Versions vectorielles de la description de sous-espaces invariants du shift et de bases de noyaux reproduisants dans certains espaces de fonctions holomorphes.

Nicolas Chevrot

Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard - Lyon 1

pour l'obtention du

Diplôme de Doctorat

(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le 30 novembre 2006 par

M. Nicolas CHEVROT

Spécialité : Mathématiques

VERSIONS VECTORIELLES DE LA DESCRIPTION DE SOUS-ESPACES INVARIANTS DU SHIFT ET DE BASES DE NOYAUX REPRODUISANTS DANS CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Rapporteurs

C.	BADEA	Professeur, Lille 1
G.	GODEFROY	Directeur de Recherche, Paris VI

Jury

C.	BADEA	Professeur, Lille I	
I.	CHALENDAR	Maître de conférences Habilitée, Lyon I	*Directeur de thèse*
T.	FACK	Professeur, Lyon I	
E.	FRICAIN	Maître de Conférences, Lyon I	*Codirecteur de thèse*
G.	GODEFROY	Directeur de Recherche, Paris VI	
A.	HARTMANN	Maître de conférences Habilité, Bordeaux I	

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je souhaiterais remercier très chaleureusement ma directrice de thèse, Isabelle Chalendar, pour m'avoir fait confiance en m'acceptant comme thésard malgré mes disponibilités réduites pendant ces trois années. Sans ses qualités humaines, je n'aurais pu mener mon projet à bien tout en travaillant au lycée.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury : Catalin Badea, Gilles Godefroy, Thierry Fack, Andreas Hartmann et Emmanuel Fricain.

La correspondance que nous avons eue avec Dan Timotin et Emmanuel Fricain pendant son séjour au Canada a été un passage crucial de ces trois années. Ce moment était grisant par l'effervescence des idées, la surprise créée par la tournure que prenait le problème, l'enthousiasme de vos mails ! Encore merci à vous deux !

Je suis également très heureux que Jonathan Partington ait suivi mon travail. Dès le début de ma thèse, il m'a conseillé des lectures. Ensuite, il m'a soumis un problème extrêmement intéressant.

Enfin, au quotidien comme pendant les moments difficiles, j'ai toujours pu compter sur mon entourage. Blandine, mon frère, ma sœur, et mes parents bien sûr ; mais aussi mes cobureaux : Pierre Bousquet, Antoine Flattot, Lucas Fresse Christophe Jaloux et mes collègues du lycée. Du fond du cœur, merci.

Introduction

Opérateurs de décalage et théorème de Beurling

Étant donné un opérateur T sur un espace de Hilbert complexe séparable H, on dit qu'un sous-espace $\mathcal{M}$ de H est invariant pour T s'il est fermé et si $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. On appelle lattice de T, noté $\mathcal{L}at(T)$, l'ensemble des sous-espaces invariants par T. L'étude de la structure d'un opérateur est liée à la connaissance de ses sous-espaces invariants. Déjà en dimension finie, diagonaliser une matrice ou donner sa forme de Jordan consiste à chercher une décomposition de l'espace en somme directe de sous-espaces invariants particuliers. Ainsi lorsque la matrice d'une application linéaire est une matrice de Jordan, c'est qu'on a décomposé l'espace en somme directe de sous-espaces invariants sur lesquels l'application est simple, puisqu'elle se représente par un bloc de Jordan.

Dans le cas d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, l'existence d'un sous-espace $\mathcal{M}$ invariant permet d'obtenir une décomposition triangulaire supérieure de notre opérateur :

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix},$$

où $T_1 = T|_{\mathcal{M}}$, restriction de T à $\mathcal{M}$, où T_2 est un opérateur de $\mathcal{M}^\perp$ dans $\mathcal{M}$ et T_3 de $\mathcal{M}^\perp$ dans $\mathcal{M}^\perp$. Pour obtenir une décomposition diagonale par bloc, il faut trouver un sous-espace invariant par T et T^*. On parle alors de sous-espace réduisant.

D'après H. Radjavi et P. Rosenthal ([32] p. 3), "*le problème le plus fondamental non résolu, le problème du sous-espace invariant, est : est-ce que tout opérateur a un sous-espace invariant non trivial ?*" Ce problème reste ouvert.

Cependant, il est résolu pour certaines classes d'opérateurs, comme les opérateurs normaux, les opérateurs à spectre non connexe, les opérateurs compacts...On pourra consulter [7] pour de nombreux exemples et techniques relatives à ce problème.

En 1948, A. Beurling [6] a été le premier à donner la description d'un lattice non triviale, celui du shift. Considérons les suites de $\ell^2(\mathbb{N})$ et le shift de multiplicité 1 :

$$\begin{array}{cccc} S_{\ell^2(\mathbb{N})} : & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & (x_0, x_1, \dots) & \longmapsto & (0, x_0, x_1, \dots). \end{array}$$

Les sous-espaces $\mathcal{M}_k := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \ : \ a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0\}$ sont des sous-espaces invariants évidents, mais en existe-t-il d'autres ?

Pour répondre à cette question, A. Beurling identifie la suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ avec la fonction holomorphe $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ définie sur le disque $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\}$. Ce type de fonctions définit l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ qui possède une propriété de factorisation intéressante. Toute fonction f de $H^2(\mathbb{D})$ se décompose en produit de deux fonctions de type particulier. L'une, dite intérieure, contient, entre autre, les informations sur la répartition des zéros de f et l'autre, appelée facteur extérieur, renseigne sur la croissance de f. L'opérateur $S_{\ell^2(\mathbb{N})}$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$ s'identifie alors à l'opérateur S de multiplication par la variable z sur $H^2(\mathbb{D})$. Le théorème de Beurling décrit les sous-espaces invariants pour le shift S :

Théorème *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé de $H^2(\mathbb{D})$ tel que $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Alors il existe une fonction intérieure θ unique à une constante unimodulaire près telle que*

$$\mathcal{M} = \theta H^2(\mathbb{D}).$$

On voit que la description de la lattice du shift ne s'arrête pas aux exemples évidents des sous-espaces $\mathcal{M}_k$ cités précédemment, obtenus pour les fonctions intérieures particulières $\theta(z) = z^k$.

Les travaux de Beurling ont donné lieu à diverses généralisations, comme les shifts de multiplicité finie étudiés par Lax, ceux de multiplicité infinie par Halmos et Lowdenslager, les shifts à poids... L'exemple du shift n'est pas anecdotique. Ces opérateurs relèvent un caractère assez universel, puisque L. De Branges et J. Rovnyak ont montré que toute contraction T vérifiant $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ quelque soit $x \in H$ est unitairement équivalente à la restriction de l'adjoint d'un shift à un de ses sous-espaces invariants. On pourra consulter [32] chapitre 3.

Enfin, les shifts ont un intérêt au delà de l'analyse fonctionnelle pure. En théorie du contrôle par exemple, un opérateur sert à modéliser un système linéaire. La propriété d'être un système à retardement se traduit sur le graphe de l'opérateur le modélisant : il doit être un sous-espace invariant pour un shift. On pourra consulter [31], en particulier le chapitre 3, où J. R. Partington expose les liens entre le shift et les systèmes linéaires.

La première partie de cette thèse consiste à trouver la description d'autres sous-espaces invariants et réduisants pour le shift sur des espaces de Hardy plus généraux.

Première partie : sous-espaces invariants du shift sur l'espace de Hardy d'un anneau

Espaces de Hardy sur des domaines circulaires

Ces espaces de Hardy plus généraux sont des espaces de fonctions définies sur un ouvert borné connexe avec un nombre fini de "trous" dont les bords sont des courbes de Jordan, appelé domaine circulaire. Les premières contributions significatives ont permis de comprendre le cas particulier de l'opérateur de multiplication par la variable indépendante z, noté aussi S, sur l'espace de Hardy de l'anneau $A := \{z|\ r_0 < |z| < 1\}$. Sarason [35] a donné les descriptions des sous-espaces de $H^p(A)$ réduisants (invariants par S et S^*) et doublement-invariants (invariants en même temps par S et S^{-1}). On peut alors citer deux difficultés par rapport au résultat de A. Beurling sur le disque. La première provient du fait que l'anneau n'est pas simplement connexe et la seconde est que le shift n'est plus une isométrie. La décomposition en produit de fonctions intérieures-extérieures subsiste mais est plus complexe, certaines fonctions non constantes pouvant être en même temps intérieures et extérieures.

L'avancée significative de Hitt [19] au milieu des années 80 a permis de décrire les sous-espaces invariants par le shift sur $H^p(A)$. Enfin, en 1989 Yakubovich [46] utilise cette description faite sur l'anneau pour décrire le cas général du shift sur $H^p(\Omega)$, avec Ω un domaine circulaire quelconque. La démonstration repose sur la construction d'anneaux sur les bords intérieurs de l'ouvert Ω et sur l'étude des propriétés aux limites des bords de ces anneaux.

Tous ces travaux sont posés dans le cadre de fonctions à valeur scalaire. L'objet de cette première partie est d'obtenir des versions vectorielles de ces résultats.

Nous commencerons par construire ces espaces de Hardy généraux, et tout particulièrement $H^2(A, \mathbb{C}^m)$ espace de Hardy de l'anneau de fonctions à valeur dans $\mathbb{C}^m$.

Sous-espaces invariants, doublement-invariants et réduisants de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$

Dans le chapitre 2, nous établissons les analogues vectoriels des résultats de l'article de D. Sarason [35]. La problématique est de décrire les sous-espaces fermés de $L^2(A, \mathbb{C}^m)$ invariants par S, réduisants, et doublement-invariants. Nous avons contourné l'absence d'une "bonne" décomposition intérieure-extérieure dans le cas de fonctions définies sur l'anneau A à valeur vectorielle en utilisant celle des fonctions à valeur scalaire. La description des sous-espaces réduisants (théorème 2.2.2) est une adaptation du théorème de Wiener au cas de l'anneau :

Théorème *Un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ est réduisant pour S si et seulement si $\mathcal{M} = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, où P est une fonction mesurable à valeur dans les projections.*

Dans un premier temps, nous obtiendrons la description complète des sous-espaces engendrés par une seule fonction f invariants par S (ou par S^{-1}), ainsi que ceux doublement-invariants. Les différentes allures de ces sous-espaces dépendent de l'intégrabilité de $\xi \mapsto \log \|f(\xi)\|$ sur les bords de l'anneau. Le tableau page 34 résume les résultats obtenus.

Dans un second temps, nous obtiendrons le résultat principal de ce chapitre, à savoir, la description des sous-espaces $\mathcal{M}$ doublement-invariants de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ (cf. théorème 2.4.3). A l'aide de la description des sous-espaces réduisants, nous montrerons qu'il existe au plus m générateurs tels que $\mathcal{M}$ soit la somme directe des sous-espaces doublement-invariants engendrés par chacun de ces générateurs :

Théorème *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace non trivial doublement-invariant de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Alors il existe un ensemble fini d'au plus m fonctions bornées de $\mathcal{M}$, notées $F^1, \cdots, F^r$, telles que*

$$M = D_S(F^1) \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} D_S(F^r),$$

où $D_S(F)$ désigne le plus petit sous-espace doublement-invariant contenant F. De plus, si l'on considère le plus petit sous-espace réduisant contenant M, égal à $PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ où P est une fonction à valeur dans les projections, le rang de $P(\xi)$ est constant et est égal à r, pour tout $\xi \in \partial A$.

Ce chapitre se termine par l'application de ce théorème à l'étude des opérateurs non nécessairement bornés dont le graphe est invariant par le shift. Signalons qu'une caractérisation de ces opérateurs est particulièrement utile pour l'étude des systèmes linéaires.

Sous-espaces S^*-faiblement invariants de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$

Pour caractériser les sous-espaces invariants par S sur $H^2(A)$, la preuve de Hitt [19] commence par décrire une famille particulière de sous-espaces, les sous-espaces S^*-faiblement invariants. La preuve initiale utilise les noyaux reproduisants et une analyse fine des fonctions de $H^p(A)$. Sarason [36] a utilisé les espaces de De Branges–Rovnyak, sur lesquels nous reviendrons, pour éclaircir cette partie de la preuve de Hitt. Nakamura, dans [23, 24], utilise la théorie des dilatations isométriques d'une contraction et étudie la perturbation d'une isométrie par un opérateur de rang 1 pour retrouver le résultat de Hitt. Le chapitre 3 reprend les travaux de Nakamura et généralise la description à des sous-espaces S^*-faiblement invariants pour des fonctions à valeur vectorielle. Nous obtenons le résultat suivant (théorème 3.1.2) :

Théorème *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace S^*-faiblement invariant de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ et considérons $(w_1, \ldots, w_r)$ une base orthonormée de $W := \mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \cap zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m))$. Alors $\mathcal{F}$ se décompose sous la forme suivante :*

$$\mathcal{F} = F_0 \left(H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r) \ominus \phi H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^{r'}) \right),$$

où ϕ une fonction intérieure de $H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^{r'}, \mathbb{C}^r))$ s'annulant en zéro, $1 \leq r \leq r'$ et $F_0 = mat(w_1, \ldots, w_r)$.

De plus, la matrice F_0 et la fonction ϕ sont uniques à une équivalence unitaire près. Enfin, pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe $g \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$ tel que $f = F_0 g$ et

$$\|g\|_2 = \|f\|_2.$$

Nous obtenons aussi en particulier une expression de la dilatation isométrique minimale d'une isométrie perturbée par certains opérateurs de rang fini, garantissant que l'isométrie perturbée reste contractante (théorème 3.2.1).

Seconde partie : Espaces modèles de Sz-Nagy–Foias et de De Branges–Rovnyak

Dans cette seconde partie, le cadre général est celui des espaces de Sz-Nagy–Foias et de De Branges–Rovnyak. Si on se donne une fonction analytique, contractante $\Theta : \mathbb{D} \to$

$\mathcal{L}(E, E_*)$ (E, E_* deux espaces de Hilbert), on peut définir l'espace modèle associé à Θ par

$$\mathbf{H}_\Theta = \left(H^2(E_*) \oplus \overline{(I - \Theta^*\Theta)L^2(E)}\right) \ominus \{\Theta f \oplus (I - \Theta^*\Theta)^{1/2} f : f \in H^2(E)\}.$$

Cet espace intervient dans la modélisation d'une large classe de contractions qui a été initiée par Sz-Nagy–Foias. Dans le cas où Θ est intérieure, on peut identifier E et E_* et on retrouve les espaces $K_\Theta = H^2(E) \ominus \Theta H^2(E)$ qui sont les orthogonaux des sous-espaces S-invariant du théorème de Beurling.

D'autre part, si l'on désigne par T_Θ l'opérateur de Toeplitz de $H^2(E)$ dans $H^2(E_*)$ défini par

$$T_\Theta(f) = P_+(\Theta f) \qquad (f \in H^2(E)),$$

alors, l'espace de De Branges–Rovnyak, $\mathcal{H}(\Theta)$, associé à Θ, est constitué des fonctions de $H^2(E_*)$ qui appartiennent à l'image de l'opérateur $(Id - T_\Theta T_\Theta^*)^{1/2}$. On le munit du produit scalaire qui fait que $(Id - T_\Theta T_\Theta^*)^{1/2}$ est une isométrie partielle de $H^2(E_*)$ sur $\mathcal{H}(\Theta)$. Cet espace a été introduit par L. De Branges et J. Rovnyak pour la modélisation d'une certaine famille de paires de contractions.

Le premier chapitre de cette seconde partie traite des noyaux reproduisant dans les espaces de De Branges–Rovnyak. Le second chapitre traite des opérateurs complexes symétriques et on montre comment la fonction caractéristique de Sz-Nagy–Foias intervient naturellement dans l'étude de ces opérateurs.

Cette seconde partie est indépendante de la précédente. Pourtant, elles possèdent un certain nombre d'objets communs : la preuve de Hitt [19] utilise les noyaux reproduisants, et l'approche de Sarason pour compléter le travail de Hitt [36] repose sur les espaces de De Branges–Rovnyak.

Propriétés géométriques des noyaux reproduisants de $\mathcal{H}(b)$

La formule de Cauchy implique que :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - \lambda e^{-i\theta}}\, d\theta = \langle f, k_\lambda \rangle_2 \qquad (f \in H^2),$$

où, pour $z \in \mathbb{D}$, $k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$. On appelle k_λ le noyau reproduisant de H^2, associé à λ.

Une suite de Blaschke est une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) < +\infty$ et le produit de Blaschke B associé à la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est la fonction intérieure $B(z) = \Pi_{n\geq 0} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1-\bar{\lambda}_n z}$.

On sait que la suite $(\frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|})_{n\geq 0}$ est une base de Riesz de l'espace modèle K_B si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ satisfait la condition de Carleson.

Ces bases ont de multiples conséquences théoriques. Elles sont notamment liées au problème d'interpolation, aux bases d'exponentielles. D'autre part, ces bases ont aussi des conséquences plus appliquées, par exemple en théorie de l'échantillonage. On peut généraliser la notion de noyaux reproduisants aux espaces de Hardy à valeur vectorielle et aux espaces de De Branges–Rovnyak.

Le premier chapitre de cette partie est consacré aux propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisants dans les espaces de De Branges–Rovnyak de fonctions à valeur vectorielle. Nous allons caractériser pour quels paramètres $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ et $(e_n)_{n\geq 0}$ la suite de noyaux reproduisants normalisée $(x^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathcal{H}(b)$ forment une base de Riesz.

E. Fricain a répondu à cette question dans le cas où b est une fonction intérieure à valeur opératorielle et dans le cas où b est extrémale scalaire [12, 13]. Pourtant l'approche qu'il utilise ne s'adapte pas. Nous utiliserons le modèle fonctionnel de Sz.-Nagy–Foias pour contourner la difficulté. Après avoir mis en place le matériel employé, nous verrons que le problème revient à montrer l'inversibilité d'un opérateur qui identifie les noyaux reproduisants de l'espace de Hardy avec ceux de l'espace de De Branges–Rovnyak.

Pour énoncer le résultat principal, nous devons préciser quelques notations. Tout d'abord, rappelons que si S désigne le Shift sur $H^2(E_*)$, alors $S^*(x_{\lambda_n} e_n) = \overline{\lambda}_n x_{\lambda_n} e_n$. En particulier, span $(x_{\lambda_n} e_n : n \geq 1)$ est S^*-invariant et nous obtenons d'après le théorème de Lax-Halmos (voir [26, p. 17]) qu'il existe un sous-espace $F \subset E_*$ et une fonction intérieure $B \in H^\infty(F \to E_*)$ telle que

$$\text{span } (x_{\lambda_n} e_n : n \geq 1) = H^2(E_*) \ominus BH^2(F) = K_B.$$

Si $x \in F$ et P_x est la projection orthogonale sur le sous-espace porté par x, alors $h_x \in H^\infty(F \to F)$ est la fonction intérieure définie par

$$h_x(z) := zP_x + (Id - P_x), \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Nous définissons pour $\lambda \in \mathbb{D}$ et pour $r > 0$, le disque pseudo-hyperbolique

$$\Omega(\lambda, r) := \{z \in \mathbb{D} : |b_\lambda(z)| < r\}, \quad \text{où } b_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \overline{\lambda} z}.$$

Alors pour une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{D}$, nous posons

$$G(\Lambda, r) = \bigcup_{n\geq 1} \Omega(\lambda_n, r).$$

Pour $m \geq 1$, nous désignons par $G_m(\Lambda, r)$ les composantes connexes de l'ensemble $G(\Lambda, r)$ et nous écrivons

$$E_m(r) := \{n \geq 1 : \lambda_n \in G_m(\Lambda, r)\}.$$

Enfin si u est un vecteur d'un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ et si $\mathcal{F}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$, on notera par $\alpha(u, \mathcal{F})$ l'angle entre le vecteur u et le sous-espace $\mathcal{F}$.

Le résultat final est alors le suivant :

Théorème *Soient $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$,$(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de $\mathbb{D}$ et $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs unitaires de E_*. Supposons les hypothèses suivantes satisfaites : $N := dim\ E_* < +\infty$, avec de plus*

$$\sup_{n\geq 1} \|b(\lambda_n)^* e_n\| < 1,$$

et clos $(\Delta\, H^2(E))$ = clos $(\Delta\, L^2(E))$ où $\Delta = (Id - \mathbf{bb}^*)^{1/2}$. Alors, la suite $(x^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de son enveloppe linéaire fermée (resp. de $\mathcal{H}(b)$) si et seulement si :

(i) *la suite* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *est l'union d'au plus* N *suites de Carleson ;*

(ii) *il existe* $r > 0$ *tel que*

$$\inf_{m\geq 1} \min_{n\in E_m(r)} \alpha\left(e_n, span(e_p \ : p \in E_m(r), p \neq n)\right) > 0$$

(iii) $dist(B^*b, H^\infty(E \to F)) < 1$ *(resp. et aussi* $dist(h_x^* B^* b, H^\infty(E \to F)) = 1,\ \forall x \in F$*).*

Fonction caractéristique d'un opérateur complexe symétrique

La théorie des matrices symétriques est un des fondements de l'algèbre linéaire. On dit qu'une matrice M à coefficients complexes est complexe symétrique si elle coïncide avec sa transposée M^t. Les matrices complexes symétriques apparaissent naturellement dans différentes branches de mathématiques, comme dans les théories des fonctions [41], en analyse fonctionnelle [45] ou en théorie de l'élasticité [3, 38]... Dans ce chapitre, nous allons nous placer dans un espace de Hilbert complexe H, et nous nous intéresserons aux opérateurs pour lesquels il existe une base dans laquelle la matrice est symétrique. Nous nous détacherons du choix d'une base en nous préoccupant de l'opérateur plutôt que de sa représentation matricielle et nous verrons une définition plus intrinsèque pour définir les opérateurs complexes symétriques. L'intérêt pour l'étude de ces opérateurs a repris avec les travaux de S. Garcia [14, 15, 16]. En particulier, il s'est intéressé à l'exemple du shift sur un espace modèle K_Θ, pour une fonction intérieure Θ.

Dans ce chapitre, nous allons faire une étude approfondie de cet exemple et utiliser le matériel du modèle fonctionnel de Sz.-Nagy–Foias explicité au chapitre précédent pour établir une caractérisation des contractions complexes symétriques. Les espaces $\mathcal{D}_T := (Id - T^*T)^{1/2}H$ et $\mathcal{D}_{T^*}$ sont appelés les espaces de défaut (d'isométrie) de T. La fonction caractéristique $\Theta_T \in H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_T^*)$ d'une contraction complètement non-unitaire T est l'outil fondamentale de la théorie de Sz-Nagy–Foias. Cette fonction est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Theta_T \ : \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*}) \\ z & \longmapsto & -T + z(Id - T^*T)^{1/2}(1 - zT^*)^{-1}(Id - TT^*)^{1/2}|_{\mathcal{D}_{T^*}}. \end{array}$$

Nous obtiendrons un critère pour déterminer si une contraction est complexe symétrique à l'aide de sa fonction caractéristique :

Théorème *Soit* T *une contraction sur un espace de Hilbert* H*, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T *est complexe symétrique ;*
2. *il existe une application* $J : \mathcal{D}_T \longrightarrow \mathcal{D}_{T^*}$ *antilinéaire isométrique surjective telle que*

$$\Theta_T(z) = J\Theta_T(z)^* J, \forall z \in \mathbb{D}.$$

L'intérêt d'étudier la fonction caractéristique d'un opérateur plutôt que l'opérateur lui-même réside dans le fait que les espaces de défaut d'isométrie $\mathcal{D}_T$ et $\mathcal{D}_{T^*}$ peuvent être de petite dimension. Ainsi, nous utiliserons notre critère pour décrire le cas où ces dimensions sont plus petites que 2 et nous donnerons des exemples d'opérateurs qui sont, ou ne sont pas, complexes symétriques.

Première partie

Sous-espaces invariants du shift sur l'espace de Hardy d'un anneau

Chapitre 1

Espaces de Hardy sur un domaine circulaire quelconque G

Nous appellerons domaine circulaire un ouvert borné multiconnexe, à bords analytiques ayant un nombre fini de "trous". Le but de ce chapitre est de présenter les propriétés principales des espaces de Hardy définis sur un domaine circulaire à valeurs scalaires.

La première section rappelle brièvement la construction et les propriétés des espaces de Hardy du disque. La seconde généralise cette construction des espaces de Hardy sur un domaine circulaire et développe en particulier l'exemple de l'anneau $A := \{z : r_0 < |z| < 1\}$.

1.1 Construction des espaces de Hardy du disque

On note par $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, pour $p \in]0, \infty[$ et $r \in [0, 1[$, posons

$$M_p(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \text{ et } M_\infty(f, r) = \sup_{t \ \in [0,2\pi]} |f(re^{it})|.$$

Pour $0 < p \leq \infty$, l'espace de Hardy du disque noté $H^p(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telles que $\sup_{0<r<1} M_p(f, r) < \infty$. Ainsi, $H^\infty(\mathbb{D})$ n'est autre que l'ensemble des fonctions analytiques et bornées sur $\mathbb{D}$.

Comme pour $p \in]0, \infty[$, la fonction $|f|^p$ est sous-harmonique dès que $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, cela entraîne que pour $p \in]0, \infty]$, les fonctions $M_p(f, r)$ sont des fonctions croissantes en r. Par conséquent, pour $0 < p \leq \infty$, $H^p(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telles que $\lim_{r \to 1, r<1} M_p(f, r) < \infty$. La norme naturelle dont on munit $H^p(\mathbb{D})$ est

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \lim_{r \to 1, r<1} M_p(f, r)^{1/p} \text{ si } p \in]0, \infty[\text{ et } \|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = \lim_{r \to 1, r<1} M_\infty(f, r).$$

Pour tout $p \in [1, \infty]$, cette norme confère à $H^p(\mathbb{D})$ une structure d'espace de Banach. Comme conséquence du lemme de Fatou, les fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ possèdent une limite radiale dans $L^p(\mathbb{T})$, c'est-à-dire que pour presque tout $t \in [0, 2\pi[$, $\lim_{r \to 1} f(re^{it})$ existe et si l'on définit la fonction f^* par $f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1} f(re^{it})$, alors $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. De plus, on a l'égalité suivante :

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} := \|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Étant holomorphes, les fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ vérifient $\Delta f = 0$, où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. En notant $R(\mathbb{D})$ l'ensemble des fractions rationnelles à pôles en dehors du disque unité fermé $\bar{\mathbb{D}}$, on définit $H^p(\mathbb{T})$ comme la fermeture dans $L^p(\mathbb{T})$ de $R(\mathbb{D})$ (il est pratique d'employer un abus de langage en disant qu'une fonction de $L^p(\mathbb{T})$ "appartient à $R(\mathbb{D})$" si c'est la restriction d'une fonction de $R(\mathbb{D})$).

Pour une fonction $g \in H^p(\mathbb{T})$, le noyau de Poisson $P_r : t \mapsto Re\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right)$ permet de résoudre le problème de Dirichlet :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta f &=& 0 \\ \lim_{r\to 1^-} f(re^{it}) &=& g(e^{it}),\ \text{pour presque tout } t \in [0, 2\pi] \end{array}\right.$$

qui a pour solution

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt. \tag{1.1}$$

On peut vérifier que $f \in H^p(\mathbb{D})$ et que $f^* = g$.

On peut alors identifier isométriquement $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, au sens où l'on a construit un isomorphisme isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$.
Une définition équivalente de $H^p(\mathbb{T})$ est la suivante :

$$H^p(\mathbb{T}) := \left\{f^* \in L^p(\mathbb{T})|\ \widehat{f^*}(n) = 0, n < 0\right\}, \tag{1.2}$$

où $\widehat{f^*}(n)$ est le n^{eme} coefficient de Fourier de f^*.

Il existe enfin une autre façon de définir les espaces de Hardy du disque $H^p(\mathbb{D})$, où $p \in]0, \infty[$, à l'aide de majorants harmoniques.

$$H^p(\mathbb{D}) := \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \exists u_f \text{ harmonique telle que} |f(z)|^p \leq u_f(z),\ z \in \mathbb{D}\}. \tag{1.3}$$

Ces deux définitions sont équivalentes. En effet, pour $f \in H^p(\mathbb{D})$ et $f^* \in H^p(\mathbb{T})$ sa limite radiale, le plus petit majorant harmonique de $|f|^p$ existe et s'exprime à l'aide du noyau de Poisson :

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)|f^*(e^{it})|^p\ dt.$$

Réciproquement, si f possède un majorant harmonique, d'après le principe du maximum,

$$sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p\ dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_f(e^{it}) dt < \infty.$$

Dans le cas du disque, on appelle fonction intérieure une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ dont la limite radiale est de module 1 presque partout. Les produits de Blaschke élémentaires

$b_\lambda(z) := \frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}$ sont des exemples de fonctions intérieures. Une fonction extérieure F est une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ de la forme

$$F(z) = c \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \varphi(e^{it}) dt\right) \tag{1.4}$$

où $|c| = 1$ et φ est une fonction positive mesurable telle que $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Les fonctions extérieures ne s'annulent donc pas et vérifient

$$|F^*(e^{it})| = \varphi(e^{it}),\ \text{mpp } e^{it} \in \mathbb{T}, \tag{1.5}$$

où mpp $e^{it} \in \mathbb{T}$ signifie pour presque tout $e^{it} \in \mathbb{T}$ relativement à la mesure de Lebesgue sur le cercle unité.

Pour toute fonction $f \in H^p(\mathbb{D})$, de limite radiale f^*, il existe une factorisation en un produit de fonctions intérieure et extérieure. Notons

$$E(f) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} log|f(e^{it})| dt\right),$$

la fonction extérieure de même module que f^*, unique à une constante unimodulaire près. Comme $I(f) := f/E(f)$ est holomorphe, et sa limite radiale est de module 1 presque partout, $I(f)$ est une fonction intérieure qui a les mêmes zéros que f. Toute fonction de $H^p(\mathbb{D})$ peut se factoriser de façon unique à multiplication par les constantes unimodulaires près :

$$f := cI(f)E(f),\ \text{où } |c| = 1. \tag{1.6}$$

On peut préciser davantage la structure de $I(f)$. Soit $(\lambda_n)_n$ la suite éventuellement finie des zéros de f. Alors nécessairement cette suite vérifie la condition (dite de Blaschke)

$$\sum_{n\geq 0}(1 - |\lambda_n|) < \infty,$$

ce qui force les zéros d'une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ à se rapprocher rapidement du bord du disque et ce qui implique que le produit de Blaschke associés à la suite des zéros de f

$$B(z) := z^m \prod_{\lambda_n \neq 0} \frac{-\bar{\lambda}_n}{|\lambda_n|} \frac{z-\lambda_n}{1-\bar{\lambda}_n z}$$

converge. De plus, il existe une mesure positive ν étrangère à la mesure de Lebesgue telle que :

$$I(f) = \left(\prod_{n\geq 0} \frac{z-\lambda_n}{1-\bar{\lambda}_n z}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t)\right).$$

La fonction intérieure $I(f)$ contient les informations sur la répartition des zéros de f. Les limites radiales de la fonction extérieure $E(f)$ et de f sont de même module presque partout. Cette factorisation est unique aux constantes unimodulaires près.

1.2 Espaces de Hardy sur un domaine circulaire

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre les étapes de construction de $H^p(\mathbb{D})$ et les adapter à la construction de $H^p(A)$, où A est l'anneau $\{z \in \mathbb{C} \ : r_0 < |z| < 1\}$. Il existe une généralisation des espaces de Hardy pour des fonctions holomorphes définies sur Ω, un domaine circulaire. Royden a décrit les principales propriétés de ces fonctions, le lien avec leurs limites radiales et la décomposition intérieure-extérieure dans [33]. On pourra aussi consulter [21].

La définition de $H^p(\Omega)$ reprend la définition de la formule (1.3). On définit $H^p(\Omega)$ comme étant l'ensemble des fonctions f holomorphes sur Ω telles que $|f|^p$ possède un majorant harmonique. Notons Γ le bord de Ω. L'espace $H^p(\Gamma)$ est la fermeture dans $L^p(\Gamma)$ de l'ensemble des fractions rationnelles à pôles dans le complémentaire de Ω dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ noté $R(\Omega)$. Là encore, il est pratique d'employer un abus de langage en disant qu'une fonction de $L^p(\Gamma)$ "appartient à $R(\Omega)$" si c'est la restriction d'une fonction de $R(\Omega)$. L'espace $H^p(\Gamma)$ est muni de la norme induite par $L^p(\Gamma)$.

