Des structures de (quasi-)Poisson quadratiques sur l'algèbre de lacets pour la construction d'un système intégrable sur un espace de modules

Ariane Le Blanc

THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

Faculté des sciences fondamentales et appliquées

(Diplôme national - arrêté du 25 avril 2002)

Ecole Doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs intéractions

Présentée par :

Ariane LE BLANC

Des structures de (quasi-)Poisson quadratiques sur l'algèbre de lacets pour la construction d'un système intégrable sur un espace de modules

Directeur de thèse : Pol VANHAECKE

Soutenue le 21 Novembre 2006

Devant la commission d'examen

JURY

A. Alekseev	Prof., Université de Genève, SUISSE	Rapporteur
J. Hurtubise	Prof., McGill University, CANADA	Rapporteur
C. Laurent-Gengoux	Maît. Conf., Université de Poitiers	Examinateur
P. van Moerbeke	Prof., UCL, BELGIQUE	Examinateur
M. Pedroni	Prof., Università di Bergamo, ITALIE	Examinateur
P. Vanhaecke	Prof., Université de Poitiers	Examinateur
Y. Kosmann-Schwarzbach	Prof., Ecole Polytechnique	Invité

Remerciements

Il y a quatre ans, je n'étais qu'une petite étudiante. Je tiens aujourd'hui à remercier tous ceux qui m'ont aidée à grandir ...

Après Vincent, mes première pensées se tournent vers mon directeur de thèse, Pol Vanhaecke. Je lui suis tout d'abord infiniment reconnaissante de m'avoir proposé d'encadrer mon doctorat et d'avoir su me confier un sujet de recherche si proche de mes goûts et de mes attentes mathématiques, au carrefour de tant de géométries. Merci Pol pour ton amitié, ta patience, la rigueur que tu m'as enseignée et ton assistance chaque jour, même lorsque j'ai quitté Poitiers.

Pendant ces trois années de doctorat, le laboratoire de mathématiques de Poitiers m'a permis, à de nombreuses occasions, de partir à la rencontre des mathématiques. Chacun de ces voyages fut riche en découverte, autant scientifique qu'humaine. Je remercie entre autre Mark Adler, Serge Parmentier, Anton Alekseev, Jacques Hurtubise, Pierre van Moerbeke, Armando Treibich et Pantelis Damianou pour leur accueil et les discussions que nous avons pu avoir ensemble aux quatre coins du monde.

Je n'oublie pas pour autant les collègues de Poitiers avec qui j'ai pu partager des questions mathématiques. En particulier, je pense à Camille Laurent que je remercie très sincèrement. Sa patience et sa gentillesse m'ont permis de profiter pleinement de ses connaissances et qualités scientifiques. Et pour des questions plus précises dans différents domaines, merci à Claude Quitté, Rupert Yu, Abderrazak Bouaziz et Mustapha Rais, aux bureaux de qui j'ai pu frapper et de qui j'ai reçu tant de réponses utiles. Merci également à toutes ces petites mains qui allègent les soucis informatiques, administratifs, de reprographie et de documentation dans ce bâtiment. Leur travail n'a pas d'égal. Enfin, toute la petite troupe des doctorants de Poitiers avec qui j'ai pu partager de nombreux repas au restaurant universitaire, moment propice pour échanger nos succès et nos inquiétudes et parfois remonter les piles. Je leur souhaite à tous de fructueuses recherches.

Je remercie chaleureusement Anton Alekseev, Jacques Hurtubise, Pierre van Moerbeke, Camille Laurent, Marco Pedroni et Yvette Kosmann-Schwarzbach qui me font l'honneur d'être membre de ce jury.

J'ai enfin la joie de remercier ma famille et mes amis. Merci à mes parents de m'avoir donner la possibilité de faire des études et d'avoir accepté la voie dans laquelle je me suis orientée. Merci à tous ceux qui m'ont soutenue depuis le début et jusqu'au dernier jour. Merci enfin à Marie-Eve, Marie et Carine pour leur amitié et leur précieuse hospitalité depuis que je ne suis plus poitevine.

Enfin, je dédie ce travail à tous ceux pour qui les mathématiques ne sont qu'une suite de calculs fastidieux et qui ne soupçonnent donc pas le temps que l'on peut passer à jouer avec une bidérivation de (quasi-)Poisson !

Table des matières

1

Introduction

Les systèmes algébriquement complètement intégrables (systèmes a.c.i.) sont apparus dans le dernier quart du vingtième siècle. Outre leur intérêt en eux-mêmes, et leur apparition dans des contextes variés, issus de la mécanique, de la physique théorique et des mathématiques pures, ils offrent une multitude de techniques en géométrie de Poisson et dans l'étude de systèmes intégrables.

Un espace de modules est un espace qui paramétrise toutes les structures géométriques d'un certain type, sur une variété donnée, modulo une classe d'isomorphismes. Ce concept, également apparu dans la seconde moitié du siècle dernier, est la source de nombreux travaux de recherche, où se mèlent les techniques de géométries algébrique et différentielle.

Le contexte de cette thèse est l'intersection de ces deux mondes. L'objectif étant autant de mettre de l'a.c.i. dans les espaces de modules que des modules dans les systèmes a.c.i.. Plus précisement notre but initial est de construire un système algébriquement complètement intégrable sur l'espace de modules des connexions plates d'un fibré principal trivial d'une sphère de Riemann.

L'espace de modules $\mathscr{M}$

Soit S une surface de Riemann compacte, connexe et orientable, de genre g, ayant éventuellement n piqûres. Soit G un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une forme bilinéaire symétrique ad-invariante et non dégénérée $\mathcal{B} = \langle\cdot|\cdot\rangle$. Sur le fibré principal trivial $S \times G$, l'espace $\mathscr{A}$ des connexions s'identifie à l'espace $\Omega^1(S, \mathfrak{g})$ des formes différentielles sur S à valeurs dans $\mathfrak{g}$. $\mathscr{A}_{fl}$ est l'ensemble des connexions de $S \times G$ dites plates, c'est à dire dont la courbure $F(A) = dA + [A, A]$ est nulle.

L'espace de modules $\mathscr{M}$ que nous considérons est le quotient $\mathscr{M} = \mathscr{A}_{fl}/\mathscr{G}$ des connexions plates du fibré principal trivial $S \times G$ par l'action du groupe de jauge $\mathscr{G} = C^\infty(S, G)$ des automorphismes du fibré.

A chaque connexion plate, on associe son holonomie le long des lacets de la surface S. On définit de cette manière un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(S)$ dans le groupe de Lie G, à conjugaison près. Cette construction est détaillée par exemple dans l'ouvrage de Kobayashi-Nomizu [25]. On obtient ainsi une correspondance entre l'espace de modules des connexions plates $\mathscr{M}$ et le quotient $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)/G$.

Fig. 1.1. Le groupe fondamental d'une surface de genre 2 ayant 1 piqûre est engendré par les lacets a_1, b_1, a_2, b_2 et m_1.

Pour une surface de genre g avec n piqûres, le groupe fondamental est le groupe engendré par les lacets $m_1, \dots, m_n$ contournant les piqûres et les lacets $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ définis autour de chaque "poignée" et quotienté par la relation $m_1 \dots m_n a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e$, où e est le chemin constant sur la surface S (voir par exemple [30]). Ainsi $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)/G$ s'identifie au quotient $\mathscr{N}/G$, où

$$\mathscr{N} := \left\{ (M_1, \dots, A_1, B_1, \dots) \in G^{2g+n} \mid \prod_{j=1}^{n} M_j \prod_{i=1}^{g} A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = e \right\}.$$

Ce quotient sera usuellement noté $G^{n+2g} /\!\!/ G$. Par construction, la variété singulière $\mathscr{M} = G^{n+2g} /\!\!/ G$ est de dimension finie.

Un peu d'histoire

Il existe plusieurs constructions d'une structure de Poisson sur l'espace de modules $\mathscr{M} = \mathscr{A}_{fl}/\mathscr{G} = G^{n+2g} /\!\!/ G$. Les premiers auteurs à avoir étudié cet espace de modules sont Atiyah et Bott en 1983. Dans [11], ils construisent une structure symplectique sur $\mathscr{M}$, dans le cas où la surface S n'a pas de bord ($n = 0$). L'idée est de considérer la forme symplectique

$$\omega(\varphi, \psi) = \int_S \mathcal{B} \circ (\varphi \wedge \psi)$$

définie sur l'espace $\mathscr{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ (de dimension infinie) des connexions sur le fibré trivial $S \times G$. L'application de courbure F est alors une application moment pour l'action du groupe de jauge $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{A}$. La dimension finie du quotient $\mathscr{A}_{fl}/\mathscr{G} = G^{n+2g}/\!\!/G$ invite à faire une réduction symplectique et ainsi obtenir une structure symplectique sur l'espace de modules.

En 1992, Fock et Rosly proposent une première construction finie-dimensionnelle d'une structure de Poisson sur $\mathscr{M}$, dans le cas où la surface S a au moins un bord ($n > 0$). Le principe est de faire une discrétisation $\mathscr{A}^\delta$ et $\mathscr{G}^\delta$ des espaces $\mathscr{A}_{fl}$ et $\mathscr{G}$, en ramenant la surface S à un graphe épais.

Fig. 1.2. Graphe épais associé à une surface de genre 1 ayant 1 piqûre.

Les feuilles symplectiques de la structure de Poisson ainsi construites sont obtenues en fixant les classes de conjugaison de l'holonomie autour des piqûres : la feuille symplectique contenant la classe de $X' = (M'_1, \ldots, M'_n, A'_1, B'_1, \ldots, A'_g, B'_g)$ dans $G^{n+2g}/\!\!/G$ est le quotient

$$\frac{\left\{X \in \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n \times G^{2g} \mid \prod_{j=1}^n M_j \prod_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = e\right\}}{G},$$

où les $\mathcal{O}_i$ sont les classes de conjugaisons des M'_i. Au cours de cette construction, il est nécesssaire de choisir pour chaque sommet ν du graphe, une r-matrice $r_\nu \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Cependant la structure de Poisson obtenue sur le quotient $\mathscr{M} = \mathscr{A}^\delta/\mathscr{G}^\delta$ est indépendante de ces choix.

Le même phénomène apparaît, dans [10], lorsque Alekseev propose, en 1994, une seconde construction finie-dimensionnelle d'une structure de Poisson sur $\mathscr{M}$ par réduction d'une structure de Poisson sur G^{n+2g}. Pour $g \geq 0$ et $n \geq 0$, il considère l'algèbre quantique des fonctions sur G^{n+2g}, engendrée par les entrées des matrices de monodromie $M_1, \dots, M_n$, A_1, B_1, $\dots, A_g, B_g \in G \subset \mathbf{GL}(N)$ et quotientée par les relations quadratiques (non commutatives)

$$\begin{aligned} R_- X_i^1 * R_-^{-1} X_i^2 &= X_i^2 R_+ * X_i^1 R_+^{-1} \,, \\ R_+ X_i^1 * R_+^{-1} X_j^2 &= X_j^2 R_+ * X_i^1 R_+^{-1} \quad \text{if } i < j, \\ R_+ A_i^1 * R_-^{-1} B_i^2 &= B_i^2 R_+ * A_i^1 R_+^{-1}, \end{aligned}$$

où $R_\pm$ sont deux R-matrices, $X_i^1 := X_i \otimes 1$ et $X_i^2 := 1 \otimes X_i$. La limite classique de ce produit non commutatif donne une structure de Poisson quadratique sur G^{n+2g}, définie par la donnée de deux r-matrices $r_\pm$. Dans le formalisme tensoriel que nous allons développer dans les chapitres 2 et 3, le crochet de Poisson s'écrit

$$\begin{aligned} \left\{ X_i \overset{\otimes}{,} X_i \right\} &= -r_- X_i^1 X_i^2 - X_i^2 X_i^1 r_+ + X_i^1 r_- X_i^2 + X_i^2 r_+ X_i^1 \,, \\ \left\{ X_i \overset{\otimes}{,} X_j \right\} &= -r_+ X_i^1 X_j^2 - X_j^2 X_i^1 r_+ + X_i^1 r_+ X_j^2 + X_j^2 r_+ X_i^1 \quad \text{if } i < j \,, \\ \left\{ A_i \overset{\otimes}{,} B_i \right\} &= -r_+ A_i^1 B_i^2 - B_i^2 A_i^1 r_+ + A_i^1 r_- B_i^2 + B_i^2 r_+ A_i^1 \,. \end{aligned}$$

Cette structure de Poisson sur G^{n+2g} se restreint au sous-espace des fonctions G-invariantes et fournit, par réduction, une structure de Poisson sur le quotient $G^{n+2g} /\!\!/ G$. La bidérivation de Poisson obtenue sur le quotient est indépendante des choix des r-matrices $r_\pm$ et coïncide avec celles de Atiyah et Bott lorsque $n = 0$ et de Fock et Rosly lorsque $n > 0$.

L'un des objectifs de Alekseev, dans [10], était de construire un système intégrable quantique sur l'espace de modules $\mathscr{M} = G^{n+2g} /\!\!/ G$. Dans ce but il introduit, lorsque $g = 0$ et $G \subset \mathbf{GL}(N)$, l'application de transfert équivariante, dépendant d'un paramètre spectral λ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \qquad G^n \qquad &\longrightarrow \quad \mathfrak{gl}(N)[\lambda] \\ M = (M_1, \dots, M_n) &\longmapsto \mathcal{T}_M(\lambda) := (M_1 + \lambda \, \mathrm{Id}) \dots (M_n + \lambda \, \mathrm{Id}). \end{aligned}$$

Il observe alors que la q-trace $F_M(\lambda) = \mathrm{tr}_q \, \mathcal{T}_M(\lambda)$ de l'application de transfert fournit une famille commutative d'éléments G-invariants de l'algèbre quantique construite. La limite classique de la q-trace donne une famille involutive (relativement à la structure de Poisson) de fonctions sur $\mathscr{M}$. Le calcul précis du nombre de fonctions indépendantes ainsi obtenues montre que l'on a un système intégrable classique lorsque $G = \mathbf{SU}(2)$ (et $g = 0$).

Nos observations

Dans cette thèse, nous nous inspirons du travail d'Alekseev pour construire un système intégrable sur $\mathscr{M}$ lorsque le groupe G est $\mathbf{GL}(N)$ et que la surface S est une sphère piquée ($g = 0$ et $n \geq 3$). Il existe d'autres constructions de structures de Poisson et de systèmes intégrables sur l'espace de modules $\mathscr{M}$, proposées en particulier par Huebschmann [23, 22], Goldman [20, 19], Jeffrey et Weitsman [24]. Nous ne détaillons pas ces travaux qui sont totalement indépendants des techniques que nous développons ici.

L'application de transfert $\mathcal{T}$, définie par Alekseev sur G^n, prenant ses valeurs dans l'algèbre des matrices polynomiales, nous avons souhaité tirer profit des nombreux travaux suscités par l'étude de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{gl}(N)(\!(\lambda^{-1})\!)$ (de dimension infinie), appelée algèbre de lacets. En particulier il existe plusieurs constructions de structures de Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Les plus classiques sont les bidérivations de Poisson linéaires (voir par exemples [4, 37, 13]), souvent liées à la décomposition de $\tilde{\mathfrak{g}}$ en somme directe des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(N)[\lambda]$ et $\mathfrak{gl}(N)[[\lambda^{-1}]]$. Dans [21], Harnad et Hurtubise présentent également des bidérivations quadratiques sur l'algèbre de lacets, analogues, pour une algèbre associative, du crochet de Sklyanin d'un groupe de Lie. Il semble cependant que certaines d'entre elles ne satisfassent pas l'identité de Jacobi.

Par ailleurs, on connaît depuis les années 1979-80 ([4, 5, 37]) le rôle fondamental de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ dans l'étude de nombreux systèmes intégrables et plus particulièrement de systèmes algébriquement complètement intégrables. Considérons par exemple le champ Hamiltonien défini sur l'espace de modules $\mathscr{M}$ par la fonction $\operatorname{tr} X(a)$, pour un a fixé dans $\mathbb{C}$. Il est donné par l'équation de Lax à paramètre

$$\mathcal{X}_{\operatorname{tr}\mathcal{T}(\lambda)} \;:\; \dot{\mathcal{T}}_M(\lambda) = [\mathcal{T}_M(\lambda), Y(\lambda)]\,, \quad \text{où} \quad Y(\lambda) = \frac{-2\lambda\mathcal{T}_M(a)}{\lambda - a}. \tag{1.1}$$

Pour une telle équation, les fonctions $\operatorname{tr}\mathcal{T}^k(\lambda)$ forment clairement une famille de constantes du mouvement. Ainsi la courbe spectrale

$$\Gamma_{\mathcal{T}_M} := \left\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(\mu\operatorname{Id} - \mathcal{T}_M(\lambda)) = 0\right\}$$

est préservée par le flot de (1.1). Notons

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}_M} = \{X(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \det(\mu\operatorname{Id} - X(\lambda)) = \det(\mu\operatorname{Id} - \mathcal{T}_M(\lambda))\}\,.$$

Si $\Gamma_{\mathcal{T}_M}$ n'est pas singulière, on construit une application de $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_M}$ dans l'espace des diviseurs de la compactification de $\Gamma_{\mathcal{T}_M}$. Il existe alors un critère donnant une condition nécessaire et suffisante pour que cette application transforme le flot défini par (1.1) en un flot linéaire sur la Jacobienne de $\Gamma_{\mathcal{T}_M}$.

Revenons à la forme précise de notre équation de Lax à paramètre (1.1). Elle est similaire à celles étudiées par Beauville en 1990 :

$$\mathcal{Y}_{k,a} \;:\; \dot{X}(\lambda) = c(a)\frac{\big[X(\lambda), X^k(a)\big]}{\lambda - a}. \tag{1.2}$$

Dans [13], l'auteur montre que les champs Hamiltoniens (1.2) pour $a \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, fournissent un système algébriquement complètement intégrable sur le quotient $\tilde{\mathfrak{g}}_n/G$, où $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ est le sous-espace de $\tilde{\mathfrak{g}}$ constitué des matrices polynomiales de degré au plus n. Il considère pour cela une famille de structures de Poisson linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. La famille de fonctions en involution est celle des fonctions $\operatorname{tr} X^k(a)$, $k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$.

Le coefficient $c(a)$ qui apparaît dans l'équation (1.2) dépend uniquement de a, contrairement au coefficient 2λ dans (1.1) qui dépend de λ. Nous modifions donc légèrement l'application de transfert $\mathcal{T}$ en $\mathscr{T}$

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{T} : & G^n & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}}_n \\ & M = (M_1, \cdots, M_n) & \longmapsto & \mathscr{T}_M(\lambda) = (\lambda M_1 + \mathrm{Id}) \dots (\lambda M_n + \mathrm{Id}). \end{array}$$

Les champs Hamiltoniens associés aux fonctions $\operatorname{tr} \mathscr{T}^k(a)$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ sur $\mathscr{M}$ sont alors exactement donnés par

$$\mathcal{X}_{\operatorname{tr} \mathscr{T}^k(a)} \;:\; \dot{\mathscr{T}}_M(\lambda) = 2ka\frac{\big[\mathscr{T}_M(\lambda), \mathscr{T}_M^k(a)\big]}{\lambda - a}, \tag{1.3}$$

ce qui rentre dans le cadre des champs Hamiltoniens étudiés par Beauville.

Malheureusement, ni $\mathcal{T}$, ni $\mathscr{T}$ ne sont des applications de Poisson pour aucune des structures de Poisson linéaires connues sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$. Existe-t-il une structure de Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ telle que $\mathscr{T}$ soit un morphisme de Poisson de G^n dans $\tilde{\mathfrak{g}}_n$?

Notre construction

L'aspect quadratique du crochet de Poisson sur l'espace de modules $\mathscr{M}$ nous incite à regarder des structures de Poisson quadratiques sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Nous suivons pour cela le modèle présenté par Li et Parmentier dans [28], avec les r-matrices introduites par Reyman et Semenov-Tian-Shansky dans [37], pour tout entier $l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rclcrcl} R : \mathfrak{g}[\lambda] \oplus \lambda^{-1}\mathfrak{g}[[\lambda^{-1}]] & \to & \tilde{\mathfrak{g}} & \qquad & R_l : \tilde{\mathfrak{g}} & \to & \tilde{\mathfrak{g}} \\ P(\lambda) + \lambda^{-1}Q(\lambda^{-1}) & \mapsto & P(\lambda) - \lambda^{-1}Q(\lambda^{-1}) & & X(\lambda) & \mapsto & R(\lambda^l X(\lambda)). \end{array}$$

Nous construisons ainsi une hiérarchie $(\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q)_{l \in \mathbb{Z}}$ de structures quadratiques sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, données pour tout $l \in \mathbb{Z}$, par la formule

$$\{f,g\}_l^Q(X) = \frac{1}{2}\Big(\langle [X, \nabla f(X)] | R_l(X\nabla g(X) + \nabla g(X) X)\rangle_{\sim} \\ - \langle [X, \nabla g(X)] | R_l(X\nabla f(X) + \nabla f(X) X)\rangle_{\sim} \Big).$$

Ces bidérivations ne sont a priori pas toutes des structures de Poisson. Elles ont cependant des propriétés similaires aux bidérivations de Poisson linéaires construites avec les mêmes r-matrices. En particulier, les fonctions $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$-invariantes sont en involution et les champs Hamiltoniens sont donnés précisement, pour $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{Z}$, par

$$\mathcal{X}^{Q,l}_{\operatorname{tr} T^k(a)} \ : \ \dot{X}(\lambda) = 2ka^l \frac{\big[X(\lambda), X^k(a)\big]}{\lambda - a}.$$

Pour $l = 1$, c'est exactement le champ Hamiltonien que devrait donner une structure de Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ telle que l'application de transfert $\mathscr{T}$ soit un morphisme de Poisson. Par ailleurs, nous montrons que seules deux de ces bidérivations se restreignent à des champs de bivecteurs sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$: $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$. Exprimées dans le formalisme tensoriel que nous détaillons dans le chapitre 3, ces bidérivations s'écrivent

$$\begin{aligned} \big\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\big\}_0^Q &= \frac{2}{\lambda-\mu}[X(\lambda)\otimes X(\mu), \mathsf{t}_0], \\ \big\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\big\}_1^Q &= \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}[X(\lambda)\otimes X(\mu), \mathsf{t}_0] \\ &+ \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu}\Big((\mathrm{Id}\otimes X(\mu))\,\mathsf{t}_0\,(X(\lambda)\otimes \mathrm{Id}) - (X(\lambda)\otimes\mathrm{Id})\mathsf{t}_0(\mathrm{Id}\otimes X(\mu)) \Big). \end{aligned}$$

Parmi elles, seule $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ est une structure de Poisson. Malheureusement, la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ ne satisfait pas l'identité de Jacobi.

Cependant, il existe sur G^n un champ de bivecteurs $\{\cdot\,,\cdot\}_n$ qui est envoyé sur $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ par l'application de transfert $\mathscr{T}$. Ce champ de bivecteurs, construit par Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken dans [8] en 2002, est un exemple de ce qu'ils appellent une structure de quasi-Poisson. Par définition, une *G-variété de quasi-Poisson M* est une variété lisse M sur laquelle agit un groupe de Lie G, et équipée d'un champ de bivecteurs G-invariant $\{\cdot\,,\cdot\}$, satisfaisant, à la place de l'identité de Jacobi,

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \circlearrowleft_{1,2,3} = 2\phi_M[f_1, f_2, f_3],$$

où ϕ est le trivecteur de Cartan de l'algèbre de Lie de G et ϕ_M son image dans $\mathfrak{X}^3(M)$ par l'action de G sur M. Techniquement moins contraignantes, les structures de quasi-Poisson offrent les mêmes possibilités que les structures de Poisson : les notions de champs Hamiltoniens, fonctions de Casimir, fonctions en involution, morphismes, sous-variétés, ... sont définies de manière similaire, même si les résultats associés doivent être adaptés avec précautions.

Historiquement, les bidérivations de quasi-Poisson ont été introduites pour des variétés du type de notre espace de modules $\mathscr{M} = \mathscr{A}_{fl}/\mathscr{G}$, construit à partir d'espaces de dimension infinie. Comme nous le suggérions précédemment, en évoquant les travaux de Fock et Rosly, puis d'Alekseev, la construction d'une structure de Poisson sur $\mathscr{M}$ nécessite souvent un choix de r-matrices, même si la bidérivation obtenue au quotient ne semble pas dépendre de ce choix. Les structures de quasi-Poisson apparaissent alors comme une technique plus naturelle de construction de structure de Poisson. Elles ont en effet de bonnes propriétés de réduction, permettant d'obtenir une véritable structure de Poisson lorsque l'on quotiente par l'action du groupe. En particulier, la structure de Poisson obtenue sur l'espace de modules $\mathscr{M}$ par réduction Hamiltonienne de la bidérivation de quasi-Poisson $\{\cdot,\cdot\}_n$ naturelle sur G^n coïncide exactement avec la structure de Poisson connue sur $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$.

Dans [8], les auteurs présentent entre autre un processus appelé "fusion" permettant de jouer avec différentes actions de groupe pour construire une structure de quasi-Poisson sur une variété. Afin d'utiliser cette technique, nous décomposons la bidérivation $\{\cdot,\cdot\}_1^Q$ en deux termes : $\{\cdot,\cdot\}_1^Q = \{\cdot,\cdot\}_a + \{\cdot,\cdot\}_s$, où

$$\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_a = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}[X(\lambda)\otimes X(\mu), \mathfrak{t}_0].$$

Nous montrons d'abord que $\{\cdot,\cdot\}_a$ est une bidérivation de quasi-Poisson de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ relativement à l'action

$$\begin{aligned} G\times G\times\tilde{\mathfrak{g}} &\to \tilde{\mathfrak{g}} \\ (g_1,g_2,X) &\mapsto g_1 X g_2^{-1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

$\{\cdot,\cdot\}_1^Q$ est alors le résultat de la fusion de l'action (1.4) sur $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Pour les bidérivations de quasi-Poisson $\{\cdot,\cdot\}_n$ et $\{\cdot,\cdot\}_1^Q$, l'application de transfert

$$\begin{aligned} \mathscr{T}: \quad (G^n,\{\cdot,\cdot\}_n) &\longrightarrow (\tilde{\mathfrak{g}}_n,\{\cdot,\cdot\}_1^Q) \\ M=(M_1,\cdots,M_n) &\longmapsto \mathscr{T}_M(\lambda) = (\lambda M_1+\mathrm{Id})\dots(\lambda M_n+\mathrm{Id}). \end{aligned}$$

est donc un morphisme de quasi-Poisson. Nous adaptons alors au contexte quasi-Poisson un théorème de réduction de Pedroni et Vanhaecke ([33]) : sous une condition de tangence relativement simple, le quotient N/G où N est une sous-variété G-stable de M hérite d'une véritable structure de

Poisson. Nous montrons ainsi que la bidérivation de quasi-Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ induit une structure de Poisson sur le quotient $\mathscr{C}/G$, où $\mathscr{C}$ est la sous-variété G-stable de $\tilde{\mathfrak{g}}_n$

$$\mathscr{C} := \{\mathrm{Id}\,\lambda^n + \lambda Y(\lambda) + \mathrm{Id} \in \tilde{\mathfrak{g}}_n \mid Y(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}\}\,.$$

On a alors le diagramme suivant, où l'application de transfert $\mathscr{T}_G$ est un morphisme de Poisson

$$\begin{tikzcd} G^n \arrow[r, "\mathscr{T}"] \arrow[d] & \mathscr{C} \arrow[d] \\ G^n/\!\!/G \arrow[r, "\mathscr{T}_G"] & \mathscr{C}/G \end{tikzcd}$$

Qu'en est-il du système intégrable ? Nous montrons que le système Hamiltonien $(\operatorname{tr} X^k(a))_{k\in\mathbb{Z},a\in\mathbb{C}}$ sur $\mathscr{C}/G$, équipé de la structure de Poisson issue de notre structure de quasi-Poisson quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$, est encore un système intégrable. Par ailleurs nous montrons que l'application de transfert $\mathscr{T}$ induit un différomorphisme local sur un ouvert dense de $\mathscr{M}$. Ceci nous permet enfin de montrer que la famille de fonctions $(\operatorname{tr} \mathscr{T}^k(a))_{k_i n\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$ constitue un système intégrable sur $\mathscr{M}$.

Notre plan

Comme son nom l'indique le chapitre 2 est consacré à des rappels. C'est d'abord l'occasion de définir les notations utilisées concernant l'action d'un groupe de Lie sur une variété et les variétés de Poisson. Puis nous détaillons les constructions de structures de Poisson linéaires, quadratiques et cubiques présentées par Parmentier et Li dans [28]. Dans cette partie, nous redémontrons certains résultats que nous serons amenés à adapter par la suite au contexte de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$. La fin du chapitre 2 est consacré à ce qu'on a appelé le *formalisme tensoriel*. Il s'agit d'une écriture, couramment utilisée pour exprimer une structure de Poisson sur $\mathfrak{gl}(N)$.

Dans le chapitre 3, nous commençons par décrire rigoureusement le formalisme tensoriel pour l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}(N)(\!(\lambda^{-1})\!)$. Ce formalisme sera utilisé dans toute la suite de la thèse. Après un bref aperçu des structures de Poisson linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, nous développons la construction de structures de Poisson quadratiques sur le modèle présenté précédemment. En particulier, nous montrons que seules $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ se restreignent à $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ (proposition 3.13) et que parmi elles, seule $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ est une structure de Poisson (proposition 3.12). Dans la dernière partie de ce chapitre, nous observons comment quelques champs de vecteurs sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ relient en un réseau toutes les bidérivations ainsi construites sur $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Dans tout ce travail sur l'algèbre de lacets une grande part a été d'adapter des constructions valables pour une algèbre de Lie de dimension finie à l'algèbre de lacets dont la dimension est infinie. Les équivalences entre certaines notions en dimenion finie n'existent plus dans ce contexte. La structure graduée de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est alors un outil essentiel qui nous a permis de déterminer les définitions à considérer : formes linéaires, fonctions, endomorphismes, multivecteurs, bidérivations ... Si la donnée d'un groupe de Lie est sous-jacente à celle d'une algèbre de Lie en dimension finie, il n'en est pas de même pour l'algèbre de lacets. Le caractère associatif de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$ a permis de pallier à une partie de ces problèmes.

Dans le chapitre 4, nous présentons les variétés de quasi-Poisson telles qu'elles sont définies dans [8]. Parallèlement, nous montrons que la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ est une bidérivation de quasi-Poisson (proposition 4.6 et théorème 4.15). La compréhension de cette structure nous a entre autre permis de formaliser notre construction dans le contexte plus général d'une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ de l'algèbre de Lie d'une algèbre associative. Ce résultat est détaillé à la fin de ce chapitre (théorème 4.20). En application, nous trouvons une alternative à la constrution de la structure quadratique d'Adler pour le réseau de Toda classique.

Dans le chapitre 5, nous énonçons et démontrons notre résultat concernant la réduction de structure de quasi-Poisson (théorème 5.3). A titre d'exemple, nous reprenons la structure de quasi-Poisson de G^{n+2g}, présentée dans [8], afin de lui appliquer la réduction et obtenir ainsi la structure de Poisson sur l'espace de modules $\mathscr{M} = G^{n+2g}/\!\!/G$. Le deuxième exemple est celui du quotient $\mathscr{C}/G$ où $\mathscr{C}$ est le sous-ensemble de $\tilde{\mathfrak{g}}$ stable par conjugaison $\mathscr{C} := \{\mathrm{Id}\,\lambda^n + \lambda Y(\lambda) + \mathrm{Id} \in \tilde{\mathfrak{g}}_n \mid Y(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}\}$.

Enfin, le chapitre 6 est consacré à la partie système intégrable de notre travail. Dans un premier temps nous rappelons brièvement ce qu'est un système intégrable. Nous présentons ensuite rapidement le résultat de Beauville sur l'algèbre de lacets. Les deux parties suivantes sont consacrées, l'une au caractère involutif de la famille de fonctions $(\mathrm{tr}\,\mathscr{T}^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$, l'autre au décompte des fonctions indépendantes dans cette famille.

Encore des questions ...

Avant de clore cette introduction, mentionnons ici quelques questions soulevées par notre travail.

Tout d'abord, à travers toute notre étude sur l'espace de modules $\mathscr{M}$, nous nous sommes contentés d'une surface de genre nul ($g = 0$). La question de construire un tel système intégrable sur l'espace de modules d'une surface de genre non nul se pose aussi.

Deuxièmement, nous avons également limité notre étude au cas du groupe de Lie $G = \mathbf{GL}(N)$. Cela nous a permis de travailler sur son algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(N)$ qui est associative. Que pourrions nous faire avec un autre choix du groupe de Lie ?

Enfin, concernant la construction de structure de quasi-Poisson, il pourrait être intéressant de se placer dans le contexte d'autres exemples classiques d'algèbre associative.

2

Rappels et notations

L'objet de ce premier chapitre est d'exposer quelques préliminaires à notre travail. Dans un premier temps, nous rappelons les notions d'action d'un groupe de Lie sur une variété et de variété de Poisson. Nous présentons ensuite des constructions classiques de structures de Poisson polynomiales (linéaires, quadratiques et cubiques) sur l'algèbre de Lie d'une algèbre associative, à l'aide de r-matrices. Ce paragraphe, inspiré par Li et Parmentier (voir [28]) sera appliqué, dans le chapitre suivant, dans le cas particulier de l'algèbre de lacets. Enfin, nous concluons ce chapitre avec une description rigoureuse du formalisme tensoriel très souvent utilisé en dimension finie. Nous verrons, également dans le chapitre 3, les précautions nécesssaires pour l'adapter au cas de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$.

2.1 Action d'un groupe de Lie sur une variété

Soit M une variété lisse (les variétés que nous considérons sont des variétés lisses, réelles ou complexes) et H un groupe de Lie d'élément neutre e et d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Une *action à gauche* de H sur M est une application lisse

$$\begin{aligned} \rho : H \times M &\longrightarrow M \\ (h, m) &\longmapsto h \cdot m = \rho_m(h) = \rho_h(m) \end{aligned}$$

vérifiant :

(i) $\forall m \in M, \qquad e \cdot m = m,$

(ii) $\forall h_1, h_2 \in H, \quad \forall m \in M, \qquad h_1 \cdot (h_2 \cdot m) = h_1 h_2 \cdot m.$

On dit alors que M est une *H-variété*. Pour tout point m de M, l'application $\rho_m : H \to M$ induit une application sur les espaces tangents $\mathsf{d}\rho_m(h) : T_h H \to T_{h\cdot m} M$. En particulier, lorsque h est l'élément neutre

e du groupe de Lie H, T_hH est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H. Pour tout x dans $\mathfrak{h}$, la différentielle associe donc à tout point m de M, un vecteur $\mathsf{d}\rho_m(e)x$ de T_mM. Le champ de vecteurs sur M ainsi défini est appelé *champ de vecteurs fondamental associé à* x par l'action ρ. Notons-le $\underline{x}$. Il représente l'*action infinitésimale* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur la variété M. Le champ de vecteurs $\underline{x}$ est donné, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et m un point de M, par

$$\underline{x}[f](m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp(tx) \cdot m).$$

L'action infinitésimale satisfait à l'identité :

$$\forall x, y \in \mathfrak{h}, \qquad [\underline{x}, \underline{y}] = \underline{[x, y]}.$$

Une fonction f sur M est dite H*-invariante* si pour tout h dans H et m dans M, $f(h \cdot m) = f(m)$. Si f est une fonction H-invariante sur M et $x \in \mathfrak{h}$, on a $\underline{x}[f] = 0$ sur M.

Définissons le carré tensoriel de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ est le quotient de l'espace vectoriel engendré par les couples $(x, y) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ et quotienté par les relations, pour tous $x, y, z \in \mathfrak{h}$ et $a \in \mathbb{C}$,

1. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
3. $(ax, y) = (x, ay)$.

Les éléments de $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ sont appelés 2-*tenseurs*. La classe du couple (x, y) dans $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ est notée $x \otimes y$. Le *symétrique* de $x \otimes y$ est $y \otimes x$. Les *bivecteurs* de $\mathfrak{h}$ sont les 2-tenseurs antisymétriques : $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$. De la même manière, les 3-*tenseurs* sont les éléments du produit tensoriel $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ et les *trivecteurs* sont les 3-tenseurs alternés. Lorsque le groupe de Lie H agit sur la variété lisse M, on étend la notion de champ de vecteurs fondamental aux multivecteurs par $\underline{x \wedge y} = \underline{x} \wedge \underline{y}$ et $\underline{x \wedge y \wedge z} = \underline{x} \wedge \underline{y} \wedge \underline{z}$.

Considérons le cas où H opère sur $M = H$ lui même. Il existe sur H deux actions à gauche naturelles : la translation à gauche

$$\begin{aligned} L : H \times M &\longrightarrow M \\ (h, m) &\longmapsto hm \end{aligned}$$

et la translation à droite

$$\begin{aligned} R : H \times M &\longrightarrow M \\ (h, m) &\longmapsto mh^{-1}. \end{aligned}$$

Nous notons, pour x un élément de $\mathfrak{h}$, $\overleftarrow{x}$ le champ de vecteurs fondamental associé à x par la translation à gauche et $-\overrightarrow{x}$ le champ de vecteurs fondamental associé à x par la translation à droite. Cela permet de réserver la notation $\underline{x}$ pour l'action de conjugaison de H sur lui-même

$$\begin{aligned} C : H \times M &\longrightarrow M \\ (h,m) &\longmapsto hmh^{-1}. \end{aligned}$$

Cette troisième action est la composition des deux précédentes. Pour x un vecteur dans $\mathfrak{h}$, le champ de vecteurs fondamental associé à x par la conjugaison est $\underline{x} = \overleftarrow{x} - \overrightarrow{x}$. Les translations à gauche et à droite commutent : pour tout h_1, h_2 dans H et m dans $M = H$, on a $L_{h_1}(R_{h_2}(m)) = h_1 m h_2^{-1} = R_{h_2}(L_{h_1}(m))$. Elles commutent donc aussi infinitésimalement :

$$\forall x, y \in \mathfrak{h}, \qquad [\overleftarrow{x}, \overrightarrow{y}] = 0.$$

On prendra garde, pour tous $x, y \in \mathfrak{h}$, à l'égalité

$$[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] = [-\overrightarrow{x}, -\overrightarrow{y}] = -\overrightarrow{[x,y]}.$$

Ces mêmes actions apparaissent également avec les mêmes propriétés lorsque la variété différentielle M est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ elle-même ou une algèbre de Lie dont $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie. C'est la situation que nous allons rencontrer dans ce travail. $G = \mathbf{GL}(N)$ agit par translation à gauche, translation à droite et conjugaison sur l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}(N)(\!(\lambda^{-1})\!)$ des matrices de polynômes de Laurent en λ^{-1}. Nous notons comme précédemment les champs de vecteurs fondamentaux associés à un éléments x de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$ pour ces trois actions. Pour x un vecteur dans $\mathfrak{g}$ et X un point de $\tilde{\mathfrak{g}}$, les actions infinitésimales de $\mathfrak{g}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ sont données par

$$\overleftarrow{x}(X) = xX, \qquad -\overrightarrow{x}(X) = -Xx, \qquad \underline{x}(X) = [x, X].$$

Plus généralement, l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ agit sur elle-même de manière infinitésimale par translation à droite, translation à gauche et action adjointe. Bien que les champs de vecteurs ainsi définis ne soient pas les champs de vecteurs fondamentaux associés à x par des actions d'un groupe de Lie sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, nous les notons à nouveau $\overleftarrow{x}$, $\overrightarrow{x}$ et $\underline{x}$ (le groupe de lacets $\tilde{G}$, qui est de dimension infini, n'a malheureusement pas de structure de groupe de Lie évidente).

Plaçons ici un lemme qui servira dans le chapitre 4 pour montrer qu'un certain champ de bivecteurs est multiplicatif. Soit φ une application lisse entre deux variétés différentielles $\varphi : M \to N$. Nous dirons que deux champs de vecteurs $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^1(M)$ et $\mathcal{W} \in \mathfrak{X}^1(N)$ sont *φ-reliés* si on a

$$\forall m \in M, \qquad \mathsf{d}\varphi(m)\mathcal{V}(m) = \mathcal{W}(\varphi(m)).$$

On note alors $\varphi_* \mathcal{V} = \mathcal{W}$. On utilisera la même notation dans le cas de deux champs de p-vecteurs $P \in \mathfrak{X}^p(M), Q \in \mathfrak{X}^p(N)$.

