}} |y|^2 \pi(dy)$ yields

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_{i,j}(\bar{X}_{k-1}^P) \xrightarrow{n\to+\infty} \int \psi_{i,j}(x) \nu(dx) \quad a.s.$$

Secondly, $\varepsilon_k^1 = o(1)$. Since $\sup_{n\ge1} 1/H_n \sum_{k=1}^n \eta_k V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}_{k-1}^P) < +\infty$ $a.s.$, it is then easy to check that

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^1 \eta_k \psi_{i,j}(\bar{X}_{k-1}^P) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad a.s.$$

The same argument is appropriate for $R_{i,j}^k$ with $\varepsilon_k^2 = (\int_{\{|y|\le u_k\}} |y|^3 \pi(dy))/(\int_{\{|y|\le u_k\}} |y|^2 \pi(dy))$.
Finally, we obtain

$$\frac{1}{\beta_{n,\pi}^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k (Af - A^{k,P} f)(\bar{X}_{k-1}^P) \xrightarrow{n\to+\infty} m_2 = \sum_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{2} \int \psi_{i,j}(x) \nu(dx).$$

2) We derive from Taylor's formula

$$|Af(x) - A^{k,W}f(x)| \leq C_s \|D^s f\|_\infty \|\kappa\|^s(x) \int_{|y|\leq u_k} |y|^s \pi(dy). \tag{4.34}$$

with $s = 3$ and $C_3 = \frac{d^3}{6}$, or $s = 4$ and $C_4 = \frac{d^2}{24}$ if $\int_{|y|\leq u_k} y^{\otimes 3}\pi(dy) = 0$. As $2r \leq p/2$ and $\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}^W_{k-1})\} \leq \Gamma_k$, it implies that

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \mathbb{E}\{|Af - A^{k,W}f|(\bar{X}^W_{k-1})\} \leq C \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{|y|\leq u_k} |y|^s \pi(dy)\sqrt{\Gamma_k},$$

with $s = 3$ or $s = 4$ if $\int_{|y|\leq u_k} y^{\otimes 3}\pi(dy) = 0$. If $\lim_{n\to+\infty} \beta^{(s)}_{n,\pi} < +\infty$, we derive from the Kronecker lemma that

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}} \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{|y|\leq u_k} |y|^s \pi(dy)\sqrt{\Gamma_k} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

and the first assertion of 2) follows.
Assume now that $\lim_{n\to+\infty} \beta^{(s)}_{n,\pi} = +\infty$. Applying Proposition 4.3 to $f(x) = \|\kappa(x)\|^s$ with $\eta_k = \gamma_k \int_{|y|\leq u_k} |y|^s \pi(dy)$ yields

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta^{(s)}_{n,\pi}} \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{|y|\leq u_k} |y|^s \pi(dy) \|\kappa(\bar{X}^W_{k-1})\|^s < +\infty \quad a.s.$$

Then, (2).*ii* follows from (4.34).
Finally, the proof of (4.32) is similar to that of (4.31). □

Lemma 4.21 *Let $a \in (0,1]$, $r \geq 0$ and $p > 2$ such that $(\mathbf{H_p})$, $(\mathbf{R_a})$, $(\mathbf{S_{a,r}})$ hold and $2r < p/2 + a - 1$. Suppose that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2p}\} < +\infty$ and that $\mathbb{E}\{|\Lambda_1|^{2p}\} < +\infty$. Let $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ satisfying $(\mathbf{C^p_f})$. Then,*

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n \vee \Gamma^{(2)}_n}} \sum_{k=1}^n \left(f(\bar{X}^W_k) - f(\bar{X}^W_{k,3}) + \gamma_k (A^{k,P}f - A^{k,W}f)(\bar{X}^W_{k-1}) \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{4.35}$$

Proof: Since

$$(A^{k,W}f - A^{k,P}f)(x) = \frac{1}{2} \int_{\{|y|\leq u_k\}} D^2 f(x)(\kappa(x)y)^{\otimes 2}\pi(dy) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{D^2 f(x)(\kappa(x)Q_k\Lambda_k)^{\otimes 2}\},$$

we derive from Taylor's formula that

$$\begin{aligned} f(\bar{X}^W_k) - f(\bar{X}^W_{k,3}) + \gamma_k (A^{k,P}f - A^{k,W})f(\bar{X}^W_{k-1}) &= \xi_1(\gamma_k, \bar{X}^W_{k,3}, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k) \\ &+ \tilde{R}_{k,1}(\gamma_k, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k) + \tilde{R}_{k,2}(\gamma_k, \bar{X}^W_{k,3}, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k) \end{aligned}$$

where, $\xi_1(\gamma, z, x, Q_k\Lambda_k) = \sqrt{\gamma}\langle \nabla f(z), \kappa(x)Q_k\Lambda_k\rangle$,

$$\tilde{R}_{k,1}(\gamma, x, Q_k\Lambda_k) = \frac{\gamma}{2}\big(D^2 f(x)(\kappa(x)Q_k\Lambda_k)^{\otimes 2} - \mathbb{E}\{D^2 f(x)(\kappa(x)Q_k\Lambda_k)^{\otimes 2}\}\big)$$

$$\tilde{R}_{k,2}(\gamma, z, x, Q_k\Lambda_k) = \gamma\int_0^1 \big(D^2 f(z + \theta\sqrt{\gamma}\kappa(x)Q_k\Lambda_k) - D^2 f(x)\big)(1-\theta)(\kappa(x)Q_k\Lambda_k)^{\otimes 2}d\theta.$$

Setting $\theta_n = \sqrt{\Gamma_n} \vee \Gamma_n^{(2)}$, it suffices to show the three following steps:

a) $\theta_n^{-1}\sum_{k=1}^n \xi_1(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, Q_k\Lambda_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$,

b) $\theta_n^{-1}\sum_{k=1}^n \tilde{R}_{k,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, Q_k\Lambda_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

c) $\theta_n^{-1}\sum_{k=1}^n \tilde{R}_{k,2}(\gamma_k, \bar{X}_{k,3}^W, \bar{X}_{k-1}^W, Q_k\Lambda_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

a) We set

$$\xi_1(\gamma, z, x, Q_k\Lambda_k) = \xi_{1,1}(\gamma, x, Q_k\Lambda_k) + \xi_{1,2}(\gamma, z, x, Q_k\Lambda_k)$$

with $\xi_{1,1}(\gamma, x, v) = \sqrt{\gamma}\langle \nabla f(x), \kappa(x)v\rangle$ and $\xi_{1,2}(\gamma, z, x, v) = \sqrt{\gamma}\langle \nabla f(z) - \nabla f(x), \kappa(x)v\rangle$. Let $(M_{n,1})$ and $(M_{n,2})$ be the $(\mathcal{F}_n)$-martingales defined by

$$M_{n,1} = \sum_{k=1}^n \xi_{1,1}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}^W, Q_k\Lambda_k) \quad \text{and} \quad M_{n,2} = \sum_{k=1}^n \xi_{1,2}(\gamma_k, \bar{X}_{k,3}^W, \bar{X}_{k-1}^W, Q_k\Lambda_k).$$

We have to prove that $\theta_n^{-1}M_{n,1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ and $\theta_n^{-1}M_{n,2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.
According to $(\mathbf{C_f^p})$ and the assumptions on κ, we check that

$$\frac{< M >_{n,1}}{\Gamma_n} \le \frac{C}{\Gamma_n}\sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{|y|\le u_k} |y|^2\pi(dy)V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}_{k-1}^W).$$

Now, by (4.6), $\sup_{n\ge 1} 1/\Gamma_n \sum_{k=1}^n \gamma_k V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}_{k-1}^W) < +\infty$ $a.s.$ Since $\int_{|y|\le u_k}|y|^2\pi(dy) \xrightarrow{k\to+\infty} 0$, that $< M >_{n,1}/\Gamma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $a.s.$ Then

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n} \vee \Gamma_n^{(2)}}|M_{n,1}| \le \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}|M_{n,1}| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{4.36}$$

Now, we turn to $(M_{n,2})$. ∇f is Lipschitz continuous. Then, it follows from the assumptions on the coefficients that

$$\mathbb{E}\{|\xi_{1,2}(\gamma_k, \bar{X}_{k,3}^W, \bar{X}_{k-1}^W, Q_k\Lambda_k)|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} \le C\int_{|y|\le u_k}|y|^2\pi(dy)\Big(\gamma_k^3 V^{\epsilon p}(\bar{X}_{k-1}^W) + \gamma_k^2 V^{\epsilon\frac{p}{2}}(\bar{X}_{k-1}^W)\Big).$$

with $\epsilon < 1$ and $\bar{p} = p/2 + a - 1$. Then, by a variant of Lemma 4.18$(a).ii$ and $(b).ii$, one checks that

$$\frac{< M_{n,2} >}{(\sqrt{\Gamma_n} \vee \Gamma_n^{(2)})^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad a.s. \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n} \vee \Gamma_n^{(2)}} M_{n,2} \xrightarrow[L^2]{n\to+\infty} 0.$$

b) $\tilde{R}_{k,1}$ is very closed to R_2 introduced in Lemma 4.13 and the arguments are similar.
c) As $D^2 f$ is bounded, one observes that

$$\mathbb{E}\{|\tilde{R}_{k,2}(\gamma_k, \bar{X}^W_{k,2}, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k)|^2/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq C\gamma_k^2 V^{2r}(\bar{X}^W_{k-1}).$$

Then, since $2r < p/2$, a variant of Lemma 4.18$(a).ii$ and $(b).ii$ yields

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n} \vee \Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \Big(\tilde{R}_{k,2}(\gamma_k, \bar{X}^W_{k,2}, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k) - \mathbb{E}\{\tilde{R}_{k,2}(\gamma_k, \bar{X}^W_{k,2}, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k)/\mathcal{F}_{k-1}\} \Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{4.37}$$

By setting $\zeta_{k,\theta}(x) = x + \gamma_k b(x) + \sqrt{\gamma_k}\sigma(x)U_k + \kappa(x)(\bar{Z}_k + \theta Q_k\Lambda_k)$, we decompose the integrand of $\tilde{R}_{2,k}$ as follows:

$$D^2 f(\zeta_{k,\theta}(x)) - D^2 f(x) = \big(D^2 f(x + \gamma_k b(x)) - D^2 f(x)\big) + \big(D^2 f(\zeta_{k,\theta}(x)) - D^2 f(x + \gamma_k b(x))\big).$$

On the one hand, set $y_k = \sqrt{\gamma_k} Q_k\Lambda_k$. By Taylor's formula, we have

$$(D^2 f(x + \gamma_k b(x)) - D^2 f(x)) y_k^{\otimes 2} = D^3 f(\xi_k^1); \gamma_k b(x); y_k^{\otimes 2}$$

where $D^3 f(u); v; y^{\otimes 2} := \sum_{i,j} \langle \nabla D^2 f_{i,j}(u), v\rangle y_i y_j$ and $\xi_k^1 \in [x, x + \gamma_k b(x)]$. Thus, since $D^3 f$ is bounded, we deduce that

$$\Big|\mathbb{E}\Big\{ D^3 f(\bar{X}^W_{k-1}); \gamma_k b(\bar{X}^W_{k-1}); (\kappa(\bar{X}^W_{k-1})Q_k\Lambda_k)^{\otimes 2}/\mathcal{F}^W_{k-1} \Big\}\Big| \leq C\gamma_k \int_{|y|\leq u_k} |y|^2 \pi(dy) V^{\frac{a}{2}+r}(\bar{X}^W_{k-1}).$$

On the other hand, set $\Delta_\theta(\gamma_k, x) = \zeta_{k,\theta}(x) - (x + \gamma b(x))$. By Taylor's formula,

$$\begin{aligned}(D^2 f(\zeta_{k,\theta}(x)) - D^2 f(x + \gamma b(x)))y_k^{\otimes 2} &= D^3 f(x); \Delta_\theta(\gamma_k, x); y_k^{\otimes 2} \\ &\quad + \frac{1}{2} D^4 f(\xi_k^2); (\Delta_\theta(\gamma_k, x))^{\otimes 2}; y_k^{\otimes 2}\end{aligned}$$

where $D^4 f(u); v^{\otimes 2}; y^{\otimes 2} = \sum_{i,j} D^2(D^2 f_{i,j}(u)) v^{\otimes 2} y_i y_j$ and $\xi_k^2 \in [x + \gamma b(x), \zeta_{k,\theta}(x)]$. The random variables U_k, $\bar{Z}_k$ and Λ_k are independent and independent of $\mathcal{F}^W_{k-1}$. Then, since $\mathbb{E}\{U_k/\mathcal{F}^W_{k-1}\} = \mathbb{E}\{\bar{Z}_k/\mathcal{F}^W_{k-1}\} = \mathbb{E}\{\Lambda_k^{\otimes 3}/\mathcal{F}^W_{k-1}\} = 0$, we have

$$\mathbb{E}\Big\{ D^3 f(\bar{X}^W_{k-1}); \Delta_\theta(\gamma_k, \bar{X}^W_{k-1}); (\kappa(\bar{X}^W_{k-1})Q_k\Lambda_k)^{\otimes 2}/\mathcal{F}^W_{k-1} \Big\} = 0.$$

Now, since $D^4 f$ is bounded, one checks that

$$\mathbb{E}\Big\{ |D^4 f(\bar{X}^W_{k-1}); \big(\Delta_\theta(\gamma_k, \bar{X}^W_{k-1})\big)^{\otimes 2}; (\kappa(\bar{X}^W_{k-1})Q_k\Lambda_k)^{\otimes 2}/\mathcal{F}^W_{k-1}| \Big\} \leq C \int_{|y|\leq u_k} |y|^2 \pi(dy)\gamma_k V^{2r}(\bar{X}^W_{k-1}).$$

Since $a/2 + r \leq p/2 + a - 1$ and $2r \leq p/2 + a - 1$, it follows that

$$|\mathbb{E}\{\tilde{R}_{k,2}(\gamma_k, \bar{X}^W_{k,2}, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}| \leq C \int_{|y|\leq u_k} |y|^2 \pi(dy)\gamma_k^2 V^{\frac{p}{2}+a-1}(\bar{X}^W_{k-1})$$

By a variant of lemma 4.18$(a).i$ and $(b).i$, we derive from the previous inequality that

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_n} \vee \Gamma_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\{\tilde{R}_{k,2}(\gamma_k, \bar{X}^W_{k,2}, \bar{X}^W_{k-1}, Q_k\Lambda_k)/\mathcal{F}_{k-1}\} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

Assertion c) then follows from (4.37). □

4.6 An additional result

In this section, we present a partial extension of the main results when the Lévy process has a moment of order $2p$ with $p \in (1,2]$. In this case, stating some global results as in Theorems 4.6 and 4.8 would need two kinds of restrictions: either to suppose that at least, the derivatives of f tend to 0 when $|x| \to +\infty$ or to impose more constraints on the growth of the coefficients. The first alternative leads to a very technical proof and the second one can not be really envisaged for the drift term. Actually, we recall that in this type of problem, b produces the mean-reverting effect and then, it would not be natural to suppose that for instance, b is bounded .
That is why we propose to state a partial result for fast-decreasing steps for which the extension does only require some weak restrictions on f. We introduce a new assumption on the steps depending on the intensity of the mean-reverting:

$$\frac{\Gamma_n^{(2)}}{\sqrt{\Gamma_n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \text{if } a=1 \text{ and,} \quad \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^2\Gamma_k^{\frac{a\vee(2r)}{p}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \text{if } a<1. \tag{4.38}$$

Then,

Theorem 4.22 *Assume that* $\mathbb{E}\{|Z_t|^{2p}\} < +\infty$ *with* $p \in (1,2]$ *and that* (4.2) *admits a unique invariant distribution* ν *. Let* $a \in (0,1]$ *and* $r \geq 0$ *such that* $(\mathbf{R_a})$ *and* $(\mathbf{S_{a,r}})$ *are satisfied and such that* $p/2 + a - 1 > r$*. If moreover* $\mathbb{E}\{U_1^{\otimes 3}\} = 0$, $\mathbb{E}\{|U_1|^4\} < +\infty$, $\eta_n = \gamma_n$ *for every* $n \geq 1$*, then for every function* $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^4$ *having bounded derivatives and satisfying* $f \leq C\sqrt{V}$*,*
(a) Scheme (E): If (4.38) *holds,* $\sqrt{\Gamma_n}\bar{\nu}_n(Af) \underset{n\to+\infty}{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \hat{\sigma}_f^2\right)$.
(b) Scheme (P): If (4.38) *holds and* $\beta_{n,\pi}^{(2)}/\sqrt{\Gamma_n} \to 0$*, the conclusion of* (a) *is valid for Scheme (P).*
(c) Scheme (W): If (4.38) *holds and* $\beta_{n,\pi}^{(s)}/\sqrt{\Gamma_n} \to 0$*, with* $s=3$ *or* $s=4$ *if* π *is quasi-symmetric in the neighborhood of 0, the conclusion of* (a) *is valid for Scheme (W).*

Remark 4.23 Assumption (4.38) is less constraining when $a=1$ because the L^p-control of the Euler scheme is better in this case (see Proposition 4.3). Note that when $a=1$, Theorem 4.22(a) corresponds to Theorem 4.6(a) when $\hat{\gamma}=0$.
Let $\gamma_k = Ck^{-\rho}$ with $\rho \in (0,1]$ and $C>0$. For Scheme (E), Theorem 4.22 applies in the following cases:

$$\rho > \frac{1}{3} \quad \text{if } a=1 \quad \text{and} \quad \rho > \frac{p+2\eta}{3p+2\eta} \quad \text{if } a<1$$

where $\eta = a \vee (2r)$. Since $\sqrt{\Gamma_n} \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{C}{1-\rho}} n^{\frac{1-\rho}{2}}$ if $\rho \in (0,1)$, we derive that for every $\epsilon > 0$, there exists an Euler scheme with polynomial step such that the rate of convergence is of order $n^{\frac{1}{3}-\epsilon}$ if $a=1$ and $n^{\frac{p}{3p+2\eta}-\epsilon}$ if $a<1$.

Indications for the proof of Theorem 4.22. We only focus on Scheme (E). According to the decomposition obtained in 4.13, it suffices to prove that Lemmas 4.14, 4.17(a) and 4.15(a) hold true under the assumptions of Theorem 4.22. First, one can check that Lemme 4.14 holds true if Assertion (4.9) remains valid in this case. Since ∇f is bounded, it is easy to show that

for every $\delta > 0$ such that $2(1+\delta) \le 2p$,

$$\mathbb{E}\{|\xi_2(\gamma, x, Z)|^{2(1+\delta)}\} \le C_1(x)\mathbb{E}\Big\{\Big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^2\Big)^{1+\delta}\Big\}.$$

Then, checking that $\mathbb{E}\Big\{\Big(\sum_{0<s\le\gamma} |\Delta Z_s|^2\Big)^{1+\delta}\Big\} = O(\gamma)$ yields the result. For Lemmas 4.14, 4.17(a) and 4.15(a), the result essentially follows from the fact that ∇f is bounded and from the following variant of Lemma 4.18:

Lemma 4.24 *Let $a \in (0,1]$, $p > 1$ and $r \ge 0$. Assume $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{S_{a,r}})$ and $(\mathbf{R_a})$. Suppose that $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 2)}\} < +\infty$. Let (F_k) be a sequence of random variables such that F_k is $\mathcal{F}_k$-measurable and let (B_n) be defined by $B_n = 1/\sqrt{\Gamma_n}\sum_{k=1}^n F_k$. Then, $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ in the following cases:*
(a) (4.38) *holds and*

$$\mathbb{E}\{|F_k|/\mathcal{F}_{k-1}\} \le \begin{cases} C\gamma_k^2 V^p(\bar{X}_{k-1}) & \text{if } a = 1 \\ C\gamma_k^2 V^{a\vee 2r}(\bar{X}_{k-1}) & \text{if } a < 1 \end{cases}$$

(b) (4.38) *holds, $\mathbb{E}\{F_k/\mathcal{F}_{k-1}\} = 0$ and there exists $s \in (1,2]$ such that*

$$\mathbb{E}\{|F_k|^s/\mathcal{F}_{k-1}\} \le \begin{cases} C\gamma_k^2 V^p(\bar{X}_{k-1}) & \text{if } a = 1 \\ C\gamma_k^2 V^{a\vee 2r}(\bar{X}_{k-1}) & \text{if } a < 1. \end{cases}$$

Proof: (a). We derive from Proposition 4.3(a).*iii* that

$$\mathbb{E}\{|B_n|\} \le C \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 & \text{if } a = 1 \\ \\ \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n}}\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \Gamma_k^{\frac{a\vee 2r}{p}} & \text{if } a < 1, \end{cases}$$

and it follows from (4.38) that $B_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ in L^1.
(b). Denote by $(M_n)_{n\ge1}$, the martingale defined by $M_n = \sum_{k=1}^n F_k/\sqrt{\Gamma_k}$. We have

$$\sum_{k\ge1}\mathbb{E}\{|\Delta M_k^1|^s\} \le C \begin{cases} \sum_{k\ge1} \frac{\gamma_k^2}{\Gamma_k^{\frac{s}{2}}} & \text{if } a = 1 \\ \\ \sum_{k\ge1} \frac{\gamma_k^2 \Gamma_k^{\frac{a\vee 2r}{p}}}{\Gamma_k^{\frac{s}{2}}} & \text{if } a < 1. \end{cases}$$

We recall that for a sequence of positive numbers (v_n), $\sum_{n\ge1} v_n/(\sum_{k=1}^n v_k)^s < +\infty$ if $s > 1$. Then, by (4.38), $\Gamma_n^{-\frac{s}{2}} \le C(\Gamma_n^{(2)})^{-s}$ when $a = 1$ and $\Gamma_n^{-\frac{s}{2}} \le C(\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \Gamma_k^{\frac{a\vee 2r}{p}})^{-s}$ when $a < 1$. We deduce that

$$\text{if } a = 1, \quad \sum_{k\ge1} \frac{\gamma_k^2}{\Gamma_k^{\frac{s}{2}}} < +\infty \quad \text{and if } a < 1, \quad \sum_{k\ge1} \frac{\gamma_k^2 \Gamma_k^{\frac{a\vee 2r}{p}}}{\Gamma_k^{\frac{s}{2}}} < +\infty.$$

It follows from the Chow Theorem that $M_n \xrightarrow{n\to+\infty} M_\infty$ *a.s.*, and the Kronecker lemma implies that $B_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ *a.s.* □

4.7 Numerical comparison of Schemes (P) and (W).

1. When $\nu(f)$ can be theoretically computed. In this first example, we are interested in the two-dimensional SDE

$$dX_t = -X_{t^-}\,dt + dZ_t \tag{4.39}$$

where Z is a symmetric purely discontinuous Lévy process (having no drift term). We consider $\phi : x \mapsto |x|^2$ and denote by ν, the unique invariant SDE (4.39). We can easily compute $\nu(\phi)$. In fact, as π is symmetric and $\nu(A\phi) = 0$,

$$A\phi = -2\phi + \int |y|^2\pi(dy) \quad \Longrightarrow \quad \nu(\phi) = \frac{1}{2}\int |y|^2\pi(dy).$$

Let us test this theoretical result on a 2-dimensional example. Assume that

$$\pi^{(\alpha)}(dy) = 1_{\{|y|\le 1\}}\frac{1}{|y|^{\alpha+2}}\lambda_2(dy) + 1_{\{|y|>1\}}\frac{1}{|y|^8}\lambda_2(dy) \quad \text{with } \alpha \in (1,3).$$

We have $\nu(\phi) = \pi(1/(2-\alpha) + 1/4)$. In figures 4.3 and 4.7, we observe the rate for two values of α taking the choices of steps and truncation thresholds of Proposition 4.10(b). These simulations

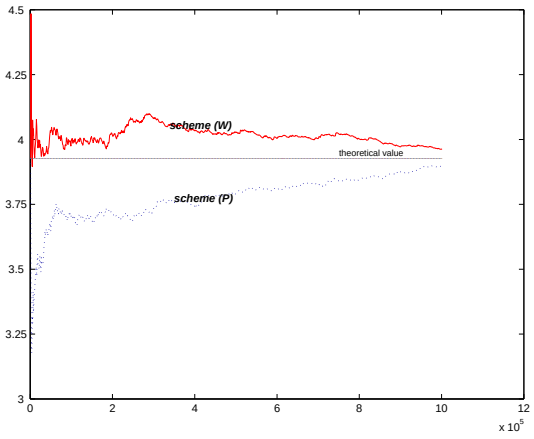


Figure 4.3 : $n \mapsto \bar{\nu}_n(\phi)$, $\alpha = 1$

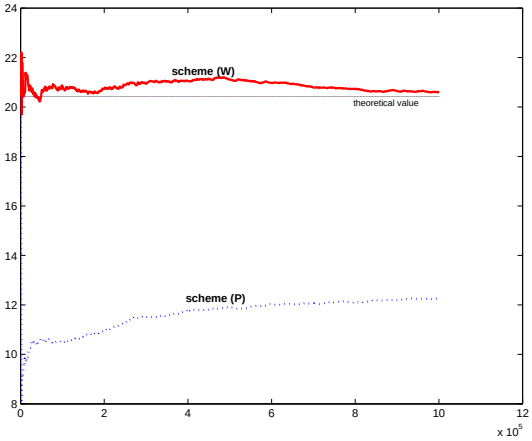


Figure 4.4 : $n \mapsto \bar{\nu}_n(\phi)$, $\alpha = 5/3$

are coherent with the theoretical results. Indeed, when $\alpha = 1$, the optimal asymptotic rates induced by Schemes (P) and (W) are the same ones (with order $n^{\frac{1}{3}}$). When $\alpha = 5/3$, the optimal asymptotic rate induced by scheme (W) is still of order $n^{\frac{1}{3}}$ whereas that of scheme (P) is of order $n^{\frac{1}{7}}$.

2. Another example. Now, we observe the following two-dimensional SDE

$$dX_t = -\frac{X_{t^-}}{\sqrt{1+|X_{t^-}|}}dt + (1+|X_{t^-}|)^{\frac{1}{4}}dZ_t$$

where (Z_t) is a purely discontinuous Lévy process having no drift term with Lévy measure $\pi^{(\alpha)}$ (defined in the preceding example). One checks that Proposition 4.10 applies with $V(x) = 1+|x|^2$, $a = 3/4$, $r = 1/4$ and every $p \in (2,3)$. As in the preceding example, we test our procedure in the cases $\alpha = 1$ and $\alpha = 5/3$. As the dynamical system is less stable, the convergence is slower but we can observe the same phenomenon.

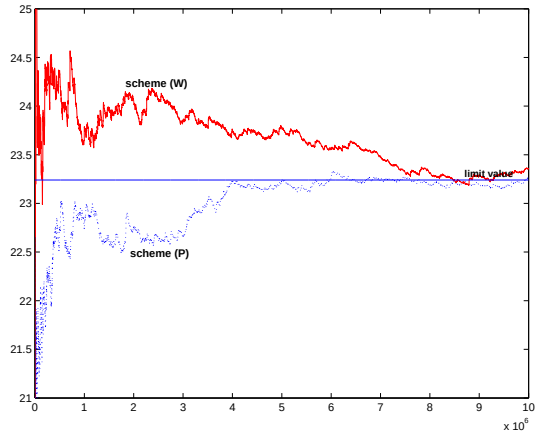


Figure 4.5 : $n \mapsto \bar{\nu}_n(\phi)$, $\alpha = 1$

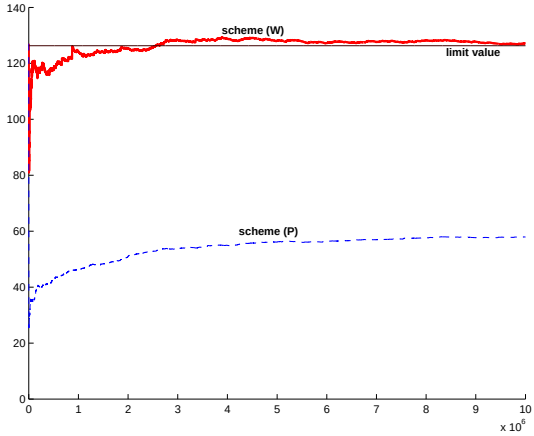


Figure 4.6 : $n \mapsto \bar{\nu}_n(\phi)$, $\alpha = 5/3$

Chapitre 5

Approximation de la probabilité invariante pour des diffusions à stabilité "semi-critique"

Résumé

Nous nous intéressons à l'approximation de probabilité invariante pour des diffusions Browniennes ergodiques satisfaisant une hypothèse de stabilité trop faible pour entrer dans le cadre d'application des travaux déjà existants sur ce problème. Sous une hypothèse supplémentaire peu contraignante sur le bruit blanc du schéma d'Euler, nous montrons que l'algorithme converge sous une hypothèse sur les coefficients permettant d'englober certains cas "semi-critiques" où la force de rappel est évanescente et également certains cas où la force de rappel est créée par la composante Brownienne et non plus par le terme de drift.

5.1 Introduction

5.1.1 Présentation du problème

On s'intéresse à $(X_t)_{t\geq 0}$, processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, solution de l'EDS suivante :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \tag{5.1}$$

Les coefficients b et σ sont continus, à croissance sous-linéaire et à valeurs respectives dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{M}_{d,l}$ (l'ensemble des matrices à d lignes et l colonnes). $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard l-dimensionnel.
On introduit $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le schéma d'Euler à pas décroissant défini par

$$\bar{X}_0 = x \in \mathbb{R}^d, \quad \bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_{n+1} b(\bar{X}_n) + \sqrt{\gamma_{n+1}}\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1}$$

où (γ_n) est une suite *décroissante* de réels strictement positifs dont la somme diverge et $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a i.i.d. centrées telles que $\Sigma_{U_1} = \mathrm{Id}$.
Soit (η_k) une suite de réels strictement positifs telle que $H_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \to +\infty$. Comme dans le chapitres précédents, la suite de mesures empiriques $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ destinée à approcher la probabilité invariante est définie $p.s.$ par :

$$\bar{\nu}_n = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \delta_{\bar{X}_{k-1}}. \tag{5.2}$$

L'étude de la convergence de cette suite de mesures empiriques a déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Dans [LaPa02], Lamberton et Pagès s'intéressent à la convergence de l'algorithme sous une hypothèse de Lyapounov correspondant au cas où le drift est à croissance linéaire. Dans [LaPa03], ils étendent ensuite cette approche au cas où le drift a une croissance sous-linéaire et induit donc une force de rappel plus faible. A l'inverse, dans [Lem06], Lemaire s'intéresse aux situations où b peut avoir une croissance polynomiale ou même exponentielle, situations où la force de rappel est plus forte mais où l'erreur de discrétisation l'est également. Lemaire montre alors la convergence vers la probabilité invariante d'un algorithme modifié où il remplace le pas γ_n par un pas stochastique dominé par γ_n.
Bien que les résultats de [Lem06] soient transposables au travail que nous allons réaliser, nous nous contentons ici du cadre sous-linéaire et souhaitons donc élargir le champ d'applications de [LaPa03] à des diffusions Browniennes ergodiques ayant des coefficients à croissance sous-linéaire mais qui ne satisfont pas les hypothèses de cet article.
Pour fixer les idées, on peut penser en dimension 1 à des diffusions du type

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+X_t^2}dt + \sigma dW_t \quad \text{ou} \quad dX_t = (1+X_t^2)^{\alpha} dW_t$$

avec $\sigma \in (0,2)$ et $\alpha \in (1/4, 1/2)$. Ces diffusions sont récurrentes positives mais n'entrent pas dans le cadre des hypothèses de [LaPa03]. Dans le premier cas, la force de rappel induite par le drift est trop faible et dans le second cas, c'est le terme Brownien lui-même qui produit la force de rappel du système dynamique. Ces diffusions sont des systèmes dynamiques pour lesquels le conflit entre le bruit et la force de rappel est important. On les qualifie alors de "semi-critiques" car on est proche du stade critique pour lequel le système dynamique n'est plus ergodique.

Nous souhaitons ici prouver la convergence de la suite de mesures empiriques associées à de telles diffusions. La construction de notre résultat principal (théorème 5.2) est basée sur la même approche que dans [LaPa03]. Nous établissons la tension sous une hypothèse de rappel et montrons l'invariance des probabilités limites grâce au théorème d'Echeverria-Weiss (voir théorème 2.10). Notre travail consiste donc principalement à adapter et à affiner les hypothèses de chaque étape de la preuve proposée dans [LaPa03] de manière à ce que celles-ci contiennent les diffusions "semi-critiques". Explicitons concrètement ces améliorations. Dans la première étape (tension de $(\bar{\nu}_n)$) nous montrons que sous une hypothèse supplémentaire sur le bruit blanc, une étude plus fine du terme diffusif et/ou l'utilisation de fonctions de Lyapounov à croissance faible permettent d'affaiblir l'hypothèse de rappel : en d'autres termes, on peut s'autoriser un conflit plus important entre le bruit et la force de rappel. Dans la seconde étape (invariance des probabilités limites), nous nous affranchissons de toute hypothèse sur les coefficients pour prouver l'invariance des probabilités limites. En d'autres termes, nous montrons que l'invariance des probabilités limites est quasi-automatique et complètement indépendante de la tension de la suite de mesures empiriques.

5.1.2 Résultat principal

Soit $V \in \mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ (voir Partie 1.4). On définit λ_1 par

$$\lambda_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \lambda_{D^2V(x)}.$$

On remarque que λ_1 est fini car D^2V est bornée. Soit $a \in]-\infty, 1]$, un paramètre relatif à l'intensité de la force de rappel. On introduit alors les hypothèses suivantes sur les coefficients :

($\mathbf{S_a}$)

$$|b|^2 + \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \leq CV^a.$$

($\mathbf{R_a}$) Il existe $p > 0$, $M_p > 0$, $\alpha_p > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ avec $|x| > M_p$:

$$\langle \nabla V, b\rangle(x) + \frac{\lambda_1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(x) + \frac{(p-1)}{2}\frac{\langle \nabla V, \sigma\sigma^* \nabla V\rangle(x)}{V(x)} \leq -\alpha_p V^a(x) \tag{5.3}$$

Notons

$$I = \{p > 0, \text{il existe } M_p > 0,\ \alpha_p > 0 \text{ tel que (5.3) est satisfaite pour } |x| > M_p\}.$$

Sous l'hypothèse ($\mathbf{S_a}$), I est un intervalle ouvert. On note alors p_{sup}, le suprémum de cet ensemble.

Remarque 5.1 Si $V(x) = 1 + |x|^2$, on remarque alors en multipliant l'inégalité (5.3) par pV^{p-1} qu'il s'agit exactement de l'hypothèse $AV^p \leq \beta - \alpha V^{p+a-1}$, *i.e.* de l'hypothèse de Lyapounov apparaîssant à temps continu. Ainsi, l'hypothèse ($\mathbf{R_a}$) n'est une hypothèse de rappel que si $p + a - 1 > 0$. La valeur de $p_{sup} + a - 1$ traduit en fait la stabilité du système. Plus $p_{sup} + a - 1$ est proche de 0 et plus le système dynamique a une stabilité "critique", le stade critique étant le cas où $p_{sup} = 1 - a$.

On introduit enfin une hypothèse technique sur U_1.

($\mathbf{H}$) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $r > C$, $\mathbb{E}\{U_1 1_{|U_1| \leq r}\} = 0$.

On remarque que cette hypothèse est bien satisfaite si U_1 suit une loi de Bernoulli ou une loi normale centrée réduite (choix standards en pratique). Plus généralement, ($\mathbf{H}$) est satisfaite si U_1 est bornée ou si U_1 a une loi symétrique.

Le théorème qui suit est le résultat principal de ce travail.

Théorème 5.2 *Soit $a \in]-\infty, 1]$ tel que ($\mathbf{R_a}$) et ($\mathbf{S_a}$) soient satisfaites. Supposons que U_1 vérifie l'hypothèse ($\mathbf{H}$) et que $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$ pour tout $p < p_{sup}$. Si de plus, la suite (η_n/γ_n) est décroissante, alors,*
(a) pour tout $p < p_{sup}/2$, $\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{p+a-1}) < +\infty$. La suite de mesures aléatoires $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ est alors p.s. tendue dès que $p_{sup}/2 + a - 1 > 0$. De plus, toute valeur d'adhérence de cette suite est invariante pour l'EDS (5.1). En particulier, si l'EDS (5.1) admet une unique probabilité invariante ν, alors pour toute fonction continue f telle que $f = O(V^r)$ avec $r < p_{sup}/2 + a - 1$, $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(f) = \nu(f)$.
(b) pour tout $p \in [p_{sup}/2, p_{sup} + \frac{a-1}{2})$, $\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{p+a-1}) < +\infty$ si (η_n, γ_n) satisfait la condition suivante :

$$\Big(\frac{1}{\gamma_n}\big(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}}\big)^s\Big) \text{ est décroissante et, } \quad \sum_{n\geq 1}\big(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}}\big)^s < +\infty \text{ avec } s \in \Big(1, \frac{p_{sup} + a - 1}{p + \frac{a-1}{2}}\Big). \tag{5.4}$$

La suite de mesures aléatoires $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ est alors p.s. tendue si $p + a - 1 > 0$. De plus, toute valeur d'adhérence de cette suite est invariante pour l'EDS (5.1). En particulier, si l'EDS (5.1) admet une unique probabilité invariante ν, alors pour toute fonction continue f telle que $f = o(V^{p+a-1})$, $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(f) = \nu(f)$.

Remarque 5.3 La deuxième partie du résultat est similaire au théorème 3.5 du chapitre 3 : une contrainte supplémentaire sur les pas et les poids permet d'affaiblir les hypothèses. Nous renvoyons à la remarque 5.12 pour des pas et poids polynomiaux explicites satisfaisant l'hypothèse (5.4). La deuxième partie du résultat montre en particulier qu'il est possible de construire des pas et des poids pour lesquels l'algorithme converge tant que $2p_{sup}/3 + a - 1 > 0$.
Ceci signifie que l'on n'est pas capable d'approcher tout à fait le stade critique $p_{sup} = a - 1$ évoqué dans la remarque 5.1. La limitation obtenue ici peut s'interprêter comme un coût associé aux méthodes de martingales et plus exactement à des problèmes de convergence de martingales (voir lemme 5.9 et proposition 5.11).

5.1.3 Applications

Nous explicitons deux types d'exemples "semi-critiques" pour lesquels le théorème 5.2 s'applique. Intéressons-nous d'abord à un cas où on a une force de rappel faible.

Exemple 1 Posons $V(x) = 1 + |x|^2$. Supposons que b est de la forme :

$$b(x) = -\frac{\rho x}{1+|x|^2} + \mathcal{T}(x) \quad \text{où } \rho > 0, \mathcal{T} \text{ est bornée} \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{T}(x), x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Supposons d'autre part que $\sigma\sigma^*$ est diagonale. On note $(\sigma\sigma^*(x))_{i,i}(x) = a_i(x)$. Alors, s'il existe $M > 0$ tel que $\sup_{|x|>M} \sum_{i=1}^d a_i(x) < \frac{2\rho}{3}$, la première partie du théorème est satisfaite. Si $\sup_{|x|>M} \sum_{i=1}^d a_i(x) < \rho$, alors on peut construire des pas et des poids pour lesquels la seconde est satisfaite.

Preuve : En réécrivant le membre de gauche de (5.3) avec les conditions de l'exemple, on obtient si $p > 1$:

$$-\frac{2\rho|x|^2}{1+|x|^2} + \sum_{i=1}^d a_{i,i}(x) + 2(p-1)\sum_{i=1}^d a_{i,i}(x)\frac{x_i^2}{1+|x|^2} \leq -2\rho + (2p-1)\sup_{|x|>M}\sum_{i=1}^d a_i(x) + \epsilon$$

pour tout $\epsilon > 0$ et pour $|x|$ assez grand. En posant naturellement $a = 0$, on remarque que la condition $(\mathbf{R_a})$ est satisfaite s'il existe $p > 1$(considérer les cas où $p < 1$ est inutile car alors, $p + a - 1 < 0$) tel que :

$$(2p-1)\sup_{|x|>M}\sum_{i=1}^d a_i(x) < 2\rho. \tag{5.5}$$

Cette condition est satisfaite si $\sup_{|x|>M} \sum_{i=1}^d a_i(x) < 2\rho$. Maintenant, pour que les conditions de la partie (1) du théorème soient satisfaites, il suffit qu'il existe $p > 2$ (pour que $p_{sup}/2 - 1$ soit strictement positif) tel que (5.5) soit vraie ce qui correspond à la condition $\sup_{|x|>M} \sum_{i=1}^d a_i(x) < 2\rho/3$. On raisonne de la même manière pour la condition de la seconde partie du théorème. □

Exemple 2 Soit $V(x) = 1 + |x|^2$. Pour tout $x \in (\mathbb{R}^d)^*$, notons $\mathcal{B}_x = (x/|x|, e_2^x, \ldots, e_d^x)$, une base orthonormale et supposons que dans cette base, $A_x = \sigma\sigma^*(x)$ soit diagonale. On note $(A_x)_{i,i} = a_{i,i}(x)$. Alors, si $C_1|x|^a \leq a_{1,1}(x) \leq C_2|x|^a$ pour x assez grand, si $a_{i,i}(x) = o(|x|^a)$ pour tout $i \in \{2, \ldots, d\}$ et si $|b(x)| = o(|x|^{a-1})$, alors $p_{sup} = 1/2$. En particulier, les conditions de la première partie (resp. de la seconde partie) du théorème sont satisfaites si $a > 3/4$ (resp. si $a > 2/3$).

