



# Coloration d'hypergraphes et clique-coloration

David Défossez

► **To cite this version:**

David Défossez. Coloration d'hypergraphes et clique-coloration. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. tel-00110913

**HAL Id: tel-00110913**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00110913>**

Submitted on 2 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER*

*THÈSE*

pour obtenir le grade de **DOCTEUR DE L'UJF**

**Spécialité : « Mathématiques Informatique »**

préparée au laboratoire Laboratoire Leibniz-IMAG dans le cadre de l'**École Doctorale « Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique »**

préparée et soutenue publiquement par

David Défossez

le 12 octobre 2006

*Titre :*

**Coloration d'hypergraphes et clique-coloration**

---

*sous la direction de Myriam Preissmann*

---

**JURY**

Gerd Finke  
Gábor Bacsó  
Jean-Claude Fournier  
Myriam Preissmann  
Jenő Lehel

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directrice de thèse  
Examineur



# Résumé

Le travail de cette thèse s'est porté sur certains problèmes de coloration d'hypergraphes, dont certains sont en lien avec les graphes parfaits.

Dans un premier temps, la coloration des hypergraphes est abordée de manière générale, et nous y démontrons une conjecture de Sterboul (généralisant un précédent résultat de Fournier et Las Vergnas), affirmant que si un hypergraphe ne contient pas un type particulier de cycle impair, alors il est 2-coloriable.

Par la suite nous étudions plus précisément le problème de clique-coloration : une clique maximale d'un graphe est un sous-graphe complet, maximal par inclusion. Le problème consiste à colorier les sommets du graphe de sorte que chaque clique maximale contienne aux moins deux sommets de couleurs distinctes. Le point de départ de cette thèse était de savoir s'il existe une constante  $k$  telle que tous les graphes parfaits sont  $k$ -clique-coloriables. Cette question n'est toujours pas résolue, bien qu'on ne connaisse aucun graphe sans trou impair qui n'est pas 3-clique-coloriable. Cependant, une telle constante existe dans de nombreux cas particuliers, dont certains (tels que les graphes sans diamant ou sans taureau) sont étudiés ici.

La complexité du problème de clique-coloration est également abordée, en essayant de déterminer la classe de complexité exacte selon les cas particuliers. Plusieurs résultats sont établis, concernant notamment la difficulté de décider si un graphe parfait est 2-clique-coloriable : ce problème est  $\Sigma_2\text{P}$ -complet, et est NP-complet pour les graphes parfaits sans  $K_4$ .



# Abstract

This work concerns several problems of colorings of hypergraphs, some of which are related to perfect graphs.

We first look at the problem in a global way, and we prove a conjecture due to Sterboul (which generalizes a previous result of Fournier and Las Vergnas) which states that if a hypergraph does not contain a particular type of odd cycle, then it is 2-colorable.

Then we study more precisely the problem of clique-coloring : a maximal clique of a graph is a complete subgraph, maximal by inclusion. The problem consists in assigning colors to the vertices of the graph such that every maximal clique contains at least two vertices with distinct colors. The work of this thesis was originally motivated by the following question : does there exist a constant  $k$  such that all perfect graphs are  $k$ -clique-colorable? This question is still unsolved, whereas we do not know any odd-hole-free graph that is not 3-clique-colorable. However such a constant exists in many subcases, some of which (such as diamond-free graphs or bull-free graphs) are studied in this thesis.

We also look at the complexity of the problem of clique-coloring, and we try to determine the exact complexity class for every subcases. Several results are proved, especially concerning the complexity of deciding if a perfect graph is 2-clique-colorable : this problem is  $\Sigma_2\text{P}$ -complete, and is NP-complete for  $K_4$ -free perfect graphs.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1 Définitions de base . . . . .	7
1.1.1 Terminologie des graphes . . . . .	7
1.1.2 Terminologie des hypergraphes . . . . .	10
1.1.3 Notions de complexité . . . . .	11
1.2 Graphes parfaits et graphes sans trou impair . . . . .	15
1.3 Le problème de clique-coloration . . . . .	17
1.3.1 Définitions et remarques générales . . . . .	17
1.3.2 Historique de la clique-coloration et quelques résultats connus . . . . .	19
<b>2 Coloration d'hypergraphes</b>	<b>25</b>
2.1 Bornes générales . . . . .	25
2.2 Problèmes extrémaux . . . . .	27
2.3 Hypergraphes sans cycle impair . . . . .	29
2.3.1 Hypergraphes équilibrés . . . . .	29
2.3.2 Hypergraphes pseudo-équilibrés . . . . .	29
2.3.3 Hypergraphes de Sterboul . . . . .	30
2.4 Questions et liens avec la clique-coloration . . . . .	34
<b>3 Clique-coloration des graphes sans trou impair</b>	<b>37</b>
3.1 Résultats connus . . . . .	37
3.2 Chemins les plus semblables et graphes de Meyniel . . . . .	39
3.3 Graphes sans trou impair et sans diamant . . . . .	41
3.4 Graphes sans trou impair et sans codiamant . . . . .	45
3.5 Graphes sans trou impair et sans taureau . . . . .	47
<b>4 Complexité de la clique-coloration</b>	<b>53</b>
4.1 Résultats préliminaires . . . . .	53
4.1.1 Le graphe auxiliaire $H(.,.)$ . . . . .	53
4.1.2 Problème de contenance de clique maximale . . . . .	54



4.2	Résultats généraux . . . . .	57
4.3	Algorithmes polynomiaux . . . . .	62
4.3.1	Heuristique de clique-coloration . . . . .	62
4.3.2	Algorithmes pour des classes particulières de graphes . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Autres questions autour de la clique-coloration</b>	<b>65</b>
5.1	Clique-colorabilité héréditaire . . . . .	65
5.1.1	Présentation du problème . . . . .	65
5.1.2	Résultats généraux . . . . .	66
5.1.3	2-clique-colorabilité héréditaire . . . . .	67
5.2	Clique-coloration par listes . . . . .	74
5.3	Clique-coloration et taille minimum d'une clique maximale . . . . .	75
	<b>Conclusion</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Myriam Preissmann, ma directrice de thèse, pour la liberté qu'elle m'a laissée dans l'orientation de mes travaux, en même temps que sa disponibilité lorsque j'avais besoin d'elle.

Merci à tous les membres de mon jury, et en particulier à Jean-Claude Fournier et Gábor Bacsó qui m'ont fait l'honneur d'être mes rapporteurs malgré des emplois du temps fort chargés.

Merci également aux différents chercheurs en mathématiques discrètes du laboratoire Leibniz, et plus généralement à tous les scientifiques avec qui j'ai pu discuter lors de séminaires ou de conférences, et de qui j'ai eu des remarques ou des questions intéressantes et enrichissantes.

Merci aussi à tous les professeurs de mathématiques que j'ai eu la chance d'avoir tout le long de ma scolarité avant d'intégrer l'ENSIMAG, en particulier M. Genêt, M. Atlani, M. Souquet et M. Millet, qui m'ont enseigné le goût pour les mathématiques en plus des mathématiques elles-mêmes.

Merci à tous mes amis de prépa, qui ont fait que ces deux années m'ont été bien moins terribles que ce qu'on en entend souvent dire... Merci en particulier à Etienne et Cyril pour les nombreuses discussions scientifico-politico-philosophiques que l'on a eues au coin du feu, et qui furent une réelle source d'enrichissement personnel (même si je ne sais toujours pas pourquoi l'univers).

Merci à tous mes amis de l'ENSIMAG, qui ont fait que ces trois années m'ont été aussi plaisantes que ce qu'on en entend souvent dire... Merci en particulier à Béatrice pour les nombreuses discussions de registres aussi variés que les gens avec qui on les a eues (qui sauront se reconnaître).

Merci à tous mes camarades thésards, ex-thésards (voire récents permanents), du Leibniz ou hors-Leibniz, qui m'ont permis de relativiser les malheurs de la condition de doctorant. Merci en particulier à Frédéric, qui a partagé mon bureau durant 3 années, et qui fut pour moi une source d'émerveillement au vu de ses innombrables activités (et qui fut aussi un dictionnaire scientifique et littéraire bien pratique...). Merci également à tous les accrocs au truco du labo, pour nos longues séances de travail, et pour tous les points qu'ils ont bien voulu me donner (parfois).

Enfin, merci à ma famille, et en particulier à mes parents, qui m'ont toujours laissé libre de mes choix, et qui m'ont toujours soutenu dans tout ce que j'ai fait.



# Introduction

Pour introduire cette thèse, il faut sans doute revenir à ce qui fait que les chercheurs s'intéressent aux objets mathématiques que nous y présenterons : résoudre des problèmes pratiques.

Considérons par exemple un complexe industriel de chimie. on manipule dans celui-ci un certain nombre de produits, dont certaines combinaisons peuvent s'avérer dangereuses. Ces produits sont entreposés dans différents hangars, et pour des raisons de sécurité évidentes il faut éviter d'entreposer dans un même hangar des produits dont l'association est potentiellement dangereuse. D'ailleurs, l'accident qui est survenu lors de l'explosion de l'usine AZF en septembre 2001 est officiellement dû au mélange accidentel de nitrate d'ammonium et d'un produit chloré (le DCCNa ou Dichloroisocyanurate de sodium).

Indépendamment de la possible erreur humaine de manipulation, une solution pour éviter de mélanger les produits serait de construire un hangar spécifique à chacun. Mais cela s'avère coûteux en espace et en coûts de construction, et on souhaite que certains hangars soient utilisés pour plusieurs produits, de sorte à minimiser le nombre de hangars à construire.

Pour résoudre ce problème d'optimisation, on pourra faire appel aux hypergraphes. Un hypergraphe est un ensemble d'éléments (qui ici seront les produits chimiques considérés), et un ensemble d'associations entre ces éléments (ici les combinaisons dangereuses de produits).

Il existe différents problèmes d'optimisation sur les hypergraphes, et celui qui nous intéresse dans cet exemple est le problème de coloration. La coloration consiste à "colorier" les éléments, de sorte que chaque association comporte au moins deux éléments de couleurs différentes, et on cherche à minimiser le nombre de couleurs utilisées.

Pour notre problème, on créera alors un hangar "bleu", un hangar "vert", un hangar "jaune", etc., qui serviront à entreposer les produits que l'on a colorié avec la couleur correspondante. En faisant ainsi, on s'assure que tous les produits d'une même combinaison dangereuse ne seront pas entreposés au même endroit, et en minimisant le nombre de couleurs utilisées on réduira les coûts.

La notion d'hypergraphe généralise en fait un autre objet mathématique plus connu : le graphe, dans lequel les associations ne concernent qu'au plus deux éléments.

Le formalisme des graphes est apparu au fur et à mesure des problèmes de décision ou d'optimisation qui ont été rencontrés. Un exemple bien connu est dû à Euler, qui a introduit les graphes pour résoudre le problème des ponts de Königsberg. Plus récemment, Claude Berge a fortement contribué à l'élaboration du formalisme actuel (ainsi qu'au développement) de la théorie des graphes et des hypergraphes, dont les résultats théoriques sont bien souvent motivés par des applications directes.

Par exemple, l'origine du problème de la coloration des sommets d'un graphe remonte au problème des quatre couleurs. Il était en effet conjecturé que sur toute carte géographique, on pouvait colorier les pays avec seulement quatre couleurs, en s'arrangeant pour que deux pays voisins aient des couleurs distinctes. Ce problème, apparu vers le milieu du 19e siècle n'a été résolu qu'en 1976 par Appel et Haken, avec l'aide d'un ordinateur.

Beaucoup de problèmes sur les graphes et les hypergraphes sont dits "difficiles". La distinction que l'on fait entre les problèmes faciles et les problèmes difficiles porte sur l'efficacité en pratique des algorithmes que l'on connaît pour les résoudre.

Pour résumer, un algorithme est considéré comme efficace si son temps d'exécution dans le pire des cas est assimilable à une fonction polynomiale de la taille des données entrées. Pour certains problèmes on connaît de tels algorithmes ; mais pour beaucoup d'autres problèmes on ne sait faire guère mieux qu'énumérer de façon exhaustive toutes les possibilités, ce qui donne des algorithmes dont le temps d'exécution a une croissance exponentielle en fonction des données, ce qui sera irrémédiablement plus lent à partir d'une certaine taille de données.

On a alors plusieurs façons d'aborder un problème difficile :

- On peut toujours chercher à le résoudre de manière exacte, en améliorant sensiblement la vitesse des algorithmes utilisés.
- Si on est face à un problème d'optimisation, on peut chercher des algorithmes plus efficaces, mais ne donnant pas forcément la meilleure solution. Dans ce cas on cherche souvent à avoir une garantie de performance, en terme par exemple d'écart maximum relatif par rapport à l'optimal.
- Enfin, on peut chercher à ne résoudre que certains cas particuliers du problème, pour lesquels on saurait trouver une solution de manière efficace.

C'est cette dernière voie qui a été plus particulièrement choisie lors le travail de cette thèse. En effet, le problème général de coloration d'hypergraphes étant difficile, on a essayé de distinguer certains cas pour lesquels il restait difficile, et d'autre (sous-)cas pour lesquels le problème est plus facile.

En particulier, on s'est intéressé au problème de clique-coloration qui consiste à colorier un certain type d'hypergraphes, que l'on construit à partir des graphes. La motivation principale de ce travail étant une conjecture portant sur la clique-colorabilité des graphes parfaits.

## Chapitre 1 : Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappellera les définitions de base concernant les graphes et les

hypergraphes. Quelques rappels sur les graphes parfaits et les graphes sans trou impair seront également faits. On présentera ensuite le problème de clique-coloration, en faisant quelques remarques générales, ainsi qu'un historique de ce problème. Enfin, une brève présentation de la théorie de la complexité sera faite.

### **Chapitre 2 : Coloration d'hypergraphes**

Ce chapitre donnera un bref aperçu des résultats qui traitent de la coloration d'hypergraphes. On y distinguera plusieurs façons d'aborder le problème, et une conjecture donnant une condition suffisante de 2-coloration y sera démontrée. Dans une dernière section, le lien entre la clique-coloration et la coloration d'hypergraphes de manière plus générale sera présenté.

### **Chapitre 3 : Clique-coloration des graphes sans trou impair**

Ce chapitre s'intéressera à la conjecture selon laquelle les graphes sans trou impair sont 3-clique-coloriables. Cette conjecture n'y est pas résolue, mais de nombreux cas particuliers pour lesquels elle est vérifiée seront présentés. En particulier on montrera que les graphes sans diamant et sans trou impair sont 4-clique-coloriables et nous présenterons une sous-classe dont les graphes sont 2-clique-coloriables. On montrera également que les graphes sans trou impair et sans codiamant sont 2-clique-coloriables, ainsi que les graphes sans trou impair et sans taureau.

### **Chapitre 4 : Complexité de la clique-coloration**

Dans ce chapitre on présentera divers aspects de complexité de la clique-coloration. Dans une première section on verra en particulier que vérifier la validité d'une clique-coloration est un problème difficile. On étudiera ensuite plusieurs cas pour lesquels le problème est difficile en précisant la classe de complexité exacte correspondante. Enfin quelques remarques seront faites sur certains algorithmes fonctionnant en temps polynomial.

### **Chapitre 5 : Autres questions autour de la clique-coloration**

Dans ce dernier chapitre on abordera certaines questions proches de la clique-coloration. Plus particulièrement, des résultats sur la clique-colorabilité héréditaire seront présentés. On fera également quelques remarques établissant un lien entre la taille des cliques d'un graphe, et son nombre clique-chromatique.



# Chapitre 1

## Préliminaires

La première section de ce chapitre rappelle quelques définitions élémentaires de théorie des (hyper)graphes, et de complexité utilisées dans cette thèse, et ne se veut ni exhaustive ni présentée de manière pédagogique.

Un lecteur familier du domaine devrait pouvoir aisément passer cette première section. Pour plus de précisions, on pourra se référer aux ouvrages de référence de Berge [6] concernant les graphes et les hypergraphes, ou de Papadimitriou [59] concernant la complexité.

La seconde section présente de manière très succincte les graphes parfaits. Cette présentation ne rappelle que quelques résultats significatifs, et un lecteur désirant en savoir plus pourra se référer à un ouvrage collectif publié sous la direction de Berge et Chvátal [9], ou un autre publié sous la direction de Ramírez Alfonsín et Reed [62].

Enfin, la dernière section de ce chapitre présente plus spécifiquement le problème de clique-coloration, qui a été le principal problème étudié durant cette thèse, et dresse un historique des résultats obtenus jusqu'ici.

### 1.1 Définitions de base

#### 1.1.1 Terminologie des graphes

La définition de graphe que l'on donne ici est celle correspondant aux graphes finis, simples, et non orientés.

Un *graphe*  $G$  est un couple  $(V, E)$  où  $V$  est l'ensemble des *sommets* de  $G$ , et  $E$  est l'ensemble de ses *arêtes*, une arête étant un ensemble de deux éléments de  $V$ . Une arête caractérise donc un lien entre deux sommets du graphe ; si  $\{u, v\} \in E$  (qui sera le plus souvent notée  $uv$ ), on dit alors que  $u$  et  $v$  sont *adjacents*, ou plus simplement que  $u$  voit  $v$  ; si  $u \in V$  et  $e \in E$  sont tels que  $u \in e$ , on dit que le sommet  $u$  est *incident* à l'arête  $e$ , ou encore que  $u$  est une *extrémité* de  $e$  ; et si  $e, f \in E$  et  $e \cap f \neq \emptyset$ , on dit que les arêtes  $e$  et  $f$  sont *adjacentes*. S'ils ne sont pas nommés explicitement, on désignera par  $V(G)$  l'ensemble des sommets de  $G$ , et par  $E(G)$  l'ensemble de ses arêtes.



On dit que deux graphes  $G$  et  $G'$  sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : V(G) \rightarrow V(G')$  telle que pour tous  $u, v \in V(G)$ , on a  $uv \in E(G)$  si et seulement si  $f(u)f(v) \in E(G')$ . Par abus de langage, on considèrera souvent que deux graphes isomorphes sont identiques.

Les notions définies par la suite le sont par rapport à un graphe donné  $G = (V, E)$ .

On appelle *sous-graphe de  $G$*  un graphe  $G' = (V', E')$ , avec  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ .

Si  $V'' \subseteq V$ , on appelle *sous-graphe de  $G$  induit par  $V''$*  le sous-graphe  $G(V'') = (V'', E'')$  de  $G$ , avec  $E'' = \{uv \in E \mid u, v \in V''\}$ .

On dit que  $G$  *contient* un graphe  $G'$  s'il existe un sous-graphe induit de  $G$  isomorphe à  $G'$ . Dans le cas contraire, on dit que  $G$  *est sans  $G'$* .

Pour un sommet  $u \in V$ , on désigne par  $N(u)$  l'ensemble des sommets de  $G$  adjacents à  $u$ , et par  $N[u]$  l'ensemble  $N(u) \cup \{u\}$ . Si  $N[u] = V$ , on dit que  $u$  est un sommet *dominant*, et que le graphe  $G$  est une *étoile centrée en  $u$* .

Pour  $A \subseteq V$  on définit  $N(A) = \cup_{u \in A} N(u)$ , et  $N[A] = N(A) \cup A$ . Si  $N[A] = V$  on dit alors que  $A$  est une partie *dominante*.

On appelle *degré* (— *d'un sommet*) du sommet  $u$  la valeur  $\delta(u) = |N(u)|$ . Le *degré maximum*  $\Delta(G)$  est le maximum des degrés des sommets de  $G$ .

Pour  $u \in V$  et  $A \subseteq V \setminus \{u\}$ , on dit que  $u$  est *complet* à  $A$  si  $A \subseteq N(u)$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes de  $V$ , on dit alors que  $B$  est *complet* à  $A$  si tous les sommets de  $B$  sont complets à  $A$  (notons que ceci est équivalent à dire que  $A$  est complet à  $B$ ).

On dit que  $G$  est un graphe *complet*, si pour tout  $u, v \in V$ , on a  $uv \in E$ .

Un ensemble  $K \subseteq V$  est appelée *clique* de  $G$  si le sous-graphe induit  $G(K)$  est complet. Une clique est dite *maximale* si elle n'est incluse dans aucune autre clique de  $G$ . La taille maximum d'une clique de  $G$  est notée  $\omega(G)$ .

Pour  $u, v \in V$ , on appelle *chaîne* ou *chemin* de  $u$  à  $v$  une suite  $(u_1, \dots, u_n)$  de sommets distincts de  $G$  avec  $u = u_1$  et  $v = u_n$ , et telle que pour tout  $i = 1, \dots, n - 1$ , on a  $u_i u_{i+1} \in E$ ; la *longueur* du chemin est son nombre de sommets diminué de 1, soit  $n - 1$ . Une *corde* d'un chemin est une arête composée de deux sommets non consécutifs du chemin.

Un *cycle* est une suite  $(u_1, \dots, u_n)$  de sommets distincts de  $G$  telle que pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on a  $u_i u_{i+1} \in E$  (en considérant  $u_{n+1} = u_1$ ); la *longueur* du cycle est son nombre de sommets, soit  $n$ . Une *corde* d'un cycle est une arête composée de deux sommets non consécutifs du cycle. Un *trou* est un cycle sans corde de longueur au moins 4.

Un chemin, un cycle, ou un trou, est dit *pair* (resp. *impair*) si sa longueur est paire (resp. impaire).

Si pour  $u, v \in V$ , il existe au moins un chemin dans  $G$  de  $u$  à  $v$ , alors on appelle

*distance de  $u$  à  $v$*  la plus petite longueur d'un chemin de  $u$  à  $v$  dans  $G$ . Si pour tout  $u, v \in V$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  dans  $G$ , alors on dit que  $G$  est *connexe*.

Si  $G$  est connexe et que  $A \subset V$  est tel que  $G(V \setminus A)$  n'est pas connexe, on dit que  $A$  est une partie *déconnectante* de  $G$ .

Un ensemble  $S \subseteq V$  est appelée *partie stable* (ou plus simplement *stable*) de  $G$  si le sous-graphe induit  $G(S)$  ne possède aucune arête. La taille maximum d'une partie stable de  $G$  est notée  $\alpha(G)$ .

Une partition  $(V_1, \dots, V_k)$  de  $V$  est appelée  *$k$ -partition* de  $G$ . Pour  $u \in V$ , la *couleur* de  $u$  est l'indice  $i_0$  tel que  $u \in V_{i_0}$ . Notons que dans notre définition d'une  $k$ -partition nous autorisons la possibilité que certains  $V_i$  soient vides.

Si chaque  $V_i$  est une partie stable de  $G$ , on dit alors que la  $k$ -partition est une  *$k$ -coloration* de  $G$ . Si  $G$  possède une  $k$ -coloration, on dit qu'il est  *$k$ -coloriable*, et on appelle *nombre chromatique* de  $G$ , noté  $\chi(G)$ , le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  est  $k$ -coloriable.

Si  $G$  est 2-coloriable, on dit également que  $G$  est *biparti*.

S'il existe une  $k$ -coloration  $(V_1, \dots, V_k)$  telle que pour tout  $i \neq j$ ,  $V_i$  est complet à  $V_j$ , le graphe  $G$  est dit *multiparti complet*.

Un *couplage* est un ensemble d'arêtes  $E' \subset E$  tel que  $\forall e, f \in E', e \neq f$ , on a  $e$  et  $f$  non adjacentes.

Le couplage est dit *parfait* si chaque sommet de  $V$  est incident à une arête de  $E'$ .

On appelle *complémentaire de  $G$*  le graphe  $\overline{G}$ , ayant même ensemble de sommets que  $G$ , et ayant pour ensemble d'arêtes  $E(\overline{G}) = \{uv \mid u, v \in V; uv \notin E(G)\}$ , c'est-à-dire exactement les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de  $G$ . On remarque que  $\overline{\overline{G}} = G$ .

Pour désigner le complémentaire d'un graphe, on utilisera les préfixes *co-* ou *anti-*. Par exemple, un *antitrou* est le complémentaire d'un trou.

On appelle *line-graphe de  $G$*  le graphe  $L(G)$  dont l'ensemble des sommets est  $E$ , et dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes de  $G$  correspondantes sont adjacentes.

On appelle *union disjointe* de  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  (qui sont tels que  $V \cap V' = \emptyset$ ) le graphe  $G + G' = (V \cup V', E \cup E')$ .

Enfin, on dénote par  $K_n$ , le graphe complet possédant  $n$  sommets (le graphe  $K_3$  est aussi appelé *triangle*);  $K_{n,k}$ , le graphe biparti complet ayant un stable de taille  $n$ , et un autre de taille  $k$ ;  $P_n$ , le chemin sans corde à  $n$  sommets;  $C_n$ , le trou à  $n$  sommets (avec  $n \geq 4$ ).

### 1.1.2 Terminologie des hypergraphes

Un *hypergraphe*  $H$  est un couple  $(V, \mathcal{E})$  où  $V$  est l'ensemble des *sommets* de  $H$ , et  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des *hyperarêtes* de  $H$  (également appelées plus simplement *arêtes*), chaque arête étant un sous-ensemble de  $V$ . S'ils ne sont pas nommés explicitement, on désignera par  $V(H)$  l'ensemble des sommets de  $H$ , et par  $\mathcal{E}(H)$  l'ensemble de ses arêtes.

Les hypergraphes sont donc une généralisation des graphes, dans le sens où une arête contient un nombre quelconque de sommets, et pas nécessairement deux. La plupart des définitions sont alors similaires, mais demandent toutefois d'être adaptées.

On dit que deux hypergraphes  $H$  et  $H'$  sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : V(H) \rightarrow V(H')$  telle que  $\mathcal{E}(H') = \{f(e) | e \in \mathcal{E}(H)\}$ , où  $f(e) = \{f(u) | u \in e\}$ . Par abus de langage, on considèrera souvent que deux hypergraphes isomorphes sont identiques.

On appelle *r-hypergraphe*, un hypergraphe dans lequel toutes les arêtes sont de taille  $r$  (un tel hypergraphe est aussi appelé *r-uniforme*).

Les notions définies par la suite le sont par rapport à un hypergraphe donné  $H = (V, \mathcal{E})$ .

$H' = (V', \mathcal{E}')$  est un *sous-hypergraphe partiel* de  $H$  si  $V' \subset V$  et  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ . Pour  $V'' \subset V$ , on appelle *sous-hypergraphe induit par  $V''$*  l'hypergraphe  $H(V'')$  ayant pour sommets  $V''$ , et pour arêtes  $\{e \cap V'' | e \in \mathcal{E}\}$ .

On dit que  $H$  *contient*  $H'$  si  $H'$  est isomorphe à un sous-hypergraphe partiel de  $H$ . Dans le cas contraire on dit que  $H$  *est sans*  $H'$ . Notons la différence avec les graphes où la notion de "contenir" signifie une relation de sous-graphe induit.

Le *degré*  $\delta(x)$  d'un sommet est le nombre d'arêtes dont lesquelles il est contenu. Le *degré maximum*  $\Delta(H)$  d'un hypergraphe est le maximum des degrés des sommets de l'hypergraphe.

Un hypergraphe est dit *simple* si  $\forall e, f \in \mathcal{E}$  avec  $e \subseteq f$ , on a  $e = f$ . Pour rendre un hypergraphe simple, on peut supprimer certaines de ses arêtes; on définit par exemple  $H^{\min}$  qui a les mêmes sommets que  $H$  et pour arêtes  $\mathcal{E}(H^{\min}) = \{e \in \mathcal{E} | \nexists f \neq e, f \subset e\}$ ; et  $H^{\max}$  qui a les mêmes sommets que  $H$  et pour arêtes  $\mathcal{E}(H^{\max}) = \{e \in \mathcal{E} | \nexists f \neq e, e \subset f\}$ .

On appelle *k-section* de  $H$  le  $r$ -hypergraphe  $[H]_k$  ayant les mêmes sommets que  $H$ , et ayant pour hyperarêtes  $\mathcal{E}([H]_k) = \{e | e \subset V; |e| = k; \exists f \in \mathcal{E}(H), e \subseteq f\}$ . En particulier, la 2-section  $[H]_2$  de  $H$  est un graphe dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils appartiennent à une même hyperarête de  $H$ .

L'hypergraphe  $H$  est dit *conforme* si chaque clique maximale de  $[H]_2$  est une hyperarête de  $H$ .

Pour  $u, v \in V$ , un *chemin* de  $u$  à  $v$  dans  $H$  est une suite  $(x_1, e_1, x_2, \dots, x_k, e_k, x_{k+1})$  de sommets et d'arêtes de  $H$  tous distincts, et tels que  $x_i, x_{i+1} \in e_i$  pour  $i = 1, \dots, k-1$ .

Si pour tous  $u, v \in V$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  dans  $H$ , alors on dit que  $H$  est *connexe*.

Un *cycle* est une suite  $(x_1, e_1, x_2, \dots, x_k, e_k, x_1)$  de sommets et d'arêtes de  $H$  tous distincts, et tels que  $x_i, x_{i+1} \in e_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  (en considérant  $x_{k+1} = x_1$ ). La *longueur* d'un cycle est son nombre d'arêtes, soit  $k$ . On dit qu'un cycle est *pair* (resp. *impair*) s'il est de longueur paire (resp. impaire).

Un *hypercycle* est un cycle dans lequel deux arêtes non consécutives sont disjointes, et si le cycle est de longueur 3, alors les trois arêtes n'ont pas de sommet commun.

Un ensemble  $S \subseteq V$  est appelé *partie stable* de  $H$  si aucune arête de taille  $\geq 2$  de  $H$  n'est contenue dans  $S$ . La taille maximum d'une partie stable de  $H$  est notée  $\alpha(H)$ .

Étant donné un sous-ensemble d'arêtes  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ , on appelle *couverture* de  $\mathcal{E}'$  un sous-ensemble de sommets  $V' \subseteq V$  tel que  $\forall e \in \mathcal{E}', \exists x \in V', x \in e$ . Si  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ , alors un tel ensemble  $V'$  est aussi appelé *transversal* de  $H$ .

Étant donnée une  $k$ -partition  $(V_1, \dots, V_k)$  de  $V(H)$ , une arête de  $H$  de taille  $\geq 2$  contenue dans un certain  $V_i$  est dite *monochromatique*. S'il n'existe pas d'arête monochromatique, alors chaque  $V_i$  est une partie stable de  $H$ , et la  $k$ -partition est appelée  *$k$ -coloration* de  $H$ . Si  $H$  possède une  $k$ -coloration, on dit qu'il est  *$k$ -coloriable*, et on appelle *nombre chromatique* de  $H$ , noté  $\chi(H)$ , le plus petit entier  $k$  tel que  $H$  est  $k$ -coloriable.

On appelle *dual de  $H$*  l'hypergraphe  $H^*$  dont l'ensemble des sommets est  $V(H^*) = \mathcal{E}(H)$ , et l'ensemble des arêtes est  $\mathcal{E}(H^*) = \{e_u | u \in V(H)\}$ , où  $e_u = \{e \in \mathcal{E}(H) | u \in e\}$ . Dans l'hypergraphe dual, on procède donc à un échange des sommets et des arêtes de l'hypergraphe de départ. On remarque que  $(H^*)^*$  est isomorphe à  $H$ .

Le *line-graphe de  $H$*  est le graphe  $L(H)$  dont l'ensemble des sommets est  $\mathcal{E}(H)$ , et dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes de  $H$  correspondantes ont une intersection non-vide.

Si pour tout  $e, f \in \mathcal{E}$ , on a  $|e \cap f| \leq 1$ , on dit que  $H$  est un hypergraphe *linéaire*.

On appelle *hypergraphe complet  $H_n^r$*  le  $r$ -hypergraphe ayant pour arêtes toutes les parties de  $r$  éléments de  $V$ .