Comme $f \in H^p(\Omega)$ implique que $|f|^p$ est majoré par une fonction harmonique, les fonctions de $H^p(\Omega)$ possèdent une limite non-tangentielle en presque tout point du bord de Γ. D'après le théorème de Runge ([34]), l'enveloppe linéaire des fractions rationnelles dont les pôles sont dans le complémentaire de $\bar{\Omega}$, est dense dans $\mathcal{H}ol(\Omega)$ pour la norme de la convergence uniforme. Ainsi, toute fonction $f \in H^p(\Omega)$ a une limite non-tangentielle f^*, et $f^* \in H^p(\Gamma)$. Pour montrer que toute fonction de $H^p(\Gamma)$ est la limite radiale d'une fonction de $H^p(\Omega)$, nous utiliserons la fonction de Green associée au domaine Ω, dont la dérivée normale permet de généraliser le noyau de Poisson sur le disque.

Définition 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et p un point de Ω. Une fonction $z \mapsto g(z;p,\Omega)$ est une fonction de Green sur Ω de pôle p si :*

1. *$z \longmapsto g(z;p,\Omega)$ est harmonique sur $\Omega \setminus \{p\}$.*
2. *Si $p \neq \infty$, $z \longmapsto g(z;p,\Omega) + log|z-p|$ est harmonique au voisinage de p.*
   Si $p = \infty$, $z \longmapsto g(z;p,\Omega) - log|z|$ est harmonique au voisinage de ∞.
3. *Les limites au bords de $g(z;p,\Omega)$ existent et sont nulles :*

$$\lim_{z\to\xi,\ z\in\Omega} g(z;p,\Omega) = 0,\ \xi \in \partial\Omega$$

La nature géométrique des domaines circulaires, en particulier l'analyticité de ses bords, assure l'existence de la fonction de Green en tout point de l'ouvert. Ce résultat est démontré dans [5] page 392 à 410 ou [10] page 172, et utilise la formule de Green-Riemann et le principe de réflexion de Schwarz.

A toute fonction à valeurs continues sur $\partial\Omega$, on peut associer $\tilde{u}$ la solution au problème de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\tilde{u} & = & 0 \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} & = & u \end{array} \right.$$

Comme l'application $u \mapsto \tilde{u}(p)$ est une forme linéaire continue, d'après le théorème de Riesz, il existe une unique mesure réelle w_p telle que

$$\tilde{u}(p) = \int_{\partial\Omega} u \, dw_p, \quad \forall u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$$

Cette mesure est positive, de masse totale 1. On l'appelle mesure harmonique de $\partial\Omega$ en p.

Théorème 1.2.1 ([5] page 404) *Soit Ω un domaine circulaire. Pour chaque point $p \in \Omega$, on a*

$$dw_p(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n} g(z; p, \Omega) \; ds$$

où $z \longmapsto g(z; p, \Omega)$ est la fonction de Green sur Ω de pôle p, $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée directionnelle selon le vecteur normal à $\partial\Omega$ et ds la mesure de longueur d'arc.

La fonction positive $\xi \longmapsto P(\xi, p) := -\frac{l}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n} g(\xi; p, \Omega)$, où l est la longueur de $\partial\Omega$, est l'analogue du noyau de Poisson pour des domaines circulaires. A toute fonction $f^* \in H^p(\Gamma)$, on peut donc associer une fonction $f \in H^p(\Omega)$ via le noyau de Poisson généralisé, analogue de la formule (1.1). La fonction :

$$f : z \mapsto -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} f^*(\xi)\frac{\partial}{\partial n} g(\xi, z; \Omega) ds(\xi),$$

est la solution du problème de Dirichlet sur Ω avec comme condition limite au bord f^*. La fonction $|f|^p$ est majorée par la fonction harmonique

$$u_f : z \mapsto -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} |f^*(\xi)|^p \frac{\partial}{\partial n} g(\xi, z; \Omega) ds(\xi),$$

ainsi $f \in H^p(\Omega)$. Il existe une identification naturelle entre $H^p(\Omega)$ et $H^p(\Gamma)$. La norme sur $H^p(\Omega)$ est

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} := \|f^*\|_{L^p(\Gamma)},$$

pour laquelle cet espace est un Banach lorsque $p \in [1, \infty]$.

Dans un souci de clarté et de concision, nous allons restreindre notre étude au cas de l'anneau. Commençons par donner un lemme spécifique au cas de l'anneau, utile par la suite.

Comme en (1.2), il existe une caractérisation des fonctions $H^p(\partial A)$ à l'aide des coefficients de Fourier des restrictions $f^*|_{\mathbb{T}}$ et $f^*|_{r_0\mathbb{T}}$.

Lemme 1.2.1 (Sarason, Lemme 1 de [35]) *Une fonction $f^* \in L^p(\partial A)$ est dans $H^p(\partial A)$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\int_0^{2\pi} f^*(r_0 e^{it}) e^{-int} \; dt = r_0^n \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) e^{-int} \; dt.$$

Nous allons maintenant définir les fonctions intérieures, extérieures et énoncer la propriété de factorisation des fonctions de $H^p(A)$. Les démonstrations dans le cas d'un domaine circulaire sont données par Royden ([33]).

Définition 1.2.2

- *On dit qu'une fonction f de $H^\infty(A)$ est intérieure si les restrictions $f^*|_{\mathbb{T}}$ et $f^*|_{r_0\mathbb{T}}$ sont de module constant presque partout.*
- *Une fonction extérieure ϕ est une fonction de $H^p(A)$ telle que :*

$$\log|\phi(z)| = \int_{\partial A} \log|\phi^*(\xi)| \frac{\partial g(\xi, z; A)}{\partial n}\, ds(\xi)$$

  où $\xi \longmapsto g(\xi, z; A)$ est la fonction de Green normalisée pour que la longueur de ∂A soit 1.
- *Une fonction de $H^p(A)$ est appelée unité si elle est en même temps intérieure et extérieure.*

La définition des fonctions extérieures est analogue à celle du disque (1.4).

Dans le cas cas de l'anneau, les fonctions $z \mapsto z^k,\ k \in \mathbb{Z}$ sont des unités, comme elles sont constantes sur chacun des cercles et elles engendrent $H^2(A)$.

Les formules explicites de la fonction de Green dans le cas de l'anneau fournies par Villat puis Komatu ([44, 22]) sont complexes et difficilement exploitables. En particulier, aucune formule explicite d'un produit de Blaschke élémentaire dans $H^\infty(A)$ n'est donnée.

Contrairement au cas du disque, si $f \in H^2(\partial A)$ on ne peut pas toujours trouver ϕ extérieure telle que $|\phi^*| = |f^*|$ presque partout sur ∂A. L'alternative possible choisie par Royden est de définir v sur A de la façon suivante :

$$v(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial A} \log|f^*(\xi)| \frac{\partial g(\xi, z; A)}{\partial n}\, ds(\xi).$$

Cette fonction est harmonique réelle et on peut trouver une constante c et une fonction harmonique réelle h telles que

$$\psi(z) := v(z) - c\log|z| + i\ h(z)$$

soit holomorphe. Le terme $\log|z|$ est nécessaire, l'anneau n'étant pas simplement connexe. La fonction ϕ définie par $\phi(z) := exp(\psi(z))$ est extérieure par définition et ses limites radiales vérifient

$$|\phi^*(\xi)| = \frac{|f^*(\xi)|}{|\xi|^c},\ \text{mpp}\ \xi \in \partial A,$$

formule analogue à (1.5) dans le cas du disque.

Comme $\frac{|f|}{|\phi|}$ a ses limites radiales de module constant sur chaque bord, f/ϕ est intérieure et a les même zéros que f, ϕ ne s'annulant pas sur A.

Ainsi, on retrouve une factorisation du même type que l'égalité (1.6). Toute fonction de $H^p(A)$ peut se décomposer comme le produit d'une fonction intérieure et d'une fonction extérieure, et ce produit est unique à multiplication par les fonctions unités près.

Mentionnons enfin que Sarason [35] choisit une approche différente. Il permet aux fonctions d'être multivaluées, mais impose aux fonctions intérieures d'être de module 1 sur tous les bords.

Pour la suite, l'identification entre $H^p(A)$ et $H^p(\partial A)$ nous conduit à noter indifféremment la fonction $f \in H^p(A)$ et sa limite radiale dans $H^p(\partial A)$.

Chapitre 2

Sous-espaces invariants pour le shift sur $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ et $H^2(A, \mathbb{C}^m)$

2.1 Présentation du problème et notations

Le but de ce chapitre est d'étudier le shift, opérateur de multiplication par la variable indépendante z sur l'espace de Hardy de l'anneau $A := \{z : r_0 < |z| < 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^m$. Il s'agit essentiellement de généraliser dans le cas vectoriel les travaux de Sarason [35]. Les contributions de Royden [33], Hitt [19] et Yakubovitch [46] concernent les sous-espaces invariants pour le shift d'espaces de Hardy généraux à valeurs scalaires. Le cas vectoriel n'a pas été considéré et présente des difficultés propres. La description de ces sous-espaces particuliers dans le cas vectoriel a des applications, pour caractériser les graphes d'opérateurs fermés, éventuellement non bornés, invariants pour le shift.

Nous noterons S l'opérateur sur $L^p(\partial A)$ de multiplication par la variable indépendante z. Un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A)$ est dit *invariant* pour S si $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, *doublement-invariant* pour S si $\mathcal{M}$ est invariant pour S et S^{-1} et *réduisant* pour S si $\mathcal{M}$ est invariant pour S et S^*.

Pour $f \in L^2(\partial A)$,

1. $I_S[f]$ représente le plus petit sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A)$ contenant f et invariant pour S.
2. $D_S[f]$ représente le plus petit sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A)$ contenant f et doublement-invariant pour S.
3. $R_S[f]$ représente le plus petit sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A)$ contenant f et réduisant pour S.

En d'autres mots,

$$\begin{aligned}
I_S[f] &= \mathrm{Span}\{S^n f : n \geq 0\} \\
D_S[f] &= \mathrm{Span}\{S^n f : n \in \mathbb{Z}\} \\
R_S[f] &= \mathrm{Span}\{p(S, S^*) f : p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]\},
\end{aligned}$$

où Span est l'enveloppe linéaire fermée.

Si $\mathcal{N}$ est un ensemble de fonctions $I_S(\mathcal{N})$ (resp. $D_S(\mathcal{N})$ et $R_S(\mathcal{N})$) représente le plus petit sous-espace fermé contenant $I_S(f)$ (resp. $D_S(f)$ et $R_S(f)$) pour tout $f \in \mathcal{N}$.

Comme $L^2(\partial A) = L^2(\mathbb{T}) \oplus L^2(r_0\mathbb{T})$, on notera $f = f_1 \oplus f_0$ avec $f_1 \in L^2(\mathbb{T})$ et $f_0 \in L^2(r_0\mathbb{T})$. On peut alors exprimer facilement les opérateurs S, S^{-1} et S^* :

$$\begin{array}{l} Sf = g_1 \oplus g_0 \text{ où } g_1(e^{it}) = e^{it} f_1(e^{it}) \text{ et } g_0(r_0 e^{it}) = r_0 e^{it} f_0(r_0 e^{it}) \\ S^{-1} f = h_1 \oplus h_0 \text{ où } h_1(e^{it}) = e^{-it} f_1(e^{it}) \text{ et } h_0(r_0 e^{it}) = \frac{1}{r_0} e^{-it} f_0(r_0 e^{it}) \\ S^* f = k_1 \oplus k_0 \text{ où } k_1(e^{it}) = e^{-it} f_1(e^{it}) \text{ et } k_0(r_0 e^{it}) = r_0 e^{-it} f_0(r_0 e^{it}). \end{array}$$

On déduit de ces égalités que S, S^* et S^{-1} commutent et que :

$$R_S[f] = \mathrm{Span}\{S^n S^{*m} f : n, m \geq 0\}.$$

On noter χ_E la fonction indicatrice de l'ensemble mesurable E.

Nous utilisons des notations analogues pour les versions vectorielles ; en général nous utiliserons des minuscules pour les fonctions à valeurs scalaires et des capitales pour les fonctions à valeurs vectorielles.
Le chapitre s'organise comme suit. Tout d'abord nous établissons un résultat de type Wiener (Section 2.2) qui caractérise les sous-espaces réduisants du shift du $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Dans la Section 2.3 nous donnons une description de tous les sous-espaces invariants ou doublement-invariants engendrés par une unique fonction. Nos résultats sont résumés par des tableaux en fin de section. Enfin, la dernière section établit le principal résultat de ce chapitre, à savoir le fait que tout sous-espace $\mathcal{M}$ doublement-invariant de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ est la somme orthogonale d'au plus m sous-espaces de $\mathcal{M}$, chacun étant engendré par une seule fonction. Comme corollaire nous obtenons qu'un sous-espace $\mathcal{M}$ doublement-invariant de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ qui de plus est le graphe d'un opérateur (non nécessairement borné) est engendré par une unique fonction. L'utilisation de l'analyticité est essentielle dans la preuve de notre théorème principal et par conséquent la description des sous-espaces doublement-invariants de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ reste ouverte. Nous donnons un résultat partiel dans cette direction pour les graphes d'opérateurs.

2.2 Sous-espaces réduisants

Dans le cas scalaire, Sarason caractérise les sous-espaces réduisants pour S de $L^2(\partial A)$ en utilisant le théorème de Wiener qui affirme que tout sous-espace réduisant de $L^2(\mathbb{T})$ est de la forme $\chi_E L^2(\mathbb{T})$ pour un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{T}$ (cf. [18, 28, 31]).

Théorème 2.2.1 *[35, p. 52] Un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A)$ est réduisant pour S si et seulement si $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\partial A)$ pour un ensemble mesurable $E \subset \partial A$.*

Preuve : Il est clair que $\chi_E L^2(\partial A)$ est réduisant pour S. Pour $f_1 \oplus f_0 \in L^2(\mathbb{T}) \oplus L^2(r_0\mathbb{T})$, on a :

$$\frac{r_0^2 Id - SS^*}{r_0^2 - 1}(f_1 \oplus f_0) = f_1 \oplus 0 \text{ et } \frac{SS^* - Id}{r_0^2 - 1}(f_1 \oplus f_0) = 0 \oplus f_0.$$

ce qui signifie que $P_{L^2(\mathbb{T})} \oplus 0$ et $0 \oplus P_{L^2(r_0\mathbb{T})}$ (où $P_{L^2(r\mathbb{T})}$ est la projection orthogonale de $L^2(\partial A)$ sur $L^2(r\mathbb{T})$, pour $r \in \{r_0, 1\}$) sont des combinaisons linéaires de Id et SS^*. En particulier, $P_{L^2(r\mathbb{T})}\mathcal{M}$ est aussi réduisant pour S sur $L^2(r\mathbb{T})$, avec $r \in \{r_0, 1\}$. Ainsi, si $\mathcal{M}$ est un sous-espace réduisant pour S alors

$$P_{L^2(\mathbb{T})}\mathcal{M} \oplus P_{L^2(r_0\mathbb{T})}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

Comme l'inclusion réciproque est vraie pour tout sous-espace $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M}$ est réduisant pour S, on a aussi :

$$P_{L^2(\mathbb{T})}\mathcal{M} \oplus P_{L^2(r_0\mathbb{T})}\mathcal{M} = \mathcal{M}.$$

D'après le théorème de Wiener 2.2.1, $P_{L^2(r\mathbb{T})}\mathcal{M} = \chi_{E_r} L^2(r\mathbb{T})$ pour un sous-ensemble mesurable $E_r \subset r\mathbb{T}$. Finalement on obtient $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\partial A)$ où $E = E_1 \cup E_0$.

□

Nous pouvons maintenant aborder le cas vectoriel. Au lieu de disposer de fonctions caractéristiques prenant leurs valeurs dans $\{0; 1\}$ presque partout, le cas vectoriel nécessite de considérer les fonctions à valeurs dans les projections orthogonales sur $\mathbb{C}^m$. Plus précisément, $P : r\mathbb{T} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ est une *fonction mesurable à valeurs dans les projections* si elle vérifie :

- Pour presque tout $re^{iw} \in r\mathbb{T}$, $P(re^{iw})$ est une projection orthogonale de $\mathbb{C}^m$ sur un sous-espace $\mathcal{I}(re^{iw})$.
- L'application $w \to \langle P(re^{iw})x, y\rangle$ est mesurable pour tous $x, y \in \mathbb{C}^m$.

Comme $P(re^{iw})$ peut être considéré comme une fonction à valeurs matricielles $m \times m$, le second point revient à dire que $P \in L^\infty(r\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^m))$.

Nous allons donner une version du théorème de Wiener adaptée au cas vectoriel (voir [31, Thm. 3.1.6] et [18]).

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soient $r > 0$, $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé de $L^2(r\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ et $S \in \mathcal{L}(L^2(r\mathbb{T}), \mathbb{C}^m)$ défini par $Sf(re^{it}) = re^{it} f(re^{it})$. Alors $\mathcal{M}$ est doublement-invariant ou réduisant sur $L^2(r\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ si et seulement si $\mathcal{M} = PL^2(r\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ où P est une fonction mesurable sur $r\mathbb{T}$ à valeurs dans les projections.*

Preuve : L'espace $L^2(r\mathbb{T})$ est unitairement équivalent à $L^2(\mathbb{T})$ par un simple changement de variables, pour lequel l'opérateur S on $L^2(r\mathbb{T})$ est unitairement équivalent à l'opérateur rS on $L^2(\mathbb{T})$. Ils ont les mêmes sous-espaces réduisants que le shift bilatéral de $L^2(\mathbb{T})$, et le résultat est une conséquence du théorème de Wiener.

□

Nous obtenons alors le résultat suivant sur $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$.

Théorème 2.2.2 *Un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ est réduisant pour S si et seulement si $\mathcal{M} = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, où P est une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur ∂A.*

Preuve : Il est clair que $PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ est un sous espace réduisant pour S. Remarquons que pour $F_1 \oplus F_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$, on a :

$$\frac{r_0^2 Id - SS^*}{r_0^2 - 1}(F_1 \oplus F_0) = F_1 \oplus 0 \quad \text{et} \quad \frac{SS^* - Id}{r_0^2 - 1}(F_1 \oplus F_0) = 0 \oplus F_0.$$

Ainsi les projections $P_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)} \oplus 0$ et $0 \oplus P_{L^2(r_0\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}$ (où $P_{L^2(r\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}$ est la projection orthogonale de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ sur $L^2(r\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$, pour $r \in \{r_0, 1\}$) sont des combinaisons linéaires de Id et SS^*. En particulier, $P_{L^2(r\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}\mathcal{M}$ est aussi un sous-espace réduisant pour S dans $L^2(r\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$, avec $r \in \{r_0, 1\}$. Ainsi, si $\mathcal{M}$ est réduisant, alors

$$P_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}\mathcal{M} \oplus P_{L^2(r_0\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

Comme l'inclusion réciproque est vraie pour tout sous-espace $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M}$ est réduisant, alors

$$P_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}\mathcal{M} \oplus P_{L^2(r_0\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}\mathcal{M} = \mathcal{M}.$$

D'après le lemme 2.2.1, pour $r = r_0$ et $r = 1$, $P_{L^2(r\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}\mathcal{M} = P_r L^2(r\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ pour une fonction à valeurs dans les projections P_r définie sur $r\mathbb{T}$. Ainsi, $\mathcal{M} = PL^2(\partial A)$ où $P(re^{iw}) = P_r(re^{iw})$ pour $r = r_0$ et $r = 1$.

□

Corollaire 2.2.3 *Soit $F \in L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Alors*

$$R_S(F) = \{G \in L^2(\partial A, \mathbb{C}^m) : G(\xi) \in \mathrm{Span}(F(\xi)) \textit{ pour presque tout } \xi \in \partial A\}.$$

Preuve : Ce corollaire est une conséquence directe du théorème 2.2.2, en observant que l'image de $P(\xi)$ doit correspondre à l'enveloppe linéaire engendrée par $F(\xi)$, pour presque tout ξ.

□

2.3 Sous-espaces invariants et doublement-invariants engendrés par une fonction

La notion centrale pour classer les différentes descriptions que nous obtenons est la log-intégrabilité.

Définition 2.3.1 *Soient $r > 0$ et $F \in L^2(r\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$. On dit que F est log-intégrable sur $r\mathbb{T}$ si $\int_0^{2\pi} \log \|F(re^{it})\|_{\mathbb{C}^m} dt$ existe.*

La proposition suivante montre comment modifier le générateur d'un sous-espace invariant ou doublement-invariant avec l'hypothèse de log-intégrabilité.

Proposition 2.3.1 *Soit $F_1 \oplus F_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ telle que F_1 est log-intégrable sur $\mathbb{T}$. Alors on a :*

$$I_S(F_1 \oplus F_0) = I_S\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right) \text{ et } D_S(F_1 \oplus F_0) = D_S\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right),$$

où u_1 est une fonction extérieure de $H^2(\mathbb{D})$ telle que $|u_1(e^{it})| = \|F_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

Preuve :

Comme u_1 une fonction extérieure scalaire de $H^2(\mathbb{D})$, d'après le théorème de Beurling , il existe une suite de polynômes $(p_n)_n$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \|u_1 p_n - \mathbb{1}\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0,$$

où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{T}$. Comme $\frac{F_1}{u_1} \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$, on obtient que :

$$\left\|(u_1 p_n - \mathbb{1})\frac{F_1}{u_1}\right\|_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)} = \left\|p_n F_1 - \frac{F_1}{u_1}\right\|_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. De plus, $\lim_{n\to\infty} \|u_1 p_n - \mathbb{1}\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ implique que $\lim_{n\to\infty} \|u_1 p_n - \mathbb{1}\|_{L^\infty(r_0\mathbb{T})} = 0$.

Comme u_1 est extérieure, $\frac{1}{u_1} \in L^\infty(r_0\mathbb{T})$ et donc $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{u_1 p_n - \mathbb{1}}{u_1}\right\|_{L^\infty(r_0\mathbb{T})} = 0$. On en déduit que

$$\left\|\left(\frac{u_1 p_n - \mathbb{1}}{u_1}\right) F_0\right\|_{L^2(r_0\mathbb{T})} = \left\|p_n F_0 - \frac{F_0}{u_1}\right\|_{L^2(r_0\mathbb{T})}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. De plus, on a :

$$I_S\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right) \subset I_S(F_1 \oplus F_0) \text{ et } D_S\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right) \subset D_S(F_1 \oplus F_0).$$

Pour prouver l'inclusion inverse, remarquons que $u_1 \in H^2(\mathbb{D})$, donc il existe une suite de polynômes $(q_n)_n$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|u_1 - q_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$. Comme $\frac{F_1}{u_1} \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$, on a :

$$\left\|(u_1 - q_n)\frac{F_1}{u_1}\right\|_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)} = \left\|F_1 - q_n\frac{F_1}{u_1}\right\|_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Enfin, $\lim_{n\to\infty} \|u_1 - q_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ implique que $\lim_{n\to\infty} \|u_1 - q_n\|_{L^2(r_0\mathbb{T})} = 0$, et donc $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{u_1 - q_n}{u_1}\right\|_{L^2(r_0\mathbb{T})} = 0$, car u_1 est bornée inférieurement sur $r_0\mathbb{T}$. On en déduit que

$$\left\|\left(\frac{u_1 - q_n}{u_1}\right) F_0\right\|_{L^2(r_0\mathbb{T})} = \left\|F_0 - \frac{q_n F_0}{u_1}\right\|_{L^2(r_0\mathbb{T})}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ceci montre l'inclusion et achève la preuve de la proposition.

$\square$

L'énoncé dual de cette proposition est le suivant :

Proposition 2.3.2 *Soit $F_1 \oplus F_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ tel que F_0 est log-intégrable sur $r_0\mathbb{T}$. Alors on a :*

$$I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = I_{S^{-1}}\left(\frac{F_1}{u_0} \oplus \frac{F_0}{u_0}\right) \text{ et } D_S(F_1 \oplus F_0) = D_S\left(\frac{F_1}{u_0} \oplus \frac{F_0}{u_0}\right),$$

où u_0 est une fonction extérieure de $H^2(\widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{r_0\mathbb{D}})$ telle que $|u_0(r_0e^{it})| = \|F_0(r_0e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$ presque partout sur $r_0\mathbb{T}$.

Preuve : Soit $G_1(e^{it}) = F_0(r_0e^{-it})$ et $G_0(r_0e^{it}) = F_1(e^{-it})$. En considérant l'application $\Psi : L^2(\partial A, \mathbb{C}^m) \to L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ définie par $\Psi(F_1 \oplus F_0) = G_1 \oplus G_0$ et en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition précédente on obtient l'égalité souhaitée.

$\square$

En combinant ces deux premiers résultats, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.3.3 *Soit $F_1 \oplus F_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ telle que F_1 est log-intégrable sur $\mathbb{T}$ et F_0 est log-intégrable sur $r_0\mathbb{T}$. Alors il existe une fonction $W_1 \oplus W_0 \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^\infty(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ telle que $\|W_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m} = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, $\frac{1}{\|W_0\|_{\mathbb{C}^m}} \in L^\infty(r_0\mathbb{T})$ et vérifiant :*

$$D_S(F_1 \oplus F_0) = D_S(W_1 \oplus W_0) = H^2(\partial A)(W_1 \oplus W_0).$$

Preuve : D'après la proposition 2.3.2, le sous-espace doublement-invariant pour S généré par $F_1 \oplus F_0$ est égal à celui engendré par $\frac{F_1}{u_0} \oplus \frac{F_0}{u_0}$, où u_0 est une fonction scalaire extérieure de $H^2(\widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{r_0\mathbb{D}})$ telle que $|u_0(r_0e^{it})| = \|F_0(r_0e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$ presque partout sur $r_0\mathbb{T}$. Remarquons que comme u_0 est extérieure, $\frac{F_1}{u_0}$ est aussi log-intégrable sur $\mathbb{T}$ dès que F_1 l'est. D'après la proposition 2.3.1, le sous-espace doublement-invariant pour S engendré par $\frac{F_1}{u_0} \oplus \frac{F_0}{u_0}$ est égal à celui engendré par $W_1 \oplus W_0$ où $W_1 = \frac{F_1}{u_0u_1}$ et $W_0 = \frac{F_0}{u_0u_1}$, avec u_1 une fonction scalaire extérieure sur $\mathbb{T}$ vérifiant $|u_1(e^{it})| = \frac{\|F_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}}{|u_0(e^{it})|}$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Comme u_1 et $\frac{1}{u_1}$ sont dans $L^\infty(r_0\mathbb{T})$, W_0 vérifie les conditions demandées.

Il reste à montrer que : $D_S(W_1 \oplus W_0) = H^2(\partial A)(W_1 \oplus W_0)$. Une reformulation du lemme 1.2.1 est que $H^2(\partial A) = D_S(\mathbb{1})$. Ainsi,

$$H^2(\partial A)(W_1 \oplus W_0) \subset D_S(W_1 \oplus W_0).$$

Considérons $T : L^2(\partial A) \to L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ défini par $Tf = f(W_1 \oplus W_0)$. Comme $\|W_1\|_{\mathbb{C}^m}$ et $\|W_0\|_{\mathbb{C}^m}$ sont essentiellement bornées supérieurement et inférieurement sur $\mathbb{T}$ et $r_0\mathbb{T}$, l'opérateur T est borné et inférieurement borné. On en déduit que son image $TH^2(\partial A) = H^2(\partial A)(W_1 \oplus W_0)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Par minimalité de D_S, l'inclusion réciproque est vraie, d'où l'égalité.

□

Dans le cas où l'hypothèse de log-intégrabilité porte sur F_1, on dispose du résultat suivant pour décrire le plus petit sous-espace fermé invariant pour S généré par $F_1 \oplus F_0$.

Proposition 2.3.4 *Soit* $F_1 \oplus F_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$.

1. *Si* F_1 *est log-intégrable sur* $\mathbb{T}$, *alors*
$$I_S(F_1 \oplus F_0) = H^2(\mathbb{D}) \left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1} \right),$$
où u_1 *est une fonction à valeurs scalaires extérieure sur* $\mathbb{T}$ *vérifiant*
$$|u_1(e^{it})| = \|F_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m} \text{ presque partout sur } \mathbb{T}.$$

2. *Si* F_1 *n'est pas log-intégrable sur* $\mathbb{T}$, *alors*
$$I_S(F_1 \oplus F_0) = R_S(F_1) \oplus I_S(F_0).$$

Preuve : 1. D'après la proposition 2.3.1, $I_S(F_1 \oplus F_0) = I_S\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right)$. Comme $\frac{F_1}{u_1} \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ et $f_{|r_0\mathbb{T}} \in L^\infty(r_0\mathbb{T})$ comme $f \in H^2(\mathbb{D})$, $I_S\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right)$ contient le sous-espace invariant pour S défini par $H^2(\mathbb{D})\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right)$. De plus $H^2(\mathbb{D})\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right)$ est fermé dans $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ comme l'image du sous-espace fermé $H^2(\mathbb{D})$ par l'opérateur borné inférieurement T défini par $T : H^2(\mathbb{D}) \to L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, $Tf = f\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right)$. On en déduit que
$$I_S(F_1 \oplus F_0) = I_S\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right) = H^2(\mathbb{D})\left(\frac{F_1}{u_1} \oplus \frac{F_0}{u_1}\right).$$

2. Soit $H_1 \oplus H_0$ dans $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ l'orthogonal de $I_S(F_1 \oplus F_0)$, ce que l'on peut écrire ainsi :
$$\langle H_1, e^{int}F_1\rangle_{\mathbb{T}} + \langle H_0, r_0^n e^{int} F_0\rangle_{r_0\mathbb{T}} = 0, \ n \geq 0. \tag{2.1}$$
On en déduit que $\langle H_1, e^{int}F_1\rangle_{\mathbb{T}} = O(r_0^n)$, $n \geq 0$. Si l'on note f_1 la fonction à valeurs scalaires sur $\mathbb{T}$ définie par $\langle F_1, H_1\rangle_{\mathbb{T}}$, alors f_1 s'étend en une fonction de $H^1(\mathbb{T} \cup r\mathbb{T})$ où $r_0 < r < 1$. Soit f_r la fonction de $L^2(r\mathbb{T})$ (et donc dans $L^1(r\mathbb{T})$) définie par $f_r(re^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n \widehat{f_1}(n)e^{int}$. Alors $f_1 \oplus f_r \in H^1(\mathbb{T} \cup r\mathbb{T})$ d'après le lemme 1.2.1. Ceci implique que $f_1 = \langle F_1, H_1\rangle_{\mathbb{T}}$ est log-intégrable, et donc comme $\log|f_1(e^{it})| \leq \log\|F_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m} + \log\|H_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$, ceci contraint F_1 à être log-intégrable, d'où la contradiction.

Ainsi, f_1 est la fonction identiquement nulle et
$$\langle H_1, z^n F_1\rangle_{\mathbb{T}} = 0, \ n \in \mathbb{Z}.$$

D'après (2.1), on a $\langle H_0, z^n F_0\rangle_{\mathbb{T}} = 0$ pour tout $n \geq 0$. Enfin, $H_1 \oplus H_0$ est orthogonal à $R_S(F_1) \oplus I_S(F_0)$, et donc $R_S(F_1) \oplus I_S(F_0) \subset I_S(F_1 \oplus F_0)$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on obtient l'égalité souhaitée.

□

La proposition duale naturelle est la suivante, donnée sans démonstration. Celle-ci peut se déduire aisément de la celle de la proposition 2.3.4 par le même changement de variable que celui détaillé dans la proposition 2.3.2.