Remarque 5.4 Pour pouvoir jouer le rôle de force de rappel, $\sigma\sigma^*$ doit posséder une composante radiale prépondérante. Par exemple, si $b(x) = 0$ et $\sigma\sigma^*(x) = V(x)Id$, la condition de rappel ne peut être satisfaite qu'en dimension 1.

Preuve : Il suffit de remarquer que :

$$2\langle x, b(x)\rangle + \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(x) + 2(p-1)\sum_{i=1}^{d} a_{i,i}(x)\frac{x_i^2}{1+|x|^2} = (2p-1)a_{1,1}(x) + o(|x|^a).$$

□

5.1.4 Organisation de la preuve du théorème 5.2

Les deux sections qui suivent sont consacrées à la preuve du théorème 5.2. Dans la section 5.3, nous montrons que toute probabilité limite de la suite de mesures empiriques est automatiquement invariante pour l'EDS (5.1) (Proposition 5.5), puis dans la section 4.3, nous établissons un critère de tension pour cette suite de mesures (Théorème 6.12). La combinaison de ces deux étapes permet d'obtenir le théorème 5.2.

5.2 Invariance des valeurs d'adhérence de $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$

Dans [LaPa03], l'invariance des valeurs d'adhérence est obtenue par la combinaison des propositions 3 et 4 de [LaPa03]. Ces propositions sont obtenues comme des conséquences de la tension de la suite de mesures empiriques et nécessitent une contrainte supplémentaire sur σ qui nous poserait problème ici. On souhaite donc ici s'affranchir de ces hypothèses. On prouve que sous l'hypothèse (**H**) sur le bruit blanc, il est possible d'obtenir ces deux propositions en supposant simplement que (η_n/γ_n) est décroissante. En d'autres termes, toute valeur d'adhérence de cette suite est automatiquement invariante dès que (η_n/γ_n) est décroissante.

Proposition 5.5 *Supposons que b et σ soient sous-linéaires et que (η_k/γ_k) soit décroissante. Alors :*
(1) Pour toute fonction f continue à support compact,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{\gamma_k}\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1})/\mathcal{F}_{k-1}\} = 0 \quad p.s.$$

(2) Si de plus U_1 est satisfait l'hypothèse (**H**)*, alors pour toute fonction f $\mathcal{C}^2$ à support compact contenu dans $\mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(\frac{\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1})/\mathcal{F}_{k-1}\}}{\gamma_k} - Af(\bar{X}_{k-1})\Big) = 0.$$

Par conséquent, toute valeur d'adhérence ν de la suite $(\bar{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\int Af d\nu = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d).$$

ν est alors invariante pour l'EDS (5.1) *d'après le théorème* (2.10).

Preuve : (1) Il s'agit en fait de reprendre la preuve de la proposition 3 de [LaPa03] dans le cas où f est à support compact et de montrer que la condition :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2}{H_n^2 \gamma_n} \mathbb{E}\{V^a(\bar{X}_{n-1})\} < +\infty \tag{5.6}$$

n'est alors pas nécessaire. En reprenant les notations de la preuve de cette proposition, on remarque qu'il nous suffit en fait de montrer que la martingale $(M_n^f)_{n\geq 1}$ définie par :

$$M_n^f = \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{H_k \gamma_k} (f(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{f(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}) \tag{5.7}$$

est bornée dans L^2 sans l'hypothèse 5.6. On a :

$$\mathbb{E}\{(M_n^f)^2\} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\eta_k}{H_k \gamma_k}\Big)^2 \mathbb{E}\{(f(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{f(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\})^2\}^2$$

Comme

$$\|f(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{f(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\|_{L^2} = \min\Big\{Y \ \mathcal{F}_{k-1} - \text{mesurable}, \|f(\bar{X}_k) - Y\|_{L^2}\Big\},$$

on en déduit en particulier que

$$\mathbb{E}\{(M_n^f)^2\} \leq \sum_{k\geq 1} \Big(\frac{\eta_k}{H_k \gamma_k}\Big)^2 \mathbb{E}\{(f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))^2\}.$$

Comme b et σ sont sous-linéaires, on peut trouver $\delta > 0$ et $C_\sigma > 0$ tels que si $\gamma \leq \delta$ et $\sqrt{\gamma}|u| \leq C_\sigma$,

$$x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma}\sigma(x)u \xrightarrow{|x|\to+\infty} +\infty \qquad \text{et} \qquad x + \gamma b(x) \xrightarrow{|x|\to+\infty} +\infty$$

indépendemment de u et γ. En particulier, comme f est à support compact, il existe M strictement positif tel que pour tous $|x| > M$, γ, u satisfaisant les conditions ci-dessus,

$$f(x + \gamma b(x)) = f(x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma}\sigma(x)u) = 0.$$

Notons $D_k = \{\sqrt{\gamma_k}|U_k| \leq C_\sigma\}$. Soit k_δ tel que $\gamma_k \leq \delta$ pour $k \geq k_\delta$. Pour $k \geq k_\delta$, on a alors :

$$\mathbb{E}\{|f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))|^2 1_{D_k}/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq C\gamma_k \sup_{|x|\leq M} \|\sigma\|^2(x) \qquad \text{et,}$$

$$\mathbb{E}\{|f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))|^2 1_{(D_k)^c}/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\{(D_k)^c/\mathcal{F}_{k-1}\} \leq C\gamma_k \mathbb{E}\{|U_1|^2\}.$$

Dans la première inégalité, on a utilisé le caractère lispchitzien de f tandis que dans la seconde, on s'est servi de l'indépendance de U_k vis-à-vis de $\mathcal{F}_{k-1}$ ainsi que de l'inégalité de Chebyschev. On en déduit que

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{(M_n^f)^2\} \leq C \sum_{k\geq 1} \frac{\eta_k^2}{H_k^2 \gamma_k} \leq C \frac{\eta_1}{\gamma_1} \sum_{k\geq 1} \frac{\eta_k}{H_k^2} < +\infty.$$

(2) On reprend la preuve de la proposition 4 de [LaPa03] obtenue par la combinaison des deux étapes suivantes.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(\frac{\mathbb{E}\{f(\bar{X}_{k-1}+\gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))-f(\bar{X}_{k-1})/\mathcal{F}_{k-1}\}}{\gamma_k}-\langle\nabla f,b\rangle(\bar{X}_{k-1})\Big)=0 \qquad (5.8)$$

et :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(\frac{\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k)-f(\bar{X}_{k-1}+\gamma_k b(\bar{X}_{k-1})/\mathcal{F}_{k-1}\}}{\gamma_k}-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^*D^2f\sigma)(\bar{X}_{k-1})\Big)=0. \quad (5.9)$$

(5.8) ne pose pas de difficulté. Pour (5.9), on découpe la différence de la même manière que dans la première partie. D'abord,

$$\Big(f(\bar{X}_k)-f(\bar{X}_{k-1}+\gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))\Big)1_{D_k}=\Big\langle\nabla f(\bar{X}_{k-1}+\gamma_k b(\bar{X}_{k-1})),\sqrt{\gamma_k}\sigma(\bar{X}_{k-1})U_k1_{D_k}\Big\rangle$$
$$+\frac{\gamma_k}{2}D^2f(\bar{X}_{k-1}+\gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))(\sigma(\bar{X}_{k-1})U_k1_{D_k})^{\otimes 2}+R_2((\bar{X}_{k-1}+\gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))1_{D_k},\bar{X}_k1_{D_k})$$
$$\text{où,}\qquad |R_2(x,y)|\leq\frac{1}{2}\sup_{\theta\in[0,1]}\|\Big(D^2f(x+\theta(y-x))-D^2f(x)\Big)\|.|y-x|^2.$$

D'après l'hypothèse (**H**), il existe $k_0\geq 1$ tel que pour tout $k\geq k_0$, assez grand, $\mathbb{E}\{U_k1_{D_k}/\mathcal{F}_{k-1}\}=0$. On en déduit que pour $k\geq k_0$,

$$\mathbb{E}\{\Big(f(\bar{X}_k)-f(\bar{X}_{k-1}+\gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))\Big)1_{D_k}/\mathcal{F}_{k-1}\}=\frac{\gamma_k}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^*D^2f\sigma)(\bar{X}_{k-1})$$
$$+\gamma_k\Big(R_{2,1}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1})+R_{2,2}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1})+R_{2,3}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1})\Big)\qquad\text{avec,}$$
$$R_{2,1}(\gamma,x)=\frac{1}{2}\int_{K_\gamma}\Big(D^2f(x+\gamma b(x))-D^2f(x)\Big)(\sigma(x)u)^{\otimes 2}\mathbb{P}_{U_1}(du)$$
$$R_{2,2}(\gamma,x)\leq\frac{1}{2}\int_{K_\gamma}\sup_{\theta\in[0,1]}\|D^2f(x+\gamma b(x)+\theta\sqrt{\gamma}\sigma(x)u)-D^2f(x+\gamma b(x))\|.|\sigma(x)u|^2\mathbb{P}_{U_1}(du)$$
$$R_{2,3}(\gamma,x)=\frac{1}{2}\int_{K_\gamma^c}D^2f(x+\gamma b(x))(\sigma(x)u)^{\otimes 2}\mathbb{P}_{U_1}(du),$$

où $K_\gamma=\{u\in\mathbb{R}^d,\sqrt{\gamma}|u|\leq C_\sigma\}$. Avec les notations de la première partie, il existe $\delta>0$ et $M>0$ tels que pour tout $\gamma\leq\delta$,

$$D^2f(x+\gamma b(x)+\theta\sqrt{\gamma}\sigma(x)u)=D^2f(x+\gamma b(x))=D^2f(x)=0\qquad\forall u\in K_\gamma.$$

Comme b et σ sont localement bornées, que D^2f est lispchitzienne et que $\gamma_k\to 0$, on en déduit sans difficulté que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_kR_{2,1}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1})\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

Dans un deuxième temps , comme D^2f est uniformément continue et que $\gamma_k\to 0$, on en déduit que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $k_\varepsilon\geq k_0$ tel que pour tout $k\geq k_\varepsilon$:

$$|R_{2,2}(\gamma_k,\bar{X}_{k-1})|<\varepsilon\qquad p.s.$$

Ceci nous permet d'obtenir que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k |R_{2,2}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1})| \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k R_{2,2}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Enfin, pour $k \geq k_\delta$, on a

$$R_{2,3}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \leq C \sup_{|x|\leq M} \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(x)\mathbb{E}\{|U_1|^2 1_{|U_1|>\frac{C_\sigma}{\sqrt{\gamma_k}}}\} = o(1).$$

ce qui induit que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k R_{2,3}(\gamma_k, \bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Finalement, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k \Big(\frac{\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1})1_{D_k}/\mathcal{F}_{k-1}\}}{\gamma_k} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^* D^2 f \sigma)(\bar{X}_{k-1}) \Big) = 0.$$

Pour en déduire le résultat, il reste simplement à vérifier que :

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\gamma_k} \big(\mathbb{E}\{f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1})1_{(D_k)^c}/\mathcal{F}_{k-1}\} \big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Il suffit pour cela de remarquer que pour $k \geq k_\delta$

$$|\mathbb{E}\Big\{ \big(f(\bar{X}_k) - f(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))\big)1_{(D_k)^c}/\mathcal{F}_{k-1} \Big\}| \leq C\gamma_k \mathbb{E}\{|U_1|^2 1_{|U_1|>\frac{C_\sigma}{\sqrt{\gamma_k}}}\} = o(\gamma_k).$$

□

5.3 Tension de la suite de mesures empiriques

Le théorème principal de cette section est le théorème 6.12. Auparavant, nous établissons quelques résultats préliminaires. L'étape fondamentale est la suivante dans laquelle on établit un contrôle récursif des moments conditionnels du schéma d'Euler.

5.3.1 Un contrôle récursif

Le but de cette partie est d'obtenir un contrôle récursif du schéma d'Euler grâce à l'hypothèse de rappel ($\mathbf{R_a}$). Nous commençons par deux lemmes techniques.

Lemme 5.6 *Soient $p > 0$ et $a \in]-\infty, 1]$ tels que ($\mathbf{S_a}$) est satisfaite. Supposons que U_1 vérifie l'hypothèse ($\mathbf{H}$) et que $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$. Pour $\varepsilon \in (0, 1/2)$, notons $(K_n^\varepsilon)_{n\geq 1}$ la suite définie par :*

$$K_n^\varepsilon = \Big\{ \sqrt{\gamma_n}\|\sigma(\bar{X}_{n-1})\|.|U_{n+1}| \leq \varepsilon \frac{\sqrt{V}(\bar{X}_{n-1})}{C_V} \Big\}.$$

où $C_V = 2([\sqrt{V}]_L \vee \sup_{i\in\{1,d\}}[(\nabla V)_i]_L)$. *Alors, si* $\xi_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n) + \theta(\omega)\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1}$, *avec* θ *variable aléatoire dans* $[0,1]$, *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $n \geq n_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{D^2(V^p)(\xi_{n+1})(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}1_{K^\varepsilon_{n+1}}/\mathcal{F}_n\}\\&\leq p\gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\Big(\lambda_1\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + (p-1)\frac{\langle\nabla V,\sigma\sigma^*\nabla V\rangle(\bar{X}_n)}{V(\bar{X}_n)}\Big) + C\varepsilon V^{p+a-1}(\bar{X}_n).\end{aligned} \tag{5.10}$$

Preuve : Soit $\varepsilon \in (0,1/2)$. Par la définition de C_V et le fait que $\gamma_{n+1}|b(\bar{X}_n)| \leq \varepsilon/(2C_V)\sqrt{V}(\bar{X}_n)$ pour n assez grand, on remarque qu'à partir d'un certain rang, pour tout $\omega \in K^\varepsilon_{n+1}$:

$$\sqrt{V}(\xi_{n+1}) = \sqrt{V}(\bar{X}_n)(1+\tilde{\theta}_n\varepsilon)$$

où $\tilde{\theta}_n$ est un nombre aléatoire dans $[-1,1]$. On en déduit que :

$$V^r(\xi_{n+1}) = V^r(\bar{X}_n)(1+\tilde{\theta}_n\varepsilon)^{2r}. \tag{5.11}$$

On rappelle que $D^2V^p = pV^{p-1}D^2V + (p-1)V^{p-2}\nabla V\otimes\nabla V$. On a d'une part :

$$\mathbb{E}\{V^{p-1}(\xi_{n+1})D^2V(\xi_{n+1})(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}1_{K^\varepsilon_{n+1}}/\mathcal{F}_n\} \leq \lambda_1 V^{p-1}(\bar{X}_n)\mathbb{E}\{|\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1}|^2/\mathcal{F}_n\}\Phi_p(\varepsilon),$$

avec :

$$\Phi_p(\varepsilon) = \begin{cases}(1-\varepsilon)^{2(p-1)} & \text{si } p\leq 1\\ (1+\varepsilon)^{2(p-1)} & \text{si } p\geq 1.\end{cases}$$

Comme $x\mapsto(1+x)^r$ est lipschitzienne sur $[-1/2,1/2]$ pour tout $r\in\mathbb{R}$, $|\Phi_p(\varepsilon)-1| \leq C_p|\varepsilon|$ car $\varepsilon\in(0,1/2)$. Ainsi, comme

$$\mathbb{E}\{|\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1}|^2/\mathcal{F}_n\} = \gamma_{n+1}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(\bar{X}_n),$$

on en déduit en utilisant l'hypothèse $(\mathbf{S_a})$ qu'à partir d'un certain rang :

$$\mathbb{E}\{V^{p-1}(\xi_{n+1})D^2V(\xi_{n+1})(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}1_{K^\varepsilon_{n+1}}/\mathcal{F}_n\} \tag{5.12}$$

$$\leq \lambda_1\gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(\bar{X}_n) + C\varepsilon V^{p+a-1}(\bar{X}_n). \tag{5.13}$$

D'autre part, toujours d'après la définition de C_V et le fait que $\gamma_{n+1}|b(\bar{X}_n)| \leq \varepsilon/(2C_V)\sqrt{V}(\bar{X}_n)$ pour n assez grand, on remarque en utilisant les hypothèses sur ∇V qu'à partir d'un certain rang, pour tout $\omega\in K^\varepsilon_{n+1}$:

$$(\nabla V(\xi_{n+1})_i = (\nabla V(\bar{X}_n))_i + \tilde{\theta}^i_n\varepsilon\sqrt{V}(\bar{X}_n) \qquad \forall i\in\{1,\dots,d\}$$

avec $\tilde{\theta}^i_n$ nombre aléatoire dans $[-1,1]$. En se servant à nouveau de (5.11), on obtient qu'à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned}&1_{K^\varepsilon_{n+1}}\Big(V^{p-2}(\xi_{n+1})(\nabla V\otimes\nabla V)(\xi_{n+1})(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}\Big)\\&\quad= 1_{K^\varepsilon_{n+1}}\Big(V^{p-2}(\bar{X}_n)(\nabla V\otimes\nabla V)(\bar{X}_n)(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2} + \varepsilon|U_{n+1}|^2O(V^{p+a-1}(\bar{X}_n))\Big).\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse ($\mathbf{S_a}$), il existe $C_\sigma > 0$ tel que $\|\sigma\| \leq C_\sigma \sqrt{V}(\bar{X}_n)$. On remarque alors qu'en posant $C = (C_\sigma C_V)^{-1}$ que,

$$\{|U_{n+1}| \leq \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{n+1}}}\} \subset K_{n+1}^{\varepsilon}.$$

On en déduit que

$$V^{p-2}(\bar{X}_n)\mathbb{E}\{(\nabla V \otimes \nabla V)(\bar{X}_n)(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}1_{(K_{n+1}^{\varepsilon})^c}/\mathcal{F}_n\}$$
$$\leq C\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n)\mathbb{E}\{|U_1|^2 1_{\{|U_1|>\frac{C\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{n+1}}}\}}\} \leq \varepsilon\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n)$$

à partir d'un certain rang. Enfin, on vérifie que

$$\mathbb{E}\{V^{p-2}(\bar{X}_n)(\nabla V \otimes \nabla V)(\bar{X}_n)(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}/\mathcal{F}_n\} = \gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\frac{\langle \nabla V, \sigma\sigma^*\nabla V\rangle(\bar{X}_n)}{V(\bar{X}_n)}.$$

On en déduit finalement qu'à partir d'un certain rang :

$$\mathbb{E}\Big\{1_{K_{n+1}^{\varepsilon}}\Big(V^{p-2}(\xi_{n+1})(\nabla V \otimes \nabla V)(\xi_{n+1})(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}\Big)/\mathcal{F}_n\Big\}$$
$$\leq \gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\frac{\langle \nabla V, \sigma\sigma^*\nabla V\rangle(\bar{X}_n)}{V(\bar{X}_n)} + C\varepsilon\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n). \tag{5.14}$$

Le résultat s'obtient alors par addition de (5.13) et (5.14). □

Lemme 5.7 *Soient $p > 0$ et $a \in]-\infty, 1]$ tels que ($\mathbf{S_a}$) soit satisfaite. Supposons que U_1 vérifie l'hypothèse* (**H**) *et que $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$:*

$$|\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big)1_{(K_{n+1}^{\varepsilon})^c}/\mathcal{F}_n\}| \leq \varepsilon\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n)$$

Preuve : Si $p \leq 1/2$, V^p est $2p$-hölderienne. On a alors :

$$|V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))| \leq \gamma_{n+1}^p\|\sigma\|^{2p}|U_{n+1}|^{2p}.$$

D'après l'hypothèse ($\mathbf{S_a}$) puis l'inégalité de Hölder, on en déduit :

$$\mathbb{E}\{\big|V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big|1_{(K_{n+1}^{\varepsilon})^c}/\mathcal{F}_n\} \leq C\gamma_{n+1}^p V^{ap}(\bar{X}_n)\mathbb{E}\{|U_{n+1}|^{2p}1_{(K_{n+1}^{\varepsilon})^c}/\mathcal{F}_n\}$$
$$\leq C\gamma_{n+1}^p V^{ap}(\bar{X}_n)\mathbb{P}\{(K_{n+1}^{\varepsilon})^c/\mathcal{F}_n\}^{1-p}.$$

Or, d'après l'hypothèse ($\mathbf{S_a}$), il existe $C > 0$ tel que :

$$(K_{n+1}^{\varepsilon})^c \subset \Big\{|U_{n+1}| > \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{n+1}}}V^{\frac{1-a}{2}}(\bar{X}_n)\Big\}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Chebyschev, on obtient :

$$\mathbb{P}\{(K_{n+1}^{\varepsilon})^c/\mathcal{F}_n\}^{1-p} \leq \frac{C}{\varepsilon^{1-p}}\gamma_{n+1}^{1-p}V^{(1-p)(1-a)}(\bar{X}_n)\mathbb{E}\{|U_1|^2 1_{\{|U_1|>\frac{C\varepsilon v}{\sqrt{\gamma_{n+1}}}\}}\}^{1-p}.$$

d'où comme $\mathbb{E}\{|U_1|^2 1_{\{|U_1|>C\varepsilon\underline{v}/\sqrt{\gamma_{n+1}}\}}\}^{1-p} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, on a pour n assez grand :

$$\mathbb{E}\{\big|V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big| 1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\} \le \varepsilon\gamma_{n+1}V^{a+p-1}(\bar{X}_n). \tag{5.15}$$

Si $p \in (1/2, 1)$, on remarque d'abord que

$$\mathbb{E}\{U_{n+1}1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\} = \Psi(r_{n+1}(\varepsilon, \bar{X}_n))$$
$$\text{où,} \quad \Psi(r) = \mathbb{E}\{U_1 1_{|U_1|>r}\} \quad \text{et,} \quad r_n(\varepsilon, x) = \frac{\varepsilon\sqrt{V}(x)}{C_V\sqrt{\gamma_n}\|\sigma(x)\|}.$$

Sous l'hypothèse $(\mathbf{S_a})$, $\inf_{x\in\mathbb{R}^d} r_n(\varepsilon, x) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$. En particulier, d'après l'hypothèse $(\mathbf{H})$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_1$,

$$\mathbb{E}\{U_{n+1}1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\} = \mathbb{E}\{U_{n+1}1_{(K^\varepsilon_{n+1})}/\mathcal{F}_n\} = 0 \quad p.s. \tag{5.16}$$

On déduit alors de la formule de Taylor que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big)1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\}\\ &= p\sqrt{\gamma_{n+1}}\mathbb{E}\{\big\langle V^{p-1}\nabla V(\xi_{n+1}) - V^{p-1}\nabla V(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)), \sigma(\bar{X}_n)U_{n+1}\big\rangle 1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\}.\end{aligned}$$

avec $\xi_{n+1} \in [\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n), \bar{X}_{n+1}]$. Comme $V^{p-1}\nabla V$ est $2p-1$-hölderienne, on en déduit le résultat de la même manière que précédemment.
Si $p \ge 1$, d'après la formule de Taylor et (5.16), il existe $n_1 \ge 1$ tel que pour tout $n \ge n_1$,

$$\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big)1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\} = \mathbb{E}\{D^2V^p(\xi_{n+1})(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^2 1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\}$$

avec ξ_{n+1} variable aléatoire à valeurs dans $[\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n), \bar{X}_{n+1}]$. Comme $x \mapsto D^2V^p/V^{p-1}(x)$ est bornée :

$$D^2V^p(\xi_{n+1})(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^2 \le CV^{p-1}(\xi_{n+1})\|\sigma(\bar{X}_n)\|^2|U_{n+1}|^2.$$

$\sqrt{V}$ est lipschitzienne donc :

$$\sqrt{V}(\xi_{n+1}) \le C\sqrt{V}(\bar{X}_n)(1 + |U_{n+1}|).$$

Ainsi, d'après l'hypothèse $(\mathbf{S_a})$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big)1_{(K^\varepsilon_{n+1})^c}/\mathcal{F}_n\}&\\ \le C\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n)\mathbb{E}\big\{(|U_1|^2 + |U_1|^{2p})1_{\{|U_1|>\frac{C\varepsilon\underline{v}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}}\}}\big\}&\\ \le \varepsilon\gamma_{n+1}V^{a+p-1}(\bar{X}_n),&\end{aligned}$$

à partir d'un certain rang. □

Proposition 5.8 *Soient $a \in]-\infty, 1]$ et $p \in (0, p_{sup})$ tels que $(\mathbf{S_a})$ et $(\mathbf{R_a})$ soient satisfaites. Supposons que $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$ et que l'hypothèse $(\mathbf{H})$ soit satisfaite. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\bar{\beta} \in \mathbb{R}$ et $\bar{\alpha} > 0$ tels que pour tout $n \ge n_0$:*

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1}/\mathcal{F}_n\} \le V^p(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1}\big(\bar{\beta} - \bar{\alpha}V^{p+a-1}(\bar{X}_n)\big). \tag{5.17}$$

Preuve : On découpe la différence $V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n)$ de la manière suivante :

$$V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n) = V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)) - V^p(\bar{X}_n) \tag{5.18}$$
$$+ V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)). \tag{5.19}$$

Observons séparément les deux termes de droite. D'abord, par un développement de Taylor, on obtient :

$$V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)) - V^p(\bar{X}_n) = \gamma_{n+1}\langle \nabla V^p(\bar{X}_n), b(\bar{X}_n)\rangle + \frac{\gamma_{n+1}^2}{2}D^2(V^p)(\xi_{n+1}^1)(b(\bar{X}_n))^{\otimes 2}.$$

avec $\xi_{n+1}^1 \in [\bar{X}_n,\ \bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)]$. Comme $\gamma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, que $|b|^2 \leq CV$ et que $\sqrt{V}$ est lipschitzienne, on a à partir d'un certain rang :

$$\sqrt{V}(\xi_{n+1}^1) \leq C\sqrt{V}(\bar{X}_n).$$

Or, comme $D^2V^p(\xi_{n+1}^1)(b(\bar{X}_n))^{\otimes 2} \leq CV^{p-1}(\xi_{n+1}^1)|b(\bar{X}_n)|^2$, on a par l'hypothèse $(\mathbf{S_a})$:

$$\frac{\gamma_{n+1}^2}{2}D^2(V^p)(\xi_{n+1}^1)(b(\bar{X}_n))^{\otimes 2} \leq C\gamma_{n+1}^2 V^{p+a-1}(\bar{X}_n)$$

à partir d'un certain rang. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon^1$:

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n)) - V^p(\bar{X}_n)/\mathcal{F}_n\} \leq p\gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\langle \nabla V(\bar{X}_n), b(\bar{X}_n)\rangle + \varepsilon\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n). \tag{5.20}$$

Ensuite, regardons (5.19) et considérons la suite $(K_n^\varepsilon)_{n\geq 1}$ définie dans le lemme 5.6. Alors, d'après la formule de Taylor et (5.16), on a pour d'une part pour n assez grand :

$$\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big)1_{K_{n+1}^\varepsilon}/\mathcal{F}_n\} = \frac{\gamma_{n+1}}{2}\mathbb{E}\{D^2(V^p)(\xi_{n+1}^2)(\sigma(\bar{X}_n)U_{n+1})^{\otimes 2}1_{K_{n+1}^\varepsilon}/\mathcal{F}_n\} \tag{5.21}$$

avec $\xi_{n+1}^2 \in [\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n),\ \bar{X}_{n+1}]$. Ainsi, grâce au lemme 5.6, il existe $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon^2$:

$$\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big)1_{K_n^\varepsilon}/\mathcal{F}_n\} \leq C\varepsilon\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n)$$
$$+ p\frac{\gamma_{n+1}}{2}V^{p-1}(\bar{X}_n)\Big(\lambda_1\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + (p-1)\frac{\langle \nabla V, \sigma\sigma^*\nabla V\rangle(\bar{X}_n)}{V(\bar{X}_n)}\Big). \tag{5.22}$$

D'autre part, par le lemme 8.5, il existe $n_\varepsilon^3 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon^3$:

$$\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n + \gamma_{n+1}b(\bar{X}_n))\big)1_{(K_n^\varepsilon)^c}/\mathcal{F}_n\} \leq \varepsilon\gamma_{n+1}V^{p+a-1}(\bar{X}_n). \tag{5.23}$$

Ainsi, en sommant (5.20), (5.22), (5.23), on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$:

$$\mathbb{E}\{\big(V^p(\bar{X}_{n+1}) - V^p(\bar{X}_n)\big)/\mathcal{F}_n\} \leq \gamma_{n+1}\phi(\varepsilon)V^{p+a-1}(\bar{X}_n)$$
$$p\gamma_{n+1}V^{p-1}(\bar{X}_n)\Big(\langle \nabla V(\bar{X}_n), b(\bar{X}_n)\rangle + \frac{\lambda_1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \frac{p-1}{2}\frac{\langle \nabla V, \sigma\sigma^*\nabla V\rangle(\bar{X}_n)}{V(\bar{X}_n)}\Big)$$

avec ϕ fonction positive telle que $\phi(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\phi(\varepsilon) \leq \alpha_p/2$. D'après l'hypothèse de rappel, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} \leq V^p(\bar{X}_n) + pV^{p-1}(\bar{X}_n)\Big(\beta 1_{\{|\bar{X}_n|\leq M\}} - \frac{\alpha_p}{2}V^a(\bar{X}_n)1_{\{|\bar{X}_n|>M\}}\Big).$$

On en déduit le résultat. □

5.3.2 Critère de tension

Lemme 5.9 *Soit $s \in (1,2]$. Supposons que pour tout $p < p_{sup}$, $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$ et qu'il existe $n_0(p) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0(p)$, la relation (5.17) soit satisfaite. Alors :*

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\eta_k}{H_k\gamma_k}\right)^s \mathbb{E}\left\{|V^p(\bar{X}_k) - V^p(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))|^s\right\} < +\infty$$

dans les cas suivants :

1. *$p < p_{sup}/2$, $s = 2$ et $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.*
2. *$p_{sup}/2 \leq p < p_{sup} + (a-1)/2$, $s < \frac{p_{sup}+a-1}{p+\frac{a-1}{2}}$ et :*

$$\left(\frac{1}{\gamma_n}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^s\right) \text{ est décroissante et } \qquad \sum_{n\geq 1}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^s < +\infty.$$

Remarque 5.10 Ce lemme est nécessaire pour assurer la convergence d'une martingale par le lemme de Chow (voir preuve de la proposition 5.11). Il n'a donc un intérêt que si $s > 1$. L'hypothèse $p < p_{sup} + (a-1)/2$ permet en fait d'assurer l'existence d'un tel s.

Preuve : On pose : $\theta_n = \frac{1}{\gamma_n}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^s$. On remarque dans un premier temps que sous les conditions 1 et 2, on a :

$$(\theta_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1}\theta_n\gamma_n < \infty.$$

D'après le lemme 4 de [LaPa03], on en déduit que pour tout $p < p_{sup}$,

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^s\mathbb{E}\{V^{p+a-1}(\bar{X}_{n-1})\} < +\infty. \tag{5.24}$$

où $s = 2$ (resp. $s < (p_{sup}+a-1)(p+a-1/2)$ sous la condition 1 (resp. condition 2). Il nous suffit alors de montrer que sous les condition 1 ou 2, il existe $\bar{p} < p_{sup}$:

$$\mathbb{E}\{|V^p(\bar{X}_n) - V^p(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^s\} \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}\mathbb{E}\{V^{\bar{p}+a-1}(\bar{X}_{n-1})\} \tag{5.25}$$

Par la formule de Taylor, il existe $\xi_n \in [\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}), \bar{X}_n]$ tel que :

$$|V^p(\bar{X}_n) - V^p(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^s = \gamma_n^{\frac{s}{2}}|\langle\nabla V^p(\xi_n), \sigma(\bar{X}_{n-1})U_n\rangle|^s.$$

Si $p \geq 1/2$, on a :

$$\begin{aligned}|\nabla V^p(\xi_n)| \leq CV^{p-\frac{1}{2}}(\xi_n) &\leq \left(\sqrt{V}(\bar{X}_{n-1}) + [\sqrt{V}]_L\left(\gamma_n|b(\bar{X}_{n-1})| + \sqrt{\gamma_n}|\sigma(\bar{X}_{n-1})U_n|\right)\right)^{2p-1} \\ &\leq CV^{p-\frac{1}{2}}(\bar{X}_{n-1})(1 + |U_n|^{2p-1})\end{aligned}$$

car $|b| + \|\sigma\| = O(\sqrt{V})$ et (γ_n) est bornée. Ainsi, par la condition $(\mathbf{S_a})$, si $p \geq 1/2$:

$$|V^p(\bar{X}_n) - V^p(\bar{X}_{n-1} + \gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))|^s \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}V^{s(p+\frac{a-1}{2})}(\bar{X}_{n-1})(1 + |U_n|^{2ps}).$$

Sous les conditions 1 ou 2, on remarque que $s(p+\frac{a-1}{2}) < p_{sup}+a-1$ et on peut également vérifier que $ps < p_{sup}$, d'où le résultat dans le cas $p \geq 1/2$. Supposons maintenant $p < 1/2$ et considérons $K_n^{\frac{1}{2}}$ défini dans le lemme 5.6. Sur $K_n^{\frac{1}{2}}$, on sait d'après le début de la preuve du lemme 5.6 qu' à partir d'un certain rang :

$$|\nabla V^p(\xi_n)| \leq CV^{p-\frac{1}{2}}(\xi_n) \leq CV^{p-\frac{1}{2}}(\bar{X}_{n-1})$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}\{\big|V^p(\bar{X}_n) - V^p(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))\big|^s 1_{K_n^{\frac{1}{2}}}\} \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}\mathbb{E}\{V^{(p+\frac{a-1}{2})s}(\bar{X}_{n-1})\} \tag{5.26}$$

à partir d'un certain rang. D'autre part, comme V^p est $2p$-hölderienne, on a d'après l'hypothèse $(\mathbf{S_a})$:

$$\mathbb{E}\{\big|V^p(\bar{X}_n) - V^p(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))\big|^s 1_{(K_n^{\frac{1}{2}})^c}\} \leq C\gamma_n^{ps}\mathbb{E}\Big\{V^{aps}(\bar{X}_{n-1})\mathbb{E}\{|U_n|^{2ps}1_{(K_n^{\frac{1}{2}})^c}/\mathcal{F}_n\}\Big\}.$$

Si $p < 1/2$, $2ps < 2$, donc on en déduit par l'inégalité de Hölder, puis l'inégalité de Bienaimé-Chebyschev :

$$\mathbb{E}\{|U_n|^{2ps}1_{(K_n^{\frac{1}{2}})^c}/\mathcal{F}_n\} \leq \mathbb{E}\{|U_n|^2\}^{ps}\mathbb{P}\{(K_n^{\frac{1}{2}})^c/\mathcal{F}_n\}^{1-ps} \leq C\gamma_n^{1-ps}V^{(a-1)(1-ps)}(\bar{X}_{n-1}).$$

Finalement :

$$\mathbb{E}\{\big|V^p(\bar{X}_n)-V^p(\bar{X}_{n-1}+\gamma_n b(\bar{X}_{n-1}))\big|^s 1_{(K_n^{\frac{1}{2}})^c}\} \leq C\gamma_n\mathbb{E}\{V^{ps+a-1}(\bar{X}_{n-1})\} \leq C\gamma_n^{\frac{s}{2}}\mathbb{E}\{V^{(p+\frac{a-1}{2})s}(\bar{X}_{n-1})\}. \tag{5.27}$$

Ainsi, dans le cas $p < 1/2$, le résultat s'obtient par combinaison de (5.26) et (5.27). □

Proposition 5.11 *Soit $a \in]-\infty, 1]$ tel que $(\mathbf{R_a})$ et $(\mathbf{S_a})$ soient satisfaites. Supposons que U_1 satisfasse l'hypothèse $(\mathbf{H})$ et que $\mathbb{E}\{|U_1|^{2(p\vee 1)}\} < +\infty$ pour tout $p < p_{sup}$. Considérons enfin un système $(\eta_n, \gamma_n)_{n\geq 1}$ tel que $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ soit décroissante. Alors,*
(1) Si $0 < p < p_{sup}/2$,

$$\sup_{n\geq 1}\bar{\nu}_n(V^{p+a-1}) < +\infty \qquad p.s.$$

En particulier, si $\frac{p_{sup}}{2}+a-1 > 0$, la suite $(\bar{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement tendue.
(2) Si $p_{sup}/2 \leq p < p_{sup}+(a-1)/2$, alors :

$$\sup_{n\geq 1}\bar{\nu}_n(V^{p+a-1}) < +\infty \qquad p.s.$$

dès que le système $(\eta_n, \gamma_n)_{n\geq 1}$ satisfait la condition suivante :
Il existe $s \in (1, \frac{p_{sup}+a-1}{p+\frac{a-1}{2}})$ tel que :

$$\Big(\frac{1}{\gamma_n}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^s\Big) \text{ est décroissante et} \qquad \sum_{n\geq 1}(\frac{\eta_n}{H_n\sqrt{\gamma_n}})^s < +\infty. \tag{5.28}$$

En particulier, sous ces conditions, la suite $(\bar{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement tendue si $p+a-1 > 0$.

Remarque 5.12 Si $\gamma_n = Cn^{-r_1}$ et $\eta_n = C'n^{-r_2}$ tels que $0 < r_1 \leq r_2$. Alors, la condition (3.12) est vérifiée si et seulement si :

$$0 < r_1 < 2\Big((1 - \frac{1}{s}\Big) \text{ et } r_2 < 1 \qquad \text{ou} \qquad 0 < r_1 \leq 2\Big(1 - \frac{1}{s}\Big) \text{ et } r_2 = 1$$

Preuve : Soit $p < p_{sup}$. D'après la proposition 5.8, on obtient en renversant l'inégalité (5.17) :

$$V^{p+a-1}(\bar{X}_{k-1}) \leq \frac{V^p(\bar{X}_{k-1}) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}}{\bar{\alpha}\gamma_k} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}.$$

pour $n \geq n_0$. Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que :

$$\sup_{n \geq n_0+1} \Big(\frac{1}{H_n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\eta_k}{\gamma_k}\big(V^p(\bar{X}_{k-1}) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\big)\Big) < \infty \qquad p.s. \tag{5.29}$$

Considérons donc :

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\eta_k}{\gamma_k}(V^p(\bar{X}_{k-1}) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}) = \frac{1}{H_n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\eta_k}{\gamma_k}\big(V^p(\bar{X}_{k-1}) - V^p(\bar{X}_k)\big) \tag{5.30}$$

$$+ \frac{1}{H_n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\eta_k}{\gamma_k}\big(V^p(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\big). \tag{5.31}$$

Par une transformation d'Abel (voir Lemme 3.9 pour une preuve identique), on montre que

$$\sup_{n \geq n_0} \Big(\frac{1}{H_n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\eta_k}{\gamma_k}\big(V^p(\bar{X}_{k-1}) - V^p(\bar{X}_k)\big)\Big) < +\infty.$$

Pour (5.31), on considère la martingale (M_n) définie par :

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{H_k\gamma_k}\big(V^p(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}\big)$$

(M_n) est une martingale convergente. En effet,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\{|\Delta M_n|^s\} \leq \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\eta_k}{H_k\gamma_k}\right)^s \mathbb{E}\big\{|V^p(\bar{X}_k) - \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_k)/\mathcal{F}_{k-1}\}|^s\big\}$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} 2^s \left(\frac{\eta_k}{H_k\gamma_k}\right)^s \mathbb{E}\big\{|V^p(\bar{X}_k) - V^p(\bar{X}_{k-1} + \gamma_k b(\bar{X}_{k-1}))|^s\big\}.$$

Or, cette somme est finie d'après le lemme 5.9 ce qui permet d'assurer la convergence $p.s.$ de la martingale par le lemme de Chow puis d'en déduire (5.29) grâce au lemme de Kronecker. □

Troisième partie

Approximation de la loi du processus en régime stationnaire

Chapitre 6

Approximation de la loi d'une diffusion avec sauts en régime stationnaire et application au pricing d'options pour des modèles à volatilité stationnaire.