Lemme 2.1. *Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie d'une algèbre associative de dimension finie et μ la multiplication dans $\mathfrak{h}$. Si v est un champ de vecteurs sur $\mathfrak{h}$,* *notons v^i le champ de vecteurs sur $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ dont les composantes sont v sur la i-ème et 0 sur l'autre. Alors les images des champs de vecteurs infinitésimaux associés aux actions de translation à gauche et à droite dans $\mathfrak{h}$ satisfont à :*

$$\forall x \in \mathfrak{h}, \qquad \begin{cases} \mu_*(\overleftarrow{x}^1) = \overleftarrow{x} \\ \mu_*(\overrightarrow{x}^1) = \mu_*(\overleftarrow{x}^2) \\ \mu_*(\overrightarrow{x}^2) = \overrightarrow{x}. \end{cases}$$

Démonstration. Soient (a, b) un élément de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ et x un vecteur dans $\mathfrak{h}$. Alors $\overrightarrow{x}^1(a, b) = (ax, 0)$ et $\mu_*(\overrightarrow{x}^1)(a, b) = \mathsf{d}\mu(a, b)\overrightarrow{x}^1(a, b) = axb$. Tandis que $\overleftarrow{x}^1(a, b) = (xa, 0)$ et $\mu_*(\overleftarrow{x}^1)(a, b) = \mathsf{d}\mu(a, b)\overleftarrow{x}^1(a, b) = xab = \overleftarrow{x}(a, b)$. □

Revenons au cas général où un groupe de Lie H agit sur une variété lisse et connexe M quelconque. On parle d'une *action régulière* si l'ensemble M/H des orbites de cette action possède une structure de variété différentiable telle que la projection canonique de M sur M/H soit une submersion surjective. Si l'action est régulière, ses orbites sont des sous-variétés fermées de M, toutes de même dimension. En pratique, les actions que nous allons rencontrer ne sont pas toutes régulières. Nous ne travaillerons en général que sur la partie lisse du quotient M/H.

2.2 Variétés de Poisson

La notion de variété de Poisson, connue depuis Lie et popularisée plus récemment par Lichnerowicz [29] et Weinstein [42], est une généralisation des variétés symplectiques.

Une *variété symplectique* est un couple (M, ω) où M est une variété lisse (réelle ou complexe) et ω est une 2-forme différentielle fermée non dégénérée. Si h est une fonction lisse sur M, la forme symplectique ω permet de lui associer un champ de vecteurs, appelé champ Hamiltonien associé à h, noté $\mathcal{X}_h$ et défini par

$$\forall x \in M, \quad \forall Y \in T_x M, \qquad \omega_x(Y, \mathcal{X}_h(x)) = \mathsf{d}h(x)Y.$$

Pour f et g deux fonctions lisses sur M, on définit leur crochet $\{f, g\}$ en posant :

$$\{f, g\} = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g).$$

Cette formule définit une structure de Lie sur l'algèbre de fonctions $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Un *crochet de Poisson* sur une variété lisse M (réelle ou complexe) est une structure d'algèbre de Lie sur l'algèbre associative des fonctions lisses sur M, les structures d'algèbre associative et d'algèbre de Lie étant liées par la *règle de Leibniz* : $\{f, gh\} = \{f, g\}\, h + g\, \{f, h\}$. M munie du champ de bivecteurs P est alors une *variété de Poisson.* En termes de bidérivation l'identité de Jacobi s'écrit à l'aide du crochet de Schouten[1]: $[\{\cdot\,,\cdot\}\,, \{\cdot\,,\cdot\}]_S = 0$. A une fonction lisse h sur M, on associe un champ de vecteurs sur M, $\mathcal{X}_h$, appelé à nouveau *champ Hamiltonien* $\mathcal{X}_h$ de h. Il est défini par la formule

$$\mathcal{X}_h[f] = \{f, h\}\,.$$

Une fonction f sur M est appelée *fonction de Casimir* de M si son champ Hamiltonien pour la structure de Poisson considérée sur M est nul. On a les égalités suivantes :

$$\{f, g\} = \mathcal{X}_g[f]$$
$$\mathcal{X}_f = -\left[\{\cdot\,,\cdot\}\,, f\right]_S$$

et, en utilisant l'identité de Jacobi de la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ on a

$$[\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g] = -\mathcal{X}_{\{f,g\}}.$$

Ainsi, l'espace $\mathcal{C}\mathrm{as}(M)$ des fonctions de Casimir d'une variété de Poisson M est un idéal de l'algèbre de Lie $(\mathcal{F}(M), \{\cdot\,,\cdot\})$. Deux fonctions f et g dans $\mathcal{F}(M)$ sont dites *en involution* si leur crochet s'annule : $\{f, g\} = 0$. Les champs Hamiltoniens de deux telles fonctions commutent : $[\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g] = 0$.

Soient $(M, \{\cdot\,,\cdot\}_M)$ et $(N, \{\cdot\,,\cdot\}_N)$ deux variétés de Poisson et $\varphi : M \to N$ une application lisse. On dira que φ est un *morphisme de Poisson* si son tiré-en-arrière $\varphi^* : \mathcal{F}(N) \to \mathcal{F}(M)$ est un morphisme de Lie pour les crochets $\{\cdot\,,\cdot\}_N$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_M$. En d'autres termes, φ est un morphisme de Poisson de M dans N si $\{\cdot\,,\cdot\}_M$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_N$ sont φ-reliés : $\varphi_* \{\cdot\,,\cdot\}_M = \{\cdot\,,\cdot\}_N$.

Une sous-variété N d'une variété de Poisson M est une *sous-variété de Poisson* de M si elle admet une structure de Poisson pour laquelle l'inclusion $\iota : N \to M$ est un morphisme de Poisson. Si une telle structure

[1] Rappellons brièvement les règles de calcul avec le crochet de Schouten : soient α, β, γ des champs de polyvecteurs de M, $f \in \mathcal{F}(M)$ et $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^1(M)$. Alors $[\alpha, f]_S = \iota_f \alpha$ et $[\mathcal{V}, \alpha]_S = \mathcal{L}_{\mathcal{V}} \alpha$. De plus

$$\begin{gathered} [\alpha, \beta]_S = -(-1)^{(|\alpha|-1)(|\beta|-1)}\, [\beta, \alpha]_S \\ [\alpha, \beta \wedge \gamma]_S = \beta \wedge [\alpha, \gamma]_S + (-1)^{(|\alpha|-1)|\gamma|}\, [\alpha, \beta]_S \wedge \gamma \\ (-1)^{(|\alpha|-1)(|\gamma|-1)} \left[\alpha, [\beta, \gamma]_S\right]_S + \circlearrowleft_{\alpha,\beta,\gamma} = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

de Poisson existe sur N, elle est clairement unique. La proposition suivante caractérise les sous-variétés d'une variété de Poisson qui sont des sous-variétés de Poisson.

Proposition 2.2. *Soit* $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ *une variéte de Poisson et* N *une sous-variété de* M*. Il existe une structure de Poisson* $\{\cdot\,,\cdot\}_N$*, pour laquelle* N *est une sous-variété de Poisson de* M *si et seulement si la restriction de tout champ de vecteurs Hamiltonien de* M *à* N *est tangente à* N *:*

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(M) \quad : \quad g \circ \iota = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \{f, g\} = 0.$$

Pour une variété holomorphe, la caractérisation se fait sur un voisinage ouvert de chaque point de la sous-variété.

Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson. Le rang $\mathrm{rg}_m \{\cdot\,,\cdot\}$ de la structure de Poisson en un point m de M est la dimension du sous-espace $\mathrm{Ham}_x(M) := \{\mathcal{X}_f(x), f \in \mathcal{F}(M)\}$. Le *rang* de la structure de Poisson sur M est $\mathrm{rg}\,\{\cdot\,,\cdot\} = \max\{\mathrm{rg}_m \{\cdot\,,\cdot\} \,|m \in M\}$. La distribution

$$\mathrm{Ham}(M) := \{\mathcal{X}_f, f \in \mathcal{F}(M)\}$$

définie par les champs Hamiltoniens est intégrable dans le sens où pour tout point m de M, il existe une sous-variété S de M qui contient m et telle que pour tout $x \in S$, $T_x S = \mathrm{Ham}_x(M) := \{\mathcal{X}_f(x), f \in \mathcal{F}(M)\}$. Le feuilletage qui en résulte est appelé *feuilletage symplectique* de M. Chaque feuille de ce feuilletage possède une structure symplectique unique telle que son immersion canonique dans M soit un morphisme de Poisson.

Enfin, soit M une variété différentielle et $\{\cdot\,,\cdot\}_1$, $\{\cdot\,,\cdot\}_2$ deux structures de Poisson sur M. On dit que ces deux structures de Poisson sur M sont *compatibles* si toute combinaison linéaire $a\{\cdot\,,\cdot\}_1 + b\{\cdot\,,\cdot\}_2$ est une structure de Poisson sur M. En termes de crochet de Schouten, les structures de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_1$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_2$ sont compatibles si et seulement si $[\{\cdot\,,\cdot\}_1\,, \{\cdot\,,\cdot\}_2]_S = 0$. Notons en particulier que lorsque $\{\cdot\,,\cdot\}_2$ est la dérivée de Lie de $\{\cdot\,,\cdot\}_1$ dans la direction d'un champ de vecteurs $\mathcal{V}$: $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\{\cdot\,,\cdot\}_1 = \{\cdot\,,\cdot\}_2$, si $\{\cdot\,,\cdot\}_1$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_2$ sont deux structures de Poisson, l'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten implique qu'elles sont compatibles.

2.2.1 Exemple d'une algèbre de Lie

Un exemple très classique de variété de Poisson est donné par l'espace dual d'une algèbre de Lie. Nous allons reprendre brièvement cette construction puisqu'elle est essentielle dans le cadre des systèmes intégrables et tout particulièrement dans la suite de ce travail. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de dimension finie, $\mathfrak{h}^*$ son espace dual et $\mathcal{F}(\mathfrak{h}^*)$ l'espace des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$. Par la règle de Leibniz, un crochet de Poisson sur $\mathcal{F}(\mathfrak{h}^*)$ est complètement déterminé par ces valeurs sur le sous-espace des fonctions linéaires $\mathfrak{h} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{h}^*)$. Pour x, y dans $\mathfrak{h}$, posons

$$\forall \xi \in \mathfrak{h}^*, \quad \{x, y\}(\xi) = \langle \xi, [x, y] \rangle .$$

L'identité de Jacobi pour le crochet ainsi défini se déduit directement de l'identité de Jacobi pour la structure de Lie de $\mathfrak{h}$. On a donc défini une structure de Poisson sur l'espace $\mathcal{F}(\mathfrak{h}^*)$. $\mathfrak{h}$ étant de dimension finie, $\mathcal{F}(\mathfrak{h}^*)$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*)$ des fonctions lisses sur $\mathfrak{h}^*$, cette structure s'étend donc naturellement aux fontions lisses. Explicitement, on a

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*), \quad \forall \xi \in \mathfrak{h}^*, \qquad \{\varphi_1, \varphi_2\}(\xi) = \langle \xi, [\mathsf{d}\varphi_1(\xi), \mathsf{d}\varphi_2(\xi)] \rangle ,$$

où l'on identifie canoniquement l'élément $\mathsf{d}\varphi_i(\xi)$ de $\mathfrak{h}^{**}$ à un élément dans $\mathfrak{h}$. Les propriétés de la structures de Poisson du dual d'une algèbre de Lie sont liées à l'action coadjointe ad^* de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$. En effet, si φ est une fonction lisse sur $\mathfrak{h}^*$, l'équation Hamiltonienne de mouvement associé à φ pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ est donnée par :

$$\dot{\xi} = -\,\mathrm{ad}^*_{\mathsf{d}\varphi(\xi)}\,\xi$$

En particulier, les fonctions de Casimir pour $\{\cdot\,,\cdot\}$ sont les fonctions ad^*-invariantes de $\mathfrak{h}^*$, celles-ci étant caractérisées par la propriété :

$$\forall \xi \in \mathfrak{h}^*, \ \mathrm{ad}^*_{\mathsf{d}\varphi(\xi)}\,\xi = 0.$$

Les feuilles symplectiques du crochet $\{\cdot\,,\cdot\}$ coïncident avec les orbites coadjointes dans $\mathfrak{h}^*$.

Exemple 2.3. Considérons, le cas particulier de l'algèbre des matrices $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$. Son dual s'identifie à $\mathfrak{g}$ via la forme bilinéaire symétrique et non dégénérée

$$\langle x|y \rangle = \operatorname{tr} xy.$$

$\langle\cdot|\cdot\rangle$ est de plus ad-*invariante* dans le sens où, pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a $\langle x|\,[y,z]\rangle = \langle [x,y]\,|z\rangle$. Le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ permet donc de définir une structure de Poisson sur $\mathfrak{g}$ par :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}), \quad \forall x \in \mathfrak{g}, \qquad \{\varphi_1, \varphi_2\}(x) = \operatorname{tr}(x\,[\mathsf{d}\varphi_1(x), \mathsf{d}\varphi_2(x)]).$$

Les actions adjointes et coadjointes coïncident et les orbites coadjointes sont les classes de conjugaison. Les fonctions de Casimir de cette bidérivation sont donc les invariants spectraux des matrices et pour toute fonction lisse φ sur $\mathfrak{g}$, l'équation Hamiltonienne associée à φ pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ s'écrit

$$\dot{x} = [\mathsf{d}\varphi(x), x] \,.$$

En particulier, les flots Hamiltoniens préservent les invariants spectraux des matrices.

Plus généralement, soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, de dimension finie, équipée d'une forme bilinéaire symétrique ad-invariante non dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Pour une fonction lisse f sur $\mathfrak{h}$ le gradient est l'unique élément de $\mathfrak{h}$ qui vérifie :

$$\forall y \in \mathfrak{h}, \quad \langle \nabla f(x) | y \rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+ty) = \mathsf{d}f(x)y \,.$$

Le crochet de Lie de $\mathfrak{h}$ induit une structure de Poisson sur $\mathfrak{h}$ donnée par

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathfrak{h}), \quad \forall x \in \mathfrak{h}, \qquad \{f_1, f_2\}(x) = \langle x | [\nabla f_1(x), \nabla f_2(x)] \rangle \,.$$

Les fonctions de Casimir de cette bidérivation sont les fonctions ad-invariantes, caractérisées par : $\forall x \in \mathfrak{h}$, $[\nabla f(x), x] = 0$. Nous verrons dans la section 2.4 comment construire d'autres structures de Poisson sur une algèbre de Lie.

2.3 r-matrices et équation de Yang-Baxter modifiée

Nous rappellons brièvement dans ce paragraphe la notion de r-matrice. On pourra consulter Semenov-Thian-Shansky [38] pour davantage de précisions sur le sujet. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie (éventuellement de dimension infinie). Un endomorphisme (en tant qu'espace vectoriel) R dans $\mathfrak{h}$ est appelé *r-matrice* (classique), si l'opérateur

$$[x,y]_R = \frac{1}{2}([Rx,y] + [x,Ry])$$

satisfait à l'identié de Jacobi. On notera $\mathfrak{h}_R$ l'algèbre de Lie $(\mathfrak{h}, [\cdot\,,\cdot]_R)$. La structure de Lie ainsi définie sur $\mathfrak{h}$ donne une structure de Poisson sur son dual $\mathfrak{h}^*$ lorsque $\mathfrak{h}$ est de dimension finie, que l'on appelle *R-crochet*.

Citons un cas particulier essentiel de r-matrices, donné par les solutions de l'équation de Yang-Baxter. Pour R un endomorphisme de $\mathfrak{h}$, on définit l'opérateur $B_R \in \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ en posant pour tout couple (x,y) dans $\mathfrak{h}$:

$$B_R(x,y) = [Rx, Ry] - R([Rx,y] + [x,Ry]).$$

L'identité de Jacobi : $\forall x,y,z \in \mathfrak{h}$, $[[x,y]_R\,, z]_R + \circlearrowleft = 0$ pour le crochet $[\cdot\,,\cdot]_R$ équivaut, pour B_R, à l'identité : $\forall x,y,z \in \mathfrak{h}$, $[B_R(x,y), z] + \circlearrowleft = 0$. On dira que R est solution de l'*équation de Yang-Baxter modifiée* (mYBe) s'il existe une constante complexe c telle que

$$\forall x, y \in \mathfrak{h}, \qquad B_R(x,y) = -c\,[x,y]\,. \tag{mYBe}$$

En particulier, si $c = 0$ on dira que R est solution de l'*équation de Yang-Baxter classique* (cYBe). Ainsi, pour toutes solutions R de l'équation de Yang-Baxter (classique ou modifiée), le crochet $[\cdot\,,\cdot]_R$ satisfait à l'identité de Jacobi.

Exemple 2.4. Supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ se décompose en une somme de deux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-$. Soient P_+ et P_- les projections associées à cette décomposition et

$$R = P_+ - P_-\,.$$

R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée et le crochet de Lie $[\cdot\,,\cdot]_R$ est donné par

$$[x,y]_R = [x_+, y_+] - [x_-, y_-]\ .$$

Définition 2.5. Une application T de $\mathfrak{h}$ dans lui même est appelé *entrelacement linéaire* si c'est un endomorphisme de $\mathfrak{h}$ satisfaisant à :

$$\forall x, y \in \mathfrak{h}, \qquad T([x,y]) = [T(x), y] = [x, T(y)]\,.$$

Lemme 2.6. *[37] Si R est une r-matrice sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et T un entrelacement linéaire alors la composée $R \circ T$ est encore une r-matrice de $\mathfrak{h}$.*

Démonstration. On remarque simplement que $B_{R\circ T}(x,y) = B_R(Tx, Ty)$ et donc $[B_R(Tx,Ty), Tz] + \circlearrowleft = 0$ implique $T\,[B_{R\circ T}(x,y), z] + \circlearrowleft = 0$, d'où le résultat lorsque T est inversible. Quand T n'est pas inversible, on obtient le résultat en remplaçant T par $T + \alpha\,\mathrm{Id}$:

$$(T + \alpha\,\mathrm{Id})\,[B_R(Tx + \alpha x, Ty + \alpha y), z] + \circlearrowleft = 0$$

Ce polynôme en α est toujours nul. Développons-le afin d'écrire que chacun de ses coefficients est égal à zéro :

$$\begin{aligned}
0 &= (T + \alpha\,\mathrm{Id})\,[B_R(Tx + \alpha x, Ty + \alpha y), z] + \circlearrowleft \\
&= \alpha^3([B_R(x,y), z] + \circlearrowleft) \\
&\qquad + \alpha^2([B_R(Tx,y) + B_R(x,Ty), z] + T([B_R(x,y), z]) + \circlearrowleft) \\
&\qquad + \alpha([B_R(Tx,Ty), z] + T\,[B_R(Tx,y) + B_R(x,Ty), z] + \circlearrowleft) \\
&\qquad + T\,[B_R(Tx,Ty), z] + \circlearrowleft
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{gathered}
[B_R(x,y),z] + \circlearrowleft = 0 \\
[B_R(Tx,y) + B_R(x,Ty),z] + T([B_R(x,y),z]) + \circlearrowleft = 0 \\
[B_R(Tx,Ty),z] + T\,[B_R(Tx,y) + B_R(x,Ty),z] + \circlearrowleft = 0 \\
T\,[B_R(Tx,Ty),z] + \circlearrowleft = 0
\end{gathered}$$

Enfin, injectons la première ligne dans la seconde puis la seconde dans la troisième, il reste :

$$[B_R(Tx,Ty),z] + \circlearrowleft = 0,$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.7. On sera attentif au fait que si R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée et T un entrelacement linéaire, $R \circ T$ est certe une r-matrice, mais pas forcément une nouvelle solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée. C'est d'ailleurs de cette manière que vont apparaitre dans les chapitres qui suivent des structures de quasi-Poisson. Pour l'équation de Yang-Baxter classique, la situation est un peu plus simple puisque si R est solution de la cYBe, alors $R \circ T$ est également solution de la cYBe.

2.4 Structures de Poisson polynomiales sur une algèbre de Lie

Dans cette partie, nous rappelons les constructions de structures de Poisson présentées dans [28]. Dans leur article, Parmentier et Li décrivent des structures de Poisson linéaires, quadratiques et cubiques sur l'algèbre de Lie d'une algèbre associative.

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de dimension finie munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et ad-invariante $\langle\cdot|\cdot\rangle$ qui permet d'identifier $\mathfrak{h}^*$ à $\mathfrak{h}$. Une structure de Poisson sur $\mathfrak{h}$ sera dite *linéaire* si le crochet de deux fonctions linéaires sur $\mathfrak{h}$ est une fonction linéaire sur $\mathfrak{h}$. De même, lorsque $\mathfrak{h}$ est associative, on dira qu'une structure de Poisson sur $\mathfrak{h}$ est *quadratique* (resp. *cubique*) si le crochet de deux fonctions linéaires sur $\mathfrak{h}$ est une fonction quadratique (resp. cubique) sur $\mathfrak{h}$.

Enfin, la forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur $\mathfrak{h}$ permet de définir, pour chaque endomorphisme R de $\mathfrak{h}$ son adjoint R^* par

$$\forall x,y \in \mathfrak{h}, \qquad \langle x|R(y)\rangle = \langle R^*(x)|y\rangle\,.$$

Nous utiliserons les parties symétrique et antisymétrique de R vis à vis de $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

2.4.1 Crochet linéaire associé à une r-matrice

L'identification de $\mathfrak{h}$ à son espace dual par la forme bilinéaire non-dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle$ fournit une structure de Poisson linéaire naturelle sur $\mathfrak{h}$, donnée par

$$\{f,g\}(x) = \langle x|\,[\nabla f(x), \nabla g(x)]\rangle$$

et pour laquelle les fonctions de Casimir sont les fonctions ad-invariantes. Soit R une r-matrice de $\mathfrak{h}$. Le R-crochet associé à R sur $\mathfrak{h}^*$ devient également un crochet de Poisson sur $\mathfrak{h}$:

$$\{f,g\}^L_R(x) = \frac{1}{2}\langle x|\,[R\nabla f(x), \nabla g(x)] + [\nabla f(x), R\nabla g(x)]\rangle\,.$$

On a alors immédiatement le résultat suivant :

Proposition 2.8. *Les fonctions* ad-*invariantes sur* $\mathfrak{h}$ *sont en involution pour le crochet de Poisson linéaire* $\{\cdot\,,\cdot\}^L_R$ *et si* g *est une fonction* ad-*invariante, le champ Hamiltonien associé à la fonction* g *est donné par l'équation de Lax :*

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\,[R(\nabla g(x)), x]\,.$$

Démonstration. En effet, une fonction g sur $\mathfrak{h}$ est ad-invariante, si et seulement si pour tout élément x de $\mathfrak{h}$, on a $[\nabla g(x), x\,] = 0$. Le crochet d'une fonction ad-invariante et d'une fonction quelconque est donc donné par $\{f,g\}^L_R(x) = \frac{1}{2}\langle x|\,[\nabla f(x), R(\nabla g(x))]\rangle = \frac{1}{2}\langle [x, \nabla f(x)]\,|R(\nabla g(x))\rangle$, d'où l'équation de Lax. Si de plus, f est une fonction ad-invariante, alors $\{f,g\}^L_R = 0$. □

Remarque 2.9. La propriété d'involution des fonctions ad-invariantes s'interprète géométriquement de la façon suivante : les flots des champs Hamiltoniens associés aux fonctions ad-invariantes sont contenus dans l'intersection des orbites coadjointes de $\mathfrak{h}$ et celles de $\mathfrak{h}_R$.

Remarque 2.10. Lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une algèbre de matrices, les fonctions définies par la trace $(x \mapsto \operatorname{tr} x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définissent une famille de fonctions ad-invariantes sur $\mathfrak{h}$. Elles sont donc en involution. Ainsi, $\forall k, j,\ \left\{\operatorname{tr} x^j, \operatorname{tr} x^k\right\}^L_R = 0$. Les champs Hamiltoniens correspondants sont les $\mathcal{X}^L_k(x) = \frac{k}{2}\left[R(x^{k-1}), x\right]$.

Remarque 2.11. Si R est une r-matrice et T un entrelacement linéaire symétrique de $\mathfrak{h}$, en notant encore T le champ de vecteurs défini par l'équation $\dot{X} = T(X)$, les crochets de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}^L_R$ et $\{\cdot\,,\cdot\}^L_{RT}$ sont reliés par la formule :

$$\{\cdot\,,\cdot\}^L_{RT} = -\mathcal{L}_T\,\{\cdot\,,\cdot\}^L_R\,.$$

En effet, faisons le calcul avec des fonctions f et g linéaires sur $\mathfrak{h}$, de telle sorte que leurs gradients ∇f et ∇g sont constants. On a pour tout x dans $\mathfrak{h}$, $\mathcal{L}_T f(x) = f(T(x))$ et $\nabla(\mathcal{L}_T f)(x) = T(\nabla f)$ (en utilisant le fait que T est symétrique et T linéaire :

$$\begin{aligned}\langle \nabla(\mathcal{L}_T f)(x)|H\rangle &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(T(x+tH)) \\ &= f(T(H)) = \langle \nabla f|T(H)\rangle = \langle T(\nabla f)|H\rangle\ ).\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T\,\{\cdot\,,\cdot\}_R^L\,[f,g](x) &= \frac{1}{2}\,\langle T(x)|\,[R\nabla f,\nabla g] + [\nabla f, R\nabla g]\rangle \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\langle x|\,[RT(\nabla f),\nabla g] + [T(\nabla f), R\nabla g]\rangle \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\langle x|\,[R\nabla f, T(\nabla g)] + [\nabla f, RT(\nabla g)]\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\,\langle x|\,[RT(\nabla f),\nabla g]\rangle - \frac{1}{2}\,\langle x|[\nabla f, RT(\nabla g)]\rangle \\ &= \{f,g\}_{RT}^L\,(x)\,.\end{aligned}$$

Remarque 2.12. Pour la r-matrice $R = P_+ - P_-$ de l'exemple 2.4 un calcul immédiat montre que les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{h}_+^\perp$ et $\mathfrak{h}_-^\perp$ sont des sous-variétés de Poisson de $\mathfrak{h}$ pour la structure $\{\cdot\,,\cdot\}_R^L$.

2.4.2 Crochet quadratique associé à une r-matrice

Supposons de plus que $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie d'une algèbre associative pour laquelle la multiplication est symétrique par rapport à $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (i.e.: pour tout triplet (x,y,z) dans $\mathfrak{h}$, $\langle xy|z\rangle = \langle x|yz\rangle$, ce qui implique l'ad-invariance de la forme bilinéaire : $\langle [x,y]\,|z\rangle = \langle x|\,[y,z]\rangle$). La donnée de r-matrices sur $\mathfrak{h}$ va permettre de construire des bidérivations quadratiques de $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$. Nous énonçons dans ce paragraphe deux constructions similaires, dont les hypothèses diffèrent légèrement. Le lemme suivant va être nécessaire.

Lemme 2.13. *[28] Soit R un endomorphisme de $\mathfrak{h}$. Notons A et S ses parties respectivement antisymétrique et symétrique. Si R et A sont deux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée (avec la même constante c), alors l'endomorphisme $\frac{1}{2}S$ est un morphisme de Lie de $\mathfrak{h}_A$ dans $\mathfrak{h}$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout couple (x,y) dans $\mathfrak{h}$, on a $[Sx,Sy] - S([Ax,y] + [x,Ay]) = 0$. Posons

$$B'_R(x,y) = R^*\,[Rx,y] - R^*\,[x,R^*y] - [Rx,R^*y]\,.$$

Alors

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{h}, \quad \langle B_R(x,y)|z\rangle = \langle x|B'_R(y,z)\rangle$$

d'où l'équivalence

$$(\forall x, y \in \mathfrak{h},\ B_R(x,y) = -c\,[x,y]) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x, y \in \mathfrak{h},\ B'_R(x,y) = -c\,[x,y]).$$

Or

$$[Sx, Sy] - S([Ax, y] + [x, Ay]) = B_A(x,y) - \frac{1}{2}B'_R(x,y) + \frac{1}{2}B'_R(y,x).$$

Ainsi, R et A solutions de la mYBe avec la même constante donne le résultat. □

Remarque 2.14. [28] Inversement, si A est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée et $\frac{1}{2}S$ un morphisme de Lie symétrique de $\mathfrak{h}_A$ dans $\mathfrak{h}$, alors $R = A + S$ est encore une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

Proposition 2.15. *[28] Si R et sa partie antisymétrique sont deux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée (avec la même constante), la formule*

$$\begin{aligned}\{f,g\}_R^Q(x) = \frac{1}{2}\big(&\langle [x, \nabla f(x)]|R(x\nabla g(x) + \nabla g(x)x)\rangle \\ &- \langle [x, \nabla g(x)]|R(x\nabla f(x) + \nabla f(x)x)\rangle\big) \\ = \langle A(&\nabla f(x)x)|\nabla g(x)x\rangle - \langle A(x\nabla f(x))|x\nabla g(x)\rangle \\ &+ \langle S(x\nabla f(x))|\nabla g(x)x\rangle - \langle S(\nabla f(x)x)|x\nabla g(x)\rangle\,,\end{aligned}$$

où A et S sont les parties symétriques et anti-symétriques de R, définie une structure de Poisson quadratique sur $\mathfrak{h}$, compatible avec la structure de Poisson linéaire $\{\cdot\,,\cdot\}_R^L$.

Par ailleurs les fonctions ad*-invariantes sont en involution pour le champ de bivecteurs $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$ et le champ Hamiltonien associé à une fonction* ad*-invariante g est donné par la forme de Lax*

$$\dot{x} = [R(x\nabla g(x)), x]\,.$$

Démonstration. Le crochet donné est clairement une bidérivation antisymétrique. Pour vérifier l'identité de Jacobi, écrivons $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q = \{\cdot\,,\cdot\}_a + \{\cdot\,,\cdot\}_s$ où le terme $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ regroupe les deux termes utilisant la partie antisymétrique de R et $\{\cdot\,,\cdot\}_s$ les deux termes utilisant la partie symétrique de R. Travaillons avec des fonctions linéaires f_1, f_2 et f_3 sur $\mathfrak{h}$. Notons pour i de 1 à 3, $L_i = \nabla f_i$ (constant puisque f_i est linéaire). Alors

$$\nabla \{f_2, f_3\}_a (x) = A(L_2x)L_3 - A(L_3x)L_2 + L_2A(xL_3) - L_3A(xL_2),$$
$$\nabla \{f_2, f_3\}_s (x) = S(xL_2)L_3 - S(xL_3)L_2 + L_2S(L_3x) - L_3S(L_2x).$$

En utilisant l'antisymétrie de A puis le fait que ce soit une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\{f_1, \{f_2, f_3\}_a\}_a (x) + \circlearrowleft \\
&\quad = \langle L_1x|\, [A(L_2x), A(L_3x)]\rangle + \langle xL_1|\, [A(xL_3), A(xL_2)]\rangle + \circlearrowleft \\
&\quad = \langle L_1x| B_A(L_2x, L_3x)\rangle + \langle xL_1| B_A(xL_3, xL_2)\rangle \\
&\quad = \langle L_1x| - c\, [L_2x, L_3x]\rangle + \langle xL_1| - c\, [xL_3, xL_2]\rangle \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&\{f_1, \{f_2, f_3\}_s\}_s (x) + \circlearrowleft \\
&\quad = -\langle xL_1|\, [S(L_2x), S(L_3x)]\rangle + \langle L_1x|\, [S(xL_2), S(xL_3)]\rangle + \circlearrowleft
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\{f_1, \{f_2, f_3\}_s\}_a (x) + \{f_1, \{f_2, f_3\}_a\}_s (x) + \circlearrowleft \\
&\quad = \langle A(L_1x)|\, [S(L_3x), xL_2] - [S(L_2x), xL_3]\rangle \\
&\qquad + \langle A(L_1x)|\, [S(xL_2), L_3x] - [S(xL_3), L_2x]\rangle + \circlearrowleft \\
&\quad = \langle xL_1| S([L_2x, L_3x]_A)\rangle - \langle L_1x| S\, [xL_2, xL_3]_A\rangle + \circlearrowleft .
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant le lemme 2.13 :

$$\begin{aligned}
&\{f_1, \{f_2, f_3\}_s\}_a (x) + \{f_1, \{f_2, f_3\}_a\}_s (x) + \circlearrowleft \\
&\quad = \langle L_1x|\, [S(xL_3), S(xL_2)]\rangle + \langle xL_1|\, [S(L_2x), S(L_3x)]\rangle + \circlearrowleft \\
&\quad = -\{f_1, \{f_2, f_3\}_s\}_s (x) + \circlearrowleft .
\end{aligned}$$

Ainsi, le Jacobiateur du champ de bivecteurs $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$ est nul et ce dernier est un crochet de Poisson. La deuxième partie de la proposition se montre de la même manière que dans le cas linéaire.

Concernant la compatiblilité de $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$ avec le crochet linéaire $\{\cdot\,,\cdot\}_R^L$, nous verrons dans la proposition 2.22 que ces structures de Poisson sont liées par une dérivée de Lie. □

Remarque 2.16. A nouveau, lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une algèbre de matrices, les traces $(\operatorname{tr} x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définissant des fonctions ad-invariantes sur $\mathfrak{h}$ sont en involution. Ainsi, $\forall k, j \in \mathbb{N}$, $\left\{\operatorname{tr} x^j, \operatorname{tr} x^k\right\}_R^Q = 0$. Les champs Hamiltoniens correspondants sont les

$$\mathcal{X}_k^Q(x) = k\left[R(x^k), x\right] = \frac{2k}{k+1}\mathcal{X}_{k+1}^L(x).$$

Remarque 2.17. Par contre, la remarque 2.11 du cas linéaire n'a pas d'analogue dans le cas quadratique. En effet, si R est une r-matrice satisfaisant la condition de la proposition 2.15 et T un entrelacement linéaire symétrique tel que $\forall x, y \in \mathfrak{h}$, $T(xy) = xT(y) = T(x)y$, rien n'assure que la partie antisymétrique de RT satisfasse encore la condition de Li et Parmentier. Nous serons confronté à cette situation pour notre choix de r-matrice sur l'algèbre de lacets dans le chapitre suivant. Par ailleurs, avec les mêmes hypothèses, on a $\mathcal{L}_T\left\{\cdot\,,\cdot\right\}_R^Q = 0$.

Enfin, donnons ici une construction plus générale d'une structure de Poisson quadratique sur une algèbre de Lie associative $\mathfrak{h}$. Elle est également due à Parmentier.

Proposition 2.18. *[32] Soit R une r-matrice sur $\mathfrak{h}$, admettant des décompositions de la forme $R = A_1 + B$ et $R = A_2 + B^*$, où A_1 et A_2 sont deux applications linéaires antisymétriques de $\mathfrak{h}$. Si R, A_1 et A_2 sont trois solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée (avec la même constante), alors la formule*

$$\begin{aligned}\left\{f, g\right\}(x) = &\left\langle A_1(\nabla f(x)x) | \nabla g(x)x\right\rangle - \left\langle A_2(x\nabla f(x)) | x\nabla g(x)\right\rangle \\ &+ \left\langle B(x\nabla f(x)) | \nabla g(x)x\right\rangle - \left\langle B^*(\nabla f(x)x) | x\nabla g(x)\right\rangle.\end{aligned}$$

définie une structure de Poisson quadratique sur $\mathfrak{h}$, compatible avec la structure de Poisson linéaire $\left\{\cdot\,,\cdot\right\}_R^L$. Les fonctions ad*-invariantes sont en involution pour cette structure de Poisson et le champ Hamiltonien associé à une fonction* ad*-invariante g est donné par la forme de Lax*

$$\dot{x} = \left[R(x\nabla g(x)), x\right].$$

La démonstration de ce résultat est similaire à celle de la proposition 2.15. Cette dernière est d'ailleurs un cas particulier de celle-ci. Elle correspond en effet au cas où $A_1 = A_2 = A$ et $B^* = B = S$.

2.4.3 Crochet cubique associé à une r-matrice

Enfin, signalons l'existence d'un troisième crochet polynomial associé à une solution de la mYBe sur $\mathfrak{h}$ dans le cas où $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie d'une algèbre associative. Dans le cadre précis de notre travail, nous n'allons pas véritablement travailler avec de telles structures.

Proposition 2.19. *[28] Soit R un endomorphisme de $\mathfrak{h}$, solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée. Alors le crochet*

$$\{f,g\}_R^C(x) = \langle [x, \nabla f(x)] | R(x\nabla g(x) x)\rangle - \langle [x, \nabla g(x)] | R(x \nabla f(x) x)\rangle .$$

définit une structure de Poisson sur $\mathfrak{h}$. Pour cette structure, les fonctions ad-*invariantes sont en involution et le champ Hamiltonien associé à une fonction* ad-*invariante g est donné par l'équation de Lax*

$$\dot{x} = [R(x\nabla g(x) x), x] .$$

Démonstration. Nous ne détaillerons pas tous les calculs pour ce champ de bivecteurs cubique. Pour trois fonctions linéaires f_1, f_2, f_3 sur $\mathfrak{h}$, notons L_1, L_2, L_3 leurs gradients (constants sur $\mathfrak{h}$). Le calcul du Jacobiateur de $\{\cdot,\cdot\}_R^C$, évalué en un point x de $\mathfrak{h}$, donne

$$\left\{\{f_1, f_2\}_R^C, f_3\right\}_R^C (x) + \circlearrowleft_{1,2,3} = \langle [x, L_1] \,| B_R(xL_2x, xL_3x)\rangle + \circlearrowleft_{1,2,3}$$

De telle sorte que si R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée, on a $\left\{\{f_1, f_2\}_R^C, f_3\right\}_R^C (x) + \circlearrowleft_{1,2,3} = 0$. □

Remarque 2.20. De même que précédemment, lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une algèbre de matrices, les traces $(\operatorname{tr} x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant des fonctions ad-invariantes sur $\mathfrak{h}$, elles sont en involution. Ainsi, $\forall k, j \in \mathbb{N}$, $\left\{\operatorname{tr} x^j, \operatorname{tr} x^k\right\}_R^C = 0$. Les champs Hamiltoniens correspondants sont les

$$\mathcal{X}_k^C(x) = k\left[R(x^{k+1}), x\right] = \frac{k}{(k+1)}\mathcal{X}_{k+1}^Q(x) = \frac{2k}{k+2}\mathcal{X}_{k+2}^L(x).$$

Remarque 2.21. Si R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée et T un endomorphisme linéaire symétrique vérifiant $\forall x, y \in \mathfrak{h}$, $T(xy) = T(x)y = xT(y)$ alors le champ de bivecteurs $\{\cdot,\cdot\}_{RT}^C$ est également une structure de Poisson sur $\mathfrak{h}$. Elle est liée à $\{\cdot,\cdot\}_R^C$ par la relation

$$\{\cdot,\cdot\}_{RT}^C = \mathcal{L}_T \{\cdot,\cdot\}_R^C .$$

2.4.4 Dérivées de Lie

Dans [28], Li et Parmentier expliquent comment ces structures de Poisson polynomiales construites à partir d'une r-matrice R sont liées par des dérivées de Lie. Cette observation est également faite par Oevel et Ragnisco dans [31].

Proposition 2.22. *Soit R une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée dont la partie antisymétrique A est également solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée. Les structures de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_R^L$, $\{\cdot,\cdot\}_R^Q$ et $\{\cdot,\cdot\}_R^C$ sont liés par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & \{\cdot,\cdot\}_R^L \arrow[r, "-\mathcal{L}_{x^2}"] \arrow[d, "-\mathcal{L}_x"'] & \{\cdot,\cdot\}_R^Q \arrow[r, "-\mathcal{L}_{x^2}"] & \{\cdot,\cdot\}_R^C \arrow[r, "\mathcal{L}_{x^2}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_x"'] & 0 \\
0 & \{\cdot,\cdot\}_R^L \arrow[l, "\mathcal{L}_{\mathrm{Id}}"'] & \{\cdot,\cdot\}_R^Q \arrow[l, "\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{Id}}"'] & \{\cdot,\cdot\}_R^C \arrow[l, "\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{Id}}"'] .
\end{tikzcd}$$

Le lecteur intéressé trouvera ces résultats dans [28] par exemple. Dans le chapitre suivant, nous détaillerons quelques unes de ces relations dans le cadre de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$.