Proposition 2.3.5 *Soit $F_1 \oplus F_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$.*

1. *Si F_0 est log-intégrable sur $r_0\mathbb{T}$, alors*

$$I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}) \left(\frac{F_1}{u_0} \oplus \frac{F_0}{u_0} \right),$$

où u_0 est une fonction extérieure à valeurs scalaires $r_0\mathbb{T}$ telle que

$$|u_0(r_0e^{it})| = \|F_0(r_0e^{it})\|_{\mathbb{C}^m} \text{ presque partout sur } r_0\mathbb{T}.$$

2. *Si F_0 n'est pas log-intégrable sur $r_0\mathbb{T}$, alors*

$$I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = I_{S^{-1}}(F_1) \oplus R_S(F_0).$$

Nous pouvons maintenant aborder la description des sous-espaces invariants pour S générés par une seule fonction.

Théorème 2.3.6 *Soit $F_1 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ et $F_0 \in L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$. Alors on a :*

1. *Si F_1 n'est pas log-intégrable sur $\mathbb{T}$ et si F_0 est log-intégrable sur $r_0\mathbb{T}$, alors*

$$I_S(F_1 \oplus F_0) = P_1L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus H^2(r_0\mathbb{D})\frac{F_0}{u_0}$$

où u_0 est une fonction extérieure de $H^2(r_0\mathbb{D})$ telle que $|u_0(r_0e^{it})| = \|F_0(r_0e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$ presque partout sur $r_0\mathbb{T}$ et où P_1 est une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur $\mathbb{T}$.

2. *Si F_0 n'est pas log-intégrable sur $r_0\mathbb{T}$ et si F_1 est log-intégrable sur $\mathbb{T}$, alors*

$$I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})\frac{F_1}{u_1} \oplus P_2L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$$

où u_1 est une fonction extérieure sur $H^2(\mathbb{D})$ telle que $|u_1(e^{it})| = \|F_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$ presque partout sur $r_0\mathbb{T}$ et où P_2 est une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur $r_0\mathbb{T}$.

3. *Si ni F_0 ni F_1 ne sont log-intégrables, alors*

$$I_S(F_1 \oplus F_0) = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m) = I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0)$$

où P est une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur ∂A.

Preuve : 1. La seconde assertion de la proposition 2.3.4 implique que $I_S(F_1 \oplus F_0) = R_S(F_1) \oplus I_S(F_0)$. D'après le lemme 2.2.1, $R_S(F_1) = P_1 L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ où P_1 est une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur $\mathbb{T}$. Comme F_0 est log-intégrable, on a : $I_S(F_0) = I_S(\frac{F_0}{u_0})$ où u_0 est une fonction extérieure sur $H^2(r_0\mathbb{D})$ telle que $|u_0(r_0e^{it})| = \|F_0(r_0e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$ presque partout sur $r_0\mathbb{T}$. Comme $I_S\left(\frac{F_0}{u_0}\right)$ contient $H^2(r_0\mathbb{D})\frac{F_0}{u_0}$ et comme ce dernier est fermé en tant qu'image d'un fermé par un opérateur borné inférieurement, on en déduit que $I_S\left(\frac{F_0}{u_0}\right) = H^2(r_0\mathbb{D})\frac{F_0}{u_0}$.
2. Si F_0 n'est pas log-intégrable, la seconde assertion de la proposition 2.3.5 implique que $I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = I_{S^{-1}}(F_1) \oplus R_S(F_0)$. Comme F_1 est log-intégrable, $I_{S^{-1}}(F_1) = H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})\frac{F_1}{u_1})$ où u_1 est une fonction extérieure sur $H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ telle que $|u_1(e^{it})| = \|F_1(e^{it})\|_{\mathbb{C}^m}$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Comme $I_{S^{-1}}\left(\frac{F_1}{u_1}\right)$ contient $H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})\frac{F_1}{u_1})$ et comme ce dernier est fermé comme image d'un fermé par un opérateur borné inférieurement, on en déduit que $I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})\frac{F_1}{u_1} \oplus P_2 L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$.
3. Comme F_1 n'est pas log-intégrable, $I_S(F_1 \oplus F_0) = R_S(F_1) \oplus I_S(F_0)$. Il reste à montrer que si F_0 n'est pas log-intégrable alors $I_S(F_0) = D_S(F_0)$. Pour ce faire, il suffit de vérifier que dès que $H_0 \perp I_S(F_0)$, alors $H_0 \perp D_S(F_0)$. Or, $H_0 \perp I_S(F_0)$ implique que les coefficients de Fourier négatifs de la fonction de $L^1(r_0\mathbb{T})$ à valeurs scalaires $f_0 := \langle F_0, H_0 \rangle$ sont identiquement nuls. Ainsi, f_0 s'étend en une fonction de $H^1(r_0\mathbb{D})$ et donc f_0 est log-intégrable. Ceci oblige F_0 à être log-intégrable, ce qui est exclu. Ainsi f_0 est la fonction identiquement égale à 0 et $H_0 \perp D_S(F_0)$. D'après le lemme 2.2.1, $D_S(F_0) = R_S(F_0) = P_0 L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ où P_0 est une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur $r_0\mathbb{T}$. Maintenant en prenant $P = P_1 \oplus P_0$, on obtient le résultat voulu. Des arguments similaires montrent facilement que $I_{S^{-1}}(F_1) = D_S(F_1)$ lorsque F_1 n'est pas log-intégrable, d'où la dernière égalité.

$\square$

Il ne reste plus qu'à décrire les sous-espaces doublement-invariants par S engendrés par $F = F_1 \oplus F_0$ dans le cas où F_1 ou F_0 n'est pas log-intégrable.

Théorème 2.3.7 *Soit $F_1 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ et $F_0 \in L^2(r_0\mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$. Supposons que F_1 ou F_0 ne soit pas log-intégrable. Alors :*

$$D_S(F_1 \oplus F_0) = D_S(F_1) \oplus D_S(F_0) = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$$

où P est une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur ∂A.

Preuve : Supposons que F_1 ne soit pas log-intégrable. La seconde assertion de la proposition 2.3.4 affirme que $I_S(F_1 \oplus F_0) = D_S(F_1) \oplus I_S(F_0)$. En particulier $0 \oplus I_S(F_0) \subset I_S(F_1 \oplus F_0)$. De plus, $D_S(F_1 \oplus F_0)$ contient $0 \oplus I_S(F_0)$ et donc contient $0 \oplus D_S(F_0)$. On obtient alors

$$D_S(F_1 \oplus F_0) = D_S(F_1) \oplus D_S(F_0),$$

car $D_S(F_1 \oplus F_0)$ est toujours contenu dans $D_S(F_1) \oplus D_S(F_0)$. Si F_0 n'est pas log-intégrable, la seconde assertion de la proposition 2.3.5 affirme que $I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = I_{S^{-1}}(F_1) \oplus D_S(F_0)$. Comme précédemment, $D_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = D_S(F_1 \oplus F_0)$ entraîne que $D_S(F_1 \oplus F_0) = D_S(F_1) \oplus$

$D_S(F_0)$. La version vectorielle du théorème de Wiener fournit l'existence de P, une fonction mesurable à valeurs dans les projections sur ∂A telle que $D_S(F_1) \oplus D_S(F_0) = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. □

Résumons les résultats de structure des théorèmes précédents à l'aide de tableaux :

Description de $I_S(F_1 \oplus F_0)$ et $I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0)$:

F_1	F_0 est log-intégrable :	
log-int.	Oui	Non
Oui	$I_S(F_1 \oplus F_0) = H^2(\mathbb{D})(F_1 \oplus F_0)/u_1$ $I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}})(F_1 \oplus F_0)/u_0$	$I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})(\frac{F_1}{u_1}) \oplus P_2L^2(r_0\mathbb{T})$ $I_S(F_1 \oplus F_0) = H^2(\mathbb{D})(F_1 \oplus F_0)/u_1$
Non	$I_S(F_1 \oplus F_0) = P_1L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^m) \oplus H^2(r_0\mathbb{D})(\frac{F_0}{u_0})$ $I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0) = H^2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}})(F_1 \oplus F_0)/u_0$	$I_S(F_1 \oplus F_0) = I_{S^{-1}}(F_1 \oplus F_0)$ $= PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$

Description de $D_S(F_1 \oplus F_0)$:

F_1	F_0 est log-intégrable :	
log-int.	Oui	Non
Oui	$H^2(\partial A)(W_1 \oplus W_0)$	$PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$
Non	$PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$	$PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$

Une conséquence simple de ces théorèmes de structure est le corollaire suivant. Notons $\sigma_p(T)$ le spectre ponctuel de l'opérateur T, ensemble des valeurs propres de T.

Corollaire 2.3.8 *Pour tout sous-espace doublement-invariant $\mathcal{M} \subset L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ on a :*

$$\sigma_p((S_{|\mathcal{M}})^*) \subset A.$$

Preuve : Cette affirmation revient à montrer que $(S - \lambda Id)\mathcal{M}$ est dense dans $\mathcal{M}$ pour $\lambda \notin A$, ce qui est une conséquence de l'égalité $D_S((S - \lambda Id)F) = D_S(F)$ pour tout $F \in \mathcal{M}$. □

2.4 Sous-espaces doublement-invariants

2.4.1 Sous-espaces complètement non réduisants

Définition 2.4.1 *Un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ est dit complètement non réduisant si les seuls sous-espaces réduisants qu'il contient sont les sous-espaces triviaux $\mathcal{M}$ et $\{0\}$.*

Lemme 2.4.1 *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace doublement-invariant pour S et $\mathcal{M}_1$ un sous-espace réduisant pour S. Alors $\mathcal{M}_2 := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1^{\perp}$ est doublement-invariant pour S.*

Preuve : Commençons par vérifier que $\mathcal{M}_2$ est invariant pour S. En fait, pour $F_1 \in \mathcal{M}_1$ et $F_2 \in \mathcal{M}_2$, on a :

$$\langle SF_2, F_1 \rangle = \langle F_2, S^* F_1 \rangle = 0,$$

comme $\mathcal{M}_1$ est réduisant. Ainsi $S\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_2$. Vérifions que $\mathcal{M}_2$ est invariant pour S^{-1}, ce qui revient à montrer que $\mathcal{M}_2 \perp (S^{-1})^* \mathcal{M}_1$. Comme $\mathcal{M}_1$ est réduisant pour S, d'après la version vectorielle du théorème de Wiener, il existe une fonction mesurable à valeurs dans les projections P telle que pour presque tout $\xi \in \partial A$, $P(\xi) : \mathbb{C}^m \to \mathcal{I}(\xi)$ où $\mathcal{I}(\xi) = \{F(\xi) : F \in M_1\}$. Comme $(S^{-1})^* F(e^{it}) = e^{it} F(e^{it}) \in P(e^{it})\mathbb{C}^m$ et $(S^{-1})^* F(r_0 e^{it}) = \frac{e^{it}}{r_0} F(r_0 e^{it}) \in P(r_0 e^{it})\mathbb{C}^m$, $(S^{-1})^* F \in PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m) = \mathcal{M}_1$ pour $F \in \mathcal{M}_1$, et donc on obtient le résultat souhaité.

□

D'après le lemme 2.4.1, nous limiterons notre étude aux sous-espaces complètement non-réduisants.

Lemme 2.4.2 *Dans le cas scalaire, les sous-espaces doublement-invariants qui sont complètement non-réduisants coïncident avec les sous-espaces doublement-invariants non-réduisants.*

Preuve : Supposons que $\mathcal{M}$ soit doublement-invariant mais contienne une sous-espace non trivial réduisant $\mathcal{M}_1$. D'après Wiener, $\mathcal{M}_1 = \chi_E L^2(\partial A)$ où E et son complémentaire sont de mesure strictement positive. Maintenant, pour tout $f \in M$, on peut écrire $f = \chi_E f + \chi_{\partial A \setminus E} f$, où $\chi_E f \in \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$. Alors, $\chi_{\partial A \setminus E} f \in \mathcal{M}$ et $D_S(\chi_{\partial A \setminus E} f) \subset \mathcal{M}$ pour tout $f \in \mathcal{M}$. Comme $\chi_E f$ et $\chi_{\partial A \setminus E} f$ ne sont pas log-intégrables, on obtient $D_S(\chi_{\partial A \setminus E} f) = R_S(\chi_{\partial A \setminus E} f)$ et $D_S(\chi_E f) = R_S(\chi_E f)$. Ainsi le sous-espace $\mathcal{M}$ est réduisant.

□

Il est facile de voir que le résultat précédent est faux dans $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ pour $m > 1$ en prenant la somme directe d'un sous-espace doublement-invariant et d'un sous-espace réduisant.

2.4.2 Sous-espace doublement-invariants analytiques

Dans cette section, nous allons restreindre notre étude aux sous-espaces fermés de fonctions analytiques dans les espaces de Hardy $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Royden [33] a montré que les sous-espaces fermés non triviaux de $H^2(\partial A)$ qui sont doublement-invariants pour S sont de la forme $\phi H^2(\partial A)$, où $\phi \in H^\infty(\partial A)$ est intérieure.

La preuve qu'il propose repose sur la factorisation intérieure-extérieure des fonctions des espaces de Hardy sur un domaine circulaire évoquée au chapitre précédent. Remarquons que le résultat de Sarason implique que tout sous-espace doublement-invariant non réduisant $\mathcal{M}$ de $L^2(\partial A)$ est de la forme $H^2(\partial A)(w_1 \oplus w_0)$, où w_1 est unimodulaire sur $\mathbb{T}$ et w_0 est borné et borné inférieurement sur $r_0\mathbb{T}$, d'après l'interprétation scalaire du théorème 2.3.3.

Bien sur, si $\mathcal{M} \subset H^2(\partial A)$, alors $(w_1 \oplus w_0) \in H^\infty(\partial A)$ et ϕ est obtenue en prenant le facteur intérieur.

Tout d'abord nous allons montrer que si $\mathcal{M}$ est un sous-espace fermé non trivial de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ (avec $m \geq 2$), alors il existe au moins m fonctions de $\mathcal{M}$ engendrant le plus petit sous-espace réduisant contenant $\mathcal{M}$. Rappelons que dans le cas scalaire, le théorème de Wiener implique que toute fonction f de $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ vérifie $R_S(f) = \mathcal{M} = L^2(\partial A)$.

Théorème 2.4.1 *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé non trivial de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Alors, il existe un ensemble de fonctions $G^1, \ldots, G^k$ dans $\mathcal{M}$ telles que $k \leq m$, et*

$$R_S(\mathcal{M}) = R_S(G^1) + \cdots + R_S(G^k).$$

Preuve : Soit $G^1 = \begin{pmatrix} g_1^1 \\ \vdots \\ g_m^1 \end{pmatrix}$ une fonction non constante de $\mathcal{M}$. Pour tout $G^2 = \begin{pmatrix} g_1^2 \\ \vdots \\ g_m^2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}$, on considère les fonctions de $H^1(\partial A)$ $h_j = g_j^1 g_1^2 - g_1^1 g_j^2$ pour $2 \leq j \leq m$. Alors deux alternatives se présentent :

-Premier cas : tous les h_j sont identiquement nuls, et dans ce cas $R_S(G^2) \subset R_S(G^1)$.

-Deuxième cas : il existe une fonction h_{j_0} avec $2 \leq j_0 \leq m$ qui est non nulle presque partout sur ∂A, et alors on peut considérer le sous-espace réduisant $R_S(G^1) + R_S(G^2) = P_2 L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, où, pour presque tout $\xi \in \partial A$, le rang de $P_2(\xi)$ vaut 2.

Si $R_S(\mathcal{M}) = R_S(G^1) + R_S(G^2)$, on a obtenu le résultat désiré. Sinon on prend une troisième fonction $G^3 = \begin{pmatrix} g_1^3 \\ \vdots \\ g_m^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$.

On considère alors la fonction de $H^{2/3}(\partial A)$

$$h_j = \begin{vmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 \\ g_{j_0}^1 & g_{j_0}^2 & g_{j_0}^3 \\ g_j^1 & g_j^2 & g_j^3 \end{vmatrix}$$

pour $2 \leq j \leq m$, $j \neq j_0$.

De nouveau, deux alternatives se présentent :

Premier cas : tous les h_j sont identiquement nuls, et alors $R_S(G^3) \subset R_S(G^1) + R_S(G_2)$.

Deuxième cas : il existe une fonction h_j avec $3 \leq j \leq m$ qui est non nulle presque partout sur ∂A, et on considère alors le sous-espace $R_S(G^1) + R_S(G^2) + R_S(G^3) = P_3 L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, où, pour presque tout $\xi \in \partial A$, le rang de $P_3(\xi)$ vaut 3.

On réitère ce procédé. Cet algorithme s'arrête dès que jusqu'à ce que si $R_S(M) = R_S(G^1) + \ldots + R_S(G^k)$ pour un entier $k < m$. Sinon, il existe $m-1$ fonctions de M telles que $R_S(G^l)$ ne soit pas dans $R_S(G^1) + \cdots + R_S(G^{l-1})$ pour tout $2 \leq l \leq m-1$. Alors $R_S(G^1) + \cdots + R_S(G^{m-1}) = P_{m-1} L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, où pour presque tout $\xi \in \partial A$, le rang de $P_{m-1}(\xi)$ vaut $m-1$.

Prenons $G^m = \begin{pmatrix} g_1^m \\ \vdots \\ g_m^m \end{pmatrix} \in M$, et considérons les fonctions de $H^{2/m}(\partial A)$

$$h = \begin{vmatrix} g_1^1 & \cdots & g_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_m^1 & \cdots & g_m^m \end{vmatrix}$$

Si h est identiquement nul, alors $R_S(G^m) \subset R_S(G^1) + \cdots + R_S(G_{m-1})$. Sinon, la fonction h est non nulle presque partout sur ∂A, et on considère alors le sous-espace réduisant $R_S(G^1) + \cdots + R_S(G^m) = P_m L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, où pour presque tout $\xi \in \partial A$, le rang de $P_m(\xi)$ vaut m. Il suit que P_m est l'application identité et donc

$$R_S(G^1) + \cdots + R_S(G^m) = L^2(\partial A, \mathbb{C}^m).$$

On remarquera que l'analyticité a été utilisée pour montrer que le rang en ξ de la fonction à valeurs dans les projections (presque partout) est indépendant de ξ.

$\square$

Proposition 2.4.2 *Soit $F \in H^2(\partial A, \mathbb{C}^m) \setminus \{0\}$. Alors il existe une constante strictement positive c et $W \in H^\infty(\partial A, \mathbb{C}^m)$ vérifiant $\|W(\xi)\|_{\mathbb{C}^m} = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et $\|W(\xi)\|_{\mathbb{C}^m} = c$ presque partout sur $r_0\mathbb{T}$, tels que l'on ait :*

$$D_S(F) = H^2(\partial A)W \text{ et } R_S(F) = L^2(\partial A)W.$$

Preuve : Prenons $F \in H^2(\partial A, \mathbb{C}^m) \setminus \{0\}$. Par conséquent $\log \|F\|$ est une fonction de $L^1(\partial A)$. Nous pouvons alors définir la fonction v sur A par

$$v(z) = \int_{\partial A} \log \|F(\xi)\|_{\mathbb{C}^m} \frac{\partial g(z,\xi)}{\partial n} ds(\xi).$$

Alors, comme A n'est pas simplement connexe, il existe une constante s et une fonction réelle harmonique h telle que

$$\psi(z) = v(z) - s \log |z| + ih(z)$$

soit holomorphe. Ainsi $\phi(z) := \exp(\psi(z))$ est une fonction extérieure dont la limite au bord vérifie $|\phi(\xi)| = \|F(\xi)\|_{\mathbb{C}^m}/|\xi|^s$. Soit $W = F/\phi$ et observons que $W \in H^\infty(\partial A, \mathbb{C}^m)$ avec $\|W(\xi)\|_{\mathbb{C}^m} = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et $\|W(\xi)\|_{\mathbb{C}^m} = r_0^s$ presque partout sur $r_0\mathbb{T}$. Comme $\phi \in H^2(\partial A)$, ϕ est la limite pour la norme L^2 d'une suite de polynômes trigonométriques $(p_n)_n$. Comme

$$\|F - p_n W\|_2^2 = \|(\phi - p_n)W\|_2^2 \leq \max(c^2, 1)\|\phi - p_n\|_2^2$$

avec $c = r_0^s$, on en déduit que $\|F - p_n W\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. Ainsi on a $D_S(F) \subset D_S(W)$. De plus, comme ϕ est extérieure, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(q_n)_n$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|q_n\phi - 1\|_2 = 0$. On en déduit que

$$\|q_n F - W\|_2^2 = \|(q_n\phi - 1)W\|_2^2 \leq \max(c^2, 1)\|q_n\phi - 1\|_2^2,$$

et donc $\|q_n F - W\|_2$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. Ainsi on obtient $D_S(W) \subset D_S(F)$, et donc $D_S(W) = D_S(F)$.

Nous pouvons aussi vérifier que $R_S(F) = R_S(W)$. D'après le corollaire 2.2.3, $R_S(F) = \{G \in L^2(\partial A, \mathbb{C}^m) : G(\xi) \in \mathbb{C}F(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \partial A\}$. Comme $F = \phi W$, où $\phi(\xi) \neq 0$ presque partout sur ∂A,

$$R_S(F) = \{G \in L^2(\partial A, \mathbb{C}^m) : G(\xi) \in \mathbb{C}W(\xi) \text{ pour presque tout } \xi \in \partial A\} = R_S(W).$$

Comme W est borné supérieurement et inférieurement, $L^2(\partial A)W$ est un sous-espace fermé et est donc égal à $R_S(W)$.

□

Remarque 2.4.1 *D'après le théorème de Wiener il existe une fonction P à valeurs dans les projections telle que $R_S(F) = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Un choix naturel pour P est $J_{1/c}W \otimes e_1$ où e_1 est le premier vecteur de la base orthonormée canonique de $\mathbb{C}^m$ et où*

$$J_{1/c} = P_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)} + \frac{1}{c}P_{L^2(r_0\mathbb{T},\mathbb{C}^m)} \left(= \frac{r_0^2 Id - SS^*}{r_0^2 - 1} + \frac{1}{c}\frac{SS^* - Id}{r_0^2 - 1} \right).$$

La preuve du prochain résultat est basée sur la démonstration faite dans le cas scalaire par Sarason [35]. D'après le théorème 2.4.1, on peut montrer que pour un sous-espace doublement-invariant donné $\mathcal{M}$ de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, il existe un nombre fini de fonctions de $\mathcal{M}$ qui engendrent $\mathcal{M}$.

Théorème 2.4.3 *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace non trivial doublement-invariant (complètement non réduisant) de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Alors il existe un ensemble fini d'au plus m fonctions bornées de $\mathcal{M}$, notées $F^1, \cdots, F^r$, telles que*

$$M = D_S(F^1) \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp D_S(F^r).$$

De plus, si $R_S(\mathcal{M}) = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ où P est une fonction à valeurs dans les projections, le rang de $P(\xi)$ est constant et est égal à r, pour tout $\xi \in \partial A$.

Preuve : Tout d'abord, commençons par montrer qu'il existe $\lambda_0 \in A$ tel que $\mathcal{M} \ominus (S - \lambda_0 Id)\mathcal{M} \neq \{0\}$. En fait, si ce n'était pas le cas, pour tout $\lambda \in A$ et tout $e \in \mathbb{C}^m$, on aurait $P_{\mathcal{M}}(k_\lambda e) = 0$, où $P_{\mathcal{M}}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{M}$ et où k_λ est le noyau reproduisant de $H^2(A)$ associé à λ. Comme Span$\{(k_\lambda e) : \lambda \in A, e \in \mathbb{C}^m\}$ est égal à $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, on en déduit que $\mathcal{M} = \{0\}$, ce qui est exclu.

Soit $F^1 \in \mathcal{M} \ominus (S - \lambda_0 Id)M$. D'après la proposition 2.4.2, il existe $W_1 \in H^\infty(\partial A, \mathbb{C}^m)$ tel que $\|W_1(\xi)\|_{\mathbb{C}^m}$ est constant presque partout sur chaque cercle de ∂A et tel que $D_S(F^1) =$

$H^2(\partial A)W_1$ et $R_S(F^1) = L^2(\partial A)W_1$. Considérons $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M} \cap R_S(F^1)$ qui contient $\mathcal{N}_1 := D_S(F^1)$, et soit $\mathcal{N}_2 := D_{S^*}((S^* - \overline{\lambda_0} Id)F^1)$. Comme $S^{*m}S^n$ est une combinaison linéaire de S^{n-m} et de $S^{*(m-n)}$ pour $n \neq m$ in $\mathbb{Z}$, et $S^{*n}S^n$ aussi une combinaison linéaire de Id et de S^*S, on a :

$$R_S(F^1) \subset \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \mathbb{C}S^*SF^1.$$

Comme $\mathcal{N}_2 \subset R_S(F^1) \cap \mathcal{M}^\perp$, on en déduit que $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{N}_1 + \mathcal{M} \cap \mathbb{C}S^*SF^1$. On obtient donc $\dim(\mathcal{M}_1 \ominus D_S(F^1)) \leq 1$. Autrement dit,

$$\mathcal{M} \cap R_S(F^1) = D_S(F^1) \text{ ou } \mathcal{M} \cap R_S(F^1) = D_S(F^1) + \mathbb{C}S^*SF^1.$$

Vérifions qu'il existe une fonction G^1 dans $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M}_1 = D_S(G^1)$.

Si $\dim(\mathcal{M}_1 \ominus D_S(F^1)) = 0$, alors on peut prendre $G^1 = F^1$. Il ne reste qu'à considérer le cas où $\mathcal{M}_1 = D_S(F^1) + \mathbb{C}S^*SF^1$, c'est à dire lorsque

$$\dim(\mathcal{M}_1 \ominus D_S(F^1)) = 1. \tag{2.2}$$

Soit $G \in \mathcal{M}_1 \ominus D_S(F^1)$, avec $G \neq 0$. Alors $P_{\mathcal{M}_1}S^*G \perp D_S(F^1)$, et comme $\dim(\mathcal{M}_1 \ominus D_S(F^1)) = 1$, il existe un unique $\mu_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P_{\mathcal{M}_1}S^*G = \overline{\mu}_0 G$; ce qui s'écrit de façon équivalente $\mu_0 \in \sigma_p((S_{|\mathcal{M}_1})^*)$.

D'après le corollaire 2.3.8, on sait que $\mu_0 \in A$.

Maintenant, comme $D_S(F_1) = H^2(\partial A)W_1$ d'après la proposition 2.4.2, on a

$$\dim(D_S(F^1) \ominus (S - \mu_0 Id)D_S(F^1)) = 1 \tag{2.3}$$

(remarquons que l'opérateur $S - \mu_0 Id$ est borné supérieurement et inférieurement, donc $(S - \mu_0 Id)D_S(F_1)$ est fermé). Le même argument, montre que

$$\dim((S - \mu_0 Id)\mathcal{M}_1 \ominus (S - \mu_0 Id)D_S(F^1)) = 1, \tag{2.4}$$

ce qui donne $\dim(\mathcal{M}_1 \ominus D_S(F^1)) = 1$.

Résumons ces observations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \cap R_S(F^1) \arrow[dl] \arrow[dr, "1"] & \\
(S - \mu_0 Id)\mathcal{M}_1 \arrow[dr, "1"'] & & D_S(F^1) = H^2(\partial A)W_1 \arrow[dl, "1"] \\
 & (S - \mu_0 Id)D_S(F^1) &
\end{tikzcd}$$

Les égalités de dimensions (2.2), (2.3) et (2.4) impliquent que $\dim(\mathcal{M}_1 \ominus (S - \mu_0 Id)\mathcal{M}_1) = 1$, avec $G \in \mathcal{M}_1 \ominus D_S(F^1)$ et $G \in \mathcal{M}_1 \ominus (S - \mu_0 Id)\mathcal{M}_1$.

Ainsi, $(S - \mu_0 Id)\mathcal{M}_1 = D_S(F^1)$, et donc $F^1(\mu_0) = 0$; comme F^1 est analytique, il en est de même pour $(S - \mu_0 Id)^{-1}F^1 \in \mathcal{M}_1$, et donc $\mathcal{M}_1 = D_S(G^1)$, avec $G^1 = (S - \mu_0 Id)^{-1}F^1$.

A ce stade de la démonstration, nous avons montré qu'il existe $G^1 \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = D_S(G^1) \oplus^\perp \mathcal{M}'$; où $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cap R_S(F^1)^\perp$, qui est doublement-invariant d'après le lemme 2.4.1.

Un raisonnement par induction nous conduit à l'expression :

$$\mathcal{M} = D_S(G^1) \oplus^\perp D_S(G^2) \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp D_S(G^r) \oplus^\perp \mathcal{M}'',$$

pour les fonctions $G^1, \ldots, G^r \in \mathcal{M}$ et où $\mathcal{M}''$ est aussi doublement-invariant pour S. Il ne reste plus qu'à montrer que cet algorithme se termine, c'est à dire que $\mathcal{M}'' = \{0\}$ pour un entier $r \leq m$.

D'après la proposition 2.4.2, il existe $W_1, \cdots, W_r$ dans $H^\infty(\partial A, \mathbb{C}^m)$ dont les valeurs aux bords de $\|W_k(\xi)\|_{\mathbb{C}^m}$ sont 1 presque partout sur $\mathbb{T}$ et sont égales à une constante positive c_k sur $r_0\mathbb{T}$, tels que

$$\begin{cases} \mathcal{M} = H^2(\partial A)W_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp H^2(\partial A)W_r \oplus^\perp \mathcal{M}'' \\ R_S(\mathcal{M}) = L^2(\partial A)W_1 + \cdots + L^2(\partial A)W_r + R_S(\mathcal{M}''). \end{cases}$$

D'après la Remarque 2.4.1, il suffit de considérer $J_{1/c} = P_{L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^m)} + \frac{1}{c}P_{L^2(r_0\mathbb{T},\mathbb{C}^m)}$, et

$$R_S(\mathcal{M}) = J_{1/c_1}(L^2(\partial A)W_1) + \cdots + J_{1/c_r}(L^2(\partial A)W_r) + R_S(\mathcal{M}'').$$

Soit Q la fonction à valeurs dans les projections définie presque partout sur ∂A par

$$Q(\xi) = r^{-1/2}(J_{1/c_1}W_1(\xi), \cdots, J_{1/c_r}W_r(\xi)).$$

Par construction, on vérifie facilement que $Q(\xi)$ est une projection orthogonale et que

$$R_S(\mathcal{M}) = QL^2(\partial A, \mathbb{C}^m) + R_S(\mathcal{M}''),$$

où le rang de $Q(\xi)$ est égal à r pour presque tout $\xi \in \partial A$. D'après le théorème de Wiener, il existe une fonction P mesurable à valeurs dans les projections telle que $R_S(\mathcal{M}) = PL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$. Or, d'après le théorème 2.4.1, le rang k de $P(\xi)$ est indépendant de ξ et est inférieur ou égal à m, donc on a nécessairement $r \leq k \leq m$; ainsi, le raisonnement par induction doit s'achever avec $\mathcal{M}'' = \{0\}$ après un nombre $r \leq m$ d'itérations. Or comme $R_S(\mathcal{M}) = QL^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$, ceci implique que $k = r$.

□

2.4.3 Graphes d'opérateurs

Une application de l'étude des sous-espaces invariants par le shift et l'étude des opérateurs fermés invariants par le shift. Pour les espaces de Hardy du disque, l'idée originale est de Georgiou et Smith [17], qui donnent des applications en théorie du contrôle.

Dans le cas de l'anneau, nous avons le cas particulier suivant du théorème 2.4.3.

Théorème 2.4.4 *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé non trivial de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^2)$. Si $\mathcal{M}$ est doublement-invariant et est le graphe d'un opérateur (non nécessairement borné), alors il existe une fonction bornée $\Theta \in \mathcal{M}$ telle que*

$$\mathcal{M} = D_S(\Theta) = H^2(\partial A)\Theta.$$

Preuve : D'après le théorème 2.4.3, $\mathcal{M}$ peut être engendré par une seule fonction et on obtient le résultat souhaité. Il ne reste donc qu'à considérer le cas où il existe deux fonctions $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}$ qui engendrent $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = D_S \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} \oplus^{\perp} D_S \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

où $|f_1|^2 + |g_1|^2$ et $|f_2|^2 + |g_2|^2$ valent 1 sur $\mathbb{T}$ et valent une constante positive sur $r_0\mathbb{T}$.

