Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfeld

Georges Racinet

Georges Racinet

SÉRIES GÉNÉRATRICES NON COMMUTATIVES DE POLYZÊTAS ET ASSOCIATEURS DE DRINFEL'D

Georges Racinet

26 novembre 2000

SÉRIES GÉNÉRATRICES NON COMMUTATIVES DE POLYZÊTAS ET ASSOCIATEURS DE DRINFEL'D

Georges Racinet

INTRODUCTION

Un des aspects les plus attrayants des mathématiques est que l'on trouve parfois des connexions entre des phénomènes ou des objets qui seraient à première vue sans rapport.

La notion d'associateur, introduite par Vladimir Drinfel'd en 1989, est un exemple particulièrement frappant de ce genre de phénomène. D'un côté, les associateurs servent à prouver l'existence de quantifications universelles de bigèbres de Lie, comme cela a été fait par Kazhdan et Etingof en 1994, ce qui les rattache à des problèmes de physique mathématique. D'un autre côté, la donnée d'un associateur équivaut à celle d'un isomorphisme respectant des conditions naturelles de compatibilité entre la tour des complétés $\mathbb{k}$-pro-unipotents $\widehat{\mathbb{k}[P_n]}$ des algèbres des groupes de tresses pures et celle des algèbres enveloppantes universelles complétées des algèbres de Lie de tresses infinitésimales $\widehat{\mathsf{U}_{\mathbb{k}}T_n}$. Cette dernière[(1)] est plus facile à maîtriser, en raison de la graduation naturelle associée aux tresses infinitésimales. On peut ainsi en déduire des représentations intéressantes des groupes de tresses, assorties de propriétés de compatibilité, mais cela n'est pas l'objet de cette thèse.

Cela montre également que l'ensemble des associateurs est muni d'une action libre et transitive des groupes d'automorphismes de ces tours, que Drinfel'd appelle respectivement le groupe de Grothendieck-Teichmüller (version pro-unipotente) GT et le groupe de Grothendieck-Teichmüller gradué GRT, faisant référence au célèbre projet de recherche de Grothendieck ([**20**]). Le groupe GRT est produit semi-direct de $\mathbb{G}_m$ et d'un sous-groupe GRT_1. Par ailleurs, le schéma pro-algébrique Ass des associateurs est fibré au-dessus de la droite affine $\mathbb{A}^1$. Drinfel'd démontre que GRT_1 en est la fibre spéciale Ass_0.

[(1)] T_n est l'algèbre de Lie associée au groupe des tresses pures P_n par sa série centrale descendante

Une des raisons qui rendent ces objets intéressants est leur rapport avec le groupe de Galois absolu $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On sait depuis longtemps que l'action du groupe de Galois sur les revêtements finis d'une variété X algébrique sur $\mathbb{Q}$ fournit une action sur le complété profini du groupe fondamental $\pi_1(X(\mathbb{C}); x)$, où x est un point-base rationnel. Le groupe des tresses pures P_n étant un groupe fondamental de ce type, on obtient donc un morphisme de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans le groupe $Aut(\widehat{P_n})$ des automorphismes de chaque complété profini $\widehat{P_n}$. assorti de conditions de compatibilité. Cela donne lieu à un morphisme du groupe de Galois dans $\widehat{\mathsf{GT}}$, la version profinie du groupe de Grothendieck-Teichmüller. Le théorème de Belyi ([**2**]) montre alors que c'est un plongement.

Se limiter à la version $\Bbbk$-pro-unipotente GT revient à étudier un sous-groupe du groupe de Galois, qui se décompose en produit de groupes $G^{(\ell)}$, où ℓ parcourt l'ensemble des nombres premiers. Cette situation a été beaucoup étudiée par Ihara, qui associe à chacun de ces groupes une $\mathbb{Z}_\ell$-algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g}^{(\ell)}$. La conjecture de Deligne prédit que $\mathfrak{g}^{(\ell)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ doit être librement engendrée par une collection $(\sigma_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ de générateurs homogènes de degrés $2n+1$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{(\ell)}$ se plonge naturellement dans $\mathfrak{grt}_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ et prouver l'analogue de la conjecture de Deligne pour $\mathfrak{grt}_1$ l'impliquerait pour toutes les $\mathfrak{g}^{(\ell)}$. Drinfel'd donne un système d'éléments irréductibles de $\mathfrak{grt}_1$ satisfaisant aux conditions de degré exigées.

Nous arrivons maintenant à l'autre objet de cette étude : les polyzêtas. Ce sont les nombres réels de la forme

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1>n_2>\ldots>n_r>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}},$$

où $s_1, \ldots, s_r$ sont des nombres entiers strictement positifs. L'entier r est appelé la longueur du polyzêta et la somme $s_1 + s_2 + \cdots + s_r$ en est le poids. Ces séries, qui généralisent les valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers, sont convergentes si s_1 est différent de 1. Par des manipulations « élémentaires » (produit de séries, produit d'intégrales, comparaisons de divergences entre séries entières au voisinage de 1 et séries associées), on trouve trois systèmes simples de relations polynomiales (sur $\mathbb{Q}$) entre ces nombres. Les relations entre ces nombres ont fait l'objet d'une étude intensive par ordinateur, d'abord numérique ((*cf.* [**7**]), puis formelle (*cf.* [**23**]). Il en ressort que toutes les relations $\mathbb{Q}$-algébrique entre ces nombres semblent s'obtenir par les manipulations élémentaires évoquées ci-dessus. Il commence d'autre part à être dans l'air du temps que toute relation polynomiale sur $\mathbb{Q}$ entre des intégrales sur des domaines semi-algébriques de formes rationnelles, les « périodes » (*cf.* [**35**]) doit s'obtenir en combinant des manipulations élémentaires en nombre limité (théorèmes de Fubini, de Stokes, décomposition du domaine...).

Il est donc naturel de conjecturer que les trois systèmes de relations évoqués plus haut engendrent toutes les relations polynomiales entre polyzêtas. L'étude des conséquences de ces trois systèmes a été fortement modifiée par l'annonce, fin 1999, du théorème d'Écalle affirmant qu'elles définissent une algèbre de polynômes.

Le lien entre les polyzêtas et les associateurs apparaît de manière frappante : Drinfel'd a construit explicitement un seul associateur, noté Φ_{KZ}, en se basant sur l'étude du système différentiel de Knizhnik-Zamolodchikov. En 1993, Le et Murakami en ont donné une expression faisant intervenir les polyzêtas, et il est apparu ensuite que Φ_{KZ} était la série génératrice des polyzêtas régularisés, ce à quoi on donnera un sens précis. Le fait que Φ_{KZ} soit un associateur se traduit alors en une collection d'équations concernant les polyzêtas. Celles-ci devraient donc être conséquences des trois systèmes mentionnés plus haut. Signalons également que les polyzêtas apparaissent assez naturellement dans d'autres problèmes liés à la physique. Par exemple, on les retrouve dans certaines intégrales de Feynman (*cf.* [**42**]) ou comme coefficients intervenant pour la quantification de Kontsevitch des variétés de Poisson (*cf.* [**34, 35**]).

Dans cette thèse, on étudie la structure algébrique des trois systèmes fondamentaux de relations entre polyzêtas en essayant de dégager le plus de parallèles possibles avec les associateurs de Drinfel'd.

Le chapitre I sert à poser les conventions générales et à donner les outils qui serviront régulièrement dans la suite. On y donne un cadre général pour la manipulation des séries génératrices, les définitions et principaux théorèmes concernant les algèbres de Lie libres que nous utiliserons et quelques précisions sur l'application exponentielle dans les schémas en groupes pro-unipotents.

Le chapitre II est consacré à un exposé rapide des théories de Drinfel'd et des actions de Galois. Qu'on ne s'étonne pas si la présentation est un peu succincte : il s'agit essentiellement d'une mise en perspective, à l'exception de la section 2, où l'on donne les formules d'action de GRT_1 sur Ass en les étendant à leur domaine maximal de définition, que nous appelons le groupe de Magnus tordu MT, avec un produit noté $\circledast$. Dans ce langage, GRT_1 (qui est égal à Ass_0) agit Ass par translations à droite, au sein du groupe MT.

Au chapitre III, on donne une description détaillée des trois systèmes fondamentaux de relations entre polyzêtas, en utilisant des outils d'algèbre non commutative. La section 1 donne les définitions des polylogarithmes généralisés, dont les polyzêtas sont les spécialisations en 1, puis montre comment le codage des polylogarithmes par intégrales itérées conduit au premier système de relations. La section 2 introduit les fonctions quasi-symétriques, dont les polyzêtas sont également des spécialisations et aboutit au deuxième système de relations algébriques. La section 3 expose alors les deux façons (régularisations) de donner un sens aux polyzêtas divergents, en respectant l'un ou l'autre des deux premiers systèmes. En donnant une interprétation asymptotique de ces deux régularisations, puis en les comparant, on aboutit au troisième système de relations. Ce dernier est un résultat nouveau, le premier à l'avoir énoncé étant Jean Écalle. La démonstration qu'on en donne ici repose sur les remarques de Louis Boutet de Monvel ([**6**])

Au chapitre IV, on introduit le schéma pro-algébrique affine DM décrivant les trois systèmes fondamentaux de relations entre polyzêtas et l'algèbre $\mathsf{PZformel}$ des polyzêtas formels qui le représente. Avec ce langage, la collection des polyzêtas s'interprète comme un point de $\mathsf{DM}(\mathbb{R})$. L'objet que nous comparons à Ass est DM. Le théorème d'Écalle, qui est intervenu au cours de ces travaux, affirme, à des différences de langage près, que $\mathsf{PZformel}$ est une algèbre de polynômes et en donne un système de générateurs libres. Il est facile de munir le schéma DM d'une fibration au-dessus de la droite affine. Le résultat principal de ce travail est alors que la fibre spéciale DM_0 est un sous-groupe de MT, agissant par translation à droite sur chaque fibre DM_λ, donc avec la même formule que celle de l'action de GRT_1 sur Ass. Ces définitions et énoncés sont exposés au cours de la section 1. La section 2 est consacrée à démontrer une moitié du théorème : l'espace tangent $\mathfrak{dm}_0$ au voisinage de 1 à DM_0 est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{mt}$ et son exponentielle (relativement au schéma en groupes MT) est un sous-groupe de MT qui agit par translation à droite sur DM. A la section 3, on montre que cette action est transitive en se ramenant à des arguments linéaires ; en particulier, l'exponentielle de $\mathfrak{dm}_0$ est exactement DM_0. Cela nous fournit une démonstration alternative du théorème d'Écalle, l'algèbre $\mathsf{PZformel}$ étant alors décrite comme algèbre symétrique du dual gradué de $\mathfrak{dm}$, l'espace tangent au voisinage de 1 de DM.

Comme corollaire immédiat, il apparaît que les irréductibles de Drinfel'd appartiennent à l'algèbre de Lie $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{C})$. Si l'on admet alors les conjectures de Deligne-Ihara-Drinfel'd et la conjecture de dimensions de Zagier, en variante formelle, ceci impliquerait l'égalité entre DM et Ass et entre $\mathfrak{dm}_0$ et $\mathfrak{grt}_1$. Comme l'algèbre d'Ihara $\mathfrak{g}^{(\ell)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ serait isomorphe à $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{Q}_\ell)$, on aurait alors une description de la partie pro-ℓ de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ par des relations algébriques provenant de techniques fondamentalement transcendantes.

Dans l'appendice A, on décrit certains des objets utilisés par Écalle et on les compare avec les nôtres. On y trouvera donc un bref aperçu sur les moules et leurs symétries, une correspondance entre un certain type de moules (entiers à une seule série de variables) et les séries formelles non-commutatives. Modulo cette correspondance, les séries génératrices d'Écalle, par ailleurs quasi-identiques à celles de Goncharov, sont équivalentes aux nôtres et l'algèbre de Lie Ari des moules entiers « en les variables u » est isomorphe à $\mathfrak{mt}$: le crochet d'Écalle se réduit dans ce cas à celui d'Ihara.

Dans l'appendice B, on donne un aperçu des techniques informatiques utilisées pour préparer ce travail. A titre d'exemple, on y présente un calcul, suggéré par Jean Écalle, qui montre l'existence d'au moins deux polyzêtas formels irréductibles de poids 27 et de longueur 9. Suivant la conjecture de Broadhurst-Kreimer, il devrait y avoir exactement deux polyzêtas *numériques* vérifiant ces conditions.

Bien que le chapitre I soit destiné avant tout à être consulté et ne contienne pas de résultat, le lecteur est fortement invité à lire les conventions générales, car certaines diffèrent sensiblement de l'usage courant. Un survol du paragraphe I.3.2 est sans doute nécessaire à la compréhension du chapitre III.

REMERCIEMENTS

Présente dans toutes les thèses, la page de remerciements m'a longtemps fait l'effet d'un exercice de style un peu convenu. Aujourd'hui pourtant, une fois débarassé du travail obsédant et donc égocentrique qu'est l'écriture d'une thèse, l'ampleur de la dette contractée au fil des années m'apparaît évidente. Ce travail n'aurait pu voir le jour sans le soutien désintéressé d'un grand nombre de gens. C'est avec un plaisir sincère que je leur exprime aujourd'hui ma gratitude.

Tout d'abord, je ne pourrai jamais assez remercier mon directeur, Pierre Cartier. Cette thèse est bien évidemment bâtie sur ses idées. Il a également grandement contribué à en améliorer la rédaction par sa hauteur de vue et son exigence de simplicité qui lui permettent de remplacer une preuve obscure ou calculatoire par un argument direct et clair. Je suis vraiment touché de la confiance qu'il m'a accordée depuis le début, ce qui n'était sans doute pas très raisonnable de sa part ; ce n'est qu'un aspect de sa grande humanité qui mérite en elle même d'être saluée.

Je remercie également les membres du jury qui me font l'honneur de juger ce travail et particulièrement Maxim Kontsevitch et Christophe Reutenauer qui ont accepté de rédiger les rapports, tâche que j'imagine fastidieuse.

Je remercie Michel Petitot de m'avoir communiqué sous forme informatique les résultats obtenus par l'équiper de calcul formel qu'il dirgie au LIFL. L'analyse de ces données a joué un rôle essentiel durant la phase de recherche, même si cela finit par s'effacer dans l'exposé définitif.

Sur un plan plus matériel, j'ai bénéficié durant mes études du soutien financier ou de l'aide concrète de diverses institutions auxquelles je suis reconnaissant. J'ai d'abord profité du confort incroyable que donne la scolarité à l'École Normale Supérieure. J'ai ensuite été accueilli par François Digne à l'université de Picardie, puis à l'université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6) par Louis Boutet de Monvel. Parallèlement, le département de mathématiques de l'ÉNS a hébergé mon activité de recherche, me procurant des conditions de travail bien meilleures que celles de la plupart des thésards, notamment pour ce qui est des outils informatiques, gérés avec brio par le Service de Prestations Informatiques de l'ÉNS. Au cours des préparatifs de la soutenance, j'ai été sensible à la gentillesse du personnel administratif de l'UPJV à mon égard.

Dans le même esprit, je voudrais remercier les concepteurs des divers logiciels que j'utilise. A l'exception du système de calcul formel MAPLE, avec lequel tous les calculs sous-tendant cette recherche ont été effectués, ils font tous partie du mouvement des « logiciels libres » dont j'espère qu'il révolutionnera à terme la société marchande. Parmi eux, je remercie spécialement les auteurs de TEX, LATEX, et du style `smfbook` de la Société Mathématique de France. C'est ce dernier qui a servi à mettre en forme cette thèse. Il est lui-même dérivé d'AMS-LATEX.

Il serait impossible de dresser une liste exhaustive des camarades dont la fréquentation m'a fait progresser en mathématiques. Parmi eux, je remercie plus particulièrement Stéphane Aicardi qui m'a consacré beaucoup de temps, ainsi que Joël Bellaïche et Olivier Glass qui ont répondu à quelques questions naïves.

Il y a déjà dix ans, le goût de l'algèbre abstraite m'a été communiqué par les cours lumineux de Pierre Delezoïde, mon professeur en Mathématiques Supérieures.

Je suis également reconnaissant à tous ceux qui m'ont apporté leur soutien moral durant ces longues années, surtout pendant les deux dernières. Parmi eux, les amis avec lesquels j'exerce d'autres activités, notamment musicales, ont un statut particulier. À ceux-là, je devrais plutôt des excuses pour les avoir un peu négligés ces derniers temps.

Enfin, quelqu'un occupe une place à part dans ces remerciements : ma femme, Julie Barrau, n'est sans doute pas pour rien dans mon désir d'arriver à produire quelque chose ; elle a eu ces derniers mois à en supporter les conséquences, ma cyclothymie et mon manque de disponibilité. J'espère pouvoir lui offrir mieux à l'avenir.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

1. Conventions générales

Sauf mention explicite du contraire, une algèbre sera toujours associative et unifère, exception faite des algèbres de Lie. De même, une cogèbre sera supposée coassociative, et coünifère. Cela s'applique aussi aux bigèbres. Une bigèbre de Hopf est une bigèbre munie d'un antipode. Tous les morphismes sont supposés respecter unité et/ou coünité.

Ce travail comporte essentiellement de l'algèbre non commutative en caractéristique 0. Pour éviter des précisions lourdes et récurrentes, *on réservera le terme d'anneau aux anneaux commutatifs contenant* $\mathbb{Q}$. Si $\Bbbk$ est un anneau, on appellera $\Bbbk$-anneau un anneau A muni d'un morphisme de $\Bbbk$ dans A. Un anneau non commutatif sera donc plutôt qualifié de $\mathbb{Q}$-algèbre, voire d'algèbre. Un module est donc obligatoirement un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (on précisera toujours module à gauche, à droite ou bimodule lorsqu'il s'agira de modules sur une algèbre). Avec ces conventions, la catégorie des anneaux est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres. Il arrivera donc que l'on qualifie de « morphisme d'algèbres » un morphisme d'anneaux.

Le terme « group-like » nous a semblé s'insérer particulièrement mal dans un texte en français ; c'est pourquoi on lui a préféré « diagonal », seul équivalent à notre connaissance. L'inconvénient est d'avoir perdu la référence à l'idée de groupe.

Notation 1.1. — *Le symbole* $:=$ *signifie que l'on définit le membre de gauche par le membre de droite.*

Le symbole $\stackrel{\text{déf}}{=}$ *signifie que les deux membres sont égaux, car c'est exactement la définition de l'un des deux membres.*

1.1. Modules gradués.

— On ne considèrera que des graduations indicées par $\mathbb{N}$. Si M est un module gradué, on notera en général M_n sa composante homogène de degré n. On n'aura quasiment jamais à considérer de modules gradués sur un anneau gradué.

Notation 1.2. — *Soient M et N deux modules gradués sur un anneau $\Bbbk$. Le symbole $\otimes_{\Bbbk}$ désigne le produit tensoriel gradué, dont la graduation est appelée degré total :*

$$M \underset{\Bbbk}{\otimes} N := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigoplus_{p+q=n} M_p \underset{\Bbbk}{\otimes} N_q \right)$$

Si l'on ne précise pas $\Bbbk$, c'est que le produit tensoriel est pris au-dessus de $\mathbb{Q}$.

La notation $\widetilde{M}$ désigne le dual gradué de M, c'est-à-dire

$$\widetilde{M} := \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M_n, \Bbbk)$$

Si $f : M \to N$ est une application $\Bbbk$-linéaire homogène, $\widetilde{f}$ désigne sa transposée, au sens gradué, c'est-à-dire

$$\widetilde{f} := \bigoplus_{n\geqslant 0} \widetilde{f_n},$$

où $\widetilde{f_n}$ est la transposée (au sens usuel) de la restriction de f à M_n (qui est à valeurs dans N_n).

On utilisera ces notations également pour les modules qui ne sont pas gradués, puisqu'on peut toujours les considérer comme concentrés en degré 0. La structure de module relativement à laquelle on formera le dual de M sera claire dans le contexte.

On dira qu'un module gradué est libre de type fini si ses composantes homogènes le sont. On peut alors utiliser les identifications usuelles dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie et notamment passer d'une structure de cogèbre graduée à une structure d'algèbre graduée sur le dual et vice-versa.

Notation 1.3. — *Soit M un $\Bbbk$-module gradué libre de type fini, et soit $\mathscr{B}$ une base homogène de M. La base de $\widetilde{M}$ duale de $\mathscr{B}$ sera notée $\widetilde{\mathscr{B}}$. Si $x \in \mathscr{B}$, l'élément de la base duale correspondant sera noté $\widetilde{x}$.*

1.2. Modules filtrés et complétion. — De même qu'on n'utilise plus haut que des $\mathbb{N}$-graduations, on se contentera pour les filtrations de la définition suivante.

Définition 1.4. — *Un $\Bbbk$-module filtré M consiste en la donnée d'une suite $(M_{\geqslant n})_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-modules telle que :*

i) $M_{\geqslant 0} = M$.

ii) *Pour tout entier naturel n, on a $M_{\geqslant n+1} \subset M_{\geqslant n}$.*

On s'efforcera dans la suite de maintenir la notation en conformité avec la définition ci-dessus. Si $f : M \to N$ est une application $\Bbbk$-linéaire, M et N étant deux $\Bbbk$-modules filtrés, on dira que f préserve la filtration si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(M_{\geqslant n}) \subset N_{\geqslant n}$$

Notation 1.5. — *Soit M un $\Bbbk$-module filtré. Le quotient $M/M_{\geqslant n+1}$ sera noté $M^{(n)}$ et la projection correspondante $\pi_M^{(n)}$ ou simplement $\pi^{(n)}$.*

Si M est un $\Bbbk$-module gradué, on le munit d'une filtration en posant

$$M_{\geqslant n} = \bigoplus_{p \geqslant n} M_p$$

On peut alors identifier $M^{(n)}$ et la somme directe $M_0 \oplus \cdots \oplus M_n$.

Notation 1.6. — *Soit M un module filtré. Le séparé-complété de M sera noté $\widehat{M}$.*

On a, par définition $\widehat{M} = \varprojlim_n M^{(n)}$, et on définit une filtration sur $\widehat{M}$ en posant

$$(\widehat{M})_{\geqslant m} := \varprojlim_{n>m} M_{\geqslant m}/M_{\geqslant n}$$

On dira que la filtration est séparante si l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} M_{\geqslant n}$ se réduit à $\{0\}$. Dans ce cas, la topologie de M définie par la filtration est séparée, le module M se plonge en respectant les filtrations dans $\widehat{M}$ et celui-ci est le complété de M.

Dans le cas où la filtration de M provient d'une structure de module gradué, elle est séparante et l'on a

$$\widehat{M} = \prod_{n \geqslant 0} M_n \quad \text{et} \quad (\widehat{M})_{\geqslant m} = \prod_{n \geqslant m} M_n$$

On voit donc que la topologie de $\widehat{M}$ est la topologie-produit des topologies discrètes.

Le séparé-complété d'une $\Bbbk$-algèbre filtrée est naturellement muni d'une structure de $\Bbbk$-algèbre filtrée.

Notation 1.7. — *Le module gradué associé à un module filtré M sera noté* $\mathrm{gr}M$. *On a donc*

$$\mathrm{gr}M := \bigoplus_{n \geqslant 0} M_{\geqslant n}/M_{\geqslant n+1}$$

Pour tout module filtré M, on a donc $\mathrm{gr}M = \mathrm{gr}\widehat{M}$. En particulier, si M est un module gradué, on le retrouve par $M = \mathrm{gr}\widehat{M}$.

Définition 1.8. — *On dira qu'un module filtré M est à quotients finis si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le module $\pi^{(n)}(M)$ est de type fini.*

Les notions de module filtré à quotients finis et de module gradué de type fini sont analogues. Notamment, le module gradué associé à un module filtré à quotients finis est de type fini.

Définition 1.9. — *Soient M et N deux $\mathbb{k}$-modules filtrés tels que les sous-modules $M_{\geqslant n}$ et $N_{\geqslant n}$ soient respectivement facteurs directs de M et N pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors pour tous entiers p et q identifier $M_{\geqslant p} \otimes_{\mathbb{k}} M_{\geqslant q}$ à son image dans $M \otimes_{\mathbb{k}} N$ et munir ce dernier de la filtration :*

$$(M \underset{\mathbb{k}}{\otimes} N)_{\geqslant n} = \sum_{p+q=n} M_{\geqslant p} \underset{\mathbb{k}}{\otimes} M_{\geqslant q}$$

Le séparé-complété de $M \otimes_{\mathbb{k}} N$ relativement à cette filtration est appelé le produit tensoriel complété de M et N. Il est noté $M \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{k}} N$.

Dans le cas où les filtrations de M et N sont séparantes, l'application canonique de $M \otimes_{\mathbb{k}} N$ dans $M \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{k}} N$ est injective. On désigne alors par $x \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{k}} y$ l'image de $x \otimes_{\mathbb{k}} y$.

Si M' et N' sont deux autres $\mathbb{k}$-modules filtrés, f et g deux applications $\mathbb{k}$-linéaires continues respectivement de M dans M' et de N dans N', on note $f \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{k}} g$ l'application de $M \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{k}} N$ dans $M' \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{k}} N'$ qui s'en déduit.

Les conditions ci-dessus sont remplies notamment lorsque M et N sont des modules gradués ou des complétés de modules gradués. Dans ce dernier cas, le produit tensoriel complété est le complété du produit tensoriel gradué. Plus précisément :

Proposition 1.10. — *Soient M et N deux $\mathbb{k}$-modules gradués. On a*

$$\widehat{M} \underset{\mathbb{k}}{\widehat{\otimes}} \widehat{N} = M \underset{\mathbb{k}}{\widehat{\otimes}} N = \widehat{M \underset{\mathbb{k}}{\otimes} N} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigoplus_{p+q=n} M_p \underset{\mathbb{k}}{\otimes} M_q \right)$$

Si f préserve la filtration, ou plus généralement si f est continue, par la propriété universelle de la limite projective, on obtient le prolongement par continuité de f.

Notation 1.11. — *Soient M et N deux $\mathbb{k}$-modules filtrés et f une application linéaire continue de M dans N. On note $\widehat{f}$ le prolongement par continuité de f (qui est une application $\mathbb{k}$-linéaire continue de $\widehat{M}$ dans $\widehat{N}$).*

On peut, grâce au produit tensoriel complété donner une variante de la notion de cogèbre :

Définition 1.12. — *Soient A un $\Bbbk$-module filtré et $\widehat{A}$ sa complétion. Un coproduit sur $\widehat{A}$ est une application linéaire continue de $\widehat{A}$ dans $\widehat{A} \,\widehat{\otimes}_{\Bbbk}\, \widehat{A}$.*

Les notions liées aux coproduits (coassociativité, morphisme de cogèbres, codérivations, bigèbres, etc.) s'expriment à l'aide des diagrammes habituels pour ce genre de coproduit, en remplaçant le produit tensoriel usuel par le produit tensoriel complété, les flèches étant des applications linéaires continues.

Un élément Φ d'une cogèbre est dit diagonal pour un coproduit Δ si et seulement si $\Delta\Phi = \Phi \otimes_{\Bbbk} \Phi$ ou $\Delta\Phi = \Phi \,\widehat{\otimes}_{\Bbbk}\, \Phi$ suivant le cas et si $\varepsilon(\Phi) = 1$, où ε désigne la coünité de la cogèbre.

2. Dérivations et codérivations

Dans toute cette section, $\Bbbk$ est un anneau fixé.

Si A est une $\Bbbk$-algèbre filtrée séparée et complète et f un endomorphisme $\Bbbk$-linéaire de A tel que pour tout entier positif n, $f(A_{\geqslant n}) \subset A_{\geqslant n+1}$, on peut définir l'endomorphisme linéaire continu $\exp f$ de A et on a

Proposition 2.1. — *Pour toute dérivation D de A telle que $D(A_{\geqslant n}) \subset A_{\geqslant n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exponentielle de D est un automorphisme d'algèbres filtrées de A.*

On peut notamment donner une démonstration « diagrammatique » de cette proposition, c'est-à-dire en exprimant le fait que D est une dérivation par le diagramme commutatif suivant, où μ désigne la multiplication de la $\Bbbk$-algèbre A

$$\begin{tikzcd} A \otimes_{\Bbbk} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes_{\Bbbk} D + D \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Id}"'] & A \arrow[d, "D"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

Le point crucial est alors que $\mathrm{Id} \otimes_{\Bbbk} D$ et $D \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Id}$ commutent, ce qui implique que l'exponentielle de leur somme est le produit des exponentielles.

La notion de codérivation est duale de celle de dérivation. Plus précisément, si (A, Δ, ε) est une $\Bbbk$-cogèbre filtrée séparée et complète, un endomorphisme $\Bbbk$-linéaire D de A est une codérivation si et seulement si le diagramme ci-dessous, obtenu en retournant les flèches du précédent, commute.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "D"'] & A \,\widehat{\otimes}_{\Bbbk}\, A \arrow[d, "\mathrm{Id} \,\widehat{\otimes}_{\Bbbk}\, D + D \,\widehat{\otimes}_{\Bbbk}\, \mathrm{Id}"] \\ A \arrow[r, "\Delta"] & A \,\widehat{\otimes}_{\Bbbk}\, A \end{tikzcd}$$

En reprenant en retournant les flèches la démonstration « diagrammatique » évoquée plus haut, on arrive immédiatement à :

Proposition 2.2. — *Soient (A, Δ, ε) une cogèbre filtrée séparée et complète et D une codérivation de A telle que $D(A_{\geqslant n}) \subset A_{\geqslant n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, L'exponentielle de D est un automorphisme de cogèbres filtrées de A.*

Les propositions suivantes sont valables dans toute $\Bbbk$-bigèbre $(A, \bullet, \Delta)$ et passent immédiatement au complété si les applications concernées sont continues.

Proposition 2.3. — *Soient $(A, \bullet, \Delta)$ une $\Bbbk$-bigèbre engendrée en tant qu'algèbre par des éléments $(a_i)_{i \in I}$ et D une dérivation de A. L'application D est une codérivation si et seulement si, pour tout élément i de I, on a*

$$\Delta(D(a_i)) = (\mathrm{Id} \underset{\Bbbk}{\otimes} D + D \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id})\Delta(a_i)$$

En particulier, si les a_i sont primitifs, pour prouver que D est une codérivation, il suffit de vérifier que les $D(a_i)$ sont primitifs.

L'image d'un élément primitif par une codérivation δ telle que $\delta(1) = 0$ est un élément primitif.

Démonstration. — On constate immédiatement que $\mathrm{Id} \otimes_{\Bbbk} D$ et $D \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Id}$ sont des dérivations de $A \otimes_{\Bbbk} A$. Comme le coproduit Δ est un morphisme d'algèbres, les applications $\Delta \circ D$ et $(\mathrm{Id} \otimes_{\Bbbk} D + D \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Id}) \circ \Delta$ sont des Δ-dérivations de A dans $A \otimes_k A$. Il s'ensuit qu'elles sont égales si et seulement si elles coïncident sur les générateurs.

Dans le cas où a_i est primitif, l'équation de l'énoncé exprime la primitivité de $D(a_i)$, compte tenu de $D(1) = 0$. Cette remarque est également la dernière assertion de l'énoncé. □

La démonstration de la proposition ci-dessous est analogue.

Proposition 2.4. — *Soient $(A, \bullet, \Delta)$ une $\Bbbk$-bigèbre engendrée en tant qu'algèbre par des éléments $(a_i)_{i \in I}$ et f un endomorphisme ou anti-endomorphisme d'algèbres de A. L'application f est un morphisme de cogèbres si et seulement si, pour tout élément i de I, on a*

$$\Delta(f(a_i)) = (f \underset{\Bbbk}{\otimes} f)\Delta(a_i)$$

Proposition 2.5. — *Les opérateurs de multiplication à gauche ou à droite par un élément primitif sont des codérivations.*

Démonstration. — Soit p un élément primitif de A ; notons l_p l'opérateur de multiplication à gauche par p.

On a alors, pour tout élément x de A,

$$\begin{aligned}\Delta l_p(x) &= \Delta(px) = \Delta(p)\Delta(x) \\ &= (1 \underset{\Bbbk}{\otimes} p + p \underset{\Bbbk}{\otimes} 1)\Delta(x) = (\mathrm{Id} \underset{\Bbbk}{\otimes} l_p + l_p \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id})\Delta(x)\end{aligned}$$

Le cas des multiplications à droite se traite de la même manière □

Proposition 2.6. — *L'image de l'unité par une codérivation est un élément primitif.*

Démonstration. — Soit δ une codérivation. On a par définition

$$\Delta\delta(1) = (\delta \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \underset{\Bbbk}{\otimes} \delta)\Delta(1)$$

Comme $\Delta(1) = 1 \otimes_{\Bbbk} 1$, ceci entraîne donc

$$\Delta\delta(1) = (\delta \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \underset{\Bbbk}{\otimes} \delta)(1 \underset{\Bbbk}{\otimes} 1) = \delta(1) \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 + 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \delta(1)$$

□

3. Modules de polynômes et de séries

3.1. Algèbres de monoïdes. — La définition suivante est un cas particulier de celle de Bourbaki ([**4**], III, §2, n°6)

Définition 3.1. — *Soient M un monoïde et $\Bbbk$ une algèbre. La $\Bbbk$-algèbre du monoïde M est le $\Bbbk$-module libre de base M, muni de l'unique produit dont la restriction à M est la loi de M.*

Nous la noterons $\Bbbk\{M\}$.

En particulier, fixons la notation des deux exemples les plus courants dans la suite :

Définition 3.2. — *Soit T un ensemble. La $\Bbbk$-algèbre du monoïde commutatif libre $\mathbb{N}^{(T)}$ (cf. [**4**], I, §7, n°7) formé sur T est appelée l'algèbre des polynômes (commutatifs) en les variables T à coefficients dans $\Bbbk$.*

Nous la noterons $\Bbbk[T]$.

Strictement parlant, un élément de $\mathbb{N}^{(T)}$ est une application de T dans $\mathbb{N}$ nulle en dehors d'une partie finie de T. L'application qui a tout élément t de T associe l'application de T dans $\mathbb{N}$ qui envoie t sur 1 et tous les autres éléments de T sur 0 permet de plonger T dans $\mathbb{N}^{(T)}$. En notation multiplicative, il apparaît alors que $\mathbb{N}^{(T)}$ est l'ensemble des monômes en les éléments de T (les variables).

Définition 3.3. — *Soit Z un ensemble. Le monoïde libre formé sur Z sera noté Z^*. La $\Bbbk$-algèbre de Z^* est appelée l'algèbre des polynômes non commutatifs en l'alphabet Z.*

Nous la noterons $\Bbbk\langle Z\rangle$.

Définition 3.4. — *Soit M un monoïde. Un poids sur M est un morphisme de monoïdes de M dans $\mathbb{N}$. Le poids d'un élément m de M sera souvent noté $|m|$. Nous dirons aussi que $(M, |\bullet|)$ est un monoïde à poids.*

Si n est un entier naturel, nous noterons M_n l'ensemble des éléments de M dont le poids est n.

La famille $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une partition de M. Soit $\Bbbk\{M\}_n$ le sous-$\Bbbk$-module de $\Bbbk\{M\}$ engendré par M_n. Comme M est une base de $\Bbbk\{M\}$, on obtient donc une décomposition en somme directe

$$\Bbbk\{M\} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Bbbk\{M\}_n \tag{1.1}$$

Le fait que le poids soit un morphisme de monoïdes implique immédiatement que cette décomposition fait de $\Bbbk\{M\}$ une $\Bbbk$-algèbre graduée. On désignera la graduation ainsi définie par le même nom que le poids.

Exemples :

1. Soit r un entier naturel. L'application qui à tout élément $\underline{s} = (s_1, \dots , s_r)$ de $\mathbb{N}^r$ associe $|\underline{s}| = s_1 + \cdots + s_r$ est un poids. Par composition, cela permet de munir un produit cartésien $M_1 \times \cdots \times M_r$ de monoïdes à poids d'un poids appelé poids total.
2. Soit I un ensemble. L'exemple ci-dessus se généralise au monoïde $\mathbb{N}^{(I)}$, définissant ainsi le poids total de la somme directe d'une famille $(M_i)_{i\in I}$ de monoïdes à poids.
3. La longueur d'un mot m d'un monoïde libre Z^* sera notée $\ell(m)$. L'application ℓ est un poids sur Z^*, qui permet de définir la graduation de longueur de $\Bbbk\langle Z\rangle$.
4. Soit Z un alphabet au plus dénombrable numéroté, c'est-à-dire muni d'une bijection d'une partie I_Z de $\mathbb{N}$ dans Z, que nous mettrons en évidence en écrivant $Z = \{(z_i)_{i\in I_Z}\}$. Il existe un unique morphisme de monoïdes (donc un poids $|\bullet|$) de Z^* dans $\mathbb{N}$ tel que $|z_i| = i$ pour tout $i \in I_Z$. Nous l'appellerons toujours le poids. Cela donne la graduation de poids sur $\Bbbk\langle Z\rangle$.
5. Si T est un ensemble, il existe un unique morphisme de monoïdes de $\mathbb{N}^{(T)}$ dans $\mathbb{N}$ tel que l'image de tout élément t de T soit 1. Nous l'appellerons le degré. On peut également le déduire de l'exemple 2 à partir du cas

particulier où T est formé d'un seul élément. On peut donc aussi l'appeler degré total. Cela donne la graduation appelée degré sur $\Bbbk[T]$.

6. Si $T = \{(t_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\}$ est un ensemble numéroté, il existe également un unique morphisme $|\bullet|$ de monoïdes du monoïde commutatif libre $\mathbb{N}^{(T)}$ dans $\mathbb{N}$ tel que $|t_i| = i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Nous l'appellerons encore le poids. On peut également le déduire de l'exemple 2, et cela définit la graduation de poids sur $\Bbbk[T]$.

Proposition 3.5. — *Soient M et N deux monoïdes à poids. Le produit tensoriel gradué au dessus de $\Bbbk$ de $\Bbbk\{M\}$ et $\Bbbk\{N\}$ est naturellement isomorphe à $\Bbbk\{M \times N\}$ en tant que $\Bbbk$-module gradué.*

Le poids total de $M\times N$ (*cf.* ex. 1) redonne la graduation de $\Bbbk\{M\} \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\{N\}$.

Définition 3.6. — *Nous dirons qu'un monoïde à poids $(M, |\bullet|)$ est localement fini si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble M_n (déf. 3.4) est fini.*

Si M est un monoïde à poids localement fini, son algèbre $\Bbbk\{M\}$ est donc un $\Bbbk$-module gradué libre de type fini.

Exemples :

1. Il est clair qu'un produit fini de monoïdes à poids localement finis est localement fini.
2. Une somme directe infinie de monoïdes à poids localement finis n'est pas en général localement finie (*cf.* exemple 5).
3. Le monoïde à poids (Z^*, ℓ) est localement fini si et seulement si l'ensemble Z est fini.
4. Si Z est un alphabet numéroté par une partie de $\mathbb{N}^*$, le monoïde à poids $(Z^*, |\bullet|)$ est localement fini.
5. Le monoïde à poids $\mathbb{N}^{(T)}$ muni du degré total est localement fini si et seulement si l'ensemble T est fini.
6. Si T est un ensemble numéroté par une partie de $\mathbb{N}^*$, le monoïde à poids $(\mathbb{N}^{(T)}, |\bullet|)$ est localement fini.

3.2. Séries génératrices en un monoïde à poids localement fini. — On développe ici une théorie très basique des séries génératrices. Le formalisme des modules filtrés permet de donner un sens à l'idée qu'une série génératrice est une somme formelle infinie, indexée par un monoïde, les coefficients étant dans un $\Bbbk$-module quelconque.

Définition 3.7. — *Soient $\Bbbk$ un anneau, M un monoïde à poids et E un $\Bbbk$-module. L'ensemble des séries formelles à coefficients dans E en le monoïde M est le $\Bbbk$-module filtré :*

$$E\{\{M\}\} := E \mathop{\widehat{\otimes}}_{\Bbbk} \Bbbk\{M\},$$

où l'on considère que E est muni de la graduation triviale.

Si E et F sont deux $\Bbbk$-modules et f une application $\Bbbk$-linéaire de E dans F, on notera $f\{\{M\}\}$ l'application $\Bbbk$-linéaire $f \mathbin{\widehat{\otimes}_{\Bbbk}} \mathrm{Id}$ de $E\{\{M\}\}$ dans $F\{\{M\}\}$.

Dans le cas où le monoïde M est du type Z^* ou $\mathbb{N}^{(T)}$ où Z est un alphabet et T un ensemble de variables commutatives, numérotés tous deux par une partie de $\mathbb{N}^*$, on utilisera les notations $E\langle\langle Z\rangle\rangle, f\langle\langle Z\rangle\rangle, E[[T]]$ et $f[[T]]$.

L'ensemble $\Bbbk\{\{M\}\}$ est donc naturellement l'algèbre filtrée complète $\widehat{\Bbbk\{M\}}$ et $E\{\{M\}\}$ est également le produit tensoriel complété $E \mathbin{\widehat{\otimes}_{\Bbbk}} \Bbbk\{\{M\}\}$.

Il peut paraître artificiel de ne pas profiter de l'éventuelle graduation (ou filtration) qui pourrait par ailleurs être définie sur le $\Bbbk$-module E. Dans l'optique naïve qui est la nôtre, chaque élément de M doit être dans les sommes infinies précédé d'un élément de E, et non de $\widehat{E}$.

Dans la suite, *on ne considèrera que des monoïdes à poids localement finis.* Dans ce cas, un élément de $E\{\{M\}\}$ est une somme infinie du type

$$\Phi = \sum_{n \geqslant 0} \Phi_n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \Phi_n \in E \otimes \mathbb{Q}\{M\}_n,$$

car les $\Bbbk$-modules gradués $E \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\{M\}$ et $E \otimes \mathbb{Q}\{M\}$ (muni de la structure de $\Bbbk$-module portée par E) sont naturellement isomorphes. Pour tout entier n, l'élément Φ_n est une somme finie du type

$$\sum_{m \in M_n} \varphi_n(m) \otimes m, \quad \text{avec} \quad \forall m \in M_n,\ \varphi_n(m) \in E$$

Comme M est localement fini, M_n est fini pour tout entier n, et donc la somme ci-dessus est finie sans restrictions sur l'application φ_n de M_n dans E (*cf.* [**4**], II, §3, n°7, cor. 1). Comme $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de M, la donnée d'une collection d'applications $\varphi_n \in E^{M_n}$ équivaut à la donnée d'une application φ de M dans E. On définit ainsi un isomorphisme de $\Bbbk$-modules entre $E\{\{M\}\}$ et E^M et on peut écrire, en sous-entendant le produit tensoriel :

$$\Phi = \sum_{m \in M} \varphi(m) m$$

Définition 3.8. — *L'élément de $E\{\{M\}\}$ correspondant à une application φ de M dans E sera appelé la série génératrice de φ et noté $\varphi_{\text{gén}}$.*

Une autre correspondance nous sera très utile. Considérons le $\Bbbk$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}, E)$ des applications $\mathbb{Q}$-linéaires quelconques de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$ dans E. Comme les composantes homogènes de $\mathbb{Q}\{M\}$ sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie, on a la suite d'identifications naturelles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}, E) &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\bigoplus_{n\geqslant 0} \widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}_n, E)\\
&\simeq \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}_n, E) \text{ ([\textbf{4}], II §1, n}^{\text{o}}\text{6, prop. 6, cor. 1)}\\
&\simeq \prod_{n\geqslant 0} \widetilde{\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}}_n \otimes E \quad \text{([\textbf{4}], II, §4, n}^{\text{o}}\text{2, cor.)}\\
&\simeq \prod_{n\geqslant 0} \mathbb{Q}\{M\}_n \otimes E\\
&= \mathbb{Q}\{M\} \mathbin{\widehat{\otimes}} E
\end{aligned}$$

Définition 3.9. — *L'élément de $E\{\{M\}\}$ correspondant à une application $\mathbb{Q}$-linéaire φ de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$ dans E sera encore appelé la série génératrice de φ et noté $\varphi_{\text{gén}}$.*

L'application $\mathbb{Q}$-linéaire de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$ dans E correspondant à une série Φ de $E\{\{M\}\}$ sera appelée l'application linéaire associée à Φ et notée Φ_{lin}.

Soit $\varphi \in E^M$ et $\Phi = \varphi_{\text{gén}}$. On voit facilement que Φ_{lin} est l'unique application $\mathbb{Q}$-linéaire de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$ dans E telle que

$$\forall m \in M,\ \Phi_{\text{lin}}(\widetilde{m}) = \varphi(m)$$

et on a alors, pour tout élément ξ de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$:

$$\Phi_{\text{lin}}(\xi) = \sum_{m\in M} \varphi(m)\xi(m),$$

somme qui est finie car ξ est une somme finie du type $\sum \xi_n$ où ξ_n appartient à $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}_n$.

Notation 3.10. — *Pour tout élément Φ de $E\{\{M\}\}$ et tout élément ξ de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$, la notation $(\Phi|\xi)$ désigne l'élément $\Phi_{\text{lin}}(\xi)$.*

Ainsi, si $m \in M$, le « produit scalaire » $(\Phi|\widetilde{m})$ est le coefficient de m dans la série Φ.

Si E et F sont des $\Bbbk$-modules, f une application $\Bbbk$-linéaire de E dans F et Φ un élément de $E\{\{M\}\}$, on voit sans peine que l'on a

$$\Big(f\{\{M\}\}(\Phi)\Big)_{\text{lin}} = f\circ\Phi_{\text{lin}}$$

En d'autres termes, on a un isomorphisme entre les foncteurs $\bullet\{\{M\}\}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}, \bullet)$.

3.3. Produits tensoriels de séries et cogèbres. — La proposition 3.5 entraîne immédiatement, pour tous $\Bbbk$-modules E et F et tous monoïdes à poids localement finis M et N :

$$E\{\{M\}\} \mathop{\widehat{\otimes}}_{\Bbbk} F\{\{N\}\} = (E \mathop{\otimes}_{\Bbbk} F)\{\{M \times N\}\}$$

En particulier, le carré tensoriel complété de $\Bbbk\{\{M\}\}$ est $\Bbbk\{\{M \times M\}\}$.

Si M et N sont deux monoïdes à poids localement finis, M étant commutatif, les $\Bbbk$-algèbres $\Bbbk\{\{M\}\}\{\{N\}\}$ et $\Bbbk\{\{M \times N\}\}$ sont isomorphes. En effet, par associativité du produit cartésien, elles ont la même structure de $\Bbbk$-module sous-jacente, la $\Bbbk\{\{M\}\}$-linéarité du produit de la première entraîne sa continuité relativement à la topologie de $\Bbbk\{\{M \times N\}\}$ et les deux produits coïncident sur la base topologique $M \times N$. Comme par ailleurs $\Bbbk\{\{M\}\}$ se plonge dans $\Bbbk\{\{M \times N\}\}$, ce dernier est naturellement muni d'une structure de $\Bbbk\{\{M\}\}$-algèbre dont N est une base topologique (pour le poids partiel associé à N) et qui est donc isomorphe en tant que $\Bbbk\{\{M\}\}$-algèbre topologique à $\Bbbk\{\{M\}\}\{\{N\}\}$.

Soient N et N' deux monoïdes à poids localement finis et $\Bbbk$ un anneau. Comme $\Bbbk\{N\} = \mathbb{Q}\{N\} \otimes \Bbbk$, une application linéaire continue f de $\mathbb{Q}\{N\}$ dans $\mathbb{Q}\{N'\}$ fournit par extension des scalaires une application $\Bbbk$-linéaire de $\Bbbk\{N\}$ dans $\Bbbk\{N'\}$, que l'on peut prolonger par continuité aux séries, définissant ainsi $\widehat{f_{\Bbbk}}$ (qui n'est autre que $\mathrm{Id}_{\Bbbk} \widehat{\otimes} f$). Dans le cas où $N' = N \times N$, si Δ est un coproduit continu sur $\mathbb{Q}\{N\}$, on obtient ainsi un coproduit continu $\widehat{\Delta}_{\Bbbk}$ sur $\Bbbk\{\{N\}\}$. En général, on ne sera pas aussi explicite dans la notation, notant encore Δ pour $\widehat{\Delta}_{\Bbbk}$. Si $\varepsilon : \mathbb{Q}\{N\} \to \mathbb{Q}$ est une coünité continue pour le coproduit Δ, on peut de même l'étendre à une coünité continue $\widehat{\varepsilon_{\Bbbk}} : \Bbbk\{\{N\}\} \to \Bbbk$, que la plupart du temps on notera encore ε.

Si M est un monoïde à poids localement fini commutatif et f, N, N' sont comme ci-dessus, on peut appliquer cela à l'anneau $\mathbb{Q}\{\{M\}\}$. On obtient ainsi une application $\widehat{f}_{\mathbb{Q}\{\{M\}\}}$ de $\mathbb{Q}\{\{M\}\}\{\{N\}\}$ dans $\mathbb{Q}\{\{M\}\}\{\{N'\}\}$, qui sont respectivement isomorphes en tant que $\mathbb{Q}$-modules à $\mathbb{Q}\{\{M \times N\}\}$ et $\mathbb{Q}\{\{M \times N'\}\}$. La $\mathbb{Q}\{\{M\}\}$-linéarité de $\widehat{f}_{\mathbb{Q}\{\{M\}\}}$ entraîne alors sa continuité pour les topologies héritées des poids totaux de $M \times N$ et $M \times N'$. Cela s'applique en particulier dans le cas où N' est le monoïde $N \times N$ et où Δ est un coproduit continu. Notamment, une limite, au sens de la topologie liée au poids total de $M \times N$, d'éléments diagonaux de $\mathbb{Q}\{\{M\}\}\{\{N\}\}$ est un élément diagonal.

La proposition ci-dessous, qui est une généralisation du critère de Friedrichs pour les exponentielles de Lie, nous permettra de passer régulièrement d'énoncés sur les séries à des énoncés de morphismes d'algèbres.

***Proposition 3.11* (critère de Friedrichs).** — *Soient M un monoïde à poids localement fini, $\Bbbk$ un anneau et Δ un coproduit continu sur $\mathbb{Q}\{M\}$, que l'on étend à un coproduit Δ sur $\Bbbk\{\{M\}\}$. Notons $\curlywedge$ le produit qui se déduit de Δ sur $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$.*

Pour tout élément Φ de $\Bbbk\{\{M\}\}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\Delta\Phi = \Phi \mathbin{\widehat{\otimes}_{\Bbbk}} \Phi$

ii) *Pour tous éléments f et g de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$, on a*

$$\Phi_{\mathrm{lin}}(f \curlywedge g) = \Phi_{\mathrm{lin}}(f)\Phi(g)_{\mathrm{lin}}$$

Si le coproduit Δ est coassociatif et doté d'une coünité continue ε, c'est-à-dire si $(\mathbb{Q}\{M\}, \Delta, \varepsilon)$ est une cogèbre topologique, un élément Φ de $\Bbbk\{\{M\}\}$ est diagonal si et seulement si l'application linéaire Φ_{lin} est un morphisme d'algèbres.

Démonstration. — Écrivons Φ sous la forme

$$\Phi = \sum_{m\in M} \varphi_m m, \quad \text{avec} \quad \forall m \in M,\ \varphi_m \in \Bbbk$$

Soient f et g deux éléments de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$. On a d'abord

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{lin}}(f)\Phi_{\mathrm{lin}}(g) &= \left(\sum_{m\in M} \varphi_m f(m)\right)\left(\sum_{m\in M} \varphi_m g(m)\right) \\
&= \sum_{(m_1,m_2)\in M\times M} \varphi_{m_1}\varphi_{m_2} f(m_1)g(m_2) \\
&= \sum_{(m_1,m_2)\in M\times M} \varphi_{m_1}\varphi_{m_2} (f\otimes g)(m_1\otimes m_2) \\
&= (\Phi \mathbin{\underset{\Bbbk}{\widehat{\otimes}}} \Phi | f\otimes g) \quad \text{car} \\
\Phi \mathbin{\underset{\Bbbk}{\widehat{\otimes}}} \Phi &= \sum_{(m_1,m_2)\in M\times M} \varphi_{m_1}\varphi_{m_2} m_1\otimes m_2
\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{lin}}(f \curlywedge g) &= \sum_{m\in M} \varphi_m (f \curlywedge g)(m) \\
&= \sum_{m\in M} \varphi_m (f\otimes g)(\Delta m) \\
&= (\Delta\Phi | f\otimes g) \quad \text{car} \\
\Delta\Phi &= \sum_{m\in M} \varphi_m \Delta m
\end{aligned}$$

La condition ii) équivaut donc à

$$\forall f, g \in \widetilde{\mathbb{Q}\{M\}},\ (\Delta\Phi | f \otimes g) = (\Phi \mathop{\widehat{\otimes}}_{\Bbbk} \Phi | f \otimes g),$$

ce qui équivaut à $\Delta\Phi = \Phi \,\widehat{\otimes}_{\Bbbk}\, \Phi$.

Pour la dernière assertion, il n'y a quasiment rien à démontrer : le produit $\curlywedge$ est alors associatif et ε est l'élément neutre de $(\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}, \curlywedge)$, qui est donc une algèbre. Par définition, le fait que Φ soit diagonal est la conjonction de i) et de $\varepsilon(\Phi) = 1$, ce qui est équivalent à $\Phi_{\mathrm{lin}}(\varepsilon) = 1$. $\square$

Remarques. — Dans la proposition ci-dessus, on ne suppose pas que le coproduit Δ soit coassociatif. C'est pourquoi la condition ii) ne s'exprime pas en termes de morphisme d'algèbres (voir les conventions générales).

Dans la plupart des situations où nous utiliserons cette proposition, le coproduit Δ définira avec la multiplication naturelle de $\mathbb{Q}\{M\}$ une structure de bigèbre, dont la coünité sera l'application qui a tout élément de $\mathbb{Q}\{M\}$ associe son terme constant. Un élément de $\Bbbk\{\{M\}\}$ sera alors diagonal s'il vérifie la condition i) et si son terme constant est 1.

Avec la proposition ci-dessus, l'énoncé suivant se réduit à constater que le composé de deux morphismes d'algèbres est un morphisme d'algèbres.

Corollaire 3.12. — *Soient M un monoïde à poids localement fini, $\Bbbk \xrightarrow{\alpha} \Bbbk'$ un morphisme d'anneaux et une structure de cogèbre topologique $(\mathbb{Q}\{M\}, \Delta, \varepsilon)$, que l'on étend à $\Bbbk\{\{M\}\}$ et $\Bbbk'\{\{M\}\}$. L'image par $\alpha\{\{M\}\}$ d'un élément de $\Bbbk\{\{M\}\}$ diagonal pour Δ est encore diagonale.*

4. Schémas en groupes pro-unipotents sur $\mathbb{Q}$

4.1. Terminologie. — Les objets géométriques que nous utiliserons seront toujours vus par leurs $\Bbbk$-points. On adoptera donc le point de vue développé dans le livre de Demazure et Gabriel ([**9**]). La correspondance avec le point de vue habituel y est détaillée dans le chapitre I. L'aspect géométrique des considérations développées dans cette thèse est très simple, puisqu'on ne considère que des schémas affines et que tous les anneaux contiennent $\mathbb{Q}$.

Un schéma est donc un cas particulier de foncteur de la catégorie des anneaux dans celle des ensembles et un morphisme de schémas est un morphisme fonctoriel. On ne donnera pas la définition générale du concept de schéma. On se contentera de dire qu'un schéma affine est un foncteur représentable, c'est-à-dire isomorphe à $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$, où A est un anneau. On écrit alors $S = \mathit{Spec}(A)$. Il est algébrique affine si A est de type fini.

Un schéma S sera dit *pro-algébrique affine* s'il est la limite projective d'un système

$$\cdots \longrightarrow S_n \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_0$$

de schémas algébriques affines, ce qui veut dire que pour tout anneau $\mathbb{k}$ et tout morphisme d'anneaux φ, on a

$$S(\mathbb{k}) = \varprojlim_n S_n(\mathbb{k}) \quad \text{et} \quad S(\varphi) = \varprojlim_n S_n(\varphi)$$

La définition de $S(\varphi)$ a un sens car les flèches du système projectif sont des morphismes fonctoriels. Soit A_n l'anneau qui représente S_n. On voit facilement que S est affine, représenté par $\varinjlim_n A_n$.

Un foncteur-groupe est un foncteur de la catégorie des anneaux dans celle des groupes. Un schéma en groupes est un foncteur-groupe qui est un schéma. Lorsque $G = \mathit{Spec}\,(A)$, ceci équivaut à la donnée d'une structure de bigèbre de Hopf sur A. Un groupe algébrique est un schéma en groupes qui est algébrique(1).

Dans ce qui suit, pour tout anneau $\mathbb{k}$, on notera $\mathbb{k}[\varepsilon]$ l'anneau des « nombres duaux » $\mathbb{k}[t]/(t^2)$, où t désigne une variable formelle. On peut aussi le caractériser par la décomposition $\mathbb{k}[\varepsilon] = \mathbb{k}\cdot 1 \oplus \mathbb{k}\cdot\varepsilon$ et $\varepsilon^2 = 0$.

Le foncteur-algèbre de Lie d'un foncteur-groupe G est « l'espace tangent au voisinage de 1 », c'est-à-dire le foncteur qui associe à tout anneau $\mathbb{k}$ le noyau $\mathfrak{g}(\mathbb{k})$ du morphisme de groupes de $G(\mathbb{k}[\varepsilon])$ sur $G(\mathbb{k})$ provenant de la projection $\mathbb{k}[\varepsilon] \to \mathbb{k}$ ([**9**], chap. II, §4, n$^{\mathrm{o}}$1).

Dans le cas où G est un groupe algébrique, pour tout anneau $\mathbb{k}$, on a $\mathfrak{g}(\mathbb{k}) = \mathfrak{g}(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{k}$ (*cf.* [**9**], chap. II, §4, 4.8). Dans la suite, on abrègera $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ en $\mathfrak{g}$. C'est l'algèbre de Lie du groupe algébrique G.

Si $G = \varprojlim_n G_n$ est un schéma en groupes pro-algébrique, on a pour tout anneau $\mathbb{k}$, en notant $\mathfrak{g}_n$ l'algèbre de Lie de G_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{g}(\mathbb{k}) = \varprojlim_n \mathfrak{g}_n(\mathbb{k}) = \varprojlim_n \mathfrak{g}_n \otimes \mathbb{k}$$

Si l'on considère alors la filtration naturelle de $\varprojlim_n \mathfrak{g}_n$ (dont le $n^{\text{ème}}$ terme est l'ensemble des éléments dont les projections dans $\mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}$ sont nulles), on voit que l'on a $\mathfrak{g}(\mathbb{k}) = (\varprojlim_n \mathfrak{g}_n)\,\widehat{\otimes}\,\mathbb{k}$, ce qui justifie la définition suivante.

(1) Comme tous nos anneaux contiennent $\mathbb{Q}$, il s'agit en fait de groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Définition 4.1. — *L'algèbre de Lie d'un schéma en groupes pro-algébrique $G = \varprojlim_n G_n$ est l'algèbre de Lie filtrée complète*

$$\mathfrak{g} = \varprojlim_n \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}(\mathbb{Q}),$$

où $\mathfrak{g}_n$ désigne pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'algèbre de Lie de G_n et $\mathfrak{g}$ le foncteur-algèbre de Lie de G.

Proposition 4.2 **([9], chap. II, §6, 3.1)**. — *Soit G un schéma en groupes. Pour tout élément x de $\mathfrak{g}(\Bbbk)$, il existe un unique élément* $\exp(tx)$ *de $G(\Bbbk[[t]])$ tel que*

i) $\exp(\varepsilon x) = x$ *dans $G(\Bbbk[\varepsilon])$,*

ii) $\exp(tx)\exp(t'x) = \exp(t+t')x$ *dans $G(\Bbbk[[t,t']])$,*

où $\exp(\varepsilon x), \exp(t'x), \exp(t{+}t')x$ *désignent respectivement les images de* $\exp(tx)$ *par les morphismes continus de source* $\Bbbk[[t]]$ *envoyant t sur ε, t' et $t+t'$.*

La propriété d'unicité montre que l'exponentielle commute aux morphismes de schémas en groupes.