### 1.1.3 Notions de complexité

Un *problème* se définit par une fonction, dont les éléments du domaine de départ sont les *entrées*, ou *instances*, et les éléments du domaine d'arrivée sont les *sorties*. L'association entre une entrée et une sortie est déterminée par une *question*, qui traduit une certaine relation entre les deux.

L'entrée et la sortie correspondent alors à des objets mathématiques que l'on peut décrire à l'aide de symboles, dont le nombre minimum constitue la *taille*.

Bien souvent, on considère des problèmes dont la sortie s'exprime de manière très simple, par exemple une valeur dans  $\mathbb{N}$ , ou même un booléen oui ou non. Dans ce dernier cas on parle de *problème de décision*.

Un problème peut alors par exemple se présenter sous cette forme :

### Nombre chromatique d'un graphe

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

QUESTION : Quel est le nombre chromatique du graphe  $G$  ?

On peut également considérer le problème de décision associé, défini pour  $k \in \mathbb{N}$  :

### $k$ -colorabilité d'un graphe

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

QUESTION : Le graphe  $G$  est-il  $k$ -coloriable ?

Il peut exister différentes représentations possibles pour chacun des objets. Dans le cas où l'entrée est un graphe, on considère généralement que la taille de l'entrée sera la somme  $n + m$  du nombre  $n$  de sommets du graphe et de son nombre  $m$  d'arêtes.

Un *algorithme* est une suite d'opérations élémentaires. Un algorithme *résoud* un problème si en lui donnant une entrée il construit la sortie correspondante pour le problème considéré.

La *complexité* d'un algorithme est le nombre d'opérations qui seront effectuées dans le pire des cas, en fonction de la taille de l'entrée. On évalue rarement la complexité d'un algorithme de façon exacte, et on utilise plutôt des ordres de grandeur, en utilisant la notation de Landau :  $O(\cdot)$ . Dire alors qu'un algorithme fonctionne en  $O(n^3)$  signifie qu'il existe une constante  $c$  telle que pour toute entrée de taille  $n$ , l'algorithme effectuera moins de  $cn^3$  opérations.

Il existe toujours un algorithme naïf qui consiste à regarder toutes les possibilités pour obtenir la bonne sortie. Dans l'exemple précédent de  $k$ -colorabilité, on pourrait donc considérer toutes les  $k$ -partitions du graphe (soit approximativement  $k^n$ ), et pour chacune vérifier s'il s'agit d'une  $k$ -coloration du graphe, ce qui peut se faire en considérant chaque arête et en vérifiant que ses extrémités sont bien dans des parties différentes. La complexité d'un tel algorithme serait  $O(mk^n)$ . Avec une telle complexité, le temps d'exécution de l'algorithme augmentera donc de façon exponentielle avec la taille de l'entrée.

Un algorithme est alors dit *efficace* s'il fonctionne en *temps polynomial*, c'est-à-dire si sa complexité est bornée par une fonction polynomiale de la taille des données. Ainsi, à partir d'une certaine taille pour l'entrée, un tel algorithme s'exécutera toujours plus rapidement qu'un algorithme non polynomial (comme par exemple l'algorithme exponentiel décrit ci-dessus).

Selon l'ensemble des opérations élémentaires permises, les algorithmes que l'on pourra avoir auront des complexités différentes. Cependant, on sait que les langages de program-

mation utilisables en pratique sont tous équivalents, dans le sens où si un problème peut être résolu par un algorithme efficace dans un certain langage, alors dans tout autre langage on pourra également obtenir un algorithme efficace.

On dit qu'un problème appartient à la *classe P* s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Il y a de nombreux problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme de résolution polynomial.

Pour de tels problèmes on regarde alors la notion suivante : un *certificat pour la sortie S* est un objet  $C = f_{\Pi}(E, S)$  dépendant d'une entrée  $E$  et d'une sortie  $S$  dans le cadre d'un certain problème  $\Pi$ , et dont la taille est polynomiale en fonction de celle de  $E$ . Le problème de *vérification d'un certificat C* est le problème de décision qui consiste à demander : étant donné le certificat  $C$ , est-ce que  $S$  est bien la sortie associée à  $E$  pour le problème  $\Pi$  ?

Dans le cas où  $\Pi$  est un problème de décision, on dit que  $\Pi$  est un problème de la *classe NP* (resp. *classe coNP*) si pour toute entrée  $E$  de  $\Pi$ , il existe un certificat du oui (resp. du non) pour lequel le problème de vérification est dans P.

On dit qu'un problème  $\Pi$  *se réduit* à un problème  $\Pi'$  s'il existe un algorithme polynomial pour résoudre  $\Pi$ , qui utilise une fois un oracle pour résoudre le problème  $\Pi'$ .

Un problème  $\Pi$  est alors dit *NP-difficile* si tout problème de NP se réduit à  $\Pi$ . En effet, cela signifie que si on sait résoudre efficacement le problème  $\Pi$ , alors on saura également résoudre efficacement tout problème de NP. Un problème est *NP-complet* s'il est dans NP et s'il est NP-difficile.

Avant de voir un premier problème NP-complet, faisons quelques rappels de logique : une *variable booléenne* est une variable à laquelle on peut assigner la valeur **vrai** ou bien la valeur **faux**. Une *valuation* pour un ensemble de variables consiste à assigner de façon effective (sous forme d'une fonction) une des deux valeurs à chacune des variables.

Une *formule* se construit alors récursivement avec les opérations suivantes : la *négation* inverse la valeur d'une formule (change **vrai** en **faux**, et **faux** en **vrai**); la *conjonction* de deux formules renvoie la valeur **vrai** si et seulement si les deux formules ont la valeur **vrai**; la *disjonction* de deux formules renvoie la valeur **vrai** si et seulement si au moins une des deux formules a la valeur **vrai**.

Un *littéral* est une formule constituée uniquement d'une variable (le littéral est alors dit *positif*), ou de sa négation (le littéral est alors dit *négatif*).

Une formule est dite *satisfiable* s'il existe une valuation qui donne à la formule la valeur **vrai**.

Une formule est dite *normalisée* si elle est écrite sous l'un des deux formes suivantes :

- Une conjonction de termes appelés *clauses*, chaque clause étant une disjonction de littéraux.
- Une disjonction de termes appelés *implicants*, chaque implicant étant une conjonction de littéraux.

On définit alors le problème suivant :

**Satisfiabilité d'un ensemble de clauses de 3 littéraux (3-SAT)**

ENTRÉE : Une formule  $\Phi = (X, C)$  constituée d'une conjonction  $C$  de clauses de trois littéraux chacune, sur un ensemble  $X$  de variables.

QUESTION :  $\Phi$  est-elle satisfiable, i.e. existe-t-il une valuation  $v : X \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$  qui satisfait toutes les clauses ?

Tout d'abord on remarque que 3-SAT est bien un problème de NP, puisqu'une valuation qui satisfait la formule constitue un certificat du oui dont la vérification est polynomiale.

D'autre part, 3-SAT joue un rôle fondamental dans la théorie de la complexité, puisque c'est le premier problème dont la NP-complétude a été démontrée :

**Théorème 1.1.** [21] *Le problème 3-SAT est NP-complet.*

Ce théorème dû à Cook prouve donc que tout problème de NP revient finalement à décider si une certaine formule est satisfiable ou non.

Pour montrer qu'un problème  $\Pi$  est NP-difficile, il suffit alors de réduire 3-SAT à  $\Pi$ . Alors si on sait résoudre  $\Pi$  efficacement, on saura résoudre 3-SAT efficacement, et donc tous les problèmes de NP grâce au Théorème 1.1.

Il est évident qu'un problème de P est également dans NP et dans coNP. On ne sait toutefois pas si réciproquement un problème à la fois dans NP et dans coNP est dans P.

Une autre question ouverte plus connue encore, est la suivante :

**Question 1.1.** *Est-ce que  $P = NP$  ?*

En effet on ne connaît à l'heure actuelle pas d'algorithme polynomial pour résoudre 3-SAT, mais cela ne signifie pas qu'il n'en existe pas...

La Question 1.1 fait d'ailleurs partie des sept problèmes posés par le Clay Mathematical Institute, qui offrira un prix d'un million de dollars pour qui trouverait la solution d'un de ces problèmes.

D'autre part, il n'est pas évident que tous les problèmes de décision soient dans la classe NP. On définit alors récursivement les classes de complexité suivantes :

- On pose tout d'abord  $\Sigma_0P = \Pi_0P = P$ .
- On définit ensuite  $\Sigma_iP$  comme étant la classe des problèmes de décision pour lesquels il existe un certificat du oui dont le problème de vérification est dans  $\Pi_{i-1}P$ ; et  $\Pi_iP$  la classe des problèmes dont le complémentaire est dans  $\Sigma_iP$ .

En particulier, on a  $\Sigma_1P = NP$ , et  $\Pi_1P = \text{coNP}$ .

On sait que pour tout  $i$ , on a  $\Sigma_iP \subset \Sigma_{i+1}P$  et  $\Pi_iP \subset \Pi_{i+1}P$ , mais on ne sait pas si ces inclusions sont strictes ou non.

Si  $P = NP$ , alors toutes ces classes sont identiques à P. Si  $P \neq NP$ , alors on ne sait pas si toutes ces classes sont différentes, ou bien s'il est possible qu'à partir d'un certain  $i_0$  on ait  $\Sigma_iP = \Sigma_{i_0}P$  pour  $i \geq i_0$ .

Pour plus de résultats sur ces classes de complexité, on pourra consulter l'ouvrage de référence de Papadimitriou [59]. Il y est en particulier montré que chacune de ces classes possède un problème canonique associé (c'est-à-dire un problème de référence complet par rapport à cette classe, comme par exemple 3-SAT pour la classe NP). Nous ne donnons ici que le problème suivant QSAT<sub>2</sub>, qui est  $\Sigma_2$ P-complet :

### 2-satisfiabilité quantifiée (QSAT<sub>2</sub>)

ENTRÉE : Une formule  $\Psi = (X, Y, D)$  constituée d'une disjonction  $D$  d'implicants de trois littéraux chacuns, sur deux ensembles  $X$  et  $Y$  de variables.

QUESTION : Existe-t-il une valuation  $v_X : X \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$  telle que pour toute valuation  $v_Y$ , la formule  $\Psi$  est satisfaite ?

## 1.2 Graphes parfaits et graphes sans trou impair

Les graphes parfaits constituent une des classes de graphes les plus étudiées dans la littérature. Les différents ouvrages qui lui sont entièrement consacrés (voir par exemple [9] ou [62]) témoignent bien de l'intérêt que lui porte la communauté des théoriciens des graphes.

Les graphes parfaits ont été introduits par Claude Berge au début des années 1960. Le cheminement qui motive l'étude de cette classe de graphes est assez complexe, mais est fort bien raconté par Berge dans [10].

On peut toutefois motiver a posteriori l'étude des graphes parfaits en considérant le problème de coloration des graphes : il est clair que si un graphe  $G$  contient une clique de taille  $k$ , alors au moins  $k$  couleurs seront nécessaires pour colorier  $G$  ; on a par conséquent  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

L'égalité est toutefois fautive en général, puisque par exemple en considérant  $C_5$ , on a  $\omega(C_5) = 2$  et  $\chi(C_5) = 3$ .

Claude Berge a alors introduit la notion suivante : un graphe  $G$  est dit *parfait* si pour tout sous-graphe induit  $G'$  on a l'égalité  $\chi(G') = \omega(G')$ .

Il semble en effet plus pertinent de chercher à respecter l'égalité sur tous les sous-graphes induits, puisque sinon en rajoutant à n'importe quel graphe une clique suffisamment grande, le graphe résultant vérifiera bien l'égalité.

Au début des années 1960, Claude Berge avait énoncé deux célèbres conjectures concernant les graphes parfaits.

La première, appelée *Conjecture Faible des Graphes Parfaits*, a été démontrée en 1971 par Lovász :

**Théorème 1.2** (Théorème des Graphes Parfaits, [50]). *Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si  $\overline{G}$  est parfait.*

Fulkerson avait également beaucoup étudié ce problème, qui l'avait amené à introduire la théorie des polyèdres antibloquants [35]. Il était très proche d'une preuve du



Théorème 1.2, et Lovász apporte dans [50] le théorème permettant précisément de compléter les travaux de Fulkerson.

Toutefois, Lovász présente dans [50] une preuve indépendante (qui ne s'appuie sur aucun résultat précédent) du Théorème 1.2. Sa preuve utilise les hypergraphes, il introduit pour cela la notion suivante : un hypergraphe  $H$  est dit *normal* si pour tout sous-hypergraphe partiel  $H'$ , on a  $\gamma(H') = \Delta(H')$ , où l'*indice chromatique*  $\gamma(H')$  est le nombre chromatique du line-graphe  $L(H')$ .

Lovász remarque alors qu'il y a une correspondance parfaite entre les graphes parfaits et les hypergraphes normaux, dans le sens où un graphe est parfait si et seulement s'il est le line-graphe d'un hypergraphe normal. Il démontre ensuite l'équivalent du Théorème 1.2 formulé en termes d'hypergraphes.

Claude Berge avait également énoncé une seconde conjecture, appelée *Conjecture Forte des Graphes Parfaits*, qui est dite "forte" dans le sens où la conjecture faible en est un corollaire.

Cette seconde conjecture a été l'objet de très nombreux articles (Chvátal en recense dans [15] plus de 500), et fut finalement démontrée en mai 2002 par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas :

**Théorème 1.3** (Théorème Fort des Graphes Parfaits, [14]). *Un graphe est parfait si et seulement s'il est sans trou impair ni antitrou impair.*

À côté de ces résultats, plusieurs autres problèmes se posaient. Remarquons que les graphes parfaits peuvent être vus comme des graphes possédant de bons certificats du **oui** et du **non** pour la coloration (une coloration correcte pour un certificat du **oui**, et une clique suffisamment grande pour un certificat du **non**).

Le problème de coloration des graphes parfaits est donc à la fois dans NP et dans coNP. Comme remarqué à la Section 1.1.3, il est possible que tout problème ayant cette propriété soit également dans P. Le problème de coloration des graphes parfaits ne contredit pas cette possibilité car il existe bien un algorithme polynomial de coloration pour les graphes parfaits, dû à Grötschel, Lovász, et Schrijver [40].

Toutefois cet algorithme utilise la méthode des ellipsoïdes et n'est donc pas purement "combinatoire". De plus cet algorithme est dur à implémenter en pratique en raison d'une forte instabilité numérique, on espère donc encore trouver un autre algorithme qui puisse être conceptuellement plus simple, et plus efficace en pratique.

Enfin on peut considérer le problème de reconnaissance des graphes parfaits. Ce problème a été résolu par Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour et Vušković [13].

Il faut remarquer que leur algorithme reconnaît en fait les graphes qui ne comportent ni trou impair ni antitrou impair, et ne reconnaît donc les graphes parfaits que dans la mesure où le Théorème Fort des Graphes Parfaits est vrai.

Par ailleurs, on ne connaît toujours pas la complexité du problème de reconnaissance des graphes sans trou impair dans le cas général, bien que ce problème soit assez étudié.

Dans [20], Conforti, Cornuéjols et Vušković prouvent un théorème de décomposition des graphes sans trou impair, qui ne fournit malheureusement pas d'algorithme polynomial.

Bienstock a montré [11] qu'il est NP-complet de décider s'il existe un trou impair passant par un sommet donné d'un graphe. On peut toutefois imaginer qu'un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes sans trou impair pourrait ne savoir répondre que oui ou non, ou bien ne fournir qu'un plus petit trou impair dans le cas où il en existe un.

Le meilleur résultat connu dans ce sens (et qui laisse penser que le problème serait effectivement polynomial) est un algorithme présenté dans [18] qui est polynomial si la taille maximum d'une clique est bornée. Ce papier s'inspire des méthodes de [13].

## 1.3 Le problème de clique-coloration

### 1.3.1 Définitions et remarques générales

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. On appelle *clique-hypergraphe* de  $G$  ou *hypergraphe des cliques maximales* de  $G$ , l'hypergraphe  $\mathcal{H}(G) = (V, \mathcal{E})$ , ayant les mêmes sommets que  $G$ , et pour hyperarêtes l'ensemble des cliques maximales de  $G$ .

Étant donnée une  $k$ -partition de  $V$ , une clique maximale de  $G$  est dite *monochromatique* si l'hyperarête de  $\mathcal{H}(G)$  correspondante est monochromatique dans la  $k$ -partition. Si aucune clique maximale de  $G$  n'est monochromatique, alors la  $k$ -partition est une  $k$ -coloration de  $\mathcal{H}(G)$ , et est également appelée  *$k$ -clique-coloration* de  $G$ . Si  $G$  possède une  $k$ -clique-coloration, on dit que  $G$  est  *$k$ -clique-colorable*. On appelle *nombre clique-chromatique* de  $G$ , noté  $\kappa(G)$ , le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  possède une  $k$ -clique-coloration.

Parfois, plutôt que de nommer les couleurs par leur indice dans une  $k$ -partition, on pourra les nommer par des couleurs réelles, ce qui revient bien entendu au même, mais peut faciliter la compréhension.

Une arête qui n'est contenue dans aucun triangle (et qui constitue donc une clique maximale du graphe), est appelée *arête plate*. Les arêtes plates sont alors les seules arêtes du graphe dont on sait à l'avance que dans toute clique-coloration les extrémités doivent nécessairement avoir des couleurs distinctes.

Similairement à la coloration usuelle, on aborde avec la clique-coloration des problèmes de différents types, dont principalement le problème de décision suivant :

#### **$k$ -Clique-Colorabilité ( $k$ -CC)**

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

QUESTION :  $G$  est-il  $k$ -clique-colorable ?

Nous verrons au Chapitre 4 que le problème  $k$ -CC est difficile dans le cas général,

nous essaierons alors de voir ce qu'il en est dans des classes particulières de graphes.

Une autre question à laquelle on s'intéressera est de savoir, étant donnée une classe de graphes  $\mathcal{G}$ , existe-t-il une constante  $k_{\mathcal{G}}$  qui borne les nombres clique-chromatiques de tous les graphes de  $\mathcal{G}$  ?

Il est clair que toute coloration d'un graphe  $G$  est également une clique-coloration, on a ainsi  $\kappa(G) \leq \chi(G)$ . Il peut y avoir égalité dans certains cas : par exemple pour les graphes sans triangle, où toutes les arêtes sont des cliques maximales.

De plus le nombre chromatique des graphes sans triangle n'étant pas borné [56], cet exemple montre qu'il en est de même pour le nombre clique-chromatique en général.

Cependant, bien souvent le nombre clique-chromatique est bien plus petit que le nombre chromatique. Par exemple, le nombre chromatique des graphes complets est égal au nombre de sommets, alors que leur nombre clique-chromatique est 2, quelle que soit la taille du graphe. Cet exemple montre d'ailleurs qu'il existe des classes de graphes pour lesquelles le nombre chromatique n'est pas borné, alors que le nombre clique-chromatique l'est.

Une autre différence essentielle entre la coloration et la clique-coloration est que le nombre clique-chromatique ne décroît pas nécessairement en considérant les sous-graphes. Il se peut en effet que rajouter un sommet ou une arête à un graphe fasse décroître son nombre clique-chromatique. Par exemple,  $\kappa(C_5) = 3$ , mais en rajoutant une corde, le graphe obtenu est 2-clique-coloriable. De même, en rajoutant un sommet universel à un graphe de nombre clique-chromatique quelconque, ce graphe devient 2-clique-coloriable, car le sommet universel appartenant à toutes les cliques maximales, il suffit de lui donner la couleur 1, et la couleur 2 aux autres sommets du graphe.

Enfin, à moins qu'une clique-coloration ne soit une coloration au sens usuel du graphe, alors elle n'est pas une clique-coloration pour les sous-graphes. En effet, s'il existe une arête monochromatique, alors le sous-graphe constitué de cette seule arête n'est pas correctement clique-colorié.

Nous avons vu dans la section précédente que les graphes parfaits ont été définis à partir d'une "bonne" propriété pour le problème de coloration, à savoir qu'il existe un bon certificat du **oui**, et un bon certificat du **non**. Nous avons également rappelé que cette classe de graphes possède des propriétés intéressantes, comme l'existence d'un algorithme optimal polynomial de coloration, et d'un algorithme polynomial de reconnaissance.

Il semble alors assez naturel de regarder si cette classe de graphes a également des propriétés intéressantes avec le nouveau type de coloration que nous venons de définir. Nous verrons dans la Section 4 que ce n'est pas le cas pour certains aspects, cependant une question reste ouverte :

**Question 1.2.** ([26], [43, Problème 15.15]) *Existe-t-il une constante  $k_0$  telle que tout graphe parfait est  $k_0$ -clique-coloriable ?*

Cette question a été abordée dans plusieurs articles, mais n'a jamais été résolue.

On sait toutefois que si une telle constante  $k_0$  existe, alors nécessairement  $k_0 \geq 3$ , puisque le graphe de la Figure 1.1 est un graphe parfait dont le nombre clique-chromatique est 3.

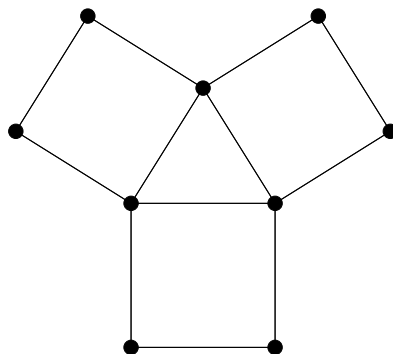


FIG. 1.1 – Exemple de graphe parfait dont le nombre clique-chromatique est 3.

En fait, Bacsó, Gravier, Gyárfás, Preissmann, et Sebő, font remarquer dans [4] qu'on ne connaît aucun graphe sans trou impair ayant un nombre clique-chromatique supérieur ou égal à 4. On peut donc étendre la Question 1.2 de la façon suivante :

**Question 1.3.** *Existe-t-il une constante  $k_1$  telle que tout graphe sans trou impair est  $k_1$ -clique-coloriable ?*

Cette question a été particulièrement étudiée dans cette thèse, malheureusement sans être résolue. Nous verrons cependant au chapitre 3 que dans de nombreux cas particuliers une telle constante existe. Plus précisément, dans presque tous les cas connus, 3 couleurs sont suffisantes, ce qui laisse espérer que c'est également vrai dans le cas en général.

Il semble donc légitime d'énoncer cette conjecture :

**Conjecture 1.1.** *Tous les graphes sans trou impair sont 3-clique-coloriables.*

### 1.3.2 Historique de la clique-coloration et quelques résultats connus

Dans cette section, nous retraçons comment le problème est apparu dans la littérature, en décrivant quelques articles de référence.

Certains articles récents traitant plus spécifiquement d'aspects de la clique-coloration sur lesquels le travail de cette thèse s'est porté ne seront mentionnés que dans les sections suivantes.

La notion d'hypergraphe des cliques maximales d'un graphe est apparue de manière éparsée dans la littérature, mais a été plus particulièrement considérée dans le cadre du problème des transversaux de cliques dans les graphes. L'étude de ce problème était notamment motivée par une question de Gallai demandant si dans les graphes triangulés

(qui sont les graphes ne possédant aucun trou) ayant toutes leurs cliques maximales de taille au moins  $k$ , il existe un transversal de l'hypergraphe des cliques de taille  $n/k$ .

À titre d'information pour le lecteur, nous recommandons les quelques références suivantes : l'article [69] dans lequel Tuza répond à la question de Gallai pour  $k = 3$ , et rappelle le cas  $k = 2$ ; l'article de Erdős, Gallai et Tuza [28] donne une bonne vue d'ensemble de ce problème; enfin, Guruswami et Pandu Rangan donnent dans [41] d'intéressants résultats de complexité.

Partant du problème posé par Gallai, Aigner et Andreae avaient remarqué dans [1] que pour  $k = 2$  le résultat est facile pour les graphes de comparabilité, et posaient la question pour les complémentaires de ces graphes.

Lonc et Rival avaient alors conjecturé dans [47] un résultat plus fort : qu'il existerait dans les graphes de cocomparabilité un sous-ensemble de sommets tel que lui-même et son complémentaire seraient des transversaux de cliques, en d'autres termes que ces graphes seraient 2-clique-coloriables.

Duffus, Sands, Sauer et Woodrow remarquent dans [26] que les graphes de comparabilité ont cette propriété :

**Théorème 1.4.** [26] *Les graphes de comparabilité sont 2-clique-coloriables.*

Par ailleurs, Les auteurs de [26] exhibent un contre-exemple à la conjecture de Lonc et Rival. Toutefois, Duffus, Kierstead et Trotter ont montré dans [25] le théorème suivant :

**Théorème 1.5.** [25] *Les graphes de cocomparabilité sont 3-clique-coloriables.*

Ces deux classes de graphes faisant partie de la classe des graphes parfaits, c'est ce qui motive les auteurs de [26] à poser la Question 1.2, de savoir ce que l'on peut dire du nombre clique-chromatique des graphes parfaits.

Dans un autre article concernant les transversaux de cliques, Andreae, Schughart et Tuza [3] définissent la notion de *faiblement  $k$ -coloriable*, qui correspond exactement à notre définition de  $k$ -clique-coloriable.

Leur intérêt pour cette notion vient du fait que si un graphe  $G$  est faiblement  $k$ -coloriable, alors il existe un transversal de cliques de taille  $\leq \frac{(k-1)|V(G)|}{k}$ . Ceci ne se vérifie en effet pas pour tous les graphes, puisque Erdős, Gallai et Tuza ont montré dans [28] qu'il existe une séquence de graphes  $G_n$  avec  $|V(G_n)| = n$ , telle que la taille minimale d'un transversal de  $G_n$  est  $\geq n - o(n)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Ainsi, outre leurs résultats sur les transversaux d'hypergraphes, Andreae, Schughart et Tuza prouvent dans leur article les théorèmes suivants :

**Théorème 1.6.** [3] *Soit  $k \geq 2$  et  $G$  un graphe connexe qui n'est pas un trou impair. Alors le line-graphe  $L(G)$  est  $k$ -coloriable si et seulement si les arêtes de  $G$  peuvent être coloriées avec  $k$  couleurs sans qu'un triangle monochromatique apparaisse.*

**Théorème 1.7.** [3] *Soit  $G$  un graphe sans sommet isolé. Alors  $\overline{L(G)}$ , le complément du line-graphe de  $G$ , est 2-clique-coloriable si et seulement si  $G$  n'est pas un des graphes de la Figure 1.2.*

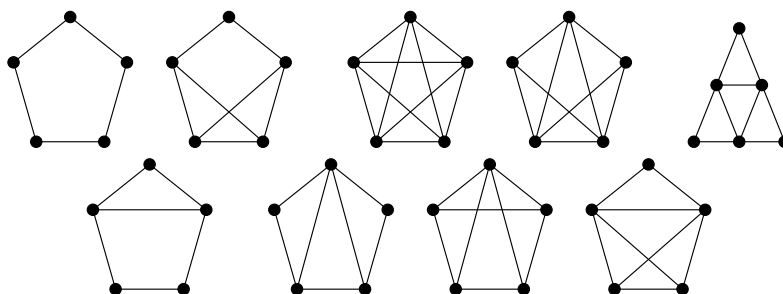


FIG. 1.2 – Graphes dont le complémentaire du line-graphe n'est pas 2-clique-coloriable.

Dans le Théorème 1.6, les graphes concernés relèvent de la théorie de Ramsey, nous renvoyons le lecteur à [37, Chapitre 5.3] pour plus de précisions.

Le cas des graphes planaires a été étudié par Mohar et Škrekovski dans [57], ainsi que par Kratochvíl et Tuza dans [45].

**Théorème 1.8.** [57] *Tout graphe planaire est 3-clique-coloriable.*

**Théorème 1.9.** [45] *Le problème 2-CC est polynomial pour les graphes planaires.*

Nous avons déjà remarqué que le nombre clique-chromatique d'un graphe n'est pas borné en général, mais qu'il l'est pour certaines classes de graphes. Bien souvent, les classes de graphes étudiées sont *héréditaires*, c'est-à-dire qu'étant donné un graphe de la classe, tout sous-graphe induit de ce graphe est également dans la classe. De telles classes peuvent se caractériser par une liste (éventuellement infinie) de sous-graphes induits interdits.

Il semble alors assez naturel de se demander, étant donnée une liste de sous-graphes interdits, s'il existe une borne pour les nombres clique-chromatiques des graphes de la classe associée. Gravier, Hoàng et Maffray ont résolu cette question pour un seul sous-graphe interdit, avec le théorème suivant :

**Théorème 1.10.** [38] *Soit  $F$  un graphe. Il existe  $k_F$  tel que tout graphe  $G$  sans  $F$  est  $k_F$ -clique-coloriable si et seulement si  $F$  est une union disjointe de chemins. De plus, on a dans ce cas :*

- Si  $|V(F)| \leq 2$  ou que  $F = P_3$ , alors  $k_F \leq 2$ ,
- Sinon  $k_F \leq cc(F) + |V(F)| - 3$ , où  $cc(F)$  désigne le nombre de composantes connexes de  $F$ .

En particulier, ce théorème indique qu'un graphe sans  $P_{k+2}$  (avec  $k \geq 2$ ) est  $k$ -clique-coloriable. Ils affinent la borne donnée par ce théorème dans quelques sous-cas :

**Théorème 1.11.** [38] *Pour  $k \geq 4$ , tout graphe sans  $P_k + P_1$  (union disjointe d'un  $P_k$  et d'un sommet isolé) est  $(k - 1)$ -clique-coloriable.*

**Théorème 1.12.** [38] *Tout graphe sans  $P_3 + 2P_1$  (union disjointe d'un  $P_3$  et de deux sommets isolés) est 3-clique-coloriable.*

Cependant, le Théorème 1.10 se généralise mal dans le cas de plusieurs sous-graphes interdits. Par exemple ni le  $K_{1,3}$  ni le triangle ne sont des unions disjointes de chemins, et pourtant les graphes définis par ces deux sous-graphes interdits sont des unions disjointes de chemins et de cycles, et sont donc tous 3-clique-coloriables.

De plus, les auteurs de [38] font remarquer que les bornes données par le Théorème 1.10 ne sont peut-être pas les meilleures possibles en général.

Par ailleurs, la preuve de leur théorème utilise un résultat de Erdős et Hajnal [29] disant que pour tout  $k, l$ , il existe des graphes de nombre chromatique  $k$ , et dont le plus petit cycle est de longueur  $l + 1$ . Ces graphes étant sans triangle, leur nombre clique-chromatique est donc également  $k$ . Ceci montre que pour toute liste finie de cycles interdits, on ne peut pas borner les nombres clique-chromatiques des graphes de la classe résultante. En revanche rien n'interdit pour une liste infinie d'avoir une borne finie. En particulier, ce résultat de Erdős et Hajnal ne permet pas de répondre à la Question 1.3.

Pour terminer cette section, citons l'important travail effectué par Bacsó, Gravier, Gyárfás, Preissmann et Sebő, qui ont abordé dans [4] de nombreux aspects de la clique-coloration.

Outre des résultats de complexité et d'autres sur les graphes parfaits que nous détaillerons dans les sections suivantes, ils donnent de nombreux résultats généraux, dont les suivants :

**Théorème 1.13.** [4] *Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe. On a alors  $\kappa(G) \leq \gamma(G) + 1$ , où  $\gamma(G)$  est la taille minimum d'une partie dominante de  $G$ . De plus, si  $\kappa(G) = \gamma(G) + 1$ , alors toute partie dominante  $D$  de taille minimum est un stable, et l'une des propriétés suivantes est vraie :*

- $|D| < \alpha(G)$
- $D$  est une paire de deux sommets non adjacents de  $G = C_5$
- $|D| = 1$ , et  $G = K_n$ ,  $n \geq 2$

**Corollaire 1.1.** [4] *Pour tout graphe  $G \neq C_5$  avec  $\alpha(G) \geq 2$ , on a :  $\kappa(G) \leq \alpha(G)$ .*

**Corollaire 1.2.** [4] *Pour tout graphe  $G$ , on a :  $\kappa(G) \leq 2\lceil \sqrt{|V(G)|} \rceil$ .*

Ce corollaire découle du théorème cité précédemment. Les auteurs de [4] rapportent cependant que la borne fournie n'est pas la meilleure possible, puisqu'Andrei Kotlov aurait montré que  $\kappa(G) \leq \lfloor \sqrt{2|V(G)|} \rfloor$  (ce résultat n'a pas été publié).