Remarquons que :

$$f_1 \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} - f_2 \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

comme $\mathcal{M}$ est le graphe d'un opérateur, nécessairement

$$f_1 g_2 - g_1 f_2 = 0. \tag{2.5}$$

De plus, $D_S \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} \perp D_S \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}$, donc on a aussi

$$f_1 \overline{f_2} + g_1 \overline{g_2} = 0. \tag{2.6}$$

En multipliant (2.6) par f_2 et en utilisant l'égalité (2.5), on obtient :

$$f_1 |f_2|^2 + f_1 |g_2|^2 = 0.$$

On en déduit que $f_1 = 0$ et donc $g_1 = 0$ car $\mathcal{M}$ est le graphe d'un opérateur. Ainsi, $\mathcal{M}$ est engendrée par une seule fonction.

$\square$

Il existe un résultat analogue pour $L^2(\partial A)$ se démontrant par une méthode plus élémentaire, mais pour des hypothèses légèrement plus fortes, l'hypothèse d'analyticité étant essentielle dans la preuve du théorème 2.4.3.

Théorème 2.4.5 *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace non trivial fermé de $L^2(\partial A, \mathbb{C}^2)$. Si $\mathcal{M}$ est doublement-invariant et est le graphe d'un opérateur T (non nécessairement borné) dont le spectre n'est pas le plan complexe entier, alors il existe une fonction bornée $\Theta \in \mathcal{M}$ telle que*

$$\mathcal{M} = D_S(\Theta) = L^2(\partial A)\Theta.$$

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ n'appartenant pas au spectre de T. Alors l'opérateur $V = (T - \lambda Id)^{-1}$ est borné et commute avec S. Soit $V(1 \oplus 0) = h_1 \oplus h_2$, donc $V(S^n(1 \oplus 0)) = S^n(h_1 \oplus h_2)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme V est borné, ceci implique que $h_2 = 0$ et $h_1 \in L^\infty(\mathbb{T})$ comme $V(f \oplus 0) = h_1 f \oplus 0$ pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ (voir [31, Chap. 3]). De même, il existe $h_2' \in L^\infty(r_0\mathbb{T})$ tel que $V(0 \oplus g) = (0 \oplus h_2' g)$ pour $g \in L^2(r_0\mathbb{T})$. Ainsi, le graphe de V est $\left\{ \begin{pmatrix} f \\ hf \end{pmatrix} : f \in L^2(\partial A) \right\}$, où $h = h_1 \oplus h_2' \in L^\infty(\partial A)$. Or, $y = Tx$ si et seulement si $(T - \lambda Id)^{-1}(y - \lambda x) = x$, donc $\mathcal{M} = L^2(\partial A) \begin{pmatrix} h \\ 1 + \lambda h \end{pmatrix}$.

$\square$

Chapitre 3

Sous-espaces S^*-faiblement invariants sur l'espace de Hardy du disque

3.1 Présentation du problème et énoncé du résultat principal

La première description complète d'un sous-espace invariant par le shift sur un espace de Hardy sur un domaine circulaire qui ne soit pas simplement connexe est due à Hitt [19]. Le domaine étudié est l'anneau $A := \{z : 1 < |z| < R\}$. Ce résultat est la clé qui permit à Yakubovitch ([46]) de donner la description complète des sous-espaces fermés $S-$invariant de $H^p(\Omega)$ pour Ω domaine circulaire quelconque.

La démonstration initiale proposée par Hitt commence par donner la description des sous-espaces S^*-faiblement invariants de $H^2(\mathbb{D})$ définis ci-dessous. À elle seule cette description a un intérêt propre, et plusieurs auteurs ont proposé diverses méthodes pour retrouver le résultat de Hitt. Signalons notamment Sarason ([36]) qui utilise les espaces de De Branges–Rovnyak ou encore Nakamura ([24, 23]) qui utilise la théorie des dilatations isométriques minimales d'une contraction.

L'objet de ce chapitre est de généraliser la description de ces espaces particuliers aux fonctions à valeurs vectorielles.

Rappelons que pour $f \in H^2(\mathbb{D})$, le shift S a pour adjoint l'opérateur défini comme suit :

$$S^*(f)(z) := \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Définition 3.1.1 *Un sous-espace $\mathcal{F}$ de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ est dit S^*-faiblement invariant si $\mathcal{F}$ est fermé et si pour tout élément $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(0) = 0$, on a $S^*f \in \mathcal{F}$.*

Une première remarque concernant la définition d'un espace S^*-faiblement invariant, est de se demander s'il existe des fonctions $f \in \mathcal{F}$ telles que $f(0) \neq 0$. En effet, si $\mathcal{F} \subset$

$zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ alors par définition, $\mathcal{F}$ est S^*-faiblement invariant si et seulement si $\mathcal{F}$ est S^*-invariant.

Lemme 3.1.1 *Soit $\mathcal{F}$ un espace S^*-faiblement invariant tel que $\mathcal{F} \subset zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$. Alors $\mathcal{F}$ est réduit à $\{0\}$.*

Preuve :
Soit $f \in \mathcal{F}$, dont le développement en série entière est $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $(a_n) \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^n)$. Comme $f \in zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$, le coefficient a_0 est nul. Comme $\mathcal{F}$ est S^*-faiblement invariant, la fonction g définie par $g(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$, appartient à $\mathcal{M}$. On en déduit que a_1 est nul. Par récurrence, on montre que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ donc $\mathcal{F} = \{0\}$.

□

Ce lemme a une conséquence importante pour la suite :

Corollaire 3.1.1 *Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace S^*-faiblement invariant de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ et $\mathcal{F} \neq \{0\}$, alors*

$$dim\ \big(\mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \cap zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m))\big) \leq m.$$

Preuve : D'après le lemme 3.1.1, $\mathcal{F}$ contient des fonctions qui ne s'annulent pas en 0. Ainsi l'espace $W = \mathcal{F} \cap (zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m))^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. La dimension de cet espace est notée r. Pour $i \in \{1, \cdots, m\}$, posons $f_i = P_\mathcal{F}(k_0 e_i)$, où $P_\mathcal{F}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{F}$ et où k_0 est le noyau reproduisant en 0. En fait les fonctions $f_i = P_\mathcal{F}(e_i)$ sont des éléments de $\mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \cap zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m))$ qui engendrent ce sous-espace. En effet, si g est orthogonal aux f_i, alors $g(0) = 0$, et ainsi, si g appartient à $\mathcal{F}$ qui est S^*-faiblement invariant, nécessairement g est identiquement nulle. Par conséquent la dimension de $\mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \cap zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ est au plus égal à m.

□

Rappelons qu'une fonction ϕ analytique sur $\mathbb{D}$, bornée et à valeur opératorielle est telle que $\lim_{r\to 1} \phi(re^{it})$ existe pour persque tout $t \in [0, 2\pi]$. Cette limite radiale est notée $\phi^*(e^{it})$. Une fonction ϕ analytique sur $\mathbb{D}$, bornée et à valeur opératorielle est dite intérieure si, pour presque tout $\xi \in \mathbb{T}$, $\phi^*(\xi)$ est une isométrie.

Nous allons obtenir la description suivante des sous-espaces S^*-faiblement invariants :

Théorème 3.1.2 *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace S^*-faiblement invariant de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ et soit $(w_1, \ldots w_r)$ une base orthonormée de $W := \mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \cap zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m))$. Alors $\mathcal{F}$ se décompose sous la forme suivante :*

$$\mathcal{F} = F_0 \left(H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r) \ominus \phi H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^{r'}) \right),$$

où ϕ une fonction intérieure de $H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^{r'}, \mathbb{C}^r))$ s'annulant en zéro, $1 \leq r \leq r'$ et $F_0 = mat(w_1, \ldots, w_r)$.

De plus, la matrice F_0 et la fonction ϕ sont uniques à une équivalence unitaire près. Enfin, pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe $g \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$ tel que $f = F_0 g$ et

$$\|g\|_2 = \|f\|_2.$$

3.1.1 Réduction et reformulation du résultat principal

La proposition suivante est une adaptation au cas vectoriel de l'algorithme de Hitt [19] et de la formulation opératorielle de Sarason [36]. Rappelons qu'un opérateur T sur $\mathcal{H}$ appartient à la classe $\mathcal{C}_{.0}$ si pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\lim_{n\to\infty} \|T^{*n}x\| = 0$.

Remarque 3.1.1 *Soit $(w_i)_{i=1,\dots,r}$ une famille finie de vecteurs orthonormés. Alors l'opérateur $R_{F_0} = S - \sum_{j=1}^{r} w_j \otimes S^* w_j$ est une contraction. En effet, $R_{F_0} = S(Id - P_W)$ où P_W est la projection orthogonale sur W, le sous-espace vectoriel engendré par w_j pour $j = 1, \dots, r$.*

Proposition 3.1.3 *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace S^*-faiblement invariant de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ et soit $(w_1, \dots w_r)$ une base orthonormée de $W := \mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \cap zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m))$.*

Notons $F_0 = mat\ (w_1, \dots, w_r)$. Si $S - \sum_{j=1}^{r} w_j \otimes S^* w_j$ est de classe $\mathcal{C}_{.0}$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}' \\ & F_0 g & \longmapsto & g, \end{array}$$

où $\mathcal{F}' := \{g \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)\ :\ \exists f \in \mathcal{F},\ f = F_0 g\}$, est bien définie, isométrique et de plus $\mathcal{F}'$ est S^*-invariant.

Preuve :

Notons P_W la projection orthogonale de $\mathcal{F}$ sur W.

Soit $f \in \mathcal{F}$. Alors $P_W(f)$ est de la forme $P_W(f)(z) = a_{0,1}w_1(z) + \dots a_{0,r}w_r(z)$, et ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{D},\ f(z) = P_W(f)(z) + f_1(z) = F_0 \begin{pmatrix} a_{0,1} \\ \vdots \\ a_{0,r} \end{pmatrix} + f_1(z),$$

avec $f_1 \in \mathcal{F} \cap W^\perp$. De plus, comme la famille $\{w_i\}_{i=1..r}$ forme une base orthonormée de W, on obtient l'égalité des normes suivante :

$$\|f\|^2 = |a_{0,1}|^2 + \dots + |a_{0,r}|^2 + \|f_1\|^2 = \|a_0\|^2 + \|f_1\|^2,\ \text{où } a_0 = (a_{0,1}, \dots, a_{0,r})^t.$$

Par définition d'un sous-espace S^*-faiblement invariant, la fonction $g_1 := S^* f_1$ est dans $\mathcal{M}$.

On a ainsi $f = F_0 a_0 + S g_1$ et $\|f\|^2 = \|a_0\|^2 + \|g_1\|^2$. En remarquant que $Sg_1 = f - F_0 a_0 = (Id - \sum_{j=1}^{r} w_j \otimes w_j)(f)$, on en déduit que :

$$g_1 = S^*(Id - \sum_{j=1}^{r} w_j \otimes w_j)(f) = R_{F_0}(f),$$

où $R_{F_0} = S^*(Id - \sum_{j=1}^{r} w_j \otimes w_j)$. Il est clair que $\|R_{F_0}\| \le 1$.

On procède avec g_1 comme avec f. Par itérations on obtient :

$$f(z) = F_0(a_0 z + a_1 z + \dots + a_k z^k) + S^{k+1} R_{F_0}^{k+1}(f), \qquad (3.1)$$

avec l'égalité (due aux projections orthogonales successives) suivante :

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{k} \|a_j\|^2 + \|R_{F_0}^{k+1}(f)\|^2. \tag{3.2}$$

L'adjoint de R_{F_0} est $S - \sum_{j=1}^{r} w_j \otimes S^* w_j$, qui est par hypothèse de classe $\mathcal{C}_{.0}$.
Il nous faut montrer l'existence et décrire l'espace

$$\mathcal{F}' := \{g \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r) : \exists f \in \mathcal{F} \text{ telle que } f = F_0 g\}.$$

D'après l'égalité (3.2), on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n \leq N} \|a_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

On définit $g \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$ par $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. D'après l'équation (3.1) on a :

$$F_0(z)g(z) - F_0(z)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) = S^{n+1} R_{F_0}^{n+1}(f)(z)$$

Comme R_{F_0} est $\mathcal{C}_{0.}$, on obtient $S^n R_{F_0}^{n+1}(f) \longrightarrow 0$ dans $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ et donc dans $H^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$. Ainsi $F_0 g = f$ dans $H^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$. Par unicité de la limite, comme f est dans $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$, $F_0 g = f$ dans $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$. On a donc $F_0 g = f$ avec $g \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$. D'autre part, l'égalité (3.2) implique

$$\|f\|^2 = \sum_{k \geq 0} \|a_k\|^2 = \|g\|^2.$$

On peut maintenant considérer $\mathcal{F}' := \{g \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r) : \exists f \in \mathcal{F} \text{ telle que } f = F_0 g\}$. Soit

$$\begin{array}{rccl} J : & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}' \\ & f & \longmapsto & g \text{ tel que } f = F_0 g. \end{array}$$

Ainsi défini, J est une isométrie d'après l'égalité en norme précédente et par suite $\mathcal{F}'$ est un sous-espace fermé de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$ comme image d'un fermé par une isométrie.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{F}'$ est S^*-invariant dans $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$.

Soit $g \in \mathcal{F}'$ et montrons que $S^*(g) \in \mathcal{F}'$. Nous savons qu'il existe $f \in \mathcal{F}$ telle que $f = F_0 g$. Or, par construction, $f(z) = F_0(z) a_0 + f_1(z)$ et $a_0 = g(0)$. On obtient :

$$\frac{1}{z}(g(z) - g(0)) = \frac{g_1(z)}{z} \text{ où } F_0 f_1 = g_1.$$

Or $f_1 \in \mathcal{F} \cap z H^2(\mathbb{D})$, et donc $f_1(0) = 0$. Par définition d'un espace S^*-faiblement invariant, $z \mapsto \frac{f_1(z)}{z} \in \mathcal{F}$. Comme $\frac{g_1(z)}{z} = S^* g(z)$, on a $S^* g \in \mathcal{F}'$, ce qui prouve que $\mathcal{F}'$ est S^*-invariant.

□

Corollaire 3.1.4 *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace S^*-faiblement invariant de $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m)$ et soit $(w_1, \dots w_r)$ une base orthonormée de $W := \mathcal{F} \ominus (\mathcal{F} \cap zH^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^m))$.*

Notons $F_0 = mat\ (w_1, \dots, w_r)$. Si $S - \sum_{j=1}^r w_j \otimes S^* w_j$ est de classe $\mathcal{C}_{.0}$, il existe $\phi \in H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^{r'}, \mathbb{C}^r))$ intérieure unique à équivalence unitaire près, s'annulant en zéro telle que

$$\mathcal{F} = F_0 \left(H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r) \ominus \phi H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^{r'}) \right).$$

Preuve : D'après la proposition précédente, on a $\mathcal{F} = F_0 \mathcal{F}'$ avec $\mathcal{F}'$ un sous-espace S^*-invariant. D'après le corollaire du théorème de Lax-Beurling, il existe $r' \leq r$ et $\phi \in H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^{r'}, \mathbb{C}^r))$ une fonction intérieure, unique à une conjugaison par un unitaire près, tels que

$$\mathcal{F}' = H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r) \ominus \phi H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^{r'}).$$

Montrons que ϕ s'annule en zéro. Comme pour $i \in \{1, \dots, r\}$, $v_i \in \mathcal{F}$, on a $v_i = F e_i$ où $(e_i)_i$ est la base canonique de $\mathbb{C}^r$. Comme $e_i \in \mathcal{F}' = H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r) \ominus \phi H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^{r'})$, les e_i sont orthogonaux à $\phi H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^{r'})$, donc $\langle e_i, \phi u_j \rangle_{H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)} = 0$ avec (u_j) base canonique de $\mathbb{C}^{r'}$. Il s'en suit que $\phi_{ij}(0) = 0$ donc ϕ s'annule en zéro, ce qui achève la preuve du corollaire.

$\square$

Pour conclure, il reste à montrer que l'opérateur $R^*_{F_0}$ est de classe $C_{.0}$. Nous allons adapter l'idée de Nakamura ([23],[24]). L'opérateur $R^*_{F_0}$ est le shift S perturbé par un opérateur de rang fini $F := -\sum_{j=1}^r w_i \otimes S^* w_i$.

Le but des paragraphes suivants est de construire la dilatation isométrique minimale de $R^*_{F_0}$, et d'utiliser la caractérisation suivante :

Théorème 3.1.5 ([11]) *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une contraction, et $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ sa dilatation isométrique minimale sur $\mathcal{H}' = \mathrm{Span}\{T^n \mathcal{H} : n \geq 0\}$. Alors T est de classe $\mathcal{C}_{.0}$ si et seulement si D est une isométrie pure.*

3.1.2 Contraction perturbée par un opérateur de rang 1

Dans le cas scalaire, $R^*_{F_0} = S - w_1 \otimes S^* w_1$ est une isométrie perturbée par un opérateur de rang 1. Nakamura, dans [23], montre que la dilatation isométrique minimale de R_{F_0} s'écrit aussi comme une isométrie perturbée par un opérateur de rang 1. Il caractérise quel type de perturbation garantit d'avoir encore une contraction ou une isométrie. Enfin Il donne un critère pour savoir si lorsque l'on perturbe une isométrie pure on obtient une isométrie pure. Les deux théorèmes suivants énoncent les résultats pour une perturbation de rang 1.

Théorème 3.1.6 ([23] Prop. 1 p. 375) *Soit $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une isométrie et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur de rang 1.*

1. *Alors $V + F$ est une isométrie si et seulement s'il existe un vecteur $h \in \mathcal{H}$ de norme 1 et α de tel que $\alpha \in \mathbb{T}$ vérifiant*

$$F = (\alpha - 1) h \otimes V^* h.$$

2. *De plus $V+F$ est une contraction si et seulement s'il existe un vecteur $h \in \mathcal{H}$ de norme 1 et α de tel que $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ vérifiant*

$$F = (\alpha - 1) h \otimes V^* h.$$

Théorème 3.1.7 ([23] Thm. 2 et Thm. 3 p. 383) *Soit $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une isométrie pure et $F = (\alpha - 1) g \otimes V^* g$, avec $\alpha \in \bar{\mathbb{D}}$ et $\|g\| = 1$. Posons $w = \frac{G-1}{G+1}$ avec*

$$G(z) = \left\langle (Id - zV^*)(Id - zV^*)^{-1} g, g \right\rangle.$$

1. *Si $\alpha \in \mathbb{D}$ alors $V+F$ est $\mathcal{C}_{.0}$.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{T}$ alors $V+F$ est une isométrie pure si et seulement si*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |w(e^{it})|^2}{|1 - \bar{\alpha} w(e^{it})|^2} dt = 1.$$

3. *Si $\alpha \in \mathbb{T}$ et*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |w(e^{it})|^2}{|1 - \bar{\alpha} w(e^{it})|^2} dt < 1,$$

alors $R = V + F$ est une isométrie telle que $R|_{\mathrm{Span}\{V^n g : n \geq 0\}}$ est unitaire.

3.2 Preuve du résultat principal

3.2.1 Dilatation isométrique minimale

Dans le cas vectoriel, nous allons généraliser les travaux de Nakamura pour le calcul de la dilatation isométrique minimale d'une perturbation de rang fini d'une contraction. Une étude détaillée des perturbations d'une contraction par un opérateur de rang fini ou par un opérateur compact peut être trouvée dans [39] et [40], où l'on trouve un analogue du théorème 3.1.6. En particulier, une isométrie V peut être perturbée par un opérateur de rang fini F pour rester une contraction (resp. une isométrie) si et seulement si F est de la forme :

$$F = \sum_{i,j}^{r} (\bar{a}_{i,j} - \delta_{ij}) e_i \otimes V^* e_j, \quad \text{avec } A = (a_{ij})_{ij} \text{ vérifiant } A^*A \leq Id, \ (resp. A^*A = Id)$$

et où $(e_i)_i$ est une base orthonormale de ImF.

Dilatation isométrique minimale d'une contraction perturbée par un opérateur de rang 1

Voici la construction proposée par Nakamura, dans [23] page 383, de la dilatation isométrique minimale d'une isométrie perturbée par un opérateur de rang 1.

Lemme 3.2.1 (dans [23] p. 383) *Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ et $g \in \mathcal{H}$ unitaire tel que $V^*g \neq 0$, la dilatation isométrique minimale de la contraction $R = V + (\alpha - 1)g \otimes V^*g$ est*

$$W := \widetilde{V} + (\widetilde{\alpha} - 1)\widetilde{g} \otimes \widetilde{V}^*\widetilde{g}, \text{ avec}$$

$$\widetilde{V} := \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \ \rho = \sqrt{1 - |\alpha|^2}, \ \widetilde{\alpha} = -\frac{\alpha - 1}{\bar{\alpha} - 1}$$

et

$$\widetilde{g} := \frac{1}{\sqrt{|\alpha - 1|^2 + \rho^2}} \begin{pmatrix} (\alpha - 1)g \\ \rho 1 \end{pmatrix}$$

Preuve :

Soit V une isométrie sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $g \in \mathcal{H}$ un vecteur de norme 1 tel que $V^*g \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{D}$ et $r = V + (\alpha - 1)g \otimes V^*g$. Comme $Id - R^*R = (1 - |\alpha|^2)V^*g \otimes V^*g$, on a :

$$(Id - R^*R)^{1/2} = \rho \|V^*g\|^{-1} V^*g \otimes V^*g,$$

avec $\rho = \sqrt{1 - |\alpha|^2} > 0$. On identifie l'espace H^2 avec $\oplus_{n \geq 0}\mathbb{C}$, ainsi la dilatation isométrique minimale de R notée W est définie sur $\mathcal{H} \oplus H^2$ par :

$$W := \begin{pmatrix} R & 0 \\ \rho 1 \otimes V^*g & S \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\rho 1 \otimes V^*g$ est de rang 1 et appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{H}, H^2)$. Le fait remarquable est que W est aussi la perturbation d'une isométrie par un rang 1. Soit

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \tilde{g} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha - 1|^2 + \rho^2}} \begin{pmatrix} (\alpha - 1)g \\ \rho 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\alpha} = -\frac{\alpha - 1}{\bar{\alpha} - 1}.$$

On a bien $\tilde{V}$ qui est une isométrie sur $\mathcal{H} + H^2$. De plus $\tilde{\alpha} \in \mathbb{T}$ et $\|\tilde{g}\| = 1$.

$$\begin{aligned} W &= \tilde{V} + \begin{pmatrix} R - V & 0 \\ \rho 1 \otimes V^*g & 0 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{V} + \begin{pmatrix} (\alpha - 1)g \otimes V^*g & 0 \\ \rho 1 \otimes V^*g & 0 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{V} + \begin{pmatrix} (\alpha - 1)g \otimes V^*g \\ \rho 1 \otimes V^*g \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} V^*g \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{V} + \frac{|\alpha - 1|^2 + \rho^2}{\bar{\alpha} - 1} \tilde{g} \otimes \tilde{V}^*\tilde{g} \\ &= \tilde{V} + (\tilde{\alpha} - 1)\tilde{g} \otimes \tilde{V}^*\tilde{g}. \end{aligned}$$

La matrice représentant W étant triangulaire, il en est de même pour W^n. On vérifie ainsi que W dilate R, c'est à dire que $P_{\mathcal{H}} W^n|_{\mathcal{H}} = R^n$.

□

3.2.2 Dilatation isométrique minimale d'une contraction perturbée par un opérateur de rang fini

Commençons par ce lemme utile par la suite.

Lemme 3.2.2 *Soient $V \in L(\mathcal{H})$ une isométrie et $F \in L(\mathcal{H})$. Si $V+F$ est une contraction, alors*

$$F\mathcal{H} \cap Ker\ V^* = \{0\}.$$

De plus, si $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille libre de $F\mathcal{H}$, alors $(V^*e_i)_i$ est libre.

Preuve : Soit $x \in F\mathcal{H} \cap Ker\ V^*$, et soit $y \in \mathcal{H}$ tel que $x = Fy$. On a donc $V^*Fy = 0$ et $\|Vy\| = \|y\|$.

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle Fy, Fy\rangle = \langle (V+F-V)y, (V+F-V)y\rangle \\
&= \|(V+F)y\|^2 - \langle (V+F)y, Vy\rangle - \langle Vy, (V+F)y\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|(V+F)y\|^2 - \|Vy\|^2 - \langle Fy, Vy\rangle - \langle Vy, Fy\rangle \\
&= \|(V+F)y\|^2 - \|Vy\|^2 - \langle V^*Fy, y\rangle - \langle y, V^*Fy\rangle \\
&= \|(V+F)y\|^2 - \|y\|^2 \le 0
\end{aligned}$$

car $V+F$ est une contraction. Ainsi $F\mathcal{H} \cap Ker\ V^* = \{0\}$.

Supposons qu'il existe $(\alpha_i)_i \in \mathbb{C}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i V^* e_i = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ appartient à $F\mathcal{H} \cap Ker\ V^* = \{0\}$ donc est nul. Les $(e_i)_i$ étant linéairement indépendants, ceci implique que tous les α_i sont nuls.

□

Nous allons à présent construire la dilatation isométrique minimale d'une contraction perturbée par un opérateur de rang 2.

Lemme 3.2.3 *Soient $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une isométrie, $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ et w_1, w_2 deux vecteurs unitaires orthogonaux tels que $V^*w_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$. La dilatation isométrique minimale de la contraction*

$$R = V + (\alpha_1 - 1)w_1 \otimes V^*w_1 + (\alpha_2 - 1)w_2 \otimes V^*w_2$$

est

$$W := \widetilde{V} + (\widetilde{\alpha_1} - 1)\widetilde{w_1} \otimes \widetilde{V}^*\widetilde{w_1} + (\widetilde{\alpha_2} - 1)\widetilde{w_2} \otimes \widetilde{V}^*\widetilde{w_2}$$

avec

$$\widetilde{V} := \begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\alpha_i} = -\frac{\alpha_i - 1}{\bar{\alpha_i} - 1}, \quad \rho_i = \sqrt{1 - |\alpha_i|^2} \ (pour\ i = 1, 2),$$

$$\widetilde{w_1} := \frac{1}{\sqrt{|\alpha_1 - 1|^2 + \rho_1^2}} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1)w_1 \\ \rho_1 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \widetilde{w_2} := \frac{1}{\sqrt{|\alpha_2 - 1|^2 + \rho_2^2}} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - 1)w_1 \\ 0 \\ \rho_2 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve :

Première étape : L'application $R = V + (\alpha_1 - 1)w_1 \otimes V^* w_1 + (\alpha_2 - 1)w_2 \otimes V^* w_2$ est bien une contraction. En effet, la perturbation est bien du type décrit en début de section. Considérons

$$R_1 = V + (\alpha_1 - 1)w_1 \otimes V^* w_1.$$

Cette application est une contraction. D'après le paragraphe précédent, la dilatation isométrique minimale W_1 de R_1 est définie sur $\mathcal{H}_1 := \mathcal{H} \oplus H^2$ par :

$$W_1 = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix}.$$

Seconde étape : Notons $\widehat{w_2} = w_2 \oplus 0 \in \mathcal{H}_1$ et $R_2 := W_1 + (\alpha_2 - 1)\widehat{w_2} \otimes W_1^* \widehat{w_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Comme W_1 est une isométrie sur $\mathcal{H}_1$, $\alpha_2 \in \mathbb{D}$ et $\widehat{w_2}$ reste de norme 1, R_2 est une contraction sur $\mathcal{H}_1$. Nous appliquons une seconde fois le résultat de Nakamura. Notons W_2 l'application définie sur $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1 \oplus H^2$ par :

$$W_2 = \begin{pmatrix} R_2 & 0_{\mathcal{H}_1} \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Par construction, W_2 est une isométrie sur $\mathcal{H}_2$.

Troisième étape : Montrons que W_2 dilate R, c'est à dire que $p_{\mathcal{H}}(W_2^n|_{\mathcal{H}}) = R^n$. Nous allons donner une écriture matricielle de W_2 triangulaire, ainsi le calcul de $p_{\mathcal{H}} W_2^n$ sera aisé. L'écriture matricielle de W_2 relativement à $\mathcal{H}_1 \oplus H^2$ est :

$$W_2 = \begin{pmatrix} R_2 & 0_{\mathcal{H}_1} \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix}.$$

Simplifions l'écriture de R_2.

$$\begin{aligned} R_2 &= W_1 + (\alpha_2 - 1)\widehat{w_2} \otimes W_1^* \widehat{w_2} \\ &= \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix} + (\alpha_2 - 1) \begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} R_1^* & * \\ 0 & S^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix} + (\alpha_2 - 1) \begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} R_1^* w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Avant de continuer, simplifions le second terme de cette expression. Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{H} \oplus H^2$, alors

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} R_1^* w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \langle f_1, R_1^* w_2 \rangle \begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (w_2 \otimes R_1^* w_2)(f_1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (w_2 \otimes V^* w_2)(f_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet, nous avons

$$w_2 \otimes R_1^* w_2 = w_2 \otimes V^* w_2 + (\alpha_2 - 1) w_2 \otimes (w_1 \otimes V^* w_1) w_2,$$

et comme les vecteurs w_1 et w_2 sont orthogonaux, le second terme de la somme est nul. L'expression (3.4) de R_2 devient :

$$\begin{aligned} R_2 &= \begin{pmatrix} V + (\alpha_1 - 1) w_1 \otimes V^* w_1 & 0 \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix} + (\alpha_2 - 1) \begin{pmatrix} w_2 \otimes V^* w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R & 0 \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.5}$$

On peut injecter l' expression de R_2 dans l'égalité (3.3) décrivant W_2 :

$$W_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix} & 0_{\mathcal{H}_1} \\ \rho 1 \otimes V^* w_1 & S \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Comme W_2 est triangulaire inférieure, on en déduit que :

$$W_2^n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R^n & 0 \\ * & S^n \end{pmatrix} & 0_{\mathcal{H}_1} \\ * & S^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^n & 0 & 0 \\ * & S^n & 0 \\ * & * & S^n \end{pmatrix}$$

et donc $P_{\mathcal{H}} W_2^n|_{\mathcal{H}} = R^n$.

Dernière étape : Nous avons montré que W_2 est une isométrie qui dilate R. Il reste à montrer que cette dilatation est minimale. Comme les vecteurs $V^* w_1$ et $V^* w_2$ sont linéairement indépendants d'après le lemme 3.2.2, on peut identifier $H^2(\mathbb{D}) \oplus H^2(\mathbb{D})$ avec $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}V^* w_1 \oplus \mathbb{C}V^* w_2)$. Par construction-même de W_2, on vérifie que $\text{Span}\{W_2^n \mathcal{H} \ : \ n \geq 0\} = \mathcal{H}_2$, ce qui permet de conclure que W_2 est bien la dilatation isométrique minimale de R.

□

Remarque 3.2.1 *Avec les notations du lemme 3.2.3, en utilisant le théorème 3.1.7, W_1 et W_2 sont des isométries pures dès que V est pure et $\alpha_i \in \mathbb{D}$ pour $i = 1, 2$.*

Théorème 3.2.1 *Soient V une isométrie, $\{w_i \ : \ 1 \leq i \leq r\}$ une famille de vecteurs orthonormés et $\{\alpha_i \in \mathbb{D} : 1 \leq i \leq r\}$. Alors la dilatation isométrique minimale de la contraction*

$$R = V + \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i - 1) w_i \otimes V^* w_i$$

est

$$W := \tilde{V} + \sum_{i=1}^{r} (\tilde{\alpha}_i - 1) \hat{w}_i \otimes \tilde{V}^* \hat{w}_i$$

avec

$$\tilde{V} := \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & S_r \end{pmatrix},$$

où S_r est le shift sur $H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$ et avec

$$\rho_i = \sqrt{1 - |\alpha_i|^2}, \quad \tilde{\alpha_i} = -\frac{\alpha_i - 1}{\bar{\alpha_i} - 1} \, (\textit{pour } i = 1, \cdots, r)$$

et enfin

$$\hat{w}_i := \frac{1}{\sqrt{|\alpha_i - 1|^2 + \rho_i^2}} \begin{pmatrix} (\alpha_i - 1)w_i \\ 0 \\ \vdots \\ \rho_i 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La preuve s'obtient par récurrence à partir du lemme précédent et a comme conséquence immédiate le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2 *Soit V une isométrie pure, $(\alpha_i)_{i=1..n} \in \mathbb{D}$, et $(w_i)_i$ famille de vecteurs unitaires de $\mathcal{H}$ deux à deux orthogonaux, alors*

$$R = V + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1) w_i \otimes V^* w_i$$

est une contraction $\mathcal{C}_{.0}$.