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. On lui associe un foncteur $\mathbb{A}^V$ par $\mathbb{A}^V(\Bbbk) := V \otimes \Bbbk$ pour tout anneau $\Bbbk$. Ce foncteur est un schéma algébrique affine, représenté par $\mathbf{S}(\widetilde{V})$, l'algèbre symétrique formée sur $\widetilde{V}$ (*cf.* [**9**], chap. II, § 1, 2.1). C'est l'espace affine associé à V. On peut en donner une variante pro-algébrique (affine) :

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel filtré. Notons $\widehat{\mathbb{A}}^V$ le foncteur $\Bbbk \mapsto V \widehat{\otimes} \Bbbk$.

Soit W est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel *gradué* de type fini et $\widehat{W}$ son complété. Le foncteur $\widehat{\mathbb{A}}^{\widehat{W}}$ est la limite projective du système $(\mathbb{A}^{W^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ de schémas algébriques affines. C'est donc le schéma pro-algébrique affine :

$$\widehat{\mathbb{A}}^{\widehat{W}} = \mathit{Spec}\,(\varinjlim_n \mathbf{S}(\widetilde{W}^{(n)}) = \mathit{Spec}\,(\mathbf{S}(\widetilde{W})),$$

l'algèbre symétrique commutant aux limites inductives (*cf.* [**4**], chap. III, § 6, n$^{\text{o}}$ 5) et la limite inductive des $\widetilde{W}^{(n)}$ étant $\widetilde{W}$ (rappellons que $\widetilde{W}$ est le dual *gradué* de W).

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel filtré, séparé, complet et à quotients finis (*cf.* déf. 1.8). Comme $V = \widehat{\mathrm{gr} V}$, on voit que le foncteur $\widehat{\mathbb{A}}^V$ est représenté par l'anneau $\mathbf{S}(\widetilde{\mathrm{gr} V})$. On peut notamment appliquer cela au foncteur-algèbre de Lie d'un schéma en groupes pro-algébrique affine, car il est de ce type(2).

(2)L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique est de dimension finie.

4.2. Groupes unipotents. — À tout $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V, on peut associer un foncteur-groupe $\mathsf{GL}(V)$ de la manière suivante : $\mathsf{GL}(V)(\Bbbk)$ est pour tout anneau $\Bbbk$ le groupe des automorphismes $\Bbbk$-linéaires de $V \otimes \Bbbk$. Une *représentation* d'un foncteur-groupe G dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V est un morphisme ρ de G dans $\mathsf{GL}(V)$. On dira qu'elle est *fidèle* si $\rho(\Bbbk) : G(\Bbbk) \to \mathsf{GL}(V)(\Bbbk)$ est injectif pour tout anneau $\Bbbk$.

Supposons que V soit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathsf{GL}(V)$ est un groupe algébrique (affine). Tout endomorphisme $\mathbb{Q}[\varepsilon]$-linéaire f de $V \otimes \mathbb{Q}[\varepsilon]$ est de la forme $f_1 + \varepsilon f_2$, où f_1 et f_2 sont des endomorphismes $\mathbb{Q}$-linéaires de V. Cela permet d'identifier l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ de $\mathsf{GL}(V)$ avec $\mathrm{End}(V)$, l'élément de $\mathsf{GL}(V)(\mathbb{Q}[\varepsilon])$ correspondant à $\psi \in \mathfrak{gl}(V)$ étant $\mathrm{Id} + \varepsilon\psi$. Comme $\mathfrak{gl}(V)(\Bbbk) = \mathfrak{gl}(V) \otimes \Bbbk$, on peut identifier $\mathfrak{gl}(V)(\Bbbk)$ avec $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V \otimes \Bbbk)$ à l'aide de la même formule. Le crochet de $\mathfrak{gl}(V)$, identifié à $\mathrm{End}(V)$, est donné par :

$$\forall \psi, \psi' \in \mathfrak{gl}(V),\ [\psi, \psi'] = \psi\psi' - \psi'\psi$$

Le crochet de $\mathfrak{gl}(V)(\Bbbk)$, identifié à $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V \otimes \Bbbk)$, est donné par la même formule.

Si ψ est maintenant un élément de $\mathfrak{gl}(V)(\Bbbk)$, l'exponentielle $\exp(t\psi)$ est alors l'élément suivant de $\mathsf{GL}(V)(\Bbbk[[t]])$

$$\exp(t\psi) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{t^i \psi^i}{i!}$$

On dira qu'un groupe algébrique G est *unipotent* s'il admet une représentation fidèle dans un espace vectoriel V, muni d'une suite finie de sous-espaces vectoriels (un *drapeau*)

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \cdots \supset V_n = \{0\}$$

et si pour tout anneau $\Bbbk$, le sous-$\Bbbk$-module $V_i \otimes \Bbbk$ est stable par l'action de $G(\Bbbk)$ et l'action de $G(\Bbbk)$ sur $(V_i/V_{i+1}) \otimes \Bbbk$ est triviale. On dira qu'un schéma en groupes est *pro-unipotent* s'il est limite projective de groupes algébriques unipotents.

Dans le cas unipotent, on peut définir l'exponentielle d'un élément x de $\mathfrak{g}(\Bbbk)$, car il est nilpotent dans toute représentation, ce qui implique que $\exp(tx)$ appartient à $G(\Bbbk[t])$. On peut donc spécialiser t en 1. *L'application exponentielle ainsi construite est une bijection de* $\mathfrak{g} \otimes \Bbbk$ *sur* $G(\Bbbk)$. En effet, on peut considérer, grâce à la représentation donnée et en choisissant une base adaptée au drapeau $V_0, \dots, V_n$, que $G(\Bbbk)$ est un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires inférieures à coefficients dans $\Bbbk$ et dont la diagonale ne comporte que des 1. Si g est un élément de $G(\Bbbk)$, on peut alors former son logarithme ψ, qui est une matrice à coefficients dans $\Bbbk$. On a donc l'injectivité. Pour obtenir la surjectivité, il faut prouver que $\psi = \log g$ appartient toujours à $\mathfrak{g} \otimes \Bbbk$. Pour tout entier n, l'image de la matrice $\exp(t\psi)$ (qui est à coefficients dans $\Bbbk[t]$) par l'application qui envoie t sur n est g^n ; elle appartient donc à $G(\mathbb{k})$. Par densité algébrique, ceci implique que $\exp(t\psi)$ appartient à $G(\mathbb{k}[t])$, d'où on tire, par spécialisation de t en ε, l'appartenance de $1+\varepsilon\psi = \exp(\varepsilon\psi)$ à $G(\mathbb{k}[\varepsilon])$, ce qu'il fallait démontrer.

Si $G = \varprojlim_n G_n$ est un schéma en groupes pro-unipotent et $\mathfrak{g} = \varprojlim_n \mathfrak{g}_n$ son algèbre de Lie, on a ainsi pour tout anneau $\mathbb{k}$ une collection d'applications exponentielles de $\mathfrak{g}_n \otimes \mathbb{k}$ dans $G_n(\mathbb{k})$, qui commutent aux flèches du système projectif (car celles-ci sont des morphismes de schémas en groupes). Cela permet donc de définir globalement l'exponentielle de $\mathfrak{g}(\mathbb{k}) = \mathfrak{g} \widehat{\otimes} \mathbb{k}$ dans $G(\mathbb{k})$. Elle est encore bijective, son inverse (le logarithme) étant la limite projective des logarithmes de $G_n(\mathbb{k})$ dans $\mathfrak{g}_n \otimes \mathbb{k}$.

Cette collection d'applications est fonctorielle en $\mathbb{k}$ et est donc un *isomorphisme de schémas* (noté exp) de $\widehat{\mathbb{A}}^{\mathfrak{g}}$ (*i.e.* le foncteur-algèbre de Lie de G, vu comme schéma) sur G.

Remarque. — Pour Demazure et Gabriel, un schéma en groupes unipotent est plus général qu'ici et englobe ce qu'on a appelé « pro-unipotent », puisque leurs unipotents sont les schémas en groupes affines dont tous les quotients algébriques sont unipotents ([**9**], chap. IV, §2, 2.5).

4.3. Représentations pro-unipotentes. — Le cas que l'on traite ici couvrira amplement les besoins des chapitres suivants. On commence par définir un analogue filtré du groupe unipotent associé à un drapeau.

Définition 4.3. — *Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel filtré et séparé. À tout anneau $\mathbb{k}$, on associe le groupe $\mathsf{UN}(V)(\mathbb{k})$ des automorphismes $\mathbb{k}$-linéaires de $V \widehat{\otimes} \mathbb{k}$ qui préservent la filtration et induisent l'identité sur le gradué associé* $\mathrm{gr}V \otimes \mathbb{k}$.

On a ainsi défini un foncteur-groupe que nous allons maintenant décrire dans le cas particulier où V est à quotients finis, c'est-à-dire où pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $V^{(n)}$ est de dimension finie.

Proposition 4.4. — *Pour tout $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V filtré, séparé, complet et à quotients finis, le foncteur-groupe $\mathsf{UN}(V)$ est un schéma en groupes pro-unipotent.*

L'algèbre de Lie $\mathfrak{un}(V)$ de $\mathsf{UN}(V)$ s'identifie à l'ensemble des endomorphismes linéaires ψ de V tels que $\psi(V_{\geqslant n}) \subset V_{\geqslant n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'exponentielle de $\mathfrak{un}(V)$ dans $\mathsf{UN}(V)$ est l'exponentielle des endomorphismes : pour tout anneau $\mathbb{k}$, et tout élément ψ de $\mathfrak{un}(V)(\mathbb{k}) = \mathfrak{un}(V) \widehat{\otimes} \mathbb{k}$, l'endomorphisme

$\exp\psi$ *de* $\mathsf{UN}(V)(\Bbbk)$ *vérifie*

$$\forall x \in V \mathbin{\widehat{\otimes}} \Bbbk,\ (\exp\psi)(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\psi^n(x)}{n!}$$

Démonstration. — La filtration de V donne pour chaque $V^{(n)}$, qui est par hypothèse un espace vectoriel de dimension finie, un drapeau :

$$V^{(n)} = V_{\geqslant 0}/V_{\geqslant n+1} \supset V_{\geqslant 1}/V_{\geqslant n+1} \supset V_{\geqslant 2}/V_{\geqslant n+1} \supset V_{\geqslant n+1}/V_{\geqslant n+1} = \{0\}$$

Soit $\mathsf{UN}^{(n)}(V)(\Bbbk)$ l'ensemble des endomorphismes $\Bbbk$-linéaires de $V^{(n)} \otimes \Bbbk$ laissant ce drapeau stable et induisant l'identité sur les quotients successifs. Il est clair que $\mathsf{UN}^{(n)}(V)$ est un groupe algébrique unipotent et que tout élément f de $\mathsf{UN}^{(n+1)}V(\Bbbk)$ induit par passage au quotient un élément $\pi^{(n)}(f)$ de $\mathsf{UN}^{(n)}(V)(\Bbbk)$. L'application $\pi^{(n)}$ ainsi définie est un morphisme de groupes et est évidemment fonctorielle en $\Bbbk$. Elle est de plus surjective. En effet, comme nous sommes sur le corps $\mathbb{Q}$, on peut choisir un supplémentaire S de $V^{(n)}$ dans $V^{(n+1)}$ et en déduire $V^{(n+1)} \otimes \Bbbk = (V^{(n)} \otimes \Bbbk) \oplus (S \otimes \Bbbk)$, ce qui permet facilement de trouver un antécédent par $\pi^{(n)}$ à un élément f de $\mathsf{UN}^{(n)}(V)(\Bbbk)$.

Les $\mathsf{UN}^{(n)}(V)$ forment donc un système projectif à flèches surjectives de groupes algébriques dont on voit facilement que la limite est $\mathsf{UN}(V)$ car $V = \varprojlim_n V^{(n)}$, étant séparé et complet.

Un élément de $\mathfrak{un}(V) = \mathsf{UN}(V)(\mathbb{Q}[\varepsilon])$ est de la forme $\mathrm{Id}_V + \varepsilon\psi$, où ψ appartient à $\mathrm{End}(V)$. Comme Id et $\mathrm{Id} + \varepsilon\psi$ préservent la filtration, c'est encore le cas de $\varepsilon\psi$ et donc de ψ. Comme $\mathrm{Id} + \varepsilon\psi$ doit induire l'identité sur chaque $V_{\geqslant n}/V_{\geqslant n+1}$, l'endomorphisme ψ doit, lui, induire 0, ce qui est équivalent à la condition de l'énoncé.

La formule pour l'exponentielle est conséquence de celle qui est déjà vraie pour les $\mathsf{UN}^{(n)}$ en passant à la limite. L'application exponentielle

$$\mathfrak{un}(V)(\Bbbk) = \mathfrak{un}(V) \mathbin{\widehat{\otimes}} \Bbbk \longrightarrow \mathsf{UN}(V)(\Bbbk)$$

est bijective car ses projections $\mathfrak{un}(V) \mathbin{\widehat{\otimes}} \Bbbk \to \mathsf{UN}^{(n)}(V)(\Bbbk)$ le sont toutes. □

Explicitement, la filtration de $\mathfrak{un}(V)$ est donnée par :

$$\mathfrak{un}(V)_{\geqslant n} = \{\psi \in \mathfrak{un}(V); \mathit{im}\ \psi \subset V_{\geqslant n}\}$$

Si V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué de type fini, son complété $\widehat{V}$ est naturellement séparé, complet et à quotients finis et c'est le cas que nous considèrerons le plus souvent.

Définition 4.5. — *Une représentation pro-unipotente d'un foncteur-groupe G dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V filtré, séparé, complet et à quotients finis est un morphisme de foncteurs-groupes de G dans $\mathsf{UN}(V)$.*

La proposition 4.4 implique immédiatement l'énoncé suivant.

Proposition 4.6. — *Soit G un schéma en groupes muni d'une représentation (ρ, V) pro-unipotente et fidèle.*

Alors G est un schéma en groupes pro-unipotent. Pour tout anneau $\Bbbk$, tout élément ψ de $\mathfrak{g}(\Bbbk) \subset G(\Bbbk[\varepsilon])$ et tout élément x de $V \widehat{\otimes} \Bbbk$, on a

$$\rho(\exp\psi)(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(s_\psi)^n(x)}{n!},$$

où s_ψ est l'endomorphisme de $V \widehat{\otimes} \Bbbk$ tel que $\rho(\psi) = \mathrm{Id} + \varepsilon s_\psi$.

Pour finir, si G est un schéma en groupes muni d'une représentation pro-unipotente et fidèle et si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie fermée de $\mathfrak{g}$, la proposition ci-dessus et la formule de Campbell-Hausdorff [(3)] permettent de voir que $\exp(\mathfrak{h}(\Bbbk))$ est un sous-groupe de $G(\Bbbk)$ pour tout anneau $\Bbbk$. Comme l'exponentielle est un isomorphisme de schémas, $\exp(\mathfrak{h})$ est donc un sous-schéma en groupes pro-unipotent de G.

5. Algèbres de Lie libres

A peu près tout ce qu'on trouvera dans cette section provient du livre de Reutenauer ([**46**]). Notre objectif ici est d'abord de faire un catalogue de résultats classiques pour pouvoir y faire référence sans obliger le lecteur à consulter sans cesse ce livre. Ensuite, il s'agit de donner les identifications, conventions et notations qui seront utilisées tout au cours de cette thèse. La principale démarcation avec le texte de Reutenauer concerne la notation de produit scalaire et l'identification qu'elle induit entre une algèbre de polynômes non commutatifs et son dual gradué.

Nous aurons en effet besoin au chapitre III de faire des changements d'alphabet. Ne pas utiliser cette identification rendra alors la situation plus claire. Le prix à payer sera une certaine lourdeur dans les notations au cours du chapitre III. Dès que la situation le permettra, nous reviendrons bien sûr à la notation de produit scalaire. Pour les démonstrations, nous nous contentons de références.

5.1. Notations. — Tout au long de cette section, $\Bbbk$ désignera un anneau et Z un alphabet numéroté par une partie I_Z de $\mathbb{N}$. On suppose le monoïde Z^* muni d'un poids localement fini, qui proviendra de la numérotation si $I_Z \subset \mathbb{N}^*$ ou qui peut être la longueur si Z est fini. Beaucoup des constructions ici présentées ont un sens dans un cadre plus général, par exemple sur $\mathbb{Z}$, ou sans

[(3)] Sa définition est rappelée au paragraphe 5.4

se donner de numérotation, mais cela nous suffira pour pouvoir développer les chapitres suivants.

La bijection de la partie I_Z de $\mathbb{N}$ sur Z induit un isomorphisme de monoïdes entre Z^* et $(I_Z)^*$. Ce dernier est l'ensemble des suites finies, qu'on appellera dans la suite *séquences*[4], d'éléments de I_Z. Soit donc $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ un élément de $(I_Z)^*$. Son image par cet isomorphisme est le mot $z_{s_1} z_{s_2} \cdots z_{s_r}$, que nous pourrons donc également désigner par $z_{\underline{s}}$.

Nous passerons régulièrement, selon la commodité du moment, de la notation multiplicative $z_{s_1} \cdots z_{s_r}$ à la notation indicée $z_{\underline{s}}$. On pourrait presque considérer la lettre « z » comme une indication de type (comme pour un langage de programmation).

La notation de séquence nous sera particulièrement utile pour les bases duales. Considérons l'algèbre $\Bbbk\langle Z\rangle$ du monoïde Z^*. On sait que Z^* en est une base homogène. Comme on peut indicer les éléments de Z^* par les séquences de I_Z, on peut indicer également les éléments de la base duale par les séquences.

Notation 5.1. — *Soit $\underline{s} \in (I_Z)^*$. La notation $\widetilde{z}_{\underline{s}}$ désigne l'élément de la base duale $\widetilde{Z^*}$ de $\Bbbk\langle Z\rangle$ correspondant à l'élément $z_{\underline{s}}$ de la base Z^* de $\Bbbk\langle Z\rangle$.*

5.2. Premières propriétés

Notation 5.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\Bbbk$-algèbre de Lie. L'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$ sera notée $\mathsf{U}\mathfrak{g}$.*

Comme nous sommes en caractéristique 0, le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt montre que l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathsf{U}\mathfrak{g}$ est injective. On peut donc considérer $\mathfrak{g}$ comme incluse dans $\mathsf{U}\mathfrak{g}$.

Notation 5.3. — *L'algèbre de Lie libre sur l'alphabet Z, à coefficients dans $\Bbbk$, sera désignée par $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$.*

Pour la définition par propriété universelle et une construction, *cf.* [**46**], chap. 0.

Notation 5.4. — *Soit a un élément de $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$. Le symbole* $\mathrm{ad}\,(a)$ *désigne la dérivation de $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$ définie par :*

$$\forall x \in \mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z),\ \mathrm{ad}\,(a)(x) = [a, x]$$

L'énoncé et la preuve de la propriété suivante font l'objet du paragraphe 0.3 de [**46**].

[4] On trouve également couramment le terme de « composition ».

***Proposition 5.5* (Élimination de Lazard).** — *Soit $c \in Z$. En tant que $\Bbbk$-module $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$ est la somme directe de $\Bbbk c$ et d'une sous-algèbre de Lie qui est isomorphe à une algèbre de Lie libre et est librement engendrée par les éléments $(-\mathrm{ad}\,(c))^n(b)$, avec $n \in \mathbb{N},\ b \in Z$ et $b \neq c$.*

5.3. Deux bigèbres de Hopf en dualité. — L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$ s'identifie naturellement à l'algèbre associative libre sur Z à coefficients dans $\Bbbk$, i.e. $\Bbbk\langle Z\rangle$. On peut donc considérer $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$ comme incluse dans $\Bbbk\langle Z\rangle$. L'algèbre de Lie libre se réalise alors comme ensemble des polynômes de Lie, c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie de $\Bbbk\langle Z\rangle$ engendrée par Z.

Le fait de considérer $\Bbbk\langle Z\rangle$ comme une algèbre enveloppante universelle permet d'en faire une $\Bbbk$-bigèbre de Hopf cocommutative.

***Définition 5.6*.** — *La structure de $\Bbbk$-bigèbre de Hopf de $\Bbbk\langle Z\rangle$ provenant de l'identification de $\Bbbk\langle Z\rangle$ avec $\mathsf{U}\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$ sera appelée la bigèbre de concaténation et sera notée $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z)$. Son coproduit sera noté Δ et son antipode S_Z.*

Le coproduit Δ est caractérisé par la condition :

$$\forall z \in Z,\ \Delta(z) = 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} z + z \underset{\Bbbk}{\otimes} 1$$

La coünité de $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z)$ est l'application qui à tout polynôme non commutatif associe son terme constant. On notera 1 le mot vide de Z^*, car c'est l'unité de $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z)$. On voit alors que la coünité est également l'élément $\widetilde{1}$ de la base duale $\widetilde{Z^*}$.

Il est immédiat que la structure de bigèbre de $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z)$ s'obtient à partir de $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(Z)$ par extension de scalaires.

En général, nous aurons tendance à utiliser la notation $\Bbbk\langle Z\rangle$ pour faire référence à la structure linéaire et $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z)$ pour préciser la structure de bigèbre (ou simplement d'algèbre ou de cogèbre).

***Proposition 5.7*.** — *Pour qu'un élément x de la bigèbre $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z)$ appartienne à $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$, il faut et il suffit qu'il soit primitif,* i.e.

$$\Delta x = x \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 + 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} x$$

***Définition 5.8*.** — *Pour tout alphabet Z, soit ret_Z l'anti-automorphisme de l'algèbre $\Bbbk\langle Z\rangle$ caractérisé par $\mathrm{ret}_Z(z) = z$ pour tout élément z de Z.*

On a donc, pour tous éléments $z_1, \ldots, z_r$ de Z :

$$\mathrm{ret}_Z(z_1 \cdots z_r) = z_r \cdots z_1$$

Proposition 5.9. — *Pour tout élément x de $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$, on a $S_Z(x) = -x$. Pour tout élément x homogène de longueur n de $\Bbbk\langle Z\rangle$, on a*

$$S_Z(x) = (-1)^n \mathrm{ret}_Z(x)$$

Définition 5.10. — *La bigèbre duale de $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z)$ sera appelée la bigèbre de mélange de l'alphabet Z (à coefficients dans $\Bbbk$) et sera notée $\mathsf{Mél}_{\Bbbk}(Z)$. Nous noterons son produit $\sqcup\!\sqcup$ et éventuellement $\sqcup\!\sqcup_Z$ s'il y a possibilité d'ambiguïté.*

Le produit $\sqcup\!\sqcup_Z$ est commutatif et homogène, d'unité $\widetilde{1}$, ce qui fait de $\mathsf{Mél}_{\Bbbk}(Z)$ une algèbre commutative graduée. Il est souvent qualifié de produit de mélange (ou de battage) en raison de son expression sur la base duale $\widetilde{Z^*}$:

Définition 5.11. — *Nous noterons $\mathfrak{S}_{p,q}$ le sous-ensemble du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{p+q}$ formé des permutations de $\{1, \ldots, p+q\}$ dont les restrictions aux ensembles $\{1, \ldots, p\}$ et $\{p+1, \ldots, p+q\}$ sont croissantes.*

On dit souvent qu'une telle permutation est un battage, par analogie avec l'opération que l'on fait subir à deux paquets de cartes que l'on bat.

Proposition 5.12. — *Soient $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_p)$ et $\underline{s'} = (s_{p+1}, \ldots, s_{p+q})$ deux séquences de $(I_Z)^*$. On a :*

$$\widetilde{z}_{\underline{s}} \sqcup\!\sqcup \widetilde{z}_{\underline{s'}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}} \widetilde{z}_{s_{\sigma^{-1}(1)}, s_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(p+q)}}$$

Comme nous l'avons déjà souligné, la base duale $\widetilde{Z^*}$ de Z^* peut également s'indicer par les éléments de $(I_Z)^*$. Par transport de structure, on récupère donc un nouveau produit associatif sur $\widetilde{Z^*}$:

Définition 5.13. — *Le symbole $\diamond$ désignera le produit de $\widetilde{Z^*}$ donné par :*

$$\forall \underline{s}, \underline{t} \in (I_Z)^*, \ \ \widetilde{z}_{\underline{s}} \diamond \widetilde{z}_{\underline{t}} := \widetilde{z}_{\underline{st}}$$

et également le produit que cela définit sur $\widetilde{\Bbbk\langle Z\rangle}$ grâce à sa base $\widetilde{Z^*}$.

Ainsi $(\widetilde{\Bbbk\langle Z\rangle}, \diamond)$ est une algèbre associative, isomorphe à la $\Bbbk$-algèbre associative libre formée sur les symboles $(\widetilde{z}_i)_{i \in I_Z}$. Elle s'obtient par extension de scalaires à partir de $(\widetilde{\mathbb{Q}\langle Z\rangle}, \diamond)$.

On peut donner une description itérative du produit $\sqcup\!\sqcup$:

Proposition 5.14. — *Pour tous éléments u et v de $\mathbb{Q}\langle Z\rangle$ et tous éléments a et b de $\widetilde{Z}$, on a*

$$(a \diamond u) \sqcup\!\sqcup (b \diamond v) = a \diamond (u \sqcup\!\sqcup (b \diamond v)) + b \diamond ((a \diamond u) \sqcup\!\sqcup v)$$

Toutes les constructions que nous avons présentées ici étant des extensions à $\Bbbk$ de structures sur $\mathbb{Q}$, nous ne traiterons dans la suite de cette section que le cas $\Bbbk = \mathbb{Q}$ et nous omettrons dans les notations qui le permettent les références explicites à l'anneau de base $\mathbb{Q}$.

5.4. Séries et exponentielles de Lie. — Le coproduit Δ étant homogène, il est continu. On peut donc le prolonger aux complétés et on notera encore Δ le coproduit ainsi obtenu. La bigèbre topologique $(\mathbb{Q}\langle\langle Z\rangle\rangle, \bullet, \Delta)$ sera notée $\widehat{\mathsf{Conc}}(Z)$.

Définition 5.15. — *On notera $\widehat{\mathfrak{Lie}}(Z)$ la fermeture de $\mathfrak{Lie}(Z)$ dans $\widehat{\mathsf{Conc}}(Z)$. Les éléments de $\widehat{\mathfrak{Lie}}(Z)$ sont appelés des séries de Lie.*

Un élément ψ de $\mathbb{Q}\langle\langle Z\rangle\rangle$ est donc une série de Lie si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme

$$\psi = \sum_{n\geqslant 0} \psi_n,$$

où ψ_n est un polynôme de Lie homogène de degré n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le terme constant ψ_0 est nécessairement nul. Cela permet de former l'exponentielle de ψ par la formule habituelle. Si G est une série de terme constant égal à 1, on peut de même former son logarithme.

Proposition 5.16. — *Un élément ψ de $\widehat{\mathsf{Conc}}(Z)$ est une série de Lie si et seulement s'il est primitif.*

L'application exponentielle est une bijection de l'ensemble des séries de Lie sur l'ensemble des éléments diagonaux de $\widehat{\mathsf{Conc}}(Z)$.

C'est pourquoi les éléments diagonaux de $\widehat{\mathsf{Conc}}(Z)$ sont souvent appelés des exponentielles de Lie.

En particulier, si Z est formé de deux lettres A et B, les séries $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont diagonales, ainsi donc que leur produit. Il existe donc une série de Lie H, appelée *formule de Campbell-Hausdorff*, telle que $\exp H = \exp(A)\exp(B)$. Sa composante homogène de longueur 1 est $A + B$.

5.5. Bases de Lyndon et bases associées. — Dans ce paragraphe, on suppose l'alphabet Z muni d'un ordre total $\leqslant$. Cela permet de munir Z^* de l'ordre lexicographique associé. Dans la plupart des exemples que nous traiterons, Z sera indexé par les entiers strictement positifs et donc héritera naturellement de l'ordre des entiers. Il y aura une exception, au paragraphe III.3.3 où l'on considèrera l'ordre inverse.

Définition 5.17. — *Un mot $v \in Z^*$ est dit facteur droit d'un mot $w \in Z^*$ si et seulement s'il existe $u \in Z^*$ tel que $uv = w$. On dit que v est facteur droit propre non trivial de w si de plus v est différent de w et du mot vide.*

Un mot de Z^* est dit de Lyndon si et seulement s'il est plus petit que tous ses facteurs droits propres non triviaux. L'ensemble des mots de Lyndon sera noté $L(Z)$.

L'ensemble des mots de Lyndon, muni de l'ordre lexicographique, est un cas particulier d'ensemble de Hall. On peut donc construire une base de l'algèbre de Lie libre indexée par $L(Z)$. On se contentera ici de la décrire rapidement (les ensembles de Hall sont traités au chapitre 4 de [**46**] et la base de Lyndon à la section 5.1).

Proposition 5.18. — *Soit $l \in L(Z)$. Soit v le plus grand facteur droit propre non trivial de l. Soit u tel que $uv = l$. Les mots u et v sont tous deux de Lyndon.*

On appellera factorisation standard de l le couple (u, v).

Définition 5.19. — *Le polynôme de Lie $P_Z(l)$ associé à un mot de Lyndon l de $L(Z)$ est défini de la manière récursive suivante :*
- *Si l est une lettre, $P_Z(l) := l$.*
- *Sinon, soit (u, v) la factorisation standard de l. On a alors*

$$P_Z(l) := [P(u), P(v)]$$

Proposition 5.20. — *La famille $(P_Z(l))_{l\in L(Z)}$ est une base de l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{Lie}(Z)$.*

Proposition 5.21. — *Tout mot w de Z^* s'écrit de manière unique comme produit décroissant de mots de Lyndon :*

$$w = l_1 l_2 \cdots l_r, \quad \textit{avec} \quad r \in \mathbb{N} \quad \textit{et} \quad l_1 \geqslant \cdots \geqslant l_r$$

Proposition 5.22. — *Soient $w \in Z^*$ et $w = l_1 l_2 \cdots l_r$ son unique factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon. Si l'on pose*

$$P_Z(w) := P_Z(l_1)P_Z(l_2)\cdots P_Z(l_r),$$

la famille des $(P_Z(w))_{w\in Z^*}$ est la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée à la base de Lyndon $L(Z)$.

Cela définit donc la base de Poincaré-Birkhoff-Witt duale $(\widetilde{P}(w))_{w\in Z^*}$. Guy Mélançon et Christophe Reutenauer en ont calculé les éléments de manière itérative à l'aide des produits $\sqcup\!\sqcup$ et $\diamond$ (*cf.* [**46**], sec. 5.2) :

Proposition 5.23. —
- *On a $\widetilde{P}_Z(1) = \widetilde{1}$.*
- *Pour tout mot de Lyndon $l = au$, où a est une lettre de l, on a $\widetilde{P}_Z(l) = \widetilde{a} \diamond \widetilde{P}_Z(u)$.*

– *Pour tout mot w, soit l'unique écriture du type $w = l_1^{i_1} l_2^{i_2} \cdots l_r^{i_r}$ où $r \in \mathbb{N}$,les entiers $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sont strictement positifs et $l_1, l_2, \ldots l_r$ est une suite strictement décroissante de mots de Lyndon. On a alors*

$$\widetilde{P}(w) = \frac{1}{i_1! i_2! \cdots i_r!} \widetilde{P}(l_1)^{\sqcup\!\sqcup i_1} \sqcup\!\sqcup \widetilde{P}(l_2)^{\sqcup\!\sqcup i_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \widetilde{P}(l_r)^{\sqcup\!\sqcup i_r}$$

***Notation 5.24* (produit décroissant).** — *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'une algèbre topologique A, indexée par un ensemble totalement ordonné I. Le symbole*

$$\prod_{i \in I}^{\searrow} x_i$$

désigne, si I est fini, de la forme $i_1 < \cdots < i_n$, le produit $x_{i_n} x_{i_{n-1}} \cdots x_{i_1}$. Si I est infini, il s'agit de la limite, si elle existe, des $\prod_{j \in J}^{\searrow} x_j$, où J est une partie finie de I, suivant l'ordonné filtrant des parties finies de I.

La proposition suivante jouera un rôle important au chapitre III.

***Proposition 5.25* (Factorisation de la série double)**
L'identité suivante a lieu dans l'algèbre $\mathsf{Mél}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathsf{Conc}(Z)$:

$$\sum_{w \in Z^*} \widetilde{w} \otimes w = \prod_{l \in L(Z)}^{\searrow} \exp\left(\widetilde{P}_Z(l) \otimes P_Z(l)\right)$$

Dans la formule de la proposition ci-dessus, il est clair que le coefficient de chaque mot w est une somme finie d'éléments de $\mathsf{Mél}(Z)$, aussi bien dans le terme de droite que dans celui de gauche. La démonstration est donnée également à la section 5.2 de [**46**].

Donc la formule a un sens dans l'algèbre plus petite obtenue en complétant $\mathsf{Mél}(Z) \otimes \mathsf{Conc}(Z)$ relativement à la graduation du seul membre de droite, c'est-à-dire l'algèbre $\mathsf{Mél}(Z)\langle\langle Z\rangle\rangle$ des séries formelles en l'alphabet Z, à coefficients dans $\mathsf{Mél}(Z)$. Cela conduit donc à la formulation équivalente[5].

***Proposition 5.26*.** — *L'identité suivante a lieu dans l'algèbre* $\mathsf{Mél}(Z)\langle\langle Z\rangle\rangle$

$$\left(\mathrm{Id}_{\mathsf{Mél}(Z)}\right)_{\text{gén}} = \sum_{w \in Z^*} \widetilde{w} w = \prod_{l \in L(Z)}^{\searrow} \exp\left(\widetilde{P}_Z(l) P_Z(l)\right)$$

---

[5] qui était celle de Ree en 1958

Notations de substitution. — Il sera assez souvent pratique d'employer l'abus de notation suivant.

Soit $\{A, B\}$ un alphabet. Si P, P_1 et P_2 sont des éléments de $\Bbbk\langle A, B\rangle$, il existe un unique endomorphisme d'algèbres φ de $\Bbbk\langle A, B\rangle$ tel que $\varphi(A) = P_1$ et $\varphi(B) = P_2$. Par analogie avec le cas des polynômes commutatifs, on peut abréger $\varphi(P)$ en $P(P_1, P_2)$, ce qui évite d'avoir à définir φ. Suivant le contexte, on peut appliquer cela à des séries (on prend l'unique morphisme continu d'algèbres), des éléments d'un groupe libre, etc.

CHAPITRE II

ASSOCIATEURS DE DRINFEL'D, GROUPE DE GROTHENDIECK-TEICHMÜLLER ET ACTION DE GALOIS

Dans cette partie, on donne des éléments du contexte général dans lequel s'inscrit ce travail.

Dans la première section, on introduit l'algèbre de Lie du groupe des tresses pures, puis les associateurs. On ne fera que quelques allusions aux quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires et aux problèmes de quantification qui y sont liés. On aboutit à une première présentation du torseur de Drinfel'd.

Dans la deuxième section, on en étudie la formule d'action en lui donnant son champ d'application le plus grand possible. Cela nous mène au groupe de Magnus tordu, à son algèbre de Lie et aux opérateurs différentiels associés. On donne alors la formulation du théorème d'action de Drinfel'd que l'on adaptera au chapitre IV à des objets provenant des équations liant les polyzêtas.

La troisième section donne quelques compléments sur la description des groupes de Grothendieck-Teichmüller pro-unipotents comme groupes d'automorphismes des tours de tresses et de tresses infinitésimales.

La quatrième section comporte quelques indications à propos des actions de Galois sur les complétés de groupes fondamentaux, de façon à formuler la conjecture de Deligne et son versant transcendant qu'on appellera Deligne-Drinfel'd.

1. Associateurs

1.1. L'algèbre de Lie du groupe des tresses pures

Définition 1.1. — *Soit G un groupe. Une filtration centrale sur G est une suite $(G_{\geqslant n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sous-groupes telle que :*

i) $G_{\geqslant 1} = G$.

ii) $G_{\geqslant n+1} \subset G_{\geqslant n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) *Pour tous* $m, n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$(G_{\geqslant m}, G_{\geqslant n}) \subset G_{\geqslant m+n},$$

où pour tous les éléments x *et* y *de* G, (x, y) *désigne le commutateur* $xyx^{-1}y^{-1}$.

On dira que la filtration est séparante si et seulement si

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} G_{\geqslant n} = \{1\}$$

La série centrale descendante de G est toujours une filtration centrale, et si l'on ne donne pas plus de précisions, il sera implicite que l'on utilise celle-là, qui est par ailleurs la plus rapidement décroissante.

Définition 1.2. — *L'algèbre de Lie du groupe* G *relativement à une filtration centrale* $(G_{\geqslant n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est le groupe abélien*

$$\mathfrak{gr} G := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} G_{\geqslant n} / G_{\geqslant n+1},$$

noté additivement, et muni du crochet induit par le commutateur $(\bullet, \bullet)$.

Les propriétés de cette correspondance ont été notamment étudiées par Michel Lazard (*cf.* [**36**]).

Le crochet de $\mathfrak{gr} G$ est homogène vis-à-vis de la graduation naturelle. Il fait donc de $\mathfrak{gr} G$ une $\mathbb{Z}$-algèbre de Lie graduée.

L'algèbre de Lie associée de cette manière à un groupe filtré jouit de propriétés fonctorielles évidentes, en supposant que les morphismes de groupes filtrés préservent les filtrations, ce qui est automatique si les groupes sont filtrés par leurs séries centrales descendantes.

Lorsque la filtration est séparante, certains résultats sur l'algèbre de Lie peuvent avoir des répercussions sur le groupe, comme c'est le cas par exemple dans l'article [**28**] d'Ihara.

On peut notamment appliquer cette construction au groupe des tresses pures d'Artin P_n, dont la série centrale est séparante. En utilisant la présentation classique de P_n par les éléments τ_{ij}, avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on obtient la présentation suivante de son algèbre de Lie.

Définition 1.3. — *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On note* T_n *la* $\mathbb{Z}$*-algèbre de Lie du groupe des tresses pures. Elle est engendrée par les symboles* t_{ij}, *les entiers* i *et* j *étant compris entre* 1 *et* n *et les relations :*

$$t_{ii} = 0, \qquad t_{ij} = t_{ji} \tag{2.1}$$

$$[t_{ij}, t_{kl}] = 0 \text{ si } \#\{i, j, k, l\} = 4 \tag{2.2}$$

$$[t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0 \text{ si } \#\{i, j, k\} = 3 \tag{2.3}$$

Les t_{ij} sont les projections des τ_{ij} dans T_n et sont donc de degré 1. L'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur P_n donne lieu à une action sur T_n, qui est donnée par $\sigma(t_{ij}) = t_{\sigma(i),\sigma(j)}$ pour tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$, les entiers i et j étant compris entre 1 et n. Cette action se prolonge à $\mathsf{U}T_n$ et $\widehat{\mathsf{U}T_n}$, puisqu'elle est homogène (de degré 0). On utilisera pour cela une notation spéciale : on représentera une permutation σ par la liste des $\sigma(i)$, i variant entre 1 et n et on désignera l'action de σ sur un élément x en mettant σ en exposant à droite de x. Ainsi x^{231} est l'image de x par la permutation σ telle que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$.

Le produit semi-direct $\mathfrak{S}_n \ltimes \mathsf{U}T_n$ est souvent noté A_n et on considère que c'est l'algèbre jouant le rôle d'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie du groupe de tresses B_n. Ce n'est pas $\mathsf{U}\mathfrak{gr}B_n$ (*cf.* remarque à la fin de la section 3).

Enfin, on a des opérations simpliciales naturelles $\partial_i : B_n \to B_{n+1}$, où i varie entre 0 et $n+1$ et $s_i : B_{n+1} \to B_n$, où i varie entre 1 et $n+1$. On peut rapidement les décrire en disant que ∂_0 est l'ajout d'un brin à gauche, ∂_{n+1} l'ajout d'un brin à droite et ∂_i le dédoublement du $i^{\text{ème}}$ brin (pour i compris entre 1 et n). Quant à s_i, c'est l'opération consistant à enlever le $i^{\text{ème}}$ brin. Elles ont leurs contreparties au niveau de T_n :

Définition 1.4. — *Pour les entiers i compris entre* 0 *et* $n+1$*, les morphismes d'algèbres de Lie d_i de T_n dans T_{n+1} sont définis par :*

$$d_0(t_{jk}) = t_{j+1,k+1} \quad \text{et} \quad d_{n+1}(t_{jk}) = t_{jk},$$

pour tous j et k compris entre 1 et n. Si i est compris entre 1 et n, d_i est donné par :

$$d_i(t_{jk}) = \begin{cases} t_{j+1,k+1} & si\ i < j < k \\ t_{j,k+1} + t_{j+1,k+1} & si\ i = j < k \\ t_{j,k+1} & si\ j < i < k \\ t_{j,k} + t_{j,k+1} & si\ j < k = i \\ t_{j,k} & si\ j < k < i \end{cases}$$

Pour tout entier i compris entre 1 *et* $n+1$*, le morphisme d'algèbres de Lie $s_i : T_{n+1} \to T_n$ est donné par*

$$s_i(t_{jk}) = \begin{cases} t_{j-1,k-1} & si \quad i < j < k \\ t_{j,k-1} & si \quad j < i < k \\ t_{jk} & si \quad j < k < i \\ 0 & si \quad i = j \quad ou \quad i = k \end{cases}$$

1.2. Associateurs et catégories monoïdales. — Une fois toute cette structure définie, on peut introduire les associateurs. Dans ce qui suit, on abrègera $\Bbbk \otimes T_n$ en $\Bbbk T_n$ (le produit tensoriel est ici pris au-dessus de $\mathbb{Z}$) et $\mathsf{U}_{\Bbbk} T_n$ désignera l'algèbre enveloppante universelle de la $\Bbbk$-algèbre de Lie $\Bbbk T_n$. La graduation naturelle de T_n induit une graduation sur $\mathsf{U}_{\Bbbk} T_n$, ce qui permet de considérer le complété $\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_n}$, auquel on prolonge la structure de $\Bbbk$-bigèbre de $\mathsf{U}_{\Bbbk}T_n$. Le coproduit (noté Δ) est à valeurs dans $\mathsf{U}_{\Bbbk}T_n \mathbin{\widehat{\otimes}_{\Bbbk}} \mathsf{U}_{\Bbbk}T_n$.

Il est à noter que Drinfel'd ne fait pas de $\Bbbk$ un anneau quelconque, mais un corps de caractéristique 0. La généralisation est toutefois la plupart du temps directe.

Définition 1.5. — *Soient $\Bbbk$ un anneau et $\lambda \in \Bbbk$. Un associateur à coefficients dans $\Bbbk$ est un élément inversible Φ de $\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_3}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$\Delta\Phi = \Phi \mathbin{\widehat{\underset{\Bbbk}{\otimes}}} \Phi \tag{2.4}$$

$$\Phi^{-1} = \Phi^{321} \tag{2.5}$$

$$d_1(\exp(\lambda t_{12})) = \Phi^{312} \exp(\lambda t_{13})(\Phi^{132})^{-1} \exp(\lambda t_{23})\Phi \tag{2.6}$$

$$(d_3\Phi)(d_1\Phi) = (d_0\Phi)(d_2\Phi)(d_4\Phi) \tag{2.7}$$

L'équation (2.6) est appelée l'équation hexagonale et (2.7) (à valeurs dans $\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_4}$) est appelée l'équation pentagonale. Cette terminologie provient des constructions suivantes :

Les associateurs permettent de définir de manière « universelle » des structures de catégories quasi-tensorielles (*cf.* [**38**]). Soient $\mathfrak{g}$ une $\Bbbk$-algèbre de Lie et t un élément de $\mathfrak{g} \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{g}$ invariant par l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ et symétrique. Il est équivalent de parler de représentations de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathsf{U}\mathfrak{g}$-modules à gauche. Le produit tensoriel de deux représentations V_1 et V_2 est donné par le coproduit Δ de $\mathsf{U}\mathfrak{g}$ et la structure naturelle de $(\mathsf{U}\mathfrak{g} \otimes_{\Bbbk} \mathsf{U}\mathfrak{g})$-module à gauche de $V_1 \otimes_{\Bbbk} V_2$.

Soit h un paramètre formel. Dans ce qui suit, on travaille dans la catégorie des $\Bbbk[[h]]$-modules du type $V[[h]]$. Rappelons (*cf.* § I.3.2) que l'on a $V_1[[h]] \mathbin{\widehat{\otimes}_{\Bbbk[[h]]}} V_2[[h]] = (V_1 \otimes V_2)[[h]]$ pour tous $\Bbbk$-modules V_1 et V_2. Dans ce qui suit, on abrègera $\otimes_{\Bbbk}$ en $\otimes$ et $\widehat{\otimes}_{\Bbbk[[h]]}$ en $\widehat{\otimes}$. On prolonge le coproduit Δ de $\mathsf{U}\mathfrak{g}$ à $\mathsf{U}\mathfrak{g}[[h]]$.

Écrivons $t = \sum_k t'_k \otimes t''_k$. On peut définir un morphisme d'algèbres topologiques $\alpha_{t,n}$ de $\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_n}$ dans $(\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes n}[[h]]$ par la condition

$$\alpha_{t,n}(t_{i,j}) = h \sum_k 1^{\otimes(i-1)} \otimes t'_k \otimes 1^{\otimes(j-i-1)} \otimes t''_k \otimes 1^{\otimes(n-j)} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

On place donc la première « patte » de t en $i^{\text{ème}}$ position et la deuxième en $j^{\text{ème}}$. Ce morphisme d'algèbres est bien défini : l'équation (2.2) est évidente et l'équation (2.3) se ramène à la $\mathfrak{g}$-invariance de t.

On voit alors que les applications $\alpha_{t,n}$ préservent l'action de $\mathfrak{S}_n$ et qu'on a les diagrammes commutatifs (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_n} \arrow[r, "\alpha_{t,n}"] \arrow[d, "d_i"] & (\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes n}[[h]] \arrow[d, "\mathrm{Id}^{\widehat{\otimes}(i-1)}\,\widehat{\otimes}\,\Delta\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{Id}^{\widehat{\otimes}(n-i)}"] \\
\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_{n+1}} \arrow[r, "\alpha_{t,n+1}"] & (\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes(n+1)}[[h]]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_n} \arrow[r, "\alpha_{t,n}"] \arrow[d, "d_0"] & (\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes n}[[h]] \arrow[d, "1\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{Id}^{\widehat{\otimes}\,n}"] \\
\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_{n+1}} \arrow[r, "\alpha_{t,n+1}"] & (\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes(n+1)}[[h]]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_n} \arrow[r, "\alpha_{t,n}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & (U\mathfrak{g})^{\otimes n}[[h]] \arrow[d, "\mathrm{Id}^{\widehat{\otimes}\,n}\,\widehat{\otimes}\,1"] \\
\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_{n+1}} \arrow[r, "\alpha_{t,n+1}"] & (\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes(n+1)}[[h]]
\end{tikzcd}$$

Si Φ est un élément de $\mathsf{Ass}_{\lambda}(\Bbbk)$, si l'on pose $\Phi_t = \alpha_{t,3}(\Phi)$ et $R_t = \exp(h\lambda t)$ (qui est égal à $\alpha_{t,2}(\exp(\lambda t_{12}))$), ces éléments de $(\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes 3}[[h]]$ et de $(\mathsf{U}\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[h]]$ sont $\mathfrak{g}$-invariants, ce qui implique, pour tout élément a de $\mathsf{U}\mathfrak{g}[[h]]$

$$\begin{aligned}
\Phi_t\Big((\mathrm{Id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta)\Delta(a)\Big) &= \Big((\Delta\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{Id})\Delta(a)\Big)\Phi_t \quad \text{et}\\
R_t\Delta(a) &= (12)\Delta(a)R_t,
\end{aligned}$$

où le symbole (12) désigne l'automorphisme de la $\Bbbk[[h]]$-algèbre $(\mathsf{U}\mathfrak{g}\otimes\mathsf{U}\mathfrak{g})[[h]]$ qui échange les deux facteurs du produit tensoriel.

Si l'on donne alors trois $\mathsf{U}\mathfrak{g}[[h]]$-modules V_1, V_2 et V_3, en composant les morphismes naturels d'associativité et de commutativité des $\Bbbk[[h]]$-modules,

$$(V_1\,\widehat{\otimes}\,V_2)\,\widehat{\otimes}\,V_3 \to V_1\,\widehat{\otimes}(V_2\,\widehat{\otimes}\,V_3) \quad \text{et} \quad V_1\,\widehat{\otimes}\,V_2 \to V_2\,\widehat{\otimes}\,V_1,$$

avec les actions de Φ_t et R_t, on obtient donc des morphismes de $\mathsf{U}\mathfrak{g}[[h]]$-modules, fonctoriels par rapport à V_1, V_2 et V_3, qui satisfont grâce aux équations définissant Φ aux conditions de cohérence de Mac-Lane. On a ainsi muni la catégorie des $\mathsf{U}\mathfrak{g}[[h]]$-modules d'une structure de catégorie monoïdale tressée (ce dernier adjectif exprime que la composée $V_1\,\widehat{\otimes}\,V_2 \longrightarrow V_2\,\widehat{\otimes}\,V_1 \longrightarrow V_1\,\widehat{\otimes}\,V_2$ n'est pas nécessairement l'identité).

De manière équivalente, ceci revient à dire que $(\mathsf{U}\mathfrak{g}[[h]], \Delta, \Phi_t, R_t)$ est ce que Drinfel'd appelle une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire. On peut alors associer à la catégorie monoïdale tressée une nouvelle algèbre de Hopf $(\mathsf{U}\mathfrak{g}[[h]], \Delta')$ et un élément R' de $\mathsf{U}\mathfrak{g}^{\otimes 2}[[h]]$ qui sont solution d'un problème de quantification (c'est une algèbre universelle enveloppante quantifiée).

1.3. Associateurs dans $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$. — On peut reformuler les équations des associateurs grâce à la propriété suivante de l'algèbre de Lie T_3, qui est un cas particulier d'une propriété de « dévissage » plus générale[1].

[1] Bien connue également pour les groupes de tresses pures.

Proposition 1.6. — *L'algèbre de Lie T_3 est somme directe de son centre, engendré par $t_{12}+t_{13}+t_{23}$ et de l'idéal I_3 engendré par t_{12} et t_{23}, lequel est une algèbre de Lie libre.*

Il s'ensuit immédiatement que tout élément diagonal de $\widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_3}$ est de la forme suivante
$$\exp(\mu(t_{12}+t_{13}+t_{23}))\Phi(t_{12},t_{23}),$$
où $\mu\in\Bbbk$ et Φ désigne un élément diagonal de $\widehat{\mathsf{Conc}}_{\Bbbk}(A,B)$, la bigèbre enveloppante complétée de l'algèbre de Lie libre à deux générateurs A et B. Si un tel couple (μ,Φ) correspond à un associateur, l'équation (2.5) entraîne immédiatement $\mu=0$, car $t_{12}+t_{13}+t_{23}$ est stable par l'action de $\mathfrak{S}_3$.

Cela amène donc à la définition suivante, où pour i compris entre 0 et 4, d_i désigne par abus l'application composée
$$\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle \xrightarrow{A\mapsto t_{12},\ B\mapsto t_{23}} \widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_3} \xrightarrow{d_i} \widehat{\mathsf{U}_{\Bbbk}T_4}$$

Définition 1.7. — *Soit $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$ l'ensemble des éléments Φ de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ vérifiant :*

$$\Delta\Phi = \Phi\mathbin{\widehat{\otimes}_{\Bbbk}}\Phi \tag{2.8}$$
$$\Phi(B,A) = \Phi(A,B)^{-1} \tag{2.9}$$
$$e^{\lambda A}\Phi(C,A)e^{\lambda C}\Phi(B,C)e^{\lambda B}\Phi(A,B) = 1 \quad \text{avec } C := -A-B \tag{2.10}$$
$$(d_3\Phi)(d_1\Phi) = (d_0\Phi)(d_2\Phi)(d_4\Phi) \tag{2.11}$$

On note $\mathsf{Ass}(\Bbbk)$ l'union des $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$, pour $\lambda\in\Bbbk$, et $\mathsf{Ass}^*(\Bbbk)$ l'union des $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$ pour $\lambda\in\Bbbk$ inversible.

Pour tout anneau $\Bbbk$, l'ensemble $\mathsf{Ass}(\Bbbk)$ est donc formé des couples (λ,Φ) de $\mathbb{A}^1(\Bbbk)\times\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ satisfaisant(2) aux équations ci-dessus. On voit facilement que Ass est un schéma pro-algébrique affine(3). L'application $(\lambda,\Phi)\mapsto\lambda$ donne lieu à un morphisme de schémas : $\mathsf{Ass}\to\mathbb{A}^1$ qui se restreint à $\mathsf{Ass}^*\to\mathbb{G}_m$ ($\mathbb{G}_m(\Bbbk)$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\Bbbk$, pour tout anneau $\Bbbk$).

Drinfel'd introduit ensuite deux schémas en groupes pro-algébriques GT et GRT qu'il déduit de la correspondance entre associateurs et catégories monoïdales. Ils agissent librement et transitivement sur Ass^*. Pour tout anneau $\Bbbk$, le monoïde multiplicatif $\Bbbk$ agit sur $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ par $A\mapsto\mu A, B\mapsto\mu B$ pour $\mu\in\Bbbk$. Cette action envoie $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$ dans $\mathsf{Ass}_{\lambda\mu}(\Bbbk)$, comme on le voit immédiatement par homogénéité. Il s'ensuit que le groupe algébrique $\mathbb{G}_m$ agit sur Ass^*.

(2) $\mathbb{A}^1$ est la droite affine, définie par $\mathbb{A}^1(\Bbbk)=\Bbbk$ pour tout anneau $\Bbbk$.

(3) Il suffit de considérer les mêmes équations dans $\Bbbk\langle A,B\rangle^{(n)}$ et de voir qu'elles sont $\mathbb{Q}$-algébriques.

Les schémas en groupes GT et GRT sont tous deux produits semi-directs de $\mathbb{G}_m$ et de deux schémas en groupes pro-unipotents GT_1 et GRT_1. Les éléments de $\mathsf{GT}_1(\Bbbk)$ et $\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$ sont décrits par des équations explicites dans $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ et il s'avère finalement ([**11**], prop. 5.9) que $\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$ est égal à $\mathsf{Ass}_0(\Bbbk)$. La formule d'action de $\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$ sur $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$ est donnée à la section 2, ainsi qu'un énoncé condensé de ces résultats. L'algèbre de Lie $\mathfrak{grt}_1$ de GRT_1 fait l'objet de conjectures en raison du rapport entre le groupe GT et le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ (voir plus loin).

L'action transitive des groupes GT et GRT permet à Drinfel'd de prouver que $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$ est non-vide, pour tout anneau[(4)] $\Bbbk$ et tout $\lambda \in \Bbbk$, à partir de la connaissance d'un élément Φ_{KZ} de $\mathsf{Ass}_{i\pi}(\mathbb{C})$, qui est construit dans le même article grâce à l'étude du système différentiel de Knizhnik-Zamolodchikov. On verra au chapitre suivant que Φ_{KZ} est la série génératrice des polyzêtas, ce qui est le point de départ de ce travail. Les arguments déployés par Drinfel'd concernant Φ_{KZ} ont été soigneusement détaillés dans la thèse de J. González-Lorca ([**19**]).

2. Le groupe de Magnus tordu

2.1. Définitions et premières propriétés

Définition 2.1. — *Pour tout élément G de $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ et pour tout élément inversible de H de $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$, le symbole $G \circledast H$ désigne l'élément suivant de $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$*

$$G \circledast H = G(HAH^{-1}, B)H \tag{2.12}$$

(les parenthèses indiquent une substitution, comme en I.5.5)

Nous noterons également $\tau(H)$ l'application (translation à droite par H) qui à G associe $G \circledast H$ et κ_H l'endomorphisme continu de l'algèbre $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ qui envoie A sur HAH^{-1} et qui fixe B.

On appellera groupe de Magnus tordu l'ensemble $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ formé des séries de $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ dont le terme constant vaut 1, muni de l'opération $\circledast$ ci-dessus.

On a donc, pour tout élément G de $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$

$$G \circledast H = \kappa_H(G)H$$

Nous allons commencer par montrer que $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ est bien un groupe. La proposition suivante rassemble quelques propriétés du produit $\circledast$ qui se vérifient directement.

---

(4) Ceci est le seul point un peu délicat à généraliser à tous les anneaux. Il faut d'abord passer par l'existence d'un élément de $\mathsf{Ass}_1(\mathbb{Q})$, puis utiliser la substitution $A \mapsto \lambda A, B \mapsto \lambda B$.

Proposition 2.2. — i) *Pour tout H inversible de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$, l'application $\tau(H)$ est $\Bbbk$-linéaire.*

ii) *Pour tout G de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ et tous H_1 et H_2 inversibles de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$, on a l'associativité :*

$$(G \circledast H_1) \circledast H_2 = G \circledast (H_1 \circledast H_2)$$

iii) *Pour tout élément inversible H de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$, on a $1 \circledast H = H \circledast 1 = H$.*

iv) *Si H est de terme constant 1, les termes de degré minimal de $G \circledast H$ et de G sont égaux pour tout élément G de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$. En particulier $\tau(H)$ préserve la filtration de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$.*

Démonstration. — i) L'application $\tau(H)$ est en effet la composée de κ_H et de la multiplication à droite par H.

ii) On a successivement

$$\begin{aligned}
(\kappa_{H_2}\circ\kappa_{H_1})(A) &= \kappa_{H_2}(H_1 A H_1^{-1})\\
&= \kappa_{H_2}(H_1) H_2 A H_2^{-1} (\kappa_{H_2}(H_1)^{-1}\\
&\quad \text{car } \kappa_{H_2} \text{ est un morphisme d'algèbres et } \kappa_{H_2}(A) = H_2 A H_2^{-1}\\
&= (H_1 \circledast H_2) A (H_1 \circledast H_2)^{-1}\\
&= \kappa_{H_1 \circledast H_2}(A) \quad \text{d'où immédiatement}\\
\kappa_{H_2}\circ\kappa_{H_1} &= \kappa_{H_1 \circledast H_2}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
(G \circledast H_1) \circledast H_2 &= (\kappa_{H_1}(G) H_1) \circledast H_2\\
&= (\kappa_{H_2}\circ\kappa_{H_1})(G) \kappa_{H_2}(H_1) H_2\\
&= \kappa_{H_1 \circledast H_2}(G)(H_1 \circledast H_2)\\
&= G \circledast (H_1 \circledast H_2)
\end{aligned}$$

iii) C'est évident.

iv) Écrivons $H = 1 + h$, où h est sans terme constant. On a alors $H^{-1} = 1 + l$ avec

$$l = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n h^n \quad \text{et} \quad HAH^{-1} = (1+h)A(1+l)$$

L'élément l est également sans terme constant. Le terme de degré minimal de $\kappa_H(A)$ est donc A et $\kappa_H(B) = B$. Le terme de degré minimal de $\kappa_H(w)$ est donc w pour tout mot en l'alphabet $\{A,B\}$. Finalement $\tau_H(w) = \kappa_H(w)H = \kappa_H(w)(1+h)$ et son terme de degré minimal est bien w. On conclut par continue linéarité.

□

Comme cas particulier du point iv), on voit que $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ est stable par $\circledast$. Les points ii) et iii) impliquent alors que $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ est un monoïde, dont 1 est l'élément neutre. La proposition ci-dessus permet de voir τ comme une représentation pro-unipotente (à droite) de MT dans $\mathbb{Q}\langle\langle A, B\rangle\rangle$, au sens du paragraphe I.4.3. Elle est fidèle car $\tau(H)(1) = H$ pour tout $H \in \mathsf{MT}(\Bbbk)$.

Il nous reste à voir que tout élément de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ est inversible. Donnons d'abord un lemme général (très classique).