Résumé

Nous construisons et étudions une suite de mesures empiriques sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ avec pour but d'approcher la loi d'une diffusion avec sauts en régime stationnaire. Sous des hypothèses de Lyapounov du même type que celle du chapitre 3, nous montrons que *p.s.*, cette suite converge faiblement vers la loi voulue.
La motivation pratique de ce travail est de fournir une méthode numérique de valorisation d'options pour des modèles à volatilité stochastique stationnaire. Nous fournissons donc des résultats numériques de calcul de prix d'options Européennes et Asiatiques associés à des modèles de ce type.

6.1 Introduction

6.1.1 Objectifs et Motivations

Dans le chapitre 3, on s'est intéressé à la convergence de suites de mesures empiriques vers la probabilité invariante ν d'une EDS dirigée par un processus de Lévy. Le but de ce travail est d'utiliser le même type de méthode pour approcher non plus la seule probabilité invariante mais l'ensemble de la loi $\mathbb{P}_\nu$ du processus (X_t), solution de l'EDS, en régime stationnaire, *i.e.* ayant pour loi initiale la probabilité invariante.
Concrètement, l'objectif est de construire une suite de mesures empiriques simulables $(\nu^{(\mathbf{n})})$ sur l'espace $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}^d$ telle que si l'on note $\mathbb{P}_\nu$ la loi du processus solution de l'EDS,

$$\nu^{(\mathbf{n})}(\omega, F) \xrightarrow{n\to+\infty} \int F(x)\mathbb{P}_\nu(dx) \qquad p.s.$$

pour une classe de fonctionnelles contenant l'ensemble des fonctionnelles $F : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ bornées et continues pour la topologie de Skorokhod.
Une motivation pratique de ce travail est de proposer une méthode numérique de valorisation d'options dans le cadre des modèles à volatilité stochastique stationnaire (avec ou sans sauts). Dans ces modèles, on fait généralement l'hypothèse que le processus de volatilité est un processus

(positif) solution d'une EDS ayant une force de rappel à la moyenne et donc des propriétés ergodiques. Par exemple, dans le modèle de Heston ([Hes93]), le processus de volatilité est un processus de Cox-Ingersoll-Ross (C.I.R.), tandis que dans le modèle de Barndorff-Nielsen et Shephard ([BaSh01]), le processus de volatilité est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un subordinateur.
Ces modèles sont calibrés sur les prix d'options "vanille" (Call-Put). En d'autres termes, on détermine les paramètres du modèle pour lesquels les prix d'options "vanille" correspondent le mieux aux prix du marché. Une fois ces paramètres déterminés, on utilise ces mêmes modèles pour la valorisation d'options exotiques ou pour faire le calcul de risques (Value at Risk) par simulation de Monte-Carlo. Comme la valeur initiale du processus de volatilité n'est en général pas calibrée et que le but de ces modèles est d'être suffisamment riche pour coller à la réalité du marché, il est de ce fait justifié et non réducteur de supposer que la volatilité est en régime stationnaire. De plus, la volatilité n'étant pas observée, il n'y aucune raison de supposer celle-ci déterministe à l'origine $t = 0$.
Nous supposerons donc dans les applications que la volatilité est en régime stationnaire, *i.e.* que sa loi initiale est celle de sa probabilité invariante.

6.1.2 Notations et Rappels

Dans toute la suite, $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de Skorokhod. Avec notations introduites dans le chapitre 3, *i.e.*, on considère $(X_t)_{t\geq 0}$ processus càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, solution de l'EDS suivante :

$$dX_t = b(X_{t-})dt + \sigma(X_{t-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t. \tag{6.1}$$

où l'on rappelle que $b : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ $\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ (ensemble des matrices à d lignes et m colonnes), $\kappa : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{M}_{d,l}$ sont continues et sous-linéaires. On rappelle également que les définitions de la composante de saut (Z_t) et de b dépendent du moment des accroissements de (Z_t) (représentés par l'hypothèse $(\mathbf{H_p^1})$) et de son comportement local (représenté par l'hypothèse $(\mathbf{H_q^2})$). Nous renvoyons au chapitre 3 pour un rappel de ces notations. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, l'augmentation habituelle de $(\sigma((X_s), s \leq t))_{t\geq 0}$ et on introduit $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le schéma d'Euler suivant :

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = x \in \mathbb{R}^d \\ \bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_{n+1} b(\bar{X}_n) + \sigma(\bar{X}_n)(W_{\Gamma_{n+1}} - W_{\Gamma_n}) + \kappa(\bar{X}_n)\bar{Z}_{n+1} \end{cases} \tag{6.2}$$

où $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs et $\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Avec la convention $\Gamma_0 = \gamma_0 = 0$, on pose

$$\imath(k,t) = \inf\{n \geq 0, \Gamma_{n+1} - \Gamma_k \geq t\} (= \max\{n \geq 0, \Gamma_n - \Gamma_k < t\}) \quad \text{et} \quad \underline{s} = \Gamma_{\imath(0,s)}.$$

On construit alors la suite de processus à trajectoires càdlàg $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\bar{X}_t^{(0)} = x + \int_0^t b(\bar{X}_{\underline{s^-}}^{(0)})ds + \int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{s^-}}^{(0)})dW_s + \int_0^t \kappa(\bar{X}_{\underline{s^-}}^{(0)})dZ_s \quad \text{et} \quad \bar{X}_t^{(n)} = \bar{X}_{\Gamma_n+t}^{(0)}. \tag{6.3}$$

On a $\bar{X}_{\Gamma_n}^{(0)} = \bar{X}_0^{(n)} = \bar{X}_n$. L'augmentation habituelle de $(\sigma(\bar{X}_s^{(0)}, 0 \leq s \leq t))_{t\geq 0}$ est notée $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$. On note que $\underline{s} \neq \underline{s^-}$ si et seulement si $s = \Gamma_k$ avec $k \geq 1$. Or, les sauts de Z ne sont $p.s.$ pas

prévisibles, ce qui implique que $\mathbb{P}(\{\exists k \geq 1, \Delta Z_{\Gamma_k} \neq 0\}) = 0$. En particulier, quitte à remplacer $(\bar{X}^{(0)})$ par une version qui lui est indistinguable, on pourra écrire dans la suite

$$\bar{X}_t^{(0)} = x + \int_0^t b(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})ds + \int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})dW_s + \int_0^t \kappa(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})dZ_s.$$

La suite de mesures empiriques $(\nu^{(\mathbf{n})})$ est alors définie $p.s.$ par

$$\nu^{(\mathbf{n})} = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k \delta_{(\bar{X}_t^{(k-1)})}. \tag{6.4}$$

où (η_k) est une suite de poids strictements positifs telle que $H_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$. On note enfin $(\nu_{\mathbf{t}}^{(\mathbf{n})})$ la suite de mesures empiriques marginales sur $\mathbb{R}^d$ définie par $\nu_{\mathbf{t}}^{(\mathbf{n})} = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \delta_{X_t^{(k-1)}}$. Enfin, en accord avec le chapitre 3, on note $(\bar{\nu}_n)$ la suite de mesures empiriques sur $\mathbb{R}^d$ définie par $\bar{\nu}_n = \nu_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{n})}$.

Remarque 6.1 Pour une fonctionnelle $F : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$, la suite $(\nu^{(\mathbf{n})}(F))$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\nu^{(\mathbf{n+1})}(F) = \nu^{(\mathbf{n})}(F) + \frac{\eta_{n+1}}{H_{n+1}}(F(X^{(n)}) - \nu^{(\mathbf{n})}(F)). \tag{6.5}$$

Pour une fonctionnelle $F : \mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$, on utilise donc cette relation pour implémenter de manière récursive la suite $(\nu^{(\mathbf{n})}(F))$. Contrairement à la simulation de $(\bar{\nu}_n)$, l'implémention nécessite ici de mémoriser la trajectoire du schéma d'Euler $X^{(0)}$ entre Γ_n et Γ_{n+T}. On peut remarquer que le nombre de valeurs à mémoriser est de l'ordre de $\imath(n,t) - n$. Si $\gamma_n = Cn^{-\rho}$ $(\rho \in (0,1])$, ceci signifie que le nombre de valeurs à garder en mémoire est de l'ordre de n^ρ.

Une condition nécessaire pour que $(\nu^{(\mathbf{n})})$ converge $p.s$ vers la loi du processus en régime stationnaire est naturellement que $(\bar{\nu}_n)$ converge vers la probabilité invariante du processus. Cette convergence a été montrée dans le chapitre 3. Rappelons le résultat qui y est établi (voir ce chapitre pour les notations)

Proposition 6.2 *Soient $a \in (0,1]$, $p > 0$ et $q \in [0,1]$ tels que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ et $(\mathbf{S_{a,p,q}})$ soient satisfaites. Supposons également que $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Alors,*

$$\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{2}+a-1}) < +\infty \quad p.s.$$

En conséquence, si $p/2 + a - 1 > 0$, la suite $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ est tendue p.s. Si de plus,

$$\kappa(x) \overset{|x|\to+\infty}{=} o(|x|) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \|\kappa\|^{2q} \leq CV^{\frac{p}{2}+a-1}, \tag{6.6}$$

alors toute valeur d'adhérence de $(\bar{\nu}_n)$ est invariante pour l'EDS (6.1). Enfin, si (6.1) admet une unique probabilité invariante, pour toute fonction f continue telle que $f = o(V^{\frac{p}{2}+a-1})$, $\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_n(f) = \nu(f)$ $p.s.$

6.1.3 Organisation du chapitre.

Dans la Section 6.2, on expose les résultats principaux : les Théorèmes 6.3 et 6.5. La preuve du Théorème 6.3 est établie dans la Section 6.3 sous une forme purement fonctionnelle tandis que la preuve du second résultat détaillée dans la Section 6.4, est basée sur un raisonnement du type "Tension+ Convergence fini-dimensionnelle". On termine le chapitre par la mise en oeuvre de l'algorithme pour le calcul d'options dans différents modèles (voir Section 6.5).

6.2 Résultats principaux

Dans le Théorème 6.3, on montre que si les coefficients sont localement lipschitziens (et sous-linéaires) et que l'on a existence d'une unique probabilité invariante ν, alors $(\nu^{(\mathbf{n})}(\omega, dy))$ converge $p.s.$ pour la topologie de la convergence étroite sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ vers $\mathbb{P}_\nu(dy)$ dès que $(\bar{\nu}_n)$ converge vers ν. Le caractère localement lipschitzien cache naturellement certaines propriétés concernant l'EDS et la convergence du schéma d'Euler que nous utilisons dans la preuve. Le Théorème 6.5 est une version plus générale permettant de visualiser le type d'hypothèses véritablement nécessaires : le caractère localement lipschitzien est remplacé par une hypothèse de convergence du semi-groupe ce qui permet d'évaluer dans quelle mesure on peut envisager une extension à certains cas critiques (comme le modèle de Heston par exemple). D'autre part, nous montrons que sous une hypothèse peu contraignante sur les pas et les poids, on peut redémontrer l'invariance des valeurs d'adhérence de $(\bar{\nu}_n)$ sans utiliser le théorème d'Echeverria-Weiss. Ceci permet également d'affaiblir les hypothèses sur les coefficients.

Théorème 6.3 *On suppose que b, σ et κ sont localement lipschitziennes et sous-linéaires et que l'EDS* (6.1) *admet une unique probabilité invariante ν. Si de plus, $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. étroitement vers ν, alors, $(\bar{\nu}_n(\omega, dy)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $\mathbb{P}_\nu(dy)$ où $\mathbb{P}_\nu$ désigne la loi du processus (X_t) en régime stationnaire. Ainsi, pour toute fonctionnelle $F : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R})$ bornée et continue pour la topologie de Skorokhod,*

$$\nu^{(\mathbf{n})}(\omega, F) \xrightarrow{n\to+\infty} \int F(x)\mathbb{P}_\nu(dx) \quad p.s. \tag{6.7}$$

Pour le second résultat, on introduit une hypothèse plus fine concernant les solutions de l'EDS et la convergence du schéma d'Euler à temps continu vers le processus solution de (6.1). On note d'abord $(\hat{X}^{(n,x)})$ le processus construit de la manière suivante :

$$\hat{X}_t^{(n,x)} = x + \int_0^t b(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{(n,x)})ds + \int_0^t \sigma(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{(n,x)})dW_s + \int_0^t \kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{(n,x)})dZ_s$$

où $\underline{s}_n = \Gamma_{\iota(n,s)} - \Gamma_n$. D'après la propriété de Markov, on a $\mathcal{L}(\hat{X}^{(n,x)}) = \mathcal{L}(\bar{X}^{(n)}|\bar{X}_n = x)$. On fait alors l'hypothèse $(\mathbf{F})$ suivante :

$$(\mathbf{F}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Il y a existence et unicité faibles pour l'EDS (6.1) et } (X_t) \text{ solution de l'EDS (6.1) est} \\ \text{un processus de Markov de semi-groupe } (P_t) \text{ Fellérien. De plus, pour tout compact } K \\ \text{de } \mathbb{R}^d, \text{ pour toute fonction } f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ à support compact,} \\ \\ \qquad \sup_{x\in K} \big(\mathbb{E}\{f(\hat{X}_t^{(k,x)})\} - P_t f(x)\big) \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \quad \forall t \geq 0. \end{array} \right.$$

Remarque 6.4 Cette hypothèse est en particulier satisfaite si les coefficients sont localement lipschitziens et sous-linéaires (voir Lemme 6.20).

Le second résultat est le suivant :

Théorème 6.5 *Soient $a \in (0,1]$, $p > 0$ et $q \in [0,1]$ tels que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ et $(\mathbf{S_{a,p,q}})$ soient satisfaites. Supposons également que $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ soit décroissante. Alors :*
(a) Si $p/2 + a - 1 > 0$, la suite $(\nu^{(\mathbf{n})})_{n\geq 1}$ est presque sûrement tendue sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.
(b) Supposons de plus que les hypothèses $(\mathbf{F})$ et (6.6) soient satisfaites. Alors, toute valeur d'adhérence de $(\nu^{(\mathbf{n})})_{n\geq 1}$ pour la topologie de la convergence étroite sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est de la forme $\mathbb{P}_\nu$ où ν désigne une probabilité invariante pour l'EDS et $\mathbb{P}_\nu$, la loi du processus (X_t) de loi initiale ν. En particulier, si l'EDS admet une unique probabilité invariante ν, pour toute fonctionnelle $F : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ continue bornée sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$,

$$\nu^{(\mathbf{n})}(\omega, F) \xrightarrow{n\to+\infty} \int F(x)\mathbb{P}_\nu(dx) \quad p.s. \tag{6.8}$$

(c) Supposons de plus que $a = 1$ et que $\|\kappa\|^2 \leq CV^{p\wedge 1}$. Soit $F : \mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ continue pour la topologie de Skorokhod telle que $|F((\alpha_t), 0 \leq t \leq T)| \leq C \sup_{0\leq t\leq T} V^r(\alpha_t)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}^d)$. Alors, (6.8) est satisfaite par F si $r < p/2$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{n\geq 1}(1/H_n^{p/(r+\varepsilon)}) < +\infty$.
(d) Supposons que $\eta_n = C_1 n^{-\rho_1}$ et $\gamma_n = C_2 n^{-\rho_2}$ avec $0 < \rho_2 \leq \rho_1 \leq 1$. Alors, si $\rho_2 < 1$, les points (b) et (c) restent vrais sans la condition (6.6).

Remarque 6.6 Si $\eta_n = Cn^{-\rho}$ avec $\rho \in (0,1]$, la condition associée au point (c) :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{H_n^{\frac{p}{(r+\epsilon)}}} < +\infty \Longleftrightarrow r < p(1-\rho).$$

En particulier, si $\rho \leq 1/2$, cette condition est satisfaite pour tout $r < p/2$. Le point (c) est également valable sous les hypothèses du Théorème 6.3. Pour des pas et des poids généraux, la condition sur les pas et les poids du point (d) peut être remplacée par l'hypothèse :

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\eta_k - \eta_{\imath(k-1,t)+1}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

On vérifie alors facilement que les pas et les poids proposés dans le point (d) satisfont cette hypothèse en remarquant que si $\rho_2 < 1$, alors $\imath(n,t) - n = o(n)$. En revanche, cette condition n'est pas vérifiée si $\rho_1 = \rho_2 = 1$ car on remarque alors que $(\imath(n,t) - n) \sim n(e^t - 1)$.
L'idée générale du point (d) est la suivante : sous une faible contrainte sur les pas et les poids, on peut redémontrer l'invariance des valeurs d'adhérence de $(\bar{\nu}_n)$ sans utiliser le théorème d'Echeverria-Weiss. Ceci nous permet alors de nous affranchir de la condition (6.6). En particulier, ceci signifie que, sous l'hypothèse $(\mathbf{F})$ et cette faible contrainte sur les pas et les poids, le point (d) affaiblit également les hypothèses sur la croissance des coefficients associées à la proposition 6.2.

Remarque 6.7 Nous n'avons présenté ici que des résultats pour ce qu'on appelé dans le chapitre 3, le schéma *exact* (E). Cependant, sous une hypothèse de type (**F**), il est possible d'étendre ces résultats aux schémas approchés.
Le fait de présenter des résultats dans un cadre où on n'a pas unicité de la probabilité invariante peut apparaître inutile pour les applications puisqu'on n'a pas convergence. Ceci n'est pas le cas comme on pourra le voir dans le pricing d'options (voir Remarque 6.18).

6.3 Preuve du théorème 6.3

La preuve du théorème 6.3 consiste essentiellement à montrer la convergence (6.7) à travers un ensemble de fonctionnelles bornées et lipschitziennes pour une distance $\tilde{d}$ pour laquelle $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ est polonais. D'après le lemme 6.21 de l'annexe, ceci suffit à prouver le résultat. Nous établissons dans un premier temps plusieurs lemmes préliminaires puis prouvons le résultat dans la partie 6.3.2.

6.3.1 Lemmes préliminaires

Le lemme qui suit (Lemme 6.8) constitue une étape classique mais fondamentale de ce type de problème. On montre que l'on peut, pour une certaine classe de fonctionnelles F, ramener le problème de la convergence de $(\nu^{(n)}(F))$ à celui de la convergence d'un objet plus régulier. Ce lemme est une étape nécessaire à la preuve des deux théorèmes principaux. Pour tout $T > 0$, notons $\mathcal{D}_T = \sigma(\pi_s, 0 \leq s \leq T)$ où $\pi_s : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ est définie par $\pi_s(\alpha) = \alpha(s)$. Pour tout $n \geq 0$, pour tout $T > 0$, on introduit également $\tau(n, T)$ défini par

$$\tau(n, T) := \inf\{k \geq 0, \Gamma_k + T > \Gamma_n\}. \tag{6.9}$$

On remarque que $\Gamma_{\tau(n,T)-1} \leq \Gamma_n - T$ et que $\Gamma_{\tau(n,T)} > \Gamma_n - T$. D'autre part, on a également que $\tau(n, T) = \inf\{k \geq 0, \imath(k, T) \geq n\}$.

Lemme 6.8 *Soit $T > 0$ et $F : \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$, une fonctionnelle $\mathcal{D}_T$-mesurable et bornée. Soit $(\mathcal{G}_k)$ une filtration satisfaisant : $\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_k} \subset \mathcal{G}_k$ pour tout $k \geq 1$. Si la suite (η_k/γ_k) est bornée alors,*

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \Big(F(\bar{X}_s^{(k-1)}, 0 \leq s \leq T) - \mathbb{E}\{F(\bar{X}_s^{(k-1)}, 0 \leq s \leq T)/\mathcal{G}_{k-1}\} \Big) \xrightarrow{n \to +\infty} 0. \tag{6.10}$$

Preuve : Notons $Y^{(k)} = F(\bar{X}_s^{(k)}, 0 \leq s \leq T)$. On décompose dans un premier temps la somme ci-dessus de la manière suivante :

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \Big(Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_{k-1}\} \Big) = \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \Big(Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\} \Big) \tag{6.11}$$

$$+ \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \Big(\mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_{k-1}\} \Big). \tag{6.12}$$

On étudie d'abord le terme de droite de (6.11). Comme $\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n} \subset \mathcal{G}_n$ et que $Y^{(k)}$ est $\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\imath(k,T)+1}}$-mesurable, $Y^{(k)}$ est donc $\mathcal{G}_n$-mesurable si $k \leq \tau(n, T) - 1$. Ainsi, comme F et (η_k/γ_k) sont

bornées,

$$\Big|\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(Y^{(k-1)}-\mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\}\Big)\Big| \le \frac{C}{H_n}\sum_{k=\tau(n,T)}^{n}\eta_k \le \frac{C}{H_n}\sum_{k=\tau(n,T)}^{n}\gamma_k$$
$$= \frac{C}{H_n}\big(\Gamma_n-\Gamma_{\tau(n,T)-1}\big) = \frac{C}{H_n}\big(\Gamma_n-\Gamma_{\tau(n,T)}+\gamma_{\tau(n,T)}\big) \le \frac{C(T+\gamma_1)}{H_n}\xrightarrow{n\to+\infty}0 \quad p.s.$$

où dans la dernière inégalité, on a utilisé que $(\gamma_n)_{n\ge1}$ est décroissante. Il reste à montrer que (6.12) tend également vers 0. Pour cela, on définit (M_n) par

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{H_k}\Big(\mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\}-\mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_{k-1}\}\Big). \tag{6.13}$$

Par construction, le processus (M_n) est $(\mathcal{G}_n)$-adapté et on peut vérifier qu'il s'agit d'une $(\mathcal{G}_n)$-martingale. On montre qu'elle est bornée dans L^2.
Notons $\Phi^{(k,n)}=\mathbb{E}\{F(\bar{X}_s^{(k)},0\le s\le T)/\mathcal{G}_n\}-\mathbb{E}\{F(\bar{X}_s^{(k)},0\le s\le T)/\mathcal{G}_k\}$. Comme $\Phi^{(k,n)}$ est en particulier $\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_k+T}$-mesurable, on peut remarquer que pour $i\ge\imath(k,T)+1$, $\mathbb{E}\{\Phi^{(i,n)}\Phi^{(k,n)}\}=0$. Ainsi,

$$\mathbb{E}\{M_n^2\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{H_k^2}\mathbb{E}\big\{(\Phi^{(k-1,n)})^2\big\}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\eta_k}{H_k}\sum_{i=k+1}^{\imath(k-1,T)\wedge n}\frac{\eta_i}{H_i}\mathbb{E}\big\{\Phi^{(i-1,n)}\Phi^{(k-1,n)}\big\}. \tag{6.14}$$

Comme F est supposée bornée, on en déduit que

$$\sup_{n\ge1}\mathbb{E}\{M_n^2\} \le C\sup_{n\ge1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{H_k^2}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\eta_k}{H_k}\sum_{i=k+1}^{\imath(k-1,T)\wedge n}\frac{\eta_i}{H_i}\Big)$$
$$\le C\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{H_k^2}+2\sum_{k\ge1}\frac{\eta_k}{H_k}\sum_{i=k+1}^{\imath(k-1,T)}\frac{\eta_i}{H_i}\Big). \tag{6.15}$$

Montrons que (6.15) est fini. Comme (η_k/γ_k) est bornée et que $i\mapsto H_i$ est croissante, on peut remarquer que

$$\sum_{i=k}^{\imath(k-1,T)}\frac{\eta_i}{H_i}\le\frac{C}{H_k}\sum_{i=k}^{\imath(k-1,T)}\gamma_i\le\frac{C}{H_k}\big(\Gamma_{\imath(k-1,T)}-\Gamma_{k-1}\big)\le\frac{CT}{H_k}.$$

On en déduit que

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{H_k^2}+2\sum_{k\ge1}\frac{\eta_k}{H_k}\sum_{i=k+1}^{\imath(k-1,T)}\frac{\eta_i}{H_i}\Big)\le C_T\sum_{k\ge1}\frac{\eta_k}{H_k^2}\le C_T\Big(\frac{\eta_1}{H_1^2}+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^2}\Big)<+\infty.$$

(M_n) est donc bornée dans L^2. D'après le lemme de Kronecker, il suit que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(\mathbb{E}\{F(\bar{X}_s^{(k-1)},0\le s\le T)/\mathcal{G}_n\}-\mathbb{E}\{F(\bar{X}_s^{(k-1)},0\le s\le T)/\mathcal{G}_{k-1}\}\Big)\xrightarrow{n\to+\infty}0 \quad p.s.$$

ce qui termine la preuve. □

On définit maintenant la distance $\tilde{d}$ sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ de la manière suivante. On note d'abord Λ_1, l'ensemble des homéomorphismes croissants de $[0,1]$ et d_1, la distance définie sur $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$ par,

$$d_1(\alpha, \beta) = \inf_{\lambda \in \Lambda_1} \Big\{ \max(\sup_{t\in[0,1]} |\alpha(t) - \beta(\lambda(t))|, \sup_{0\le s<t\le 1} |\log(\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s})|) \Big\}$$

pour tous α, β appartenant à $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$. On rappelle que d_1 métrise $(\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$ (muni de la topologie de Skorokhod) et que $(\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d), d_1)$ est polonais.
Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. Pour tout $T > 0$, on définit $\phi_T : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$ par $(\phi_T(\alpha))(s) = \alpha(sT)$ pour tout $s \in [0,1]$. La distance $\tilde{d}$ est alors définie pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, par

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \Big(1 \wedge d_1(\phi_t(\alpha), \phi_t(\beta) \Big) dt.$$

La distance $\tilde{d}$ métrise $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (muni de la topologie de Skorokhod) et d'après [Pag85],

Proposition 6.9 $(\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \tilde{d})$ *est un espace polonais.*

On établit alors le lemme suivant :

Lemme 6.10 *Supposons que b, σ et κ soient localement lipschitziennes et sous-linéaires. Alors,*
1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\lim_{x \to x_0} \mathbb{E}\{\tilde{d}(X^x, X^{x_0})\} = 0. \tag{6.16}$$

En conséquence, pour toute fonctionnelle $F : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ bornée et lipschitzienne pour la distance $\tilde{d}$, la fonction Φ^F définie par $\Phi^F(x) = \mathbb{E}\{F(X^x)\}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.
2. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x\in K} \mathbb{E}\{\tilde{d}(\hat{X}^{n,x}, X^x)\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{6.17}$$

En conséquence, en notant $F : \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ une fonctionnelle bornée et lipschitzienne pour la distance $\tilde{d}$ et Φ_n^F la fonction définie par $\Phi_n^F(x) = \mathbb{E}\{F(\hat{X}^{n,x})\}$, on a pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x\in K} |\Phi^F(x) - \Phi_n^F(x)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{6.18}$$

Preuve : 1. D'après la définition de $\tilde{d}$, pour tous α, $\beta \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ et pour tout $T > 0$,

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) \le \big(1 \wedge \sup_{0\le t\le T} |\alpha(t) - \beta(t)|\big) + e^{-T}. \tag{6.19}$$

Or, d'après le Corollaire du Théorème 11 p.260 de [Pro90], si les coefficients sont lispchitziens, le flot $x \mapsto X^x$ est *p.s.* continu pour la topologie de la convergence *ucp* (uniforme sur les compacts en probabilité), *i.e.*, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^x - X_t^{x_0}| \xrightarrow{x\to x_0} 0 \qquad \text{en probabilité.} \tag{6.20}$$

Cette convergence s'étend sans difficulté au cas où les coefficients sont localement lipschitziens sous-linéaires car dans ce cas, d'après le lemme 6.19 établi dans l'annexe, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x\in K}\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^x|>M)\xrightarrow{M\to+\infty}0.$$

On déduit alors de (6.19) que

$$\limsup_{x\to x_0}\mathbb{E}\{\tilde{d}(X^x,X^{x_0})\}\le e^{-T}\quad\text{pour tout } T>0.$$

Le résultat (6.16) s'obtient alors en faisant tendre T vers $+\infty$.
2. D'après le lemme 6.20 de l'annexe, pour tout $\varepsilon>0$, pour tout $T>0$,

$$\sup_{x\in K}\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\hat{X}_t^{n,x}-X_t^x|>\varepsilon)\xrightarrow{n\to+\infty}0. \tag{6.21}$$

Ainsi, d'après (6.19), on en déduit que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, pour tout $T>0$

$$\limsup_{n\to+\infty}\sup_{x\in K}\mathbb{E}\{\tilde{d}(\hat{X}^{n,x},X^x)\}\le e^{-T}$$

puis (6.17) en faisant tendre T vers $+\infty$. □

6.3.2 Preuve du Théorème 6.3

Soit $F:\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\mapsto\mathbb{R}$ une fonctionnelle bornée et lipschitzienne pour la distance $\tilde{d}$. On veut montrer que

$$\nu^{(\mathbf{n})}(\omega,F)\xrightarrow{n\to+\infty}\int F(x)\mathbb{P}_\nu(dx)\quad p.s. \tag{6.22}$$

Avec les notations du lemme 6.10, on sait que la fonction Φ^F est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi, comme par hypothèse, $(\bar{\nu}_n)$ converge $p.s.$ vers ν (pour la topologie de la convergence étroite sur $\mathbb{R}^d$), où ν désigne l'unique probabilité invariante de l'EDS, on a

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n\eta_k\Phi^F(\bar{X}_{k-1})\xrightarrow{n\to+\infty}\int\Phi^F(x)\nu(dx)=\int F(x)\mathbb{P}_\nu(dx)$$

où $\mathbb{P}_\nu$ désigne la loi du processus (X_t) de loi initiale ν. D'après (6.22), on en déduit qu'il nous suffit finalement de montrer que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n\eta_k\Big(F(\bar{X}^{(k-1)})-\Phi^F(\bar{X}_{k-1})\Big)\xrightarrow{n\to+\infty}0\qquad p.s. \tag{6.23}$$

Pour tout $T>0$, on définit $F_T:\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\mapsto\mathbb{R}$ par $F_T(\alpha)=F(\alpha^T)$ où $\alpha^T(t):=\alpha(t\wedge T)$. On applique alors le lemme 6.8 à F_T :

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n\eta_kF_T(\bar{X}^{(k-1)})-\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n\eta_k\mathbb{E}\{F_T(\bar{X}^{(k-1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\}\xrightarrow{n\to+\infty}0\qquad p.s. \tag{6.24}$$

Par la propriété de Markov (non homogène), on vérifie que

$$\mathbb{E}\{F_T(\bar{X}^{(k-1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} = \Phi_k^{F_T}(\bar{X}_{k-1}) \quad (\Phi_n^F \text{ est définie dans le lemme 6.10}).$$

Or, d'après le lemme 6.10(2), pour tout $M > 0$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\big(\Phi_k^{F_T}(\bar{X}_{k-1}) - \Phi^{F_T}(\bar{X}_{k-1})\big)1_{\{|\bar{X}_{k-1}|\leq M\}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad p.s. \tag{6.25}$$

D'autre part, $(\bar{\nu}_n)$ est tendue. Ainsi, $\psi(M) = \sup_{n\geq 1}(\bar{\nu}_n(B(0,M)^c)) \to 0$ lorsque $M \to +\infty$ si bien que

$$\sup_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\big|\Phi_k^{F_T}(\bar{X}_{k-1}) - \Phi^{F_T}(\bar{X}_{k-1})\big|1_{\{|\bar{X}_{k-1}|>M\}}\Big) \leq 2\|F\|_\infty\psi(M) \xrightarrow{M\to+\infty} 0. \tag{6.26}$$

En combinant (6.25) et (6.26), on obtient que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\big(\Phi_k^{F_T}(\bar{X}_{k-1}) - \Phi^{F_T}(\bar{X}_{k-1})\big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad p.s.$$

Finalement, cette convergence et (6.24) entraînent que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\Big|\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\big(F(\bar{X}^{(k-1)}) - \Phi^F(\bar{X}^{(k-1)})\big)\Big| \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to+\infty}\Big|\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\big(F(\bar{X}^{(k-1)}) - F^T(\bar{X}^{(k-1)})\big)\Big| \\
&\qquad + \limsup_{n\to+\infty}\Big|\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\big(\Phi^{F_T}(\bar{X}^{(k-1)}) - \Phi^F(\bar{X}^{(k-1)})\big)\Big| \leq 2e^{-T}
\end{aligned}$$

d'après la définition de $\tilde{d}$. (6.23) suit en faisant tendre T vers $+\infty$.
La convergence (6.7) est donc valable pour l'ensemble des fonctionnelles bornées et lipschitziennes pour la distance $\tilde{d}$. Le résultat suit par le lemme 6.21.

6.4 Preuve du Théorème 6.5

Comme on l'a signalé précédemment, la preuve de ce résultat est basée sur une approche "Tension+Convergence fini-dimensionnelle". Cette seconde preuve est plus technique mais a l'avantage d'être moins dépendante de la convergence de $(\bar{\nu}_n)$ vers la probabilité invariante. Ainsi, d'une part, la tension de $(\nu^{(\mathbf{n})})$ nécessite simplement les hypothèses de la proposition 6.2 associées à la tension de $(\bar{\nu}_n)$. D'autre part, le point le plus important est que la stationnarité du processus limite n'est plus nécessairement une conséquence de l'invariance de la limite de $(\bar{\nu}_n)$ obtenue dans le chapitre 3. Cette preuve peut d'une certaine manière se voir comme une redémonstration du théorème d'Echeverria-Weiss adaptée à ce cadre de processus.
Dans la partie 6.4.1, on prouve la tension de la suite $(\nu^{(\mathbf{n})})$ grâce à une adaptation du critère d'Aldous à notre problème puis, dans la partie 6.4.2, on établit la convergence fini-dimensionnelle de $(\nu^{(\mathbf{n})})$. Enfin, on montre le point 3 du Théorème 6.5 dans la partie 6.4.3.

6.4.1 Tension de la suite de mesures empiriques

Avant de prouver la tension de la suite $(\nu^{(\mathbf{n})})$, on établit un critère de type Aldous qui nous sera utile.
Pour $x = (x_t)_t$ fonction càdlàg sur $[0,T]$, on note

$$w'_T(x,\delta) = \inf\{\max_{i\leq r}(\sup_{s,t\in[t_{i-1},t_i[}|x_t - x_s|), 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = T, \inf_{i\leq r}(t_i - t_{i-1}) \geq \delta\}.$$

De même, on note $\Upsilon(T,n,\delta)$ l'ensemble des couples (S,U) de $(\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n+t})_{t\geq 0}$-temps d'arrêt tels que S et U sont bornés par T et $S \leq U \leq S+\delta$ *p.s.*

Lemme 6.11 *Supposons que $(\bar{\nu}_n)$ soit p.s tendue sur $\mathbb{R}^d$. Si de plus, (η_n/γ_n) est décroissante et si, pour tout $T>0$, pour tout K compact de $\mathbb{R}^d$, pour tous $\varepsilon,\eta>0$, il existe p.s. $\delta>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tel que*

$$\sup_{S,U\in\Upsilon(T,n,\delta)} \mathbb{P}\big(|\bar{X}_U^{(n)} - \bar{X}_S^{(n)}| \geq \eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\big)1_{\{\bar{X}_n\in K\}} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \tag{6.27}$$

alors,

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k \mathbf{1}_{\{w'_T(\bar{X}^{(n)},\delta)\geq\eta\}} = 0 \quad p.s. \quad \forall T>0. \tag{6.28}$$

Preuve : Soit $\eta>0$. En reprenant la preuve du critère d'Aldous (voir [JaSh87], par exemple), on peut montrer que pour tout $\delta>0$, pour tout $\tilde{\delta}>0$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tels que $\tilde{\delta}q > T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(w'_T(\bar{X}^{(n)},\delta)\geq 2\eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}) \leq \frac{\tilde{\delta}q}{\tilde{\delta}q - T}\sup_{S,U\in\Upsilon(T,n,\tilde{\delta})}\mathbb{P}\Big(|\bar{X}_U^{(n)} - \bar{X}_S^{(n)}| \geq \eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big)\\ + q\sup_{S,U\in\Upsilon(T,n,\delta)}\mathbb{P}\Big(|\bar{X}_U^{(n)} - \bar{X}_S^{(n)}| \geq \eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big).\end{aligned} \tag{6.29}$$

Soit $\varepsilon>0$. D'après (6.27), pour tout $M>0$, il existe *p.s.* $\tilde{\delta}_1>0$ et $n_1\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{S,U\in\Upsilon(T,n,\tilde{\delta}_1)}\mathbb{P}\Big(|\bar{X}_U^{(n)} - \bar{X}_S^{(n)}| \geq \eta\}/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big)1_{\{|\bar{X}_n|\leq M\}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n\geq n_1.$$

On choisit alors q^* tel que $\tilde{\delta}_1 q^* > T$ et $(\tilde{\delta}_1 q^*)/(\tilde{\delta}_1 q^* - T) \leq 2$. Toujours d'après l'hypothèse (6.27), il existe *p.s.* $n_2(q^*)\in\mathbb{N}$ et $\delta_2(q^*)\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{S,U\in\Upsilon(T,n,\delta_2(q^*))}\mathbb{P}\big(|\bar{X}_U^{(n)} - \bar{X}_S^{(n)}| \geq \eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\big)1_{\{|\bar{X}_n|\leq M\}} \leq \frac{\varepsilon}{2q^*} \quad \forall n\geq n_2.$$

Ainsi, d'après (6.29), on en déduit que pour $n \geq n_1\vee n_2$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbb{P}(w'_T(\bar{X}^{(k-1)},\delta_2(q^*))\geq 2\eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}})1_{\{|\bar{X}_{k-1}|\leq M\}} \leq \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n_1\vee n_2+1}\eta_k + \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Comme $H_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, il suit que pour tout $M>0$,

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbb{P}(w'_T(\bar{X}^{(k-1)},\delta_2)\geq\eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}})1_{\{|\bar{X}_{k-1}|\leq M\}} = 0 \quad p.s.$$

D'autre part, comme $(\bar{\nu}_n)$ est tendue $p.s.$,

$$\lim_{M\to+\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k 1_{\{|\bar{X}_{k-1}|>M\}}=0 \quad p.s.$$

On obtient alors finalement que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbb{P}(w'_T(\bar{X}^{(k-1)},\delta_2)\geq\eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}})=0 \quad p.s.$$

Or, par le lemme 6.8,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(\mathbf{1}_{\{w'_T(\bar{X}^{(k-1)},\delta)\geq\eta\}}-\mathbb{P}(w'_T(\bar{X}^{(k-1)},\delta_2)\geq\eta/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}})\Big)\xrightarrow{n\to+\infty}0 \quad p.s.$$

On en déduit le résultat. □

Lemme 6.12 (Tension) *Soient $a\in(0,1]$, $p>0$ et $q\in[0,1]$ tels que $(\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{p}})$, $(\mathbf{H}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{q}})$ et $(\mathbf{S}_{\mathbf{a},\mathbf{p},\mathbf{q}})$ soient satisfaites. Supposons également que $(\eta_n/\gamma_n)_{n\geq 1}$ soit décroissante. Alors, si $p/2+a-1>0$, la suite $(\nu^{(\mathbf{n})})$ est p.s. tendue sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ pour la topologie de Skorokhod.*

Preuve : D'après la caractérisation de la tension pour la topologie de Skorokhod, il suffit de montrer les deux points suivants :

$$(i)\quad \lim_{M\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,T]}|\bar{X}_t^{(k-1)}|>M\}}=0 \quad p.s. \quad \forall T>0.$$

$$(ii)\quad \lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbf{1}_{\{w'_T(\bar{X}^{(n)},\delta)\geq\eta\}}=0 \quad p.s. \quad \forall T>0.$$

Montrons le point (i). D'abord, on remarque par la propriété de Markov que

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}|\bar{X}_t^{(n)}|>M/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n})=\Phi_M(\bar{X}_n)$$

où, $\Phi_M(x)=\mathbb{P}(\sup_{t\leq T}|\hat{X}_t^{n,x}|>M)$. Ainsi, d'après le lemme 6.19 de l'annexe et la tension de $(\bar{\nu}_n)_{n\geq 1}$, il est clair que

$$\lim_{M\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}|\bar{X}_t^{(k-1)}|>M/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}})=0 \quad p.s.$$

On obtient alors (i) grâce au lemme 6.8.
On prouve maintenant (ii). D'après le lemme 6.11, il nous suffit de prouver la relation (6.27) pour obtenir la tension. En reprenant les notations introduites dans le cas général dans le chapitre 3, on décompose $(\bar{X}_t^{(0)})$ sous la forme suivante

$$\bar{X}_{t,1}^{(0)}=x+\int_0^t b^1(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})ds,\quad \bar{X}_{t,2}^{(0)}=\int_0^t\sigma(\bar{X}_{\underline{s}^-}^{(0)})dW_s+\int_0^t\kappa(\bar{X}_{\underline{s}^-}^{(0)})dY_s^1 \quad \text{et}$$
$$\bar{X}_{t,3}^{(0)}=\sum_{0<s\leq t}\kappa(\bar{X}_{\underline{s}^-}^{(0)})\Delta N_s^1,$$

où $Y_t^1 = \int_{\{|y|\leq 1\}} y(n_t(\omega,dy) - t\pi(dy))$ et $N_t^1 = \int_{\{|y|>1\}} y(n_t(\omega,dy)$ avec $n_t(\omega,dy) = \sum_{0<s\leq t} 1_{\{\Delta Z_s \in dy\}}$ (*i.e.* on prend les notations associées au cas 3 du chapitre 3 avec $h = 1$). On remarque que les processus $(|\bar{X}_{t,1}^{(0)}|)$, $(|\bar{X}_{t,2}^{(0)}|^2)$ et $(|\bar{X}_{t,3}^{(0)}|^{(2p)\wedge 1})$ sont respectivement L-dominés (dominés au sens de Lenglart) par $(G_{\cdot,i}^{(0)}, i = 1,2,3)$ où

$$\begin{aligned}
G_{t,1}^{(0)} &= |x| + \int_0^t |b^1(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})|ds, \\
G_{t,2}^{(0)} &= \int_0^t \Big(\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)}) + \int_{\{|y|\leq 1\}} \|\kappa(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})\|^2 |y|^2 \pi(dy)\Big) ds \quad \text{et,} \\
G_{t,3}^{(0)} &= \int_0^t \int_{\{|y|>1\}} \|\kappa(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})\|^{(2p)\wedge 1} |y|^{(2p)\wedge 1} \pi(dy) ds.
\end{aligned}$$

Soient (S,U) appartenant à $\Upsilon(T,n,\delta)$. On définit $(\bar{X}_{t,i}^{(n)})$ et $(G_{t,i}^{(n)})$ par $\bar{X}_{t,i}^{(n)} = \bar{X}_{\Gamma_n+t,i}^{(0)}$ et $G_{t,i}^{(n)} = G_{\Gamma_n+t,i}^{(0)}$. Par l'inégalité de Lenglart appliquée à $\tilde{X}_{t,i}^{(n)} = \bar{X}_{t,i}^{(n)} - \bar{X}_{t\wedge S,i}^{(n)}$ et $\tilde{G}_{t,i}^{(n)} = G_{t,i}^{(n)} - G_{t\wedge S,i}^{(n)}$, on a pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(|\bar{X}_U^{(n)} - \bar{X}_S^{(n)}| \geq \eta / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big) \leq C\frac{\tilde{\eta}}{\eta^2} &+ \mathbb{P}\Big(\int_{\Gamma_n+S}^{\Gamma_n+U} |b^1(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})| ds \geq \tilde{\eta} / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big) \\
&+ \mathbb{P}\Big(\int_{\Gamma_n+S}^{\Gamma_n+U} (\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + C\|\kappa\|^2)(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)}) ds \geq \tilde{\eta} / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big) \\
&+ \mathbb{P}\Big(\int_{\Gamma_n+S}^{\Gamma_n+U} \|\kappa\|^{(2p)\wedge 1}(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)}) ds \geq \tilde{\eta} / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big).
\end{aligned}$$

Par définition, S et U sont bornés par T et $0 \leq U - S \leq \delta$. De plus, b^1, σ et κ sont sous-linéaires. Ainsi, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(|\bar{X}_U^{(n)} - \bar{X}_S^{(n)}| \geq \eta / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big) &\leq C\frac{\tilde{\eta}}{\eta^2} + \mathbb{P}\Big(\sup_{t\leq T}(C(1 + |\bar{X}_t^{(n)}|^2) \geq \frac{\eta}{\delta}) / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big) \\
&\leq C\frac{\tilde{\eta}}{\eta^2} + \mathbb{P}\Big(\sup_{t\leq T} |\bar{X}_t^{(n)}| \geq M(\eta,\delta) / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big)
\end{aligned}$$

où $M(\eta,\delta) = \sqrt{\frac{\eta}{C\delta} - 1}$. On fixe alors $\tilde{\eta}^* > 0$ pour que

$$\frac{C\tilde{\eta}^*}{\eta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En remarquant alors que $M(\eta,\delta) \to +\infty$ quand $\delta \to 0$, on déduit du lemme 6.19 que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$,

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |\bar{X}_t^{(n)}| \geq M(\eta,\delta) / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_n}\Big) 1_{\{\bar{X}_n \in K\}} \xrightarrow{\delta\to 0} 0,$$

En choisissant δ assez petit, on en déduit que (6.27) est satisfaite puis (ii) par le lemme 6.11. □

6.4.2 Identification de la limite

Le résultat principal de cette partie est la proposition 6.15. On y prouve la convergence fini-dimensionnelle vers un processus de Markov stationnaire de semi-groupe (P_t). Auparavant, nous établissons deux lemmes préliminaires. Dans le lemme 6.13, on amorce la convergence fini-dimensionnelle en s'intéressant à des fonctionnelles de la forme $F((x_t), 0 \leq t \leq T) = f(x)g(x_t)$. Dans le lemme 6.14, on s'intéresse ensuite aux conditions sous lesquelles la construction de $(\nu_{\mathbf{t}}^{(\mathbf{n})})$ assure directement la stationnarité du processus limite.