Ce corollaire s'applique en particulier à $R_{F_0}^* = S - \sum_{j=1}^{r} w_j \otimes S^* w_j$, qui est donc de classe $\mathcal{C}_{.0}$. La preuve du théorème 3.1.2 est achevée.

3.2.3 L'approche modèle fonctionnel de C. Benhida et D. Timotin

Nous allons présenter ici une autre approche afin de montrer que l'opérateur $R_{F_0}^* := S - \sum_{j=1}^{r} w_i \otimes S^* w_i$ est $\mathcal{C}_{.0}$. Celle-ci repose sur une proposition due à C. Benhida et D. Timotin [4], dont la preuve repose sur le modèle fonctionnel de Sz-Nagy–Foias.

Proposition 3.2.3 ([4], lemme 3.1, p.190) *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une contraction telle que $\dim \mathcal{D}_T < \infty$, et telle que*

$$T|_{\mathcal{D}_T^\perp} = S|_{\mathcal{D}_T^\perp},$$

alors T est complètement non-unitaire et T est $\mathcal{C}_{.0}$.

Nous allons appliquer cette proposition à $R^*_{F_0} = S - \sum_{j=1}^r w_j \otimes S^* w_j$.

L'opérateur $R^*_{F_0}$ est une contraction d'après la remarque 3.1.1.

L'espace de défaut s'obtient en considérant $D^2 := Id - R_{F_0} R^*_{F_0}$, le carré de l'opérateur de défaut d'isométrie de $R^*_{F_0}$. Un calcul simple nous donne $D^2 = \sum_{j=1}^r S^* w_j \otimes S^* w_j$. Comme il est auto-adjoint, sa racine carrée existe et a pour image l'espace de défaut $\mathcal{D} = S^* W$ engendré par les vecteurs $S^* w_i$. La dimension de $S^* W$ est finie, la dimension de W étant finie. Il ne reste qu'à vérifier la dernière hypothèse :

Soit $g \in (S^* W)^\perp$, alors

$$\begin{aligned} \langle (\textstyle\sum_{i=1}^r w_i \otimes S^* w_i) g, w_j \rangle &= \langle g, (\textstyle\sum_{i=1}^r S^* w_i \otimes w_i) w_j \rangle \\ &= \langle g, (S^* w_j \otimes w_j) w_j \rangle \\ &= \langle g, \|w_j\|^2 S^* w_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que les $(w_j)_j$ forment une base orthonormée directe de W, et que $g \in (S^* W)^\perp$. Ainsi $R^*_{F_0}|_{\mathcal{D}^\perp} = S|_{\mathcal{D}^\perp}$. L'opérateur $R^*_{F_0}$ est $\mathcal{C}_{.0}$.

Deuxième partie

Espaces modèles de Sz-Nagy–Foias et espaces de De Branges–Rovnyak

Chapitre 4

Bases de noyaux reproduisants d'un espace de de Branges-Rovnyak vectoriel

4.1 Introduction

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de points distincts du disque unité $\mathbb{D}$, c'est à dire vérifiant :

$$\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) < +\infty.$$

On désigne par $B = \prod_{n\geq 1} b_{\lambda_n}$ le produit de Blaschke associé à cette suite et par B_n le produit de Blaschke défini par $B_n = B/b_{\lambda_n}$; ici $b_{\lambda_n}(z) = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\frac{\lambda_n - z}{1-\overline{\lambda}_n z}$. Enfin on note h_λ le noyau reproduisant normalisé de l'espace de Hardy H^2, associé à λ, c'est à dire

$$h_\lambda(z) = \frac{\sqrt{1-|\lambda|^2}}{1-\overline{\lambda}z}.$$

Alors il est bien connu que $(h_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est une suite minimale et complète de l'espace modèle $K_B := H^2 \ominus BH^2$ et cette suite est une base de Riesz si et seulement si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ satisfait la condition de Carleson [26]

$$\inf_{n\geq 1} |B_n(\lambda_n)| > 0.$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la question de savoir ce qui se passe si l'on remplace la suite de noyaux reproduisants de H^2 par une suite de noyaux reproduisants de l'espace de De Branges–Rovnyak vectoriel $\mathcal{H}(b)$, où b est une fonction holomorphe dans le disque unité, à valeurs opératorielles et contractives. Ce problème fut initié par N. Nikolskii [25] and S. Hruschev, N. Nikolski and B. Pavlov [20] dans le cas particulier où b est une fonction intérieure, à valeurs scalaires. Une de leurs motivations était le lien qui existe avec les systèmes d'exponentielles et certains problèmes d'interpolation. Puis, de nombreux auteurs [29, 43, 42, 2] se sont intéressés au cas des noyaux reproduisants de l'espace de Hardy vectoriel $H^2(E)$. Plus récemment, dans [12], E. Fricain considère le cas où b est une fonction intérieure à valeurs opératorielles et dans [13], il étudie le cas où b est un point extréme de la boule unité de H^∞. L'objet de ce chapitre est d'obtenir un analogue vectoriel du critère pour les bases de Riesz obtenu dans [13]. Cependant, comme nous le verrons, une simple adaptation de la méthode utilisée dans le cas scalaire ne semble pas fonctionner et nous utiliserons un autre point de vue basé sur le lien entre le modèle de Sz.Nagy-Foias et celui de De Branges–Rovnyak.

Le plan du chapitre est le suivant. La section 4.2 contient les principales définitions et le matériel préliminaire. Puis, dans la section 4.3, nous montrons comment on peut reformuler notre problème de bases de Riesz en un problème concernant l'inversibilité d'un certain opérateur défini en termes d'opérateurs de Toeplitz. Dans la section 4.4, en utilisant le lien avec le modèle fonctionnel de Sz.-Nagy-Foias, nous résolvons ce problème opératoriel et finalement dans la dernière section, nous donnons le critère pour qu'une suite de noyaux reproduisants de l'espace de De Branges–Rovnyak soit une base de Riesz.

4.2 Préliminaires

4.2.1 Espaces de Hardy et espaces de De Branges–Rovnyak

Si E est un espace de Hilbert complexe, séparable, $L^2(E)$ désigne l'espace des fonctions f définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$, à valeurs vectorielles dans E et telles que $\|f\|_2 < +\infty$, où

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} \|f(z)\|_E^2 \, dm(z),$$

et m désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

L'espace de Hardy correspondant $H^2(E)$ est défini comme l'espace des fonctions $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n \in E$, analytique sur $\mathbb{D}$, à valeurs dans E et telles que $\|f\|_2 < +\infty$, où

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} \|a_n\|_E^2.$$

Comme nous l'avions remarqué dans la première partie, l'espace $H^2(E)$ peut être considéré comme le sous-espace de $L^2(E)$ formé des fonctions dont les coefficients de Fourier négatif sont nuls. Le symbole P_+ (respectivement P_-) désigne la projection orthogonale de $L^2(E)$ sur $H^2(E)$ (respectivement sur $H^2_-(E) := L^2(E) \ominus H^2(E)$).

Nous désignons par $\mathcal{L}(E, E_*)$ l'espace des applications linéaires et bornées de E dans E_* et nous posons

$$L^\infty(E \to E_*) := \{f : \mathbb{T} \to \mathcal{L}(E, E_*) \text{ telle que } f \text{ est borélienne et bornée}\}.$$

$$H^\infty(E \to E_*) := \{f : \mathbb{D} \to \mathcal{L}(E, E_*) \text{ telle que } f \text{ est analytique et bornée.}\}$$

Rappelons que si $f \in H^\infty(E \to E_*)$, alors l'opérateur $f(z)$ admet une limite (au sens de la topologie forte opérateur) quand z tend radialement vers ζ, pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. Autrement dit, il existe un sous-ensemble $\sigma \subset \mathbb{T}$, négligeable et tel que

$$f^\sharp(\zeta)x := \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta)x$$

existe pour tout $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \sigma$ et pour tout $x \in E$. Il est clair que $f^\sharp \in L^\infty(E \to E_*)$ et on identifie f et $f^\sharp$. De plus, si $b \in H^\infty(E \to E_*)$ est tel que $b(\zeta)$ est une isométrie pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$, on dit que b est intérieure.
Pour une fonction $\varphi \in L^\infty(E \to E_*)$, nous notons $\boldsymbol{\varphi}$ l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\varphi}: & L^2(E) & \longrightarrow & L^2(E_*) \\ & f & \longmapsto & \boldsymbol{\varphi} f \end{array}$$

défini par $(\boldsymbol{\varphi} f)(\zeta) := \varphi(\zeta)f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$.
Il est clair que l'inclusion $\boldsymbol{\varphi} H^2(E) \subset H^2(E_*)$ est équivalente à $\varphi \in H^\infty(E \to E_*)$, et $\|\boldsymbol{\varphi}\| \le 1$ (ou $\|\boldsymbol{\varphi}_{|H^2(E)}\| \le 1$) est équivalent à $\|\varphi(\zeta)\| \le 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$. Le symbole T_φ désigne l'opérateur de Toeplitz de $H^2(E)$ dans $H^2(E_*)$ défini par

$$T_\varphi f := P_+(\boldsymbol{\varphi} f)\,.$$

Il est facile de voir que $T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2(E), H^2(E_*))$, $\|T_\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty$ et $T_\varphi^* = T_{\varphi^*}$, où $\varphi^* \in L^\infty(E_* \to E)$ est défini par $\varphi^*(\zeta) := (\varphi(\zeta))^*$, $\zeta \in \mathbb{T}$.

Maintenant, soit $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \le 1$. L'espace de De Branges–Rovnyak, $\mathcal{H}(b)$, associé à b, est constitué des fonctions de $H^2(E_*)$ qui appartiennent à l'image de l'opérateur $(Id - T_b T_b^*)^{1/2}$. C'est un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_b := \langle P_{\text{Ker }(Id - T_b T_b^*)^\perp} f_1, P_{\text{Ker }(Id - T_b T_b^*)^\perp} g_1\rangle_2,$$

où $f = (Id - T_b T_b^*)^{1/2} f_1$, $g = (Id - T_b T_b^*)^{1/2} g_1$ et $P_{\text{Ker }(Id - T_b T_b^*)^\perp}$ désigne la projection orthogonale de $H^2(E_*)$ sur Ker $(Id - T_b T_b^*)^\perp$. Notons que $\mathcal{H}(b)$ est contenu contractivement dans $H^2(E_*)$ et que le produit scalaire est défini pour que $(Id - T_b T_b^*)^{1/2}$ soit une isométrie partielle de $H^2(E_*)$ sur $\mathcal{H}(b)$. La norme sur $\mathcal{H}(b)$ sera notée $\|\cdot\|_b$.

Dans le cas particulier où b est une fonction intérieure, alors

$$\mathcal{H}(b) = H^2(E_*) \ominus \boldsymbol{b} H^2(E)$$

et il correspond aux sous-espaces invariants non triviaux de l'adjoint du Shift $S^*_{|H^2(E_*)}$. Dans ce cas, nous notons aussi par K_b l'espace de De Branges–Rovnyak engendré par b.

4.2.2 Noyaux reproduisants

Rappelons maintenant que pour $\lambda \in \mathbb{D}$, $e \in E_*$ et $f \in H^2(E_*)$, la formule de Cauchy implique que

$$\langle f(\lambda), e\rangle_{E_*} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle f(e^{i\theta}), e\rangle_{E_*}}{1 - \lambda e^{-i\theta}}\, d\theta = \langle f, k_\lambda e\rangle_2,$$

où

$$(k_\lambda e)(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}\, e, \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

En particulier, nous obtenons que $f \longmapsto \langle f(\lambda), e\rangle_{E_*}$ est bornée sur $H^2(E_*)$ et comme $\mathcal{H}(b)$ est contenu contractivement dans $H^2(E_*)$, la restriction à $\mathcal{H}(b)$ de cette forme linéaire est aussi bornée sur $\mathcal{H}(b)$. Conformément au théorème de Riesz, elle est donc induite, relativement au produit scalaire dans $\mathcal{H}(b)$, par un vecteur $k_\lambda^b e$ dans $\mathcal{H}(b)$. En d'autres termes, pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$\langle f, k_\lambda^b e\rangle_b = \langle f(\lambda), e\rangle_{E_*}.$$

Mais si $f = (Id - T_bT_b^*)^{1/2} f_1$, avec $f_1 \in \left(\text{Ker } (Id - T_bT_b^*)^{1/2}\right)^{\perp}$, on a

$$\langle f, (Id - T_bT_b^*)k_\lambda e\rangle_b = \langle f_1, (Id - T_bT_b^*)^{1/2} k_\lambda e\rangle_2 = \langle f, k_\lambda e\rangle_2$$

ce qui implique que

$$k_\lambda^b e = (Id - T_bT_b^*)k_\lambda e. \tag{4.1}$$

En utilisant le fait que $T_b^* k_\lambda e = b(\lambda)^* k_\lambda e$, on obtient

$$(k_\lambda^b e)(z) = \frac{Id - b(z)b(\lambda)^*}{1-\overline{\lambda}z} e, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Maintenant un calcul immédiat montre que

$$\|k_\lambda e\|_2^2 = \frac{\|e\|^2}{1-|\lambda|^2}, \quad \text{et} \quad \|k_\lambda^b e\|_b^2 = \frac{\|e\|^2 - \|b(\lambda)^* e\|^2}{1-|\lambda|^2}, \tag{4.2}$$

et on note par $x_\lambda e$ (resp. par $x_\lambda^b e$) le noyau reproduisant de $H^2(E_*)$ (resp. de $\mathcal{H}(b)$), c'est à dire

$$(x_\lambda e)(z) = \frac{\sqrt{1-|\lambda|^2}}{\|e\|} \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} e$$

et

$$(x_\lambda^b e)(z) = \frac{\sqrt{1-|\lambda|^2}}{\sqrt{\|e\|^2 - \|b(\lambda)^* e\|^2}} \frac{Id - b(z)b(\lambda)^*}{1-\overline{\lambda}z} e.$$

4.2.3 Le lien avec le modèle de Sz.-Nagy-Foias

Le lecteur trouvera une étude détaillée des relations entre les espaces de de Branges–Rovnyak et le modèle de Sz.-Nagy-Foias dans [30].

Soit $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \le 1$ et $\Delta := (Id - \mathbf{b}^*\mathbf{b})^{1/2}$. On définit l'espace de Hilbert

$$K := L^2(E_*) \oplus \text{clos } (\Delta\, L^2(E)),$$

muni du produit scalaire standard sur $L^2(E) \oplus L^2(E_*)$. On note clos $\Delta\, L^2(E)$ la fermeture de $\Delta\, L^2(E)$ dans $L^2(E)$.

Définissons les opérateurs $\pi : L^2(E) \to K$ et $\pi_* : L^2(E_*) \to K$ par

$$\pi(f) := \mathbf{b}f \oplus \Delta\, f \quad \text{et} \quad \pi_*(g) = g \oplus 0, \qquad f \in L^2(E),\ g \in L^2(E_*).$$

Posons

$$\mathbf{H}_b := \big(H^2(E_*) \oplus \text{clos}\,(\Delta\, L^2(E))\big) \ominus \{\mathbf{b}f \oplus \Delta\, f : f \in H^2(E)\}.$$

Cet espace $\mathbf{H}_b$ constitue l'espace modèle de Sz.-Nagy-Foias. Nous expliciterons dans le chapitre suivant cette terminologie d'espace modèle.

Le lemme suivant énonce les propriétés immédiates vérifiées par π et π_*, et donne une expression explicite de $P_{\mathbf{H}_b}$ projection orthogonale de K sur $\mathbf{H}_b$.

Lemme 4.2.1 *Avec les notations précédentes, π et π_* satisfont les propriétés suivantes :*

1. *Les applications π et π_* sont des isométries i.e. $\pi^*\pi = Id$, $\pi_*^*\pi_* = Id$.*
2. *Pour tout $f \oplus g \in K$, elles vérifient :*

$$\pi^*(f \oplus g) = \mathbf{b}^* f + \Delta\, g \ \text{ et } \ \pi_*^*(f \oplus g) = f.$$

3. *On a l'égalité $\pi_*^*\pi = \mathbf{b}$.*
4. *L'espace K coïncide avec l'enveloppe linéaire fermée engendrée par*

$$\pi L^2(E) \ \text{ et } \ \pi_* L^2(E_*).$$

5. *L'espace K se décompose sous la forme $\mathbf{H}_b \oplus \pi_* H^2_-(E_*) \oplus \pi H^2(E)$.*
6. *Si $P_{\mathbf{H}_b}$ désigne la projection orthogonale de K sur $\mathbf{H}_b$, alors :*

$$P_{\mathbf{H}_b} = Id - \pi P_+ \pi^* - \pi_* P_- \pi_*^*.$$

Preuve :

1. C'est une conséquence immédiate de la définition de π et π_*.
2. Si $h \in L^2(E)$ et $f \oplus g \in K$, par définition de π, on a :

$$\begin{aligned} \langle \pi^*(f \oplus g), h\rangle_2 =& \langle f \oplus g, \mathbf{b}h \oplus \Delta\, h\rangle_K \\ =& \langle f, \mathbf{b}h\rangle_2 + \langle g, \Delta\, h\rangle_2 \\ =& \langle \mathbf{b}^* f + \Delta\, g, h\rangle_2, \end{aligned}$$

car Δ est autoadjoint. Cette égalité reste vraie pour tout $h \in L^2(E)$, donc

$$\pi^*(f \oplus g) = \mathbf{b}^* f + \Delta\, g.$$

De même, par définition de π_*, on obtient :

$$\langle \pi_*^*(f \oplus g), h\rangle_2 = \langle f \oplus g, h \oplus 0\rangle_K = \langle f, h\rangle_2.$$

Donc $\pi_*^*(f \oplus g) = f$, ce qui prouve (2).

3. Ceci s'obtient directement à partir du point précédent.
4. Soit $h \oplus h' \in K = L^2(E_*) \oplus \text{clos } \Delta L^2(E)$. Supposons que $h \oplus h'$ est orthogonal à $\pi L^2(E)$ et $\pi_* L^2(E_*)$. Alors $h \oplus h' \perp \pi_* L^2(E_*) = L^2(E_*) \oplus \{0\}$, et ainsi $h = 0$. De plus
$$0 \oplus h' \perp \pi L^2(E) \Longleftrightarrow h' \perp \Delta f,\ \forall f \in L^2(E) \Longleftrightarrow h' = 0,$$
comme h' reste dans la fermeture de $\Delta L^2(E)$.
Ainsi K est bien l'enveloppe linéaire fermée de $\pi L^2(E)$ et de $\pi_* L^2(E_*)$.
5. Il suffit de montrer que $\mathbf{H}_b = (K \ominus \pi_* H^2_-) \ominus \pi H^2$. Comme $\pi_* H^2_-(E_*) = H^2_-(E_*) \oplus \{0\}$, on a $K \ominus \pi_* H^2_-(E_*) = H^2(E_*) \oplus \Delta L^2(E)$. Alors
$$(K \ominus \pi_* H^2_-(E_*)) \ominus \pi H^2(E) = \big(H^2(E_*) \oplus \Delta L^2(E)\big) \ominus \pi H^2(E) = \mathbf{H}_b$$
6. Ce dernier point découle immédiatement de la propriété 5. et du fait que $\pi P_+ \pi^*$ (resp. $\pi_* P_- \pi_*^*$) représente la projection orthogonale sur $\pi H^2(E)$ (resp. sur $\pi_* H^2(E_*)$).

$\square$

Le théorème suivant est le résultat clé qui fournit une expression utile de $Id - T_b T_b^*$ à l'aide du modèle fonctionnel.

Théorème 4.2.1 *Soit $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$. Alors*
$$Id - T_b T_b^* = \pi_*^* P_{\mathbf{H}_b} \pi_{*|H^2(E_*)}.$$

Preuve : D'après le lemme 4.2.1, propriété 6, on a :
$$\begin{aligned}\pi_*^* P_{\mathbf{H}_b} \pi_* =& \pi_*^*(Id - \pi P_+ \pi^* - \pi_* P_- \pi_*^*)\pi_* \\ =& \pi_*^* \pi_* - \pi_*^* \pi P_+ \pi^* \pi_* - \pi_*^* \pi_* P_- \pi_*^* \pi_*.\end{aligned}$$
Mais toujours d'après le lemme 4.2.1, $\pi_*^* \pi_* = Id$ et $\pi_*^* \pi = \mathbf{b}$, ce qui implique que
$$\pi_*^* P_{\mathbf{H}_b} \pi_* = Id - \mathbf{b} P_+ \mathbf{b}^* - P_- = P_+ - \mathbf{b} P_+ \mathbf{b}^*,$$
d'où
$$\pi_*^* P_{\mathbf{H}_b} \pi_{*|H^2(E_*)} = (P_+ - \mathbf{b} P_+ \mathbf{b}^*)_{|H^2(E_*)} = Id - T_b T_{b^*} = Id - T_b T_b^*.$$

$\square$

Avant de donner deux corollaires importants, rappelons un résultat de théorie des opérateurs implicitement utilisé par Sarason dans son livre [37].

Lemme 4.2.2 *Soient H, H_1 et H_2 des espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ et $B \in \mathcal{L}(H_2, H)$. Supposons que $AA^* = BB^*$. Alors A agit comme une isométrie partielle de H_1 sur $\mathcal{M}(B)$ (muni de la norme image).*

Rappelons que la norme image, qui permet de munir $\mathcal{M}(B)$ d'une structure hilbertienne, est définie par

$$\|Bx\|_{\mathcal{M}(B)} = \|P_{(\text{Ker } B)^\perp} x\|_{H_2}, \qquad x \in H_2,$$

où $P_{(\text{Ker } B)^\perp}$ représente la projection orthogonale de H_2 sur $(\text{Ker } B)^\perp$.

Preuve : Nous devons montrer les deux points suivants :

1. $A(H_1) = B(H_2)$.
2. Pour tout $x \in (\text{Ker } A)^\perp$, nous avons $\|Ax\|_{\mathcal{M}(B)} = \|x\|_{H_1}$.

D'après le théorème de factorisation de Douglas ([30] ou [9]), l'égalité $AA^* = BB^*$ implique l'existence d'une isométrie partielle $U : H_1 \to H_2$ ayant comme espace initial clos (ImB^*) et telle que $A^* = UB^*$. Mais comme U est une isométrie partielle, U^* est aussi une isométrie partielle, en particulier son image est fermée. Ainsi, on obtient :

$$U^* H_1 = (\text{Ker } U)^\perp = \text{clos } (ImB^*) = (\text{Ker } B)^\perp,$$

qui implique

$$A(H_1) = BU^*(H_1) = B((\text{Ker } B)^\perp) = B(H_2),$$

d'où le premier point.

Pour le second, remarquons que pour tout $x \in (\text{Ker } A)^\perp$,

$$\|Ax\|_{\mathcal{M}(B)} = \|BU^* x\|_{\mathcal{M}(B)} = \|P_{(\text{Ker } B)^\perp} U^* x\|_{H_2} = \|U^* x\|_{H_2},$$

car $U^* x \in \text{Im } U^* = (\text{Ker } B)^\perp$. Or le fait que U^* soit une isométrie partielle et que $x \in (\text{Ker } A)^\perp = (\text{Ker } U^*)^\perp$ impliquent que $\|Ax\|_{\mathcal{M}(B)} = \|x\|_{H_1}$, ce qui achève la preuve.

□

Corollaire 4.2.2 *Soit $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$. Avec les notations précédentes, l'application π_*^* est une isométrie partielle de $\mathbf{H}_b$ sur $\mathcal{H}(b)$. Autrement dit, on a :*

1. *$\pi_*^*(\mathbf{H}_b) = \mathcal{H}(b)$,*
2. *$\|\pi_*^* g\|_b = \|g\|_{\mathbf{H}_b}$, $g \in \mathbf{H}_b \ominus \text{Ker } (\pi^*_{*|\mathbf{H}_b})$*

Preuve : Il suffit de combiner le théorème 4.2.1 et le lemme 4.2.2.

□

Achevons cette présentation générale en précisant quand π_*^* est une isométrie de $\mathbf{H}_b$ sur $\mathcal{H}(b)$.

Corollaire 4.2.3 *Soit $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$. Alors l'opérateur $\pi^*_{*|\mathbf{H}_b}$ est une isométrie de $\mathbf{H}_b$ sur $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si clos $\Delta H^2(E) =$ clos $\Delta L^2(E)$.*

Preuve : D'après le Corollaire 4.2.2, la seule chose à montrer est que $\mathrm{Ker}(\pi^*_{*|\mathbf{H}_b}) = \{0\}$ si et seulement si clos $\Delta H^2(E) =$ clos $\Delta L^2(E)$. Mais comme π^*_* est la projection sur la première composante de K, Ker $(\pi^*_{*|\mathbf{H}_b}) = \{f \oplus g \in \mathbf{H}_b : f = 0\}$.

Si $g \in$ clos $\Delta L^2(E)$, on a

$$\begin{aligned} 0 \oplus g \in \mathbf{H}_b &\Longleftrightarrow 0 \oplus g \perp \{\mathbf{b}f \oplus \Delta f : f \in H^2(E)\} \\ &\Longleftrightarrow g \perp \Delta H^2(E). \end{aligned}$$

Ainsi Ker $(\pi^*_{*|\mathbf{H}_b}) = \{0\} \oplus (\text{clos } \Delta L^2(E) \ominus \text{clos } \Delta H^2(E))$. On obtient donc que $\pi^*_{*|\mathbf{H}_b}$ est injective si et seulement si clos $\Delta H^2(E) =$ clos $\Delta L^2(E)$.

□

Dans [30] et [28, pp. 84-86], le lecteur pourra trouver différentes conditions équivalentes à l'assertion clos $\Delta H^2(E) =$ clos $\Delta L^2(E)$. En particulier, il est prouvé que cette condition est équivalente au fait que les polynômes sont denses dans $L^2(E, \Delta)$. De plus, si dim $E = 1$, cette condition caractérise les points extrémaux de la boule unité de $H^\infty(E \to E_*)$, dont les fonctions intérieures sont des cas particuliers.

4.3 Point de départ

Rappelons que nous nous interessons au problème suivant :

Étant données une fonction $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$, une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ et une suite $(e_n)_{n\geq 1} \subset E_*$, nous cherchons un critère géométrique pour que la suite $(x^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ forme une base de Riesz (de son enveloppe linéaire fermée ou de $\mathcal{H}(b)$)

4.3.1 Remarques préliminaires

Notons que si dim $E_* = +\infty$ et si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une suite orthonormale de E_*, alors $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une suite orthonormale de $H^2(E_*)$, quelque soit le choix de la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{D}$. Dans un certain sens, si E_* est un espace de Hilbert de dimension infinie, il y a trop de liberté sur les vecteurs e_n pour espérer obtenir un critère satisfaisant pour les bases de Riesz. C'est pourquoi nous supposerons dans la suite que dim $E_* < +\infty$.

Maintenant, il est facile de voir que si $(x^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz, alors $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est minimale, ce qui implique que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke [2, page 65-67]. Par conséquent, nous supposerons dans toute la suite que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$.

Rappelons que si S désigne le Shift sur $H^2(E_*)$, alors $S^*(x_{\lambda_n} e_n) = \overline{\lambda}_n x_{\lambda_n} e_n$. En particulier, span $(x_{\lambda_n} e_n : n \geq 1)$ est S^*-invariant et nous obtenons d'après le théorème de Lax-Halmos (voir [26, page 17]) qu'il existe un sous-espace $F \subset E_*$ et une fonction intérieure $B \in H^\infty(F \to E_*)$ tels que

$$\text{span } (x_{\lambda_n} e_n : n \geq 1) = H^2(E_*) \ominus BH^2(F) = K_B.$$

4.3.2 Résultat de départ

L'idée principale, qui vient de [25], est de voir la famille $(x^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ comme une distortion de $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$. En fait, nous allons supposer que l'action de l'opérateur $Id - T_b T_b^*$ ne perturbe pas trop la norme des noyaux reproduisants $k_{\lambda_n} e_n$ dans le sens où :

$$\sup_{n\geq 1} \frac{\|k_{\lambda_n} e_n\|_2}{\|(Id - T_b T_b^*) k_{\lambda_n} e_n\|_b} < +\infty.$$

En utilisant (4.2), on voit que cette condition est équivalente à

$$\sup_{n\geq 1} \|b(\lambda_n)^* e_n\| < 1. \tag{4.3}$$

Sous cette dernière condition, nous pouvons formuler le résultat suivant.

Théorème 4.3.1 *Soit $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$, soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de $\mathbb{D}$ et soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset E_*$, $\|e_n\| = 1$. Supposons que $\dim E_* < +\infty$ et que la condition (4.3) est satisfaite. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *la suite $(x^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de son enveloppe linéaire fermée (resp. de $\mathcal{H}(b)$) ;*

b) *la suite $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de K_B et l'opérateur $(Id - T_b T_b^*)_{|K_B} : K_B \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ est un isomorphisme sur son image (resp. sur $\mathcal{H}(b)$).*

Preuve : Avec la formule (4.1), nous avons $(Id - T_b T_b^*)(k_{\lambda_n} e_n) = k^b_{\lambda_n} e_n$ et la condition (4.3) implique que $\|k^b_{\lambda_n} e_n\|_b \asymp \|k_{\lambda_n} e_n\|_2$. Maintenant il est facile de vérifier que l'uniforme minimalité de $(k^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ implique l'uniforme minimalité de $(k_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ (voir par exemple [20, page 228]). Conformément à un résultat de S. Treil [42], cette dernière propriété est équivalente au fait que la suite $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ forme une base de Riesz de K_B. Mais puisque l'opérateur $(Id - T_b T_b^*)_{|K_B}$ transforme une base de Riesz de K_B en une base de Riesz de son enveloppe linéaire (resp. de $\mathcal{H}(b)$), cet opérateur est un isomorphisme de K_B sur son image (resp. sur $\mathcal{H}(b)$).

b) $\Longrightarrow$ a) : Réciproquement, si $(Id - T_b T_b^*)_{|K_B}$ est un isomorphisme sur son image et si la suite $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de K_B, il est clair que $((Id - T_b T_b^*) x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est aussi une base de Riesz de son enveloppe linéaire fermée. Mais

$$(Id - T_b T_b^*) x_{\lambda_n} e_n = \frac{\|k^b_{\lambda_n} e_n\|_b}{\|k_{\lambda_n} e_n\|_2} x^b_{\lambda_n} e_n,$$

et comme $\frac{\|k^b_{\lambda_n} e_n\|_b}{\|k_{\lambda_n} e_n\|_2}$ est borné (inférieurement et supérieurement), nous obtenons que la suite $(x^b_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de son enveloppe linéaire fermée. De plus, si $(Id - T_b T_b^*)_{|K_B}$ est un isomorphisme sur $\mathcal{H}(b)$, nous avons

$$\text{span } (x^b_{\lambda_n} e_n : n \geq 1) = \text{span } ((Id - T_b T_b^*) k_{\lambda_n} e_n : n \geq 1) = \mathcal{H}(b).$$

□

Remarquons que la question des bases de Riesz de noyaux reproduisants de $H^2(E_*)$ a été complètement résolue par S. Ivanov [2, page 73]. Par conséquent, le théorème 4.3.1 réduit notre problème sur les bases au problème suivant : trouver une caractérisation géométrique pour que l'opérateur $(Id - T_bT_b^*)_{|K_B} : K_B \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ soit un isomorphisme sur son image ou sur $\mathcal{H}(b)$.