**Théorème 1.14.** [4] *Soit  $G = (V, E)$  un graphe, un entier  $q \geq 2$ , et  $\mathcal{H}_q$  l'hypergraphe des cliques maximales de  $G$  de taille au moins  $q$ . Alors  $\mathcal{H}_q$  est  $\lceil \frac{\chi(G)}{q-1} \rceil$ -coloriable.*

**Théorème 1.15.** [4] *Soit  $G$  un multigraphe, et l'hypergraphe  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ , où  $V = E(G)$ , et  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des étoiles de  $G$ . Alors :  $\chi(\mathcal{H}) \leq 3$ .*

*De plus,  $\chi(\mathcal{H}) = 3$  si et seulement si  $G$  a une composante qui est un cycle impair.*

**Théorème 1.16.** [4] *Soit  $G$  un graphe, et  $2 \leq k \leq \alpha(G)$ . Si  $G$  est sans  $K_{1,k}$ , alors :*  
 $\kappa(\overline{G}) \leq k$ .





## Chapitre 2

# Coloration d'hypergraphes

L'étude des hypergraphes est un domaine très vaste. C'est un concept qui généralise d'autres objets mathématiques, en particulier les graphes. Les hypergraphes sont étudiés depuis assez longtemps, avant même l'apparition du terme "hypergraphe"; on utilisait par exemple souvent le nom de "set systems".

La détermination du nombre chromatique des hypergraphes est un problème assez ancien, en particulier le problème de l'existence d'une 2-coloration; la propriété d'être 2-coloriable est d'ailleurs également connue sous le nom de *propriété B*. Il existe en réalité différentes notions de coloration d'hypergraphes, celle que nous étudions ici (définie au chapitre précédent) en étant la plus courante, parfois également appelée *coloration faible*.

Outre des applications pratiques, la coloration d'hypergraphes peut avoir des applications dans d'autres domaines théoriques. Il est par exemple intéressant de noter que le problème des 4 couleurs que l'on a vu en introduction peut se formuler comme un problème de 2-coloration d'hypergraphe [70].

Dans ce chapitre on ne présente pas une bibliographie complète, mais on rappelle certains résultats significatifs permettant d'avoir une vue d'ensemble de ce problème. On pourra se référer à [7] ou [24] pour un panorama plus complet des résultats existants.

### 2.1 Bornes générales

Calculer le nombre chromatique d'un hypergraphe est un problème difficile. Plus précisément, Lovász a montré dans [49], que pour tout  $k \geq 2$ , il est NP-complet de décider si un hypergraphe quelconque est  $k$ -coloriable.

On peut alors aborder ce problème de plusieurs manières différentes.

Dans cette première section, nous citons quelques résultats qui tentent d'estimer le nombre chromatique d'un hypergraphe en général, en donnant des bornes en fonction d'autres paramètres de l'hypergraphe.

Ces deux premières propositions relient le nombre chromatique d'un hypergraphe avec son nombre de sommets et son nombre de stabilité :

**Proposition 2.1.** [7] *Pour tout hypergraphe  $H$  ayant  $n$  sommets, on a :  $\alpha(H)\chi(H) \geq n$ .*

**Proposition 2.2.** [7] *Pour tout hypergraphe  $H$  ayant  $n$  sommets, on a :  $\alpha(H) + \chi(H) \leq n + 1$*

Dans un graphe, le nombre chromatique est borné par  $\Delta + 1$ , une coloration avec au plus  $\Delta + 1$  couleurs pouvant être obtenue par un simple algorithme séquentiel de coloration.

Ce résultat peut se généraliser pour les hypergraphes de la façon suivante :

Etant donné un hypergraphe  $H = (V, \mathcal{E})$  et  $v \in V$ , on appelle *étoile linéaire centrée en  $v$*  un ensemble d'arêtes  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  tel que  $\forall e, f \in \mathcal{E}'$ , avec  $e \neq f$ , on a  $e \cap f = \{v\}$ . On définit le *degré linéaire*  $d_l(v)$  d'un sommet  $v$ , qui correspond à la taille d'une plus grande étoile linéaire centrée en  $v$ . Enfin, on définit  $\delta_l(H)$  comme le plus petit degré linéaire d'un sommet de  $H$ , et  $\Delta_l(H)$  le plus grand degré linéaire d'un sommet de  $H$ .

Lovász a montré [51] que pour tout hypergraphe  $H$ , on a  $\chi(H) \leq \Delta_l(H) + 1$ , cette borne étant atteinte par  $H_n^r$  pour tout  $n, r$ . Berge a généralisé ce théorème de la façon suivante :

**Théorème 2.1.** [7] *Pour tout hypergraphe  $H$ , on a :*

$$\chi(H) \leq \max_{A \subseteq V(H)} \delta_l(H/A) + 1$$

Dans le cas des graphes, le Théorème de Brooks [12] permet de ramener la borne  $\Delta + 1$  à  $\Delta$ , sauf si le graphe est un trou impair ou un graphe complet.

Il existe une généralisation du théorème de Brooks pour les hypergraphes, qui ne concerne malheureusement que les hypergraphes linéaires :

**Théorème 2.2.** [46] *Soit  $H$  un hypergraphe linéaire. Alors  $\chi(H) \leq \Delta(H)$  sauf dans les deux cas suivants :*

- (i)  $\Delta(H) = 2$  et une composante connexe de  $H$  est un trou impair.
- (ii)  $\Delta(H) > 2$  et une composante connexe de  $H$  est le graphe complet à  $\Delta(H) + 1$  sommets.

L'intérêt pratique de la coloration d'hypergraphes est souvent de résoudre des problèmes d'optimisation, et c'est pourquoi beaucoup de résultats donnent des bornes supérieures du nombre chromatique.

Néanmoins, pour comprendre ce qui fait augmenter le nombre chromatique d'un hypergraphe, il est intéressant de construire des hypergraphes avec un nombre chromatique aussi grand que voulu. Une première manière de construire de tels hypergraphes est de considérer les hypergraphes complets : considérant  $H_n^r$ , on sait qu'il ne peut y avoir  $r$  sommets de la même couleur, et donc  $\chi(H_n^r) = \lceil n/(r-1) \rceil$ .

Dans ces hypergraphes il existe beaucoup de cycles de petite taille. Mais ce n'est en général pas cette particularité qui fait augmenter le nombre chromatique, comme l'indique le résultat suivant de Erdős et Hajnal :

**Théorème 2.3.** [29] *Pour tout  $r, k, g$ , avec  $r \geq 2$ , il existe un  $r$ -hypergraphe de nombre chromatique  $\geq k$  qui ne contient pas de cycle de taille  $\leq g$ .*

Des preuves constructives de ce résultat ont par la suite été données par Lovász [51], et par Nešetřil et Rödl [58].

## 2.2 Problèmes extrêmes

Une autre façon d'étudier la coloration des hypergraphes est de regarder les liens entre le nombre chromatique et le nombre d'arêtes (minimum ou maximum) que peut contenir un hypergraphe ayant ce nombre chromatique.

Un premier résultat est dû à Lovász qui avait remarqué dans [48] que tout hypergraphe connexe  $H$  qui n'est pas 2-coloriable est tel que  $|\mathcal{E}(H)| \geq |V(H)|$ .

Étant donné un ensemble  $V$ , une  $k$ -partition  $(V_1, \dots, V_k)$  de  $V$  est dite *équitable* si pour tout  $i$  on a  $\lfloor n/k \rfloor \leq |V_i| \leq \lceil n/k \rceil$ .

Sterboul a alors caractérisé le nombre maximum d'arêtes  $M_k(n, r)$  que pouvait avoir un  $r$ -hypergraphe  $k$ -coloriable ayant  $n$  sommets :

**Théorème 2.4.** [67] *Soit  $H_{n,k}^r$  un  $r$ -hypergraphe sur un ensemble de  $n$  sommets  $V$  ayant une  $k$ -partition uniforme  $(V_1, \dots, V_k)$ , défini par :*

$$\mathcal{E}(H_{n,k}^r) = \{e | e \subset V, |e| = r, e \not\subseteq V_1, \dots, e \not\subseteq V_k\}$$

*On a alors  $M_k(n, r) = |\mathcal{E}(H_{n,k}^r)|$ ; et tout  $r$ -hypergraphe  $k$ -coloriable ayant  $n$  sommets et  $M_k(n, r)$  arêtes est isomorphe à  $H_{n,k}^r$ .*

Une autre valeur qu'on n'a, pour l'instant, pas réussi à évaluer est le nombre minimum d'arêtes  $m_k(n, r)$  que doit contenir un  $r$ -hypergraphe à  $n$  sommets qui n'est pas  $k$ -coloriable. Erdős a pu en donner une borne inférieure :

**Théorème 2.5.** [27] *Pour  $r \geq 2, k \geq 2, n \geq kr$ , on a :  $m_k(n, r) \geq k^{r-1}$ .*

Cette borne a ensuite été généralisée ou améliorée pour certains cas particuliers, qui sont répertoriés dans [7].

Il existe également des bornes supérieures connues :

**Théorème 2.6.** [42]

$$m_k(n, r) \leq \binom{kr - k + 1}{r}$$

Pour tenter d'évaluer  $m_k(n, r)$ , on peut s'intéresser aux hypergraphes critiques : un hypergraphe est dit  *$k$ -critique* si son nombre chromatique est  $k$ , mais que tout sous-hypergraphe partiel propre a un nombre chromatique inférieur. Un  $r$ -hypergraphe  $(k+1)$ -critique sur  $n$  sommets possède donc au moins  $m_k(n, r)$  arêtes.

**Théorème 2.7** (Lovász, [24]). *Pour tout  $r$ -hypergraphe 3-critique  $H$ , on a :*

$$|\mathcal{E}(H)| \leq \binom{n}{r-1}$$

**Corollaire 2.1.**

$$m_2(n, r) \leq \binom{n}{r-1}$$

De façon similaire, on peut définir les hypergraphes  $k$ -sommets-critiques, c'est-à-dire les hypergraphes dont le nombre chromatique est  $k$ , et pour lesquels retirer un sommet fait diminuer le nombre chromatique. Les hypergraphes sommets-critiques ont été peu étudiés, mais pourraient toutefois avoir des propriétés intéressantes. Berge a par exemple établi certains liens avec le problème des 4 couleurs [8].

Une autre méthode donnant des résultats pour les problèmes extrémaux est d'avoir une approche probabiliste. Pour voir le fonctionnement précis de cette méthode et un champ de ses applications possibles on pourra se référer à [2].

Le principe général est de considérer un ensemble d'évènements, et de montrer que sous certaines contraintes d'interdépendances de ces évènements, il y a une probabilité non nulle qu'aucun ne se produisent. Étant donné un hypergraphe  $H$ , les évènements que l'on considère sont alors "l'arête  $e$  est monochromatique" pour chacune des arêtes de  $H$ . Si  $H$  vérifie certaines contraintes, il y a une probabilité non nulle qu'en coloriant aléatoirement les sommets de  $H$  avec  $k$  couleurs, on obtienne une  $k$ -coloration de  $H$ ; et ceci revient à dire qu'il existe une  $k$ -coloration de  $H$ .

Cet argument assez déroutant mais efficace (il peut d'ailleurs s'appliquer à d'autres problèmes) permet d'obtenir de nouveaux théorèmes. Malheureusement il ne donne pas de preuve constructive.

Un outil permettant d'utiliser l'approche probabiliste est le Lemme Local de Lovász, dont le théorème suivant est un corollaire direct :

**Théorème 2.8.** [30] *Si un  $r$ -hypergraphe  $H$  n'est pas  $k$ -coloriable, alors  $H$  contient une arête rencontrant au moins  $k^{r-2}/e$  autres arêtes (où  $e$  est la constante de base du logarithme népérien).*

**Corollaire 2.2.** [30] *Si  $H$  est un  $r$ -hypergraphe linéaire qui n'est pas  $k$ -coloriable, alors  $H$  contient au moins  $k^{r-2}/e(r-1)$  sommets de degré au moins  $k^{r-2}/e(r-1)$ , et contient au moins  $k^{r-2}/er(r-1)$  arêtes deux à deux disjointes.*

**Corollaire 2.3.** [30] *Pour tout  $r$ -hypergraphe  $H$ , on a :  $\chi(H) \leq (er\Delta)^{1/(r-1)}$ .*

Dans le cas  $k = 2$ , McDiarmid montré une version améliorée de ce théorème :

**Théorème 2.9.** [52] *Soit  $H$  un hypergraphe dans lequel chaque arête contient au moins  $r$  sommets et rencontre au plus  $d$  autres arêtes. Si  $e(d+2) \leq 2^r$ , alors  $H$  est 2-coloriable.*

## 2.3 Hypergraphes sans cycle impair

Enfin on peut s'intéresser aux liens entre certains aspects structurels d'un hypergraphe et son nombre chromatique. Par "structurels" on entend des propriétés qui ne se traduisent pas en terme de cardinalités de paramètres. Bien souvent, cela consiste à interdire l'existence de certains sous-hypergraphes partiels.

Cet angle de vue sur la coloration des hypergraphes a été moins étudié, mais il est intéressant de remarquer que les quelques théorèmes connus que nous allons voir dans cette section concernent surtout diverses variétés de cycles impairs, dont l'interdiction implique la 2-colorabilité.

Ceci fait que les hypergraphes que nous verrons dans cette section constituent une manière de généraliser les graphes bipartis. Cependant il y a équivalence en ce qui concerne les graphes (si un graphe est 2-coloriable alors il ne contient pas de cycle impair), ce qui n'est pas le cas ici.

### 2.3.1 Hypergraphes équilibrés

Un hypergraphe est dit *équilibré* si dans tout cycle impair il existe une arête du cycle contenant au moins trois sommets du cycle. Ces hypergraphes ont été beaucoup étudiés, par Berge en particulier [5], et également par Conforti, Cornuéjols et Rao [19] qui ont donné un théorème de décomposition des hypergraphes équilibrés donnant un algorithme polynomial de reconnaissance.

Parmi les nombreuses propriétés de cette famille d'hypergraphes, celle qui nous intéresse ici est la suivante :

**Théorème 2.10.** [5] *Un hypergraphe  $H$  est équilibré si et seulement si tous ses sous-hypergraphes induits sont 2-coloriables.*

Ce résultat important provient en fait de la structure très forte des hypergraphes équilibrés.

On peut donc se demander si en allégeant les conditions sur les cycles interdits il est toujours possible d'obtenir des bonnes propriétés de coloration, quitte à ce qu'elles ne se vérifient pas nécessairement pour tous les sous-hypergraphes induits.

### 2.3.2 Hypergraphes pseudo-équilibrés

Un hypergraphe est dit *pseudo-équilibré* si dans tout cycle impair il existe au moins 3 arêtes ayant un sommet en commun. Ces hypergraphes qui généralisent les hypergraphes équilibrés ont été introduits par Fournier et Las Vergnas, qui montrent le théorème suivant :

**Théorème 2.11.** [32] *Tout hypergraphe pseudo-équilibré est 2-coloriable.*

Ce théorème répondait en fait à une question de Lovász [50], qui demandait si les hypergraphes normaux étaient 2-coloriables ou non.

Fournier et Las Vergnas prouvent également le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** [32] *Un hypergraphe est pseudo-équilibré si et seulement s'il ne contient pas d'hypercycle impair.*

Il n'y a toutefois pas équivalence, puisqu'un hypergraphe 2-coloriable n'est pas nécessairement pseudo-équilibré. Cette classe d'hypergraphes doit donc encore pouvoir être généralisée.

C'est ce qu'ont fait Fournier et Las Vergnas, toujours en modifiant les conditions sur les cycles impairs interdits :

**Théorème 2.12.** [33] *Soit  $H$  un hypergraphe ne contenant aucun cycle impair  $(x_1, e_1, x_2, \dots, x_k, e_k, x_1)$  tel que trois arêtes quelconque du cycle ont une intersection vide, et tel que  $|e_i \cap e_{i+1}| = 1$  pour  $i = 1, \dots, k - 1$ . Alors  $H$  est 2-coloriable.*

Ce théorème était en réalité une version affaiblie d'une conjecture de Sterboul que nous allons maintenant présenter et démontrer.

### 2.3.3 Hypergraphes de Sterboul

Un cycle impair  $(x_1, e_1, x_2, \dots, e_k, x_1)$  tel que deux arêtes non consécutives sont disjointes et  $|e_i \cap e_{i+1}| = 1$  for  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ , est appelé *cycle anti-Sterboul*. On appelle *hypergraphe de Sterboul* un hypergraphe  $H$  qui ne possède pas de cycle anti-Sterboul.

Sterboul avait alors fait la conjecture suivante :

**Conjecture 2.1** (Sterboul, [68], [24]). *Si  $H$  est un hypergraphe de Sterboul, alors  $H$  est 2-coloriable.*

Notons tout d'abord (comme observé dans [33], [34]) que l'on doit nécessairement autoriser dans la définition d'un cycle anti-Sterboul la possibilité que  $|e_k \cap e_1| > 1$ . En effet, le  $r$ -hypergraphe complet sur  $2r - 1$  sommets ne contient pas de cycle anti-Sterboul dans lequel  $|e_k \cap e_1| < r - 1$ , et il n'est pas 2-coloriable.

Pour pouvoir prouver la conjecture de Sterboul on a besoin de l'algorithme suivant, dont le principe est de modifier une 2-partition d'un hypergraphe dans laquelle une seule arête est monochromatique pour tenter d'en donner une 2-coloration.

On pourra alors colorier un hypergraphe de Sterboul en considérant les arêtes une par une, et en appliquant l'algorithme à chaque fois, de sorte qu'on aura à chaque étape une 2-coloration des arêtes déjà considérées.

L'algorithme fonctionne de la façon suivante : à chaque étape, la couleur d'un sommet appartenant à une arête monochromatique est inversée. L'algorithme construit alors un arbre  $T = (V', E)$ , et une fonction  $g : V' \rightarrow \mathcal{E}$  qui retracent les différentes étapes de l'algorithme : les sommets de  $T$  sont ceux de  $H$  dont la couleur a été inversée, et  $g$  associe à un sommet de  $T$  l'arête monochromatique ayant causé l'inversion de couleur.

Les sommets sont choisis en effectuant un parcours en profondeur, on utilise donc une pile  $\mathcal{P}$ , qui contient un sous-ensemble des sommets dont la couleur a été inversée, et qui forme une couverture des arêtes monochromatiques à chaque itération. Les opérations possibles sur la pile  $\mathcal{P}$  sont les suivantes : **sommet**( $\mathcal{P}$ ) renvoie le dernier sommet rentré dans  $\mathcal{P}$ , **dépiler**( $\mathcal{P}$ ) retire **sommet**( $\mathcal{P}$ ) de  $\mathcal{P}$ , et **empiler**( $x, \mathcal{P}$ ) rajoute un nouveau sommet dans  $\mathcal{P}$ .

**Algorithme 2.1.**

**Entrée** : Un hypergraphe  $H$  et une 2-partition telle qu'une seule arête  $e_0$  est monochromatique

**Sortie** : Une 2-coloration de  $H$  ou **Erreur**

soit  $x_0 \in e_0$

$V' := \{x_0\}$ ;  $E := \emptyset$

$g(x_0) := e_0$

**inverser**  $c(x_0)$

**empiler**( $x_0, \mathcal{P}$ );

Tant que  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , faire

  soit  $v := \text{sommet}(\mathcal{P})$

  S'il existe  $e \in \mathcal{E}$ ,  $|e| \geq 2$ , monochromatique telle que  $v \in e$ , alors

    Si  $e \subset V'$ , alors

      retourner **Erreur**

    sinon

      soit  $w \in e \setminus V'$

$V' := V' \cup \{w\}$ ;  $E := E \cup \{vw\}$

$g(w) := e$

**inverser**  $c(w)$

**empiler**( $w, \mathcal{P}$ )

    fin Si

  sinon

**dépiler**( $\mathcal{P}$ )

  fin Si

fin Tant que

Tout d'abord on remarque que  $T$  est bien un arbre puisque une extrémité que chaque nouvelle arête est un nouveau sommet. Alors pour  $x \in V'$  il y a un unique chemin dans  $T$  de  $x_0$  à  $x$ . De plus, si le sommet de la pile  $\mathcal{P}$  est  $x$ , alors  $\mathcal{P}$  contient exactement les sommets du chemin de  $x_0$  à  $x$ .

On remarque également qu'à chaque itération, les sommets de  $\mathcal{P}$  constituent une couverture des arêtes monochromatiques.

Par ailleurs, si l'algorithme ne renvoie pas **Erreur**, alors à chaque itération un nouveau sommet est mis dans  $\mathcal{P}$ , ou bien un sommet est retiré de  $\mathcal{P}$ . Comme un sommet apparaît au plus une fois dans  $T$ , et donc qu'il ne peut être mis qu'au plus une fois dans  $\mathcal{P}$ , on a au plus  $2|V|$  itérations, et l'algorithme se termine.



On dénote par  $\mathcal{P}^{(i)}$ ,  $T^{(i)} = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ,  $c^{(i)}$  les valeurs de  $\mathcal{P}$ ,  $T = (V', E)$ ,  $c$  (respectivement) au début de la  $i$ -ème itération. On dénote aussi par  $c^{(0)}$  la 2-partition de départ (qui diffère de  $c^{(1)}$  à cause de l'inversion de  $c(x_0)$ ).

On prouve alors le lemme suivant :

**Lemme 2.2.** *Supposons que  $H$  est un hypergraphe de Sterboul, et considérons le début de la  $i$ -ème itération. Soit  $\mathcal{P}^{(i)} = (x_k \dots x_0)$ , et  $e_j = g(x_j)$  pour  $j = 0, \dots, k$ . Alors les faits suivants sont vérifiés :*

- (a) *Pour tout  $j = 0, \dots, k-1$ , on a  $e_j \cap e_{j+1} = \{x_j\}$ .*
- (b) *Deux arêtes non-consécutives sont disjointes.*
- (c) *Pour tout  $j = 0, \dots, k$ ,  $x_j$  est le seul sommet de sa couleur dans  $e_j$ .*

**Preuve** On prouve le résultat par induction sur  $i$ .

Pour  $i = 1$ , le lemme est clairement vérifié puisque  $\mathcal{P}^{(1)} = (x_0)$ .

On considère maintenant  $i \geq 1$  et on suppose que le lemme est vérifié à l'itération  $i$ . Nous allons montrer qu'il sera également vérifié à l'itération  $i + 1$ .

Tout d'abord, si durant la  $i$ -ème itération **Erreur** est retourné, il n'y aurait alors pas d'itération  $i + 1$ , on suppose donc que **Erreur** n'a pas été retourné. Si durant la  $i$ -ème itération l'algorithme a dépilé  $x_k$  de  $\mathcal{P}$  (et donc que  $\mathcal{P}^{(i+1)} = (x_{k-1} \dots x_0)$ ), le lemme est clairement vrai à l'itération  $i + 1$ . On suppose donc que l'algorithme a trouvé  $e_{k+1} \in \mathcal{E}$  avec  $x_k \in e_{k+1}$  qui est monochromatique avec  $c^{(i)}$ , et  $x_{k+1} \in e_{k+1} \setminus V^{(i)}$  tel que  $\mathcal{P}^{(i+1)} = (x_{k+1} x_k \dots x_0)$ .

Comme (c) était vérifié à l'itération  $i$ , on sait que si  $w \in e_k \setminus \{x_k\}$  alors  $c^{(i)}(w) \neq c^{(i)}(x_k)$ . Comme  $x_k \in e_{k+1}$  et que  $e_{k+1}$  est monochromatique avec  $c^{(i)}$ , alors  $e_k \cap e_{k+1} = \{x_k\}$  et (a) est vérifié à l'itération  $i + 1$ .

Raisonnons maintenant par l'absurde, et supposons que (b) n'est pas vérifié à l'itération  $i + 1$ . Comme (b) était vérifié à l'itération  $i$ , cela signifie qu'on peut prendre un  $j \leq k-1$  maximal tel que  $e_j \cap e_{k+1} \neq \emptyset$ , et choisir  $y \in e_j \cap e_{k+1}$ . Notons que  $y \neq x_j$ , puisque sinon on aurait trouvé  $y \in e_{j+1} \cap e_{k+1}$ , ce qui contredirait la maximalité de  $j$ . Si  $k-j$  est impair, alors  $(y, e_j, x_j, \dots, e_{k+1}, y)$  est un cycle anti-Sterboul, puisque (b) est vérifié à l'itération  $i$  et (a) est vérifié à l'itération  $i + 1$ , donc  $k-j$  ne peut être impair.

Les couleurs  $c^{(i)}(y)$  et  $c^{(i)}(x_j)$  doivent être différentes puisque  $y \in e_j \setminus \{x_j\}$  et (c) est vérifié à l'itération  $i$ . Les couleurs  $c^{(i)}(x_j)$ ,  $c^{(i)}(x_{j+1})$ , ...,  $c^{(i)}(x_{k+1})$  doivent alors alterner, car (c) est vérifié à l'itération  $i$ , et (a) à l'itération  $i + 1$ . Si  $k-j$  est pair, ceci implique que  $c^{(i)}(y) \neq c^{(i)}(x_{k+1})$ ; mais les couleurs  $c^{(i)}(y)$  et  $c^{(i)}(x_{k+1})$  doivent pourtant être les mêmes puisque  $y$  et  $x_{k+1}$  sont tous deux dans  $e_{k+1}$ , qui est monochromatique avec  $c^{(i)}$ . Donc  $k-j$  ne peut être pair. Comme il ne peut être impair non plus, on a donc une contradiction ce qui signifie que (b) est vérifié à l'itération  $i + 1$ .

Alors  $x_{k+1} \notin e_j$  pour tout  $j \leq k$ . Comme la seule inversion de couleur durant la  $i$ -ème itération concerne précisément  $x_{k+1}$ , (c) est bien vérifié à l'itération  $i + 1$ .

Ceci termine le pas d'induction, et prouve donc le lemme.  $\diamond$

Remarquons que le Lemme 2.2 ne donne aucune indication sur l'intersection de  $g(u)$  et  $g(v)$  pour  $u, v \in V'$  qui ne sont jamais dans la pile au même instant. Cela n'est en effet pas nécessaire, car du Lemme 2.2 découle la validité de l'algorithme :

**Lemme 2.3.** *Si l'hypergraphe  $H$  donné en entrée à l'algorithme est un hypergraphe de Sterboul, alors **Erreur** ne peut être retourné. D'autre part, si **Erreur** n'est pas retourné, alors l'algorithme renvoie bien une 2-coloration de  $H$ .*

**Preuve** Supposons que  $H$  est un hypergraphe de Sterboul. Considérons une itération  $i$ , et soit  $\mathcal{P}^{(i)} = (x_k \dots x_0)$ . Si  $k = 1$  alors d'après (a) du Lemme 2.2 on a  $x_1 \notin e_0$ . Et si  $k \geq 2$ , alors d'après le (b) du Lemme 2.2 on a  $x_k \notin e_0$ . Ceci prouve que l'on a toujours  $e_0 \cap V' = \{x_0\}$ .

Si **Erreur** a été retourné, alors à une itération donnée  $i$ , l'algorithme a trouvé une arête  $e$  monochromatique avec  $c^{(i)}$  telle que  $e \subset V'^{(i)}$ . Comme  $e \subset V'^{(i)}$ , alors au moment de la  $i$ -ème itération, chaque sommet de  $e$  a eu sa couleur inversée exactement une fois par rapport à  $c^{(0)}$ . Donc  $e$  était déjà monochromatique avec  $c^{(0)}$ , de couleur opposée à celle qu'elle a avec  $c^{(i)}$ . Or par hypothèse  $e_0$  est la seule arête monochromatique avec  $c^{(0)}$ , donc  $e = e_0$ , ce qui contredit  $e \subset V'^{(i)}$  puisque l'on vient de voir que  $e_0 \cap V' = \{x_0\}$ . Donc si  $H$  est un hypergraphe de Sterboul, **Erreur** ne peut être retourné.

Enfin, on a vu qu'à chaque itération les sommets de  $\mathcal{P}$  constituent une couverture de l'ensemble des arêtes monochromatiques. Alors si l'algorithme se termine sans **Erreur**, on a  $\mathcal{P} = \emptyset$ , et aucune arête n'est monochromatique ; on a donc bien une 2-coloration de  $H$ .  $\diamond$

On est alors en mesure de prouver le théorème suivant :

**Théorème 2.13.** *Si  $H$  est un hypergraphe de Sterboul, alors  $H$  est 2-coloriable.*

**Preuve** On raisonne par induction sur le nombre d'arêtes de  $H$ .

Si  $H$  ne possède pas d'arête, alors le résultat est clairement vrai.

L'hypothèse d'induction est que tout hypergraphe de Sterboul avec au plus  $m$  arêtes est 2-coloriable. Supposons alors que  $H$  est un hypergraphe de Sterboul avec  $m + 1$  arêtes, et soit  $e_0 \in \mathcal{E}$ . Par hypothèse d'induction on sait donc que  $H \setminus e_0 = (V, \mathcal{E} \setminus e_0)$  a une 2-coloration  $c : V \rightarrow \{1, 2\}$ .

On peut supposer que  $e_0$  est de taille au moins 2, et que  $e_0$  est monochromatique avec  $c$ , car sinon  $c$  est déjà une 2-coloration de  $H$ . On utilise alors l'algorithme, ce qui nous donne une 2-coloration de  $H$ .

Ceci termine l'induction et prouve le théorème.  $\diamond$

On remarque que cet algorithme trouve une 2-coloration des hypergraphes de Sterboul en temps polynomial. Cependant, il est possible que l'hypergraphe donné en entrée de l'algorithme soit un hypergraphe non Sterboul mais 2-coloriable, et on ne peut savoir a priori si l'algorithme renverra **Erreur** ou bien une 2-coloration de l'hypergraphe.

Par conséquent, cet algorithme ne peut être utilisé pour reconnaître les hypergraphes 2-coloriables, ni même pour reconnaître les hypergraphes de Sterboul.

On sait déjà que décider si un hypergraphe est 2-coloriable est NP-complet [49], mais la question suivante reste ouverte :

**Question 2.1.** *Quelle est la complexité de reconnaître un hypergraphe de Sterboul ?*

Par ailleurs, il faut noter que le fonctionnement de l'Algorithme 2.1 est très similaire à la méthode utilisée par Fournier et Las Vergnas pour prouver les Théorèmes 2.11 et 2.12.

La différence essentielle réside dans le fait que l'Algorithme 2.1 effectue un parcours en profondeur pour choisir les arêtes monochromatiques à considérer, alors que la méthode de Fournier et Las Vergnas effectue un parcours en largeur.

## 2.4 Questions et liens avec la clique-coloration

Nous avons vu dans la section précédente que si un hypergraphe  $H$  ne contient pas d'hypercycle impair, alors  $H$  est 2-coloriable. D'une manière générale, tous les résultats vus dans ce chapitre faisaient le lien entre certaines conditions sur un hypergraphe et son nombre chromatique.

Cependant aucun théorème sur le nombre chromatique d'un hypergraphe  $H$  n'a comme hypothèse des conditions sur son dual  $H^*$ . Une première question venant à l'esprit est donc : si  $H$  est tel que  $H^*$  est sans hypercycle impair, existe-t-il une borne sur le nombre chromatique de  $H$  ?