2.5 Formalisme tensoriel

L'objet de ce paragraphe est de réécrire matriciellement les bivecteurs définissant les structures linéaires, quadratiques et cubiques dont nous venons de donner la construction, lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(N)$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Le point essentiel de ce paragraphe est l'identification, par la forme bilinéaire symétrique non dégénérée et ad-invariante $\langle\cdot|\cdot\rangle$, de $\mathrm{End}\,(\mathfrak{h})$ avec $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}^*\otimes\mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{h}) \\
r_1\otimes r_2 & \longmapsto & \langle r_1|\cdot\rangle\otimes r_2 & \longmapsto & (x\mapsto\langle r_1|\,x\rangle\, r_2) \\
\sum_{a\in I}\varepsilon_a\otimes R(e_a) & \longleftarrow & \sum_{a\in I}\langle\varepsilon_a|\cdot\rangle\otimes R(e_a) & \longleftarrow\!\shortmid & R
\end{array} \tag{2.2}$$

où $(e_a)_{a\in I}$ est une base de $\mathfrak{h}$ et $(\varepsilon_a)_{a\in I}$ sa base duale dans $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^*$: $\langle\varepsilon_a|e_b\rangle=0$ si $a\neq b$ et 1 si $a=b$. On a alors, si $r=\sum_\alpha r_\alpha\otimes r'_\alpha$ est l'homologue de R dans $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$,

$$\langle R(x)|\,y\,\rangle=\sum_\alpha\langle\langle r_\alpha|x\rangle\, r'_\alpha\,|\,y\,\rangle=\sum_\alpha\langle r_\alpha|\,x\rangle\,\langle r'_\alpha|\,y\,\rangle\ .$$

Cette identification est totalement indépendante de la base $(e_a)_{a\in I}$ choisie. D'autre part, dans la base canonique $(E_{ij})_{i,j}$ de $\mathfrak{gl}(N)$, on a l'identification

$$\begin{array}{rcl}\mathfrak{gl}(N)\otimes\mathfrak{gl}(N) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(N^2) \\ \sum_{i,j,k,l} x_{i,j}^{k,l} E_{ij}\otimes E_{kl} & \longmapsto & [\,x_{i,j}^{k,l}\,]_{\substack{N(i-1)+k \\ N(j-1)+l}} .\end{array} \tag{2.3}$$

Un élément $x\otimes y$ de $\mathfrak{gl}(N)\otimes\mathfrak{gl}(N)$ (et en particulier un élément de $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$) s'identifie à la matrice de $\mathfrak{gl}(N^2)$ dont le coefficient d'indice $N(i-1)+k, N(j-1)+l$ est donné par

$$(x\otimes y)_{i,j}^{k,l} := (x\otimes y)_{i,j,k,l} := x_{i,j}\, y_{k,l}\,.$$

Cette application est un morphisme d'algèbres associatives. En effet, le produit naturel dans $\mathfrak{gl}(N)\otimes\mathfrak{gl}(N)$: $(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$ coïncide avec le produit usuel des matrices de taille $N^2\times N^2$. On définit sur le produit tensoriel $\mathfrak{gl}(N)\otimes\mathfrak{gl}(N)$ deux applications de trace en la première et la seconde composante par les formules :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_1(A\otimes B) &= (\mathrm{tr}\, A)\, B \\ \mathrm{tr}_2(A\otimes B) &= A\,(\mathrm{tr}\, B)\,.\end{aligned}$$

Avant d'utiliser ce formalisme pour exprimer des champs de bivecteurs, énonçons quelques propriétés de ces applications de traces qui seront plus tard très efficaces pour calculer des champs Hamiltoniens.

Lemme 2.23. *Soit* t_0 *l'élément de* $\mathfrak{gl}(N)\otimes\mathfrak{gl}(N)$ *défini par*

$$\mathsf{t}_0 = \sum_{1\le i,j\le N} E_{ij}\otimes E_{ji}.$$

Pour toutes matrices A *et* B *de* $\mathfrak{gl}(N)$*, on a les égalités suivantes :*

1. $\mathsf{t}_0\, A\otimes B = B\otimes A\,\mathsf{t}_0$,
2. $\mathrm{tr}_1(\mathsf{t}_0\, A\otimes B) = \mathrm{tr}_2(A\otimes B\,\mathsf{t}_0) = AB$,
3. $\mathrm{tr}_1\,[\mathsf{t}_0, A\otimes B] = \mathrm{tr}_2\,[A\otimes B, \mathsf{t}_0] = [A,B]$.

Démonstration. Le coefficient noté $x_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}$ dans le produit $\mathsf{t}_0(A\otimes B)\mathsf{t}_0$ vaut en effet

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{1\le i,j,k,l\le N} E_{ij}AE_{kl}\otimes E_{ji}BE_{lk}\Big)_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta} &= \sum_{1\le i,j,k,l\le N} (E_{ij}AE_{kl})_{\alpha,\beta}(E_{ji}BE_{lk})_{\gamma,\delta} \\ &= \sum_{1\le i,j,k,l\le N} \delta_{i\alpha}\delta_{l\beta}A_{j,k}\delta_{j\gamma}\delta_{k\delta}B_{i,l} \\ &= A_{\gamma,\delta}B_{\alpha,\beta} \\ &= (B\otimes A)_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}\end{aligned}$$

d'où l'égalité $\mathtt{t}_0\, A \otimes B = B \otimes A\, \mathtt{t}_0$. Par ailleurs, le même genre de calcul donne

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_1(\mathtt{t}_0\, A \otimes B) = \mathrm{tr}_1(\mathtt{t}_0\, A \otimes \mathrm{Id})B &= \sum_{1 \le i,j \le N} \mathrm{tr}(E_{ij}A)E_{ji}B \\ &= \sum_{1 \le i,j \le N} A_{j,i}E_{ji}B = AB\,. \end{aligned}$$

la troisième égalité du lemme est une combinaison des deux premières. □

Le principe du formalisme que nous décrivons ici est de coder une structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ sur la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ par la matrice de taille $N \times N$

$$\left\{x \overset{\otimes}{,} x\right\} := \sum_{1 \le i,j,k,l \le N} \{x_{ij}, x_{kl}\}\,(x)E_{ij} \otimes E_{kl}.$$

A titre d'exemple, reprenons la structure de Poisson linéaire associée à une r-matrice R de $\mathfrak{h}$. Soit x un élément de $\mathfrak{h}$. Notons $r = \sum_\alpha r_\alpha \otimes r'_\alpha$ l'homologue de R dans $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned} \{f,g\}^L_R\,(x) &= \frac{1}{2}\,\langle x|\,[R\nabla f(x), \nabla g(x)] + [\nabla f(x), R\nabla g(x)]\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\langle[\nabla g(x), x]\,|R\nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\,\langle[x, \nabla f(x)]\,|R\nabla g(x)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_\alpha \langle r_\alpha|\nabla f(x)\rangle\langle r'_\alpha|\,[\nabla g(x), x]\rangle + \langle r_\alpha|\nabla g(x)\rangle\langle r'_\alpha|\,[x,\nabla f(x)]\rangle\,. \end{aligned}$$

Prenons $f = x_{ij}$ et $g = x_{kl}$ des fonctions coefficients des matrices. Pour tout y dans $\mathfrak{h}$, par construction du gradient avec la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ de $\mathfrak{h}$, on a $\langle y|\nabla x_{ij}\rangle = x_{ij}(y) = y_{i,j}$. D'où

$$\begin{aligned} \{x_{ij}, x_{kl}\}^L_R\,(x) &= \frac{1}{2}\sum_\alpha (\langle r_\alpha|\nabla x_{ij}\rangle\,\langle r'_\alpha|\,[\nabla x_{kl}, x]\rangle \\ &\qquad\qquad + \langle r_\alpha|\nabla x_{kl}\rangle\,\langle r'_\alpha|\,[x, \nabla x_{ij}]\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sum_\alpha (\,(r_\alpha)_{i,j}\,[x, r'_\alpha]_{k,l} + (r_\alpha)_{k,l}\,[r'_\alpha, x]_{i,j}\,) \\ &= \frac{1}{2}\sum_\alpha [\,r_\alpha \otimes [x, r'_\alpha] + [r'_\alpha, x] \otimes r_\alpha\,]_{i,j,k,l} \\ &= \frac{1}{2}(\,[(\mathrm{Id} \otimes x), r] - [(x \otimes \mathrm{Id}), r^*]\,)_{i,j,k,l}\,. \end{aligned}$$

La formule tensorielle linéaire

$$\left\{x \overset{\otimes}{,} x\right\}^L_R = \frac{1}{2}([\mathrm{Id} \otimes x, r] - [x \otimes \mathrm{Id}, r^*])$$

code ainsi la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_R^L$ de la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(N)$. Avant de poursuivre avec les structures quadratiques sur $\mathfrak{h}$, donnons quelques précisions concernant les propriétés de ce formalisme.

Pour commencer, l'antisymétrie d'un crochet $\{\cdot\,,\cdot\}$ s'écrit, pour A et B des matrices de fonctions sur $\mathfrak{h}$,

$$\mathsf{t}_0 \left\{A \overset{\otimes}{,} B\right\} = -\left\{B \overset{\otimes}{,} A\right\} \mathsf{t}_0 .$$

La règle de Leibniz qui fait de $\{\cdot\,,\cdot\}$ une bidérivation devient, pour des matrices de fonctions A, B et C sur $\mathfrak{h}$,

$$\left\{A \overset{\otimes}{,} BC\right\} = B\left\{A \overset{\otimes}{,} C\right\} + \left\{A \overset{\otimes}{,} B\right\} C.$$

De la même manière, lorsque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre associative de $\mathfrak{gl}(N)$, nous calculons explicitement la matrice du champ de bivecteurs quadratique :

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_R^Q(x) &= \frac{1}{2}(\langle [x,\nabla f(x)] | R(x\nabla g(x) + \nabla g(x)x)\rangle \\
&\qquad - \langle [x,\nabla g(x)] | R(x\nabla f(x) + \nabla f(x)x)\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\sum_\alpha (\langle r_\alpha | (x\nabla g(x) + \nabla g(x)x)\rangle \langle r'_\alpha | (x\nabla f(x) - \nabla f(x)x)\rangle \\
&\qquad - \langle r_\alpha | (x\nabla f(x) + \nabla f(x)x)\rangle \langle r'_\alpha | (x\nabla g(x) - \nabla g(x)x)\rangle).
\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour des fonctions coordonnées des matrices :

$$\begin{aligned}
&\{x_{ij}, x_{kl}\}_R^Q(x) \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_\alpha (\langle r_\alpha | (x\nabla x_{kl} + \nabla x_{kl}x)\rangle \langle r'_\alpha | (x\nabla x_{ij} - \nabla x_{ij}x)\rangle \\
&\qquad - \langle r_\alpha | (x\nabla x_{ij} + \nabla x_{ij}x)\rangle \langle r'_\alpha | (x\nabla x_{kl} - \nabla x_{kl}x)\rangle) \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_\alpha ((r_\alpha x + x r_\alpha)_{k,l}(r'_\alpha x - x r'_\alpha)_{i,j} - (r_\alpha x + x r_\alpha)_{i,j}(r'_\alpha x - x r'_\alpha)_{k,l}) \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_\alpha [(r'_\alpha x - x r'_\alpha) \otimes (r_\alpha x + x r_\alpha) - (r_\alpha x + x r_\alpha) \otimes (r'_\alpha x - x r'_\alpha)]_{i,j,k,l} \\
&\quad = \frac{1}{2}(r^*(x \otimes x) + (\mathrm{Id} \otimes x) r^* (x \otimes \mathrm{Id}) - (x \otimes \mathrm{Id}) r^* (\mathrm{Id} \otimes x) - (x \otimes x) r^* \\
&\qquad - r(x \otimes x) + (\mathrm{Id} \otimes x) r (x \otimes \mathrm{Id}) - (x \otimes \mathrm{Id}) r (\mathrm{Id} \otimes x) + (x \otimes x) r\,)_{i,j,k,l}.
\end{aligned}$$

D'où la formule tensorielle quadratique :

$$\left\{x \overset{\otimes}{,} x\right\}_R^Q = \left[x \otimes x, \frac{r - r^*}{2}\right] + (\mathrm{Id} \otimes x)\frac{r + r^*}{2}(x \otimes \mathrm{Id}) - (x \otimes \mathrm{Id})\frac{r + r^*}{2}(\mathrm{Id} \otimes x)\,.$$

Donnons dès à présent un exemple d'utilisaation de ce formalisme dans l'étude des structures de Poisson quadratiques sur $\mathfrak{h}$.

Proposition 2.24. *Soit R une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée antisymétrique. Alors la multiplication dans $\mathfrak{h}$ est un morphisme de Poisson pour la structure de Poisson quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$.*

Démonstration. Notons μ la multiplication : $\mu(x, x') = xx'$ et λ_x et $\rho_{x'}$ les multiplications à gauche et à droite : $\lambda_x(x') = \rho_{x'}(x) = xx'$. Pour que μ soit un morphisme de Poisson, il faut et il suffit que pour toutes fonctions a et b sur $\mathfrak{h}$, on ait $\{a \circ \mu, b \circ \mu\} = \{a, b\} \circ \mu$, où le produit $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ est muni du crochet de Poisson produit. Travaillons avec la matrice de Poisson sous sa forme tensorielle :

$$\begin{aligned}
\{x_{ij}\circ\mu, x_{kl}\circ\mu\}_R^Q(x,x') &= \{x_{ij}\circ\lambda_x, x_{kl}\circ\lambda_x\}_R^Q(x') + \{x_{ij}\circ\rho_{x'}, x_{kl}\circ\rho_{x'}\}_R^Q(x) \\
&= \left(x\otimes x\left\{x' \overset{\otimes}{,} x'\right\} + \left\{x \overset{\otimes}{,} x\right\} x'\otimes x'\right)_{i,j,k,l} \\
&= \left(x\otimes x\left[x'\otimes x', \frac{r-r^*}{2}\right] + \left[x\otimes x, \frac{r-r^*}{2}\right] x\otimes x'\right)_{i,j,k,l} \\
&= \left(\left[xx'\otimes xx', \frac{r-r^*}{2}\right]\right)_{i,j,k,l} \\
&= \{x_{ij}, x_{kl}\}_R^Q(xx') = \{x_{ij}, x_{kl}\}_R^Q \circ \mu\,(x,x'). \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque 2.25. Ce résultat est a priori faux quand R n'est pas antisymétrique.

Enfin les mêmes calculs s'adaptent au champ de bivecteurs cubique sur $\mathfrak{h}$, associé à une solution R de la mYBe, donné par

$$\{f, g\}_R^C(x) = \langle [x, \nabla f(x)] | R(x\nabla g(x)x)\rangle - \langle [x, \nabla g(x)] | R(x\nabla f(x)x)\rangle\,.$$

Le calcul de la matrice de Poisson donne, si $\mathfrak{h}$ est une algèbre de matrices :

$$\left\{x \overset{\otimes}{,} x\right\}_R^C = (x\otimes \mathrm{Id})\,[\mathrm{Id}\otimes x, r]\,(x\otimes \mathrm{Id}) - (\mathrm{Id}\otimes x)\,[x\otimes \mathrm{Id}, r^*]\,(\mathrm{Id}\otimes x).$$

3

Structures de Poisson polynomiales sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$

3.1 L'algèbre de lacets

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$ l'algèbre de Lie des matrices de taille $N \times N$ (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) et $G = \mathbf{GL}(N)$ le groupe linéaire. $\mathfrak{g}$ est munie d'une forme bilinéaire ad-invariante non dégénérée définie par $\langle X|Y\rangle_{\mathfrak{g}} = \operatorname{tr} XY$. On appelle *algèbre de lacets* de $\mathfrak{g}$, notée $\tilde{\mathfrak{g}}$, l'algèbre de Lie des séries de Laurent en la variable λ^{-1}, à coefficients dans $\mathfrak{g}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}((\lambda^{-1})) := \{X = \sum_{p \leq \alpha} x^{[p]}\lambda^p \mid \alpha \in \mathbb{Z}, x^{[p]} \in \mathfrak{g}\},$$

où le crochet de Lie dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ est le commutateur :

$$[x^{[p]}\lambda^p, y^{[q]}\lambda^q] = [x^{[p]}, y^{[q]}]\lambda^{p+q}.$$

$\tilde{\mathfrak{g}}$ est alors naturellement munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée ad-invariante, notée $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\sim}$, définie par :

$$\langle X|Y\rangle_{\sim} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left\langle x^{[p]}|y^{[-1-p]}\right\rangle_{\mathfrak{g}},$$

où $X = \sum_p x^{[p]}\lambda^p$ et $Y = \sum_q y^{[q]}\lambda^q$ sont des éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (la forme des éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}$ assure qu'il y a un nombre fini de termes non nuls dans le produit $\langle X|Y\rangle_{\sim}$). On utilisera les sous-espaces suivants de $\tilde{\mathfrak{g}}$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_d := \left\{\sum_{p=0}^{d} x^{[p]}\lambda^p \mid x^{[p]} \in \mathfrak{g}\right\}, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0} := \left\{\sum_{i=0}^{\beta} x^{[p]}\lambda^p \mid \beta \in \mathbb{N}, x^{[p]} \in \mathfrak{g}\right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha\beta} := \left\{\sum_{p=\alpha}^{\beta} x^{[p]}\lambda^p \mid x^{[p]} \in \mathfrak{g}\right\}, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_{<\beta} := \left\{\sum_{p\leq\beta} x^{[p]}\lambda^p \mid x^{[p]} \in \mathfrak{g}\right\}.$$

Sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, nous considérons l'algèbre $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ des fonctions dont les restrictions aux sous-espaces $\tilde{\mathfrak{g}}_{\leq d}$ sont polynomiales en les fonctions linéaires $X \mapsto \langle X|Y\rangle$, $Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Sur cette algèbre, le gradient d'une fonction f en un point X est défini comme l'unique élément $\nabla f(X)$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ satisfaisant :

$$\forall Y \in \tilde{\mathfrak{g}}\,, \quad \langle \nabla f(X)|\, Y\rangle_{\sim} = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(X+tY).$$

Lorsque nous parlons de champs de (poly-)vecteurs sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, c'est au sens de (multi-)dérivations alternées de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Nous utilisons la notation $\mathfrak{X}^i(\tilde{\mathfrak{g}})$.

L'objet de ce chapitre est de construire des structures de Poisson polynomiales sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, essentiellement des structures linéaires et quadratiques. Concernant les structures linéaires, il en existe plusieurs constructions. Nous suivrons le modèle présenté au chapitre précédent avec les r-matrices introduites par Reyman et Semenov-Tian-Shansky dans [37]. Si les bidérivations de Poisson linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ sont bien connues, ce n'est pas le cas des structures quadratiques.

Nous commençons ce chapitre par quelques précisions de notations et d'interprétations des objets manipulés sur l'algèbre de lacets. Nous décrivons ensuite le calcul des crochets de Poisson linéaires $\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$, avant de s'attarder d'avantage sur les bidérivations quadratiques. Nous montrons entre autre que seules deux des bidérivations quadratiques construites sur le modèle de Li et Parmentier, avec les r-matrices de Reyman et Semenov-Tian-Shansky, se restreignent aux sous-espaces $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Et parmi celles-ci, une seule est réellement une structure de Poisson. Cependant, l'absence d'identité de Jacobi de $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ ne nous prive pas des notions de champs Hamiltoniens, fonctions de Casimir et fonctions en involution, que nous manierons avec prudence. Nous verrons en effet dans les chapitres suivants combien cette bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est essentielle dans notre construction d'un système intégrable sur l'espace de modules $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$. Enfin, avant de clore ce chapitre, nous préciserons des relations de dérivées de Lie entre les bidérivations introduites.

3.2 Prélude

Ce prélude a pour but de préciser les objets avec lesquels nous travaillons sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$. La dimension infinie de cette algèbre de Lie nous oblige en effet à quelques précautions.

3.2.1 Les polyvecteurs de $\tilde{\mathfrak{g}}$

Reprenons le formalisme tensoriel que nous avons décrit dans le paragraphe 2.5. Pour que l'application

$$\begin{aligned} \beta : \mathrm{End}(\mathfrak{h}) &\longrightarrow \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \\ R \quad &\longmapsto \sum_{a \in I} \varepsilon_a \otimes R(e_a) \end{aligned}$$

soit bien définie lorsque $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{g}}$, nous devons adapter les espaces $\mathrm{End}(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$. La famille d'endomorphismes (applications linéaires) que nous allons considérer sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ sera contenue dans l'espace

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}}) := \{ R \in \mathrm{End}(\tilde{\mathfrak{g}}) \mid \exists l \in \mathbb{Z}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad R(\mathfrak{g}\lambda^p) \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{p-l,p+l} \} .$$

Par ailleurs, il sera pratique de considérer un élément $x\lambda^p \otimes y\lambda^q$ du carré tensoriel de $\tilde{\mathfrak{g}}$ comme l'élément $x \otimes y \lambda^p \mu^q$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}((\lambda^{-1}, \mu^{-1}))$. Nous écrirons donc couramment $X(\lambda) \otimes Y(\mu)$ pour $X(\lambda) \otimes Y(\lambda)$. Avec cette notation, on définit

$$\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}}) := \left\{ \sum_{-l \leq p+q \leq l} \alpha_{pq} \lambda^p \mu^q \mid \alpha_{pq} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soient $(e_a)_{a \in I}$ et $(\varepsilon_a)_{a \in I}$ deux bases duales de $\mathfrak{g}$. Les familles $(e_a \lambda^p)_{a \in I, p \in \mathbb{Z}}$ et $(\varepsilon_a \lambda^{-p-1})_{a \in I, p \in \mathbb{Z}}$ sont duales dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ au sens où

$$\forall a, b \in I, p, q \in \mathbb{Z}, \qquad \left\langle e_a \lambda^p | \varepsilon_b \lambda^{-q-1} \right\rangle_{\sim} = \delta_{a,b} \delta_{p,q} .$$

Un élément de $\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}})$ est entièrement déterminé par son image sur la famille $(e_a \lambda^p)_{a \in I, p \in \mathbb{Z}}$. L'application

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}}) &\longrightarrow \mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}}) \\ R \quad &\longmapsto \sum_{a \in I, p \in \mathbb{Z}} \varepsilon_a \lambda^{-p-1} \otimes R(e_a \mu^p) \end{aligned}$$

est alors bien définie et ne dépend pas du choix de la base $(e_a)_{a \in I}$ de $\mathfrak{g}$. Si la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\sim}$ ne s'étend visiblement pas à $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}}) \times \mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$, il est tout de même nécessaire de l'étendre à $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}}) \times (\tilde{\mathfrak{g}} \otimes \tilde{\mathfrak{g}})$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle_{\otimes} : \qquad & \mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}}) \times (\tilde{\mathfrak{g}} \otimes \tilde{\mathfrak{g}}) \qquad \to \mathbb{C} \\ & (\, x \otimes y \, \lambda^p \mu^q \, , \, z \otimes t \, \lambda^r \mu^s \,) \rightsquigarrow \langle \, x\lambda^p \, | \, z\lambda^r \, \rangle_{\sim} \, \langle \, y\lambda^q \, | \, t\lambda^s \rangle_{\sim} \, . \end{aligned}$$

Avec cette définition nous pouvons écrire

$$\forall R \in \mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}}), \forall X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \langle R(X(\lambda)) | Y(\lambda) \rangle_{\sim} = \langle \beta(R) | X(\lambda) \otimes Y(\mu) \rangle_{\otimes}. \quad (3.1)$$

Tout élément R de $\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}})$ admet un adjoint vis à vis de $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\sim}$ dans $\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}})$. D'autre part, le symétrique d'un 2-tenseur s'écrit

$$(x \otimes y\lambda^p\mu^q)^* = y \otimes x\lambda^q\mu^p$$

ou encore

$$(X(\lambda) \otimes Y(\mu))^* = Y(\lambda) \otimes X(\mu).$$

On a donc, pour $A \in \mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$ et $B \in \tilde{\mathfrak{g}} \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$, $\langle A^*|B^*\rangle_\otimes = \langle A|B\rangle_\otimes$ et pour R un élément de $\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}})$,

$$\beta(R)^* = \beta(R^*).$$

Le produit extérieur désigne classiquement l'antisymétrisé :

$$x\lambda^p \wedge y\mu^q = x \otimes y\lambda^p\mu^q - y \otimes x\lambda^q\mu^p.$$

Notons $\mathcal{A}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$ des bivecteurs (2-tenseurs antisymétriques). En notant d'autre part $\mathcal{A}_1(\tilde{\mathfrak{g}}) := \tilde{\mathfrak{g}}$ et $\mathcal{A}_3(\tilde{\mathfrak{g}})$ le sous-espace des trivecteurs (3-tenseurs alternés) dans

$$\mathcal{T}_3(\tilde{\mathfrak{g}}) := \left\{ \sum_{-l \le p+q+r \le l} \alpha_{pqr}\lambda^p\mu^q\nu^r \mid \alpha_{pqr} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

le crochet de Lie de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ s'étend, en tant que bidérivation graduée, aux $\mathcal{A}_i(\tilde{\mathfrak{g}})$, pour $i, j \in \{1, 2\}$ (et même pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, selon le même modèle) :

$$[\cdot\,,\cdot] : \mathcal{A}_i(\tilde{\mathfrak{g}}) \times \mathcal{A}_j(\tilde{\mathfrak{g}}) \longrightarrow \mathcal{A}_{i+j-1}(\tilde{\mathfrak{g}})$$

Les règles de calcul (2.1) rappellées au paragraphe 2.2 sont encore vraies pour ce crochet.

3.2.2 Les champs de bivecteurs de $\tilde{\mathfrak{g}}$

Le groupe de Lie $G = \mathbf{GL}(N)$ agit naturellement par conjugaison sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$. Nous noterons, commme suggéré dans le chapitre précédent, pour un élément x de $\mathfrak{g}$, $\overleftarrow{x}$ et $-\overrightarrow{x}$ les champs de vecteurs fondamentaux associés aux translations à gauche $X \mapsto gX$ et à droite $X \mapsto Xg^{-1}$ respectivement. $\underline{x}$ désignera le champ de vecteurs fondamental associé à la conjugaison $X \mapsto gXg^{-1}$. Il est donné par $\underline{x} = \overleftarrow{x} - \overrightarrow{x}$. Pour x un élément de $\mathfrak{g}$, les objets $\overleftarrow{x}$, $-\overrightarrow{x}$ et $\underline{x}$ définissent bien des dérivations de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Les actions infinitésimales de $\mathfrak{g}$ s'étendent à l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$: si $a\lambda^p$ est un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$ ($a \in \mathfrak{g}$ et $p \in \mathbb{Z}$), on désigne par $\overleftarrow{a\lambda^p}$ et $\overrightarrow{a\lambda^p}$ les champs de vecteurs sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ définis par

$$\forall f \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}), \quad \forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}, \qquad \left| \begin{array}{l} \overleftarrow{a\lambda^p}[f](X) = \langle a\lambda^p | \nabla f(X) X \rangle \\ \overrightarrow{a\lambda^p}[f](X) = \langle a\lambda^p | X \nabla f(X) \rangle . \end{array} \right.$$

Une fonction f sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est *G-invariante* si $\forall g \in G$, $\forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}$, on a $f(gXg^{-1}) = f(X)$. La caractérisation de cette propriété vis à vis de l'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est la suivante : $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $\underline{x}[f](X) = 0$. On dira que f est $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$*-invariante* si elle est invariante vis à vis de l'action infinitésimale de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur elle-même. Cette propriété, plus forte que la précédente, est caractérisée par : $\forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $[\nabla f(X), X] = 0$.

Dans ce chapitre et dans le chapitre 4 sur les variétés de quasi-Poisson, nous travaillons sur des bidérivations antisymétriques de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Pour un tel objet, nous utiliserons alternativement trois formalismes. Une bidérivation antisymétrique est une application :

$$\{\cdot\,,\cdot\} \,:\, \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}) \times \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})\,,$$

pour laquelle nous pourrons calculer un Jacobiateur $\{\cdot\,,\{\cdot\,,\cdot\}\}$, des dérivées de Lie dans la direction d'un champ de vecteurs : $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\{\cdot\,,\cdot\}[f,g] = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}\{f,g\} - \{\mathcal{L}_{\mathcal{V}}f,g\} - \{f,\mathcal{L}_{\mathcal{V}}g\}$, ... Une bidérivation antisymétrique pourra également être abordée comme un champ de bivecteurs de $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\{\cdot\,,\cdot\} = \sum_{a\in I} x_a \wedge y_a.$$

Ce formalisme sera utilisé pour des calculs avec le crochet de Schouten $[\cdot\,,\cdot]_S$ sur $\mathfrak{X}^\bullet(\tilde{\mathfrak{g}})$. Les champs de bivecteurs que nous considérerons seront tous l'image d'éléments de $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$ par les différentes actions infinitésimales de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur elle-même. Enfin, à toute bidérivation antisymétrique de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ nous associerons sa *matrice tensorielle*

$$\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\} \in \mathfrak{gl}(N^2, \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}))[[\lambda, \mu, \lambda^{-1}, \mu^{-1}]],$$

avec laquelle certain calculs deviennent élémentaires.

Le lecteur aura certainement sa préférence, mais nous varierons dans les démonstrations en essayant pour chaque assertion d'utiliser la technique la plus adaptée au résultat. Pour ce troisième point de vue, il convient de préciser certaines conventions.

Les bidérivations (resp. tridérivations) que nous allons considérer seront entièrement déterminées par leur évalutation sur les fonctions linéaires. Cette remarque (vraie seulement pour une classe de bidérivations de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$) nous permet de faire certains calculs (par exemple, calcul d'une dérivée de Lie ou d'un Jacobiateur) uniquement sur des fonctions linéaires avant d'en déduire qu'une formule est vraie pour tout élément de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Nous noterons, pour $a, b \in I$ et $p, q \in \mathbb{Z}$, $\xi_a^p = \left\langle \varepsilon_a \lambda^{-p-1} | \cdot \right\rangle_{\sim}$. Afin de simplifier les notations, introduisons des crochets de polynômes, pour $u = \sum_k u^{[k]}\lambda^k$ et $v = \sum_k v^{[k]}\lambda^k$ des séries d'éléments de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$,

$$\{u(\lambda), v(\mu)\} = \sum_{p,q} \left\{u^{[p]}, v^{[q]}\right\} \lambda^p \mu^q.$$

Lorsque l'on travaille avec la base canonique $(E_{ij})_{i,j}$ de $\mathfrak{g}$, la structure de Poisson (ou plus généralement la bidérivation) $\{\cdot\,,\cdot\}$ est codée par la matrice suivante :

$$\begin{aligned}\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\} &= \sum_{\substack{i,j,k,l\in[\![1,N]\!]\\ p,q\in\mathbb{Z}}} \left\{{x_{ij}}^{[p]}, {x_{kl}}^{[q]}\right\} \lambda^p \mu^q \, E_{ij}\otimes E_{kl}\\ &= \sum_{i,j,k,l\in[\![1,N]\!]} \{x_{ij}(\lambda), x_{kl}(\mu)\}\, E_{ij}\otimes E_{kl}.\end{aligned}$$

Par exemple, lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$, notons $X(\lambda) = \begin{pmatrix} v(\lambda) & u(\lambda)\\ w(\lambda) & t(\lambda)\end{pmatrix}$. Une bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est alors codée par sa matrice

$$\left\{X(\lambda)\overset{\otimes}{,}X(\mu)\right\} = \begin{pmatrix} \{v(\lambda),v(\mu)\} & \{v(\lambda),u(\mu)\} & \{u(\lambda),v(\mu)\} & \{u(\lambda),u(\mu)\}\\ \{v(\lambda),w(\mu)\} & \{v(\lambda),t(\mu)\} & \{u(\lambda),w(\mu)\} & \{u(\lambda),t(\mu)\}\\ \{w(\lambda),v(\mu)\} & \{w(\lambda),u(\mu)\} & \{t(\lambda),v(\mu)\} & \{t(\lambda),u(\mu)\}\\ \{w(\lambda),w(\mu)\} & \{w(\lambda),t(\mu)\} & \{t(\lambda),w(\mu)\} & \{t(\lambda),t(\mu)\}\end{pmatrix}$$

Donnons dès à présent quelques règles de calcul dans ce formalisme. D'une part l'identité de Leibniz de la bidérivation qui s'exprime pour des matrices de fonctions $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$, par :

$$\left\{A(\lambda)\overset{\otimes}{,}B(\mu)C(\mu)\right\} = \mathrm{Id}\otimes B(\mu)\left\{A(\lambda)\overset{\otimes}{,}C(\mu)\right\} + \left\{A(\lambda)\overset{\otimes}{,}B(\mu)\right\}\mathrm{Id}\otimes C(\mu).$$

D'autre part, on prendra garde à l'expression de l'antisymétrie dans ce formalisme. Si t_0 désigne l'élément $\mathsf{t}_0 = \sum_{ij} E_{ij}\otimes E_{ji}$, elle s'écrit en effet :

$$\left\{A(\lambda) \overset{\otimes}{,} B(\mu)\right\} = -\mathsf{t}_0 \left\{B(\mu) \overset{\otimes}{,} A(\lambda)\right\} \mathsf{t}_0\,.$$

Enfin, la linéarité de la trace sur $\mathfrak{g}$ et la relation sur les traces tr_1 et tr_2 permettent des calculs de champs Hamiltoniens sous forme tensorielle :

$$\begin{aligned}\{A(\lambda), \mathrm{tr}\, B(\mu)\} &= \mathrm{tr}_2 \left\{A(\lambda) \overset{\otimes}{,} B(\mu)\right\},\\ \{\mathrm{tr}\, A(\lambda), \mathrm{tr}\, B(\mu)\} &= \mathrm{tr}\left\{A(\lambda) \overset{\otimes}{,} B(\mu)\right\}.\end{aligned}$$

3.3 Une famille de r-matrices sur $\tilde{\mathfrak{g}}$

Considérons sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ les endomorphismes R et R_l, introduits par Reyman et Semenov-Tian-Shansky en 1988 [37] :

$$\begin{array}{rcl} R \ : \ \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[\lambda] \oplus \lambda^{-1}\mathfrak{g}[[\lambda^{-1}]] & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}} \\ P(\lambda) + \lambda^{-1}Q(\lambda^{-1}) & \longmapsto & P(\lambda) - \lambda^{-1}Q(\lambda^{-1}) \end{array}$$

et, pour un entier $l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rrcl} R_l : & \tilde{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}} \\ & X(\lambda) & \longmapsto & R(\lambda^l X(\lambda)). \end{array}$$

Lemme 3.1. *Pour tout l, R_l est une r-matrice, élément de $\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}})$.*

Démonstration. L'application R rentre clairement dans le cadre de l'exemple 2.4. C'est donc une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée. D'autre part, pour tout entier l, la multiplication par λ^l est un entrelacement linéaire de $\tilde{\mathfrak{g}}$. D'après le lemme 2.6, les R_l sont donc des r-matrices. On a d'ailleurs, pour tous $X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{g}}$,

$$B_{R_l}(X,Y) = B_R(\lambda^l X(\lambda), \lambda^l Y(\lambda)) = -\left[\lambda^l X(\lambda), \lambda^l Y(\lambda)\right] = -\lambda^{2l}\left[X,Y\right],$$

$$[B_{R_l}(X,Y), Z] = -\lambda^{2l}\left[\left[X,Y\right], Z\right]. \quad \square$$

Regardons ces endomorphismes R_l dans le produit tensoriel $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$. Sur la base canonique de l'algèbre de matrices, R_l est défini par

$$R_l(E_{ij}\lambda^p) = \varepsilon_{p+l}E_{ij}\lambda^{p+l} := \left| \begin{array}{ll} E_{ij}\lambda^{p+l} & \text{si } p+l \geq 0 \\ -E_{ij}\lambda^{p+l} & \text{si } p+l < 0. \end{array} \right.$$

On a donc, en notant $r_l = \beta(R_l)$ dans $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$,

$$r_l = \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ i,j}} \varepsilon_{p+l} E_{ji}\lambda^{-p-1} \otimes E_{ij}\mu^{p+l}.$$

On remarque qu'en posant $\mathsf{t}_0 = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ on a :

$$(\lambda - \mu)\, r_l = 2\,\lambda^l\, \mathsf{t}_0$$

et, si S_l et A_l désignent les parties respectivement symétrique et antisymétrique de R_l, et s_l et a_l leurs images par β dans $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$,

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)\, r_l^* &= -2\,\mu^l\, \mathsf{t}_0\,, \\ (\lambda - \mu)\, s_l &= (\lambda^l - \mu^l)\, \mathsf{t}_0\,, \\ (\lambda - \mu)\, a_l &= (\lambda^l + \mu^l)\, \mathsf{t}_0\,. \end{aligned}$$

En particulier, $s_0 = 0$. R_0 est donc une solution antisymétrique de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

3.4 Les crochets linéaires

Dans cette partie, nous présentons rapidement quelques propriétés des structures de Poisson linéaires construites sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur le modèle présenté dans le chapitre précédent, avec les r-matrices $(R_l)_{l\in\mathbb{Z}}$. En dehors de la proposition 3.2 qui est plus personnelle, on trouve tous ces résultats dans [37] et [33].

Les endomorphismes R_l étant des r-matrices, à chaque entier l correspond un crochet de Poisson linéaire $\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$ défini par

$$\{f,g\}_l^L(X) = \frac{1}{2}\left\langle X \middle| [R_l\nabla f(X), \nabla g(X)] + [\nabla f(X), R_l\nabla g(X)]\right\rangle_{\sim}.$$

La structure de Poisson est déterminée par les crochets $\{f,g\}$ où f et g sont choisies dans la famille des fonctions linéaires $\xi_a^p = \left\langle e_a\lambda^{-p-1}\middle|\cdot\right\rangle_{\sim}$ associée à une base $(e_a)_{a\in I}$ de $\mathfrak{g}$. On a alors, pour tout $l\in\mathbb{Z}$,

$$\{\xi_a^p, \xi_b^q\}_l^L = \epsilon_l^{pq}\sum_c C_{a,b}^c\,\xi_c^{p+q+1-l},$$

où $\epsilon_l^{pq} = 1$ si $p,q<l$, -1 si $p,q\geq l$ et 0 sinon, et $[e_a,e_b] = \sum_c C_{a,b}^c\, e_c$.

Nous avons vu dans le chapitre précédent (section 2.5) comment un crochet de Poisson linéaire $\{\cdot\,,\cdot\}_R^L$ est codé par la matrice

$$\left\{x \overset{\otimes}{,} x\right\}_R^L = \frac{1}{2}([\mathrm{Id}\otimes x, r] - [x\otimes\mathrm{Id}, r^*]),$$

où r est l'image de R dans le carré tensoriel. Dans le cas de l'algèbre de lacets et des r-matrices R_l, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Soit l un entier. La structure de Poisson linéaire donnée par la r-matrice R_l sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ admet la matrice de Poisson tensorielle :*

$$\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^L = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\lambda^l\,[\mathrm{Id}\otimes X(\mu), \mathsf{t}_0] + \mu^l\,[X(\lambda)\otimes\mathrm{Id}, \mathsf{t}_0]\right),$$

où $\mathsf{t}_0 = \sum_{i,j} E_{ij}\otimes E_{ji} \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$.

Démonstration. Notons $r_l = \sum_{p,q} u_{pq}\otimes v_{pq}\lambda^p\mu^q$. Soient f et g les fonctions linéaires $f = \xi_{ij}^\alpha$ et $g = \xi_{kl}^\beta$. Calculons le crochet $\{f,g\}_l^L$ en un point $X\in\tilde{\mathfrak{g}}$.