4.4 Inversibilité de $(Id - T_bT_b^*)_{|K_B}$

Dans le cas particulier où b est une fonction intérieure scalaire, nous avons dans l'espace $BH^2_- = H^2_- \oplus K_B$, la décomposition suivante

$$Id_{H^2_-} \oplus (Id - T_bT_b^*)_{|K_B} = bJT_{b\overline{B}}J\overline{B},$$

où $Jg = \overline{zg}$, $g \in L^2$ (voir [27, lemme 4.4.4, page 309]). Puisque J, la multiplication par b et $\overline{B}$ sont des opérateurs unitaires sur L^2, cette formule implique que $(Id - T_bT_b^*)_{|K_B}$ est un isomorphisme sur son image (resp. sur $\mathcal{H}(b)$) si et seulement si l'opérateur de Toeplitz $T_{b\overline{B}}$ est inversible à gauche (resp. inversible). Maintenant en utilisant un résultat bien connu et élémentaire sur l'inversibilité des opérateurs de Toeplitz à symbole unimodulaire, nous obtenons le critère pour l'inversibilité de $(Id - T_bT_b^*)_{|K_B}$ obtenu dans [20]. Mais la formule ci-dessus n'est plus vraie si b n'est pas une fonction intérieure.

Dans le cas où b est un point extréme de la boule unité de H^∞ (scalaire), le critère pour l'inversibilité de $(Id - T_bT_b^*)_{|K_B}$ obtenu dans [13] est basé sur la propriété que

$$\text{span}\left(\frac{b(z) - b(\lambda)}{z - \lambda} : \lambda \in \mathbb{D}\right) = \mathcal{H}(b).$$

Ce résultat de complétude ne semble plus être vrai dans notre contexte vectoriel général.

Comme les méthodes existantes ne s'appliquent pas dans le cas général, nous adoptons un point de vue différent basé sur le lien existant avec le modèle de Sz.-Nagy–Foias.

Lemme 4.4.1 *Soient $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$ et $\Theta \in H^\infty(F \to E_*)$ une fonction intérieure. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$Id - T_bT_b^* : K_\Theta \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ est un isomorphisme de K_Θ sur son image ;*

(ii) *$dist(\Theta^*b, H^\infty(E \to F)) < 1$, où Θ^*b est la fonction de $L^\infty(E \to F)$ définie par $(\Theta^*b)(\zeta) = \Theta(\zeta)^*b(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$.*

Preuve : D'après le théorème 4.2.1,

$$(i) \Longleftrightarrow \exists c > 0 : \quad c\|f\|_2 \leq \|\pi_*^* P_{\mathbf{H}_b}\pi_* f\|_b, \ f \in K_\Theta.$$

Le corollaire 4.2.2 implique que $\pi^*_{*|\mathbf{H}_b}$ est une isométrie partielle de $\mathbf{H}_b$ sur $\mathcal{H}(b)$ et comme Ker $(\pi^*_{*|\mathbf{H}_b})^\perp$ = clos $Im(P_{\mathbf{H}_b}\pi_*)$, on obtient

$$\|\pi_*^* P_{\mathbf{H}_b}\pi_* f\|_b = \|P_{\mathbf{H}_b}\pi_* f\|_K, \ f \in K_\Theta.$$

Ainsi, on a :

$$(i) \iff \exists c > 0 : \quad c\|f\|_2 \leq \|P_{\mathbf{H}_b}\pi_* f\|_K, \ f \in K_\Theta.$$

Comme π_* est une isométrie partielle, $\mathbf{H}_b \perp \pi_* H^2_-$ et $\pi_* K_\Theta \perp \pi_* H^2_-(E_*)$, on montre facilement que :

$$(i) \iff \exists c > 0 : \quad c\|f \oplus g\|_2^2 \leq \left\|P_{\mathbf{H}_b \oplus \pi_* H^2_-(E_*)}\pi_*(f \oplus g)\right\|_K^2, \ f \oplus g \in K_\Theta \oplus H^2_-(E_*).$$

Mais $K = \pi_* H^2_-(E_*) \oplus \mathbf{H}_b \oplus \pi H^2(E)$, les sommes étant orthogonales, il suit :

$$\left\|P_{\mathbf{H}_b \oplus \pi_* H^2_-(E_*)}\pi_*(f \oplus g)\right\|_K^2 + \left\|P_{\pi H^2(E)}\pi_*(f \oplus g)\right\|_K^2 = \|\pi_*(f \oplus g)\|_K^2 = \|f \oplus g\|_2^2.$$

Finalement, on obtient :

$$(i) \iff \left\|P_{\pi H^2(E)}\pi_{*|K_\Theta \oplus H^2_-(E_*)}\right\| < 1.$$

Maintenant, remarquons que :

$$\begin{aligned}
\left\|P_{\pi H^2(E)}\pi_{*|K_\Theta \oplus H^2_-(E_*)}\right\| &= \left\|P_{K_\Theta \oplus H^2_-(E_*)}\pi^*_{*|\pi H^2(E)}\right\| \quad \text{(en prenant l'adjoint)} \\
&= \left\|P_{K_\Theta \oplus H^2_-(E_*)}\mathbf{b}_{|H^2(E)}\right\| \quad \text{(comme } \pi_*^*\pi = \mathbf{b}\text{)} \\
&= \left\|P_{K_\Theta}\mathbf{b}_{|H^2(E)}\right\| \quad \text{(comme } \mathbf{b}H^2(E) \subset H^2(E_*)\text{)} \\
&= \left\|\Theta P_- \Theta^* \mathbf{b}_{|H^2(E)}\right\| \quad \text{(comme } P_{K_\Theta|H^2(E_*)} = \Theta P_- \Theta^*\text{)} \\
&= \|H_{\Theta^* b}\| \quad \text{(comme } \Theta \text{ est intérieure).}
\end{aligned}$$

Le théorème de Nehari permet de conclure :

$$(i) \iff \|H_{\Theta^* b}\| < 1 \iff \text{dist}\,(\Theta^* b, H^\infty(E \to E)) < 1.$$

□

Lemme 4.4.2 *Soient* $f_1 \in L^2(E)$*,* $f_2 \in L^2(E_*)$*, et* U *défini par :*

$$U(\pi f_1 + \pi_* f_2) = \pi z f_1 + \pi_* z f_2.$$

Alors U *est un opérateur unitaire sur* K*.*

Preuve : Tout d'abord, remarquons que :

$$\begin{aligned}
\|U(\pi f_1 + \pi_* f_2)\|_K^2 &= \|\pi z f_1\|_K^2 + \|\pi_* z f_2\|_K^2 + 2\Re\mathrm{e}\langle \pi z f_1, \pi_* z f_2\rangle_K \\
&= \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2 + 2\Re\mathrm{e}\,\langle \mathbf{b} f_1, f_2\rangle_2 \ \text{ comme } \pi_*^*\pi = \mathbf{b} \\
&= \|\pi f_1 + \pi_* f_2\|_K^2.
\end{aligned}$$

Ceci montre que U est bien défini sur K et que U est une isométrie. Pour conclure, il suffit de remarquer que $zL^2(E) = L^2(E)$ et $zL^2(E_*) = L^2(E_*)$. Ainsi, U est surjectif et donc unitaire.

□

Lemme 4.4.3 *Soient $x \in F$, P_x la projection orthogonale sur le sous-espace porté par x et $h_x \in H^\infty(F \to F)$ définie par*

$$h_x(z) := zP_x + (Id - P_x), \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Alors h_x est une fonction intérieure de $H^\infty(F \to F)$ et on a $K_{h_x} = \mathbb{C}x$.

Ici, nous identifions $\mathbb{C}x$ avec le sous-espace des fonctions $f \in H^2(F)$ pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda x$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Preuve : Tout d'abord, pour $\zeta \in \mathbb{T}$, on a

$$h_x(\zeta)^* h_x(\zeta) = \left(\overline{\zeta} P_x + (Id - P_x)\right)\left(\zeta P_x + (Id - P_x)\right) = \overline{\zeta}\zeta P_x + (Id - P_x) = Id,$$

ce qui signifie que h_x est une fonction intérieure de $H^\infty(F \to F)$.

La première inclusion $\mathbb{C}x \subset K_{h_x}$ est évidente. Prenons $f \in H^2(F)$, $f \perp \mathbb{C}x$. Il s'ensuit $\langle f(0), x\rangle_F = 0$. Définissons alors $\varphi \in L^2(F)$ par

$$\varphi(z) = \overline{z}\langle f(z), x\rangle_F x + (Id - P_x) f(z), \; z \in \mathbb{T}.$$

Comme $\langle f(0), x\rangle_F = 0$, on a $\varphi \in H^2(F)$ et

$$(h_x\varphi)(z) = h_x(z)\varphi(z) = z\overline{z}\langle f(z), x\rangle_F x + (Id - P_x) f(z) = f(z),$$

avec $H^2(F) \ominus \mathbb{C}x \subset h_x H^2(F) = K_{h_x}^\perp$, ce qui achève la preuve.

□

Théorème 4.4.1 *Soient $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \le 1$ et $\Theta \in H^\infty(F \to E_*)$ une fonction intérieure. Supposons que clos $\Delta H^2(E)$ = clos $\Delta L^2(E)$ et que l'opérateur $Id - T_b T_b^*$: $K_\Theta \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ est inversible à gauche. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'opérateur $Id - T_b T_b^*$: $K_\Theta \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ est un isomorphisme ;*

(ii) *pour tout $x \in F$, on a*

$$dist\ (h_x^* \Theta^* b, H^\infty(E \to F)) = 1.$$

Preuve : D'après le théorème 4.2.1, le corollaire 4.2.3 et le lemme 4.4.1, il est clair que

(i) $\Longleftrightarrow P_{\mathbf{H}_b}\pi_{*|K_\Theta} : K_\Theta \longrightarrow \mathbf{H}_b$ est inversible.

et

(ii) $\Longleftrightarrow$ pour tout $x \in F$, $P_{\mathbf{H}_b}\pi_{*|K_{\Theta h_x}} : K_{\Theta h_x} \longrightarrow \mathbf{H}_b$ n'est pas inversible à gauche.

Commençons par montrer l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Remarquons que $K_\Theta \subsetneq K_{\Theta h_x}$ et si $P_{\mathbf{H}_b}\pi_{*|K_{\Theta h_x}}$ est injectif, alors $P_{\mathbf{H}_b}\pi_* K_\Theta \subsetneq P_{\mathbf{H}_b}\pi_* K_{\Theta h_x}$. Mais l'inversibilité de $P_{\mathbf{H}_b}\pi_{*|K_\Theta}$ implique

$$\mathbf{H}_b = P_{\mathbf{H}_b}\pi_* K_\Theta \subsetneq P_{\mathbf{H}_b}\pi_* K_{\Theta h_x} \subset \mathbf{H}_b,$$

ce qui est absurde. Donc $P_{\mathbf{H}_b}\pi_{*|K_{\Theta h_x}}$ n'est pas injectif donc pas inversible à gauche.

Réciproquement, nous allons montrer non (i) $\Longrightarrow$ non (ii) par l'absurde. Supposons que $P_{\mathbf{H}_b}\pi_{*|K_\Theta}$ est non inversible et que pour tout $x \in F$, *dist* $(h_x^*\Theta^*b, H^\infty(E \to F)) = 1$.

Par hypothèse, $P_{\mathbf{H}_b}\pi_{*|K_\Theta}$ est inversible à gauche, donc $P_{\mathbf{H}_b}\pi_*K_\Theta$ n'est pas dense dans $\mathbf{H}_b$. Ainsi, il existe $\chi \in \mathbf{H}_b$, $\chi \neq 0$ telle que $\chi \perp \pi_*K_\Theta$. Le point (ii) implique que pour tout $x \in F$ il existe $g_x \in K_{\Theta h_x} \setminus K_\Theta$ vérifiant $\pi_*(g_x) \perp \mathbf{H}_b$ et donc $P_{\mathbf{H}_b}\pi_*g = 0$.

Point 1 : $\forall k \geq 0$, $\forall x \in F$, on a $U^k\pi_*g_x \in \pi H^2(E)$.
En fait, comme $g_x \in K_{\Theta h_x} \subset H^2(E_*)$ et π_* est une isométrie, il est clair que $\pi_*g_x \in \pi_*H^2(E_*) \subset (\pi_*H^2_-(E_*))^\perp$. Ainsi $\pi_*g_x \in \mathbf{H}_b \oplus \pi H^2(E)$. Mais par construction, $\pi_*g_x \perp \mathbf{H}_b$ et on obtient que $\pi_*g_x \in \pi H^2(E)$. Il suffit de remarquer que $\pi H^2(E)$ est U-invariant, ce qui entraine $U^k\pi_*g_x \in \pi H^2(E)$ et prouve le point 1. En particulier, on a $\pi_*(z^kg_x) = U^k(\pi_*g_x) \perp \chi$.

Point 2 : span $\big(K_\Theta, z^kg_x : k \geq 0,\, x \in F\big) = H^2(E_*)$.
Soit $f \in H^2(E_*)$ et supposons que $f \perp$ span $\big(K_\Theta, z^kg_x : k \geq 0,\, x \in F\big)$. Comme $f \perp K_\Theta$, il existe $f_1 \in H^2(F)$ telle que $f = \Theta f_1$. Montrons par récurrence que pour tout $k \geq 0$, $f_1^{(k)}(0) = 0$, ce qui impliquera que $f_1 \equiv 0$, et achèvera la preuve du point 2.

Tout d'abord, il est clair que $K_{\Theta h_x} = K_\Theta \oplus \Theta K_{h_x}$ et d'autre part, le lemme 4.4.3 implique que $K_{\Theta h_x} = K_\Theta \oplus \mathbb{C}\Theta x$. Mais comme $g_x \in K_{\Theta h_x} \setminus K_\Theta$, il existe $g_x^\Theta \in K_\Theta$ et $\lambda_x \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$g_x = g_x^\Theta + \lambda_x\Theta x.$$

Maintenant écrivons que $f \perp g_x$. Comme Θ est intérieure, on obtient

$$0 = \langle \Theta f_1, g_x^\Theta + \lambda_x\Theta x\rangle_2 = \overline{\lambda}_x\langle f_1, x\rangle_2 = \lambda_x\langle f_1(0), x\rangle_E.$$

Comme $\lambda_x \neq 0$, $\langle f_1(0), x\rangle_F = 0$. Cette égalité étant vraie pour tout $x \in F$, on a $f_1(0) = 0$. Supposons maintenant que $f_1^{(k)}(0) = 0$. Ceci signifie qu'il existe $f_{k+2} \in H^2(F)$ telle que $f_1 = z^{k+1}f_{k+2}$. Ecrivons alors $f \perp z^{k+1}g_x$, pour avoir :

$$\begin{aligned} 0 =& \langle \Theta z^{k+1}f_2, z^{k+1}g_x\rangle_2 \\ =& \langle \Theta f_{k+2}, g_x\rangle_2. \end{aligned}$$

On en déduit $f_{k+2}(0) = 0$, et donc $f_1^{(k+1)}(0) = 0$. La propriété pour f_1 s'en déduit par récurrence.

Comme π_* est une isométrie le point 2 implique que :

$$\text{span }\big(\pi_*K_\Theta, \pi_*(z^kg_x) : k \geq 0,\, x \in F\big) = \pi_*H^2(E_*).$$

Par construction, $\chi \perp \pi_*K_\Theta$ et on a montré que $\chi \perp \pi_*(z^kg_x)$, pour tout $k \geq 0$ et tout $x \in F$. Finalement, on a $\chi \perp \pi_*H^2(E_*)$.

Pour conclure, on utilise le fait que clos $\Delta H^2(E) =$ clos $\Delta L^2(E)$, ce qui implique que

$$\mathbf{H}_b = (\pi H^2(E) \vee \pi_*H^2(E_*)) \ominus \pi H^2(E).$$

Comme $\chi \in \mathbf{H}_b$, on a $\chi \perp \pi H^2(E)$ et on vient de prouver que $\chi \perp \pi_* H^2(E_*)$. Ainsi $\chi = 0$, ce qui est exclu et achève la preuve du théorème.

□

Voici le résultat principal, corollaire immédiat du lemme 4.4.1 et du théorème 4.4.1 :

Théorème 4.4.2 *Soient $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$ et $\Theta \in H^\infty(F \to E_*)$ une fonction intérieure. Supposons que clos $\Delta H^2(E) =$ clos $\Delta L^2(E)$. Alors l'opérateur $(Id - T_b T_b^*)_{|K_\Theta}$ est un isomorphisme de K_Θ sur $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si*

$$\begin{cases} dist\ (\Theta^* b, H^\infty(E \to F)) < 1, \\ dist\ (h_x^* \Theta^* b, H^\infty(E \to F)) = 1, \qquad \forall x \in F. \end{cases}$$

Dans le cas scalaire $\dim E = \dim E_* = \dim F = 1$, nous avons bien sûr $h_x(z) = z$ et on retrouve le résultat obtenu dans [13].

4.5 Caractérisation des bases de noyaux de $\mathcal{H}(b)$

Pour établir le critère précisément, nous devons fixer quelques notations supplémentaires. Nous définissons pour $\lambda \in \mathbb{D}$ et pour $r > 0$, le disque pseudo-hyperbolique

$$\Omega(\lambda, r) := \{z \in \mathbb{D} : |b_\lambda(z)| < r\}, \quad \text{où } b_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}.$$

Alors pour une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathbb{D}$, nous posons

$$G(\Lambda, r) = \bigcup_{n \geq 1} \Omega(\lambda_n, r).$$

Pour $m \geq 1$, nous désignons par $G_m(\Lambda, r)$ les composantes connexes de l'ensemble $G(\Lambda, r)$ et nous écrivons

$$E_m(r) := \{n \geq 1 : \lambda_n \in G_m(\Lambda, r)\}.$$

Enfin si u est un vecteur d'un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ et si $\mathcal{F}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$, on notera par $\alpha(u, \mathcal{F})$ l'angle entre le vecteur u et le sous-espace $\mathcal{F}$.

Théorème 4.5.1 *Soient $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$,$(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de Blaschke de $\mathbb{D}$ et $(e_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs unitaires de E_*. Supposons les hypothèses suivantes satisfaites : $N := dim\ E_* < +\infty$, avec de plus*

$$\sup_{n \geq 1} \|b(\lambda_n)^* e_n\| < 1,$$

et clos $(\Delta H^2(E)) =$ clos $(\Delta L^2(E))$ où $\Delta = (Id - \mathbf{bb}^*)^{1/2}$. Alors, la suite $(x_{\lambda_n}^b e_n)_{n \geq 1}$ est une base de Riesz de son enveloppe linéaire fermée (resp. de $\mathcal{H}(b)$) si et seulement si :

(i) *la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est l'union d'au plus N suites de Carleson ;*

(ii) *il existe* $r > 0$ *tel que*

$$\inf_{m\geq 1} \min_{n\in E_m(r)} \alpha\left(e_n, span(e_p \ : p \in E_m(r), p \neq n)\right) > 0$$

où $\alpha(u,P)$ *représente l'angle entre le vecteur* u *et le sous-espace* P *;*

(iii) $dist(B^*b, H^\infty(E \to F)) < 1$ *(resp. et aussi* $dist(h_x^* B^* b, H^\infty(E \to F)) = 1,\ \forall x \in F$*).*

Preuve : En utilisant le théorème 4.3.1, le lemme 4.4.1 et le théorème 4.4.2, la seule chose à montrer est que les deux conditions a) et b) sont équivalentes au fait que $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de K_B. Mais c'est précisément le résultat de S. Ivanov [2, page 73].

□

Ce résultat généralise ceux précédemment obtenus par E. Fricain [12] dans le cas où b est intérieure et [13] dans le cas où b est un point extrémal à valeur scalaire.

Chapitre 5

Fonction caractéristique d'une contraction complexe symétrique

L'essentiel de ce chapitre est l'objet de l'article [8].

5.1 Introduction

Les opérateurs complexes symétriques sur un espace de Hilbert complexe sont caractérisés par l'existence d'une base orthonormale par rapport à laquelle leur matrice est symétrique. Leur théorie est donc étroitement reliée à la théorie des matrices symétriques, qui est un sujet classique en algèbre linéaire. Une définition plus intrinsèque implique l'introduction de la notion de conjugaison sur un espace de Hilbert, c'est à dire une application antilinéaire, isométrique et involutive, par rapport à laquelle la notion de symétrie est définie. De tels opérateurs ou matrices apparaissent naturellement dans différents domaines des mathématiques ou de la physique ; nous référons à [16] pour plus de détails sur l'historique du sujet ainsi que pour les nombreuses connections à d'autres domaines aussi bien que pour une liste plus large de références.

L'intéret pour les opérateurs complexes symétriques a été récemment ravivé par les travaux de Garcia et Putinar [15, 14, 16]. Dans leurs articles, on établit un cadre général pour l'étude de ces opérateurs et on montre qu'une large classe d'opérateurs sur un espace de Hilbert peut être étudiée dans ce cadre. Les exemples sont assez divers : les opérateurs normaux sont par exemple complexes symétriques, mais aussi certains type d'opérateurs de Volterra ou de Toeplitz, ainsi que la compression du shift sur un espace modèle $H^2 \ominus \phi H^2$, où ϕ désigne une fonction intérieure non constante.

L'objet de ce chapitre est d'explorer plus en avant des généralisations de ce dernier exemple. Le contexte naturel est la théorie des opérateurs modèles pour les contractions complètement non unitaires développée par Sz.-Nagy et Foais [11]. Le principal résultat de ce chapitre est un critère pour qu'une contraction soit complexe symétrique en termes de sa fonction caractéristique. Dans la suite de nombreuses applications de ce résultat sont données.

Le plan du chapitre est le suivant. La prochaine section présente des préliminaires sur les opérateurs complexes symétriques et la théorie de Sz.-Nagy-Foias. La section 5.3 présente le critère annoncé. Dans la section 5.4, on discute des fonctions caractéristiques intérieures 2×2, et les résultats sont appliqués dans la dernière section pour obtenir des séries d'exemples de contractions complexes symétriques dont les indices de défaut valent 2.

5.2 Préliminaires

5.2.1 Opérateurs complexes symétriques

Nous rappelons d'abord quelques faits basiques qui sont issus de [15, 14, 16]. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires et bornés sur $\mathcal{H}$.

Définition 5.2.1 (Conjugaison) *On dit qu'un opérateur antilinéaire C sur $\mathcal{H}$ est un opérateur de conjugaison (ou simplement une conjugaison) si $C^2 = Id$ et $\langle Cf, Cg\rangle = \langle g, f\rangle$ pour tout $f, g \in H$. En d'autres mots, C est antilinéaire, isométrique et involutif.*

Sur $\mathbb{C}$ la seule conjugaison est la conjugaison complexe standard $z \longmapsto \bar{z}$. La notion de conjugaison ci-dessus a été introduite justement pour généraliser ceci à un espace de Hilbert arbitraire.

L'application C définie sur $\mathbb{C}^3$ par

$$C : (z_1, z_2, z_3) \longmapsto (\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$$

est une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$.

Définition 5.2.2 (Opérateur complexe-symétrique) *Soit C un opérateur de conjugaison sur $\mathcal{H}$.*

1. *On dit qu'un opérateur linéaire T sur $\mathcal{H}$ est C-symétrique si*

$$T = CT^*C.$$

2. *On dit qu'un opérateur linéaire T sur $\mathcal{H}$ est complexe-symétrique s'il existe une conjugaison C sur $\mathcal{H}$ telle que T est C-symétrique.*

Voici un exemple sur $\mathbb{C}^3$ d'opérateur symétrique. Considérons la matrice de Jordan sur $\mathbb{C}^3$:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 0, -i)$, et $e_3 = (0, 1, 0)$ forment une base orthogonale et pour la conjugaison définie par

$$C(z_1, z_2, z_3) := (\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1),$$

on a $J = CJ^*C$, autrement dit J est C-symétrique. De plus, la matrice de J dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \lambda & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \lambda \end{pmatrix}$$

qui est symétrique.

Sur cet exemple, on voit que l'opérateur complexe symétrique J admet une base orthonormale dans laquelle sa matrice est symétrique. Cette propriété est en fait un fait général comme le montre le résultat suivant.

Lemme 5.2.1 ([16] page 8) *Soit C une conjugaison sur $\mathcal{H}$. Alors :*

1. *il existe une base orthonormale $(e_n)_{n=1}^{dim\ \mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ telle que pour tout entier n, $Ce_n = e_n$. Une telle base est dite base $C-$réelle orthonormée de $\mathcal{H}$;*
2. *l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est $C-$symétrique si et seulement s'il existe une base $C-$réelle orthonormée $(e_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ telle que*

$$\langle Te_n, e_m \rangle = \langle Te_m, e_n \rangle \,, \ \forall n, m \geq 1.$$

Preuve : Soit $(e_n)_n$ une base orthonormée du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(Id+C)\mathcal{H}$. Ainsi chaque vecteur de $(Id + C)\mathcal{H}$ s'écrit sous la forme d'une somme de termes de carrés sommables $\sum_{n\geq 1} a_n e_n$. Soit $h \in \mathcal{H}$, décomposons ce vecteur ainsi :

$$\begin{aligned} h &= \tfrac{1}{2}(Id + C)h + i\tfrac{1}{2i}(Id - C)h \\ &= \tfrac{1}{2}(Id + C)h + i\tfrac{1}{2}(Id + C)(-ih). \end{aligned}$$

Ainsi tout vecteur h de $\mathcal{H}$ se trouve dans l'enveloppe linéaire complexe de $(Id + C)\mathcal{H}$, et $(e_n)_{n\geq 1}$ est aussi une base de $\mathcal{H}$ orthonormée telle que $Ce_n = e_n$.

Le calcul suivant montre le second point :

$$\begin{aligned} \langle Te_n, e_m \rangle &= \langle CT^*Ce_n, e_m \rangle && \text{comme } T = CT^*C \\ &= \langle CT^*e_n, e_m \rangle && \text{comme } Ce_n = e_n \\ &= \langle Ce_m, C^2T^*e_n \rangle && \text{comme } C \text{ est une anti-isométrie} \\ &= \langle Te_m, e_n \rangle \,. \end{aligned}$$

□

La proposition suivante fournit des exemples d'opérateurs complexes symétriques.

Proposition 5.2.1

1. *Soit T opérateur unitaire sur un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. Alors T est complexe symétrique.*
2. *Soit T_1 (resp. T_2) un opérateur complexe symétrique sur $\mathcal{H}_1$ (resp. sur $\mathcal{H}_2$). Alors $T := T_1 \oplus T_2$ est un opérateur complexe symétrique sur $H_1 \oplus H_2$.*

3. *Soit C une conjugaison sur $\mathcal{H}$, soient U, V deux opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$ et soit R un opérateur C-symétrique. On note $T = URV$. Alors UCV est une conjugaison et T est UCV-symétrique.*

Preuve :

1. Ce premier point s'obtient par le calcul simple suivant. Pour U et V unitaires, $D = UCV$ est une conjugaison, et comme $R = CR^*C$, on obtient :
$$DT^*D = UCVT^*UCV = UCVV^*R^*U^*UCV = UCR^*CV = URV = T.$$
2. Supposons que T_1 (resp. T_2) soit C_1-symétrique (resp. C_2-symétrique), avec C_1 (resp. C_2) une conjugaison sur $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$). Alors si on pose $C = C_1 \oplus C_2$, on vérifie facilement que C est une conjugaison sur $H_1 \oplus H_2$ et de plus on a
$$CT^*C = T,$$
ce qui prouve que T est C-symétrique.
3. Comme T est unitaire, alors T est unitairement équivalent à M_z, opérateur de multiplication par la variable z pour un certain $L^2(\mu)$, où μ est une mesure de Lebesgue compacte sur $\mathbb{C}$. Si on définit C comme étant la conjugaison standard sur $L^2(\mu)$, on a immédiatement $M_z = CM_z^*C$, ce qui signifie que M_z est complexe symétrique. En appliquant le premier point à T et M_z, on en déduit que T est aussi complexe symétrique.

□

5.2.2 Fonctions caractéristiques et opérateurs modèles

La fonction caractéristique d'une contraction et la construction du modèle fonctionel sont développées par B. Sz.-Nagy et C. Foias [11], qui est notre principale source pour cette sous-section. On pourra aussi consulter [27]. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une contraction, c'est à dire, $\|T\| \leq 1$. Il existe une unique décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_u$ telle que $T\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$, $T\mathcal{H}_u \subset \mathcal{H}_u$ et $T_{|\mathcal{H}_u}$ est unitaire, alors que $T_{|\mathcal{H}_0}$ est *complètement non unitaire* (c.n.u.), c'est à dire, $T_{|\mathcal{H}_0}$ n'est unitaire sur aucun de ses sous-espaces invariants.

L'opérateur $D_T = (Id - T^*T)^{1/2}$ est appelé *l'opérateur de défaut* de T. Les *espaces de défaut* de T sont $\mathcal{D}_T = \overline{D_T\mathcal{H}}$, $\mathcal{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*}\mathcal{H}}$, et les *indices de défaut* $\partial_T = \dim \mathcal{D}_T$, $\partial_{T^*} = \dim \mathcal{D}_{T^*}$. Puisque $D_T = D_{T_0} \oplus \{0\}$, $D_{T^*} = D_{T_0^*} \oplus \{0\}$, on a $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T_0}$ et $\mathcal{D}_{T^*} = \mathcal{D}_{T_0^*}$.

On dit que $T \in C_{0.}$ si $T^n \to 0$ fortement, et $T \in C_{.0}$ si $T^* \in C_{0.}$; aussi on note $C_{00} = C_{0.} \cap C_{.0}$.

Supposons que $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont deux espaces de Hilbert et soit $\Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ une fonction analytique contractive. On peut alors décomposer $\mathcal{E} = \mathcal{E}_p \oplus \mathcal{E}_u$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_p \oplus \mathcal{E}'_u$ tel que :

- pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\Theta(z)\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}'_p$, $\Theta(z)\mathcal{E}_u \subset \mathcal{E}'_u$;
- si $\Theta = \Theta_p \oplus \Theta_u$ est la décomposition correspondante de Θ alors Θ_p est *pure*, c'est à dire, $\|\Theta_p(0)h\| < \|h\|$, pour tout $h \neq 0$, alors que Θ_u est une constante unitaire.

Θ_p est appelée la partie pure de Θ.

On dit que deux fonctions analytiques contractives $\Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$, $\Theta' : \mathbb{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'_*)$ *coïncident* s'il existe deux unitaires $U : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, $U_* : \mathcal{E}_* \to \mathcal{E}'_*$, tels que $\Theta(z) = U_*^* \Theta'(z) U$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ (cf. [11]).

La *fonction caractéristique* de T est un fonction à valeur opératorielle $\Theta_T(\lambda) : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*}$ définie pour $\lambda \in \mathbb{D}$ par

$$\Theta_T(\lambda) := -T + \lambda D_{T^*}(Id - \lambda T^*)^{-1} D_T | \mathcal{D}_T. \tag{5.1}$$

On vérifie que Θ_T est une fonction analytique contractive sur $\mathbb{D}$, qui est pure. De plus, on voit aisément que $\Theta_T = \Theta_{T_0}$.

Si on se donne une fonction analytique, contractive arbitraire $\Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ ($\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ deux espaces de Hilbert), on peut définir l'espace modèle associé à Θ par

$$\mathbf{H}_\Theta = \left(H^2(\mathcal{E}_*) \oplus \overline{(I - \Theta^*\Theta) L^2(\mathcal{E})} \right) \ominus \{\Theta f \oplus (I - \Theta^*\Theta)^{1/2} f : f \in H^2(\mathcal{E})\}, \tag{5.2}$$

et l'opérateur modèle $\mathbf{T}_\Theta \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\Theta)$ par la formule

$$\mathbf{T}_\Theta(f \oplus g) = P_{\mathbf{H}_\Theta}(zf \oplus zg) \tag{5.3}$$

($P_{\mathbf{H}_\Theta}$ est la projection orthogonale sur $\mathbf{H}_\Theta$). Alors $\mathbf{T}_\Theta$ est une contraction complètement non unitaire, et sa fonction caractéristique coïncide avec la partie pure de Θ.