Lemme 2.3. — *Si M est un monoïde dans lequel tout élément admet un inverse à gauche, c'est un groupe.*

Démonstration. — Soit a un élément de M. Prenons un inverse à gauche b de a et un inverse à gauche c de b. On a alors $cb = 1$ et $ba = 1$, d'où

$$a = (cb)a = c(ba) = c \quad \text{et donc} \quad ab = cb = 1,$$

ce qui montre que b est également inverse à droite de a. □

Proposition 2.4. — *Le monoïde* $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ *est un groupe.*

Démonstration. — Pour tout élément G de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$, un calcul immédiat montre que l'on a

$$H \circledast G = 1 \quad \text{avec} \quad H := G^{-1}(G^{-1}AG, B)$$

Ainsi tout élément de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ admet un inverse à gauche et le lemme 2.3 permet de conclure. □

Grâce à la représentation pro-unipotente fidèle, on voit donc que MT est un schéma en groupes pro-unipotent. On considèrera encore les actions sur les quotients. Rappelons que la notation $\Bbbk\langle A, B\rangle^{(n)}$ désigne le quotient de $\Bbbk\langle A, B\rangle$ par l'idéal formé des éléments de degré strictement supérieur à n, qu'on note $\pi^{(n)}$ la projection de $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ sur $\Bbbk\langle A, B\rangle^{(n)}$ et qu'on se permettra de considérer $\Bbbk\langle A, B\rangle^{(n)}$ comme inclus dans $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ (*cf.* § I.1.2).

Définition 2.5. — *On notera encore $\circledast$ l'opération donnée par la composition suivante :*

$$\Bbbk\langle A, B\rangle^{(n)} \times \mathsf{MT}(\Bbbk) \xrightarrow{\circledast} \Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle \xrightarrow{\pi^{(n)}} \Bbbk\langle A, B\rangle^{(n)}$$

On peut regrouper l'énoncé des propositions 5.5 et 5.9 de l'article [**11**] sous la forme suivante :

THÉORÈME ***I* (Drinfel'd)**. — *Pour tout anneau $\Bbbk$ et tout $\lambda \in \Bbbk$,* $\mathsf{Ass}_0(\Bbbk)$ *est un sous-groupe de* $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ *qui agit librement et transitivement par translation à droite sur* $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$*, avec la loi $\circledast$ de* $\mathsf{MT}(\Bbbk)$.

2.2. Algèbre de Lie du groupe de Magnus tordu

Notation 2.6. — *Nous appellerons* $\mathfrak{mt}$ *l'algèbre de Lie du groupe* MT*. Son crochet sera noté* $<\bullet,\bullet>$*.*

La pro-unipotence de MT permet de définir l'application exponentielle de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$ dans $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ pour tout anneau $\Bbbk$. Comme il y a risque de confusion avec l'exponentielle usuelle de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$, on posera :

Notation 2.7. — *On désignera par* $\exp^{\circledast}$ *l'application exponentielle de* $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$ *dans* $\mathsf{MT}(\Bbbk)$*.*

Nous allons ici la décrire dans la représentation τ. Rappelons que $\Bbbk[\varepsilon]$ est l'anneau des nombres duaux basé sur $\Bbbk$, c'est-à-dire $\Bbbk[t]/t^2$, où t est une variable formelle. Le $\Bbbk$-module sous-jacent à $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$ est l'ensemble des ψ de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ tels que $1+\varepsilon\psi$ appartienne à $\mathsf{MT}(\Bbbk[\varepsilon])$. C'est donc l'ensemble des séries ψ sans terme constant.

Définition 2.8. — *Pour tout élément* ψ *de* $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$*, on désignera par* s_ψ *l'endomorphisme linéaire continu de* $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ *tel que*

$$\tau(1+\varepsilon\psi)=\mathrm{Id}+\varepsilon s_\psi$$

Avec la définition ci-dessus, s est donc l'anti-morphisme d'algèbres de Lie qui se déduit de l'anti-morphisme de schémas en groupes τ. La proposition I.4.6 se traduit dans ce contexte par :

Proposition 2.9. — *Soit* ψ *un élément de* $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$*. Pour tout élément* G *de* $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$*, on a*

$$G\circledast\exp^{\circledast}\psi = (\exp(s_\psi))(G) \quad \text{et en particulier} \tag{2.13}$$

$$\exp^{\circledast}(\psi) = (\exp(s_\psi))(1) \tag{2.14}$$

Le crochet de $\mathfrak{mt}$ est appelé le crochet d'Ihara (*cf.* sec. 4).

Proposition 2.10. — *Soient* ψ_1 *et* ψ_2 *dans* $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$*. On a*

$$s_{<\psi_1,\psi_2>} = -[s_{\psi_1},s_{\psi_2}] \quad \textit{et} \tag{2.15}$$

$$<\psi_1,\psi_2> = s_{\psi_2}(\psi_1)-s_{\psi_1}(\psi_2) \tag{2.16}$$

Démonstration. — La première formule exprime le fait que l'application s est un anti-morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$ dans l'algèbre de Lie des endomorphismes de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$.

Pour tout élément ψ de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$, on a $\psi=s_\psi(1)$. En évaluant les deux membres de la première formule en 1, on obtient la deuxième. □

L'intérêt de cette construction est que l'opérateur s_ψ peut être calculé sans trop de difficulté. Les dérivations ci-dessous sont les contreparties infinitésimales de la substitution κ_H et de son analogue agissant sur B.

***Définition 2.11* (Dérivations spéciales).** — *Pour tout ψ appartenant à $\mathfrak{mt}(\mathbb{k})$, les opérateurs D_ψ et d_ψ sont les uniques dérivations continues de $\mathbb{k}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ telles que :*

$$D_\psi(A) = [\psi, A] \quad et \quad D_\psi(B) = 0 \tag{2.17}$$

$$d_\psi(A) = 0 \quad et \quad d_\psi(B) = [\psi, B] \tag{2.18}$$

***Proposition 2.12* (formules).** — *Pour tout élément x de $\mathbb{k}\langle\langle A,B\rangle\rangle$, on a*

$$s_\psi(x) \quad = \quad x\psi + D_\psi(x) \tag{2.19}$$

$$s_\psi(x) \quad = \quad \psi x - d_\psi(x) \tag{2.20}$$

Pour tous éléments ψ_1 et ψ_2 de $\mathfrak{mt}(\mathbb{k})$, on a

$$<\psi_1, \psi_2> \quad = \quad [\psi_1, \psi_2] - D_{\psi_1}(\psi_2) + D_{\psi_2}(\psi_1) \tag{2.21}$$

$$<\psi_1, \psi_2> \quad = \quad d_{\psi_1}(\psi_2) - d_{\psi_2}(\psi_1) - [\psi_1, \psi_2] \tag{2.22}$$

Démonstration. — Commençons par (2.19). Soit f l'unique endomorphisme de $\mathbb{k}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ tel que $1 + \varepsilon f = \kappa_{1+\varepsilon\psi}$. Pour tous éléments x et y de $\mathbb{k}\langle\langle A,B\rangle\rangle$, on a

$$\begin{aligned} \kappa_{1+\varepsilon\psi}(xy) &= (\kappa_{1+\varepsilon\psi}(x))(\kappa_{1+\varepsilon\psi}(y)) \\ &= (x + \varepsilon f(x))(y + \varepsilon f(y)) = xy + \varepsilon(f(x)y + xf(y)), \end{aligned}$$

donc f est une dérivation. Sur les générateurs, on a

$$\begin{aligned} \kappa_{1+\varepsilon\psi}(A) &= (1 + \varepsilon\psi)A(1 + \varepsilon\psi)^{-1} = A + \varepsilon[\psi, A] \quad \text{et} \\ \kappa_{1+\varepsilon\psi}(B) &= B \end{aligned}$$

De plus $\kappa_{1+\varepsilon\psi}$ préserve la filtration de $\mathbb{k}[\varepsilon]\langle\langle A,B\rangle\rangle$ et est donc continu. Par suite f est continue. Finalement, $f = D_\psi$. On a alors, pour tout x de $\mathbb{k}\langle\langle A,B\rangle\rangle$:

$$\tau_{1+\varepsilon\psi}(x) = \kappa_{1+\varepsilon\psi}(x)(1 + \varepsilon\psi) = (x + \varepsilon D_\psi(x))(1 + \varepsilon\psi) = x + \varepsilon(D_\psi(x) + x\psi)$$

Par définition de s_ψ, ceci donne bien la formule voulue.

Pour tout ψ de $\mathfrak{mt}(\mathbb{k})$, $D_\psi + d_\psi$ est une dérivation continue qui envoie A sur $[\psi, A]$ et B sur $[\psi, B]$. On en déduit $D_\psi + d_\psi = \operatorname{ad}\psi$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{k}\langle\langle A,B\rangle\rangle$:

$$s_\psi(x) = D_\psi(x) + x\psi = [\psi, x] - d_\psi(x) + x\psi = \psi x - d_\psi(x)$$

La formule (2.20) est donc démontrée.

Les deux dernières équations sont les traductions de la formule (2.16) à l'aide respectivement de (2.19) et (2.20) ☐

La formule (2.21) est celle qui est donnée par Drinfel'd pour le crochet de $\mathfrak{grt}_1$.

Proposition 2.13. — *Le crochet d'Ihara et les opérations* $(\psi_1, \psi_2) \mapsto s_{\psi_1}(\psi_2)$ *et* $(\psi_1, \psi_2) \mapsto D_{\psi_1}(\psi_2)$ *sont finement homogènes, c'est-à-dire homogènes pour les degrés partiels en* A *et* B.

Démonstration. — Soit ψ un élément finement homogène de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$ de degrés p et q. On veut montrer que D_ψ est finement homogène de degrés p et q. Comme D_ψ est une dérivation, l'étude de $D_\psi(A)$ et $D_\psi(B)$ suffit. A est finement homogène, de degrés 1 et 0 et $D_{\psi_1}(A) = [\psi_1, A]$ est finement homogène, de degrés $p+1$ et q, tandis que $D_\psi(B)$ est nul.

Comme s_ψ est la somme de D_ψ et de la multiplication à droite par ψ, il est également finement homogène de degrés p et q. L'assertion sur le crochet d'Ihara en découle par la formule (2.16). $\square$

Proposition 2.14. — *Pour tout* $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lie}}_\Bbbk(A, B)$, *l'opérateur* s_ψ *est une codérivation de la bigèbre* $\widehat{\mathsf{Conc}}_\Bbbk(A, B)$.

Démonstration. — Soit $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lie}}_\Bbbk(A, B)$. L'opérateur s_ψ est somme de la multiplication à droite par ψ, qui est une codérivation car ψ est primitif (prop. I.2.5) et de D_ψ. Comme ce dernier est une dérivation et que l'algèbre $\widehat{\mathsf{Conc}}_\Bbbk(A, B)$ est topologiquement engendrée par les éléments primitifs A et B, il s'agit de vérifier que les images de ces derniers sont primitives (prop. I.2.3), c'est-à-dire appartiennent à $\widehat{\mathfrak{Lie}}_\Bbbk(A, B)$ (prop. I.5.7), ce qui est évident d'après la définition de D_ψ. $\square$

La section suivante présente quelques compléments sur les groupes GT et GRT.

3. Complétés pro-unipotents et groupes GT et GRT

On commence ici par décrire un schéma en groupes pro-unipotent que l'on peut associer à tout groupe de type fini. On trouve plusieurs appellations pour cette construction (complété de Malcev, complété pro-unipotent). On peut en trouver un exposé détaillé dans l'appendice A de l'article [**44**] de Quillen.

Soit G un groupe. Pour tout anneau $\Bbbk$, l'algèbre $\Bbbk[G]$ du groupe est munie d'une structure de bigèbre de Hopf naturelle qui est caractérisée par le fait que les éléments de G sont diagonaux. On notera le coproduit Δ.

La coünité (augmentation) de $\Bbbk[G]$ est le morphisme d'algèbres $\Bbbk[G] \to \Bbbk$ qui envoie tous les éléments du groupe sur 1. Le noyau de la coünité est un idéal I, et on peut considérer la filtration

$$\Bbbk[G]_{\geqslant n} = I^n,$$

qui est respectée par le coproduit. On en déduit donc une structure de bigèbre sur $\widehat{\Bbbk[G]}$, le complété par rapport à cette filtration. C'est ce que Quillen appelle une algèbre de Hopf augmentée complète. En prenant les éléments diagonaux de $\widehat{\Bbbk[G]}$, on obtient un groupe, le complété pro-unipotent de G.

Si les quotients $\mathbb{Q}[G]/I^n$ sont de type fini, on a ainsi défini un schéma en groupes pro-unipotent (il est immédiat que toutes ces constructions se déduisent par extension des scalaires du cas $\Bbbk = \mathbb{Q}$).

Un cas particulièrement intéressant est celui où la série centrale descendante de G est séparante. Si le $\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{gr}G$ est sans torsion, on peut alors montrer que G se plonge dans $\widehat{\Bbbk[G]}$. Il est alors intéressant de comparer les algèbres filtrées complètes $\widehat{\Bbbk[G]}$ et $\widehat{\mathsf{U}_\Bbbk \mathfrak{gr} G}$. D'après un théorème de Quillen ([**43**]), les gradués associés à ces deux algèbres sont isomorphes, mais on n'a pas en général de résultat direct d'isomorphisme.

Dans le cas où G est le groupe des tresses pures P_n, un tel isomorphisme existe (isomorphisme de Kohno [**33**]). Drinfel'd en propose un « upgrade » que l'on peut décrire ainsi, en suivant Bar-Natan ([**1**]).

En développant l'idée que les algèbres $\widehat{\mathsf{U}_\Bbbk T_n}$ forment une sorte de squelette de structure pour les catégories monoïdales tressées du type évoqué à la section 1, on peut montrer que la donnée d'un élément de $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$ (où λ est un élément inversible de $\Bbbk$) est équivalente à celle d'une collection d'isomorphismes de bigèbres

$$\mathfrak{S}_n \ltimes \widehat{\Bbbk[P_n]} \xrightarrow{\varphi_n} \mathfrak{S}_n \ltimes \widehat{\mathsf{U}_\Bbbk T_n}$$

tels que :

– Les φ_n commutent aux opérations simpliciales d_i et s_i.
– Les actions correspondantes sur les groupes symétriques soient triviales.
– L'image de $\tau_{ij} \in P_n$ par φ_n est un conjugué de $\exp(\lambda t_{ij})$. L'image de τ_{12} est $\exp(\lambda t_{12})$.

Pour prouver cela, Bar-Natan construit deux catégories(5) : les tresses parenthésées complétées et les diagrammes de cordes parenthésés complétés, la première correspondant aux $\mathfrak{S}_n \ltimes \widehat{\Bbbk[P_n]}$ et la seconde aux $\mathfrak{S}_n \ltimes \widehat{\mathsf{U}_\Bbbk T_n}$. L'argument principal pour l'existence des morphismes φ_n est alors le théorème de cohérence de MacLane. L'associateur apparaît dans la construction de Bar-Natan comme l'image d'un des générateurs de sa catégorie de tresses.

Une fois l'ensemble $\mathsf{Ass}^*(\Bbbk)$ d'associateurs ainsi présenté comme l'ensemble des isomorphismes entre deux grandes structures, on peut le munir naturellement d'actions libres et transitives des groupes d'automorphismes de ces structures. On obtient ainsi le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\mathsf{GT}(\Bbbk)$ comme ensemble des collections φ_n d'automorphismes de $\widehat{\Bbbk[P_n]}$ tels que, pour un élément inversible λ fixé de $\Bbbk$, on ait :

(5) La description avec les catégories est certainement bien plus naturelle que celle qui est donnée ici et simplifie grandement la situation.

– Les φ_n commutent aux opérations simpliciales d_i et s_i.
– φ_n commute à l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\widehat{\Bbbk[P_n]}$.
– L'image de τ_{ij} par φ_n est un conjugué dans $\widehat{\Bbbk[P_n]}$ de τ_{ij}^{λ} (c'est-à-dire $\exp(\lambda\log(\tau_{ij})))$.
– L'image de τ_{12} est τ_{12}^{λ} pour tous les φ_n.

Pour être cohérent avec les conventions de Drinfel'd , il faut munir $\mathsf{GT}(\Bbbk)$ du produit $(\varphi\psi)_n := \psi_n\circ\varphi_n$.

Le groupe $\mathsf{GT}(\Bbbk)$ agit librement et transitivement à gauche sur $\mathsf{Ass}^*(\Bbbk)$ et le sous-groupe $\mathsf{GT}_1(\Bbbk)$ formé des éléments de $\mathsf{GT}(\Bbbk)$ par lesquels l'image de chaque τ_{ij} est un conjugué de τ_{ij} agit librement et transitivement sur $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$, pour tout $\lambda \in \Bbbk$.

De l'autre côté, on obtient les groupes de Grothendieck-Teichmüller « gradués » $\mathsf{GRT}(\Bbbk)$ et $\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$. Ce dernier est le groupe des collections φ_n d'automorphismes de $\widehat{\mathsf{U}_\Bbbk T_n}$ tels que

– Les φ_n commutent aux opérations simpliciales d_i et s_i.
– φ_n commute à l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\widehat{\mathsf{U}_\Bbbk T_n}$.
– L'image de t_{ij} par φ_n est un conjugué de t_{ij} dans $\widehat{\mathsf{U}_\Bbbk T_n}$.
– L'image de t_{12} est t_{12} pour tous les φ_n.

En munissant $\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$ également du produit $(\varphi\psi)_n := \psi_n\circ\varphi_n$, on obtient un groupe qui agit librement et transitivement à droite sur chaque $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$.

Il reste à montrer, pour rattacher cela aux considérations de la section 1, que donner un élément de $\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$ équivaut à donner un élément de $\widehat{\mathsf{U}_\Bbbk T_3}$, satisfaisant à des équations que l'on trouve dans l'article de Drinfel'd. Dans l'optique de Bar-Natan, c'est encore l'image d'un générateur de sa catégorie. Le même phénomène se produit pour GT. Cette propriété remarquable trouve son parallèle dans les constructions d'Ihara avec la stabilité de la suite d'algèbres de Lie $\mathscr{D}_n$ (voir plus loin).

Remarque. — Drinfel'd considère l'algèbre $\mathfrak{S}_n \ltimes \widehat{\Bbbk[P_n]}$ comme un « certain complété pro-unipotent » du groupe B_n. Ce genre de construction, pour les extensions de groupes dont la série centrale est séparante, est utilisé de manière systématique par Hain (*cf.* [**21**]).

4. Action de Galois et conjecture de Deligne

Dans cette section, si $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et si $\mathbb{K}$ est un corps compris entre $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$, on désigne par $G_\mathbb{K}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{K}$.

Soit X une variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$. L'espace topologique $X(\mathbb{C})$ est localement connexe et localement simplement connexe. On le suppose connexe.

Soit x un point de $X(\mathbb{C})$. Le groupe fondamental $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$ peut être décrit comme le groupe des automorphismes du foncteur « fibre en x ». Cela revient à dire qu'un élément de $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$ est la donnée, pour tout revêtement $R \xrightarrow{p_R} X(\mathbb{C})$, d'une permutation f_R de la fibre $p_R^{-1}(x)$, de façon compatible aux applications provenant de morphismes de revêtements, *i.e.* telle que, pour tout morphisme $\varphi\ : R \to S$ de revêtements, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} p_R^{-1}(x) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_R"'] & p_S^{-1}(x) \arrow[d, "f_S"] \\ p_R^{-1}(x) \arrow[r, "\varphi"] & p_S^{-1}(x) \end{tikzcd}$$

On peut modifier cette définition en ne considérant que les revêtements finis de $X(\mathbb{C})$. On obtient alors le complété profini $\widehat{\pi}_1(X(\mathbb{C}), x)$ du groupe $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$, c'est-à-dire la limite projective de ses quotients finis.

On sait que tout revêtement fini de $X(\mathbb{C})$ est isomorphe à un revêtement algébrique défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. La catégorie des revêtements finis de $X(\mathbb{C})$ est donc équivalente à la catégorie $\mathscr{R}$ des variétés algébriques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et qui sont, au sens algébrique, des revêtements de X.

Soit alors $x \in X(\mathbb{Q})$ et R un objet de $\mathscr{R}$. Tout élément σ de $G_{\mathbb{Q}}$ définit un nouveau revêtement σR de X, car X est définie sur $\mathbb{Q}$. On a ainsi un automorphisme de $\mathscr{R}$. De plus, les ensembles $p_{\sigma R}^{-1}(x)$ et $\sigma(p_R^{-1}(x))$ sont égaux,[(6)] car x est rationnel. Cela permet de considérer σ comme un isomorphime entre les foncteurs-fibres $R \mapsto p_R^{-1}(x)$ et $R \mapsto p_{\sigma R}^{-1}(x)$. À tout automorphisme f du premier, *i.e.* tout élément de $\widehat{\pi}_1(X(\mathbb{C}), x)$, on peut donc par conjugaison en associer un nouveau, noté ${}^{\sigma}f$. Il est explicitement décrit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} p_R^{-1}(x) \arrow[r, "({}^{\sigma}f)_R"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"'] & p_R^{-1}(x) \arrow[d, "\sigma^{-1}"] \\ p_{\sigma^{-1}R}^{-1}(x) \arrow[r, "f_{\sigma^{-1}R}"] & p_{\sigma^{-1}R}^{-1}(x) \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un morphisme de groupes

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}\Big(\widehat{\pi}_1(X(\mathbb{C}), x)\Big) \to \mathrm{Out}(\widehat{\pi}_1(X(\mathbb{C})))$$

où pour un groupe Γ, $\mathrm{Out}(\Gamma)$ désigne le groupe des automorphismes extérieurs de Γ, *i.e.* le quotient des automorphismes par les automorphismes intérieurs, ce qui permet d'oublier le point-base x.

(6) On les considère comme inclus dans $X(\mathbb{C})$.

On peut considérer encore d'autres sous-catégories, comme celle des revêtements correspondant aux quotients nilpotents de $\pi_1(X(\mathbb{C}),x)$, qui donne le complété pronilpotent $\pi_1^{\mathsf{nil}}(X(\mathbb{C}),x)$ et, pour tout nombre premier ℓ, celle qui correspond aux quotients d'ordre une puissance de ℓ, donnant ainsi le complété pro-ℓ $\pi_1^{(\ell)}(X(\mathbb{C}),x)$. Tous ces groupes sont ainsi munis d'une action de $G_{\mathbb{Q}}$, et de l'action extérieure qui s'en déduit.

Si $X \xrightarrow{\varphi} Y$ est un morphisme de variétés $\mathbb{Q}$-algébriques et x un point de $X(\mathbb{Q})$, l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ commute au morphisme de groupes $\widehat{\pi}_1(X(\mathbb{C}),x) \to \widehat{\pi}_1(Y(\mathbb{C}),\varphi(x))$ qui se déduit de φ.

On peut appliquer ces constructions aux variétés

$$X_n := \{(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{P}^1)^n; x_i \neq x_j \quad \text{si} \quad i \neq j\}$$

On désignera par P'_n le groupe fondamental de X_n. Il est très proche du groupe de tresses pures P_{n-1}[(7)]. La présentation par les τ_{ij} de P_{n-1} a un analogue pour P'_n dont on notera τ'_{ij} les générateurs. On posera $T'_n = \mathfrak{gr}P'_n$. Cette algèbre de Lie admet une présentation avec des générateurs t'_{ij} analogues de ceux de T_n.

Le théorème de Belyi ([**2**]) affirme à peu de choses près[(8)] que le morphisme de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathrm{Out}(\widehat{\pi}_1(X_4))$ est injectif, ce qui a fortement impressionné Grothendieck (*cf.* [**20**]).

Les représentations du groupe de Galois dans les complétés pro-ℓ ont été étudiées par Ihara : pour tout entier $n \geqslant 4$, on a ainsi un morphisme

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}({P'}_n^{(\ell)})$$

On peut montrer qu'un élément σ de $G_{\mathbb{Q}}$ envoie chaque générateur τ'_{ij} sur un conjugué de $\tau_{ij}^{\chi(\sigma)}$, où χ désigne le caractère cyclotomique $G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_\ell)$. Les éléments du noyau de χ laissent donc les générateurs stables à conjugaison près. C'est ce que Ihara appelle un automorphisme spécial. On en déduit donc un morphisme de groupes

$$\mathit{ker}\ \chi \xrightarrow{\varphi_n} \mathrm{Out}^*({P'}_n^{(\ell)}),$$

le symbole Out^* désignant les automorphismes spéciaux, modulo les automorphismes intérieurs. Ihara ([**28**]) étudie l'application naturelle de $\mathrm{Out}^*({P'}_{n+1}^{(\ell)})$ dans $\mathrm{Out}^*({P'}_n^{(\ell)})$ provenant de l'application simpliciale s_{n+1} (effacement du $n+1^{\text{ème}}$ brin).

(7) On l'appelle souvent groupe des tresses pures sphériques, ou projectives, ou groupe des tresses pures d'Hurwitz.

(8) L'énoncé porte sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ qui est très peu différent de X_4.

L'équivariance des morphismes de groupes fondamentaux provenant de morphismes de variétés permet de voir que le diagramme suivant commute.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathit{ker}\,\chi \arrow[dl, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[drr, "\varphi_4"] & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Out}^*({P'}^{(\ell)}_{n+1}) \arrow[r] & \mathrm{Out}^*({P'}^{(\ell)}_{n}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Out}^*({P'}^{(\ell)}_{4})
\end{tikzcd}
$$

Ihara montre que les flèches horizontales sont injectives. Les noyaux des φ_n sont donc tous égaux. On notera dans la suite $G^{(\ell)}$ le quotient de $\mathit{ker}\ \chi$ par ce noyau commun.

Dans le cours de sa démonstration, il introduit, pour tout $n \geqslant 4$, une algèbre de Lie Der^*_n qui est définie par l'action des éléments de $\mathrm{Out}^*(P'_n)$ sur $T'_n = \mathfrak{gr}P'_n$. C'est l'algèbre de Lie des dérivations spéciales (l'image de chaque t'_{ij} est un crochet de t'_{ij} avec un élément de T'_n), modulo les dérivations intérieures de T'_n. On a également des morphismes naturels de Der^*_{n+1} dans Der^*_n qui proviennent de l'opération simpliciale s_{n+1}. Ihara commence par prouver leur injectivité, puis remonte aux groupes.

L'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur P'_n et ses avatars provient de son action algébrique sur la variété X_n. Le groupe $G^{(l)}$ se plonge donc dans tous les $\mathrm{Out}^{**}({P'}^{(\ell)}_n)$, où Out^{**} désigne l'ensemble des automorphismes spéciaux $\mathfrak{S}_n$-équivariants, modulo les automorphismes intérieurs. L'algèbre de Lie des dérivations spéciales $\mathfrak{S}_n$-équivariantes, modulo les intérieures correspond à $\mathrm{Out}^{**}(P'_n)$ et sera notée $\mathscr{D}_n$ dans la suite. Dans [**30**], Ihara montre que le morphisme naturel de $\mathscr{D}_n$ dans $\mathscr{D}_{n-1}$ est bijectif pour $n \geqslant 6$. Il note $\mathscr{D}$ l'image de $\mathscr{D}_5$ dans $\mathscr{D}_4$ et appelle cela l'algèbre stable de dérivations.

L'algèbre de Lie T'_4 est une algèbre de Lie libre à deux générateurs A et B, qui font partie des t'_{ij}. Un élément D de l'algèbre de Lie des dérivations spéciales modulo les dérivations intérieures se remonte de manière unique à une dérivation de $\mathfrak{Lie}(A, B)$ qui annule B et donc qui est définie par l'élément ψ tel que $D(A) = [\psi, A]$. Ce sont les « dérivations spéciales » du paragraphe 2.2. Le crochet $<\bullet, \bullet>$ est le crochet de Der^*_4 vu dans $\mathfrak{Lie}(A, B)$. Ihara donne les équations portant sur ψ pour que D appartienne à $\mathscr{D}$. Il apparaît[(9)] qu'elles sont équivalentes à $\psi \in \mathfrak{grt}_1$. Les équations données en [**30**] sont en fait identiques, modulo la légère différence entre T_4 et T'_5. On trouve des comparaisons très explicites en [**32**].

Ihara associe au groupe $G^{(\ell)}$ une algèbre de Lie de la manière suivante. L'application $G^{(\ell)} \to \mathrm{Out}^{**}({P'}^{(\ell)}_4)$ est injective par définition de $G^{(l)}$. Pour tout entier positif n, soit $G_{\geqslant n}$ le noyau de l'action de $G^{(\ell)}$ sur ${P'}^{(\ell)}_4/({P'}^{(\ell)}_4)_{\geqslant n}$.

[(9)] Ceci est naturel au vu de la description de GRT_1 faite à la section précédente.

On a ainsi défini une filtration centrale sur $G^{(\ell)}$. Soit alors $\mathfrak{g}^{(\ell)}$ l'algèbre de Lie graduée associée. Elle se plonge par construction dans $\mathscr{D} \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Étant donné que $G^{(\ell)}$ est un groupe pro-ℓ, la connaissance de $\mathfrak{g}^{(\ell)}$ fournirait beaucoup d'informations sur ce groupe. Nous arrivons à la conjecture de Deligne :

***Conjecture I* (Deligne).** — *L'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g}^{(\ell)} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est librement engendrée par exactement un élément homogène en chaque degré impair n au moins égal à 3.*

Ihara a montré qu'il existait une collection $(\sigma_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments irréductibles de $\mathfrak{g}^{(\ell)}$ de degrés adéquats en considérant l'application $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire composée :

$$\mathfrak{g}^{(\ell)} \longrightarrow \mathscr{D} \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathfrak{Lie}_{\mathbb{Z}_\ell}(A, B) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$$

la dernière flèche étant la projection de $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{Z}_\ell}(A, B)$ sur $\mathbb{Z}_\ell$ donnant le terme de degré total n et de degré partiel 1 en B.

La restriction du caractère de Soulé χ_n à $\ker \chi$ se factorise par $G^{(\ell)}$ et en respecte la filtration centrale (*cf.* [**27**]). Il s'en déduit donc une application $\overline{\chi}_n$ de $\mathfrak{g}^{(\ell)}$ dans $\mathbb{Z}_\ell$ qui se trouve être un multiple non nul de la composée ci-dessus. Les propriétés de non-annulation de χ_n impliquent alors l'existence d'un élément σ_n de $\mathfrak{g}^{(\ell)}$, homogène de degré n et tel que $\overline{\chi}_n(\sigma_n) \neq 0$ si n est impair $\geqslant 3$. Or la fine homogénéité du crochet d'Ihara entraîne qu'un élément dont le terme de degré partiel 1 en B n'est pas nul est irréductible.

Richard Hain et Makoto Matsumoto ([**22**]) ont démontré très récemment que les irréductibles d'Ihara(10) engendrent bien $\mathfrak{g}^{(\ell)} \otimes \mathbb{Q}_\ell$. La question de la liberté reste ouverte.

À la fin de [**11**], Drinfel'd propose une construction d'éléments irréductibles de $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{C}) = \mathscr{D} \otimes \mathbb{C}$ et pose la question suivante, remarquant qu'une réponse affirmative donnerait une preuve(11) de la conjecture I.

***Conjecture II* (Deligne-Drinfel'd).** — *L'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{Q})$ est librement engendrée par exactement un élément homogène en chaque degré impair n au moins égal à 3.*

(10) C'est-à-dire les σ_n évoqués à l'instant. On trouve également dans la littérature l'appellation « éléments de Soulé ».

(11) Ceci est expliqué par Ihara dans [**31**].

CHAPITRE III

POLYZÊTAS

1. Polylogarithmes et premier système de relations

Préambule. — Dans cette section, on étudie essentiellement les propriétés des polylogarithmes généralisés. La présentation qu'on en fait ne prétend pas être exhaustive, mais simplement suffisante pour pouvoir aboutir au premier système de relations entre les polyzêtas. On ne considère notamment pas de variable complexe, les variables réelles comprises entre 0 et 1 étant suffisantes pour cette étude.

Les paragraphes 1.1 et 1.2 présentent les polylogarithmes dans le cadre plus général des séries à divergence logarithmique. Celles-ci sont définies au paragraphe 1.1 et on en donne quelques propriétés qui seront particulièrement utiles à la section 4. Les polylogarithmes sont introduits en 1.2 et les polyzêtas y sont définis comme valeurs en 1 des polylogarithmes. La proposition 1.5 donne alors facilement la convergence des polyzêtas associés aux séquences ne commençant pas par 1.

Le paragraphe 1.3 permet de voir les polylogarithmes comme des spécialisations en 0 de certaines intégrales itérées (associées aux mots convergents à droite). Ils héritent donc des propriétés algébriques de celles-ci. Elles s'expriment au moyen d'une algèbre de mélange sur un alphabet à deux lettres $X = \{x_0, x_1\}$.

Au paragraphe 1.4, on décrit les sous-algèbres de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ en rapport avec les polylogarithmes et les polyzêtas. Cela permet de formuler le premier système de relations $\mathbb{Q}$-algébriques entre les polyzêtas.

Le paragraphe 1.5 se contente d'allusions à la notion plus générale d'intégrale itérée et aux polyzêtas aux racines de l'unité.

1.1. Séries à divergence logarithmique. — Dans ce paragraphe, la lettre t désigne une variable formelle commutative.

Définition 1.1. — *Nous dirons qu'une fonction réelle f est parabolique au voisinage de 0 si et seulement s'il existe un nombre réel α strictement positif tel que $f(x) = o(x^\alpha)$ au voisinage de 0.*

On utilisera une notation inspirée de la notation de Landau. Si on ne veut pas avoir à préciser α, on écrira

$$f(x) = o\left(x^{0^+}\right)$$

De même, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'il existe un nombre réel α strictement positif tel que $u_n = o(n^{-\alpha})$ au voisinage de l'infini, nous écrirons :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right)$$

Proposition 1.2. — *Pour toutes fonctions réelles f et g paraboliques au voisinage de 0, on a*

$$\begin{aligned} \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda f(x) &= o\left(x^{0^+}\right) \\ f(x)+g(x) &= o\left(x^{0^+}\right) \\ \forall k\in\mathbb{N},\ \log^k(x)f(x) &= o\left(x^{0^+}\right) \end{aligned}$$

Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right) \quad et \quad v_n = o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right), \quad on\ a$$

$$\begin{aligned} \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda u_n &= o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right) \\ u_n+v_n &= o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right) \\ \forall k\in\mathbb{N},\ \log^k(n)u_n &= o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right) \end{aligned}$$

Démonstration. — Par hypothèse, il existe α et β strictement positifs tels que $f(x) = o(x^\alpha)$ et $g(x) = o(x^\beta)$. Il est alors clair que $\lambda f(x)$ et $f(x)+g(x)$ sont tous deux négligeables devant $x^{\min(\alpha,\beta)}$ et que $\log^k(x)f(x)$ est négligeable devant x^γ, pour tout γ strictement compris entre 0 et α. Les suites se comportent de manière similaire. □

Définition 1.3. — *Nous appellerons espace des fonctions à divergence logarithmique l'ensemble* DivLog *des fonctions réelles f admettant un développement* *en série entière au voisinage de 0*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{Coeff}_n(f) z^n,$$

tel que la suite $(\mathrm{Coeff}_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *des coefficients de* f *ait le comportement suivant lorsque* n *tend vers l'infini :*

$$\exists \mathrm{As}_c(f) \in \mathbb{R}[t],\ \mathrm{Coeff}_n(f) = \frac{\mathrm{As}_c(f)(\log n)}{n} + \frac{o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right)}{n}$$

On obtient immédiatement que le rayon de convergence d'une série entière de ce type est supérieur ou égal à 1. L'ensemble DivLog est donc un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions analytiques sur l'intervalle $]-1,1[$.

Avec les règles de calcul de la proposition 1.2, il est clair que le polynôme $\mathrm{As}_c(f)$ est uniquement déterminé en fonction de la suite $(\mathrm{Coeff}_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, donc de f et que l'application As_c de DivLog dans $\mathbb{R}[t]$ ainsi définie est linéaire.

Définition 1.4. — *Pour toute fonction* f *de* DivLog*, la suite des sommes partielles associée est*

$$\mathrm{Part}_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Coeff}_k(f)$$

Si la suite $\mathrm{Part}(f)$ est convergente, sa limite est par définition $f(1)$. D'après le lemme d'Abel, la fonction f est alors continue sur l'intervalle $]-1,1]$.

Proposition 1.5. — *Pour toute fonction* f *de* DivLog*, il existe un unique polynôme* $\mathrm{As}_\Sigma(f)$ *à coefficients réels tel que la suite* $\mathrm{Part}_n(f)$ *ait le comportement suivant lorsque* n *tend vers l'infini :*

$$\mathrm{Part}_n(f) = \mathrm{As}_\Sigma(f)(\log n) + o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right)$$

L'application $\mathrm{As}_\Sigma : \mathsf{DivLog} \to \mathbb{R}[t]$ *ainsi définie est linéaire.*

Pour toute fonction $f \in \mathsf{DivLog}$*, on a :*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{As}_\Sigma(f) = \mathrm{As}_c(f)$$

Démonstration. — L'unicité et la linéarité se déduisent immédiatement des règles de calcul de la proposition 1.2. Il s'agit de démontrer l'existence. Commençons par traiter le cas où $\mathrm{As}_c(f)$ est nul.

Si une suite u_n a le comportement asymptotique

$$u_n = \frac{o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right)}{n},$$

il existe $\alpha > 0$ tel que $u_n = o(n^{-1-\alpha})$. La série associée $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est alors convergente, et son reste

$$R_n = \sum_{k\geqslant n} u_k$$

est un $o(n^{-\alpha})$. Par linéarité, il suffit donc pour conclure de démontrer le résultat voulu pour les fonctions

$$f_k(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\log^k(n)}{n} x^n,$$

où k décrit l'ensemble des entiers positifs.

Fixons k. Pour tout $n \geqslant 2$, on peut écrire

$$\log^{k+1}(n) - \log^{k+1}(n-1) = (\log(n) - \log(n-1)) \sum_{i=0}^{k} \log(n)^i \log(n-1)^{k-i}$$

Comme on a $\log(n-1) = \log(n) - 1/n + O(n^{-2})$, on en déduit

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ \log^{k+1}(n) - \log^{k+1}(n-1) &= \frac{k+1}{n} \log^k(n) + O\left(\frac{\log^k(n)}{n^2}\right) \quad \text{d'où} \\ \frac{\log^k(n)}{n} &= \frac{\log^{k+1}(n) - \log^{k+1}(n-1)}{k+1} + o(n^{-3/2}) \end{aligned}$$

En sommant, on obtient donc, en tenant compte de ce qui a déjà été dit sur les restes, l'existence d'un nombre réel α_k tel que

$$\begin{aligned} \mathrm{Part}_n(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\log^k(i)}{i} &= \frac{\log^{k+1}(n-1)}{k+1} + \alpha_k + o(n^{-1/2}) \\ &= \frac{\log^{k+1}(n)}{k+1} + \alpha_k + o(n^{-1/2}) \end{aligned}$$

On a donc pour la fonction

$$f_k(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\log^k(n)}{n} x^n$$

$$\mathrm{As}_c(f_k) = t^k \quad \text{et} \quad \mathrm{As}_\Sigma(f_k) = \frac{t^{k+1}}{k+1} + \alpha_k$$

et pour une fonction

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} u_n x^n \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right)}{n},$$

le polynôme $\mathrm{As}_c(f)$ est nul et $\mathrm{As}_\Sigma(f)$ est constant. Dans tous les cas, le polynôme dérivé de $\mathrm{As}_\Sigma(f)$ est égal à $\mathrm{As}_c(f)$. □

Le corollaire ci-dessous ne fait que rassembler un cas particulier de la proposition précédente et le lemme d'Abel (déjà mentionné plus haut).

Corollaire 1.6. — *Pour un élément f de* DivLog*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathrm{As}_c(f) = 0$.

ii) *Le polynôme* $\mathrm{As}_\Sigma(f)$ *est constant.*

iii) *La série* $f(1)$ *est convergente.*

On a alors

$$f(1) = \mathrm{As}_\Sigma(f) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

1.2. Polylogarithmes et polyzêtas. — Nous allons maintenant définir les polylogarithmes, qui vont apparaître comme des cas particuliers de séries à divergence logarithmique.

Notation 1.7. — *Le symbole $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des séquences d'entiers strictement positifs.*

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc le monoïde libre formé sur $\mathbb{N}^*$. En particulier, on peut lui appliquer les définitions du paragraphe I.3.1 (ex. 3 et 4). Le poids $|\underline{s}|$ d'une séquence $\underline{s}$ est donc la somme de ses éléments et sa longueur $\ell(\underline{s})$ est le nombre de ses éléments (voir également le paragraphe I.5.1).

Définition 1.8. — *Pour toute séquence $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ de $\mathcal{S}$, la fonction polylogarithme* $\mathrm{Li}(\underline{s})$ *associée est donnée par la série entière*

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}(\underline{s}\,|z) &:= \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}} \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^{s_1}} \left(\sum_{n > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{1}{n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}} \right) \end{aligned}$$

Par convention, si la séquence $\underline{s}$ est vide, on posera $\mathrm{Li}(\underline{s}\,|z) = 1$ *pour tout nombre réel z.*

Lorsque la séquence ne comporte qu'un seul élément, on le mettra en indice si la variable n'apparaît pas dans l'écriture pour éviter des ambiguités de notation dans la suite.

Remarque. — La définition ci-dessus est celle des polylogarithmes généralisés. Si la séquence $\underline{s}$ ne comporte qu'un élément, on retrouve le polylogarithme classique

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n>0} \frac{z^n}{n^k}$$

En particulier pour tout élément z de $]-1,1[$, on a $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$.

Définition 1.9. — *Une séquence de $\mathcal{S}$ sera dite convergente si et seulement si elle ne commence pas par 1. On notera $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$ l'ensemble des séquences convergentes.*

D'après cette définition, la séquence vide est convergente. Cette terminologie est justifiée par le second volet de la proposition ci-dessous.

Proposition 1.10. — *Pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}$, la fonction* $\mathrm{Li}(\underline{s})$ *appartient à* DivLog.

Si la séquence $\underline{s}$ est convergente, la suite des sommes partielles $\mathrm{Part}_n(\mathrm{Li}(\underline{s}))$ *est convergente ; on a* $\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{s})) = 0$ *et le polynôme* $\mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(\underline{s}))$ *est constant.*

Si $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ avec $s_1 = 1$, on a

$$\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{s})) = \mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(s_2, \dots, s_r))$$

Démonstration. — On applique la proposition 1.5 en faisant une récurrence sur la longueur de la séquence $\underline{s}$:

Si $\underline{s}$ est vide, $\mathrm{Coeff}_n(Li(\underline{s}))$ est nul pour $n \neq 0$.

Soit $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ une séquence de $\mathcal{S}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Coeff}_n(\mathrm{Li}(\underline{s})) &\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{n^{s_1}} \sum_{n>n_2>\cdots>n_r>0} \frac{1}{n_2^{s_2}\cdots n_r^{s_r}} \\
&\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{n^{s_1}} \mathrm{Part}_n(\mathrm{Li}(s_2, \dots, s_r)) \\
&= \frac{1}{n^{s_1}} \left(\mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(s_2, \dots, s_r))(\log n) + o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right)\right),
\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de l'hypothèse de récurrence et de la proposition 1.5.

La fonction $\mathrm{Li}(\underline{s})$ satisfait donc bien aux conditions de la définition 1.3 : dans le cas $s_1 = 1$, le polynôme $\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{s}))$ est égal à $\mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(s_2, \dots, s_r))$ et dans le cas $s_1 > 1$, le polynôme $\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{s}))$ est nul, ce qui implique que le polynôme $\mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(\underline{s}))$ est constant, d'après la proposition 1.5. □

Notation 1.11. — *Pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$, et tout entier positif n, on notera $\zeta_n(\underline{s})$ le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite des sommes partielles de* $\mathrm{Li}(\underline{s})$, *c'est-à-dire*

$$\zeta_n(\underline{s}) := \mathrm{Part}_n(\mathrm{Li}(\underline{s})) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n>n_1>n_2>\ldots>n_r>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}}$$

Pour toute séquence convergente $\underline{s}$ de $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$, on pose

$$\zeta(\underline{s}) := \lim_{n\to\infty} \zeta_n(\underline{s}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n_1>n_2>\ldots>n_r>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}} = \mathrm{Li}(\underline{s}\,|1)$$

Ce sont les nombres de la forme $\zeta(\underline{s})$ que nous appellons *polyzêtas.* On trouve dans la littérature diverses appellations pour ces nombres : multiple zêta values, qui s'abrège en MZV's, nombres d'Euler/Zagier, séries harmoniques multiples, multizêtas, etc.

Remarque. — La suite $\zeta_{n+1}(1)$ n'est autre que la série harmonique, habituellement notée H_n. La suite des coefficients de Li_1 est $1/n$, donc dans ce cas, $\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}_1) = 1$ et $(d/dt)\mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}_1) = 1$. On retrouve donc le résultat très classique

$$H_n = \log(n) + \gamma + o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right),$$

et γ est la constante d'Euler. On verra plus loin que, contrairement à ce qu'on pourrait penser, celle-ci n'intervient pas dans nos constructions.

1.3. Polylogarithmes et intégrales itérées. — Nous allons dans ce paragraphe décrire le codage des polylogarithmes et donc des polyzêtas par des mots en deux lettres. Cela nous permettra de voir les symboles $\mathrm{Li}(\bullet\,|z)$ et ζ comme des applications linéaires d'une algèbre de mélange dans $\mathbb{R}$.

Notation 1.12. — *La lettre X désigne un alphabet numéroté formé de deux lettres x_0 et x_1.*

Rappelons que le monoïde libre X^* formé sur X est une base homogène de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$, que la base duale associée est notée $\widetilde{X^*}$, que l'on peut indicer les éléments de X^* par des séquences de 0 et de 1, et enfin que l'élément de la base duale associée au mot $x_{\underline{\varepsilon}}$ est noté $\widetilde{x}_{\underline{\varepsilon}}$ (où $\underline{\varepsilon}$ est une séquence de 0 et de 1).

Définition 1.13. — *A tout élément $\widetilde{m} = \widetilde{x}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ de $\widetilde{X^*}$ et à tous $a, b \in]0,1[$ tels que $a \leqslant b$, on associe l'intégrale*

$$\mathrm{Int}(\widetilde{m}\,|a,b) := \int_{a\leqslant t_n\leqslant t_{n-1}\cdots\leqslant t_1\leqslant b} \omega_{\varepsilon_1}(t_1) \wedge \omega_{\varepsilon_2}(t_2) \wedge \cdots \wedge \omega_{\varepsilon_n}(t_n)$$

les formes différentielles ω_0 et ω_1 étant définies par :

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \textit{et} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

Par convention, si le mot m est vide, on posera $\mathrm{Int}(\widetilde{m}\,|z) = 1$.

Les intégrales de ce type sont souvent appelées des intégrales itérées, en raison de la propriété suivante, qui pourrait servir de définition.

Proposition 1.14. — *Pour tout mot m de X^*, tous nombres réels a et b tels que $0 < a \leqslant b < 1$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, on a*

$$\mathrm{Int}(\widetilde{x_\varepsilon m}\,|a,b) = \int_a^b \omega_\varepsilon(t)\mathrm{Int}(\widetilde{m}\,|a,t)$$

Comme $\widetilde{X^*}$ est une base de $\widetilde{\mathbb{Q}\langle X\rangle}$, l'application $\mathrm{Int}(\bullet\,|a,b)$ de $\widetilde{X^*}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'étendre par linéarité :

Notation 1.15. — *Pour tous nombres réels a et b tels que $0 < a \leqslant b < 1$, le symbole* $\mathrm{Int}(a,b)$ *désignera l'application $\mathbb{Q}$-linéaire de $\widetilde{\mathbb{Q}\langle X\rangle}$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\widetilde{X^*}$ est* $\mathrm{Int}(\bullet\,|a,b)$.

Pour tout élément v de $\widetilde{\mathbb{Q}\langle X^*\rangle}$, on notera encore $\mathrm{Int}(v\,|a,b)$ *l'image de v par* $\mathrm{Int}(a,b)$.

Le parti pris de partir de la base duale peut paraître peu naturel et d'ailleurs n'est pas courant dans la littérature. Il est cependant justifié par la proposition ci-dessous.

Proposition 1.16. — *Pour tous $a, b \in]0,1[$, tels que $a \leqslant b$, l'application* $\mathrm{Int}(a,b)$ *est un morphisme d'algèbres de* $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'on a

$$\mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{m_2}\,|a,b) = \mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\,|a,b)\mathrm{Int}(\widetilde{m_2}\,|a,b)$$

pour tous éléments a et b de $]0,1[$ avec $a \leqslant b$ et tous mots m_1 et m_2 de X^*, ce que nous faisons par récurrence sur la somme des longueurs[(1)] de m_1 et m_2.

Si m_1 ou m_2 est vide, il n'y a rien à vérifier, si ce n'est que les conventions sont cohérentes. Supposons l'assertion vérifiée si la somme des longueurs de m_1 et m_2 est au plus $n+1$. D'après la proposition I.5.14, pour tous ε_1 et ε_2 de $\{0,1\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_1} m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{x_{\varepsilon_2} m_2}\,|a,b) &= \mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_1}} \diamond(\widetilde{m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{x_{\varepsilon_2} m_2})\,|a,b)\\ &\quad+\mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_2}} \diamond(\widetilde{x_{\varepsilon_1} m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{m_2})\,|a,b)\\ = \int_a^b \omega_{\varepsilon_1}(t)\mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{x_{\varepsilon_2} m_2}\,|a,t) &+ \int_a^b \omega_{\varepsilon_2}(u)\mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_1} m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{m_2}\,|a,u),\end{aligned}$$

(1) À partir de la définition 1.19, on appellera cette longueur le poids.

grâce à la proposition 1.14. Par hypothèse de récurrence, ceci est égal à

$$\int_a^b \omega_{\varepsilon_1}(t)\mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\,|a,t)\mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_2}m_2}\,|a,t) + \int_a^b \omega_{\varepsilon_2}(u)\mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_1}m_1}\,|a,u)\mathrm{Int}(\widetilde{m_2}\,|a,u)$$

En appliquant à nouveau la proposition 1.14, ceci vaut

$$\int_{a\leqslant u\leqslant t\leqslant b} \omega_{\varepsilon_1}(t)\mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\,|a,t)\omega_{\varepsilon_2}(u)\mathrm{Int}(\widetilde{m_2}\,|a,u)$$
$$+\int_{a\leqslant t\leqslant u\leqslant b} \omega_{\varepsilon_2}(u)\mathrm{Int}(\widetilde{m_2}\,|a,u)\omega_{\varepsilon_1}(t)\mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\,|a,t)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\int_{(t,u)\in[a,b]^2} \omega_{\varepsilon_1}(t)\mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\,|a,t)\omega_{\varepsilon_2}(u)\mathrm{Int}(\widetilde{m_2}\,|a,u) \\ =\ & \left(\int_a^b \omega_{\varepsilon_1}(t)\mathrm{Int}(\widetilde{m_1}\,|a,t)\right)\left(\int_a^b \omega_{\varepsilon_2}(u)\mathrm{Int}(\widetilde{m_2}\,|a,u)\right) \\ =\ & \mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_1}m_1}\,|a,b)\mathrm{Int}(\widetilde{x_{\varepsilon_2}m_2}\,|a,b), \end{aligned}$$

en appliquant encore la proposition 1.14 □

On pourrait également démontrer cela directement par décomposition du produit cartésien de deux simplexes en utilisant la règle de calcul de la proposition I.5.12.

Nous arrivons à la correspondance entre polylogarithmes et intégrales itérées. Commençons par coder les séquences avec les mots de X^*.

Définition 1.17. — *A toute séquence $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ de $\mathcal{S}$, on associe le mot*

$$m_{\underline{s}} = x_0^{s_1-1}x_1x_0^{s_2-1}\cdots x_0^{s_r-1}x_1$$

La notation du mot dual $\widetilde{m_{\underline{s}}}$ sera abrégée en $\widetilde{m}_{\underline{s}}$.

On a ainsi défini une injection $\underline{s} \mapsto m_{\underline{s}}$ de $\mathcal{S}$ dans X^*.

Proposition 1.18. — *Pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$ et tout nombre z de $[0,1[$, l'intégrale impropre $\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}}\,|0,z)$ est convergente et on a*

$$\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}}\,|0,z) = \mathrm{Li}(\underline{s}\,|z)$$

Démonstration. — On effectue une récurrence sur le poids $|\underline{s}|$ de $\underline{s}$. Le cas de la séquence vide est trivial. La seule séquence de poids 1 est (1) ; on a $m_1 = x_1$ et dans ce cas

$$\mathrm{Int}(\widetilde{x}_1\,|0,z) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\log(1-z) = \mathrm{Li}_1(z)$$

Soit $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ une séquence de poids au moins 2. Tout d'abord remarquons qu'on n'intègre que des fonctions à valeurs positives. Distinguons deux cas :

Si $s_1 > 1$: Soit $\underline{s'}$ la séquence $(s_1 - 1, s_2, \dots, s_r)$. Par définition de l'application m, on a $m_{\underline{s}} = x_0 m_{\underline{s'}}$ et donc

$$\forall \varepsilon \in]0, z[, \ \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}} \,|\varepsilon, z) = \int_\varepsilon^z \frac{dt}{t} \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|\varepsilon, t)$$

Par hypothèse de récurrence, l'intégrale $\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|0, t)$ est convergente et on a donc $\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|\varepsilon, t) \leqslant \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|0, t)$, d'où

$$\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}} \,|\varepsilon, z) \leqslant \int_\varepsilon^z \frac{dt}{t} \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|0, t) = \int_\varepsilon^z \frac{dt}{t} \mathrm{Li}(\underline{s'} \,|t),$$

ce qui montre la convergence de $\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}} \,|0, z)$, car la série entière $\mathrm{Li}(\underline{s'} \,|z)$ est sans terme constant. Pour finir, on a

$$\begin{aligned}
\forall z \in]0, 1[, \ \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}} \,|0, z) &= \int_0^z \frac{dt}{t} \mathrm{Li}(\underline{s'} \,|t) \\
&= \int_0^z \sum_{n \geqslant 1} \frac{t^{n-1} dt}{n^{s_1 - 1}} \left(\sum_{n > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{1}{n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}} \right) \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^{s_1}} \left(\sum_{n > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{1}{n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}} \right) \\
&= \mathrm{Li}(\underline{s} \,|z)
\end{aligned}$$

Si $s_1 = 1$: Soit $\underline{s'}$ la séquence $(s_2, \dots, s_r)$ (de longueur $r - 1$). On a alors $m_{\underline{s}} = x_1 m_{\underline{s'}}$ et donc

$$\forall \varepsilon \in]0, z[, \ \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}} \,|\varepsilon, z) \overset{\text{déf}}{=} \int_\varepsilon^z \frac{dt}{1 - t} \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|\varepsilon, t)$$

A nouveau, $\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|0, t)$ est convergente, et la majoration

$$\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|\varepsilon, t) \leqslant \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s'}} \,|0, t)$$

montre que $\mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}}\,|0,z)$ est convergente. On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
\forall z \in]0,1[,\ \mathrm{Int}(\widetilde{m}_{\underline{s}}\,|0,z) &= \int_0^z \frac{dt}{1-t}\mathrm{Li}(\underline{s'}\,|t) \\
&= \int_0^z \frac{1}{1-t}\left(\sum_{n>0}\mathrm{Coeff}_n(\mathrm{Li}(\underline{s'}))t^n\right)dt \\
&= \int_0^z \left(\sum_{k\geqslant 0} t^k\right)\left(\sum_{n>0}\mathrm{Coeff}_n(\mathrm{Li}(\underline{s'}))t^n\right)dt \\
&= \int_0^z \left(\sum_{n_1\geqslant n_2>0}\mathrm{Coeff}_{n_2}(\mathrm{Li}(\underline{s'}))t^{n_1}\right)dt \\
&= \sum_{n_1\geqslant n_2>0}\mathrm{Coeff}_{n_2}(\mathrm{Li}(\underline{s'}))\frac{z^{n_1+1}}{n_1+1} \\
&= \sum_{n_1>n_2>0}\frac{z^{n_1}}{n_1}\mathrm{Coeff}_{n_2}(\mathrm{Li}(\underline{s'})) \\
&\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Li}(\underline{s}\,|z)
\end{aligned}
$$

□

1.4. Algèbres de polylogarithmes. — On constate que la longueur du mot $m_{\underline{s}}$ de X^* est égale au poids de la séquence $\underline{s}$. La longueur de la séquence $\underline{s}$ se retrouve quant à elle en comptant le nombre d'occurences de la lettre x_1 dans le mot $m_{\underline{s}}$. Cela justifie une entorse à la terminologie du paragraphe I.3.1 :

Définition 1.19. — *Nous appellerons poids le degré total de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ et longueur le degré partiel en x_1. On utilisera les notations $|\bullet|$ et $\ell(\bullet)$.*

La proposition ci-dessus et la définition 1.9 suggèrent d'utiliser une notation spécifique, à qui nous donnons suffisamment de généralité pour pouvoir l'utiliser dans tout ce chapitre :

Notation 1.20. — *Si Z est un alphabet, α et β deux lettres de Z, le symbole ${}_{\widehat{\alpha}}Z^*$ désignera l'ensemble des mots de Z^* ne commençant pas par α.*

Le symbole $Z^*_{\widehat{\beta}}$ désignera l'ensemble des mots de Z^* ne se terminant pas par β.

Le symbole ${}_{\widehat{\alpha}}Z^*_{\widehat{\beta}}$ désignera l'ensemble des mots de Z^* ne commençant pas par α et ne se terminant pas par β.

On désignera par $\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*}$ *le sous-ensemble de* $\widetilde{Z^*}$ *formé des* $\widetilde{m}$*, pour* $m \in {}_{\widehat{\alpha}}Z^*$*, et par* $\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*}\}$ *le sous-*$\mathbb{Q}$*-espace vectoriel de* $\widetilde{\mathbb{Q}\langle X\rangle}$ *engendré par* $\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*}$*.*

Le même genre de notation s'applique à $Z^*_{\widehat{\beta}}$ *et* ${}_{\widehat{\alpha}}Z^*_{\widehat{\beta}}$*.*

Avec cette convention, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$ des séquences convergentes pourrait donc aussi s'écrire ${}_{\widehat{1}}\mathcal{S}$, mais nous nous en tiendrons à $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$.

Il est évident que ${}_{\widehat{\alpha}}Z^*$, $Z^*_{\widehat{\beta}}$ sont des sous-monoïdes de Z^* ainsi que ${}_{\widehat{\alpha}}Z^*_{\widehat{\beta}}$, qui est leur intersection.

L'injection $\underline{s} \mapsto m_{\underline{s}}$ de $\mathcal{S}$ dans X^* a pour image $X^*_{\widehat{x_0}}$. Sa restriction à $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$ a pour image ${}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}$.

Avec ce langage, la proposition 1.18 nous permet de poser, en étendant encore par linéarité :

Définition 1.21. — *Soit* z *un nombre de l'intervalle* $[0,1[$*. On notera* $\mathrm{Li}(z)$ *l'unique application linéaire de* $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie :*

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S},\ \mathrm{Li}(z)(\widetilde{m}_{\underline{s}}) = \mathrm{Li}(\underline{s}\,|z)$$

Si v *est un élément de* $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$*, on écrira encore* $\mathrm{Li}(v\,|z)$ *plutôt que* $\mathrm{Li}(z)(v)$*.*

Le symbole Li *(seul) désignera l'application linéaire de* $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ *dans le* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel des fonctions analytiques sur* $]-1,1[$*. Son image, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par les polylogarithmes sera notée* $\mathsf{Polylog}$*.*

Les éléments de $X^*_{\widehat{x_0}}$ *seront appelés des mots convergents à droite et ceux de* $\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}$ *des mots duaux convergents à droite.*

On a donc, pour tout élément v de $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ et tout nombre z de l'intervalle $[0,1[$,

$$\mathrm{Li}(v\,|z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Int}(v\,|\varepsilon, z),$$

car v est par définition une combinaison linéaire *finie* de mots duaux convergents à droite.

Il est clair que l'image de $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$ par l'application $\underline{s} \mapsto m_{\underline{s}}$ est ${}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}$. Grâce à la proposition 1.10, cela nous permet donc de poser

Définition 1.22. — *On notera par abus encore* ζ *l'application linéaire de* $\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall v \in \mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}}\},\ \zeta(v) := \lim_{z\to 1} \mathrm{Li}(v\,|z) = \lim_{a\to 0, b\to 1} \mathrm{Int}(v\,|a,b)$$

On a donc $\zeta(\widetilde{m}_{\underline{s}}) = \zeta(\underline{s})$ pour toute séquence convergente $\underline{s}$, d'après la notation 1.11, le corollaire 1.6 et la proposition 1.18.