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_l^L(X) &= \frac{1}{2}\,\langle r_l|\nabla f\otimes[\nabla g,X]\rangle_{\otimes} + \frac{1}{2}\,\langle r_l^*|\,[X,\nabla f]\otimes\nabla g\rangle_{\otimes} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q}\langle u_{pq}\lambda^p|\nabla f\rangle_{\sim}\,\langle[X(\mu),v_{pq}\mu^q]\,|\nabla g\rangle_{\sim} \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{p,q}\langle[v_{pq}\lambda^q,X(\lambda)]\,|\nabla f\rangle_{\sim}\,\langle u_{pq}\mu^p|\nabla g\rangle_{\sim} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q}\xi_{ij}^{\alpha}(u_{pq}\lambda^p)\,\xi_{kl}^{\beta}([X(\mu),v_{pq}\mu^q]) \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{p,q}\xi_{ij}^{\alpha}([v_{pq}\lambda^q,X(\lambda)])\,\xi_{kl}^{\beta}(u_{pq}\mu^p) \\
&= \frac{1}{2}[\mathrm{Id}\otimes X(\mu),r_l]_{i,j,k,l}^{[\alpha,\beta]} + \frac{1}{2}[r_l^*,X(\lambda)\otimes\mathrm{Id}]_{i,j,k,l}^{[\alpha,\beta]}\,.
\end{aligned}$$

On conclut en rappelant les expressions de r_l et r_l^* trouvées précédemment : $r_l = \frac{2\lambda^l}{\lambda-\mu}\mathfrak{t}_0$ et $r_l^* = \frac{-2\,\mu^l}{\lambda-\mu}\mathfrak{t}_0$. □

En particulier, pour des entiers i,j,k,l dans $[\![1,N]\!]$,

$$\{x_{ij}(\lambda),x_{kl}(\mu)\}_l^L = \delta_{jk}\frac{x_{il}(\mu)\lambda^l - x_{il}(\lambda)\mu^l}{\lambda-\mu} - \delta_{il}\frac{x_{kj}(\mu)\lambda^l - x_{kj}(\lambda)\mu^l}{\lambda-\mu}. \tag{3.2}$$

Par exemple, pour $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(2)$, notons $X(\lambda)=\begin{pmatrix} v(\lambda) & u(\lambda)\\ w(\lambda) & t(\lambda)\end{pmatrix}$. En posant $a_l(\lambda,\mu)=\dfrac{a(\mu)\lambda^l - a(\lambda)\mu^l}{\lambda-\mu}$, la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est donnée par la matrice :

$$\left\{X(\lambda)\overset{\otimes}{,}X(\mu)\right\}_l^L = \begin{pmatrix} 0 & -u_l(\lambda,\mu) & u_l(\lambda,\mu) & 0\\ w_l(\lambda,\mu) & 0 & t_l(\lambda,\mu)-v_l(\lambda,\mu) & -u_l(\lambda,\mu)\\ -w_l(\lambda,\mu) & v_l(\lambda,\mu)-t_l(\lambda,\mu) & 0 & u_l(\lambda,\mu)\\ 0 & w_l(\lambda,\mu) & -w_l(\lambda,\mu) & 0\end{pmatrix}.$$

Remarque 3.3. Si $\phi=\sum_l a_l\lambda^l$ est un polynôme en λ, l'application linéaire

$$\begin{aligned} R_\phi:\quad \tilde{\mathfrak{g}} &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}\\ X(\lambda) &\longmapsto R(\phi(\lambda)X(\lambda)). \end{aligned}$$

est également une r-matrice. Elle vérifie $B_{R_\phi}(X,Y) = -\phi^2(\lambda)\,[X,Y]$. Notons $\{\cdot\,,\cdot\}_\phi^L$ le crochet de Poisson linéaire associé. Alors $R_\phi=\sum_l a_l R_l$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_\phi^L = \sum_l a_l\,\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$. Ainsi toute combinaison linéaire des $\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$ est une structure de Poisson. Cela équivaut à dire que ces structures sont compatibles. En particulier, le crochet de Poisson linéaire $\{\cdot,\cdot\}^L_\phi$ est codé par

$$\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}^L_\phi = \frac{1}{\lambda-\mu}\big(\phi(\lambda)\,[1\otimes X(\mu),\mathsf{t}_0] + \phi(\mu)\,[X(\lambda)\otimes 1,\mathsf{t}_0]\big)\,.$$

3.4.1 Sous-variétés de Poisson dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ pour les structures linéaires

Proposition 3.4. *[37, 33] Soit d un entier positif ou nul. $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ est une sous-variété de Poisson de $(\tilde{\mathfrak{g}}\,,\{\cdot,\cdot\}^L_l)$ si et seulement si $l \in [\![\,0,d+1]\!]$.*

Démonstration. $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ est une sous-variété de Poisson de $(\tilde{\mathfrak{g}},\{\cdot,\cdot\}^L_l)$ si et seulement si l'idéal $\mathcal{I}(\tilde{\mathfrak{g}})$ des fonctions dans $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$, nulles sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$, est un idéal pour la bidérivation de Poisson $\{\cdot,\cdot\}^L_l$. Vérifions que pour tout entier $p \notin [\![0,d]\!]$, et tout $q\in\mathbb{Z}$, les crochets $\{\xi^p_a,\xi^q_b\}^L_l$ sont nuls sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$. D'après l'égalité

$$\{\xi^p_a,\xi^q_b\}^L_l = \epsilon^{pq}_l \sum_c C^c_{a,b}\,\xi^{p+q+1-l}_c,$$

si $l<0$, on a $\left\{\xi^{-1}_a,\xi^l_b\right\}^L_l = -\sum_c C^c_{a,b}\,\xi^0_c \neq 0$ et si $l\geq d+1$, on a $\left\{\xi^{d+1}_a,\xi^{l-1}_b\right\}^L_l = \sum_c C^c_{a,b}\,\xi^{d+1}_c \neq 0$. D'autre part, pout $l\in[\![0,d+1]\!]$, on vérifie aisément que $\{\xi^p_a,\xi^q_b\}^L_l$ s'annulle pour tout couple p,q avec $p\in[\![0,d]\!]$ et $q\in\mathbb{Z}$. □

Remarque 3.5. Soit α et β deux entiers. Le sous-espace

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha\beta} = \{x^{[\alpha]}\lambda^\alpha+\cdots+x^{[\beta]}\lambda^\beta \,|\, \forall p\in[\![\alpha,\beta]\!],\ x^{[p]}\in\mathfrak{g}\}$$

est une sous-variété de Poisson pour la structure linéaire $\{\cdot,\cdot\}^L_l$ si et seulement si $\alpha\leq l\leq\beta+1$. La multiplication par $\lambda^{-\alpha}$ induisant un isomorphisme de Poisson $(\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha\beta},\{\cdot,\cdot\}^L_l)\to(\tilde{\mathfrak{g}}_{\beta-\alpha},\{\cdot,\cdot\}^L_{l-\alpha})$, on peut restreindre notre étude à $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ ([33]).

Proposition 3.6. *[33] Pour $l\in[\![0,d]\!]$, la matrice dominante $x^{[d]}$ de $X(\lambda) = \sum_{k=0}^d x^{[k]}\lambda^k$ définit une famille de fonctions de Casimir de $\{\cdot,\cdot\}^L_l$. Les fibres de l'application $X\in\tilde{\mathfrak{g}}\mapsto x^{[d]}\in\mathfrak{g}$ (i.e., les ensembles $y^{[d]}\lambda^d+\tilde{\mathfrak{g}}_{d-1}$) sont donc des sous-variétés de Poisson de $\tilde{\mathfrak{g}}_d$. Ce résultat est faux lorsque $l=d+1$.*

Démonstration. Il suffit de calculer les champs Hamiltoniens associés à la matrice de fonctions $x^{[d]}$. Pour cela, reprenons l'expression de la matrice de Poisson tensorielle $\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^L$ et regardons uniquement le terme de plus haut degré en λ :

$$\begin{aligned}\left\{x^{[d]} \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^L\Big|_{\tilde{\mathfrak{g}}_d} &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda^d}\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^L\Big|_{\tilde{\mathfrak{g}}_d}\right)\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^l}{\lambda^d(\lambda-\mu)}\left[1\otimes X(\mu), \mathsf{t}_0\right] + \frac{\mu^l}{\lambda-\mu}\left[\frac{X(\lambda)}{\lambda^d}\otimes 1, \mathsf{t}_0\right]\right).\end{aligned}$$

Le second terme est toujours de limite nulle, tandis que le premier terme est nul si et seulement si $l \leq d$. □

3.4.2 Hamiltoniens et champs de vecteurs.

Connaissant la forme tensorielle des bivecteurs de Poisson linéaires, il est aisé de calculer les champs Hamiltoniens associés aux fonctions $\operatorname{tr} X^k(a)$, $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$, sur les sous-variétés de Poisson $\tilde{\mathfrak{g}}_d$.

Proposition 3.7. *Soit d un entier positif. Soit $\phi \in \mathbb{C}[\lambda]$ un polynôme de degré au plus $d+1$. Les fonctions $\operatorname{tr} X^k(a)$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$, sont en involution pour la bidérivation de Poisson linéaire $\{\cdot\,,\cdot\}_\phi^L$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ et leurs champs Hamiltoniens sont donnés par :*

$$\mathcal{X}^{L,l}_{\operatorname{tr} X^k(a)}(X(\lambda)) = \left\{X(\lambda), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_\phi^L = k\phi(a)\frac{\left[X(\lambda), X^{k-1}(a)\right]}{\lambda - a}.$$

En particulier, les fonctions $\operatorname{tr} X(a)$, avec $a \in \mathbb{C}$, sont des fonctions de Casimir pour $\{\cdot\,,\cdot\}_\phi^L$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. Nous calculons dans le formalisme tensoriel, avec l'aide de la règle de Leibniz,

$$\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X^k(a)\right\}_\phi^L = \sum_{r=0}^{k-1}(\operatorname{Id}\otimes X^{r-1}(a))\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(a)\right\}_\phi^L(\operatorname{Id}\otimes X^{k-r}(a))$$

et la linéarité de la trace

$$\begin{aligned}\left\{X(\lambda), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_\phi^L &= \operatorname{tr}_2\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X^k(a)\right\}_\phi^L\\ &= k\operatorname{tr}_2\left((\operatorname{Id}\otimes X^{k-1}(a))\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(a)\right\}_\phi^L\right)\\ &= \frac{k}{\lambda-a}\big(\phi(\lambda)\operatorname{tr}_2\left[1\otimes X^k(a), \mathsf{t}_0\right]\\ &\qquad +\phi(a)\operatorname{tr}_2\left[X(\lambda)\otimes X^{k-1}(a), \mathsf{t}_0\right]\big)\\ &= k\phi(a)\frac{\left[X(\lambda), X^{k-1}(a)\right]}{\lambda-a}.\end{aligned}$$

Ainsi, le champ Hamiltonien associé à la fonction $\operatorname{tr} X^k(a)$ est donné par :

$$\left\{X(\lambda), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_\phi^L = k\phi(a)\frac{\left[X(\lambda), X^{k-1}(a)\right]}{\lambda - a}.$$

Soit $b \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{N}$. En utilisant l'identité $\{\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B\} = \operatorname{tr}\{A, \operatorname{tr} B\}$, nous écrivons

$$\begin{aligned}\left\{\operatorname{tr} X^l(b), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_\phi^L &= \operatorname{tr}\left\{X^l(b), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_\phi^L \\ &= l \operatorname{tr}\left(X^{l-1}(b)\left\{X(b), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_\phi^L\right) \\ &= \frac{lk\phi(a)}{\lambda - a}\operatorname{tr}\left(X^{l-1}(b)\left[X(b), X^{k-1}(a)\right]\right) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. □

3.4.3 Action de Poisson

Proposition 3.8. *[33] Soit $\phi \in \mathbb{C}[\lambda]$. L'action de conjugaison de $G = \mathbf{GL}(N)$ sur l'algèbre de lacet $\tilde{\mathfrak{g}}$ définit, pour tout $g \in \mathbf{G}$, un morphisme de Poisson $\rho_g : L(\lambda) \mapsto gL(\lambda)g^{-1}$ pour la structure de Poisson linéaire $\{\cdot\,,\cdot\}_\phi^L$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$.*

Démonstration. Pour que l'application ρ_g dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ soit un morphisme de Poisson, il faut et il suffit que pour toute paire de coordonnées x_{ij}, x_{kl} on ait la relation, pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\{x_{ij} \circ \rho_g, x_{kl} \circ \rho_g\}_l^L = \{x_{ij}, x_{kl}\}_l^L \circ \rho_g.$$

Or le crochet $\{x_{ij} \circ \rho_g, x_{kl} \circ \rho_g\}_l^L$ est donné par l'entrée i, j, k, l de la matrice tensorielle $\left\{gX(\lambda)g^{-1} \overset{\otimes}{,} gX(\mu)g^{-1}\right\}_l^L$. Utilisons la règle de Leibniz avec les matrices constantes g et g^{-1} :

$$\begin{aligned}\left\{gX(\lambda)g^{-1} \overset{\otimes}{,} gX(\mu)g^{-1}\right\}_l^L &= g \otimes g\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^L g^{-1} \otimes g^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu}\, g \otimes g\left(\lambda^l\left[\operatorname{Id} \otimes X(\mu), \mathsf{t}_0\right] + \mu^l\left[X(\lambda) \otimes \operatorname{Id}, \mathsf{t}_0\right]\right) g^{-1} \otimes g^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu}\left(\lambda^l\left[\operatorname{Id} \otimes gX(\mu)g^{-1}, \mathsf{t}_0\right] + \mu^l\left[gX(\lambda)g^{-1} \otimes \operatorname{Id}, \mathsf{t}_0\right]\right).\end{aligned}$$

De telle sorte que

$$\{x_{ij} \circ \rho_g, x_{kl} \circ \rho_g\}_l^L(X) = \{x_{ij}, x_{kl}\}_l^L(gXg^{-1}), \quad \forall i, j, k, l \in [\![1, N]\!]. \quad \square$$

Remarque 3.9. La multiplication dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ n'est, quant à elle, pas un morphisme de Poisson.

3.5 Les crochets quadratiques

Considérons à présent les crochets quadratiques sur l'algèbre de lacets définis par les r-matrices $(R_l)_{l\in\mathbb{Z}}$.

Proposition 3.10. *La formule*

$$\{f,g\}_l^Q(X) = \frac{1}{2}\big(\langle [X,\nabla f(X)] | R_l(X\nabla g(X) + \nabla g(X)X)\rangle_{\sim} \\ - \langle [X,\nabla g(X)] | R_l(X\nabla f(X) + \nabla f(X)X)\rangle_{\sim} \big).$$

définit, pour tout entier l, une bidérivation quadratique de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Démonstration. L'algèbre de fonctions $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ a été choisie pour que tout élément $f \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ admette, en tout point X de $\tilde{\mathfrak{g}}$, un gradient $\nabla f(X)$, élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Plus précisément, pour toute fonction f dans $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$, l'application $X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mapsto \nabla f(X) \in \tilde{\mathfrak{g}}$ est polynomiale sur les sous-espaces $\tilde{\mathfrak{g}}_{\leq\alpha}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$, dans le sens où, quelque soit $Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$, la fonction $X \mapsto \langle Y|\nabla f(X)\rangle_{\mathfrak{g}}$ est un élément de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Il est alors clair que pour deux éléments f et g de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$, la formule $\{f,g\}_l^Q$ définit un élément de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ est par ailleurs antisymétrique et vérifie l'identité de Leibniz pour tout entier l. Enfin, si f et g sont deux fonctions linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, leurs gradients sont constants sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et leur crochet prends alors une forme quadratique. □

Contrairement aux cas des bidérivations linéaires $\{\cdot\,,\cdot\}_l^l$, où beaucoup de calculs sont faisables “à la main”, coefficients par coefficients, le recours au formalisme tensoriel va être essentiel pour l'étude des bidérivations quadratiques. Dans le cadre d'une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(N)$, la matrice de Poisson tensorielle du champ de bivecteurs $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$, associé à une r-matrice R, est donnée par

$$\{x \overset{\otimes}{,} x\}_R^Q = \left[x\otimes x, \frac{r-r^*}{2}\right] + (\mathrm{Id}\otimes x)\frac{r+r^*}{2}(x\otimes\mathrm{Id}) - (x\otimes\mathrm{Id})\frac{r+r^*}{2}(\mathrm{Id}\otimes x)\,.$$

Nous obtenons, de manière similaire à la proposition 3.2, une expression tensorielle de la bidérivation quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ associée à la r-matrice R_l de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$:

Proposition 3.11. *La bidérivation quadratique associée à la r-matrice R_l sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ est codée par la matrice tensorielle*

$$\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\}_l^Q = \frac{\lambda^l+\mu^l}{\lambda-\mu}[X(\lambda)\otimes X(\mu), \mathsf{t}_0] \\ + \frac{\lambda^l-\mu^l}{\lambda-\mu}\big((\mathrm{Id}\otimes X(\mu))\,\mathsf{t}_0\,(X(\lambda)\otimes\mathrm{Id}) - (X(\lambda)\otimes\mathrm{Id})\mathsf{t}_0(\mathrm{Id}\otimes X(\mu)) \big)\,.$$

Proposition 3.12. *La bidérivation* $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ *de* $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ *définit une structure de Poisson sur l'algèbre de lacets* $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Démonstration. La r-matrice R_0 est une solution antisymétrique de l'équation de Yang-Baxter modifiée. Elle vérifie donc la condition de Li et Parmentier dans la proposition 2.15. Le calcul du Jacobiateur de $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ est identique au calcul fait dans le cas d'une algèbre de Lie de dimension finie. □

Concernant les autres bidérivations quadratiques $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$, on est, pour l'instant, incapable de dire s'il s'agit ou non de crochet de Poisson. En effet, le calcul de B_{A_1} pour la partie anti-symétrique de R_1 donne

$$B_{A_1}(X,Y) = -\lambda^2\,[X,Y] + \left[x^{[-1]}, y^{[-1]}\right].$$

La r-matrice R_1 ne vérifie donc clairement pas la condition de Li et Parmentier. Nous verrons dans le chapitre 4 ce qu'il en est pour $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$. Cependant, nous pouvons tout de même étudier quelques propriétés de ces bivecteurs. Nous allons par exemple chercher ceux qui admettent une restriction aux sous-espaces $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ et calculer des champs Hamiltoniens sur ces sous-espaces. Toutes ces notions (morphisme, sous-variété, champ Hamiltonien, fonction en involution, fonction de Casimir, ...) définies pour une structure de Poisson, s'adaptent à une bidérivation quelconque. Par contre les propriétés qui en découlent dans le cas d'une structure de Poisson disparaissent. Par exemple, lorsque la bidérivation n'est pas une structure de Poisson, rien n'assure que les champs Hamiltoniens de deux fonctions en involution commutent.

3.5.1 Restriction des bidérivations quadratiques

Proposition 3.13. *Pour tout entier* $d \in \mathbb{N}^*$*, les bidérivations quadratiques* $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ *se restreignent à* $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ *pour* $l=0$ *et* $l=1$*. En particulier,* $(\tilde{\mathfrak{g}}_d, \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q)$ *est une sous-variété de Poisson de* $(\tilde{\mathfrak{g}}, \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q)$.

Démonstration. Pour montrer ce résultat, utilisons l'aspect crochet de fonctions de nos champs de bivecteurs. Soit f et g deux fonctions linéaires de $\tilde{\mathfrak{g}}$, telle que f soit nulle sur $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$. Soit X un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$. Les gradients $\nabla f(X)$ et $\nabla g(X)$ ne dépendant pas du point X, nous allégerons l'écriture en les notant ∇f et ∇g. La définition de la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\sim}$ avec laquelle est définie le gradient implique $\nabla f \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}^{\perp} = \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$, et donc $X\nabla f, \nabla f X \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$. Ainsi, si $l \geq 0$, en utilisant les propriétés de R_l et $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\sim}$,

$$
\begin{aligned}
&\{f,g\}_l^Q(X)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\big\langle [X,\nabla f]\,|R(\lambda^l(X\nabla g+\nabla g X))\big\rangle_{\sim} - \big\langle [X,\nabla g]\,|R(\lambda^l(X\nabla f+\nabla f X))\big\rangle_{\sim}\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\Big(\big\langle [X,\nabla f]\,|\lambda^l(X\nabla g+\nabla g X)\big\rangle_{\sim} - \big\langle [X,\nabla g]\,|\lambda^l(X\nabla f+\nabla f X)\big\rangle_{\sim}\Big)\\
&= \big\langle \nabla f X|\lambda^l\nabla g X\big\rangle_{\sim} - \big\langle X\nabla f|\lambda^l X\nabla g\big\rangle_{\sim} = 0.
\end{aligned}
$$

$\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ se restreint donc à $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ pour tout entier $l \geq 0$.

Soit maintenant f et g deux fonctions linéaires de $\tilde{\mathfrak{g}}$, telles que f soit nulle sur $\tilde{\mathfrak{g}}_{\leq d}$. Soit X un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}_{\leq d}$. Alors $\nabla f \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\leq d}^{\perp} = \tilde{\mathfrak{g}}_{<-(d+1)}$, donc $X\nabla f, \nabla f X \in \tilde{\mathfrak{g}}_{<-1}$ et, si $l \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
&\{f,g\}_l^Q(X)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\big\langle [X,\nabla f]\,|R(\lambda^l(X\nabla g+\nabla g X))\big\rangle_{\sim} - \big\langle [X,\nabla g]\,|R(\lambda^l(X\nabla f+\nabla f X))\big\rangle_{\sim}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\big\langle [X,\nabla f]\,|\lambda^l(X\nabla g+\nabla g X)\big\rangle_{\sim} + \big\langle [X,\nabla g]\,|\lambda^l(X\nabla f+\nabla f X)\big\rangle_{\sim}\Big)\\
&= \big\langle X\nabla f|\lambda^l X\nabla g\big\rangle_{\sim} - \big\langle \nabla f X|\lambda^l\nabla g X\big\rangle_{\sim} = 0.
\end{aligned}
$$

$\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ se restreint donc à $\tilde{\mathfrak{g}}_{\leq d}$ pour tout $l \leq 1$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_d = \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{\leq d}$ est une sous-variété de $\tilde{\mathfrak{g}}$ pour les crochets quadratiques $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$. □

Proposition 3.14. *Pour tous entiers l, k, l'application*

$$
\begin{aligned}
\lambda^k :\ \tilde{\mathfrak{g}} &\to \tilde{\mathfrak{g}}\\
X &\mapsto \lambda^k X
\end{aligned}
$$

est un automorphisme pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$. En particulier, c'est un automorphisme de Poisson pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$.

Démonstration. En effet, pout toutes fonctions f et g sur $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$$
\begin{aligned}
\{f,g\}_l^Q(\lambda^k X) &= \big\langle \big[\lambda^k X,\nabla f\big]\,|R_l(\lambda^k X\nabla g+\nabla g\,\lambda^k X)\big\rangle_{\sim} - f\leftrightarrow g\\
&= \big\langle \big[X,\lambda^k\nabla f\big]\,|R_l(X\lambda^k\nabla g+\lambda^k\nabla g X)\big\rangle_{\sim} - f\leftrightarrow g\\
&= \big\langle \big[X,\nabla(f\circ\lambda^k)\big]|R_l(X\nabla(g\circ\lambda^k)+\nabla(g\circ\lambda^k)X)\big\rangle_{\sim} - f\leftrightarrow g\\
&= \big\{f\circ\lambda^k, g\circ\lambda^k\big\}_l^Q(X)\,.
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 3.15. *$\tilde{\mathfrak{g}}_{pq}$ est une sous-variété de Poisson de $(\tilde{\mathfrak{g}}, \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q)$ pour tous entiers p, q.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes. □

Nous allons donc nous limiter à l'étude des bidérivations $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ et sur les sous-espaces $\tilde{\mathfrak{g}}_d$, où d est un entier positif.

Proposition 3.16. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. La matrice dominante $x^{[d]}$ de $X(\lambda) = \sum_{k=0}^{d} x^{[k]}\lambda^k$ définit une famille de fonctions de Casimir pour la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$. Ses fibres $y^{[d]}\lambda^d + \tilde{\mathfrak{g}}_{d-1}$ sont donc des sous-variétés de Poisson de $\tilde{\mathfrak{g}}_d$.*

Démonstration. Calculons le crochet tensoriel

$$\begin{aligned}\left\{x^{[d]} \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_0^Q &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda^d}\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}\right)\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{2}{\lambda-\mu}\left[x^{[d]}\otimes X(\mu), \mathsf{t}_0\right]\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Remarque 3.17. La bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$, quant à elle, ne se restreint pas aux sous-variétés $y^{[d]}\lambda^d + \tilde{\mathfrak{g}}_{d-1}$. Dans notre construction d'un système intégrable sur l'espace de module $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$ (chapitre 6), une étape consistera à travailler sur le quotient $\mathscr{A}/G$, où

$$\mathscr{A} := \left\{X = \mathrm{Id}\,\lambda^n + \sum_{i=1}^{n-1} x^{[i]}\lambda^i + \mathrm{Id} \mid x^{[i]} \in \mathfrak{g}\right\} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_n.$$

Nous verrons dans le chapitre 5 comment la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ induit une une bidérivation sur le quotient $\mathscr{A}/G$, bien qu'elle ne se restreigne pas à la sous-variété $\mathscr{A}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}_n$.

Proposition 3.18. *Soit d un entier positif. Dans l'espace $\tilde{\mathfrak{g}}_d$, le sous-espace $\mathrm{Id} + \lambda\tilde{\mathfrak{g}}_{d-1}$ est une sous-variété pour les structures $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$.*

Démonstration. La démonstration est similaire à la précédente : il s'agit de vérifier que les champs Hamiltoniens de la structures $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ sont tangents à $\mathrm{Id} + \lambda\tilde{\mathfrak{g}}_{d-1}$. Pour cela, on calcule le crochet $\left\{x^{[0]} \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^Q$, c'est à dire la valeur en $\lambda = 0$ du crochet $\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^Q\Big|_{\tilde{\mathfrak{g}}_d}$:

$$\begin{aligned}\left\{X(0) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^Q\Big|_{\tilde{\mathfrak{g}}_d} &= -\mu^{l-1}\left[x^{[0]}\otimes X(\mu), \mathsf{t}_0\right]\\ &\quad +\mu^{l-1}\left((\mathrm{Id}\otimes X(\mu))\mathsf{t}_0(x^{[0]}\otimes\mathrm{Id}) - (x^{[0]}\otimes\mathrm{Id})\mathsf{t}_0(\mathrm{Id}\otimes X(\mu))\right),\end{aligned}$$

que l'on évalue sur le sous-espace $\mathrm{Id} + \lambda\tilde{\mathfrak{g}}_{d-1}$, i.e., lorsque $x^{[0]} = \mathrm{Id}$. On obtient alors $\left\{x^{[0]} \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^Q = 0$. □

3.5.2 Hamiltoniens et fonctions de Casimir

De même que dans le cas d'une algèbre de Lie de dimension finie (proposition 2.15), les fonctions $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$-invariantes sont en involution pour la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$. Plus précisement, nous pouvons calculer les champs Hamiltoniens associés aux fonctions $(\operatorname{tr} X^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$ pour les champs de bivecteurs quadratiques $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$.

Proposition 3.19. *Soit d un entier positif. Les fonctions* $\operatorname{tr} X^k(a)$*, avec $k\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{C}$, sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ sont en involution pour les bidérivations $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$. Les champs Hamiltoniens associés sont donnés par*

$$\mathcal{X}^{Q,0}_{\operatorname{tr} X^k(a)}(X(\lambda)) = \left\{X(\lambda), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_0^Q = 2k\frac{\left[X(\lambda), X^k(a)\right]}{\lambda - a}$$
$$\mathcal{X}^{Q,1}_{\operatorname{tr} X^k(a)}(X(\lambda)) = \left\{X(\lambda), \operatorname{tr} X^k(a)\right\}_1^Q = 2ka\frac{\left[X(\lambda), X^k(a)\right]}{\lambda - a}.$$

Proposition 3.20. *L'application* $\det X(\lambda)$ *définit une famille de fonctions de Casimir pour les bivecteurs quadratiques $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.15, le champ Hamiltonien de la fonction $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$-invariante det est donné par

$$\{\det X(\lambda), g\}_l^Q(X) = \langle \nabla g(X) | \left[R_l(\nabla \det(X)X), X\right]\rangle_{\sim}.$$

Il nous suffit donc de connaître le terme $\nabla\det(X)X$. Soit $H\in\tilde{\mathfrak{g}}$. Notons $P_H(t) = \det(t\operatorname{Id} - H) = t^N + (-t)^{N-1}\operatorname{tr} H + \dots$ son polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\det(X)X | H\rangle_{\sim} &= \langle \nabla\det(X) | XH\rangle_{\sim} \\
&= \frac{d}{dt}_{|t=0}\det(X + tXH) \\
&= \det X \frac{d}{dt}_{|t=0} t^N P_H(-\frac{1}{t}) \\
&= \det X \operatorname{tr} H\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla\det(X)X = \det(X)\operatorname{Id}$ et $[R_l(\nabla\det(X)X), X] = 0$. □

Le lecteur attentif aura bien évidemment reconnu les champs Hamiltoniens déjà apparus dans l'étude des structures de Poisson linéaires sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$. En posant

$$\mathcal{Y}_{k,a}(X) := \frac{[X(\lambda), X(a)]}{\lambda - a}$$

on a en effet, avec des notations transparentes pour les champs Hamiltoniens,

$$\mathcal{X}^{L,l}_{\operatorname{tr} X^k(a)} = ka^l \mathcal{Y}_{k-1,a} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{X}^{Q,l}_{\operatorname{tr} X^k(a)} = 2ka^l \mathcal{Y}_{k,a}.$$

Ainsi, globalement, la famille de fonctions $(\operatorname{tr} X^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$ engendre pour chacune de ces bidérivations sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$, le même espace de champs Hamiltoniens $\langle \mathcal{Y}_{k,a}, k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}\rangle$. En particulier, bien que $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$ ne satisfasse pas l'identité de Jacobi, les champs Hamiltoniens des fonctions $(\operatorname{tr} X^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$ pour $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$, commutent. Nous verrons dans le chapitre 6 que cette remarque est essentielle dans notre construction d'un système intégrable sur l'espace de module $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$.

3.5.3 Multiplication et action de Poisson

Proposition 3.21. *La multiplication*

$$\begin{aligned} \mu :\ \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \\ (X, Y) &\longmapsto XY \end{aligned}$$

est un morphisme de Poisson pour la structure de Poisson quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_0$.

Démonstration. D'après la proposition 2.24, il suffit que la solution de la mYBe soit antisymétrique pour que la multiplication soit un morphisme de Poisson pour la structure quadratique. Or R_0 est antisymétrique. □

Remarque 3.22. Ce résultat est faux pour la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$. Cependant, nous verrons dans le chapitre suivant que $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$ est une structure multiplicative dans un sens légèrement différent. Par ailleurs, l'algèbre de lacets n'ayant pas réellement une structure de groupe, nous ne pouvons pas parler de structure de Lie-Poisson.

Proposition 3.23. *L'action adjointe du groupe linéaire* $\mathbf{GL}(N)$ *sur* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *est une action de Poisson au sens où le morphisme* $\rho_g : X(\lambda) \mapsto gX(\lambda)g^{-1}$ *est un morphisme de Poisson sur* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *pour la structure de Poisson* $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_0$.

Démonstration. Ce résultat se montre exactement comme dans le cas des bidérivations linéaires.

$$\begin{aligned}
\left\{gX(\lambda)g^{-1} \overset{\otimes}{,} gX(\mu)g^{-1}\right\}_l^Q &= g \otimes g \left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^Q g^{-1} \otimes g^{-1} \\
&= g\otimes g \left(\frac{\lambda^l + \mu^l}{\lambda - \mu} \left[X(\lambda) \otimes X(\mu), \mathsf{t}_0\right] \right. \\
&\qquad + \frac{\lambda^l + \mu^l}{\lambda - \mu} (\mathrm{Id} \otimes X(\mu))\, \mathsf{t}_0 \,(X(\lambda) \otimes \mathrm{Id}) \\
&\qquad \left. - \frac{\lambda^l + \mu^l}{\lambda - \mu} (X(\lambda) \otimes \mathrm{Id})\, \mathsf{t}_0 \,(\mathrm{Id} \otimes X(\mu)) \right) g^{-1} \otimes g^{-1} \\
&= \frac{\lambda^l + \mu^l}{\lambda - \mu} \left[gX(\lambda)g^{-1} \otimes gX(\mu)g^{-1}, \mathsf{t}_0\right] \\
&\qquad + \frac{\lambda^l + \mu^l}{\lambda - \mu} (\mathrm{Id} \otimes gX(\mu)g^{-1})\, \mathsf{t}_0 \,(gX(\lambda)g^{-1} \otimes \mathrm{Id}) \\
&\qquad - \frac{\lambda^l + \mu^l}{\lambda - \mu} (gX(\lambda)g^{-1} \otimes \mathrm{Id})\, \mathsf{t}_0 \,(\mathrm{Id} \otimes gX(\mu)g^{-1}).
\end{aligned}$$

De telle sorte que

$$\{x_{ij} \circ \rho_g, x_{kl} \circ \rho_g\}_l^Q (X) = \{x_{ij}, x_{kl}\}_l^Q (gXg^{-1}), \quad \forall i, j, k, l \in [\![1, N]\!]. \qquad \square$$

3.6 Relations entre les différentes bidérivations polynomiales sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_d$

3.6.1 Crochets de Poisson cubiques

Nous pouvons également considérer les champs de bivecteurs cubiques associés aux r-matrices R_l sur l'algèbre de lacets. Vu la proposition 2.19 et la définition de l'algèbre de fonctions $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$, on a

Proposition 3.24. *La formule*

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_l^C (X) = &\langle [X, \nabla f(X)] | R_l(X \nabla g(X) X) \rangle_{\sim} \\
&- \langle [X, \nabla g(X)] | R_l(X \nabla f(X) X) \rangle_{\sim}
\end{aligned}$$

définit sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ une bidérivation de Poisson pour tout entier $l \in \mathbb{Z}$. Le calcul de la matrice de Poisson tensorielle donne

$$\begin{aligned}
\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\right\}_l^C = &\frac{2\lambda^l}{\lambda - \mu} X(\lambda) \otimes \mathrm{Id} \left[\mathrm{Id} \otimes X(\mu), \mathsf{t}_0\right] X(\lambda) \otimes \mathrm{Id} \\
&+ \frac{2\mu^l}{\lambda - \mu} \mathrm{Id} \otimes X(\mu) \left[X(\lambda) \otimes \mathrm{Id}, \mathsf{t}_0\right] \mathrm{Id} \otimes X(\mu).
\end{aligned}$$

Les seules restrictions aux sous-espaces $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ envisageables sont alors pour $(d, l) = (1, 0)$ et $(d, l) = (0, 1)$. Nous n'étendrons donc pas notre étude sur les structures cubiques.

3.6.2 Dérivées de Lie sur l'algèbre de lacets

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment toutes ces structures de Poisson sur les espaces $\tilde{\mathfrak{g}}$ sont liées par des dérivées de Lie. En combinant les résultats de [28], [31] et [33] nous décrivons un réseau de bidérivations de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Proposition 3.25. *Soit $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}_{-1}$, $\mathcal{U}_1$ les champs de vecteurs sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ définis, pour X dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, par*

$$\mathcal{V}(X) = \frac{\partial X(\lambda)}{\partial \lambda}, \qquad \mathcal{U}_{-1}(X) = \mathrm{Id}, \qquad \mathcal{U}_1(X) = X^2.$$

Pour tout entier l, les bidérivations linéaires $\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$, quadratiques $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ et cubiques $\{\cdot\,,\cdot\}_l^C$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ sont reliées par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \{\cdot\,,\cdot\}_l^L \arrow[r, "\mathcal{L}_{\mathcal{U}_1}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_{\mathcal{V}}"'] & \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q \arrow[r, "\mathcal{L}_{\mathcal{U}_1}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_{\mathcal{V}}"'] & \{\cdot\,,\cdot\}_l^C \arrow[r, "\mathcal{L}_{\mathcal{U}_1}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_{\mathcal{V}}"'] & 0 \\
0 & \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^L \arrow[l, "\mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}}"'] & \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^Q \arrow[l, "\mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}}"'] & \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^C \arrow[l, "\mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Rappellons la formule algébrique donnant la dérivée de Lie d'un bivecteur $\{\cdot\,,\cdot\}$ dans la direction d'un champ de vecteurs $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\,\{\cdot\,,\cdot\}\,[f,g] = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}\,\{f,g\} - \{\mathcal{L}_{\mathcal{V}}f,g\} - \{f,\mathcal{L}_{\mathcal{V}}g\}$$

La dérivée de Lie d'une bidérivation dans la direction d'un champ de vecteurs donné étant encore une bidérivation, on peut se contenter de calculer les dérivées de Lie avec des fonctions linéaires. Soient f et g deux fonctions linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Leurs gradients sont constants, noté ∇f et ∇g. On a alors les formules suivantes, valables pour f et g, en un point X quelconque de $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$$\begin{aligned}
\nabla\mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}}f(X) &= \nabla\,\langle\nabla f(X)|\mathcal{U}_{-1}(X)\rangle_{\sim} = \nabla\,\langle\nabla f|\,\mathrm{Id}\rangle_{\sim} = 0,\\
\nabla\mathcal{L}_{\mathcal{V}}f(X) &= \nabla\left\langle\nabla f(X)|\frac{\partial X(\lambda)}{\partial\lambda}\right\rangle_{\sim} = -\frac{\partial\nabla f}{\partial\lambda},\\
\nabla\mathcal{L}_{\mathcal{U}_1}f(X) &= \nabla\,\langle\nabla f(X)|\mathcal{U}_1(X)\rangle_{\sim} = \nabla f X + X\nabla f.
\end{aligned}$$

Commençons par les dérivées de Lie dans la direction du champ de vecteurs $\mathcal{U}_{-1}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L (f,g)(X) &= \mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}} \{f,g\}_l^L (X) \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \nabla \left\langle X | [R_l \nabla f, \nabla g] + [\nabla f, R_l \nabla g] \right\rangle_{\sim} | \mathcal{U}_{-1}(X) \right\rangle_{\sim} \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \mathrm{Id}\, | [R_l \nabla f, \nabla g] + [\nabla f, R_l \nabla g] \right\rangle_{\sim} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q (f,g)(X) &= \mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}} \{f,g\}_l^Q (X) \\
&= \frac{1}{2} \Big\langle \nabla \big(\langle [X, \nabla f] | R_l (X \nabla g + \nabla g X) \rangle_{\sim} \\
&\qquad - \langle [X, \nabla g] | R_l (X \nabla f + \nabla f X) \rangle_{\sim} \big) | \mathcal{U}_{-1}(X) \Big\rangle_{\sim} \\
&= \frac{1}{2} \langle [X, \nabla f] | R_l (2 \nabla g) \rangle_{\sim} - \frac{1}{2} \langle [X, \nabla g] | R_l (2 \nabla f) \rangle_{\sim} \\
&= 2 \{f,g\}_l^L (X),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^C (f,g)(X) &= \mathcal{L}_{\mathcal{U}_{-1}} \{f,g\}_l^C (X) \\
&= \Big\langle \nabla \big(\langle [X, \nabla f] | R_l (X \nabla g X) \rangle_{\sim} \\
&\qquad - \langle [X, \nabla g]\, | R_l (X \nabla f X) \rangle_{\sim} \big) | \mathcal{U}_{-1}(X) \Big\rangle_{\sim} \\
&= \langle [X, \nabla f] | R_l (\nabla g X + X \nabla g) \rangle_{\sim} \\
&\qquad + \langle [X, \nabla g]\, | R_l (X \nabla f + \nabla f X) \rangle_{\sim} \\
&= 2 \{f,g\}_l^Q (X).
\end{aligned}$$

Le calcul des dérivées de Lie dans la direction du champ de vecteurs $\mathcal{U}_1$ est laissé au lecteur intéressé. Il devra trouver

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L = -\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q, \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q = -\{\cdot\,,\cdot\}_l^C, \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \{\cdot\,,\cdot\}_l^C = 0.$$

Par ailleurs, le calcul de la dérivée de Lie des crochets $\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$ dans la direction de $\mathcal{V}$ est un calcul classique : $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L = -l \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^L$ (voir par exemple [33]). Enfin, pour terminer la preuve, montrons que les champs de vecteurs $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{V}$ commutent. Soit f une fonction linéaire sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Le commutateur de $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{V}$ appliqué à f donne, pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{U}_1, \mathcal{V}]\, [f](X) &= \mathcal{U}1[\mathcal{V}[f]](X) - \mathcal{V}[\mathcal{U}_1[f]](X) \\
&= \mathsf{d}\mathcal{V}[f](X)\mathcal{U}_1(X) - \mathsf{d}\mathcal{U}_1[f](X)\mathcal{V}(X) \\
&= f(\frac{\partial \mathcal{U}_1(X)}{\partial \lambda}) - f(X\mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(X)X) \\
&= f(\frac{\partial X^2}{\partial \lambda}) - f(\frac{\partial X^2}{\partial \lambda}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'évaluation en $\lambda + t$ commute avec les opérations algébriques sur X. On en déduit que $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} - \mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{V}} = \mathcal{L}_{[\mathcal{V},\mathcal{U}_1]} = 0$, de telle sorte que

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}_{[\mathcal{V},\mathcal{U}_1]} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L &= \mathcal{L}_{\mathcal{V}} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L - \mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{V}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L \\ &= -\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q + l\mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^L \\ &= -\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q - l \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^Q \end{aligned}$$

et $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q = -l \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^Q$. De la même manière, on obtient $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^C = -l \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^C$, ce qui termine la preuve. □

Remarque 3.26. Soit $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{V}'$ les champs de vecteurs sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, définis par

$$\mathcal{U}_0(X) = X \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}'(X) = \lambda X.$$

Le calcul des dérivées de Lie dans ces directions donne

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{\mathcal{U}_0} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L = -\{\cdot\,,\cdot\}_l^L\,, \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{U}_0} \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q = 0, \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{U}_0} \{\cdot\,,\cdot\}_l^C = \{\cdot\,,\cdot\}_l^C\,, \\ &\mathcal{L}_{\mathcal{V}'} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L = -\{\cdot\,,\cdot\}_{l+1}^L\,, \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{V}'} \{\cdot\,,\cdot\}_l^Q = 0, \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{V}'} \{\cdot\,,\cdot\}_l^C = \{\cdot\,,\cdot\}_{l+1}^C\,. \end{aligned}$$

Remarquons les relations particulières entre les trois champs de vecteurs $\mathcal{U}_{-1}$, $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_1$: $[\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1] = \mathcal{U}_1$, $[\mathcal{U}_{-1},\mathcal{U}_0] = \mathcal{U}_{-1}$, $[\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_{-1}] = -2\mathcal{U}_0$, et avec $\mathcal{V}$: $\forall i \in \{-1, 0, 1\}$, $[\mathcal{V},\mathcal{U}_i] = 0$. Enfin, $[\mathcal{V},\mathcal{V}'] = -\mathcal{U}_0$.