Lemme 6.13 *Supposons que $(\bar{\nu}_n)$ converge faiblement p.s. vers une probabilité $\bar{\nu}_\infty$ et que l'hypothèse* (**F**) *soit satisfaite. Alors $\forall$ f et g continues bornées sur $\mathbb{R}^d$,*
1.

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k f(\bar{X}_{k-1})g(\bar{X}_t^{(k-1)}) \xrightarrow{n\to+\infty} \int f(x)P_t g(x)\bar{\nu}_\infty(dx) \quad p.s.$$

En particulier, si $\bar{\nu}_\infty$ est invariante pour le semi-groupe (P_t),

$$\nu_{\mathbf{t}}^{(\mathbf{n})}(\omega, dy) \Longrightarrow \nu(dy) \quad p.s.$$

Preuve : On suppose d'abord que f est à support compact. D'après le lemme 6.8 appliqué à $F((x_s), s \leq t) = f(x_0)g(x_t)$ et $\mathcal{G}_k = \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_k}$, on a

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k f(\bar{X}_{k-1})\Big(g(\bar{X}_t^{(k-1)}) - \mathbb{E}\{g(\bar{X}_t^{(k-1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\}\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

On remarque que $\mathbb{E}\{g(\bar{X}_t^{(k-1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} = \Phi^g(\bar{X}_{k-1})$ où, $\Phi^g(x) = \mathbb{E}\{g(\hat{X}_t^{n,x})\}$. Comme f est à support compact, on déduit alors de l'hypothèse (**F**) que,

$$f(\bar{X}_{k-1})\Big(\mathbb{E}\{g(\bar{X}_t^{(k-1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} - P_t g(\bar{X}_{k-1})\Big) \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k f(\bar{X}_{k-1})g(\bar{X}_t^{(k-1)}) - \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k f(\bar{X}_{k-1})P_t g(\bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

$h = fP_tg$ est continue bornée car le semi-groupe est fellérien. On en déduit que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k f(\bar{X}_{k-1})P_t g(\bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} \int f(x)P_t g(x)\bar{\nu}_\infty(dx).$$

Pour $M > 0$, on note ψ_M une fonction continue à support compact contenu dans $B(0, M+1)$ telle que $\psi_M \leq 1$ et $\psi_M = 1$ sur $B(0, M)$. En introduisant la famille de fonctions continues $(f_M, M > 0)$ définie par $f_M := f\psi_M$, on généralise facilement au cas où f est continue bornée en remarquant les deux points suivants :

$$\limsup_{M\to+\infty}\Big(\sup_{n\geq 1}\bar{\nu}_n|f - f\psi_M|\Big) = 0 \quad \text{et} \quad \int |f(x)|(1-\psi_M(x))P_t g(x)\bar{\nu}_\infty(dx) \xrightarrow{M\to+\infty} 0.$$

La dernière assertion s'obtient en posant $f \equiv 1$. □

Lemme 6.14 *Soient $a \in (0,1]$, $p > 0$ et $q \in [0,1]$ tels que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ et $(\mathbf{S_{a,p,q}})$ soient satisfaites. Supposons également que (η_n/γ_n) soit décroissante et que*

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\big(\eta_k - \eta_{\imath(k-1,t)+1}\big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \tag{6.30}$$

Alors, pour toute fonction f lipschitzienne bornée,

$$\nu_{\mathbf{t}}^{(\mathbf{n})}(f) - \nu_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{n})}(f) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Si de plus, l'hypothèse $(\mathbf{F})$ est satisfaite, toute valeur d'adhérence de $(\bar{\nu}_n)$ est invariante pour le semi-groupe (P_t).

Preuve : Soit f lipschitzienne bornée. On commence par décomposer $\nu_{\mathbf{t}}^{(\mathbf{n})}(f) - \nu_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{n})}(f)$ sous la forme suivante :

$$\nu_{\mathbf{t}}^{(\mathbf{n})}(f) - \nu_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{n})}(f) = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(f(\bar{X}_t^{(k-1)}) - f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})\Big) \tag{6.31}$$

$$+ \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)}) - f(\bar{X}_{k-1})\Big). \tag{6.32}$$

On remarque facilement que le lemme 6.8 reste vrai si on remplace F par une suite uniformément bornée de fonctionnelles $F_k : \mathcal{D}([0,T],\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$. En particulier, en posant $F_k(x) = f(x(t)) - f(x(\Gamma_{\imath(k,t)-\Gamma_k}))$, on obtient que le terme de droite de (6.31) tend vers 0 $p.s.$ si

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbb{E}\big\{f(\bar{X}_t^{(k-1)}) - f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\big\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s. \tag{6.33}$$

On pose $\bar{p} = (p/2 + a - 1) \wedge 1/2$. La fonction f étant lipschitzienne et bornée, elle est également $2\bar{p}$-Hölder. Ainsi,

$$\begin{aligned}|f(\bar{X}_t^{(k-1)}) - f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})| \le C\big(&\gamma_{\imath(k-1,t)+1}|b(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})|^{2\bar{p}} + \|\sigma(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})\|^{2\bar{p}}|W_t - W_{\Gamma_{\imath(k-1,t)}}|^{2\bar{p}}\big)\\ &+ \|\kappa(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})\|^{2\bar{p}}|Z_t - Z_{\Gamma_{\imath(k-1,t)}}|^{2\bar{p}}.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big\{|f(\bar{X}_t^{(k-1)}) - f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})|/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\imath(k-1,t)}}\big\} &\le C\gamma_{\imath(k-1,t)+1}V^{\bar{p}}(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})\\ &\quad + CV^{\bar{p}}(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})\Big(\mathbb{E}\{|W_{t-\Gamma_{\imath(k-1,t)}}|^{2\bar{p}}\} + \mathbb{E}\{|Z_{t-\Gamma_{\imath(k-1,t)}}|^{2\bar{p}}\}\Big)\\ &\le C\gamma_{\imath(k-1,t)+1}^{\bar{p}}V^{\bar{p}}(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans la dernière inégalité que $\mathbb{E}\{|Z_t|^{2\bar{p}}\} = O(t^{\bar{p}})$ si $\bar{p} \le p$ (voir lemme 3.11). On déduit ensuite de la proposition 3.10 et de l'inégalité de Jensen qu'il existe $n_0 \ge 1$ tel que pour tout $k \ge n_0$ et pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\{V^{\bar{p}}(\bar{X}_{\imath(k,t)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_k}\} \le V^{\bar{p}}(\bar{X}_k) + CT.$$

Ainsi, comme $\gamma_{\imath(k-1,t)+1} \leq \gamma_{k-1}$, il suit :

$$\mathbb{E}\big\{ |f(\bar{X}_t^{(k-1)}) - f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)})|/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}} \big\} \leq C\gamma_{k-1}^{\bar{p}} V^{\bar{p}}(\bar{X}_{k-1}).$$

D'après la proposition 6.12, $\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{\bar{p}}) < +\infty$. Comme de plus, $\gamma_k \xrightarrow{k\to+\infty} 0$, on obtient alors facilement (6.33).
Considérons maintenant (6.32). On remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \eta_k f(\bar{X}_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \eta_k f(\bar{X}_{k-1}) 1_{\{k-1\in\imath(\{0,\dots,n\},t)\}} + \sum_{k=1}^n \eta_k f(\bar{X}_{k-1}) 1_{\{k-1\notin\imath(\{0,\dots,n\},t)\}} \\ &= \sum_{j=1}^{\tau(n,t)} \eta_{\imath(j-1,t)+1} f(\bar{X}_{\imath(j-1,t)}) + \sum_{k=1}^n \eta_k f(\bar{X}_{k-1}) 1_{\{k-1\notin\imath(\{0,\dots,n\},t)\}}.\end{aligned}$$

où $\tau(n,t)$ est défini par (6.9). On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \Big(f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)}) - f(\bar{X}_{k-1}) \Big) &= \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{\tau(n,t)} (\eta_k - \eta_{\imath(k-1,t)+1}) f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)}) \\ &+ \frac{1}{H_n} \sum_{\tau(n,t)+1}^n \eta_k f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)}) - \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k f(\bar{X}_{k-1}) 1_{\{k-1\notin\imath(\{0,\dots,n\},t)\}}.\end{aligned}$$

La suite (η_k) est décroissante (en tant que produit de deux suites décroissantes). De plus, $k \leq \imath(k-1,t)+1$ ce qui entraîne que $\eta_k - \eta_{\imath(k-1,t)+1} \geq 0$. La fonction f étant bornée, on déduit alors de la condition (6.30) que

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{\tau(n,t)} (\eta_k - \eta_{\imath(k-1,t)+1}) f(\bar{X}_{k-1}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

Ensuite, comme $\eta_n \leq C\gamma_n$,

$$\frac{1}{H_n} \Big| \sum_{\tau(n,t)+1}^n \eta_k f(\bar{X}_{\imath(k-1,t)}) \Big| \leq \frac{C\|f\|_\infty}{H_n} \sum_{\tau(n,t)+1}^n \gamma_k \leq \frac{C(\Gamma_n - \Gamma_{\tau(n,t)})}{H_n} \leq \frac{CT}{H_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Enfin, on remarque que

$$\sum_{k=1}^n \eta_k 1_{\{k-1\notin\imath(\{0,\dots,n\},t)\}} = \sum_{k=1}^n \eta_k - \sum_{k=1}^{\tau(n,t)} \eta_{\imath(k-1,t)+1} \leq \sum_{k=1}^{\tau(n,t)} (\eta_k - \eta_{\imath(k-1,t)+1}) + \sum_{k=\tau(n,t)+1}^n \eta_k. \quad (6.34)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k f(\bar{X}_{k-1}) 1_{\{k-1\notin\imath(\{0,\dots,n\},t)\}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

puis le résultat. □

Proposition 6.15 *Soient $a \in (0,1]$, $p > 0$ et $q \in [0,1]$ tels que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ et $(\mathbf{S_{a,p,q}})$ soient satisfaites. Supposons également que (η_n/γ_n) soit décroissante et que l'hypothèse $(\mathbf{F})$ soit vérifiée. Alors,*
(a) Notons $\nu^{(\infty)}$ une valeur d'adhérence de $(\nu^{(\mathbf{n})})$ et $\bar{\nu}_\infty$ sa loi initiale. $\nu^{(\infty)}$ est égale à $\mathbb{P}_{\bar{\nu}_\infty}$ où $\mathbb{P}_{\bar{\nu}_\infty}$ désigne la loi du processus (X_t) de loi initiale $\bar{\nu}_\infty$.
(b) Si de plus, (6.6) ou (6.30) est satisfaite alors, $\bar{\nu}_\infty$ est invariante pour le semi-groupe (P_t), i.e. tout processus limite est stationnaire.

Preuve : (a) Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que $(\nu^{(\mathbf{n})})$ tend vers ν^∞. Il suffit alors de montrer que pour tout $T > 0$ et $F : \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ définie par $F((x_t), 0 \le t \le T) = \prod_{i=1}^m f_i(x_{t_i})$ où f_i est continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$ et $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T$, on a

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \prod_{i=1}^m f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)}) \xrightarrow{n\to+\infty} \int P_{t_1}(f_1(P_{t_2-t_1}f_2(\ldots P_{t_m-t_{m-1}}f_m(x))))\bar{\nu}_\infty(dx).$$

On fait une récurrence sur m. Pour $m = 1$, le résultat est acquis par le lemme 6.13. Si la propriété est vraie au rang $m \ge 1$, alors considérons F_{m+1} définie par

$$F_{m+1}((x_t), 0 \le t \le T) = \prod_{i=1}^{m+1} f_i(x_{t_i}) \quad \text{avec } 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+1} \le T.$$

D'après le lemme 6.8 appliqué avec $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{\Gamma_{\imath(k,t_m)+1}}$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \Big(F_{m+1}((\bar{X}_t^{(k-1)}), 0 \le t \le T) - \mathbb{E}\{F_{m+1}((\bar{X}_t^{(k-1)}), 0 \le t \le T)/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\imath(k-1,t_m)+1}}\}\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \prod_{i=1}^m f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)}) \Big(f_{m+1}(\bar{X}_{t_{m+1}}^{(k-1)}) - \mathbb{E}\{f_{m+1}(\bar{X}_{t_{m+1}}^{(k-1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\imath(k-1,t_m)+1}}\}\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

On étudie donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \prod_{i=1}^m f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)}) \mathbb{E}\{f_{m+1}(\bar{X}_{t_{m+1}}^{(k-1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\imath(k-1,t_m)+1}}\} \\
&= \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \prod_{i=1}^{m-1} f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)}) f_m(\bar{X}_{\imath(k-1,t_m)+1}) \mathbb{E}\{f_{m+1}(\bar{X}_{t_{m+1}-t_m}^{(\imath(k-1,t_m)+1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\imath(k-1,t_m)+1}}\} + R_n^1 + R_n^2
\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\text{avec,} \quad |R_n^1| \le C\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \big| f_m(\bar{X}_{t_m}^{(k-1)}) - f_m(\bar{X}_{\imath(k-1,t_m)+1})\big| \quad \text{et}$$

$$|R_n^2| \le C\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k \big| \mathbb{E}\{f_{m+1}(\bar{X}_{t_{m+1}}^{(k-1)}) - f_{m+1}(\bar{X}_{t_{m+1}-t_m}^{(\imath(k-1,t_m)+1)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\imath(k-1,t_m)+1}}\}\big|.$$

Intéressons-nous d'abord aux restes R_n^1 et R_n^2. On remarque que $\bar{X}_{\imath(k,t_m)+1} = \bar{X}^{(k)}_{t_m+\varepsilon_k^1}$ où $\varepsilon_k^1 = \Gamma_{\imath(k,t_m)+1} - t_m \ge 0$. Comme $\varepsilon_k^1 \to 0$, on montre que R_n^1 tend vers 0 *p.s.* par la même méthode

que celle utilisée pour (6.31) dans le début de la preuve du lemme 6.14. Il est en de même pour R_n^2 où cette fois, on remarque que $\bar{X}^{(\iota(k,t_m))+1}_{t_{m+1}-t_m}) = \bar{X}^{(k)}_{t_{m+1}+\varepsilon_k^2}$ où $\varepsilon_k^2 = \Gamma_{\iota(k,t_{m+1})+1} - \underline{t_m}$.
On s'intéresse enfin à (6.35). Comme f_m est à support compact, on déduit de l'hypothèse (**F**) que $p.s.$,

$$f_m(\bar{X}_{\iota(k-1,t_m)+1})\Big(\mathbb{E}\{f_{m+1}(\bar{X}^{\iota(k-1,t_m)+1}_{t_{m+1}-t_m})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{\iota(k-1,t_m)+1}}\} - P_{t_{m+1}-t_m}f_{m+1}(\bar{X}_{\iota(k-1,t_m)+1})\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Posons $\psi(x) = f_m(x)P_{t_{m+1}-t_m}f_{m+1}(x)$. Comme R_n^1 et R_n^2 tendent vers 0, on déduit de l'identité précédente que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big(\prod_{i=1}^{m+1}f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)}) - \prod_{i=1}^{m-1}f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)})\psi(\bar{X}_{\iota(k-1,t_m)+1})\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

Comme (P_t) et fellérien et f_m à support compact, ψ est uniformément continue. On souhaite montrer que

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\prod_{i=1}^{m-1}f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)})\Big(\psi(\bar{X}_{\iota(k-1,t_m)+1}) - \psi(\bar{X}_{t_m}^{(k-1)})\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s. \tag{6.36}$$

On introduit $\delta \mapsto \rho(\delta)$ le module de continuité de ψ et on contrôle la différence ci-dessus de la manière suivante :

$$\big|\psi(\bar{X}_{\iota(k-1,t_m)+1}) - \psi(\bar{X}_{t_m}^{(k-1)})\big| \le C\Big(\rho_m(\delta) + \mathbf{1}_{\{|\bar{X}_{\iota(k,t_m)+1} - \bar{X}_{t_m}^{(k)}|>\delta\}}\Big).$$

Par une étude semblable à celle de (6.31), on montre que pour tout $\delta > 0$,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\mathbf{1}_{\{|\bar{X}_{\iota(k,t_m)+1} - \bar{X}_{t_m}^{(k)}|>\delta\}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

puis on déduit (6.36) en faisant tendre δ vers 0.
Maintenant, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\prod_{i=1}^{m-1}f_i(\bar{X}_{t_i}^{(k-1)})\psi(\bar{X}_{t_m}^{(k-1)}) \xrightarrow{n\to+\infty} \int P_{t_1}(f_1(P_{t_2-t_1}f_2\ldots P_{t_m-t_{m-1}}\psi(x)))\bar{\nu}_\infty(dx).$$

On en déduit le résultat.
(b) Sous la condition (6.6), l'ensemble des hypothèses de la proposition 6.2 sont satisfaites. Ainsi, toute valeur d'adhérence de $(\nu_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{n})})$ est nécessairement invariante pour le semi-groupe (P_t). De même, sous la condition (6.30), le lemme précédent nous assure également de l'invariance de tout valeur d'adhérence de $(\nu_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{n})})$. On en déduit alors que $p.s.$, toute valeur d'adhérence fonctionnelle de $(\nu^{(\mathbf{n})})$ est la loi d'un processus de Markov de semi-groupe $(P_t)_{t\ge0}$ et de loi initiale stationnaire, d'où le résultat annoncé. □

6.4.3 Extension aux fonctionnelles non bornées

Le but de cette partie est de prouver le point (c) du Théorème 6.5. On se contente ici de considérer le cas $a = 1$. Il est possible d'étendre ce résultat au cas $a < 1$ sous une contrainte légèrement plus forte sur les pas et les poids mais ce cas donne lieu à une preuve beaucoup plus technique.
Le point (c) du Théorème 6.5 est établi dans le lemme qui suit.

Lemme 6.16 *Soient $p > 0$ et $q \in [0,1]$ tels que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{H_q^2})$ et $(\mathbf{S_{1,p,q}})$ soient satisfaites. Supposons de plus que $\|\kappa\|^2 \leq CV^{p\wedge 1}$ et que (η_n/γ_n) est décroissante. Soit F une fonctionnelle $F : \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_T$-mesurable, telle que $|F((x_t), 0 \leq t \leq T)| \leq C \sup_{0\leq t\leq T} V^r(x_t)$ avec $r < p$.*
(a) L'identité (6.10) du lemme 6.8 reste valable pour F si $\sum_{n\geq 1} 1/(H_n)^{\frac{p}{r}} < +\infty$.
(b) Si de plus $r \leq p/2$, alors

$$\sup_{n\geq 1} \nu^{(\mathbf{n})}(|F|) < +\infty \quad p.s.$$

(c) Supposons enfin que $r < p/2$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{n\geq 1}(1/H_n)^{p/(r+\varepsilon)} < +\infty$. Alors, si $\nu^{(\mathbf{n})} \Longrightarrow \mathbb{P}_\nu$ p.s., $\lim_{n\geq 1} \nu^{(\mathbf{n})}(F) = \int F(x)\mathbb{P}_\nu(dx)$.

Preuve : (a) Reprenons la preuve du lemme 6.8. Avec les notations de ce lemme, il nous suffit de montrer que
1.

$$\frac{1}{H_n} \sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \Big(Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\} \Big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

2. (M_n) est bornée dans L^2.
1. Posons $s = p/r$. On commence par montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big\{ \Big| \frac{1}{H_n^s} \sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \big(Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\} \big) \Big|^s \Big\} < +\infty. \tag{6.37}$$

Notons $a_k = \eta_k^{\frac{s-1}{s}}$ et $b_k = \eta_k^{\frac{1}{s}} \big(Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\} \big)$. D'après l'inégalité de Hölder appliquée à $\bar{p} = s/(s-1)$ et $\bar{q} = s$, on a

$$\Big| \sum_{k=\tau(n,T)}^{n} a_k b_k \Big|^s \leq \Big(\sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \Big)^{s-1} \Big(\sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \Big| Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\} \Big|^s \Big).$$

Or, d'après le lemme 6.19 et la propriété de Markov, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$,

$$\mathbb{E}\{|F(\bar{X}_t^{(k)}, 0 \leq t \leq T)|^s / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_k}\} \leq C\mathbb{E}\{ \sup_{0\leq t\leq T} V^p(\bar{X}_t^{(k)}) / \bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_k}\} \leq C_T V^p(\bar{X}_k).$$

Or, comme $a = 1$, $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} < +\infty$ (voir Remarque 3.16). On en déduit que pour tout $k \geq n_0$,

$$\mathbb{E}\Big\{ \Big| \sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \Big(Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\} \Big) \Big|^s \Big\} \leq C_T \Big(\sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \Big)^s \leq C_T (T + \gamma_1)^s \tag{6.38}$$

où l'on a utilisé dans la dernière inégalité que

$$\sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \le C \sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \gamma_k \le C(T+\gamma_1).$$

Enfin, $\sum_{n\ge1} 1/(H_n)^s$ est finie par hypothèse. On en déduit que

$$\sum_{n\ge n_0} \mathbb{E}\Big\{ \frac{1}{H_n^s} \Big| \sum_{k=\tau(n,T)}^{n} \eta_k \big(Y^{(k-1)} - \mathbb{E}\{Y^{(k-1)}/\mathcal{G}_n\}\big) \Big|^s \Big\} < +\infty$$

puis le point 1. par le lemme de Borel-Cantelli L^1.

2. Avec les notations du lemme 6.8, on peut vérifier que (M_n) est bornée dans L^2 si

$$\sum_{k\ge1} \frac{\eta_k^2}{H_k^2} \mathbb{E}\big\{ (\Phi^{(k-1,n)})^2 \big\} + 2 \sum_{k\ge1} \frac{\eta_k}{H_k} \sum_{i=k+1}^{\iota(k-1,T)} \frac{\eta_i}{H_i} \mathbb{E}\big\{ \Phi^{(i-1,n)} \Phi^{(k-1,n)} \big\} < +\infty. \tag{6.39}$$

D'après le lemme 6.19 et les hypothèses sur F, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \ge n_0$,

$$\mathbb{E}\big\{ (\Phi^{(k,n)})^2 \big\} \le C\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{ \sup_{0\le t\le T} V^p(\bar X_t^{(k)})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_k}\}\} \le C_T \mathbb{E}\{V^p(\bar X_k)\}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\big|\mathbb{E}\big\{ \Phi^{(i-1,n)} \Phi^{(k-1,n)} \big\}\big| \le C_T \sqrt{\mathbb{E}\{V^p(\bar X_{k-1})\}} \sqrt{\mathbb{E}\{V^p(\bar X_{i-1})\}} \le C_T \sup_{n\ge1} \mathbb{E}\{V^p(\bar X_n)\} < +\infty.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k\ge n_0} \frac{\eta_k^2}{H_k^2} \mathbb{E}\big\{ (\Phi^{(k-1,n)})^2 \big\} + 2 \sum_{k\ge1} \frac{\eta_k}{H_k} \sum_{i=k}^{\iota(k-1,T)} \frac{\eta_i}{H_i} \mathbb{E}\big\{ \Phi^{(i-1,n)} \Phi^{(k-1,n)} \big\} \\ \le C \sum_{k\ge1} \Big(\frac{\eta_k^2}{H_k^2} + \frac{\eta_k}{H_k} \sum_{i=k}^{\iota(k-1,T)} \frac{\eta_i}{H_i} \Big). \end{aligned} \tag{6.40}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 6.8, on obtient alors que (6.40) est fini. Comme $\mathbb{E}\{\sup_{0<t\le\Gamma_{n_0}+T} V^p(\bar X_t^{(0)})\} < +\infty$, on en déduit facilement le point 2.

(b) On déduit de la première partie du lemme que *p.s.*,

$$\sup_{n\ge1} \nu^{(\mathbf{n})}(|F|) < +\infty \quad \text{si} \quad \sup_{n\ge1} \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\{|F(\bar X^{(k)})|/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} < +\infty.$$

Or, d'après le lemme 6.19 de l'annexe et les hypothèses sur F, il existe $n_0 \ge 1$ tel que pour tout $k \ge n_0$,

$$\mathbb{E}\{|F(\bar X^{(k)})|/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} \le C_T V^{\frac{p}{2}}(\bar X_{k-1}).$$

Ainsi, comme d'après la proposition 6.2, $\sup_{n\geq 1} \bar{\nu}_n(V^{\frac{p}{2}}) < +\infty$ $p.s.$, on en déduit que

$$\sup_{n\geq 1} \frac{1}{H_n} \sum_{k=n_0}^{n} \mathbb{E}\{|F(\bar{X}^{(k)})|/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} < +\infty.$$

Enfin, en vérifiant que $p.s.$,

$$\sup_{k\leq n_0-1} \mathbb{E}\{\sup_{0\leq t\leq T} V^{\frac{p}{2}}((\bar{X}_s^{k-1})/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} < C$$

où C est une variable aléatoire finie $p.s.$, on a également

$$\sup_{n\geq 1} \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbb{E}\{|F(\bar{X}^{(k)})|/\bar{\mathcal{F}}_{\Gamma_{k-1}}\} < +\infty \quad p.s.$$

On en déduit que $\sup_{n\geq 1} \nu^{(\mathbf{n})}(|F|) < +\infty$.
(c) Si maintenant $r < p/2$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{n\geq 1}(1/H_n)^{p/(r+\varepsilon)} < +\infty$, un argument d'équiintégrabilité nous assure que $\nu^{(\mathbf{n})}(F) \to \int F(x)\mathbb{P}_\nu(dx)$ $p.s.$ dès que $\nu^{(\mathbf{n})} \Longrightarrow \mathbb{P}_\nu$. □

6.5 Pricing d'options pour des modèles à volatilité stochastique stationnaire

Dans cette section, l'objectif est d'appliquer les résultats obtenus au problème de pricing pour des modèles à volatilité stochastique quand le processus de volatilité est supposé en régime stationnaire. Nos tests numériques sont réalisés dans un premier temps sur le modèle à volatilité stochastique de Heston dans lequel nous valorisons des options européennes puis asiatiques. Nous nous intéressons ensuite à des variantes du modèle de Heston dans lequel nous valorisons simplement des options asiatiques : dans le premier, on suppose que la volatilité contient elle-même des paramètres stochastiques tandis que dans le second, on introduit une composante de saut dans le prix. Ce dernier modèle est connu sous le nom de modèle de Bates.

6.5.1 Modèle de Heston.

Le modèle de Heston est défini de la manière suivante. On note (S_t) le prix de l'actif de valeur initiale $S_0 > 0$ et (v_t) le processus de volatilité. Le modèle de Heston est alors défini par

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sqrt{v_t}dW_t^1) \\ dv_t &= k(\theta - v_t)dt + \varsigma\sqrt{v_t}dW_t^2 \quad \text{avec} \quad < W^1, W^2 >_t = \rho t \quad \text{et} \quad \rho \in [-1, 1], \end{aligned}$$

où r désigne le taux d'intérêt et θ, k et ς, des paramètres strictement positifs. L'équation associée à (v_t) admet une unique solution à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. De plus, si $2k\theta > \varsigma^2$ alors, (v_t) est strictement positif (voir [LaLa96]). On se placera ici dans ce dernier cadre. On sait également que (v_t) admet une unique probabilité invariante ν et que ν est une loi $\gamma(a, b)$ avec $a = (2k)/\varsigma^2$ et $b = (2k\theta)/\varsigma^2$. Dans la suite, on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse. (v_t) est en régime stationnaire, *i.e.* $\mathcal{L}(v_0) = \nu$.
Le schéma (6.2) n'a pas de sens ici car contrairement au vrai processus, il peut prendre des valeurs négatives. Plusieurs schémas de discrétisation adaptés à ce type de processus ont alors été étudiés par Deelstra and Delbaen [DeDe98], Diop [Dio03] et Alfonsi [Alf05]. On utilisera ici la version à pas décroissant du schéma étudié par Diop que l'on notera $(\bar{v}_n)$. On pose $\bar{v}_0 = x > 0$ et

$$\bar{v}_{n+1} = \left|\bar{v}_n + \gamma_{n+1} k \gamma_{n+1}(\theta - \bar{v}_n) + s\sqrt{\bar{v}_n}(W^2_{\Gamma_{n+1}} - W^2_{\Gamma_n})\right|.$$

On définit également le schéma à temps continu $(\bar{v}^{(k)}_t)$ par

$$\bar{v}^{(0)}_t = \left|\bar{v}^{(0)}_{\underline{t}} + k(t-\underline{t})(\theta - \bar{v}^{(0)}_{\underline{t}}) + s\sqrt{\bar{v}^{(0)}_{\underline{t}}}(W^2_t - W^2_{\underline{t}})\right|$$

et pour $k \geq 1$, $(\bar{v}^{(k)}_t) = (\bar{v}^{(0)}_{\Gamma_k + t})$. Les Théorèmes 6.3 et 6.5 ne sont en particulier pas directement applicables à ce modèle. Ce type de processus nécessiterait une adaptation théorique que nous ne détaillons pas ici. Cependant, cette adaptation est clairement possible si on a une hypothèse de type (**F**) (D'après le Théorème 2.1.1 de [Dio03], on a une hypothèse de type (**F**) uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^*_+$ si $k\theta \geq 2\varsigma^2$).

Remarque 6.17 Dans le cas particulier où il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\theta = s^2 d/(4k)$, (v_t) peut être obtenu comme la norme au carré d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck d-dimensionnel (voir [Dio03]). En particulier, en simulant un O.U. d-dimensionnel et non plus le processus de volatilité lui-même, on pourrait alors se ramener à un cadre strict où les Théorèmes 6.3 et 6.5 sont directement applicables.

6.5.2 Pricing d'options Européennes dans le modèle de Heston.

On suppose que la volatilité est stationnaire, *i.e.* de loi initiale ν, et on note $C_{eu}(\nu, S_0, K, T)$, le call Européen à la date T de prix d'exercice K. De même, on note $P_{eu}(\nu, S_0, K, T)$, le put Européen correspondant. On a :

$$C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r) = e^{-rT}\mathbb{E}_\nu\{(S_T - K)_+\} = \int C_{eu}(v_0, S_0, K, T, r)\nu(dv_0)$$

$$\text{et,} \quad P_{eu}(\nu, S_0, K, T, r) = e^{-rT}\mathbb{E}_\nu\{(K - S_T)_+\} = \int P_{eu}(v_0, S_0, K, T, r)\nu(dv_0).$$

où $C_{eu}(v_0, S_0, K, T, r)$ et $P_{eu}(v_0, S_0, K, T, r)$ désignent les calls et les puts européens quand la volatilité a pour valeur initiale $v_0 \in \mathbb{R}^*_+$.
Il existe une formule semi-fermée pour $C_{eu}(v_0, S_0, K, T, r)$ et $P_{eu}(v_0, S_0, K, T, r)$ basées sur des intégrales de la fonction caractéristique de S_t pour laquelle on a une formule fermée (voir [LaLa96]). Comme on connaît la densité de ν, on a également une formule semi-fermée pour $C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r)$ et $P_{eu}(\nu, S_0, K, T, r)$. Ainsi, l'intérêt de cet exemple est de pouvoir tester notre algorithme et de comparer nos résultats aux valeurs de référence fournies par la formule semi-fermée. Dans ce cas particulier, on propose 2 types de méthodes, la première basée sur la formule de Black-Scholes et la seconde n'utilisant pas cette formule.

Méthode 1. On va exprimer $C_{eu}(\nu, S_0, K, T)$ comme l'espérance d'une fonctionnelle explicite de la volatilité grâce à la formule de Black-Scholes. D'abord, en projetant W^1 sur W^2, on a $W^1 = \rho^2 W^2 + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{W}^1$ où $\tilde{W}^1$ est un M.B.S indépendant de W^2. Ainsi, on obtient

$$S_t = S_0 \exp\Big(-\frac{\rho^2}{2}\bar{v}_t t + \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^2\Big) \exp\Big((r - \frac{1-\rho^2}{2}\bar{v}_t)t + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{v_s} d\tilde{W}_s^1\Big), \quad (6.41)$$

où $\bar{v}_t = 1/t \int_0^t v_s ds$. On pose

$$S_0^{(v)} = S_0 \exp\Big(-\frac{\rho^2}{2}\bar{v}_T T + \rho \int_0^T \sqrt{v_s} dW_s^2\Big).$$

On vérifie alors que

$$C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r) = e^{-rT}\mathbb{E}_\nu\left\{\mathbb{E}\{(S_T - K)_+ / \mathcal{F}_T^{W^2}\}\right\} = \mathbb{E}_\nu\left\{C_{BS}\left(S_0^{(v)}, K, T, \sqrt{(1-\rho^2)\bar{v}_T}, r\right)\right\},$$

où $C_{BS}(S_0, K, T, \sigma, r)$ désigne le call dans le modèle de Black-Scholes. D'autre part, on remarque que

$$\int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^2 = \phi_T((v_t)) \quad \text{où} \quad \phi_T((v_t)) = \frac{v_t - v_0 - k\theta t + k\int_0^t v_s ds}{\varsigma}.$$

On en déduit que $C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r) = \mathbb{E}_\nu\{F_{call}^T((v_t))\}$ où

$$F_{call}^T((v_t)) = C_{BS}\Big(S_0 \exp\big(-\frac{\rho^2}{2}\bar{v}_T T + \rho\phi_T(v)\big), K, T, \sqrt{(1-\rho^2)\bar{v}_T}, r\Big).$$

Pour approcher $C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r)$, on utilise donc la relation de récurrence (6.5) pour simuler récursivement la suite $(\hat{\nu}^{(n)}(F_{call}^T))$ définie par

$$\hat{\nu}^{(n)}(F_{call}^T) = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^n \eta_k F_{call}^T(\bar{v}^{(k-1)}).$$

Pour le put Européen, on obtient $P_{eu}(\nu, S_0, K, T, r) = F_{put}^T(v)$ où F_{put}^T est construite en remplaçant C_{BS} par P_{BS} (Put associé au modèle de Black-Scholes) dans F_{call}^T.

Méthode 2. Le problème de la méthode 1 est qu'elle n'est pas généralisable aux options pour lesquelles on a n'a pas de formule fermée dans le modèle de Black-Scholes (comme les options asiatiques). On propose donc une seconde méthode n'utilisant plus la formule de Black-Scholes. On note $M_t = \int_0^t \sqrt{v}_s d\tilde{W}_s^1$. D'après (6.41), on a

$$\begin{aligned} &e^{-rT}(S_T - K)_+ = E_{call}^T((v_t), M_T), \quad \text{où} \\ &E_{call}^T((\alpha_t), \beta_T) = e^{-rT}\Big(S_0 \exp\Big((r - \frac{\bar{\alpha}_T}{2})T + \rho\phi_T(\alpha) + \sqrt{1-\rho^2}\beta_T\Big) - K\Big)_+ \end{aligned}$$

avec $\bar{\alpha}_t = 1/t\int_0^t \alpha_s ds$. L'idée est d'écrire artificiellement E_{call}^T comme une fonctionnelle d'un processus stationnaire bidimensionnel. Introduisons le couple $((v_t), (y_t))$ défini par l'EDS

$$\begin{aligned} dv_t &= k(\theta - v_t)dt + \varsigma\sqrt{v_t} dW_t^2 \\ dy_t &= -y_t dt + \sqrt{v_t} d\tilde{W}_t^1 \end{aligned}$$

On a $M_t = y_t - y_0 - \int_0^t y_s ds$ quelle que soit la loi de y_0. Le système $((v_t),(y_t))$ admet une unique probabilité invariante $\tilde{\nu}$. Ainsi, en supposant que $\mathcal{L}(v_0, y_0) = \tilde{\nu}$, on a

$$C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r) = \mathbb{E}_{\tilde{\nu}}\{E^T_{call}((v_t), y_T - y_0 - \int_0^t y_s ds)\}. \tag{6.42}$$

Notons $(\bar{y}^{(k)})$, le schéma continu associé à (y_t) construit comme dans (6.3). Pour approcher $C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r)$, on simule donc, à partir de la relation de récurrence (6.5), la suite $(\tilde{\nu}^{(n)}(E^T_{call}))$ définie pour tout n par

$$\tilde{\nu}^{(n)}(E^T_{call}) = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k E^T_{call}(\bar{v}^{(k-1)}, \bar{y}^{(k-1)}_T - \bar{y}^{(k-1)}_0 - \int_0^t \bar{y}^{(k-1)}_s ds).$$

Ceci revient en réalité à simuler

$$\tilde{\nu}^{(n)}(E^T_{call}) = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k E^T_{call}(\bar{v}^{(k-1)}, \bar{M}^{(n)}_t)$$

où $\hat{M}^{(n)}_t$ est définie par $\bar{M}^{(0)}_t = \int_0^t \sqrt{\underline{v_s}} d\tilde{W}^1_s$ et $\bar{M}^{(n)}_t = \hat{M}^{(0)}_{\Gamma_n + t}$. Pour le Put, on obtient une représentation analogue (notée E^T_{put}) en remplaçant $(S_T - K)_+$ par $(K - S_T)_+$.