Proposition 1.23. — *Soient Z un alphabet numéroté, α et β deux lettres de Z. Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*}\}$, $\mathbb{Q}\{\widetilde{Z^*_{\widehat{\beta}}}\}$ et $\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*_{\widehat{\beta}}}\}$ sont des sous-algèbres de* $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(Z)$.

Démonstration. — Soient deux mots $m_1 = z_{i_1}\cdots z_{i_p}$ et $m_2 = z_{i_{p+1}}\cdots z_{i_{p+q}}$ de Z^*, de longueur respective p et q.

Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_{p,q}$ (*cf.* définition I.5.11). Posons $\sigma^{-1}(1) = k$ et $\sigma^{-1}(p+q) = l$.

Si k est compris entre 1 et p, par croissance de σ sur $\{1,\ldots,p\}$, on a $\sigma(1) \leqslant \sigma(k) = 1$, d'où $\sigma(1) = 1$, i.e. $k = 1$. De même, si k est compris entre $p+1$ et $p+q$, la croissance de σ sur $\{p+1,\ldots,p+q\}$ donne $\sigma(p+1) \leqslant \sigma(k) = 1$ et donc $k = p+1$. Tous les mots duaux intervenant dans l'expression de $\widetilde{m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{m_2}$ sont donc indicés par une séquence commençant, soit par i_1, soit par i_{p+1}. Si m_1 et m_2 sont tous deux dans ${}_{\widehat{\alpha}}Z^*$, les lettres z_{i_1} et $z_{i_{p+1}}$ sont différentes de α, et donc $\widetilde{m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{m_2}$ est une combinaison linéaire de mots duaux de $\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*}$.

Si l est compris entre 1 et p, on a alors $p+q = \sigma(l) \leqslant \sigma(p) \leqslant p+q$, et donc $l = p$. Si l est compris entre $p+1$ et $p+q$, on a alors $p+q = \sigma(l) \leqslant \sigma(p+q) \leqslant p+q$, d'où $l = p+q$. Tous les mots duaux intervenant dans $\widetilde{m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{m_2}$ sont donc indicés par des séquences finissant, soit par i_p, soit par i_{p+q}. Si m_1 et m_2 sont tous deux dans $Z^*_{\widehat{\beta}}$, il est alors clair que $\widetilde{m_1}\sqcup\!\sqcup\widetilde{m_2}$ appartient à $\mathbb{Q}\{\widetilde{Z^*_{\widehat{\beta}}}\}$.

On a prouvé que $\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*}\}$ et $\mathbb{Q}\{\widetilde{Z^*_{\widehat{\beta}}}\}$ sont des sous-algèbres de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(Z)$. Il en est donc de même de leur intersection $\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{\alpha}}Z^*_{\widehat{\beta}}}\}$. ☐

Notation 1.24. — *Les algèbres* $(\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\},\sqcup\!\sqcup)$ *et* $(\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}}\},\sqcup\!\sqcup)$ *seront notées respectivement* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *et* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$.

On a donc les inclusions

$$\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \subset \mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X) \subset \mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$$

Le corollaire ci-dessous résulte immédiatement de la proposition 1.16.

Corollaire 1.25. — *L'application linéaire* Li *est un morphisme d'algèbres de* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *dans* $\mathsf{Polylog}$.

L'application linéaire ζ est un morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *dans* $\mathbb{R}$.

En particulier on obtient que $\mathsf{Polylog}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{Q}$-algèbre des fonctions réelles analytiques sur l'intervalle $]-1,1[$. Hoang Ngoc Minh, Michel Petitot et Joris Van der Hoeven ont démontré ([**24**]) que *l'application* Li *est un isomorphisme d'algèbres.* Il est par ailleurs bien connu que $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ est une algèbre de polynômes (théorème de Radford) et il n'est pas difficile d'en déduire que $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{cv,d}}(X)$ est également une algèbre de polynômes. La structure de l'algèbre Polylog est donc complètement connue.

L'assertion concernant l'application ζ dans le corollaire ci-dessus sera appelée *la première relation de mélange.* On voit en effet que c'est une formulation condensée de tout un système de relations $\mathbb{Q}$-algébriques entre les polyzêtas. Elle entraîne en particulier que le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les polyzêtas est une sous-algèbre de $\mathbb{R}$.

Exemple. — Les séquences (2) et (3) correspondent respectivement aux mots $x_{0,1}$ et $x_{0,0,1}$, et on a

$$\widetilde{x}_{0,1} ш \widetilde{x}_{0,0,1} = \widetilde{x}_{0,1,0,0,1} + 3\widetilde{x}_{0,0,1,0,1} + 6\widetilde{x}_{0,0,0,1,1},$$

ce qui se décode en

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

Remarque. — La proposition 1.18 admet une réciproque : l'intégrale itérée impropre $\mathrm{Int}(\widetilde{w}\,|0,z)$ est convergente si et seulement si le mot w est convergent à droite. On peut également considérer le comportement au voisinage de 1 des intégrales associées à des mots non nécessairement convergents à droite : l'intégrale itérée impropre $\mathrm{Int}(\widetilde{w}\,|z,1)$ est convergente si et seulement si w est convergent à gauche, c'est-à-dire si w appartient à $\widehat{x_1}X^*$.

Ces cas n'ont pas été traités pour l'instant, parce que nous n'en aurons pas besoin dans la suite de ce chapitre et que l'on donnera à la section 4 tous les développements asymptotiques des intégrales $\mathrm{Int}(\widetilde{w}\,|a,b)$ au voisinage de $a = 0$ et $b = 1$ (sous forme de série génératrice). Cela démontrera au passage les assertions ci-dessus mentionnées.

1.5. Compléments. — La notion d'intégrale itérée la plus générale se définit en remplaçant X par un ensemble quelconque de formes différentielles méromorphes et les bornes a et b par un chemin évitant les singularités. Le résultat ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin γ.

Si l'on fixe un nombre N et une racine primitive $N^{\text{ème}}$ de l'unité μ, on peut considérer les formes différentielles ω_i, l'entier i étant compris entre 0 et N, données par $\omega_i(z) := dz/(\mu^i - z)$ pour $i \neq 0$ et $\omega_0 := dz/z$. On obtient par ces intégrales les polyzêtas aux racines de l'unité, qui généralisent les polyzêtas. Ces objets sont étudiés actuellement entre autres par Michaël Bigotte ([**3**]), Alexandre Goncharov ([**16, 18, 17**]) et Zdzislaw Wojtkowiak ([**48**], [**49**]).

2. Fonctions quasi-symétriques et deuxième système de relations

Préambule. — Dans la section précédente, on a vu que la première relation de mélange se transmettait des intégrales itérées aux polyzêtas par spécialisation en une valeur commune d'un couple de variables.

Dans cette section, nous décrivons un deuxième système de relations algébriques : la « deuxième relation de mélange », qui apparaît de façon parallèle : les polyzêtas sont des spécialisations de fonctions quasi-symétriques. Michael Hoffman semble avoir été le premier à l'étudier de manière systématique (*cf.* [**25**], [**26**]). Cette relation est la généralisation à tous les polyzêtas du fait élémentaire suivant :

$$\begin{aligned}
\text{Si } a,b>1,\quad \zeta(a)\zeta(b) &= \sum_{m,n>0} \frac{1}{m^a n^b} \\
&= \sum_{m>n>0} \frac{1}{m^a n^b} + \sum_{n>m>0} \frac{1}{m^a n^b} + \sum_{m=n>0} \frac{1}{m^a n^b} \\
&\overset{\text{déf}}{=} \zeta(a,b)+\zeta(b,a)+\zeta(a+b),
\end{aligned}$$

lequel remonte à Euler.

Le paragraphe 2.1 est consacré à la définition de l'espace $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ des fonctions quasi-symétriques sur un ensemble T dénombrable de variables commutatives. Ce concept généralise la notion de fonction symétrique à une infinité de variables et a été introduit essentiellement par Stanley et Gessel pour traiter des problèmes de combinatoire. L'application aux polyzêtas est immédiate au vu des formules, bien que cela n'ait été remarqué que relativement récemment. On réinterprète ζ comme une application d'un sous-espace $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$.

Au paragraphe 2.2, après avoir introduit un alphabet dénombrable Y, on montre que l'ensemble des fonctions quasi-symétriques est une sous-algèbre de $\mathbb{Q}[[T]]$ en dualité avec une cogèbre $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \Delta_\star)$, qui joue donc un rôle analogue à celui que jouait la cogèbre $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans la section précédente. Si le produit $\star$ des fonctions quasi-symétriques n'est pas exactement un produit $\sqcup\!\sqcup$, il en est cependant proche.

Cette analogie se précise au paragraphe 2.3 où l'on montre qu'il est possible de ramener, par un changement de base adéquat, la bigèbre $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \Delta_\star)$ à une bigèbre de concaténation, et donc le produit $\star$ à un produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$. Bien que ce changement de base fasse augmenter la complexité des formules, il jouera un rôle important dans la suite de cette thèse.

On étudie au paragraphe 2.4 l'effet de ce changement de base sur $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ et on arrive au deuxième système de relations.

En fin de compte, on pourra dire du deuxième système de relations qu'il est basé sur un codage plus simple que le premier, car on travaille quasiment directement sur les séquences, mais qu'il a une combinatoire plus compliquée.

À peu près tout ce qu'on trouvera dans cette section sur les propriétés des fonctions quasi-symétriques est librement adapté de l'article [**40**] de Claudia

Malvenuto et Christophe Reutenauer. Elles sont également traitées en détail dans [**15**]. On y trouve par exemple la série double de la définition 2.9.

2.1. Définitions. — Soit T un ensemble $\{(t_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\}$ d'indéterminées numérotées par les entiers strictement positifs. Le symbole $\Bbbk$ désignera toujours un anneau, *a priori* quelconque.

On peut définir deux graduations sur $\Bbbk[T]$. La première, le *degré*, est celle de l'exemple 5 du paragraphe I.3.1. Elle est caractérisée par le fait que les éléments de T sont homogènes, de degré 1.

La seconde, le *poids*, est traitée dans l'exemple 6 du paragraphe I.3.1 et est caractérisée par $|t_i| = i$, pour tout entier strictement positif i. L'espace de séries formelles $\Bbbk[[T]]$ est le complété de $\Bbbk[T]$ relativement au poids.

Tout élément F de $\Bbbk[[T]]$ peut s'écrire comme une somme infinie

$$F = \sum_m F_m m,$$

où m décrit l'ensemble des monômes (c'est-à-dire à peu de choses près $\mathbb{N}^{(T)}$). Nous appellerons *degré de F* la borne supérieure (qu'elle soit finie ou non) de l'ensemble des degrés des monômes m qui interviennent effectivement dans m, i.e. tels que $F_m \neq 0$.

Nous dirons qu'un élément de $\Bbbk[[T]]$ est homogène pour le degré s'il est une limite de polynômes de $\Bbbk[T]$ homogènes pour le degré, ou, ce qui revient au même, si tous les monômes apparaissant dans son développement sont de même degré. Cela permet de munir $\Bbbk[[T]]$ d'une nouvelle filtration. La topologie associée est plus fine que celle correspondant au poids, car un monôme de degré n est de poids au moins n.

Exemples :

1. L'élément $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} t_i$ est homogène de degré 1.
2. L'élément $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} t_1^i$ est de degré infini.

Classiquement, une fonction symétrique est un élément F de $\Bbbk[[T]]$ de degré fini tel que pour toutes séquences $\underline{i} = (i_1, \dots, i_r)$, $\underline{j} = (j_1, \dots, j_r)$ et $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ appartenant à $\mathcal{S}$ et de même longueur r, les deux monômes

$$t_{i_1}^{s_1} \cdots t_{i_r}^{s_r} \quad \text{et} \quad t_{j_1}^{s_1} \cdots t_{j_r}^{s_r} \tag{3.1}$$

aient le même coefficient dans F. Les fonctions quasi-symétriques sont caractérisées par une propriété plus faible :

Définition 2.1. — *Une série $F \in \Bbbk[[T]]$ est dite quasi-symétrique si et seulement si elle est de degré fini et pour toutes séquences de même longueur r $\underline{i} = (i_1, \dots, i_r)$, $\underline{j} = (j_1, \dots, j_r)$ et $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ dans $\mathcal{S}$, où $\underline{i}$ et $\underline{j}$ sont* strictement décroissantes, *les deux monômes (3.1) ont le même coefficient dans F.*

L'ensemble des fonctions quasi-symétriques est noté $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$.

L'ensemble $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$ est naturellement un sous-$\Bbbk$-module de $\Bbbk[[T]]$. En voici une base homogène pour le degré :

Proposition 2.2. — *Pour toute séquence* $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ *de* $\mathcal{S}$, *soit*

$$M_{\underline{s}} = M_{s_1,\ldots,s_r} = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r\geqslant 1} t_{n_1}^{s_1} \cdots t_{n_r}^{s_r} \tag{3.2}$$

L'ensemble des $M_{\underline{s}}$, *forme une base du* $\Bbbk$-*module* $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$.

Il est notamment clair que $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$ s'obtient par une extension de scalaires à partir de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$:

$$\mathsf{Qsym}_{\Bbbk} = \mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}} \otimes \Bbbk$$

On peut donc se contenter d'étudier $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$. On voit sur l'expression de la série $M_{\underline{s}}$ qu'elle est homogène de degré $|\underline{s}|$ dans $\Bbbk[[T]]$.

Le rapport entre fonctions quasi-symétriques et polyzêtas apparaît de la manière suivante (c'est une tautologie) :

Proposition 2.3. — *Pour toute séquence* $\underline{s}$ *de* $\mathcal{S}$ *et pour tout entier* $N \geqslant 2$, *on a*

$$\zeta_N(\underline{s}) = M_{\underline{s}}(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/(N-1), 0, 0, 0, \ldots) \tag{3.3}$$

et donc, si $\underline{s} \in \mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$.

$$\zeta(\underline{s}) = \lim_{N\to\infty} M_{\underline{s}}(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/(N-1), 0, 0, 0, \ldots) \tag{3.4}$$

Dans le même esprit qu'à la section précédente, nous sommes donc amenés à poser :

Définition 2.4. — *Soit* $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}^{\mathrm{cv}}$ *le sous-*$\Bbbk$*-module de* $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$ *de base* $M_{\underline{s}}$, $\underline{s} \in \mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$.

Par un léger abus, nous noterons ζ_N *la restriction à* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ *de l'évaluation*

$$F \in \mathbb{Q}[[T]] \mapsto F(1, 1/2, \ldots, 1/(N-1), 0, 0, \ldots)$$

Nous noterons aussi ζ *l'unique application* $\mathbb{Q}$-*linéaire de* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{\mathsf{cv}},\ \zeta(M_{\underline{s}}) = \zeta(\underline{s})$$

On a donc pour tout $F \in \mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$, $\zeta(F) = \lim_{N\to\infty} \zeta_N(F)$. L'ensemble $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}^{\mathrm{cv}}$ est un sous-module gradué de $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$, car il a une base homogène.

2.2. Structure de bigèbre de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$. — Dans ce paragraphe, nous allons montrer que $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{Q}[[T]]$, en la mettant en dualité avec une bigèbre.

Nous travaillons à présent avec un alphabet $Y = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$, encore numéroté par les entiers strictement positifs. On appliquera au monoïde libre Y^* et donc aux espaces de polynômes et de séries non commutatifs en Y les notions de longueur et de poids habituelles (*cf.* § I.3.1, ex. 3 et 4).

Pour alléger certaines notations, nous adoptons la convention $y_0 = 1$, qui est cohérente avec le poids : on a ainsi $|y_n| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant les mots en l'alphabet Y ne sont pas en correspondance bijective avec les séquences d'entiers naturels, ce qui peut justifier de l'éviter dans certains contextes. Ce ne sera pas le cas ici.

Définition 2.5. — *Soit $\Delta_\star$ l'unique morphisme d'algèbres de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ dans $\mathbb{Q}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle Y\rangle$ défini par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_\star(y_n) = \sum_{k+l=n} y_k \otimes y_l$$

Nous noterons $\star$ le produit obtenu par dualité sur $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$.

Le coproduit $\Delta_\star$ peut s'étendre à $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ pour tout anneau $\Bbbk$, suivant les considérations du paragraphe I.3.3. Nous allons utiliser cette extension de scalaires en prenant pour $\Bbbk$ des algèbres de séries formelles : $\mathbb{Q}[[t]]$, où t est une indéterminée commutative et $\mathbb{Q}[[T]]$. Par abus, le coproduit sera encore noté $\Delta_\star$ après extension de scalaires et prolongement par continuité.

Rappelons que les espaces vectoriels filtrés $\mathbb{Q}[[T]]\langle\langle Y\rangle\rangle$ et $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle[[T]]$ s'identifient tous deux à $\mathbb{Q}\{\{\mathbb{N}^{(T)} \times Y^*\}\}$ (le monoïde $\mathbb{N}^{(T)} \times Y^*$ étant muni du poids total[(2)]).

Dans la suite, la lettre t désigne une variable formelle commutative.

Notation 2.6. — *Soit $\mathcal{Y}$ l'élément suivant de $\mathbb{Q}[t]\langle\langle Y\rangle\rangle$:*

$$\mathcal{Y} = \sum_{n\geqslant 0} y_n t^n$$

Notation 2.7. — *Pour tous anneaux $\Bbbk$ et $\Bbbk'$, et tout élément x de $\Bbbk'$, on désignera par ev_x l'unique morphisme d'algèbres de $\Bbbk[t]$ dans $\Bbbk$ tel que $\mathrm{ev}_x(t) = x$.*

L'élément $ev_x\langle\langle Y\rangle\rangle$ de $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ sera noté $\mathcal{Y}(x)$.

La proposition ci-dessous (et son intérêt) est connue au moins depuis Ditters dans les années 70.

(2) On a donc $|t_n| = |y_n| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.8. — *L'élément* $\mathcal{Y}$ *de* $\mathbb{Q}[t]\langle\langle Y\rangle\rangle$ *est diagonal pour le coproduit* $\Delta_\star$.

Démonstration. — On a successivement :

$$\begin{aligned}\Delta_\star(\mathcal{Y}) &= \sum_{n\geqslant 0} t^n \Delta_\star(y_n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} t^n \sum_{k+l=n} y_k \underset{\mathbb{Q}[t]}{\otimes} y_l\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k+l=n} t^k y_k \underset{\mathbb{Q}[t]}{\otimes} t^l y_l\\ &\overset{\text{déf}}{=} \mathcal{Y} \underset{\mathbb{Q}[t]}{\widehat{\otimes}} \mathcal{Y}\end{aligned}$$

□

Définition 2.9. — *La série génératrice des fonctions quasi-symétriques est l'élément suivant de* $\mathbb{Q}[[T]]\langle\langle Y\rangle\rangle$:

$$(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}} = \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} M_{\underline{s}} y_{\underline{s}}$$

Proposition 2.10. — *La série* $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ *est un élément diagonal de la cogèbre topologique* $(\mathbb{Q}[[T]]\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$.

Démonstration. — Pour tout entier N, définissons un élément $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}}$ de $\mathbb{Q}[[T]]\langle\langle Y\rangle\rangle$ par la formule :

$$(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}} = \mathcal{Y}(t_N)\cdots\mathcal{Y}(t_2)\mathcal{Y}(t_1) \tag{3.5}$$

Pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{Y}(t_i)$ est diagonal, puisque c'est l'image de l'élément diagonal $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{Q}[t]\langle\langle Y\rangle\rangle$ par $\mathrm{ev}_{t_i}\langle\langle Y\rangle\rangle$ (*cf.* cor. I.3.12). Donc pour tout N, $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}}$ est diagonal.

Si l'on développe le produit, on obtient :

$$\begin{aligned}(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}} &= \sum_{r=0}^{N} \sum_{\substack{\underline{s}=(s_1,\dots,s_r)\in\mathcal{S}\\ N\geqslant i_1>\dots>i_r\geqslant 1}} t_{i_1}^{s_1}\cdots t_{i_r}^{s_r} y_{s_1,\dots,s_N} \quad \text{d'où}\\ (\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}} - (\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}} &= \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S},\ell(\underline{s})>N} M_{\underline{s}} y_{\underline{s}}\\ &\quad + \sum_{r=0}^{N} \sum_{\substack{\underline{s}=(s_1,\cdots,s_r)\in\mathcal{S}\\ i_1>\dots>i_r\geqslant 1,\ i_1>N}} t_{i_1}^{s_1}\cdots t_{i_r}^{s_r} y_{s_1,\dots,s_r}\end{aligned}$$

Étudions séparément chacun des deux termes de cette somme :

Les séquences $\underline{s}$ du premier terme sont toutes de longueur supérieure à N. Il est alors clair que $M_{\underline{s}}$ est de poids supérieur à N.

Dans les termes de la seconde somme, on a toujours $i_1 > N$, donc le poids partiel en T est supérieur à N.

Finalement, $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}} - (\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}}$ ne comporte que des termes de poids total supérieur à N, ce qui montre que $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ est la limite de $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}}$ lorsque N tend vers l'infini.

Comme chaque $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}}$ est diagonal pour tout N strictement positif, la limite $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ est donc diagonale (*cf.* §I.3.3). $\square$

Remarque. — L'argument développé dans la proposition ci-dessus montre en fait que la suite $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})^N_{\text{gén}}$ tend vers $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ dans $\mathbb{Q}\langle Y\rangle[[T]]$, muni du poids porté par les lettres de T. Ceci apparaît déjà pour $\mathcal{Y}$, qui appartient également à $\mathbb{Q}\langle Y\rangle[[t]]$.

Corollaire 2.11. — *L'application linéaire de* $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$ *dans* $\mathbb{Q}[[T]]$ *donnée par*

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S},\ \widetilde{y}_{\underline{s}} \mapsto M_{\underline{s}}$$

est un isomorphisme d'algèbres de $(\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}, \star)$ *sur* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$.

Le produit $\star$ *munit* $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$ *d'une structure d'algèbre associative et commutative. La cogèbre* $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \Delta_\star)$ *est coassociative, coünifère et cocommutative.*

Démonstration. — C'est évidemment un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, puisque l'image de la base $\widetilde{Y^*}$ est la base M.

C'est un morphisme d'algèbres par la proposition I.3.11 puisque sa série génératrice $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ est un élément diagonal.

Les propriétés voulues du produit $\star$ découlent alors de l'isomorphisme d'algèbres et entraînent par dualité celles du coproduit $\Delta_\star$. $\square$

A partir de maintenant, nous pouvons donc nous permettre d'*identifier les algèbres* $(\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}, \star)$ *et* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$. Cela revient à considérer $M_{\underline{s}}$ et $\widetilde{y}_{\underline{s}}$ comme égaux, et nous privilégierons dans la suite la notation $\widetilde{y}_{\underline{s}}$ pour mettre en évidence le parallèle avec les constructions liées à l'alphabet X.

La notation $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ est justifiée *a posteriori* : cette série formelle apparaît maintenant comme la série génératrice de l'identité de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$.

Comme nous sommes dans un contexte qui peut facilement prêter à confusion, on utilisera le symbole $\star$ pour désigner le produit des fonctions quasi-symétriques, sauf si aucun doute n'est possible (par exemple si on multiplie des développements explicites en les variables de T).

Corollaire 2.12. — *Pour tout entier* $N \geqslant 2$, ζ_N *est un morphisme de* $\mathbb{Q}$-*algèbres de* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — D'après la proposition 2.3, ζ_N est la restriction à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ de l'évaluation en $(1, 1/2, 1/3, \dots, 1/(N-1), 0, \dots)$ qui est par définition un morphisme d'algèbres. □

Il existe plusieurs règles de calcul pour le produit $\star$. Par exemple, Hoffman utilise l'analogue suivant de la proposition I.5.14.

Proposition 2.13. — *Pour tous éléments u et v de $\widetilde{Y^*}$ et tous entiers k et l, on a*

$$(\widetilde{y}_k \diamond u) \star (\widetilde{y}_l \diamond v) = \widetilde{y}_k \diamond (u \star (\widetilde{y}_l \diamond v)) + \widetilde{y}_l \diamond ((\widetilde{y}_k \diamond u) \star v) + \widetilde{y}_{k+l} \diamond (u \star v)$$

On aurait pu se limiter dans ce paragraphe à définir le produit $\star$ directement sur les mots duaux de $\widetilde{Y^*}$ par la formule ci-dessus et à montrer que (pour tout entier N) ζ_N est un morphisme d'algèbres de $(\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \star})$ dans $\mathbb{R}$, puis que $\mathbb{Q}\{\widetilde{\widehat{y_1}Y^*}\}$ (qui correspond à $\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\mathbb{Q}}$) est une sous-algèbre (cela apparaîtra su paragraphe suivant).

Comme la plupart des arguments que nous développerons concernant ce deuxième système de relations seront basés sur la bigèbre $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \cdot, \Delta_\star)$, nous avons préféré partir directement du coproduit $\Delta_\star$.

2.3. Étude de la bigèbre $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \cdot, \Delta_\star)$

Définition 2.14. — *Pour tout entier strictement positif n, soit u_n le terme de poids n de la série $\log(\mathcal{Y}(1))$ de $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$. On notera U l'ensemble $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$.*

Pour toute séquence $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ de $\mathcal{S}$, on pose

$$u_{\underline{s}} = u_{s_1} \cdots u_{s_r}$$

Par abus, on notera U^* la famille $(u_{\underline{s}})_{\underline{s}\in\mathcal{S}}$.

Il est clair que le poids de $u_{\underline{s}}$ est $|\underline{s}|$.

Proposition 2.15. — *Pour tout entier n, l'élément u_n de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ est primitif pour le coproduit $\Delta_\star$.*

Démonstration. — En effet, $\mathcal{Y}(1)$ est diagonal, car c'est l'image de $\mathcal{Y}(t)$ par $ev_1\langle\langle Y\rangle\rangle$. Son logarithme $\mathcal{U}(1)$ est donc primitif. Comme le coproduit $\Delta_\star$ est homogène pour le poids, ceci entraîne que les composantes homogènes de $\mathcal{U}(1)$ (i.e. les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) sont primitives. □

Proposition 2.16. — *Pour tout entier n strictement positif, l'expression de u_n est la suivante :*

$$u_n = \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S},\ |\underline{s}|=n} \frac{(-1)^{\ell(\underline{s})-1}}{\ell(\underline{s})} y_{\underline{s}}$$

Démonstration. — On a successivement :

$$\begin{aligned}
\log(\mathcal{Y}(1)) &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\mathcal{Y}(1)-1)^k \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\sum_{s\geqslant 1} y_s\right)^k \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{s_1,\dots,s_k} y_{s_1}\cdots y_{s_k} \\
&= \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \frac{(-1)^{\ell(\underline{s})-1}}{\ell(\underline{s})} y_{\underline{s}}
\end{aligned}$$

La partie de poids n de $\log(\mathcal{Y}(1))$ est bien donnée par la formule de l'énoncé. □

Notation 2.17. — *La lettre V désigne un nouvel alphabet dénombrable dont les éléments $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indexés par les entiers strictement positifs.*

Définition 2.18. — *Soient $\underline{c}=(c_1,\dots,c_p)$ et $\underline{d}=(d_1,\dots,d_q)$ deux séquences de $\mathcal{S}$. On dit que $\underline{c}$ est plus fine que $\underline{d}$ s'il existe q séquences $\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_q$ de $\mathcal{S}$ telles que :*

$$|s_1| = d_1, |s_2| = d_2, \dots, |s_q| = d_q \quad \text{et} \quad \underline{c} = \underline{s}_1\underline{s}_2\cdots\underline{s}_q$$

(concaténation des séquences).

On note alors $\underline{c} \succcurlyeq \underline{d}$ et l'on pose $(\underline{c},\underline{d})! = \ell(\underline{s}_1)!\ell(\underline{s}_2)!\cdots\ell(\underline{s}_q)!$

Il est immédiat que deux séquences de $\mathcal{S}$ comparables pour cette relation d'ordre sont de même poids. En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de séquences plus fines (ou moins fines) qu'une séquence donnée.

Proposition 2.19. — *La formule ci-dessous donne l'expression de tout élément de Y^* en fonction des éléments de U^* (la sommation porte sur $\underline{c}$) :*

$$\forall \underline{d}\in\mathcal{S},\ y_{\underline{d}} = \sum_{\underline{c}\succcurlyeq\underline{d}} \frac{1}{(\underline{c},\underline{d})!} u_{\underline{c}}$$

Démonstration. — On a l'identité suivante dans $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$:

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 0} y_i &\overset{\text{déf}}{=} \exp\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)\\ &= \sum_{r\geqslant 0}\frac{1}{r!}\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)^r\\ &= \sum_{r\geqslant 0}\sum_{\substack{\underline{s}\in\mathcal{S}\\ \ell(\underline{s})=r}}\frac{1}{r!}u_{\underline{s}}\end{aligned}$$

et donc, en prenant les composantes homogènes de poids n, compte tenu de $|u_{\underline{s}}| = |\underline{s}|$, qui est vrai pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ y_n = \sum_{|\underline{s}|=n}\frac{1}{\ell(s)!}u_{\underline{s}}$$

Par suite, pour toute séquence $\underline{d} = (d_1, \dots , d_q)$ de $\mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned}y_{d_1}\cdots y_{d_q} &= \sum_{\substack{\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_q\in\mathcal{S}\\ |\underline{s}_1|=d_1,\dots,|\underline{s}_q|=d_q}}\frac{1}{\ell(\underline{s}_1)!\cdots\ell(\underline{s}_q)!}u_{\underline{s}_1}\cdots u_{\underline{s}_q}\\ &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{\underline{c}\succcurlyeq\underline{d}}\frac{1}{(\underline{c},\underline{d})!}u_{\underline{c}}\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.20. — *La famille U^* est une base homogène de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$.*

Démonstration. — La proposition ci-dessus montre que U^* est une famille génératrice. L'homogénéité a déjà été mentionnée.

Pour tout entier n, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ formé des polynômes non commutatifs de poids n est le nombre d'éléments de Y^* de poids n, c'est-à-dire le nombre de séquences de $\mathcal{S}$ de poids n. C'est aussi le nombre d'éléments de poids n de la famille U^*. La liberté s'ensuit. □

Corollaire 2.21. — *L'unique application linéaire ι de $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(V)$ dans $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ telle que $\iota(v_{\underline{s}}) = u_{\underline{s}}$, pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$, est un isomorphisme homogène de bigèbres de $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(V)$ sur $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \bullet, \Delta_\star)$.*

Démonstration. — C'est un morphisme d'algèbres par construction. Pour démontrer que c'est un morphisme de cogèbres, il suffit de le vérifier sur les générateurs de la bigèbre $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(V)$, c'est-à-dire les éléments de V. On doit donc avoir

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Delta_\star\iota(v_n) = (\iota\otimes\iota)\Delta v_n$$

Compte tenu de $\iota(v_n) = u_n$ et de la primitivité de v_n, l'assertion équivaut exactement à la primitivité de u_n pour le coproduit $\Delta_\star$ (*cf.* prop. 2.15).

Le corollaire 2.20 montre alors que ι est bijectif, puisque l'image par ι de la base V^* est U^*, qui est une base de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$. $\square$

Corollaire 2.22. — *La transposée $\widetilde{\iota^{-1}}$ est un isomorphisme homogène d'algèbres de* $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)$ *sur* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. — Cela découle immédiatement par dualité du corollaire précédent. $\square$

Proposition 2.23. — *Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}$. L'élément $\widetilde{u}_{\underline{s}}$ de la base duale de U^* correspondant à $u_{\underline{s}}$ est donné par :*

$$\widetilde{u}_{\underline{s}} = \widetilde{\iota^{-1}}(\widetilde{v}_{\underline{s}}) \tag{3.6}$$

Démonstration. — Cela découle immédiatement de la définition de ι et du comportement des transposées sur les bases duales. $\square$

2.4. Deuxième système de relations. — On peut donner une expression des éléments de $\widetilde{U^*}$ en fonction des éléments de $\widetilde{Y^*}$. On en déduit ensuite le corollaire 2.25 qui sera un ingrédient important de la section 3.

Proposition 2.24. — *Les éléments de $\widetilde{U^*}$ se calculent en fonction de ceux de $\widetilde{Y^*}$ par la formule suivante (où la sommation porte sur $\underline{d}$) :*

$$\widetilde{u}_{\underline{c}} = \sum_{\underline{c} \succcurlyeq \underline{d}} \frac{1}{(\underline{c},\underline{d})!} \widetilde{y}_{\underline{d}} \tag{3.7}$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.19, pour toutes séquences $\underline{c}$ et $\underline{d}$ de $\mathcal{S}$, on a :

$$(y_{\underline{d}}|\widetilde{u}_{\underline{c}}) = \begin{cases} 1/(\underline{c},\underline{d})! & \text{si } \; \underline{c} \succcurlyeq \underline{d} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fixons maintenant $\underline{c}$. Si l'on pose

$$\xi_{\underline{c}} := \sum_{\underline{c} \succcurlyeq \underline{d}} \frac{1}{(\underline{c},\underline{d})!} \widetilde{y}_{\underline{d}},$$

on a immédiatement, pour toute séquence $\underline{d}$ de $\mathcal{S}$:

$$(y_{\underline{d}}|\xi_{\underline{c}}) = \begin{cases} 1/(\underline{c},\underline{d})! & \text{si } \; \underline{c} \succcurlyeq \underline{d} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc l'égalité de $(y_{\underline{d}}|\widetilde{u}_{\underline{c}})$ et $(y_{\underline{d}}|\xi_{\underline{c}})$. Comme $\{(y_{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathcal{S}})\}$ est une base de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$, ceci implique $\xi_{\underline{c}} = \widetilde{u}_{\underline{c}}$. $\square$

Corollaire 2.25. — *L'image de $\mathbb{Q}\{\widetilde{_{\widehat{v_1}}V^*}\}$ par $\widetilde{\iota^{-1}}$ est* $\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. — Rappelons que $\mathbb{Q}\{\widetilde{_{\widehat{v_1}}V^*}\}$ est le sous-espace vectoriel de $\widetilde{\mathbb{Q}\langle V\rangle}$ engendré par la famille $(\widetilde{v}_{\underline{c}})$, où $\underline{c}$ parcourt les séquences convergentes.

D'après la proposition 2.23, on a $\widetilde{\iota^{-1}}(\widetilde{v}_{\underline{c}}) = \widetilde{u}_{\underline{c}}$ pour toute séquence convergente $\underline{c}$. Il est clair d'après la définition 2.18 qu'une séquence $\underline{d}$ moins fine que $\underline{c}$ vérifie en particulier $d_1 \geqslant c_1$ et est donc convergente. La formule de la proposition 2.24 montre donc que $\widetilde{u}_{\underline{c}}$ appartient à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$.

Nous avons donc l'inclusion de $\widetilde{\iota^{-1}}(\mathbb{Q}\{\widetilde{_{\widehat{v_1}}V^*}\})$ dans $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$. Comme $\widetilde{\iota^{-1}}$ est homogène et injectif, il suffit pour conclure de comparer les dimensions des composantes homogènes de ces deux espaces, tous deux munis d'une base homogène indexée par $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$. □

Nous pouvons maintenant formuler un deuxième système de relations $\mathbb{Q}$-algébriques entre polyzêtas (dit aussi « deuxième relation de mélange »). Le corollaire ci-dessous est immédiat et est aussi une conséquence facile de la règle d'Hoffman (prop. 2.13).

Corollaire 2.26. — *Le sous-espace vectoriel* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ *est une sous-algèbre de* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. — En effet $\mathbb{Q}\{\widetilde{_{\widehat{v_1}}V^*}\}$ est une sous-algèbre de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)$ (*cf.* prop. 1.23) et $\widetilde{\iota^{-1}}$ est un morphisme d'algèbres. □

Corollaire 2.27. — *L'application* ζ *de* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est un morphisme de* $\mathbb{Q}$-*algèbres.*

Démonstration. — Cela découle de $\zeta(v) = \lim_{N\to\infty} \zeta_N(v)$, pour tout élément v de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ et du fait que chaque ζ_N est un morphisme d'algèbres de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$, et peut se restreindre, grâce au corollaire précédent, à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$. □

Ceci implique que le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les polyzêtas est une sous-algèbre de $\mathbb{R}$ (ce qui était déjà une conséquence du premier système de relations).

Il serait sans doute naturel de faire de ι une identification, et c'est ce que nous ferons au chapitre suivant, où nous ne travaillerons plus qu'avec les bigèbres duales. Pour l'instant, une assertion telle que « le produit $\sqcup\!\sqcup$ des mots duaux en U est leur produit $\star$ » ne serait pas acceptable, et c'est pourtant l'argument central du paragraphe 3.3. Il vaut donc mieux pour le moment l'énoncer avec le corollaire 2.22 et la proposition 2.23.

3. Régularisation des polyzêtas divergents

L'objectif de cette section est d'étendre convenablement la définition des polyzêtas pour donner un sens aux polyzêtas divergents. Cela sera fait de façon à généraliser les relations de mélange. Un tel procédé sera qualifié de régularisation dans la suite.

On constate rapidement qu'il n'est pas possible de respecter à la fois les deux produits de mélange pour les polyzêtas divergents[3]. Nous sommes donc conduits à le faire séparément pour chacun de ces produits. Ce sera l'objet des paragraphes 3.1 et 3.3. Les structures de bigèbre correspondant aux deux produits de mélange étant de nature très proche, les deux constructions seront d'esprits identiques. Dans le cas du produit $\star$, la situation sera un peu compliquée par le fait qu'il faut un changement de base pour le ramener à un produit du type $\sqcup\!\sqcup$ (*cf.* §2.3).

Dans les deux cas, la régularisation jouira de propriétés d'unicité, une fois choisis des paramètres libres.

Il est sans doute possible de présenter le premier énoncé de la proposition 3.6 comme une conséquence facile du théorème de Radford : on ne fait jamais qu'enlever $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_0$ de l'ensemble des mots de Lyndon duaux, lequel engendre librement $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$. La même remarque s'applique à la proposition 3.14, car Hoffman a montré qu'un analogue du théorème de Radford existait pour l'algèbre $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ (*cf.* [**26**]). L'avantage du point de vue présenté ici est de permettre de donner les interprétations asymptotiques de la section 4.

3.1. Premier produit de mélange. — Nous développons ici l'aspect algébrique de la méthode de Hoang Ngoc Minh et Michel Petitot ([**23**]), en la reformulant un peu grâce aux généralités du chapitre I. L'argument central est basé sur la « factorisation de la série double » de l'algèbre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries formelles non commutatives à coefficients dans l'algèbre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$. Nous considérerons ici $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ comme une algèbre commutative de base. Notamment, la notion de poids (et les considérations topologiques correspondantes) qui sera utilisée n'est pas le poids total, mais celui qui provient de l'aspect « série formelle en X ».

Par Δ, on entend le coproduit de la cogèbre topologique $\widehat{\mathsf{Conc}}_{\mathbb{Q}}(X)$, après extension des scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ (*i.e.* le coproduit de $\widehat{\mathsf{Conc}}_{\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)}(X)$, notation qui est peu agréable).

Notation 3.1. — *Soit* $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ *l'élément suivant de* $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$ *:*

$$\Omega_{\sqcup\!\sqcup} = \exp(-\widetilde{x}_1 x_1)\left(\sum_{w\in X^*}\widetilde{w}w\right)\exp(-\widetilde{x}_0 x_0)$$

Proposition 3.2. — *La série* $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ *est un élément diagonal de la cogèbre topologique* $(\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$.

[3] Ceci sera précisé à la fin du paragraphe 3.3.

Les coefficients de x_0 *et* x_1 *dans* $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ *sont nuls. Pour tout mot* w *de* ${}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}$, *on a* $(\Omega_{\sqcup\!\sqcup}|\widetilde{w}) = \widetilde{w}$.

Démonstration. — Par définition de Δ, les éléments $-\widetilde{x_0}x_0$ et $-\widetilde{x_1}x_1$ sont primitifs dans $(\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$. Leurs exponentielles sont donc diagonales. La « série double » $\sum_{w\in X^*} \widetilde{w}w$ est également diagonale par la proposition I.3.11 car l'application linéaire associée (*cf.* §I.3.2) est l'identité de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$, qui est bien un morphisme d'algèbres. Pour finir, un produit d'éléments diagonaux est diagonal.

En revenant à la définition de $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$, et en ne prenant en compte que les termes de poids au plus 1, on trouve

$$\begin{aligned}\Omega_{\sqcup\!\sqcup} &\equiv (1-\widetilde{x}_1x_1)(1+\widetilde{x}_0x_0+\widetilde{x}_1x_1)(1-\widetilde{x_0}x_0) \quad (\text{poids} > 1)\\ &\equiv 1 \quad (\text{poids} > 1)\end{aligned}$$

et donc les coefficients de x_0 et x_1 sont nuls.

Pour la dernière assertion, il est clair que la différence $\Omega_{\sqcup\!\sqcup} - \sum_{w\in X^*} \widetilde{w}w$ appartient à $x_1 \cdot \mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle + \mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle \cdot x_0$ et donc ne comporte aucun terme en w si $w \in {}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}$. □

Dans la suite de ce paragraphe, on munira l'alphabet X de son ordre « naturel », *i.e.*. $x_0 < x_1$. Cela définit l'ensemble $L(X)$ des mots de Lyndon sur X. On peut alors utiliser les constructions du paragraphe I.5.5.

Avant de démontrer la proposition 3.5, qui est l'argument essentiel de ce paragraphe, nous aurons besoin de petits résultats intermédiaires concernant les mots de Lyndon. Nous les énonçons dans un cadre plus général que ce qui est strictement nécessaire ici pour pouvoir les appliquer aussi au paragraphe 3.3.

Lemme 3.3. — *Soit* Z *un alphabet totalement ordonné.*

i) *Si* Z *admet un plus grand élément* ω, *le seul mot de* $L(Z)$ *qui commence par* ω *est* ω *lui-même. Ce dernier est le plus grand élément de* $L(Z)$.

ii) *Si* Z *admet un plus petit élément* α, *le seul mot de* $L(Z)$ *qui se termine par* α *est* α *lui-même. C'est le plus petit élément de* $L(Z)$.

Ceci s'applique en particulier à $Z = X, \alpha = x_0$ *et* $\omega = x_1$.

Démonstration. — i) Comme un mot de Lyndon est plus petit que tous ses facteurs droits propres non triviaux, un mot de Lyndon l commençant par ω ne peut comporter une lettre β différente de ω, car en écrivant $l = \omega u\beta v$, on aurait alors un facteur droit propre et non trivial βv qui serait plus petit que l. Donc l est de la forme ω^n, où n est un entier. Or un tel mot est plus grand que tous ses facteurs droits propres non triviaux s'il en a, c'est-à-dire si $n \neq 1$. On a donc $l = \omega$.

On en déduit que tout mot de Lyndon l différent de ω commence par une lettre β différente de ω, et donc strictement plus petite. Ceci montre que l est plus petit que ω.

ii) Si un mot de Lyndon l se termine par α, le mot α est un facteur droit non trivial de l qui est plus petit que l, car α est le plus petit mot de Z^*. C'est donc qu'il n'est pas propre *i.e.* $l = \alpha$.

L'application à l'alphabet X est évidente. □

Lemme 3.4. — *Avec les hypothèses du lemme précédent, on a :*

i) *Si Z admet un plus grand élément ω, pour tout mot de Lyndon l appartenant à $L(Z)$ et différent de ω, l'élément $\widetilde{P}_Z(l)$ de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt duale appartient à $\mathbb{Q}\{\widetilde{_{\widehat{\omega}}Z^*}\}$.*

ii) *Si Z admet un plus petit élément α, pour tout mot de Lyndon l appartenant à $L(Z)$ et différent de α, l'élément $\widetilde{P}_Z(l)$ de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt duale appartient à $\mathbb{Q}\{\widetilde{Z^*_{\widehat{\alpha}}}\}$.*

iii) *Si Z admet un plus petit élément α et un plus grand élément ω, pour tout mot de Lyndon l appartenant à $L(Z)$ et différent de α et ω, l'élément $\widetilde{P}_Z(l)$ de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt duale appartient à $\mathbb{Q}\{\widetilde{_{\widehat{\omega}}Z^*_{\widehat{\alpha}}}\}$*

Démonstration. — i) Soit l un mot de Lyndon différent de ω. D'après le lemme précédent, il commence par une lettre β différente de ω : il existe $u \in X^*$ tel que $l = \beta u$. On a alors, d'après la proposition I.5.23, $\widetilde{P}_Z(l) = \widetilde{\beta} \diamond \widetilde{P}_Z(u)$ qui appartient bien à $\mathbb{Q}\{\widetilde{_{\widehat{\omega}}Z^*}\}$ car $\beta \neq \omega$.

ii) Nous établissons cette propriété par récurrence sur la longueur de l. Si l est une lettre (forcément différente de α), on a $\widetilde{P}_Z(l) = \widetilde{l}$ qui appartient bien à $\mathbb{Q}\{\widetilde{Z^*_{\widehat{\alpha}}}\}$. Sinon écrivons $l = au$, où a est une lettre de Z.

Soit $l_1^{i_1} \cdots l_r^{i_r}$ l'unique factorisation de u en mots de Lyndon strictement décroissants (*cf.* prop. I.5.21). Comme l ne se termine pas par α, le mot de Lyndon l_r est différent de α et donc strictement plus grand que α. Pour tout entier i compris entre 1 et r, le mot l_i est plus grand que l_r, et donc également différent de α ; sa longueur est évidemment strictement inférieure à celle de l.

Pour tout entier i compris entre 1 et r, l'hypothèse de récurrence s'applique donc à l_i : on obtient que $\widetilde{P}_Z(l_i)$ appartient à $\mathbb{Q}\{\widetilde{Z^*_{\widehat{\alpha}}}\}$. Ce dernier ensemble est stable par le produit $⧢$ (prop. 1.23) et donc contient $\widetilde{P}_Z(u)$, puisque celui-ci s'exprime par produits $⧢$ à partir des $\widetilde{P}_Z(l_i)$ (*cf.* I.5.23). Enfin $\widetilde{P}_Z(l) = \widetilde{a} \diamond \widetilde{P}_Z(u)$ est encore évidemment dans $\mathbb{Q}\{\widetilde{Z^*_{\widehat{\alpha}}}\}$.

iii) La troisième assertion est l'intersection des deux premières.

Comme au lemme précédent cela peut s'appliquer à $Z = X, \alpha = x_0$ et $\omega = x_1$. □

Proposition 3.5. — *La série* $\Omega_{ш}$ *appartient à* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$.

Démonstration. — Comme x_0 est le plus petit mot de $L(X)$ et x_1 le plus grand (lemme 3.3), la factorisation de la série double (prop. I.5.26), permet de donner l'expression suivante de $\Omega_{ш}$, où le produit est celui de l'algèbre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$.

$$\Omega_{ш} = \prod^{\searrow}_{\substack{l\in L(X)\\ l\neq x_0,x_1}} \exp\left(\widetilde{P}_X(l)P_X(l)\right)$$

D'après le lemme 3.4, pour tous les mots de Lyndon l représentés dans ce produit, $\widetilde{P}_X(l)$ appartient à $\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ c'est-à-dire à la sous-algèbre $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$. La série $\Omega_{ш}$ est donc ici développée sous forme de produit infini d'éléments de $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$, laquelle est une sous-algèbre fermée de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$. □

Cette propriété permet d'élucider les rapports entre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ et sa sous-algèbre $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$:

Proposition 3.6. — *Les trois énoncés équivalents suivants sont vrais :*

i) *Soient* u_0 *et* u_1 *deux variables formelles commutatives. Le morphisme d'anneaux de* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)[u_0,u_1]$ *dans* $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ *qui envoie* u_0 *et* u_1 *respectivement sur* $\widetilde{x}_0$ *et* $\widetilde{x}_1$ *et induit l'identité sur* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *est un isomorphisme.*

ii) *Pour tout anneau* $\Bbbk$*, tous éléments* θ_0 *et* θ_1 *de* $\Bbbk$ *et tout morphisme d'anneaux* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\theta} \Bbbk$*, il existe un unique morphisme d'anneaux* $\overline{\theta}$ *de* $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ *dans* $\Bbbk$ *tel que* $\overline{\theta}(\widetilde{x}_0)=\theta_0$ *et* $\overline{\theta}(\widetilde{x}_1)=\theta_1$ *et dont la restriction à* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *soit* θ.

iii) *Pour tout anneau* $\Bbbk$*, tous éléments* θ_0 *et* θ_1 *de* $\Bbbk$ *et tout morphisme d'anneaux* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\theta} \Bbbk$*, il existe un unique élément diagonal* Θ *de la cogèbre topologique* $(\widehat{\mathsf{Conc}_{\Bbbk}}(X),\Delta)$ *tel que* $(\Theta|\widetilde{w})=\theta(\widetilde{w})$ *pour tout mot* w *de* ${}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}$ *et tel que* $(\Theta|\widetilde{x}_0)=\theta_0$ *et* $(\Theta|\widetilde{x}_1)=\theta_1$.

Démonstration. — L'équivalence entre les assertions i) et ii) est classique : c'est la propriété universelle de l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$. L'équivalence des assertions ii) et iii) est un cas particulier de la proposition I.3.11 (on a alors $\Theta=\overline{\theta}_{\text{gén}}$). Nous démontrons l'assertion iii).

Soient θ,θ_0 et θ_1 comme dans iii). Soit Θ un élément satisfaisant aux conditions de iii). Posons $\overline{\theta}=\Theta_{\text{lin}}$. D'après la proposition I.3.11, c'est un morphisme d'anneaux de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{k}$. On a alors

$$\begin{aligned}\Theta &= \sum_{w\in X^*} \overline{\theta}(\widetilde{w})w \\ &\overset{\text{déf}}{=} \overline{\theta}\langle\langle X\rangle\rangle \left(\sum_{w\in X^*} \widetilde{w}w\right) \\ &\overset{\text{déf}}{=} \overline{\theta}\langle\langle X\rangle\rangle \Big(\exp(\widetilde{x}_1x_1)\Omega_{\sqcup\!\sqcup}\exp(\widetilde{x}_0x_0)\Big) \\ &= \exp(\theta_1x_1)\Big(\overline{\theta}\langle\langle X\rangle\rangle(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})\Big)\exp(\theta_0x_0),\end{aligned}$$

car $\overline{\theta}\langle\langle X\rangle\rangle$ est un morphisme continu d'algèbres. Comme $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ appartient à $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$ et que la restriction de $\overline{\theta}$ à $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ est θ, ceci donne

$$\Theta = \exp(\theta_1x_1)\Big(\theta\langle\langle X\rangle\rangle(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})\Big)\exp(\theta_0x_0) \tag{3.8}$$

Nous avons donc l'unicité. Réciproquement, prenons l'équation 3.8 comme définition de Θ et montrons que Θ vérifie bien les conditions de l'assertion iii). Il s'agit essentiellement de reprendre la proposition 3.2 à l'envers.

– La série $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ est un élément diagonal de la cogèbre $(\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$. Comme θ est un morphisme d'anneaux, l'image de $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ par $\theta\langle\langle X\rangle\rangle$ est diagonale dans la cogèbre $\widehat{\mathsf{Conc}_{\mathbb{k}}}(X)$ (cor. I.3.12). D'autre part θ_0x_0 et θ_1x_1 sont tous deux primitifs dans la cogèbre $\mathsf{Conc}_{\mathbb{k}}(X)$. Leurs exponentielles sont donc diagonales. Pour finir, un produit d'éléments diagonaux est diagonal.
– Comme les coefficients de x_0 et x_1 dans $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ sont nuls, il en est de même dans $\theta\langle\langle X\rangle\rangle(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})$. Il est alors évident que le coefficient de x_0 (resp. x_1) dans Θ est θ_0 (resp. θ_1)
– Il est clair que la différence entre les séries Θ et $\theta\langle\langle X\rangle\rangle(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})$ appartient à $x_1 \cdot \mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle + \mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle \cdot x_0$. Pour tout mot w de ${}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}$, les termes en w de Θ et $\theta\langle\langle X\rangle\rangle(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})$ sont donc égaux. Comme $(\Omega_{\sqcup\!\sqcup}|\widetilde{w}) = \widetilde{w}$, le terme en w de $\theta\langle\langle X\rangle\rangle(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})$ est bien $\theta(\widetilde{w})$.

□

Nous pouvons maintenant appliquer cette proposition à l'application linéaire ζ pour l'étendre aux mots duaux divergents. En particulier, grâce à la correspondance entre mots duaux et séquences (*cf.* déf. 1.17), on aura ainsi donné un sens à $\zeta(\underline{s})$ pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}$.

Notation 3.7. — *Soit $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ l'unique morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_0) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_1) = 0$ et dont la restriction à $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ est ζ.*

Le symbole $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ désignera l'élément diagonal $(\zeta_{\sqcup\!\sqcup})_{\text{gén}}$ de $\widehat{\mathsf{Conc}_{\mathbb{R}}}(X)$.

L'élément diagonal $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ est ainsi uniquement caractérisé par les conditions de la proposition 3.6, avec $\theta = \zeta$. C'est la *série génératrice des polyzêtas régularisés vis-à-vis du premier produit de mélange*

Il y a possibilité d'ambiguïté avec la notation $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$: si l'on veut revenir aux séquences d'entiers (et donc par exemple écrire $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,2)$) la notation $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1)$ désigne à la fois $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_1)$ qui vaut 0 et $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ appliqué au mot vide, ce qui vaut 1. Nous n'aurons jamais à considérer $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ appliqué au mot vide, car le cas du mot vide sera toujours contenu sans être écrit dans des assertions comme « $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ est un morphisme d'algèbres ». Ce problème ne se posait pas auparavant puisque $\zeta(x_1)$ n'a pas de sens.

L'élément $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ de $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$ étant diagonal pour le coproduit Δ, l'application linéaire associée est un morphisme d'algèbres (prop. I.3.11).

Notation 3.8. — *Le symbole* $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ *désigne* $(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})_{\mathrm{lin}}$, *le morphisme d'algèbres de* $\mathsf{M\acute{e}l}_{\mathbb{Q}}(X)$ *dans* $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *associé à l'élément* $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ *de* $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$.

Le morphisme $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ permet alors de voir $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ comme une composition, ce qui sera utile au chapitre suivant.

Proposition 3.9. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{M\acute{e}l}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[r, "\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}"] \arrow[dr, "\zeta_{\sqcup\!\sqcup}"'] & \mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[d, "\zeta"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

L'application $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ peut être caractérisée ainsi, grâce à la variante i) de la proposition 3.6 : c'est l'unique morphisme d'algèbres de $\mathsf{M\acute{e}l}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ annulant $\widetilde{x}_0$ et $\widetilde{x}_1$ et dont la restriction à $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ est l'identité.

Le procédé de régularisation que nous venons de décrire ne fait appel à aucun argument de limite.

3.2. Théorème de Le et Murakami. — On peut maintenant énoncer le résultat de Le et Murakami ([**37**]), avec les notations de substitution expliquées à la fin du chapitre I.

Proposition 3.10. — *Les séries* $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ *de* $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ *et* Φ_{KZ} *de* $\mathbb{R}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ *sont liées par :*

$$\Phi_{\sqcup\!\sqcup} = \Phi_{KZ}(x_0, -x_1)$$

Démonstration rapide. — Commençons par rappeler la définition que Drinfel'd donne de Φ_{KZ} dans [**11**]. Soit $\mathscr{A}$ l'algèbre des fonctions réelles analytiques sur $]0,1[$. On considère l'équation différentielle suivante, où G est un élément de $\mathscr{A}\langle\langle A, B\rangle\rangle$

$$\frac{d}{dz}G(z) = \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}\right)G(z) \tag{3.9}$$

Cette équation est la réduction à une variable du système différentiel de Knizhnik-Zamolodchikov KZ_3 à trois variables, défini sur la variété

$$\{(z_1, z_2, z_3\} \in \mathbb{C}^3,\ z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\}$$

(dont le groupe fondamental est le groupe des tresses pures P_3) et à valeurs dans $\mathscr{A}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\mathsf{U}T_3}$.

Dans la suite, on identifie respectivement A à x_0 et B à $-x_1$. L'équation (3.9) s'écrit donc, dans $\mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$\frac{d}{dz}G(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right)G(z) \tag{3.10}$$

Parmi les solutions de cette équation, on note G_0 et G_1 celles qui sont caractérisées par les conditions asymptotiques[(4)] :

$$\lim_{z\to 0} G_0(z)\exp(-x_0\log z) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{z\to 1}\exp(x_1\log(1-z))G_0(z) = 1, \tag{3.11}$$

L'une se déduit donc de l'autre par multiplication *à droite* par une constante, *i.e.* un élément de $\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$. On pose $\Phi_{\mathrm{KZ}} = G_1^{-1}G_0$.

Pour tous éléments a et z de $]0,1[$, soit $\mathrm{Int}(a,z)_{\text{gén}}$ la série génératrice du morphisme d'algèbres $\mathrm{Int}(a,z)$ de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{R}$. L'application G_a, qui à z associe $\mathrm{Int}(a,z)_{\text{gén}}$ est une solution de (3.10) : ce n'est qu'une reformulation de la proposition 1.14.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} G_a(z) &= \mathrm{Int}(a,z)\langle\langle X\rangle\rangle\left(\exp(\widetilde{x}_1x_1)\Omega_{\sqcup\!\sqcup}\exp(\widetilde{x}_0x_0)\right) \\ &= \exp((\log(1-a) - \log(1-z))x_1)\Phi_{\sqcup\!\sqcup,a,z}\exp((\log z - \log a)x_0), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\Phi_{\sqcup\!\sqcup,a,z} := \mathrm{Int}(a,z)\langle\langle X\rangle\rangle(\Omega_{\sqcup\!\sqcup})$, ce qui garde un sens si $a=0$ ou $z=1$, car $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$ appartient à l'algèbre $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle X\rangle\rangle$. En particulier $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ n'est autre que $\Phi_{\sqcup\!\sqcup,0,1}$.

Si l'on prend $G_0(z) := \exp(-\log(1-z)x_1)\Phi_{\sqcup\!\sqcup,0,z}\exp(x_0\log z)$, la fonction G_0 est une solution de (3.10), car c'est la limite, lorsque a tend vers 0, de $G_a(z)\exp(x_0\log a)$. Il est immédiat qu'elle admet le comportement asymptotique (3.11).

(4) Drinfel'd utilise le symbole $\sim$. En effet, on peut vérifier que chaque condition de (3.11) est inchangée si le produit est effectué dans l'autre sens.

Pour finir, on a

$$\begin{array}{rcl} G_1(z)\Phi_{\mathrm{KZ}} &=& G_0(z), \quad \text{d'où} \\ \exp(x_1 \log(1-z))G_1(z)\Phi_{\mathrm{KZ}} &=& \exp(x_1 \log(1-z))G_0(z) \end{array}$$

En faisant tendre z vers 1, on obtient donc $\Phi_{\mathrm{KZ}} = \Phi_{\sqcup\!\sqcup,0,1} = \Phi_{\sqcup\!\sqcup}$, d'après la définition de G_0 et la condition (3.11) portant sur G_1. $\square$

On trouvera dans la thèse de Jorge González-Lorca (*cf.* [**19**]) une démonstration plus détaillée. Le point de vue qu'on a adopté ici est plus proche des séries de Chen, comme chez Hoang, Petitot et Van der Hoeven (*cf.* [**24**]).

3.3. Deuxième produit de mélange. — Nous allons ici adapter la technique développée dans le paragraphe précédent pour trouver les développements asymptotiques des polyzêtas divergents. Le résultat sera basé cette fois sur la factorisation de la série double dans l'algèbre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)\langle\langle V\rangle\rangle$ (*cf.* §2.3). Lorsque les arguments seront les mêmes qu'au paragraphe précédent, nous nous permettrons d'aller un peu plus vite. Nous aurons une différence de notation, le changement de base nous obligera parfois à utiliser des produits tensoriels.

Rappelons que l'algèbre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)\langle\langle V\rangle\rangle$ est par définition le produit tensoriel complété $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)\,\widehat{\otimes}\,\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(V)$, où l'on considère que le poids est porté par $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(V)$ (*cf.* I.3.2). On étend le coproduit $\Delta_\star$ à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$ en conservant la même notation.