Remarque 3.27. Pour d un entier positif, il est naturel de se demander si les liens entre les bidérivations qui admettent une restriction à $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ subsistent sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$. En effet, tandis que $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}_{-1}$ et $\mathcal{U}_0$ se restreignent à $\tilde{\mathfrak{g}}_d$, les champs de vecteurs $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{U}_1$ n'ont plus de sens sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$.

Ainsi, les relations $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L = -l \{\cdot\,,\cdot\}_{l-1}^L$ subsistent sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ pour $l \in [\![0, d+1]\!]$. Par contre, l'égalité $\mathcal{L}_{\mathcal{U}_1} \{\cdot\,,\cdot\}_l^L = -\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ n'implique pas que $\{\cdot\,,\cdot\}_l^Q$ est une dérivée de Lie de $\{\cdot\,,\cdot\}_l^L$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ (pour $l = 0$ ou 1).

Notons $P = \{\cdot\,,\cdot\}_0^L$ la bidérivation de Poisson linéaire associée à la r-matrice R_0 et considérons l'opérateur de cobord δ_P défini par le crochet de Schouten

$$\begin{aligned} \delta_P : \mathfrak{X}^i(\tilde{\mathfrak{g}}_d) &\longrightarrow \mathfrak{X}^{i+1}(\tilde{\mathfrak{g}}_d) \\ \varphi &\longmapsto [P\,, \varphi]_S\,. \end{aligned}$$

Pour tout champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$, on a $\delta_P(\mathcal{X}) = \mathcal{L}_{\mathcal{X}} P$. On sait par ailleurs que la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ est compatible avec $P = \{\cdot\,,\cdot\}_0^L$. Cela signifie que la somme $P + \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ est une structure de Poisson. En particulier,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[P + \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q\,, P + \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q\right]_S \\ &= [P,P]_S + \left[\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q\,, \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q\right]_S + 2\left[P, \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q\right]_S \\ &= 2\left[P, \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q\right]_S. \end{aligned}$$

On a donc $\delta_P(\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q) = 0$. Ainsi, s'il n'existe pas de champ de vecteurs $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{\mathfrak{g}}_d)$ permettant d'écrire $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} P = \{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$, on a mis en évidence une classe de cohomologie non triviale dans $H^1(P, \tilde{\mathfrak{g}}_d)$. Par un programme sur Maple, nous avons recherché un tel champ de vecteurs quadratique. Nous n'avons obtenue aucune solution. La même question se pose pour les bidérivations $\{\cdot\,,\cdot\}_1^L$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$, bien que $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ ne soit pas une structure de Poisson.

4

Variétés de quasi-Poisson

La notion de variété de quasi-Poisson est introduite par Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken dans [7] en 2000 puis [8] en 2002. Historiquement, elle est apparue comme une alternative finie-dimensionnelle aux constructions en dimension infinie de structures de Poisson sur des espaces de modules. En effet, les bidérivations de quasi-Poisson sont ainsi faites que, par réduction, elles donnent très souvent des structures de Poisson ordinaires aux quotients.

Soit H un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ admet une forme bilinéaire symétrique ad-invariante et non-dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Sur $\mathfrak{h}$ on définit la 3-forme de Cartan à l'aide du crochet de Lie $[\cdot\,,\cdot]$ et de la forme bilinéaire ad-invariante $\langle\cdot|\cdot\rangle$: $\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\langle x|\,[y,z]\rangle$. Une variété de quasi-Poisson M est une H-variété équipée d'un champ de bivecteurs invariant P, tel que le crochet de Schouten $[P,P]_S$ soit égal au champ de trivecteurs sur M engendré par l'image de ϕ par l'action de H sur M.

Une variété de quasi-Poisson diffère donc d'une variété de Poisson d'une part par l'absence d'identité de Jacobi et d'autre part par la donnée d'une action de groupe. Dans [8], les auteurs introduisent d'ailleurs aussitôt après la définition d'une bidérivation de quasi-Poisson, la notion d'application moment (à valeur dans le groupe de Lie) et de variété de quasi-Poisson Hamiltonienne. Le lecteur pourra apprécier tout au long de ce chapitre et du chapitre suivant le rôle joué par le groupe de Lie dans les différentes constructions proposées.

L'objet de ce chapitre est essentiellement de montrer que la bidérivation quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$, apparue au chapitre précédent, et ne satisfaisant pas l'identité de Jacobi, est une structure de quasi-Poisson sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ pour l'action de conjugaison de $G = \mathbf{GL}(N)$.

Dans la première section de ce chapitre, nous donnons la définition d'une variété de quasi-Poisson, telle qu'elle est introduite par Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken dans [8] en 2002. Nous l'accompagnons de quelques exemples classiques. Cette introduction est suffisante pour montrer, moyennant quelques calculs, que $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est une bidérivation de quasi-Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. C'est l'objet de la section 4.2. Cependant, une telle démonstration est peu satisfaisante car les caluls qu'elle nécessite ne permettent pas de comprendre réellement ce qu'il se passe. Dans [8], les auteurs énoncent plusieurs propriétés intéressantes des variétés de quasi-Poisson. Entre autre, ils introduisent la notion de fusion, qui va nous permettre, dans la section 4.4 de proposer une démonstration plus lisible de notre résultat. La section 4.3 est consacrée à cette théorie. Enfin, la démonstration faite dans la section 4.4 se généralise à d'autres algèbres de Lie. La compréhension de la bidérivation de quasi-Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ nous permet en effet de construire, dans la section 4.5, une bidérivation sur l'algèbre de Lie d'une algèbre associative admettant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et une décomposition en sous-algèbres associatives adaptée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$. L'application de ce formalisme à $\mathfrak{gl}(N)$ produit une bidérivation de Poisson quadratique pour le réseau de Toda classique. Cet exemple est détaillé dans la section 4.6.

Enfin, avant de clore ce préambule, précisons que le lecteur trouvera, dans le chapitre suivant, des compléments sur la notion de variété de quasi-Poisson. Nous y proposons en particulier un théorème de réduction permettant d'obtenir une véritable structure de Poisson sur le quotient par G d'une sous-variété de la G-variété de quasi-Poisson M.

4.1 Qu'est-ce qu'une variété de quasi-Poisson ?

Dans tout ce chapitre, sauf éventuellement lorsque le contraire sera explicitement signalé, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sera l'algèbre de Lie d'une algèbre associative de dimension finie et H un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$. On supposera de plus que $\mathfrak{h}$ est munie d'une forme bilinéaire symétrique ad-invariante non dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{h}}$. En particulier, lorsque l'on travaillera sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}$ sera l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$ du groupe de Lie $G = \mathbf{GL}(N)$. $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ sera la trace du produit et la base considérée sera la base de $\mathfrak{g}$ canonique : $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$. La forme bilinéaire non dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{h}}$ sur $\mathfrak{h}$ permet d'identifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\bigwedge^k \mathfrak{h}^*$ et $\bigwedge^k \mathfrak{h}$. En particulier, considérons la 3-forme de Cartan de $\mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{h}} : \quad \mathfrak{h}^3 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y,z) &\longmapsto \frac{1}{2}\,\langle x|\,[y,z]\,\rangle_{\mathfrak{h}}\,. \end{aligned}$$

On notera encore $\phi_{\mathfrak{h}}$ le trivecteur de Cartan de $\mathfrak{h}$, image de la 3-forme de Cartan par l'identification de $\bigwedge^3 \mathfrak{h}^*$ avec $\bigwedge^3 \mathfrak{h}$ via $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{h}}$. Si $(e_a)_{a\in I}$ et

$(\varepsilon_a)_{a\in I}$ sont deux bases duales de $\mathfrak{h}$, on a

$$\phi_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{12} \sum_{a,b,c\in I} \langle \varepsilon_a | \, [\varepsilon_b, \varepsilon_c] \rangle_{\mathfrak{h}} \, e_a \wedge e_b \wedge e_c. \tag{4.1}$$

Par ad-invariance de la 3-forme de Cartan et de $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{h}}$, le trivecteur de Cartan est lui aussi ad-invariant. Nous pouvons à présent définir la notion de H-variété de quasi-Poisson et en donner le premier exemple proposé par Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken dans [8].

Définition 4.1. [8] Soit M une H-variété lisse. Notons $\underline{x}$ le champ de vecteurs fondamentaux associé au vecteur x de $\mathfrak{h}$ pour l'action de H sur M. Soit P un champ de bivecteurs sur M. On dit que (M, P) est une *H-variété de quasi-Poisson* si le champ de bivecteurs P est H-invariant : $\forall x \in \mathfrak{h}$, $[\underline{x}, P]_S = 0$, et vérifie $[P, P]_S = \underline{\phi_{\mathfrak{h}}}$, où $\underline{\phi_{\mathfrak{h}}}$ désigne l'image du trivecteur de Cartan $\phi_{\mathfrak{h}}$ par l'action infinitésimale de $\mathfrak{h}$ sur M.

Remarque 4.2. En notant $P = \{\cdot, \cdot\}$, la condition sur le crochet de Schouten $[P, P]_S = \underline{\phi_{\mathfrak{h}}}$ est équivalente, en termes du Jacobiateur, à

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 2 \, \underline{\phi_{\mathfrak{h}}}[f_1, f_2, f_3]$$

pour toutes fonctions f_1, f_2, f_3 sur M.

Si (M, P_M) et (N, P_N) sont deux H-variétés de quasi-Poisson et φ une application lisse de M dans N, on dira que φ est un *morphisme de quasi-Poisson* (ou une *application de quasi-Poisson*) si φ est H-équivariante et $\varphi^* : \mathcal{F}(N) \to \mathcal{F}(M)$ satisfait à

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(N)\,, \qquad \varphi^* P_N(f, g) = P_M(\varphi^* f, \varphi^* g).$$

Une sous-variété N de M sera donc une *sous-variété de quasi-Poisson* de M si, d'une part, N est H-stable et, d'autre part, l'inclusion $\iota : N \hookrightarrow M$ est un morphisme de quasi-Poisson.

Exemple 4.3. Pour une H-variété M avec H un groupe abélien, les notions de structures de Poisson et de quasi-Poisson coïncident puisque $\phi_{\mathfrak{h}} = 0$.

Exemple 4.4. [8] Le premier exemple non trivial et fondamental de H-variétés de quasi-Poisson est la H-variété H elle-même. Pour $x \in \mathfrak{h}$, notons par $\overleftarrow{x}$ et $-\overrightarrow{x}$ les champs de vecteurs fondamentaux pour les actions à gauches respectivement $a \mapsto ga$ et $a \mapsto ag^{-1}$. Pour $x \in \mathfrak{h}$, le champ de vecteurs fondamental pour la conjugaison est $\underline{x} = \overleftarrow{x} - \overrightarrow{x}$. Le champ de bivecteurs

$$P_H = \frac{1}{2} \sum_{a\in I} \overleftarrow{e_a} \wedge \overrightarrow{\varepsilon_a}$$

est une structure de quasi-Poisson sur H pour l'action de conjugaison de H sur lui-même. En effet, en utilisant les propriétés du crochet de Schouten et son comportement vis à vis des translations ($[\overleftarrow{x}, \overrightarrow{y}] = 0$, $[\overleftarrow{x}, \overleftarrow{y}] = \overleftarrow{[x,y]}$ et $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] = -\overrightarrow{[x,y]}$), on obtient

$$\begin{aligned} [P_H, P_H]_S &= \frac{1}{4} \sum_{a,b\in I} \overleftarrow{[e_a, e_b]} \wedge \overrightarrow{\varepsilon_a} \wedge \overrightarrow{\varepsilon_b} + \overleftarrow{e_a} \wedge \overleftarrow{e_b} \wedge \overrightarrow{[\varepsilon_a, \varepsilon_b]} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{a,b,c\in I} \langle \varepsilon_a | \, [\varepsilon_b, \varepsilon_c] \rangle \, (\overleftarrow{e_c} \wedge \overrightarrow{e_a} \wedge \overrightarrow{e_b} + \overleftarrow{e_a} \wedge \overleftarrow{e_b} \wedge \overrightarrow{e_c}) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{a,b,c\in I} \langle \varepsilon_a | \, [\varepsilon_b, \varepsilon_c] \rangle \, (\overleftarrow{e_a} - \overrightarrow{e_a}) \wedge (\overleftarrow{e_b} - \overrightarrow{e_b}) \wedge (\overleftarrow{e_c} - \overrightarrow{e_c}) \\ &= \underline{\phi}_{\mathfrak{h}} \end{aligned}$$

où nous utilisons, dans la dernière étape, que $\overleftarrow{\phi} - \overrightarrow{\phi} = 0$, qui découle du fait que ϕ est ad-invariant. Le même genre de calcul montre que pour tout x dans $\mathfrak{h}$, $[\underline{x}, P_H]_S = 0$, de telle sorte que le champ de bivecteurs P_H est H-invariant. La H-variété de quasi-Poisson (H, P_H) ne dépend pas du choix de la base $(e_a)_{a\in I}$. C'est en ce sens qu'on l'appelera *structure de quasi-Poisson canonique* de H.

Cet exemple de H-variété de quasi-Poisson fait intervenir le terme canonique $\sum_{a\in I} \overleftarrow{e_a} \wedge \overrightarrow{\varepsilon_a}$ construit à partir des champs de vecteurs fondamentaux de deux actions différentes de H sur lui-même. Nous verrons par la suite (section 4.3, exemple 4.8) que c'est un cas particulier d'un résultat plus général énoncé par Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken dans [8] qui permet de construire des structures de quasi-Poisson.

4.2 Une structure de quasi-Poisson sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$

Avant de développer davantage les propriétés des variétés de quasi-Poisson, utilisons les quelques outils que nous avons pour mettre en évidence un nouvel exemple non trivial de bidérivation de quasi-Poisson. En nous plaçant à présent sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, nous adaptons la notion de variété de quasi-Poisson à une algèbre de Lie de dimension infinie.

Soit H un groupe de Lie agissant sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ de telle sorte que pour tout x dans $\mathfrak{h}$, la formule

$$\underline{x}[f](X) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(\exp(tx) \cdot X)$$

définisse une dérivation de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Nous dirons qu'une bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}$ de l'algèbre de fonctions $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ est une *bidérivation de quasi-Poisson* (ou bien que $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ munie de $\{\cdot\,,\cdot\}$ est une *algèbre de quasi-Poisson*) vis à vis de l'action de H sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, si d'une part $\{\cdot\,,\cdot\}$ est H-invariante et d'autre part $[\{\cdot\,,\cdot\}\,,\{\cdot\,,\cdot\}]_S = \underline{\phi_{\mathfrak{h}}}$.

Précisons que ce paragraphe s'adresse aux lecteurs qui ne s'effrayent pas de quelques pages de calculs. Les autres peuvent sans inconvénient aller directement au paragraphe 4.3. Le résultat que nous allons montrer ici sera à nouveau prouvé dans le paragraphe 4.4 après un complément sur les variétés de quasi-Poisson.

Dans ce paragraphe, $G = \mathbf{GL}(N)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$. Nous avons défini, dans le chapitre précédent, la r-matrice

$$\begin{aligned} R_1 :\ & \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \\ & x\lambda^p \longmapsto \varepsilon_{p+1} x\lambda^{p+1} = \left| \begin{array}{ll} x\lambda^{p+1} & \text{si } p+1 \geq 0 \\ -x\lambda^{p+1} & \text{si } p+1 < 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

et le champ de bivecteurs quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, donnée par la formule

$$\begin{aligned} \{f,g\}_1^Q(X) = \frac{1}{2}\big(& \langle [X, \nabla f(X)] | R_1(X\nabla g(X) + \nabla g(X)X) \rangle_{\sim} \\ & - \langle [X, \nabla g(X)] | R_1(X\nabla f(X) + \nabla f(X)X) \rangle_{\sim} \big). \end{aligned}$$

Celle-ci s'écrit encore, en termes de S et A les parties symétrique et antisymétrique de R_1,

$$\begin{aligned} \{f,g\}_1^Q(X) = & \langle A(\nabla f(X)X) | \nabla g(X)X \rangle_{\sim} - \langle A(X\nabla f(X)) | X\nabla g(X) \rangle_{\sim} \\ & + \langle S(X\nabla f(X)) | \nabla g(X)X \rangle_{\sim} - \langle S(\nabla f(X)X) | X\nabla g(X) \rangle_{\sim} . \end{aligned}$$

Nous avons vu que la partie antisymétrique A de R_1 n'est pas une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée. La proposition 2.15 de Li et Parmentier ne peut donc pas s'appliquer ici. Reprenons cependant sa démonstration et adaptons-la à notre r-matrice R_1. Pour rechercher le défaut de Jacobi dans $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$, écrivons $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q = \{\cdot\,,\cdot\}_a + \{\cdot\,,\cdot\}_s$ où le terme $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ regroupe les deux termes utilisant la partie antisymétrique de R_1 et $\{\cdot\,,\cdot\}_s$ les deux termes utilisant la partie symétrique de R_1. Travaillons avec des fonctions linéaires f_1, f_2 et f_3 sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Notons, pour i de 1 à 3, $L_i = \nabla f_i$ (constant car f_i est linéaire). Alors, pour $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$,

$$\begin{aligned} \nabla \{f_2, f_3\}_a (X) &= A(L_2X)L_3 - A(L_3X)L_2 + L_2A(XL_3) - L_3A(XL_2), \\ \nabla \{f_2, f_3\}_s (X) &= S(XL_2)L_3 - S(XL_3)L_2 + L_2S(L_3X) - L_3S(L_2X). \end{aligned}$$

Rapellons les notations introduites dans le chapitre 2 :

$$\forall X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}, \qquad B_A(x,y) = [Ax, Ay] - A([Ax, y] + [x, Ay])$$
$$\forall X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}, \qquad [X, Y]_A = \frac{1}{2}([Ax, y] + [x, Ay]).$$

En utilisant l'antisymétrie de A nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\{f_1, \{f_2, f_3\}_a\}_a (X) + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad = \langle L_1X | \, [A(L_2X), A(L_3X)] \rangle_{\sim} + \langle XL_1 | \, [A(XL_3), A(XL_2)] \rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad = \langle L_1X | B_A(L_2X, L_3X) \rangle_{\sim} + \langle XL_1 | B_A(XL_3, XL_2) \rangle_{\sim} .
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&\{f_1, \{f_2, f_3\}_s\}_s (X) + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad = - \langle XL_1 | \, [S(L_2X), S(L_3X)] \rangle_{\sim} + \langle L_1X | \, [S(XL_2), S(XL_3)] \rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\{f_1, \{f_2, f_3\}_s\}_a (X) + \{f_1, \{f_2, f_3\}_a\}_s (X) + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\qquad = \langle A(L_1X) | \, [S(L_3X), XL_2] - [S(L_2X), XL_3] \rangle_{\sim} \\
&\qquad\quad + \langle A(L_1X) | \, [S(XL_2), L_3X] - [S(XL_3), L_2X] \rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\qquad = \langle XL_1 | S([L_2X, L_3X]_A) \rangle_{\sim} - \langle L_1X | S \, [XL_2, XL_3]_A \rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} .
\end{aligned}$$

En utilisant simplement que A et S sont les parties antisymétrique et symétrique de R_1, on obtient, de la même manière que dans le lemme 2.13,

$$[SX, SY] - S([AX, Y] + [X, AY]) = B_A(X, Y) - \frac{1}{2} B'_{R_1}(X, Y) + \frac{1}{2} B'_{R_1}(Y, X),$$

où
$$B_{R_1}(X, Y) = [R_1X, R_1Y] - R_1 \, [R_1X, Y] - R_1 \, [X, R_1Y]$$
et
$$B'_{R_1}(X, Y) = R_1^* \, [R_1X, Y] - R_1^* \, [X, R_1^*Y] - [R_1X, R_1^*Y] .$$

Le Jacobiateur de $\{\cdot, \cdot\}_1^Q$ est donc donné par

$$\begin{aligned}
&\left\{f_1, \{f_2, f_3\}_1^Q\right\}_1^Q (X) + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&= \langle L_1X | B_A(L_2X, L_3X) \rangle_{\sim} - \langle XL_1 | B_A(XL_2, XL_3) \rangle_{\sim} \\
&- \left\langle XL_1 | B_A(L_2X, L_3X) - \tfrac{1}{2} B'_{R_1}(L_2X, L_3X) + \tfrac{1}{2} B'_{R_1}(L_3X, L_2X) \right\rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&+ \left\langle L_1X | B_A(XL_2, XL_3) - \tfrac{1}{2} B'_{R_1}(XL_2, XL_3) + \tfrac{1}{2} B'_{R_1}(XL_3, XL_2) \right\rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3}.
\end{aligned}$$

Afin de simplifier cette expression, il nous faut calculer les termes B'_{R_1} et B_A. Nous savons (démonstration du lemme 3.1) que pour tout X, Y dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, $B_{R_1}(X,Y) = -\lambda^2\,[X,Y]$ et nous avons vu dans le paragraphe 2.4.2 que cela équivaut à, $\forall X,Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $B'_{R_1}(X,Y) = -\lambda^2\,[X,Y]$ et donc

$$\frac{1}{2}B'_{R_1}(X,Y) - \frac{1}{2}B'_{R_1}(Y,X) = -\lambda^2\,[X,Y]\,.$$

D'autre part, A est défini par $A = \dfrac{R_1 + R_1^*}{2}$ et donc déterminé, par, pour tous x dans $\mathfrak{g}$ et p dans $\mathbb{Z}$,

$$A(x\lambda^p) = \frac{\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{-p-1}}{2}x\lambda^{p+1}.$$

Ainsi $B_A(x\lambda^p, y\lambda^q) = -\eta_{pq}\lambda^2\,[x\lambda^p, y\lambda^q]$, où $\eta_{pq} = 0$ si $p = q = -1$ et 1 sinon. D'où, pour tout couple d'éléments $X = \sum_k x^{[k]}\lambda^k$ et $Y = \sum_k y^{[k]}\lambda^k$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$$B_A(X,Y) = -\lambda^2\,[X,Y] + \left[x^{[-1]}, y^{[-1]}\right],$$

et

$$B_A(X,Y) - \frac{1}{2}B'_{R_1}(X,Y) + \frac{1}{2}B'_{R_1}(X,Y) = \left[x^{[-1]}, y^{[-1]}\right].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\Big\{f_1, \{f_2, f_3\}_1^Q\Big\}_1^Q (X) + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad = \big\langle L_1X \big| -\lambda^2\,[L_2X, L_3X] + \big[(L_2X)^{[-1]}, (L_3X)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} \\
&\qquad\qquad - \big\langle XL_1 \big| -\lambda^2\,[XL_2, XL_3] + \big[(XL_2)^{[-1]}, (XL_3)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} \\
&\qquad\qquad - \big\langle XL_1 \big| \big[(L_2X)^{[-1]}, (L_3X)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\qquad\qquad + \big\langle L_1X \big| \big[(XL_2)^{[-1]}, (XL_3)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad = \big\langle L_1X \big| \big[(L_2X)^{[-1]}, (L_3X)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} - \big\langle XL_1 \big| \big[(XL_2)^{[-1]}, (XL_3)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} \\
&\qquad\qquad - \big\langle XL_1 \big| \big[(L_2X)^{[-1]}, (L_3X)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\qquad\qquad + \big\langle L_1X \big| \big[(XL_2)^{[-1]}, (XL_3)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\sim} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad = \big\langle (L_1X)^{[-1]} \big| \big[(L_2X)^{[-1]}, (L_3X)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&\qquad\qquad - \big\langle (XL_1)^{[-1]} \big| \big[(XL_2)^{[-1]}, (XL_3)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&\qquad\qquad - \big\langle (XL_1)^{[-1]} \big| \big[(L_2X)^{[-1]}, (L_3X)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\mathfrak{g}} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\qquad\qquad + \big\langle (L_1X)^{[-1]} \big| \big[(XL_2)^{[-1]}, (XL_3)^{[-1]}\big]\big\rangle_{\mathfrak{g}} + \circlearrowleft_{1,2,3}\ .
\end{aligned}$$

Le Jacobiateur de $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est donc visiblement non nul et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ n'est pas une structure de Poisson. En observant que ce Jacobiateur n'est autre que la 3-forme de Cartan ϕ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous allons montrer que $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est une bidérivation de quasi-Poisson pour l'action de G sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Pour cela, précisons l'action considérée et la forme de ses champs fondamentaux.

Lemme 4.5. *Le groupe de Lie $G = \mathbf{GL}(N)$ agit par conjugaison sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$. L'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ associée est donnée par :*

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \quad \forall f \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}), \quad \forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}, \qquad \underline{x}[f](X) = \left\langle [\nabla f(X), X]^{[-1]} \,|x \right\rangle_{\mathfrak{g}} .$$

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Alors

$$\begin{aligned} \underline{x}[f](X) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} f(X + t\underline{x}(X)) = \langle \nabla f(X) |\, \underline{x}(X) \rangle_{\sim} \\ &= \langle [\nabla f(X), X] \,|x\rangle_{\sim} = \left\langle [\nabla f(X), X]^{[-1]} \,|\, x \right\rangle_{\mathfrak{g}} . \end{aligned}$$ □

Ce morphisme d'algèbre de Lie s'étend aux polyvecteurs en une application qui préserve le produit extérieur et le crochet de Schouten :

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits^k \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}^k(\tilde{\mathfrak{g}}) \\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_k &\longmapsto \underline{x_1} \wedge \cdots \wedge \underline{x_k} , \end{aligned}$$

où, pour $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$,

$$\begin{aligned} \underline{x_1} \wedge \cdots \wedge \underline{x_k}[f_1, \ldots, f_k](X) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^{k} \underline{x}_{\sigma(i)}[f_i](X) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^{k} \left\langle [\nabla f_i(X), X]^{[-1]} \,|x_{\sigma(i)} \right\rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= x_1 \wedge \cdots \wedge x_k([\nabla f_1(X), X]^{[-1]}, \ldots, [\nabla f_k(X), X]^{[-1]}), \end{aligned}$$

où l'on a identifié les formes linéaires $\langle x_i | \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}$ aux éléments x_i de $\mathfrak{g}$. Ainsi, pour trois fonctions f_1, f_2, f_3 de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$, et X un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$, on a

$$\underline{\phi}_{\mathfrak{g}}[f_1, f_2, f_3](X) = \phi_{\mathfrak{g}}([\nabla f_1(X), X]^{[-1]}, [\nabla f_2(X), X]^{[-1]}, [\nabla f_3(X), X]^{[-1]}) ,$$

où le $\phi_{\mathfrak{g}}$ du terme de gauche est le trivecteur de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\phi_{\mathfrak{g}}$ dans le terme de droite est la 3-forme de Cartan sur $\mathfrak{g}$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat attendu :

Proposition 4.6. *La bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est une structure de quasi-Poisson sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$ pour la conjugaison de $G =$ $\mathbf{GL}(N)$.*

Démonstration. Soit f_1, f_2, f_3 trois éléments linéaires de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et X un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Afin d'alléger l'écriture, nous notons L_i pour $\nabla f_i(X)$. D'après ce qui précède, $\underline{\phi}_{\mathfrak{g}}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\underline{\phi}_{\mathfrak{g}}[f_1, f_2, f_3](X) &= \phi_{\mathfrak{g}}([L_1, X]^{[-1]}, [L_2, X]^{[-1]}, [L_3, X]^{[-1]}) \\
&= \frac{1}{2}\left\langle (L_1 X)^{[-1]} \middle| \left[(L_2 X)^{[-1]}, (L_3 X)^{[-1]}\right]\right\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left\langle (L_1 X)^{[-1]} \middle| \left[(L_2 X)^{[-1]}, (X L_3)^{[-1]}\right]\right\rangle_{\mathfrak{g}} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\langle (L_1 X)^{[-1]} \middle| \left[(X L_2)^{[-1]}, (X L_3)^{[-1]}\right]\right\rangle_{\mathfrak{g}} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left\langle (X L_1)^{[-1]} \middle| \left[(X L_2)^{[-1]}, (X L_3)^{[-1]}\right]\right\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{f_1, \{f_2, f_3\}_1^Q\right\}_1^Q (X) + \circlearrowleft_{1,2,3} .
\end{aligned}$$

Ainsi, le Jacobiateur de notre crochet est l'image du trivecteur de Cartan de $\mathfrak{g}$ par l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. D'autre part, montrons que $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est G-invariant. Soit $x \in \mathfrak{g}$, f, g deux fonctions linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et X un point de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors

$$\mathcal{L}_{\underline{x}} \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q [f,g](X) = \mathcal{L}_{\underline{x}} \{f,g\}_1^Q (X) - \left\{\mathcal{L}_{\underline{x}} f, g\right\}_1^Q - \left\{f, \mathcal{L}_{\underline{x}} g\right\}_1^Q .$$

En utilisant $\nabla(\mathcal{L}_{\underline{x}} f)(X) = [\nabla f, x]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\underline{x}} \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q [f,g](X) &= \langle A(\nabla f[x,X]) | \nabla g X\rangle_{\sim} - \langle A([x,X]\nabla f) | X \nabla g\rangle_{\sim} \\
&\quad + \langle S([x,X]\nabla f) | \nabla g X\rangle_{\sim} - \langle S(\nabla f[x,X]) | X \nabla g\rangle_{\sim} \\
&\quad + \langle A(\nabla f X) | \nabla g [x,X]\rangle_{\sim} - \langle A(X \nabla f) | [x,X] \nabla g\rangle_{\sim} \\
&\quad + \langle S(X \nabla f) | \nabla g [x,X]\rangle_{\sim} - \langle S(\nabla f X) | [x,X] \nabla g\rangle_{\sim} \\
&\quad - \langle A([\nabla f, x]\, X) | \nabla g X\rangle_{\sim} + \langle A(X\, [\nabla f, x]) | X \nabla g\rangle_{\sim} \\
&\quad - \langle S(X\, [\nabla f, x]) | \nabla g X\rangle_{\sim} + \langle S([\nabla f, x]\, X) | X \nabla g\rangle_{\sim} \\
&\quad - \langle A(\nabla f X) | \, [\nabla g, x]\, X\rangle_{\sim} + \langle A(X \nabla f) | X\, [\nabla g, x]\rangle_{\sim} \\
&\quad - \langle S(X \nabla f) | \, [\nabla g, x]\, X\rangle_{\sim} + \langle S(\nabla f X) | X\, [\nabla g, x]\rangle_{\sim} .
\end{aligned}$$

Après simplification, en observant que pour tout Y dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, $A(xY) = xA(Y)$ et $S(xY) = xS(Y)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\underline{x}} \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q [f,g](X) = &- \langle A(\nabla f X)|x\nabla g X\rangle_\sim - \langle A(X\nabla f)|X\nabla g x\rangle_\sim \\
&+ \langle S(X\nabla f)|\nabla g X x\rangle_\sim + \langle S(\nabla f X)|x X\nabla g\rangle_\sim \\
&- \langle A(\nabla f X)|\nabla g X x\rangle_\sim - \langle A(X\nabla f)|x X\nabla g\rangle_\sim \\
&- \langle S(X\nabla f)|\nabla g X x\rangle_\sim - \langle S(\nabla f X)|x X\nabla g\rangle_\sim \\
&+ \langle A(\nabla f X)|\nabla g X x\rangle_\sim + \langle A(X\nabla f)|x X\nabla g\rangle_\sim \\
&- \langle S(X\nabla f)|x\nabla g X\rangle_\sim - \langle S(\nabla f X)|X\nabla g x\rangle_\sim \\
&+ \langle A(\nabla f X)|x\nabla g X\rangle_\sim + \langle A(X\nabla f)|X\nabla g x\rangle_\sim \\
&+ \langle S(X\nabla f)|x\nabla g X\rangle_\sim + \langle S(\nabla f X)|X\nabla g x\rangle_\sim \\
= &\ 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est bien une bidérivation G-invariante de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$. D'après ce qui précède, elle confère à $\tilde{\mathfrak{g}}$ une structure de G-variété de quasi-Poisson. □

Si on apprécie que tant d'efforts soient récompensés par ce nouvel exemple d'une variété de quasi-Poisson, cette démonstration est cependant assez peu satisfaisante. D'une part elle n'est constituée que d'une suite de calculs fastidieux, et d'autre part, elle ne permet pas vraiment de comprendre pourquoi la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ est une structure de quasi-Poisson. Afin de pouvoir proposer une autre démonstration de ce résultat, revenons à une construction fondamentale qu'introduisent Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken dans [8] : la fusion d'une structure de quasi-Poisson.

4.3 Fusion de quasi-Poisson

Le théorème que nous allons énoncer dans ce paragraphe est un des premiers résultats énoncés dans [8] sur les variétés de quasi-Poisson. Il s'agit d'un jeu d'actions sur la variété. Etant donné une une bidérivation de quasi-Poisson sur une $(H \times H)$-variété M, le théorème 4.7 construit une structure de H-variété de quasi-Poisson sur M.

Théorème 4.7. *[8] Soit (M,P) une $(H \times H)$-variété de quasi-Poisson. Notons $\widehat{\ }$ l'action infinitésimale de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ sur M. Si $x \in \mathfrak{h}$, $\widehat{x^1}$ et $\widehat{x^2}$ désignent les champs de vecteurs fondamentaux associés aux vecteurs $x^1 = (x,0)$ et $x^2 = (0,x)$ de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ par les actions sur M de $H \times \{e\}$ et $\{e\} \times H$ respectivement. Soient $(e_a)_{a\in I}$ et $(\varepsilon_a)_{a\in I}$ deux bases duales de $\mathfrak{h}$. Notons ψ l'élément de $\bigwedge^2 \mathfrak{h}$*

$$\psi := \frac{1}{2}\sum_{a\in I} e_a^1 \wedge \varepsilon_a^2.$$

Le champ de bivecteurs

$$P_{fus} := P - \widehat{\psi} := P - \frac{1}{2}\sum_{a} \widehat{e_a^1} \wedge \widehat{\varepsilon_a^2}$$

définit sur la variété M une structure de H-variété de quasi-Poisson, par rapport à l'action diagonale

$$\begin{array}{rcl} H \times M & \to (H \times H) \times M & \to M \\ (h,m) & \mapsto \quad ((h,h),m) & \mapsto (h,h)\cdot m. \end{array}$$

Démonstration. Commençons par vérifier la H-invariance de la bidérivation P_{fus}. Pour x un élément de $\mathfrak{h}$, notons $\underline{x}$ le champ de vecteurs fondamental associé à x par l'action diagonale de H sur M. Alors, d'une part $\underline{x} = \widehat{(x,x)}$ et d'autre part, $\mathcal{L}_{\underline{x}} P_{fus}$ se décompose en la somme de $\mathcal{L}_{\underline{x}} P$ et $\mathcal{L}_{\underline{x}} \widehat{\psi}$. Or

$$\mathcal{L}_{\underline{x}} P = \mathcal{L}_{\widehat{(x,x)}} P = 0$$

car P est $H \times H$-invariant, et

$$\mathcal{L}_{\underline{x}} \widehat{\psi} = \left[\widehat{\psi}, \widehat{(x,x)}\right]_S = [\widehat{\psi, (x,x)}].$$

Le dernier terme peut encore se développer en

$$\begin{aligned} [\psi,(x,x)] &= \frac{1}{2}\left[\sum_{a\in I} e_a^1 \wedge \varepsilon_a^2, x^1 + x^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a\in I} [e_a, x]^1 \wedge \varepsilon_a^2 + e_a^1 \wedge [\varepsilon_a, x]^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a,b\in I} \langle \varepsilon_b | \, [e_a, x]\rangle_{\mathfrak{h}} \, e_b^1 \wedge \varepsilon_a^2 + \langle e_b | \, [\varepsilon_a, x]\rangle_{\mathfrak{h}} \, e_a^1 \wedge \varepsilon_b^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où la H-invariance de P_{fus}. Par ailleurs, calculons le crochet de Schouten $[P_{fus}, P_{fus}]_S$:

$$[P_{fus}, P_{fus}]_S = [P,P]_S + \left[\widehat{\psi}, \widehat{\psi}\right]_S - 2\left[P, \widehat{\psi}\right].$$

P étant une bidérivation de $(H \times H)$-variété de quasi-Poisson, elle est, d'une part, invariante par l'action de $H \times H$, d'où $\left[P, \widehat{\psi}\right] = 0$ et, d'autre part, $[P,P]_S = \widehat{\phi_{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}}} = \widehat{\phi_{\mathfrak{h}}^1} + \widehat{\phi_{\mathfrak{h}}^2}$. Enfin,

$$\begin{aligned}
[\psi,\psi]_S &= \frac{1}{4}\sum_{a,b}[e_a,e_b]^1\wedge\varepsilon_a^2\wedge\varepsilon_b^2 + e_a^1\wedge e_b^1\wedge[\varepsilon_a,\varepsilon_b]^2\\
&= \frac{1}{4}\sum_{a,b,c}\langle\varepsilon_a|\,[\varepsilon_b,\varepsilon_c]\rangle\,(e_c^1\wedge e_a^2\wedge e_b^2 + e_a^1\wedge e_b^1\wedge e_c^2)\\
&= \frac{1}{12}\sum_{a,b,c}\langle\varepsilon_a|\,[\varepsilon_b,\varepsilon_c]\rangle\,(e_a^1+e_a^2)\wedge(e_b^1+e_b^2)\wedge(e_c^1+e_c^2)\\
&\quad -\frac{1}{12}\sum_{a,b,c}\langle\varepsilon_a|\,[\varepsilon_b,\varepsilon_c]\rangle\,e_a^1\wedge e_b^1\wedge e_c^1 + e_a^2\wedge e_b^2\wedge e_c^2\\
&= \underline{\phi}_{\mathfrak{h}} - \widehat{\phi_{\mathfrak{h}}^1} - \widehat{\phi_{\mathfrak{h}}^2}.
\end{aligned}$$

D'où $[P_{fus},P_{fus}]_S = \underline{\phi}_{\mathfrak{h}}$ et P_{fus} est une bidérivation de quasi-Poisson sur M pour l'action diagonale. □

La technique décrite par cette proposition est appelée *fusion*. Elle permet d'une part de construire des variétés de quasi-Poisson et d'autre part de reconnaître qu'une bidérivation est une structure de quasi-Poisson en observant qu'elle est issue d'une fusion. C'est cet aspect de la fusion que nous allons utiliser dans le paragraphe suivant pour montrer que notre bidérivation quadratique $\{\cdot,\cdot\}_1^Q$ est une bidérivation de quasi-Poisson de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Exemple 4.8. Comme nous le suggérions dans le paragraphe 4.1, la bidérivation de quasi-Poisson canonique $P_H = \frac{1}{2}\sum_{a\in I}\overleftarrow{e}_a\wedge\overrightarrow{\varepsilon}_a$ du groupe de Lie H provient d'une fusion. En effet, $(H\times H)$ agit sur H par translations à gauche et à droite. L'image de la 3-forme de Cartan $\phi_2 = (\phi_{\mathfrak{h}},\phi_{\mathfrak{h}})$ de $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}$ par cette action est $\overleftarrow{\phi}_{\mathfrak{h}} - \overrightarrow{\phi}_{\mathfrak{h}} = 0$. Le couple $(H,0)$ est donc une $(H\times H)$-variété de quasi-Poisson. Le processus de fusion donne la H-variété de quasi-Poisson $(H, P_{fus} = \frac{1}{2}\sum_{a\in I}\overleftarrow{e}_a\wedge\overrightarrow{\varepsilon}_a)$ pour l'action diagonale qui est la conjugaison simultanée.