La réponse à cette question est bien sûr négative dans le cas général.

Considérons par exemple pour  $n > k \geq 3$  l'hypergraphe complet  $H_n^k$ , qui a  $n$  sommets, et pour arêtes tous les sous-ensemble de  $k$  sommets. Comme on ne peut avoir qu'au plus  $k - 1$  sommets d'une couleur donnée, le nombre chromatique de cet hypergraphe est  $\lceil \frac{n}{k-1} \rceil$ .

Or le dual de  $H_n^k$  ne contient aucun hypercycle, donc a fortiori aucun hypercycle impair : en effet, deux arêtes quelconques de  $(H_n^k)^*$  ont une intersection non-vide, puisque deux sommets quelconques de  $H_n^k$  appartiennent à plusieurs mêmes arêtes ;  $(H_n^k)^*$  ne peut donc posséder d'hypercycle de taille  $\geq 4$  (puisque dans tout hypercycle de taille  $\geq 4$  il y a des arêtes disjointes). De plus  $(H_n^k)^*$  ne peut contenir d'hypercycle de taille trois, puisque trois arêtes quelconques auront toujours un sommet en commun (car  $k \geq 3$  et donc trois sommets quelconques de  $H_n^k$  sont dans au moins une même arête).

Les hypergraphes complets sont en effet les exemples les plus naturels d'hypergraphes avec un grand nombre chromatique (mais le Théorème 2.3 montre qu'il en existe d'autres).

La question devient alors la suivante :

**Question 2.2.** *Soit  $H$  un hypergraphe dont le dual ne contient pas d'hypercycle impair, et  $k$  tel que  $H$  ne contient pas l'hypergraphe complet  $H_n^{k'}$  avec  $n', k'$  tels que  $\lceil \frac{n'}{k'-1} \rceil \geq k$ . Alors  $H$  est-il  $k$ -coloriable ?*

La Question 2.2 paraissant difficile à aborder, nous allons nous concentrer sur l'hypothèse que le dual ne contient pas d'hypercycle impair, et regarder s'il est possible

d'utiliser d'autres propriétés structurelles plus générales permettant d'interdire la présence de sous-hypergraphes partiels complets.

Tout d'abord, on peut remarquer que dans le cadre de la coloration des hypergraphes toutes les arêtes ne sont pas toujours utiles. En effet, si un hypergraphe  $H$  n'est pas simple, alors il existe  $e, f \in \mathcal{E}(H)$ , tels que  $e \subset f$ . Alors si une  $k$ -partition  $c$  de  $H$  est telle que  $e$  n'est pas monochromatique,  $f$  ne sera évidemment pas monochromatique. Lorsque l'on cherche à colorier  $H$  on peut donc considérer en réalité  $H \setminus f$ , et même plus généralement  $H^{\min}$ .

Remarquons maintenant qu'un hypergraphe complet n'a pas la propriété d'être conforme.

En effet, pour tout hypergraphe complet  $H_n^k$ , le graphe  $[H_n^k]_2$  est le graphe complet  $K_n$ , dont la seule clique maximale est le graphe lui-même.

Or si  $k < n$ , alors cette clique maximale n'est pas une arête de  $H_n^k$ . Pour rendre l'hypergraphe conforme il faut donc rajouter l'arête constituée de tous les sommets, mais dans ce cas l'hypergraphe n'est plus simple.

En imposant alors conjointement ces deux conditions, on a la question suivante :

**Question 2.3.** *Existe-t-il une constante  $k$  telle que pour tout hypergraphe simple et conforme  $H$  tel que  $H^*$  ne contient pas d'hypercycle impair, on a que  $H$  est  $k$ -coloriable ?*

Or on connaît le résultat suivant :

**Proposition 2.3.** [7] *Si  $H$  est un hypergraphe simple, alors  $H$  est conforme si et seulement si  $H$  est l'hypergraphe des cliques maximales d'un certain graphe.*

On a également la proposition suivante :

**Proposition 2.4.** *Si  $H$  ne contient pas d'hypercycle impair de taille au moins 5, alors le graphe  $L(H)$  ne contient pas de trou impair.*

**Preuve** Considérons un trou quelconque de  $L(H)$ , que nous dénotons  $(e_1 \dots e_m)$ , où les sommets  $e_1, \dots, e_m$  de  $L(H)$  correspondent donc à des hyperarêtes de  $H$ .

Comme  $(e_1 \dots e_m)$  est un trou de  $L(H)$ , cela signifie que deux sommets non consécutifs de ce trou ne sont pas adjacents dans  $L(H)$ , et donc que les hyperarêtes de  $H$  correspondantes sont disjointes.

Comme  $m \geq 4$  (puisque un trou est de taille au moins 4), les hyperarêtes  $e_1, \dots, e_m$  forment bien un hypercycle de  $H$ . Or  $H$  ne contient pas d'hypercycle impair, donc  $m$  est pair.

Ainsi tout trou de  $L(H)$  est pair, ce qui prouve le résultat.  $\diamond$

D'après la Proposition 2.3, si  $H$  est un hypergraphe simple et conforme, alors il existe  $G$  tel que  $H = \mathcal{H}(G)$ . On remarque que  $G = L(H^*)$ , et donc d'après la Proposition 2.4,

si  $H^*$  est sans hypercycle impair, alors  $G$  est sans trou impair. Par ailleurs, d'après [7] il est implicite que si  $H$  est conforme, alors  $H^*$  ne contient pas d'hypercycle impair de taille 3.

Tout ceci montre que la Question 2.3 est en fait équivalente à la Question 1.3.

On peut bien entendu s'intéresser à quelques cas particuliers.

Par exemple, d'après une observation de Lovász [50], la Question 1.2 revient à poser la question suivante :

**Question 2.4.** *Existe-t-il  $k$  tel que pour tout hypergraphe  $H$  dont le dual est normal, on a que  $H$  est  $k$ -coloriable ?*

Un autre cas particulier est celui des hypergraphes linéaires. Ces hypergraphes sont intéressants, car les propriétés s'expriment souvent de façon plus générale, permettant de les étudier plus facilement.

Si l'on considère la Question 2.3 pour les hypergraphes linéaires, alors il est superflu de supposer que l'hypergraphe est simple, puisque les seules arêtes pouvant être contenues dans d'autres sont celles de taille 1, qui ne jouent aucun rôle dans la colorabilité.

De plus, on sait d'après [7] que si un hypergraphe n'est pas conforme, alors il existe trois arêtes  $e_1, e_2, e_3$  telles que l'ensemble  $(e_1 \cap e_2) \cup (e_1 \cap e_3) \cup (e_2 \cap e_3)$  n'est contenu dans aucune arête. Dans le cas d'un hypergraphe linéaire, ces trois arêtes constituent un hypercycle de taille 3, qui correspond également à un hypercycle de taille 3 dans le dual.

Par conséquent pour un hypergraphe linéaire dont le dual n'a pas d'hypercycle de taille 3, il n'est pas nécessaire de supposer que l'hypergraphe est conforme, la question se formule alors ainsi :

**Question 2.5.** *Existe-t-il  $k$  tel que pour tout hypergraphe linéaire  $H$  tel que  $H^*$  ne contient pas d'hypercycle impair, on a que  $H$  est  $k$ -coloriable ?*

Le peu de résultats de type structurels sur les hypergraphes laisse présager que toutes ces questions sont probablement difficiles. Il pourrait alors s'avérer intéressant d'aborder ce problème du point de vue de la clique-coloration de graphes.

D'une part, le problème de clique-coloration a jusqu'ici été moins largement étudié que la coloration d'hypergraphes, et seulement quelques aspects difficiles ont été identifiés jusqu'ici.

De plus la structure des graphes est souvent plus facile à décrire et donc à étudier que celle des hypergraphes. Il existe par exemple de nombreux théorèmes de décomposition, en particulier en ce qui concerne les graphes parfaits, même si ceux-ci semblent difficiles à utiliser dans le cadre de la clique-coloration.

Tout cela motive donc l'étude que nous ferons de la clique-coloration dans le reste de cette thèse, et en particulier dans le cas des graphes sans trou impair.

## Chapitre 3

# Clique-coloration des graphes sans trou impair

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux Questions 1.2 et 1.3. Plus précisément, tenter de vérifier la Conjecture 1.1 (que nous rappelons ci-dessous) était une motivation de cette thèse.

**Conjecture 1.1** *Tous les graphes sans trou impair sont 3-clique-coloriables.*

Cette conjecture reste ouverte dans le cas général, mais nous présentons dans ce chapitre les différents résultats partiels déjà connus, ainsi que ceux qui ont été établis dans le cadre de cette thèse.

Par ailleurs, bien que la clique-coloration est un problème difficile en général (ce que nous verrons au prochain chapitre), les preuves apportées pour les résultats de ce chapitre sont constructives, et fournissent des algorithmes polynomiaux de clique-coloration pour les classes particulières concernées.

### 3.1 Résultats connus

Nous avons déjà vu dans la Section 1.3.2 certaines classes de graphes parfaits (qui sont donc également des classes de graphes sans trou impair) qui vérifient la Conjecture 1.1.

Ainsi, les graphes de comparabilité, qui sont 2-clique-coloriables [26], et les graphes de cocomparabilité, qui sont 3-clique-coloriables [25], qui sont deux classes de graphes parfaits, vérifient bien la Conjecture 1.1.

Les graphes fortement parfaits sont également 2-clique-coloriables. En effet, par définition ces graphes possèdent un stable qui intersecte toutes les cliques maximales. En donnant alors une couleur aux sommets d'un tel stable et une autre couleur au reste des sommets, on a bien une 2-clique-coloration.

Une *patte* est le graphe de la Figure 3.1 ; son complémentaire est appelé *copatte*.

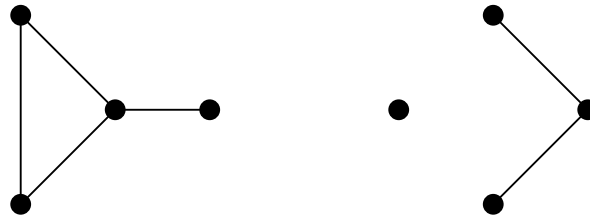


FIG. 3.1 – Une patte, et son complémentaire, la copatte.

Gravier et Škrekovski ont montré les théorèmes suivants :

**Théorème 3.1.** [39] *Tout graphe sans copatte et différent de  $C_5$  est 2-clique-coloriable.*

**Théorème 3.2.** [39] *Tout graphe sans  $P_5$  et sans  $C_5$  est 2-clique-coloriable.*

Notons que d'autres preuves de ces deux derniers théorèmes ont été trouvées par Maffray et Preissmann et sont détaillées dans [23].

Une *griffe* est le graphe  $K_{1,3}$  représenté sur la Figure 3.2, son complémentaire est la *cogriffe*.

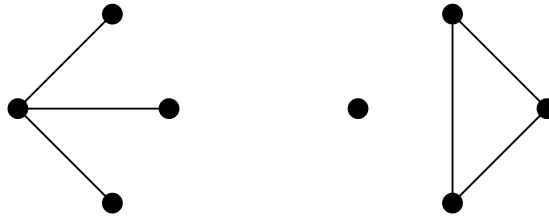


FIG. 3.2 – Une griffe, et son complémentaire, la cogriffe.

Bacsó, Gravier, Gyárfás, Preissmann et Sebő ont montré le théorème suivant :

**Théorème 3.3.** [4] *Tout graphe sans griffe et sans trou impair est 2-clique-coloriable.*

Concernant la cogriffe, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.4.** *Tout graphe sans cogriffe et sans trou impair est 3-clique-coloriable.*

**Preuve** Soit  $G$  un graphe sans cogriffe et sans trou impair.

Si  $G$  ne contient pas de triangle, alors comme il est sans trou impair il est biparti, et donc 2-clique-coloriable.

Si  $G$  contient un triangle, alors le Théorème 1.16 donne le résultat.  $\diamond$

De plus on sait que 3 est la meilleure borne possible, puisqu'elle est atteinte par le graphe de la Figure 1.1.

Les graphes sans griffe sont en fait une manière de généraliser les line-graphes, et ces deux classes de graphes ont souvent des propriétés similaires. Les line-graphes étant des graphes sans griffe, ils sont également 2-clique-coloriables.

En revanche le Théorème 3.4 peut être amélioré dans le cas particulier des compléments de line-graphes. En effet on déduit du Théorème 1.7 que si un complément de line-graphe ne contient pas de trou impair, alors il est 2-clique-coloriable.

Enfin, nous donnons ce résultat très intéressant, qui incite à penser que la Conjecture 1.1 est vraie :

**Théorème 3.5.** [4] *Presque tous les graphes sans trou impair sont 3-clique-coloriables.*

Dans l'énoncé de ce théorème, "presque tous" signifie que lorsque  $n$  tend vers l'infini, la proportion de graphes à  $n$  sommets vérifiant la propriété tend vers 1.

La démonstration de ce théorème s'appuie en fait sur un argument de Prömel et Steger qui leur avait permis de montrer dans [61] une version asymptotique de la Conjecture Forte des Graphes Parfaits. Depuis, cette conjecture a été prouvée et est devenue le Théorème Fort des Graphes Parfaits, il paraît donc légitime d'espérer que la Conjecture 1.1 est vraie aussi.

## 3.2 Chemins les plus semblables et graphes de Meyniel

Considérons un graphe  $G = (V, E)$ , et  $x, u, v \in V$ . On considère  $\mathcal{P}_1$  l'ensemble des plus courts chemins de  $x$  à  $u$  (tous ces chemins ont la même longueur  $i_1$ ), et  $\mathcal{P}_2$  l'ensemble des plus courts chemins de  $x$  à  $v$  (tous ces chemins ont la même longueur  $i_2$ ). On dit alors que  $P_1 = (u_i)_{0, i_1} \in \mathcal{P}_1$  et  $P_2 = (v_i)_{0, i_2} \in \mathcal{P}_2$  (avec  $u_0 = v_0 = x$ ) sont *les plus semblables* s'ils maximisent  $|\{0 \leq i \leq \min(i_1, i_2) | u_i = v_i\}|$ , c'est-à-dire le nombre de sommets qu'ils ont en commun (notons que de tels couples de chemins peuvent ne pas être uniques).

Considérant des chemins les plus semblables  $P_1 = (u_i)_{0, i_1}$  et  $P_2 = (v_i)_{0, i_2}$ , il existe  $0 \leq m \leq \min(i_1, i_2)$  tel que si  $0 \leq j \leq m$ ,  $u_j = v_j$  et si  $m + 1 \leq j \leq \min(i_1, i_2)$ , alors  $u_j \neq v_j$  car sinon on aurait pu trouver des chemins plus semblables. Le sommet  $u_m$  est appelé *sommet de séparation* de  $P_1$  et  $P_2$ .

Cette notion sera utilisée dans plusieurs démonstrations par la suite, et se révèle utile par application du lemme suivant :

**Lemme 3.1.** *Soit  $G = (V, E)$  et  $x, u, v \in V$ . Considérons  $\mathcal{P}_1$  l'ensemble des plus courts chemins de  $x$  à  $u$ , et  $\mathcal{P}_2$  l'ensemble des plus courts chemins de  $x$  à  $v$ , et soit  $P_1 = (u_j)_{0, i_1}$  (avec  $u_0 = x$  et  $u_{i_1} = u$ ) et  $P_2 = (v_j)_{0, i_2}$  (avec  $v_0 = x$  et  $v_{i_2} = v$ ), deux chemins les plus semblables ayant  $u_m$  pour sommet de séparation. Alors s'il existe  $j_1 > m$  et  $j_2 > m$  tels que  $u_{j_1}v_{j_2} \in E$ , on a  $j_1 = j_2$ .*



**Preuve** Sans perte de généralité, on peut supposer que  $j_1 \leq j_2$ . On définit  $P'_2 = (u_0 \dots u_{j_1} v_{j_2} \dots v_{i_2})$ .

Si  $j_1 < j_2 - 1$ , alors le chemin  $P'_2$  serait un chemin de  $x$  à  $v$  plus court que  $P_2$ , ce qui est impossible par définition de  $\mathcal{P}_2$ .

Or, si  $j_1 = j_2 - 1$ , alors  $P'_2$  est de longueur  $i_2$ , ce qui signifie que  $P'_2 \in \mathcal{P}_2$ . Mais alors les chemins  $P_1$  et  $P'_2$  seraient plus semblables que  $P_1$  et  $P_2$ , ce qui contredit la définition de  $P_1$  et  $P_2$ .

Donc  $j_1 = j_2$ , et le lemme est prouvé.  $\diamond$

Pour illustrer l'utilisation du Lemme 3.1, nous présentons maintenant une nouvelle preuve de la 2-clique-colorabilité des graphes de Meyniel, qui a l'avantage de fournir directement un algorithme glouton de clique-coloration.

On appelle *graphe de Meyniel* un graphe dans lequel tout cycle impair possède au moins deux cordes. Ces graphes ont été introduits dans [55] et Ravindra a montré dans [63] qu'ils sont fortement parfaits. Nous avons déjà vu plus haut que les graphes fortement parfaits sont 2-clique-coloriables, et donc les graphes de Meyniel le sont également. Voici une nouvelle preuve de ce résultat :

**Théorème 3.6.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe de Meyniel, alors  $G$  est 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Sans perte de généralité, on peut supposer que  $G$  est connexe. Soit  $x \in V$ , on définit :  $A_0 = \{x\}$ ;  $A_1 = N(x)$ ; et pour tout  $i \geq 2$ ,  $A_i = N(A_{i-1}) \setminus (A_{i-1} \cup A_{i-2})$ . Ceci revient donc à effectuer un parcours en largeur du graphe, chaque  $A_i$  correspondant aux sommets de  $G$  qui sont à distance  $i$  de  $x$ . On donne la couleur 1 aux sommets contenus dans des  $A_i$  avec  $i$  pair, et la couleur 2 aux sommets contenus dans des  $A_i$  avec  $i$  impair.

Nous allons maintenant prouver que cela donne bien une 2-clique-coloration.

Soit  $K$  une clique maximale de  $G$ . Les sommets de  $K$  sont répartis dans au plus deux  $A_i$  consécutifs (puisque des sommets dans des  $A_i$  non consécutifs ne peuvent être adjacents).

Si deux sommets de  $K$  sont dans des  $A_i$  distincts, alors ils n'ont pas la même couleur (puisque ces  $A_i$  sont consécutifs), et  $K$  n'est pas monochromatique.

Raisonnons maintenant par l'absurde, et supposons que  $K$  soit contenue dans un  $A_i$  donné. Notons que ceci implique  $i > 1$  car  $A_0$  n'est constitué que de  $x$ , et pour  $i = 1$ ,  $K \cup \{x\}$  serait une clique plus grande, et donc  $K$  ne serait pas maximale. Soit alors  $u_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $\forall u \in A_{i-1}, |N(u) \cap K| \leq |N(u_{i-1}) \cap K|$ . Il doit exister  $v_i \in K$  tel que  $u_{i-1}v_i \notin E$ , car sinon  $K$  ne serait pas maximale. Comme  $v_i \in A_i$ , il existe  $v_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $v_{i-1}v_i \in E$ . Par choix de  $u_{i-1}$ , il doit alors exister  $u_i \in N(u_{i-1}) \cap K$  tel que  $u_iv_{i-1} \notin E$ .

Considérons maintenant les plus courts chemins dans  $G$  de  $x$  à  $u_{i-1}$ , et ceux de  $x$  à  $v_{i-1}$  (tous ces chemins auront exactement un sommet dans chaque  $A_j$ ,  $j \leq i-1$ ), et soit  $P_1 = (u_j)_{0,i-1}$  et  $P_2 = (v_j)_{0,i-1}$  les plus semblables, avec  $u_m$  comme sommet de séparation.

On a alors  $u_jv_{j+1} \notin E$  et  $u_{j+1}v_j \notin E$  pour  $m+1 \leq j \leq i-1$ , ceci étant vrai d'après le Lemme 3.1 pour  $m+1 \leq j \leq i-2$  et par choix de  $u_{i-1}$ ,  $v_i$ ,  $v_{i-1}$ ,  $u_i$  pour  $j = i-1$ .

Soit alors  $j_0 = \min\{j \geq m+1 \mid u_j v_j \in E\}$  ( $j_0$  existe puisque  $u_i v_i \in E$ ). Si  $j_0 \geq m+2$ , alors  $\{u_m, u_{m+1}, \dots, u_{j_0}, v_{j_0}, \dots, v_{m+1}\}$  induit un trou impair. Comme par hypothèse  $G$  ne contient pas de trou impair, alors  $j_0 = m+1$ .

Soit maintenant  $j_1 = \min\{j \geq m+2 \mid u_j v_j \in E\}$  (là encore  $j_1$  existe puisque  $u_i v_i \in E$ ),  $\{u_m, u_{m+1}, \dots, u_{j_1}, v_{j_1}, \dots, v_{m+1}\}$  induit un cycle impair avec une seule corde.

On a donc encore une contradiction, donc  $K$  ne peut être contenue dans un seul  $A_i$ , et on a bien une 2-clique-coloration de  $G$ .  $\diamond$

### 3.3 Graphes sans trou impair et sans diamant

Le *diamant* est le graphe présenté sur la Figure 3.3 ; il est également souvent dénommé  $K_4 \setminus e$  car il correspond à un  $K_4$  auquel on supprime une arête.

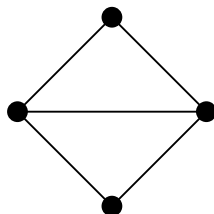


FIG. 3.3 – Un diamant.

Tout d'abord, nous remarquons la propriété suivante des graphes sans diamant, qui s'avère très utile :

**Lemme 3.2.** *Dans un graphe sans diamant chaque arête appartient à une seule clique maximale.*  $\diamond$

Nous appelons maintenant *mauvais cycle* un graphe d'ordre impair au moins égal à 5 possédant un cycle hamiltonien tel que toutes les arêtes de ce cycle soient plates. Autrement dit, un mauvais cycle est un graphe dont l'hypergraphe des cliques contient celui d'un trou impair du même ordre. Le graphe de la Figure 1.1 est un exemple de mauvais cycle.

Ainsi un mauvais cycle a besoin d'au moins 3 couleurs pour être clique-colorié.

**Théorème 3.7.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe sans diamant et sans mauvais cycle, alors  $G$  est 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Nous prouvons ce théorème en raisonnant par induction sur  $|V|$  :

- Si  $|V| = 1$ , on peut assigner n'importe quelle couleur à l'unique sommet.
- Supposons maintenant que  $|V| \geq 2$ , et que le théorème est vrai pour tout graphe avec un nombre de sommets  $< |V|$ .

Soit  $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$  le sous-graphe partiel de  $G$  ayant les mêmes sommets que  $G$ , et dont les arêtes sont les arêtes plates de  $G$ .

Soit  $V_1 \subseteq V$  une composante connexe de  $\tilde{G}$  (on a donc  $V_1 \neq \emptyset$ ). Alors  $\tilde{G}(V_1)$  est biparti, sinon il contiendrait un trou impair  $H$ , et  $G(H)$  serait un mauvais cycle. Comme  $\tilde{G}(V_1)$  est biparti, alors il admet une 2-coloration, et nous allons montrer par l'absurde que celle-ci est également une 2-clique-coloration de  $G(V_1)$  : en effet, si ce n'en était pas une, on aurait une clique maximale  $K$  monochromatique, avec  $|K| \geq 2$ . Soit alors deux sommets  $u, v \in K$  situés à distance minimale dans  $\tilde{G}(V_1)$  ( $u$  et  $v$  existent car  $\tilde{G}(V_1)$  est connexe), et  $P$  un plus court chemin dans  $\tilde{G}(V_1)$  reliant  $u$  et  $v$ . Nécessairement  $P$  est de longueur paire, puisque  $u$  et  $v$  ont la même couleur. Comme  $G$  ne contient pas de mauvais cycle, alors l'arête  $uv$  ne peut être plate dans  $G(P)$  (ceci car toutes les arêtes de  $P$  sont plates par définition de  $\tilde{G}$ ). Soit donc  $w$  un sommet voyant l'arête  $uv$ . Par le Lemme 3.2 on a  $w \in K$ , mais alors on a une contradiction avec le choix de  $u$  et  $v$ . Par conséquent on a bien une 2-clique-coloration de  $G(V_1)$ .

On définit alors  $V_2 = V \setminus V_1$ . Si  $V_2 = \emptyset$ , alors  $V_1 = V$  et on a une 2-clique-coloration de  $G$ . Supposons alors que  $V_2 \neq \emptyset$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une 2-clique-coloration de  $G(V_2)$ . Nous allons montrer que la 2-partition définie en combinant les cliques-colorations de  $G(V_1)$  et de  $G(V_2)$  est bien une 2-clique-coloration de  $G$ . Soit en effet  $K'$  une clique maximale de  $G$  de taille  $\geq 2$ . Si  $K' \subset V_1$  ou  $K' \subset V_2$ , alors on sait que  $K'$  n'est pas monochromatique. On suppose alors que  $K'$  possède certains sommets dans  $V_1$ , et certains autres dans  $V_2$ . Par définition de  $V_1$ ,  $K'$  ne peut être de taille 2, donc il existe  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $|K' \cap V_i| \geq 2$ . Alors  $K' \cap V_i$  est une clique maximale de  $G(V_i)$  (d'après le Lemme 3.2) et n'est donc pas monochromatique.

On a donc bien une 2-clique-coloration de  $G$ , et le théorème est prouvé par induction.

◇

Une première preuve du Théorème 3.7 présentée dans [22] utilisait un algorithme d'échanges chromatiques très similaire à l'Algorithme 2.1, lui-même très proche des méthodes utilisées par Fournier et Las Vergnas pour démontrer les Théorèmes 2.11 et 2.12.

Nous verrons dans la Section 5.1 que cela n'est pas un hasard, car le Théorème 3.7 peut être vu comme une conséquence du Théorème 2.11.

Concernant la Conjecture 1.1, elle n'est pas résolue dans le cas des graphes sans diamant, mais le théorème suivant donne toutefois une borne répondant à la Question 1.3 :

**Théorème 3.8.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe sans trou impair et sans diamant, alors  $G$  est 4-clique-coloriable.*

**Preuve** Sans perte de généralité, on peut supposer que  $G$  est connexe. Soit  $x \in V$ . On définit :  $A_0 = \{x\}$  ;  $A_1 = N(x)$  ; et pour  $i \geq 2$ ,  $A_i = N(A_{i-1}) \setminus (A_{i-1} \cup A_{i-2})$ .

On définit également  $\tilde{G}_0 = (\{x\}, \emptyset)$ , et pour  $i \geq 1$  on définit  $\tilde{G}_i = (A_i, \tilde{E}_i)$  où  $uv \in \tilde{E}_i$  si  $u, v \in A_i$  et que pour tout  $w \in A_{i-1}$ , on a  $wu \notin E$  ou  $wv \notin E$  ( $\tilde{E}_i$  est l'ensemble des arêtes de  $G(A_i)$  qui ne font pas de triangle avec un sommet de  $A_{i-1}$ ).

Dans un premier temps nous allons montrer que chaque  $\tilde{G}_i$  est un graphe de Meyniel.

Nous montrons cela par l'absurde, et supposons donc qu'il existe dans un certain  $\tilde{G}_i$  un cycle impair  $C$  de longueur  $\geq 5$  qui possède au plus une corde (notons que cela implique  $i \geq 1$ ).

**1er cas :**  $C$  ne possède pas de corde supplémentaire dans  $G(A_i)$  (ceci signifie que  $C$  possède exactement une corde dans  $\tilde{G}_i$ , car  $G$  ne contient pas de trou impair). On nomme alors les sommets de  $C$  de manière séquentielle  $a_0, a_1, \dots, a_{2p}$ , de sorte que la corde de  $C$  soit l'arête  $a_1a_{2p}$ . D'autre part, pour simplifier les notations on définit  $a_{2p+1} = a_0$ .

Soit  $u_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $u_{i-1}a_0 \in E$ . L'ensemble  $\{j | 0 \leq j \leq 2p+1, a_ju_{i-1} \in E\}$  contient des entiers de parités différentes (puisque'il contient 0 et  $2p+1$ ), mais il ne peut contenir deux entiers consécutifs (puisque chaque arête  $a_i a_{i+1} \in \tilde{E}_i$ ). Comme  $G$  ne contient pas de trou impair, on en conclut que  $a_0$  est le seul sommet de  $C$  adjacent à  $u_{i-1}$ .

Soit maintenant  $v_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $v_{i-1}a_2 \in E$ . Nécessairement  $v_{i-1}a_0 \notin E$ , car sinon  $v_{i-1}$  aurait pu être choisi à la place de  $u_{i-1}$ , mais on a vu que  $u_{i-1}$  ne pouvait être adjacent qu'à  $a_0$ . On sait également que  $v_{i-1}a_1 \notin E$  puisque  $a_1a_2 \in \tilde{E}_i$ .

Considérons alors tous les plus courts chemins dans  $G$  de  $x$  à  $u_{i-1}$ , et ceux de  $x$  à  $v_{i-1}$ . Soit  $P_1 = (u_k)_{0,i-1}$  et  $P_2 = (v_k)_{0,i-1}$  deux des chemins les plus semblables ayant  $u_l$  pour sommet de séparation. Si  $k_0 = \max\{k \geq l+1 | u_k v_k \in E\}$  existe, alors  $\{u_{k_0}, \dots, u_{i-1}, a_0, a_1, a_2, v_{i-1}, \dots, v_{k_0}\}$  induit un trou impair (car d'après le Lemme 3.1 on sait qu'il ne peut y avoir d'autre arête). Donc  $k_0$  n'existe pas.

On définit maintenant  $J = \{j | v_{i-1}a_j \in E\}$ . Comme les arêtes  $a_j a_{j+1} \in \tilde{E}_i$ , il ne peut y avoir deux entiers consécutifs dans  $J$ , et donc  $J$  ne contient que des entiers pairs, sinon  $J$  contiendrait un trou impair (puisque  $2 \in J$ ). Soit  $j_0 = \max J$ ; alors  $\{u_l, u_{l+1}, \dots, u_{i-1}, a_{2p+1}, \dots, a_{j_0}, v_{i-1}, \dots, v_{l+1}\}$  induit un trou impair.

Ce premier cas aboutit donc à une contradiction.

**2ème cas :**  $C$  possède au moins une corde supplémentaire dans  $G(A_i)$ .

Considérons une telle corde  $e \notin \tilde{E}_i$  telle qu'une des deux parties de  $C$  délimitées par  $e$  n'ait pas de corde dans  $G(A_i)$ . Cette partie possède un nombre pair de sommets puisque  $G$  ne contient pas de trou impair, et il ne peut s'agir d'un triangle car un sommet de  $A_{i-1}$  adjacent aux deux extrémités de  $e$  (un tel sommet existe puisque  $e \notin \tilde{E}_i$ ) ne sera pas adjacent au troisième sommet du triangle (puisque les deux autres arêtes sont dans  $\tilde{E}_i$ ), et nous aurions alors un diamant.

On nomme alors séquentiellement les sommets de cette partie de  $C$  :  $a_1, \dots, a_{2p}$ , avec  $a_1a_{2p} = e$ .

Comme  $a_1a_{2p} \notin \tilde{E}_i$ , il existe  $u_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $u_{i-1}a_1, u_{i-1}a_{2p} \in E$ . L'ensemble  $\{j | 1 \leq j \leq 2p, u_{i-1}a_j \in E\}$  contient donc des entiers de parités différentes, mais ne peut contenir deux entiers consécutifs (puisque les arêtes  $a_j a_{j+1} \in \tilde{E}_i$ ). Ainsi, comme  $G$  ne contient pas de trou impair, on en déduit que 1 et  $2p$  sont les deux seuls éléments de cet ensemble.