Notation 3.11. — *Considérons l'élément suivant de* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$ *(voir la définition 2.9) :*

$$\Omega_\star = \exp(-\widetilde{y}_1 y_1)(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$$

Proposition 3.12. — *La série* $\Omega_\star$ *est un élément diagonal de la cogèbre topologique* $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$.

Le coefficient de y_1 *dans* $\Omega_\star$ *est nul. Pour tout élément* w *de* ${}_{\widehat{y_1}}Y^*$, *on a* $(\Omega_\star|\widetilde{w}) = \widetilde{w}$.

Démonstration. — L'élément $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ est diagonal (prop. 2.10). L'élément $-\widetilde{y}_1 y_1$ est primitif par définition du coproduit $\Delta_\star$ (d'ailleurs y_1 est le seul élément primitif de l'alphabet Y), donc son exponentielle est diagonale et on conclut par produit que $\Omega_\star$ est diagonal.

Si on enlève les termes de poids strictement supérieur à 1, il reste

$$\Omega_\star \equiv (1-\widetilde{y}_1 y_1)(1+\widetilde{y}_1 y_1) \equiv 1 \quad (\text{poids} > 1)$$

Le terme en y_1 est bien nul. Pour la dernière assertion, il suffit de constater, comme en 3.2 que la différence de $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}}$ et de $\Omega_\star$ appartient à $y_1 \cdot \mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$. $\square$

Munissons l'alphabet V de l'ordre total $v_1 > v_2 > v_3 \cdots$, ce qui définit l'ensemble des mots de Lyndon $L(V)$ et les constructions qui s'en déduisent. Remarquons que v_1 est la plus grande lettre de V. On pourra donc appliquer les lemmes 3.3 et 3.4 avec $Z = V$ et $\omega = v_1$.

Dans ce contexte, la proposition 3.5 admet l'analogue suivant :

Proposition 3.13. — *La série $\Omega_\star$ est élément de $\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$.*

Démonstration. — Soit $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathrm{gén}}$ la série double de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)\langle\langle V\rangle\rangle$:

$$\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathrm{gén}} = \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \widetilde{v_{\underline{s}}} \otimes v_{\underline{s}} \in \mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)\langle\langle V\rangle\rangle$$

On a alors, en par définition de ι (*cf.* cor. 2.21) et par la proposition 2.23,

$$\left(\widetilde{\iota^{-1}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \iota\right)\left(\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathrm{gén}}\right) = \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \widetilde{u_{\underline{s}}} \otimes u_{\underline{s}} \quad \text{dans} \quad \mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$$

Comme $(u_{\underline{s}})_{\underline{s}\in\mathcal{S}}$ est une base homogène de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ et que $(\widetilde{u_{\underline{s}}})_{\underline{s}\in\mathcal{S}}$ est sa base duale[5], l'égalité ci-dessus exprime que pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}$, l'application linéaire associée à $\left(\widetilde{\iota^{-1}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \iota\right)\left(\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathrm{gén}}\right)$ envoie $\widetilde{u_{\underline{s}}}$ sur lui-même. Cette application est donc l'identité de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$. Or ceci caractérise $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\mathrm{gén}}$. On a donc

$$(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\mathrm{gén}} = \left(\widetilde{\iota^{-1}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \iota\right)\left(\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathrm{gén}}\right)$$

Comme v_1 est le plus grand élément de $L(V)$ (lemme 3.3), la factorisation de la série double $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathrm{gén}}$ donne l'identité suivante dans $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)\langle\langle V\rangle\rangle$:

$$\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathrm{gén}} = \exp(\widetilde{v_1} \otimes v_1) \prod_{\substack{l\in L(V)\\ l\neq v_1}}^{\searrow} \exp(\widetilde{P_V}(l) \otimes P_V(l))$$

[5] Au sens gradué.

D'un autre côté, $\left(\widetilde{\iota^{-1}} \,\widehat{\otimes}\, \iota\right)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)\langle\langle V\rangle\rangle$ dans $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$ et on a immédiatement $\left(\widetilde{\iota^{-1}} \,\widehat{\otimes}\, \iota\right)(\widetilde{v}_1 \otimes v_1) = \widetilde{y}_1 \otimes y_1$ (en appliquant les formules des propositions 2.16, 2.23 et 2.24). On a donc

$$\begin{aligned}
(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}} &= \left(\widetilde{\iota^{-1}} \,\widehat{\otimes}\, \iota\right)\left(\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(V)_{\text{gén}}\right) \\
&= \exp(\widetilde{y}_1 \otimes y_1)\left(\widetilde{\iota^{-1}} \,\widehat{\otimes}\, \iota\right)\left(\prod_{\substack{l\in L(V)\\ l\neq v_1}}^{\searrow} \exp(\widetilde{P_V}(l) \otimes P_V(l))\right), \quad \text{d'où} \\
\Omega_\star &\stackrel{\text{déf}}{=} \exp(-\widetilde{y}_1 \otimes y_1)(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\text{gén}} \\
&= \prod_{\substack{l\in L(V)\\ l\neq v_1}}^{\searrow} \exp\left(\widetilde{\iota^{-1}}(\widetilde{P}_V(l)) \otimes \iota(P_V(l))\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

D'après le lemme 3.4, pour tous les mots de Lyndon l présents dans ce produit, $\widetilde{P}_V(l)$ appartient à $\widetilde{\mathbb{Q}\{_{\widehat{v_1}}V^*\}}$. D'après le corollaire 2.25, $\widetilde{\iota^{-1}}(\widetilde{P}_V(l))$ appartient donc à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\text{cv}}$. La formule (3.12) est donc un développement de $\Omega_\star$ en produit infini d'éléments de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\text{cv}}\langle\langle Y\rangle\rangle$, qui est une sous-algèbre fermée de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$, par le corollaire 2.26. □

La suite de ce paragraphe sera quasiment identique à celle du précédent. Le résultat suivant se démontre à partir de la proposition ci-dessus en utilisant les mêmes arguments que pour passer de la proposition 3.5 à la proposition 3.6.

Proposition 3.14. — *Les trois énoncés équivalents suivants sont vrais :*

i) *Soit t une variable formelle commutative. Le morphisme d'anneaux de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\text{cv}}[t]$ dans $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ envoyant t sur $\widetilde{y}_1$ et dont la restriction à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\text{cv}}$ est l'identité est un isomorphisme.*

ii) *Pour tout anneau $\Bbbk$, tout élément θ_1 de $\Bbbk$ et tout morphisme d'anneaux $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\text{cv}} \xrightarrow{\theta} \Bbbk$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\overline{\theta}$ de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ dans $\Bbbk$ tel que $\overline{\theta}(\widetilde{y}_1) = \theta_1$ dont la restriction à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\text{cv}}$ soit θ.*

iii) *Pour tout anneau $\Bbbk$, tout élément θ_1 de $\Bbbk$ et tout morphisme d'anneaux $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\text{cv}} \xrightarrow{\theta} \Bbbk$, il existe un unique élément diagonal Θ de la cogèbre topologique $(\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$ tel que $(\Theta|\widetilde{w}) = \theta(\widetilde{w})$ pour tout mot w de $_{\widehat{y_1}}Y^*$ et tel que $(\Theta|\widetilde{y}_1) = \theta_1$.*

Comme au paragraphe précédent, nous appliquons ce résultat à l'application linéaire ζ :

Notation 3.15. — *Soit* $\zeta_\star$ *l'unique morphisme d'algèbres de* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ *dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\zeta_\star(\widetilde{y}_1) = 0$ *et dont la restriction à* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ *est* ζ.

Le symbole $\Phi_\star$ *désignera l'élément diagonal* $(\zeta_\star)_{\text{gén}}$ *de la cogèbre topologique* $(\mathbb{R}\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$.

Nous avons donc avec $\zeta_\star$ étendu ζ aux séquences divergentes, en respectant la deuxième relation de mélange, de même qu'au paragraphe précédent $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ étendait ζ aux mots duaux divergents. Ici c'est $\zeta_\star(1)$ qui joue le rôle de paramètre libre et que nous avons fixé à 0. A nouveau, la notation $\zeta_\star(1)$ est ambigüe, mais cela ne sera pas trop gênant pour les mêmes raisons qu'au paragraphe précédent.

Il se pose naturellement la question de comparer ces deux extensions. Les séquences de $\mathcal{S}$ correspondant aux mots duaux se terminant par x_1, il s'agit de savoir si $\zeta_\star(\widetilde{y}_{\underline{s}})$ et $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{\underline{s}})$ sont égaux. On constate rapidement que cela n'est pas le cas. Par exemple, à la séquence $(1,1)$ correspond le mot dual $\widetilde{x}_{1,1}$. La première relation de mélange étendue donne alors :

$$0 = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{x}_1)^2 = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{x}_1 \sqcup\!\sqcup \widetilde{x}_1) = 2\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{x}_{1,1})$$

D'un autre côté on a

$$0 = \zeta_\star(\widetilde{y}_1)^2 = \zeta_\star(\widetilde{y}_1 \star \widetilde{y}_1) = 2\zeta_\star(\widetilde{y}_{1,1}) + \zeta_\star(\widetilde{y}_2)$$

En d'autres termes, en oubliant les codages, on a

$$\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,1) = 0 \quad \text{tandis que} \quad \zeta_\star(1,1) = \frac{-1}{2}\zeta(2)$$

Le morphisme de régularisation $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ trouve sa contrepartie naturelle, toujours grâce à la proposition I.3.11 :

Notation 3.16. — *Le symbole* $\mathrm{reg}_\star$ *désigne le morphisme d'anneaux* $(\Omega_\star)_{\text{lin}}$ *de* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ *dans* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ *qui est associé à l'élément diagonal* $\Omega_\star$ *de la cogèbre topologique* $(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$.

L'application $\mathrm{reg}_\star$ est, de manière analogue à $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$, l'unique morphisme d'anneaux de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ qui envoie $\widetilde{y}_1$ sur 0 et dont la restriction à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}}$ est l'identité.

Le morphisme $\zeta_\star$ admet finalement la caractérisation utile suivante :

Proposition 3.17. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{reg}_\star"] \arrow[dr, "\zeta_\star"'] & \mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cv}} \arrow[d, "\zeta"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

4. Troisième système de relations

Dans cette section, on compare les valeurs régularisées définies au cours de la section précédente et on en déduit un troisième système de relations.

Le paragraphe 4.1 est consacré à la définition des applications linéaires entre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ et $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ permettant d'effectuer ces comparaisons.

Au cours des paragraphes suivants, on constate que les deux régularisations coïncident à peu de choses près avec un procédé « à la physicienne » : on effectue un développement asymptotique dont la partie principale est un polynôme logarithmique, le reste étant bien contrôlé, et on garde le terme constant de ce polynôme. Si l'on applique cela à la divergence d'une fonction $\mathrm{Li}_{\underline{s}}$ quand la variable tend vers 1, on obtient la régularisation suivant le premier produit de mélange. Si on l'applique à sa série $\zeta_n(\underline{s})$ de sommes partielles, on obtient presque la régularisation suivant le deuxième produit de mélange. Il apparaît alors une rigidité entre les deux procédés, qui se traduit sous la forme du troisième système de relations.

Les arguments exposés dans cette section sont basés sur les remarques de Louis Boutet de Monvel (*cf.* [**6**]). Dans celles-ci, il introduit une algèbre de fonctions dont notre DivLog est un avatar, et les applications As_1 et As_Σ décrivant les divergences logarithmiques. L'argument central est alors que ces applications linéaires ont le même noyau. Techniquement parlant, il était pour nous aussi simple d'en donner la définition dès la section 1, l'application As_Σ permettant de prouver rapidement les premiers résultats sur la convergence des polyzêtas.

L'application As_1 est définie en 4.2 et on la compare avec As_Σ.

Au paragraphe 4.3, on utilise les propriétés des séries $\Omega_{ш}$ et $\Omega_\star$ de la section précédente pour obtenir, sous forme de séries génératrices, les deux types de développements asymptotiques de tous les polylogarithmes.

Cela permet d'obtenir au paragraphe 4.4 le troisième système de relations, grâce aux comparaisons du paragraphe 4.2. Il est exprimé avec les séries génératrices $\Phi_{ш}$ et $\Phi_\star$ et généralise la « relation d'Hoffman ».

Enfin, au paragraphe 4.5, on reformule le troisième système de relations avec les applications $\zeta_{ш}$ et $\zeta_\star$.

4.1. Correspondance entre le monde des X et celui des Y. — Toutes les constructions qui ont été exposées jusqu'à présent suivaient deux voies parallèles, mais distinctes : les propriétés liées aux intégrales itérées, imposant le codage par les mots duaux de l'alphabet X, et celles liées aux fonctions quasi-symétriques, donnant le codage par les mots duaux de l'alphabet Y.

A la fin du paragraphe 3.3, nous avons commencé à comparer, pour une séquence $\underline{s}$ divergente les polyzêtas régularisés correspondants : $\zeta_{ш}(\widetilde{m}_{\underline{s}})$ et

$\zeta_\star(\widetilde{y}_{\underline{s}})$. On donne ici les définitions naturelles qui font passer d'un codage à l'autre.

Notation 4.1. — *Soit* i_Y *l'unique morphisme d'algèbres de* $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(Y)$ *dans* $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ i_Y(y_n) = x_0^{n-1}x_1$$

On a donc $i_Y(y_{\underline{s}}) = m_{\underline{s}}$, pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$. Il est clair que i_Y est un *isomorphisme d'algèbres*. Le dual gradué de $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$, car $X^*_{\widehat{x_0}}$ est une base de $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ et $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ est le sous-espace vectoriel de $\widetilde{\mathbb{Q}\{X\}}$ de base $\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}$.

Notation 4.2. — *La notation* $i_{\widetilde{Y}}$ *désignera l'application linéaire bijective de* $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$ *dans* $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ *obtenue par la composition :*

$$\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle} \xrightarrow{\widetilde{i_Y^{-1}}} \widetilde{\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}} \longrightarrow \mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$$

On a donc $i_{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}_{\underline{s}}) = \widetilde{m}_{\underline{s}}$ pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$. Les ensembles $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$ et $\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}$ sont respectivement les espaces vectoriels sous-jacents à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ mais *la flèche* $i_{\widetilde{Y}}$ *n'est pas un morphisme d'algèbres.* Par contre, l'image de sa restriction $i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}}$ à $\mathbb{Q}\{\widetilde{\widehat{y_1}Y^*}\}$, l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathsf{Qsym}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}$, est $\mathbb{Q}\{\widetilde{\widehat{x_1}X^*_{\widehat{x_0}}}\}$, l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$, et elle est compatible avec ζ :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Qsym}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}}"] \arrow[dr, "\zeta"'] & & \mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[dl, "\zeta"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Au chapitre IV, nous identifierons les algèbres $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(Y)$ et $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ au moyen de i_Y. Cela revient à identifier les espaces vectoriels $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$ et $\widetilde{\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}}$ (le dual gradué de $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$) par la flèche $i_{\widetilde{Y}}$, et donc à considérer qu'ils sont tous deux munis des deux produits $\sqcup\!\sqcup$ et $\star$ qui ne sont pas compatibles et que ζ est un morphisme d'algèbres pour les deux produits.

L'injection de $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ peut se décrire ainsi : $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ est le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base $\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}$, base incluse dans $\widetilde{X}^*$. Sa transposée est donc la projection $\pi_{X^*_{\widehat{x_0}}}$ de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ sur $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ de noyau $\mathbb{Q}\langle X\rangle x_0$ qui consiste simplement à éliminer tous les mots se terminant par x_0.

Notation 4.3. — *La notation π_Y désigne l'application de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ dans $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ obtenue par la composition :*

$$\mathbb{Q}\langle X\rangle \xrightarrow{\pi_{X^*_{\widehat{x_0}}}} \mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\} \xrightarrow{i_Y^{-1}} \mathbb{Q}\langle Y\rangle$$

Il est clair que π_Y est homogène et se prolonge donc pour tout anneau $\Bbbk$ en une application linéaire continue de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ dans $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$.

C'est la projection π_Y qui est pertinente pour la comparaison entre les régularisations $\zeta_{ш}$ et $\zeta_\star$ au niveau des séries génératrices. Par exemple, l'assertion (fausse) « pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$, les nombres $\zeta_{ш}(\widetilde{m}_{\underline{s}})$ et $\zeta_\star(\widetilde{y}_{\underline{s}})$ sont égaux » est équivalente à « $\pi_Y(\Phi_{ш}) = \Phi_\star$ ».

4.2. Étude des fonctions de DivLog au voisinage de 1. — On complète ici la liste des propriétés asymptotiques des fonctions à divergence logarithmique (*cf.* §1.1).

Dans ce qui suit, pour tout entier positif n, on désignera par $\underline{1}^n$ la séquence comportant n fois le nombre 1.

Proposition 4.4. — *Pout tout entier n positif, on a*

$$\widetilde{x}_1^{ш n} = n!\widetilde{x}_{\underline{1}^n}$$

Démonstration. — Cela découle immédiatement par récurrence de l'expression I.5.12 du produit ш. □

Corollaire 4.5. — *Pour tout entier positif k, pour tout $z \in]0,1[$, on a*

$$\mathrm{Li}(\underline{1}^k\,|z) = \frac{(-1)^k}{k!}\log^k(1-z)$$

Démonstration. — En appliquant le morphisme d'algèbres Li à l'égalité de la proposition 4.4, on trouve

$$\mathrm{Li}_1^k = k!\mathrm{Li}(\underline{1}^k)$$

De plus, pour tout z de $]0,1[$, on a $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$, d'où le résultat. □

Lemme 4.6. — *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{1}^k))$ est de degré $k-1$.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.10, on a, pour tout entier $k > 0$:

$$\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{1}^k)) = \mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(\underline{1}^{k-1}))$$

D'après la proposition 1.5, le degré de $\mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(\underline{1}^{k-1}))$ est égal au degré de $\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{1}^{k-1}))$ plus un. Le lemme s'ensuit donc par récurrence (pour $k=1$, le polynôme $\mathrm{As}_c(\mathrm{Li}_1)$ est constant, égal à 1). □

Lemme 4.7. — *Soient α un nombre réel compris strictement entre 0 et 1 et f_α la fonction définie par la série entière*

$$f_\alpha(x) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}$$

Il existe un nombre réel strictement positif λ_α tel que la fonction f_α ait le comportement suivant au voisinage de 1.

$$f_\alpha(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \lambda_\alpha (1-t)^{\alpha-1}$$

Démonstration. — Par un raisonnement à la Cesaro, on montre facilement que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bornées de nombres réels, a_n étant strictement positif pour tout $n\in\mathbb{N}$, telles que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lambda \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n = +\infty,$$

alors on a

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n t^n}{\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n} = \lambda \tag{3.13}$$

Pour tout entier naturel n, posons $a_n = (1+n)^{-\alpha}$ et $c_n = (-1)^n \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ n \end{pmatrix}$ (coefficient binômial généralisé). On a alors

$$\forall t \in]0,1[,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = f_\alpha(t) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} c_n t^n = (1-t)^{\alpha-1}$$

Si l'on pose $d_n = \log(c_n/a_n)$, on obtient facilement

$$d_{n+1} = \log\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) + \alpha \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + d_n = d_n + O(n^{-2})$$

Ceci montre que c_n/a_n tend vers une limite finie strictement positive λ. D'autre part la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est divergente, car $\alpha < 1$. La formule (3.13) prend alors la forme :

$$f_\alpha(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \lambda^{-1}(1-t)^{\alpha-1}$$

□

Proposition 4.8. — *Pour toute fonction f de* DivLog*, il existe un unique polynôme à coefficients réels $\mathrm{As}_1(f)$ tel que $f(x)$ ait le comportement suivant lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures :*

$$f(x) = \mathrm{As}_1(f)(\log(1-x)) + o\left((1-x)^{0^+}\right)$$

L'application $\mathrm{As}_1 : \mathsf{DivLog} \to \mathbb{R}[t]$ *ainsi définie est linéaire et surjective. Le polynôme* $\mathrm{As}_1(f)$ *est constant si et seulement si* $\mathrm{As}_c(f)$ *est le polynôme nul.*

Démonstration. — L'unicité et la linéarité se déduisent immédiatement des règles de calcul de la proposition 1.2. Il s'agit de prouver l'existence.

Soient $f \in \mathsf{DivLog}$ et n le degré du polynôme $\mathrm{As}_c(f)$. Le lemme 4.6 permet de voir qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\mathrm{As}_c(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{As}_c(\mathrm{Li}(\underline{1}^{i+1}))$$

Soit alors, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{Li}(\underline{1}^{i+1}\,|x) \\ &= f(x) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} \log^{i+1}(1-x) \end{aligned}$$

Par construction, on a $\mathrm{As}_c(g) = 0$. D'après le corollaire 1.6, $g(1)$ est donc défini et la fonction g est continue sur $]-1,1]$. Pour achever la démonstration, il suffit donc de prouver que $g(1) - g(x) = o\Big((1-x)^{0^+}\Big)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons pour alléger $g_n = \mathrm{Coeff}_n(g)$. Comme $\mathrm{As}_c(g) = 0$, il existe un entier N et un nombre réel α, que l'on peut chosir dans $]0,1[$, tels que

$$\forall n > N,\ |g_n| \leqslant n^{-1-\alpha}$$

Étudions alors la dérivée de g :

$$\begin{aligned} |g'(t)| &= \left|\sum_{n\geqslant 1} n g_n t^{n-1}\right| \leqslant |P_N(t)| + \sum_{n>N} n^{-\alpha} t^{n-1} \\ &\leqslant |P_N(t)| + f_\alpha(t), \end{aligned}$$

où P_N est un polynôme. On en déduit alors

$$\begin{aligned} |g(1) - g(x)| &= \left|\int_x^1 g'(t)dt\right| \leqslant \left|\int_x^1 P_N(t)dt\right| + \int_x^1 f_\alpha(t)dt \\ &= O(x-1) + \int_x^1 f_\alpha(t)dt \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.7, il suffit donc pour conclure de constater :

$$\int_x^1 (1-t)^{\alpha-1} dt = \frac{(1-x)^\alpha}{\alpha}$$

Finalement,

$$\mathrm{As}_1(f) = g(1) + \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} \lambda_i t^{i+1}$$

Ce polynôme est donc constant si et seulement si les λ_i sont tous nuls, c'est-à-dire si $\mathrm{As}_c(f)$ est nul. La surjectivité de As_Σ est évidente. □

Proposition 4.9. — *Pour toute fonction f de* DivLog*, les conditions suivantes sont équivalentes*

i) *Le polynôme $\mathrm{As}_\Sigma(f)$ est constant.*

ii) *La série définissant $f(1)$ est convergente.*

iii) *Le polynôme $\mathrm{As}_1(f)$ est constant.*

Si elles sont vraies, on a alors $f(1) = \mathrm{As}_\Sigma(f) = \mathrm{As}_1(f)$.

Démonstration. — **i) ⇒ ii) :** Par définition de As_Σ, la somme de la série $f(1)$ est le nombre réel $\mathrm{As}_\Sigma(f)$.

ii) ⇒ iii) : D'après le lemme d'Abel, la fonction f admet $f(1)$ comme limite en 1^-. Par définition de $\mathrm{As}_1(f)$, cela signifie que ce dernier est constant, égal à $f(1)$.

iii) ⇒ i) : D'après la proposition 4.8, le polynôme $\mathrm{As}_c(f)$ est nul. D'après le corollaire 1.6, ceci implique que $\mathrm{As}_\Sigma(f)$ est constant.

La dernière assertion regroupe les égalités $\mathrm{As}_\Sigma(f) = f(1)$ et $\mathrm{As}_1(f) = f(1)$ qu'on vient de démontrer. □

Corollaire 4.10. — *Les noyaux des applications linéaires As_1 et As_Σ sont égaux.*

Démonstration. — C'est le cas particulier $f(1) = 0$ dans la proposition précédente. □

Le corollaire suivant est immédiat. La seule nouvelle information est l'existence du polynôme As_1, ou plus exactement la nature de la convergence, incluse dans la définition de As_1.

Corollaire 4.11. — *Pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$, on a*

$$\mathrm{As}_1\mathrm{Li}(\underline{s}) = \mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}(\underline{s})) = \zeta(\underline{s})$$

Les applications As_1 et As_Σ sont toutes deux linéaires et surjectives. De plus, elles ont le même noyau. On peut donc définir les isomorphismes linéaires quotients $\overline{\mathrm{As}_1}$ et $\overline{\mathrm{As}_\Sigma}$ de DivLog/ *ker* (As_Σ) vers $\mathbb{R}[t]$.

Définition 4.12. — *Soit* comp *l'unique application linéaire rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{DivLog}/\,ker\,(\mathrm{As}_\Sigma) \arrow[r, "\overline{\mathrm{As}_1}"] \arrow[dr, "\overline{\mathrm{As}_\Sigma}"'] & \mathbb{R}[t] \arrow[d, "\mathrm{comp}"] \\ & \mathbb{R}[t] \end{tikzcd}$$

4.3. Séries génératrices de développements asymptotiques. — Les propositions 3.5 et 3.13 vont maintenant nous permettre de donner les développements asymptotiques de tous les polylogarithmes au voisinage de 1 et de tous les polyzêtas tronqués au voisinage de l'infini, sous forme de séries génératrices.

Notation 4.13. — *Soit* $\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}}$ *l'élément suivant de* $\mathsf{DivLog}\langle\langle Y\rangle\rangle$ *:*

$$\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}} := \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \mathrm{Li}(\underline{s}) \otimes y_{\underline{s}}$$

La série $\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}}$ est donc la série génératrice de l'application composée

$$\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle} \xrightarrow{i_{\tilde{Y}}} \mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\mathrm{Li}} \mathsf{DivLog}$$

(voir la définition 1.21). On peut l'exprimer en fonction des séries doubles :

Proposition 4.14. — *On a les égalités suivantes :*

$$\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}} = \mathrm{Li}\langle\langle Y\rangle\rangle \left(\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \widetilde{m}_{\underline{s}} \otimes y_{\underline{s}} \right) \quad \text{et} \tag{3.14}$$

$$\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \widetilde{m}_{\underline{s}} \otimes y_{\underline{s}} = (\mathrm{Id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \pi_Y) \sum_{w\in X^*} \widetilde{w} \otimes w \tag{3.15}$$

Démonstration. — C'est une tautologie. □

Rappelons que pour toute séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$, les fonctions $\mathrm{Li}(\widetilde{m}_{\underline{s}})$ et $\mathrm{Li}(\underline{s})$ sont égales et que $\pi_Y(m_{\underline{s}}) = y_{\underline{s}}$ (*cf.* §4.1).

Proposition 4.15. — *L'égalité suivante a lieu dans* $\mathbb{R}[t]\langle\langle Y\rangle\rangle$

$$\mathrm{As}_1\langle\langle Y\rangle\rangle(\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}}) = \exp(-ty_1)\pi_Y(\Phi_{⧢})$$

Démonstration. — Tout d'abord, d'après la définition 3.1 de la série $\Omega_{\sqcup\!\sqcup}$, dans l'algèbre $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle Y\rangle\rangle$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \widetilde{m}_{\underline{s}} \otimes y_{\underline{s}} &= (\mathrm{Id}\,\widehat{\otimes}\,\pi_Y)\left(\sum_{w\in X^*} \widetilde{w}\otimes w\right)\\ &= (\mathrm{Id}\,\widehat{\otimes}\,\pi_Y)\Big(\exp(\widetilde{x}_1\otimes x_1)\Omega_{\sqcup\!\sqcup}\exp(\widetilde{x}_0\otimes x_0)\Big)\\ &= \exp(\widetilde{x}_1\otimes y_1)\ (\mathrm{Id}\,\widehat{\otimes}\,\pi_Y)(\Omega_{\sqcup\!\sqcup}) \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Pour toute séquence $\underline{s}\in\mathcal{S}$, définissons l'élément $\omega_{\underline{s}}$ de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ par la condition[(6)]

$$(\mathrm{Id}\,\widehat{\otimes}\,\pi_Y)(\Omega_{\sqcup\!\sqcup}) = \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \omega_{\underline{s}}\otimes y_{\underline{s}}$$

Grâce à la proposition 3.5, pour tout $\underline{s}\in\mathcal{S}$, l'élément $\omega_{\underline{s}}$ appartient à $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$. Comme Li est un morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv},\mathrm{d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ (qui contient $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$) dans DivLog, l'égalité (3.16) et celles de la proposition 4.14 donnent

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}^{Y}_{\text{gén}} &= \mathrm{Li}\langle\langle Y\rangle\rangle\left(\exp(\widetilde{x}_1\otimes y_1)\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}}\omega_{\underline{s}}\otimes y_{\underline{s}}\right)\\ &= \exp(\mathrm{Li}_1\otimes y_1)\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}}\mathrm{Li}(\omega_{\underline{s}})\otimes y_{\underline{s}} \quad \text{et donc}\\ \forall \underline{s}\in\mathcal{S},\ \mathrm{Li}(\underline{s}) &= \sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S}\\ y_1^k y_{\underline{c}}=y_{\underline{s}}}} \frac{\mathrm{Li}_1^k}{k!}\mathrm{Li}(\omega_{\underline{c}})\end{aligned}$$

En évaluant les polylogarithmes en $1-\varepsilon$, on obtient donc, pour toute séquence $\underline{s}$ et pour tout $\varepsilon\in]0,1[$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}(\underline{s}\,|1-\varepsilon) &= \sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S}\\ y_1^k y_{\underline{c}}=y_{\underline{s}}}} \frac{(-1)^k\log^k(\varepsilon)}{k!}\mathrm{Li}(\omega_{\underline{c}}\,|1-\varepsilon) \qquad (3.17)\\ \text{car}\quad \forall z\in]0,1[,\ \mathrm{Li}_1(z) &= -\log(1-z)\end{aligned}$$

D'après le corollaire 4.11, pour toute séquence convergente $\underline{d}$, on a

$$\mathrm{Li}(\underline{d}\,|1-\varepsilon) = \zeta(\underline{d}) + o\left(\varepsilon^{0^+}\right)$$

Comme $\omega_{\underline{c}}$ appartient à $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$, pour toute séquence $\underline{c}\in\mathcal{S}$, c'est donc une combinaison linéaire finie de termes convergents du type $\widetilde{m}_{\underline{d}}$, avec $\underline{d}\in\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$. On

[(6)]Ceci revient à poser $\omega_{\underline{s}} = \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{\underline{s}})$, d'où $\zeta(\omega_{\underline{s}}) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{\underline{s}})$.

a donc, d'après les règles de calcul de la proposition 1.2.

$$\forall \underline{c} \in \mathcal{S},\ \mathrm{Li}(\omega_{\underline{c}}) = \zeta(\omega_{\underline{c}}) + o\left(\varepsilon^{0^+}\right) \tag{3.18}$$

L'égalité (3.17) et l'estimation (3.18) donnent alors, toujours en utilisant les règles de calcul de la proposition 1.2,

$$\begin{aligned}\forall \underline{s} \in \mathcal{S},\ \mathrm{Li}(\underline{s}\,|1-\varepsilon) &= \sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S}\\ y_1^k y_{\underline{c}}=y_{\underline{s}}}} \frac{(-1)^k \log^k \varepsilon}{k!}\left(\zeta(\omega_{\underline{c}}) + o\left(\varepsilon^{0^+}\right)\right)\\ &= \sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S}\\ y_1^k y_{\underline{c}}=y_{\underline{s}}}} \left(\frac{(-1)^k \log^k \varepsilon}{k!}\zeta(\omega_{\underline{c}}) + o\left(\varepsilon^{0^+}\right)\right) \qquad (3.19)\end{aligned}$$

De plus, pour chaque séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}$, il n'y a qu'un nombre fini de séquences $\underline{c} \in \mathcal{S}$ telles qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $y_1^k y_{\underline{c}} = y_{\underline{s}}$. La somme (3.19) est donc finie, ce qui donne finalement

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S},\ \mathrm{Li}(\underline{s}\,|1-\varepsilon) = \left(\sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S}\\ y_1^k y_{\underline{c}}=y_{\underline{s}}}} \frac{(-1)^k \log^k \varepsilon}{k!}\zeta(\omega_{\underline{c}})\right) + o\left(\varepsilon^{0^+}\right) \tag{3.20}$$

Nous avons donc le développement asymptotique en polynôme logarithmique de $\mathrm{Li}(\underline{s})$ au voisinage de 1. Par définition de As_1 cela s'écrit aussi

$$\mathrm{As}_1(\mathrm{Li}(\underline{s})) = \sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S}\\ y_1^k y_{\underline{c}}=y_{\underline{s}}}} \frac{(-1)^k t^k}{k!}\zeta(\omega_{\underline{c}})$$

Par définition de $\mathrm{As}_1\langle\langle Y\rangle\rangle$, on obtient en regroupant

$$\begin{aligned}\mathrm{As}_1\langle\langle Y\rangle\rangle(\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}}) &= \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}}\left(\sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S}\\ y_1^k y_{\underline{c}}=y_{\underline{s}}}} \frac{(-1)^k t^k}{k!}\zeta(\omega_{\underline{c}})\right) y_{\underline{s}}\\ &= \exp(-ty_1)\left(\sum_{\underline{c}\in\mathcal{S}}\zeta(\omega_{\underline{c}})y_{\underline{c}}\right)\\ &= \exp(-ty_1)\left(\sum_{\underline{c}\in\mathcal{S}}\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{\underline{c}})y_{\underline{c}}\right)\\ &= \exp(-ty_1)\pi_Y(\Phi_{\sqcup\!\sqcup})\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 4.16. — *L'égalité suivante a lieu dans* $\mathbb{R}[t]\langle\langle Y\rangle\rangle$, *en notant* γ *la constante d'Euler.*

$$\mathrm{As}_{\Sigma}\langle\langle Y\rangle\rangle(\mathrm{Li}^{Y}_{\text{gén}}) = \exp((t+\gamma)y_1)\Phi_{\star}$$

Démonstration. — Les arguments étant sensiblement les mêmes que pour la proposition 4.15, nous nous permettrons de brûler un peu plus les étapes. Par définition de $\Omega_{\star}$, on a, dans l'algèbre $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}\langle\langle Y\rangle\rangle$:

$$\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \widetilde{y}_{\underline{s}} \otimes y_{\underline{s}} = \exp(\widetilde{y}_1 \otimes y_1)\Omega_{\star}$$

Définissons cette fois la collection des $\omega_{\underline{s}}$ dans $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ par la condition

$$\Omega_{\star} = \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \omega_{\underline{s}} \otimes y_{\underline{s}}$$

Comme ζ_N est un morphisme d'algèbres de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $N\in\mathbb{N}$, cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \zeta_N(\underline{s})y_{\underline{s}} &= \exp(\zeta_N(1)y_1)\sum_{\underline{c}\in\mathcal{S}} \zeta_N(\omega_{\underline{c}})y_{\underline{c}} \quad \text{et donc} \\ \forall \underline{s}\in\mathcal{S},\ \zeta_N(\underline{s}) &= \sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S} \\ y_1^k y_{\underline{c}} = y_{\underline{s}}}} \frac{(\zeta_N(1))^k}{k!}\zeta_N(\omega_{\underline{c}}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

D'après la proposition 3.13, pour toute séquence $\underline{c}\in\mathcal{S}$, $\omega_{\underline{c}}$ est élément de $\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\mathbb{Q}}$. On a donc par la proposition 1.5 et les définitions de ζ_N et ζ :

$$\forall \underline{c}\in\mathcal{S},\ \zeta_N(\omega_{\underline{c}}) = \zeta(\omega_{\underline{c}}) + o\left(\frac{1}{N^{0^+}}\right)$$

De plus, $\zeta_N(1)$ admet le développement asymptotique

$$\zeta_N(1) = \log(N) + \gamma + o\left(\frac{1}{N^{0^+}}\right)$$

En reportant ces estimations dans l'égalité (3.21), on trouve alors, les conditions de finitude des sommes étant remplies,

$$\forall \underline{s}\in\mathcal{S},\ \zeta_N(\underline{s}) = \left(\sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S} \\ y_1^k y_{\underline{c}} = y_{\underline{s}}}} \frac{(\log(N)+\gamma)^k}{k!}\zeta(\omega_{\underline{c}})\right) + o\left(\frac{1}{N^{0^+}}\right) \tag{3.22}$$

Par définition de As_Σ, cela se traduit par

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S},\ \mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}_{\underline{s}}) = \sum_{\substack{k\geqslant 0,\ \underline{c}\in\mathcal{S} \\ y_1^k y_{\underline{c}} = y_{\underline{s}}}} \frac{(t+\gamma)^k}{k!}\zeta(\omega_{\underline{c}})$$

On a donc, par définition de $\mathrm{As}_\Sigma\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathrm{As}_\Sigma\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle(\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}}) &= \sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}} \mathrm{As}_\Sigma(\mathrm{Li}_{\underline{s}}) y_{\underline{s}} \\ &= \exp((t+\gamma)y_1)\left(\sum_{\underline{c}\in\mathcal{S}} \zeta(\omega_{\underline{c}}) y_{\underline{c}}\right) \\ &= \exp((t+\gamma)y_1)\Phi_\star \end{aligned}$$

□

Remarques. — Si nous n'avions pas eu à vérifier que les développements asymptotiques multiplicatifs se transformaient en développements additifs, on aurait pu abréger considérablement les démonstrations des deux propositions ci-dessus, l'argument central étant qu'en appliquant $\mathrm{Li}(1-\varepsilon)\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$ à $\pi_Y(\Omega_{⧢})$ (resp. $\zeta_N\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$ à $\Omega_\star$) on obtient les séries génératrices des deux développements asymptotiques (As_1 et As_Σ) des polylogarithmes, et cela tient juste au fait qu'on a chassé les termes divergents à gauche de $\Omega_{⧢}$ et $\Omega_\star$.

4.4. Obtention du troisième système de relations. — La proposition 4.9 donne suffisamment de rigidité à la situation pour déduire des propositions 4.15 et 4.16 que les séries $\Phi_{⧢}$ et $\Phi_\star$ diffèrent peu :

Proposition 4.17. — *Il existe une série* $\Phi_{\mathrm{corr}} \in \mathbb{R}[[t]]$ *telle que*

$$\pi_Y(\Phi_{⧢}) = \Phi_{\mathrm{corr}}(y_1)\Phi_\star$$

Démonstration. — Rappelons que ev_0 désigne le morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[t]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme associe son terme constant (*cf.* not. 2.7). L'application $\mathrm{ev}_0\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$ est donc un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[t]\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$ dans $\mathbb{R}\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$. On a immédiatement, grâce à la proposition 4.16 :

$$\mathrm{ev}_0\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle(\mathrm{As}_\Sigma\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle(\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}})) = \exp(\gamma y_1)\Phi_\star \tag{3.23}$$

Par fonctorialité de $\bullet\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$, la définition 4.12 implique

$$\mathrm{As}_\Sigma\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle = \mathrm{comp}\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle \mathrm{As}_1\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle$$

et $\mathrm{comp}\langle\langle Y\rangle\rangle$ est un morphisme de $\mathbb{R}\langle\langle Y\rangle\rangle$-modules à droite. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{As}_\Sigma\langle\langle Y\rangle\rangle(\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}}) &= \mathrm{comp}\langle\langle Y\rangle\rangle\left(\mathrm{As}_1\langle\langle Y\rangle\rangle(\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}})\right)\\
&= \mathrm{comp}\langle\langle Y\rangle\rangle\left(\exp(-ty_1)\pi_Y(\Phi_{⧢})\right) \quad \text{(prop. 4.15)}\\
&= \left(\mathrm{comp}\langle\langle Y\rangle\rangle(\exp(-ty_1))\right)\pi_Y(\Phi_{⧢}),
\end{aligned}$$

En appliquant $\mathrm{ev}_0\langle\langle Y\rangle\rangle$ aux deux membres de cette égalité, il reste donc

$$\exp(\gamma y_1)\Phi_\star = \mathrm{ev}_0\langle\langle Y\rangle\rangle\left(\mathrm{comp}\langle\langle Y\rangle\rangle(\exp(-ty_1))\right)\pi_Y(\Phi_{⧢}),$$

ce qui permet de conclure. □

Le fait de savoir qu'il suffit de corriger en multipliant à gauche par une série ne dépendant que de y_1 suffira alors à fixer les coefficients de la série Φ_{corr}.

***Proposition 4.18* (Formules de Newton).** — *L'égalité ci-dessous a lieu dans l'algèbre topologique* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}[[t]]$

$$\sum_{n\geqslant 0}\widetilde{y}_{\underline{1}^n}t^n = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\widetilde{y}_n t^n\right)$$

Démonstration. — C'est effectivement une façon d'exprimer les formules de Newton donnant dans $\mathbb{Q}[[T]]$ les sommes symétriques de puissances par rapport aux fonctions symétriques élémentaires.

Commençons par observer que $\widetilde{y}_{\underline{1}^n}$ correspond à la fonction quasi-symétrique $M_{\underline{1}^n}$, qui n'est autre que la $n^{\text{ème}}$ fonction symétrique élémentaire s_n des variables T, car (*cf.* prop. 2.2).

$$M_{\underline{1}^n} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i_1>i_2>\cdots>i_n} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_n} = s_n$$

D'un autre côté, la fonction quasi-symétrique M_n (correspondant à $\widetilde{y}_n$) est également symétrique car elle est donnée par

$$M_n = \sum_i t_i^n$$

Dans l'algèbre $\mathbb{Q}[[T,t]]$, on a

$$\begin{aligned}
1+\sum_{n\geqslant 1} t^n s_n &= \prod_{i\geqslant 1}(1+tt_i) \quad \text{et donc}\\
\log(1+\sum_{n\geqslant 1} t^n s_n) &= \sum_{i\geqslant 1}\log(1+tt_i)\\
&= \sum_{i\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n t_i^n\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}M_n t^n \quad \text{d'où}\\
1+\sum_{n\geqslant 1} t^n s_n &= \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}M_n t^n\right)
\end{aligned}$$

et cette dernière égalité est exactement celle de l'énoncé, modulo les remarques plus haut et les conventions sur les séquences vides. □

Remarque. — On pourrait éviter d'ajouter la variable formelle t, un peu artificielle dans la preuve, puisque que l'on peut écrire sans problème des sommes infinies dans $\mathbb{Q}[[T]]$. Cependant, elle évite d'avoir à recourir à $\widehat{\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}}$, ce qui ne serait pas très cohérent avec ce que nous avons fait jusqu'à présent, *i.e.* mettre les sommes infinies à droite des produits tensoriels. D'autre part, avoir une variable t dans l'énoncé de la proposition 4.18 sera finalement assez pratique.

Les propositions 4.4 et 4.18 permettent de déduire le fait suivant, que nous énonçons sur $\Bbbk$, car il sera utile au chapitre IV.

Proposition 4.19. — *Soient $\Bbbk$ un anneau, G un élément de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$, H un élément de $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ et S une série de $\Bbbk[[t]]$ tels que :*

$$\begin{aligned}
\pi_Y(G) &= S(y_1)H\\
\Delta G &= G\,\widehat{\underset{\Bbbk}{\otimes}}\,G\\
\Delta_\star H &= H\,\widehat{\underset{\Bbbk}{\otimes}}\,H
\end{aligned}$$

La série S est alors donnée par la formule

$$S(t)=\exp\left((G|\widetilde{x}_1)t\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}(H|\widetilde{y}_n)t^n\right) \tag{3.24}$$

Démonstration. — Soit π_t l'unique morphisme d'algèbres de $\mathsf{Conc}_{\mathbb{Q}}(Y)$ dans $\Bbbk[t]$ tel que $\pi_t(y_1)=t$ et $\pi_t(y_n)=0$ pour tout entier $n>1$.

Notons g le morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\Bbbk$ associé à G et h le morphisme d'algèbres de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ dans $\Bbbk$ associé à l'élément diagonal H.

On a évidemment

$$\pi_t \pi_Y(G) = \sum_{n \geqslant 0} g(\widetilde{x}_{\underline{1}^n}) t^n$$

On déduit alors de la proposition 4.4

$$\pi_t \pi_Y(G) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} g(\widetilde{x}_1)^n t^n = \exp(g(\widetilde{x}_1) t)$$

D'un autre côté, par définition de h, on a

$$H = \sum_{\underline{s} \in \mathcal{S}} h(\widetilde{y}_{\underline{s}}) y_{\underline{s}}$$

Il s'ensuit donc

$$\begin{aligned} \pi_t(H) &= \sum_{n \geqslant 0} h(\widetilde{y}_{\underline{1}^n}) t^n \\ &= h[[t]] \left(\sum_{n \geqslant 0} \widetilde{y}_{\underline{1}^n} t^n \right) \\ &= h[[t]] \left(\exp \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \widetilde{y}_n t^n \right) \right) \qquad \text{(prop. 4.18)} \\ &= \exp \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h(\widetilde{y}_n) t^n \right) \end{aligned}$$

car $h[[t]]$ est un morphisme continu d'algèbres de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}[[t]]$ dans $\Bbbk[[t]]$.

La condition $\pi_Y(G) = S(y_1)H$ implique $\pi_t \pi_Y(G) = S(t) \pi_t(H)$, ce qui donne donc, d'après les calculs ci-dessus :

$$\exp(g(\widetilde{x}_1) t) = S(t) \exp \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h(\widetilde{y}_n) t^n \right),$$

d'où la formule (3.24) car, par définition, $g(\widetilde{x}_1) = (G|\widetilde{x}_1)$ et $h(\widetilde{y}_n) = (H|\widetilde{y}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Corollaire 4.20 **(troisième système de relations entre polyzêtas)**

$$\pi_Y \Phi_{\sqcup\!\sqcup} = \left(\exp \sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) y_1^n \right) \Phi_\star \qquad (3.25)$$

Démonstration. — C'est une application des propositions 4.17 et 4.19, avec $\Bbbk = \mathbb{R}$, $G = \Phi_{\sqcup\!\sqcup}$, $H = \Phi_\star$, $S = \Phi_{\mathrm{corr}}$ en tenant compte de $(\Phi_{\sqcup\!\sqcup}|\widetilde{x}_1) = (\Phi_\star|\widetilde{y}_1) = 0$, et de $(\Phi_\star|\widetilde{y}_n) = \zeta(n)$ pour $n \geqslant 2$. □

Les coefficients des séries régularisées $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\Phi_\star$ étant des sommes de polyzêtas (puisque $\zeta_{\sqcup\!\sqcup} = \zeta \circ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\zeta_\star = \zeta \circ \mathrm{reg}_\star$), ceci constitue bien un système de relations $\mathbb{Q}$-algébriques entre polyzêtas. Il est remarquable que la constante γ d'Euler n'apparaisse pas dans la formule finale. Cela provient du fait que nous avons choisi $\zeta_\star(1) = 0$ dans notre régularisation. La divergence de la série harmonique rend donc en quelque sorte la constante d'Euler “libre” par rapport aux polyzêtas. On pourrait sans doute se risquer à dire que ce nombre est d'une autre nature, bien que cela n'ait pas de sens bien défini.

Comme cas particulier du troisième système de relations, on retrouve la relation d'Hoffman ([**26**]) : celle-ci est équivalente à l'absence de terme de degré 1 dans la série Φ_{corr}.

***Corollaire 4.21* (Relation d'Hoffman).** — *Pour toute séquence convergente $\underline{s}$, on a*

$$\zeta(\widetilde{x}_1 \sqcup\!\sqcup \widetilde{m}_{\underline{s}} - i_{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}_1 \star \widetilde{y}_{\underline{s}})) = 0$$

Démonstration. — Notons $1\underline{s}$ la séquence obtenue par concaténation de (1) et $\underline{s}$. On voit facilement que $\widetilde{x}_1 \sqcup\!\sqcup \widetilde{m}_{\underline{s}} - \widetilde{m}_{1\underline{s}}$ et $\widetilde{y}_1 \star \widetilde{y}_{\underline{s}} - \widetilde{y}_{1\underline{s}}$ ne comportent que des termes convergents. On peut donc leur appliquer respectivement les morphismes d'algèbres $\zeta : \mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathbb{R}$ et $\zeta : \mathsf{Qsym}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$. Compte tenu de la nullité de $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{x}_1)$ et de $\zeta_\star(\widetilde{y}_1)$, cela donne :

$$\begin{aligned}
\zeta(\widetilde{x}_1 \sqcup\!\sqcup \widetilde{m}_{\underline{s}} - \widetilde{m}_{1\underline{s}}) &= \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{x}_1 \sqcup\!\sqcup \widetilde{m}_{\underline{s}}) - \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{1\underline{s}}) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{x}_1)\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{\underline{s}}) - \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{1\underline{s}}) \\
&= -\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{1\underline{s}}) \quad \text{et} \\
\zeta(\widetilde{y}_1 \star \widetilde{y}_{\underline{s}} - \widetilde{y}_{1\underline{s}}) &= \zeta_\star(\widetilde{y}_1 \star \widetilde{y}_{\underline{s}}) - \zeta_\star(\widetilde{y}_{1\underline{s}}) = \zeta_\star(\widetilde{y}_1)\zeta_\star(\widetilde{y}_{\underline{s}}) - \zeta_\star(\widetilde{y}_{1\underline{s}}) \\
&= -\zeta_\star(\widetilde{y}_{1\underline{s}})
\end{aligned}$$

Par soustraction de ces deux égalités, en ramenant les termes de gauche dans $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv,d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ par $i_{\widetilde{Y}}$, il reste :

$$\zeta(\widetilde{x}_1 \sqcup\!\sqcup \widetilde{m}_{\underline{s}} - i_{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}_1 \star \widetilde{y}_{\underline{s}})) = \zeta_\star(\widetilde{y}_{1\underline{s}}) - \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{1\underline{s}}),$$

car $\zeta \circ i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}} = \zeta$ et $i_{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}_{1\underline{s}}) = \widetilde{m}_{1\underline{s}}$.

Par ailleurs, $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{1\underline{s}})$ et $\zeta_\star(\widetilde{y}_{1\underline{s}})$ sont les coefficients de $y_{1\underline{s}}$ respectivement dans $\pi_Y(\Phi_{\sqcup\!\sqcup})$ et $\Phi_\star$. Comme Φ_{corr} n'a pas de terme de degré 1, ces deux coefficients sont égaux car $\pi_Y(\Phi_{\sqcup\!\sqcup}) = \Phi_{\mathrm{corr}}(y_1)\Phi_\star$. □

4.5. Énoncé dual. — Il sera utile, notamment pour construire au chapitre IV l'algèbre des polyzêtas formels, de donner la traduction du troisième système de relations (corollaire 4.20) avec les applications $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\zeta_\star$.

Définition 4.22. — *Soit Θ la série suivante de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)\langle\langle Y\rangle\rangle$:*

$$\Theta := \exp\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\widetilde{m}_n y_1^n\right)\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}}\widetilde{m}_{\underline{s}}y_{\underline{s}}$$

On notera θ l'application linéaire Θ_{lin} de $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$ dans $\widetilde{\mathbb{Q}\langle X\rangle}$, espaces vectoriels sous-jacents respectivement à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Proposition 4.23. — *La restriction de l'application θ à $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{cv}}$ est à valeurs dans $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{cv}}(X)$. Elle est égale à l'application $i_{\widetilde{Y}}^{\mathsf{cv}}$.*

On a $\theta(\widetilde{y}_1) = \widetilde{x}_1$.

Démonstration. — Soit $\underline{s}$ une séquence de $\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$. Par définition, $\theta(\widetilde{y}_{\underline{s}})$ est le coefficient de $y_{\underline{s}}$ dans la série Θ. Comme $\underline{s}$ ne commence pas par 1, ce coefficient est $\widetilde{m}_{\underline{s}}$, égal par définition à $i_{\widetilde{Y}}^{\mathsf{cv}}(\widetilde{y}_{\underline{s}})$.

Comme y_1 est de poids 1 et que la somme sous l'exponentielle apparaissant dans la définition de Θ ne comporte que des termes de poids au moins 2, il est clair que le coefficient de y_1 dans Θ est $\widetilde{m}_1 = \widetilde{x}_1$. $\square$

Proposition 4.24. — *L'application θ est homogène pour le poids. Le diagramme ci-dessous est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\zeta_\star"'] & & \mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[dl, "\zeta_{\sqcup\!\sqcup}"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Une application linéaire est homogène si et seulement si le coefficient de $y_{\underline{s}}$ dans sa série génératrice est homogène de poids $|\underline{s}|$. Manifestement, cette propriété est conservée par somme et produit. Elle est satisfaite par $y_1^n\widetilde{m}_n$ et $y_{\underline{s}}\widetilde{m}_{\underline{s}}$, et donc par Θ.

Comme Θ est la série génératrice de θ, la série génératrice de $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}\theta$ est $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}\langle\langle Y\rangle\rangle(\Theta)$ (*cf.* §I.3.2) et l'on a

$$\begin{aligned}
\zeta_{\sqcup\!\sqcup}\langle\langle Y\rangle\rangle(\Theta) &= \exp\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_n)y_1^n\right)\sum_{\underline{s}\in\mathcal{S}}\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\widetilde{m}_{\underline{s}})y_{\underline{s}} \\
&= \exp\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\zeta(n)y_1^n\right)\pi_Y(\Phi_{\sqcup\!\sqcup}) \\
&= \Phi_\star \quad (\text{cor. } 4.20) \\
&\overset{\text{déf}}{=} (\zeta_\star)_{\text{gén}}
\end{aligned}$$

Les séries génératrices de $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}\theta$ et $\zeta_\star$ sont donc égales, ce qui entraîne l'égalité de ces deux applications. □

5. Conclusion

Si l'on cherche à cataloguer toutes les relations $\mathbb{Q}$-algébriques entre polyzêtas, les deux premiers systèmes de relations ne sont pas suffisants. En effet, l'absence de polyzêta convergent de poids 1 fait que toutes les relations que l'on peut déduire des deux premiers systèmes se situent au moins en poids 4. On ne peut donc obtenir ainsi l'égalité classique $\zeta(2,1) = \zeta(3)$, qui se déduit facilement de la relation d'Hoffman (en prenant $\underline{s} = (2)$).

Notation 5.1. — *Pour tout entier n, on notera* $\mathsf{Polyzêta}_n$ *le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les polyzêtas de poids n et* $\mathsf{Polyzêta}$ *le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par tous les polyzêtas.*

Les trois systèmes de relations que nous avons présentés ont chacun une origine très simple d'un point de vue théorique. Il s'agit juste de la multiplication des intégrales (via le théorème de Fubini) et de la multiplication des séries pour les deux premiers systèmes. Les relations que nous obtenons sont donc toutes des conséquences d'opérations élémentaires, dont seule la combinatoire est compliquée. Ces relations sont donc en un certain sens naturelles et amènent les acteurs de ce domaine à conjecturer qu'elles engendrent toutes les relations algébriques sur $\mathbb{Q}$ entre les polyzêtas. Ceci est tout à fait parallèle à une conjecture générale portant sur les périodes (*cf.* [**35**]). Il se pourrait que les premiers à avoir écrit cela soient Hoang et Petitot[(7)] (*cf.* [**23**]).

On donnera au chapitre IV une formulation précise de cette conjecture. Citons en attendant la conjecture de Zagier :

***Conjecture III* (Zagier)**. — *La dimension d_n du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les polyzêtas de poids n satisfait à la relation de récurrence suivante :*

$$\forall n \geqslant 3,\ d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$$

Comme on a $d_0 = 1, d_1 = 0$ et $d_2 = 1$, ceci est équivalent à

$$\sum_{n \geqslant 0} d_n t^n = \frac{1}{1 - t^2 - t^3}$$

Il est à noter que tout résultat (ou conjecture) concernant la structure vectorielle de $\mathsf{Polyzêta}$ a une signification de transcendance, puisque $\mathsf{Polyzêta}$ est une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathbb{R}$.

(7) Avec la relation d'Hoffman plutôt que le troisième système, *cf.* §IV.1.1.

CHAPITRE IV

POLYZÊTAS FORMELS

1. Introduction et définitions

Dans ce chapitre, on étudie les conséquences des trois systèmes de relations présentés au chapitre III, en partant du principe qu'ils devraient engendrer toutes les relations $\mathbb{Q}$-algébriques entre polyzêtas. Le fait que la série génératrice $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ des polyzêtas régularisés soit un associateur se traduit également par une collection de relations entre polyzêtas. Celles-ci devraient donc être des conséquences des trois systèmes que nous avons présentés. De manière équivalente, on peut dire que toute collection d'éléments d'un anneau $\mathbb{k}$ indexée par les séquences convergentes et vérifiant ces trois systèmes de relations devrait fournir un associateur.

Dans le paragraphe 1.1, on définit l'algèbre $\mathsf{PZformel}$ des polyzêtas formels, ce qui permet d'énoncer la conjecture de transcendance et on expose quelques conjectures, concepts et résultats qui y sont liés.

Dans le paragraphe 1.2, on donne la définition du schéma pro-algébrique affine DM des séries génératrices de polyzêtas formels. Il est naturellement isomorphe à $Spec\,(\mathsf{PZformel})$ et admet comme Ass une fibration au-dessus de la droite $\mathbb{A}^1$. Suivant le principe exposé ci-dessus, $\mathsf{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ devrait être égal à $\mathsf{DM}_{-\lambda^2/6}(\mathbb{k})$ pour tout anneau $\mathbb{k}$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

Dans le paragraphe 1.3, on donne l'énoncé du résultat principal de ce travail, ainsi qu'un bref aperçu des conséquences, et notamment du fait que les irréductibles de Drinfel'd peuvent être construits à partir de $\mathsf{DM}(\mathbb{k})$. On présente ensuite le déroulement de ce chapitre.

Le paragraphe 1.4 rassemble les identifications et conventions qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

1.1. Algèbre des polyzêtas formels.

— On peut représenter les trois systèmes de relations par le diagramme suivant, où tous les triangles sont commutatifs, les flèches étant des morphismes d'algèbres, exceptées θ et $i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}}$ qui sont des applications $\mathbb{Q}$-linéaires.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\mathrm{reg}_\star"'] \arrow[dr, "\zeta_\star"] & & \mathsf{M\acute{e}l}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[dl, "\zeta_{\shuffle}"'] \arrow[dd, "\mathrm{reg}_{\shuffle}"] \\
& \mathbb{R} & \\
\mathsf{Qsym}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}}"'] \arrow[ur, "\zeta"'] & & \mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[ul, "\zeta"]
\end{tikzcd}$$

Le premier système de relations s'exprime par le fait que ζ est un morphisme d'algèbres de $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{R}$, le deuxième par le fait que ζ est un morphisme d'algèbres de $\mathsf{Qsym}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$ et le troisième par le fait que ζ fait commuter le triangle supérieur (*cf.* prop. III.4.24).

Remplacer les polyzêtas par une collection d'éléments d'un anneau $\Bbbk$ satisfaisant à ces trois systèmes de relations consiste donc à étudier les couples (ξ, ξ') où ξ et ξ' sont des morphismes d'algèbres, respectivement de $\mathsf{Qsym}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}$ et de $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$, dans $\Bbbk$, tels que les triangles du diagramme ci-dessous commutent :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\mathrm{reg}_\star"'] \arrow[dr, "\xi_\star"] & & \mathsf{M\acute{e}l}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[dl, "\xi_{\shuffle}"'] \arrow[dd, "\mathrm{reg}_{\shuffle}"] \\
& \Bbbk & \\
\mathsf{Qsym}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}}"'] \arrow[ur, "\xi'"'] & & \mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[ul, "\xi"]
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

(ce qui définit les flèches $\xi_\star$ et $\xi_{\shuffle}$).

Il est équivalent d'étudier les morphismes d'algèbres ξ de $\mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\Bbbk$ tels que la flèche $\xi_\star$, définie ci-dessous par composition, soit un morphisme d'algèbres.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\theta"] \arrow[drr, "\xi_\star"'] & \mathsf{M\acute{e}l}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[r, "\mathrm{reg}_{\shuffle}"] & \mathsf{M\acute{e}l}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[d, "\xi"] \\
& & \Bbbk
\end{tikzcd}$$

En effet, on peut reconstruire tout le diagramme (4.1). L'égalité $\theta(\widetilde{y}_1) = \widetilde{x}_1$ (prop. III.4.23) donne immédiatement $\xi_\star(\widetilde{y}_1) = 0$. D'après les résultats du paragraphe III.3.3, il s'ensuit que $\xi_\star$ se factorise par $\mathrm{reg}_\star$, permettant ainsi de définir le morphisme d'algèbres ξ'. On pose $\xi_{\sqcup\!\sqcup} := \xi \circ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$. Les deux triangles latéraux du diagramme (4.1) sont donc commutatifs, ainsi que le supérieur (par définition de $\xi_\star$). La commutativité du triangle inférieur découle de celle du triangle supérieur, car les applications ξ, ξ' et $i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}}$ sont respectivement les restrictions à $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$, $\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\mathbb{Q}}$ de $\xi_{\sqcup\!\sqcup}$, $\xi_\star$ et θ (*cf.* § III.3.1, § III.3.3 et prop. III.4.23).

Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.1. — *Soit* Rel *l'idéal de* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *engendré par l'ensemble des* $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(\theta(F \star G) - \theta(F) \sqcup\!\sqcup\, \theta(G))$, *où* F *et* G *parcourent* $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$.

Le quotient de l'algèbre $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *par l'idéal* Rel *sera appelé l'algèbre des polyzêtas formels et noté* $\mathsf{PZformel}$. *La projection de* $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ *dans* $\mathsf{PZformel}$ *sera notée* ζ_{form}.

Le morphisme d'algèbres déduit de ζ *par quotient sera noté* $\overline{\zeta}$ *:*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X) \arrow[r, "\zeta_{form}"] \arrow[dr, "\zeta"'] & \mathsf{PZformel} \arrow[d, "\overline{\zeta}"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

D'après ce que nous venons de voir, donner un morphisme d'algèbres ξ rendant commutatifs les triangles du diagramme 4.1 revient à donner un morphisme d'algèbres de $\mathsf{PZformel}$ dans $\mathbb{k}$. Cette définition est celle que l'on trouve en reconstruisant le diagramme (4.1) à partir de la flèche ξ. On pourrait également le reconstruire à partir de la flèche $\xi_{\sqcup\!\sqcup}$, obtenant une autre réalisation de $\mathsf{PZformel}$, cette fois comme quotient de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$.

En théorie, ζ_{form} s'applique à un mot dual convergent en l'alphabet X, mais on n'hésitera pas à l'appliquer à une séquence d'entiers, grâce à la correspondance habituelle, écrivant ainsi $\zeta_{\mathrm{form}}(2)$ pour $\zeta_{\mathrm{form}}(\widetilde{x}_{0,1})$.

Comme les produits $\star$ et $\sqcup\!\sqcup$ sont homogènes pour le poids, ainsi que l'application linéaire θ, l'idéal Rel est homogène pour le poids. L'algèbre $\mathsf{PZformel}$ hérite donc de la graduation correspondante. Par contre, Rel n'est pas homogène pour la longueur : celle-ci définit juste une filtration (croissante).

On peut formuler la conjecture de transcendance évoquée à la fin du chapitre III ainsi :

***Conjecture IV* (transcendance).** — *La flèche* $\overline{\zeta}$ *est un isomorphisme d'algèbres de* $\mathsf{PZformel}$ *sur* $\mathsf{Polyzêta}$.

Il n'est bien sûr pas question ici de traiter cette conjecture, dont un cas particulier est l'indépendance algébrique de $\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5)$, etc.[1]. Jusqu'à

[1] C'est une conséquence des théorèmes à venir concernant la structure de $\mathsf{PZformel}$.

une date très récente, on savait uniquement prouver que $\zeta(3)$ était irrationnel (théorème d'Apéry). Après les travaux de Tanguy Rivoal, on sait maintenant que les zêtas impairs engendrent un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie (*cf.* [**47**]). On étudiera plutôt les polyzêtas formels, ce qui par certains aspects est une façon d'admettre la conjecture. On peut notamment s'intéresser à la partie formelle de la conjecture de Zagier :

Notation 1.2. — *Pour tout entier naturel n, la composante homogène de poids n de* $\mathsf{PZformel}$ *sera notée* $\mathsf{PZformel}_n$.

***Conjecture V* (Zagier formelle).** — *La dimension d_n du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel* $\mathsf{PZformel}_n$ *vérifie la relation de récurrence :*

$$\forall n \geqslant 3,\ d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$$

Sous forme de série génératrice, cela s'écrit aussi :

$$\sum_{n\geqslant 0} d_n t^n = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

Au cours de l'automne 1999, Jean Écalle ([**12**]) a annoncé un résultat dont la traduction dans notre langage est la suivante[(2)] :

Théorème ***II* (Écalle).** — *L'algèbre* $\mathsf{PZformel}$ *est une algèbre de polynômes sur* $\mathbb{Q}$.

Son résultat est plus précis : il a décrit un espace vectoriel de polynômes commutatifs à plusieurs variables (les « bialternaux ») dont toute base fournit un système libre de générateurs de $\mathsf{PZformel}$. Avec cette caractérisation, le fait que les polyzêtas formels $\zeta_{\text{form}}(2), \zeta_{\text{form}}(3), \zeta_{\text{form}}(5)$, etc. soient algébriquement indépendants devient une évidence. Il est également clair que donner la dimension de l'espace des bialternaux en poids n permettrait de résoudre la conjecture de Zagier formelle.

On donnera plus de détails sur ces constructions dans l'annexe A.

Remarque. — On a défini l'algèbre $\mathsf{PZformel}$ en utilisant les trois systèmes de relations. Le troisième système, sous la forme équivalente de la proposition III.4.17, jouera un rôle important dans nos constructions. Son utilisation n'est pas courante, la plupart des acteurs de ce domaine s'en tenant à la relation d'Hoffman. Par exemple, on peut interpréter les calculs informatiques de Minh et Petitot ([**23**]) comme des calculs dans l'algèbre $\mathsf{PZformel}_\mathsf{H}$ que l'on obtiendrait en ne mettant que la relation d'Hoffman dans l'idéal Rel. Il se pose naturellement la question de savoir si les algèbres $\mathsf{PZformel}_\mathsf{H}$ et $\mathsf{PZformel}$

(2) un texte sur le sujet ([**13**]) a ensuite été envoyé à certains participants du colloque « polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara » qui a eu lieu au C.I.R.M. (Luminy)

sont isomorphes. Techniquement, il semble assez difficile de le prouver, et cela n'aurait sans doute pas de conséquences profondes. Un calcul effectué sur ordinateur montre que c'est vrai jusqu'en poids 12.

1.2. Séries génératrices. — Il y a deux bonnes raisons de ne pas travailler directement sur l'algèbre $\mathsf{PZformel}$ mais plutôt sur l'ensemble des séries génératrices de morphismes de $\mathsf{PZformel}$ dans un anneau $\Bbbk$. La première est simplement qu'il est plus facile (du moins à notre goût) de manipuler les coproduits Δ et $\Delta_\star$ que les produits $\sqcup\!\sqcup$ et $\star$. La deuxième tient à la stratégie de comparaison avec les associateurs : ces derniers sont des séries formelles non commutatives en deux lettres.

Définition 1.3. — *Pour tout anneau $\Bbbk$, soit $\mathsf{DM}(\Bbbk)$ l'ensemble des éléments Φ de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ tels que :*

$$(\Phi|\widetilde{1}) = 1 \tag{4.2}$$

$$(\Phi|\widetilde{x}_0) = (\Phi|\widetilde{x}_1) = 0 \tag{4.3}$$

$$\Delta\Phi = \Phi \mathop{\widehat{\otimes}}_{\Bbbk} \Phi \tag{4.4}$$

$$\Delta_\star\Phi_\star = \Phi_\star \mathop{\widehat{\otimes}}_{\Bbbk} \Phi_\star, \tag{4.5}$$

où l'on pose :

$$\begin{aligned} \Phi_\star &:= \Phi_{\mathrm{corr}}\pi_Y(\Phi) \quad \text{et} \\ \Phi_{\mathrm{corr}} &:= \exp\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\pi_Y(\Phi)|\widetilde{y}_n)y_1^n\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

(les lettres DM signifient « double mélange »).

L'application linéaire φ (de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\Bbbk$) associée à un élément Φ de $\mathsf{DM}(\Bbbk)$ est un morphisme d'algèbres de la forme $\xi\circ\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ et donne lieu à un diagramme commutatif du type (4.1). On lui associe donc un morphisme d'algèbres de $\mathsf{PZformel}$ dans $\Bbbk$.

Réciproquement, à tout morphisme d'algèbres $\overline{\xi}$ de $\mathsf{PZformel}$ dans $\Bbbk$ correspond le morphisme d'algèbres $\varphi := \overline{\xi} \circ \zeta_{\mathrm{form}} \circ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$. La série génératrice de φ appartient alors à $\mathsf{DM}(\Bbbk)$. Ces deux correspondances sont inverses l'une de l'autre et fonctorielles en $\Bbbk$.

En d'autres termes, DM est un foncteur de la catégorie des anneaux dans la catégorie des ensembles, isomorphe au schéma affine *Spec* ($\mathsf{PZformel}$). En ce sens, tout résultat sur $\mathsf{DM}(\Bbbk)$ valable pour tout $\Bbbk$ est donc un résultat sur l'algèbre $\mathsf{PZformel}$.

Définition 1.4. — *On identifiera les bigèbres $\widehat{\mathsf{Conc}_{\Bbbk}}(A,B)$ et $\widehat{\mathsf{Conc}_{\Bbbk}}(X)$ en posant $A = x_0$ et $B = -x_1$.*

Cela est justifié car le morphisme d'algèbres de $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(A,B)$ dans $\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(X)$ qui envoie A sur x_0 et B sur $-x_1$ est un isomorphisme homogène de bigèbres graduées. On utilisera les termes de poids et de longueur pour les mots en A et B. De plus, la proposition suivante montre que toutes les formules du chapitre II dérivées du produit $\circledast$ sont encore valables en remplaçant A par x_0 et B par x_1, bien que B soit égal à $-x_1$.

Proposition 1.5. — *Pour toute série G de $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ et toute série H de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$, on a*

$$G(A,-B)\circledast H(A,-B)=(G\circledast H)(A,-B)$$

Démonstration. — C'est immédiat. □

Avec cette convention, les séries Φ_{KZ} et $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ sont désormais égales. Nous éviterons dans la suite la notation $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$ au profit de Φ_{KZ} pour désigner la série génératrice des « vrais » polyzêtas.

Proposition 1.6. — *Pour tout élément Φ de $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$, le coefficient de AB dans Φ vaut $\lambda^2/6$.*

Démonstration. — Soient respectivement α_1 et α_2 les coefficients de A et B dans Φ. On a donc (*cf.* not. I.1.5)

$$\pi^{(1)}(\Phi)=1+\alpha_1A+\alpha_2B$$

Examinons la projection de l'équation pentagonale (II.2.11) dans la composante homogène de degré 1 de $\mathsf{U}_{\Bbbk}T_4$, l'algèbre enveloppante de $\Bbbk T_4$. Son $\Bbbk$-module sous-jacent est libre, engendré les t_{ij}, avec $1\leqslant i<j\leqslant 4$. On obtient (voir la définition II.1.4 et la convention avant la définition II.1.7).

$$\begin{aligned}&\alpha_1t_{12}+\alpha_2t_{23}+\alpha_2t_{24}+\alpha_1t_{13}+\alpha_1t_{23}+\alpha_2t_{34}\\&\qquad=\alpha_1t_{23}+\alpha_2t_{34}+\alpha_1t_{12}+\alpha_1t_{13}+\alpha_2t_{24}+\alpha_2t_{34}+\alpha_1t_{12}+\alpha_2t_{23}\end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement $\alpha_1=\alpha_2=0$.

On a donc $\pi^{(2)}(\Phi)=1+\Phi_2$, où Φ_2 est la composante homogène de poids 2 de Φ. Comme Φ est diagonal dans $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle$ (eq. II.2.8), son logarithme est un polynôme de Lie en A,B. Comme on a

$$\pi^{(2)}(\log\Phi)=\Phi_2,$$

cela montre que Φ_2 est un polynôme de Lie homogène de poids 2, c'est-à-dire de la forme $\alpha[A,B]$, avec $\alpha\in\Bbbk$. Il est clair que α est le coefficient de AB dans Φ.

Si l'on élimine dans l'équation hexagonale (II.2.10) les termes de poids > 2, on obtient (par définition, $C = -A - B$) :

$$(1 + \lambda A + \lambda^2 A^2/2)(1 + \alpha[C, A])(1 + \lambda C + \lambda^2 C^2/2)(1 + \alpha[B, C])$$
$$(1 + \lambda B + \lambda^2 B^2/2)(1 + \alpha[A, B]) = 1$$

Il est immédiat que $[C, A] = [A, B]$ et $[B, C] = [A, B]$. Le terme de poids 2 de l'équation ci-dessus est donc

$$\lambda^2(AC + CB + AB + A^2/2 + B^2/2 + C^2/2) + 3\alpha[A, B] = 0,$$

ce qui donne immédiatement $\alpha = \lambda^2/6$. □

En particulier dans le cas de Φ_{KZ}, élément de $\mathsf{Ass}_{i\pi}(\mathbb{C})$, la proposition ci-dessus permet de retrouver $\zeta(2) = \pi^2/6$ car $AB = -x_0x_1$ et $m_2 = x_0x_1$. Pour développer l'analogue de $\mathsf{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$, il est donc logique de poser :

Définition 1.7. — *Pour tout anneau* $\mathbb{k}$*, pour tout* $\lambda \in \mathbb{k}$ *et pour tout* $\mathbb{k}$*-anneau* $\mathbb{K}$*,* $\mathsf{DM}_\lambda(\mathbb{K})$ *est l'ensemble des* Φ *de* $\mathsf{DM}(\mathbb{K})$ *tels que* $(\Phi|\widetilde{x}_{0,1}) = \lambda$*.*

Il est clair que DM_λ est également un schéma affine (sur *Spec* $(\mathbb{k})$), représenté par la $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{k} \otimes \mathsf{PZformel}/(\zeta_{\mathrm{form}}(2) - \lambda)$.

On pourrait être tenté de poser plutôt $(\Phi|\widetilde{x}_{0,1}) = -\lambda^2/6$, pour que l'analogie avec $\mathsf{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ soit plus complète. Suivant les propriétés arithmétiques de $\mathbb{k}$, ceci empêcherait $\mathsf{DM}(\mathbb{k})$ d'être la réunion des $\mathsf{DM}_\lambda(\mathbb{k})$. Il faut donc permettre à $(\Phi|\widetilde{x}_{0,1})$ d'être quelconque dans $\mathbb{k}$.

Ainsi Φ_{KZ} est un élément de $\mathsf{DM}_{\zeta(2)}(\mathbb{C})$. Si la conjecture IV était avérée, cela validerait alors la démarche consistant à remplacer les polyzêtas par des variables libres, et donc on aurait $\mathsf{DM}_{-\lambda^2/6}(\mathbb{k}) \subset \mathsf{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ pour tout anneau $\mathbb{k}$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$. Il est sans doute plus facile de démontrer cette dernière assertion directement. Cependant, à notre connaissance, personne n'a encore réussi à prouver une implication entre le système d'équations définissant les $\mathsf{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ et celui définissant $\mathsf{DM}_{-\lambda^2/6}(\mathbb{k})$, à l'exception de Jean Écalle qui a annoncé savoir démontrer l'équation (II.2.9) pour les éléments de $\mathsf{DM}(\mathbb{k})$.

Mettons maintenant en évidence la structure pro-algébrique affine de DM. On applique les notations de troncation exposées au paragraphe I.1.2 : pour tout entier naturel n, et tout $\mathbb{k}$-module gradué M, on identifie le quotient $M^{(n)}$ et l'ensemble des éléments de M dont les composantes homogènes sont de degré au plus n. On considère le tout comme plongé dans $\widehat{M}$. Le symbole $\pi^{(n)}$ désigne la projection naturelle de $\widehat{M}$ sur $M^{(n)}$. Dans la définition ci-dessous, on applique cela aux $\mathbb{k}$-modules gradués $\mathbb{k}\langle X\rangle$ et $\mathbb{k}\langle Y\rangle$, ainsi qu'à leurs produits tensoriels.

Définition 1.8. — *Pour tout entier positif n, soit $\mathsf{DM}^{(n)}(\Bbbk)$ l'ensemble des éléments $\Phi^{(n)}$ de $\Bbbk\langle X\rangle^{(n)}$ tels que :*

$$(\Phi^{(n)}|\widetilde{1}) = 1 \tag{4.7}$$

$$(\Phi^{(n)}|\widetilde{x}_0) = (\Phi^{(n)}|\widetilde{x}_1) = 0 \tag{4.8}$$

$$\Delta\Phi^{(n)} = \pi^{(n)}\left(\Phi^{(n)}\otimes\Phi^{(n)}\right) \tag{4.9}$$

$$\Delta_\star\Phi_\star^{(n)} = \pi^{(n)}\left(\Phi_\star^{(n)}\otimes\Phi_\star^{(n)}\right), \tag{4.10}$$

où l'on pose

$$\Phi_\star^{(n)} := \exp\left(\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\pi_Y(\Phi^{(n)})|\widetilde{y}_k)y_1^k\right)\pi_Y(\Phi^{(n)})$$

Les équations ci-dessus étant polynomiales sur $\mathbb{Q}$, chaque $\mathsf{DM}^{(n)}$ est un schéma affine sur *Spec* $(\mathbb{Q})$. L'homogénéité de Δ et $\Delta_\star$ montre immédiatement que la limite projective des $\mathsf{DM}^{(n)}$ est DM ; celui-ci est donc un schéma pro-algébrique affine. Pour tout anneau $\Bbbk$, et tout $\lambda\in\Bbbk$, DM_λ est de même un schéma pro-algébrique affine sur *Spec* $(\Bbbk)$.

1.3. Résultats et plan. — Ce chapitre est consacré à l'étude comparative de DM et Ass, et essentiellement à transporter la structure de fibré principal de Ass sur DM. Plus précisément, on prouvera :

Théorème ***III***. — *Pour tout anneau $\Bbbk$, $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)$ est un sous-groupe de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ qui agit librement et transitivement par multiplication à droite sur chaque $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$, pour tout $\lambda\in\Bbbk$.*

Dans la section 2, on introduit des $\Bbbk$-modules $\mathfrak{dm}(\Bbbk)$ et $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ et on montre que $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0(\Bbbk))$ est un sous-groupe de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ agissant sur chaque $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ par translation à droite. Le $\Bbbk$-module $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ est une sous-$\Bbbk$-algèbre de Lie de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$.

Dans la section 3, on démontrera par une méthode d'approximations successives que cette action est transitive, ce qui impliquera l'égalité de $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0(\Bbbk))$ et $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)$ pour tout anneau $\Bbbk$. Ceci déterminera complètement la structure de schéma de DM, donnant une démonstration du théorème II. Les systèmes de générateurs de l'algèbre $\mathsf{PZformel}$ ainsi obtenus ne sont pas les mêmes que ceux de Jean Écalle, bien que la comparaison soit possible (*cf.* annexe A).

Comme corollaire du théorème III, on verra que les irréductibles de Drinfel'd (*cf.* sec. II.4) sont éléments de $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{C})$. L'intersection entre $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)$ et $\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$ est donc très grosse. Si l'on admet que les irréductibles de Drinfel'd engendrent $\mathfrak{grt}_1(\Bbbk)$, cela implique $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)\supset\mathsf{GRT}_1(\Bbbk)$.

1.4. Allègement de la notation. — A une seule exception près, les seules structures qui seront utilisées dans la suite de ce chapitre sont les bigèbres topologiques $(\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle, \bullet, \Delta)$ et $(\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle, \bullet, \Delta_\star)$ et les opérateurs liés à la structure du groupe $\mathsf{MT}(\mathbb{k})$. Du fait qu'on ne passera quasiment jamais au dual, les changements d'alphabet sont moins périlleux.

On considèrera donc que le morphisme de bigèbres ι du paragraphe III.2.3 est l'identité, ce qui revient à identifier v_n et u_n pour tout entier n strictement positif. On n'utilisera plus l'alphabet V. L'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ primitifs pour le coproduit $\Delta_\star$ est donc $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{Q}}(U)$, l'ensemble des polynômes de Lie en les éléments de U. Rappelons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est l'unique suite d'éléments de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ telle que le poids de u_n soit n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \log(1 + y_1 + \cdots + y_n + \cdots),$$

égalité qui a lieu dans $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ (*cf.* déf. III.2.14).

On n'utilisera plus le symbole Conc, le contexte étant suffisamment clair : $\mathbb{k}\langle X\rangle$ sera toujours muni du produit de concaténation.

Il sera également pratique de considérer que le morphisme d'algèbres i_Y de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ dans $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ est une identification (*cf.* § III.4.1). On aura donc $y_n = x_0^{n-1}x_1$ pour tout entier n strictement positif. La projection π_Y de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ sur $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ devient alors la projection de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ sur $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ parallèlement à $\mathbb{Q}\langle X\rangle x_0$. Dans le même ordre d'idées, on modifiera la notation I.3.10 pour lui faire rejoindre celle du livre de Reutenauer ([**46**]). On pourra ainsi par exemple écrire

$$(\Phi_{\mathrm{KZ}}|y_2y_3) = \zeta(2,3)$$

Ceci ne posera pas de problème, car on n'aura plus à concilier produits $⧢$ et changements d'alphabets.

Enfin, pour plus de fluidité, les termes « $\star$-primitif » et « $\star$-diagonal », appliqués à un élement de $\mathbb{k}\langle Y\rangle$ ou de $\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$, signifieront respectivement primitif et diagonal pour le coproduit $\Delta_\star$. De même, une « $\star$-codérivation » sera une codérivation vis-à-vis du coproduit $\Delta_\star$.

2. L'action tangente de $\mathfrak{dm}_0$ sur DM

2.1. Définitions et premières propriétés. — Nous introduisons ici les espaces tangents à $\mathsf{DM}(\mathbb{k})$ et $\mathsf{DM}_0(\mathbb{k})$ au voisinage de l'unité :

Définition 2.1. — *Le $\mathbb{k}$-module $\mathfrak{dm}(\mathbb{k})$ est l'ensemble des séries ψ de $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ vérifiant :*

$$(\psi|x_0) = (\psi|x_1) = 0 \tag{4.11}$$

$$\psi \in \widehat{\mathfrak{Lie}}_{\mathbb{k}}(X) \iff \Delta\psi = 1\otimes\psi + \psi\otimes 1 \tag{4.12}$$

$$\psi_\star \in \widehat{\mathfrak{Lie}}_{\mathbb{k}}(U) \iff \Delta_\star\psi_\star = 1\otimes\psi_\star + \psi_\star\otimes 1, \tag{4.13}$$

où l'on pose :

$$\psi_\star := \pi_Y(\psi) + \psi_{\mathrm{corr}} \quad et \quad \psi_{\mathrm{corr}} := \sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\psi | y_n) y_1^n \tag{4.14}$$

Par commodité, dans ce qui suit, les notations $\psi_\star$ et ψ_{corr} seront toujours conformes aux formules (4.14), étant entendu que ψ est un élément de $\mathfrak{dm}(\mathbb{k})$. Il est manifeste que $\psi \mapsto \psi_{\mathrm{corr}}$ est une application $\mathbb{k}$-linéaire homogène de $\mathbb{k}\langle X \rangle$ dans $\mathbb{k}\langle Y \rangle$. Les coproduits Δ et $\Delta_\star$ sont également homogènes. Pour tout entier n, nous noterons $\mathfrak{dm}^n(\mathbb{k})$ la composante homogène de poids n de $\mathfrak{dm}(\mathbb{k})$ et $\overline{\mathfrak{dm}}(\mathbb{k})$ la somme directe des $\mathfrak{dm}^n(\mathbb{k})$. On voit donc que $\mathfrak{dm}(\mathbb{k})$ est le complété du $\mathbb{k}$-module gradué $\overline{\mathfrak{dm}}(\mathbb{k})$. Ce dernier est donc également $\mathrm{gr}\mathfrak{dm}(\mathbb{k})$.

D'autre part, les équations ci-dessus étant linéaires à coefficients rationnels, $\mathfrak{dm}(\mathbb{k})$ s'obtient par extension continue des scalaires :

$$\mathfrak{dm}(\mathbb{k}) = \mathfrak{dm}(\mathbb{Q}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{k}$$

La proposition suivante permet de préciser l'information sur ψ_{corr} :

Proposition 2.2. — *Soit $\psi \in \mathfrak{dm}(\mathbb{k})$. Pour tout entier* pair *n strictement supérieur à 2, on a $(\psi | y_n) = 0$.*

Avant de la démontrer, nous aurons besoin du résultat suivant

Lemme 2.3. — *Pour tout élément ψ de $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{k}}(X)$ et tout entier n pair non nul, on a $(\psi | y_1 y_{n-1}) = 0$.*

Démonstration. — Posons $c_k = (\operatorname{ad} x_0)^{k-1}(x_1)$ pour tout entier strictement positif k, et notons C l'ensemble $\{(c_k)_{k \in \mathbb{N}^*}\}$ D'après le théorème d'élimination de Lazard (I.5.5), $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{k}}(X)$ est somme directe de la droite $\mathbb{k}x_0$ et de $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{k}}(C)$. Comme $(x_0 | y_1 y_{n-1})$ est nul, il suffit de prouver l'assertion pour les éléments de $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{k}}(C)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il est clair d'après la définition que c_k est de poids k et de longueur 1. Comme $y_1 y_{n-1}$ est homogène de poids n et de longueur 2, il suffit donc de vérifier l'assertion pour les éléments de $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{k}}(C)$ homogènes de poids n et de longueur 2, c'est-à-dire de la forme $[c_p, c_q]$ avec $p + q = n$.

Soient donc p et q deux entiers strictement positifs de somme n. En décomposant $\operatorname{ad} x_0$ en différence des multiplications à gauche et à droite par x_0 et en appliquant la formule du binôme, on obtient :

$$c_p c_q = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant l \leqslant q-1}} \binom{p-1}{k} \binom{q-1}{l} (-1)^{p-1-k+q-1-l} x_0^k x_1 x_0^{p-1-k+l} x_1 x_0^{q-1-l}$$

On a $y_1 y_{n-1} = x_1 x_0^{n-2} x_1$. Dans la somme ci-dessus, tous les termes commencent ou finissent par x_0, sauf lorsque $l = q - 1$ et $k = 0$. Comme $x_1 x_0^{n-2} x_1$

commence et finit par x_1, on a donc

$$\begin{aligned}(c_p c_q | x_1 x_0^{n-2} x_1) &= (-1)^{p-1}(x_1 x_0^{p+q-2} x_1 | x_1 x_0^{n-2} x_1) = (-1)^{p-1}, \quad \text{d'où} \\ \big([c_p, c_q] | x_1 x_0^{n-2} x_1\big) &= (-1)^{p-1} - (-1)^{q-1}\end{aligned}$$

Comme $p + q = n$ et que n est pair, $p - 1$ et $q - 1$ sont de même parité. Le produit scalaire est bien nul. □

L'hypothèse de parité de n est tout à fait nécessaire (prendre $\psi = [[x_0, x_1], x_1]$). Christophe Reutenauer nous a signalé une démonstration plus simple : le mot $x_1 x_0^{n-2} x_1$ est un palindrome pair. Étant égal à son antipode, il ne peut donc apparaître dans aucun polynôme de Lie (par la proposition I.5.9).

Démonstration de la proposition 2.2. — Il suffit d'obtenir le résultat si ψ est homogène, de poids n.

L'élément $\psi_\star$ de $\Bbbk\langle Y \rangle$ étant $\star$-primitif, on a $(\psi_\star | w \star w') = 0$, pour tous mots non-vides w et w' de Y^*. En appliquant cela avec $w = y_p$ et $w' = y_q$, où p et q sont deux entiers strictement positifs de somme n, on trouve :

$$(\psi_\star | y_p y_q + y_q y_p + y_n) = 0,$$

car on a $y_p \star y_q = y_p y_q + y_q y_p + y_{p+q}$.

D'après la définition 2.1 et par homogénéité de ψ, la différence de $\psi_\star$ et $\pi_Y(\psi)$ est un multiple scalaire de y_1^n, lequel est de longueur $n \geqslant 4$. Les termes de longueur 1 et 2 de $\pi_Y(\psi)$ et $\psi_\star$ coïncident donc(3). On en déduit :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*,\ p + q = n,\ (\psi | y_p y_q + y_q y_p) = -(\psi | y_n) \tag{4.15}$$

Comme ψ appartient à $\mathfrak{Lie}_\Bbbk(X)$, on a $(\psi | w ⧢ w') = 0$ pour tous mots non-vides w et w' de X^*. Appliquons cela à $w = x_1 (= y_1)$ et $w' = x_0^{n-2} x_1 (= y_{n-1})$. On obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} w ⧢ w' = x_1 ⧢ x_0^{n-2} x_1 &= x_0^{n-2} x_1^2 + \sum_{i=0}^{n-2} x_0^i x_1 x_0^{n-2-i} x_1 \\ &= y_{n-1} y_1 + \sum_{p=1}^{n-1} y_p y_{n-p} \end{aligned}$$

En utilisant deux fois l'équation (4.15), ceci donne :

$$\begin{aligned} (\psi | w ⧢ w') &= (\psi | y_{n-1} y_1) - \frac{n-1}{2}(\psi | y_n) \\ &= -\frac{n+1}{2}(\psi | y_n) - (\psi | y_1 y_{n-1}) \qquad (4.16) \end{aligned}$$

(3) Ceci est le seul argument où apparaît la condition $n \neq 2$.

D'après le lemme 2.3, on a $(\psi|y_1y_{n-1}) = 0$ car n est pair. Les égalités (4.16) et $(\psi|w ⧢ w') = 0$ imposent alors $(\psi|y_n) = 0$. □

Pour $n = 2$, la proposition 2.2 n'est plus vraie : $\psi = [x_0, x_1]$ est l'unique contre-exemple à multiplication près par un élément de $\mathbb{k}$ ($\mathfrak{Lie}_{\mathbb{k}}(X)$ est de dimension 1 en poids 2), car $\pi_Y\psi = y_2$ et $y_2 - (1/2)y_1^2 = u_2$ est $\star$-primitif. Dans la série Φ_{KZ}, le coefficient de $[x_0, x_1]$ est $\zeta(2)$. On voit donc l'originalité de $\zeta(2)$ se manifester d'un point de vue algébrique.

D'autre part, avec la proposition ci-dessus et la formule (4.14), on constate que, pour $\psi \in \mathfrak{dm}(\mathbb{k})$, le terme correctif ψ_{corr} ne comporte que des puissances impaires de y_1, à l'exception du terme en y_1^2. Cela justifie la définition suivante :

Définition 2.4. — *Soit $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{k})$ le sous-$\mathbb{k}$-module de $\mathfrak{dm}(\mathbb{k})$ formé des éléments dont le terme en y_2 est nul.*

Si $\psi \in \mathfrak{dm}_0(\mathbb{k})$, ψ_{corr} est donc une série impaire en y_1, ce qui aura une grande importance plus loin. D'après les remarques plus haut, ψ ne comporte que des termes de poids au moins égal à 3. L'ensemble des éléments de $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{k})$ qui sont des polynômes, *i.e.* qui appartiennent à $\mathbb{k}\langle X\rangle$, est donc la somme directe :

$$\bigoplus_{n\geqslant 3} \mathfrak{dm}^n(\mathbb{k})$$

2.2. Remontée vers $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{k}}(X)$. — Nous aurons dans cette section fréquemment à étudier des éléments de $\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$ obtenus par projection depuis $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ et souvent depuis $\widehat{\mathfrak{Lie}}_{\mathbb{k}}(X)$. On donne ici une formule pour retrouver un élément de $\widehat{\mathfrak{Lie}}_k(X)$ sans terme en x_0 d'après sa projection.

La dérivée partielle de $\mathbb{k}\langle X\rangle$ par rapport à la lettre x_0 est une $\mathbb{k}$-dérivation homogène de poids -1 et homogène de longueur 0, ce qui permet de la prolonger à $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$.

Notation 2.5. — *Le symbole ∂_{x_0} désigne la $\mathbb{k}$-dérivation continue de $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ définie par $\partial_{x_0}(x_0) = 1$ et $\partial_{x_0}(x_1) = 0$.*

Proposition 2.6. — *Pour tout élément ψ de $\widehat{\mathfrak{Lie}}_{\mathbb{k}}(X)$, on a $\partial_{x_0}(\psi) = (\psi|x_0)$.*

Démonstration. — La dérivation ∂_{x_0} envoie x_1 sur 0 et x_0 sur 1, qui est central. Par une récurrence immédiate sur le poids, il est clair que $\partial_{x_0}(\psi) = 0$ pour tout polynôme de Lie ψ homogène de poids strictement supérieur à 1. En écrivant $\psi = (\psi|x_0)x_0 + (\psi|x_1)x_1$ plus des termes de poids strictement supérieur à 1, on obtient la formule voulue. □

Définition 2.7. — *Soit σ l'application linéaire de $\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$ dans $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ donnée par*

$$\forall \psi \in \mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle,\ \sigma(\psi) = \sum_{i\geqslant 0} \frac{(-1)^i}{i!}\partial_{x_0}^i(\psi)x_0^i$$

On écrira le plus souvent $\sigma\psi$ pour $\sigma(\psi)$.

Cette définition a bien un sens, car pour tout ψ de $k\langle Y\rangle$, homogène de poids n, la somme ci-dessus est finie et est homogène de poids n. L'application σ est continue.

Proposition 2.8. — *L'application σ est à valeurs dans $\ker \partial_{x_0}$. La restriction de π_Y à $\ker \partial_{x_0}$ et σ sont des isomorphismes réciproques de $\mathbb{k}$-modules :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle \arrow[rr, "\sigma"] & & \ker \partial_{x_0} \arrow[dl, hook] \\
& \mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle \arrow[ul, "\pi_Y"] &
\end{tikzcd}$$

On a donc $\pi_Y\sigma(\psi) = \psi$, pour tout élément ψ de $\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$, et $\sigma\pi_Y(\psi) = \psi$, pour tout élément ψ de $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ tel que $\partial_{x_0}(\psi) = 0$.

Démonstration. — Tout d'abord, pour tout élément ψ de $\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_{x_0}(\sigma\psi) &= \sum_{i\geqslant 0}\frac{(-1)^i}{i!}\partial_{x_0}^{i+1}(\psi)x_0^i + \sum_{i\geqslant 1}\frac{(-1)^i}{(i-1)!}\partial_{x_0}^i(\psi)x_0^{i-1} \\
&= \sum_{i\geqslant 0}\frac{(-1)^i}{i!}\partial_{x_0}^{i+1}(\psi)x_0^i + \sum_{i\geqslant 0}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\partial_{x_0}^{i+1}(\psi)x_0^i = 0
\end{aligned}$$

et σ est bien à valeurs dans *ker* ∂_{x_0}. Tous les termes de la somme définissant $\sigma\psi$ se terminent par x_0, sauf le premier qui vaut ψ. On a donc $\pi_Y\sigma = \mathrm{Id}$.

Par ailleurs, $\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle = \mathbb{k}\{\{X^*_{\widehat{x_0}}\}\}$ est stable par ∂_{x_0} : tout élément de $\mathbb{k}\{\{X^*_{\widehat{x_0}}\}\}$ peut se mettre sous la forme $\lambda + \xi x_1$, où ξ appartient à $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $\lambda \in \mathbb{k}$; on a alors $\partial_{x_0}(\lambda) = 0$ et

$$\partial_{x_0}(\xi x_1) = \partial_{x_0}(\xi)x_1 + \xi\partial_{x_0}(x_1) = \partial_{x_0}(\xi)x_1 \in \mathbb{k}\{\{X^*_{\widehat{x_0}}\}\}$$

Tout élément ψ de $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ peut être mis de manière unique sous la forme d'une somme infinie convergente

$$\psi = \sum_{i\geqslant 0}\psi_i x_0^i \quad \text{avec} \tag{4.17}$$

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \psi_i \in \mathbb{k}\{\{X^*_{\widehat{x_0}}\}\} = \mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle \tag{4.18}$$

Avec cette notation, il est clair que $\psi_0 = \pi_Y(\psi)$. Si de plus $\partial_{x_0}(\psi) = 0$, on obtient

$$\sum_{i\geqslant 0} \partial_{x_0}(\psi_i)x_0^i + \sum_{i\geqslant 1} i\psi_i x_0^{i-1} = 0$$

Comme $\partial_{x_0}(\psi_i)$ appartient à $\Bbbk\{\{X^*_{\widehat{x_0}}\}\}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \psi_i &= -\frac{1}{i}\partial_{x_0}(\psi_{i-1}), \quad \text{d'où} \\ \forall i \in \mathbb{N},\ \psi_i &= \frac{(-1)^i}{i!}\partial_{x_0}^i(\psi_0), \end{aligned}$$

ce qui donne en reportant dans (4.17), compte tenu de $\pi_Y(\psi) = \psi_0$, l'égalité $\psi = \sigma\pi_Y(\psi)$. □

Corollaire 2.9. — *Pour tout élément ψ de $\mathfrak{dm}(\Bbbk)$, on a*

$$\psi = \sigma\psi_\star + \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n}(\psi|y_n)x_1^n$$

Démonstration. — La proposition 2.6 et les équations (4.11) et (4.12) de la définition 2.1 de $\mathfrak{dm}(\Bbbk)$ montrent que l'on peut appliquer la proposition 2.8 aux éléments de $\mathfrak{dm}(\Bbbk)$. Il suffit alors d'utiliser les formules (4.14) définissant $\psi_\star$, sachant qu'on a $\partial_{x_0}(y_1^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\sigma(y_1^n) = x_1^n$. □

Étudions maintenant de plus près les propriétés de ∂_{x_0} : tout d'abord, comme $\Bbbk\langle Y\rangle$ et $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ sont stables par ∂_{x_0}, celle-ci est encore une dérivation homogène de $\Bbbk\langle Y\rangle$ et continue de $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$.

Pour tout entier $n > 0$, on obtient immédiatement

$$\partial_{x_0}(y_n) = (n-1)y_{n-1}$$

(avec la convention $y_0 = 1$, ceci rend compte de $\partial_{x_0}(y_1) = 0$).

Nous étudions maintenant le comportement de ∂_{x_0} vis-à-vis du coproduit $\Delta_\star$. Rappelons que l'ensemble des éléments $\star$-primitifs de $\Bbbk\langle Y\rangle$ est exactement $\mathfrak{Lie}_\Bbbk(U)$ (*cf.* § III.2.3).

Proposition 2.10. — *Avec la convention $u_0 = 1$, l'égalité suivante est valable pour tout entier n strictement positif : :*

$$\partial_{x_0}(u_n) = (n-1)u_{n-1}$$

Démonstration. — Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\Bbbk\langle Y\rangle$. Considérons leur série génératrice

$$\Psi = \sum_{n\geqslant 0} \psi_n t^n \in \Bbbk[[t]]\langle\langle Y\rangle\rangle$$

Soit ∂_t la dérivée partielle par rapport à t. Étendons ∂_{x_0} à une $\Bbbk[[t]]$-dérivation de $\Bbbk[[t]]\langle\langle Y\rangle\rangle$. L'application $\partial := \partial_{x_0} - t^2\partial_t$ est une dérivation $\Bbbk$-linéaire de $\Bbbk[[t]]\langle\langle Y\rangle\rangle$, car t^2 est central dans cette algèbre.

La condition « pour tout entier $n > 0$, $\partial_{x_0}(\psi_n) = (n-1)\psi_{n-1}$ » est immédiatement équivalente à $\partial\Psi = 0$. En particulier, cette assertion est vérifiée par la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $y_0 = 1$). On a donc $\partial\mathcal{Y} = 0$ et $\partial(\mathcal{Y} - 1) = 0$ (*cf.* not. III.2.6).

Par définition de u_n (*cf.* déf. III.2.14), la série

$$\mathcal{U} = \sum_{n\geqslant 0} u_n t^n, \quad \text{avec} \quad u_0 = 1$$

s'obtient en ajoutant 1 à $\log\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{U} = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\mathcal{Y} - 1)^k$$

Il est clair que $\partial((\mathcal{Y} - 1)^k)$ est nul pour tout $k \geqslant 1$ puisque $\partial(\mathcal{Y} - 1)$ est nul. On en déduit donc $\partial\mathcal{U} = 0$. □

Corollaire 2.11. — *L'application ∂_{x_0} est une $\Bbbk$-codérivation des cogèbres $(k\langle Y\rangle, \Delta_\star)$ et $(k\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$.*

L'ensemble des éléments $\star$-primitifs de $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ est stable par ∂_{x_0}.

Démonstration. — On sait que les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\star$-primitifs et engendrent l'algèbre $\Bbbk\langle Y\rangle$ (prop. III.2.15 et cor. III.2.20). La proposition 2.10 permet alors d'appliquer la proposition I.2.3 qui donne le premier résultat. Le passage au complété est évident. L'image d'un élément primitif par une codérivation qui annule 1 est primitive (prop. I.2.3). □

2.3. Opérateurs tangents. — Notre but est ici d'étudier l'action sur $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ de l'opérateur tangent s_ψ du paragraphe II.2.2 pour les éléments ψ de $\mathfrak{dm}(\Bbbk)$ et $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$. Rappelons que nous avons identifié les algèbres $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ et $\Bbbk\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle$ en posant $A = x_0$ et $B = -x_1$. Les formules de la section 2 du chapitre II sont valables en remplaçant A par x_0 et B par x_1 (*cf.* §1.2).

Si ψ est un élément homogène de $\Bbbk\langle X\rangle$, les opérateurs s_ψ, d_ψ et D_ψ sont homogènes de poids $|\psi|$ (prop. II.2.13) et l'application $s : \psi \mapsto s_\psi$ est $\Bbbk$-linéaire.

Il faut prendre garde aux effets de bord que l'on peut rencontrer lors des passages de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ à $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$.

Proposition 2.12. — *Pour tout $\psi \in k\langle\langle X\rangle\rangle$, le noyau de π_Y est stable par s_ψ.*

Démonstration. — Par définition, le noyau de π_Y est $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle x_0$. D'après la formule (II.2.20), pour tout $r \in \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$, nous avons

$$s_\psi(rx_0) = \psi rx_0 - d_\psi(rx_0) = \psi rx_0 - d_\psi(r)x_0,$$

car d_ψ est une dérivation qui annule x_0. □

On peut donc faire passer s_ψ au quotient :

Définition 2.13. — *Soit s_ψ^Y l'application $\Bbbk$-linéaire faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle & \xrightarrow{s_\psi} & \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ \Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle & \xrightarrow{s_\psi^Y} & \Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle \end{array}$$

Pour effectuer des calculs explicites de s_ψ^Y, il sera plus pratique d'utiliser la dérivation D_ψ :

Proposition 2.14. — *Pour tout $\psi \in \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$, l'algèbre $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ est stable par D_ψ, qui est donc une dérivation de $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ et on a de plus*

$$\forall \varphi \in \Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle,\ s_\psi^Y(\varphi) = D_\psi(\varphi) + \varphi\pi_Y(\psi) \tag{4.19}$$

Démonstration. — D_ψ est une $\Bbbk$-dérivation qui vérifie $D_\psi(x_1) = 0$. Tout élément de $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$ peut s'écrire $\lambda + \xi x_1$, avec $\lambda \in \Bbbk$ et $\xi \in \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ et on a $D_\psi(\lambda + \xi x_1) = D_\psi(\xi)x_1$, qui appartient à $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$.

La formule (4.19) est alors une conséquence immédiate de la définition de s_ψ^Y et de la formule (II.2.19). □

Pour le calcul de D_ψ sur les éléments de Y, nous aurons besoin du lemme ci-dessous (voir les définitions I.5.6 et I.5.8 et la proposition I.5.9).

Lemme 2.15. — *Pour tout élément $\psi = \sum_{i\geqslant 0}\psi_i x_0^i$ de $\Bbbk\langle X\rangle$, homogène de poids p, les ψ_i étant dans $\Bbbk\langle Y\rangle$, pour tout entier $n \geqslant 1$, la formule suivante est valable :*

$$x_0^{n-1}S_X(\psi)x_1 = (-1)^p \sum_{i\geqslant 0} y_{n+i}\mathrm{ret}_Y(\psi_i) \tag{4.20}$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer le résultat lorsque ψ est un mot de X^*, c'est-à-dire de la forme $\psi_i x_0^i$ avec $\psi_i = y_{s_1}\cdots y_{s_r}$:

$$\begin{aligned} x_0^{n-1}S_X(y_{s_1}y_{s_2}\cdots y_{s_r}x_0^i)x_1 &= x_0^{n-1}S_X(x_0^{s_1-1}x_1x_0^{s_2-1}x_1\cdots x_1x_0^{s_r-1}x_1x_0^i)x_1 \\ &= (-1)^p x_0^{n-1}(x_0^i x_1 x_0^{s_r-1}x_1\cdots x_0^{s_2-1}x_1x_0^{s_1-1})x_1 \\ &= (-1)^p y_{n+i}y_{s_r}y_{s_r-1}\cdots y_{s_2}y_{s_1} \\ &= (-1)^p y_{n+i}\mathrm{ret}_Y(\psi_i) \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à conclure par linéarité de $\psi \mapsto s_\psi$. □

Proposition 2.16. — *Soit ψ un élément de $k\langle X\rangle$, homogène de poids p, vérifiant $S_X\psi = -\psi$. Si l'on note $(\psi_i)_{i\geqslant 0}$ les uniques éléments de $\Bbbk\langle Y\rangle$ tels que $\psi = \sum_{i\geqslant 0}\psi_i x_0^i$, la formule suivante s'applique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_\psi y_n = \sum_{i\geqslant 0}\Big(\psi_i y_{i+n} + (-1)^p y_{i+n}\mathrm{ret}_Y(\psi_i)\Big) \tag{4.21}$$

Démonstration. — Tout d'abord, on développe l'expression de D_ψ dans $\Bbbk\langle X\rangle$, puis on utilise le lemme, en tenant compte de $S_X(\psi) = -\psi$.

$$\begin{aligned} D_\psi(y_n) = D_\psi(x_0^{n-1}x_1) &= \psi x_0^{n-1}x_1 - x_0^{n-1}\psi x_1\\ &= \psi x_0^{n-1}x_1 + x_0^{n-1}S_X(\psi)x_1\\ &= \sum_{i\geqslant 0}\Big(\psi_i y_{i+n} + (-1)^p y_{i+n}\mathrm{ret}_Y(\psi_i)\Big)\end{aligned}$$

□

L'opération de « retournement » ret_Y se comporte bien avec le coproduit $\Delta_\star$:

Proposition 2.17. — *L'application* $\Bbbk$*-linéaire* ret_Y *est un morphisme de cogèbres topologiques de $(\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$. L'ensemble des éléments $\star$-primitifs de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ est stable par* ret_Y.

Démonstration. — La seconde assertion découle immédiatement de la première. D'après la proposition I.2.4, il suffit de vérifier l'identité de morphisme de cogèbres pour les éléments de Y. C'est alors immédiat car $\mathrm{ret}_Y(y_n) = y_n$ pour tout entier $n > 0$. □

2.4. Action par codérivation. — Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition ci-dessous. Celle-ci est le résultat technique principal de ce chapitre.

Rappelons que la notation $\psi_\star$ est conforme à la définition 2.1 et que σ est donné dans la définition 2.7.

Proposition 2.18. — *Pour tout élément ψ de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$, l'opérateur $s^Y_{\sigma\psi_\star}$ est une codérivation de la cogèbre topologique $(\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$.*

Étant donné que s_ψ dépend linéairement de ψ et que s_ψ est homogène de poids $|\psi|$ si ψ est homogène, nous pouvons nous ramener au cas où ψ est homogène. Dans la suite de ce paragraphe, on fixe donc un élément ψ de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$, homogène de poids p. Pour écrire de manière condensée les calculs permettant d'établir la proposition 2.18, on aura à utiliser quelques conventions.

Notation 2.19. — *Pour tout entier naturel* i*, soient* ψ_i *et* χ_i *les éléments de* $\Bbbk\langle Y\rangle$ *définis par :*

$$\psi_i = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_{x_0}^i(\psi_\star) \quad \textit{et} \quad \chi_i = (-1)^p \mathrm{ret}_Y(\psi_i)$$

Pour tous entiers naturels i *et* k*, soit* z_{ik} *l'élément suivant de* $\Bbbk\langle Y\rangle$ *(si* k *est nul, on utilise la convention* $y_0 = 1$*) :*

$$z_{ik} := \psi_i y_k + y_k \chi_i$$

Enfin soit sym *l'endomorphisme* $\Bbbk$*-linéaire de* $\Bbbk\langle Y\rangle \otimes_\Bbbk \Bbbk\langle Y\rangle$ *défini par*

$$\forall a, b \in \Bbbk\langle Y\rangle,\ \mathrm{sym}(a \underset{\Bbbk}{\otimes} b) := a \underset{\Bbbk}{\otimes} b + b \underset{\Bbbk}{\otimes} a$$

Avant d'effectuer le calcul final, donnons quelques résultats intermédiaires :

Proposition 2.20. — *Pour tout entier positif* i*, les éléments* ψ_i *et* χ_i *sont* $\star$*-primitifs.*

Démonstration. — Comme ψ appartient à $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$, l'élément $\psi_\star$ est $\star$-primitif par définition. D'après le corollaire 2.11 et la proposition 2.17, l'ensemble $\mathfrak{Lie}_\Bbbk(U)$ des éléments $\star$-primitifs de $\Bbbk\langle Y\rangle$ est stable par ∂_{x_0} et ret_Y, ce qui entraîne la $\star$-primitivité de ψ_i et χ_i, pour tout $i \in \mathbb{N}$. □

Proposition 2.21. — *Pour tout entier* n *strictement positif, on a :*

$$D_{\sigma\psi_\star}(y_n) = \sum_{i\geqslant 0} z_{i,i+n}$$

Démonstration. — Par définition de $\psi_\star$ et comme ψ est homogène de poids p, on a

$$\psi_\star = \pi_Y\psi + \alpha y_1^p \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{(-1)^{p-1}}{p}(\psi|y_p)$$

Comme $\psi \in \mathfrak{Lie}_\Bbbk(X)$, on a $S_X(\psi) = -\psi$ (prop. I.5.9). D'après le corollaire 2.9, on a :

$$\begin{aligned} \sigma\psi_\star &= \psi + \alpha\sigma(y_1^p) = \psi + \alpha x_1^p, \quad \text{d'où} \\ S_X(\sigma\psi_\star) &= -\psi + (-1)^p\alpha x_1^p \end{aligned}$$

Si p est impair, ceci donne $S_X(\sigma\psi_\star) = -\sigma\psi_\star$. Si p est pair, α est nul d'après la proposition 2.2 et la définition 2.4. On a donc encore $S_X(\sigma\psi_\star) = -\sigma\psi_\star$.

Ceci permet d'appliquer la proposition 2.16 à $\sigma\psi_\star$. D'après les définitions de σ et des ψ_i, on a :

$$\sigma\psi_\star = \sum_{i\geqslant 0} \psi_i x_0^i$$

La formule voulue n'est donc qu'une forme condensée du résultat de la proposition 2.16, grâce aux définitions des χ_i et des z_{ik}. □

Proposition 2.22. — *Pour tous entiers naturels i et j, on a :*

$$\Delta_\star(z_{ij}) = \sum_{k+l=j} \left(y_k \underset{\Bbbk}{\otimes} z_{il} + z_{il} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_k \right) = \sum_{k+l=j} \mathrm{sym}(z_{ik} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_l)$$

(en utilisant la convention $y_0 = 1$ lorsque j, k ou l est nul).

Démonstration. — Il s'agit d'effectuer le calcul, en tenant compte de la primitivité des ψ_i et χ_i (prop. 2.20).

$$\begin{aligned}
\Delta_\star(z_{ij}) &\overset{\text{déf}}{=} \Delta_\star(\psi_i y_j + y_j \chi_i) \\
&= (1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \psi_i + \psi_i \underset{\Bbbk}{\otimes} 1) \left(\sum_{k+l=j} y_k \underset{\Bbbk}{\otimes} y_l \right) \\
&\quad + \left(\sum_{k+l=j} y_k \underset{\Bbbk}{\otimes} y_l \right) (1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \chi_i + \chi_i \underset{\Bbbk}{\otimes} 1) \\
&= \sum_{k+l=j} \left(y_k \underset{\Bbbk}{\otimes} z_{il} + z_{ik} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_l \right) \\
&= \sum_{k+l=j} \left(y_k \underset{\Bbbk}{\otimes} z_{il} + z_{il} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_k \right),
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule voulue. □

Proposition 2.23. — *Pour tout entier naturel k, on a :*

$$\sum_{i \geqslant k} z_{i,i-k} = 0$$

Démonstration. — Par la proposition 2.21 et par définition de $D_{\sigma\psi_\star}$, on a

$$\sum_{i \geqslant 0} z_{i,i+1} = D_{\sigma\psi_\star}(y_1) = D_{\sigma\psi_\star}(x_1) = 0$$

Appliquons le coproduit $\Delta_\star$ à cette égalité. D'après la proposition 2.22, on obtient :

$$\sum_{i \geqslant 0} \sum_{k+l=i+1} (z_{ik} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_l + y_l \underset{\Bbbk}{\otimes} z_{ik}) = 0 \tag{4.22}$$

Soit lng_1 l'endomorphisme linéaire de $\Bbbk\langle Y \rangle$ qui à tout polynôme (non commutatif) associe son terme de longueur 1. Pour séparer les termes de (4.22), on va lui appliquer $\mathrm{Id} \otimes_\Bbbk \mathrm{lng}_1$.

Comme les ψ_i et χ_i sont $\star$-primitifs (prop. 2.20), ils ne peuvent comporter de terme constant. Pour tout $i \geqslant 0$ et tout k non nul, z_{ik} ne comporte donc que des termes de longueur au moins égale à 2. On a donc $\mathrm{lng}_1(z_{ik}) = 0$. Il reste à étudier $\mathrm{lng}_1(z_{i0}) = \mathrm{lng}_1(\psi_i + \chi_i)$.

Comme ∂_{x_0} est homogène pour la longueur et que ψ est homogène de poids p, il est clair que l'on a :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathrm{lng}_1\psi_i = \frac{(-1)^i}{i!}(\psi|y_p)\partial^i_{x_0} y_p$$

L'opérateur ret_Y est homogène pour la longueur et donc commute avec lng_1. De plus, il fixe les éléments de longueur 1, donc $\mathrm{lng}_1\chi_i = (-1)^p \mathrm{lng}_1\psi_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'après la définition de χ_i.

Si p est pair, la proposition 2.2 et la définition 2.4 donnent $(\psi|y_p) = 0$. On a donc $\mathrm{lng}_1\psi_i = \mathrm{lng}_1\chi_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Si p est impair, on a alors $\mathrm{lng}_1\psi_i = -\mathrm{lng}_1\chi_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Dans tous les cas :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathrm{lng}_1(z_{i0}) = \mathrm{lng}_1(\psi_i) + \mathrm{lng}_1(\chi_i) = 0$$

On a donc $\mathrm{lng}_1(z_{ik}) = 0$ pour tous $i, k \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $\mathrm{lng}_1(y_l)$ est égal à y_l si $l > 0$ et est nul si l est nul. En appliquant $\mathrm{Id} \otimes_{\mathbb{k}} \mathrm{lng}_1$ à (4.22), on obtient donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{i} z_{ik} \underset{\mathbb{k}}{\otimes} y_{i+1-k}\right) &= 0, \quad \text{c'est-à-dire}\\ \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{i\geqslant k} z_{i,i-k}\right) \underset{\mathbb{k}}{\otimes} y_{k+1} &= 0\end{aligned}$$

Ceci donne immédiatement la formule voulue, par l'indépendance linéaire de la famille $(y_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. □

La proposition ci-dessus permet d'étendre la formule de la proposition 2.21 au cas $n = 0$, ce qui évitera de traiter à part ce cas particulier au cours du calcul permettant d'établir la proposition 2.18 :

Corollaire 2.24. — *Pour tout entier n positif* ou nul*, en utilisant la convention $y_0 = 1$, on a :*

$$D_{\sigma\psi_\star}(y_n) = \sum_{i\geqslant 0} z_{i,i+n}$$

Démonstration. — Si n est différent de 0, le résultat est déjà établi (prop. 2.21). Si $n = 0$, et donc $y_n = 1$, on a $D_{\sigma\psi_\star}(y_n) = 0$, car $D_{\sigma\psi_\star}$ est une dérivation. Le membre de droite est nul par la proposition 2.23 (cas particulier $k = 0$). □

Démonstration de la proposition 2.18. — D'après la proposition 2.14, $s^Y_{\sigma\psi_\star}$ est somme de $D_{\sigma\psi_\star}$ et de l'opérateur de multiplication à droite par $\pi_Y\sigma(\psi_\star)$ c'est-à-dire par $\psi_\star$ (prop. 2.8). Ce dernier opérateur est une $\star$-codérivation, car $\psi_\star$ est $\star$-primitif (prop. I.2.5). Il suffit donc de vérifier que $D_{\sigma\psi_\star}$ est une

$\star$-codérivation. Comme c'est une dérivation, il suffit de le vérifier pour les éléments de l'alphabet Y (prop. I.2.3). Il nous faut donc obtenir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_\star D_{\sigma\psi_\star}(y_n) = (D_{\sigma\psi_\star} \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \underset{\Bbbk}{\otimes} D_{\sigma\psi_\star})\Delta_\star(y_n) \tag{4.23}$$

On fixe dans la suite l'entier n.

Grâce aux propositions 2.21 et 2.22, on peut exprimer le premier membre de cette équation :

$$\Delta_\star D_{\sigma\psi_\star}(y_n) = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{k=0}^{i+n} \mathrm{sym}(z_{ik} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_{n+i-k})$$

On va maintenant calculer le second membre de l'équation (4.23). Comme on développe $\Delta_\star(y_n)$ avec la convention $y_0 = 1$, on sera amené à utiliser le corollaire 2.24.

$$\begin{aligned}
(D_{\sigma\psi_\star} \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \underset{\Bbbk}{\otimes} D_{\sigma\psi_\star})\Delta_\star(y_n) &= (D_{\sigma\psi_\star} \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \underset{\Bbbk}{\otimes} D_{\sigma\psi_\star}) \sum_{k+l=n} y_k \underset{\Bbbk}{\otimes} y_l \\
&= \sum_{k+l=n} \mathrm{sym}\left(D_{\sigma\psi_\star}(y_k) \underset{\Bbbk}{\otimes} y_l\right) \\
&= \sum_{i\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sym}(z_{i,i+k} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_{n-k}) \quad \text{(cor. 2.24)} \\
&= \sum_{i\geqslant 0}\sum_{k=i}^{i+n} \mathrm{sym}(z_{ik} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_{n+i-k})
\end{aligned}$$

En effectuant la différence des deux membres de l'équation (4.23), il reste donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geqslant 1}\sum_{k=0}^{i-1} \mathrm{sym}(z_{ik} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_{n+i-k}) &= \sum_{i\geqslant 1}\sum_{k=1}^{i} \mathrm{sym}(z_{i,i-k} \underset{\Bbbk}{\otimes} y_{n+k}) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{sym}\left(\left(\sum_{i\geqslant k} z_{i,i-k}\right) \underset{\Bbbk}{\otimes} y_{n+k}\right)
\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.23, tous les termes de cette somme sont nuls, ce qui achève la démonstration. □

2.5. Passage au groupe. — On tire ici les conséquences de la proposition 2.18 pour en déduire l'action de $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0)$ sur DM. On utilise dans ce paragraphe une variable formelle commutative, notée t.

Les deux propositions ci-dessous permettront de traiter les termes correctifs.

Proposition 2.25. — *Pour toute série γ de $\Bbbk[[t]]$ et tous éléments ψ et x de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$, on a :*

$$s_\psi(\gamma(x_1)x) = \gamma(x_1)s_\psi(x) \tag{4.24}$$

$$s_{\gamma(x_1)}(x) = \gamma(x_1)x \tag{4.25}$$

$$[s_\psi, s_{\gamma(x_1)}] = 0 \tag{4.26}$$

Démonstration. — Pour la première égalité, on utilise l'expression (II.2.19) de s_ψ. On a alors :

$$s_\psi(\gamma(x_1)x) = \gamma(x_1)x\psi + D_\psi(\gamma(x_1)x) = \gamma(x_1)x\psi + \gamma(x_1)D_\psi(x) = \gamma(x_1)s_\psi(x),$$

car D_ψ est par définition une dérivation continue qui annule x_1 ; elle annule donc également $\gamma(x_1)$.