La fusion permet également d'attribuer une structure de quasi-Poisson naturelle à un produit de deux H-variétés de quasi-Poisson. Si (M_1,P_1) et (M_2,P_2) sont deux H-variétés de quasi-Poisson, le produit direct $(M_1\times M_2, P_1+P_2)$ est une $(H\times H)$-variété de quasi-Poisson. Afin d'obtenir une H-variété de quasi-Poisson, considérons sa fusion $(M_1\times M_2,(P_1+P_2)_{fus})$ que nous noterons $M_1\circledast M_2$. L'opération $\circledast$ est clairement associative.

Exemple 4.9. [8] La produit de fusion de deux copies du groupe H, équipé de sa structure de quasi-Poisson canonique P_H, donne la H-variété de quasi-Poisson

$$(H\circledast H, \frac{1}{2}\sum_a\overleftarrow{e_a}^1\wedge\overrightarrow{\varepsilon_a}^1 + \frac{1}{2}\sum_a\overleftarrow{e_a}^2\wedge\overrightarrow{\varepsilon_a}^2 - \frac{1}{2}\sum_a(\overleftarrow{e_a}^1-\overrightarrow{e_a}^1)\wedge(\overleftarrow{\varepsilon_a}^2-\overrightarrow{\varepsilon_a}^2)).$$

Plus généralement, la bidérivation de quasi-Poisson obtenue sur H^n par la fusion de n copies de (H, P_H) est

$$P_n = \frac{1}{2}\sum_{a,i} \overleftarrow{e_a}^i \wedge \overrightarrow{\varepsilon_a}^i - \frac{1}{2}\sum_{a,i<j} (\overleftarrow{e_a}^i - \overrightarrow{e_a}^i) \wedge (\overleftarrow{\varepsilon_a}^j - \overrightarrow{\varepsilon_a}^j)\,.$$

Cet exemple sera repris dans le chapitre suivant. Nous montrerons en effet dans le chapitre 5 comment une bidérivation de quasi-Poisson peut induire une bidérivation de Poisson sur un quotient. Ce résultat sera illustré par deux exemples dont celui de l'espace de modules $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$.

Enonçons enfin, à titre d'exemple d'utilisation de la procédure de fusion, le lemme suivant qui sera utile dans le chapitre 6 pour démontrer qu'une application est un morphisme de quasi-Poisson.

Lemme 4.10. *Soit (M_i, P_i) et (N_i, Q_i), $i = 1, 2$, deux couples de H-variétés de quasi-Poisson et $\varphi_i : M_i \to N_i$, $i = 1, 2$, deux morphismes de H-variétés de quasi-Poisson. Alors l'application $(\varphi_1, \varphi_2) : M_1 \circledast M_2 \to N_1 \circledast N_2$ est un morphisme de H-variétés de quasi-Poisson.*

Démonstration. Par H-équivariance des applications de quasi-Poisson, on a, pour tout x dans $\mathfrak{g}$ et $i = 1, 2$, $\varphi_{i*}(x_{M_i}) = x_{N_i}$. Ainsi,

$$(\varphi_1, \varphi_2)_*(P_1^1 + P_2^2 - \frac{1}{2}\sum \varepsilon_a{}^1_{M_1} \wedge e_a{}^2_{M_2}) = Q_1^1 + Q_2^2 - \frac{1}{2}\sum \varepsilon_a{}^1_{N_1} \wedge e_a{}^2_{N_2}.$$

La H-équivariance de (φ_1, φ_2) est immédiate. □

4.4 Une fusion pour $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$

Le but de ce paragraphe est de montrer, par le biais d'une fusion, que la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ fait de $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ une algèbre de quasi-Poisson, vis à vis de l'action de conjugaison de $G = \mathbf{GL}(N)$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, où $\tilde{\mathfrak{g}}$ est l'algèbre de lacets de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$.

Pour un élément x de $\mathfrak{g}$, nous notons, comme précédemment, $\underline{x}$ le champ de vecteurs fondamental sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ pour l'action de conjugaison de G. Il est donné par $\underline{x} = \overleftarrow{x} - \overrightarrow{x}$, où $\overleftarrow{x}$ et $\overrightarrow{x}$ sont les champs de vecteurs fondamentaux pour les translations à gauche et à droite respectivement. Pour un élément x de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, on utilisera également les notations $\overleftarrow{x}$ et $\overrightarrow{x}$ pour désigner les actions infinitésimales de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur elle-même[1] : $\forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $\overleftarrow{x}(X) = xX$ et $\overrightarrow{x}(X) = Xx$.

[1] Bien que nous ayons pris l'habitude de noter par des lettres capitales les éléments de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, nous préférons les minuscules ici afin de préserver l'homogénéité pour les actions infinitésimales.

Rappelons l'expression de la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ pour deux fonctions f et g sur $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\{f,g\}_1^Q(X) = \frac{1}{2}\big(\langle [X,\nabla f(X)] | R_1(X\nabla g(X) + \nabla g(X)X)\rangle_{\sim} \\ - \langle [X,\nabla g(X)] | R_1(X\nabla f(X) + \nabla f(X)X)\rangle_{\sim} \big).$$

En faisant apparaître les parties antisymétrique et symétrique, A et S, de R_1, nous décomposons $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ en somme des deux termes

$$\{f,g\}_a(X) = \langle A(\nabla f(X)X) | \nabla g(X)X\rangle_{\sim} - \langle A(X\nabla f(X)) | X\nabla g(X)\rangle_{\sim}$$
$$\{f,g\}_s(X) = \langle S(X\nabla f(X)) | \nabla g(X)X\rangle_{\sim} - \langle S(\nabla f(X)X) | X\nabla g(X)\rangle_{\sim}.$$

L'idée est de montrer que $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ est une structure de quasi-Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ pour une action de $G\times G$, puis de reconnaître en $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ la structure de quasi-Poisson obtenue par la fusion sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Considérons l'action à gauche de $G\times G$ sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$

$$\begin{aligned} G\times G\times \tilde{\mathfrak{g}} &\to \tilde{\mathfrak{g}} \\ (g_1,g_2,X) &\mapsto g_1 X g_2^{-1}. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie du produit $G\times G$ est la somme directe $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$. Le champ de vecteurs fondamental sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ correspondant à cette action est donné par

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(\tilde{\mathfrak{g}}) \\ x^1+y^2 &\longmapsto \widehat{x^1+y^2} = \overleftarrow{x} - \overrightarrow{y}. \end{aligned}$$

Notons ϕ_2 la trivecteur de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$: $\phi_2 = (\phi_{\mathfrak{g}},\phi_{\mathfrak{g}})$. Nous devons montrer que la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ est un champ de bivecteurs $(G\times G)$-invariant et vérifie $[\{\cdot\,,\cdot\}_a, \{\cdot\,,\cdot\}_a]_S = \widehat{\phi_2}$.

Soit $a := \beta(A)$ le bivecteur image de A dans le carré tensoriel $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$, par l'application β définie dans le chapitre 3. On a alors l'égalité

$$\{\cdot\,,\cdot\}_a = -\frac{1}{2}(\overleftarrow{a} + \overrightarrow{a}).$$

En effet, d'après la formule (3.1), le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ s'écrit, pour f,g deux fonctions sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et X un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$$\{f,g\}_a(X) = \langle a | \nabla f X \otimes \nabla g X\rangle_{\otimes} - \langle a | X\nabla f \otimes X\nabla g\rangle_{\otimes}.$$

En utilisant l'antisymétrie de a, on obtient la formule donnée. Explicitement l'application A est donnée par

$$\begin{aligned} A:\ \tilde{\mathfrak{g}} &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \\ x\lambda^p &\longmapsto = \left| \begin{array}{ll} x\lambda^{p+1} & \text{si } p+1>0 \\ -x\lambda^{p+1} & \text{si } p+1<0 \\ 0 & \text{si } p=-1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

On en déduit, dans la base canonique $(E_{ij}\lambda^p)_{\substack{1\le i,j\le N\\ p\in\mathbb{Z}}}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$$a=\sum_{\substack{1\le i,j\le N\\ p>0}} E_{ji}\lambda^{-p}\wedge E_{ij}\mu^p=\sum_{\substack{1\le i,j\le N\\ p>0}} E_{ji}\lambda^{-p}\otimes E_{ij}\mu^p-\sum_{\substack{1\le i,j\le N\\ p>0}} E_{ij}\lambda^{p}\otimes E_{ji}\mu^{-p}.$$

Lemme 4.11. *Le bivecteur a vérifie*

$$\forall x\in\mathfrak{g},\quad [a,x]=0\qquad et\qquad \frac{1}{4}\,[a,a]=\phi_{\mathfrak{g}}-\phi_{\sim},$$

où $\phi_\sim\in\mathcal{T}_3(\tilde{\mathfrak{g}})$ est l'analogue formel, pour $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\langle x\lambda^p|y\lambda^q\rangle'_\sim=\delta_{p,-q}\operatorname{tr}(xy)$, du trivecteur de Cartan d'une algèbre de Lie de dimension finie munie d'une forme bilinéaire symétrique, ad*-invariante et non dégénérée (4.1).*

Démonstration. Soit x un élément de $\mathfrak{g}$ et p un entier positif. Le crochet $\left[\sum_{1\le i,j\le n}E_{ji}\lambda^{-p}\wedge E_{ij}\mu^p,x\right]$ s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le n}\left[E_{ji}\lambda^{-p}\wedge E_{ij}\mu^p,x\right]&=\sum_{1\le i,j\le n}[E_{ji},x]\,\lambda^{-p}\wedge E_{ij}\mu^p+E_{ji}\lambda^{-p}\wedge[E_{ij},x]\,\mu^p\\&=\sum_{1\le i,j,k,l\le n}\langle E_{kl}|\,[E_{ji},x]\rangle_{\mathfrak{g}}\,E_{lk}\lambda^{-p}\wedge E_{ij}\mu^p\\&\qquad\qquad+\langle E_{kl}|\,[E_{ij},x]\rangle_{\mathfrak{g}}\,E_{ji}\lambda^{-p}\wedge E_{lk}\mu^p\\&=0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x dans $\mathfrak{g}$, $[a,x]=\sum_{p>0}\left[\sum_{1\le i,j\le n}E_{ji}\lambda^{-p}\wedge E_{ij}\mu^p,x\right]=0$. Notons $(e_a)_{a\in I}=(E_{ij}\lambda^p)_{\substack{1\le i,j\le N\\ p>0}}$ la base canonique de $\tilde{\mathfrak{g}}_{>0}$, $(\varepsilon_a)_{a\in I}=(E_{ji}\lambda^p)_{\substack{1\le i,j\le N\\ p<0}}$ les éléments duaux dans $\tilde{\mathfrak{g}}_{<0}$ pour la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle'_\sim$ et $(h_c)_{c\in J}$ et $(h_c^*)_{c\in J}$ deux bases duales de $\mathfrak{g}$. Alors $a=\sum_{a\in I}\varepsilon_a\wedge e_a$ et nous pouvons développer le crochet $[a,a]$ dans $\mathcal{T}_3(\tilde{\mathfrak{g}})$:

$$\begin{aligned}[a,a]=&\sum_{a,b\in I}\varepsilon_a\wedge[e_a,\varepsilon_b]\wedge e_b+[\varepsilon_a,\varepsilon_b]\wedge e_a\wedge e_b\\&\qquad-\varepsilon_b\wedge[\varepsilon_a,e_b]\wedge e_a+\varepsilon_a\wedge\varepsilon_b\wedge[e_a,e_b]\\=&-\sum_{a,b,c\in I}\langle e_c|\,[\varepsilon_a,\varepsilon_b]\rangle'_\sim\,\varepsilon_c\wedge e_a\wedge e_b+\langle\varepsilon_c|\,[e_a,e_b]\rangle'_\sim\,e_c\wedge\varepsilon_a\wedge\varepsilon_b\\&-2\sum_{a,b\in I,\,c\in J}\langle h_c^*|\,[e_a,\varepsilon_b]\rangle'_\sim\,h_c\wedge\varepsilon_a\wedge e_b\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, les trivecteurs de Cartan $\phi_\sim$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\phi_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
\phi_{\sim} &= \frac{1}{4}\sum_{a,b,c} \langle e_a |\, [\varepsilon_b, \varepsilon_c] \rangle'_{\sim}\, \varepsilon_a \wedge e_b \wedge e_c + \langle \varepsilon_a |\, [e_b, e_c] \rangle'_{\sim}\, e_a \wedge \varepsilon_b \wedge \varepsilon_c \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{a,b \in I, c \in J} \langle \varepsilon_a |\, [e_b, h_c^*] \rangle'_{\sim}\, e_a \wedge \varepsilon_b \wedge h_c \\
&+ \frac{1}{12}\sum_{a,b,c \in J} \langle h_a^* |\, [h_b^*, h_c^*] \rangle'_{\sim}\, h_a \wedge h_b \wedge h_c \\
\phi_{\mathfrak{g}} &= \frac{1}{12}\sum_{a,b,c \in J} \langle h_a^* |\, [h_b^*, h_c^*] \rangle_{\mathfrak{g}}\, h_a \wedge h_b \wedge h_c \\
&= \frac{1}{12}\sum_{a,b,c \in J} \langle h_a^* |\, [h_b^*, h_c^*] \rangle'_{\sim}\, h_a \wedge h_b \wedge h_c .
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc la formule attendue : $\frac{1}{4}\,[a,a] = \phi - \phi_{\sim}$. □

Remarque 4.12. Une précision s'impose concernant la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle'_{\sim}$ qui apparaît naturellement dans le lemme 4.11. Les bidérivations $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ et le bivecteur a ont été définis avec la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\sim}$, alors que nous énonçons ici une propriété de ce même bivecteur a, relativement à la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle'_{\sim}$. En fait, pour prouver que $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de quasi-Poisson vis à vis de l'action de $(G \times G)$ (resp. de G) sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, la seule forme bilinéaire qui joue un rôle est celle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie G, avec laquelle est définie le trivecteur de Cartan $\phi_{\mathfrak{g}}$. En effet, dans la proposition suivante, lorsque nous considérons le champ de bivecteurs $-\frac{1}{2}(\overleftarrow{a} + \overrightarrow{a})$, nous n'utilisons que le fait que $\phi_{\sim}$ est un trivecteur $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$-invariant.

Proposition 4.13. *La bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ est une bidérivation de quasi-Poisson de l'algèbre $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ vis à vis de l'action de $G \times G$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$*

$$\begin{aligned}
(G \times G) \times \tilde{\mathfrak{g}} &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \\
(\,(g_1, g_2)\,,\, X\,) &\longmapsto g_1 X g_2^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par montrer l'invariance du bivecteur $\{\cdot\,,\cdot\}_a$. Dire que ce champ de bivecteurs est invariant signifie qu'il est conservé par le flot de tout champ de vecteurs fondamental associé à l'action de $G \times G$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ ou encore que sa dérivée de Lie dans la direction d'un tel champ de vecteurs est nulle. Il faut donc montrer

$$\forall\, x^1 + y^2 \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{L}_{\widehat{x^1+y^2}}\, \{\cdot\,,\cdot\}_a = 0.$$

Or pour tout élément $x^1 + y^2$ de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\widehat{x^1+y^2}}\, \{\cdot\,,\cdot\}_a &= \left[\{\cdot\,,\cdot\}_a\,, \widehat{x^1+y^2}\right]_S = -\frac{1}{2}\,[\overleftarrow{a} + \overrightarrow{a}, \overleftarrow{x} - \overrightarrow{y}]_S \\
&= -\frac{1}{2}\overleftarrow{[a,x]} - \frac{1}{2}\overrightarrow{[a,y]} = 0.
\end{aligned}$$

Le bivecteur $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ est donc bien invariant par l'action de $G \times G$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. D'autre part, le crochet de Schouten, $[\{\cdot\,,\cdot\}_a\,, \{\cdot\,,\cdot\}_a]_S$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
[\{\cdot\,,\cdot\}_a\,, \{\cdot\,,\cdot\}_a]_S &= \frac{1}{4}[\overleftarrow{a} + \overrightarrow{a}, \overleftarrow{a} + \overrightarrow{a}]_S = \frac{1}{4}\overleftarrow{[a,a]} - \frac{1}{4}\overrightarrow{[a,a]} \\
&= \overleftarrow{\phi_{\mathfrak{g}}} - \overrightarrow{\phi_g} - \overleftarrow{\phi_\sim} + \overrightarrow{\phi_\sim}.
\end{aligned}$$

Or $\phi_\sim$ est un champ de trivecteurs $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$-invariant sur l'algèbre de lacets. On a donc $\overleftarrow{\phi_\sim} - \overrightarrow{\phi_\sim} = 0$. D'où, $[\{\cdot\,,\cdot\}_a\,, \{\cdot\,,\cdot\}_a]_S = \overleftarrow{\phi_{\mathfrak{g}}} - \overrightarrow{\phi_{\mathfrak{g}}} = \widehat{\phi_2}$. On a ainsi montré que $\{\cdot\,,\cdot\}_a$ est une bidérivation de quasi-Poisson de $\mathbf{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ pour l'action de $(G \times G)$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. □

Avant d'énoncer le théorème, intercallons ici le lemme suivant, preuve, s'il en est besoin d'une, du bien fondé des structures de quasi-Poisson, dans un contexte de systèmes intégrables. Le défaut de Jacobi ne garantie pas en effet que les champs Hamiltoniens de deux fonctions en involutions commutent. Cependant, la G-invariance de la bidérivation de quasi-Poisson permet parfois de palier à cette lacune.

Lemme 4.14. *Soit* $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ *une* H*-variété de quasi-Poisson. Soient* f_1, f_2 *deux fonctions sur* M*, telles que*

1. $f_1 \in \mathcal{F}(M)^H$
2. $\{f_1, f_2\} = 0$.

Alors les champs Hamiltoniens $\mathcal{X}_{f_1}$ *et* $\mathcal{X}_{f_2}$ *de* f_1 *et* f_2 *commutent :*

$$[\mathcal{X}_{f_1}, \mathcal{X}_{f_2}] = 0.$$

Démonstration. C'est un simple calcul avec l'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten, et les propriétés définissant une structure de quasi-Poisson. Notons $\pi := \{\cdot\,,\cdot\}$.

$$\begin{aligned}
[\mathcal{X}_{f_1}, \mathcal{X}_{f_2}] &= [[\pi, f_1]_S\,, [\pi, f_2]_S]_S \\
&= \frac{1}{2}\left[[[\pi,\pi]_S\,, f_1]_S\,, f_2\right]_S + \left[\pi, [[\pi, f_1]_S\,, f_2]_S\right]_S \\
&= \frac{1}{2}\left[\left[\underline{\phi_{\mathfrak{g}}}, f_1\right]_S, f_2\right]_S + [\pi, \{f_1, f_2\}]_S \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.15. *Le champ de bivecteurs* $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ *est une structure de* G*-variété de quasi-Poisson sur* $\tilde{\mathfrak{g}}$*. Pour ce crochet, les fonctions* $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$*-invariantes sont en involution et les champs Hamiltoniens associés commutent.*

Démonstration. L'action diagonale de $G \times G$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est la conjugaison de G. Considérons sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ le bivecteur

$$\psi = \frac{1}{2} \sum E^1_{ij} \wedge E^2_{ji}.$$

Le théorème 4.7 affirme que la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_a - \widehat{\psi}$ muni la G-variété $\tilde{\mathfrak{g}}$ d'une structure de quasi-Poisson. Or

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} &= \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le N} \widehat{E^1_{ji}} \wedge \widehat{E^2_{ij}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le N} \overleftarrow{E_{ji}} \wedge \overrightarrow{E_{ij}} \\ &= -\{\cdot\,,\cdot\}_s \,. \end{aligned}$$

Ainsi la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_a + \{\cdot\,,\cdot\}_s = \{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$ est le résultat de la fusion de la $(G \times G)$-variété de quasi-Poisson $(\tilde{\mathfrak{g}}, \{\cdot\,,\cdot\}_a)$. Pour la deuxième partie du théorème, rappelons que nous avons vu dans le chapitre 3 que les fonctions $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$-invariantes sont en involution pour les bidérivations quadratiques construites sur le modèle de Li et Parmentier. Le lemme précédent permet de conclure quant aux champs de vecteurs Hamiltoniens associés. □

Remarque 4.16. On peut montrer que la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$ est multiplicative dans le sens où l'application

$$\begin{aligned} \mu : \mathfrak{g} \circledast \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (x, y) &\mapsto xy, \end{aligned}$$

est un morphisme de quasi-Poisson. Nous prouvons ce résultat dans le paragraphe suivant, dans un contexte plus général (théorème 4.20).

4.5 Structure de quasi-Poisson pour une algèbre de Lie associative

Avant de clore ce chapitre sur la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$ définie sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, formalisons la construction de cette structure de quasi-Poisson dans un contexte plus général. Considérons une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, munie d'une forme bilinéaire symétrique ad-invariante non dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$, vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$, $\langle xy|z\rangle = \langle x|yz\rangle$. Soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

une décomposition de $\mathfrak{g}$ comme somme directe (de sous-espaces vectoriels) des algèbres de Lie $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{n}_+$ et $\mathfrak{h}$ de 3 sous-algèbres associatives de $\mathfrak{g}$. Nous supposons que, via $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$, on ait les égalités

$$\mathfrak{n}_+^\perp = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-, \qquad \mathfrak{n}_-^\perp = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}.$$

Pour simplifier et afin d'éviter des problèmes conceptuels, nous supposons que la dimension de $\mathfrak{g}$ est finie. Pour un choix d'une algèbre de Lie de dimension inifinie, il convient d'adapter, comme nous l'avons fait précédemment pour l'algèbre de lacets, les notions de fonctions, bivecteurs et endomorphismes. Dans tous les cas, on suppose que $\mathfrak{h}$ est de dimension finie. Soit H un groupe de Lie admettant $\mathfrak{h}$ comme algèbre de Lie. Notons $\phi_{\mathfrak{g}}$ et $\phi_{\mathfrak{h}}$ les trivecteurs de Cartan sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement. Nous noterons $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ l'algèbre des fonctions sur $\mathfrak{g}$, polynomiales en les formes linéaires $x \mapsto \langle x|y\rangle_{\mathfrak{g}}$, $y \in \mathfrak{g}$. Toute fonction f dans cette algèbre de fonctions admet un gradient en tout point x de $\mathfrak{g}$:

$$\forall y \in \mathfrak{g}, \quad \langle \nabla f(x)|y\rangle_{\mathfrak{g}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+ty).$$

Notons P_+, P_- et P_0 les projections linéaires de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ et $\mathfrak{h}$ respectivement. Soit R l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$:

$$R = P_+ + P_0 - P_-$$

et $A = P_+ - P_-$ sa partie antisymétrique. R est clairement une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée mais le calcul de B_A donne, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$

$$B_A(x,y) = -[x,y] + [P_0x, P_0y]\,.$$

La bidérivation quadratique donnée par, $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$, $\forall x \in \mathfrak{g}$,

$$\{f,g\}_R^Q(x) = \frac{1}{2}\big(\langle [x, \nabla f(x)] | R(x\nabla g(x) + \nabla g(x)x)\rangle \\ - \langle [x, \nabla g(x)] | R(x\nabla f(x) + \nabla f(x)x)\rangle \big).$$

n'est donc pas, a priori, une structure de Poisson sur l'algèbre associative $\mathfrak{g}$. Soient $(e_a)_{a\in I}$ une base de $\mathfrak{n}_+$, $(\varepsilon_a)_{a\in I}$ sa base duale dans $\mathfrak{n}_-$ via $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et $(h_b)_{b\in J}$ et $(h_b^*)_{b\in J}$ deux bases duales de $\mathfrak{h}$. L'élément

$$a = \sum_{a\in I} \varepsilon_a \wedge e_a$$

est l'image de l'endomorphisme A de $\mathfrak{g}$ dans le carré tensoriel $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, par l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \\ R &\longmapsto \sum_{a\in I}\varepsilon_a\otimes R(e_a)+\sum_{a\in I}e_a\otimes R(\varepsilon_a)+\sum_{b\in J}h_b\otimes R(h_b). \end{aligned}$$

Lemme 4.17. *Le bivecteur a vérifie*

$$\forall x\in\mathfrak{g}\quad [a,x]=0 \qquad \textit{et} \qquad \frac{1}{4}[a,a]=\phi_{\mathfrak{h}}-\phi_g.$$

Démonstration. La démonstration est exactement la même que dans le cas de l'algèbre de lacets (lemme 4.11). □

Lemme 4.18. *La donnée des espaces orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire non dégénérée et* ad*-invariante* $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ *impliquent les égalités et inclusions suivantes*

$$(\mathfrak{n}_\pm\oplus\mathfrak{h})^\perp=\mathfrak{n}_\pm \qquad \textit{et} \qquad \mathfrak{h}\mathfrak{n}_\pm\subset\mathfrak{n}_\pm.$$

De plus, si $f\in\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ *est une fonction nulle sur* $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$*, alors, pour tout* $x\in\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$*, on a* $\nabla f(x)\in\mathfrak{n}_+$*.*

Démonstration. L'orthogonal d'une somme direct d'espaces vectoriels est l'intersection des orthogonaux. On a donc

$$(\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h})^\perp=\mathfrak{n}_+^\perp\cap\mathfrak{h}^\perp=(\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h})\cap(\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{n}_-)=\mathfrak{n}_+.$$

De même, $(\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h})^\perp=\mathfrak{n}_-$. D'autre part,

$$\langle\mathfrak{h}\mathfrak{n}_+|\mathfrak{n}_+\rangle\subset\langle\mathfrak{h}|\mathfrak{n}_+\rangle=0 \qquad \text{et} \qquad \langle\mathfrak{h}\mathfrak{n}_+|\mathfrak{h}\rangle\subset\langle\mathfrak{h}|\mathfrak{n}_+\rangle=0$$

car $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{n}_+^\perp$. On en déduit que $\mathfrak{h}\mathfrak{n}_+\subset\mathfrak{n}_+^\perp\cap\mathfrak{h}^\perp=\mathfrak{n}_+$. De la même manière, $\mathfrak{h}\mathfrak{n}_-\subset\mathfrak{n}_-$. Enfin, si $f\in\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ est une fonction nulle sur la sous-algèbre associative $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$, alors pour tous $x,y\in\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$, on a $\frac{d}{dt}_{|t=0}f(x+ty)=0$. D'où

$$\forall x,y,\in\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+,\quad \langle\nabla f(x)|y\rangle=\frac{d}{dt}_{|t=0}f(x+ty)=0.$$

Ceci prouve que pour tout $x\in\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$, $\nabla f(x)\in(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+)^\perp=\mathfrak{n}_+$. □

Reprenons les notations utilisées précédement pour désigner les actions infinitésimales des translations à gauche et à droite et la conjugaison de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h} &\to \mathfrak{X}(\mathfrak{g}) \\ (x,y) &\mapsto \widehat{(x,y)}=\overleftarrow{y}-\overrightarrow{x} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{h} &\to \mathfrak{X}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \underline{x}=\overleftarrow{x}-\overrightarrow{x}. \end{aligned}$$

Proposition 4.19. *Le champ de bivecteurs* $\pi_a = -\frac{1}{2}(\overleftarrow{a} + \overrightarrow{a})$ *munit la* $(H \times H)$*-variété* $\mathfrak{g}$ *d'une bidérivation de quasi-Poisson multiplicative.*

Démonstration. Le fait que π_a soit une bidérivation de quasi-Poisson sur $\mathfrak{g}$ découle directement du lemme 4.17, comme dans le cas de l'algèbre de lacets. Dire que la bidérivation π_a est multiplicative signifie qu'en notant μ la multiplication sur $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (x, y) &\mapsto xy, \end{aligned}$$

on a $\mu_*(\pi_a^1 + \pi_a^2) = \pi_a$. Rappellons les formules obtenues dans le lemme 2.1 : pour tout x dans $\mathfrak{g}$,

$$\mu_*(\overleftarrow{x}^1) = \overleftarrow{x}, \qquad \mu_*(\overrightarrow{x}^1) = \mu_*(\overleftarrow{x}^2), \qquad \text{et} \qquad \mu_*(\overrightarrow{x}^2) = \overrightarrow{x}.$$

Le champs de bivecteurs π_a est donné par $\pi_a = -\frac{1}{2}\sum_{a\in I}(\overleftarrow{\varepsilon_a} \wedge \overleftarrow{e_a} - \overrightarrow{\varepsilon_a} \wedge \overrightarrow{e_a})$. On a donc

$$\begin{aligned} \mu_*(\pi_a^1 + \pi_a^2) &= -\frac{1}{2}\sum_{a\in I}(\mu_*(\overleftarrow{\varepsilon_a}^1) \wedge \mu_*(\overleftarrow{e_a}^1) - \mu_*(\overrightarrow{\varepsilon_a}^1) \wedge \mu_*(\overrightarrow{e_a}^1)) \\ &\qquad -\frac{1}{2}\sum_{a\in I}(\mu_*(\overleftarrow{\varepsilon_a}^2) \wedge \mu_*(\overleftarrow{e_a}^2) - \mu_*(\overrightarrow{\varepsilon_a}^2) \wedge \mu_*(\overrightarrow{e_a}^2)) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{a\in I}\big(\overleftarrow{\varepsilon_a} \wedge \overleftarrow{e_a} - \mu_*(\overrightarrow{\varepsilon_a}^1) \wedge \mu_*(\overrightarrow{e_a}^1) \\ &\qquad\qquad + \mu_*(\overrightarrow{\varepsilon_a}^1) \wedge \mu_*(\overrightarrow{e_a}^1) - \overrightarrow{\varepsilon_a} \wedge \overrightarrow{e_a}\big) \\ &= \pi_a. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.20. *Le champ de bivecteurs* $\{\cdot,\cdot\}_R^Q$*, défini par* $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ *et* $\forall x \in \mathfrak{g}$*,*

$$\begin{aligned} \{f, g\}_R^Q(x) = \frac{1}{2}\big(&\langle [x, \nabla f(x)] | R(x\nabla g(x) + \nabla g(x)x)\rangle \\ &- \langle [x, \nabla g(x)] | R(x\nabla f(x) + \nabla f(x)x)\rangle\big). \end{aligned}$$

est une structure de quasi-Poisson sur la H*-variété* $\mathfrak{g}$*. Pour cette structure les fonctions* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$*-invariantes sont en involution et les champs Hamiltoniens associés commutent. La multiplication dans* $\mathfrak{g}$ *un morphisme de quasi-Poisson de* $\mathfrak{g} \circledast \mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{g}$*. Enfin les sous-algèbres associatives* $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ *et* $\mathfrak{n}_+$ *sont des sous-variétés de quasi-Poisson de* $\mathfrak{g}$*.*

Démonstration. On obtient tout simplement la bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$ par fusion de l'action de $H\times H$ sur $\mathfrak{g}$. Les fonctions $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariantes, caractérisées par $\forall x\in\mathfrak{g}$, $[\nabla f(x),x]=0$, sont clairement en involution. Or une fonction $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariante est en particulier H-invariante. Le lemme 4.14 affirme donc que les champs Hamiltoniens associés sur $\mathfrak{g}$ commutent. Vérifions que la multiplication est bien un morphisme de quasi-Poisson lorsque l'on munit le produit de la bidérivation de fusion :

$$(\mathfrak{g}\circledast\mathfrak{g},\pi_a^1-\widehat{\psi}_{\mathfrak{h}}^1+\pi_a^2-\widehat{\psi}_{\mathfrak{h}}^2-\frac{1}{2}\sum_k(\overleftarrow{h_k}^1-\overrightarrow{h_k}^1)\wedge(\overleftarrow{h_k^*}^2-\overrightarrow{h_k^*}^2)).$$

Utilisons à nouveau les formules données dans le lemme 2.1 :

$$\begin{aligned}
&\mu_*(\pi_a^1+\widehat{\psi}_{\mathfrak{h}}^1+\pi_a^2+\widehat{\psi}_{\mathfrak{h}}^2-\frac{1}{2}\sum_k(\overleftarrow{h_k}^1-\overrightarrow{h_k}^1)\wedge(\overleftarrow{h_k^*}^2-\overrightarrow{h_k^*}^2))\\
&=\quad \frac{1}{2}\sum_k\mu_*(\overleftarrow{h_k}^1\wedge\overrightarrow{h_k^*}^1+\overleftarrow{h_k}^2\wedge\overrightarrow{h_k^*}^2-(\overleftarrow{h_k}^1-\overrightarrow{h_k}^1)\wedge(\overleftarrow{h_k^*}^2-\overrightarrow{h_k^*}^2))\\
&\qquad+\mu_*(\pi_a^1+\pi_a^2)\\
&=\quad \pi_a+\frac{1}{2}\sum_k\overleftarrow{h_k}\wedge\overrightarrow{h_k^*}-\frac{1}{2}\mu_*(\sum_k\overrightarrow{h_k}^1\wedge\overrightarrow{h_k^*}^1)\\
&=\quad \pi_a-\widehat{\psi}_{\mathfrak{h}}\,.
\end{aligned}$$

La multiplication $\mu:\mathfrak{g}\circledast\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ est donc bien un morphisme de quasi-Poisson. Enfin, montrons que la sous-algèbre associative $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ est une sous-variété de quasi-Poisson de $\mathfrak{g}$. Soient f une fonction de $\mathfrak{g}$ nulle sur $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$, g un élément de $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et x dans $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$. Alors $x\nabla f(x)$ et $\nabla f(x)x$ sont des éléments de $\mathfrak{n}_+$ et ils sont égaux à leurs images par R et R^*. D'où

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_R^Q(x)&=\frac{1}{2}(\langle R^*[x,\nabla f(x)]|x\nabla g(x)+\nabla g(x)x\rangle_{\sim}\\
&\qquad\qquad-\langle[x,\nabla g(x)]|R(x\nabla f(x)+\nabla f(x)x)\rangle_{\sim})\\
&=\frac{1}{2}(\langle[x,\nabla f(x)]|x\nabla g(x)+\nabla g(x)x\rangle_{\sim}\\
&\qquad\qquad-\langle[x,\nabla g(x)]|x\nabla f(x)+\nabla f(x)x\rangle_{\sim})\\
&=0.
\end{aligned}$$

Donc les champs Hamiltoniens de $\mathfrak{g}$ sont tangents à $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ et $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ est une sous-variété de quasi-Poisson de $(\mathfrak{g},\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q)$. □

Remarque 4.21. Remarquons que lorsque la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est abélienne ($[\cdot\,,\cdot]=0$), la construction précédente donne une structure de Poisson (car $\phi_{\mathfrak{h}} = 0$). Sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, c'est la situation de $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$. En effet, en prenant pour forme bilinéaire le résidu de la trace, la décomposition utilisée : $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0} \oplus \{0\} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_{<0}$ vérifie bien les propriétés requises. Dans ce cas, a est l'élément de $\mathcal{T}_2(\tilde{\mathfrak{g}})$: $a = \frac{1}{2}\sum_{p<0} E_{ij}\lambda^p \wedge E_{ji}\mu^{-p-1}$ et

$$\pi_a = -(\frac{1}{2}\sum_{p<0} \overleftarrow{E_{ij}\lambda^p} \wedge \overleftarrow{E_{ji}\mu^{-p-1}} - \frac{1}{2}\sum_{p<0} \overrightarrow{E_{ij}\lambda^p} \wedge \overrightarrow{E_{ji}\mu^{-p-1}})\,.$$

C'est exactement le champ de bivecteurs $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$. La proposition 4.19 affirme alors que $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ est une structure de $(H \times H)$-quasi-Poisson : $[\pi_a, \pi_a] = \phi_{\mathfrak{h}}$, et comme $\mathfrak{h} = \{0\}$, il vient $\phi_{\mathfrak{h}} = 0$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_0^Q$ est bien une structure de Poisson. (Notons, qu'il est inutile de faire une fusion puisque $H \times H = \{0\}$).

4.6 Structure de Poisson quadratique pour le réseau de Toda classique

Dans ce paragraphe, nous proposons une application du théorème précédent à la constructution d'une bidérivation quadratique dans le cadre du réseau de Toda classique. L'espace qui nous intéresse est l'ensemble $\mathscr{R}$ des matrices symétriques tridiagonales :

$$\mathscr{R} := \{\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & \vdots \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ 0 & \dots & & \dots & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix} \mid a_i, b_j \in \mathbb{C}\}$$

Afin de définir un crochet quadratique sur $\mathscr{R}$, considérons la décomposition de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ en somme directe :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{n}_-,$$

où $\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$) est la sous-algèbre associative des matrices triangulaires supérieures strictes (resp. inférieures strictes) et $\mathfrak{d}$ est le sous-espace des matrices diagonales. Lorsque l'on munit $\mathfrak{g}$ de la forme bilinéaire $\langle X|Y\rangle = \mathrm{tr}(XY)$, les conditions du théorème 4.20 sont satisfaitent. Notons P_+, P_0 et P_- les projections sur $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{n}_-$ respectivement. Soit $R = P_+ + P_0 - P_-$. La formule

$$\{f,g\}_R^Q(X) = \frac{1}{2}(\langle [X, \nabla f(X)] | R(X\nabla g(X) + \nabla g(X) X)\rangle \\ - \langle [X, \nabla g(X)] | R(X\nabla f(X) + \nabla f(X) X)\rangle)$$

définit sur $\mathfrak{g}$ une bidérivation de quasi-Poisson quadratique par rapport à l'action de conjugaison du groupe de Lie D des matrices inversibles diagonales. D étant un groupe commutatif, la 3-forme de Cartan $\phi_{\mathfrak{d}}$ s'annule et le crochet de quasi-Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$ est en fait un crochet de Poisson. Si $(x_{ij})_{1\geq i,j\geq n}$ désigne les fonctions coordonnées de $\mathfrak{g}$, on a, pour tout $i,j,k,l \in [\![1,N]\!]$,

$$\{x_{ij}, x_{kl}\}_R^Q = (\varepsilon_{jl} + \varepsilon_{ik}) x_{kj} x_{il} + (\delta_{il} - \delta_{jk}) x_{ij} x_{kl}\,.$$

où $\varepsilon_{ij} = 1$ si $i > j$, 0 si $i = j$ et -1 si $i < j$. Ces formules permettent de vérifier très rapidement que le sous-espace $\mathscr{D}_3$ des matrices tridiagonales est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}_R^Q)$ Notons que ce résultat est similaire à ce qu'il se passe dans l'étude de $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$, où nous avions observé que les niveaux $\tilde{\mathfrak{g}}_{pq}$ sont tous des sous-variétés de quasi-Poisson (propositions 3.13 et 3.14). Par contre les sous-espaces des matrices symétriques et des matrices symétriques tridiagonales ne sont pas des sous-variétés de Poisson pour cette structure. Cependant, un résultat de Vanhaecke et Fernandes va nous autoriser à équiper $\mathscr{R}$ d'une structure de variété de Poisson héritée de $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$.

Lemme 4.22. *[15] Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson munie d'une involution σ. Supposons que $\sigma : M \to M$ est un morphisme de Poisson. Soit N la sous-variété de M des points fixes de σ. Notons $\iota : N \hookrightarrow M$ l'inclusion. Alors il existe une unique structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_N$ sur N telle que, pour toutes fonctions f et g, σ-invariantes sur M, on ait*

$$\{f,g\}\circ\iota = \{f\circ\iota, g\circ\iota\}_N\,.$$

On vérifie facilement que la transposition est un morphisme de Poisson pour la structure $\{\cdot\,,\cdot\}_R^Q$ sur le sous-espace des matrices tridiagonales. L'ensemble des points fixes de cette involution est le sous-espace $\mathscr{R}$ des matrices tridiagonales symétriques. Il hérite donc d'une structure de Poisson construite de la manière suivante : pour f et g deux fonctions sur N, notons F et G des prolongements invariants par la transposition de f et g à l'ensemble des matrices tridiagonales. Le crochet $\{F,G\}_{R|_{\mathscr{R}}}^Q$ ne dépend alors pas des prolongements F et G choisis. $\{f,g\}_{\mathscr{R}} := \{F,G\}_{R|_{\mathscr{R}}}^Q$ définit une structure quadratique sur $\mathscr{R}$. Elle est donnée par les crochets :

$$\begin{array}{lll} \{a_i, a_{i-1}\}_{\mathscr{R}} = -\frac{1}{2} a_i a_{i-1} & \{a_i, b_i\}_{\mathscr{R}} = -a_i b_i & \{b_i, b_{i-1}\}_{\mathscr{R}} = -2a_{i-1}^2 \\ \{a_i, a_{i+1}\}_{\mathscr{R}} = \frac{1}{2} a_i a_{i+1} & \{a_i, b_{i+1}\}_{\mathscr{R}} = a_i b_{i+1} & \{b_i, b_{i+1}\}_{\mathscr{R}} = 2a_i^2 \end{array}$$

(tous les autres crochets étant nuls). On retrouve ainsi, dans notre formalisme, la structure de Poisson quadratique évoquée par Damianou dans [14].