Soit maintenant  $v_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $v_{i-1}a_2 \in E$ .  $v_{i-1}$  ne peut être adjacent à deux  $a_j$  consécutifs, et donc  $v_{i-1}a_1 \notin E$ . Considérons alors tous les plus courts chemins dans

$G$  de  $x$  à  $u_{i-1}$ , et ceux de  $x$  à  $v_{i-1}$ , and prenons  $P_1 = (u_k)_{0,i-1}$  et  $P_2 = (v_k)_{0,i-1}$  parmi les plus semblables, ayant  $u_l$  comme sommet de séparation.

Nécessairement  $\{k | u_k v_k \in E\} \neq \emptyset$  car sinon  $\{u_l, u_{l+1}, \dots, u_{i-1}, a_1, a_2, v_{i-1}, \dots, v_{l+1}\}$  induirait un trou impair (d'après le Lemme 3.1 on sait qu'il ne peut y avoir d'autres arêtes). Soit alors  $k_0$  l'élément maximum de cet ensemble.

Comme  $v_{i-1}$  ne peut être adjacent à deux  $a_j$  consécutifs et que  $G$  ne contient pas de trou impair, on en déduit que  $J = \{j | v_{i-1} a_j \in E\}$  ne contient que des entiers pairs. Soit  $j_0 = \max J$ .

Si  $j_0 \neq 2p$  ou  $k_0 \neq i - 1$ , alors  $\{u_{k_0}, \dots, u_{i-1}, a_{2p}, \dots, a_{j_0}, v_{i-1}, \dots, v_{k_0}\}$  induit un trou impair.

Mais si  $j_0 = 2p$  et  $k_0 = i - 1$ , alors  $\{u_{i-1}, v_{i-1}, a_1, a_{2p}\}$  induit un diamant.

Par conséquent ce 2ème cas aboutit également à une contradiction.

On a donc montré que tous les  $\tilde{G}_i$  sont des graphes de Meyniel. D'après le Théorème 3.6 on sait alors que deux couleurs sont suffisantes pour clique-colorier chaque  $\tilde{G}_i$ .

Pour  $i$  pair on utilise les couleurs 1 et 2, et pour  $i$  impair on utilise les couleurs 3 et 4.

Soit alors  $K$  une clique maximale de  $G$  de taille  $\geq 2$ . Si les sommets de  $K$  sont répartis sur deux  $A_i$  consécutifs,  $K$  ne sera pas monochromatique; et si  $K$  est contenue dans un seul  $A_i$ , alors  $K$  sera également une clique maximale de  $\tilde{G}_i$  (d'après le Lemme 3.2 on sait que toutes les arêtes de  $K$  seront dans  $\tilde{E}_i$ ), et ne sera donc pas monochromatique.

On a donc obtenu une 4-clique-coloration de  $G$ , ce qui prouve le théorème.  $\diamond$

Remarquons que ce théorème se reformule facilement en termes d'hypergraphes de la façon suivante, permettant de répondre à la Question 2.5 :

**Corollaire 3.1.** *Si  $H$  est un hypergraphe linéaire tel que  $H^*$  ne contient pas d'hypercycle impair, alors  $H$  est 4-coloriable.*

**Preuve** Comme cela a déjà été remarqué dans la Section 2.4, on peut supposer que  $H$  est simple, et qu'il correspond à l'hypergraphe des cliques d'un certain graphe  $G$ .

Or, le Lemme 3.2 montre que  $G$  est nécessairement un graphe sans diamant (sinon on aurait deux hyperarêtes ayant au moins deux sommets en commun).

On a alors le résultat grâce au Théorème 3.8.  $\diamond$

On a donc une réponse partielle à la Question 1.3 pour le cas des graphes sans diamant (ainsi qu'à la Question 2.3 pour le cas des hypergraphes linéaires). Malheureusement, la Conjecture 1.1 n'est en rien infirmée pour cette classe de graphes, ce qui indique que le Théorème 3.8 n'est probablement pas le meilleur possible.

Il permet néanmoins de disposer d'une borne sur le nombre clique-chromatique pour cette classe de graphes sans trou impair, alors qu'aucune n'est connue en général.

On connaît cependant un sous-cas pour lequel la Conjecture 1.1 est vérifiée, qui est lorsque toutes les cliques maximales sont de taille au moins 3 :

**Théorème 3.9.** [4] *Si  $G$  est un graphe sans trou impair, sans diamant, et sans arête plate, alors  $G$  est 3-clique-coloriable.*

### 3.4 Graphes sans trou impair et sans codiamant

Le *codiamant*, qui est le complémentaire du diamant, est le graphe représenté sur la Figure 3.4.

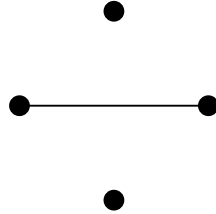


FIG. 3.4 – Un codiamant.

Tout d’abord on remarque que les graphes sans codiamant ont la propriété suivante, qui est en quelque sorte le complémentaire du Lemme 3.2 :

**Lemme 3.3.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe sans codiamant,  $S \subset V$  un stable maximal de  $G$  et  $x \in V \setminus S$  qui a un non-voisin  $y \in S$ , alors  $x$  est  $(S \setminus \{y\})$ -complet.  $\diamond$*

On remarque que les trous de taille  $\geq 7$  contiennent des codiamants. Par conséquent, un graphe sans codiamant et sans  $C_5$  ne contient pas de trou impair.

Dans [38], les auteurs ont montré que les graphes sans codiamant sont 3-clique-coloriables, et posent la question de savoir si  $C_5$  est le seul graphe sans codiamant qui n’est pas 2-clique-coloriable.

En fait le line-graphe de  $K_6$  est un autre graphe sans codiamant qui n’est pas 2-clique-coloriable : en effet, on vérifie facilement que pour qu’un line-graphe contienne un codiamant, le graphe d’origine doit avoir au moins 7 sommets,  $L(K_6)$  est donc bien sans codiamant. De plus, ce graphe n’est pas 2-clique-coloriable, puisque d’après la théorie de Ramsey, dans toute 2-coloration des arêtes de  $K_6$  il y a un triangle monochromatique, qui correspond à une clique maximale dans le line-graphe.

Cependant, on a le théorème suivant :

**Théorème 3.10.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe sans codiamant et sans  $C_5$ , alors  $G$  est 2-clique-coloriable.*

**Preuve** On raisonne par induction sur le nombre de sommets, et on suppose donc que tout graphe sans codiamant et sans  $C_5$  avec un nombre de sommets plus petit que  $|V|$  est 2-clique-coloriable. Tout sous-graphe induit  $G' \subset G$  (avec  $G' \neq G$ ) étant également sans codiamant et sans  $C_5$  est donc 2-clique-coloriable.

**1er cas :** Il existe dans  $G$  une paire dominante  $\{a, b\} \subset V$ .

Si  $ab \in E$ , on assigne alors la couleur 1 à  $N(b)$ , et la couleur 2 à  $V \setminus N(b)$ . Il s’agit bien d’une 2-clique-coloration, puisqu’aucune clique maximale n’est contenue dans  $N(b)$  (car  $b \notin N(b)$  et  $b$  est  $N(b)$ -complet), et aucune clique maximale n’est contenue dans  $V \setminus N(b)$  (car  $a \notin V \setminus N(b)$  et  $a$  est  $(V \setminus N(b))$ -complet puisque  $ab$  est une arête dominante).

On suppose donc que  $ab \notin E$ . On définit alors  $N_{ab} = N(a) \cap N(b)$ ,  $N_a = N(a) \setminus N(b)$  et  $N_b = N(b) \setminus N(a)$ .

On peut également supposer qu'il existe une arête  $u_1 u_2 \in E$  avec  $u_1 \in N_a$  et  $u_2 \in N_b$ , car sinon en assignant la couleur 1 à  $\{a, b\}$ , et la couleur 2 à  $V \setminus \{a, b\}$ , on aurait une 2-clique-coloration.

Par hypothèse d'induction on sait qu'il existe une 2-clique-coloration  $c$  de  $G(N_{ab})$ . Pour chaque sommet  $w \in N_{ab}$  qui n'a pas de voisin dans  $N_{ab}$  (i.e. que  $w$  est un sommet isolé de  $G(N_{ab})$ ), on fixe  $c(w)$  à 1 si  $wu_1 \in E$ , et sinon à 2 (dans ce dernier cas on a nécessairement  $wu_2 \in E$  car sinon  $\{a, w, b, u_2, u_1\}$  induirait un  $C_5$ ). On assigne ensuite la couleur 1 à  $\{a\} \cup N_b$ , et la couleur 2 à  $\{b\} \cup N_a$ , et nous allons montrer que cela donne bien une 2-clique-coloration de  $G$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une clique maximale  $K$  monochromatique. Si  $K$  est de couleur 1, alors  $a \in K$  car sinon  $b$  serait  $K$ -complet et donc  $K$  ne serait pas maximale. Alors  $K \cap N_b = \emptyset$  car  $a \in K$  et  $a$  n'a pas de voisin dans  $N_b$ . Par conséquent  $K \setminus \{a\}$  est une clique maximale de  $G(N_{ab})$ . Si  $|K \setminus \{a\}| \geq 2$  alors  $K$  ne peut être monochromatique par choix de  $c$ , et si  $K \setminus \{a\} = \{w\}$ , alors  $wu_1 \in E$  (par construction de la coloration et parce que  $w$  est de couleur 1), et donc  $K$  n'est pas maximale. Des arguments similaires montrent qu'il ne peut y avoir de clique maximale monochromatique de couleur 2.

Dans ce 1er cas  $G$  est donc bien 2-clique-coloriable.

**2ème cas :** Il n'y a pas dans  $G$  d'ensemble dominant de taille 2. Ceci signifie que tous les stables maximaux sont de taille au moins 3.

Soit  $x \in V$  un sommet parmi ceux contenus dans un nombre minimum de stables maximaux. On définit  $M(x) = V \setminus N[x]$ . Comme  $G$  ne contient pas de codiamant, alors  $M(x)$  est un graphe multipartite complet (son complément étant sans  $P_3$ , il s'agit d'une union disjointe de cliques). On dénote  $S'_1, S'_2, \dots, S'_k$  les  $k$  stables maximaux de  $M(x)$  (qui sont donc complets deux à deux), qui correspondent aux  $k$  stables maximaux  $S_1, S_2, \dots, S_k$  qui contiennent  $x$ .

Nous allons montrer que  $M(x)$  ne contient pas de clique maximale de  $G$  de taille  $\geq 2$ . On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe une clique maximale  $K$  de  $G$  avec  $K \subset M(x)$  et  $|K| \geq 2$ . Comme  $M(x)$  est multipartite complet,  $K$  a exactement un sommet dans chaque  $S'_i$ , on note  $v_i$  le sommet de  $K \cap S'_i$ .

Soit  $v'_1 \in S'_1 \setminus \{v_1\}$  ( $v'_1$  existe puisque  $|S_1| \geq 3$ ). Par choix de  $x$ ,  $v'_1$  doit être contenu dans un autre stable  $S'$  (puisque comme  $|K| \geq 2$ ,  $x$  est contenu dans au moins deux stables), et grâce au Lemme 3.3 on sait que  $x$  et  $v_1$  sont tous deux  $(S' \setminus \{v'_1\})$ -complets.

Soit maintenant  $y \in S' \setminus \{v'_1\}$ . Alors  $y \in N(x)$ , et donc  $y \notin K$ . Comme  $K$  est maximale, il existe  $v_{i_0} \in K$  tel que  $v_{i_0} y \notin E$ . On prend alors  $y' \in S' \setminus \{v'_1, y\}$  ( $y'$  existe puisque  $|S'| \geq 3$ ). D'après le Lemme 3.3, on a  $y' v_{i_0} \in E$ . Mais comme  $K$  est maximale il existe  $v_{i_1} \in K$  tel que  $v_{i_1} y' \notin E$  (notons que cela implique  $k \geq 3$ ). Toujours d'après le Lemme 3.3, on a  $y v_{i_1} \in E$ . Mais alors  $\{x, y, v_{i_0}, v_{i_1}, y'\}$  induit un  $C_5$ , et on a donc une contradiction :  $M(x)$  ne contient pas de clique maximale de  $G$ .

En assignant alors la couleur 1 à  $\{x\} \cup M(x)$  et la couleur 2 à  $N(x)$ , on obtient une 2-clique-coloration de  $G$ .

Dans les deux cas  $G$  est bien 2-clique-coloriable, ce qui prouve le théorème.  $\diamond$

### 3.5 Graphes sans trou impair et sans taureau

Le *taureau* est le graphe représenté sur la Figure 3.5. On utilise la notation  $((a, b, c, d), e)$  qui signifie que  $(a, b, c, d)$  est un  $P_4$ , dont  $e$  voit les deux sommets du milieu.

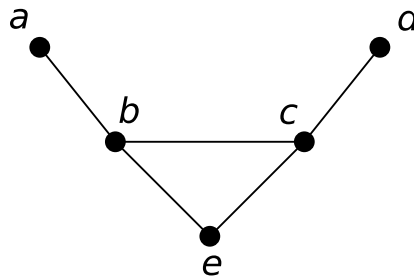


FIG. 3.5 – Un taureau.

Avant de parler de clique-colorabilité, on présente l'algorithme suivant, qui nous sera utile dans la suite :

**Algorithme 3.1.**

**Entrée :** Un graphe  $G = (V, E)$  connexe et sans taureau, et  $x \in V$

**Sortie :** Un sommet  $y_0 \in N(x)$  tel que  $N(x) \cap N(y_0)$  n'est pas une partie déconnectante de  $G$

$A := N(x)$

$R := \emptyset$

soit  $y \in A$

Tant que  $N(y) \cap A$  est une partie déconnectante

soit  $A_1 \subseteq N(y) \cap A$  une partie déconnectante minimale par inclusion

$R := R \cup \{\text{sommets de } A \setminus A_1 \text{ qui sont } A_1\text{-complets}\}$

$A := A \setminus \{\text{sommets de } A \setminus A_1 \text{ qui sont } A_1\text{-complets}\}$

soit  $y \in A$

Fin Tant que

$y_0 := y$

**Lemme 3.4.** *A chaque instant de l'exécution de l'Algorithme 3.1,  $(A, R)$  est une partition de  $N(x)$ , et  $A$  n'est jamais vide.*

**Preuve** Cela découle directement des instructions de l'algorithme.  $\diamond$



**Lemme 3.5.** *L'Algorithme 3.1 se termine, et la propriété suivante  $\mathcal{P}$  est respectée tout le long de son exécution :  $A$  est  $R$ -complet et  $N$ -complet, où  $N = N(R) \setminus N[x]$ .*

**Preuve** Au début de l'algorithme,  $\mathcal{P}$  est clairement satisfaite puisque  $R = \emptyset$ .

Nous devons donc montrer qu'une itération de la boucle **Tant que** de l'algorithme préserve la propriété  $\mathcal{P}$  : on suppose que l'algorithme commence une itération avec  $A$ ,  $R$  et  $N$  vérifiant  $\mathcal{P}$  ; on dénote par  $A'$ ,  $R'$  et  $N'$  les nouvelles valeurs de  $A$ ,  $R$  et  $N$  à la fin de l'itération.

Comme l'algorithme commence une itération, cela signifie que  $N(y) \cap A$  est une partie déconnectante de  $G$ , et on a  $A_1 \subseteq N(y) \cap A$  une partie déconnectante minimale par inclusion. Remarquons que puisque  $\mathcal{P}$  est vérifiée pour  $A$ ,  $R$ ,  $N$ , alors  $R'$  est l'ensemble des sommets de  $N(x) \setminus A_1$  qui sont  $A_1$ -complets.

On sait donc que  $A_1$  est  $R'$ -complet. Nous allons maintenant montrer que  $A_1$  est également  $N'$ -complet. Soit  $v_1 \in A_1$  et  $v_2 \in N'$ . Soit alors  $v_3$  un voisin de  $v_1$  dans une autre composante connexe de  $G \setminus A_1$  que celle qui contient  $x$  ( $v_3$  existe puisque  $A_1$  est minimale). Soit maintenant  $v_4 \in R'$  un voisin de  $v_2$  ( $v_4$  existe par définition de  $N'$ ). Comme  $v_3$  et  $v_4$  ne sont pas dans la même composante connexe de  $G \setminus A_1$  (car  $v_4$  et  $x$  sont dans la même composante connexe), on sait que  $v_3v_4, v_3v_2 \notin E$ . Alors  $v_1v_2 \in E$  car sinon  $((v_3, v_1, v_4, v_2), x)$  induirait un taureau, ce qui contredirait l'hypothèse que le graphe donné en entrée de l'algorithme est sans taureau. Par conséquent  $A_1$  est  $R'$ -complet et  $N'$ -complet.

Il nous reste à montrer que  $A' \setminus A_1$  est également  $R'$ -complet et  $N'$ -complet. Soit  $w_1 \in A' \setminus A_1$ ,  $w_2 \in R'$  et  $w_3 \in N'$ . Comme  $w_1 \notin R'$ , il existe  $w_4 \in A_1$  tel que  $w_1w_4 \notin E$ . Soit alors  $w_5$  un voisin de  $w_4$  dans une autre composante connexe de  $G \setminus A_1$  que celle qui contient  $x$  ( $w_5$  existe puisque  $A_1$  est minimale). Comme  $w_2 \in R'$ , on sait déjà que  $w_2w_4 \in E$ . On en déduit que  $w_1w_2 \in E$  car sinon  $((w_5, w_4, x, w_1), w_2)$  induirait un taureau. Par ailleurs, comme  $w_3 \in N'$ , il existe  $w_6 \in R'$  voisin de  $w_3$ . On a alors  $w_1w_3 \in E$  car sinon  $((w_5, w_4, w_6, w_1), w_3)$  induirait un taureau. Par conséquent,  $A' \setminus A_1$  est bien  $R'$ -complet et  $N'$ -complet.

On a donc montré que tous les sommets de  $A'$  sont  $R'$ -complets et  $N'$ -complets.

Ainsi  $A'$  et  $R'$  vérifient bien la propriété  $\mathcal{P}$ . De plus,  $|A'| < |A|$  car  $R \cup \{y\} \subseteq R'$  et  $A'$  n'est pas vide puisque c'est une partie déconnectante. Le nombre d'itération étant donc fini, l'algorithme se termine, ce qui finit de prouver le lemme.  $\diamond$

On est alors en mesure de prouver le lemme suivant, en démontrant la validité de l'Algorithme 3.1 :

**Lemme 3.6.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe connexe sans taureau et  $x \in V$ , alors il existe  $y_0 \in N(x)$  tel que  $N(x) \cap N(y_0)$  n'est pas une partie déconnectante de  $G$ .*

**Preuve** Nous allons montrer que le  $y_0$  obtenu avec l'Algorithme 3.1 vérifie bien ce lemme.

A la fin de l'algorithme on a  $A$ ,  $R$ ,  $y_0$  tels que :  $N(y_0) \cap A$  n'est pas une partie déconnectante, et d'après le Lemme 3.5,  $A$  et  $R$  vérifient  $\mathcal{P}$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $N(y_0) \cap N(x)$  est une partie déconnectante de  $G$ . Comme  $y_0$  est  $R$ -complet et que  $(A, R)$  est une partition de  $N(x)$ , on a  $R \cup (N(y_0) \cap A) = N(y_0) \cap N(x)$ . Il existe alors  $V_1 \subset V$  un ensemble de sommets correspondant à une composante connexe de  $G \setminus (R \cup (N(y_0) \cap A))$  distincte de celle qui contient  $x$ . Aucun sommet de  $R$  ne peut être adjacent à un sommet de  $V_1$  car  $\mathcal{P}$  est vérifiée, et on sait que  $y_0$  est adjacent à tous les sommets qui ont un voisin dans  $R$  et qui ne sont pas dans  $N[x]$ . Donc  $V_1$  correspond également à une composante connexe de  $G \setminus (N(y_0) \cap A)$ , ce qui contredit le fait que  $N(y_0) \cap A$  n'est pas une partie déconnectante. Par conséquent  $N(y_0) \cap N(x)$  n'est pas une partie déconnectante, et  $y_0$  vérifie bien le lemme.  $\diamond$

Ce dernier lemme nous permet alors de prouver le théorème suivant :

**Théorème 3.11.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe sans trou impair et sans taureau, alors  $G$  est 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Sans perte de généralité, on peut supposer que  $G$  est connexe. Soit  $x \in V$ . D'après le Lemme 3.6 on sait qu'il existe  $y_0 \in N(x)$  tel que  $N(x) \cap N(y_0)$  n'est pas une partie déconnectante de  $G$ .

On définit alors  $R = N(x) \cap N(y_0)$ ,  $A_0 = \{x\}$ ,  $A_1 = N(x) \setminus R$ , et pour tout  $i \geq 2$ ,  $A_i = N(A_{i-1}) \setminus (A_{i-1} \cup A_{i-2} \cup R)$ .  $A_i$  est donc l'ensemble des sommets à distance  $i$  de  $x$  dans  $G \setminus R$ . On assigne la couleur 1 aux sommets dans des  $A_i$  avec  $i$  pair, et la couleur 2 aux sommets dans des  $A_i$  avec  $i$  impair. Tous les sommets de  $G \setminus R$  ont donc reçu une couleur puisque  $R$  n'est pas une partie déconnectante de  $G$ .

On colorie enfin les sommets de  $R$  de la façon suivante : pour chaque sommet  $w \in R$ , si pour un certain  $i$  on peut trouver  $u \in A_i$ ,  $u' \in A_{i-1}$  tels que  $u'u, uw \in E$  mais  $u'w \notin E$  (c'est-à-dire que  $(u'u, uw)$  est un  $P_3$ ), alors on assigne à  $w$  la même couleur que celle de  $u'$ . Si on ne peut trouver de tel  $P_3$ , alors  $w$  peut recevoir n'importe quelle couleur.

Tout d'abord, on montre qu'aucun sommet de  $R$  ne peut recevoir deux couleurs distinctes.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe  $w \in R$ ,  $i_1$  et  $i_2$  de parités différentes,  $u \in A_{i_1}$ ,  $u' \in A_{i_1-1}$  tels que  $uu', uw \in E$  mais  $u'w \notin E$ , et  $v \in A_{i_2}$ ,  $v' \in A_{i_2-1}$  tels que  $vv', vw \in E$  mais  $v'w \notin E$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $i_1 < i_2$ .

Il est impossible que  $i_1 = 1$ , car ceci impliquerait  $u' = x$ , mais on sait que  $wx \in E$ .

Si l'on suppose que  $i_1 = 2$ , alors  $u' \neq y_0$  car  $u'w \notin E$  et  $y_0$  est  $R$ -complet. Comme  $y_0$  est un sommet isolé dans  $A_1$ , alors  $y_0u' \notin E$ . De plus, puisque  $i_2 \geq 3$  (car  $i_2 > i_1$ ) et  $y_0w \in E$ , alors  $((u', x, w, v), y_0)$  induit un taureau. Par conséquent  $i_1 \neq 2$  et donc  $i_1 \geq 3$ .

Si  $uv \in E$ , alors  $((x, w, u, u'), v)$  induit un taureau (car  $xu' \notin E$  étant donné que  $i_1 \geq 3$ ). Ainsi  $uv \notin E$ .

Considérons alors tous les plus courts chemins dans  $G \setminus R$  de  $x$  à  $u$ , et ceux de  $x$  à  $v$  qui contiennent  $v'$ . Soit  $P_1 = (u_j)_{0, i_1}$  (avec  $u_{i_1} = u$  mais pas nécessairement  $u_{i_1-1} = u'$ ), et  $P_2 = (v_j)_{0, i_2}$  (avec  $v_{i_2} = v$  et  $v_{i_2-1} = v'$ ) deux chemins parmi les plus semblables, ayant  $u_m$  comme sommet de séparation. D'après le Lemme 3.1 et comme  $uv \notin E$ , on sait qu'il n'existe pas d'arête de type  $u_j v_{j'}$  avec  $j, j' > m$  et  $j \neq j'$ .

Supposons dans un premier temps que  $m < i_1$  et qu'il existe  $m + 1 \leq j \leq i_1$  tel que  $u_j v_j \in E$ . Soit alors  $j_0 = \min\{j \mid j \geq m + 1, u_j v_j \in E\}$ . Si  $j_0 \geq m + 2$ , alors  $\{u_m, u_{m+1}, \dots, u_{j_0}, v_{j_0}, \dots, v_{m+1}\}$  induit un trou impair, donc  $j_0 = m + 1$ . Et si  $m \geq 1$ , alors  $((u_{m-1}, u_m, v_{m+1}, v_{m+2}), u_{m+1})$  induit un taureau ( $v_{m+2}$  existe puisque  $m < i_1 < i_2$ ), donc  $m = 0$ , ce qui signifie que  $u_1 v_1 \in E$ . Comme on sait que  $y_0$  est un sommet isolé dans  $A_1$ , alors  $y_0 \neq u_1, v_1$  et  $y_0 u_1, y_0 v_1 \notin E$ . De plus, soit  $u_2 y_0 \notin E$  ou  $v_2 y_0 \notin E$  car sinon on aurait pu trouver des chemins plus semblables. Mais alors soit  $((u_2, u_1, x, y_0), v_1)$  ou  $((v_2, v_1, x, y_0), u_1)$  induit un taureau.

Par conséquent, soit  $m = i_1$  ou bien  $\forall m + 1 \leq j \leq i_1, u_j v_j \notin E$ . On a donc un chemin sans corde  $P = (u_{i_1} \dots u_m v_{m+1} \dots v_{i_2})$ .  $P$  a un nombre  $p$  pair de sommets (car  $i_1$  et  $i_2$  sont de parités différentes). On renomme alors séquentiellement les sommets, de  $a_1 = u_{i_1}$  à  $a_p = v_{i_2}$ .

Comme  $w$  est voisin de sommets de  $P$  dans des  $A_j$  avec des  $j$  de parités différentes, alors  $w$  doit être adjacent à deux sommets de  $P$  consécutifs, sinon on pourrait trouver un trou impair.

On définit alors  $J = \{j \mid a_j w, a_{j+1} w \in E\}$  et  $j_0 = \max J$ . Comme  $v_{i_2-1} w \notin E$ , on a  $j_0 \leq p - 3$ . Alors  $a_{j_0+2}$  existe, et  $a_{j_0+2} w \notin E$ .

Si  $m \geq 2$ , alors  $((x, w, a_{j_0+1}, a_{j_0+2}), a_{j_0})$  induit un taureau.

Si  $m = 1$ , alors comme  $i_1 \geq 3$  on en déduit que  $p \geq 6$  et donc soit  $((a_1, w, a_{j_0+1}, a_{j_0+2}), a_{j_0})$  ou  $((a_p, w, a_{j_0+1}, a_{j_0+2}), a_{j_0})$  induit un taureau.

On aboutit donc bien à une contradiction, ce qui prouve qu'aucun sommet de  $R$  ne peut recevoir des couleurs opposées.

Nous allons maintenant montrer que la coloration ainsi définie est bien une 2-clique-coloration de  $G$ .

Pour cela on va montrer dans un premier temps que pour toute clique (non nécessairement maximale) contenue dans un  $A_i$  avec  $i \geq 1$ , il existe un sommet de  $A_{i-1}$  qui est complet à la clique. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une clique  $K$  contenue dans un  $A_i$  telle que pour tout  $u \in A_{i-1}$ , alors  $u$  n'est pas  $K$ -complet. Dans ce cas on a  $i \geq 2$  puisque  $x$  est  $A_1$ -complet.

Soit  $u_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $\forall u \in A_{i-1}, |N(u) \cap K| \leq |N(u_{i-1}) \cap K|$ . Par hypothèse sur  $K$ , il existe  $v_i \in K$  tel que  $u_{i-1} v_i \notin E$ .

Soit maintenant  $v_{i-1} \in A_{i-1}$  tel que  $v_{i-1} v_i \in E$ . Par choix de  $u_{i-1}$ , il existe  $u_i \in N(u_{i-1}) \cap K$  tel que  $v_{i-1} u_i \notin E$ .

Considérons alors tous les plus courts chemins dans  $G \setminus R$  de  $x$  à  $u_{i-1}$ , et ceux de  $x$  à  $v_{i-1}$ , et soit  $P_1 = (u_j)_{0,i-1}$  et  $P_2 = (v_j)_{0,i-1}$  parmi les plus semblables, ayant  $u_m$  comme sommet de séparation.

Soit  $j_0 = \min\{j \mid j \geq m + 1, u_j v_j \in E\}$  (on sait que  $j_0$  existe car  $u_i v_i \in E$ ). Si  $j_0 \geq m + 2$  alors  $\{u_m, u_{m+1}, \dots, u_{j_0}, v_{j_0}, \dots, v_{m+1}\}$  induit un trou impair (d'après le Lemme 3.1 on sait qu'il ne peut pas y avoir d'autre arête), donc  $j_0 = m + 1$ . Et si  $m \geq 1$ , alors  $((u_{m-1}, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}), v_{m+1})$  induit un taureau, donc  $m = 0$ .

Ceci signifie que  $u_1 v_1$  est une arête de  $G(A_1)$ . Comme on sait que  $y_0$  est un sommet isolé dans  $A_1$ , on a  $y_0 \neq u_1, v_1$  et  $u_1 y_0, v_1 y_0 \notin E$ .

Comme  $((y_0, x, v_1, v_2), u_1)$  ne peut induire un taureau, on en déduit que  $y_0v_2 \in E$ . De la même manière, on montre que  $y_0u_2 \in E$ . On a alors nécessairement  $i = 2$ , car sinon on aurait pu trouver des chemins plus semblables.

Mais par choix de  $u_{i-1} = u_1$ , il existe  $u'_2 \in N(u_1) \cap K$  tel que  $u'_2y_0 \notin E$ . L'ensemble  $\{x, u_1, u'_2, v_2, y_0\}$  induit alors un  $C_5$ .

Comme  $G$  ne contient pas de trou impair on aboutit à une contradiction, ce qui montre que l'hypothèse faite sur  $K$  est fautive : il existe nécessairement  $u \in A_{i-1}$  qui est  $K$ -complet.

Considérons à présent  $K$  une clique maximale de  $G$  de taille  $\geq 2$ .

Dans le cas où  $K \cap R = \emptyset$ , alors  $K$  ne peut être contenue dans un unique  $A_i$ , car comme  $K$  est maximale, cela contredirait l'existence d'un sommet  $u \in A_{i-1}$  qui soit  $K$ -complet (notons que comme  $|K| \geq 2$ , on a  $i \geq 1$ ). Donc  $K$  est répartie sur deux  $A_i$  consécutifs, et  $K$  n'est pas monochromatique.

Dans le cas maintenant où  $K \cap R \neq \emptyset$ , on sait que  $K \not\subseteq R$  car sinon  $x$  serait  $K$ -complet, et  $K$  ne serait pas maximale. Soit alors  $K' = K \setminus R$ . Si  $K'$  est répartie sur deux  $A_i$ , alors  $K'$  n'est pas monochromatique, et donc  $K$  non plus. On peut alors supposer que  $K'$  est contenue dans un seul  $A_i$ , et donc qu'il existe un sommet  $u_0 \in A_{i-1}$  qui est  $K'$ -complet (là encore car comme  $|K| \geq 2$ , on a  $i \geq 1$ ). Alors il existe  $w \in K \cap R$  tel que  $u_0w \notin E$  car sinon  $K$  ne serait pas maximale. Mais alors pour tout sommet  $v \in K'$ , l'ensemble  $\{u_0, v, w\}$  induit un  $P_3$ . Par définition de notre coloration on sait que  $w$  et  $v$  ont reçu des couleurs opposées, et donc que  $K$  n'est pas monochromatique.