Remarque 6.18 Pour assurer la convergence de $(\tilde{\nu}^{(n)}(E^T_{call}))$, il suffit de savoir que (v_t) admet une unique probabilité invariante et il n'est en réalité pas nécessaire de vérifier si le couple $((v_t),(y_t))$ admet une unique probabilité invariante, ce qui peut être une question difficile. En effet, d'après l'énoncé du théorème 6.5 (une fois adapté à ce type de modèle), l'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(\tilde{\nu}^{(n)}(E^T_{call}))$ vérifie

$$A \subset \{z \in \mathbb{R}_+, \exists \tilde{\nu}, \text{ probabilité invariante telle que, } z = \mathbb{E}_{\tilde{\nu}}\{E^T_{call}((v_t), y_T - y_0 - \int_0^t y_s ds)\}.$$

Or, d'après (6.42) et l'unicité de la probabilité invariante de (v_t), A est un singleton :
$A = \{C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r)\}$ ce qui implique $(\tilde{\nu}^{(n)}(E^T_{call}))$ converge $C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r)$.

Réduction de variance. Avant de présenter les moyens pour réduire la variance pour les deux méthodes ci-dessus, exposons le principe général que nous allons utiliser :
Considérons (X_t) solution de (6.1) et $\mathbb{P}_\nu$ son unique régime stationnaire. On suppose que $\nu^{(\mathbf{n})} \Longrightarrow \mathbb{P}_\nu$. Soient alors F_0 et F_1 telles que

$$\int F_0(x)\mathbb{P}_\nu(dx) = \int F_1(x)\mathbb{P}_\nu(dx) = m,$$
$$\nu^{(\mathbf{n})}(F_0) \to \int F_0(x)\mathbb{P}_\nu(dx) \quad \text{et} \quad \nu^{(\mathbf{n})}(F_1) \to \int F_1(x)\mathbb{P}_\nu(dx).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons alors $F_\lambda = \lambda F_1 + (1-\lambda)F_0$. On a

$$\nu^{(\mathbf{n})}(F_\lambda) \to \int F_\lambda(x)\mathbb{P}_\nu(dx) = m \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

On veut maintenant choisir λ qui minimise la variance limite *i.e.* trouver $\lambda_{\min}$ tel que

$$\int (F_{\lambda_{\min}}(x))^2 \mathbb{P}_\nu(dx) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \Phi(\lambda) \quad \text{où} \quad \Phi(\lambda) = \int (F_\lambda(x))^2 \mathbb{P}_\nu(dx).$$

En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)$, on montre que si $F_1 \neq F_0$ et $\int (F_1(x))^2 + (F_0(x))^2)\mathbb{P}_\nu(x) < +\infty$, λ_{min} existe et est unique. De plus, on a

$$\lambda_{\min} = \frac{\mathbb{E}_\nu\{\Lambda_1\}}{\mathbb{E}_\nu\{\Lambda_2\}} \quad \text{avec} \quad \Lambda_1 = F_1(F_1 - F_0) \quad \text{et} \quad \Lambda_2 = (F_1 - F_0)^2.$$

On ne connaît pas la valeur exacte de $\lambda_{\min}$ mais on peut l'approcher en même temps que l'on va simuler la procédure associée à F_0 et à F_1 : on pose

$$\lambda_n = \frac{\nu^{(\mathbf{n})}(\Lambda_1)}{\nu^{(\mathbf{n})}(\Lambda_2)}.$$

Si la convergence de $(\nu^{(\mathbf{n})})$ vers $\mathbb{P}_\nu$ est valable pour Λ_1 et Λ_2, alors $\lambda_n \to \lambda_{\min}$ $p.s.$
On utilise donc cette technique pour les deux méthodes. Dans la méthode 1 (dans le cas du Call), comme $\mathbb{E}_\nu\{S_0^{(v)}\} = S_0$, on peut l'utiliser avec $F_1 = F_{call}^T$ et $F_0 = F_{call}^T + (S_0 - S_0^{(v)})$.
Pour la méthode 2, on utilise la parité Call-Put. On rappelle que

$$C_{eu}(\nu, S_0, K, T, r) = S_0 - Ke^{-rT} + P_{eu}(\nu, S_0, K, T, r).$$

Ainsi, on pose ici

$$F_1 = E_{call}^T((v_t), M_T) \quad \text{et} \quad F_2 = E_{put}^T((v_t), M_T) + S_0 - Ke^{-rT}.$$

Résultats numériques. Les tests numériques pour l'approximation de la valeur du Call Européen dans le modèle de Heston ont été réalisés avec les paramètres suivants :

$$S_0 = 50, \quad r = 0.05, \quad T = 1, \quad \rho = 0.05, \quad \theta = 0.01, \quad \varsigma = 0.1, \quad k = 2. \tag{6.43}$$

D'autre part, en faisant la conjecture (validée numériquement) que les choix de pas et de poids qui procurent un ordre de vitesse de convergence optimal sont les mêmes pour $(\bar{\nu}_n)$ et pour $(\nu^{(\mathbf{n})})$, on suppose ici que $\gamma_n = \eta_n = n^{-1/3}$.
Dans le tableau 6.1, on présente les résultats obtenus de la manière suivante. Dans la première ligne, on rappelle la valeur référence du Call Européen pour $v_0 = \theta$, *i.e.* quand la valeur initiale de la volatilité est la moyenne de la probabilité invariante. Ensuite, on donne la valeur référence du Call Européen qui correspond à notre modèle, *i.e* quand la volatilité est en régime stationnaire. On constate que les prix sont très proches pour cette échéance d'un an.
On présente alors les résultats numériques associés aux deux méthodes, avec ou sans réduction de variance, pour différentes valeurs de N. On constate que la méthode 1 qui nécessite le calcul du Call associé au modèle de Black-Scholes, est environ 5 fois plus lente que la méthode 2. Les temps de calcul obtenus avec le logiciel MATLAB et un processeur Xeon 2.4 GHz sont les suivants. Pour $N = 10^4$, le temps de calcul associé à la méthode 1 (resp. à la méthode 2) avec réduction de variance est de l'ordre de 6 secondes (resp. 1, 20 secondes). Les résultats numériques semblent cependant attester que la méthode 1 reste la méthode la plus efficace.

Volatilité implicite. Comme nous le disions en préambule, l'intérêt de la valorisation d'options "vanilles" est de calibrer le modèle. On en tire alors la volatilité implicite, c'est-à-dire, le $\sigma_{\text{imp}}(K, T)$ du modèle de Black-Scholes permettant d'obtenir le prix de l'option de prix d'exercice K et de maturité T calculé dans le modèle de Heston. Ce $\sigma_{\text{imp}}(K, T)$ est déterminé

K	44	45	46	47	48	49	50
Hest. Call, $v0 = \theta$ (ref)	8.18	7.27	6.38	5.53	4.73	3.99	3.33
St. Hest. Call (ref)	**8.19**	**7.27**	**6.38**	**5.53**	**4.73**	**3.99**	**3.32**
Méth 1, $N = 10^4$	8.16	7.22	6.38	5.54	4.76	4.01	3.37
Méth 1, $N = 10^5$	8.19	7.30	6.31	5.54	4.75	3.96	3.29
Méth. 1 + RV, $N = 10^4$	8.19	7.27	6.38	5.54	4.73	3.99	3.33
Méth. 1 +RV, $N = 10^5$	8.19	7.27	6.38	5.53	4.73	3.99	3.32
Méth. 2, $N = 5.10^4$	8.39	7.34	6.37	5.64	4.80	3.87	3.36
Méth. 2, $N = 5.10^5$	8.27	7.29	6.40	5.56	4.74	3.92	3.34
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^4$	8.17	7.26	6.41	5.52	4.74	3.97	3.33
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^5$	8.18	7.27	6.39	5.53	4.74	3.99	3.32

K	51	52	53	54	55	56
Hest. Call, $v0 = \theta$ (ref)	2.74	2.23	1.79	1.43	1.13	0.89
St. Hest. Call (ref)	**2.73**	**2.22**	**1.78**	**1.42**	**1.12**	**0.88**
Méth. 1, $N = 10^4$	2.63	2.09	1.75	1.38	1.10	0.89
Méth. 1, $N = 10^5$	2.71	2.19	1.76	1.39	1.09	0.88
Méth. 1 +RV, $N = 10^4$	2.72	2.19	1.77	1.42	1.14	0.88
Méth. 1 +RV, $N = 10^5$	2.73	2.22	1.78	1.42	1.12	0.87
Méth. 2, $N = 5.10^4$	2.69	2.07	1.85	1.31	1.18	0.91
Méth. 2, $N = 5.10^5$	2.75	2.18	1.80	1.40	1.14	0.89
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^4$	2.68	2.21	1.77	1.40	1.12	0.88
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^5$	2.71	2.22	1.78	1.40	1.13	0.89

Tab. 6.1 : Approximation du prix du call européen (modèle de Heston).

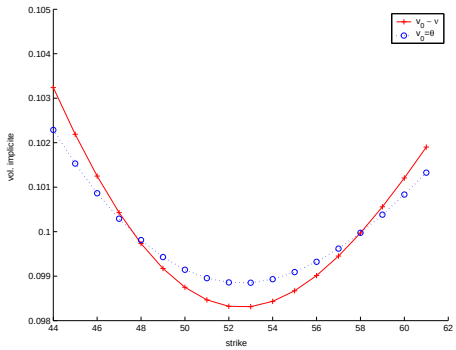


Fig. 6.1 : $\rho = 0$, $K \mapsto \sigma_{\text{imp}}(K, 1)$

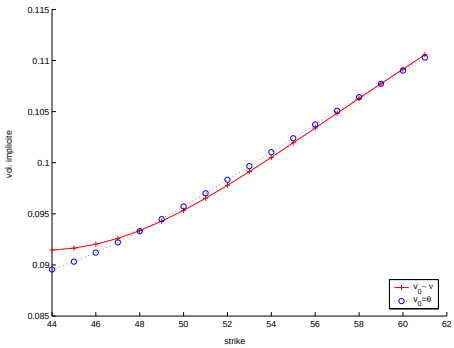


Fig. 6.2 : $\rho = 0.5$, $K \mapsto \sigma_{\text{imp}}(K, 1)$

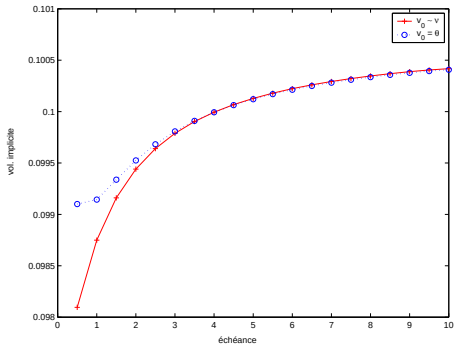


FIG. 6.3 : $\rho = 0$, $T \mapsto \sigma_{\text{imp}}(50, T)$

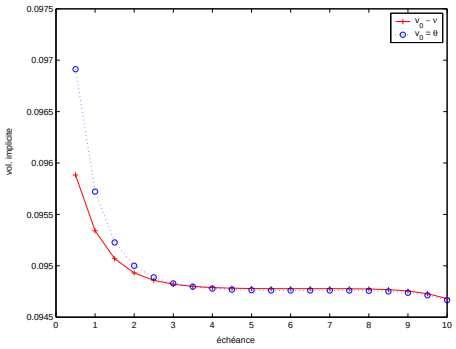


FIG. 6.4 : $\rho = 0.5$, $T \mapsto \sigma_{\text{imp}}(50, T)$

numériquement par la méthode de Newton (quand celle-ci converge). Le graphe de la fonction $(K, T) \mapsto \sigma_{\text{imp}}(K, T)$ est appelé la surface de volatilité. Nous comparons donc ici la volatilité implicite obtenue si la volatilité est stationnaire à celle obtenue si $v_0 = \theta$. Les paramètres sont les mêmes que précédemment exceptée la corrélation ρ qu'on choisit égale soit à 0 soit à 0.5. On retrouve des phénomènes attendus pour les deux modèles : si $\rho = 0$, on observe un *smile* de

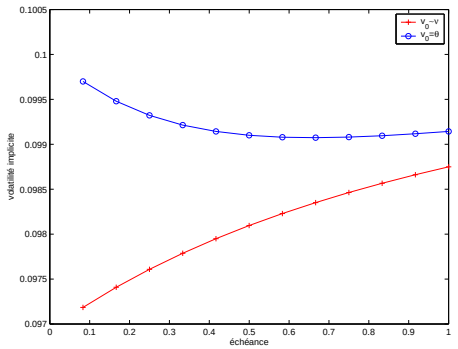


FIG. 6.5 : $\rho = 0$, $T \mapsto \sigma_{\text{imp}}(50, T)$

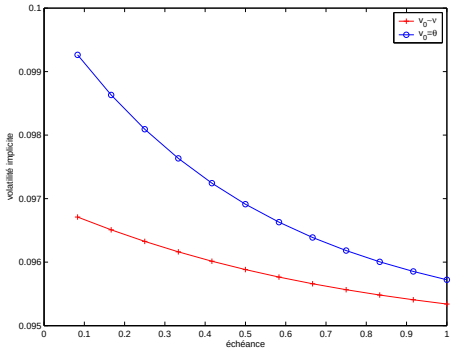


FIG. 6.6 : $\rho = 0.5$, $T \mapsto \sigma_{\text{imp}}(50, T)$

volatilité centré sur la monnaie forward (Fig. 6.1), *i.e.* sur $K = S_0 e^{rT}$, alors que si $\rho = 0.5$ (Fig. 6.2), on observe un *skew* croissant (biais croissant par rapport à la valeur de la volatilité implicite à la monnaie). Comme on pouvait s'y attendre, on observe que la différence entre les volatilités implicites correspondant à chacun des cas est faible (de l'ordre de 1/1000). On notera cependant que dans le régime stationnaire, le smile est plus marqué et le skew moins linéaire. D'autre part, on note également que la différence entre les deux modèles décroît avec le temps (Fig. 6.3 et 6.4). Ceci est l'effet d'une convergence rapide du processus de volatilité vers son régime stationnaire. De manière à exhiber les différences apparaîssant pour les petites maturités, nous traçons enfin la volatilité implicite pour des maturités comprises entre 1 et 12 mois (Fig. 6.5 et 6.6).

6.5.3 Pricing d'options asiatiques dans le modèle de Heston.

On note $C_{as}(\nu, S_0, K, T)$, le call asiatique à la date T de prix d'exercice K. De même, on note $P_{as}(\nu, S_0, K, T)$, le put asiatique correspondant. $C_{as}(\nu, S_0, K, T)$ et $P_{as}(\nu, S_0, K, T)$ sont définis

par

$$C_{as}(\nu, S_0, K, T, r) = e^{-rT}\mathbb{E}_\nu\{(\frac{1}{T}\int_0^T S_s ds - K)_+\}$$
$$\text{et} \quad P_{as}(\nu, S_0, K, T, r) = e^{-rT}\mathbb{E}_\nu\{(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_s ds)_+\}.$$

Pour calculer la valeur de $C_{as}(\nu, S_0, K, T, r)$ et de $P_{as}(\nu, S_0, K, T, r)$, on utilise la méthode de type 2 développée précédemment. Avec les notations de la partie précédente, on a

$$e^{-rT}\Big(\frac{1}{T}\int_0^T S_s ds - K\Big)_+ = A^T_{call}((v_t),(M_t)),$$
$$\text{où,} \quad A^T_{call}((\alpha_t),(\beta_t)) = e^{-rT}\Big(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 \exp\big((r - \frac{\bar{\alpha}_t}{2})t + \rho\phi_t(\alpha) + \sqrt{1-\rho^2}\beta_t\big)dt - K\Big)_+.$$

La fonctionnelle associée au put est notée A^T_{put}. Avec les notations de la partie précédente, on veut donc simuler la suite $(\tilde{\nu}^{(n)}(A^T_{call}))$ où $(\tilde{\nu}^{(n)})$ est définie pour toute fonctionnelle F par

$$\tilde{\nu}^{(n)}(F) = \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k F(\bar{v}^{(k-1)}, \bar{M}^{(k-1)}).$$

On doit en réalité simuler une approximation de $\tilde{\nu}^{(n)}(A^T_{call})$ car on ne sait pas simuler l'intégrale du schéma à temps continu. On utilise alors une méthode des trapèzes (adaptée au pas de discrétisation). On note ici que le caractère linéaire de l'intégrale permet de permet une implémentation "quasi-récursive" de l'algorithme.
Les tests numériques sont réalisés avec les mêmes paramètres que précédemment :

$$S_0 = 50, \quad r = 0.05, \quad T = 1, \quad \rho = 0.05, \quad \theta = 0.01, \quad \varsigma = 0.1, \quad k = 2.$$

Dans le tableau 6.2, sont répertoriés les résultats obtenus pour ces paramètres. Dans la première ligne, on rappelle la valeur référence du Call asiatique pour $v_0 = \theta$, *i.e.* quand la valeur initiale de la volatilité est la moyenne de la probabilité invariante. Ensuite, on donne la valeur du call asiatique associée à notre modèle obtenue pour $N = 10^7$ itérations (considérée comme valeur référence).
Dans les quatres dernières lignes, on donne alors les résultats numériques obtenus pour $N = 5{*}10^4$ et $N = 5 * 10^5$ par, la méthode présentée ci-dessus puis, par cette méthode avec une réduction de variance par la relation de parité Call-Put. En effet, dans le cadre des options asiatiques, on la relation suivante de parité Call-Put suivante

$$C_{as}(\nu, S_0, K, T, r) = P_{as}(\nu, S_0, K, T, r) + \frac{S_0}{rT}(e^{rT} - 1) - Ke^{-rT}.$$

6.5.4 Pricing d'options asiatiques dans des variantes du modèle de Heston

a. Un modèle multifacteur : Nous proposons de valoriser des options asiatiques dans une variante du modèle de Heston où le paramètre θ est maintenant supposé stochastique. Ce modèle

K	44	45	46	47	48	49	50
Hest. Asiancall, $v0 = \theta$ (ref)	6.92	5.97	5.03	4.11	3.25	2.46	1.79
St. Hest. Asiancall (ref)	**6.92**	**5.97**	**5.04**	**4.12**	**3.25**	**2.46**	**1.78**
Méth. 2, $N = 5.10^4$	6.89	6.07	5.07	4.13	3.18	2.49	1.77
Méth. 2, $N = 5.10^5$	6.90	6.02	5.00	4.11	3.24	2.46	1.79
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^4$	6.92	5.96	5.04	4.13	3.26	2.46	1.78
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^5$	6.92	5.97	5.04	4.12	3.25	2.47	1.78

K	51	52	53	54	55	56
Hest. Call, $v0 = \theta$ (ref)	1.25	0.84	0.54	0.34	0.21	0.12
St. Hest. Asiancall (ref)	**1.23**	**0.82**	**0.53**	**0.33**	**0.21**	**0.12**
Méth. 2, $N = 5.10^4$	1.21	0.81	0.51	0.34	0.22	0.11
Méth. 2, $N = 5.10^5$	1.23	0.82	0.53	0.33	0.21	0.13
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^4$	1.23	0.82	0.53	0.31	0.21	0.12
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^5$	1.23	0.82	0.53	0.33	0.21	0.13

TAB. 6.2 : Approximation du prix du call asiatique (modèle de Heston).

est introduit dans [DPS00]. Il est défini par

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sqrt{v_t}dW_t^1) \\ dv_t &= k_1(\theta_t - v_t)dt + \varsigma_1\sqrt{v_t}dW_t^2 \quad \text{avec} \quad < W^1, W^2 >_t = \rho t \quad \text{et} \quad \rho \in [-1, 1], \end{aligned}$$

où (θ_t) est solution d'une EDS du même type

$$d\theta_t = k_2(\bar{\theta} - \theta_t) + \varsigma_2\sqrt{v_t}dW_t^3$$

où l'on suppose que (W_t^3) est un mouvement Brownien indépendant de (W^1, W^2). On vérifie que le couple (v_t, θ_t) satisfait une hypothèse de rappel si $k_1 < 2k_2$. En effet, notons $b(x, y) = (k_1(y - x), k_2(\bar{\theta} - y)$ et posons $V(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. On remarque alors que

$$\frac{1}{2}\langle \nabla V, b\rangle(x, y) = k_1 xy - 2k_1\bar{X}^2 - k_2 y^2 + k_2\bar{\theta}.$$

En posant $x = R\sin\varphi$ et $y = R\cos\varphi$, on obtient

$$\frac{1}{2}\langle \nabla V, b\rangle(x, y) \leq R^2(\frac{k_1 \sin(2\varphi)}{2} - k_1 \vee k_2) + C \leq -\alpha V(x, y) + \beta$$

où $\alpha > 0$ si $k_1 < 2k_2$.
On suppose dans la suite que le couple (v_t, θ_t) est stationnaire. La méthode est alors la même que celle employée dans le modèle de Heston. On prend les paramètres suivants

$$S_0 = 50, \quad r = 0.05, \quad T = 1, \quad \rho = 0.05, \quad \bar{\theta} = 0.01, \quad \varsigma_1 = 0.1, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \varsigma_2 = 0.2$$

On ne change donc pas les paramètres déjà existants de manière à observer l'impact de cette nouvelle composante sur les prix et sur la vitesse de calcul. Les résultats sont représentés dans le tableau 6.3. On donne d'abord une valeur référence obtenue pour $N = 10^8$ itérations.

K	44	45	46	47	48	49	50
St. Duffie Asiancall (ref)	**6.97**	**6.04**	**5.14**	**4.22**	**3.36**	**2.53**	**1.81**
Méth. 2, $N = 5.10^4$	7.00	6.09	5.13	4.29	3.28	2.60	1.86
Méth. 2, $N = 5.10^5$	6.94	6.04	5.14	4.27	3.33	2.56	1.80
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^4$	6.98	6.05	5.15	4.26	3.39	2.55	1.87
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^5$	6.97	6.05	5.15	4.23	3.37	2.55	1.83

K	51	52	53	54	55	56
St. Duffie Asiancall (ref)	**1.22**	**0.83**	**0.57**	**0.42**	**0.28**	**0.22**
Méth. 2, $N = 5.10^4$	1.370	0.90	0.71	0.42	0.31	0.22
Méth. 2, $N = 5.10^5$	1.25	0.86	0.58	0.39	0.29	0.22
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^4$	1.35	0.85	0.64	0.42	0.33	0.24
Méth. 2 +RV, $N = 5.10^5$	1.25	0.85	0.58	0.40	0.29	0.22

TAB. 6.3 : Approximation du prix du call asiatique (modèle de Duffie).

b. Le modèle de Bates : Le modèle de Bates (voir [Bat96]) est une variante du modèle de Heston dans lequel on ajoute des sauts au processus de prix. Dans sa forme originelle, on suppose que (N_t) est un processus de Poisson composé d'intensité λ et dont les sauts suivent une loi log-normale : si on note X_1 le premier saut de (N_t), alors $\ln(1+X_1) \sim \mathcal{N}(\ln(1+m) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2)$ (de sorte que $m = \mathbb{E}X_1$). Le modèle de Bates est alors défini par

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sqrt{v_t}dW_t^1 + dN_t) \\ dv_t &= k_1(\theta - v_t)dt + \varsigma_1\sqrt{v_t}dW_t^2 \quad \text{avec} \quad < W^1, W^2 >_t = \rho t \quad \text{et} \quad \rho \in [-1,1]. \end{aligned}$$

On remarque que le processus (N_t) introduit un drift supplémentaire ($\mathbb{E}N_t = \lambda m t$). Nous supposons ici que $\lambda = 1$ et $m = -0.03$ de sorte que la moyenne des sauts est négative. On suppose également que la valeur des autres paramètres est donnée par (6.43). Les résultats numériques sont donnés dans le tableau 6.4. Comme dans le modèle précédent, on donne une valeur référence obtenue pour $N = 10^8$ itérations.

6.6 Annexe

Le but du lemme qui suit est de donner un contrôle du schéma d'Euler uniforme sur les compacts. La première partie de ce lemme est principalement utile pour établir la tension de la suite $(\nu^{(\mathbf{n})})$ tandis que la deuxième permet d'étendre la classe des fonctionnelles F pour lesquelles $(\nu^{(\mathbf{n})}(F))$ converge (voir point (c) du Théorème 6.5). La preuve est classique mais pose des difficultés techniques quand on a un manque d'intégrabilité pour le processus.

Lemme 6.19 *(1) Supposons que b, σ et κ soient sous-linéaires et continues. Alors, pour tout $T > 0$, pour tout $M > 0$, pour tout K compact de $\mathbb{R}^d$,*

$$\sup_{x\in K} \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^x| > M) \xrightarrow{M\to+\infty} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{x\in K, n\geq 0} \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |\hat{X}_t^{n,x}| > M) \xrightarrow{M\to+\infty} 0. \qquad (6.44)$$

K	44	45	46	47	48	49	50
St. Bates Asiancall (ref)	**6.31**	**5.43**	**4.57**	**3.75**	**3.00**	**2.33**	**1.75**
Méth. 2, $N = 5.10^4$	6.34	5.45	4.59	3.73	2.98	2.33	1.79
Méth. 2, $N = 5.10^5$	6.30	5.44	4.58	3.76	3.02	2.32	1.77
Méth. 2 + RV, $N = 5.10^4$	6.32	5.43	4.56	3.77	3.02	2.32	1.81
Méth. 2 + RV, $N = 5.10^5$	6.31	5.43	4.57	3.76	3.01	2.33	1.77

K	51	52	53	54	55	56
St. Bates Asiancall (ref)	**1.28**	**0.92**	**0.65**	**0.45**	**0.32**	**0.22**
Méth. 2, $N = 5.10^4$	1.25	0.96	0.61	0.47	0.30	0.22
Méth. 2, $N = 5.10^5$	1.27	0.95	0.65	0.45	0.30	0.24
Méth. 2 + RV, $N = 5.10^4$	1.27	0.95	0.64	0.44	0.30	0.21
Méth. 2 + RV, $N = 5.10^5$	1.29	0.92	0.65	0.46	0.31	0.22

TAB. 6.4 : Approximation du prix du call asiatique (modèle de Bates).

(2) Soit $p > 0$ tel que $(\mathbf{H_p^1})$ soit satisfaite. Si $|b|^2 \leq CV$ et $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) + \|\kappa\|^2 \leq CV^{p\wedge 1}$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (si $p > 1/2$, on peut prendre $n_0 = 0$) tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} V^p(\hat{X}_t^{n,x})\} \leq C_T V^p(x) \qquad p.s. \tag{6.45}$$

Preuve : (1) Si $(\mathbf{H_2^1})$ est satisfaite, il est classique de montrer que

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} V(X_t^x)\} \leq C_T V(x).$$

Ainsi, dans ce cas, la première identité de (6.44) suit par l'inégalité de Markov. Si maintenant $(\mathbf{H_2^1})$ n'est pas satisfaite, on se ramène à ce cas en tronquant les grands sauts. Pour $P > 0$, on pose $A(P,T) = \{\omega, |\Delta N_t^h| \leq P \ \forall t \in [0,T]\}$. Sur l'évènement $A(P,T)$, $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ coïncide avec $(X_{t,P}^x)_{t\in[0,T]}$ où $(X_{t,P}^x)$ est solution de l'EDS (6.1) construite en tronquant les sauts strictement plus grands que P. Ainsi, comme $(X_{t,P}^x)$ satisfait l'hypothèse $(\mathbf{H_2^1})$ pour tout $P > 0$, on en déduit que

$$\limsup_{M\to+\infty} \sup_{x\in K} \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^x| > M) \leq \mathbb{P}(A(P,T)) \qquad \forall P > 0.$$

Or, on peut vérifier que $\mathbb{P}(A(P,T)) \xrightarrow{P\to+\infty} 0$. En effet, en notant $(T_k)_{k\geq 1}$ la suite des temps de sauts de (N_t^h), λ_h, la fréquence de ses sauts et X_1 une variable aléatoire de loi $\mu^h(dy) = 1_{\{|y|>h\}}\pi(dy)/\pi(|y| > h)$ (la loi des sauts de (N_t^h)), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\sup_{t\in[0,T]} |\Delta N_t^h| > P\} &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T_k \leq T < T_{k+1})[\mathbb{P}(|X_1| > P)]^k \\ &\leq C\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_h T} \frac{(\lambda_h T\pi(|y| > P))^k}{k!} \leq C_T(1 - e^{-\lambda_h T\pi(|y|>P)}) \xrightarrow{P\to+\infty} 0. \end{aligned} \tag{6.46}$$

d'où le résultat en faisant tendre P vers $+\infty$.
Pour la deuxième identité, on remarque dans un premier temps que si $(\mathbf{H_p^1})$ est satisfaite avec $p \geq 1$, alors, c'est une conséquence de (6.45) (par l'inégalité de Markov). Dans le cas contraire,

les hypothèses de (6.45) sont plus fortes que la sous-linéarité. Pour éviter ce problème, on se ramène au cas précédent en tronquant les grands sauts. La suite de la preuve est alors similaire à celle de la première identité.

2. On établit ce résultat en deux étapes.
Étape 1. On montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = 0$ si $p > 1/2$), tel que

$$\sup_{t\leq T, n\geq 1} \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}_t^{n,x})\} \leq CV^p(x) \tag{6.47}$$

Par la formule d'Itô, on a

$$V^p(\hat{X}_t^{n,x}) = V^p(x) + \int_0^t \bar{A}V^p(\bar{X}_s^{(0)}, \hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds + M_{t,1}^n + M_{t,2}^n + M_{t,3}^n \quad \text{où}$$

$$M_{t,1}^n = \int_0^t \left\langle \nabla V^p(\hat{X}_s^{n,x}), \sigma(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})dW_s \right\rangle \quad M_{t,2}^n = \int_0^t \left\langle \nabla V^p(\hat{X}_s^{n,x}), \kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})dY_s^h \right\rangle$$

$$M_{t,3}^n = \sum_{0<s\leq t} \bar{H}^{V^p}(\hat{X}_s^{n,x}, \hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x}, \Delta Z_s^h) - \int_0^t ds \int \pi(dy)\bar{H}^{V^p}(\hat{X}_s^{n,x}, \hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x}, y) \quad \text{et,}$$

$$\bar{A}f(x,\underline{x}) = \langle \nabla f(x), b^h(\underline{x})\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^*(\underline{x})D^2 f(x)\sigma(\underline{x})) + \int \pi(dy)\bar{H}^f(x,\underline{x},y), \quad \text{avec}$$

$$\bar{H}^f(x,\underline{x},y) = f(x+\kappa(\underline{x})y) - f(x) - \langle \nabla f(x), \kappa(\underline{x})y\rangle 1_{|y|\leq h}.$$

$M_{.,i}^n$, $i = 1,2,3$ désignent des martingales locales. Pour la suite, on doit séparer les cas $p > 1/2$ et $p \leq 1/2$.
p > 1/2 : On prouve dans un premier temps que

$$\bar{A}V^p(x,\underline{x}) \leq C(V^p(x) + V^p(\underline{x})). \tag{6.48}$$

Sous les hypothèses sur V, on a $|\nabla(V^p)| \leq CV^{p-\frac{1}{2}}$ et $|b^h| \leq C\sqrt{V}$. Ainsi, par l'inégalité de Young appliquée à $r = (2p)/(2p-1)$, et $s = 2p$, on a :

$$|\langle \nabla(V^p)(x), b^h(\underline{x})\rangle| \leq C(V^p(x) + V^p(\underline{x})). \tag{6.49}$$

D'autre part, $\|D^2V^p\| \leq CV^{p-1}$. Ainsi, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}(\sigma^*(\underline{x})D^2V^p(x)\sigma(\underline{x})) \leq CV^{p-1}(x)\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(\underline{x}).$$

Si $p \geq 1$, on utilise à nouveau l'inégalité de Young pour en déduire que

$$\mathrm{Tr}(\sigma^*(\underline{x})D^2V^p(x)\sigma(\underline{x})) \leq C(V^p(x) + V^p(\underline{x})).$$

Si $p \in (1/2, 1)$, le résultat ci-dessus est encore valable car V^{p-1} est une fonction bornée et $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \leq CV^p$. Enfin, pour le dernier terme de $\bar{A}V^p$, on découpe en deux parties. En utilisant la formule de Taylor et l'inégalité $V^p(x+y) \leq C(V^p(x) + |y|^{2p})$, on a d'abord

$$|\bar{H}^{V^p}(x,\underline{x},y)|1_{\{|y|\leq h\}} \leq \int_0^1 |D^2V^p(x+\theta\kappa(\underline{x})y)\kappa(\underline{x})y)^{\otimes 2}|d\theta$$

Ainsi,

$$|\bar{H}^{V^p}(x,\underline{x},y)|1_{\{|y|\le h\}} \le \begin{cases} C\|\kappa(\underline{x})\|.|y|^2 & \text{si } p \le 1 \\ C\big(V^{p-1}(x) + |\kappa(\underline{x})y|^{2(p-1)}\big)\|\kappa(\underline{x})\|^2.|y|^2 & \text{si } p \ge 1. \end{cases}$$

On a également

$$|\bar{H}^{V^p}(x,\underline{x},y)|1_{\{|y|>h\}} = |V^p(x+\kappa(\underline{x})y) - V^p(x)| \le C(V^p(x) + V^p(\underline{x}).|y|^{2p})$$

En utilisant les hypothèses sur κ et sur la mesure de Lévy, on obtient finalement un contrôle de type (6.48) pour ce terme puis cette même inégalité (6.48). En notant (τ_k) une suite de temps d'arrêt réduisant les martingales $M^n_{.,i}$, $i = 1,2,3$, on en déduit que si $p > 1/2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{t\wedge\tau_k})\} &\le V^p(x) + C\mathbb{E}\{\int_0^{t\wedge\tau_k} V^p(\hat{X}^{n,x}_s) + V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds\} \\ &\le V^p(x) + C\mathbb{E}\{\int_0^{t} V^p(\hat{X}^{n,x}_s) + V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds\} \\ &\le V^p(x) + C\int_0^t \sup_{u\le s}\mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_s)\}ds. \end{aligned}$$

En notant $y_t = \sup_{s\le t} V^p(\hat{X}^{n,x}_s)$, on obtient alors par le lemme de Fatou : $y_t \le V^p(x) + C\int_0^t y_s ds$. Par une application du lemme de Gronwall, il vient pour tout $n \ge 0$,

$$\sup_{s\le t} V^p(\hat{X}^{n,x}_s) \le V^p(x) + e^{Ct}.$$

(6.47) est alors satisfait si $p > 1/2$.

$\mathbf{p \le 1/2}$: dans ce cas, le contrôle du terme de drift (6.49) n'est plus valable. On adopte un raisonnement du même type que dans la preuve de la Proposition 3.10 en découpant $\hat{X}^{n,x}_t - \hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n}$ en trois parties. On pose

$$\hat{X}^{n,x}_{t,1} = \hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n} + \int_{\underline{t}_n}^t b(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds, \quad \hat{X}^{n,x}_{t,2} = \hat{X}^{n,x}_{t,1} + \int_{\underline{t}_n}^t \sigma(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})dW_s + \int_{\underline{t}_n}^t \kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})dY^h_s$$
$$\text{et,} \quad \hat{X}^{n,x}_{t,3} = \hat{X}^{n,x}_{t,2} + \sum_{\underline{t}_n \le t} \kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\Delta N^h_s.$$

En posant également $\hat{X}^{n,x}_{t,0} = \hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n}$ et $\Gamma_0 = 0$, on a alors $p.s.$ (en utilisant qu'il n'y a $p.s.$ pas de sauts à des temps déterministes),

$$V^p(\hat{X}^{n,x}_t) - V^p(x) = S^{n,1}_t + S^{n,2}_t + S^{n,3}_t$$

où,

$$S^{n,i}_t = V^p(\hat{X}^{n,x}_{t,i}) - V^p(\hat{X}^{n,x}_{t,i-1}) + \sum_{k=n+1}^{\iota(n,t)} V^p(\hat{X}^{n,x}_{(\Gamma_k-\Gamma_n)^-,i}) - V^p(\hat{X}^{n,x}_{(\Gamma_k-\Gamma_n)^-,i-1}).$$

On contrôle chacun des termes. Par la formule de Taylor, on a d'abord pour tout $t \ge 0$

$$V^p\big(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n} + \int_{\underline{t}_n}^t b(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds\big) - V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n}) = (t-\underline{t}_n)\langle\nabla V^p, b\rangle(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n}) + \frac{(t-\underline{t}_n)^2}{2}D^2V^p(\xi_t)b(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})^{\otimes 2}$$

où $\xi_t = \hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n} + \theta(t-\underline{t}_n)b(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})$ avec $\theta \in [0,1]$. On rappelle que $\|D^2V^p\| \le CV^{p-1}$. Comme $\sqrt{V}$ est lipschitzienne, on remarque d'autre part que

$$\sqrt{V}(\xi_t) \ge \sqrt{V}(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})(1 - C(t-\underline{t}_n)).$$

Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $1 - C\gamma_{n_0} > 0$. Comme (γ_n) est décroissante et que $t - \underline{t}_n \le \gamma_n$, on a pour tout $t \ge 0$ et $n \ge n_0$,

$$D^2V^p(\xi_t)(b(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})^{\otimes 2} \le C(t-\underline{t}_n)^2 V^{p-1}(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})|b(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})|^2.$$

Comme $|b^h|^2 \le CV$, on en déduit que

$$V^p\big(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n} + \int_{\underline{t}_n}^t b^h(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds\big) - V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n}) \le C(t-\underline{t}_n)V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n}) \quad \text{pour tout } t \ge 0. \tag{6.50}$$

Il suit alors que

$$S^{n,1}_t \le C\int_0^t V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds \qquad \text{pour tout } t \ge 0. \tag{6.51}$$

Ensuite, on pose $M^n_t = \int_0^t \sigma(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})dW_s + \int_{\underline{t}_n}^t \kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})dY^h_s$. En utilisant que D^2V^p est bornée, on obtient alors par la formule de Taylor

$$S^{n,2}_t \le \big\langle \nabla V^p(\hat{X}^{n,x}_{t,1}), M^n_t - M^n_{\underline{t}_n}\big\rangle + C|M^n_t - M^n_{\underline{t}_n}|^2 \tag{6.52}$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \big\langle \nabla V^p(\hat{X}^{n,x}_{(\Gamma_k-\Gamma_n)^-,1}), M^n_{(\Gamma_k-\Gamma_n)^-} - M^n_{(\Gamma_{k-1}-\Gamma_n)}\big\rangle + C|M^n_{(\Gamma_k-\Gamma_n)^-} - M^n_{(\Gamma_{k-1}-\Gamma_n)}|^2. \tag{6.53}$$

Comme (M^n_t) est une martingale et que $\hat{X}_{t,1}$ (resp. $\hat{X}^{n,x}_{(\Gamma_k-\Gamma_n)^-,1}$) est $\bar{\mathcal{F}}_{\underline{t}_n}$ mesurable (resp. $\bar{\mathcal{F}}_{(\Gamma_{k-1}-\Gamma_n)}$-mesurable), on en déduit

$$\mathbb{E}\{S^{n,2}_t\} \le C\Big(\mathbb{E}\{|M^n_t - M^n_{\underline{t}_n}|^2\} + \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \mathbb{E}\{|M^n_{(\Gamma_{k-1}-\Gamma_n)^-} - M^n_{(\Gamma_k-\Gamma_n)}|^2\}\Big)$$

Par l'inégalité de Doob et les hypothèses sur les coefficients, il vient

$$\mathbb{E}\{S^{n,2}_t\} \le C\int_0^t \mathbb{E}\big\{\operatorname{Tr}(\sigma\sigma^*)(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n}) + \|\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\|^2\big\}ds \le C\int_0^t \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\}ds. \tag{6.54}$$

On s'intéresse enfin à $S^{n,3}_t$. On a

$$S^{n,3}_t = \sum_{0<s\le t} V^p(\tilde{X}^{n,x}_{s^-,t} + \kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\Delta N^h_s) - V^p(\tilde{X}^{n,x}_{s^-,t}) \tag{6.55}$$

où $\tilde{X}^{n,x}_{s,t} = \hat{X}^{n,x}_{t,2} + \sum_{0<u\le s}\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{u}_n})\Delta N^h_u$ si $s \in [\underline{t}_n, t]$ et $\tilde{X}^{n,x}_{s,t} = \hat{X}^{n,x}_{(\Gamma_k-\Gamma_n)^-,2} + \sum_{0<u\le s}\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{u}_n})\Delta N^h_u$ si $s \in (\Gamma_k, \Gamma_{k+1}]$. Comme V^p est $2p$-Hölderienne si $p \le 1/2$, on obtient par la formule de compensation que

$$\mathbb{E}\{S_{t,3}\} \le C\int_0^t \mathbb{E}\{\|\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\|^{2p}\}ds \le C\int_0^t \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\}ds. \tag{6.56}$$

Finalement, d'après (6.51), (6.54) et (6.56), on obtient

$$\mathbb{E}\{V^p(\hat{X}_t^{n,x})\} \leq V^p(x) + C\int_0^t V^p(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds$$

puis le résultat par le lemme de Gronwall.