Pour la deuxième égalité, on utilise l'autre expression (II.2.20). On a donc $s_{\gamma(x_1)}(x) = \gamma(x_1)x - d_{\gamma(x_1)}(x)$. Or $d_{\gamma(x_1)}$ est l'application nulle, car c'est une dérivation continue de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ qui annule x_0 et x_1 :

$$d_{\gamma(x_1)}(x_0) \overset{\text{déf}}{=} 0 \quad \text{et} \quad d_{\gamma(x_1)}(x_1) \overset{\text{déf}}{=} [\gamma(x_1), x_1] = 0$$

La troisième égalité est une conséquence directe des deux premières :

$$\forall x \in \Bbbk\langle X\rangle,\ s_\psi s_{\gamma(x_1)}(x) = s_\psi(\gamma(x_1)x) = \gamma(x_1)s_\psi(x) = s_{\gamma(x_1)}s_\psi(x)$$

□

Proposition 2.26. — *Soient Φ et ψ deux éléments de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$. Si les termes constants de Φ et ψ sont respectivement 1 et 0, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\Big(\exp s_\psi(\Phi)|y_n\Big) = (\Phi|y_n) + (\psi|y_n)$$

Démonstration. — D'après la proposition II.2.13, les applications $\psi \mapsto s_\psi$ et $\psi \mapsto D_\psi$ sont finement homogènes pour le degré partiel en B, donc en x_1, c'est-à-dire pour la longueur.

Si l'on écrit alors $\Phi = 1 + \Phi_1 + \Phi_2$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$, où Φ_1 et ψ_1 sont homogènes de longueur 1, Φ_2 et ψ_2 ne comportant que des termes de longueur supérieure :

$$\begin{aligned}\exp(s_\psi)(\Phi) &\equiv (\mathrm{Id} + s_{\psi_1})(1+\Phi_1) \quad [\text{mod. longueur} > 1]\\ &\equiv 1 + \Phi_1 + \psi_1 + D_{\psi_1}(\Phi_1) \quad [\text{mod. longueur} > 1]\\ &\equiv 1 + \Phi_1 + \psi_1 \quad [\text{mod. longueur} > 1]\end{aligned}$$

Cette dernière égalité donne immédiatement le résultat voulu. □

Proposition 2.27. — *Pour tout élément ψ de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$, pour tout $\lambda \in \Bbbk$ et pour tout entier naturel n, les ensembles $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ et $\mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$ sont stables par* $\exp s_\psi$.

Démonstration. — Il s'agit de mettre bout à bout les propositions de cette partie. Soit donc $\Phi \in \mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$.

Tout d'abord, notons que ψ ne comporte que des termes de poids au moins 3. Par homogénéité de $(\psi, x) \mapsto s_\psi(x)$ (prop. II.2.13), les termes de poids au plus 2 de $\exp s_\psi(\Phi)$ sont donc égaux à ceux de Φ. On en déduit :

$$\begin{aligned}(\exp s_\psi(\Phi)|1) &= 1, \quad (\exp s_\psi(\Phi)|x_0) = (\exp s_\psi(\Phi)|x_1) = 0 \quad \text{et} \\ (\exp s_\psi(\Phi)|y_2) &= \lambda\end{aligned}$$

Ensuite, on a déjà vu (prop. II.2.14) que pour tout $\psi \in \widehat{\mathfrak{Lie}}_\Bbbk(X)$, l'ensemble des éléments diagonaux de $(\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle, \Delta)$ était stable par $\exp s_\psi$. Il reste à examiner le comportement du coproduit $\Delta_\star$.

D'après le corollaire 2.9, on a $\psi = \sigma\psi_\star + \psi_{\mathrm{corr}}(x_1)$, avec :

$$\psi_{\mathrm{corr}}(t) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n}(\psi|y_n)t^n$$

D'après la proposition 2.25, les opérateurs $s_{\sigma\psi_\star}$ et $s_{\psi_{\mathrm{corr}}(x_1)}$ commutent. On a donc $\exp s_\psi = \exp s_{\psi_{\mathrm{corr}}(x_1)} \exp s_{\sigma\psi_\star}$.

D'autre part, d'après la définition 1.3, $\pi_Y(\Phi)$ est égal à $\exp(\gamma(y_1))\Phi_\star$, où $\Phi_\star$ est $\star$-diagonal, avec :

$$\gamma(t) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n}(\Phi|y_n)t^n$$

On a alors, par la proposition 2.25 et la définition de s_ψ^Y :

$$\begin{aligned}\pi_Y \exp s_\psi(\Phi) &= \exp s^Y_{\psi_{\mathrm{corr}}(y_1)} \exp s^Y_{\sigma\psi_\star}(\exp\gamma(y_1)\Phi_\star) \\ &= \exp s^Y_{\psi_{\mathrm{corr}}(y_1)}(\exp\gamma(y_1)(\exp s^Y_{\sigma\psi_\star}\Phi_\star)) \\ &= \exp(\gamma(y_1) + \psi_{\mathrm{corr}}(y_1)) \exp s^Y_{\sigma\psi_\star}(\Phi_\star) \\ &= \exp\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n}\Big((\Phi|y_n) + (\psi|y_n)\Big)\, y_1^n\right) \exp s^Y_{\sigma\psi_\star}(\Phi_\star)\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.26, cette dernière égalité donne :

$$\pi_Y \exp s_\psi(\Phi) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n}\Big(\exp s_\psi(\Phi)|y_n\Big)\, y_1^n\right) \exp s^Y_{\sigma\psi_\star}\Phi_\star$$

Comme $s^Y_{\sigma\psi_\star}$ est une $\star$-codérivation (prop. 2.18), son exponentielle est un automorphisme de cogèbres topologiques de $(\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_\star)$ (prop. I.2.2). L'image par un morphisme de cogèbres d'un élément diagonal étant encore diagonale, on a donc prouvé l'appartenance de $\exp s_\psi(\Phi)$ à $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$.

Ces arguments sont encore valables pour la stabilité de $\mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$, compte tenu du fait que $\exp s_\psi$ respecte la filtration de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ par le poids et donc passe au quotient $\Bbbk\langle X\rangle^{(n)}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). □

Remarque. — Si l'on avait voulu uniquement montrer la stabilité de $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$, on aurait pu se dispenser du calcul explicite des termes en y_1^n et conclure grâce à la proposition III.4.19, mais cela aurait été de peu d'utilité pour les troncations, car $\mathsf{DM}^{(n)}$ n'est pas le spectre de $\mathsf{PZformel}^{(n)}$, celui-ci étant de dimension 0.

La proposition suivante montre que $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ est stable par le crochet d'Ihara, et même un peu plus : les crochets sont strictement $\star$-primitifs.

Proposition 2.28. — *Si ψ_1 et ψ_2 appartiennt à $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$, leur crochet d'Ihara $<\psi_1, \psi_2>$ est un élément ψ de $\widehat{\mathfrak{Lie}}_\Bbbk(X)$ tel que $\pi_Y\psi$ soit $\star$-primitif. En particulier $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ est une sous-algèbre de Lie fermée de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$.*

Démonstration. — L'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{Lie}}_\Bbbk(X)$ est stable par le crochet d'Ihara, par la proposition II.2.14. On a alors, en utilisant la formule (II.2.15) et la proposition 2.25 :

$$\begin{aligned}
-s_{<\psi_1,\psi_2>} &= [s_{\psi_1}, s_{\psi_2}] \\
&= [s_{\sigma\psi_{1,\star}} + s_{\psi_{1,\mathrm{corr}}}, s_{\sigma\psi_{2,\star}} + s_{\psi_{2,\mathrm{corr}}}] \\
&= [s_{\sigma\psi_{1,\star}}, s_{\sigma\psi_{2,\star}}], \quad \text{d'où} \\
-s^Y_{<\psi_1,\psi_2>} &= [s^Y_{\sigma\psi_{1,\star}}, s^Y_{\sigma\psi_{2,\star}}]
\end{aligned}$$

Comme un crochet de codérivations est une codérivation, $s^Y_{<\psi_1,\psi_2>}$ est donc une $\star$-codérivation. L'image de 1 par une codérivation étant toujours un élément primitif (prop. I.2.6), $\pi_Y <\psi_1, \psi_2>= s^Y_{<\psi_1,\psi_2>}(1)$ est $\star$-primitif.

Par homogénéité du crochet d'Ihara (prop. II.2.13), $<\psi_1, \psi_2>$ ne comporte que des termes de poids supérieur ou égal à 3. La stabilité de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ pour le crochet d'Ihara est prouvée. □

Nous concluons cette section avec la proposition suivante, qui correspond à ce qui a été annoncé dans l'introduction de ce chapitre. Rappelons que la notation $\exp^{\circledast}$ désigne l'application exponentielle associée au groupe de Magnus tordu.

Proposition 2.29. — *Pour tout anneau $\Bbbk$ et tout élément λ de $\Bbbk$, l'ensemble $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0(\Bbbk))$ est un sous-groupe de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ qui agit par multiplication $\circledast$ à droite sur $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ et sur chaque $\mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Rappelons que pour tout $G \in \mathsf{MT}(\Bbbk)$ et tout $\psi \in \mathfrak{mt}(\Bbbk)$, on a, d'après la proposition II.2.9 :

$$G \circledast \exp^{\circledast}(\psi) = \exp(s_\psi)(G)$$

Étant donnée la proposition 2.27 et la définition de l'action de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$ sur $\Bbbk\langle A, B\rangle^{(n)}$, il suffit de démontrer que $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0(\Bbbk))$ est un sous-groupe de $\mathsf{MT}(\Bbbk)$.

Ce dernier point résulte du fait que $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ est une sous-algèbre fermée de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$ (voir les remarques après la prop. I.4.6). □

3. Libre transitivité et conséquences

3.1. Préambule. — Dans cette section, on prouve par une méthode d'approximations successives la transitivité de l'action de $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0)(\Bbbk)$ sur chaque $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$. On travaille donc sur le système projectif

$$\cdots \xrightarrow{\pi^{(n+1)}} \mathsf{DM}^{(n+1)} \xrightarrow{\pi^{(n)}} \mathsf{DM}^{(n)} \xrightarrow{\pi^{(n-1)}} \cdots \xrightarrow{\pi^{(2)}} \mathsf{DM}^{(2)}$$

ou plus précisément pour chaque $\lambda \in \Bbbk$, sur le système projectif des fibres $\mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$.

On utilise ici principalement deux arguments qui sont développés dans les paragraphes 3.2 et 3.3. Ils sont tirés des explications de Dror Bar-Natan ([**1**]) à propos de l'article [**11**] de Drinfel'd.

Le premier consiste à remarquer que pour passer de $\mathsf{DM}^{(n)}$ à $\mathsf{DM}^{(n+1)}$, on étudie un phénomène *linéaire*, ce qui passe par une étude semi-explicite des équations définissant $\mathsf{DM}^{(n)}$: c'est le but du paragraphe 3.2. Le deuxième, utilisé implicitement deux fois au cours du paragraphe 3.3, consiste à profiter de la surjectivité de la flèche naturelle[(4)] de $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0^{(n+1)}(\Bbbk))$ dans $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0^{(n)}(\Bbbk))$.

Le cadre de Bar-Natan est légèrement différent. Bien sûr, il étudie l'action de GRT_1 sur Ass_1, mais cela n'induit pas de grande différence concernant ces remarques. Surtout, il dispose déjà de la transitivité globale et il veut prouver que $\mathsf{Ass}_1(\mathbb{Q})$ n'est pas vide. Pour ce faire, il établit la surjectivité des flèches du système projectif formé des $\mathsf{Ass}_1^{(n)}(\mathbb{Q})$.

Bien que la méthode du corollaire 3.12 revienne elle aussi à prouver la surjectivité des flèches $\mathsf{DM}_1^{(n)}(\mathbb{Q})$, on n'aura pas à traiter explicitement au cours de la démonstration la généralisation à λ et $\Bbbk$ quelconques. Elle sera cependant évidente, une fois la structure du schéma pro-algébrique affine DM élucidée.

(4) Cette surjectivité est évidente, mais elle l'est moins chez Bar-Natan, sa tour de groupes étant plutôt l'analogue de celle des $\mathsf{DM}_0^{(n)}$.

À la fin du paragraphe 3.3, le théorème III est démontré, ainsi que le théorème II d'Écalle. Le paragraphe 3.4 est consacré à l'étude des irréductibles de Drinfel'd. Plus précisément, après avoir rappelé leur définition, on y détaille partiellement un argument considéré comme évident dans [**11**], puis on montre que ces éléments appartiennent à $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{C})$.

Rappelons les conventions habituelles pour les troncations : la graduation de $\Bbbk\langle X\rangle$ permet d'identifier le *quotient* $\Bbbk\langle X\rangle^{(n)}$ à l'ensemble des éléments de $\Bbbk\langle X\rangle$ (et donc de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$) dont les termes de poids strictement supérieur à n sont nuls, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. La flèche $\pi^{(n)}$ est la projection de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ sur $\Bbbk\langle X\rangle^{(n)}$.

3.2. Étude des équations définissant DM et $\mathsf{DM}^{(n)}$. — Soit Φ un élément de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, notons Φ_m la composante homogène de poids m de Φ et $\Phi_{\star,m}$ celle de $\Phi_\star$, égal par définition à $\Phi_{\mathrm{corr}}\pi_Y(\Phi)$ avec

$$\Phi_{\mathrm{corr}} = \exp\left(\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\Phi|y_k)y_1^k\right)$$

Étant donné que les coproduits Δ et $\Delta_\star$ sont tous deux homogènes, en prenant les composantes homogènes des équations (4.4) et (4.5), on obtient deux collections d'équations :

$$\Delta\Phi_m - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_m - \Phi_m \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 = \sum_{k=1}^{m-1} \Phi_k \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_{m-k} \tag{4.27$_m$}$$

$$\Delta_\star\Phi_{\star,m} - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_{\star,m} - \Phi_{\star,m} \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 = \sum_{k=1}^{m-1} \Phi_{\star,k} \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_{\star,m-k} \tag{4.28$_m$}$$

Ainsi, Φ appartient à $\mathsf{DM}(\Bbbk)$ si et seulement s'il vérifie les équations (4.27_m) et (4.28_m) pour tout $m \in \mathbb{N}$, assorties de $(\Phi|x_0) = (\Phi|x_1) = 0$ et $(\Phi|1) = 1$ (*cf.* déf. 1.3).

Pour tout entier n, il est de même clair que Φ appartient à $\mathsf{DM}^{(n)}(\Bbbk)$ si et seulement si :

i) $\Phi \in \Bbbk\langle X\rangle^{(n)}$, *i.e.* $\Phi_m = 0$ pour tout $m > n$.

ii) Φ satisfait aux équations (4.27_m) et (4.28_m) pour tout entier $m \leqslant n$.

iii) $(\Phi|x_0) = (\Phi|x_1) = 0$ et $(\Phi|1) = 1$.

Pour tout élément λ de $\Bbbk$ et tout entier $n \geqslant 2$, les assertions $\Phi \in \mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ et $\Phi \in \mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$ se traduisent en ajoutant la condition $(\Phi|x_0x_1) = \lambda$ (*cf.* déf. 1.7).

Pour développer la méthode d'approximations successives évoquée dans le préambule, c'est-à-dire étudier, pour un entier n, les conditions portant sur

Φ_{n+1} pour que $\Phi_0+\cdots+\Phi_{n+1}$ appartienne à $\mathsf{DM}_\lambda^{(n+1)}(\Bbbk)$, sachant que $\pi^{(n)}(\Phi)$, *i.e.* $\Phi_0+\cdots+\Phi_n$ appartient à $\mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$, il nous faut séparer, dans les équations (4.27_m) et (4.28_m) avec $m = n+1$, les termes dépendant de Φ_{n+1} et ceux qui ne dépendent que de $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$. Ce travail est effectué dans le lemme ci-dessous :

Lemme 3.1. — *Pour tout anneau $\Bbbk$, tout $\lambda \in \Bbbk$ et tout entier $n \geqslant 2$, il existe deux applications*

$$f_\Bbbk^n : \Bbbk\langle X\rangle^{(n)} \to \left(\Bbbk\langle X\rangle \underset{\Bbbk}{\otimes} \Bbbk\langle X\rangle\right)^{(n+1)} \quad et \quad g_\Bbbk^n : \Bbbk\langle X\rangle^{(n)} \to \left(\Bbbk\langle Y\rangle \underset{\Bbbk}{\otimes} \Bbbk\langle Y\rangle\right)^{(n+1)}$$

telles que, pour tout élément Φ de $\mathsf{DM}^{(n)}(\Bbbk)$ et tout élément Φ_{n+1} de $\Bbbk\langle X\rangle$, homogène de poids $n+1$, la condition $\Phi + \Phi_{n+1} \in \mathsf{DM}_\lambda^{(n+1)}(\Bbbk)$ soit équivalente à :

$$\Delta\Phi_{n+1} - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_{n+1} - \Phi_{n+1} \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 = f_\Bbbk^n(\Phi) \quad et \tag{4.29}$$

$$\Delta_\star\Phi_{n+1}^\star - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_{n+1}^\star - \Phi_{n+1}^\star \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 = g_\Bbbk^n(\Phi), \tag{4.30}$$

l'élément $\Phi_{n+1}^\star$ de $\Bbbk\langle Y\rangle$ étant défini par :

$$\Phi_{n+1}^\star := \pi_Y(\Phi_{n+1}) + \frac{(-1)^n}{n+1}(\Phi_{n+1}|y_{n+1})y_1^{n+1}$$

De plus, les applications $f_\mathbb{Q}^n$ et $g_\mathbb{Q}^n$ sont les restrictions à $\mathbb{Q}\langle X\rangle^{(n)}$ de $f_\Bbbk^n$ et $g_\Bbbk^n$.

Démonstration. — Écrivons $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \cdots + \Phi_n$, où Φ_i est, pour tout entier i compris entre 0 et n, un élément de $\Bbbk\langle X\rangle$, homogène de poids i. Posons $\Psi := \Phi + \Phi_{n+1}$.

Comme $n \geqslant 2$, les coefficients respectifs de $1, x_0, x_1$ et y_2 sont les mêmes dans Φ et Ψ.

Pour m compris entre 0 et n, les équations (4.27_m) et (4.28_m) ne font intervenir que des termes de poids au plus n. Elles sont donc vérifiées par Ψ car elles le sont par Φ. Il s'agit donc d'exprimer le fait qu'elles sont satisfaites par Ψ pour $m = n+1$. Il est immédiat que l'équation (4.27_m) (avec $m = n+1$) s'écrit sous la forme (4.29) avec

$$f_\Bbbk^n(\Phi) := \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_{n+1-k}$$

Traduisons maintenant l'équation (4.28_m) pour Ψ avec $m = n+1$. Par définition, on a $\Psi_\star = \Psi_{\mathrm{corr}}\pi_Y(\Psi)$. Comme $(\Psi|y_k)$ est nul pour $k > n+1$ et vaut $(\Phi_k|y_k)$ si $2 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathrm{corr}} &= \exp\left(\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\Psi|y_k)y_1^k\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\Phi|y_k)y_1^k\right)\exp\left(\frac{(-1)^n}{n+1}(\Phi_{n+1}|y_{n+1})y_1^{n+1}\right)\\
&= \Phi_{\mathrm{corr}}\exp\left(\frac{(-1)^n}{n+1}(\Phi_{n+1}|y_{n+1})y_1^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $\Phi_{\mathrm{corr},i}$ la composante homogène de poids i de Φ_{corr}. On a évidemment $\Phi_{\mathrm{corr},0} = 1$, ce qui donne, modulo des termes de poids strictement supérieur à $n+1$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathrm{corr}} &\equiv \Phi_{\mathrm{corr}}\exp\left(\frac{(-1)^n}{n+1}(\Phi_{n+1}|y_{n+1})y_1^{n+1}\right)\\
&\equiv \Phi_{\mathrm{corr}} + \frac{(-1)^n}{n+1}(\Phi_{n+1}|y_{n+1})y_1^{n+1}
\end{aligned}$$

Cela permet d'exprimer $\Psi_{\star,n+1}$, le terme de poids $n+1$ de $\Psi_\star$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\star,n+1} &= \pi_Y(\Phi_{n+1}) + \frac{(-1)^n}{n+1}(\Phi_{n+1}|y_{n+1})y_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\Phi_{\mathrm{corr},k}\pi_Y(\Phi_{n+1-k})\\
&\overset{\text{déf}}{=} \Phi^\star_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\Phi_{\mathrm{corr},k}\pi_Y(\Phi_{n+1-k})
\end{aligned}$$

L'équation (4.28_m) pour Ψ avec $m = n+1$ prend donc la forme (4.30) si l'on pose :

$$\begin{aligned}
g^n_{\Bbbk}(\Phi) := \sum_{k=1}^{n}\Phi_{\star,k}\underset{\Bbbk}{\otimes}\Phi_{\star,n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1}\Big(&1\underset{\Bbbk}{\otimes}\Phi_{\mathrm{corr},k}\pi_Y(\Phi_{n+1-k})\\
&+\Phi_{\mathrm{corr},k}\pi_Y(\Phi_{n+1-k})\underset{\Bbbk}{\otimes}1 - \Delta_\star(\Phi_{\mathrm{corr},k}\pi_Y(\Phi_{n+1-k}))\Big)
\end{aligned}$$

La dernière assertion de l'énoncé est évidente (en fait $f^n_{\Bbbk}$ et $g^n_{\Bbbk}$ se déduisent de $f^n_{\mathbb{Q}}$ et de $g^n_{\mathbb{Q}}$ par extension de scalaires). □

On peut maintenant énoncer les propositions utilisées au paragraphe suivant.

Proposition 3.2. — *Pour tout anneau $\Bbbk$, tout $\lambda \in \Bbbk$, tout entier $n \geqslant 2$, et tous éléments Φ et Ψ de $\mathsf{DM}^{(n+1)}_\lambda(\Bbbk)$ tels que*

$$\pi^{(n)}(\Phi) = \pi^{(n)}(\Psi),$$

la différence $\Psi - \Phi$ est un élément homogène de poids $n+1$ de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$.

Démonstration. — Soient Ψ_{n+1} et Φ_{n+1} les termes de poids $n+1$ de Ψ et Φ. Posons $\psi := \Psi_{n+1} - \Phi_{n+1}$. Il est clair que ψ est égal à $\Psi - \Phi$.

D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{n+1} - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \Phi_{n+1} - \Phi_{n+1} \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 &= f_{\Bbbk}^{n}(\pi^{(n)}(\Phi)) \quad \text{et} \\ \Delta\Psi_{n+1} - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \Psi_{n+1} - \Psi_{n+1} \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 &= f_{\Bbbk}^{n}(\pi^{(n)}(\Psi)) = f_{\Bbbk}^{n}(\pi^{(n)}(\Phi)), \quad \text{d'où} \\ \Delta\psi - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \psi - \psi \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 &= 0 \qquad (4.31) \end{aligned}$$

De même, en appliquant l'équation (4.30) à Φ et Ψ et en prenant la différence, on trouve

$$\Delta_\star\psi^\star - 1 \underset{\Bbbk}{\otimes} \psi^\star - \psi^\star \underset{\Bbbk}{\otimes} 1 = 0 \quad \text{avec} \qquad (4.32)$$

$$\psi^\star = \pi_Y(\psi) + \frac{(-1)^n}{n+1}(\psi|y_{n+1})y_1^{n+1}$$

Comme ψ est homogène de poids $n+1$, le $\psi_\star$ de la définition 2.1 de $\mathfrak{dm}(\Bbbk)$ est égal à $\psi^\star$. Comme $n+1 \geqslant 3$, on a $(\psi|x_0) = (\psi|x_1) = (\psi|y_2) = 0$, ce qui exprime, avec les équations (4.31) et (4.32), l'appartenance de ψ à $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$. □

Proposition 3.3. — *Soient $n \geqslant 2$ un entier et $\Phi^{(n)}$ un élément de $\mathsf{DM}_1^{(n)}(\mathbb{Q})$. Supposons qu'il existe un élément $\Psi^{(n+1)}$ de $\mathsf{DM}_1^{(n+1)}(\mathbb{C})$ vérifiant*

$$\pi^{(n)}(\Psi^{(n+1)}) = \Phi^{(n)}$$

Il existe alors un élément $\Phi^{(n+1)}$ de $\mathsf{DM}_1^{(n+1)}(\mathbb{Q})$ tel que

$$\pi^{(n)}(\Phi^{(n+1)}) = \Phi^{(n)}$$

Démonstration. — Posons $\Psi_{n+1} = \Psi^{(n+1)} - \Phi^{(n)}$. L'hypothèse de l'énoncé revient à dire que Ψ_{n+1} est une solution à coefficients complexes du système linéaire (avec second membre) formé par les équations (4.29) et (4.30). D'après la dernière assertion du lemme 3.1, ce système est à coefficients rationnels, car $\Phi^{(n)}$ appartient à $\mathsf{DM}_1^{(n)}(\mathbb{Q})$.

Cela implique l'existence d'une solution à coefficients rationnels, *i.e.* un élément Φ_{n+1} de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$, homogène de poids $n+1$ tel que $\Phi + \Phi_{n+1}$ appartienne à $\mathsf{DM}_1^{(n+1)}(\mathbb{Q})$. □

Définition 3.4. — *Pour tout anneau $\Bbbk$, un élément Φ de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ sera dit pair s'il ne comporte que des termes de poids pair. On notera $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle_{\text{pair}}$ l'ensemble des éléments pairs de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$.*

On voit facilement que $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle_{\text{pair}}$ est une sous-algèbre fermée de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$.

Définition 3.5. — *Soit* $\mathbb{k}$ *un anneau. Pour tout* $\mu \in \mathbb{k}$, *soit* h_μ *l'unique endomorphisme linéaire continu de* $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ *tel que* $h_\mu(\Phi) = \mu^n\Phi$, *pour tout élément* Φ *de* $\mathbb{k}\langle X\rangle$, *homogène de poids* n.

Soit également h_μ^{pair} *l'endomorphisme linéaire continu de* $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle_{pair}$ *tel que* $h_\mu^{\mathrm{pair}}(\Phi) = \mu^n\Phi$, *pour tout élément pair* Φ *de* $\mathbb{k}\langle X\rangle$, *homogène de poids* $2n$.

Il est clair que h_μ et h_μ^{pair} sont des endomorphismes d'algèbres topologiques (respectivement de $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle_{\mathrm{pair}}$) et qu'ils commutent à π_Y (rappelons que l'on considère $\mathbb{k}\langle\langle Y\rangle\rangle$ comme inclus dans $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ et que la projection π_Y est homogène).

De plus, un élément Φ de $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ est pair si et seulement si $h_{-1}(\Phi) = \Phi$.

L'endomorphisme h_μ n'est autre que la substitution $\Phi \mapsto \Phi(\mu x_0, \mu x_1)$. L'opération $h : \mathbb{k} \times \mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ est donc la même que celle qui sert à Drinfel'd pour définir l'action de $\mathbb{G}_m$ sur Ass, dont on va maintenant développer l'analogue, sous la forme de la proposition 3.7.

Lemme 3.6. — *Soient* $\mathbb{k}$ *un anneau et* $\mu \in \mathbb{k}$. *Pour tout élément* Φ *de* $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$, *on a*

$$h_\mu(\Phi_\star) = (h_\mu(\Phi))_\star$$

Si Φ *est pair, on a*

$$h_\mu^{\mathrm{pair}}(\Phi_\star) = (h_\mu^{\mathrm{pair}}(\Phi))_\star$$

Démonstration. — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(h_\mu(\Phi)|y_k) = \mu^k(\Phi|y_k)$ et donc $h_\mu((\Phi|y_k)y_1^k) = (h_\mu(\Phi)|y_k)y_1^k$. Comme h_μ est un morphisme d'algèbres topologiques, on en déduit facilement que l'on a :

$$\begin{aligned}(h_\mu(\Phi))_{\mathrm{corr}} &= \exp\left(\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}h_\mu\left((\Phi|y_k)y_1^k\right)\right)\\ &= h_\mu\left(\exp\left(\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\Phi|y_k)y_1^k\right)\right) \overset{\text{déf}}{=} h_\mu(\Phi_{\mathrm{corr}})\end{aligned}$$

Comme π_Y et h_μ commutent, cela permet d'écrire :

$$h_\mu(\Phi_\star) \overset{\text{déf}}{=} h_\mu(\Phi_{\mathrm{corr}}\pi_Y(\Phi)) = (h_\mu(\Phi))_{\mathrm{corr}}\pi_Y(h_\mu(\Phi)) \overset{\text{déf}}{=} (h_\mu(\Phi))_\star$$

L'énoncé analogue pour h_μ^{pair} se démontre de la même façon. □

Proposition 3.7. — *Soient* $\mathbb{k}$ *un anneau,* λ *et* μ *deux éléments de* $\mathbb{k}$ *et* Φ *un élément de* $\mathsf{DM}_\lambda(\mathbb{k})$.

On a $h_\mu(\Phi) \in \mathsf{DM}_{\lambda\mu^2}(\mathbb{k})$. *Si* Φ *est* pair, $h_\mu^{\mathrm{pair}}(\Phi)$ *appartient à* $\mathsf{DM}_{\lambda\mu}(\mathbb{k})$.

Démonstration. — Supposons que Φ appartienne à $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ et soit $m \in \mathbb{N}$. Les équations (4.27_m) et (4.28_m) sont vérifiées par Φ. D'après le lemme 3.6 et par définition de h_μ, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(h_\mu(\Phi))_{\star,k} = \mu^k \Phi_{\star,k}$$

En remplaçant dans les équations (4.27_m) et (4.28_m) Φ par $h_\mu(\Phi)$, on en multiplie donc les deux membres par μ^m. Étant satisfaites par Φ, elles le sont donc par $h_\mu(\Phi)$.

D'autre part, on a évidemment $(h_\mu(\Phi)|1) = 1$, $(h_\mu(\Phi)|x_0) = (h_\mu(\Phi)|x_1) = 0$ et $(h_\mu(\Phi)|y_2) = \mu^2(\Phi|y_2) = \mu^2\lambda$. On a bien vérifié que $h_\mu(\Phi)$ appartient à $\mathsf{DM}_{\lambda\mu^2}(\Bbbk)$.

L'énoncé analogue pour h_μ^{pair} se démontre de la même façon. □

Proposition 3.8. — *Soient $\Bbbk$ un anneau et $\lambda \in \Bbbk$. Tout élément pair Φ de $\mathsf{DM}_\lambda^{(2n)}(\Bbbk)$ appartient également à $\mathsf{DM}_\lambda^{(2n+1)}(\Bbbk)$.*

Démonstration. — Il s'agit de prouver que les équations (4.27_m) et (4.28_m) sont vraies pour Φ, avec $m = 2n + 1$.

Comme Φ est pair, il est clair que les deux membres de l'équation (4.27_m) avec $m = 2n + 1$ sont nuls. Elle est donc vérifiée.

Comme Φ est pair, on a $h_{-1}(\Phi) = \Phi$. Grâce au lemme 3.6, on en déduit :

$$h_{-1}(\Phi_\star) = (h_{-1}(\Phi))_\star = \Phi_\star$$

La série $\Phi_\star$ est donc également paire, ce qui implique que les deux membres de l'équation (4.28_m) avec $m = 2n + 1$ sont également nuls. □

Pour finir, la proposition ci-dessous permettra d'amorcer les récurrences.

Proposition 3.9. — *Pour tout anneau $\Bbbk$ et tout $\lambda \in \Bbbk$, l'ensemble $\mathsf{DM}_\lambda^{(2)}(\Bbbk)$ est réduit à un élement :*

$$1 + \lambda[x_0, x_1]$$

Démonstration. — Si Φ est un élément de $\mathsf{DM}_\lambda^{(2)}(\Bbbk)$, les conditions $(\Phi|x_0) = (\Phi|x_1) = 0, (\Phi|1) = 1$ et $(\Phi|y_2) = \lambda$ permettent d'écrire Φ sous la forme

$$\Phi = 1 + \Phi_2,$$

où Φ_2 est homogène de poids 2. L'équation (4.27_m) avec $m = 2$ se réduit à la primitivité de Φ_2, c'est-à-dire à $\Phi_2 \in \mathfrak{Lie}_\Bbbk(X)$. Comme la composante homogène de poids 2 de $\mathfrak{Lie}_\Bbbk(X)$ est linéairement engendrée par $[x_0, x_1]$, on voit que Φ_2 est un multiple scalaire de $[x_0, x_1]$. La condition $(\Phi|x_0x_1) = \lambda$ impose alors $\Phi = 1 + \lambda[x_0, x_1]$.

Pour prouver que Φ appartient bien à $\mathsf{DM}_\lambda^{(2)}(\Bbbk)$, il reste à vérifier l'équation (4.28_m) pour $m = 2$. Celle-ci se réduit à la $\star$-primitivité de $\Phi_{\star,2}$, *i.e.* à $\Phi_{\star,2} \in \mathfrak{Lie}_\Bbbk(U)$.

On a $\Phi_{\mathrm{corr}} = \exp(-\lambda y_1^2/2)$, donc $\Phi_{\star,2}$ est égal à $\lambda(y_2 - y_1^2/2) = \lambda u_2$ et est bien $\star$-primitif. □

3.3. Démonstrations des théorèmes II et III

Proposition 3.10. — *Pour tout anneau* $\Bbbk$ *et tout* $\lambda \in \Bbbk$, *si* $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ *n'est pas vide, l'action de* $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0(\Bbbk))$ *est transitive sur chaque* $\mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$ *(pour* $n \geqslant 2$*) et sur* $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$.

Démonstration. — Établissons d'abord la transitivité sur $\mathsf{DM}_\lambda^{(n)}(\Bbbk)$ par récurrence sur n. Pour $n = 2$, l'ensemble $\mathsf{DM}_\lambda^{(2)}(\Bbbk)$ comporte exactement un élément, donc l'action est transitive.

Supposons la proposition établie pour un entier n. Tout d'abord, $\mathsf{DM}_\lambda^{(n+1)}(\Bbbk)$ contient $\pi^{(n+1)}(\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk))$ et donc n'est pas vide. Soient $\Phi_1^{(n+1)}$ et $\Phi_2^{(n+1)}$ deux éléments de $\mathsf{DM}_\lambda^{(n+1)}(\Bbbk)$. Notons $\Phi_1^{(n)}$ et $\Phi_2^{(n)}$ leurs images par $\pi^{(n)}$. Par hypothèse de récurrence, il existe un élément ψ_n de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ tel que

$$\Phi_2^{(n)} = \pi^{(n)} \exp(s_{\psi_n})(\Phi_1^{(n)})$$

Posons alors

$$\Psi := \pi^{(n+1)} \exp(s_{\psi_n})(\Phi_1^{(n+1)})$$

Les éléments Ψ et $\Phi_2^{(n+1)}$ se projettent tous deux sur $\Phi_2^{(n)}$ par $\pi^{(n)}$. D'après la proposition 3.2, il se déduisent l'un de l'autre par addition d'un élément ψ' de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$, homogène de poids $n+1$. Or, modulo des termes de poids strictement supérieurs à $n+1$, pour tout $x \in \Bbbk\langle X\rangle^{(n+1)}$, on a

$$\exp(s_{\psi'})(x) = x + \psi'$$

Il s'ensuit que $\Phi_2^{(n+1)}$ se déduit de $\Phi_1^{(n+1)}$ par $\pi^{(n+1)} \exp(s_{\psi'}) \exp(s_{\psi_n})$. Comme il existe un élément ψ_{n+1} de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ tel que $\exp(s_{\psi_{n+1}}) = \exp(s_{\psi'}) \exp(s_{\psi_n})$, ceci permet d'achever la récurrence. De plus $\pi^{(n)}(\psi_{n+1}) = \psi_n$, car on a :

$$\psi_{n+1} = \exp(s_{\psi_{n+1}})(1) = \exp(s_{\psi'}) \exp(s_{\psi_n})(1) = \exp(s_{\psi'})(\psi_n)$$

Soient maintenant Φ_1 et Φ_2 deux éléments de $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons $\Phi_1^{(n)} := \pi^{(n)}(\Phi_1)$ et $\Phi_2^{(n)} := \pi^{(n)}(\Phi_2)$. D'après ce que nous venons de voir, il existe une suite $(\psi_n)_{n\geqslant 2}$ d'éléments de $\mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ telle que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on ait :

i) $\pi^{(n)} \exp(s_{\psi_n})(\Phi_1^{(n)}) = \Phi_2^{(n)}$.

ii) $\pi^{(n)}(\psi_{n+1}) = \pi^{(n)}(\psi_n)$.

La deuxième de ces propriétés implique la convergence de la suite. La première propriété donne alors immédiatement, en posant $\psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n$:

$$\forall n \geqslant 2,\ \pi^{(n)} \exp(s_\psi)(\Phi_1^{(n)}) = \Phi_2^{(n)}$$

On a donc $\exp(s_\psi)(\Phi_1) = \Phi_2$. La transitivité de l'action de $\exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0(\Bbbk))$ sur $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ est démontrée. □

Corollaire 3.11. — *Pour tout anneau $\Bbbk$, on a $\mathsf{DM}_0(\Bbbk) = \exp^{\circledast}(\mathfrak{dm}_0(\Bbbk))$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 3.10 en remarquant que 1 appartient à $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)$ et est l'élément neutre du groupe $\mathsf{MT}(\Bbbk)$. □

On sait donc maintenant que DM_0 est un schéma en groupes pro-unipotent et que $\Bbbk \mapsto \mathfrak{dm}_0(\Bbbk)$ est son foncteur-algèbre de Lie.

Corollaire 3.12. — *Il existe un élément pair de $\mathsf{DM}_1(\mathbb{Q})$.*

Démonstration. — Soit $\Phi_{\mathrm{KZ},1} := h_{\zeta(2)^{-1/2}}(\Phi_{\mathrm{KZ}})$. Comme Φ_{KZ} appartient à $\mathsf{DM}_{\zeta(2)}(\mathbb{C})$, d'après la proposition 3.7, $\Phi_{\mathrm{KZ},1}$ appartient à $\mathsf{DM}_1(\mathbb{C})$. Posons $\Phi^{(n)}_{\mathrm{KZ},1} := \pi^{(n)}(\Phi_{\mathrm{KZ},1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il suffit de prouver qu'il existe une suite $(\Phi^{(n)})_{n\geqslant 2}$ d'éléments pairs de $\mathsf{DM}_1^{(n)}(\mathbb{Q})$ telle que $\pi^{(n)}(\Phi^{(n+1)})$ soit égal à $\Phi^{(n)}$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Construisons cette suite par récurrence. L'élément $\Phi^{(2)}$ est donné par la proposition 3.9. Il est bien pair.

Supposons construits $\Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(2n)}$. D'après la proposition 3.8, on peut poser $\Phi^{(2n+1)} := \Phi^{(2n)}$. D'après la proposition 3.10, appliquée avec $\Bbbk = \mathbb{C}$, il existe un élément g de $\mathsf{DM}_0(\mathbb{C})$ tel que

$$\Phi^{(2n+1)} = \pi^{(2n+1)}(\Phi^{(2n+1)}_{\mathrm{KZ},1} \circledast g)$$

L'élément $\pi^{(2n+2)}(\Phi^{(2n+2)}_{\mathrm{KZ},1} \circledast g)$ de $\mathsf{DM}^{(2n+2)}(\mathbb{C})$ se projette alors par $\pi^{(2n+1)}$ sur $\Phi^{(2n+1)}$. L'existence de $\Phi^{(2n+2)}$ est donc donnée par la proposition 3.3. Il est bien pair car $\Phi^{(2n)} = \Phi^{(2n+1)}$ l'est et que leur différence est homogène de poids $2n+2$. □

Dans le corollaire ci-dessous, on a regroupé la dernière étape de la démonstration du théorème III et l'isomorphisme de schémas qui donnera le théorème d'Écalle.

Rappelons que l'algèbre de Lie du schéma en groupes pro-unipotent DM_0 est $\mathfrak{dm}_0 := \mathfrak{dm}_0(\mathbb{Q})$. Le foncteur-algèbre de Lie $\Bbbk \mapsto \mathfrak{dm}_0(\Bbbk) = \mathfrak{dm}_0 \widehat{\otimes} \Bbbk$ est un schéma affine, naturellement isomorphe au spectre de l'algèbre symétrique formée sur le dual gradué de $\mathrm{gr}\,\mathfrak{dm}_0$.

Corollaire 3.13. — *Pour tout anneau $\Bbbk$ et tout $\lambda \in \Bbbk$, l'action de $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)$ sur $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$ est libre et transitive.*

Soit Ψ un élément pair de $\mathsf{DM}_1(\mathbb{Q})$. L'application $\varphi(\Bbbk)$ donnée ci-dessous pour tout anneau $\Bbbk$ définit un isomorphisme de schémas de $\mathbb{A}^1 \times \mathfrak{dm}_0$ sur DM.

$$\varphi(\Bbbk) : \begin{array}{lcl} \Bbbk \times \mathfrak{dm}_0(\Bbbk) & \longrightarrow & \mathsf{DM}(\Bbbk) \\ (\lambda, \psi) & \mapsto & h_\lambda^{\mathrm{pair}}(\Psi) \circledast \exp^{\circledast}(\psi) \end{array}$$

Démonstration. — La liberté est évidente, car $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)$ agit par multiplication à droite au sein du groupe $\mathsf{MT}(\Bbbk)$.

Pour tout anneau $\Bbbk$, la série Ψ appartient à $\mathsf{DM}_1(\Bbbk)$, car $\mathbb{Q} \subset \Bbbk$. Pour tout $\lambda \in \Bbbk$, d'après la proposition 3.7, $h_\lambda^{\mathrm{pair}}(\Psi)$ appartient donc à $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$. On peut donc appliquer la proposition 3.10 qui donne la transitivité de l'action de $\mathsf{DM}_0(\Bbbk)$ sur $\mathsf{DM}_\lambda(\Bbbk)$.

Pour tout anneau $\Bbbk$, l'application $\varphi(\Bbbk)$ est donc bien à valeurs dans $\mathsf{DM}(\Bbbk)$ et surjective. Elle est injective car $(\varphi(\Bbbk)(\lambda, \psi)|y_2) = \lambda$, par liberté de l'action et injectivité de l'exponentielle. La fonctorialité de la dépendance en $\Bbbk$ est évidente. □

On peut donc maintenant énoncer notre version du théorème d'Écalle :

Corollaire 3.14. — *L'algèbre* $\mathsf{PZformel}$ *est une algèbre de polynômes sur* $\mathbb{Q}$, *isomorphe à* $\mathbb{Q}[t] \otimes \mathbf{S}(V)$, *avec*

$$V := \bigoplus_{n \geqslant 3} \widetilde{\mathfrak{dm}^n}$$

Démonstration. — D'après les remarques suivant les définitions 2.1 de $\mathfrak{dm}$ et 2.4 de $\mathfrak{dm}_0$, il est clair que V est le dual gradué de $\mathrm{gr}\mathfrak{dm}_0$. Le schéma $\mathfrak{dm}_0$ est donc naturellement isomorphe à *Spec* $(\mathbf{S}(V))$.

Comme on a *Spec* $(\mathsf{PZformel}) = \mathsf{DM}$ et *Spec* $(\mathbb{Q}[t]) = \mathbb{A}^1$, le résultat découle de l'isomorphisme de schémas du corollaire précédent, compte tenu de *Spec* $(A \otimes B) =$ *Spec* $(A) \times$ *Spec* (B) pour tous anneaux A et B. □

3.4. Les irréductibles de Drinfel'd. — A la dernière page de [**11**], Drinfel'd donne la construction suivante d'un système d'irréductibles de $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{C})$ (rappelons que $\mathfrak{grt}_1$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe $\mathsf{GRT}_1 = \mathsf{Ass}_0$ de MT).

Proposition 3.15. — *Il existe un élément* ψ *de* $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{C})$ *tel que*

$$h_{-1}(\Phi_{KZ}) = \Phi_{KZ}(A, B)) \circledast \exp^{\circledast}(\psi)$$

Les composantes homogènes de poids pair de ψ *sont nulles. Pour tout entier impair* $n \geqslant 3$, *soit* $\sigma_n := -\psi_n / 2\zeta(n)$, *où* ψ_n *est la composante homogène de poids* n *de* ψ.

On a alors $(\sigma_n|y_n) = 1$ *et* σ_n *est irréductible dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{mt}(\mathbb{C})$.

Démonstration. — Comme Φ_{KZ} est un élément de $\mathsf{Ass}_{i\pi}(\mathbb{C})$, la série $h_{-1}(\Phi_{\mathrm{KZ}})$ appartient à $\mathsf{Ass}_{-i\pi}(\mathbb{C})$ (*cf.* §II.1.3). Son image par la conjugaison complexe est donc un élément de $\mathsf{Ass}_{i\pi}(\mathbb{C})$, comme il est clair au vu de l'équation hexagonale (II.2.10). Les polyzêtas étant des nombres réels, leur série génératrice Φ_{KZ} est à coefficients réels, ainsi donc que $h_{-1}(\Phi_{\mathrm{KZ}})$. Cette derniere est donc égale à sa conjuguée, et appartient ainsi à $\mathsf{Ass}_{i\pi}(\mathbb{C})$, de même que Φ_{KZ}. Le théorème I de Drinfel'd montre alors l'existence de ψ.

En appliquant h_{-1} à l'équation
$$h_{-1}(\Phi_{\mathrm{KZ}}) = \Phi_{\mathrm{KZ}} \circledast \exp^{\circledast}(\psi),$$
on obtient, h_{-1} étant un automorphisme involutif de l'algèbre topologique $\Bbbk\langle\langle A,B\rangle\rangle = \Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$:
$$\Phi_{\mathrm{KZ}} = h_{-1}(\Phi_{\mathrm{KZ}}) \circledast \exp^{\circledast}(h_{-1}(\psi))$$
On en déduit que $\exp^{\circledast}(h_{-1}(\psi))$ est l'inverse de $\exp^{\circledast}(\psi)$ dans le groupe $\mathsf{MT}(\Bbbk)$, ce qui donne $h_{-1}(\psi) = -\psi(A,B)$. Les composantes homogènes de poids pair de ψ sont donc nulles.

On déduit immédiatement de la proposition 2.26 que l'on a
$$(\psi|y_n) = (h_{-1}(\Phi_{\mathrm{KZ}})|y_n) - (\Phi_{\mathrm{KZ}}|y_n)$$
Pour tout entier impair $n \geqslant 3$, compte tenu de $(\Phi_{\mathrm{KZ}}|y_n) = \zeta(n)$, ceci implique immédiatement $(\psi|y_n) = -2\zeta(n)$, d'où $(\sigma_n|y_n) = 1$. Le terme de longueur 1 de σ_n n'est donc pas nul. Le crochet d'Ihara étant homogène pour la longueur, σ_n ne peut pas être une combinaison linéaire de crochets d'éléments de $\mathfrak{mt}(\mathbb{C})$. $\square$

Remarque. — On a donné seulement un coefficient de σ_n, là où Drinfel'd donne la projection de σ_n dans $[\mathfrak{p}(\mathbb{C}),\mathfrak{p}(\mathbb{C})]$, où $\mathfrak{p}(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie $[\widehat{\mathfrak{Lie}}_{\mathbb{C}}(A,B),\widehat{\mathfrak{Lie}}_{\mathbb{C}}(A,B)]$, pour montrer qu'à un facteur multiplicatif près, cette projection est la même que celle de l'irréductible d'Ihara correspondant. Il n'y a aucune raison *a priori* de penser que les irréductibles d'Ihara et de Drinfel'd sont identiques.

Proposition 3.16. — *Les irréductibles de Drinfel'd appartiennent à* $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{C})$.

Démonstration. — En effet, Φ_{KZ} est également un élément de $\mathsf{DM}_{\zeta(2)}(\mathbb{C})$, de même que $h_{-1}(\Phi_{\mathrm{KZ}})$ (prop. 3.7). Le théorème III montre alors que $\exp^{\circledast}(\psi)$ appartient à $\mathsf{DM}_0(\mathbb{C})$. $\square$

Étant donné que $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{C}) = \mathfrak{dm}_0 \widehat{\otimes}\, \mathbb{C}$ et $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{C}) = \mathfrak{grt}_1 \widehat{\otimes}\, \mathbb{C}$, les propositions 3.15 et 3.16 permettent de voir qu'il existe un système d'éléments irréductibles $(\sigma'_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathfrak{dm}_0(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{grt}_1(\mathbb{Q})$, où σ'_{2n+1} est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, homogène de poids $2n+1$, car $\mathbb{Q}$ est un corps.

Comme il a été dit au début de ce chapitre, la conjecture de transcendance (IV) amène à penser que DM est inclus dans Ass. Cela dit, la dimension prévue par la conjecture de Zagier formelle pour l'espace vectoriel $\mathsf{PZformel}_n$ coïncide avec celle de la partie homogène de poids n de $\mathbf{S}(\mathfrak{grt})$, si la conjecture de Deligne-Drinfel'd est vraie.

On est donc amené à la conjecture suivante :

Conjecture VI. — *Pour tout anneau* $\Bbbk$ *et tout* $\lambda \in \Bbbk$, *les ensembles* $\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk)$ *et* $\mathsf{DM}_{-\lambda^2/6}(\Bbbk)$ *sont égaux.*

APPENDICE A

COMPARAISON AVEC LES CONSTRUCTIONS D'ÉCALLE

1. Préambule

Le but de cet appendice est de montrer quelles sont les correspondances entre certains objets utilisés par Écalle et ceux dont il a été question ici.

Ainsi, on présente brièvement la notion de moule et l'isomorphisme standard entre l'algèbre des moules *entiers* en une quantité dénombrable de variables et l'algèbre topologique $\mathbb{C}\langle\langle Z\rangle\rangle$ formée sur un alphabet numéroté. Si le résultat principal s'exprime en terme de moules entiers, le lecteur ne doit pas perdre de vue que la démonstration d'Écalle peut faire intervenir des fonctions ayant des pôles en 0, et donc sans équivalent dans nos constructions. De plus, il semble qu'Écalle considère systématiquement ses moules comme formés de fonctions méromorphes (à plusieurs variables) et que l'étude de leurs pôles, que ce soit en 0 ou non, joue un rôle important dans ses théories.

Il n'est donc pas question ici d'expliquer les détails de cette théorie, mais de définir les objets nécessaires[(1)] à l'énoncé du théorème d'Écalle, d'en donner un « dictionnaire » et de comparer les structures qui peuvent l'être. Le lecteur est invité à se reporter aux articles d'Écalle à paraître sur le sujet pour un véritable exposé, notamment de la démonstration du théorème.

2. Les moules et leurs symétries

Définition 2.1. — *Soient E un ensemble et A un anneau. Un moule* $\mathbf{M}$ *(à variables dans E et à valeurs dans A) est une collection de « fonctions »* $(\mathbf{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de E^n dans A.*

[(1)] Ces définitions peuvent être suffisantes pour notre propos de traduction et cependant ne pas donner le sens de ces objets qui ont manifestement été conçus pour d'autres buts que l'étude de la structure de PZformel. Que le lecteur nous en pardonne.

Les variables de E peuvent par exemple être des nombres complexes, et les « fonctions[(2)] » des polynômes, des fractions rationnelles, des fonctions méromorphes, etc. En général, on n'aura pas à préciser l'indice n, celui-ci se voyant dans la longueur de la séquences de variables.

On appellera moule homogène de longueur l un moule $\mathbf{M}$ tel que $\mathbf{M}_n$ soit nul si $n \neq l$. L'ensemble des moules à variables dans E et à coefficients dans A est naturellement un A-module. Il est le produit cartésien de ses composantes homogènes. La concaténation des séquences d'éléments de E le munit d'une structure de A-algèbre :

$$(\mathbf{M} \times \mathbf{N})(\underline{x}) := \sum_{\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 = \underline{x}} \mathbf{M}(\underline{x}_1)\mathbf{N}(\underline{x}_2)$$

L'analogie manifeste entre ce produit et le produit de Cauchy des séries peut se préciser de la manière suivante.

Définition 2.2. — *Soit $Z = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ un alphabet dénombrable. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons $\Bbbk\langle Z\rangle_{\ell,r}$ la partie homogène de longueur r de $\Bbbk\langle Z\rangle$. Soit alors $\iota^r : \Bbbk\langle Z\rangle_{\ell,r} \to \Bbbk[e_1, \ldots, e_r]$ l'application $\Bbbk$-linéaire définie par*

$$\iota^r(z_{s_1} \cdots z_{s_r}) = e_1^{s_1-1} \cdots e_r^{s_r-1}$$

On étend cela à ι_Z, application $\Bbbk$-linéaire qui à tout élément $x = \sum_{r\geqslant 0} x_r$ de $\Bbbk\langle\langle Z\rangle\rangle$ associe le moule $\iota(x)$ donné par $\iota(x)(e_1, \ldots, e_r) = \iota^r(x_r)(e_1, \ldots, e_r)$

Le poids d'un élément P finement homogène de $\Bbbk\langle Z\rangle$ est égal à la somme de sa longueur et du degré du polynôme correspondant $\iota(P)$.

L'application ι ainsi définie est un isomorphisme d'algèbres de $\Bbbk\langle\langle Z\rangle\rangle$ sur l'algèbre des moules entiers (dont les « fonctions » sont les séries entières à coefficients dans $\Bbbk$). Il s'agit bien de $\Bbbk\langle\langle Z\rangle\rangle$ et non du complété de $\Bbbk\langle Z\rangle$ pour la longueur, car une somme infinie de termes de même longueur mais de poids tendant vers l'infini donne lieu à une somme infinie de polynômes commutatifs dont le degré, au sens usuel, tend vers l'infini, ce qui a bien un sens dans les séries formelles commutatives. On peut considérer que l'on a ainsi codé une série non commutative par une collection de séries commutatives.

Parmi les propriétés que peut vérifier un moule, certaines formes de symétries ont une importance particulière. On reproduit ci-dessous quasiment mot-à-mot les définitions d'Écalle. Les précisions utiles sont données à la suite.

Définition 2.3. — *Un moule $\mathbf{M}$ à variables dans E est dit symétral (respectivement alternal) si et seulement si, pour toutes séquences $\underline{x}^1$ et $\underline{x}^2$ d'éléments*

(2) Ce terme était volontairement vague.

de E, on a

$$\sum_{\underline{x}\in\mathsf{sha}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} \mathbf{M}(\underline{x}) = \mathbf{M}(\underline{x}^1)\mathbf{M}(\underline{x}^2) \quad \textit{(respectivement } 0\textit{)},$$

où $\mathsf{sha}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$ *désigne la* famille *des séquences obtenues par battage de* $\underline{x}^1$ *et* $\underline{x}^2$.

On suppose que E est un groupe abélien, noté additivement. Le moule $\mathbf{M}$ *est dit symétrel (resp. alternel) si et seulement si, pour toutes séquences* $\underline{x}^1$ *et* $\underline{x}^2$ *d'éléments de E, on a*

$$\sum_{\underline{x}\in\mathsf{she}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} \mathbf{M}(\underline{x}) = \mathbf{M}(\underline{x}^1)\mathbf{M}(\underline{x}^2) \quad \textit{(respectivement } 0\textit{)},$$

où $\mathsf{she}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$ *désigne la famille des séquences obtenues par « battage contractant », i.e. avec addition éventuelle de deux éléments adjacents ne provenant pas de la même séquence.*

Le moule $\mathbf{M}$ *est dit symétril (resp. alternil) si et seulement si, pour toutes séquences* $\underline{x}^1$ *et* $\underline{x}^2$ *d'éléments de E, on a*

$$\sum_{\underline{x}\in\mathsf{shi}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} \mathbf{M}(\underline{x}) = \mathbf{M}(\underline{x}^1)\mathbf{M}(\underline{x}^2) \quad \textit{(respectivement } 0\textit{)},$$

où $\mathsf{shi}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$ *s'obtient comme* $\mathsf{she}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$ *en remplaçant l'addition des variables par un symbole abstrait* $\divideontimes$ *décrivant l'évaluation* $\mathbf{M}(\underline{x})$ *suivant la règle*

$$\mathbf{M}(\dots, x_i \divideontimes y_j, \dots) = \frac{\mathbf{M}(\dots, x_i, \dots) - \mathbf{M}(\dots, y_j, \dots)}{x_i - y_j}$$

(les termes dans les pointillés peuvent comporter eux aussi le symbole $\divideontimes$*).*

Avec les notations du chapitre I, pour toutes séquences $\underline{x}^1 = (x_1, \dots, x_p)$ et $\underline{x}^2 = (x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$ on a

$$\sum_{\underline{x}\in\mathsf{sha}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} \mathbf{M}(\underline{x}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p,q}} \mathbf{M}(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(p+q)})$$

Si P est un élément de $\Bbbk\langle\langle Z\rangle\rangle$, on voit donc que $\iota(P)$ est symétral (resp. alternal) si et seulement si P est diagonal (resp. primitif) pour le coproduit Δ.

On peut traduire de manière similaire les symétries associées aux battages contractants. Soit $\mathfrak{S}_{p,q,r}$ l'ensemble des applications surjectives σ de $\{1, \dots, p+q\}$ dans $\{1, \dots, r\}$ dont les restrictions à $\{1, \dots, p\}$ et $\{p+1, \dots, p+q\}$ sont strictement croissantes. Si l'on désigne, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, la somme[(3)] des

[(3)]On voit facilement qu'elle comporte au plus deux termes.

éléments de la fibre $\sigma^{-1}(i)$ par $\sigma^{<}(i)$, on peut écrire

$$\sum_{\underline{x}\in \mathsf{she}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} \mathbf{M}(\underline{x}) = \sum_{r,\ \sigma\in\mathfrak{S}_{p,q,r}} \mathbf{M}(x_{\sigma^<(1)},\dots,x_{\sigma^<(r)})$$

De même que $\mathsf{sha}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$ correspond naturellement au produit $\sqcup\!\sqcup$, les battages contractants sont associés au produit $\star$.

3. Fonctions génératrices associées aux polyzêtas

Les séries génératrices considérées par Écalle et Goncharov sont les suivantes, avec les notations $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\zeta_\star$ du chapitre III :

$$\mathbf{Zag}(u_1,\dots,u_r) := \sum_{s_1,\dots,s_r\geqslant 1} \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(s_r,\dots,s_1) u_1^{s_1-1} u_{1\dots 2}^{s_2-1}\cdots u_{1\dots r}^{s_r-1},$$

où, pour condenser les formules, on note $u_{i\dots j}$ la somme $u_i+u_{i+1}+\dots+u_j$ (pour tous entiers i et j tels que $i\leqslant j$).

La deuxième collection de séries génératrices est :

$$\mathbf{Zig}(v_1,\dots,v_r) := \sum_{s_1,\dots,s_r\geqslant 1} \zeta_\star(s_1,\dots,s_r) v_1^{s_1-1}\cdots v_r^{s_r-1}$$

On utilise deux séries de variables, u et v, pour distinguer la nature différente de **Zag** et **Zig**. La définition qu'on a donnée ici est en fait un cas particulier de celle, plus générale, qui convient pour traiter des polyzêtas aux racines de l'unité (évoqués très brièvement au paragraphe III.1.5). La définition générale fait apparaître les variables u et v dans **Zag** et **Zig**. Ces derniers sont donc des moules à double liste de variables,*i.e.* des *bimoules*. Toutes les opérations qu'on décrira plus loin sont en fait définies au niveau des bimoules, ce qui rend les descriptions plus symétriques et ainsi éclaircit les phénomènes. Comme il ne s'agit pas ici d'obtenir à proprement parler de résultats sur les moules, mais de fournir des traductions, on se contentera de moules à une série de variables : les u pour **Zag** et les v pour **Zig**.

Dans la suite, on n'utilise que des moules indexés par les variables u ou par les variables v.

On voit déjà que le moule **Zig** est l'image par l'application ι_Y de $\Phi_\star$. On va montrer que **Zag** correspond, quant à lui, à $\Phi_{\sqcup\!\sqcup}$.