Dans tous les cas,  $K$  n'est pas monochromatique, et on a donc bien une 2-clique-coloration de  $G$ .  $\diamond$



## Chapitre 4

# Complexité de la clique-coloration

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la complexité du problème de clique-coloration. Les aspects de complexité font en effet partie des points qui distinguent la clique-coloration de la coloration usuelle.

De plus, bien que la clique-coloration puisse être vue comme un cas particulier de coloration d'hypergraphe, la complexité du problème n'est pas a priori la même étant donné que les hyperarêtes ne sont pas connues explicitement.

### 4.1 Résultats préliminaires

#### 4.1.1 Le graphe auxiliaire $H(.,.)$

On appelle *graphe auxiliaire*  $H(.,.)$  le graphe de la Figure 4.1.

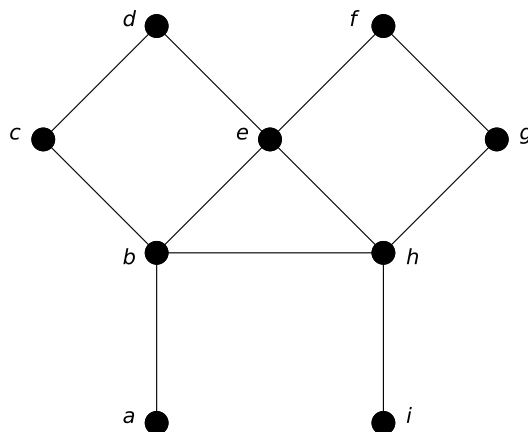


FIG. 4.1 – Le graphe auxiliaire  $H(.,.)$ .

Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  et  $x, y \in V$ , on dit alors qu'on *ajoute* à  $G$  une *copie* de  $H(x, y)$  si l'on redéfinit  $G$  de la façon suivante : on redéfinit tout d'abord  $V$

en y ajoutant des copies des sommets  $b, c, d, e, f, g, h$  du graphe auxiliaire  $H(.,.)$ ; on redéfinit ensuite  $E$  en y ajoutant des copies des arêtes de  $H(.,.)$ , en identifiant les sommets  $a$  et  $i$  du graphe auxiliaire, avec les sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ .

**Lemme 4.1.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe, et  $x, y \in V$ . Dans toute 2-clique-coloration du graphe obtenu en ajoutant à  $G$  une copie de  $H(x, y)$ ,  $x$  et  $y$  ont la même couleur.*

**Preuve** Cette propriété découle simplement du fait que dans  $H(.,.)$  les arêtes  $ab, bc, cd, de, ef, fg, gh, hi$  sont des cliques maximales.  $\diamond$

Grâce à ce lemme, le graphe auxiliaire  $H(.,.)$  permet donc de forcer deux sommets  $x$  et  $y$  d'un graphe à avoir la même couleur dans toute 2-clique-coloration du graphe.

Une autre méthode serait de rajouter un sommet voisin de seulement  $x$  et  $y$  (ou bien de rajouter un chemin de longueur paire entre  $x$  et  $y$  s'ils sont voisins). L'intérêt d'ajouter une copie de  $H(x, y)$  est que le chemin sans corde ainsi créé entre  $x$  et  $y$  est de longueur impaire, ce qui nous sera un outil de démonstration utile pour prouver des résultats sur les graphes sans trou impair.

Pour simplifier les futures figures de ce chapitre, le graphe auxiliaire sera par la suite représenté tel que sur la Figure 4.2.

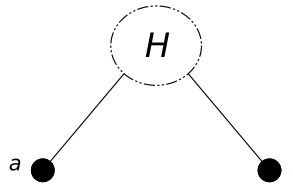


FIG. 4.2 – Représentation symbolique du graphe auxiliaire.

#### 4.1.2 Problème de contenance de clique maximale

Une différence notable entre la clique-coloration et la coloration d'hypergraphes est qu'il n'est pas clair que le problème soit dans NP ou dans co-NP.

En effet, pour vérifier qu'une  $k$ -partition  $(V_1, \dots, V_k)$  est une  $k$ -clique-coloration du graphe, il faut s'assurer que chaque  $V_i$  ne contient aucune clique maximale de taille  $\geq 2$ ; et cela peut s'avérer difficile puisqu'un graphe peut avoir un nombre exponentiel de cliques maximales.

Plus précisément, pour que le problème de clique-coloration soit dans NP, il faudrait que le problème suivant soit dans P :

##### CONTENANCE DE CLIQUE MAXIMALE (CCM)

ENTRÉE : Un graphe  $G = (V, E)$  et  $T \subset V$ .

QUESTION : Existe-t-il une clique maximale  $K$  de  $G$  contenue dans  $T$  ?

Or ce problème est connu pour être NP-complet. Dans [4] les auteurs ont montré que le problème restait NP-complet pour les graphes dont le complément ne contient pas de  $K_{1,4}$ .

Nous allons montrer ici que ce problème reste NP-complet, même pour une classe très particulière de graphes parfaits. Pour cela nous introduisons le problème suivant, qui est une variante du problème 3-SAT :

**Satisfiabilité d'un ensemble de clauses homogènes de 3 éléments (3-HSAT)**

ENTRÉE : Une formule  $\Phi = (X, C)$  constituée d'un ensemble  $C$  de clauses d'au plus trois littéraux chacune, de sorte que dans chaque clause, les littéraux sont soit tous positifs, soit tous négatifs.

QUESTION :  $\Phi$  est-elle satisfiable ?

**Théorème 4.1.** *Le problème 3-HSAT est NP-complet.*

**Preuve** Nous faisons une réduction à partir du problème 3-SAT : soit  $\Phi = (X, C)$  une instance de ce problème, nous allons construire à partir de  $\Phi$  une instance  $\Phi'$  de 3-HSAT, telle que  $\Phi$  est satisfiable si et seulement si  $\Phi'$  est satisfiable.

Tout d'abord pour chaque variable  $x_i \in X$ , on définit une nouvelle variable  $x'_i$  ainsi que les deux clauses :  $c'_{x_i} = x_i \vee x'_i$  et  $c''_{x_i} = \bar{x}_i \vee \bar{x}'_i$ . Ensuite pour chaque clause  $c \in C$  on définit une nouvelle clause  $\tilde{c}$  de la façon suivante : les littéraux positifs de  $c$  sont laissés tels quels dans  $\tilde{c}$ , et tout littéral négatif, par exemple  $\bar{x}_j$  est remplacé dans  $\tilde{c}$  par le littéral positif  $x'_j$ .

On définit alors  $X' = \{x_i, x'_i | x_i \in X\}$  et  $C' = \{c'_{x_i}, c''_{x_i} | x_i \in X\} \cup \{\tilde{c} | c \in C\}$ . Il est clair que toutes les clauses de  $C'$  sont bien homogènes, et que la taille totale de l'instance  $\Phi' = (X', C')$  de 3-HSAT est polynomiale en fonction de celle de  $\Phi$ .

D'autre part, les clauses de type  $c'_{x_i}$  et  $c''_{x_i}$  garantissent que toute valuation satisfaisant  $\Phi$  assignera des valeurs opposées aux variables  $x_i$  et  $x'_i$ . Ceci et la définition des  $\tilde{c}$  rend alors claire l'équivalence de la satisfiabilité de  $\Phi$  et de celle de  $\Phi'$ .  $\diamond$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème suivant :

**Théorème 4.2.** *Le problème CCM est NP-complet, même si le graphe d'entrée est le complémentaire d'un graphe biparti.*

**Preuve** Tout d'abord ce problème est dans NP, puisque vérifier si un ensemble donné de sommets correspond à une clique maximale du graphe se fait en temps polynomial.

Maintenant nous allons faire une réduction à partir du problème 3-HSAT dont nous venons de voir qu'il est NP-complet.

Considérons donc une instance  $\Phi = (X, C)$  de 3-HSAT. Nous avons ainsi un ensemble  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  de clauses homogènes, chacune contenant au plus trois littéraux de même signe tirés de l'ensemble  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  de variables.

On construit alors un graphe  $G$  de la manière suivante : pour chaque variable  $x_i$  on crée les sommets  $x_i$  et  $\bar{x}_i$ , et pour chaque clause on crée un sommet  $c_j$  correspondant.



Les arêtes de  $G$  sont telles que l'ensemble  $T = \{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$  induit un sous-graphe complet privé du couplage parfait  $\{\{x_1, \bar{x}_1\}, \dots, \{x_n, \bar{x}_n\}\}$ ; et pour chaque sommet  $c_j$  on met une arête entre  $c_j$  et  $l \in T$  si et seulement si le littéral correspondant n'apparaît pas dans la clause  $c_j$ . Enfin, tous les  $c_j$  sont adjacents deux à deux.

La Figure 4.3 montre un exemple d'une telle construction.

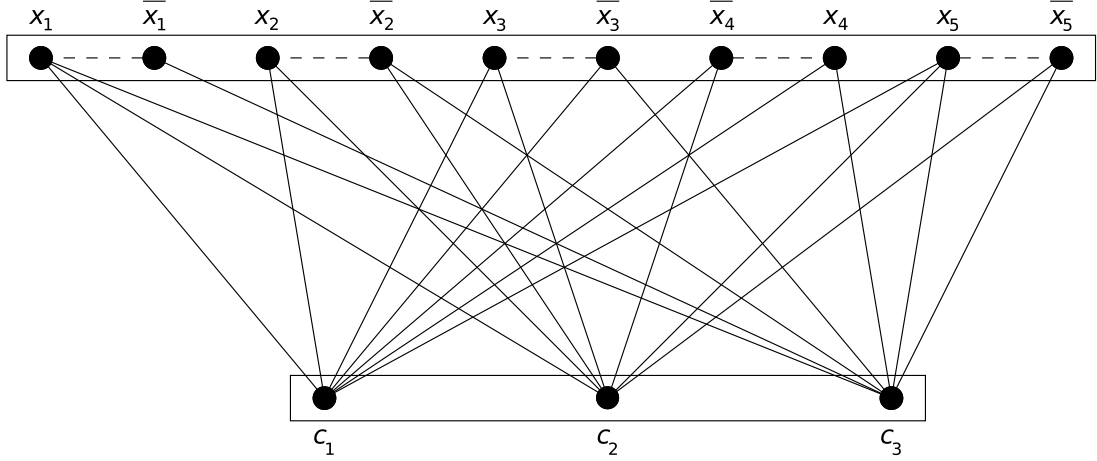


FIG. 4.3 – exemple pour  $\Phi = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_5) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ .

Nous allons maintenant montrer que  $T$  contient une clique maximale de  $G$  si et seulement si  $\Phi$  est satisfiable.

Pour montrer cela on remarque que les cliques maximales de  $G(T)$  contiennent exactement un sommet parmi  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  pour chaque  $i$ . Pour chaque clique maximale  $K$  de  $G(T)$  on peut alors faire correspondre la valuation  $v_K$  définie en mettant à vrai chaque variable  $x_i$  dont le sommet correspondant se trouve dans  $K$ .

Par construction de  $G$  on vérifie facilement que pour une clique maximale  $K$  de  $G(T)$  donnée,  $K$  est également une clique maximale de  $G$  si et seulement si  $v_K$  satisfait  $\Phi$  : en effet  $K$  est maximale dans  $G$  si et seulement si aucun  $c_j$  n'est adjacent à tous les sommets de  $K$ , et donc si et seulement si chaque clause est satisfaite avec  $v_K$  par au moins un littéral.

Il nous reste maintenant à montrer que  $G$  est le complémentaire d'un graphe biparti. Pour cela il nous suffit de partitionner le graphe en deux cliques (ce qui dans le complémentaire revient à trouver une partition en deux stables).

Toutes les clauses étant homogènes, on peut distinguer  $C^+$  l'ensemble des sommets  $c_j$  pour lesquels la clause correspondante ne contient que des littéraux positifs, et  $C^-$  l'ensemble de ceux pour lesquels la clause correspondante ne contient que des littéraux négatifs.

Par définition, tous les sommets de  $C^+$  sont adjacents à tous les  $\bar{x}_i$ , et de la même

manière tous les sommets de  $C^-$  sont adjacents à tous les  $x_i$ . On en déduit que  $\{x_i, i = 1, \dots, n\} \cup C^-$  et  $\{\bar{x}_i, i = 1, \dots, n\} \cup C^+$  sont bien deux cliques, qui partitionnent l'ensemble des sommets de  $G$ .

Ceci termine donc la réduction et prouve le théorème.  $\diamond$

**Corollaire 4.1.** *Le problème CCM est NP-complet, même si le graphe d'entrée est un graphe parfait.*

Il est intéressant de remarquer que pour les complémentaires de bipartis il est donc NP-complet de vérifier qu'une 2-partition donnée est une 2-clique-coloration, alors que ces graphes sont 2-clique-coloriables : en effet, ils ne contiennent pas de stable de taille 3 et sont différents du  $C_5$ , le Corollaire 1.1 prouve donc leur 2-clique-colorabilité.

## 4.2 Résultats généraux

La NP-complétude du problème CCM laisse penser que le problème de la clique-coloration pourrait ne pas être dans NP. En fait, Dániel Marx a montré dans [54] le théorème suivant :

**Théorème 4.3.** [54] *Le problème de  $k$ -clique-coloration est  $\Sigma_2P$ -complet pour tout  $k \geq 2$ .*

Toutefois ce théorème concerne les graphes en général, et on peut donc se demander ce qu'il advient dans des classes plus restreintes de graphes.

Comme d'après la Conjecture 1.1 les graphes sans trou impair seraient tous 3-clique-coloriables, alors le problème serait dans P pour  $k \geq 3$  (puisque la réponse serait toujours oui). Mais indépendamment de la validité de la Conjecture 1.1, la complexité reste la même pour  $k = 2$  :

**Théorème 4.4.** *Le problème de 2-clique-coloration des graphes parfaits est  $\Sigma_2P$ -complet.*

**Preuve** Remarquons tout d'abord que ce problème est bien dans  $\Sigma_2P$  : donner une 2-partition d'un graphe qui est une 2-clique-coloration est en effet un certificat que ce graphe est 2-clique-coloriable. Or vérifier un tel certificat est dans coNP, puisqu'une clique maximale monochromatique est un certificat qu'une 2-partition n'est pas une clique-coloration qui se vérifie en temps polynomial.

Nous allons maintenant réduire le problème QSAT<sub>2</sub> à la 2-clique-coloration des graphes parfaits. Soit  $\Psi = (X, Y, D)$  une instance de QSAT<sub>2</sub>. On construit un graphe  $G$  de la manière suivante : tout d'abord pour chaque variable  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) on crée deux sommets  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  (resp.  $y_j$  et  $\bar{y}_j$ ) ; on crée également un sommet  $v$  et les arêtes nécessaires pour que  $\{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n, y_1, \bar{y}_1, \dots, y_m, \bar{y}_m, v\}$  induise un sous-graphe complet de  $G$  privé du couplage  $\{\{x_1, \bar{x}_1\}, \dots, \{x_n, \bar{x}_n\}, \{y_1, \bar{y}_1\}, \dots, \{y_m, \bar{y}_m\}\}$ .

On ajoute alors à  $G$  des copies du graphe auxiliaire  $H(\bar{y}_j, y_{j+1})$  pour  $j = 1, \dots, m-1$ , et  $H(\bar{y}_m, v)$  ; et pour  $i = 1, \dots, m$ , on crée un sommet  $y'_i$ , avec les arêtes  $y_i y'_i$  et  $y'_i \bar{y}_i$ .

Ensuite, pour chaque  $x_i$  on crée un nouveau sommet  $x'_i$  et on ajoute une copie du graphe auxiliaire  $H(x_i, x'_i)$  ainsi qu'une arête entre  $x'_i$  et  $\bar{x}_i$ .

Enfin, pour chaque implicant on crée les sommets  $d_k, d'_k, d''_k$ , et on ajoute les arêtes  $\{d_k, d'_k\}, \{d'_k, d''_k\}, \{d''_k, v\}$  et  $\{d_k, v\}$ . Pour chaque implicant  $d_k$  et littéral  $l$  on met alors une arête entre les sommets correspondants si  $\bar{l}$  n'apparaît pas dans  $d_k$ .

La Figure 4.4 montre un exemple d'une telle construction.

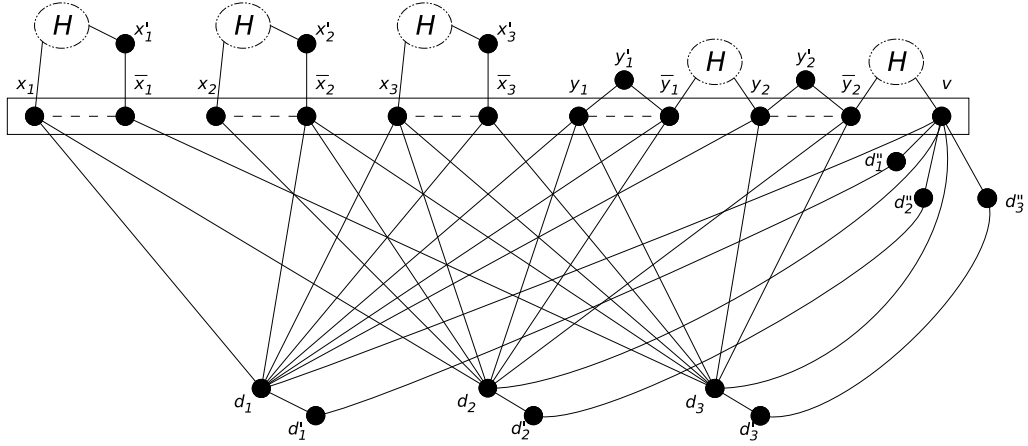


FIG. 4.4 – Exemple pour  $\Psi = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge y_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \bar{y}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge y_1)$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\Psi$  possède une solution si et seulement si le graphe  $G$  que l'on vient de construire est 2-clique-coloriable.

Premièrement on sait grâce au Lemme 4.1 que dans toute 2-clique-coloration de  $G$ , pour chaque  $i$ , les sommets  $x_i$  et  $x'_i$  auront la même couleur. Comme les arêtes de type  $\{x'_i, \bar{x}_i\}$  sont également des cliques maximales, alors les sommets  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  auront des couleurs opposées.

Avec un argument similaire on sait que tous les  $y_j$ , les  $\bar{y}_j$ , et  $v$  auront la même couleur ; on sait également que tous les  $d_k$  auront la même couleur, opposée à celle de  $v$ .

Supposons alors qu'il existe une valuation  $v_X$  telle  $\Psi$  soit satisfaite pour toute valuation de  $Y$ . On colorie alors le graphe de la façon suivante : on assigne la couleur noire à tous les  $y_j$ , les  $\bar{y}_j$ , à  $v$ , aux  $d'_k$  ; on donne la couleur blanche à tous les  $d_k$ , les  $d''_k$  et les  $y'_j$ . On peut alors facilement colorier les  $m$  copies du graphe auxiliaire créées entre les  $y_j, \bar{y}_j$  et  $v$  (puisqu'ils ont tous la même couleur).

Ensuite on assigne la couleur noire à  $x_i$  si la variable correspondante est vraie dans  $v_X$ , ou la couleur blanche sinon.  $x'_i$  reçoit ensuite la même couleur et  $\bar{x}_i$  la couleur opposée. Puis on en déduit la coloration des  $n$  copies du graphe auxiliaire.

Il nous faut maintenant montrer que nous avons bien défini là une 2-clique-coloration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une clique maximale  $K$  de  $G$  qui soit monochromatique. Clairement  $K$  n'est pas contenue dans une copie du graphe auxiliaire, et ne contient aucun sommet de type  $x'_i, y'_j, d'_k$  ou  $d''_k$ . Comme  $v$  est adjacent à tous les

autres sommets (qui sont les  $x_i$ , les  $\bar{x}_i$ , les  $y_j$ , les  $\bar{y}_j$  et les  $d_k$ ), on en déduit que  $v \in K$  et donc que  $K$  est entièrement coloriée en noir. De plus  $K$  contient exactement un sommet parmi  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  pour chaque  $i$ , et de même exactement un sommet parmi  $y_j$  et  $\bar{y}_j$  pour chaque  $j$ . Remarquons que  $K$  ne contient aucun  $d_k$ , puisque ceux-ci sont blancs.

On définit alors une valuation  $v_Y$  de la façon suivante : si le sommet  $y_j \in K$ , alors  $v_Y$  assigne la valeur **vrai** à la variable correspondante, et la valeur **faux** sinon. Les littéraux correspondant aux sommets de  $K \setminus v$  sont donc exactement ceux qui sont à **vrai** dans la valuation totale  $(v_X, v_Y)$ . Considérons maintenant n'importe quel  $d_k$ . Comme  $K$  est maximale,  $d_k$  n'est pas adjacent à au moins un sommet de  $K$ , et par construction de  $G$  cela signifie que l'implicant correspondant est **faux**.

On a donc trouvé un  $v_Y$  tel que tous les implicants sont **faux**, ce qui contredit la définition de  $v_X$ . Par conséquent nous avons bien une 2-clique-coloration de  $G$ .

Supposons maintenant que  $G$  est 2-clique-coloriable, et considérons n'importe quelle 2-clique-coloration. Sans perte de généralité on peut supposer que  $v$  est de couleur noire. Dans ce cas tous les  $y_j$  et les  $\bar{y}_j$  sont également noirs, et les  $d_k$  sont blancs.

Comme pour tout  $i$  les sommets  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  sont de couleurs opposées, on définit  $v_X$  de la manière suivante : le littéral  $x_i$  reçoit la valeur **vrai** dans  $v_X$  si le sommet correspondant est noir dans la clique-coloration, et la valeur **faux** dans le cas contraire.

Soit alors  $v_Y$  une valuation quelconque de  $Y$ . Considérons la clique  $K$  composée de  $v$  et des sommets correspondants aux littéraux dont la valeur dans la valuation totale  $(v_X, v_Y)$  est **vrai**. Tous les sommets de  $K$  sont alors noirs, et donc  $K$  ne peut être maximale, puisque nous avons une clique-coloration. Il y a donc un certain  $d_k$  qui est adjacent à tous les sommets de  $K$ , et donc  $d_k$  est **vrai** dans cette valuation.

On a donc montré que  $\Psi$  est satisfaite pour toute valuation  $v_Y$ , ce qui signifie que  $v_X$  possède bien la propriété voulue.

Il nous reste maintenant à montrer que  $G$  est parfait.

Considérons  $G'$  un sous-graphe induit de  $G$ . L'ensemble  $T' = V(G') \cap \{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n, y_1, \bar{y}_1, \dots, y_m, \bar{y}_m, v\}$  induit un graphe multiparti complet. La taille maximum  $q$  d'une clique dans  $G(T')$  est donc une borne inférieure de la taille maximum d'une clique dans  $G'$ . On assigne alors des couleurs différentes aux  $q$  stables de  $T'$ .

Soit  $d_k \in V(G')$ . Si  $d_k$  n'a pas de voisin dans un des stables de  $T'$ , alors on peut lui assigner la même couleur qu'aux éléments de ce stable. Si  $d_k$  a au moins un voisin dans chaque stable de  $T'$ , alors on lui assigne une nouvelle couleur, mais cela signifie également que la taille maximum d'une clique dans  $G'$  est d'au moins  $q + 1$ .

On vérifie facilement que les sommets restants dans chaque copie du graphe auxiliaire peuvent être coloriés avec 2 couleurs si un des sommets du triangle n'est pas dans  $G'$ , et avec 3 couleurs sinon. On colorie également facilement les  $y'_j$  restants (puisque chacun a au plus deux sommets à qui on a assigné la même couleur), ainsi que les  $d'_k$  et les  $d''_k$  restants.

On a donc montré que  $G'$  a son nombre chromatique égal à la taille maximum d'une clique, ce qui prouve que  $G$  est parfait. Ceci termine donc la réduction, et le théorème

est prouvé.  $\diamond$

La preuve du Théorème 4.4 que nous venons de donner est inspirée de celle de Marx pour sa preuve du cas  $k = 2$  du Théorème 4.3. Marx généralise ensuite ce résultat à tout  $k \geq 2$  avec une construction utilisant les graphes de Mycielski. Ces graphes contenant de nombreux trous impairs, cette généralisation ne peut être utilisée pour généraliser le résultat dans le cas des graphes parfaits, ce qui permet donc d'espérer que 3 couleurs sont bien toujours suffisantes pour les graphes sans trou impair.

Pour simplifier le problème, on peut considérer que la liste des cliques maximales du graphe est donnée en entrée du problème. Dans ce cas, vérifier qu'une  $k$ -partition est une  $k$ -clique-coloration se fait facilement, et donc le problème est dans NP. Les auteurs de [4] se sont penchés sur cette hypothèse, et ont montré que la  $k$ -clique-coloration restait un problème NP-complet pour tout  $k \geq 2$ .

Si la liste des cliques maximales n'est pas donnée, mais que l'on peut la calculer en un temps polynomial, alors le problème est également dans NP. C'est le cas par exemple si la taille maximum d'une clique est bornée, si le degré maximum d'un sommet est borné, ou si le graphe est sans diamant.

Pour  $k = 2$ , on sait que le problème reste NP-complet, même si le graphe d'entrée est de degré maximum 3 [4]. Kratochvíl et Tuza ont montré [45] que le problème est également NP-complet dans le cas particulier des graphes parfaits sans  $K_5$ .

Les preuves de ces deux résultats utilisent une réduction à partir du problème NAE-SAT suivant, qui est connu pour être NP-complet [65] :

#### Satisfiabilité Not-All-Equal (NAE-SAT)

ENTRÉE : Une formule  $\Phi = (X, C)$  de clauses de 3 littéraux, sur une ensemble  $X$  de variables.

QUESTION :  $\Phi$  est-elle NAE-satisfiable, i.e. existe-t-il une valuation  $v_X$  telle que dans toute clause il y a au moins un littéral vrai et un littéral faux ?

En améliorant la preuve donnée par Kratochvíl et Tuza, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 4.5.** *le problème de 2-clique-coloration des graphes parfaits sans diamant et sans  $K_4$  est NP-complet.*

**Preuve** Tout d'abord, rappelons que ce problème est dans NP, puisque le graphe étant sans diamant, chaque arête appartient à une seule clique maximale, ce qui permet d'en avoir la liste en temps polynomial.

Soit maintenant  $\Phi = (X, C)$  une instance du problème NAE-SAT.

Nous allons construire un graphe  $G$  à partir de  $\Phi$  qui va nous permettre de réduire NAE-SAT au problème de la 2-clique-coloration des graphes parfaits sans diamant et sans  $K_4$ .

La construction de  $G$  se fait de la manière suivante, illustrée par la Figure 4.5 :

- Pour chaque clause  $c$  on crée les sommets  $c_x, c_y$  et  $c_z$  formant une clique, où  $x, y$  et  $z$  sont les 3 variables apparaissant dans  $c$ . Nous dirons que cette clique est le sous-graphe correspondant à la clause  $c$ .

- Pour chaque variable  $x$ , soit  $c_1, c_2, \dots, c_k$  les clauses dans lesquelles  $x$  apparaît. On crée alors les sommets  $x_{c_1}, x_{c_2}, \dots, x_{c_k}$ . On crée aussi un chemin  $(x'_1 x'_2 \dots x'_{2(k-1)})$ , et pour chaque  $1 \leq i \leq 2k - 3$ , on crée une copie de  $H(x'_i, x'_{i+1})$ . On ajoute ensuite les arêtes  $x_{c_1} x'_1, x_{c_k} x'_{2(k-1)}$ , et pour chaque  $2 \leq i \leq k - 1$  les arêtes  $x_{c_i} x'_{2(i-1)}$  et  $x_{c_i} x'_{2i-1}$ . On appelle sous-graphe de la variable  $x$  le sous-graphe induit pas les sommets de type  $x_{c_i}, x'_i$  et les sommets des copies du graphe auxiliaire  $H(.,.)$  qui ont été créées. La Figure 4.5 montre un exemple avec  $k = 4$ . Notons que dans le cas  $k = 1$ , le sous-graphe de la variable  $x$  ne comporte que deux sommets :  $x'_1$  et  $x_{c_1}$ .

- Enfin, pour chaque  $1 \leq i \leq k$ , on crée l'arête  $x_{c_i} c_{i_x}$ , et on crée une copie de  $H(x_{c_i}, c_{i_x})$  si et seulement si la variable  $x$  apparaît de façon positive dans la clause  $c_i$ .

Remarquons que cette construction de  $G$  se fait en temps polynomial.

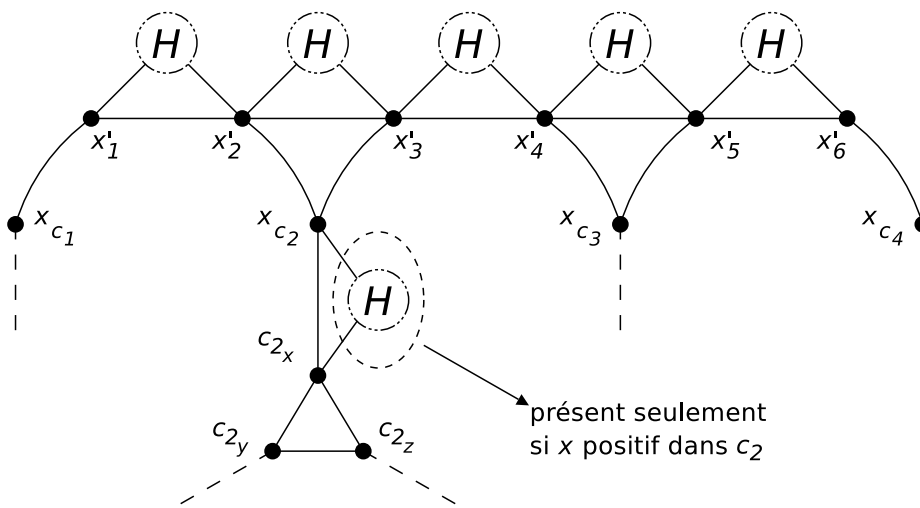


FIG. 4.5 – Exemple de construction de  $G$  pour une variable  $x$ , et une clause contenant  $x$ .

Dans une 2-clique-coloration finale du graphe, pour chaque variable  $x$  tous les  $x'_i$  auront la même couleur (à cause de la propriété du graphe auxiliaire), et donc tous les  $x_{c_i}$  auront également la même couleur (opposée à celle des  $x'_i$ ). De plus si une variable  $x$  apparaît positivement dans  $c_i$ , alors  $x_{c_i}$  et  $c_{i_x}$  auront la même couleur, ils auront des couleurs opposées dans le cas contraire. Enfin, comme chaque sous-graphe d'une clause forme une clique maximale, deux sommets dans ce sous-graphe auront des couleurs distinctes. Ainsi, en associant une couleur à vrai et l'autre à faux, nous aurons une solution satisfaisant  $\Phi$ . Réciproquement, si une valuation donnée satisfait  $\Phi$ , on en déduit facilement une 2-clique-coloration de  $G$ .

Il nous reste maintenant à montrer que  $G$  est un graphe parfait sans diamant et sans  $K_4$ . Il est assez clair que par construction  $G$  est sans diamant et sans  $K_4$ , nous n'avons donc plus qu'à montrer qu'il est parfait. Pour cela nous allons déjà montrer que  $G$  est sans trou impair, ce qui implique que ses sous-graphes induits sans triangle sont bipartis.

On remarque que les copies du graphe auxiliaire ne contiennent que des trous de taille 4, et qu'un trou les traversant ne peut contenir que les sommets  $a$  et  $i$ , puisqu'ils sont adjacents. Ainsi, le plus grand trou contenu dans un sous-graphe de variable est de taille 4. D'autre part, aucun trou n'est contenu dans un sous-graphe de clause puisqu'un tel sous-graphe ne comporte que 3 sommets et qu'un trou doit en avoir au moins 4. Considérons maintenant un trou traversant alternativement des sous-graphes de clauses et des sous-graphes de variables. Dans ce cas le trou a exactement 2 sommets dans chaque sous-graphe de clause qu'il traverse, et un nombre impair de sommets dans chaque sous-graphe de variable qu'il traverse : en effet le trou entre dans un tel sous-graphe par un  $x_{c_i}$ , traverse ensuite  $2j$  sommets de type  $x'_k$  avant de ressortir par un  $x_{c_{i'}}$  (avec  $j = |i' - i|$ ). Ainsi dans tous les cas le trou aura une taille paire.  $G$  ne contient alors pas de trou impair. Ses sous-graphes induits sans triangle seront donc bipartis et par conséquent 2-coloriables (pour la coloration usuelle).