Maintenant, si l'on se donne une contraction T, on peut calculer sa fonction caractéristique $\Theta_T \in H^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*})$ et l'opérateur modèle associé $\mathbf{T}_{\Theta_T}$. Il est unitairement équivalent à T_0, la partie complètement non unitaire de T.

Comprendre une contraction complètement non unitaire peut donc se ramener à étudier sa fonction caractéristique. Celle-ci est une fonction à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*})$, opérateurs continus de $\mathcal{D}_T$ dans $\mathcal{D}_{T^*}$. Comme ces espaces peuvent être de petite dimension, l'étude de la fonction caractéristique peut être suffisament simple. Nous illustrerons cette approche dans le paragraphe 5.4 où nous décrirons le cas où les indices de défaut sont plus petits que 2.

Rappelons qu'une fonction analytique contractive Θ est dite *intérieure* si ses valeurs au bord $\Theta(e^{it})$ sont des isométries presque partout sur $\mathbb{T}$. Si T est c.n.u. alors $T \in C_{\cdot 0}$ si et seulement si Θ_T est intérieure.

5.3 Une caractérisation des opérateurs complexes symétriques

Le résultat principal du chapitre est le suivant.

Théorème 5.3.1 *Soit T une contraction sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est complexe symétrique ;*

2. *il existe une application* $J : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*}$ *antilinéaire, isométrique et surjective satisfaisant :*
$$\Theta_T(z) = J\Theta_T(z)^*J, \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{5.4}$$

3. *il existe un espace de Hilbert* $\mathcal{E}$*, une conjugaison* J' *sur* $\mathcal{E}$ *et une fonction analytique contractive pure* $\Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ *qui coïncide avec* Θ_T*, dont les valeurs sont des opérateurs* $J'-$*symétriques.*

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) Si l'opérateur T est complexe symétrique, il existe une conjugaison C sur $\mathcal{H}$ telle que $T = CT^*C$. Comme C est involutive, on obtient $CT^* = TC$, $CT = T^*C$, et donc
$$C(Id - T^*T) = (Id - TT^*)C.$$
Ainsi $CD_T^2 = D_{T^*}^2C$ et par récurrence $CD_T^{2n} = D_{T^*}^{2n}C$ avec $n \geq 0$. Soit $(p_n)_n$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;1]$, on a $Cp_n(D_T^2) = p_n(D_{T^*}^2)C$. On en déduit que $CD_T = D_{T^*}C$. Ainsi, $C\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_{T^*}$ et comme T^* est aussi $C-$symétrique, on a l'égalité $C\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T^*}$. De même, $CT^n = T^{*n}C$ pour $n \geq 1$ implique que $C(Id - \bar{z}T)^{-1} = (Id - zT^*)^{-1}C$.
On définit alors $J := C|_{\mathcal{D}_T}$, qui est bien une application antilinéaire isométrique de $\mathcal{D}_T$ sur $\mathcal{D}_{T^*}$. De plus, les égalités précédentes impliquent alors que $J\Theta_T(z)^*J = \Theta_T(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supposons tout d'abord que T est complètement non unitaire. Nous allons prouver que l'opérateur modèle $\mathbf{T}_{\Theta_T} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{\Theta_T})$, défini par (5.2) et (5.3), est complexe symétrique. Pour simplifier un peu les notations, nous écrirons dans la suite de la preuve $\mathbf{T}$ et $\mathbf{H}$ à la place de $\mathbf{T}_{\Theta_T}$ et $\mathbf{H}_{\Theta_T}$.
Rappelons les notations utilisées au chapitre précédent. On définit :
$$K := L^2(\mathcal{D}_{T_*}) \oplus \text{clos } \Delta_T L^2(\mathcal{D}_T)$$
et $\pi : L^2(\mathcal{D}_T) \to K$, $\pi_* : L^2(\mathcal{D}_{T^*}) \to K$ par
$$\pi(f) = \Theta_T f \oplus \Delta_T f, \quad \text{et} \quad \pi_*(g) = g \oplus 0,$$
pour $f \in L^2(\mathcal{D}_T)$ et $g \in L^2(\mathcal{D}_{T^*})$. Nous avions vérifié avec le lemme 4.2.1 que π et π_* sont des isométries, que K est engendré par $\pi L^2(\mathcal{D}_T)$ et $\pi_* L^2(\mathcal{D}_{T^*})$ ainsi et que
$$\pi_*^*\pi = \Theta_T, \tag{5.5}$$
$$\mathbf{H} = K \ominus (\pi H^2(\mathcal{D}_T) \oplus \pi_* H_-^2(\mathcal{D}_{T^*})). \tag{5.6}$$
Finalement si l'on note par P la projection orthogonale (dans K) sur $\mathbf{H}$, alors (5.6) implique $P = Id_K - \pi P_+ \pi^* - \pi_* P_- \pi_*^*$.
Soit $Z \in \mathcal{L}(K)$ l'opérateur unitaire qui agit comme la multiplication par z sur chaque coordonnée. Alors $\pi(zf) = Z\pi f$, $\pi_*(zg) = Z\pi_* g$, et d'après (5.3), $\mathbf{T} = PZ|\mathbf{H}$.

Si $\widetilde{J} : L^2(\mathcal{D}_T) \to L^2(\mathcal{D}_{T^*})$ est définie par

$$(\widetilde{J}f)(z) = \overline{z}J(f(z)), \qquad f \in L^2(\mathcal{D}_T),$$

alors $\widetilde{J}$ est une application antilinéaire, isométrique et surjective ; de plus

$$\widetilde{J}P_+ = P_-\widetilde{J}, \quad \widetilde{J}H^2(\mathcal{D}_T) = H^2_-(\mathcal{D}_{T^*}), \tag{5.7}$$

et $\widetilde{J}^{-1}g(z) = \overline{z}J^{-1}g(z)$, pour $g \in L^2(\mathcal{D}_{T^*})$.
On définit alors l'application antilinéaire $C : K \to K$ par la formule

$$C\,(\pi f + \pi_* g) := \pi_*(\widetilde{J}f) + \pi(\widetilde{J}^{-1}g), \qquad f \in L^2(\mathcal{D}_T), g \in L^2(\mathcal{D}_{T^*}).$$

Nous allons d'abord prouver que C est une conjugaison sur K et que Z est C-symétrique. Puisque $\pi, \pi_*, \widetilde{J}, \widetilde{J}^{-1}$ sont des isométries (linéaires ou antilinéaires), il suit que pour tout $f, h \in L^2(\mathcal{D}_T)$ et tout $g, k \in L^2(\mathcal{D}_{T^*})$, on a

$$\begin{aligned}\langle C(\pi f + \pi_* g), C(\pi h + \pi_* k)\rangle &= \langle \pi(\widetilde{J}^{-1}g), \pi(\widetilde{J}^{-1}k)\rangle + \langle \pi_*(\widetilde{J}f), \pi_*(\widetilde{J}h)\rangle \\ &\quad + \langle \pi(\widetilde{J}^{-1}g), \pi_*(\widetilde{J}h)\rangle + \langle \pi_*(\widetilde{J}f), \pi(\widetilde{J}^{-1}k)\rangle \\ &= \langle k, g\rangle + \langle h, f\rangle + \langle \Theta_T\widetilde{J}^{-1}g, \widetilde{J}h\rangle + \langle \widetilde{J}f, \Theta_T\widetilde{J}^{-1}k\rangle.\end{aligned}$$

Mais $J\Theta_T(z)^*J = \Theta_T(z)$ implique

$$\Theta_T\widetilde{J}^{-1} = \widetilde{J}\Theta_T^*, \tag{5.8}$$

et donc nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle C(\pi f + \pi_* g), C(\pi h + \pi_* k)\rangle =&\langle k, g\rangle + \langle h, f\rangle + \langle \widetilde{J}\Theta_T^* g, \widetilde{J}h\rangle + \langle \widetilde{J}f, \widetilde{J}\Theta_T^* k\rangle \\ =&\langle k, g\rangle + \langle h, f\rangle + \langle h, \Theta_T^* g\rangle + \langle \Theta_T^* k, f\rangle \\ =&\langle k, g\rangle + \langle h, f\rangle + \langle h, \pi^*\pi_* g\rangle + \langle \pi^*\pi_* k, f\rangle \\ =&\langle \pi h + \pi_* k, \pi f + \pi_* g\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent, C est une application bien définie, antilinéaire et isométrique. Il suit immédiatement de la définition que $C^2 = Id$ et donc C est une conjugaison sur K.
Si $f \in L^2(\mathcal{D}_T)$, alors

$$\begin{aligned}CZC(\pi(f)) =&CZ\pi_*(\widetilde{J}f) = C\pi_*(z\widetilde{J}f) = C\pi_*(Jf) \\ =&\pi(\widetilde{J}^{-1}Jf) = \pi(\overline{z}J^{-1}Jf) = \pi(\overline{z}f) = Z^*\pi(f).\end{aligned}$$

De façon similaire, on prouve que $CZC(\pi_*(g)) = Z^*\pi_*(g)$, pour $g \in L^2(\mathcal{D}_{T^*})$, et par conséquent $CZC = Z^*$; c'est-à-dire que Z est C-symétrique.
En utilisant (5.7), on a $C(\pi H^2(\mathcal{D}_T)) = \pi_*\widetilde{J}H^2(\mathcal{D}_T) = \pi_* H^2_-(\mathcal{D}_{T^*})$, et
$C(\pi_* H^2_-(\mathcal{D}_{T^*})) = \pi H^2(\mathcal{D}_T)$.

Comme C est isométrique, il suit de (5.6) que

$$C\mathbf{H} = CK \ominus C\left(\pi H^2(\mathcal{D}_T) \oplus \pi_* H^2_-(\mathcal{D}_{T^*})\right) = K \ominus \left(\pi H^2(\mathcal{D}_T) \oplus \pi_* H^2_-(\mathcal{D}_{T^*})\right) = \mathbf{H}.$$

Par conséquent, la restriction C' de C à $\mathbf{H}$ est une conjugaison sur $\mathbf{H}$. Puisque C laisse $\mathbf{H}$ et son orthogonal invariant, nous avons $C|\mathbf{H} = PCP|\mathbf{H}$ et $PC(I_K - P) = 0$. D'où

$$\mathbf{T} = PZ|\mathbf{H} = PCZ^*C|\mathbf{H} = PCPZ^*PCP|\mathbf{H} = C'\mathbf{T}^*C'.$$

Donc $\mathbf{T}$ est C'-symétrique. Comme T est complètement non-unitaire, T est unitairement équivalent à $\mathbf{T}$ et donc est aussi complexe symétrique.
Maintenant soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une contraction arbitraire satisfaisant la condition (ii) du théorème. Si l'on décompose $T = T_0 \oplus T_u$, avec T_0 c.n.u. et T_u unitaire, alors T_0 satisfait aussi (ii), et donc elle est complexe symétrique par les arguments précédents. Puisque T_u est unitaire, elle est aussi complexe symétrique. Par conséquent, en appliquant la proposition 5.2.1, T est aussi complexe symétrique

2) $\Rightarrow$ 3) Supposons que $\Theta_T(z) = J\Theta_T(z)^*J$, et soit C' une conjugaison sur $\mathcal{D}_T$. Alors $U = JC' : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*}$ est unitaire et $C' = U^*J$. Si $\Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_T)$ est définie par $\Theta(z) = U^*\Theta_T(z)$, alors :

$$\Theta(z) = U^*J\Theta_T(z)^*J = U^*J(U^*\Theta_T(z))^*U^*J = C'\Theta(z)^*C'.$$

3) $\Rightarrow$ 2) Si $U : E \to \mathcal{D}_T$, et $U_* : E \to \mathcal{D}_{T^*}$ sont des opérateurs unitaires vérifiant $\Theta_T(z) = U_*\Theta(z)U^*$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors d'après la proposition 5.2.1, $J = U_*J'U^*$ est une conjugaison qui symétrise Θ_T.

□

Corollaire 5.3.2 *Une contraction T dont les indices de défaut vérifient $\partial_T = \partial_{T^*} = 1$ est complexe symétrique.*

Preuve : Si $\partial_T = \partial_{T^*} = 1$, alors on peut identifier $\mathcal{D}_T$ et $\mathcal{D}_{T^*}$ à $\mathbb{C}$ et Θ_T s'identifie alors à une fonction à valeur scalaire. La conjugaison J sur $\mathbb{C}$ définie par $J(z) = \bar{z}$ satisfait alors la condition 3) du théorème 5.3.1 et on en conclut que T est complexe symétrique.
□

Pour le cas où $T \in C_{00}$, le corollaire 5.3.2 est prouvé dans [16, 15], où d'autres conséquences sont développées. On trouve également dans [16] le résultat suivant, pour lequel nous proposons une preuve différente.

Corollaire 5.3.3 *Tout opérateur défini sur un espace de dimension 2 est complexe symétrique.*

Preuve : La notion d'opérateur complexe symétrique est préservée par multiplication par un scalaire non nul, donc quitte à multiplier T par une constante, on peut supposer que $\|T\| = 1$. Un raisonnement élémentaire permet alors de montrer que $\partial_T, \partial_{T^*} \leq 1$. Si

$\partial_T = 0$ ou si $\partial_{T^*} = 0$, alors T est unitaire et la proposition 5.2.1 implique alors que T est complexe symétrique. Si $\partial_T = \partial_{T^*} = 1$, alors on peut appliquer le corollaire 5.3.2.

□

Une autre conséquence du théorème 5.3.1 est que si une contraction T est complexe symétrique, alors $\partial_T = \partial_{T^*}$. Un résultat plus général de [16] affirme qu'un opérateur T complexe symétrique (non nécessairement contractif) vérifie $\dim\ker T = \dim\ker T^*$.

5.4 Exemple des fonctions intérieures 2×2

5.4.1 Fonctions caractéristiques symétrisables

Le corollaire 5.3.2 affirme que les contractions, dont les indices de défaut valent 1, sont toujours complexes symétriques. Pour illustrer le théorème 5.3.1, nous allons discuter du cas où $\partial_T = \partial_{T^*} = 2$. Nous supposons de plus que Θ_T est intérieure, ce qui revient à supposer que $T \in C_{00}$.

Définition 5.4.1 *Soit $\Theta \in H^\infty(E \to E_*)$ contractive. On dit que Θ est symétrisable s'il existe une base orthonormale de E et une base orthonormale de E_* indépendantes de z pour lesquelles la matrice de $\Theta(z)$ est symétrique pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

D'après le théorème 5.3.1 et le lemme 5.2.1, une contraction est complexe symétrique si et seulement si sa fonction caractéristique est symétrisable. Nous nous intéressons dans cette section aux fonctions caractéristiques à valeur dans les matrices 2×2. Le corollaire 5.3.3 implique que pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe $U_1(z)$ et $U_2(z)$ unitaires telles que $U_1(z)\Theta(z)U_2(z)$ soit symérique. Mais pour trouver des fonctions symétrisables, les matrices U_1 et U_2 ne doivent plus dépendre de z.

Rappelons le résultat de S. R. Garcia [14] qui fournit une paramétrisation des fonctions intérieures de $H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$.

Proposition 5.4.1 *Soit φ une fonction intérieure non constante de H^∞, $a, b, c, d \in H^\infty$ et*

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}.$$

Alors Θ est une fonction intérieure et dét $\Theta = \varphi$ si et seulement si

1. *les fonctions a, b, c, d sont dans $\mathcal{H}(z\varphi) = H^2 \ominus z\varphi H^2$,*
2. *$d = C(a)$ et $c = C(b)$,*
3. *$|a|^2 + |b|^2 = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.*

Ici C est la conjugaison naturelle de $\mathcal{H}(z\varphi)$ définie par :

$$C(f) = \bar{f}\varphi \qquad (f \in \mathcal{H}(z\varphi)). \tag{5.9}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des fonctions intérieures $\Theta \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$ symétrisables :

Théorème 5.4.2 *Soit*
$$\Theta(z)=\begin{pmatrix} a(z) & -b(z)\\ C(b)(z) & C(a)(z)\end{pmatrix}$$
une fonction intérieure, $\varphi=$ dét Θ et C définit par (5.9).

Alors Θ est symétrisable si et seulement s'il existe $(\gamma,\theta)\neq(0,0)$ telles que $\gamma a+\theta b$ est un point fixe de C.

Preuve : Supposons qu'il existe $(\gamma,\theta)\neq(0,0)$ tel que $C(\gamma a+\theta b)=\gamma a+\theta b$; En divisant par $\sqrt{|\gamma|^2+|\theta|^2}$, on peut supposer que $|\gamma|^2+|\theta|^2=1$. Soit U la matrice unitaire suivante :
$$U=\begin{pmatrix}\overline{\theta} & -\gamma\\ \overline{\gamma} & \theta\end{pmatrix}.$$
On obtient :
$$\Theta(z)U=\begin{pmatrix}\overline{\theta}a(z)-\overline{\gamma}b(z) & -\gamma a(z)-\theta b(z)\\ \overline{\theta}C(b)(z)+\overline{\gamma}C(a)(z) & -\gamma C(b)(z)+\theta C(a)(z)\end{pmatrix},$$
et comme $\overline{\theta}C(b)(z)+\overline{\gamma}C(a)(z)=C(\gamma a+\theta b)(z)$, on a :
$$\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\Theta(z)U=\begin{pmatrix}-i(\overline{\theta}a(z)-\overline{\gamma}b(z)) & i(\gamma a(z)+\theta b(z))\\ i(\gamma a(z)+\theta b(z)) & i(-\gamma C(b)(z)+\theta C(a)(z))\end{pmatrix},$$
ce qui prouve que Θ est symétrisable.

Réciproquement, supposons que Θ soit symétrisable.

Si a et b sont linéairement dépendants, il existe $(\gamma,\theta)\neq(0,0)$ tels que $\gamma a+\theta b=0$, et comme 0 est un point fixe de C, le résultat est démontré.

Supposons donc que $\{a,b\}$ soit un système linéairement indépendant. Par définition, il existe deux matrices unitaires U_1 et U_2 telles que $U_1\Theta(z)U_2$ soit symétrique pour tout $z\in\mathbb{D}$.

Écrivons :
$$U_1=\begin{pmatrix}\mu & -\overline{\lambda}\\ \lambda & \overline{\mu}\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad U_2=\begin{pmatrix}\theta & -\overline{\gamma}\\ \gamma & \overline{\theta}\end{pmatrix},$$
avec $|\mu|^2+|\lambda|^2=1$ et $|\theta|^2+|\gamma|^2=1$. Un calcul simple montre que :
$$U_1M(z)U_2=\begin{pmatrix}* & X\\ Y & *\end{pmatrix},$$
avec $X=-\mu(\overline{\gamma}a+\overline{\theta}b)-\overline{\lambda}C(-\gamma b+\theta a)$ et $Y=\lambda(\theta a-\gamma b)+\overline{\mu}C(\overline{\theta}b+\overline{\gamma}a)$. La symétrie de la matrice équivaut à :
$$-(\mu\overline{\gamma}+\lambda\theta)a-(\mu\theta-\lambda\gamma)b=C\left((\mu\overline{\gamma}+\lambda\theta)a+(\mu\overline{\theta}-\lambda\gamma)b\right).$$
Si l'on note $u:=(\mu\overline{\gamma}+\lambda\theta)a+(\mu\overline{\theta}-\lambda\gamma)b$, alors on a $C(u)=-u$, donc $C(iu)=iu$ et iu est un point fixe pour C. Ainsi,
$$iu\in\mathcal{L}\text{in}\{a,b\}\cap\text{Fix } C.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $u \neq 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $u = 0$. Alors comme le couple $\{a, b\}$ est linéairement indépendant, on obtient :

$$\mu\overline{\gamma} + \lambda\theta = \mu\overline{\theta} - \lambda\gamma = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mu\overline{\gamma} = -\lambda\theta \\ \mu\overline{\theta} = \lambda\gamma \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\overline{\theta}$ et la seconde par $\overline{\gamma}$, on obtient en soustrayant la seconde ligne à la première :

$$\lambda(|\theta|^2 + |\gamma|^2) = 0.$$

Or $|\theta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ et donc $\lambda = 0$. Comme $|\mu|^2 + |\lambda|^2 = 1$, on obtient $|\mu| = 1$. Mais le système précédent implique alors $\gamma = \theta = 0$, ce qui est exclu. Finalement, $u \neq 0$, ce qui achève la preuve.

□

Remarque 5.4.1 *Les points fixes d'une conjugaison C peuvent être décrits en utilisant le Lemme 5.2.1. Ils forment l'espace vectoriel réel constitué des élements dont les coefficients de Fourier (relativement à une C-base réelle orthonormale) sont réels.*

Remarque 5.4.2 *Une question très proche de notre problème serait de décrire toutes les fonctions intérieures $\Theta(z)$, à valeur dans les matrices symétriques 2×2. Cela peut être réalisé en suivant la méthode proposée dans [16, section 5] pour résoudre le problème de synthèse de Darlington. Tout d'abord, on fixe dét Θ, qui va être une fonction intérieure scalaire, non constante, $\varphi \in H^\infty$. On considère alors une fonction $b \in \mathcal{H}(z\varphi)$ telle que $Cb = b$ (C la conjugaison $f \longmapsto \varphi\overline{f}$ sur $\mathcal{H}(z\varphi)$). Si b est intérieure, alors $b^2 = \varphi$ et donc*

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} 0 & ib(z) \\ ib(z) & 0 \end{pmatrix}$$

convient. Si b n'est pas intérieure, alors on peut prendre $a \in \mathcal{H}(z\varphi)$, telle que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$ (une telle fonction a existe d'après [14, Proposition 5.2]). Alors

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & ib(z) \\ ib(z) & C(a)(z) \end{pmatrix}$$

convient.

Dans [16, section 8.2], on approfondit la question de la paramétrisation des solutions rationnelles du problème de synthèse de Darlington. Nous proposons une discussion analogue de notre problème dans la section suivante.

5.5 Exemples

5.5.1 Le cas rationnel

On se donne un produit de Blaschke fini $\varphi(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k}z}$ et on veut décrire les fonctions intérieures Θ, à valeur matricielle 2×2, symétrisables et telles que $\det \Theta = \varphi$.

Soit Θ une fonction analytique, contractive dans $\mathbb{D}$ et telle que la matrice de Θ dans une base orthonormale fixée s'écrive :

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 5.4.1, on sait que Θ est intérieure et dét $\Theta = \varphi$ si et seulement si

(i) a, b, c, d appartiennent à $\mathcal{H}(z\varphi)$;

(ii) $d = C(a)$ et $c = C(b)$;

(iii) $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$.

Ici C désigne, comme précédemment, la conjugaison naturelle sur $\mathcal{H}(z\varphi)$ définie par

$$C(f) = \overline{f}\varphi, \qquad (f \in \mathcal{H}(z\varphi)).$$

Dans le cas où φ est un produit de Blaschke de degré N, on peut préciser davantage ce résultat. Commençons par un lemme élémentaire.

Lemme 5.5.1 *Soit* $\varphi(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k}z}$ *un produit de Blaschke fini. Alors*

$$\mathcal{H}(z\varphi) = \mathit{span}\left(1, \frac{1}{1-\overline{\lambda_k}z} : 1 \le k \le N\right) = \left\{\frac{P}{R} : P \text{ polynôme de degré au plus } N\right\},$$

avec $R(z) = \prod_{k=1}^{N}(1-\overline{\lambda_k}z)$.

Preuve : La deuxième égalité est triviale. Pour la première, rappelons que pour $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$$

désigne le noyau reproduisant de H^2, autrement dit, on a

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle, \qquad (f \in H^2).$$

Si $h \in H^2$, on a donc

$$\langle z\varphi h, k_\lambda\rangle = 0$$

pour $\lambda \in \{0, \lambda_k : 1 \leq k \leq N\}$, ce qui prouve que

$$\text{span}\left(1, \frac{1}{1-\overline{\lambda_k}z} : 1 \leq k \leq N\right) \subset \mathcal{H}(z\varphi).$$

Maintenant soit $f \perp \text{span}\left(1, \frac{1}{1-\overline{\lambda_k}z} : 1 \leq k \leq N\right)$. Cela signifie que $f(0) = 0$ et $f(\lambda_k) = 0$ $(1 \leq k \leq N)$. On sait alors qu'il existe $f_1 \in H^2$ telle que $f = z\varphi f_1$. Autrement dit, $f \perp \mathcal{H}(z\varphi)$, ce qui achève la preuve.

□

Si P est un polynôme de degré au plus N, on notera $\widetilde{P}$ son polynôme conjugué défini par

$$\widetilde{P}(z) = z^N \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Corollaire 5.5.1 *Soit* $\varphi(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k}z}$ *un produit de Blaschke fini, soit* $R(z) = \prod_{k=1}^{N}(1-\overline{\lambda_k}z)$ *et soit*

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

une fonction analytique, contractive sur $\mathbb{D}$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $\Theta(z)$ *est intérieure et dét* $\Theta = \varphi$ *;*

(ii) $a = S/R$, $b = P/R$, $c = \widetilde{P}/R$, $d = \widetilde{S}/R$ *avec* P *et* S *deux polynômes de degré inférieur ou égal à* N *satisfaisant*

$$P\widetilde{P} + S\widetilde{S} = R\widetilde{R}.$$

Preuve : Soit $g \in \mathcal{H}(z\varphi)$. D'après le lemme 5.5.1, il existe un polynôme P de degré au plus N tel que $g = \frac{P}{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{T}$, on a alors

$$\begin{aligned} C(g)(z) =& C\left(\frac{P}{R}\right)(z) = \frac{\overline{P(z)}}{\overline{R(z)}}\varphi(z) \\ =& \overline{P(1/\overline{z})} \prod_{k=1}^{N} \frac{z-\lambda_k}{(1-\lambda_k\overline{z})(1-\overline{\lambda}_k z)} \\ =& z^N \overline{P(1/\overline{z})} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\overline{\lambda}_k z} \\ =& \frac{z^N \overline{P(1/\overline{z})}}{R(z)} \\ =& \frac{\widetilde{P}(z)}{R(z)}. \end{aligned}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) En utilisant la proposition 5.4.1 et le calcul précédent, il est clair que $a = S/R$, $b = P/R$, $c = \widetilde{P}/R$, $d = \widetilde{S}/R$ avec P et S deux polynômes de degré inférieur ou égal à N. D'autre part, comme $\varphi = \det \Theta = ad + bc$, et $\varphi = \widetilde{R}/R$ on obtient

$$\frac{\widetilde{R}}{R} = \frac{S\widetilde{S}}{R^2} + \frac{P\widetilde{P}}{R^2},$$

ce qui donne $P\widetilde{P} + S\widetilde{S} = R\widetilde{R}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Réciproquement, il est clair avec les remarques préliminaires que a, b, c, d appartiennent à $\mathcal{H}(z\varphi)$ et que $d = C(a)$ et $c = C(b)$. D'après la proposition 5.4.1, la seule chose à montrer est finalement que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ sur $\mathbb{T}$. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}\text{dét } \Theta =& ad + bc = \frac{S\widetilde{S}}{R^2} + \frac{P\widetilde{P}}{R^2} \\ =& \frac{R\widetilde{R}}{R^2} \\ =& \frac{\widetilde{R}}{R} = \varphi.\end{aligned}$$

D'où, avec la définition de C, on obtient

$$\varphi = ad + bc = aC(a) + bC(b) = |a|^2\varphi + |b|^2\varphi,$$

et comme φ est non nul presque partout sur $\mathbb{T}$, on en déduit que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ sur $\mathbb{T}$.

$\square$

Dans le cas d'un produit de Blaschke fini, on peut aussi décrire explicitement les points fixes de la conjugaison C sur $\mathcal{H}(z\varphi)$.

Lemme 5.5.2 *Soit P un polynôme de degré au plus N et soit $g = P/R \in \mathcal{H}(z\varphi)$. Alors g est un point fixe de C si et seulement si P satisfait*

$$P(z) = \widetilde{P}(z).$$

Preuve : Rappelons que

$$C\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{\widetilde{P}}{R},$$

et donc il est clair que

$$C(g) = g \Longleftrightarrow \widetilde{P} = P.$$

$\square$

Un calcul élémentaire montre que si

$$P(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

alors

$$\widetilde{P}(z) = \sum_{k=1}^{N} \overline{a_{N-k}} z^k,$$

et donc

$$\widetilde{P} = P \Longleftrightarrow a_k = \overline{a_{N-k}}\,, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Le théorème 5.4.2 donne alors dans le cas rationnel le résultat suivant

Corollaire 5.5.2 *Soit* $\varphi(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k} z}$ *et* $R(z) = \prod_{k=1}^{N}(1-\overline{\lambda_k} z)$. *Alors la matrice*

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

est intérieure, dét $\Theta = \varphi$ *et* Θ *est symétrisable si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $a = S/R$, $b = P/R$, $c = \widetilde{P}/R$, $d = \widetilde{S}/R$ *avec* P *et* S *deux polynômes de degré inférieur ou égal à* N *;*

(ii) $P\widetilde{P} + S\widetilde{S} = R\widetilde{R}$ *;*

(iii) *il existe* $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ *tel que* $\widetilde{\lambda P + \mu S} = \lambda P + \mu S$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème 5.4.2, le lemme 5.5.2 et le corollaire 5.5.1. □

5.5.2 Un autre exemple

Considérons $u, v \in H^\infty$ deux fonctions intérieures et $\mathbf{T}_u, \mathbf{T}_v$ les opérateurs modèles correspondants. Etant intérieures, les espaces modèles associés sont $\mathbf{H}_u = H^2 \ominus uH^2$ et $\mathbf{H}_v = H^2 \ominus vH^2$. Les opérateurs $\mathbf{T}_u$ et $\mathbf{T}_v$ sont des contractions complètement non unitaires et leurs fonctions caractéristiques sont respectivement u et v. Les espaces de défaut sont de dimension 1 et d'après le corollaire 5.3.2, ils sont complexes symétriques. Nous allons discuter des contractions de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} T_u & X \\ 0 & T_v \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

avec $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H} = \mathbf{H}_u \oplus \mathbf{H}_v$.

Pour préciser les propriétés de cet opérateur, nous avons besoin du résultat suivant.

Théorème 5.5.3 ([1]) *Soit* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ *et* $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1' \oplus \mathcal{H}_2'$ *deux espaces de Hilbert. Soit* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *une contraction. Alors*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

est une contraction de $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ si et seulement si

$$B = D_{A^*}Y_1,\ C = Y_2 D_A,\ \text{ et } X = -Y_2A^*Y_1 + D_{Y_2^*}YD_{Y_1},$$

où $Y_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_A, \mathcal{H}_2')$ $Y_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{D}_{A^*})$ et $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{Y_1}, \mathcal{D}_{Y_2^*})$ sont des contractions.

Le lemme suivant précise les propriétés élémentaires de l'opérateur T.

Lemme 5.5.3 *Supposons que $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_u \oplus \mathbf{H}_v)$ donné par (5.10) soit une contraction. Alors :*

1. *$X = D_{\mathbf{T}_u^*}YD_{\mathbf{T}_v}$, avec $Y : \mathcal{D}_{\mathbf{T}_v} \to \mathcal{D}_{\mathbf{T}_u^*}$ une contraction ;*
2. *si $\|Y\| = 1$ alors $\partial_T = \partial_{T^*} = 1$ et sinon $\partial_T = \partial_{T^*} = 2$;*
3. *$T \in \mathcal{C}_{00}$.*

Remarquons que $\dim \mathcal{D}_{\mathbf{T}_v} = \dim \mathcal{D}_{\mathbf{T}_u^*} = 1$, et donc toute contraction $Y : \mathcal{D}_{\mathbf{T}_v} \to \mathcal{D}_{\mathbf{T}_u^*}$ s'identifie à un nombre complexe de module plus petit que 1.

Preuve :

Quitte à échanger les blocs, on peut considérer le théorème 5.5.3 avec $A = 0$, $B = \mathbf{T}_u$ et $C = \mathbf{T}_v$. Les opérateurs D_A et D_{A^*} coïncident avec l'identité sur leurs espaces respectifs. On a alors $X = D_{\mathbf{T}_u^*}YD_{\mathbf{T}_v}$, pour une contraction Y, ce qui montre le premier point.