Remarque 4.23. En utilisant la décomposition de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ en somme directe des sous-algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{l}$ des matrices antisymétriques et des matrices triangulaires inférieures, on obtient la même structure de Poisson sur $\mathscr{R}$.

5

De quasi-Poisson à Poisson

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la donnée d'une bidérivation de quasi-Poisson sur une variété est, par définition, liée à l'action du groupe de Lie sur celle-ci. Il devient alors naturel de s'interroger sur le devenir d'une telle structure lorsque l'on considère le quotient par cette action. Nous montrons dans ce chapitre qu'une condition de tangence sur les champs Hamiltoniens associés aux fonctions H-invariantes suffit à obtenir, sur le quotient M/H, une véritable structure de Poisson. Ce résultat est ensuite appliqué aux deux principaux exemples de structures de quasi-Poisson introduits dans le chapitre précédent. Nous montrons ainsi que les bidérivations $\{\cdot\,,\cdot\}_n$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur G^n et $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ respectivement induisent des structures de Poisson sur les quotients $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$ et $\mathscr{A}/G$. Ces deux structures jouent un rôle essentiel dans la construction de notre système intégrable sur l'espace de modules. Précisons enfin que la partie 5.2 de ce chapitre est une mine d'exemple de fusion de structure de quasi-Poisson. Nous y reprenons en effet la construction de la bidérivation de quasi-Poisson de G^{n+2g} présentée dans [8].

5.1 Réduction pour les bidérivations de quasi-Poisson et compléments

Avant de présenter notre résultat de réduction sur les variétés de quasi-Poisson, énonçons le théorème dont il est fortement inspiré, dû à Pedroni et Vanhaecke.

Théorème 5.1. *[33] Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une G-variété équipée d'une structure de Poisson. Supposons que l'action de G sur M, $\chi : G \times M \to M$, est une action de Poisson (pour une quelconque structure de Poisson sur G). Soit N une sous-variété G-stable de M. Notons $\iota : N \to M$ l'inclusion. Soient*

$\mathcal{F}(M)$ l'algèbre des fonctions de M et $\mathcal{F}(M,N)^G$ la sous-algèbre des fonctions de M, G-invariantes sur N. Supposons que les champs Hamiltoniens des fonctions sur M, G-invariantes sur N, soient tangents à N :

$$\forall f \text{ nulle sur } N, \quad \iota^* \left\{\mathcal{F}(M,N)^G, f\right\} = 0. \tag{5.1}$$

Alors $\mathcal{F}(M,N)^G$ est une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{F}(M)$ et il existe un crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{N/G}$ sur $\mathcal{F}(N)^G$ vérifiant :

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M,N)^G, \qquad \{\iota^* f_1, \iota^* f_2\}_{N/G} = \iota^* \{f_1, f_2\}\ .$$

Afin d'adapter ce lemme en cadre quasi-Poisson, nous avons la proposition suivante due à Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken :

Proposition 5.2. *[8] Soit (M,P) une G-variété de quasi-Poisson. Lorsque G est equippé de sa bidérivation de quasi-Poisson canonique P_G, l'action $G \circledast M \to M$ est une action de quasi-Poisson.*

Nous pouvons à présent énoncer notre résultat de réduction pour une G-variété de quasi-Poisson.

Théorème 5.3. *Soit $(M,\{\cdot\,,\cdot\})$ une G-variété de quasi-Poisson. Soit N une sous-variété G-stable de M. Notons $\iota : N \to M$ l'inclusion. Supposons que les champs Hamiltoniens des fonctions de M, G-invariantes sur N, soient tangents à N :*

$$\forall f \text{ nulle sur } N, \quad \iota^* \left\{\mathcal{F}(M,N)^G, f\right\} = 0. \tag{5.2}$$

Alors $\mathcal{F}(M,N)^G$ est une sous-algèbre de quasi-Poisson de $\mathcal{F}(M)$ et il existe un crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{N/G}$ sur $\mathcal{F}(N)^G$ vérifiant :

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M,N)^G, \qquad \{\iota^* f_1, \iota^* f_2\}_{N/G} = \iota^* \{f_1, f_2\}.$$

Démonstration. Nous reprenons, étape par étape, la démonstration de Pedroni et Vanhaecke, en l'adaptant à une structure de G-variété de quasi-Poisson. Notons $\chi : G \times M \to M$ et $\chi_{_N} : G \times N \to N$ les actions de G sur M et N, $\pi_{_M} : G \times M \to M$ et $\pi_{_N} : G \times N \to N$ les projections sur M et N respectivement.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions de M, G-invariantes sur N. Dire que leur crochet est encore une fonction G-invariante sur N équivaut à l'égalité : $\chi_{_N}^* \iota^* \{f_1, f_2\} = \pi_{_N}^* \iota^* \{f_1, f_2\}$. Si 1_G désigne l'application identité de G, on a les relations suivantes sur $G \times N$:

$$\iota \circ \chi_{_N} = \chi \circ (1_G \times \iota),$$

$$\iota \circ \pi_{_N} = \pi_{_M} \circ (1_G \times \iota).$$

Sachant de plus que les applications χ et $\pi_{_M}$ sont des morphismes de quasi-Poisson, il suffit de montrer l'égalité

$$(1_G \times \iota)^*(\{\chi^* f_1, \chi^* f_2\}_{G \circledast M} - \left\{\pi_{_M}^* f_1, \pi_{_M}^* f_2\right\}_{G \circledast M}) = 0 \qquad (5.3)$$

sur $G \times N$. Soit (g, n) un élément de $G \times N$. Avec des notations transparentes

$$\begin{aligned}\left\{\chi^* f_1, \chi^* f_2 - \pi_{_M}^* f_2\right\}_{G \circledast M}(g, n) = &\{\chi_n^* f_1, \chi_n^* f_2 - (\pi_{_M})_n^* f_2\}_G (g) \\ &+ \left\{\chi_g^* f_1, \chi_g^* f_2 - (\pi_{_M})_g^* f_2\right\}_M (n) \\ &- \widehat{\psi}\,[\chi^* f_1, \chi^* f_2 - \pi_{_M}^* f_2](g, n)\,.\end{aligned}$$

Commençons par calculer les différents termes intervenant dans cette expression. Pour une fonction f, G-invariante sur N, et $m, n, g \in \mathcal{M} \times N \times G$ un élément de M, on a

$$\begin{aligned}&\chi_n^* f(g) = f(\chi(g, n)) = f(n) && \text{(fonction constante sur } G\text{)}, \\ &(\pi_{_M})_n^* f(g) = f(\pi_M(g, n)) = f(n) && \text{(fonction constante sur } G\text{)}, \\ &(\pi_{_M})_g^* f(m) = f(\pi_M(g, m)) = f(m) \;\; .\end{aligned}$$

Par ailleurs, le terme de fusion $\widehat{\psi}$ donne

$$\begin{aligned}&\widehat{\psi}[\chi^* f_1, \chi^* f_2 - \pi_{_M}^* f_2](g, n) \\ &\qquad = \frac{1}{2} \sum_a \underline{\varepsilon_a}_M^1 [\chi_g^* f_1](n) \underline{e_a}_G^2 [\chi_n^* f_2 - (\pi_{_M})_n^* f_2](g) \\ &\qquad\qquad - \underline{\varepsilon_a}_M^1 [\chi_g^* f_2 - (\pi_{_M})_g^* f_2](n) \underline{e_a}_G^2 [\chi_n^* f_1](g) \\ &\qquad = 0\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\left\{\chi^* f_1, \chi^* f_2 - \pi_{_M}^* f_2\right\}_{G \circledast M}(g, n) = \left\{\chi_g^* f_1, \chi_g^* f_2 - f_2\right\}_M (n).$$

Enfin, f_2 étant G-invariante sur N, $\chi_g^* f_2 - f_2$ est nulle sur N. En utilisant maintenant l'hypothèse 5.2, on obtient

$$\left\{\chi^* f_1, \chi^* f_2 - \pi_{_M}^* f_2\right\}_{G \circledast M}(g, n) = 0.$$

De même, on montre que

$$\left\{\chi^* f_1 - \pi_{_M}^* f_1, \pi_{_M}^* f_2\right\}_{G \circledast M}(g, n) = 0.$$

En sommant ces deux relations, on obtient la relation souhaitée 5.3.

Concernant la construction de la structure sur $\mathcal{F}(N)^G$, prenons deux fonctions sur N, g_1 et g_2, G-invariantes. Il existe f_1 et f_2 deux fonctions sur M, G-invariantes sur N, telles que $\iota^*(f_i) = g_i$. L'hypothèse 5.2 permet de poser $\{g_1, g_2\}_{N/G} := \iota^* \{f_1, f_2\}$. Regardons le Jacobiateur du crochet ainsi obtenu :

$$\begin{aligned}\Big\{\{g_1, g_2\}_{N/G}, g_3\Big\}_{N/G} + \circlearrowleft_{1,2,3} &= \iota \{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \circlearrowleft_{1,2,3} \\ &= 2\iota(\underline{\phi_{\mathfrak{g}}}[f_1, f_2, f_3]) \\ &= 0\end{aligned}$$

car les fonctions f_i sont G-invariantes sur N et le champ fondamental, à partir duquel est construit le 3-champ de vecteurs de $\underline{\phi}_{\mathfrak{g}}$, tue les fonctions G-invariantes. On obtient donc ainsi une véritable structure de Poisson sur le quotient N/G. $\square$

5.2 Une structure de Poisson pour $G^{n+2g} /\!\!/ G$

Dans cette section, nous allons appliquer le théorème de réduction que nous venons d'énoncer, au produit de groupe G^{n+2g}.

Soit n et g deux entiers positifs. Le but de ce paragraphe est d'exposer la construction d'une structure de Poisson sur le quotient

$$G^{n+2g} /\!\!/ G := \begin{array}{c}\{(M_1, \ldots, M_n, A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in G^{n+2g} \mid \\ M_1 \ldots M_n A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = \mathrm{Id}\}\end{array} \Big/ G,$$

en passant par une structure de G-variété de quasi-Poisson sur G^{n+2g}.

Le produit G^{n+2g} est constitué de n copie de G puis g copies de G^2. Notons $(e_a)_{a \in I}$ une base de $\mathfrak{g}$ et $(\varepsilon_a)_{a \in I}$ sa base duale. Chaque facteur G, muni de la bidérivation

$$P_G = \frac{1}{2} \sum_{a \in I} \overleftarrow{\varepsilon}_a \wedge \overrightarrow{e}_a$$

de l'exemple 4.4, est une G-variété de quasi-Poisson pour la conjugaison. D'autre part, chaque facteur G^2 est le produit de deux $(G \times G)$-variétés, pour l'action :

$$\begin{aligned}(G \times G) \times G &\longrightarrow G \\ ((g_1, g_2), x) &\longmapsto g_1 x g_2^{-1}.\end{aligned}$$

Le produit de fusion de ces deux $(G \times G)$-variétés fait de

$$(G^2, \frac{1}{2} \sum_{a \in I} \overleftarrow{\varepsilon_a}^1 \wedge \overrightarrow{e_a}^2 + \frac{1}{2} \sum_{a \in I} \overrightarrow{\varepsilon_a}^1 \wedge \overleftarrow{e_a}^2)$$

une $(G \times G)$-variété de quasi-Poisson avec l'action

$$\begin{aligned} (G \times G) \times G^2 &\longrightarrow G^2 \\ ((g_1, g_2), (a, b)) &\longmapsto (g_1 a g_2^{-1}, g_2 b g_1^{-1}). \end{aligned}$$

Une fusion de cette action fait enfin de G^2 une G-variété de quasi-Poisson. L'action diagonale est

$$\begin{aligned} G \times G^2 &\longrightarrow G^2 \\ (g, (a, b)) &\longmapsto (gag^{-1}, gbg^{-1}) \end{aligned}$$

et la bidérivation est

$$P_{G^2} := \frac{1}{2} \sum_{a \in I} \overleftarrow{\varepsilon_a}^1 \wedge \overrightarrow{e_a}^2 + \frac{1}{2} \sum_{a \in I} \overrightarrow{\varepsilon_a}^1 \wedge \overleftarrow{e_a}^2 - \frac{1}{2} \sum_{a \in I} (\overleftarrow{\varepsilon_a}^1 - \overrightarrow{\varepsilon_a}^2) \wedge (\overleftarrow{e_a}^2 - \overrightarrow{e_a}^1).$$

Proposition 5.4. *G^{n+2g} munit de la bidérivation*

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\}_{n,g} = \frac{1}{2} \sum_{a \in I} \Bigg(& \sum_{r=1}^{n} \overleftarrow{\varepsilon_a}^r \wedge \overrightarrow{e_a}^r + \sum_{r=1}^{2g} (-1)^r \, \overleftarrow{\varepsilon_a}^{n+r} \wedge \overrightarrow{e_a}^{n+r} \\ & + \sum_{\substack{1 \le r < s \le n+2g \\ (r,s) \neq (r,r+1) \in [\![n+1, n+2g]\!]^2}} -(\overleftarrow{\varepsilon_a}^r - \overrightarrow{\varepsilon_a}^r) \wedge (\overleftarrow{e_a}^s - \overrightarrow{e_a}^s) \\ & + \sum_{r=1}^{g} \overleftarrow{\varepsilon_a}^{n+2r-1} \wedge \overrightarrow{e_a}^{n+2r} + \overrightarrow{\varepsilon_a}^{n+2r-1} \wedge \overleftarrow{e_a}^{n+2r} \\ & \quad - \overleftarrow{\varepsilon_a}^{n+2r-1} \wedge \overleftarrow{e_a}^{n+2r} + \overrightarrow{\varepsilon_a}^{n+2r-1} \wedge \overrightarrow{e_a}^{n+2r} \Bigg) \end{aligned}$$

est une G-variété de quasi-Poisson pour la conjugaison simultanée. Notons X_i chacune des matrices $M_i, A_i, B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$, en les ordonnant selon l'ordre dans lequel elles apparaissent dans le mot

$$X_1 \dots X_{n+2g} = M_1 \dots M_n A_1 B_1 \dots A_g B_g.$$

Définissons les exposants ^{1} et ^{2} par $X^1 := X \otimes \mathrm{Id}$ et $X^2 := \mathrm{Id} \otimes X$ et $\mathsf{t}_0 = \sum_{a \in I} \varepsilon_a \otimes e_a$. Exprimée dans le formalisme tensoriel, la structure de quasi-Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{n,g}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \left\{X_i \overset{\otimes}{,} X_i\right\}_{n,g} &= -X_i^1 \mathsf{t}_0 X_i^2 + X_i^2 \mathsf{t}_0 X_i^1 \qquad \text{si } i \in [\![1, n+2g]\!], \\ \left\{X_i \overset{\otimes}{,} X_j\right\}_{n,g} &= -\mathsf{t}_0 X_i^1 X_j^2 - X_j^2 X_i^1 \mathsf{t}_0 + X_i^1 \mathsf{t}_0 X_j^2 + X_j^2 \mathsf{t}_0 X_i^1 \\ & \qquad \text{si } 1 \le i < j \le n+2g. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Démonstration. La bidérivation est obtenue par fusion des n G-variétés de quasi-Poisson (G, P_G) et des g G-variétés de quasi-Poisson (G^2, P_{G^2}). L'expression tensoriel de cette bidérivation s'obtient directement selon la méthode décrite dans le paragraphe 2.5. Traitons par exemple le crochet des entrées $x_{ij}^{[r]}$ et $x_{kl}^{[s]}$ de deux matrices M_r et M_s avec $1 \leq r < s \leq n$ en un point $X = (M_1, \ldots, B_g)$ de G^{n+2g} :

$$\begin{aligned}\left\{x_{ij}^{[r]}, x_{kl}^{[s]}\right\}_{n+2g}(X) &= \sum_{a\in I} -(\overleftarrow{\varepsilon_a}^r - \overrightarrow{\varepsilon_a}^r) \wedge (\overleftarrow{e_a}^s - \overrightarrow{e_a}^s)[x_{ij}^{[r]}, x_{kl}^{[s]}](X)\\ &= \sum_{a\in I} -(\overleftarrow{\varepsilon_a}^r - \overrightarrow{\varepsilon_a}^r)[x_{ij}^{[r]}](X)(\overleftarrow{e_a}^s - \overrightarrow{e_a}^s)[x_{kl}^{[s]}](X)\\ &= -\sum_{a\in I} [\varepsilon_a, M_r]_{i,j}\, [e_a, M_s]_{k,l}\\ &= -\sum_{a\in I}([\varepsilon_a, M_r] \otimes [e_a, M_s])_{i,j,k,l}\\ &= -\mathsf{t}_0 M_r^1 M_s^2 - M_s^2 M_r^1 \mathsf{t}_0 + M_r^1 \mathsf{t}_0 M_s^2 + M_s^2 \mathsf{t}_0 M_r^1\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}&\left\{M_i \overset{\otimes}{,} M_i\right\}_{n,g} = -M_i^1 \mathsf{t}_0 M_i^2 + M_i^2 \mathsf{t}_0 M_i^1 && \text{si } i \in [\![1, n]\!]\,,\\ &\left\{A_i \overset{\otimes}{,} A_i\right\}_{n,g} = -A_i^1 \mathsf{t}_0 A_i^2 + A_i^2 \mathsf{t}_0 A_i^1 && \text{si } i \in [\![1, g]\!]\,,\\ &\left\{B_i \overset{\otimes}{,} B_i\right\}_{n,g} = B_i^1 \mathsf{t}_0 B_i^2 - B_i^2 \mathsf{t}_0 B_i^1 && \text{si } i \in [\![1, g]\!]\,,\\ &\left\{X_i \overset{\otimes}{,} X_j\right\}_{n,g} = -\mathsf{t}_0 X_i^1 X_j^2 - X_j^2 X_i^1 \mathsf{t}_0 + X_i^1 \mathsf{t}_0 X_j^2 + X_j^2 \mathsf{t}_0 X_i^1 &&\\ &\qquad\qquad \text{si } 1 \leq i < j \leq n+2g \text{ et } (i,j) \neq (i, i+1) \in [\![n+1, n+2g]\!]\,, &&\\ &\left\{A_i \overset{\otimes}{,} B_i\right\}_{n,g} = -\mathsf{t}_0 A_i^1 B_i^2 + B_i^2 A_i^1 \mathsf{t}_0 + A_i^1 \mathsf{t}_0 B_i^2 + B_i^2 \mathsf{t}_0 A_i^1 && \text{si } i \in [\![1, g]\!]\,.\end{aligned}$$

La formule de Leibniz permet ensuite de calculer les crochets, pour $i < j$, $\left\{B_i A_i^{-1} B_i^{-1} \overset{\otimes}{,} B_i A_i^{-1} B_i^{-1}\right\}_{n,g}$ et $\left\{X_i \overset{\otimes}{,} B_j A_j^{-1} B_j^{-1}\right\}_{n,g}$. On obtient ainsi le résultat annoncé. □

Nous pouvons à présent utiliser le théorème 5.3 pour montrer que cette bidérivation de quasi-Poisson induit une structure de Poisson sur le quotient $G^{n+2g} /\!\!/ G$. Soit $\mathscr{N}$ le sous-ensemble de G^{n+2g} :

$$\mathscr{N} := \begin{array}{c}\{(M_1, \ldots, M_n, A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g) \in G^{n+2g} \mid \\ M_1 \ldots M_n A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = \mathrm{Id}\}\end{array}.$$

Nous devons vérifier que les champs de vecteurs Hamiltoniens associés aux fonctions sur G^{n+2g}, G-invariantes sur $\mathscr{N}$, sont tangents à $\mathscr{N}$. Comme G est un groupe réductif, l'algèbre $\mathcal{F}(G^{n+2g}, \mathscr{N})^G$, des fonctions polynomiales sur G^{n+2g} et G-invariantes sur $\mathscr{N}$, est engendré par l'algèbre

$\mathcal{F}(G^{n+2g})^G$ des fonctions G-invariantes sur G^{n+2g} et par l'idéal $\mathcal{I}(\mathscr{N})$ des fonctions sur $\mathbf{G}^{n+2g}$, nulles sur $\mathscr{N}$ (voir par exemple le chapitre "Reductive groups" dans [40]). De plus, d'après les travaux de Procesi ([34, theorem 1.3]),

$$\mathcal{F}(G^n)^G = \langle\, \mathrm{tr}(M_{\alpha_1} \dots M_{\alpha_p}) \,|\, p \in \mathbb{N}, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in [\![1, n]\!]^p \,\rangle$$

et la définition de $\mathscr{N}$,

$$\mathcal{I}(\mathscr{N}) = \langle\, (M_1 \dots M_n - \mathrm{Id})_{kl} \,|\, k, l \in [\![1, N]\!] \,\rangle.$$

Ainsi, dans le théorème 5.3, l'hypothèse $\left\{\mathcal{F}(G^n, \mathscr{N})^G, \mathcal{I}(\mathscr{N})\right\}_{|\mathscr{N}} = 0$ est satisfaite si et seulement si pour tous $p \in \mathbb{N}, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in [\![1, n]\!]^p$,

$$\left.\begin{aligned} &\left\{M_1 \dots M_n \overset{\otimes}{,} M_1 \dots M_n\right\}_n = 0 \\ &\left\{\mathrm{tr}(M_{\alpha_1} \dots M_{\alpha_p}), M_1 \dots M_n\right\}_n = 0 \end{aligned}\right. \quad \text{sur } \mathscr{N}$$

La linéarité de la trace dans le formalisme tensoriel donne

$$\left\{\mathrm{tr}(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_p}), X_1 \dots X_n\right\}_{n,g} = \mathrm{tr}_1 \left\{X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_p} \overset{\otimes}{,} X_1 \dots X_n\right\}_{n,g},$$

et par la règle de Leibniz, on a, en utilisant les notations $U_i := M_{\alpha_1} \dots M_{\alpha_i}$, $V_i := M_{\alpha_i} \dots M_{\alpha_p}$, $S_j := M_1 \dots M_j$ and $T_j := M_j \dots M_n$,

$$\begin{aligned} &\left\{M_{\alpha_1} \dots M_{\alpha_p} \overset{\otimes}{,} M_1 \dots M_n\right\}_n \\ &\qquad = \sum_{\substack{i \in [\![1,p]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}} (U_{i-1} \otimes S_{j-1}) \left\{M_{\alpha_i} \overset{\otimes}{,} M_j\right\}_n (V_{i+1} \otimes T_{j+1}). \end{aligned}$$

Combiné avec les formules (5.4), on obtient

$$\begin{aligned} &\left\{M_{\alpha_1} \dots M_{\alpha_p} \overset{\otimes}{,} M_1 \dots M_n\right\}_n \\ &\quad = \sum_{i=1}^{p} \Bigg(\sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} \big((U_{i-1} \otimes S_{j-1})\, \mathsf{t}_0\, (V_i \otimes T_j) + (U_i \otimes S_j)\, \mathsf{t}_0\, (V_{i+1} \otimes T_{j+1}) \\ &\qquad\qquad - (U_{i-1} \otimes S_j)\, \mathsf{t}_0\, (V_i \otimes T_{j+1}) - (U_i \otimes S_{j-1})\, \mathsf{t}_0\, (V_{i+1} \otimes T_j)\big) \\ &\qquad + \big((U_{i-1} \otimes S_{\alpha_i})\, \mathsf{t}_0\, (V_i \otimes T_{\alpha_i+1}) - (U_i \otimes S_{\alpha_i-1})\, \mathsf{t}_0\, (V_{i+1} \otimes T_{\alpha_i})\big) \\ &\qquad + \sum_{j=\alpha_i+1}^{n} \big((-U_{i-1} \otimes S_{j-1})\, \mathsf{t}_0\, (V_i \otimes T_j) - (U_i \otimes S_j)\, \mathsf{t}_0\, (V_{i+1} \otimes T_{j+1}) \\ &\qquad\qquad + (U_{i-1} \otimes S_j)\, \mathsf{t}_0\, (V_i \otimes T_{j+1}) + (U_i \otimes S_{j-1})\, \mathsf{t}_0\, (V_{i+1} \otimes T_j)\big)\Bigg). \end{aligned}$$

En réindexant les sommes en j, un grand nombre de termes se compensent et disparaissent. D'autre part, part définition de S_k et T_k, on a sur $\mathscr{N}$, $S_0 = T_1 = S_n = T_{n+1} = \mathrm{Id}$. Ainsi, sur $\mathscr{N}$,

$$\begin{aligned}
&\big\{M_{\alpha_1}\dots M_{\alpha_p} \overset{\otimes}{,} M_1\dots M_n\big\}_n \\
&\quad = 2\sum_{i=1}^{p}\big((U_{i-1}\otimes\mathrm{Id})\,\mathsf{t}_0\,(V_i\otimes\mathrm{Id}) - (U_i\otimes\mathrm{Id})\,\mathsf{t}_0\,(V_{i+1}\otimes\mathrm{Id})\big) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{p}\big((U_i\otimes S_{\alpha_i})\,\mathsf{t}_0\,(V_{i+1}\otimes T_{\alpha_i+1}) - (U_{i-1}\otimes S_{\alpha_i+1})\,\mathsf{t}_0\,(V_i\otimes T_{\alpha_i})\big) \\
&\quad = 2\,\big(\mathsf{t}_0\,(V_1\otimes\mathrm{Id}) - (U_p\otimes\mathrm{Id})\,\mathsf{t}_0\big) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{p}\big((U_{i-1}\otimes S_{\alpha_i-1})\,(M_{\alpha_i}\otimes M_{\alpha_i}\,\mathsf{t}_0 - \mathsf{t}_0\,M_{\alpha_i}\otimes M_{\alpha_i})\,(V_{i+1}\otimes T_{\alpha_i+1})\big) \\
&\quad = 2\,\big[\,\mathsf{t}_0\,, M_{\alpha_1}\dots M_{\alpha_p}\otimes\mathrm{Id}\,\big]\,.
\end{aligned}$$

En prenant ensuite la trace tr_1 ou bien $M_{\alpha_1}\dots M_{\alpha_p} = M_1\dots M_n$ sur $\mathscr{N}$, on obtient le résultat attendu : Les champs de vector Hamiltoniens associés aux fonctions G-invariantes sur $\mathscr{N}$ sont tangent à la sous-G-variété $\mathscr{N}$, de telle sorte que nous pouvons utiliser le théorème 5.3 : le quotient $G^n /\!\!/ G := \mathscr{N}/G$ hérite d'une structure de Poisson ordinaire.

5.3 Réduction sur l'algèbre de lacets

Nous allons illustrer le théorème 5.3 par la réduction de notre second exemple de variété de quasi-Poisson : l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soit n un entier positif et $\mathscr{A}$ la sous-variété de $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ définie par

$$\mathscr{A} := \left\{ X = \mathrm{Id}\,\lambda^n + \sum_{i=1}^{n-1} x^{[i]}\lambda^i + \mathrm{Id} \mid x^{[i]} \in \mathfrak{g} \right\} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_n. \tag{5.5}$$

Dans les chapitres précédents, nous n'avons pas précisé le choix du corps de base sur lequel nous travaillons. A partir de maintenant, nous travaillons sur des variétés complexes. La bidérivation $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$, construite sur les fonctions polynomiales de $\tilde{\mathfrak{g}}_n$, s'étend, par la même formule aux fonctions holomorphes sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$. Le groupe de Lie $G = \mathbf{GL}(N,\mathbb{C})$ étant un groupe réductif, l'algèbre $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}_n,\mathscr{A})^G$, des fonctions polynomiales sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$, qui sont G-invariantes sur $\mathscr{A}$, est engendrée par la sous-algèbre $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}_n)^G$ et l'idéal $\mathcal{I}(\mathscr{A})$ des fonctions sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$, nulles sur $\mathscr{A}$. D'après le travail de Procesi [34], nous pouvons à nouveau écrire :

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}_n)^G = \langle\, \mathrm{tr}(x^{[\alpha_1]}\dots x^{[\alpha_p]}) \mid p\in\mathbb{N}, (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in [\![0,n]\!]^p\,\rangle$$

et par ailleurs

$$\mathcal{I}(\mathscr{A}) = \langle\, x^{[0]}_{ij} - \delta_{ij}, x^{[n]}_{ij} - \delta_{ij} \,|\, i,j \in [\![1,N]\!] \,\rangle.$$

Nous devons donc simplement calculer les restrictions à $\mathscr{A}$ des crochets

$$\begin{aligned}
&\big\{\mathrm{tr}\,(\, x^{[\alpha_1]} \ldots x^{[\alpha_p]}\,)\,, x^{[0]}\big\}^Q_1\,, && \big\{x^{[0]} \overset{\otimes}{,} x^{[0]}\big\}^Q_1\,, && \big\{x^{[n]} \overset{\otimes}{,} x^{[0]}\big\}^Q_1\,,\\
&\big\{\mathrm{tr}\,(\, x^{[\alpha_1]} \ldots x^{[\alpha_p]}\,)\,, x^{[n]}\big\}^Q_1\,, && \big\{x^{[0]} \overset{\otimes}{,} x^{[n]}\big\}^Q_1\,, && \big\{x^{[n]} \overset{\otimes}{,} x^{[n]}\big\}^Q_1\,,
\end{aligned}$$

où p parcours $\mathbb{N}$, et $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in [\![0,n]\!]^p$. Pour cela, nous allons une fois encore, utiliser le formalisme tensoriel décrit à la fin du chapitre 3. Rapellons la forme du crochet de quasi-Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}^Q_1$:

$$\begin{aligned}
\big\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(\mu)\big\}^Q_1 = {}& \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}[X(\lambda)\otimes X(\mu),\mathsf{t}_0]\\
&+ (\mathrm{Id}\otimes X(\mu))\,\mathsf{t}_0\,(X(\lambda)\otimes \mathrm{Id}) - (X(\lambda)\otimes\mathrm{Id})\,\mathsf{t}_0\,(\mathrm{Id}\otimes X(\mu))\,.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

En prenant $\mu = 0$, on obtient sur $\mathscr{A}$,

$$\begin{aligned}
&\big\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} x^{[0]}\big\}^Q_1 = \big\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} X(0)\big\}^Q_1\\
&= [X(\lambda)\otimes x^{[0]},\mathsf{t}_0] + (\mathrm{Id}\otimes x^{[0]})\,\mathsf{t}_0\,(X(\lambda)\otimes\mathrm{Id}) - (X(\lambda)\otimes\mathrm{Id})\,\mathsf{t}_0\,(\mathrm{Id}\otimes x^{[0]})\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout entier $\alpha \in [\![0,n]\!]^p$, on a $\big\{x^{[\alpha]} \overset{\otimes}{,} x^{[0]}\big\}^Q_1 = 0$ sur $\mathscr{A}$. De la même manière, nous calculons le crochet $\big\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} x^{[n]}\big\}^Q_1$ en prenant la limite lorsque μ tend vers l'infini, pour X un élément de $\mathscr{A}$:

$$\begin{aligned}
&\big\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} x^{[n]}\big\}^Q_1 = \frac{1}{\mu^n}\left\{X(\lambda) \overset{\otimes}{,} \lim_{\mu\to\infty} X(\mu)\right\}^Q_1\\
&= -[X(\lambda)\otimes x^{[n]},\mathsf{t}_0] + (\mathrm{Id}\otimes x^{[n]})\,\mathsf{t}_0\,(X(\lambda)\otimes\mathrm{Id}) - (X(\lambda)\otimes\mathrm{Id})\mathsf{t}_0(\mathrm{Id}\otimes x^{[n]})\\
&= 2\,[\mathsf{t}_0, X(\lambda)\otimes\mathrm{Id}]\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\big\{x^{[0]} \overset{\otimes}{,} x^{[n]}\big\}^Q_1 = \big\{x^{[n]} \overset{\otimes}{,} x^{[n]}\big\}^Q_1 = 0$ sur $\mathscr{A}$ et

$$\begin{aligned}
&\big\{\mathrm{tr}\,(\, x^{[\alpha_1]} \ldots x^{[\alpha_p]}\,), x^{[n]}\big\}^Q_1\Big|_{\mathscr{A}}\\
&= 2\sum_{i=1}^{p} \mathrm{tr}_1((x^{[\alpha_1]}\ldots x^{[\alpha_{i-1}]}\otimes\mathrm{Id})\,\Big[\mathsf{t}_0, x^{[\alpha_i]}\otimes\mathrm{Id}\Big]\,(x^{[\alpha_{i+1}]}\ldots x^{[\alpha_p]}\otimes\mathrm{Id}))\Big|_{\mathscr{A}}\\
&= 2\sum_{i=1}^{p}(x^{[\alpha_i]}\ldots x^{[\alpha_p]}x^{[\alpha_1]}\ldots x^{[\alpha_{i-1}]} - x^{[\alpha_{i+1}]}\ldots x^{[\alpha_p]}x^{[\alpha_1]}\ldots x^{[\alpha_i]})\Big|_{\mathscr{A}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où $\left\{\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}_n,\mathscr{A})^G,\mathcal{I}(\mathscr{A})\right\}_1^Q\Big|_{\mathscr{A}} = 0$. On a donc prouvé, via le théorème 5.3,

Proposition 5.5. *Le quotient $\mathscr{A}/G$ hérite une structure de Poisson de la bidériavation de quasi-Poisson quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ définie sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$. Pour cette structure, les fonctions* $\operatorname{tr} X^k(a)$*, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, sont en involution.*

Nous allons voir dans le chapitre suivant, comment cette construction va nous permettre d'obtenir un système intégrable sur l'espace de module $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$.

6

Système intégrable sur l'algèbre de lacets et sur l'espace de modules

Ce dernier chapitre est consacré à la construction de notre système intégrable sur l'espace de modules $\mathscr{M}$. Dans un premier temps, nous précisons les définitions de système intégrable et algébriquement complètement intégrable que nous utilisons par la suite. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous rappelons le résultat de Beauville sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ et présentons notre démarche. La démonstration de notre résultat est ensuite segmentée en deux parties. Nous montrons tout d'abord que la famille de fonctions considérée est involutive. Puis nous déterminons le nombre de fonctions indépendantes qu'elle engendre, afin de s'assurer qu'on a ainsi construit un système intégrable.

6.1 Qu'est-ce qu'un système intégrable ?

Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson complexe. Rappelons que, par définition, deux fonctions f et g sur M sont en *involution* si $\{f, g\} = 0$. Une famille $\mathbf{F}$ de fontions sur M est dite *involutive* si pour toute paire (f, g) d'éléments de $\mathbf{F}$, f et g sont en involution. Lorsque deux fonctions sont en involution, les champs Hamiltoniens associés commutent. Soit $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_s)$ une famille de fonctions sur M. Nous dirons que H est *indépendante* si l'ensemble

$$\mathcal{U}_{\mathbf{F}} := \{x \in M | \mathsf{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}f_s\}$$

est un ouvert dense de M. Nous notons par ailleurs $M_{(r)}$ le sous ensemble de M des éléments $x \in M$ tels que $\operatorname{rg}_x \{\cdot\,,\cdot\} = 2r$ et, pour $x \in M$, $\mathbf{F}_x$ la fibre de $\mathbf{F}$ dans M passant par x :

$$\mathbf{F}_x := \{y \in M | \mathbf{F}(y) = \mathbf{F}(x)\}\,.$$

Proposition 6.1. *Soit (M,P) une variété de Poisson complexe de dimension m et de rang $2r$. Soit $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_s)$ une famille de fonctions indépendantes sur M. On a alors les inégalités et égalités suivantes :*

1. *Si les fonctions $f_1, \ldots, f_s$ sont des fonctions de Casimir alors $s \leq m - 2r$;*
2. *Si $\mathbf{F}$ est involutive, alors $s \leq m - r$ et $\dim \langle \mathcal{X}_{f_1}, \ldots, \mathcal{X}_{f_s} \rangle \leq r$;*
3. *Si $\mathbf{F}$ est involutive et $s = m - r$, alors pour tout point x dans $M_{(r)} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{F}}$, $\dim \langle \mathcal{X}_{f_1}(x), \ldots, \mathcal{X}_{f_s}(x) \rangle = r$*

Démonstration. Soit x un point de l'ouvert dense $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$. Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} P_x^{\#} : T_x^* M &\to T_x M \\ \mathsf{d}f(x) &\mapsto \mathcal{X}_f(x) \, , \end{aligned}$$

et appliquons-lui le théorème du rang :

$$\dim \ker P_x^{\#} + \operatorname{rg} P_x = \dim T_x^* M \, .$$

Si $\mathbf{F}$ est une famille de s fonctions de Casimir *(1)*, $s \leq \dim \ker P_x^{\#}$. D'autre part, par définition de $M_{(r)}$, on a $\operatorname{rg} P_x = 2r$. Enfin, $\dim T_x^* M$ est la dimension de la variété M. D'où $s \leq m - 2r$.

Supposons maintenant que $\mathbf{F}$ soit une famille involutive *(2)* et réécrivons le théorème du rang de l'application $P_x^{\#}$ restreinte à $\mathbf{F}$:

$$\dim \langle \mathsf{d}f_1(x), \ldots, \mathsf{d}f_s(x) \rangle \leq \dim P_x^{\#}(\mathbf{F}) + \dim \ker P_x^{\#} \, . \tag{6.1}$$

Comme les fonctions sont en involution, les champs Hamiltoniens $\mathcal{X}_{f_i}$ sont tous tangents à la fibre $\mathbf{F}_x$, d'où $\dim P_x^{\#}(\mathbf{F}) \leq \dim T_x \mathbf{F}_x = m - s$. On en déduit, en utilisant le calcul précédent

$$s \leq (m - s) + (m - 2r)$$

puis $s \leq m - r$. Notons d_x la dimension de l'espace vectoreil engendré par les champs Hamiltoniens de $\mathbf{F}$: $d_x = \dim \langle \mathcal{X}_{f_1}, \ldots, \mathcal{X}_{f_s} \rangle$. On peut donc trouver dans $\mathbf{F}$ une sous-famille involutive contenant d_x fonctions indépendantes sur M qui ne sont pas des fonctions de Casimir. En y ajoutant le nombre t de fonctions de Casimir indépendantes sur M, on obtient une famille involutive de $d_x + t$ fonctions indépendantes sur M. D'après ce qui précède, nécessairement $d_x + t \leq m - r = r + t$. D'où $d_x \leq r$.

Enfin, supposons que $\mathbf{F}$ soit involutive et constituée de $s = m - r$ fonctions *(3)*. Alors, en reprenant l'inégalité 6.1, on obtient : $m - r \leq d_x + m - 2r$. D'où $r \leq d_x$. □

Définition 6.2. Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson complexe de dimension m et de rang $2r$. Soit $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_s)$ une famille involutive et indépendante de fonctions sur M, telle que $s = m - r$. On dit alors que $(M, \{\cdot\,,\cdot\}, \mathbf{F})$ est un *système intégrable (au sens de Liouville).*

Concernant la notion de système intégrable, nous nous contentons ici de ces quelques définitions. Complétées de la proposition suivante, elles sont suffisantes pour faire notre construction. Pour une introduction plus approfondie, nous conseillons l'ouvrage de Adler, van Moerbeke et Vanhaecke [6].

Proposition 6.3. *Soit M une variété complexe et P_1 et P_2 deux structures de Poisson sur M. Soit $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_s)$ une famille de fonctions involutive pour les deux structures P_1 et P_2 et telle que les espaces engendrés par les champs Hamiltoniens soient les mêmes :*

$$\langle \mathcal{X}^1_{f_1}, \dots, \mathcal{X}^1_{f_s} \rangle = \langle \mathcal{X}^2_{f_1}, \dots, \mathcal{X}^2_{f_s} \rangle .$$

Alors, si $(M, P_1, \mathbf{F})$ est un système complètement intégrable, il en est de même de $(M, P_2, \mathbf{F})$.