Enfin, nous montrons que  $G$  est 3-coloriable. Pour cela on remarque que les sommets de degré 2 n'influent pas sur l'existence d'une 3-coloration d'un graphe. Or, en éliminant successivement tous les sommets de degré 2 de  $G$ , on élimine tous les sommets du graphe, ce qui montre que  $G$  est 3-coloriable.

Ainsi  $G$  est 3-coloriable, et tous ses sous-graphes induits le seront également. Cela montre que tous les sous-graphes induits de  $G$  ont leur nombre chromatique égal à la taille maximum des cliques qu'ils contiennent.  $G$  est donc parfait, et le théorème est prouvé.  $\diamond$

### 4.3 Algorithmes polynomiaux

Le problème de clique-coloration étant NP-difficile, il semble peu probable de pouvoir trouver un algorithme trouvant l'optimal en temps polynomial. En revanche il peut être intéressant de chercher des heuristiques, ou des algorithmes donnant l'optimal dans certains cas particuliers.

#### 4.3.1 Heuristique de clique-coloration

Il n'existe pour l'instant qu'une heuristique de clique-coloration, donnée par Bacsó, Gravier, Gyárfás, Preissmann et Sebő dans [4] :

**Algorithme 4.1.**

**Entrée :** Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Sortie :** Une clique-coloration de  $G$ .

$L := \emptyset$  ;  $D := \emptyset$

Tant que  $L \neq V$

Soit  $v \in V \setminus D$   
 Si  $v \notin L$ , donner à  $v$  une couleur qui n'apparaît pas dans  $N(v)$ ;  $L := L \cup \{v\}$   
 donner aux sommets de  $N(v) \setminus L$  une couleur n'apparaissant pas dans  $N(N(v) \setminus L)$   
 $D := D \cup \{v\}$ ;  $L := L \cup N(v)$   
 Fin Tant que

Il a été montré [4] que cet algorithme fournissait bien une clique-coloration du graphe d'entrée. Malheureusement il ne donne pas de garantie sur le nombre de couleurs utilisées par rapport à l'optimal, puisqu'il existe des graphes pour lesquels le rapport entre l'optimal et le nombre de couleurs utilisées est aussi mauvais que voulu.

Considérons en effet le graphe  $G$  suivant :  $V(G) = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k\}$ , tels que  $\{v_1, \dots, v_k\}$  soit une clique de  $G$ , et  $\{w_1, \dots, w_k\}$  un stable de  $G$ , et que l'arête  $v_i w_j$  existe si et seulement si  $i = j$ .

Si l'ordre des sommets considérés par l'algorithme est  $w_1, w_2, \dots, w_k$  (après cela tous les sommets seront coloriés, donc les  $v_i$  ne seront pas considérés), alors tous les  $v_i$  auront des couleurs différentes, on obtiendra donc au mieux une  $k$ -clique-coloration de  $G$  (et même une  $(k+1)$ -clique-coloration dans le cas où les  $w_i$  reçoivent tous la même couleur). Or ce graphe est 2-clique-coloriable : il suffit de donner la couleur 1 à  $\{v_1, w_2, \dots, w_k\}$ , et la couleur 2 aux autres sommets.

Dans le cas de la coloration usuelle, l'algorithme de coloration séquentiel n'offre pas non plus de garantie de performance dans le cas général, mais on sait qu'il existe toujours un certain ordre des sommets qui permet d'atteindre l'optimal, la difficulté étant justement de trouver le bon ordre.

Ceci n'est malheureusement pas le cas avec l'Algorithme 4.1, comme le montre l'exemple suivant : considérons en effet le graphe  $G$  qui a pour sommets  $V(G) = \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3\}$ , et dans lequel deux sommets  $v_{i,j}$  et  $v_{i',j'}$  sont adjacents si et seulement si  $i = i'$  ou  $j = j'$ .

Pour des raisons de symétrie, on peut supposer que le premier sommet considéré est  $v_{1,1}$ , à qui l'algorithme donnera la couleur 1, et il donnera la couleur 2 à ses voisins. Ensuite, toujours, pour des raisons de symétrie de  $G$ , on peut considérer qu'il n'y a que deux choix possibles : soit considérer un voisin de  $v_{1,1}$ , par exemple  $v_{1,2}$ ; soit considérer un non-voisin de  $v_{1,1}$ , par exemple  $v_{2,2}$ . Dans les deux cas l'algorithme attribuera alors à  $v_{2,2}$  soit la couleur 1, soit la couleur 3. Or s'il lui attribue la couleur 1, au moment où  $v_{2,3}$  sera colorié, il recevra la couleur 3. On utilisera donc toujours au moins 3 couleurs.

Pourtant  $G$  est 2-clique-coloriable : en effet, donner la couleur 1 aux  $v_{i,i}$ , puis la couleur 2 aux autres sommets constitue une 2-clique-coloration de  $G$ . Ainsi, il n'existe pas en général d'ordre sur les sommets d'un graphe pour lequel l'Algorithme 4.1 utilise un nombre optimal de couleurs.

Il est cependant envisageable de pouvoir trouver un ordre sur les sommets d'un



graphe de sorte que l’Algorithme 4.1 ait une garantie de performance.

### 4.3.2 Algorithmes pour des classes particulières de graphes

On a vu au chapitre précédent que les preuves des théorèmes fournissaient directement des algorithmes polynomiaux de clique-coloration s’appliquant aux classes de graphes concernées.

C’est en fait également le cas des résultats donnant des bornes sur le nombre clique-chromatique pour une classe de graphes donnée, que nous avons cités dans cette thèse (aux Sections 1.3.2 et 3.1). Pour ces résultats, les différents auteurs apportent en effet des preuves constructives qui s’avèrent fournir des algorithmes polynomiaux.

Chaque algorithme étant spécifique à une classe de graphes, il serait long de faire ici la liste de tous les algorithmes, nous renvoyons donc le lecteur aux démonstrations des théorèmes correspondants.

Il est également intéressant de noter que la première preuve du Théorème 3.7 avait été obtenue dans [22] par un algorithme d’échanges chromatiques. Cet algorithme était en fait un cas particulier de l’Algorithme 2.1 qui nous a permis de prouver la conjecture de Sterboul.

De tels types d’algorithmes peuvent en effet donner des résultats intéressants dans le cas des graphes (voir par exemple [53]). Malheureusement plusieurs difficultés se posent pour la clique-coloration : tout d’abord, il n’est pas évident de détecter les cliques qui sont monochromatiques (sauf lorsqu’il y en a un nombre polynomial, ce qui est le cas dans les graphes sans diamant). D’autre part, choisir un sommet au hasard dans une clique monochromatique pour inverser sa couleur ne semble pas être en général une bonne stratégie : les structures qui posent problème s’apparentent aux cycles anti-Sterboul, qui se caractérisent difficilement en termes de sous-graphes induits (sauf pour les graphes sans diamant, où cela correspond à un mauvais cycle).

## Chapitre 5

# Autres questions autour de la clique-coloration

### 5.1 Clique-colorabilité héréditaire

#### 5.1.1 Présentation du problème

Une propriété est dite *héréditaire* si lorsqu'elle est vraie pour un graphe, elle l'est également pour tous ses sous-graphes induits. On dit aussi d'une classe de graphes qu'elle est *héréditaire* si tout sous-graphe d'un graphe de la classe y appartient également.

La  $k$ -colorabilité usuelle est un exemple de propriété d'hérédité (puisque si un graphe est  $k$ -coloriable, tous ses sous-graphes induits le sont également), mais ce n'est pas le cas de la clique-coloration.

On dit alors d'un graphe qu'il est *héréditairement  $k$ -clique-coloriable* si tous ses sous-graphes induits (y compris lui-même) sont  $k$ -clique-coloriables. Le *nombre clique-chromatique héréditaire* d'un graphe est le plus petit entier  $k$  tel que le graphe est héréditairement  $k$ -clique-coloriable.

Le problème de  $k$ -clique-colorabilité a alors l'équivalent suivant :

#### **$k$ -Clique-Colorabilité Héréditaire ( $k$ -CCH)**

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

QUESTION :  $G$  est-il héréditairement  $k$ -clique-coloriable ?

Remarquons que s'il existe une constante qui borne les nombres clique-chromatique d'une classe de graphes héréditaire, alors elle borne également les nombres clique-chromatiques héréditaires de cette classe.

Par exemple, la classe des graphes fortement parfaits est héréditaire, car par définition tout sous-graphe induit d'un graphe fortement parfait est également fortement parfait. Comme les graphes fortement parfaits sont 2-clique-coloriables, alors ils sont également héréditairement 2-clique-coloriables. D'autre part, si la Conjecture 1.1 était vérifiée, alors tous les graphes sans trou impair seraient héréditairement 3-clique-coloriables.

Remarquons également que tout graphe  $G$  est héréditairement  $k$ -clique-coloriable à partir d'un certain  $k$ , qui est le maximum des nombres clique-chromatiques de ses sous-graphes induits.

### 5.1.2 Résultats généraux

Le problème de  $k$ -clique-colorabilité héréditaire a été jusqu'ici moins étudié que la  $k$ -clique-colorabilité. Cependant, l'exemple des graphes parfaits montre que dans certains cas il peut s'avérer plus pertinent de définir une notion en y imposant une propriété d'hérédité.

La  $k$ -clique-colorabilité héréditaire est apparue dans [44] sous le terme de *forte  $k$ -divisibilité*. Hoàng et McDiarmid se sont en fait intéressés dans [44] à un problème relativement proche de la clique-coloration : celui de la coloration de l'hypergraphe des cliques de taille maximum d'un graphe (qu'ils appellent  *$k$ -divisibilité*).

Leur intérêt pour la  $k$ -divisibilité était motivé par la nouvelle approche qu'il offrait pour aborder la conjecture forte des graphes parfaits. Ils présentaient en effet les conjectures suivantes, la seconde étant équivalente à la Conjecture Forte des Graphes Parfaits :

**Conjecture 5.1.** [44] *L'hypergraphe des cliques maximum d'un graphe est 2-coloriable si et seulement si le graphe est sans trou impair.*

**Conjecture 5.2.** [44] *Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si les hypergraphes des cliques maximum de  $G$  et de son complémentaire sont tous deux 2-coloriables.*

Il n'y a malheureusement pas eu d'autres travaux sur la  $k$ -divisibilité, et la Conjecture Forte des Graphes Parfaits étant maintenant prouvée (voir Section 1.2), la perspective de cette approche ne pourrait qu'en donner une preuve alternative.

Cependant, Hoàng et McDiarmid obtiennent également dans leur article des résultats sur la  $k$ -clique-colorabilité héréditaire (qu'ils appellent donc forte  $k$ -divisibilité) qui sont les suivants :

**Théorème 5.1.** [44] *Tout graphe  $G$  est héréditairement  $(\alpha(G) + 1)$ -clique-coloriable, et si  $G$  est sans  $C_5$ , alors  $G$  est héréditairement  $\alpha(G)$ -clique-coloriable.*

**Théorème 5.2.** [44] *Tout graphe sans  $C_5$  et sans copatte est héréditairement 2-clique-coloriable.*

Ces théorèmes ont par la suite été généralisés. En effet le Théorème 5.1 peut être vu comme un corollaire du Théorème 1.2 qui dit que  $C_5$  est le seul graphe qui n'est pas  $\alpha$ -clique-coloriable ; et le Théorème 5.2 comme un corollaire du Théorème 3.1 qui dit que  $C_5$  est le seul graphe sans copatte qui n'est pas 2-clique-coloriable.

Le terme de  $k$ -clique-colorabilité héréditaire est apparu dans [54], et paraît plus naturel étant donné la notion de clique-colorabilité.

Le résultat le plus important concernant la  $k$ -clique-colorabilité héréditaire a été obtenu par Marx :

**Théorème 5.3.** [54] *Pour tout  $k \geq 3$ , le problème  $k$ -CCH est  $\Pi_3P$ -complet.*

Le lien entre la clique-coloration héréditaire et la coloration d'hypergraphes est moins évident que pour la clique-coloration. En effet, hormis pour les graphes sans diamant que nous verrons plus tard, colorier l'hypergraphe des cliques d'un sous-graphe induit ne revient en général pas à colorier le sous-hypergraphe induit de l'hypergraphe des cliques.

On a en fait pour  $A \subseteq V(G)$  :  $\mathcal{H}(G(A)) = \mathcal{H}(G)(A)^{\max}$ , puisqu'en retirant certains sommets, il y a des cliques qui ne sont plus maximales, et qu'on ne doit donc plus considérer. On ne sait pour l'instant rien des hypergraphes  $H$  tels que pour tout  $A \subseteq V(H)$ ,  $H(A)^{\max}$  est  $k$ -coloriable, et il semble difficile d'en trouver une caractérisation.

### 5.1.3 2-clique-colorabilité héréditaire

La complexité du problème 2-CCH est laissée ouverte par Marx dans [54], et était également déjà posée dans [4]. La preuve du Théorème 5.3 faite par Marx utilise des "gadgets", qui sont des petits graphes qui lui permettent de faire une réduction à partir d'un problème  $\Pi_3P$ -complet ; mais il semble difficile de construire de nouveaux gadgets qui permettraient de généraliser ce Théorème avec  $k = 2$ .

Par exemple, dans la section 4 nous utilisons des copies du graphe auxiliaire, mais cet outil ne fonctionne pas pour la 2-clique-colorabilité héréditaire, comme l'indique le lemme suivant :

**Lemme 5.1.** *Soit  $G = (V, E)$ , et  $x, y \in V$  deux sommets situés dans une même composante connexe de  $G$ . Si l'on ajoute à  $G$  une copie de  $H(x, y)$ , alors le graphe résultant n'est pas héréditairement 2-clique-colorable.*

**Preuve** Comme  $x$  et  $y$  sont dans une même composante connexe de  $G$ , il existe un chemin sans corde les reliant (il s'agit éventuellement de l'arête  $xy$ ).

Avec la copie du graphe auxiliaire, cela fait alors apparaître un mauvais cycle, et donc un sous-graphe qui n'est pas 2-clique-colorable.  $\diamond$

D'autre part, nous allons voir que dans de nombreux cas il est polynomial de décider si un graphe est héréditairement 2-clique-colorable ou non.

En effet les théorèmes vus au Chapitre 3 concernent des classes de graphes héréditaires, puisque caractérisées par sous-graphes induits interdits.

Dans plusieurs cas cela revient à déterminer la complexité du problème de détection de trou impair. Comme nous l'avons évoqué dans la Section 1.2, la complexité de ce problème n'est pas connue dans le cas général. Cependant il s'avère polynomial dans de nombreux cas particuliers, comme ceux des graphes étudiés au Chapitre 3.

#### Graphes sans $P_5$

**Théorème 5.4.** *Si  $G$  est un graphe sans  $P_5$  et sans  $C_5$ , alors  $G$  est héréditairement 2-clique-colorable.*

**Preuve** Cela découle directement du Théorème 3.2.  $\diamond$

**Corollaire 5.1.** *Le problème 2-CCH pour les graphes sans  $P_5$  est polynomial.*

**Preuve** Étant donné un graphe  $G$  sans  $P_5$ , il suffit de détecter la présence d'un  $C_5$ . Cela se fait clairement de façon polynomiale en testant tous les sous-ensembles de cinq sommets.  $\diamond$

### Graphes sans codiamant

**Théorème 5.5.** *Si  $G$  est un graphe sans codiamant et sans  $C_5$ , alors  $G$  est héréditairement 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Cela découle directement du Théorème 3.10.  $\diamond$

**Corollaire 5.2.** *Le problème 2-CCH pour les graphes sans codiamant est polynomial.*

### Graphes sans copatte

**Théorème 5.6.** *Si  $G$  est un graphe sans copatte et sans  $C_5$ , alors  $G$  est héréditairement 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Cela découle directement du Théorème 3.1.  $\diamond$

**Corollaire 5.3.** *Le problème 2-CCH pour les graphes sans copatte est polynomial.*

### Graphes sans griffe

**Théorème 5.7.** *Si  $G$  est un graphe sans griffe et sans trou impair, alors  $G$  est héréditairement 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Cela découle directement du Théorème 3.3.  $\diamond$

Pour la complexité du problème 2-CCH pour les graphes sans griffe, nous allons utiliser le lemme suivant dû à Ben Rebea :

**Lemme 5.2** (Ben Rebea, [17]). *Soit  $G$  un graphe connexe sans griffe avec  $\alpha(G) \geq 3$ . Si  $G$  contient un antitrou impair, alors  $G$  contient un  $C_5$ .*

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 5.8.** *Le problème de détection de trou impair pour les graphes sans griffe est polynomial.*

**Preuve** Soit  $G$  un graphe sans griffe.

Si  $\alpha(G) \geq 3$ , alors grâce au Lemme 5.2 et au Théorème 1.2 (qui avait déjà été prouvé pour les graphes sans griffe par Parthasarathy et Ravindra [60]), on sait que  $G$  est parfait si et seulement s'il ne contient pas de trou impair. Pour savoir si  $G$  contient

un trou impair il suffit alors de tester si  $G$  est parfait, ce qui se fait en temps polynomial [17].

Si en revanche  $\alpha(G) \leq 2$ , alors le seul trou impair pouvant apparaître est  $C_5$ , dont la détection se fait en temps polynomial.  $\diamond$

**Corollaire 5.4.** *Le problème 2-CCH pour les graphes sans griffe est polynomial.*

### Graphes sans taureau

**Théorème 5.9.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe sans taureau, alors  $G$  est héréditairement 2-clique-coloriable si et seulement si  $G$  ne contient pas de trou impair.*

**Preuve** Ce résultat est immédiat d'après le Théorème 3.11.  $\diamond$

Décider si un graphe sans taureau est héréditairement 2-clique-coloriable revient donc à décider s'il existe un trou impair dans un tel graphe. Dans [64], Reed et Sbihi ont donné un algorithme polynomial qui décide si un graphe sans taureau est parfait ou non. En fait, les résultats utilisés dans leur article permettent d'obtenir un algorithme décidant si le graphe contient un trou impair.

Pour cela on a besoin des notions suivantes : dans un graphe  $G = (V, E)$ , un *ensemble homogène* est une partie  $H \subset V$  avec  $2 \leq |H| < |V|$ , et telle que tout sommet de  $V \setminus H$  est soit voisin de tous les sommets de  $H$ , soit voisin d'aucun sommet de  $H$  ; une *roue* est un graphe constitué d'un trou, auquel on rajoute un sommet universel ; enfin, le graphe  $F_0$  est le graphe représenté sur la Figure 5.1.

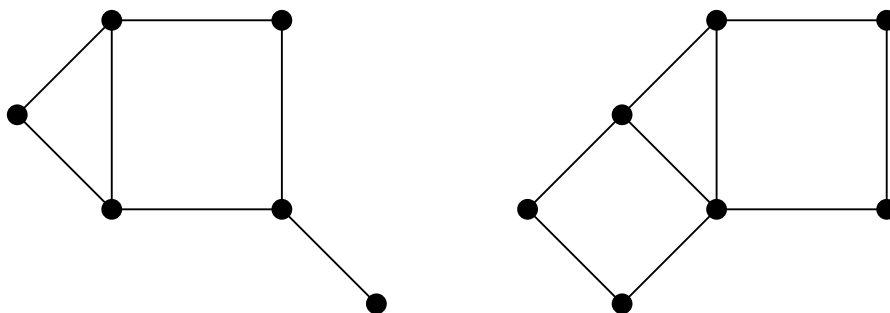


FIG. 5.1 – Le graphe  $F_0$ , et son complémentaire  $\overline{F_0}$ .

Reed et Sbihi utilisent alors le lemme suivant, dû à Chvátal et Sbihi :

**Lemme 5.3.** [16] *Pour tout graphe sans taureau  $G$  qui ne contient ni  $F_0$  ni  $\overline{F_0}$ , soit  $G$  possède un ensemble homogène, ou  $G$  est sans triangle, ou  $\overline{G}$  est sans triangle.*

Notons qu'on a le corollaire suivant :

**Corollaire 5.5.** *Pour tout graphe  $G$  sans patte, soit  $G$  possède un ensemble homogène, ou  $G$  est sans triangle, ou  $\overline{G}$  est sans triangle.*

**Preuve** Remarquons tout d'abord que comme  $G$  est sans patte, alors  $G$  est sans taureau.

Il suffit de remarquer que  $F_0$  et  $\overline{F_0}$  contiennent tous deux une patte, et le résultat découle du Lemme 5.3.  $\diamond$

Reed et Sbihi prouvent d'autre part les lemmes suivants :

**Lemme 5.4.** [64] *Soit  $G$  un graphe sans taureau. Si  $G$  contient une roue, alors  $G$  a un ensemble homogène.*

On appelle *sommet critique* d'une patte l'un de ses deux sommets de degré 2, comme indiqué sur la Figure 5.2 :

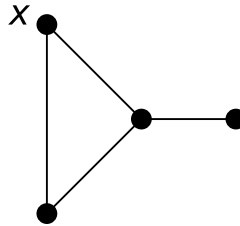


FIG. 5.2 – Une patte, avec un sommet critique  $x$ .

**Lemme 5.5.** [64] *Soit  $G$  un graphe sans taureau, sans  $C_5$  et sans roue, et  $x$  un sommet critique d'une patte dans  $G$ . Alors  $G$  contient un trou impair si et seulement si  $G \setminus x$  également.*

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 5.10.** *Soit  $G$  un graphe sans taureau, alors  $G$  possède l'une des propriétés suivantes :*

- (a)  $G$  contient un  $C_5$ .
- (b)  $G$  ou  $\overline{G}$  est sans triangle.
- (c)  $G$  a un ensemble homogène.
- (d)  $G$  contient une patte, et pour  $x$  sommet critique de cette patte,  $G$  contient un trou impair si et seulement si  $G \setminus x$  contient un trou impair.

**Preuve** Cela découle directement du Corollaire 5.5, et des Lemmes 5.4 et 5.5.  $\diamond$

L'algorithme est alors le suivant :

**Algorithme 5.1.**

**Entrée :** un graphe  $G = (V, E)$ .

**Sortie :** OUI si  $G$  est sans taureau ni trou impair ; ou NON si  $G$  contient un taureau ou un trou impair.

Si  $G$  contient un taureau, retourner NON.

```

Si  $G$  contient un  $C_5$ , retourner NON.
 $L := \{G\}$ 
Tant que  $L \neq \emptyset$  faire
  soit  $G_1 \in L$ ;  $L := L \setminus G_1$ 
  Si  $G_1$  est sans triangle
  alors Si  $G_1$  n'est pas biparti
    alors retourner NON
  sinon Si  $G_1$  a un ensemble homogène  $H$ 
  alors soit  $x \in H$ 
    soit  $G_2 = G_1 \setminus (H \setminus x)$  et  $G_3 = G(H)$ 
     $L := L \cup \{G_2, G_3\}$ 
  sinon Si  $G_1$  contient une patte
  alors soit  $x$  un sommet critique de cette patte
     $L := L \cup \{G_1 \setminus x\}$ 
  fin Si
fin Tant que
retourner OUI

```

La validité de cet algorithme découle directement du Théorème 5.10.

Il suffit de remarquer les deux points suivants : tout d'abord, si  $H$  est un ensemble homogène de  $G$ , alors pour  $x \in H$ ,  $G$  est sans trou impair si et seulement si  $H$  est sans trou impair et  $G \setminus (H \setminus x)$  sont sans trou impair.

D'autre part, dans le cas où  $\overline{G_1}$  est sans triangle (qui est une possibilité d'après le Théorème 5.10), alors  $G_1$  ne peut contenir de trou impair, puisqu'on sait qu'il ne contient pas de  $C_5$  et que les autres trous impairs contiennent un stable de taille 3 (et donc un triangle dans le complémentaire).

Ce cas n'a donc pas formellement à être traité dans l'algorithme. Toutefois considérer ce cas permettrait, lorsque  $G_1$  ne contient effectivement pas de  $S_3$ , de ne pas traiter les cas où  $G_1$  contient un ensemble homogène ou une patte. Cela constituerait donc une heuristique pour optimiser l'algorithme, mais il n'y a pas de gain en terme de complexité dans le pire des cas.

La preuve que cet algorithme fonctionne en temps polynomial présentée maintenant est la même que celle de Reed et Sbihi [64], que nous redétaillons compte tenu des légères différences de notre algorithme.

Tout d'abord il faut montrer que chaque opération effectuée se fait bien en temps polynomial :

- Tester si le graphe contient un taureau ou un  $C_5$  peut clairement se faire en  $O(n^5)$ .
- Tester si le graphe est sans triangle se fait en  $O(n^3)$ , et tester ensuite si le graphe est biparti se fait en  $O(n^2)$  (puisque chaque composante connexe d'un graphe biparti a une unique bipartition).
- Tester si le graphe contient un ensemble homogène et en trouver un le cas échéant peut se faire également en temps polynomial, plus précisément en  $O(n^3)$  d'après [54].



- Tester si le graphe contient une griffe peut facilement se faire en  $O(n^4)$ .

Chaque exécution de la boucle **Tant que** comprenant ces trois derniers tests, alors la complexité en est  $O(n^4)$ .

Il faut maintenant montrer que le nombre de graphes mis dans  $L$  par l'algorithme (et donc le nombre d'exécutions de la boucle **Tant que**) est également polynomial en fonction de la taille du graphe de départ.

En notant  $f(G)$  le nombre de graphes que l'algorithme met dans  $L$  lors de son exécution avec  $G$  pour graphe de départ, on va montrer par induction que quel que soit  $G$ ,  $f(G) \leq 2|V| - 3$  :

- Pour  $|V| = 2$ , le résultat est clairement vrai.

- Supposons maintenant que  $|V| = n \geq 3$  et que le résultat est vrai pour tout graphe ayant au plus  $n - 1$  sommets. Si  $G$  est sans triangle alors  $G$  est le seul graphe mis dans  $L$ , donc  $f(G) = 1$ . Si  $G$  a un ensemble homogène, alors on rentre dans  $L$  deux graphes  $G_2$  et  $G_3$  qui sont tels que  $|V(G_2)| + |V(G_3)| = n + 1$ . Par hypothèse de récurrence, on aura alors  $f(G) = f(G_2) + f(G_3) + 1 \leq 2|V(G_2)| - 3 + 2|V(G_3)| - 3 + 1 = 2n - 3$ . Enfin, si  $G$  contient une patte, alors par hypothèse de récurrence on aura  $f(G) \leq (2(n - 1) - 3) + 1 = 2n - 4$ . Dans tous les cas on a bien  $f(G) \leq 2n - 3$ .

On a donc le résultat par induction.

Le nombre de graphes mis dans  $L$  est donc en  $O(n)$ . La complexité totale de l'algorithme (en incluant les tests préliminaires que le graphe d'entrée ne contient ni taureau ni  $C_5$ ) est donc en  $O(n^5)$ .

Nous venons donc de montrer que cet algorithme fonctionne bien en temps polynomial. Il en découle alors directement le théorème suivant :

**Théorème 5.11.** *Le problème de détection de trou impair est polynomial pour les graphes sans taureau.*

**Corollaire 5.6.** *Le problème 2-CCH est polynomial pour les graphes sans taureau.*

### Graphes sans diamant

**Théorème 5.12.** *Si  $G$  est un graphe sans diamant et sans mauvais cycle, alors  $G$  est héréditairement 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Ce résultat est une conséquence immédiate du Théorème 3.7.  $\diamond$

De même que pour les autres classes de graphes évoquées dans cette section, on sait grâce à Fonlupt et Zemirline [31] que le problème de détection de trou impair est également polynomial pour les graphes sans diamant.

Cependant, contrairement aux autres classes on ne peut pas en déduire directement que le problème 2-CCH est polynomial pour les graphes sans diamant.

En effet, contrairement aux autres classes vues jusqu'ici, le Théorème 5.12 indique qu'il ne suffit pas d'interdire les trous impairs, mais plus généralement les mauvais cycles, comme celui de la Figure 1.1.

Pour montrer que le problème 2-CCH est polynomial pour les graphes sans diamant, on a alors besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.6.** *Si  $G = (V, E)$  est un graphe sans diamant, alors l'hypergraphe des cliques d'un sous-graphe induit correspond au sous-hypergraphe induit de l'hypergraphe des cliques, auquel on supprime les éventuels singletons.*

**Preuve** D'après le Lemme 3.2, dans un sous-graphe induit  $G(V')$ , chaque clique maximale  $K'$  sera une partie d'une clique maximale  $K$  de  $G$  telle que  $K' = K \cap V'$ .

Réciproquement, toutes les arêtes de  $(\mathcal{H}(G))(V')$  correspondront à des cliques maximales de  $\mathcal{H}(G(V'))$ , excepté peut-être certains singletons qui ne correspondent pas à des cliques maximales (i.e. constitués de sommets non isolés dans le sous-graphe induit).

En ne considérant dans le sous-hypergraphe induit que les arêtes contenues dans aucune autre, on élimine précisément ces singletons, et on a donc le résultat.  $\diamond$

**Corollaire 5.7.** *Le problème 2-CCH pour les graphes sans diamant est polynomial.*

**Preuve** D'après le Lemme 5.6, un graphe sans diamant est héréditairement 2-clique-coloriable si et seulement si son hypergraphe des cliques est tel que tous ses sous-hypergraphes induits sont 2-coloriables (car les arêtes de taille 1 n'influent pas sur la colorabilité).

Or, d'après le Théorème 2.10, ceci signifie que l'hypergraphe des cliques doit être un hypergraphe équilibré.

Construire l'hypergraphe des cliques d'un graphe sans diamant se fait en temps polynomial grâce au Lemme 3.2, et détecter s'il est équilibré se fait également en temps polynomial d'après [19], ce qui donne donc le résultat.  $\diamond$

La détection en temps polynomial provient donc du fait que l'hypergraphe des cliques doit être un hypergraphe équilibré. Comme tout hypergraphe équilibré est également pseudo-équilibré, il n'est donc pas étonnant qu'une méthode similaire à celle utilisée pour démontrer le Théorème 2.11 ait pu être utilisée également pour prouver le Théorème 3.7, comme cela avait été mentionné à la Section 3.3.

### Graphes non 2-clique-coloriables minimaux

Pour avoir un algorithme permettant de résoudre le problème 2-CCH, il faudrait réussir à caractériser les graphes non 2-clique-coloriables minimaux (i.e. que tous leurs sous-graphes induits sont héréditairement 2-clique-coloriables).

Les résultats vus dans cette section indiquent que dans beaucoup de sous-cas, il s'agit des trous impairs. Le cas des graphes sans diamant montre que les trous impairs ne sont pas les seuls, et que les mauvais cycles en font également partie.

Toutefois, il faut remarquer que les mauvais cycles ne sont pas tous minimalement non 2-clique-coloriables, puisque par exemple un mauvais cycle peut en contenir un autre. Il n'est pas aisé de donner une description exacte des mauvais cycles minimalement non 2-clique-coloriables. En effet, dans ceux-ci il peut y avoir un nombre quelconque de cliques en plus du cycle hamiltonien constitué d'arêtes plates, et celles-ci peuvent avoir des tailles quelconques, comme illustré sur la Figure 5.3.