Etape 2. En séparant encore une fois les cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$, on prouve maintenant (6.45).
Cas p > 1/2. Comme $\sqrt{V}$ est lipschitzienne, on a $V^p(x+y) \leq C(V^p(x) + |y|^{2p})$. On en déduit que

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} V^p(\hat{X}_s^{n,x})\} \leq C\big(V^p(x) + \mathbb{E}\{|\int_0^T b(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds|^{2p}\}\big)$$
$$+ C\big(\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \sigma(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})dW_s|^{2p}\} + \mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})dZ_s|^{2p}\}\big).$$

D'abord, par l'inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E}\{|\int_0^t b(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds|^{2p}\} \leq t^{2p-1}\mathbb{E}\{\int_0^t V^p(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds\}. \tag{6.57}$$

Ensuite, comme $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*) \leq CV^{p\wedge 1}$, on obtient par l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy,

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \sigma(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})dW_s|^{2p}\} \leq C\mathbb{E}\{(\int_0^T V^{p\wedge 1}(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds)^p\}.$$

Si $p \geq 1$, on obtient un contrôle similaire à (6.57) en utilisant l'inégalité de Jensen. Si $p \leq 1$, on note que

$$\mathbb{E}\{(\int_0^T V^p(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds)^p\} \leq \mathbb{E}\{\int_0^T V^p(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds\}^p \leq 1 + \mathbb{E}\{\int_0^T V^p(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds\}.$$

Enfin, on contrôle la partie sauts. Par l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy,

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})dZ_s|^{2p}\} \leq \mathbb{E}\{\Big(\sum_{0\leq s\leq T} |\kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})\Delta Z_s|^2\Big)^p\}. \tag{6.58}$$

Si $p \in (1/2, 1]$, alors, grâce à l'inégalité $|u+v|^p \leq |u|^p + |v|^p$,

$$\Big(\sum_{0\leq s\leq T} |\kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})\Delta Z_s|^2\Big)^p \leq \Big(\sum_{0\leq s\leq T} |\kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})\Delta Y_s^h|^2\Big)^p + \Big(\sum_{0\leq s\leq T} |\kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})\Delta N_s^h|^2\Big)^p.$$

En utilisant maintenant l'inégalité $|x|^p \leq 1 + |x|$ pour les petits sauts et à nouveau l'inégalité $|u+v|^p \leq |u|^p + |v|^p$ pour les grands sauts, on déduit de la formule de compensation :

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})dZ_s|^{2p}\}$$
$$\leq C\Big(1 + \mathbb{E}\Big\{\int_0^t ds \int \pi(dy)|\kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})y|^2 1_{\{|y|\leq h\}} + |\kappa(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})y|^{2p} 1_{\{|y|>c\}}\Big\}\Big)$$
$$\leq C_T\mathbb{E}\{\int_0^T V^p(\hat{X}_{\underline{s}_n}^{n,x})ds\} \tag{6.59}$$

car $\|\kappa\|^2 \leq CV^p$. Supposons maintenant $p \geq 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{k-1} \leq p$, on peut définir la martingale $(M_{t,k})$ par

$$M_{t,k} = \sum_{0\leq s\leq T} |\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\Delta Z_s|^{2^k} - \int_0^t ds \int \pi(dy)|\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})y|^{2^k}.$$

Par l'inégalité $|u+v|^\alpha \leq C_\alpha(|u|^\alpha + |v|^\alpha)$ et l'inégalité de Burkölder-Davis-Gundy, on en déduit que pour tout $k \geq k(p) = \inf\{k \geq 1, 2^k \geq p\}$

$$\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\leq T} |\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\Delta Z_s|^{2^k})^{\frac{p}{2^{k-1}}}\} \leq C\Big(\mathbb{E}\{|M_{T,k}|^{\frac{p}{2^{k-1}}}\} + \big(\int_0^T \int |\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})y|^{2^k}\pi(dy)ds\big)^{\frac{p}{2^{k-1}}}\Big)$$
$$\leq C\Big(\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\leq T} |\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\Delta Z_s|^{2^{k+1}})^{\frac{p}{2^k}}\} + C\int_0^T \|\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\|^{2p}ds\Big).$$

En itérant cette relation et en utilisant que $\|\kappa\|^2 \leq CV$, on obtient

$$\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\leq Y} |\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\Delta Z_s|^2)^p\} \leq C\Big(\mathbb{E}\{(\sum_{0<s\leq Y} |\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\Delta Z_s|^{2^{k(p)+1}})^{\frac{p}{2^{k(p)}}}\} + C\mathbb{E}\{\int_0^T V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds\}\Big).$$

Comme $p/2^{k(p)} \leq 1$, on peut maintenant utiliser l'inégalité $|u+v|^\alpha \leq |u|^\alpha + |v|^\alpha$ pour $\alpha \leq 1$, ce qui nous permet de déduire de (6.58) que

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})dZ_s|^{2p}\} \leq C\mathbb{E}\{\int_0^T V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds\}.$$

Finalement, nous avons montré que si $p > 1/2$,

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} V^p(\hat{X}^{n,x}_s)\} \leq C(V^p(x) + \int_0^T \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\}ds) \leq C_T V^p(x)$$

d'après l'étape 1.

Cas $\mathbf{p \leq 1/2}$. Dans ce cas, on utilise à nouveau de l'étape 1. D'abord, d'après (6.51)

$$\sup_{t\in[0,T]} S^{n,1}_t \leq C\int_0^t V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds. \tag{6.60}$$

Ensuite, comme ∇V^p est bornée, on déduit de (6.52) que

$$\sup_{t\in[0,T]} S^{n,2}_t \leq C \sup_{t\in[0,T]} |M^n_t| + C \sup_{t\in[0,T]} |M^n_t|^2.$$

Par l'inégalité de Jensen et l'inégalité de Doob, on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} S^{n,2}_t\} &\leq C\int_0^T \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n}) + \|\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\|^2 ds\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C\int_0^T \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n}) + \|\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\|^2\}ds \\ &\leq C\int_0^T \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})ds\}^{\frac{1}{2}} + C\int_0^T \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\}ds. \\ &\leq C(1 + \int_0^T \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\}ds).\end{aligned} \tag{6.61}$$

Enfin, d'après (6.55) et le fait que V^p soit $2p$-Hölderienne, on a

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} S_t^{n,3}\} \leq C\mathbb{E}\{\sum_{0\leq t\leq T} |\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})\Delta N_t^h|^{2p}\} \leq C\int_0^t \mathbb{E}\{\|\kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{t}_n})\|^{2p}\}ds \qquad (6.62)$$

où dans la deuxième inégalité, on a utilisé la formule de compensation et le fait que $\int_{\{|y|\leq h\}} |y|^{2p}\pi(dy) < +\infty$. Finalement, d'après (6.60), (6.61) et (6.62), on en déduit

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} V^p(\hat{X}_t^{n,x})\} \leq V^p(x) + \int_0^t \mathbb{E}\{V^p(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})\}ds \leq C_T V^p(x)$$

d'après l'étape 1. □

Lemme 6.20 *Supposons que b, σ et κ soient localement lipschitziennes et sous-linéaires. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout K compact de $\mathbb{R}^d$, pour tout $T > 0$,*

$$\sup_{x\in K} \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |\hat{X}_t^{n,x} - X_t^x| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Preuve : La preuve est construite en deux étapes. Dans un premier temps, on prouve que le résultat est vrai si les coefficients sont lipschitziens bornés et les sauts également bornés puis on étend ensuite au cas général par des arguments classiques.
Étape 1. Supposons que b, σ et κ soient des fonctions lipschitziennes bornées et que les sauts du processus Z soient bornés. On écrit alors le processus de sauts sous sa forme compensée de sorte que Z soit une martingale.
Notons $E^x_{t,n} = X_t^x - \hat{X}_t^{n,x}$. On note (t_k^n), la suite des temps de discrétisation de $(\hat{X}_t^{n,x})$, *i.e.* $t_k^n = \Gamma_{n+k} - \Gamma_n$ et on commence par s'intéresser à $E^x_{t_k^n,n}$. Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $k_n(t) = \max\{k \geq 0, t_k^n \leq t\}$ (avec comme convention $t_0^n = 0$) et $\underline{s}_n = t_{k_n(t)}$. Par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
|E^x_{t^n_{k+1},n}|^2 &= |E^x_{t^n_k,n}|^2 + 2\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \langle E^x_{s,n}, b(X_s^x\rangle - b(\hat{X}^{n,x}_{t_k^n})\big)ds + M^{n,1}_{t^n_{k+1}} - M^{n,1}_{t^n_k} \\
&+ M^{n,2}_{t^n_{k+1}} - M^{n,2}_{t^n_k} + \frac{1}{2}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \mathrm{Tr}\big((\sigma(X_s^x) - \sigma(\hat{X}^{n,x}_{t_k^n}))(\sigma^*(X_s^x) - \sigma^*(\hat{X}^{n,x}_{t_k^n}))\big)ds \\
&+ \sum_{t_k^n < s \leq t_{k+1}^n} \tilde{H}\big(E^x_{s-,n}, (\kappa(X^x_{s-}) - \kappa(\hat{X}^{n,x}_{t_k^n}))\Delta Z_s\big) \quad \text{où} \\
M_t^{n,1} &= \int_0^t \langle E^x_{s,n}, \sigma(X_s^x) - \sigma(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_{nn}})dW_s\rangle, \quad M_t^{n,2} = \int_0^t \langle E^x_{s^-,n}, \kappa(X^x_{s^-}) - \kappa(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n})dZs\rangle
\end{aligned}$$

et $\tilde{H}(x,y) = |x+y|^2 - |x|^2 - 2\langle x,y\rangle$. $(M_t^{n,1})$ et $(M_t^{n,2})$ sont des martingales puisque les intégrands sont bornés. D'autre part, $|\tilde{H}(x,y)| \leq |y|^2/2$. Ainsi, en utilisant l'inégalité $|u|.|v| \leq 1/2(|u|^2 + |v|^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{|E^x_{t^n_{k+1},n}|^2\} &\leq \mathbb{E}\{|E^x_{t^n_k,n}|^2\} + \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \mathbb{E}\{|E^x_{s,n}|^2\} + \mathbb{E}\{|b(X_s^x) - b(\hat{X}^{n,x}_{t_k^n})|^2\}ds \\
&+ \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \Big(C\|\sigma(X_s^x) - \sigma(\hat{X}^{n,x}_{t_k^n})\|^2 + \int |y|^2\pi(dy)\mathbb{E}\{\|\kappa(X^x_{s-}) - \kappa(\hat{X}^{n,x}_{t_k^n})\|^2\}\Big)ds
\end{aligned}$$

où pour le dernier terme, on a appliqué la formule de compensation. En remarquant que $E^x_{s,n} = E^x_{t^n_k,n} + (X^x_s - X^x_{t^n_k}) - (\hat{X}^{n,x}_s - \hat{X}^{n,x}_{t^n_k})$ et que $X^x_s - \hat{X}^{n,x}_{t^n_k} = X^x_s - X^x_{t^n_k} + E^{n,x}_{t^n_k}$, on déduit du caractère lipschitizien des coefficients que

$$\mathbb{E}\{|E^x_{t^n_{k+1},n}|^2\} \leq \mathbb{E}\{|E^x_{t^n_k,n}|^2\}(1 + C\gamma_{n+k}) + C\int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \big(\mathbb{E}\{|X^x_s - \hat{X}^x_{t^n_k}|^2\} + \mathbb{E}\{|\hat{X}^{n,x}_s - \hat{X}^{n,x}_{t^n_k}|^2\}\big)ds.$$

On peut vérifier que pour tous $k \geq 1$, $n \geq 1$ et $s \in [t^n_k, t^n_{k+1}]$,

$$\mathbb{E}\{|X^x_s - \hat{X}^x_{t^n_k}|^2\} + \mathbb{E}\{|\hat{X}^{n,x}_s - \hat{X}^{n,x}_{t^n_k}|^2\} \leq C(s - t^n_k). \tag{6.63}$$

(Comme les coefficients sont bornés, la constante est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^d$). On obtient alors pour tout k et n

$$\mathbb{E}\{|E^x_{t^n_{k+1},n}|^2\} \leq \mathbb{E}\{|E^x_{t^n_k,n}|^2\}(1 + C\gamma_{n+k}) + C\gamma^2_{n+k}.$$

Comme $E^x_{0,n} = 0$ *p.s.*, on en déduit par une itération,

$$\mathbb{E}\{|E^x_{t^n_k,n}|^2\} \leq C\sum_{l=1}^{k-1} \gamma^2_{n+l} \prod_{i=l+1}^{k-1}(1 + C\gamma_{n+i})$$

en adoptant comme convention $\prod_\emptyset = 1$. Pour tout $T > 0$, on remarque que pour tout $k \leq k_n(T)$, $\prod_{i=1}^{k-1}(1 + C\gamma_{n+i}) \leq e^{CT}$ et que $\sum_{l=1}^{k-1} \gamma_{n+l} \leq T$. Ainsi, comme (γ_n) est décroissante,

$$\sup_{k\in\{0,\dots,k_T\}} \mathbb{E}\{|E^x_{t^n_k,n}|^2\} \leq Ce^{CT}\sum_{l=1}^{k_T-1} \gamma^2_{n+l} \leq C_T\gamma_n \tag{6.64}$$

où, en particulier, C_T ne dépend pas de x. Grâce à cette inégalité, on va maintenant pouvoir obtenir le lemme sous les conditions de l'étape 1. Avec les notations déjà utilisées plus haut, on a

$$\sup_{t\in[0,T]} |E^x_{t,n}|^2 \leq \Big(\int_0^T |b(X^x_s) - b(\hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n n})|ds\Big)^2 + \sup_{t\in[0,T]} |M^{n,1}_t|^2 + \sup_{t\in[0,T]} |M^{n,2}_T|^2.$$

Par les inégalités de Jensen et de Doob, on déduit du caractère lispchitzien des coefficients que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |E^x_{t,n}|^2\} &\leq C_T\int_0^T \mathbb{E}\{|X^x_s - \hat{X}^{n,x}_{\underline{s}_n}|^2\}ds \\ &\leq C_T\int_0^T \mathbb{E}\{|X^x_s - X_{\underline{s}_n}|^2\}ds + C_T\int_0^T \mathbb{E}|E^x_{\underline{s}_n,n}|^2 ds.\end{aligned}$$

On déduit alors de (6.63) et de (6.64) que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\{\sup_{t\in[0,T]} |E^x_{t,n}|^2\} \leq C_T(\sum_{k=0}^{k_n(T)} \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}\wedge T} (s - t^n_k)ds + \gamma_n) \leq \tilde{C}_T\gamma_n.$$

Le résultat suit.

Étape 2. Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses du lemme. Pour $M > 0$, $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on note

$$\Omega(M,T,x,n) = \{\sup_{t\in[0,T]} |\hat{X}^{n,x}_t| \leq M\} \cap \{\sup_{t\in[0,T]} |X^x_t| \leq M\} \cap \{\sup_{t\in[0,T]} |\Delta N^h_t| \leq M\}.$$

On a

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]}|\hat{X}_t^{n,x}-X_t^x|\geq\varepsilon)\leq\mathbb{P}(\{\sup_{t\in[0,T]}|\hat{X}_t^{n,x}-X_t^x|\geq\varepsilon\}\cap\Omega(M,T,x,n))+\mathbb{P}(\Omega(M,T,x,n)^c).$$

D'une part, si b, σ et κ sont des fonctions localement lipschitziennes, alors elles sont lipschitziennes bornées sur $B(0,M)$. De plus, les sauts sont bornés sur $\Omega(M,T,x,n)$. Ainsi, pour tout $M>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in K}\mathbb{P}(\{\sup_{t\in[0,T]}|\hat{X}_t^{n,x}-X_t^x|\geq\varepsilon\}\cap\Omega(M,T,x,n))=0.$$

D'autre part, d'après (6.44) et (6.46), on a :

$$\sup_{x\in K}\sup_{n\geq1}\mathbb{P}(\big(\Omega(M,T,x,n)\big)^c)\xrightarrow{M\to+\infty}0$$

ce qui permet d'obtenir le résultat en faisant tendre M vers $+\infty$. □

6.6.1 Caractérisation de la convergence étroite *p.s.* sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$

Lemme 6.21 *Supposons que pour toute fonctionnelle $\Phi:\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\mapsto\mathbb{R}$ bornée et lipschitzienne pour la distance $\tilde{d}$,*

$$\nu^{(\mathbf{n})}(\omega,\Phi)\xrightarrow{n\to+\infty}\int\Phi(x)\mathbb{P}_\nu(dx)\quad p.s.\tag{6.65}$$

Alors, $(\nu^{(\mathbf{n})}(\omega,dy))_{n\geq1}$ converge étroitement p.s. vers $\mathbb{P}_\nu$ pour la topologie de Skorokhod.

Remarque 6.22 Le caractère presque sûr de la convergence (6.65) est ici dépendant de la fonctionnelle Φ. Sans cette dépendance, le résultat serait alors une simple conséquence de la caractérisation de la convergence étroite sur un espace polonais par celle de ses fonctions lipschitziennes bornées. La preuve de ce résultat consiste donc essentiellement à s'affranchir de cette dépendance.

Preuve : Soit O un ouvert de $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ et $(\Phi_k)_{k\geq1}$ la suite de fonctionnelles définies sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ par $\Phi_k(\alpha)=1-(1-k\tilde{d}(\alpha,O^c))_+$. Pour tout $k\geq1$, Φ_k est lipschitzienne bornée pour la distance $\tilde{d}$. Ainsi, d'après (6.65), *p.s.*, pour tout $k\geq1$

$$\nu^{(\mathbf{n})}(\omega,\Phi_k)\xrightarrow{n\to+\infty}\int\Phi_k(x)\mathbb{P}_\nu(dx).$$

Comme de plus, la suite $k\mapsto\Phi_k$ croît vers $\Phi=1_O$, on en déduit que pour tout ouvert O de $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\nu^{(\mathbf{n})}(\omega,O)\geq\mathbb{P}_\nu(O)\quad p.s.\tag{6.66}$$

$\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ est séparable. En conséquence, il possède une base dénombrable d'ouverts $(O_k)_{k\geq1}$. Quitte à remplacer $(O_k)_{k\geq1}$ par l'ensemble de ses réunions finies (qui reste un ensemble dénombrable), on peut de plus supposer que $(O_k)_{k\geq1}$ est stable par réunion finie. D'abord, comme $(O_k)_{k\geq1}$ est un ensemble dénombrable d'ouverts, on déduit de (6.66) qu'il existe $\Omega_1\subset\Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_1)=1$ et tel que pour tout $\omega\in\Omega_1$, pour tout $k\geq1$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\nu^{(\mathbf{n})}(\omega,O_k)\geq\mathbb{P}_\nu(O_k).\tag{6.67}$$

Comme d'autre part, pour tout ouvert O de $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(k_l)_{l\geq 1}$ telle que

$$O = \lim_{l\to+\infty} \nearrow O_{k_l},$$

on déduit du théorème de convergence monotone et de (6.67) que pour tout $\omega \in \Omega_1$,

$$\liminf_{n\to+\infty} \nu^{(\mathbf{n})}(\omega, O) \geq \mathbb{P}_\nu(O) \quad \text{pour tout ouvert } O \text{ de } \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d).$$

Le théorème du porte-manteau nous permet alors de conclure que $(\nu^{(\mathbf{n})}(\omega, dy))_{n\geq 1}$ converge étroitement *p.s.* vers $\mathbb{P}_\nu$. □

Chapitre 7

Convergence en loi du schéma d'Euler à pas décroissant vers le régime stationnaire

Résumé

Nous montrons la convergence en loi du schéma d'Euler à pas décroissant dans sa version à temps continu vers la loi du processus solution de l'EDS en régime stationnaire. Ce résultat nécessite une hypothèse de convergence du semi-groupe vers la probabilité invariante. C'est pourquoi nous explicitons également des conditions d'asymptotique confluence pour ce type de processus, cadre dans lequel l'hypothèse de convergence du semi-groupe est satisfaite.

7.1 Présentation des Résultats principaux

Jusqu'à présent, on a privilégié une approche trajectorielle de l'approximation du régime stationnaire d'une EDS dirigée par un processus de Lévy. Dans ce chapitre et dans le suivant, nous nous intéressons à un autre aspect : la convergence en loi du schéma d'Euler vers le régime stationnaire. L'approche développée ici est inspirée d'un article de Basak, Hu et Wei ([BHW97]) dans le cadre des diffusions Browniennes. Ces auteurs considèrent un schéma d'Euler $(\bar{X}_n)$ à pas décroissant γ_n telle que $\Gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \to +\infty$. En notant $(\bar{X}_t^{(0)})$, le schéma à temps continu obtenu en interpolant linéairement les valeurs de $(\bar{X}_n)$, ils montrent que la suite de processus $(\bar{X}_\cdot^{(n)} := X^{(0)}_{\Gamma_{n+\cdot}})$ converge en loi vers la diffusion Brownienne associée en régime stationnaire (pour la topologie de la convergence uniforme). Le résultat qu'ils obtiennent nécessite deux types d'hypothèses : une hypothèse de Lyapounov forte (correspondant au cas $a = 1$ dans les chapitres précédents) et une hypothèse de convergence uniforme sur les compacts du semi-groupe vers la probabilité invariante ν. La première hypothèse permet d'assurer la tension du schéma d'Euler $(\bar{X}_n)$ puis celle de $(X_t^{(n)})$ tandis que la seconde permet d'assurer que le processus limite est stationnaire.
Nous souhaitons étendre ce type de résultat aux EDS dirigées par des Lévy.
Considérons (X_t), processus càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ solution de

$$dX_t = b(X_{t^-})dt + \sigma(X_{t^-})dW_t + \kappa(X_{t^-})dZ_t \tag{7.1}$$

où b, σ, κ, W et Z sont définis comme dans le chapitre 2 (voir page 22). Nous faisons ici l'hypothèse que les coefficients sont localement lipschitziens et sous-linéaires. Le semi-groupe associé au processus (X_t) est noté $(P_t)_{t\geq 0}$.
Soit (γ_k) une suite décroissante de réels strictement positifs telles que $\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \to +\infty$. En adoptant la convention $\Gamma_0 = 0$, on note

$$\imath(k,t) = \inf\{n \geq 0, \Gamma_{n+1} - \Gamma_k \geq t\} \quad \text{et} \quad \underline{s} = \Gamma_{\imath(0,s)}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On construit alors la suite de processus càdlàg $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\bar{X}_t^{(0)} := x + \int_0^t b(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})ds + \int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})dW_s + \int_0^t \kappa(\bar{X}_{\underline{s}}^{(0)})dZ_s \quad \text{et} \quad \bar{X}_t^{(n)} = \bar{X}_{\Gamma_n+t}^{(0)}.$$

L'augmentation habituelle de $(\sigma(\bar{X}_s^{(0)}, 0 \leq s \leq t))_{t\geq 0}$ est notée $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$. La suite $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ est une suite de semi-martingales à trajectoires *p.s.* càdlàg.
Notons $\bar{X}_n := \bar{X}_0^{(n)} = \bar{X}_{\Gamma_n}^{(0)}$. La suite $(\bar{X}_n)$ a la loi du schéma d'Euler exact (E) * où (U_n) est une suite de variables i.i.d. de loi normale centrée réduite.
On adopte enfin la notation $(\underline{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ pour la suite de processus constants par morceaux définis par $\underline{X}_t^{(n)} = \bar{X}_{\underline{\Gamma_n+t}}^{(0)}$.
Le résultat principal de ce chapitre est le Théorème 7.1 dans lequel on montre la convergence en loi pour la topologie de Skorokhod de $(X_t^{(n)})$ vers X^ν, solution stationnaire de l'EDS (7.1). Ce résultat nécessitant l'unicité de la probabilité invariante ainsi qu'une hypothèse de convergence uniforme sur les compacts du semi-groupe vers la probabilité invariante, nous explicitons ensuite, dans le Corollaire 3.17, deux types d'hypothèses plus explicites sous lesquelles le Théorème 7.1 est applicable.

Théorème 7.1 *Soit $p > 1/2$ tel que $(\mathbf{H_p^1})$ et $(\mathbf{S_{1,p,2}})$† soient satisfaites. Supposons de plus que b, σ et κ soient localement lipschitziennes et qu'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)^{1+\delta} + \|\kappa\|^{2(1+\delta)} \leq CV^p. \tag{7.2}$$

Si de plus, l'EDS admet une unique probabilité invariante ν et si

$$\mathcal{L}(X_t^x) \overset{t\to+\infty}{\Longrightarrow} \nu \qquad \text{uniformément en } x \text{ sur les compacts,} \tag{7.3}$$

alors $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ converge étroitement sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, vers X^ν, solution de l'EDS de loi initiale ν. En particulier, $(\bar{X}_n)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers ν.

Remarque 7.2 Ce résultat est moins général que les théorèmes 6.3 et 6.5 car il n'est valable que dans le cas où la force de rappel est d'intensité linéaire (correspondant au cas $a = 1$) et nécessite également la condition supplémentaire (7.3) qui peut s'avérer contraignante (voir exemples du corollaire qui suit). De manière à limiter les difficultés techniques, nous ne faisons ici pas d'hypothèse sur les variations locales des petits sauts. Cependant, une démonstration plus technique permettrait de prendre en compte la condition $(\mathbf{H_q^2})$ dans l'hypothèse de Lyapounov. Ceci permettrait alors de relaxer la contrainte imposée au coefficient κ. De même, comme dans le chapitre 6, nous ne nous intéressons ici qu'au schéma exact (E) mais il est possible d'adapter la preuve aux schémas approchés.

*Schéma défini dans le Chapitre 3
†Hypothèse de Lyapunov introduite page 49.

Corollaire 7.3 *Soit $p > 1/2$. Supposons que $(\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{p}})$, $(\mathbf{S}_{\mathbf{1},\mathbf{p},\mathbf{2}})$ et (7.2) soient satisfaites. Si de plus, b, σ et κ sont lipschitziennes, alors la conclusion du théorème précédent est valide si l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*
(a) Le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ associé à l'EDS est faiblement asymptotiquement confluent uniformément sur les compacts, i.e., pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, pour toute fonction f lipschitzienne bornée,

$$\sup_{x,y\in K} \left| P_t f(x) - P_t f(y) \right| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

(b) Le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ satisfait l'hypothèse suivante : il existe $t_0 > 0$ tel que

$$P_{t_0}(x, dy) = p_{t_0}(x, y)dy \quad \text{et} \quad dy - p.s., \quad p_{t_0}(x, y) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Remarque 7.4 Nous donnons des conditions d'asymptotique confluence dans la partie 7.4. Pour la condition (b), nous renvoyons à Fournier [Fou99], Fournier&Giet [FoGi04]. La condition (b) signifie que le processus est *λ_d-irréductible* où λ_d désigne la mesure de Lebesgue. On pourra également trouver des résultats dans cette direction dans Masuda [Mas04].

Preuve du corollaire 7.3. L'existence de probabilité invariante est assurée par le théorème 3.4 du chapitre 3. Ensuite, il est classique d'en déduire l'unicité dans les cas (a) et (b). Notons alors ν cette unique probabilité invariante, K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $K_R = B(0, R)$ $(R > 0)$. Dans le cas (a), on a :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} |\nu(f) - P_t f(x)| &\leq \sup_{x\in K} \int |P_t f(y) - P_t f(x)|\nu(dy) \\ &\leq \sup_{x\in K, y\in K_R} |P_t f(y) - P_t f(x)| + 2\|f\|_\infty \nu(\mathbb{R}^d \setminus K_R),\end{aligned}$$

Ainsi, en applicant la condition (a) à $\tilde{K}_R = K \bigcup K_R$, on obtient

$$\limsup_{t\to+\infty} \sup_{x\in K} |\nu(f) - P_t f(x)| \leq C\nu(\mathbb{R}^d \setminus K_R),$$

d'où l'on déduit (7.3) en faisant tendre R vers $+\infty$. On obtient cette même condition dans le cas (b) par une application du critère de Foster-Lyapounov (cf [MeTw93], [Mas04]).

Organisation de la preuve du Théorème 7.1. On établit la tension de la suite de processus $(\bar{X}^{(n)}_t)$ dans la section 7.2 (voir proposition 7.7). Dans la section 7.3, on montre alors que toute valeur d'adhérence du processus est solution de l'EDS (7.1) (voir lemme 7.8) puis que la loi initiale de cette valeur d'adhérence est nécessairement la probabilité invariante de l'EDS (7.1) (voir lemme 7.9). L'ensemble de ces étapes suffit à prouver le théorème.

7.2 Tension de la suite de processus $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$

Le but de cette première étape est de montrer que la suite de semi-martingales $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ est tendue pour la topologie de Skorokhod. Ce résultat est obtenu dans la proposition 7.7. Nous commençons la preuve par deux lemmes préliminaires. Le premier montre que la suite $(\bar{X}^{(n)}_0)_{n\geq 0}$ des lois initiales de $(\bar{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ est tendue sur $\mathbb{R}^d$ et le second donne un critère de C-tension que nous emprunterons à plusieurs reprises dans la suite.

Lemme 7.5 *Soit $p > 0$. Supposons que $(\mathbf{H_p^1})$, et $(\mathbf{S_{1,p,2}})$ soient satisfaites. Alors :*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} < +\infty$$

En particulier, $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.

Preuve : D'après la proposition 3.10, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha' > 0$, $\beta' \in \mathbb{R}$ tels que, $\forall n \geq n_0$,

$$\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n+1})/\mathcal{F}_n\} \leq (1 - \gamma_{n+1}\tilde{\alpha})V^p(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1}\tilde{\beta}.$$

Par récurrence, on en déduit facilement :

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} \leq \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_{n_0}\} \vee \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

Enfin, un raisonnement par induction permet de vérifier que $\sup_{n\leq n_0} \mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} < +\infty$, ce qui complète la preuve. □

Lemme 7.6 *Soit $p > 0$ tel que $(\mathbf{H_p^1})$ et $(\mathbf{S_{1,p,2}})$ soient satisfaites. Soit $(Y_t^{(0)})$ un processus càdlàg satisfaisant l'hypothèse suivante : il existe $\bar{p} < p$ tel que :*

$$|Y_t^{(0)} - Y_s^{(0)}| \leq C \int_s^t V^{\bar{p}}(\bar{X}_{\underline{u}}^{(0)})du \quad \forall s, t \geq 0 \text{ tels que } s \leq t. \tag{7.4}$$

Alors, $(Y^{(n)})_{n\geq 0}$ définie par $Y_t^{(n)} = Y_{\Gamma_n+t}^{(0)} - Y_{\Gamma_n}^{(0)}$ est C-tendue.

Preuve : D'après le théorème 8.3 de [Bil68], il est suffisant de montrer que pour tous ε, ρ et T strictement positifs, il existe $\delta > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que :

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} |Y_t^{(n)} - Y_s^{(n)}| \geq \varepsilon) \leq \rho \qquad \forall n \geq n_0 \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{7.5}$$

D'après l'hypothèse (7.4), on remarque que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} |Y_t^{(n)} - Y_s^{(n)}| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} |Y_{\Gamma_n+t}^{(0)} - Y_{\Gamma_n+s}^{(0)}| \geq \varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} \sum_{k=\imath(n,s)}^{\imath(n,t)} \gamma_{k+1} C V^{\bar{p}}(\bar{X}_k) \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\sum_{k=\imath(n,t)}^{\imath(n,t+\delta)} \gamma_{k+1} C V^{\bar{p}}(\bar{X}_k) \geq \varepsilon).
\end{aligned}$$

On pose $n_1 = \imath(n,t)$, $n_2 = \imath(n,t+\delta)$ et $\theta = \bar{p}/p$. D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} |Y_t^{(n)} - Y_s^{(n)}| \geq \varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{1}{\theta}}} \mathbb{E}\{(\sum_{k=n_1}^{n_2} \gamma_{k+1} V^{\bar{p}}(\bar{X}_k))^{\frac{1}{\theta}}\}.$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder appliquée à $a_k = \gamma_k^{1-\theta}$ et $b_k = \gamma_k^{\theta} V^{\bar{p}}(\bar{X}_k)$ avec exposants respectifs $1/(1-\theta)$ et $1/\theta$,

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} \gamma_{k+1} V^{\bar{p}}(\bar{X}_k) \leq (\sum_{k=n_1}^{n_2} \gamma_{k+1})^{1-\theta} (\sum_{k=n_1}^{n_2} \gamma_{k+1} V^{p}(\bar{X}_k))^{\theta}.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta}|Y_t^{(n)}-Y_s^{(n)}|\geq\varepsilon)\leq\frac{C}{\varepsilon^{\frac{1}{\theta}}}(\sum_{k=n_1}^{n_2}\gamma_{k+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\Big(\sum_{k=n_1}^{n_2}\gamma_{k+1}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_k)\}\Big).$$

Or, $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\}<+\infty$ et pour n assez grand, $\sum_{k=n_1}^{n_2}\gamma_{k+1}\leq 2\delta$. On obtient finalement

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta}|Y_t^{(n)}-Y_s^{(n)}|\geq\varepsilon)\leq C_\varepsilon\delta^{\frac{p}{\bar{p}}}.$$

Comme $p/\bar{p}>1$, le résultat suit en choisissant δ assez petit. □

Proposition 7.7 *Soit $p>1/2$. Supposons que $(\mathbf{H_p^1})$, $(\mathbf{S_{1,p,2}})$ et (7.2) soient satisfaites. Alors, $\bar{X}^{(n)}$ est une suite de processus tendue sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$.*

Preuve : $(\bar{X}^{(n)})$ est une suite de semi-martingales. On considère alors τ, une fonction de troncation lipschitzienne, telle que $\tau(x)=x$ si $|x|\leq 1$ et $\tau(x)=0$ si $|x|\geq 2$. Les caractéristiques $(\beta^{(n)},C^{(n)},\mu^{(n)})$ de la semimartingale $\bar{X}^{(n)}$ associées à la fonction de troncation τ sont définies par :

$$\beta^{(n)}=\beta(\underline{X}^{(n)}),\quad C^{(n)}=C(\underline{X}^{(n)}),\quad\text{et}\quad\mu^{(n)}=\mu_{\underline{X}^{(n)}}\quad\text{où pour }\xi=(\xi_t)_{t\geq 0}\in\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d),$$

$$\beta_t(\xi)=\int_0^t b(\xi_s)ds-\int_0^t\int(I-\tau)(\kappa(\xi_s)y)\pi(dy)ds,$$

$$C_t^{i,j}(\xi_t)=\int_0^t(\sigma\sigma^*)_{i,j}(\xi_s)ds\quad\forall i,j\in\{1,\dots,d\}\quad\text{et pour }\phi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}_+,$$

$$(\int\phi d\mu_\xi)_t=\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d}\phi(s,x)\mu_\xi(ds,dx)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{d'}}\phi(s,\kappa(\xi_s)y)\pi(dy)ds.$$

On montre alors que $(\bar{X}^{(n)})$ est tendue en vérifiant les conditions du théorème VI.4.18 de [JaSh87]. Comme $(\bar{X}_0^{(n)})$ est tendue d'après le lemme 7.5, il nous suffit simplement de vérifier les points suivants.

i) Pour tous $T>0$, $\rho>0$,

$$\lim_{c\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\mu^n([0,T]\times\{|y|>c\}>\rho)=0.$$

ii) $(\beta^{(n)})_{n\geq 1}$ et $(\mathrm{Tr}(\tilde{C}^{(n)})+\int g_a d\mu^{(n)})_{n\geq 1}$ sont C-tendues pour tout $a>0$, $\tilde{C}^{(n)}$ désignant la seconde caractéristique modifiée de $\bar{X}^{(n)}$ définie par :

$$\tilde{C}_t^{(n),i,j}=C_t^{(n),i,j}+\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d}\tau_i\tau_j(x)\mu^{(n)}(\omega,ds,dx)\quad\forall i,j\in\{1,\dots,d\},$$

et $g_a:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}$, la fonction définie par $g_a(x)=(a|x|-1)_+\wedge 1$.

Vérifions *i*). D'abord,

$$\mathbb{P}(\mu^n([0,T]\times\{|y|>c\})>\rho)\leq\mathbb{P}(\int_0^T\pi\{|\kappa(\underline{X}_s^{(n)})y|>c\}ds>\rho).$$

Or,

$$\begin{aligned}\pi(|\kappa(\underline{X}_s^{(n)})y| > c) &\leq \pi(\|\kappa(\underline{X}_s^{(n)})\|.|y|1_{|y|>1} > c) + \pi(\|\kappa(\underline{X}_s^{(n)})\|.|y|1_{|y|\leq 1} > c) \\ &\leq \frac{\|\kappa(\underline{X}_s^{(n)})\|}{c}\int_{|y|>1}|y|\pi(dy) + \frac{\|\kappa(\underline{X}_s^{(n)})\|^2}{c^2}\int_{|y|\leq 1}|y|^2\pi(dy) \\ &\leq \delta(c)V^p(\underline{X}_s^{(n)}) \quad \text{avec} \quad \delta(c) \xrightarrow{c\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\underline{X}_s^{(n)} = \bar{X}^{(0)}_{\Gamma_{\imath(n,s)}}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mu^n([0,T]\times\{|y|>c\}) > \rho) &\leq \mathbb{P}(\sum_{k=n}^{\imath(n,T)+1}\gamma_k V^p(\bar{X}_k) > \frac{\rho}{\delta(c)}) \\ &\leq \frac{\delta(c)}{\rho}\sum_{k=n}^{\imath(n,T)+1}\gamma_k \sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\}.\end{aligned}$$

On en déduit *i)* en remarquant que $\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\{V^p(\bar{X}_n)\} < +\infty$ et $\sup_{n\geq 1}\sum_{k=n}^{\imath(n,T)+1}\gamma_k \leq T + \gamma_1$. Pour *ii)*, on utilise le lemme 7.6. On remarque que l'on a bien $\beta_t^{(n)} = \beta^{(0)}_{\Gamma_n+t} - \beta^{(0)}_{\Gamma_n}$ et que

$$|\beta_t(\underline{X}^{(0)}) - \beta_s(\underline{X}^{(0)})| \leq \int_s^t |b(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})| + |\int(I-\tau)(\kappa(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})y)\pi(dy)|du.$$

Comme $(I-\tau)(x) = 0$ si $|x| \leq 1$, on peut écrire

$$|\int(I-\tau)(\kappa(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})y)\pi(dy)| \leq \int_{\{|y|>1\}}|\kappa(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})y|\pi(dy) + \int_{\{|y|\leq 1\}}|\kappa(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})y|^2\pi(dy) \leq CV^{\theta p}(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})$$

avec $\theta < 1$ car $\|\kappa\|^{2(1+\delta)} \leq CV^p$. Comme d'autre part, $|b| \leq C\sqrt{V}$, la C-tension de $(\beta^{(n)})_{n\geq 1}$ est alors une conséquence du lemme 7.6.
Intéressons-nous maintenant à $(\mathrm{Tr}(\tilde{C}^{(n)}) + \int g_a d\mu^{(n)})_{n\geq 1}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\tilde{C}_t(\underline{X}^{(0)})) + (\int g_a d\mu_{\underline{X}^{(0)}})_t &= \int_0^t \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})du + \int_0^t\int\tau^2(\kappa(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})y)\pi(dy)du \\ &\quad + \int_0^t\int(a|\kappa(\bar{X}^{(0)}_{\underline{u}})y| - 1)_+) \wedge 1\pi(dy)du.\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*)^{1+\delta} \leq CV^p$, il nous suffit de vérifier que

$$|\int\tau^2(\kappa(x)y) + (a|\kappa(x)y| - 1)_+) \wedge 1\pi(dy)| \leq CV^{\bar{p}}(x)$$

avec $\bar{p} \leq p$. Comme $|\tau(x)|^2 \leq |x|^2$ si $|x| \leq 1$ et que τ est bornée, on a

$$|\int\tau^2(\kappa(x)y)\pi(dy)| \leq \|\kappa(x)\|^2\int_{|y|\leq 1}|y|^2\pi(dy) + C\pi(|y|>1) \leq C(1 + V^{\frac{p}{1+\delta}}(x)).$$

De même,

$$\begin{aligned}\int \big(a|\kappa(x)y|-1)_+\big)\wedge 1\pi(dy) &\le \pi(\{|y|>\frac{1}{a\|\kappa(x)\|}\}\\ &\le \pi\Big(\{|y|>\frac{1}{a\|\kappa(x)\|}\}\cap\{|y|\le 1\}\Big)+\pi\Big(\{|y|>\frac{1}{a\|\kappa(x)\|}\}\cap\{|y|>1\}\Big)\\ &\le \|\kappa(x)\|^2\int_{|y|\le 1}|y|^2\pi(dy)+\pi(|y|>1).\end{aligned}$$

On en déduit finalement la tension de $(\bar{X}^{(n)})_{n\ge 0}$ en appliquant le lemme 7.6 avec $\bar{p}=p/(1+\delta)$. □

7.3 Caractérisation de la limite

La preuve de ce théorème est construite en deux étapes. Nous montrons d'abord que tout processus limite de $(\bar{X}^{(n)})_{n\ge 0}$ est solution de l'E.D.S. puis dans un second temps, nous prouvons que $\bar{X}_n$ converge en loi vers la probabilité invariante.