Démonstration. Notons $m = \dim M$, $2r_1 = \operatorname{rg} P_1$ et $2r_2 = \operatorname{rg} P_2$. Si $(M, P_1, \mathbf{F})$ est un système complètement intégrable, on a, par définition, $s = n - r_1$ et $\mathbf{F}$ est une famille de fonctions indépendantes. Le point *2.* de la proposition 6.1 appliqué à $(M, P_2, \mathbf{F})$ donne alors $s \leq n - r_2$, d'où $n - r_1 \leq n - r_2$ et $r_1 \geq r_2$. Le point *3.* dit que $\dim \left\langle \mathcal{X}^1_{f_1}(x), \dots, \mathcal{X}^1_{f_s}(x) \right\rangle = r_1$ pour tout x dans une partie dense de M. On en déduit donc que $\dim \left\langle \mathcal{X}^2_{f_1}(x), \dots, \mathcal{X}^2_{f_s}(x) \right\rangle = r_1$ pour tout x dans une partie dense de M et donc $r_1 \leq r_2$. Ainsi $r_1 = r_2$ et $\mathbf{F}$ est une famille de $n - r_2$ fonctions indépendantes et en involution pour la structure de Poisson P_2. $(M, P_2, \mathbf{F})$ est donc un système complètement intégrable. $\square$

Définissons enfin la notion de système algébriquement complètement intégrable comme elle est utilisée dans les travaux de Beauville. Par définition, une variété Abélienne est un tore complexe $\mathbb{C}^r/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^r$. Une fois encore nous invitons le lecteur à consulter [6] pour de nombreux exemples.

Définition 6.4. Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable. Notons $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_s)$. On dit que $(M, \{\cdot\,,\cdot\}, \mathbf{F})$ est un *système algébriquement complètement intégrable* (ou encore un *système a.c.i.*) si pour toute valeur générique $c \in \mathbb{C}^s$, la fibre $\mathbf{F}_s = \{\dots\}$ est la partie affine d'une variété Abélienne et si les champs Hamiltoniens $\mathcal{X}_{f_i}$ engendre, sur chacune de ces fibres, l'espace des champs invariants par translation.

6.2 Le système de Beauville : un système intégrable sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n/G$

Un lecteur avisé aura reconnu, dans les champs de vecteurs associées aux fonctions $\operatorname{tr} X^k(a)$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ dans le chapitre 3, les systèmes différentiels étudiés dans les travaux de René Garnier en 1918 (voir [18]) :

$$\dot{X}(\lambda) = \frac{\left[X(\lambda), X^k(a)\right]}{\lambda - a}.$$

En 1990, Arnaud Beauville a étudié le système défini par cette famille de champs de vecteurs sur $\tilde{\mathfrak{g}}_d/G$. Considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}_d$ de $\mathbb{C}[\lambda, y]$

$$\mathcal{V}_d := \left\{P(\lambda, y) = y^N + s_1(\lambda)y^{N-1} + \cdots + s_N(\lambda) \,|\, \forall i,\, \deg s_i \le id\right\}.$$

$\mathcal{V}_d$ contient entre autre le polynôme caractéristique de toute matrice polynomiale $X(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_d$. A un élément P de $\mathcal{V}_d$, on associe sa courbe spectrale

$$C_P = \{(\lambda, y) \mid P(\lambda, y) = 0\}.$$

Notons V_d le sous-ensemble de $\mathcal{V}_d$ des polynômes P dont la courbe spectrale C_P est lisse et M_d les sous-ensemble de $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ constitué des matrices polynomiales dont le polynôme caractéristique est dans V_d. Soit h_d l'application définie sur le sous-espace M_d de $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ par

$$\begin{aligned} h_d : \ M_d &\to V_d \\ X(\lambda) &\mapsto \det\big(y \operatorname{Id} - X(\lambda)\big). \end{aligned}$$

Cette application est invariante par conjugaison. Notons $H_d : M_d/G \to V_d$ l'application quotient. Beauville énonce alors le résultat suivant :

Théorème 6.5. *[13] Le système Hamiltonien $H_d : M_d/G \to V_d$ est algébriquement complètement intégrable par rapport aux structures de quasi-Poisson linéaires.*

En effet, il montre que la fibre de H_d au-dessus d'un point générique P de V_d est isomorphe à un sous-espace affine de la Jacobienne de la courbe spectrale C_P. Par des considérations de dimensions, il en déduit que H_d définie une famille de $\frac{1}{2}N(dN + d + 2)$ fonctions indépendantes sur Q_d. Comme ces fonctions sont en involution sur Q_d pour la structure de Poisson considérée, le système Hamiltonien est intégrable au sens de Liouville. De plus, le théorème affirme que les champs de vecteurs Hamiltoniens engendrent l'espace des champs de vecteurs linéaires sur la fibre générique, qui est un tore complexe.

L'idée de notre construction d'un système intégrable sur l'espace de modules $\mathscr{M}$ est de profiter du travail fait par Beauville sur l'algèbre de lacets. Pour cela, nous définissons l'application $\mathscr{T}$, appelée *application de transfert*, par

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{T}: & G^n & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}}_n \\ & M=(M_1,\cdots,M_n) & \longmapsto & \mathscr{T}(\lambda)=(\lambda M_1+\mathrm{Id})\dots(\lambda M_n+\mathrm{Id}). \end{array}$$

$\mathscr{T}$ est clairement équivariante. Rappelons les notations du chapitre précédent : G est le groupe linéaire $G=\mathbf{GL}(N,\mathbb{C})$ et $\mathscr{M}=G^n/\!\!/G$ désigne le quotient du sous-ensemble

$$\mathscr{N}:=\{(M_1,\dots,M_n)\in G^n \mid M_1\dots M_n=\mathrm{Id}\}$$

de G^n par l'action de conjugaison simultanée de G. D'autre part, $\mathscr{A}/G$ est le quotient du sous-ensemble

$$\mathscr{A}:=\left\{X=\mathrm{Id}\,\lambda^n+\sum_{i=1}^{n-1}x^{[i]}\lambda^i+\mathrm{Id}\mid x^{[i]}\in\mathfrak{g}\right\}$$

de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$, par l'action de conjugaison de G. Nous notons $\mathscr{T}_G:\mathscr{M}=G^n/\!\!/G\to\mathscr{A}/G$ l'application induite aux quotients. Les algèbres de fonctions $\mathcal{F}(\mathscr{M})$ et $\mathcal{F}(\mathscr{A}/G)$ sont celles des fonctions holomorphes sur G^n et $\tilde{\mathfrak{g}}_d$ et G-invariantes sur $\mathscr{N}$ et $\mathscr{A}$ respectivement. La notation $\{\cdot,\cdot\}_n$ (resp. $\{\cdot,\cdot\}_1^Q$) désignera indifféremment la structure de quasi-Poisson sur G^n (resp. $\tilde{\mathfrak{g}}_n$) et la structure de Poisson induite sur le quotient $G^n/\!\!/G$ (resp. $\mathscr{A}/G$). La famille de fonctions que nous allons considérer sur l'espace de modules $\mathscr{M}$ est le tiré-en-arrière $\mathscr{T}_G^*H_n$ de H_n par l'application de transfert. Dans un permier temps, nous allons voir pourquoi ces fonctions sont en involution sur $(\mathscr{M},\{\cdot,\cdot\}_n)$, puis nous nous assurerons qu'elles sont suffisamment nombreuses pour constituer, sur l'espace de modules, un système intégrable au sens de Liouville .

6.3 Une famille de fonctions en involution sur l'espace de modules

Le but de ce paragraphe est de montrer que la sous-algèbre $\mathscr{T}^*H_n$ de fonctions sur $\mathscr{M}$ est involutive pour la structure de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_n$. Ce résultat va découler immédiatement de la propriété suivante de l'application de transfert :

Proposition 6.6. *L'application de transfert $\mathscr{T}$ est un morphisme de G-variétés de quasi-Poisson entre $(G^n,\{\cdot,\cdot\}_n)$ et $(\tilde{\mathfrak{g}}_n,\{\cdot,\cdot\}_1^Q)$. Elle induit donc un morphisme de Poisson $\mathscr{T}_G:G^n/\!\!/G\to\mathscr{A}/G$.*

Nous proposons ici deux démonstrations de ce résultat. La première, inspirée par les calculs de Alekseev dans [10], confirme, par sa rapidité, la pertinence du formalisme tensoriel. La deuxième est adressée à des lecteurs non effrayés par quelques lignes de calcul et intéressés par le processus de fusion présenté dans le chapitre 4, théorème 4.7.

Démonstration. Rappelons la forme tensorielle du crochet de quasi-Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_n$ sur G^n :

$$\begin{aligned}
\left\{M_i \overset{\otimes}{,} M_i\right\}_n &= -\left(M_i \otimes \mathrm{Id}\right) \mathsf{t}_0 \left(\mathrm{Id} \otimes M_i\right) + \left(\mathrm{Id} \otimes M_i\right) \mathsf{t}_0 \left(M_i \otimes \mathrm{Id}\right), \\
\left\{M_i \overset{\otimes}{,} M_j\right\}_n &= \left(M_i \otimes \mathrm{Id}\right) \mathsf{t}_0 \left(\mathrm{Id} \otimes M_j\right) + \left(\mathrm{Id} \otimes M_j\right) \mathsf{t}_0 \left(M_i \otimes \mathrm{Id}\right) \\
&\quad - \mathsf{t}_0 \left(M_i \otimes M_j\right) - \left(M_i \otimes M_j\right) \mathsf{t}_0 \qquad \text{if } i < j\,, \\
\left\{M_i \overset{\otimes}{,} M_j\right\}_n &= -M_i \otimes \mathrm{Id}\, \mathsf{t}_0\, \mathrm{Id} \otimes M_j - \mathrm{Id} \otimes M_j \mathsf{t}_0 M_i \otimes \mathrm{Id} \\
&\quad + \mathsf{t}_0 M_i \otimes M_j + M_i \otimes M_j \mathsf{t}_0 \qquad \text{if } i > j\,.
\end{aligned}$$

Notons $M_i(\lambda)$ le facteur $\lambda M_i + \mathrm{Id}$ et exprimons le crochet tensoriel polynomial $\left\{M_i(\lambda) \overset{\otimes}{,} M_j(\mu)\right\}_n$:

$$\begin{aligned}
(\lambda-\mu)\left\{M_i(\lambda) \overset{\otimes}{,} M_i(\mu)\right\}_n &= (\lambda+\mu)\left[M_i(\lambda) \otimes M_i(\mu), \mathsf{t}_0\right] \\
&\quad + (\lambda-\mu)\big((\mathrm{Id} \otimes M_i(\mu))\, \mathsf{t}_0\, (M_i(\lambda) \otimes \mathrm{Id}) - (M_i(\lambda) \otimes \mathrm{Id})\, \mathsf{t}_0\, (\mathrm{Id} \otimes M_i(\mu))\big), \\
\left\{M_i(\lambda) \overset{\otimes}{,} M_j(\mu)\right\}_n &= (M_i(\lambda) \otimes \mathrm{Id})\, \mathsf{t}_0\, (\mathrm{Id} \otimes M_j(\mu)) - \mathsf{t}_0\, (M_i(\lambda) \otimes M_j(\mu)) \\
&\quad + (\mathrm{Id} \otimes M_j(\mu))\, \mathsf{t}_0\, (M_i(\lambda) \otimes \mathrm{Id}) - (M_i(\lambda) \otimes M_j(\mu))\, \mathsf{t}_0 \\
&\qquad \text{if } i < j, \\
\left\{M_i(\lambda) \overset{\otimes}{,} M_j(\mu)\right\}_n &= \mathsf{t}_0\, (M_i(\lambda) \otimes M_j(\mu)) - (M_i(\lambda) \otimes \mathrm{Id})\, \mathsf{t}_0\, (\mathrm{Id} \otimes M_j(\mu)) \\
&\quad + (M_i(\lambda) \otimes M_j(\mu))\, \mathsf{t}_0 - (\mathrm{Id} \otimes M_j(\mu))\, \mathsf{t}_0\, (M_i(\lambda) \otimes \mathrm{Id}) \\
&\qquad \text{if } i > j.
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant la règle de Leibniz, le produit $\mathscr{T}(\lambda)$ donne le crochet tensoriel

$$\begin{aligned}
\left\{\mathscr{T}(\lambda) \overset{\otimes}{,} \mathscr{T}(\mu)\right\}_n &= \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\left[\mathscr{T}(\lambda) \otimes \mathscr{T}(\mu), \mathsf{t}_0\right] \\
&\quad + (\mathrm{Id} \otimes \mathscr{T}(\mu))\, \mathsf{t}_0\, (\mathscr{T}(\lambda) \otimes \mathrm{Id}) - (\mathscr{T}(\lambda) \otimes \mathrm{Id})\, \mathsf{t}_0\, (\mathrm{Id} \otimes \mathscr{T}(\mu))\,.
\end{aligned}$$

On reconnait le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ donné par la formule (5.6). □

Démonstration. 2. Cette deuxième démonstration est un raisonnement par récurrence sur l'entier n. Commençons par le cas $n = 1$. Il s'agit de montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{T}_1 : (G, P_G) & \longrightarrow & (\tilde{\mathfrak{g}}, \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q = \{\cdot\,,\cdot\}_a - \hat{\psi}) \\ M & \longmapsto & \lambda M + \mathrm{Id} \end{array} \tag{6.2}$$

est un morphisme de G-variétés de quasi-Poisson. Rappelons que P_G est la bidérivation de quasi-Poisson canonique de G, donnée par

$$P_G = \frac{1}{2}\sum \overleftarrow{E_{ji}} \wedge \overrightarrow{E_{ij}},$$

tandis que

$$\{\cdot\,,\cdot\}_a = -\frac{1}{2}\sum_{p>0} \overleftarrow{E_{ji}\lambda^{-p}} \wedge \overleftarrow{E_{ij}\lambda^{p}} + \frac{1}{2}\sum_{p>0} \overrightarrow{E_{ji}\lambda^{-p}} \wedge \overrightarrow{E_{ij}\lambda^{p}}$$

et

$$\widehat{\psi} = -\frac{1}{2}\sum \overleftarrow{E_{ji}} \wedge \overrightarrow{E_{ij}}.$$

Soit M un élément de $\mathfrak{g}$.

$$\mathscr{T}_*(\frac{1}{2}\sum \overleftarrow{E_{ji}} \wedge \overrightarrow{E_{ij}})(\lambda M + \mathrm{Id}) = \frac{1}{2}\sum E_{ji}M\lambda \wedge ME_{ij}\lambda.$$

Afin d'alléger les notations, notons simplement λ^p pour la matrice $\mathrm{Id}\,\lambda^p$. On écrira par exemple $\lambda^{-p+1} \wedge \lambda^{p+1}$ pour le bivecteur $\mathrm{Id}\,\lambda^{-p+1} \wedge \mathrm{Id}\,\lambda^{p+1}$.

$$\begin{aligned} \pi_a(\lambda M + \mathrm{Id}) = & -\frac{1}{2}\left(\sum_{p>0} E_{ji}(\lambda M + \mathrm{Id})\lambda^{-p} \wedge E_{ij}(\lambda M + \mathrm{Id})\lambda^{p} \right. \\ & \left. \qquad - \sum_{p>0} (\lambda M + \mathrm{Id})E_{ji}\lambda^{-p} \wedge (\lambda M + \mathrm{Id})E_{ij}\lambda^{p}\right) \\ = & \ \frac{1}{2}\sum_{p>0} (M\otimes M)\mathsf{t}_0(\lambda^{-p+1}\wedge\lambda^{p+1}) - \mathsf{t}_0(M\otimes M)(\lambda^{-p+1}\wedge\lambda^{p+1}) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{p>0} \mathsf{t}_0(M\lambda^{-p+1} \wedge \lambda^{p}) + \mathsf{t}_0(\lambda^{-p+1} \wedge M\lambda^{p}) \\ & \qquad -(M\lambda^{-p+1} \wedge \lambda^{p})\mathsf{t}_0 - (\lambda^{-p+1} \wedge M\lambda^{p})\mathsf{t}_0 \\ & +\frac{1}{2}(\mathsf{t}_0(\mathrm{Id} \wedge M\lambda) - (\mathrm{Id} \wedge M\lambda)\mathsf{t}_0) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{p>0} (\mathsf{t}_0(\lambda^{-p} \wedge \lambda^{p}) - \mathsf{t}_0(\lambda^{-p} \wedge \lambda^{p})). \end{aligned}$$

En utilisant alors l'identité $\mathsf{t}_0(a\lambda^p \otimes b\lambda^q) = (b\lambda^p \otimes a\lambda^q)\mathsf{t}_0$, on obtient

$$\pi_a(\lambda M + \mathrm{Id}) = \frac{1}{2}(\mathsf{t}_0(\mathrm{Id} \wedge M\lambda) - (\mathrm{Id} \wedge M\lambda)\mathsf{t}_0).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\lambda M + \mathrm{Id}) &= -\frac{1}{2}\sum E_{ji}(\lambda M + \mathrm{Id}) \wedge (\lambda M + \mathrm{Id})E_{ij} \\
&= -\frac{1}{2}\sum E_{ji}M\lambda \wedge ME_{ij}\lambda - \frac{1}{2}\sum E_{ji}M\lambda \wedge E_{ij} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum E_{ji} \wedge ME_{ij}\lambda - \frac{1}{2}\sum E_{ji} \wedge E_{ij} \\
&= -\frac{1}{2}\sum E_{ji}M\lambda \wedge ME_{ij}\lambda - \frac{1}{2}(\mathsf{t}_0(M\lambda \wedge \mathrm{Id}) + (\mathrm{Id} \wedge M\lambda)\mathsf{t}_0).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(\pi_a - \widehat{\psi})(\lambda M + \mathrm{Id}) = \frac{1}{2}\sum E_{ji}M\lambda \wedge ME_{ij}\lambda = \mathscr{T}_* \{\cdot\,,\cdot\}_1 (\lambda M + \mathrm{Id})$$

Ainsi, l'application de transfert $\mathscr{T}$ est bien un morphisme de G-variétés de quasi-Poisson lorsque $n = 1$.

Supposons maintenant que $n \geq 1$ et que $\mathscr{T}_n$ est un morphisme de G-variétés de quasi-Poisson de $(G^n, \{\cdot\,,\cdot\}_n)$ dans $(\tilde{\mathfrak{g}}, \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q)$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G^{n+1} \arrow[r, "\mathscr{T}_{n+1}"] \arrow[d, "\wr"'] & \tilde{\mathfrak{g}} \\
G^n \circledast G \arrow[r, "(\mathscr{T}_n, \mathscr{T}_1)"] & \tilde{\mathfrak{g}} \circledast \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

où μ désigne la multiplication dans $\tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}}$. Le lemme 4.10 affirme alors que le couple $(\mathscr{T}_n, \mathscr{T}_1)$ est un morphisme de quasi-Poisson pour la bidérivation de fusion sur $G^{n+1} = G^n \circledast G$. On a vu d'autre part (remarque 4.16) que la multiplication est un morphisme de quasi-Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. La composée $\mathscr{T}_{n+1} = \mu \circ (\mathscr{T}_n, \mathscr{T}_1)$ est donc elle aussi un morphisme de quasi-Poisson sur G^{n+1}. Par principe de récurrence, le résultat est donc vrai pour tout entier strictement positif n. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

Proposition 6.7. *Les fonctions* $\mathrm{tr}\, \mathscr{T}^k(a)$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, *constituent une famille de fonctions* G*-invariantes en involution sur* $(G^n, \{\cdot\,,\cdot\}_n)$.

Démonstration. On a vu (proposition 3.19) que pour la structure de quasi-Poisson quadratique $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ de l'algèbre de lacets, les fonctions $\mathrm{tr}\, X^k(a)$,

$k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, sont en involution. $\mathscr{T}$ étant un morphisme de quasi-Poisson, on a, pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\operatorname{tr} \mathscr{T}^k(a), \operatorname{tr} \mathscr{T}^l(b)\right\}_n = \left\{\operatorname{tr} X^k(a), \operatorname{tr} X^l(b)\right\}_1^Q \circ \mathscr{T} = 0.$$

L'invariance des fonctions $\operatorname{tr} \mathscr{T}^k(a)$ découle immédiatement de la G-équivariance de l'application de transfert $\mathscr{T}$. □

La famille $\mathscr{T}_G^* H_n$ de fonctions sur $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$ est donc involutive pour la structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_n$ de $\mathscr{M}$. Pour avoir un système intégrable au sens de Liouville, il faudra s'assurer du nombre de fonctions indépendantes dans cette famille.

Remarque 6.8. Connaissant sur G^n la structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ construite par Alekseev dans [10] et présentée dans l'introduction, il est naturel de s'interroger sur son image éventuelle par l'application de transfert $\mathscr{T}$. Les calculs sont identiques au cas des bidérivations de quasi-Poisson. On montre ainsi que $\mathscr{T}_* \{\cdot, \cdot\}$ est la bidérivation sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$ donnée par

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\sim (x) = {} & \langle A_1(\nabla f(x)x) | \nabla g(x)x\rangle - \langle A_2(x\nabla f(x)) | x\nabla g(x)\rangle \\ & + \langle S(x\nabla f(x)) | \nabla g(x)x\rangle - \langle S^*(\nabla f(x)x) | x\nabla g(x)\rangle \,, \end{aligned}$$

où A_1, A_2 et S les endomorphimes (linéaires) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ définis par

$$\begin{aligned} S(x\lambda^p) &= \delta_{-1,p} R_+(x), \\ A_1(x\lambda^p) &= \varepsilon_{p+1} x\lambda^{p+1} - \delta_{-1,p} R_+(x)\,, \\ A_2(x\lambda^p) &= \varepsilon_{p+1} x\lambda^{p+1} + \delta_{-1,p} R_-(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_p = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } p \geq 0 \\ -1 \text{ si } p < 0 \end{array} \right.$ et

$$R_+(E_{ij}) = \left| \begin{array}{l} E_{ii} \text{ si } i = j \\ 2E_{ij} \text{ si } i > j\,, \\ 0 \text{ si } i < j \end{array} \right. \qquad -R_-(E_{ij}) = \left| \begin{array}{l} E_{ii} \text{ si } i = j \\ 2E_{ij} \text{ si } i < j\,, \\ 0 \text{ si } i > j, \end{array} \right.$$

de telle sorte que $R_1 = A_1 + S = A_2 + S^*$. Comme nous l'avons précisé précédemment, les bidérivations $\{\cdot, \cdot\}_n$ et $\{\cdot, \cdot\}$ induisent la même structure de Poisson au quotient $\mathscr{M} = G^n /\!\!/ G$. De même sur $\tilde{\mathfrak{g}}_n$, les bidérivations $\{\cdot, \cdot\}_1^Q$ et $\{\cdot, \cdot\}_\sim$ induisent sur le quotient $\mathscr{A}/G$, la même structure de Poisson. Remarquons cependant que dans les deux cas, la construction de la bidérivation de quasi-Poisson est plus naturelle que celle de la bidérivation de Poisson. En effet, $\{\cdot, \cdot\}$ fait intervenir un choix de r-matrices qui n'apparaît pas dans $\{\cdot, \cdot\}_n$. De manière équivalente, $\{\cdot, \cdot\}_\sim$ est lié à une double décomposition de l'application linéaire R_1.

6.4 Combien de fonctions sur l'espace de modules ?

Avant de calculer avec précision le nombre de fonctions indépendantes dans $\mathscr{T}_G^* H_n$, déterminons le nombre de fonctions nécessaires sur l'espace de modules pour avoir un système intégrable au sens de Liouville. Notons m la dimension de la partie lisse de $\mathscr{M}$. Soit $2r$ le rang de la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_n$ sur $\mathscr{M}$ et c le nombre de fonctions de Casimir indépendantes sur $\mathscr{M}$ pour $\{\cdot\,,\cdot\}_n$. Il faut alors

$$s = m - r = r + c = \frac{m+c}{2}$$

fonctions indépendantes en involution pour avoir un système intégrable.

Le groupe de Lie G étant le groupe linéaire $\mathbf{GL}(N,\mathbb{C})$, la dimension de l'espace de modules est relativement simple à calculer :

$$m = n \dim \mathbf{GL}(N,\mathbb{C}) - \dim \mathbf{GL}(N,\mathbb{C}) - \dim \mathbf{SL}(N,\mathbb{C}) = (n-2)N^2 + 1.$$

On a vu par ailleurs que les feuilles symplectiques de l'espace de modules $\mathscr{M}$ s'obtiennent en fixant la classe de conjugaison pour chaque copie de G dans le produit G^n. On a donc

$$c = nN - 1.$$

Il nous faut donc trouver exactement

$$\frac{m+c}{2} = \frac{N((n-2)N+n)}{2}$$

fonctions indépendantes dans la sous-algèbre $\mathscr{T}_G^* H_n$. Pour compter le nombre de fonctions présentes dans $\mathscr{T}_G^* H_n$, l'application de transfert $\mathscr{T}$ va une nouvelle fois être d'un grand secours. On a en effet la proposition suivante :

Proposition 6.9. *L'application de transfert $\mathscr{T}$ est un difféomorphisme local sur un ouvert dense de G^n.*

Démonstration. L'application de transfert $\mathscr{T}$ étant une application algébrique, il suffit de montrer que sa différentielle est un isomorphisme en un point quelconque fixé de G^n. Pour simplifier les calculs et les notations, prenons $M = (M_1, \ldots, M_n)$ un n-uplet de matrices diagonales : $M_i = \operatorname{diag}(\lambda_{i,k}, 1 \le k \le N)$ pour $1 \le i \le n$. Nous supposerons que les valeurs propres $\lambda_{i,k}$ sont deux à deux distinctes. Alors les polynômes $\lambda_{i,k}\lambda+1$ sont deux à deux premiers entre eux. Soit Y un élément de l'espace tangent à G^n en M. Alors la différentielle de $\mathscr{T}$ en M s'écrit :

$$\mathsf{d}\mathscr{T}(M)Y = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\prod_{j<i}}(\lambda M_j + \mathrm{Id})\, Y_i \overrightarrow{\prod_{j>i}}(\lambda M_j + \mathrm{Id}),$$

où la flèche sur les produits indique que les matrices sont rangées par ordre croissant d'indice. Passons aux coordonnées : si $(k,l) \in [\![1,N]\!]^2$, alors

$$(\mathsf{d}\mathscr{T}(M)Y)_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j<i} (\lambda\lambda_{j,k}+1) \prod_{j>i} (\lambda\lambda_{j,l}+1)\, Y_i^{kl}.$$

Les polynômes en λ, $\lambda\lambda_{i,k}+1$ étant deux à deux premiers entre eux, une égalité $(\mathsf{d}\mathscr{T}(M)Y)_{kl}=0$ entraîne une égalité polynomiale en λ, dont l'évaluation en $-\lambda_{i,k}^{-1}$ et $-\lambda_{i,l}^{-1}$ donne $Y_i^{kl}=0$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. Ainsi $\mathsf{d}\mathscr{T}(M)Y=0$ entraîne $Y=0$. La différentielle de $\mathscr{T}$ en M est donc un isomorphisme et $\mathscr{T}$ est un difféomorphime local sur un ouvert dense de G^n. □

Corollaire 6.10. *L'application de transfert $\mathscr{T}_G$ est un difféomorphime local sur un ouvert de $G^n /\!\!/ G$.*

L'application de transfert $\mathscr{T}_G$ étant un difféomorphisme local sur un ouvert, l'indépendance des fonctions est préservée par la composition par $\mathscr{T}_G$. Ainsi, les sous-algèbres $\mathscr{T}_G^* H_n$ de $\mathcal{F}(\mathscr{M})$ et H_n de $\mathcal{F}(\mathscr{A}/G)$ ont le même nombre de fonctions indépendantes.

Par ailleurs, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X(\lambda) \in \mathscr{A} \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{V}_n \ni P(\lambda,y) \arrow[d, "\beta"] \\
\frac{X(\lambda)-(\lambda^n+1)\,\mathrm{Id}}{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2} \arrow[r, "h_{n-2}"] & \frac{1}{\lambda^N}\mathbb{C}[\lambda,y] \ni \frac{1}{\lambda^N} P(\lambda, \lambda y+\lambda^n+1)
\end{tikzcd} ,$$

où l'application β, restreinte à l'image de $\mathscr{A}$ par h_n est à valeurs dans $\mathcal{V}_{n-2}$. L'application α est un difféomorphisme G-équivariant de $\mathscr{A}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}$, de telle sorte que le diagramme est encore valable aux quotients, avec les applications H_n et H_{n-2} à la place de h_n et h_{n-2}. D'après le résultat de Beauville (théorème 6.5) H_{n-2} définit un système algébriquement complètement intégrable (constitué de $\frac{1}{2}N((n-2)N+n)$ fonctions indépendantes en involution) sur $\tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}/G$, muni d'une structure de Poisson linéaires $\{\cdot,\cdot\}_l^L$, avec $l \in [\![0,n-1]\!]$. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 6.11. *Le système Hamiltonien $H_n : \mathscr{A}/G \to V_n$ est algébriquement complètement intégrable par rapport à la structure de Poisson induite par $\{\cdot,\cdot\}_1^Q$ sur $\mathscr{A}/G$.*

Démonstration. La dimension de $\mathscr{A}/G$ est $(n-2)N^2+1$. Pour la structure de Poisson induite par $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$, l'ensemble des fonctions de Casimir sur $\mathscr{A}/G$ contient $nN-1$ fonctions indépendantes (issue de l'application det, proposition 3.20). Un système intégrable sur $(\mathscr{A}/G, \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q)$ est donc constitué de $\frac{1}{2}((n-2)N^2+1+nN-1)$ fonctions indépendantes en involutions. L'application $\alpha : \mathscr{A}/G \to \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}$ étant un difféomorphisme, le nombre s de fonctions définies par H_n sur $\mathscr{A}/G$ est supérieur ou égal au nombre de fonctions indépendantes définies par $H_{n-2} = \beta \circ H_n \circ \alpha^{-1}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}$, à savoir $\frac{1}{2}N((n-2)N+n)$. On a donc $s \geq \frac{1}{2}N((n-2)N+n)$ fonctions indépendantes sur $\mathscr{A}/G$, en involution pour la bidérivation de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$. D'après ce qui précède, on en déduit $s = \frac{1}{2}N((n-2)N+n)$. $\square$

Enfin, nous avons vu que l'application de transfert $\mathscr{T}_G$ est un difféomorphisme local sur un ouvert de $G^n /\!\!/ G$. $\mathscr{T}_G^* H_n$ définit donc $s' = \frac{1}{2}N((n-2)N+n)$ fonctions indépendantes sur l'espace de modules $\mathscr{M}$. On a ainsi montré

Théorème 6.12. *Le système Hamiltonien $(G^n /\!\!/ G, \{\cdot\,,\cdot\}_n, \mathscr{T}^* H_n)$ est un système intégrable au sens de Liouville. L'application de transfert*

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_G : (\mathscr{M}, \{\cdot\,,\cdot\}_n, \mathscr{T}_G^* H_n) &\longrightarrow (\mathscr{A}/G, \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q, H_n) \\ (M_1, \cdots, M_n) &\longmapsto (\lambda M_1 + \mathrm{Id}) \ldots (\lambda M_n + \mathrm{Id}). \end{aligned}$$

est un morphisme de systèmes intégrables.

Bien que $(\mathscr{A}/G, \{\cdot\,,\cdot\}_1^Q, H_n)$ soit une système algébriquement complètement intégrable, nous ne pouvons rien en déduire sur le système intégrable que nous venons de construire sur l'espace de modules $\mathscr{M}$.

Bibliographie

1. M. R. Adams, J. Harnad, and J. Hurtubise. Isospectral Hamiltonian flows in finite and infinite dimensions. II. Integration of flows. *Comm. Math. Phys.*, 134(3):555–585, 1990.
2. M. R. Adams, J. Harnad, and E. Previato. Isospectral Hamiltonian flows in finite and infinite dimensions. I. Generalized Moser systems and moment maps into loop algebras. *Comm. Math. Phys.*, 117(3):451–500, 1988.
3. M. Adler. On a trace functional for formal pseudo differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations. *Invent. Math.*, 50(3):219–248, 1978/79.
4. M. Adler and P. van Moerbeke. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves. *Adv. in Math.*, 38(3):267–317, 1980.
5. M. Adler and P. van Moerbeke. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. *Adv. in Math.*, 38(3):318–379, 1980.
6. M. Adler, P. van Moerbeke, and P. Vanhaecke. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, volume 47 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, 2004.
7. A. Alekseev and Y. Kosmann-Schwarzbach. Manin pairs and moment maps. *J. Differential Geom.*, 56(1):133–165, 2000.
8. A. Alekseev, Y. Kosmann-Schwarzbach, and E. Meinrenken. Quasi-Poisson manifolds. *Canad. J. Math.*, 54(1):3–29, 2002.
9. A. Alekseev, A. Malkin, and E. Meinrenken. Lie group valued moment maps. *J. Differential Geom.*, 48(3):445–495, 1998.
10. A. Y. Alekseev. Integrability in the Hamiltonian Chern-Simons theory. *Algebra i Analiz*, 6(2):53–66, 1994.
11. M. F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 308(1505):523–615, 1983.
12. M. Audin. Lectures on gauge theory and integrable systems. In *Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, PQ, 1995)*, volume 488 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 1–48. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

13. A. Beauville. Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables. *Acta Math.*, 164(3-4):211–235, 1990.
14. P. A. Damianou. Master symmetries and R-matrices for the Toda lattice. *Lett. Math. Phys.*, 20(2):101–112, 1990.
15. R. L. Fernandes and P. Vanhaecke. Hyperelliptic Prym varieties and integrable systems. *Comm. Math. Phys.*, 221(1):169–196, 2001.
16. V. Fock and A. Rosly. Poisson structure on the moduli space of flat connections on Riemann surfaces and r-matrix. *Preprint no. 72-92, ITEP*, june 1992.
17. V. V. Fock and A. A. Rosly. Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and the r-matrix. In *Moscow Seminar in Mathematical Physics*, volume 191 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 67–86. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
18. R. Garnier. Sur une classe de systèmes différentiels abéliens déduits de la théorie des équations linéaires. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, pages 155–191, 1919.
19. W. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, 85(2):263–302, 1986.
20. W. M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54(2):200–225, 1984.
21. J. Harnad and J. Hurtubise. Multi-hamiltonian structures for r-matrix systems. *CRM preprint 2850*, arXiv:math-ph/0211076v1, 2002.
22. J. Huebschmann. Poisson structures on certain moduli spaces for bundles on a surface. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(1):65–91, 1995.
23. J. Huebschmann. Symplectic and Poisson structures of certain moduli spaces. II. Projective representations of cocompact planar discrete groups. *Duke Math. J.*, 80(3):757–770, 1995.
24. L. Jeffrey and J. Weitsman. Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula. *Comm. Math. Phys.*, 150(3):593–630, 1992.
25. S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
26. Y. Kosmann-Schwarzbach. Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations. In *Integrability of nonlinear systems (Pondicherry, 1996)*, volume 495 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 104–170. Springer, Berlin, 1997.
27. A. Le Blanc. Quasi-poisson structures and integrable systems related to the moduli space of flat connections on a punctured riemann sphere. *preprint*, 2006.
28. L. C. Li and S. Parmentier. Nonlinear Poisson structures and r-matrices. *Comm. Math. Phys.*, 125(4):545–563, 1989.
29. A. Lichnerowicz. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J. Differential Geometry*, 12(2):253–300, 1977.
30. W. S. Massey. *Algebraic topology: an introduction.* Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.

31. W. Oevel and O. Ragnisco. R-matrices and higher Poisson brackets for integrable systems. *Phys. A*, 161(1):181–220, 1989.
32. S. Parmentier. On coproducts of quasi-triangular Hopf algebras. *Algebra i Analiz*, 6(4):204–222, 1994.
33. M. Pedroni and P. Vanhaecke. A Lie algebraic generalization of the Mumford system, its symmetries and its multi-Hamiltonian structure. *Regul. Chaotic Dyn.*, 3(3):132–160, 1998. J. Moser at 70 (Russian).
34. C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Advances in Math.*, 19(3):306–381, 1976.
35. A. G. Reyman and M. Semenov-Tian-Shansky. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. *Invent. Math.*, 54(1):81–100, 1979.
36. A. G. Reyman and M. Semenov-Tian-Shansky. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. II. *Invent. Math.*, 63(3):423–432, 1981.
37. A. G. Reyman and M. A. Semenov-Tian-Shansky. Compatible Poisson structures for Lax equations: an r-matrix approach. *Phys. Lett. A*, 130(8-9):456–460, 1988.
38. M. A. Semenov-Tyan-Shanskiĭ. What a classical r-matrix is. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 17(4):17–33, 1983.
39. Y. B. Suris. r-matrices for relativistic deformations of integrable systems. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 6(4):411–447, 1999.
40. P. Tauvel and R. Yu. *Lie algebras and algebraic groups.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
41. P. Vanhaecke. *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, volume 1638 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001.
42. A. Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3):523–557, 1983.

Quadratic (quasi-)Poisson structures on the loop algebra related to the construction of an integrable system on a moduli space

---

Abstract

This thesis is a work on the moduli space $\mathscr{M}$ of flat connections of the principal bundle $S \times G$ of a punctured Riemann sphere S (with $n \geq 3$ boundary components), whose Lie group is $G = \mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$, and on the loop algebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})(\!(\lambda^{-1})\!)$ simultaneously.

In a first time, we study a hierarchy of quadratic biderivations on $\tilde{\mathfrak{g}}$. In particular, thanks to the fusion processus introduced by Alekseev, Kosmann-Schwarzbach and Meinrenken in 2002, we extract, among them, a quasi-Poisson structure $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ on $\tilde{\mathfrak{g}}$. This one restricts to the subspace $\tilde{\mathfrak{g}}_n = \left\{\sum_{k=0}^n x^{[k]}\lambda^k\right\}$.

We prove then a reduction result in the framework of a quasi-Poisson biderivation. It allows us to equip with a genuine Poisson structure the quotient $\mathscr{A}/G := \{\mathrm{Id}\,\lambda^n + \lambda Y(\lambda) + \mathrm{Id}\,|Y \in \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}\}/G$.

Knowing Beauville's integrable system on $\tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}/G$, we prove that the family of functions $(\mathrm{tr}X^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$ constitute an integrable system on $\mathscr{A}/G$. The functions that we considere on the moduli space $\mathscr{M}$ are the pull-back $(\mathscr{T}^*\mathrm{tr}X^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$, where $\mathscr{T} : G^n \to \tilde{\mathfrak{g}}_n$ is a quasi-Poisson morphism and a local diffeomorphism. We use these properties of $\mathscr{T}$ to show that this family of functions constitute an integrable system on $\mathscr{M}$.

Keywords: (quasi-)Poisson varieties, integrable systems

Des structures de (quasi-)Poisson quadratiques sur l'algèbre de lacets pour la construction d'un système intégrable sur un espace de modules

---

Résumé

Cette thèse est un travail conjointement sur l'espace de modules $\mathscr{M}$ des connexions plates du fibré principal $S \times G$ d'une sphère de Riemann S (ayant $n \geq 3$ bords), où $G = \mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$ et sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})((\lambda^{-1}))$.

Dans un premier temps, nous étudions une hiérarchie de bidérivations quadratiques sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. En particulier, grâce au processus de fusion introduit par Alekseev, Kosmann-Schwarzbach et Meinrenken en 2002, nous extrayons parmi elles une structure $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$ de quasi-Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Celle-ci se restreint au sous-espace $\tilde{\mathfrak{g}}_n = \left\{\sum_{k=0}^{n} x^{[k]}\lambda^k\right\}$.

Nous montrons ensuite un résultat de réduction dans un contexte de bidérivation de quasi-Poisson. Il permet d'équipper le quotient $\mathscr{A}/G := \left\{\mathrm{Id}\,\lambda^n + \lambda Y(\lambda) + \mathrm{Id}\,\middle|\, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}\right\}/G$ d'une structure de Poisson induite par $\{\cdot\,,\cdot\}_1^Q$.

En s'appuyant sur le système intégrable de Beauville sur $\tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}/G$, nous montrons que la famille de fonctions $(\mathrm{tr}X^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$ constitue un système intégrable sur $\mathscr{A}/G$. Les fonctions que nous considérons sur l'espace de modules $\mathscr{M}$ sont les tiré-en-arrière $(\mathscr{T}^*\mathrm{tr}X^k(a))_{k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{C}}$, où $\mathscr{T} : G^n \to \tilde{\mathfrak{g}}_n$ est un morphisme de quasi-Poisson et un difféomorphisme local. Nous utilisons ces propriétés de $\mathscr{T}$ pour montrer que cette famille de fonctions constitue un système intégrable sur $\mathscr{M}$.

Mots clés : variétés de Poisson, systèmes intégrables