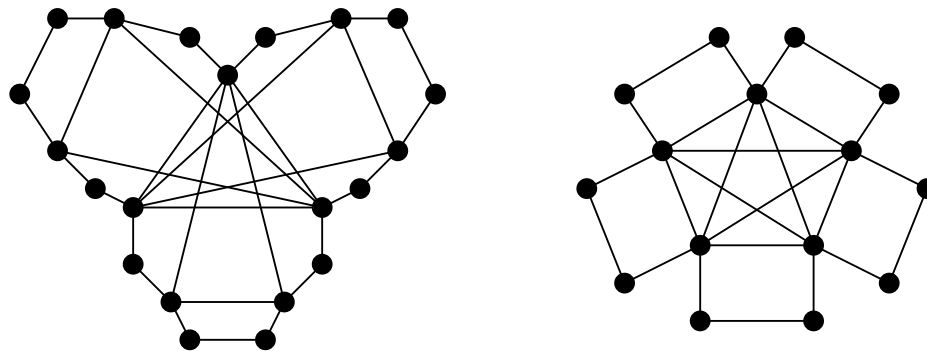


FIG. 5.3 – Exemples de mauvais cycles minimalement non 2-clique-coloriables.

Il est toutefois intéressant de noter que tous les graphes minimalement non 2-clique-coloriables connus sont des mauvais chemins : un *mauvais chemin* est un graphe  $G$  qui possède un chemin hamiltonien  $P = (x_1, \dots, x_n)$  constitué d'arêtes plates, et une clique maximale  $K$  telle que  $K \subset \{x_i | i \text{ impair}\}$ .

Un mauvais cycle est alors un cas particulier de mauvais chemin, dans lequel la clique maximale  $K$  est l'arête  $x_1x_n$ .

La Figure 5.4 montre quelques exemples de mauvais chemins minimalement non 2-clique-coloriables connus.

Toutefois, il n'est pas du tout prouvé que tous les graphes minimalement non 2-clique-coloriables sont des mauvais chemins. De plus, là encore la définition ne permet pas de caractériser lesquels sont minimaux.

Enfin, s'il s'avérait que les graphes minimalement non 2-clique-coloriables sont bien des mauvais chemins, leur reconnaissance ne se fait peut-être pas en temps polynomial.

## 5.2 Clique-coloration par listes

On dit qu'un graphe  $G = (V, E)$  est  $k$ -clique-coloriable par listes si pour tout assignement de listes de taille  $k$  sur les sommets  $l : V \rightarrow \mathbb{N}^k$ , on peut choisir  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  tel que  $c$  est une clique-coloration de  $G$  et pour tout sommet  $v \in V$ ,  $c(v) \in l(v)$ .

Ce problème peu étudié n'a pas été abordé lors de cette thèse. Nous donnons simplement ici les quelques résultats connus sur ce problème :

**Théorème 5.13.** [54] *Pour tout  $k \geq 2$ , décider si un graphe  $G$  est  $k$ -clique-coloriable par listes est un problème  $\Pi_3^P$ -complet.*

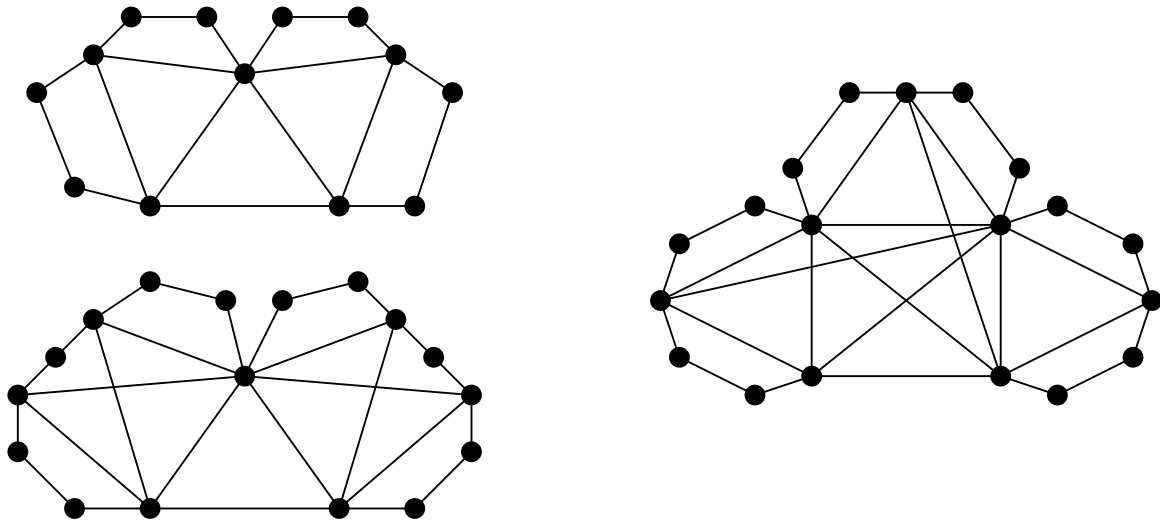


FIG. 5.4 – Exemples de mauvais chemins minimalement non 2-clique-coloriables.

**Théorème 5.14.** [57] *Tout graphe planaire est 4-clique-coloriable par listes.*

### 5.3 Clique-coloration et taille minimum d'une clique maximale

Pour la coloration usuelle, une borne inférieure sur le nombre chromatique est donnée par la taille maximum d'une clique.

Cette borne n'est pas valable en général pour le nombre clique-chromatique, et il semble même que si la taille globale des cliques augmente, cela contribue à diminuer le nombre clique-chromatique.

Par exemple, le Théorème 1.10 indiquait qu'en interdisant un sous-graphe induit  $F$ , le nombre clique-chromatique n'est borné que si  $F$  est une union disjointe de chemins. Mais le Théorème 1.16 dit qu'en interdisant seulement l'union d'une clique avec un sommet isolé (ce qui ne constitue pas une union disjointe de chemins), mais en imposant qu'il existe bien dans le graphe une clique de cette taille, alors on peut borner le nombre clique-chromatique.

Ainsi, si un graphe  $G$  est sans cogriffe (qui est l'union disjointe d'une clique de taille 3 et d'un sommet isolé), mais que  $G$  contient un triangle, alors  $G$  est 3-clique-coloriable. Il est bien nécessaire d'imposer la présence d'un triangle, puisqu'on sait que le nombre clique-chromatique des graphes sans triangle (qui sont a fortiori sans cogriffe) n'est pas borné.

De plus, en imposant qu'il existe dans  $G$  une clique encore plus grande, on peut

encore faire diminuer le nombre clique-chromatique :

**Théorème 5.15.** *Soit  $G$  un graphe sans cogriffe avec  $\omega(G) \geq 4$ . Alors  $G$  est 2-clique-coloriable.*

**Preuve** Par hypothèse il existe dans  $G$  une clique  $K_0$  (non nécessairement maximale) de taille 4, que nous dénotons  $K_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Nous allons montrer que donner la couleur 1 à  $N(x_1)$  et la couleur 2 à  $V \setminus N(x_1)$  constitue bien une 2-clique-coloration de  $G$ .

Tout d'abord il ne peut clairement pas y avoir de clique monochromatique de couleur 1, étant donné que  $x_1$  est de couleur 2 et voit tous les sommets de couleur 1.

Supposons alors qu'il existe une clique monochromatique maximale  $K_1$  de couleur 2. Nécessairement cette clique doit être dans  $V \setminus N[x_1]$ . Comme  $G$  est sans cogriffe, alors  $K_1$  ne peut être que de taille 2, sinon en considérant un triangle dans  $K_1$  et  $x_1$  on aurait un cogriffe. On dénote  $K_1 = \{y_1, y_2\}$ .

Puisque  $G$  est sans cogriffe, alors  $y_1$  doit avoir au moins deux voisins dans  $K_0$ , et  $y_2$  également. Or ni  $y_1$  ni  $y_2$  n'est adjacent à  $x_1$ , donc  $y_1$  et  $y_2$  ont un voisin commun parmi  $\{x_2, x_3, x_4\}$ . Ceci contredit alors le fait que  $K_1$  est une clique maximale, et prouve donc qu'on a bien une 2-clique-coloration de  $G$ .  $\diamond$

Remarquons que ce dernier résultat n'interdit pas la présence de trou impair, ce qui indique que pour les graphes sans copatte, l'hypothèse de contenir une clique de taille au moins 4 fait plus baisser le nombre clique-chromatique que l'hypothèse de ne pas contenir de trou impair.

Bien entendu, pour tout  $k, k'$ , on peut trouver un graphe contenant une clique de taille  $k$ , mais qui n'est pas  $k'$ -clique-coloriable : il suffit par exemple de prendre l'union disjointe d'une clique de taille  $k$  et d'un graphe sans triangle qui n'est pas  $k'$ -coloriable (voir [56] pour la construction de tels graphes) et donc qui n'est pas non plus  $k'$ -clique-coloriable.

Mais dans le cas particulier des graphes sans cogriffe, on peut en fait facilement montrer que si le graphe contient un  $K_4$ , alors il n'y a pas de clique maximale de taille 2.

Ceci semble montrer qu'augmenter la taille minimum d'une clique maximale contribuerait à faire diminuer le nombre clique-chromatique.

On a vu par ailleurs que dans le cas des graphes sans diamant, le sous-cas dont on sait déjà qu'il vérifie la Conjecture 1.1 est celui des graphes sans diamant et sans trou impair dans lesquels toutes les cliques maximales sont de taille au moins 3.

Ce résultat n'apporterait rien de particulier par rapport à ce qui nous intéresse ici puisque la Conjecture 1.1 dit précisément qu'il en serait de même pour tous les graphes sans diamant et sans trou impair. Il est cependant intéressant de noter qu'on ne sait pas si ce résultat est le meilleur possible ou non, dans le sens où on ne sait pas si la borne est atteinte ou non.

En fait, indépendamment de la présence de trous impairs, on ne connaît pas de graphe sans diamant dont toutes les cliques sont de taille au moins 3, et qui n'est pas 2-clique-coloriable.

**Question 5.1.** *Existe-t-il des couples  $(k_0, k_1)$  qui ont la propriété que si toutes les cliques maximales d'un graphe  $G$  sont au moins de taille  $k_0$  alors le graphe  $G$  est  $k_1$ -clique-coloriable ?*

Dans le cas général il ne peut exister de tel couple avec  $k_0 = 3$ , puisque d'après [37, Chapitre 5.3], le nombre clique-chromatique des line-graphes des graphes complets n'est pas borné.

Le Théorème 1.6 permet d'ailleurs de caractériser le nombre clique-chromatique des line-graphes, et l'énoncé indique bien que ce sont les cliques maximales de taille 3 correspondant aux triangles du graphe d'origine qui peuvent faire croître indéfiniment le nombre clique-chromatique. Le Théorème 1.15 complète alors ce résultat en disant que si on ne considère pas ces cliques provenant des triangles du graphe, alors le nombre chromatique de l'hypergraphe résultant est borné par 3.

Enfin, le Théorème 1.14 exprime explicitement l'idée que plus la taille minimum d'une clique maximale dans le graphe est grande, et plus le nombre clique-chromatique est petit.

Toutefois il ne permet pas d'apporter de réponse à la Question 5.1, car la borne sur le nombre clique-chromatique dépend du nombre chromatique du graphe, et pas seulement de la taille minimum d'une clique maximale.



# Conclusion

Le travail de cette thèse s'est principalement porté sur l'étude de la clique-coloration, en particulier pour tenter de prouver la Conjecture 1.1.

La plupart des résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Classe de graphes	(si graphe sans trou impair)			2-CCH
	CCM	$\kappa$	2-CC	
Tous	NP-complet	?	$\Sigma_2\text{P}$ -complet	?
sans diamant	Polynomial	$\leq 4$	NP-complet	Polynomial
sans codiamant	NP-complet	2	toujours	Polynomial
sans griffe	NP-complet	2	toujours	Polynomial
sans taureau	NP-complet	2	toujours	Polynomial

On peut tout d'abord noter que la Conjecture 1.1 n'a pas été prouvée et que même dans le cas des graphes sans diamant, la borne apportée n'est pas celle que l'on pourrait espérer.

Toutefois elle n'a pas été invalidée non plus, et les nombreux cas particuliers pour lesquels elle a été vérifiée laissent penser qu'elle est vraie.

De même, l'étude du problème 2-CCH n'a pas donné lieu à un théorème général. Les nombreux sous-cas abordés font penser que le problème serait polynomial. Si tel est le cas, il serait alors intéressant de remarquer que la complexité du problème  $k$ -CCH passerait de P pour  $k = 2$ , à  $\Pi_3\text{P}$  pour  $k \geq 3$ , sans qu'il y ait de problème intermédiaire qui soit NP-complet ou coNP-complet.

Toutefois, il serait hasardeux de conjecturer que le problème 2-CCH est vraiment polynomial. En effet, dans la plupart des sous-cas étudiés, le problème revient à celui de la détection de trou impair, qui lui a de très fortes chances d'être polynomial dans le cas général. Or les trous impairs ne sont que des exemples très particuliers parmi les graphes minimalement non 2-clique-coloriables que l'on connaît.

Par ailleurs, il est intéressant de noter cette différence entre les graphes sans diamant et les autres classes de graphes : dans la plupart des classes de graphes étudiées, on sait que si le graphe est sans trou impair alors il existe une 2-clique-coloration (que l'on sait



de plus construire de façon polynomiale), mais il est difficile de vérifier qu'une 2-clique-coloration donnée convient. En revanche, pour les graphes sans diamant et sans trou impair, on ne sait pas décider s'il existe ou non une 2-clique-coloration, mais on sait facilement vérifier la validité d'une clique-coloration donnée (puisque le problème MCC est polynomial).

Une manière d'aborder la clique-coloration serait de disposer de théorèmes de décomposition appropriés. Il existe différents théorèmes de décomposition pour les graphes étudiés, en particulier pour les graphes parfaits (voir par exemple [14], où le Théorème Fort des Graphes Parfaits est prouvé à l'aide d'un théorème de décomposition), et les graphes sans trou impair (voir [20]). Cependant, les théorèmes de décomposition connus ne peuvent être utilisés pour la clique-coloration, car les opérations de composition de ces théorèmes ne préservent pas le nombre clique-chromatique en général.

La validation (ou l'invalidation) de la Conjecture 1.1 viendra alors probablement après l'étude de nombreux autres cas particuliers. Plusieurs résultats de cette thèse sont en effet des généralisations de théorèmes existants (en particulier les théorèmes du Chapitre 4), et d'autres utilisent certaines idées apparues dans l'étude de cas très particuliers (comme par exemple la notion de chemins les plus semblables, utilisée ensuite pour prouver plusieurs théorèmes du Chapitre 3).

Dans le cadre plus général de la coloration des hypergraphes, le résultat majeur obtenu est la preuve de la conjecture de Sterboul. Cette conjecture datait de 1973, et peu de résultats structurels sur la coloration des hypergraphes ont été trouvés depuis.

D'ailleurs, bien que les Questions 1.3 et 2.3 soient équivalentes, c'est seulement sous la formulation en termes de graphes que des résultats partiels ont été obtenus. L'approche du point de vue des graphes paraît en effet plus facile, puisqu'il est plus simple de distinguer différents sous-cas.

# Bibliographie

- [1] M. Aigner, T. Andreae, *Vertex sets that meet all maximal cliques of a graph*, non publié (1986).
- [2] N. Alon, J. Spencer, *The probabilistic method*, 2nd edition, Jon Wiley, New York (2000).
- [3] T. Andreae, M. Schughart, Z. Tuza, *Clique-transversal sets of line graphs and complements of line-graphs*, Discrete Mathematics 88 (1991) 11-20.
- [4] G. Bacsó, S. Gravier, A. Gyárfás, M. Preissmann, A. Sebő, *Coloring the maximal cliques of graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 17 (2004) 361-376.
- [5] C. Berge, *Sur certains hypergraphes généralisant les graphes bipartis*, dans : Combinatorial Theory and Its Applications I (P. Erdos, A. Renyi, and V. T. Sos, editors), Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 4, North-Holland, Amsterdam, (1970) 119-133.
- [6] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam (1973).
- [7] C. Berge, *Hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library (1989).
- [8] C. Berge, *Some properties of non-bicolorable hypergraphs and the four-color problem* Discrete Applied Mathematics 65 (1996) 73-79.
- [9] C. Berge and V. Chvátal, editors, *Topics on perfect graphs*, Annals of Discrete Mathematics 21, North Holland, Amsterdam (1984).
- [10] C. Berge, J. L. Ramírez Alfonsín, *Origins and genesis*, dans Ramírez Alfonsín and B. Reed [62] 1-12.
- [11] D. Bienstock, *On the complexity of testing for odd holes and induced odd paths*, Discrete Mathematics 90 (1991) 85-92. Voir également *corrigendum* par B. Reed, Discrete Mathematics 102 (1992) p. 109.
- [12] R. L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941) 194-197.
- [13] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour, K. Vušković, *Recognizing Berge graphs*, Combinatorica 25 (2005) 143-186.
- [14] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics 164 (2006) 51-229.
- [15] V. Chvátal, *A bibliography on perfect graphs*, dans Ramírez Alfonsín and B. Reed [62] 329-358.

- [16] V. Chvátal, N. Sbihi, *Bull-free Berge graphs are perfect*, Graphs and Combinatorics 3 (1987) 127-139.
- [17] V. Chvátal, N. Sbihi, *Recognizing claw-free perfect graphs*, Journal of Combinatorial Theory B 44 (1988) 154-176.
- [18] M. Conforti, G. Cornuéjols, X. Liu, K. Vušković, G. Zambelli, *Odd hole recognition in graphs of bounded clique size*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 20 (2006) 42-48.
- [19] M. Conforti, G. Cornuéjols, M. R. Rao, *Decomposition of balanced matrices*, Journal of Combinatorial Theory B 77 (1999) 292-406.
- [20] M. Conforti, G. Cornuéjols, K. Vušković, *Decomposition of odd-hole-free graphs by double star cutsets and 2-joins*, Discrete Applied Mathematics 141 (2004) 41-91.
- [21] S. A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, Proc. 3rd Ann ACM Symp. on Theory of Computing, New York (1971) 151-158.
- [22] D. Défossez, *Coloration des cliques maximales d'un graphe*, rapport de DEA (2003).
- [23] D. Défossez, *Clique-coloring some classes of odd-hole-free graphs*, Journal of Graph Theory 53 (2006) 233-249.
- [24] P. Duchet, *Hypergraphs*, dans : Handbook of Combinatorics (R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, editors) (1995), chapter 7, 381-432.
- [25] D. Duffus, H. A. Kierstead, W. T. Trotter, *Fibres and ordered set coloring*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 58 (1991) 158-164.
- [26] D. Duffus, B. Sands, N. Sauer, R. E. Woodrow, *Two-colouring all two-element maximal antichains*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 57 (1991) 109-116.
- [27] P. Erdős, *On a combinatorial problem*, Nordisk. Mat. Tidskr. 3 (1963) 5-10.
- [28] P. Erdős, T. Gallai, Zs. Tuza, *Covering the cliques of a graph with vertices*, Discrete mathematics 108 (1992) 279-289.
- [29] P. Erdős, A. Hajnal, *On the chromatic number on graphs and set systems*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17 (1966) 61-99.
- [30] P. Erdős, L. Lovász, *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, dans : Infinite and Finite Sets (A. Hajnal et al, editors), North-Holland, Amsterdam (1975) 609-627.
- [31] J. Fonlupt, A. Zemirline, *A polynomial recognition algorithm of  $(K_4 - e)$ -free perfect graphs*, Institut IMAG Rapport Technique RT 16 (1987).
- [32] J.-C. Fournier, M. Las Vergnas, *Une classe d'hypergraphes bichromatiques*, Discrete Mathematics 2 (1972) 407-410.
- [33] J.-C. Fournier, M. Las Vergnas, *Une classe d'hypergraphes bichromatiques II*, Discrete Mathematics 7 (1974) 99-106.
- [34] J.-C. Fournier, M. Las Vergnas, *A class of bichromatic hypergraphs*, Annals of Discrete Mathematics 21 : Topics on Perfect Graphs (edited by C. Berge and V. Chvátal) (1984) 21-27.

- [35] D. R. Fulkerson, *Anti-blocking polyhedra*, Journal of Combinatorial Theory B 12 (1972) 50-71.
- [36] M. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York (1980).
- [37] R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley and Sons, New York (1980).
- [38] S. Gravier, C. T. Hoàng, F. Maffray, *Coloring the hypergraph of maximal cliques of a graph with no long path*, Discrete Mathematics 272 (2003) 285-290.
- [39] S. Gravier, R. Škrekovski, *Coloring the clique hypergraph of graphs without forbidden structure*, Les cahiers du laboratoire Leibniz 83 (2003) (<http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/>).
- [40] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, Springer Verlag (1988).
- [41] V. Guruswami, C. Pandu Rangan, *Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets*, Discrete Applied Mathematics 100 (2000) 183-202.
- [42] M. Herzog, J. Schönheim, *The  $B_r$  property and chromatic number of generalized graphs*, Journal of Combinatorial Theory B 12 (1972) 41-49.
- [43] T. Jensen, B. Toft, *Graph coloring problems*, John Wiley and Sons, New York (1995).
- [44] C. T. Hoàng, C. McDiarmid, *On the divisibility of graphs*, Discrete Mathematics 242 (2002) 145-156.
- [45] J. Kratochvíl, Zs. Tuza, *On the complexity of bicoloring clique hypergraphs of graphs*, Journal of Algorithms 45 (2002) 40-54.
- [46] M. Lepp, *Brooks' theorem is true for hypergraphs*, abstract, Notices AMS (1975).
- [47] Z. Lonc, I. Rival, *Chains, antichains, and fibres*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 44 (1987) 207-228.
- [48] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, 2nd edition, North-Holland (1993).
- [49] L. Lovász, *Coverings and colorings of hypergraphs*, Proc. 4th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Utilitas Mathematica Publishing, Winnipeg (1973) 3-12.
- [50] L. Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, Discrete Mathematics 2 (1972) 253-267.
- [51] L. Lovász, *On chromatic number of finite set-systems*, Acta Math. Hung. 19 (1968) 59-67.
- [52] C. McDiarmid, *Hypergraph colouring and the Lovász Local Lemma*, Discrete Mathematics 167/168 (1997) 481-486.
- [53] F. Maffray, M. Preissmann, *Sequential colorings and perfect graphs*, Discrete applied Mathematics 94 (1999) 287-296.
- [54] D. Marx, *Complexity of clique coloring and related problems*, manuscript.

- [55] H. Meyniel, *The graphs whose odd cycles have at least two chords*, Discrete Mathematics 21 (1984) 115-119.
- [56] J. Mycielski, *Sur le coloriage des graphes*, Colloq. Math. 3 (1955) 161-162.
- [57] B. Mohar, R. Škrekovski, *The Grötzsch Theorem for the hypergraph of maximal cliques*, The Electronic Journal of Combinatorics 6 (1999) R26.
- [58] J. Nešetřil, V. Rödl, *A short proof of the existence of highly chromatic hypergraphs without short cycles*, Journal of Combinatorial Theory B 27 (1979) 225-227.
- [59] C. H. Papadimitriou, *Computational complexity*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (1994).
- [60] K.R. Parthasarathy, G. Ravindra, *The Strong Perfect Graph Conjecture is true for  $K_{1,3}$ -free graphs*, Journal of Combinatorial Theory B 21 (1976) 212-223.
- [61] H. J. Prömel, A. Steger, *Almost all Berge graphs are perfect*, Comb. Probability and Computation 1 (1992) 53-79.
- [62] J. L. Ramírez Alfonsín and B. Reed, editors, *Perfect graphs*, Serie in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience (2001).
- [63] G. Ravindra, *Meyniel's graphs are strongly perfect*, Discrete Mathematics 21 (1984) 145-148.
- [64] B. Reed, N. Sbihi, *Recognizing bull-free perfect graphs*, Graphs and Combinatorics 11 (1995) 171-178.
- [65] T. J. Schaefer, *The complexity of satisfiability problems*, Proc. 10th ACM STOC (1978) 216-226.
- [66] P. D. Seymour, *On the two-coloring of hypergraphs*, Quart. J. Math. Oxford 25 (1974), 303-312.
- [67] F. Sterboul, *Un problème extrémal en théorie des hypergraphes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 278 (1974) 9-12.
- [68] F. Sterboul, Communication at the Graph Theory Seminar, Paris (1973).
- [69] Zs. Tuza, *Covering all cliques of a graph*, Discrete Mathematics 86 (1990) 117-126.
- [70] D. R. Woodall, *Property B and the four-color problem*, Combinatorics, Institute of Mathematics and its Applications, Southen-on-sea, England(1972) 322-340.

# Index

- $+$ , dans  $G + G'$ , 9
- $\cdot^*$ , dans  $H^*$ , 11
- $\cdot^{\max}$ , dans  $H^{\max}$ , 10
- $\cdot^{\min}$ , dans  $H^{\min}$ , 10
- $[\cdot]_k$ , dans  $[H]_k$ , 10
- $\Delta(\cdot)$ 
  - dans un graphe, 8
  - dans un hypergraphe, 10
- $\Delta_l(\cdot)$ , 26
- $\Pi_i P$ , 14
- $\Sigma_i P$ , 14
- $\alpha(\cdot)$ 
  - d'un graphe, 9
  - d'un hypergraphe, 11
- $\bar{\cdot}$ , dans  $\bar{G}$ , 9
- $\chi(\cdot)$ 
  - d'un graphe, 9
  - d'un hypergraphe, 11
- $\delta(\cdot)$ 
  - dans un graphe, 8
  - dans un hypergraphe, 10
- $\delta_l(\cdot)$ , 26
- $\kappa(\cdot)$ , 17
- $\omega(\cdot)$ , 8
- équitable ( $k$ -partition —), 27
  
- adjacents
  - arêtes —, 7
  - sommets —, 7
- ajouter (— une copie de  $H(x, y)$ ), 53
- algorithmique, 12
- anti-, 9
  - antitrou, 9
- anti-Sterboul (cycle —), 30
- arête
  - d'un graphe, 7
  - d'un hypergraphe, 10
- biparti (graphe —), 9
  
- $C_n$ , 9
- $k$ -CC, 17
- $k$ -CCH, 65
- CCM, 54
- certificat, 13
- chaîne, 8
- chemin
  - les plus semblables, 39
  - dans un graphe, 8
  - dans un hypergraphe, 10
  - mauvais —, 74
- chromatique
  - indice —, 16
  - nombre — d'un graphe, 9
  - nombre — d'un hypergraphe, 11
- clause, 13
- clique, 8
  - maximale, 8
- clique-chromatique
  - nombre —, 17
  - nombre — héréditaire, 65
- $(k)$ -clique-coloration, 17
  - par listes, 74
- $k$ -clique-coloriable
  - par listes, 74
  - héréditairement —, 65
- clique-hypergraphe, 17
- co-, 9
  - codiamant, 45
  - cogriffe, 38
  - copatte, 38
- $(k)$ -coloration

- d'un graphe, 9
- d'un hypergraphe, 11
- $k$ -coloriable
  - faiblement —, 20
  - graphe —, 9
  - hypergraphe —, 11
- complémentaire (— d'un graphe), 9
- complet
  - ensemble — à un ensemble, 8
  - graphe —, 8
  - graphe multiparti —, 9
  - hypergraphe —, 11
  - sommet — à un ensemble, 8
- complexité, 12
- conforme (hypergraphe —), 10
- conjonction, 13
- connexe
  - graphe —, 9
  - hypergraphe —, 11
- coNP, 13
- contenir
  - un graphe, 8
  - un hypergraphe, 10
- corde
  - d'un chemin, 8
  - d'un cycle, 8
- couleur, 9
- couplage, 9
- couverture, 11
- $k$ -critique (hypergraphe —), 27
- critique (sommet — d'une patte), 70
- cycle
  - dans un graphe, 8
  - dans un hypergraphe, 11
  - mauvais —, 41
- $d_i(\cdot)$ , 26
- décision (problème de —), 12
- déconnectante (partie —), 9
- degré
  - dans un graphe, 8
  - dans un hypergraphe, 10
  - linéaire, 26
- diamant, 41
- disjonction, 13
- distance, 9
- $k$ -divisibilité, 66
  - forte —, 66
- dominant
  - partie —, 8
  - sommet —, 8
- dual, 11
- $E(\cdot)$ , 7
- $\mathcal{E}(\cdot)$ , 10
- efficace (algorithme —), 12
- entrée, 11
- équilibré (hypergraphe —), 29
- étoile
  - linéaire, 26
  - dans un graphe, 8
- extrémité, 7
- $F_0$ , 69
- formule, 13
- graphe, 7
- graphe auxiliaire, 53
- griffe, 38
- $H(\cdot, \cdot)$ , 53
- $H'_n$ , 11
- $\mathcal{H}(\cdot)$ , 17
- héréditaire (classe de graphes —), 65
- héréditaire (propriété —), 65
- homogène (ensemble —), 69
- 3-HSAT, 55
- hyperarête, 10
- hypercycle, 11
- hypergraphe, 10
  - $r$ -hypergraphe, 10
  - des cliques maximales d'un graphe, 17
- impair, 8, 11
- implicant, 13
- incident, 7
- indice chromatique, 16
- induit

sous-graphe —, 8  
 sous-hypergraphe —, 10  
 instance, 11  
 isomorphes  
   graphes —, 8  
   hypergraphes —, 10  
 $K_n$ , 9  
 $K_{n,k}$ , 9  
 linéaire  
   étoile —, 26  
   degré —, 26  
   hypergraphe —, 11  
 line-graphe  
   d'un graphe, 9  
   d'un hypergraphe, 11  
 littéral, 13  
 longueur  
   d'un chemin, 8  
   d'un cycle, 8, 11  
 mauvais  
   — chemin, 74  
   — cycle, 41  
 Meyniel (graphe de —), 40  
 monochromatique  
   arête —, 11  
   clique —, 17  
 multiparti complet (graphe —), 9  
 $N(\cdot)$ , 8  
 $N[\cdot]$ , 8  
 NAE-SAT, 60  
 négatif (littéral —), 13  
 négation, 13  
 normal (hypergraphe —), 16  
 normalisée (formule —), 13  
 NP, 13  
 NP-complet, 13  
 NP-difficile, 13  
 $O(\cdot)$ , 12  
 P, 13

$P_n$ , 9  
 pair, 8, 11  
 parfait  
   couplage —, 9  
   graphe —, 15  
 partiel (sous-hypergraphe —), 10  
 $k$ -partition, 9  
 patte, 38  
 plate (arête —), 17  
 polynomial (algorithmique —), 12  
 positif (littéral —), 13  
 problème, 11  
 pseudo-équilibré (hypergraphe —), 29  
 QSAT<sub>2</sub>, 15  
 question, 11  
 réduire (se —), 13  
 roue, 69  
 sans  
   — un graphe, 8  
   — un hypergraphe, 10  
 3-SAT, 14  
 satisfiable, 13  
 $k$ -section, 10  
 semblables (chemins les plus —), 39  
 séparation (sommet de —), 39  
 simple (hypergraphe —), 10  
 sommet  
   — critique d'une patte, 70  
   — de séparation, 39  
   d'un graphe, 7  
   d'un hypergraphe, 10  
 $k$ -sommet-critique (hypergraphe —), 28  
 sortie, 11  
 sous-graphe, 8  
   — induit, 8  
 sous-hypergraphe  
   — induit, 10  
   — partiel, 10  
 stable  
   dans un graphe, 9  
   dans un hypergraphe, 11



Sterboul

conjecture de —, 30

hypergraphe de —, 30

taureau, 47

transversal, 11

triangle, 9

trou, 8

$r$ -uniforme (hypergraphe —), 10

union disjointe (— de graphes), 9

$V(\cdot)$

d'un graphe, 7

d'un hypergraphe, 10

vérification (— d'un certificat), 13

valuation, 13

variable booléenne, 13

voir, 7