Lemme 7.8 *Supposons que les hypothèses de la proposition 7.7 soient satisfaites et que les coefficients soient localement lipschitziens. Alors, tout processus X^∞ valeur d'adhérence de la suite de processus càdlàg $(\bar{X}^{(n)})_{n\ge 0}$ est solution de l'E.D.S* (7.1).

Preuve : Quitte à extraire, on peut supposer que $\bar{X}^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X^\infty$. Nous allons montrer que X^∞ est une semimartingale de caractéristiques $(\beta(X^\infty), C(X^\infty), \mu_{X^\infty})$ avec β, C et μ définis dans la preuve de la proposition 7.7 en utilisant un théorème de convergence de semimartingales (cf Jacod-Shiryaev, Théorème IX.3.39). Les hypothèses i) et ii) de ce théorème sont satisfaites car b, σ et κ sont localement bornées. L'hypothèse iii) d'unicité locale est également satisfaite car les coefficients sont localement lipschitziens.
Avec les notations de la proposition 7.7, considérons maintenant les applications de $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ vers $\mathbb{R}$

$$\xi\mapsto\beta_t(\xi),\qquad \xi\mapsto\tilde{C}_t(\xi)\quad\text{et}\quad \xi\mapsto\int_0^t\int g(\kappa(\xi_s)y)\pi(dy)ds \tag{7.6}$$

où g est une fonction lipschitzienne bornée nulle au voisinage de 0. On montre que ces applications sont continues pour la topologie la convergence uniforme sur tout compact (donc également pour la topologie de Skorokhod). Notons $(\xi^n)_{n\ge 1}$ une suite de $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ telle que $\xi^n \xrightarrow{n\to+\infty} \xi$ uniformément sur tout compact. On remarque que $r:=\sup_{\{s\le t,n\ge 1\}}|\xi^n_s|<+\infty$ et on note $M_r:=\sup_{|x|\le r}\|\kappa(x)\|$. On note alors que si $|y|\le 1/M_r$, alors

$$(I-\tau)(\kappa(\xi^n_s)y)=(I-\tau)(\kappa(\xi_s)y)=0\qquad\forall s\le t\quad\forall n\ge 1,$$

car $(I-\tau)(x)=0$ pour $|x|\le 1$. Comme de plus b et κ sont lipschitziennes sur $B(0,r)$ et $I-\tau$ lipschitzienne, on en déduit

$$|\beta_t(\xi)-\beta_t(\xi^n)|\le C_r t\sup_{s\le t}|\xi^n_s-\xi_s|\Big(1+\int_{|y|>M_r}|y|\pi(dy)\Big)\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

Ainsi, la première application de (7.6) est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact donc également pour la topologie de Skorokhod. Les deux autres applications ne posent pas d'autres difficultés.
Notons enfin

$$S_a^n = \inf\{t, \bar{X}_t^{(n)} \geq a \text{ ou } \bar{X}_{t^-}^{(n)} \geq a\} \quad \text{et} \quad \underline{S}_a^n = \inf\{t, \underline{X}_t^{(n)} \geq a \text{ ou } \underline{X}_{t^-}^{(n)} \geq a\}.$$

La dernière hypothèse (vi) du Théorème IX.3.39 consiste à vérifier que

$$\sup_{s\leq t} |\beta_{s\wedge \underline{S}_a^n}(\underline{X}^{(n)}) - \beta_{s\wedge S_a^n}(\bar{X}^{(n)})| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \forall t \geq 0, \tag{7.7}$$

$$|\tilde{C}_{t\wedge \underline{S}_a^n}(\underline{X}^{(n)}) - \tilde{C}_{t\wedge S_a^n}(\bar{X}^{(n)})| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et,} \tag{7.8}$$

$$\Big|\int_0^{t\wedge \underline{S}_a^n} g(\kappa(\underline{X}_s^{(n)})y)\pi(dy)ds - \int_0^{t\wedge S_a^n} g(\kappa(\bar{X}_s^{(n)})y)\pi(dy)ds\Big| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \forall t \geq 0 \tag{7.9}$$

pour toute fonction g lipschitzienne bornée nulle au voisinage de 0. Comme $S_a^n \leq \underline{S}_a^n$, on a

$$\sup_{s\leq t} |\beta_{s\wedge \underline{S}_a^n}(\underline{X}^{(n)}) - \beta_{s\wedge S_a^n}(\bar{X}^{(n)})| \leq \int_{S_a^n}^{\underline{S}_a^n} \Big(|b(\underline{X}_u^{(n)})| + \int_{|y|>\frac{1}{M_a}} |(I-\tau)(\kappa(\underline{X}_u^{(n)})y)|\pi(dy)\Big)du$$
$$+ \int_0^{t\wedge S_a^n} \Big(|b(\bar{X}_u^{(n)}) - b(\underline{X}_u^{(n)})| + \int_{|y|>\frac{1}{M_a}} |(I-\tau)(\kappa(\bar{X}_u^{(n)})y) - (I-\tau)(\kappa(\underline{X}_u^{(n)})y)|\pi(dy)\Big)du$$

où M_a est défini comme précédemment. On remarque que $\underline{S}_a^n - S_a^n \leq \gamma_{n+1}$. Ainsi, comme b et κ sont localement bornées,

$$\int_{S_a^n}^{\underline{S}_a^n} \Big(|b(\underline{X}_u^{(n)})| + \int_{|y|>\frac{1}{M_a}} |(I-\tau)(\kappa(\underline{X}_u^{(n)})y)|\pi(dy)\Big)ds \leq C\gamma_{n+1}.$$

D'autre part, $(I-\tau)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ et b et κ sont lipschitziennes sur $B(0,a)$. On en déduit

$$\mathbb{E}\Big\{\sup_{s\leq t} |\beta_{s\wedge \underline{S}_a^n}(\underline{X}^{(n)}) - \beta_{s\wedge S_a^n}(\bar{X}^{(n)})|\Big\} \leq C\Big(\gamma_{n+1} + \int_0^t \mathbb{E}\{|\bar{X}_u^{(n)} - \underline{X}_u^{(n)}|\}du\Big)$$

Or, comme $\sup_{\{n\geq 0, u\geq 0\}} \mathbb{E}\{\sqrt{V}(\underline{X}_u^{(n)})\} < +\infty$, on constate que

$$\mathbb{E}\{|\bar{X}_u^{(n)} - \underline{X}_u^{(n)}|\} \leq \int_{\underline{\Gamma_n+u}}^{\Gamma_n+u} \mathbb{E}\{|b(\underline{X}_u^{(n)})|\}dv$$
$$+ \mathbb{E}\{|\int_{\underline{\Gamma_n+u}}^{\Gamma_n+u} \sigma(\underline{X}_u^{(n)})dB_v|\} + \mathbb{E}\{|\int_{\underline{\Gamma_n+u}}^{\Gamma_n+u} \kappa(\underline{X}_u^{(n)})dZ_v|\} \leq C\sqrt{\gamma_{n+1}},$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\sup_{s\leq t} |\beta_{s\wedge \underline{S}_a^n}(\underline{X}^{(n)}) - \beta_{s\wedge S_a^n}(\bar{X}^{(n)})| \xrightarrow{L^1} 0$$

et (7.7). On suit la même méthode pour (7.8) et (7.9). □

Lemme 7.9 *Sous les hypothèses du théorème, $(\bar{X}_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers la probabilité invariante.*

Preuve : D'après le lemme 7.5, $(\bar{X}_n)_{n\geq 0}$ est une suite tendue. Notons $(\bar{X}_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente et μ sa limite. On va prouver que μ est nécessairement l'unique probabilité invariante associée à l'E.D.S (7.1).

Etape 1. On montre que pour tout $s > 0$, il existe une valeur d'adhérence de $(\bar{X}_s^{(n)})_{n\geq 0}$ notée $X^{\infty,s}$ telle que $\mathcal{L}(X^{\infty,s}) = \mu$.

En effet, comme $\bar{X}^{(0)}_{\Gamma_{n_j}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$, on constate que l'on peut construire une sous-suite $(\psi_{s,j}(n))$ telle que :

$$\underline{X}_s^{(\psi_{s,j}(n))} = \bar{X}_{\iota(\psi_{s,j}(n),s)} = \bar{X}^{(0)}_{\Gamma_{n_j}}.$$

Quitte à extraire à nouveau, on peut supposer $(X^{(\psi_{s,j}(n))})_{n\geq 1}$ convergente vers $X^{\infty,s}$. Ainsi, en particulier, comme la limite est quasi-continue à gauche,

$$X_s^{(\psi_{s,j}(n))} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_s^{\infty,s}.$$

Or, comme

$$X_s^{(\psi_{s,j}(n))} - \underline{X}_s^{(\psi_{s,j}(n))} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{(cf preuve du lemme précédent)},$$

on en déduit que $\mathcal{L}(X^{\infty,s}) = \mu$.

Etape 2. On prouve que $\mu = \nu$.

On fixe $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ et on note η_s la loi initiale de $X^{\infty,s}$. $(\eta_s)_{s\geq 0}$ est tendue car elle est contenue dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$. Il existe donc un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\eta_s(K^c) \leq \varepsilon/(4\|f\|_\infty)$ pour tout $s \geq 0$. D'autre part, par hypothèse, on peut choisir $T \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T_\varepsilon$:

$$|P_t f(x) - \nu(f)| \leq \varepsilon/2 \qquad \forall x \in K \qquad \forall t \geq T_\varepsilon$$

où $(P_t)_{t\geq 0}$ désigne le semi-groupe associé à l'EDS. Ainsi,

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \nu(f)| = |\mathbb{E}\{f(X_{T_\varepsilon}^{\infty,T_\varepsilon})\} - \nu(f)| &= \left|\int (P_t f(x) - \nu(f))\eta_{T_\varepsilon}(dx)\right| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \eta_{T_\varepsilon}(K^c) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce raisonnement est valable pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute fonction continue bornée puis le résultat. □

7.4 Asymptotique confluence.

7.4.1 Condition adaptée à l'EDS (7.1)

L'objectif de cette section est de donner des conditions suffisantes pour que l'hypothèse (a) du corollaire 7.3 soit satisfaite.

On commence par définir la notion d'asymptotique confluence.

Définition 7.10 *Un flot stochastique* $\{(X_t^x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\}$ *est asymptotiquement confluent si pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^d$, *pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{|X_t^x - X_t^y| > \varepsilon\} \xrightarrow{t\to+\infty} 0. \tag{7.10}$$

Il est dit asymptotiquement confluent uniformément sur les compacts si la convergence (7.10) *est uniforme sur les compacts de* $\mathbb{R}^d$.

Nous utilisons ici cette dernière définition car on remarque que si le flot stochastique associé à l'EDS (7.1) est asymptotiquement confluent uniformément sur les compacts, alors l'hypothèse (a) du corollaire 7.3 est satisfaite.
Soit $\tilde{V} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ strictement positive sur $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ telle que $\tilde{V}(x) \to +\infty$ si $|x| \to +\infty$ et

$$\tilde{V}(0) = 0, \quad |\nabla \tilde{V}|^2 \le C\tilde{V}, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|D^2\tilde{V}(x)\| < +\infty. \tag{7.11}$$

On note $\tilde{\mathcal{EQ}}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $\tilde{V}$ satisfaisant les hypothèses ci-dessus. On note que $\tilde{\mathcal{EQ}}(\mathbb{R}^d)$ est en bijection avec la sous-classe de $\mathcal{EQ}(\mathbb{R}^d)$ formée des fonctions V telle que $V(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, $V(x) > V(0)$.

Remarque 7.11 $\tilde{V}$ définie par $\tilde{V}(x) = \langle x, Sx\rangle$ où S est une matrice symétrique définie positive, appartient à $\tilde{\mathcal{EQ}}(\mathbb{R}^d)$.

Supposons que $(\mathbf{H_p^1})$ et $(\mathbf{H_q^2})$ soient satisfaites avec $p > 0$ et $q \in (0,1]$. En accord avec les cas définis dans le chapitre 2 (voir p. 22), nous posons $h = +\infty$ si $p > 1/2$, $h = 0$ si $p, q \le 1/2$ et $h \in (0, +\infty)$ si $p \le 1/2 \le q$.Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on pose $\tilde{b}^h(x,y) = b^h(x) - b^h(y)$, $\tilde{\sigma}(x,y) = \sigma(x) - \sigma(y)$ et $\tilde{\kappa}(x,y) = \kappa(x) - \kappa(y)$. Pour f de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact, on introduit alors la notation

$$\bar{A}f(x,y) = \langle \nabla f(x-y), \tilde{b}^h(x,y)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\tilde{\sigma}(x,y)^* D^2 f(x-y)\tilde{\sigma}(x,y)\Big) + \int \tilde{H}^{f,h}(x,y,z)\pi(dz).$$

$$\text{où} \quad \tilde{H}^{f^h}(x,y,z) = f\big(x - y + \tilde{\kappa}(x,y)z\big) - f(x-y) - \langle \nabla f(x-y), \tilde{\kappa}(x,y)z\rangle 1_{\{|z|\le h\}}.$$

On remarque que si l'hypothèse $(\mathbf{H_p^1})$ est satisfaite avec $p > 0$, $\bar{A}\tilde{V}^p(x,y)$ est bien défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ si $p \ge 1$ et pour tout $x \ne y$ si $p < 1$. Dans la proposition qui suit, nous notons

$$S(V,p,\varepsilon) = D^2V + (p-1)\frac{\nabla V \otimes \nabla V}{\varepsilon + V}.$$

Proposition 7.12 *Soit* $p > 0$ *tel que* $(\mathbf{H_p^1})$ *soit satisfaite.*
(i) $p \ge 1$ *: S'il existe* $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{EQ}}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha > 0$ *tels que* $\bar{A}\tilde{V}(x,y) \le -\alpha\tilde{V}(x-y)$, *alors,*

$$\mathbb{E}\{\tilde{V}(X_t^x - X_t^y)\} \le Ce^{-\alpha t}\tilde{V}(x-y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) $p \in (0,1)$ *: Supposons qu'il existe* $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{EQ}}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\varepsilon_0 > 0$ *tels que pour tout* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\langle \nabla\tilde{V}(x-y), \tilde{b}^h(x,y)\rangle + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(\tilde{\sigma}(x,y)^* S(\tilde{V},p,\varepsilon)(x-y)\tilde{\sigma}(x,y))\Big) \le -\alpha\tilde{V}(x-y), \tag{7.12}$$

$$\text{et} \quad \int \bar{H}^{(\varepsilon+\tilde{V})^p,h}(x,y,z)\pi(dz) \le \beta p\tilde{V}^p(x,y) \qquad \text{avec } \beta < \alpha. \tag{7.13}$$

Alors,

$$\mathbb{E}\{\tilde{V}^p(X_t^x - X_t^y)\} \leq Ce^{-p(\beta-\alpha)t}\tilde{V}^p(x-y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

En conséquence, sous les conditions ci-dessus, le flot stochastique $\{(X_t^x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\}$ *associé au processus solution de l'EDS* (7.1) *est asymptotiquement confluent uniformément sur les compacts.*

Exemple 3 Supposons que

$$b(x) = -\rho(x)x + \Upsilon(x) \quad \text{avec} \quad \langle \Upsilon(x), x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

où $x \mapsto \rho(x)$ est une continue bornée et strictement positive. On note $\underline{\rho} := \min_{x\in\mathbb{R}^d} \rho(x)$ ($\underline{\rho} > 0$). Supposons également que σ et κ soient lipschitziennes de constantes $[\sigma]_1$ et $[\kappa]_1$. Alors, les conditions de la proposition 7.12 sont satisfaites avec $\tilde{V}(x) = |x|^2$ si
(i) $\mathbb{E}|Z_t|^2 < +\infty$ et

$$-\underline{\rho} + \frac{1}{2}\big([\sigma]_1^2 + [\kappa]_1^2 \int |y|^2 \pi(dy)\big) < 0.$$

(ii) $(\mathbf{H_p^1})$ et $(\mathbf{H_q^2})$ sont satisfaites avec $q \leq p \leq 1$ et

$$-\underline{\rho} + \frac{1}{2}\big([\sigma]_1^2 + \frac{[\kappa]_1^{2p}}{p} \int |y|^{2p} \pi(dy)\big) < 0.$$

7.4.2 Preuve de la proposition 7.12.

On considère seulement le cas $p \in (0,1)$ qui pose le plus de difficultés. Dans ce cas, la fonction $\tilde{V}^p$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en 0. Soit alors $\varepsilon > 0$ et $\tilde{V}_\varepsilon := \varepsilon + V$. De cette manière, $\tilde{V}_\varepsilon^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\rho > 0$. Appliquons la formule d'Itô à $F_\varepsilon(t, X_t^x - X_t^y) = e^{\rho t}\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y)$. On a

$$e^{\rho t}\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y) = \tilde{V}_\varepsilon^p(x-y) + \int_0^t e^{\rho s}\Big(\rho\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y) + \bar{A}\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x, X_t^y)\Big)ds + M_t^{\varepsilon,1} + M_t^{\varepsilon,2} + M_t^{\varepsilon,3}$$

où,
$$M_t^{\varepsilon,1} = \int_0^t e^{\rho s}\langle \nabla\tilde{V}_\varepsilon^p(X_{s-}^x - X_{s-}^y), \tilde{\sigma}(X_{s-}^x, X_{s-}^y)dW_s\rangle,$$
$$M_t^{\varepsilon,2} = \int_0^t e^{\rho s}\langle \nabla\tilde{V}_\varepsilon^p(X_{s-}^x - X_{s-}^y), \tilde{\kappa}(X_{s-}^x, X_{s-}^y)dY_s^h\rangle,$$
$$M_t^{\varepsilon,3} = \sum_{0<s\leq t} e^{\rho s}\tilde{H}^{\tilde{V}_\varepsilon^p,h}(X_{s-}^x, X_{s-}^y, \Delta Z_s) - \int_0^t e^{\rho s}\int \tilde{H}^{\tilde{V}_\varepsilon^p,h}(X_s^x, X_s^y, z)\pi(dz)ds.$$

$M^{\varepsilon,1}$ et $M^{\varepsilon,2}$ désignent des martingales locales car (X_{s-}^x) est localement borné pour tout x en tant que processus càglàd. D'après la proposition 2.2, $M^{\varepsilon,3}$ l'est également car d'après l'hypothèse (7.13), il est facile de voir que

$$\int_0^t \int |\tilde{H}^{\tilde{V}_\varepsilon^p,h}(X_s^x, X_s^y, z)|\pi(dz)ds < +\infty \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, comme $M^\varepsilon := M^{\varepsilon,1} + M^{\varepsilon,2} + M^{\varepsilon,3}$ est une martingale locale, on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de temps d'arrêt localisant (T_k^ε), ce qui implique que pour tout $k \geq 0$,

$$\mathbb{E}\{e^{\rho(t\wedge T_k^\varepsilon)}\tilde{V}_\varepsilon^p(X_{t\wedge T_k^\varepsilon}^x - X_{t\wedge T_k^\varepsilon}^y)\} = \tilde{V}_\varepsilon^p(x-y) + \mathbb{E}\Big\{\int_0^{t\wedge T_k^\varepsilon} e^{\rho s}\Big(\rho\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y) + \bar{A}\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x, X_t^y)\Big)ds\Big\},$$

puis par le lemme de Fatou que

$$e^{\rho t}\mathbb{E}\{\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y)\} \le \tilde{V}_\varepsilon^p(x-y) + \liminf_{k\to+\infty}\mathbb{E}\Big\{\int_0^{t\wedge T_k^\varepsilon} e^{\rho s}\Big(\rho\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y) + \bar{A}\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x, X_t^y)\Big)ds\Big\}. \tag{7.14}$$

D'après la construction de V_ε^p, on remarque que $D^2\tilde{V}_\varepsilon^p = p\tilde{V}_\varepsilon^{p-1}S(\tilde{V}, p, \varepsilon)$. Ainsi,

$$\bar{A}\tilde{V}_\varepsilon^p(x,y) = p\tilde{V}_\varepsilon^{p-1}(x-y)\Big(\langle\nabla\tilde{V}(x-y), \tilde{b}^h(x,y)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(\tilde{\sigma}(x,y)^* S(\tilde{V}, p, \varepsilon)(x-y)\tilde{\sigma}(x,y)\big)\Big) + \int \bar{H}^{(\varepsilon+\tilde{V})^p, h}(x,y,z)\pi(dz).$$

D'après les hypothèses, on en déduit que pour $\varepsilon \le \varepsilon_0$,

$$\bar{A}\tilde{V}_\varepsilon^p(x,y) \le -\alpha p(\tilde{V}(x-y)+\varepsilon)^{p-1}\tilde{V}(x-y) + \beta p\tilde{V}^p(x-y). \tag{7.15}$$

Comme $\tilde{V} \le \tilde{V} + \varepsilon$, il vient

$$\bar{A}\tilde{V}_\varepsilon^p(x,y) \le -(\alpha-\beta)p(\tilde{V}(x-y)+\varepsilon)^{p-1}\tilde{V}(x-y). \tag{7.16}$$

On pose $\hat{\alpha} = \alpha - \beta$. On déduit de (7.14) que

$$e^{\rho t}\mathbb{E}\{\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y)\} \le \tilde{V}_\varepsilon^p(x-y) + \liminf_{k\to+\infty}\mathbb{E}\Big\{\int_0^{t\wedge T_k^\varepsilon} e^{\rho s}\psi_{\rho,\varepsilon,p}(X_t^x, X_t^y)ds\Big\}.$$

où $\psi_{\rho,\varepsilon,p}(x,y) = \rho\tilde{V}_\varepsilon^p(x-y) - \hat{\alpha}pV_\varepsilon^{p-1}(x-y)V(x-y)$. Comme $\psi_{0,\varepsilon,p} \le 0$, on obtient dans un premier temps

$$\mathbb{E}\{\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_{t\wedge T}^y)\} \le \tilde{V}_\varepsilon^p(x-y). \tag{7.17}$$

Ainsi, on en déduit que

$$e^{\rho t}|\psi_{\rho,\varepsilon,p}(X_t^x, X_t^y)|1_{[0,T_k^\varepsilon]} \le Ce^{\rho t}\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y) \in L^1([0,T]\times\mathbb{P}). \tag{7.18}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$e^{\rho t}\mathbb{E}\{\tilde{V}_\varepsilon^p(X_t^x - X_t^y)\} \le \tilde{V}_\varepsilon^p(x-y) + \mathbb{E}\Big\{\int_0^t e^{\rho s}\psi_{\rho,\varepsilon,p}(X_t^x, X_t^y)ds\Big\}.$$

On fait alors tendre ε vers 0. Comme $|\psi_{\rho,\varepsilon,p}(X_t^x, X_t^y)| \le CV_{\varepsilon_0}^p(X_t^x - X_t^y)$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on peut à nouveau utiliser le théorème de convergence dominée pour finalement obtenir :

$$e^{\rho t}\mathbb{E}\{\tilde{V}^p(X_t^x - X_t^y)\} \le \tilde{V}^p(x-y) + (\rho - \hat{\alpha}p)\mathbb{E}\{\int_0^t e^{\rho s}\tilde{V}^p(X_t^x - X_t^y)ds\}.$$

On obtient alors le résultat en prenant en posant $\rho = \hat{\alpha}p$.

Chapitre 8

Un théorème limite pour le maximum de variables aléatoires i.i.d.

Résumé

On s'intéresse à $M_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ où $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que ξ_1 appartient au domaine d'attraction d'une loi *max-stable*, ce qui signifie qu'on peut construire des suites (a_n) et (b_n) telles que $(\bar{X}_n = \frac{M_n - b_n}{a_n})$ converge en loi vers une distribution non dégénérée. L'idée principale de ce travail est de montrer que $(\bar{X}_n)$ peut être vu comme l'approximation d'un schéma d'Euler à pas décroissant associé à une EDS avec sauts Markovienne et ergodique. Par des méthodes du même type que celles développées dans le chapitre 7, nous établissons alors un résultat de convergence en loi de la suite de processus constants par morceaux $(\bar{X}_t^{(n)})$ sous-jacente à la suite $(\bar{X}_k)_{k\geq n}$.

8.1 Introduction

8.1.1 Rappels et Notations

Soit (ξ_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de fonction de répartition F ($F(x) := \mathbb{P}(\xi_1 \leq x)$). On note $x_F = \sup\{x, F(x) < 1\}$ et $\theta_n = \inf\{x, F(x) \geq 1 - 1/n\}$. On s'intéresse ici à $M_n := \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.
L'ensemble des fonctions de répartition F pour lesquelles il existe des suites de réels (a_n) et (b_n) tels que $((M_n - b_n)/a_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition G non dégénérée est entièrement caractérisé par le théorème suivant dû à Gnedenko (voir [Gne43] et *e.g.* [LLR83] ou [Res87] pour une introduction à la théorie des valeurs extrêmes).

Théorème 8.1 *Soit (ξ_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de fonction de répartition F. Alors, il existe (a_n) et (b_n) tels que $((M_n - b_n)/a_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition G non dégénérée si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*
- *Type 1 : Il existe une fonction g strictement positive telle que*

$$\frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} \xrightarrow{t \to x_F} \Lambda(x) = e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, $G(x) = \exp(-e^{-x})$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *De plus,* $(a_n, b_n) := (g(\theta_n), \theta_n)$ *convient.*

- *Type* $(2, \alpha)$ *:* $x_F = +\infty$ *et pour tout* $x > 0$

$$\frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} \xrightarrow{t \to +\infty} \Phi_\alpha(x) = x^{-\alpha} 1_{\{x>0\}} \qquad \text{où } \alpha > 0.$$

Dans ce cas, $G(x) = \exp(-x^{-\alpha}) 1_{\{x>0\}}$. *De plus,* $(a_n, b_n) := (\theta_n, 0)$ *convient.*

- *Type* $(3, \alpha)$ *:* $x_F < +\infty$ *et pour tout* $x < 0$,

$$\frac{1 - F(x_F + xt)}{1 - F(x_F - t)} \xrightarrow{t \nearrow x_F} \Psi_\alpha(x) = (-x)^{\alpha} 1_{\{x<0\}} \qquad \text{où } \alpha > 0.$$

Dans ce cas, $G(x) = \exp(-(-x^{\alpha}))1_{\{x\leq 0\}} + 1_{\{x>0\}}$. *De plus,* $(a_n, b_n) := (x_F - \theta_n, x_F)$ *convient.*

Nous donnons des exemples standards associés à chaque classe dans le paragraphe suivant. Les lois G sont appelées des lois max-stables. On dit alors que F appartient au domaine d'attraction d'une telle loi si l'une des conditions ci-dessus est satisfaite.

Notons $\bar{X}_n := (M_n - b_n)/a_n$ où (a_n) et (b_n) sont construits comme dans le théorème 8.1. On remarque que $(\bar{X}_n)$ admet la représentation récursive suivante : $\bar{X}_1 = \xi_1$ et pour $n \geq 1$,

$$\bar{X}_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \bar{X}_n + \frac{b_n - b_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \Big(\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n} \Big)_+ .$$

On pose $\gamma_n = 1 - F(\theta_n)$ et $\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k$. Notons $\rho_n := \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n \gamma_n}$ et $\beta_n := \frac{b_{n-1} - b_n}{a_n \gamma_n}$. Avec ces notations, on a :

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \gamma_{n+1}(\rho_{n+1} \bar{X}_n + \beta_{n+1}) + (1 + \rho_{n+1}\gamma_{n+1}) \Big(\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n} \Big)_+ . \tag{8.1}$$

On définit alors la suite de processus $(\underline{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ par

$$\underline{X}^{(n)}_t = \bar{X}_{\imath(n,t)} \qquad \text{où} \quad \imath(n,t) = \inf\{k \geq n, \Gamma_{k+1} - \Gamma_n \geq t\}. \tag{8.2}$$

En particulier, $\underline{X}^{(n)}_0 = \bar{X}_n$. Dans la suite, on notera $\mathcal{F}_n = \sigma(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$.

Remarque 8.2 Si F est continue, alors $\gamma_n = 1/n$. Sous les hypothèses du théorème 8.1, on peut remarquer que dans le cas général, $\gamma_n \sim 1/n$. En particulier, $\Gamma_n \to +\infty$.

Comme nous le disions en préambule, nous souhaitons identifier $(\bar{X}_n)$ à un schéma d'Euler à pas décroissant d'une EDS avec sauts. Avec la représentation (8.1), on voit apparaître deux sortes de termes : un premier terme qui s'apparente à un terme de drift et un second terme de saut. Ce propos est précisé dans la section suivante.

8.1.2 Hypothèses et Résultat principal

Le résultat principal de ce travail est le théorème 8.4. Ce résultat nécessite les deux hypothèses suivantes :

$(\mathbf{C})$: $\rho_n \xrightarrow{n\to+\infty} \rho \in \mathbb{R}$, $\beta_n \xrightarrow{n\to+\infty} \beta \in \mathbb{R}$.

$(\mathbf{H_\Lambda})$: Pour g, (a_n), (b_n) associés à une fonction de répartition F de type 1, il existe $\delta < x_F$ tel que si $u < 0$ et $a_n u + b_n > \delta$, alors

$$\int_u^0 \frac{a_n}{g(a_n v + b_n)} dv \leq -Cu.$$

Remarque 8.3 Sur des exemples standards, on peut remarquer que la condition $(\mathbf{C})$ est bien satisfaite. :
• Loi exponentielle (Type 1) $a_n = 1$, $b_n = \log n$, $\rho_n = 0$, $\beta_n \xrightarrow{n\to+\infty} -1$.
• Loi normale (Type 1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\log n}}$, $b_n = \sqrt{2\log n} - \frac{1}{2\sqrt{\log n}}(\log\log n + \log 4\pi)$, , $\rho_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, $\beta_n \xrightarrow{n\to+\infty} -1$.
• Loi de Pareto (Type $(2,\alpha)$) : $F(x) = 1 - Kx^{-\alpha}$ pour $x \geq K^{\frac{1}{\alpha}}$: $a_n = (Kn)^{\frac{1}{\alpha}}$, $b_n = 0$ $\rho_n \xrightarrow{n\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}$, $\beta_n = 0$.
• $F(x) = 1 - K(x_F - x)^\alpha$ (Type $(3,\alpha)$) pour $x_F - \frac{1}{K^{\frac{1}{\alpha}}} \leq x \leq x_F$: $a_n = (Kn)^{-\frac{1}{\alpha}}$, $b_n = x_F$, $\rho_n \to \frac{1}{\alpha}$, $\beta_n = 0$.

L'hypothèse $(\mathbf{H_\Lambda})$ est également satisfaite pour les deux lois de type 1 rappelées ci-dessus. Pour une loi exponentielle, $g(x) = 1$, donc $(\mathbf{H_\Lambda})$ est clairement vérifiée car $a_n = g(a_n + ub_n) = 1$. Pour une loi normale, on peut montrer que $g(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} x^{-1}$ (voir [LLR83]). Ainsi, $(\mathbf{H_\Lambda})$ est alors également vérifiée car pour δ assez grand, on a

$$\frac{a_n}{g(a_n v + b_n)} = \frac{g(b_n)}{g(a_n v + b_n)} \leq C\frac{a_n v + b_n}{b_n} \leq C$$

pour tout $v < 0$. Plus généralement, on peut noter que $(\mathbf{H_\Lambda})$ est satisfaite dès que g est bornée minorée par un réel strictement positif ou dès qu'il existe $\delta < x_F$ tel que g est décroissante sur $[\delta, x_F)$.

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 8.4 *Soit ξ_1 de fonction de répartition F de type 1, $(2,\alpha)$ avec $\alpha > 2$ ou $(3,\alpha)$ avec $\alpha > 0$. Supposons que les hypothèses $(\mathbf{C})$ et $(\mathbf{H_\Lambda})$ soient satisfaites. Alors, la suite de processus $(\underline{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ converge en loi pour la topologie de Skorokhod vers un processus de Markov stationnaire de loi initiale G et de générateur A défini pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1_K(\mathbb{R}^d)$ par*

$$Af(x) = (\rho x + \beta)f'(x) + \int_0^{+\infty} \Big(f(x+y) - f(x)\Big)\tau(x+y)dy$$

où

$$\tau = \begin{cases} \Lambda & \text{si } F \text{ est de Type 1} \\ \Phi_\alpha & \text{si } F \text{ est de Type } (2,\alpha) \\ \Psi_\alpha & \text{si } F \text{ est de Type } (3,\alpha). \end{cases} \tag{8.3}$$

La preuve de ce théorème est décomposée en deux parties. Dans la section 8.2, nous prouvons que la suite de processus $(\underline{X}^{(n)})_{n\geq 1}$ est tendue sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ puis nous identifions la limite par un problème de martingale.

8.2 Tension

Le résultat principal de cette section est la proposition 8.10. Auparavant, nous établissons une série de lemmes préliminaires.
Pour des raisons techniques, il sera pratique dans la suite de se ramener à des variables aléatoires dont la partie gauche de la distribution ne pose pas de problème. Pour une fonction de répartition F, on définit donc la classe d'équivalence suivante

$$\mathcal{C}(F) = \{\text{fonction de répartitions } \tilde{F}, \exists \delta < x_F, \tilde{F}(x) = F(x), \forall x > \delta\}.$$

On dira également qu'une variable aléatoire ξ appartient à $\mathcal{C}(F)$ si sa fonction de répartition appartient à $\mathcal{C}(F)$. On a alors le lemme suivant

Lemme 8.5 *Soient ξ_1 (resp. $\tilde{\xi}_1$) de fonction de répartition F (resp. $\tilde{F}$) tels que $\tilde{F} \in \mathcal{C}(F)$. Notons $(\underline{X}^{(n)})$ et $(\tilde{X}^{(n)})$, les suites de processus associées construites construites à partir de l'équation (8.2). Alors, pour toute fonctionnelle H continue bornée sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$,*

$$\mathbb{E}\{H(\underline{X}^{(n)}) - H(\tilde{X}^{(n)})\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Remarque 8.6 On en déduit en particulier qu'il suffit d'établir la tension pour un élément de $\mathcal{C}(F)$. Pour ξ_1 de fonction de répartition F, on montrera le résultat pour $\tilde{\xi}_1 = \xi_1 \vee \delta$ avec $\delta < x_F$.

Preuve : Soit $\delta < x_F$ tel que $F(x) = \tilde{F}(x)$ pour tout $x > \delta$. Le résultat du lemme dépend uniquement de la loi des suites $(\xi_n)_{n\geq 1}$ et $(\tilde{\xi}_n)_{n\geq 1}$. Considérons donc $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ puis posons $\xi_n = F^{-1}(U_n)$ et $\tilde{\xi}_n = \tilde{F}^{-1}(U_n)$. Construit de cette manière, on a $\xi_n = \tilde{\xi}_n$ sur $\{U_n > F(\delta)\}$. On en déduit alors que $\underline{X}^{(n)}$ et $\tilde{X}^{(n)}$ coïncident sur l'évènement $A_n = \bigcup_{k=1}^n \{U_k > F(\delta)\}$. $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et $\mathbb{P}(A_\infty) = 1$ car $\mathbb{P}(U_1 > F(\delta)) > 0$. Le résultat s'obtient alors par le théorème de convergence dominée. □

L'objectif du lemme qui suit est d'établir un contrôle de la partie apparentée aux sauts dans la représentation (8.1).