Définition 3.1. — *Soit* swap *l'opérateur défini par :*

$$\mathrm{swap}(\mathbf{M})(v_1,\dots,v_r) := M(v_r, v_{r-1}-v_r,\dots,v_1-v_2)$$

Définition 3.2. — *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $C_n := \mathrm{ad}\,(x_0)^{n-1}(x_1)$ et C l'ensemble des C_n, où n parcourt $\mathbb{N}^*$.*

On n'hésitera pas dans la suite à considérer C comme un alphabet. D'après le théorème d'élimination de Lazard (prop. I.5.5), l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{Lie}_{\mathbb{C}}(X)$ se décompose, en tant qu'espace vectoriel, en somme directe :

$$\mathfrak{Lie}_{\mathbb{C}}(X) = \mathbb{C} \cdot x_0 \oplus \mathfrak{Lie}_{\mathbb{C}}(C)$$

On en déduit immédiatement la décomposition suivante, en tant qu'espace vectorel, de son algèbre enveloppante $\mathbb{C}\langle X\rangle$:

$$\mathbb{C}\langle X\rangle = \mathbb{C}[x_0] \otimes \mathbb{C}\langle C\rangle$$

Dans la suite, on note ι_Y l'application qui met en correspondance $\mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle$ et les variables v et ι_C celle qui fait correspondre $\mathbb{C}\langle\langle C\rangle\rangle$ aux variables u.

Proposition 3.3. — *Pour tout élément x de $\mathbb{C}\langle\langle C\rangle\rangle$, on a :*

$$\mathrm{swap}\iota_C(x) = \iota_Y \mathrm{ret}_Y \pi_Y(x)$$

Démonstration. — Il suffit de prouver le résultat pour $x = C_{s_1} \cdots C_{s_r}$ avec $(s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{S}$. On peut alors écrire

$$\begin{array}{rcl} x & = & (\mathrm{ad}\, x_0)^{s_1-1} x_1 \cdots (\mathrm{ad}\, x_0)^{s_r-1} x_1, \quad \text{d'où} \\ \pi_Y(x) & = & (\mathrm{ad}\, x_0)^{s_1-1} x_1 \cdots (\mathrm{ad}\, x_0)^{s_{r-1}-1} x_1 x_0^{s_r-1} x_1 \end{array}$$

Par définition de ι_Y, on trouve alors facilement :

$$\begin{array}{rcl} \iota_Y \pi_Y(x) & = & (v_1 - v_2)^{s_1-1} \cdots (v_{r-1} - v_r)^{s_{r-1}-1} v_r^{s_r-1}, \quad \text{d'où} \\ \iota_Y \mathrm{ret}_Y \pi_Y(x) & = & (v_r)^{s_1-1} (v_{r-1} - v_r)^{s_2-1} \cdots (v_1 - v_2)^{s_1-1} \end{array}$$

Comme $\iota_C(x) = u_1^{s_1-1} \cdots u_r^{s_r-1}$, cela est exactement égal à $\mathrm{swap}\iota_C(x)$. $\square$

À la différence de codage près, les opérateurs swap et π_Y sont donc identiques. On en déduit que l'inverse de swap est σ, car le noyau de ∂_{x_0} est exactement $\mathbb{C}\langle\langle C\rangle\rangle$. Ainsi présenté, le retournement paraît artificiel et de peu d'intérêt. Il a cependant l'avantage, lorsque l'on travaille avec les bimoules de rendre le « swap » involutif.

L'avantage des séries génératrices commutatives est d'éviter l'apparition de coefficients binomiaux qui ne sont gérables que dans les cas les plus simples(4). Dans un « moule de type somme », comme **Zag**, ils sont dissimulés dans les puissances de sommes partielles, et donc manipulables(5).

Les trois propriétés utilisées par Écalle sont les suivantes :
– Le moule **Zag** est symétral (premier système).
– Le moule **Zig** est symétril (deuxième système).

(4) Comme dans les calculs du chapitre IV, lemme 2.3.
(5) Cela reste vrai pour les ordinateurs, voir l'annexe suivante.

– Les moules **Zig** et **Zag** sont reliés par :

$$\mathbf{Zig} = \mathbf{M} \times \operatorname{swap}(\mathbf{Zag}), \tag{A.1}$$

où $\mathbf{M}$ est un moule *constant*, *i.e.* composé de fonctions constantes.
On laisse le lecteur se convaincre qu'elles correspondent, dans le même ordre, aux trois systèmes de relations décrits au chapitre III.

4. L'algèbre de Lie Ari et le théorème d'Écalle

Il s'agit donc d'étudier les moules, à nouveau notés **Zag**, qui sont symétrals et dont le swappé est symétril si on le corrige par un moule constant (inutile de le préciser). Écalle désigne sous le nom de « multizêtas symboliques » une collection de symboles indexés comme les multizêtas[(6)] et soumis aux trois systèmes de relations algébriques habituels. Un multizêta symbolique est donc un élément de $\mathsf{PZformel}$, de la forme $\zeta_{\mathrm{form}}(s_1, \dots, s_r)$.

On qualifie de bialternal un moule alternal en les variables u dont le swappé est également alternal. On note $\mathfrak{Bial}_r$ l'ensemble des polynômes bialternaux de longueur r et $\mathfrak{Bial}_r^*$ l'ensemble des éléments *pairs* de $\mathfrak{Bial}_r$.

THÉORÈME ***IV***. — *Soit pour tout entier $r \geqslant 1$ une base $\mathscr{B}_r$ de $\mathfrak{Bial}_r^*$, homogène pour le poids. Il existe une injection respectant poids et longueur*

$$\varphi : \mathscr{B} = \bigcup_{r \geqslant 1} \mathfrak{Bial}_r^* \longrightarrow \mathsf{PZformel},$$

telle que $\{\zeta_{form}(2)\} \cup \varphi(\mathscr{B})$ engendre librement $\mathsf{PZformel}$.

Comme on l'a déjà fait remarquer, l'algèbre $\mathsf{PZformel}$ n'est pas graduée par la longueur. Par élément homogène de longueur r de $\mathsf{PZformel}$, on entend ici de la forme $\zeta_{\mathrm{form}}(s_1, \dots, s_r)$.

Ce théorème n'est que la première étape d'un projet ambitieux visant à élucider complètement la structure de l'algèbre $\mathsf{PZformel}$: construction des bialternaux, formules explicites de décompositions, etc.

La démonstration de ce théorème utilise le fait que l'ensemble des bialternaux est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie Ari définie ci-dessous[(7)].

Définition 4.1. — *Pour tout moule B, soit S_B^{ari} l'opérateur défini par :*

$$\left(S_B^{ari}(A)\right)(\underline{w}) = \sum_{\underline{w}=\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}} A(\underline{a}\cdot\underline{c}')B(\underline{b}) - \sum_{\substack{\underline{w}=\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} \\ \underline{a}\neq\emptyset}} A(\underline{a}''\cdot\underline{c})B(\underline{b}), \tag{A.2}$$

(6) Ce sont les polyzêtas du chapitre III.

(7) Pour éviter de se répéter, on introduit dans la définition des notations qui nous sont propres et qui permettront d'effectuer le travail de comparaison annoncé.

pour toute séquence $\underline{w}$ de variables, $\underline{c}'$ désignant la séquence obtenue à partir de $\underline{c}$ en ajoutant à son premier élément tous ceux de $\underline{b}$, sauf si $\underline{c} = \emptyset$, auquel cas $\underline{c}' = \emptyset$, et $\underline{a}''$ la séquence obtenue à partir de $\underline{a}$ en ajoutant à son dernier élément tous ceux de $\underline{b}$.

L'algèbre de Lie Ari *est l'espace vectoriel des moules, muni du crochet*

$$[A, B]_{ari} := S_B^{ari}(A) - S_A^{ari}(B)$$

On posera dans la suite : $D_B^{ari}(A) := S_B^{ari}(A) - A \times B$ (multiplication des moules).

On a donc

$$[A, B]_{\mathrm{ari}} = D_B^{\mathrm{ari}}(A) - D_A^{\mathrm{ari}}(B) + [A, B]_\times \tag{A.3}$$

La formule définissant $S_B^{\mathrm{ari}}(A)$ conduit immédiatement à

$$\left(D_B^{\mathrm{ari}}(A)\right)(\underline{w}) = \sum_{\substack{\underline{w}=\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} \\ c\neq\emptyset}} A(\underline{a}\cdot\underline{c}')B(\underline{b}) - \sum_{\substack{\underline{w}=\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} \\ a\neq\emptyset}} A(\underline{a}''\cdot\underline{c})B(\underline{b}), \tag{A.4}$$

pour toute séquence $\underline{w}$ de variables.

Remarques. — Si A et B sont des moules homogènes, c'est-à-dire simplement des polynômes à p et q variables respectivement, nombre de termes de la somme ci-dessus sont nuls, ce qui revient à rajouter dans les sommations les conditions $\ell(\underline{w}) = p + q$ et $\ell(\underline{b}) = q$.

La définition ci-dessus donne $S_B^{\mathrm{ari}}(A)$ appliqué à toute liste w de variables. Dans la pratique, on l'appliquera aux listes « génériques » $(u_1, \ldots, u_r)$.

L'algèbre de Lie Ari est plus grosse que $\mathfrak{mt}$, car les substitutions intervenant dans sa définition sont valables pour des « fonctions » quelconques (méromorphes, distributions, etc.), alors que les éléments de $\mathfrak{mt}$ sont en bijection avec les moules *entiers*.

5. Comparaison entre les crochets d'Écalle et d'Ihara

La formule (A.3) est déjà proche de celles qu'on connaît pour le crochet d'Ihara. Pour mener à bien la comparaison, il faut identifier les propriétés des opérateurs D^{ari}. Dans la suite, on n'utilise plus ι_Y, ce qui permet d'abréger ι_C en ι.

Proposition 5.1. — *L'opérateur* $\operatorname{ad} x_0$, *dérivation de* $\mathbb{C}\langle C\rangle$, *est donné du côté moulien par*

$$\iota(\operatorname{ad} x_0(\psi))(u_1, \ldots, u_r) = u_{1\ldots r}(\iota\psi)(u_1, \ldots, u_r)$$

Démonstration. — Tout d'abord, $\mathbb{C}\langle C\rangle$ est bien stable par $\operatorname{ad} x_0$, car on a

$$\operatorname{ad} x_0(C_n) = C_{n+1}, \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1$$

Par linéarité, il suffit d'obtenir la formule voulue dans le cas où ψ est de la forme $C_{s_1} \cdots C_{s_r}$. On a alors $\iota(\psi)(u_1, \ldots, u_r) = u_1^{s_1-1} \cdots u_r^{s_r-1}$ et

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad} x_0(\psi) &= \sum_{i=1}^{r} C_{s_1} \cdots \operatorname{ad} x_0(C_{s_i}) \cdots C_{s_r} \\
&= \sum_{i=1}^{r} C_{s_1} \cdots C_{s_i+1} \cdots C_{s_r}, \quad \text{d'où} \\
\iota(\operatorname{ad} x_0(\psi)) &= \sum_{i=1}^{r} u_1^{s_1-1} \cdots u_i^{s_i} \cdots u_r^{s_r-1} \\
&= u_{1\ldots r}\,\iota(\psi)(u_1, \ldots, u_r)
\end{aligned}$$

□

Proposition 5.2. — *Pour tout moule R l'opérateur D_R^{ari} est une dérivation pour le produit des moules.*

Démonstration. — Il suffit de prouver le résultat lorsque R est homogène de longueur r. Soient alors A et B deux moules entiers homogènes à p et q variables. On va appliquer la formule (A.4) pour calculer $D_R^{\mathrm{ari}}(AB)$, sur la liste de variables $(u_1, \ldots, u_n)$ (avec $n = p + q + r$). Commençons par étudier la première somme de la formule (A.4) en la notant $E_R(AB)$:

$$E_R(AB)(\underline{w}) = \sum_{\substack{\underline{w}=\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c},\, c\neq\emptyset \\ \ell(\underline{b})=r}} (AB)(\underline{a}\cdot\underline{c}')R(\underline{b})$$

$$= \sum_{0\leqslant i<n-r} (AB)(u_1, \ldots, u_i, u_{i+1\ldots i+r+1}, \ldots, u_n)R(u_{i+1}, \ldots, u_{i+r}),$$

car $u_{i+1\ldots i+r+1}$ est le terme altéré en passant de $\underline{c}$ à $\underline{c}'$. Séparons cette somme en deux, en remarquant que les conditions $\ell(\underline{a}) < p$ et $\ell(\underline{c}) > q$ sont équivalentes, compte tenu des égalités $\ell(\underline{a}) + \ell(\underline{c}) = n - \ell(\underline{b}) = n - r = p + q$:

$$\begin{aligned}
&E_R(AB)(\underline{w}) = \\
&B(u_{n-q+1}, \ldots, u_n) \sum_{0\leqslant i<p} A(u_1, \ldots, u_i, u_{i+1\ldots i+r+1}, \ldots, u_{r+p})R(u_{i+1}, \ldots, u_{i+r}) \\
&+A(u_1, \ldots, u_p) \sum_{p\leqslant i<n-r} B(u_{p+1}, \ldots, u_i, u_{i+1\ldots i+r+1}, \ldots, u_n)R(u_{i+1}, \ldots, u_{i+r})
\end{aligned}$$

On peut maintenant réécrire cela sous la forme :

$$\begin{aligned} E_R(AB)(\underline{w}) &= B(u_{n-q+1},\dots,u_n)E_R(A)(u_1,\dots,u_{p+r}) \\ &\quad +A(u_1,\dots,u_p)E_R(B)(u_{p+1},\dots,u_n) \\ &= [E_R(A)\times B + A\times E_R(B)]\,(u_1,\dots,u_n) \end{aligned}$$

Un des points importants pour effectuer cette factorisation est de bien vérifier que le terme altéré $\widehat{u}_{i+r+1}$ l'est de la même façon pour $E_R(AB), E_R(B)$ et $E_R(A)$.

Pour la deuxième partie de l'expression de D_R^{ari}, on procède de la même façon ; à chaque fois le terme modifié (ici dans $\underline{a}''$) sera du coté que l'on laisse dans la sommation. □

On va maintenant pouvoir mettre les dérivation D_R^{ari} en rapport avec les d_ψ du chapitre II.

Proposition 5.3. — *Soit ψ un élément de $\Bbbk\langle\langle C\rangle\rangle$. Les opérateurs d_ψ et $D_{\iota\psi}^{ari}$ se correspondent via les flèches d'identification ι.*

Démonstration. — Compte-tenu de la proposition 5.2, il suffit de vérifier que $D_{\iota\psi}^{\mathrm{ari}}$ et $\iota(d_\psi)$ coïncident sur les générateurs (topologiques), à savoir les monômes à une variable pour le formalisme moulien, et les C_n pour $\Bbbk\langle\langle C\rangle\rangle$. On peut se limiter au cas où ψ est homogène, de longueur r. On a immédiatement :

$$d_\psi(C_n) = d_\psi(\operatorname{ad} {x_0}^n x_1) = (\operatorname{ad} x_0)^{n-1}([\psi, x_1]),$$

d'où l'on tire, grâce à la proposition 5.1 :

$$\begin{aligned} \iota(d_\psi(C_n)) &= u_{1\dots r+1}^{n-1}\iota[\psi,x_1](u_1,\dots,u_{r+1}) \\ &= u_{1\dots r+1}^{n-1}\Big((\iota\psi)(u_1,\dots,u_n) - (\iota\psi)(u_2,\dots,u_{n+1})\Big) \\ &= D_{\iota\psi}^{\mathrm{ari}}(\iota C_n) \text{ car } \iota C_n(u_1) = u_1^{n-1} \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.4. — *Les crochets d'Écalle et d'Ihara sont isomorphes au signe près : pour tous éléments ψ_1 et ψ_2 de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$, on a*

$$[\iota\psi_1, \iota\psi_2]_{ari} = -\iota(<\psi_1,\psi_2>) \tag{A.5}$$

Démonstration. — Il suffit de comparer les formules (2.22) et (A.3). □

6. Conclusion

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{dm}_0$ n'est pas graduée pour la longueur, elle est cependant incluse dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{mt}$ dont le crochet est homogène à la fois pour la longueur et le poids. Avec tous les éléments développés ci-dessus on constate successivement :

– Les polynômes bialternaux correspondent aux éléments ψ de $\mathbb{C}\langle X\rangle$ qui sont primitifs et dont la projection $\pi_Y(\psi)$ est primitive dans la bigèbre $\mathsf{Conc}_{\mathbb{C}}(Y)$.
– Le terme de longueur minimale d'un élément de $\mathfrak{dm}$ satisfait à la condition ci-dessus, car le terme de longueur minimale du coproduit $\Delta_\star$ est le coproduit de la bigèbre $\mathsf{Conc}_{\mathbb{C}}(Y)$.
– Les crochets étant finement homogènes, l'algèbre de Lie $\mathfrak{Bial}^*$ est le *gradué associé* à l'algèbre de Lie $\mathfrak{dm}_0$, filtrée par la longueur.

L'auteur ne connaît d'autre preuve du dernier point que la comparaison entre la version démontrée au cours du chapitre IV du théorème d'Écalle et celle exposée dans cet appendice (le deuxième point ci-dessus n'est pas suffisant, car il ne fournit qu'une inclusion).

APPENDICE B

ASPECTS EXPÉRIMENTAUX

1. Description rapide

La démonstration des principaux points techniques de cette thèse a été précédée d'une importante phase d'expérimentation informatique, effectuée au moyen du logiciel MAPLE. Dans une situation combinatoire compliquée, l'outil informatique se révèle être un puissant accélérateur du processus de démonstration, permetttant notamment d'éliminer rapidement les conjectures fausses. Il était nécessaire pour ce travail, car les premiers éléments de $\mathfrak{dm}_0$ ou $\mathfrak{grt}_1$ intéressants à étudier sont de poids 5, déjà hors de portée du calcul à la main.

Cela a d'abord pris la forme d'un module permettant d'effectuer des calculs dans les algèbres de Lie T_n du chapitre II. Pour pouvoir déterminer si deux éléments de T_n sont égaux, il faut d'abord se ramener à des algèbres de Lie libres, grâce à la propriété de « dévissage » :

$$\mathbb{Q}T_4 = \mathbb{Q}t_{12} \oplus \mathfrak{Lie}_{\mathbb{Q}}(t_{13}, t_{23}) \oplus \mathfrak{Lie}_{\mathbb{Q}}(t_{14}, t_{24}, t_{34})$$

Ensuite, il faut pouvoir tout exprimer dans une base vectorielle des algèbres de Lie libres, ce qui a conduit à implémenter les démonstrations données dans le livre de Reutenauer à propos des bases de Lyndon.

Ce module a été utilisé pour obtenir une base homogène de l'algèbre de Lie $\mathfrak{grt}$ jusqu'en poids 9. Comme on s'en doute, l'équation pentagonale est la plus coûteuse en temps de calcul, de même qu'elle est la plus difficile à manier pour l'être humain.

L'étape suivante a été l'extension à des alphabets infinis et aux produits tensoriels, ce qui a permis l'exploration des premières propriétés de $\mathfrak{dm}$. Le troisième système de relations est alors apparu, dans sa variante « Lie », *i.e.* sous la forme de l'équation (4.14), en étudiant des éléments de $\mathfrak{dm}$ déduits de la table des polyzêtas de Minh et Petitot ([**23**]). Une fois identifiée et programmée la section σ de π_Y, il a été possible de mettre en évidence la proposition IV.2.18, puis les étapes de sa démonstration (par exemple la proposition IV.2.23).

On a calculé une base homogène de $\mathfrak{dm}_0$ jusqu'en poids 12. Il en ressort que $\mathfrak{dm}_0$ et $\mathfrak{grt}_1$ sont bien égales (conjecture VI) jusqu'en poids 9.

Parallèlement, on a implémenté quelques définitions d'Écalle, et notamment son crochet (voir ci-dessous).

2. Coup de sonde dans la conjecture de Broadhurst-Kreimer

Dans l'article [**7**], D. J. Broadhurst présente une conjecture portant sur le nombre $D_{n,k}$ de polyzêtas de poids n et de longueur k nécessaires pour engendrer tous les autres. Il devrait être donné par la série génératrice :

$$\prod_{n\geqslant 3,k\geqslant 1}(1-x^ny^k)^{D_{n,k}} = 1-\frac{x^3y}{1-x^2}+\frac{x^{12}y^2(1-y^2)}{(1-x^4)(1-x^6)}$$

La relation de récurrence satisfaite par la suite des valeurs conjecturales de $D_{3k,k}$, ainsi que ses premiers termes ont été déposés par Broadhurst dans l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers(1). On doit avoir en particulier $D_{27,9}=2$.

Le calcul effectué montre que la variante de $D_{27,9}$ associée aux polyzêtas *formels*(2) vaut au moins 2. En effet, d'après le théorème IV, ce nombre est égal à la dimension, en tant qu'espace vectoriel, de l'ensemble des polynômes bialternaux de longueur 9 et de poids 27. Il se trouve que l'on dispose de deux bialternaux, notés dans la suite A et B, qui sont respectivement de longueur 1 et de poids 3 et de longueur 4 et de poids 12. Ce sont par ailleurs les seuls à vérifier ces conditions de poids et de longueur, à multiplication par un scalaire près.

On a donc *a priori* deux bialternaux de longueur 9 et de poids 27 :

$$B_9 := [[[[[B,A],A],A],A],A] \quad \text{et} \quad C_9 := [B,[B,A]]$$

Il s'agit donc d'établir leur indépendance linéaire. C'est ce calcul qui m'a été suggéré par Jean Écalle.

Mettre sous forme de procédure MAPLE la définition du crochet de l'algèbre de Lie Ari n'est pas très difficile. Cependant, si l'on demande à l'ordinateur de calculer B_9, il renvoie le message d'erreur « object too large ». En général, cette erreur n'est pas rédhibitoire. Un objet trop gros pour que MAPLE l'appréhende peut en effet survenir si les simplifications et regroupements ne sont effectués qu'à la fin du calcul.

(1) La référence de cette entrée est `A020999`.

(2) De manière équivalente, cela revient à admettre la conjecture de transcendance.

Par exemple, pour calculer la somme des n premiers entiers, une (mauvaise) méthode est de construire la séquence des n premiers entiers et d'en prendre ensuite la somme. On tombe sur l'erreur « object too large » pour $n = 10^7$. Il se trouve que la programmation à l'aide des fonctions générales de manipulation de listes et de séquences est très pratique, mais peut amener facilement ce genre de problème.

Habituellement, une erreur de ce type se résout donc en veillant à ce que les procédures effectuent au fur et à mesure les simplifications ou regroupements nécessaires. Dans le cas qui nous intéresse, cela n'a pas été suffisant pour calculer B_9.

On s'est donc contenté d'évaluer B_9 et C_9 sur deux séquences de variables et de constater qu'il n'y avait pas proportionalité. Pour ce faire, il a d'abord fallu déterminer la formule générique de B_9 en fonction de A et B, sans remplacer ces deux derniers par leurs valeurs. Stockée sous forme de texte, du type

```
B(9) := -20*A(u[1])*A(u[3)*A(u[8])*A(u[8]+u[7])
*B(u[1]+u[2]+u[3],u[4],u[5],u[9]+u[8]+u[7]+u[6])
*A(u[8]+u[7]+u[6])
-60*A(u[1])*A(u[4])*A(u[5]+u[4])*A(u[7])
*A(u[9]+u[1]+u[2]+u[3]+u[4]+u[5]+u[6]+u[7]+u[8])
*B(u[1]+u[2],u[3],u[6]+u[5]+u[4],u[8]+u[7])
-30*A(u[1])*A(u[4])*A(u[5]+u[4])*A(u[7])*A(u[1]+u[2])
*B(u[3],u[6]+u[5]+u[4],u[8]+u[7],u[9])
...
```

où `u[i]` représente u_i, cette formule occupe un peu plus de 4 méga-octets et comporte 42504 termes (on en a donné ici trois). Le bialternal A est le monôme à une variable u_1^2. Sachant que B est un polynôme à 4 variables et de degré 8, comportant 142 monômes[(3)], on comprend pourquoi la capacité de MAPLE est dépassée si l'on demande le développement complet de B_9.

Par contre, si l'on spécialise d'abord les variables, puis les polynômes A et B, on arrive à effectuer le calcul.

On a donc choisi deux listes de variables : $\underline{a} = (0, 1, -1, 0, 1, 0, 1, 2, 1)$ et $\underline{b} = (1, 0, -1, 0, 1, -1, 1, 2, 1)$. Le calcul donne :

$$\begin{array}{rclrcl} B_9(\underline{a}) & = & 416880380160, & C_9(\underline{a}) & = & -379610836416, \\ B_9(\underline{b}) & = & -6016260096, & C_9(\underline{b}) & = & -4007066112, \end{array}$$

(3) Ce polynôme fut également fourni par Écalle, après un calcul de J. Van der Hoeven. Les valeurs données plus loin ont été recalculées au moment d'écrire ces lignes. Pour des raisons techniques, on a alors utilisé un autre bialternal de longueur 4 et de poids 12 que celui fourni par Écalle. Ils sont bien sûr proportionnels.

mettant ainsi en évidence que les polynômes B_9 et C_9 ne sont pas proportionnels. Les temps de calcul sont assez faibles (moins d'une minute pour chaque étape sur un PC DELL/450 Mhz avec Maple V.5 sous FreeBSD).

Étant donné que Maple est incapable de manipuler le polynôme B_9, il est clair que la recherche d'une base de l'espace vectoriel des bialternaux de poids 27 et de longueur 9 par résolution du sytème linéaire associé est vouée à l'échec. On doit donc en l'état actuel des choses se contenter d'une inégalité sur les dimensions.

INDEX DES NOTATIONS

Chapitre I

Section 1

$\otimes, \otimes_{\Bbbk}$	produit tensoriel gradué au-dessus de $\mathbb{Q}$ et d'un anneau $\Bbbk$	§ 1.1	not. 1.2
$\widetilde{E}$	dual gradué d'un module gradué E		not. 1.2
$\widetilde{f}$	transposée (au sens gradué) d'une l'application linéaire homogène f entre deux modules gradués		not. 1.2
$\widetilde{B}, \widetilde{e}_i$	base duale d'une base homogène $B = (e_i)_{i \in I}$, élément de $\widetilde{B}$ correspondant à un élément e_i de B		not. 1.3
$M_{\geqslant n}$	$n^{\text{ème}}$ terme de la filtration du module filtré M	§ 1.2	déf. 1.4
$M^{(n)}, \pi^{(n)}$	quotient $M/M_{\geqslant n+1}$ et projection associée		not. 1.5
$\mathrm{gr}M$	gradué associé au module filtré M		not. 1.7
$\widehat{\otimes}, \widehat{\otimes}_{\Bbbk}$	produit tensoriel complété au-dessus de $\mathbb{Q}$, d'un anneau $\Bbbk$		déf. 1.9

Section 3

$\Bbbk\{M\}$	algèbre du monoïde M à coefficients dans $\Bbbk$	§ 3.1	déf. 3.1
$\mathbb{N}^{(T)}$	monoïde commutatif libre formé sur l'ensemble T		déf 3.2
$\Bbbk[T]$	algèbre de polynômes en les variables de l'ensemble T, à coefficients dans $\Bbbk$		déf. 3.2
Z^*	monoïde libre formé sur l'ensemble Z		déf. 3.3
$\Bbbk\langle Z\rangle$	algèbre des polynômes non commutatifs en l'alphabet Z, à coefficients dans $\Bbbk$		déf. 3.3

$\lvert \bullet \rvert, \lvert m \rvert$	morphisme poids sur un monoïde, poids d'un élément m		déf. 3.4
$\ell(m)$	longueur d'un mot m d'un monoïde libre		ex. 3
$E\{\{M\}\}$	espace des séries formelles indexées par le monoïde à poids localement fini M, à coefficients dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E	§ 3.2	déf. 3.7
$f\{\{M\}\}$	extension aux séries indexées par M à coefficients dans E et F d'une application $\mathbb{Q}$-linéaire de E dans F		déf. 3.7
$E\langle\langle Z\rangle\rangle, f\langle\langle Z\rangle\rangle$	respectivement $E\{\{Z^*\}\}$ et $f\{\{Z^*\}\}$		déf. 3.7
$E[[T]], f[[T]]$	respectivement $E\{\{\mathbb{N}^{(T)}\}\}$ et $f\{\{\mathbb{N}^{(T)}\}\}$		déf. 3.7
$\varphi_{\text{gén}}$	série génératrice d'une application φ d'un monoïde à poids localement fini M dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E ou d'une application $\mathbb{Q}$-linéaire de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$ dans E		déf. 3.8 et 3.9
Φ_{lin}	application linéaire de $\widetilde{\mathbb{Q}\{M\}}$ dans E associée à un élément Φ de $E\{\{M\}\}$		déf. 3.9

Section 4

$\Bbbk[\varepsilon]$	anneau des nombres duaux à coefficients dans l'anneau $\Bbbk$ (isomorphe à $\Bbbk[t]/(t^2)$)	§ 4.1	
$\mathsf{S}(V)$	algèbre symétrique formée sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V		
$\mathbb{A}^V$	espace affine associé à un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de V de dimension finie		
$\mathsf{GL}(V), \mathfrak{gl}(V)$	groupe linéaire associé au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V de dimension finie et son algèbre de Lie		
$\mathsf{UN}(V), \mathfrak{un}(V)$	schéma en groupes des endomorphismes topologiquement unipotents d'un espace vectoriel filtré V, séparé, complet et à quotients finis		déf. 4.3

Section 5

$z_{\underline{s}}$	mot correspondant à la séquence $\underline{s}$		
$\widetilde{z}_{\underline{s}}$	élément de la base $\widetilde{Z^*}$ duale de la base Z^* de $\Bbbk\langle Z\rangle$, où Z est de la forme $\{(z_i)_{i\in I_Z}\}$		not. 5.1
$\mathsf{U}\mathfrak{g}$	algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$	§ 5.2	not. 5.2
$\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(Z)$	algèbre de Lie libre formée sur l'alphabet Z		not. 5.3
$\mathrm{ad}\,(a)$	dérivation adjointe associée à un élément a d'une algèbre de Lie		not. 5.4
$\mathsf{Conc}_{\Bbbk}(Z),\ \Delta$	bigèbre de concaténation sur l'alphabet Z à coefficients dans $\Bbbk$ et son coproduit	§ 5.3	déf. 5.6
$\mathsf{Mél}_{\Bbbk}(Z),\ ⧢_Z$	bigèbre de mélange sur l'alphabet Z à coefficients dans $\Bbbk$ et son produit		déf. 5.10
$\mathfrak{S}_{p,q}$	ensemble des battages de p et q éléments		déf. 5.11
$\diamond$	produit de concaténation des mots duaux		déf. 5.13

Chapitre II

Section 1

$\mathfrak{gr}G$	$\mathbb{Z}$-algèbre de Lie graduée associée à un groupe G muni d'une filtration centrale	§ 1.1	déf. 1.2
B_n, P_n	groupe des tresses d'Artin à n brins, groupe des tresses pures		
T_n	algèbre de Lie des tresses infinitésimales ($\mathbb{Z}$-algèbre graduée associée à P_n)		déf. 1.3
A_n	produit semi-direct de $\mathsf{U}T_n$ et $\mathfrak{S}_n$		
∂_i, s_i	opérations simpliciales des tresses		
d_i, s_i	opérations simpliciales des tresses infinitésimales		déf. 1.4
$\mathsf{Ass}_\lambda(\Bbbk), \mathsf{Ass}(\Bbbk), \mathsf{Ass}^*(\Bbbk)$	ensemble des associateurs à coefficients dans l'anneau $\Bbbk$, de paramètre λ, ensemble de tous les associateurs à coefficients dans $\Bbbk$ et ensemble des associateurs à coefficients dans $\Bbbk$, de paramètre inversible	§ 1.3	déf. 1.7
$\mathsf{GT}, \mathsf{GRT}$	groupes de Grothendieck-Teichmüller		
$\mathbb{G}_m$	groupe multiplicatif		
$\mathsf{GT}_1, \mathsf{GRT}_1$	parties pro-unipotentes de GT et GRT		
Φ_{KZ}	associateur explicitement défini par Drinfel'd		

Section 2

$\mathsf{MT}, \circledast, \tau, \kappa$	groupe de Magnus tordu, son produit, sa représentation pro-unipotente dans $\bullet\langle\langle A, B\rangle\rangle$ et le « morceau » de τ obtenu par substitution	§ 2.1	déf. 2.1
$\mathfrak{mt}, <\bullet, \bullet>$	algèbre de Lie du groupe de Magnus tordu et son crochet	§ 2.2	not. 2.6
$\exp^{\circledast}$	exponentielle du groupe MT		not. 2.7
s_ψ	action tangente d'un élément ψ de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$ par τ		déf. 2.8
D_ψ, d_ψ	dérivations spéciales associées à un élément ψ de $\mathfrak{mt}(\Bbbk)$		déf. 2.11

Section 4

$\overline{\mathbb{Q}}$	clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$		
$G_{\mathbb{K}}$	groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{K}$, corps compris entre $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$		
$\pi_1(X, x)$	groupe fondamental d'un espace topologique relativement au point-base $x \in X$		

$\mathrm{Aut}(\Gamma), \mathrm{Out}(\Gamma)$	groupe des automorphismes du groupe Γ et son quotient par les automorphismes intérieurs
$\widehat{\pi_1}, \pi_1^{nil}, \pi_1{}^{(\ell)}$	respectivement complétés profini, pro-nilpotent et pro-ℓ d'un groupe fondamental π_1
$\mathbb{P}^1$	droite projective
$P'_n, T'_n, \tau'_{ij}, t'_{ij}$	groupe des tresses pures projectives, son algèbre de Lie et leurs générateurs standard
X_n	espace de configurations projectives dont le groupe fondamental est P'_n
χ	caractère cyclotomique
$\mathrm{Out}^*({P'}_n^{(\ell)})$	automorphismes extérieurs spéciaux de ${P'}_n^{(\ell)}$) *i.e.* envoyant chaque générateur τ'_{ij} sur un de ses conjugués
$G^{(\ell)}$	quotient de $G_{\mathbb{Q}}$ par le noyau de l'action dans les $\mathrm{Out}^*({P'}_n^{(\ell)})$
$\mathrm{Out}^{**}({P'}_n^{(\ell)})$	sous-groupe de $\mathrm{Out}^*({P'}_n^{(\ell)})$ des automorphismes $\mathfrak{S}_n$-invariants
$\mathscr{D}$	algèbre de Lie stable de dérivations d'Ihara
$\mathfrak{g}^{(\ell)}$	algèbre de Lie associée à la filtration centrale de $G^{(\ell)}$ définie grâce à l'action de Galois
$\mathfrak{grt}_1$	algèbre de Lie du schéma en groupes pro-unipotent GRT_1

Chapitre III

Section 1

$f(x) = o\left(x^{0^+}\right)$	comportement de la fonction réelle f au voisinage de 0	§ 1.1	déf. 1.1
$u_n = o\left(\frac{1}{n^{0^+}}\right)$	comportement de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini		déf. 1.1
DivLog	ensemble des fonctions à divergence logarithmique		déf. 1.3
$\mathrm{Coeff}_n(f)$	suite des coefficients du développement en série entière d'une fonction f de DivLog		déf. 1.3
As_c	application de DivLog dans $\mathbb{R}[t]$ qui associe à f le développement asymptotique en polynôme logarithmique de $\mathrm{Coeff}_n(f)$		prop. 1.3
$\mathrm{Part}_n(f)$	suite des sommes partielles d'une fonction f de DivLog		def. 1.4
As_Σ	application de DivLog dans $\mathbb{R}[t]$ qui associe à f le développement asymptotique en polynôme logarithmique de $\mathrm{Part}_n(f)$		prop. 1.5
$\mathcal{S}$	ensemble des séquences d'entiers strictement positifs	§1.2	not. 1.7
$\mathrm{Li}(\underline{s})$	polylogarithme associé à la séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$		déf. 1.8
$\mathrm{Li}(\underline{s}\,\vert z)$	polylogarithme associé à $\underline{s}$, évalué en z		déf. 1.8
$\mathcal{S}_{\mathsf{cv}}$	ensemble des séquences convergentes		déf. 1.9
$\zeta_n(\underline{s})$	polyzêta tronqué (au rang n) associé à la séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$		not. 1.11
$\zeta(\underline{s})$	polyzêta associé à la séquence convergente $\underline{s}$		not. 1.11
X, x_0, x_1	alphabet codant les intégrales itérées et ses deux éléments	§ 1.3	not. 1.12
$\mathrm{Int}(\widetilde{w}\,\vert a, b)$	intégrale itérée associée au mot dual $\widetilde{w}$ de $\widetilde{X^*}$, calculée entre a et b		déf. 1.13
$\mathrm{Int}(a, b)$	morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{R}$ obtenu en fixant les nombres a et b de $]0, 1[$ dans les intégrales itérées		not. 1.15
$m_{\underline{s}}$	mot de X^* associé à une séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$		déf. 1.17
${}_{\widehat{\alpha}}Z^*$	sous-monoïde de Z^* formé des mots ne commençant pas par la lettre α de Z	§1.4	not. 1.20

$Z^*_{\widehat{\beta}}$	sous-monoïde de Z^* formé des mots ne se finissant pas par la lettre β de Z		not. 1.20
${}_{\widehat{\alpha}}Z^*_{\widehat{\beta}}$	sous-monoïde de Z^* formé des mots ne commençant pas par la lettre α et ne se finissant pas par la lettre β		not. 1.20
$\mathrm{Li}(z)$	morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv},\mathrm{d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{R}$ obtenu en faisant tendre ε vers 0 dans $\mathrm{Int}(\varepsilon, z)$.		déf. 1.21
Li	morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv},\mathrm{d}}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans l'algèbre des fonctions réelles analytiques sur $]0,1[$		déf. 1.21
$\mathsf{Polylog}$	$\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les polylogarithmes		déf. 1.21
ζ	morphisme d'algèbres de $\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{R}$ égal à $\mathrm{Li}(1)$		déf 1.22
$\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv}}_{\mathbb{Q}}(X)$	algèbre $(\mathbb{Q}\{\widetilde{{}_{\widehat{x_1}}X^*_{\widehat{x_0}}}\}, ш)$ engendrée par les mots duaux convergents		not. 1.24
$\mathsf{Mél}^{\mathsf{cv},\mathrm{d}}_{\mathbb{Q}}(X)$	algèbre $(\mathbb{Q}\{\widetilde{X^*_{\widehat{x_0}}}\}, ш)$ engendrée par les mots duaux convergents à droite		not. 1.24

Section 2

$\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$	$\Bbbk$-module des fonctions quasi-symétriques à coefficients dans $\Bbbk$	§ 2.1	déf. 2.1
$M_{\underline{s}}$	élément de la base standard de $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$ correspondant à la séquence $\underline{s}$ de $\mathcal{S}$		prop. 2.2
$\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\Bbbk}$	sous-$\Bbbk$-module de $\mathsf{Qsym}_{\Bbbk}$ engendré par les $M_{\underline{s}}$, où $\underline{s}$ est une séquence convergente		déf. 2.4
ζ_N, ζ	réalisation des polyzêtas tronqués au rang N et non tronqués comme morphismes d'algèbres de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathsf{Qsym}^{\mathrm{cv}}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$		déf. 2.4
Y, y_n	alphabet Y, numéroté par $\mathbb{N}^*$, et son élément générique	§2.2	
$\Delta_\star$, $\star$	coproduit sur $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ et produit dual		déf. 2.5
$\mathcal{Y}$	un élément utile de $\mathbb{Q}[t]\langle\langle Y\rangle\rangle$		not. 2.6
ev_x	évaluation en x d'un polynôme de $\Bbbk[t]$		not. 2.7
$(\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}})_{\mathrm{gén}}$	série génératrice des fonctions quasi-symétriques		déf. 2.9
U, u_n	système de générateurs primitifs de $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \Delta_\star)$ et son élément générique	§ 2.3	déf. 2.14
$U^*, u_{\underline{s}}$	base vectorielle de $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle)$ provenant de U et son élément générique		déf. 2.14
V, v_n	alphabet V, numéroté par $\mathbb{N}^*$, et son élément générique		not. 2.17

ι	isomorphisme formalisant le changement de base entre les Y et les U		cor. 2.21

Section 3

$\Omega_{\shuffle}$	série double de régularisation pour le produit $\shuffle$	§3.1	not. 3.1
$\mathrm{reg}_{\shuffle}$	morphisme de régularisation de $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathsf{Mél}_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{cv}}(X)$		not. 3.8
$\zeta_{\shuffle}, \Phi_{\shuffle}$	application polyzêta régularisée pour le produit $\shuffle$ et sa série génératrice		not. 3.7
$\Omega_{\star}$	série double de régularisation pour le produit $\star$	§3.3	not. 3.11
$\mathrm{reg}_{\star}$	morphisme de régularisation de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{cv}}$		not. 3.16
$\zeta_{\star}, \Phi_{\star}$	application polyzêta régularisée pour le produit $\star$ et sa série génératrice		not. 3.15

Section 4

i_Y	isomorphisme d'algèbres de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ sur $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ correspondant au codage des séquences par les mots	§4.1	not. 4.1
$i_{\widetilde{Y}}, i^{\mathsf{cv}}_{\widetilde{Y}}$	application linéaire de $\widetilde{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$ dans $\widetilde{\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}}$ déduite de i_Y et sa restriction à $\mathbb{Q}\{\widetilde{\widehat{y_1}Y^*}\}$		not. 4.2
$\pi_{X^*_{\widehat{x_0}}}$	projection de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ sur $\mathbb{Q}\{X^*_{\widehat{x_0}}\}$ de noyau $\mathbb{Q}\langle X\rangle x_0$		not. 4.3
π_Y	projection de $\Bbbk\langle\langle X\rangle\rangle$ sur $\Bbbk\langle\langle Y\rangle\rangle$		not. 4.3
$\underline{1}^k$	séquence comportant k fois le nombre 1	§4.2	
As_1	application linéaire de DivLog dans $\mathbb{R}[t]$ donnant le développement asymptotique en polynôme logarithmique quand la variable tend vers 1		prop. 4.8
$\mathrm{Li}^Y_{\text{gén}}$	série génératrice des polylogarithmes, indicée par l'alphabet Y	§4.3	not. 4.13
θ, Θ	application linéaire servant à reformuler le troisième système de relations	§4.5	

Section 5

$\mathsf{Polyzêta}, \mathsf{Polyzêta}_n$	sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les polyzêtas (resp. les polyzêtas de poids n)		not. 5.1

Chapitre IV

Section 1

$\mathsf{PZformel}$	algèbre des polyzêtas formels	§ 1.1	déf. 1.1
$\zeta_{\mathrm{form}}(n)$	pour un entier n, projection de $x_0^{n-1}x_1$ dans $\mathsf{PZformel}$		déf. 1.1
DM	schéma défini par les trois systèmes de relations entre polyzêtas	§ 1.2	déf. 1.3
$\Phi_\star, \Phi_{\mathrm{corr}}$	éléments associés à un élément Φ de $\mathsf{MT}(\mathbb{k})$ qui interviennent dans la définition de $\mathsf{DM}(\mathbb{k})$		déf. 1.3
DM_λ	comme DM en ajoutant l'équation « $\zeta(2) = \lambda$ »		déf. 1.7
$\mathsf{DM}^{(n)}, \mathsf{DM}_\lambda^{(n)}$	variantes tronquées de DM et DM_λ		déf. 1.8

Section 2

$\mathfrak{dm}$	espace tangent à DM au voisinage de 1	§2.1	déf. 2.1
$\psi_\star, \psi_{\mathrm{corr}}$	éléments associés à un élément ψ de $\mathfrak{mt}(\mathbb{k})$ qui interviennent dans la définition de $\mathsf{DM}(\mathbb{k})$		déf. 2.1
$\mathfrak{dm}_0$	espace tangent à DM_0 au voisinage de 1 (éléments de $\mathfrak{dm}$ sans terme en y_2)		déf. 2.4
∂_{x_0}	dérivée partielle par rapport à x_0 dans $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$	§ 2.2	not. 2.5
σ	inverse de la projection π_Y, à valeurs dans le noyau de ∂_{x_0}		déf. 2.7
s_ψ^Y	opérateur s_ψ passé au quotient par π_Y	§ 2.3	déf. 2.13

Section 3

$h_\mu, h_\mu^{\mathrm{pair}}$	multiplication homogène par μ dans $\mathbb{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ et variante paire	§ 3.2	déf. 3.5

INDEX TERMINOLOGIQUE

action tangente, 109–125
algèbre, 1
  associative libre, 7
  d'Ihara, 45
  d'un monoïde, 7
  de mélange, 23
  de concaténation, 22
  de Hopf augmentée complète, 41
  de polynômes, 7
  de polynômes non-commutatifs, 7
  des polyzêtas formels, 101–105
  enveloppante, 21
  stable de dérivations, *voir* algèbre d'Ihara
  symétrique, 16
algèbre de Lie
  d'un groupe filtré, 30
  Ari d'Écalle, 142
  d'Ihara, 45
  d'un groupe (pro-)algébrique, 15
  du groupe des tresses pures, 30
  libre, 20–26
alphabet, 7
  numéroté, 8
alternal, 138
alternel, 139
alternil, 139
anneau, 1
application linéaire associée, 11
associateur, 31–42
asymptotique (développement), 47–51, 85–99
augmentation, 40
automorphisme
  extérieur, 43
  spécial, 44
base
  de PBW-Lyndon duale, 25
  de Lyndon, 25
  de PBW-Lyndon, 25
  duale, 2
battage, 23, 139
  contractant, 139
bialternal, 104, 142
bigèbre, 1
  de concaténation, 22
  de Hopf, 1
  de mélange, 23
Campbell-Hausdorff (formule), 20, 24
catégorie monoïdale tressée, *voir* catégorie tensorielle
catégorie quasi-tensorielle, 32
$\star$-codérivation, 109
complété
  d'un module filtré, 3
  de Malcev, pro-unipotent, 40
  pro-ℓ, 44
  profini, 43
  pronilpotent, 44
concaténation
  des mots duaux, 23
conjecture
  de Deligne-Drinfel'd, 46
  de Deligne, 46
  de transcendance, 103
  de Zagier, 99

de Zagier formelle, 104
crochet d'Ihara, 38
cyclotomique (caractère), 44
diagonal, 1, 5
$\star$-diagonal, 109
drapeau, 17
dual
base duale, 2
module dual, 2
nombres duaux, 15
dérivation, 5
spéciale, 39, 45
Écalle, vii, viii, 104, 137–146
Euler (constante), 53, 92, 97
Euler-Zagier (nombres), *voir* polyzêta
exponentielle
d'un groupe (pro-)unipotent, 17
d'une (co)dérivation, 5
dans les schémas en groupes, 16–18
de Lie, 24
factorisation standard, 25
filtration
centrale, 29
filtration séparante, 3
module filtré, 3
module filtré à quotients finis, 4
séparante, 30
finement homogène, 40
foncteur-
algèbre de Lie, 15
fibre, 43
groupe, 15
fonction à divergence logarithmique, 49
Friedrichs (critère), 12
gradué
gradué associé, 3
module gradué, 2
module gradué de type fini, 2
groupe
algébrique, 15
de Galois, 42–46
de Grothendieck-Teichmüller, 34
de Magnus tordu, 35–40
de tresses d'Artin, 31
des tresses pures projectives, 44
des tresses pures d'Artin, 30
filtré, 29
fondamental, 43
multiplicatif, 34
unipotent, 17
hexagonale (équation), 32, 34, 106
intégrale itérée, 53–60
irréductibles
d'Ihara, 46
de Drinfel'd, 46, 108, 134
Knizhnik-Zamolodchikov, *voir* KZ
Kohno (isomorphisme), 41
KZ, 35, 77, 78
Lazard (élimination), 22
longueur, 51, 57
Lyndon, 24–26
mot de, 25
monoïde
à poids, 8
à poids localement fini, 9
commutatif libre, 7
libre, 7
mot
convergent, 58
convergent à droite, à gauche, 58
de Lyndon, 24
de Lyndon crocheté, 25
moule, 137–140
multizêta, *voir* polyzêta
MZV, *voir* polyzêta
Newton (formules), 94
nombres duaux, 15
pair (élément), 129
pentagonale (équation), 32, 34
poids, 8, 51, 57, 62
polylogarithme, 51
polyzêta, 53
formel, 103
primitif, 6, 22
$\star$-primitif, 109
produit
de mélange, 23, 54
décroissant, 26
scalaire, 11, 20, 109
tensoriel
complété, 4
de modules gradués, 2
projection π_Y, 84
quasi-symétrique (fonction), 62–71
relation
d'Hoffman, 97, 105
de mélange (première), 60
de mélange (deuxième), 71

de régularisation, 96
représentation, 17
fidèle, 17
pro-unipotente, 19
revêtement, 43
régularisation, 72–82
schéma, 14–20
affine, 14
en groupes, 15
en groupes pro-unipotent, 17
pro-algébrique affine, 14
sommes partielles, 49
Soulé
éléments de, 46
caractères de, 46
spécial(e)
automorphisme, 44
dérivation, 39, 45
substitution, 27
swap, 140
symétral, 138
symétrel, 139
symétril, 139
séquence, 21
convergente, 52
série
de Lie, 24
double, 26, 65, 72
formelle, 9
génératrice, 10
commutative de polyzêtas, 140
de développements asymptotiques, 89–99
de polyzêtas formels, 105
des fonctions quasi-symétriques, 65
des polyzêtas, 77, 82
harmonique, 53
harmonique multiple, *voir* polyzêta
théorème
d'Écalle, 142
de Le-Murakami, 77
tranposée, 2
troncations, 3, 107

LISTE DES THÉORÈMES ET CONJECTURES

Théorème I 38
Conjecture I 46
Conjecture II 46

Conjecture III 99

Conjecture IV 103
Conjecture V 104
Théorème II 104
Théorème III 108
Conjecture VI 135

Théorème IV 142

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Bar-Natan – « On associators and the Grothendieck-Teichmuller group. I », *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 2, p. 183–212, `q-alg/960621`.

[2] G. V. Belyĭ – « Galois extensions of a maximal cyclotomic field », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), no. 2, p. 267–276, 479.

[3] M. Bigotte, G. Jacob, N. Oussous & M. Petitot – « Tables des relations de la fonction zêta colorée », preprint du LIFL, université Lille I, 1998.

[4] N. Bourbaki – « Éléments de mathématique – algèbre », ch. 1–3, Hermann, 1970.

[5] ———, « Éléments de mathématique – algèbre », ch. 4, Hermann, 1970.

[6] L. Boutet de Monvel – « Remarques sur les séries logarithmiques divergentes », Exposé au colloque « polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara » au C.I.R.M. (Luminy), avril 2000.

[7] D. J. Broadhurst – « Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams », preprint, 1996, `hep-th/9612012`.

[8] P. Deligne – « Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points », Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), Springer, New York, 1989, p. 79–297.

[9] M. Demazure & P. Gabriel – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970.

[10] V. G. Drinfel'd – « Quasi-Hopf algebras », *Leningrad Math. J.* **1** (1990), p. 1419–1457.

[11] ———, « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related to $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ », *Leningrad Mathematical Journal* **2** (1991), p. 829–860.

[12] J. Écalle – « La libre gnration des multiztas et leur dcomposition canonico-explicite en irrductibles », Notes de sminaire, automne 1999.

[13] ———, « ARI/GARI et la décomposition des multizêtas en irréductibles », preprint, avril 2000.

[14] M. D. Fried, S. S. Abhyankar, W. Feit, Y. Ihara & H. Voelklein (éds.) – *Recent developments in the inverse Galois problem*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[15] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh & J. Thibon – « Non-commutative symmetric functions », *Advances in Mathematics* **112** (1995), p. 218–348.

[16] A. Goncharov – « Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes », *Mathematical Research Letters* **5** (1998), p. 497–516.

[17] ———, « Multiple ζ-values, Galois groups and geometry of modular varieties », *Proceedings of the third european Congress of Mathematics*, 2000.

[18] ———, « The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 \setminus (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$ », *Duke Mathematical Journal* (2001), A paraître.

[19] J. González-Lorca – « Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke », Thèse de doctorat, École Normale Supérieure, 1998, Rapport du LMENS n° 98–31.

[20] A. Grothendieck – « Esquisse d'un programme », Geometric Galois actions, 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, With an English translation on pp. 243–283, p. 5–48.

[21] R. Hain – « The Hodge de Rham theory of relative Malcev completion », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* (1998), no. 31, p. 47–92, `arXiv :alg-geom/9607019`.

[22] R. Hain & M. Matsumoto – « Weighted completion of Galois groups and some conjectures of Deligne », preprint, juin 2000, `arXiv :math.AG/0006158`.

[23] M. Hoang Ngoc & M. Petitot – « Lyndon words, polylogarithms and the Riemann zeta function », *Discrete Mathematics* **217 (1-3)** (2000), p. 273–292.

[24] M. Hoang Ngoc, M. Petitot & J. van der Hoeven – « Polylogarithms and shuffle algebra », *FPSAC'98, Toronto, Canada*, Juin 1998.

[25] M. Hoffman – « Multiple harmonic series », *Pacific Journal of Mathematics* **152** (1995), no. 2, p. 275–290.

[26] ______, « The algebra of multiple harmonic series », *Journal of Algebra* **194** (1997), no. 2, p. 477–495.

[27] Y. IHARA – « The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degree », Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), Springer, New York, 1989, p. 299–313.

[28] ______, « Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations », The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 353–373.

[29] ______, « Braids, Galois groups, and some arithmetic functions », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)* (Tokyo), Math. Soc. Japan, 1991, p. 99–120.

[30] ______, « On the stable derivation algebra associated with some braid groups », *Israel J. Math.* **80** (1992), no. 1-2, p. 135–153.

[31] ______, « Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro-p fundamental group of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ », preprint R.I.M.S., Kyoto university, 1999.

[32] Y. IHARA & M. MATSUMOTO – « On Galois actions on profinite completions of braid groups », Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 173–200.

[33] T. KOHNO – « Série de Poincaré–Koszul associée aux groupes de tresses pures », *Invent. Math.* **82** (1985), no. 1, p. 57–75.

[34] M. KONTSEVITCH – « Deformation quantization of poisson manifolds I », Pub. IHES, Octobre 1997.

[35] ______, « Operads and motives in deformation quantization », *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), no. 1, p. 35–72, Moshé Flato (1937–1998).

[36] M. LAZARD – « Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)* **71** (1954), p. 101–190.

[37] T. T. Q. LE & J. MURAKAMI – « Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial », *Nagoya Math. J.* **142** (1996), p. 39–65.

[38] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, second éd., Springer-Verlag, New York, 1998.

[39] W. MAGNUS – « Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe », *J. Reine Angew. Math.* **182** (1940), p. 142–149.

[40] C. MALVENUTO & C. REUTENAUER – « Duality between quasisymmetric functions and the solomon descent algebra », *Journal of Algebra* **177** (1995), no. 3, p. 967–982.

[41] M. Matsumoto – « On the Galois image in the derivation algebra of π_1 of the projective line minus three points », Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 201–213.

[42] U. Müller & C. Schubert – « A quantum field theoretical representation of Euler-Zagier sums », pr'epublication 'electronique, `arXiv :math.QA/9908067`.

[43] D. G. Quillen – « On the associated graded ring of a group ring », *J. Algebra* **10** (1968), p. 411–418.

[44] ______, « Rational homotopy theory », *Ann. of Math. (2)* **90** (1969), p. 205–295.

[45] N. Y. Reshetikhin – « Quasi triangle Hopf algebras and invariants of tangles », *Leningrad Math. J.* **1** (1990), p. 491–513.

[46] C. Reutenauer – *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs, New series, no. 7, Oxford, 1993.

[47] T. Rivoal – « Irrationnalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs », Tech. Report 9, Lab. SDAD, Univ. Caen, 2000.

[48] Z. Wojtkowiak – « La monodromie des intégrales itérées sur la droite projective moins un nombre fini de points », *Colloque « polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara »* (Luminy), C.I.R.M., avril 2000.

[49] Z. Wojtkowiak – « Non abelian unipotent periods. monodromy of iterated integrals », Structural properties of polylogarithms (L. Lewin, éd.), Mathematical surveys and monographs, vol. 37, AMS, 1992, p. 205–231.

[50] D. Zagier – « Values of zeta functions and their applications », First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Birkhäuser, Basel, 1994, p. 497–512.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction v

Remerciements xi

I. Préliminaires 1
1. Conventions générales 1
1.1. Modules gradués 1
1.2. Modules filtrés et complétion 2
2. Dérivations et codérivations 5
3. Modules de polynômes et de séries 7
3.1. Algèbres de monoïdes 7
3.2. Séries génératrices en un monoïde à poids localement fini 9
3.3. Produits tensoriels de séries et cogèbres 12
4. Schémas en groupes pro-unipotents sur $\mathbb{Q}$ 14
4.1. Terminologie 14
4.2. Groupes unipotents 17
4.3. Représentations pro-unipotentes 18
5. Algèbres de Lie libres 20
5.1. Notations 20
5.2. Premières propriétés 21
5.3. Deux bigèbres de Hopf en dualité 22
5.4. Séries et exponentielles de Lie 24
5.5. Bases de Lyndon et bases associées 24

II. Associateurs de Drinfel'd, groupe de Grothendieck-Teichmüller et action de Galois 29
1. Associateurs 29
1.1. L'algèbre de Lie du groupe des tresses pures 29
1.2. Associateurs et catégories monoïdales 31

1.3. Associateurs dans $\Bbbk\langle\langle A, B\rangle\rangle$ 33
2. Le groupe de Magnus tordu 35
2.1. Définitions et premières propriétés 35
2.2. Algèbre de Lie du groupe de Magnus tordu 38
3. Complétés pro-unipotents et groupes GT et GRT 40
4. Action de Galois et conjecture de Deligne 42

III. Polyzêtas 47
1. Polylogarithmes et premier système de relations 47
Préambule 47
1.1. Séries à divergence logarithmique 47
1.2. Polylogarithmes et polyzêtas 51
1.3. Polylogarithmes et intégrales itérées 53
1.4. Algèbres de polylogarithmes 57
1.5. Compléments 60
2. Fonctions quasi-symétriques et deuxième système de relations 60
Préambule 60
2.1. Définitions 62
2.2. Structure de bigèbre de $\mathsf{Qsym}_{\mathbb{Q}}$ 64
2.3. Étude de la bigèbre $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \cdot, \Delta_\star)$ 67
2.4. Deuxième système de relations 70
3. Régularisation des polyzêtas divergents 72
3.1. Premier produit de mélange 72
3.2. Théorème de Le et Murakami 77
3.3. Deuxième produit de mélange 79
4. Troisième système de relations 83
4.1. Correspondance entre le monde des X et celui des Y 83
4.2. Étude des fonctions de DivLog au voisinage de 1 85
4.3. Séries génératrices de développements asymptotiques 89
4.4. Obtention du troisième système de relations 93
4.5. Énoncé dual 97
5. Conclusion 99

IV. Polyzêtas formels 101
1. Introduction et définitions 101
1.1. Algèbre des polyzêtas formels 101
1.2. Séries génératrices 105
1.3. Résultats et plan 108
1.4. Allègement de la notation 109
2. L'action tangente de $\mathfrak{dm}_0$ sur DM 109
2.1. Définitions et premières propriétés 109
2.2. Remontée vers $\mathfrak{Lie}_{\Bbbk}(X)$ 112

2.3. Opérateurs tangents 115
2.4. Action par codérivation 117
2.5. Passage au groupe 121
3. Libre transitivité et conséquences 125
3.1. Préambule 125
3.2. Étude des équations définissant DM et $\mathsf{DM}^{(n)}$ 126
3.3. Démonstrations des théorèmes II et III 132
3.4. Les irréductibles de Drinfel'd 134

A. Comparaison avec les constructions d'Écalle 137
1. Préambule 137
2. Les moules et leurs symétries 137
3. Fonctions génératrices associées aux polyzêtas 140
4. L'algèbre de Lie Ari et le théorème d'Écalle 142
5. Comparaison entre les crochets d'Écalle et d'Ihara 143
6. Conclusion 145

B. Aspects expérimentaux 147
1. Description rapide 147
2. Coup de sonde dans la conjecture de Broadhurst-Kreimer 148

Index des notations 151

Index terminologique 159

Liste des théorèmes et conjectures 163

Bibliographie 165