Comme $\mathcal{D}_T$ s'identifie à $\mathcal{D}_{\mathbf{T}_v^*} \oplus \mathcal{D}_Y$ et $\mathcal{D}_{T^*}$ à $\mathcal{D}_{\mathbf{T}_v} \oplus \mathcal{D}_{Y^*}$, on a le second point.

Enfin, le dernier point se déduit d'un fait plus général :

si $T = \begin{pmatrix} T_1 & X \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ est une contraction, alors T_i de classe $\mathcal{C}_{0.}$ entraîne T de classe $\mathcal{C}_{0.}$.

En effet, soit $\epsilon > 0$, et $x = x_1 \oplus x_2$ un vecteur de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, prenons k un entier tel que $\|T_2^k x_2\| < \epsilon$. Si $T^k(0 \oplus x_2) = x_1' \oplus T_2^k x_2$, il suffit de prendre k' tel que $\|T_1^{k'}(x_1' + T_1^k x_1)\| < \epsilon$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|T^{k+k'}\| &= \|T^{k+k'}(x_1 \oplus 0) + T^{k+k'}(0 \oplus x_2)\| \\ &= \|(T_1^{k+k'}x_1 \oplus 0) + T^{k'}(x_1' \oplus T_2^k(x_1' \oplus T_2^k x_2)\| \\ &\leq \|(T_1^{k'}(T_1^k x_1 + x_1'\| + \|T^{k'}(0 \oplus T_2^k x_2)\| \\ &\leq \epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

Dans notre cas, $T_1 = \mathbf{T}_u$ et $T_2 = \mathbf{T}_v$ sont tous les deux de classe $\mathcal{C}_{00}$, et donc ceci achève la preuve.

□

Le théorème suivant détermine quand T est complexe symétrique.

Théorème 5.5.4 *Soit T une contraction de la forme*

$$T = \begin{pmatrix} T_u & X \\ 0 & T_v \end{pmatrix}.$$

Avec les notations du lemme 5.5.3, il est complexe symétrique si et seulement s'il vérifie l'une des trois conditions suivantes :

1. $Y = 0$;
2. $\|Y\| = 1$;
3. $0 < \|Y\| < 1$, *et il existe* $\lambda \in \mathbb{D}$ *et* $\mu \in \mathbb{T}$ *telles que* $v = \mu b_\lambda(u)$, *où* b_λ *désigne le Blaschke élémentaire défini par :*

$$b_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}.$$

Preuve : Si $Y = 0$, alors $T = \mathbf{T}_u \oplus \mathbf{T}_v$ et il est complexe symétrique comme somme directe de deux opérateurs complexes symétriques. Si $\|Y\| = 1$, alors d'après le lemme 5.5.3, les indices de défaut de T valent 1. D'après le corollaire 5.3.2, T est donc complexe symétrique.

Nous pouvons donc supposer pour la suite que $0 < \|Y\| < 1$ et que $\partial_T = \partial_{T^*} = 2$.

Nous allons commencer par déterminer la fonction caractéristique de T pour pouvoir appliquer le théorème 5.3.1. Cette fonction caractéristique peut être calculée directement mais pour éviter des calculs pénibles, nous allons utiliser les liens entre la théorie des sous-espaces invariants des contractions et la factorisation des fonctions caractéristiques, comme développé dans [11, Chapter VII]

Tout d'abord, remarquons que $T \in \mathcal{C}_{00}$ implique que Θ_T est intérieure. Comme $\mathbf{H}_u$ est un sous-espace invariant pour T, d'après le théorème VII.1.1 et la Proposition VII.2.1 de [11], on peut factoriser

$$\Theta_T(z) = \Theta_2(z)\Theta_1(z) \tag{5.11}$$

en deux fonctions intérieures et la fonction caractéristique de $\mathbf{T}_u$ (resp. de $\mathbf{T}_v$), à savoir u (resp. v) est égale à la partie pure de Θ_1 (resp. Θ_2). De plus, Θ_1 et Θ_2 étant intérieures, les dimensions de leur espace image doivent être égales toutes les deux à la dimension de l'espace image de Θ_T.

On en déduit que $\Theta_1(z)$ et $\Theta_2(z)$ doivent être des fonctions intérieures à valeur dans les matrices 2×2 dont les parties pures sont u et v respectivement. Elles coïncident donc avec

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

respectivement. D'après (5.11), il existe U_1, U_2, V_1, V_2 des matrices unitaires 2×2 telles que :

$$\Theta_T = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} U_2 V_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} V_2.$$

Si l'on écrit :

$$U_2 V_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec α, β nombres complexes satisfaisant $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, on peut affirmer que Θ_T coïncide avec la fonction intérieure

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta v \\ \bar{\beta} u & \bar{\alpha} u(z) v(z) \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Notons que la condition $0 < \|Y\| < 1$ implique que les nombres α et β sont différents de 0.

On applique alors le théorème 5.4.2 pour savoir si Θ, donnée par (5.12), est symétrisable ou non. Comme dét$\Theta = uv$, ceci arrive si et seulement s'il existe une combinaison linéaire de α et de βu, dont les coefficients ne sont pas simultanément nuls, et qui est dans l'ensemble des points fixes de la conjugaison naturelle C sur $\mathcal{H}(zuv)$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{H}_{zuv},\ C(f) = uv\bar{f}.$$

Dans ce cas, écrivons cette combinaison linéaire $g = s + tu$, $(s,t) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0,0\}$, $g \neq 0$. On a alors

$$C(g) = g \Longleftrightarrow v(\bar{s}u + \bar{t}) = s + tu \Longleftrightarrow v = \frac{s+tu}{\bar{s}u + \bar{t}}. \tag{5.13}$$

On doit avoir $t \neq 0$, sinon uv serait constant, ce qui n'est pas possible. On peut donc écrire :

$$v = \frac{t}{\bar{t}} \frac{\frac{s}{t} + u}{1 + \frac{\bar{s}}{\bar{t}}u}.$$

Mais si $|s| = |t|$, alors $v = \frac{t}{s}$, ce qui est impossible. Si $|s| > |t|$, alors on voit que v est en même temps analytique et coanalytique, ce qui implique v constante, d'où une nouvelle contradiction. La seule possiblité est que $|s| < |t|$. Posons $\lambda = -\frac{s}{t}$ et $\mu = -\frac{t}{\bar{t}}$ et on obtient la conclusion désirée :

$$v = \mu \frac{\lambda - u}{1 - \bar{\lambda}u} = \mu b_\lambda(u).$$

Réciproquement, supposons que $v = \mu b_\lambda(u)$ avec $\mu \in \mathbb{T}$ et $\lambda \in \mathbb{D}$. Il existe ζ non nul tel que $\mu = -\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}$, on a alors :

$$v = \frac{\zeta u - \lambda\zeta}{\bar{\zeta} - \overline{\zeta\lambda}u},$$

et en posant $s := -\lambda\zeta$ et $t := \zeta$,

$$v(\bar{s}u + \bar{t}) = v(-\overline{\zeta\lambda}u + \bar{\zeta}) = \zeta u - \lambda\zeta = s + tu,$$

ce qui implique d'après l'équation (5.13) que $C(g) = g$ pour $g := s + tu$. Comme $t \neq 0$, on peut appliquer le théorème 5.4.2 . Ainsi, Θ est symétrisable.

On a montré que dans le cas $0 < \|Y\| < 1$, Θ_T est symétrisable si et seulement si $v = \mu b_\lambda(u)$ avec $\lambda \in \mathbb{D}$ et $\mu \in \mathbb{T}$. Une application du théorème 5.3.1 conclut alors la preuve du théorème.

□

Le théorème 5.5.4 permet de construire différents exemples d'opérateurs complexes symétriques ou non dont les indices de défaut sont 2.

Annexe A

Définition et propriétés du calcul tensoriel

Nous allons rappeler la définition et les propriétés élémentaires du produit tensoriel.

Définition A.0.1 *Soient H un espace de Hilbert séparable, $a, b \in H \setminus \{0\}$ alors on définit l'opérateur borné de rang 1 $a \otimes b$ par :*

$$(a \otimes b) : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & \langle x, b \rangle \, a. \end{array}$$

L'image de $a \otimes b$ est le sous-espace de dimension 1 $\mathbb{C}a$. Il est clair que tout opérateur T de rang 1 peut s'écrire comme produit tensoriel $a \otimes b$. Comme ImT est de dimension 1, pour $a \in ImT$ non nul, $ImT = \mathbb{C}a$. Pour tout $x \in H$, il existe $c_x \in \mathbb{C}$ tel que $Tx = c_x a$ et la forme linéaire $x \in H \mapsto c_x$ est continue, par continuité de $a \otimes b$. Le Théorème de Riesz assure l'existence de $b \in H$ tel que $c_x = \langle x, b \rangle$, et alors pour $x \in H$, $Tx = \langle x, b \rangle \, a = a \otimes b$.

Proposition A.0.5 *On a les propriétés suivantes : pour tout $a, b, a', b' \in H$ éventuellement non nuls et $T \in \mathcal{L}(H)$,*

1. $T(a \otimes b) = (Ta) \otimes b$ *et* $(a \otimes b)T = a \otimes (T^* b)$,
2. $(a \otimes b)(a' \otimes b') = \langle a', b \rangle \, (a \otimes b')$,
3. $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$,
4. $Ker\ a \otimes b = (\mathbb{C}b)^\perp$ *et* $Im\ a \otimes b = \mathbb{C}a$,
5. $(a \otimes b)^* = b \otimes a$
6. $a \otimes b = a' \otimes b'$ *avec a, b, a', b' tous non nuls, si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que* $a = \alpha a'$, $b = \beta b'$ *et* $\alpha \bar{\beta} = 1$,
7. $a \otimes a = b \otimes b \iff \exists \alpha,\ |\alpha| \leq 1$ *tel que* $b = \alpha a$,
8. $a \otimes a \leq b \otimes b \iff \exists \alpha,\ |\alpha| \leq 1$ *tel que* $b = \alpha a$,
9. $a \otimes a \geq 0$.

Preuve :

1. Pour tout $x \in H$, $T(a \otimes b)(x) = \langle x, b \rangle \, Ta = (Ta \otimes b)(x)$ et
$$(a \otimes b)(Tx) = \langle Tx, b \rangle \, a = \langle x, T^* b \rangle \, a = a \otimes (T^* b)(x).$$
2. Pour tout $x \in H$,
$$\begin{aligned}(a \otimes b)(a' \otimes b')(x) &= a \otimes b \, \langle x, b' \rangle \, a' = \langle x, b' \rangle \, \langle a', b \rangle \, a \\ &= \langle a', b \rangle \, (a \otimes b').\end{aligned}$$
3. Par linéarité du produit scalaire.
4. Nous avons déjà vu la seconde affirmation. Pour la seconde :
$$\begin{aligned}Ker(a \otimes b) &= \{x \in H | a \otimes b(x) = 0\} \\ &= \{x \in H | \, \langle x, b \rangle = 0\} = (\mathbb{C} b)^{\perp}.\end{aligned}$$
5. Soient $x, y \in H$.
$$\begin{aligned}\langle (a \otimes b)^*(x), y \rangle &= \langle x, a \otimes b(y) \rangle = \langle b, y \rangle \, \langle x, a \rangle \\ &= \langle \langle x, a \rangle \, b, y \rangle = \langle b \otimes a(x), y \rangle \, .\end{aligned}$$
6. Si $a \otimes b = a' \otimes b'$ alors ils ont mêmes images. Or $Im a \otimes b = \mathbb{C} a$ et $Im a' \otimes b' = \mathbb{C} a'$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul tel que $a = \alpha a'$. En considérant les adjoints de ces opérateurs, l'assertion précédente affirme que $b \otimes a = b' \otimes a'$. Le raisonnement similaire au précédent affirme qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $b = \beta b'$. Ainsi, $\alpha a' \otimes \beta b' = a' \otimes b'$ ce qui implique $\alpha \bar{\beta} = 1$. La réciproque se vérifie trivialement.
7. Ce point est un cas particulier du précédent.
8. Ce point est aussi un cas particulier de 6.
9. D'après 5, l'opérateur $a \otimes a$ est autoadjoint. Comme $Im \; a \otimes a = \mathbb{C} a$, le vecteur a st un propre pour la valeur propre λ. $\lambda a = a \otimes a(a) = \langle a, a \rangle \, a$, donc $\lambda = \|a\|^2 \geq 0$.

$\square$

Annexe B

Généralités sur les bases de noyaux reproduisants de H^2

B.0.3 Généralités sur les bases de noyaux reproduisants dans $H^2(\mathbb{D})$

Nous allons introduire la notion de base de Riesz et rappeler les résultats classiques caractérisant les bases de noyaux reproduisants de $H^2(\mathbb{D})$. De nombreux compléments se trouvent dans [27], Chapitre 3. Soient X un espace de Banach complexe, de dimension infinie et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs non nuls de X.

Définition B.0.2 *La suite $\chi := (x_n)_{n\geq 1}$ est dite*

1. ***complète*** *dans X si $span(x_n : n \geq 1) = X$;*
2. ***minimale*** *si pour tout $n \geq 1$, $x_n \notin span(x_k\ : k \neq n)$;*
3. ***uniformément minimale*** *si*

$$\delta(\chi) := \inf_{n\geq 1} dist\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}, span\ (x_k\ :\ k \neq n)\right) > 0.$$

La constante $\delta(\chi)$ est appelée constante d'uniforme minimalité de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

Si $\chi^* = (x_n^*)_{n\geq 1}$ est une suite du dual de X, on dit que χ^* est une suite biorthogonale associée à $(x_n)_{n\geq 1}$ si

$$x_k^*(x_n) = \delta_{n,k}.$$

Le lemme suivant établit le lien entre la minimalité, l'uniforme minimalité et l'existence de biorthogonale.

Lemme B.0.4 *Soient X un espace de Banach et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs de X.*

1. *$(x_n)_{n\geq 1}$ est minimale si et seulement si $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une suite biorthogonale. Cette dernière est déterminée de façon unique si et seulement si $(x_n)_{n\geq 1}$ est complète dans X.*

2. *$(x_n)_{n\geq 1}$ est uniformément minimale si et seulement si $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une suite bi-orthogonale $(x_n^*)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\sup_{n\geq 1} \|x_n\| \, \|x_n^*\| < +\infty.$$

Dans le cadre des espaces de Hilbert, la notion de base dont on dispose est celle de base orthonormale. Nous allons à présent définir les bases de Riesz :

Définition B.0.3 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{H}$. On dit que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de $\mathcal{H}$ s'il existe un isomorphisme U de H sur lui même tel que $(Ux_n)_{n\geq 1}$ forme une base orthogonale de $\mathcal{H}$. L'opérateur U est appelé un orthonormalisateur de $(x_n)_{n\geq 1}$.*

Dans le cas particulier où $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$, la proposition suivante fournit une caractérisation pour qu'une suite de noyaux reproduisants $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ soit minimale dans $H^2(\mathbb{D})$ et précise le sous-espace vectoriel fermé engendré par $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$.

Proposition B.0.6 *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$.*

1. *Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Blaschke, alors $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète dans $H^2(\mathbb{D})$et n'est pas minimale.*
2. *Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke, et si B désigne le produit de Blaschke associé, alors $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale dans $H^2(\mathbb{D})$ et*

$$span_{H^2(\mathbb{D})}(k_{\lambda_n} \ : \ n \geq 1) = K_B$$

où $K_B := H^2(\mathbb{D}) \ominus BH^2(\mathbb{D})$.

Preuve :

1. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $f(\lambda_n) = 0$, quelque soit $n \geq 1$. Si $(\lambda_n)_n$ n'est pas une suite de Blaschke, nécessairement f est la fonction constante nulle, donc la famille des $(k_{\lambda_n})_n$ est complète. Supposons maintenant qu'elle soit minimale, alors il existe $f \in H^2$ telle que $f(\lambda_1) = 1$ et $f(\lambda_n) = 0$, $n \geq 2$. Comme $f \not\equiv 0$, on a

$$\sum_{n\geq 2}(1 - |\lambda_n|) < +\infty,$$

ce qui est exclu, la suite $(\lambda_n)_n$ n'étant pas de Blaschke.

2. Si la suite $(\lambda_n)_n$ est de Blaschke, notons

$$B_n := \Pi_{k\neq n} b_{\lambda_k}, \text{ où } b_\lambda(z) := \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda}z} \ (z, \lambda \in \mathbb{D}).$$

On a alors $B_n \in H^2$ vérifiant :

$$\left\langle \frac{B_n}{B_n(\lambda_n)}, k_{\lambda_p} \right\rangle = \frac{B_n(\lambda_p)}{B_n(\lambda_n)} = \delta_{n,p},$$

ce qui montre que $(\frac{B_n}{B_n(\lambda_n)})_{n\geq 1}$ est une biorthogonale de $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$, et donc $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale.

Montrons qu'elle est complète dans K_B. Soit $g \in H^2(\mathbb{D})$, on a :

$$\langle Bg, k_{\lambda_n}\rangle = B(\lambda_n)g(\lambda_n) = 0,\ \forall n \geq 1,$$

et donc $BH^2(\mathbb{D}) \subset span\,(k_{\lambda_n}, n \geq 1)^{\perp}$.

Réciproquement, soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $\langle f, k_{\lambda_n}\rangle = 0$, $\forall n \geq 1$. On a $f(\lambda_n) = 0$ et donc f peut s'écrire $f = Bg$, d'où $span\,(k_{\lambda_n}, n \geq 1)^{\perp} \subset BH^2(\mathbb{D})$, ce qui achève cette démonstration.

□

Quitte à renormaliser, la démonstration précédente fournit l'expression de la biorthogonale $(y_n)_{n\geq 1}$, unique, associée à la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$:

$$y_n := \frac{(1-|\lambda_n|^2)}{B_n(\lambda_n)}\frac{B_n}{1-\bar{\lambda}_n z}.$$

Nous pouvons énoncer le théorème et la définition suivante :

Définition B.0.4 *Une suite de Blaschke $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de points distincts de $\mathbb{D}$ satisfait la condition de Carleson si*

$$d\,((\lambda_n)_{n\geq 1}) := \inf_{n\geq 1} |B_n(\lambda_n)| > 0. \quad (C)$$

On appellera une telle suite une suite de Carleson, et la constante $d\,((\lambda_n)_{n\geq 1})$ la constante assossiée à $(\lambda_n)_{n\geq 1}$.

Théorème B.0.7 *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$, et B le produit de Blaschke associé aux $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. La suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est uniformément minimale dans $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Carleson.*

Preuve : Les expressions de k_{λ_n} et de y_n impliquent que $\|y_n\|_2\|k_{\lambda_n}\| = \frac{1}{|B_n(\lambda_n)|}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme B.0.4.

□

Pour clore ce complément sur les bases de noyaux reproduisants, énonçons le théorème de Carleson–Shapiro–Shields, dont on trouvera la démonstration dans [27], page 177.

Théorème B.0.8 *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite deBlaschke de points distincts de $\mathbb{D}$. Notons $x_n := \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|_2}$ la normalisation du noyau reproduisant. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de K_B ;*
2. *la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est uniformément minimale ;*
3. *la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est de Carleson.*

B.0.4 Généralités sur les bases de noyaux reproduisants dans $H^2(\mathbb{D}, E)$ et $\mathcal{H}(b)$

Nous avions vu section 4.2.2 que pour $\lambda \in \mathbb{D}$, et $e \in E_*$, la forme linéaire définie par

$$Ev_{(\lambda,e)} : f \mapsto \langle f(\lambda), e\rangle_{E_*}$$

est bornée sur $H^2(E_*)$ et que le noyau reproduisant $k_\lambda e : z \mapsto \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}e$ de $H^2(E_*)$ représente cette forme linéaire.

Soit $b \in H^\infty(E \to E_*)$, $\|b\|_\infty \leq 1$. Comme $\mathcal{H}(b)$ est contenu dans $H^2(E_*)$ contractivement, la restriction à $\mathcal{H}(b)$ de la forme linéaire évaluation $Ev_{(\lambda,e)}|_{\mathcal{H}(b)}$ est continue relativement au produit scalaire de $\mathcal{H}(b)$. Il existe donc $k^b_\lambda e$ dans $\mathcal{H}(b)$ vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{D}, \forall f \in H^2(E_*), \quad \left\langle f, k^b_\lambda e\right\rangle_b = \langle f(\lambda), e\rangle_{E_*}.$$

Considérons $f = (Id - T_b T_b^*)^{1/2} f_1$ avec $f_1 \in \left(\mathrm{Ker}\ (Id - T_b T_b^*)^{1/2}\right)^\perp$. On obtient

$$\langle f, (Id - T_b T_b^*) k_\lambda e\rangle_b = \left\langle f_1, (Id - T_b T_b^*)^{1/2} k_\lambda e\right\rangle_2 = \langle f, k_\lambda e\rangle_2 = \langle f(\lambda), e\rangle_{E_*},$$

et donc

$$k^b_\lambda e = (Id - T_b T_b^*) k_\lambda e.$$

Comme $T_b^* k_\lambda e = b(\lambda)^* k_\lambda e$, on en déduit l'expression suivante :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad (k^b_\lambda e)(z) = \frac{Id - b(z)b(\lambda)^*}{1 - \bar{\lambda}z} e. \tag{B.1}$$

Quelques calculs simples montrent que

$$\|k_\lambda e\|_2^2 = \frac{\|e\|^2}{1 - |\lambda|^2} \text{ et } \|k^b_\lambda e\|_b^2 = \frac{\|e\|^2 - \|b(\lambda)^* e\|^2}{1 - |\lambda|^2},$$

ce qui permet de donner l'expression de $x_\lambda e$ (resp. $x^b_\lambda e$) noyaux renormalisés sur $H^2(E_*)$ (resp sur $\mathcal{H}(b)$) :

$$(x_\lambda e)(z) = \frac{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}{\|e\|} \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} e \text{ et } (x^b_\lambda e)(z) = \frac{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}{\sqrt{\|e\|^2 - \|b(\lambda)^* e\|^2}} \frac{Id - b(z)b(\lambda)^*}{1 - \bar{\lambda}z} e.$$

Voici les résultats connus sur les familles de noyaux reproduisants dans $H^2(E_*)$:

Théorème B.0.9 (c.f. [2]) *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$ et $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite de E_*. Supposons que $N := dim\ E_* < +\infty$.*

1. *La suite $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est minimale si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ satisfait la condition de Blaschke.*
2. *Si la suite $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz, alors la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est l'union d'au plus N suites de Carleson.*

Le premier point est prouvé dans [2] et le second point est dû à V. Vasyunin. Ce résultat ne peut être vrai en dimension infinie car on pourrait prendre une suite de vecteurs $(e_n)_n$ de E_* et, sans restriction sur la suite $(\lambda_n)_n$, la famille $(x_{\lambda_n} e_n)_n$ serait une base orthogonale de son enveloppe linéaire.

Le résultat de Treil [42] généralise les propriétés des noyaux reproduisants au cadre vectoriel :

Théorème B.0.10 *Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite relativement compacte de E_*. Alors $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de son enveloppe linéaire si et seulement si elle est uniformément minimale.*

Concluons cette partie sur les propriétés des familles de noyaux reproduisants de $H^2(E_*)$ par la caractérisation géométrique suivante des bases de Riesz, due à Ivanov [2].

Rappelons que la distance hyperbolique est définie par : :

$$\forall x, y \in \mathbb{D},\ d(a,b) = |b_x(y)| = \left|\frac{x-y}{1-\bar{x}y}\right|.$$

Notons $\Lambda := (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{D}$ et pour $\lambda \in \mathbb{D}$ et $r > 0$, on définit $\Omega(\lambda, r)$, la boule centrée en λ de rayon r pour la distance hyperbolique

$$\Omega(\lambda, r) := \{z \in \mathbb{D}\ :\ |b_\lambda(z)| < r\},\ \text{où } b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}},$$

ainsi que

$$G(\Lambda, r) := \bigcup_{n\geq 1} \Omega(\lambda_n, r).$$

Alors, pour $m \geq 1$, on note $G_m(\Lambda, r)$ la composante connexe de l'ensemble $G(\Lambda, r)$ et $E_m(r) := \{n \geq 1\ :\ \lambda_n \in G_m(\Lambda, r)\}$.

Théorème B.0.11 ([2], page 73) *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$ et $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite de E_*. Supposons que $N := dim\ E_* < +\infty$. Alors $(x_{\lambda_n} e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de son enveloppe linéaire si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est l'union d'au plus N suites de Carleson ;*

(ii) *il existe $r > 0$ tel que :*

$$\inf_{m\geq 1} \min_{n\in E_m(r)} \alpha\left(e_n, span(e_p\ : p \in E_m(r), p \neq n)\right) > 0$$

où $\alpha(u, P)$ représente l'angle entre le vecteur u et le sous-espace P.

Bibliographie

[1] Gr. Arsene and A. Gheondea. Completing matrix contractions. *J. Operator Theory*, 7(1) :179–189, 1982.

[2] S. A. Avdonin and S. A. Ivanov. *Families of exponentials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems, Translated from the Russian and revised by the authors.

[3] I. Bar-On and V. Ryaboy. Fast diagonalization of large and dense complex symmetric matrices, with applications to quantum reaction dynamics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18 :5 :1412–1435, 1997.

[4] C. Benhida and D. Timotin. Functional models and finite-dimensional perturbations of the shift. *Integral Equations Operator Theory*, 29(2) :187–196, 1997.

[5] C. A. Berenstein and R. Gay. *Complex variables*, volume 125 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. An introduction.

[6] A. Beurling. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Math.*, 81 :239–255, 1948.

[7] I. Chalendar and J. Esterle. Le problème du sous-espace invariant. In *Development of mathematics 1950–2000*, pages 235–267. Birkhäuser, Basel, 2000.

[8] N. Chevrot, E. Fricain, and D. Timotin. The characteristic function of a complex symmetric contraction.

[9] R. G. Douglas. On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 :413–415, 1966.

[10] P. Duren. *The Theory of H^p spaces*. Academic Press, 1970.

[11] C. Foias and B. Sz-Nagy. *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*. Masson, 1967.

[12] E. Fricain. Bases of reproducing kernels in model spaces. *J. Operator Theory*, 46(3, suppl.) :517–543, 2001.

[13] E. Fricain. Bases of reproducing kernels in de Branges spaces. *J. Funct. Anal.*, 226(2) :373–405, 2005.

[14] S. R. Garcia. Conjugation, The backward shift, and Toeplitz kernels. *J. Operator Theory*, 54 :2 :239–250, 2005.

[15] S. R. Garcia. Conjugation and Clark operators. *Contemporary Mathematics*, to appear.

[16] S. R. Garcia and M. Putinar. Complex symmetric operators and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358 :3 :1285–1315, 2006.

[17] T. T. Georgiou and M. C. Smith. Graphs, causality, and stabilizability : linear, shift-invariant systems on $\mathcal{L}_2[0,\infty)$. *Math. Control Signals Systems*, 6(3) :195–223, 1993.

[18] H. Helson. *Lectures on invariant subspaces.* Academic Press, New York, 1964.

[19] D. Hitt. Invariant subspaces of H^2 of an annulus. *Pacific J. Math.*, 134(1) :101–120, 1988.

[20] S. V. Hruščev, N. K. Nikolski, and B. S. Pavlov. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels. In *Complex analysis and spectral theory (Leningrad, 1979/1980)*, volume 864 of *Lecture Notes in Math.*, pages 214–335. Springer, Berlin, 1981.

[21] D. Khavinson. Factorization theorems for different classes of analytic functions in multiply connected domains. *Pacific J. Math.*, 108(2) :295–318, 1983.

[22] Y. Komatu. Sur la représentation de Villat pour les fonctions analytiques définies dans un anneau circulaire concentrique. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 21 :94–96, 1945.

[23] Y. Nakamura. One-dimensional perturbations of the shift. *Integral Equations Operator Theory*, 17(3) :373–403.

[24] Y. Nakamura. One-dimensional perturbations of isometries. *Integral Equations Operator Theory*, 9(2) :286–294, 1986.

[25] N. K. Nikolski. Bases of exponentials and values of reproducing kernels. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 252(6) :1316–1320, 1980.

[26] N. K. Nikolski. *Treatise on the Shift Operator.* Springer, 1986.

[27] N. K. Nikolski. *Operators, Functions, and Systems : An Easy Reading, Vol. 2 : Model Operators and Systems.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 93, A.M.S., 2002.

[28] N. K. Nikolski. *Operators, Functions, and Systems : An Easy Reading, Volume 1 : Model Operators and Systems*, volume 93. Mathematical Surveys and Monograph, American Mathematical Society, 2002.

[29] N. K. Nikolski and B. S. Pavlov. Bases of eigenvectors of completely nonunitary contractions, and the characteristic function (russian). *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, 34 :90–133, 1970.

[30] N. K. Nikol′skiĭ and V. I. Vasyunin. Notes on two function models. In *The Bieberbach conjecture (West Lafayette, Ind., 1985)*, volume 21 of *Math. Surveys Monogr.*, pages 113–141. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[31] J. R. Partington. *Linear Operators and Linear Systems.* Cambridge University Press, 2004. London Math. Soc. Student Texts 60.

[32] H. Radjavi and P. Rosenthal. *Invariant subspaces.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, second edition, 2003.

[33] H. L. Royden. Invariant subspaces of H^p for multiply connected regions. *Pacific journal of mathematics*, 134(1), 1988.

[34] W. Rudin. *Real and Complex Analysis. Third Edition.* McGraw-Hill, 1987.

[35] D. Sarason. The H^p spaces of an annulus. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 56, 1965.

[36] D. Sarason. Nearly invariant subspaces of the backward shift. *Op Theory Adv. Appl*, pages 481–493, 1988.

[37] D. Sarason. *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk.* Wiley interscience publication, 1994.

[38] N. H. Scott. A theorem on isotropic null vectors and its application to thermoelasticity. *Proc. Roy. Soc. London Ser.*, 440 :1909 :431–442, 1993.

[39] I. Şerban. *Perturbations de contractions.* PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon 1.

[40] I. Şerban. On the perturbation of isometries. *An. Univ. Timişoara Ser. Mat.-Inform.*, 40(2) :141–147, 2002.

[41] T. Takagi. On an algebraic problem related to an analytic theorem of carathedory and fejer and on an allied theorem of landau. *Japan J. Math.*, 1 :83–93, 1925.

[42] S. R. Treil′. Geometric methods in spectral theory of vector-valued functions : some recent results. In *Toeplitz operators and spectral function theory*, volume 42 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 209–280. Birkhauser, Basel, 1989.

[43] V. I. Vasyunin. The number of carleson series (russian). *Investigations on linear operators and the theory of functions, VII Zap. Naucn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov*, 65 :178–182, 1976.

[44] H. Villat. Sur le problème de Dirichlet dans une aire annulaire. *Rendiconti del Circolo matematico di Palerma*, 33 :134–175, 1911.

[45] J. von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren. *Math. Ann.*, 102 :49–131, 1929.

[46] D. V. Yakubovich. Invariant subspaces of the operator of multiplication by z in the space E^p in a multiply connected domain. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 178(Issled. Linein. Oper. Teorii Funktsii. 18) :166–183, 186–187, 1989.

Résumé

Sarason a décrit les sous-espaces fermés réduisants (invariants par S, opérateur de multiplication par z, et par S^*) et doublement-invariants (invariants par S et S^{-1}) de l'espace de Hardy $H^2(A)$ où A est un anneau. Nous établissons les versions vectorielles.

Nous donnons aussi la version vectorielle d'un résultat de Hitt portant sur les sous-espaces S^*-faiblement invariants via l'étude des contractions perturbées par des opérateurs de rang fini.

Dans la seconde partie, nous étudions les bases de noyaux reproduisants sur les espaces de De Branges–Rovnyak, au moyen du modèle de Sz-nagy–Foias.

Le dernier problème présenté est de caractériser les opérateurs $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ complexes symétriques. Nous en donnons des classes d'exemples.