Lemme 8.7 *Soit $(\xi_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F de type 1, $(2,\alpha)$ avec $\alpha > 2$ ou $(3,\alpha)$ avec $\alpha > 0$. Supposons que l'hypothèse $(\mathbf{H_\Lambda})$ soit satisfaite. Notons*

$$\xi_k^\delta = \xi_k \vee \delta \quad \text{et} \quad \bar{X}_{k,\delta} = \frac{\max_{i+1}^k (\xi_i \vee \delta) - b_i}{a_i}. \tag{8.4}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ (et $\varepsilon < \alpha - 2$ si F est de type 2), il existe $\delta_\varepsilon < x_F$ tel que pour tout $\delta_\varepsilon \leq \delta < x_F$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, on a
(i)

$$\mathbb{E}\Big\{\Big(\frac{\xi_{k+1}^\delta}{a_k} - \bar{X}_{k,\delta} - \frac{b_k}{a_k}\Big)_+ / \mathcal{F}_k\Big\} \leq C\gamma_{k+1} \begin{cases} \big(1 + e^{-C\bar{X}_{k,\delta}}\big) \quad (C>0) & \text{si } F \text{ est de type 1} \\ \big(1 + |\bar{X}_{k,\delta}|^{-(\alpha+\varepsilon)+1}\big) & \text{si } F \text{ est de type } (2,\alpha) \\ \big(1 + |\bar{X}_{k,\delta}|^{\alpha+\varepsilon+1}\big) & \text{si } F \text{ est de type } (3,\alpha). \end{cases}$$

(ii)

$$\mathbb{E}\Big\{\Big(\frac{\xi_{k+1}^\delta}{a_k} - \bar{X}_{k,\delta} - \frac{b_k}{a_k}\Big)_+^2 / \mathcal{F}_k\Big\} \leq C\gamma_{k+1} \begin{cases} \big(1 + e^{-C\bar{X}_{k,\delta}}\big) \quad (C>0) & \text{si } F \text{ est de type 1} \\ \big(1 + |\bar{X}_{k,\delta}|^{-(\alpha+\varepsilon)+2}\big) & \text{si } F \text{ est de type } (2,\alpha) \\ \big(1 + |\bar{X}_{k,\delta}|^{\alpha+\varepsilon+2}\big) & \text{si } F \text{ est de type } (3,\alpha). \end{cases}$$

Preuve : (i) On a :

$$\mathbb{E}\Big\{ \big(\frac{\xi_{k+1}}{a_k} - \bar{X}_k - \frac{b_k}{a_k}\big)_+ / \mathcal{F}_k \Big\} = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)\big) du. \tag{8.5}$$

Supposons dans un premier temps que F est de type 1. D'après la représentation de Von Mises ([Res87], p.43), il existe $z_0 < x_F$ tel que pour tout $x \in [z_0, x_F)$,

$$1 - F(x) = c(x) \exp\big(- \int_{z_0}^{x} \frac{1}{g(s)} ds\big) \qquad \text{où} \quad c(x) \xrightarrow{x \nearrow x_F} c > 0.$$

Supposons que $a_k(u + \bar{X}_k) + b_k < x_F$. Quitte à remplacer ξ_1 par $\xi_1 \vee z_0$, on peut supposer que $a_k(u + \bar{X}_k) + b_k > z_0$ pour tout $u > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{\gamma_k} &= \frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{1 - F(b_k)} \\
&= \frac{c(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{c(b_k)} \exp\Big(- \int_{b_k}^{b_k + a_k(u + \bar{X}_k)} \frac{1}{g(s)} ds\Big) \\
&= \frac{c(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{c(b_k)} \exp\Big(- \int_{0}^{u + \bar{X}_k} \frac{a_k}{g(b_k s + a_k)} ds\Big).
\end{aligned}$$

Comme $c(x) \xrightarrow{x \to x_F} c > 0$, il existe $\delta < x_F$ tel que pour tout $\delta \le x \le x_F$, $c/2 \le c(x) \le 2c$. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$,

$$\frac{c(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{c(b_k)} \le C.$$

Quitte à réduire à nouveau le support, on déduit de l'hypothèse $(\mathbf{H_\Lambda})$ que si $u + \bar{X}_k < 0$,

$$\frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{\gamma_k} \le -C(u + \bar{X}_k).$$

D'après le lemme 2.2 p.78 de [Res87], pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{a_k}{g(b_k s + a_k)} \le \frac{1}{1 + \varepsilon s} \qquad \forall n \ge n_\varepsilon, \quad \forall s > 0.$$

Ainsi,

$$\frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{\gamma_k} \le C_\varepsilon \big(1 + \varepsilon(u + \bar{X}_k)\big)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Finalement, en prenant par exemple $\varepsilon = 1/2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \big(1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)\big) du &\le C\gamma_k \Big(\int_{-\bar{X}_k \vee 0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}(u + \bar{X}_k))^2} du + e^{-C\bar{X}_k} \int_0^{-\bar{X}_k \vee 0} e^{-Cu} du \Big) \\
&\le C\gamma_k \big(1 + e^{-C\bar{X}_k}\big).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que ξ_1 est de type $(2, \alpha)$. D'après la représentation de Karamata ([Res87], p. 58), pour tout $x \ge 1$, on a

$$1 - F(x) = c(x) \exp\big(- \int_1^x \frac{\alpha(t)}{t} dt\big).$$

avec $c(x) \xrightarrow{x\to+\infty} c > 0$ et $\alpha(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \alpha > 0$. Ainsi, quitte à remplacer ξ_1 par $\xi_1 \vee 1$, on en déduit que pour tout $u > 0$,

$$\frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{\gamma_k} = \frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k))}{1 - F(a_k)} = \frac{c(a_k(u + \bar{X}_k))}{c(a_k)} \exp(-\int_{a_k}^{a_k(u+\bar{X}_k)} \frac{\alpha(s)}{s} ds). \tag{8.6}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Quitte à réduire à nouveau le support de ξ_1, on peut supposer que pour k assez grand, $c/2 \le c(x) \le 2c$ et $\alpha - \varepsilon \le \alpha(x) \le \alpha + \varepsilon$ sur l'intervalle $[a_k \wedge a_k\bar{X}_k, +\infty)$. On obtient alors

$$\frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{\gamma_k} \le C\Big((u + \bar{X}_k)^{-\alpha+\varepsilon} 1_{\{u+\bar{X}_k\}>1\}} + (u + \bar{X}_k)^{-\alpha-\varepsilon} 1_{\{u+\bar{X}_k\}\le 1\}}\Big). \tag{8.7}$$

D'après l'égalité (8.5), on en déduit que pour tout $\varepsilon < \alpha - 1$, on peut construire une suite i.i.d $(\xi_k)_{k\ge1}$ tel que $\xi_1 \in \mathcal{C}(F)$ et qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \ge k_0$,

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)\big) du \le C\gamma_k \Big(1 + \frac{1}{\bar{X}_k^{\alpha+\varepsilon-1}}\Big). \tag{8.8}$$

Supposons enfin que F est de type $(3, \alpha)$. D'après le Corollaire 1.14 p.62 de [Res87], F admet alors la représentation suivante :

$$1 - F(x) = c(x) \exp\big(-\int_{x_F-1}^{x} \frac{\alpha(s)}{x_F - s} ds\big) \qquad \forall x > x_F - 1.$$

avec $c(x) \xrightarrow{x\to x_F} c > 0$ et $\alpha(x) \xrightarrow{x\to x_F} \alpha > 0$. Soit $\varepsilon \le \alpha/2$. Il existe $\delta_\varepsilon < x_F$ tel que pour tout $x > \delta_\varepsilon$, $c/2 \le c(x) \le 2c$ et $\alpha - \varepsilon \le \alpha(x) \le \alpha + \varepsilon$. Quitte à considérer $\xi_1 \vee \delta_\varepsilon$, on peut supposer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \ge n_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{\gamma_k} &= \frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + x_F)}{1 - F(x_F - a_k)} \\
&\le \frac{c(a_k(u + \bar{X}_k))}{c(a_k)} \exp(-\int_{x_F-a_k}^{x_F+a_k(u+\bar{X}_k)} \frac{\alpha(s)}{x_F - s} ds) \\
&\le C \exp \int_{a_k}^{-a_k(u+\bar{X}_k)} \frac{\alpha(x_F - v)}{v} dv.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)}{\gamma_k} \le C\Big((-(u + \bar{X}_k))^{\alpha-\varepsilon} 1_{\{u+\bar{X}_k\}>-1\}} + (-(u + \bar{X}_k))^{\alpha+\varepsilon} 1_{\{u+\bar{X}_k\}\le -1\}}\Big).$$

On remarque que si $u + \bar{X}_k > 0$, alors $1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k) = 0$, ce qui permet de conclure que

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k)\big) du \le C(1 + |\bar{X}_k|^{1+\alpha+\varepsilon}).$$

(ii) On remarque que

$$\mathbb{E}\big(\frac{\xi_{k+1}}{a_k} - \bar{X}_k - \frac{b_k}{a_k}\big)_+^2 / \mathcal{F}_k\} = 2\int_0^{+\infty} u(1 - F(a_k(u + \bar{X}_k) + b_k) du. \tag{8.9}$$

La suite de la preuve se base alors sur les contrôles établis dans la première partie. Nous ne la détaillons pas. □

Lemme 8.8 *Supposons ξ_1 à support contenu dans $[K, x_F)$ avec $K \in \mathbb{R}$. Alors,*
(i)

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{|\bar{X}_n|^r\} < +\infty \quad \begin{cases} \forall r \geq 0 & \text{si } F \text{ est de type 1 ou } (3,\alpha) \\ \forall r \in [0,\alpha) & \text{si } F \text{ est de type } (2,\alpha). \end{cases}$$

(ii) Supposons que ξ_1 est de type 1. Alors, pour tout $C > 0$, il existe $\delta_C < x_F$ tel que pour tout $\delta_C \leq \delta < x_F$,

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{\exp(-C\bar{X}_{n,\delta})\} < +\infty.$$

(iii) Supposons que ξ_1 est de type 2 à support dans $[1, +\infty)$. Alors,

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{\frac{1}{(\bar{X}_n)^r}\} < +\infty, \qquad \forall r \geq 0.$$

Preuve : *(i)* La première partie est une conséquence de la Proposition 2.1 p.77 de [Res87].
(ii) Comme $(\bar{X}_{n,\delta})_{n\geq 1}$ converge en loi pour tout δ et que $x \mapsto e^{-Cx}$ est bornée sur $[-L, +\infty)$ pour tout $L > 0$, on en déduit qu'il suffit de montrer qu'il existe δ_C tel que pour tout $\delta \geq \delta_C$,

$$\lim_{L\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}\{\exp(-C\bar{X}_n) 1_{\{\bar{X}_n < -L\}}\} = 0. \tag{8.10}$$

Montrons donc l'égalité ci-dessus. Soit $\delta < x_F$.

$$\mathbb{E}\{\exp(-C\bar{X}_{n,\delta}) 1_{\{\bar{X}_{n,\delta} < -L\}}\} \leq C\mathbb{P}(\bar{X}_{n,\delta} < -L) + \int_L^{+\infty} C\exp(Cu)\mathbb{P}(\bar{X}_{n,\delta} < -u)du.$$

On remarque que $\mathbb{P}(\bar{X}_n < -u) = 0$ dès que $u < a_n^{-1}(\delta - b_n)$ et que $\mathbb{P}(\bar{X}_n < -u) = F^n(-a_n u + b_n)$ pour $u > a_n^{-1}(\delta - b_n)$. Or, d'après le lemme 2.2 p.78 de [Res87], pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ_ε tel que pour tout $u > a_n^{-1}(\delta_\varepsilon - b_n)$,

$$F^n(-a_n u + b_n) \leq \exp\Big(-(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon|u|)^{\frac{1}{\varepsilon}}\Big).$$

Ainsi, en choisissant $\varepsilon = 1/2$ par exemple, on en déduit alors que $u \mapsto \exp(Cu)\mathbb{P}(\bar{X}_{n,\delta} < -u)$ est uniformément dominée sur $\mathbb{R}_-$ par une application Lebesgue-intégrable ce qui permet d'en déduire que

$$\lim_{L\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_L^{+\infty} C\exp(Cu)\mathbb{P}(\bar{X}_{n,\delta} < -u)du = 0.$$

Comme d'autre part,

$$\lim_{L\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bar{X}_{n,\delta} < -L) = \lim_{L\to+\infty} \mathbb{P}(X_\infty < -L) = 0,$$

on en déduit (8.10).
(iii) Si ξ_1 est à support dans $[1, +\infty)$ alors, $\bar{X}_n > 0$ *p.s.* pour tout $n \geq 1$.

$$\frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{a_n}{\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)} = -a_n \max(\tilde{\xi_1}, \ldots, \tilde{\xi_n})$$

où $\tilde{\xi_1} = -\frac{1}{\xi_1}$. Or, si ξ_1 est de type $(2, \alpha)$, il est facile de voir d'après la définition que $-\frac{1}{\xi_1}$ est de type $(3, \alpha)$ avec $x_F = 0$. Posons $\tilde{F}(x) := \mathbb{P}(\tilde{\xi_1} \leq x)$ et $\tilde{a}_n := -\inf\{x, \tilde{F}(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}$. On a

$$-\tilde{a}_n = \inf\{x, F(-\frac{1}{x}) \geq 1 - \frac{1}{n}\} = -\frac{1}{a_n}.$$

Finalement, on en déduit le résultat d'après la première partie (Contrôle des moments pour F de type $(3, \alpha)$). □

Lemme 8.9 *Soit $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite de processus càdlàg telle que*

$$Z_t^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \gamma_k \phi_k(\bar{X}_{k-1})$$

où ϕ_k est une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, si $\sup_{k\geq 1} \mathbb{E}\{|\phi_k(\bar{X}_{k-1})|^p\} < +\infty$ avec $p > 1$, la suite $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ est C-tendue.

Preuve : D'après le théorème 8.3 de [Bil68], il est suffisant de montrer que pour tous ε, ρ et T strictement positifs, il existe $\delta > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que :

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} |Z_t^{(n)} - Z_s^{(n)}| \geq \varepsilon) \leq \eta \qquad \forall n \geq n_0 \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{8.11}$$

$$|Z_t^{(n)} - Z_s^{(n)}| \leq C \sum_{k=\imath(n,t)+1}^{\imath(n,s)} \gamma_k |\phi_k(\bar{X}_{k-1})| \leq C \sum_{k=\imath(n,t)+1}^{\imath(n,t+\delta)} \gamma_k |\phi_k(\bar{X}_{k-1})|.$$

Posons $\alpha_k = \gamma_k^{1-\frac{1}{\bar{p}}}$ et $\mu_k = \gamma_k^{\frac{1}{\bar{p}}} |\phi_k(\bar{X}_{k-1})|$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec $\bar{p} = \frac{p}{p-1}$ et $\bar{q} = p$, on obtient

$$\sum_{k=\imath(n,t)+1}^{\imath(n,t+\delta)} \gamma_k |\phi_k(\bar{X}_{k-1})| \leq \left(\sum_{k=\imath(n,t)+1}^{\imath(n,t+\delta)} \gamma_k \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=\imath(n,t)+1}^{\imath(n,t+\delta)} \gamma_k |\phi_k(\bar{X}_{k-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En appliquant ensuite l'inégalité de Markov , on obtient

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} |Z_t^{(n)} - Z_s^{(n)}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \left(\sum_{k=\imath(n,t)+1}^{\imath(n,t+\delta)} \gamma_k \right)^{\frac{p-1}{p}+1} \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{|\phi_n(\bar{X}_{n-1})|^p\}.$$

Or, $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\{|\phi_n(\bar{X}_{n-1})|^p\} < +\infty$ par hypothèse et pour n assez grand, $\sum_{k=\imath(n,t)+1}^{\imath(n,t+\delta)} \gamma_k \leq 2\delta$, ce qui permet d'obtenir le résultat en prenant δ suffisamment petit. □

Proposition 8.10 *Sous les hypothèses du théorème 8.4, la suite de processus $(\underline{X}^{(n)})_{n\geq 1}$ est tendue sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.*

Preuve : D'après le lemme 8.5, il suffit de montrer le résultat pour une suite $(\xi_k)_{k\geq 1}$ où ξ_1 a pour fonction de répartition $\tilde{F}$ appartenant $\mathcal{C}(F)$. On choisit ξ_1 de manière à ce que les contrôles des lemmes 8.7 et 8.8 soient valides. En adoptant la convention $\sum_{\emptyset} = 0$, on décompose $X_t^{(n)}$ sous la forme suivante

$$\underline{X}_t^{(n)} = X_0^{(n)} + D_t^{(n)} + Y_t^{(n)} \qquad \text{où}$$

$$D_t^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \gamma_k\Big(\rho_k \bar{X}_{k-1} + \beta_k + (1+\rho_k\gamma_k)h_k(\bar{X}_{k-1})\Big) \quad \text{et,} \quad Y_t^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} (1+\rho_k\gamma_k)\Delta\bar{Y}_k$$

$$\text{avec} \quad h_k(x) = \frac{1}{\gamma_k}\mathbb{E}\{\big(\frac{\xi_1}{a_k} - x - \frac{b_k}{a_k}\big)_+\} \quad \text{et} \quad \Delta\bar{Y}_k = \big(\frac{\xi_{k+1}}{a_k} - \bar{X}_{k-1} - \frac{b_k}{a_k}\big)_+ - \gamma_k h_k(\bar{X}_{k-1}).$$

D'après les hypothèses, $(Y_t^{(n)})_{n\geq 1}$ est une martingale de carré intégrable. On a

$$\begin{aligned} < Y^{(n)} >_t &= \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} (1+\rho_k\gamma_k)^2 \mathbb{E}\{\Delta\bar{Y}_k/\mathcal{F}_{k-1}\} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} (1+\rho_k\gamma_k)^2 \mathbb{E}\Big\{\big(\frac{\xi_{k+1}}{a_k} - \bar{X}_{k-1} - \frac{b_k}{a_k}\big)_+^2/\mathcal{F}_{k-1}\Big\} - \gamma_k^2 h_k^2(\bar{X}_{k-1}). \end{aligned}$$

Pour prouver que la suite de processus càdlàg $(\underline{X}^{(n)})_{n\geq 1}$ est tendue pour la topologie de Skorokhod, il suffit de montrer que $(D^{(n)})_{n\geq 1}$ et $(< Y^{(n)} >)_{n\geq 1}$ sont C-tendues. Notons

$$\begin{aligned} \phi_{k,1}(x) &= \Big(\rho_k x + \beta_k + (1+\rho_k\gamma_k)h_k(x)\Big) \qquad \text{et} \\ \phi_{k,2}(x) &= (1+\rho_k\gamma_k)^2\Big(\frac{1}{\gamma_k}\mathbb{E}\{\big(\frac{\xi_1}{a_k} - x - \frac{b_k}{a_k}\big)_+^2\} - \gamma_k h_k^2(\bar{X}_{k-1}). \end{aligned}$$

On a $D_t^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \gamma_k \phi_{k,1}(\bar{X}_{k-1})$. Comme $(\rho_k\gamma_k)_{k\geq 1}$ est une suite bornée, on a d'après le lemme 8.7

$$\phi_{k,1}(x) \leq C(1+|x|) + C\begin{cases} e^{-Cx} \quad (C>0) & \text{si } F \text{ est de type 1} \\ |x|^{-(\alpha+\varepsilon)+1} & \text{si } F \text{ est de type } (2,\alpha) \\ |x|^{\alpha+\varepsilon+1} & \text{si } F \text{ est de type } (3,\alpha) \end{cases}$$

et,

$$\phi_{k,2}(x) \leq \begin{cases} C\big(1+e^{-Cx}\big) \quad (C>0) & \text{si } F \text{ est de type 1} \\ \big(1+|x|^{-(\alpha+\varepsilon)+2}\big) & \text{si } F \text{ est de type } (2,\alpha) \\ \big(1+|x|^{\alpha+\varepsilon+2}\big) & \text{si } F \text{ est de type } (3,\alpha) \end{cases}$$

On déduit alors du lemme 8.8 que $\sup_{k\geq 1}\mathbb{E}\{|\phi_{k,i}(\bar{X}_{k-1})|^2\} < +\infty$ pour $i=1,2$, ce qui permet d'affirmer d'après le lemme 8.9 que $(D^{(n)})_{n\geq 1}$ et $(< Y^{(n)} >)_{n\geq 1}$ sont C-tendues. □

8.3 Identification de la limite

Lemme 8.11 *Soit F de type 1, $(2,\alpha)$ ou $(3,\alpha)$. Soit τ la fonction limite définie dans le théorème 8.4. Alors*

$$\sup_{x\in K}\Big(\frac{1-F(a_nx+b_n)}{1-F(\theta_n)}-\tau(x)\Big)\xrightarrow{n\to+\infty}0 \quad \text{pour tout compact } K \text{ de } \begin{cases}\mathbb{R} & \text{si } F \text{ est de type 1}\\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } F \text{ est de type } (2,\alpha)\\ \mathbb{R}_- & \text{si } F \text{ est de type } (3,\alpha).\end{cases}$$

Remarque 8.12 La convergence simple est une conséquence directe de la définition.

Preuve : Supposons dans un premier temps que F est de type 1. Dans ce cas $\theta_n = b_n$. D'après la représentation de Von Mises (voir preuve du lemme 8.7), on a pour k assez grand

$$\frac{1-F(a_kx+b_k)}{1-F(b_k)}=\frac{c(a_kx+b_k)}{c(b_k)}\exp\big(-\int_0^x\frac{a_k}{g(b_ks+a_k)}ds\big). \tag{8.12}$$

où $c(x)\xrightarrow{x\to+\infty}c>0$. D'après les lemmes 1.2 p.40 et 1.3 p.41 de [Res87], $x\mapsto a_kx+b_k$ (resp. $x\mapsto\frac{a_k}{g(b_kx+a_k)}$) convergent localement uniformément vers x_F (resp. 1). Il est alors facile d'en déduire le résultat.
Si maintenant F est de type $(2,\alpha)$, considérons un compact K de $(0,+\infty)$. D'après la représentation de Karamata (voir preuve du lemme 8.7), on a pour k assez grand

$$\frac{1-F(a_kx+b_k)}{1-F(\theta_k)}=\frac{1-F(a_kx)}{1-F(a_k)}=\frac{c(a_kx)}{c(a_k)}\exp(-\int_1^x\frac{\alpha(a_ks)}{s}ds).$$

avec $c(x)\xrightarrow{x\to+\infty}c>0$ et $\alpha(x)\xrightarrow{x\to+\infty}\alpha>0$. Comme $a_n\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$, $a_nx\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$ uniformément sur K ce qui nous permet d'obtenir le résultat.
Enfin, si F est de type $(3,\alpha)$, considérons un compact K de $(-\infty,0]$. Pour k assez grand, on a pour tout $x\in K$,

$$\begin{aligned}\frac{1-F(a_kx+b_k)}{1-F(\theta_k)}&=\frac{1-F(a_kx+x_F)}{1-F(x_F-a_k)}\\&=\frac{c(a_kx+x_F)}{c(x_F-a_k)}\exp(-\int_{x_F-a_k}^{x_F+a_kx}\frac{\alpha(s)}{x_F-s}ds)\\&=\frac{c(a_kx+x_F)}{c(x_F-a_k)}\exp\big(-\int_{-1}^{x}\frac{\alpha(a_kv+x_F)}{v}dv\big).\end{aligned}$$

avec $c(x)\xrightarrow{x\to x_F}c>0$ et $\alpha(x)\xrightarrow{x\to x_F}\alpha>0$. Comme $a_n\xrightarrow{n\to+\infty}0$, $v\mapsto a_nv+x_F$ converge uniformément vers x_F sur K. On en déduit le résultat. □

Lemme 8.13 *Soit f de classe C^1 à support compact. Supposons que les hypothèses du théorème principal soient satisfaites. notons A l'opérateur défini dans le théorème 8.4. On a*

$$\mathbb{E}\{f(\bar X_{n+1})-f(\bar X_n)/\mathcal{F}_{n-1}\}=\gamma_{n+1}Af(\bar X_n)+\gamma_{n+1}R_n$$

où $R_n\to 0$ en probabilité.

Preuve : On effectue la décomposition suivante

$$f(\bar{X}_{n+1}) - f(\bar{X}_n) = f(\bar{X}_{n,1}) - f(\bar{X}_n) + f(\bar{X}_{n+1}) - f(\bar{X}_{n,1}). \tag{8.13}$$

où $\bar{X}_{n,1} = \bar{X}_n + \gamma_n(\rho_n \bar{X}_n + \beta_n)$. Par la formule de Taylor, on a

$$f(\bar{X}_{n,1}) - f(\bar{X}_n) = \gamma_n f'(\bar{X}_n)(\rho_n \bar{X}_n + \beta_n) + \frac{\gamma_{n+1}^2}{2} f^{(2)}(c_{n+1})(\rho_n \bar{X}_n + \beta_n)^2.$$

où c_{n+1} appartient à $[\bar{X}_n, \bar{X}_{n,1}]$. Notons $A_1 f(x) = f'(x)(\rho x + \beta)$. On a alors

$$f(\bar{X}_{n,1}) - f(\bar{X}_n) = \gamma_n A_1 f(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1} R_{n,1}$$

où

$$R_{n,1} = f'(\bar{X}_n)\big((\rho_n - \rho)\bar{X}_n + \beta_n - \beta\big) + \frac{\gamma_{n+1}}{2} f^{(2)}(c_{n+1})(\rho_n \bar{X}_n + \beta_n)^2.$$

Comme f est à support compact, que $(\rho_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ sont bornées et que $\gamma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, on peut trouver $K > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que pour tout $|x| \geq K$, pour tout $\theta \in [0,1]$ et $n \geq n_0$,

$$f^{(2)}(x + \theta\gamma_n(\rho_n x + \beta) = f'(x) = 0.$$

Ainsi,

$$|R_{n,1}| \leq C\big(|\rho_n - \rho| + |\beta_n - \beta| + \gamma_n\big) \qquad \Longrightarrow \qquad R_{n,1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad p.s.$$

Considérons maintenant la deuxième partie de la décomposition.

$f(\bar{X}_{n+1}) - f(\bar{X}_{n,1}) = \Delta_{n+1,1} - \Delta_{n+1,2} + \Delta_{n+1,3}$ où

$\Delta_{n+1,1} = f(\bar{X}_n + \big(\frac{\xi_1}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n}\big)_+) - f(\bar{X}_n)$, $\Delta_{n+1,2} = \Big(f(\bar{X}_{n,1}) - f(\bar{X}_n)\Big) 1_{\{\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - x - \frac{b_n}{a_n} > 0\}}$

et $\Delta_{n+1,3} = \Big(f(\bar{X}_{n+1}) - f(\bar{X}_n + \big(\frac{\xi_1}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n}\big)_+)\Big) 1_{\{\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n} > 0\}}$.

Posons $A_2 f(x) = \int_0^{+\infty} \Big(f(x+y) - f(x)\Big)\tau(x+y)dy$. Pour terminer la preuve, on va montrer les 3 points suivants.

$$\begin{aligned}
&a. \quad \mathbb{E}\{\Delta_{n+1,1}/\mathcal{F}_n\} = \gamma_{n+1} A_2 f(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1} R_{n,2} \quad \text{avec} \quad R_{n,2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\\
&b. \quad R_{n,3} = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \mathbb{E}\{\Delta_{n+1,2}/\mathcal{F}_n\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\\
&c. \quad R_{n,4} = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \mathbb{E}\{\Delta_{n+1,3}/\mathcal{F}_n\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.
\end{aligned}$$

a.

$$\mathbb{E}\{\Delta_{n+1,1}/\mathcal{F}_n\} = \int_0^{+\infty} f'(\bar{X}_n + u)\mathbb{P}\big\{\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n} > u\big\}du = \gamma_{n+1} A_2 f(\bar{X}_n) + \gamma_{n+1} R_{n,2}$$

où, $R_{n,2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(\bar{X}_n + u)\Big(\frac{1 - F(a_n(\bar{X}_n + u) + b_n)}{1 - F(\theta_n)} - \tau(\bar{X}_n + u)\Big)du.$

Notons

$$H_n(x,u) = f'(x+u)\Big(\frac{1 - F(a_n(x+u) + b_n)}{1 - F(\theta_n)} - \tau(x+u)\Big).$$

Supposons que $\mathrm{supp}(f) \subset [-M, M]$. Ainsi, $H_n(x,u)$ est nul dès que $|x+u| > M$.
Si F est de type 1, , on déduit du le lemme 8.11 que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $p.s.$,

$$|H_n(\bar{X}_n, u)| \leq \varepsilon 1_{\{|\bar{X}_n+u| \leq R\}} \quad \Longrightarrow \quad |R_{n,2}| \leq 2M\varepsilon,$$

En conséquence, $R_{n,2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $p.s.$ Si F est de type $(3,\alpha)$, on remarque que $H_n(x,u) = 0$ dès que $x+u \geq 0$ ce qui permet d'obtenir le même résultat par le lemme 8.11. Enfin, si F est de type $(2,\alpha)$, on utilise le théorème de représentation de Skorokhod. Comme $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et que sa limite charge uniquement $(0,+\infty)$, on peut construire $(\tilde{X}_n)_{n\geq 1}$ avec $\mathcal{L}(\tilde{X}_n) = \mathcal{L}(\bar{X}_n)$ et tel que $\tilde{X}_n \xrightarrow{n\to+\infty} X_\infty > 0$ $p.s.$ On peut donc supposer que $p.s.$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\tilde{X}_n \geq \varepsilon > 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $\tilde{X}_n + u \geq \varepsilon$ pour tout u et $H(\tilde{X}_n, u) = 0$ pour $u > M$. On en déduit d'après le lemme 8.11 que $\int_0^{+\infty} H(\tilde{X}_n, u)du \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $p.s.$ ce qui permet d'en déduire que $R_{n,2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ en probabilité.

b. D'après le début de la preuve, on sait qu'il existe un compact K, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|f(\bar{X}_{n,1}) - f(\bar{X}_n)| \leq C\gamma_n 1_{\{\bar{X}_n \in K\}}$. D'autre part, comme F est continue à droite,

$$\mathbb{P}\{\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - x - \frac{b_n}{a_n} > 0/\mathcal{F}_n\} = 1 - F(a_n\bar{X}_n + b_n).$$

Or, $a_n x + b_n \xrightarrow{n\to+\infty} x_F$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{R}_+^*$) si F est de type 1 ou $(3,\alpha)$ (resp. si F est de type $(2,\alpha)$) (voir preuve du lemme 8.11). Or, si F est de type 1, $(2,\alpha)$, $(3,\alpha)$, F n'admet pas de discontinuité en x_F. Ainsi, $(1 - F(a_n\bar{X}_n + b_n))1_{\{\bar{X}_n \in K\}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{R}_+^*$) si F est de type 1 ou $(3,\alpha)$ (resp. si F est de type $(2,\alpha)$. On en déduit que $R_{n,3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $p.s.$ si F est de type 1 ou $(3,\alpha)$). Si F est de type $(2,\alpha)$, on peut à nouveau utiliser le théorème de représentation de Skorokhod pour finalement obtenir que $R_{n,3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ en probabilité.

Considérons enfin $R_{n,4}$. Comme f est lipschitzienne bornée

$$\begin{aligned}\big|f(\bar{X}_{n+1}) - f(\bar{X}_n + \big(\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n}\big)_+)\big|1_{\{\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n} > 0\}} \\ \leq C\gamma_n\big|(\beta_n + \rho_n\bar{X}_n) + \rho_n(\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n})_+\big|1_{\{\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n} > 0\}}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$|R_{n,4}| \leq C(1+|\bar{X}_n|)\big(1 - F(a_n\bar{X}_n + b_n)\big) + C\mathbb{E}\{(\frac{\xi_{n+1}}{a_n} - \bar{X}_n - \frac{b_n}{a_n})_+/\mathcal{F}_n\}.$$

D'une part, les lemmes 8.7 et 8.8 nous assurent que, quitte à restreindre le support de ξ_1, le second terme converge dans L_1 vers 0. D'autre part, pour le premier, on construit à nouveau une suite $(\tilde{X}_n)_{n\geq 1}$ telle que $\mathcal{L}(\tilde{X}_n) = \mathcal{L}(\bar{X}_n)$ et tel que $\tilde{X}_n \xrightarrow{n\to+\infty} X_\infty$ $p.s.$ Ceci nous assure que $p.s.$, $(\tilde{X}_n)_{n\geq 1}$ est contenu dans un compact K, et que de plus si F est de type 1, on peut supposer que K est contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. Le raisonnement utilisé pour le reste précédent nous permet de déduire que $(1+|\tilde{X}_n|)\big(1 - F(a_n\tilde{X}_n + b_n)\big) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ p.s. ce qui implique que

$$\mathbb{P} - \lim_{n\to+\infty}(1+|\bar{X}_n|)\big(1 - F(a_n\bar{X}_n + b_n)\big) = 0.$$

□

Proposition 8.14 *Supposons que les hypothèses du théorème 8.4 soient satisfaites. Alors, toute valeur d'adhérence de $(\underline{X}^{(n)})_{n\geq 0}$ est un processus de Markov stationnaire solution du problème de martingale (A,ν) où ν a pour fonction de répartition G (loi limite de $(\bar{X}_n)$).*

Preuve : En sommant l'identité du lemme 8.13, on remarque que pour toute fonction f $\mathcal{C}^1$ à support compact, pour tout $n \geq 2$,

$$f(\bar{X}_n) = f(\bar{X}_1) + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k Af(\bar{X}_{k-1}) + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k R_{k-1} + M_n,$$

où, $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale et $(R_n)_{n\geq 1}$ est une suite $(\mathcal{F}_n)$-adaptée telle que $\mathbb{P}-\lim R_n = 0$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$,

$$f(\underline{X}_t^{(n)}) - f(\underline{X}_0^{(n)}) = M_t^{(n)} + \sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \gamma_k (Af(\bar{X}_{k-1}) + R_{k-1}),$$

où $(M^{(n)})$ est une suite de martingales $(\mathcal{F}^{(n)})$-adaptées (où $\mathcal{F}_s^{(n)} = \sigma\{\underline{X}_u^{(n)}, 0 \leq u \leq s\}$) définies par $M_t^{(n)} = M_{\imath(n,t)} - M_n$. On remarque que

$$\sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \gamma_k Af(\bar{X}_{k-1}) = \int_0^t Af(\underline{X}_s^{(n)})ds + (\sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \gamma_k - t) Af(\underline{X}_t^{(n)}).$$

Comme $\gamma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, $\sum_{k=n+1}^{\imath(n,t)} \gamma_k - t \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ pour tout t, ce qui permet d'obtenir que

$$f(\underline{X}_t^{(n)}) - f(\underline{X}_0^{(n)}) - \int_0^t Af(\underline{X}_s^{(n)})ds = M_t^{(n)} + \tilde{R}_t^{(n)}, \tag{8.14}$$

où $\tilde{R}_t^{(n)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ en probabilité pour tout t. Quitte à extraire, supposons que $(\underline{X}^{(n)})$ converge en loi et notons X^∞ sa limite. On déduit de (8.14) que $(f(\underline{X}_t^{(\infty)}) - f(\underline{X}_0^{(\infty)}) - \int_0^t Af(\underline{X}_s^{(\infty)})ds)_{t\geq 0}$ est une martingale.
D'autre part, comme pour tout t, $(\underline{X}_t^{(n)})_{n\geq 1}$ est une sous-suite de $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$, on en déduit que X_t^∞ a pour fonction de répartition G ce qui permet d'affirmer dans un premier temps que X^∞ est un processus de Markov solution du problème de martingale (A,ν). Par son caractère markovien, on en déduit dans un deuxième temps qu'il est stationnaire puisque $\mathcal{L}(X_t^\infty) = \mathcal{L}(X_0^\infty)$. □

Bibliographie

[Alf05] Alfonsi A. (2005), On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes, rapport CERMICS [2005-279].

[AsRo01] Asmussen S., Rosinski J. (2001), Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation, *J. Appl. Probab.*, **38**, pp. 482-493.

[Att04] Attali J.G. (2004), Ergodicity of a certain class of non feller models : Applications to ARCH and Markov switching models, *ESAIM :P.S*, **8**, pp. 76-86.

[BMR01] Barndorff-Nielsen O., Mikosh T., Resnick S. (2001), *Lévy Processes and Applications*, Birkauser.

[BaSh01] Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2001), Modelling by Lévy processess for financial economics, *Lévy Processes, Theory and Applications*, by Barndorff-Nielsen, Mikosch, and Resnick, pp. 283-318.

[BaBa92] Basak G.K., Bhattacharya R.N. (1992), Stability for a class of singular diffusions, *Ann. Probab.*, **20**, pp. 312-321.

[BHW97] Basak G.K., Hu I.C., Wei C.Z. (1997), Weak convergence of recursions, *Stoch. Process. Appl.*, **68**, pp. 65-82.

[Bat96] Bates D.S., (1996), Jumps and stochastic volatility : Exchange rate processes implicit in deutsche mark options, *Review of Financial Studies*, **9**, pp. 69-107.

[Ber04] Berestycki J. (2004), Exchangeable Fragmentation-Coalescence Processes and their Equilibrium Measures, *Elec. Jour. of Prob.*, **9**, pp. 770-824.

[BHK98] Berkes I., Horvath L., Khoshnevisan D. (1998), Logarithmic averages of stable random variables are asymptotically normal *Stoch. Process. Appl.*, **77**, pp. 35-51.

[Ber96] Bertoin J. (1996), *Lévy processes*, Cambridge University press.

[Bil68] Billingsley, P. (1968) *Convergence of Probability Measures*, Wiley.

[Bor98] Borovkov A.A. (1998), *Ergodicity and Stability of Stochastic Processes*, Wiley, New York.

[Bro88] Brosamler G. (1988), An almost everywhere central limit theorem, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **104**, pp. 561-574.

[CoRo05] Cohen S., Rosinski J. (2005), Gaussian approximation of multivariate Lévy processes with applications to simulation of tempered and operator stable processes, Preprint.

[EtKu86] Ethier S., Kurtz T. (1986), *Markov processes, characterization and convergence*, Wyley series in probability and mathematical statistics, Wiley, New York.

[DeDe98] Deelstra G., Delbaen F. (1998), Convergence of Discretized Stochastic (Interest Rate) Processes with Stochastic Drift Term, *Appl. Stochastic Models Data Anal.*, **14**, pp. 77-84.

[Den00] Deng S. (2000), Pricing Electricity derivatives under alternative stochastic spot price models, of the 33rd Hawaii conf. on Syst. Sc.

[Dio03] Diop, A. (2003), *Sur la discrétisation et le comportement à petit bruit d'EDS unidimensionnelles dont les coefficients sont à dérivées singulières*, Phd Thesis, Université de Nice Sophia Antipolis.

[DPS00] Duffie D., Pan J., Singleton K. (2000), Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions, *Econometrica*, **68**, pp. 1343-1376.

[Duf97] Duflo M. (1997), *Random Iterative Models*, Springer Verlag, Berlin.

[Fou99] Fournier, N. (1999), Strict positivity of the density for a Poisson driven S.D.E., *Stoch. Stoch Rep.*, **68**, 1-2, pp. 1-43.

[FoGi04] Fournier, N., Giet J.S. (2006), Existence of densities for jumping SDEs, *Stoch. Process. Appl.*, **116**, pp. 643-661.

[Gne43] Gnedenko B.V. (1943), Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. of Math.*, **44**, pp. 423-453.

[GnKo54] Gnedenko B., Kolmogorov A. (1954), *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Cambridge, MA.

[HaHe80] Hall P., Heyde C. (1980), *Martingale Limit Theory and its Application*, Academic Press.

[Has81] Has'minskii R.Z. (1981), *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noordhoff.

[Hes93] Heston, S. (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, pp. 327-343.

[Jac04] Jacod J. (2004), The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations : limit theorems, *Ann. Probab.*, **32**, pp. 1830-1872.

[JKMP05] Jacod J., Kurtz T.G., Méléard S., Protter P. (2005), The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential equations, *Ann. IHP Probab. Stat.*, **41**, pp. 523-558.

[JaPr91] Jacod J., Protter P. (1991), Une remarque sur les équations différentielles à solutions Markoviennes, *Séminaire de Probabilités XXV*, Springer, *Lect. Notes in Math.*, **1485**, pp. 138-139.

[JaPr95] Jacod J., Protter P. (1998), Asymptotic Error Distributions for the Euler Method for Stochastic Differential Equations, *Ann. Probab.*, **26**, pp. 267-307.

[JaSh87] Jacod, J., Shiryaev, A. N. (1987), *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer.

[Kus84] Kushner, H.J. (1984), *Approximation and weak convergence methods for random processes*, MIT press, Cambridge, MA.

[LaLa96] Lamberton D., Lapeyre B. (1996), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman and Hall/CRC, New York.

[LaPa02] Lamberton D., Pagès G. (2002), Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion, *Bernoulli*, **8**, pp. 367-405.

[LaPa03] Lamberton D., Pagès G. (2003), Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion : the case of a weakly mean reverting drift, *Stoch. Dynamics*, **4**, pp. 435-451.

[LLR83] Leadbetter M., Lindgren G., Rootzen H. (1983), *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer, New York.

[Lem06] Lemaire V. (2006), An adaptative scheme for the approximation of dissipative systems, *Stoch. Proc. Appl.*, to appear.

[Lem05] Lemaire V. (2005), *Estimation numérique de la mesure invariante d'un processus de diffusion*, Phd Thesis, Université de Marne-La Vallée.

[Mas04] Masuda, H. (2004), Ergodicity and exponential β-mixing bounds for a strong solution of Lévy-driven stochastic differential equations, Preprint, MHF 2004-19.

[MeTw93] Meyn S.P., Tweedie R.L. (1993), *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, London.

[Pag85] Pagès G. (1985), *Théorèmes limites pour les semi-martingales*, Thèse de troisième cycle, Université Paris VI.

[Pag01] Pagès G. (2001), Sur quelques algorithmes récursifs pour les probabilités numériques, ESAIM : P.S. **5** (2001), pp.141-170.

[PaVe01] Pardoux E., Veretennikov A. (2001), On Poisson equation and diffusion approximation I, *Ann. Probab.*, **29**, pp. 1061-1085.

[PaVe03] Pardoux E., Veretennikov A. (2003), On Poisson equation and diffusion appoximation II, *Ann. Probab*, **31**, pp. 1166-1192.

[PaVe06] Pardoux E., Veretennikov A. (2006), On the Poisson equation and diffusion approximation III, to appear in *Ann. Probab.*

[Pro90] Protter P. (1990), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

[Pfl84] Pflug G.C. (1984), On Kersting's Theorem on weak convergence of recursions, *Lect. Notes in Stat.*, Springer, **20**, pp. 168 - 174.

[PrTa97] Protter P., Talay D. (1997), The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations, *Ann. Prob.*, **25**, pp. 393-423.

[RoWi87] Rogers L.C.G., Williams D. (1987), *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Volume 2, Wiley, Chichester.

[Res87] Resnick, S. (1987), *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes,* Springer, New York.

[ReYo91] Revuz D., Yor M. (1991), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Third Edition, Springer.

[Rub03] Rubenthaler S. (2003), Numerical simulation of the solution of a stochastic differential equation driven by a Lévy process, *Stoch. Proc. Appl.*, **103**, pp. 311-349.

[RuWi03] Rubenthaler S., Wiktorsson M. (2003), Improved convergence rate for the simulation of stochastic differential equations driven by subordinated Lévy processes, *Stoch. Proc. Appl.*, 108, pp. 1-26.

[Sat99] Sato K. (1999), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge.

[Sch88] Schatte P. (1988), On strong versions of the central limit theorem., *Math. Nachr.*, **137**, pp. 249-256.

[Soi94] Soize C. (1994), *The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and its Explicit Steady State Solutions*, Volume 17 de *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, , World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ.

[Sto79] Stout W.F. (1979), Almost sure invariance principles when $\mathbb{E}X_1^2 = \infty$, *Z. Wahr. verw. Geb.* **49**, pp. 23-32.

[Tal90] Talay D. (1990), Second order discretization schemes of stochastic differential systems for the computation of the invariant law, *Stoch. Stoch. Rep.*, **29**, pp. 13-36.