



Marches aléatoires sur un amas infini de percolation.

Clément Rau

► **To cite this version:**

Clément Rau. Marches aléatoires sur un amas infini de percolation.. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2006. Français. tel-00108175

HAL Id: tel-00108175

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00108175>

Submitted on 19 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
U.F.R. M.I.M.

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences de l'Université de Provence

Spécialité : Mathématiques

par **Rau Clément**

sous la direction du Pr. **Pierre Mathieu**

Sujet :

Marches aléatoires sur un amas de percolation.

soutenue le 16 octobre 2006

après avis des rapporteurs :

M. **Martin Barlow** , University of British Columbia, Vancouver
M. **Laurent Saloff-Coste** , Cornell University, New York

devant le jury composé de :

M. Olivier Garet ,	Université d'Orléans	Examineur
M. Pierre Mathieu ,	Université de Provence	Directeur de thèse
M. Etienne Pardoux ,	Université de Provence	Examineur
M. Pierre Picco ,	Centre de Physique théorique de Marseille	Examineur
M. Christophe Pittet ,	Université de Provence	Examineur

Remerciements

Mes Remerciement vont tout d'abord à mon directeur de thèse, Pierre Mathieu, qui m' a proposé un sujet extrêmement riche et a guidé mes premiers pas en recherche. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant d'avoir écouté attentivement toutes mes idées, même les plus saugrenues, et de m'avoir toujours laissé entière liberté dans mes directions de recherche et dans la manière de travailler. Outre sa patience, son calme et sa volonté d'être clair, je le remercie également pour m'avoir transmis une petite partie de sa vision des choses dans tant de domaines. Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans la disponibilité qu'il m'a octroyée et sans les échanges que nous avons eus.

J'aimerais remercier très vivement Martin Barlow et Laurent Saloff-Coste qui ont référé ce présent travail. J'ai été à la fois très honoré et heureux d'apprendre qu'ils acceptaient de s'intéresser à cette thèse et je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance pour le temps qu'ils y ont consacré.

C'est avec grand plaisir que je vois figurer le nom de Christophe Pittet dans le jury. Je tenais à le remercier pour son écoute et pour avoir toujours répondu à mes questions, que cela soit dans un bus, dans un restaurant ou plus classiquement dans un bureau de thésard.

Mes remerciement vont également à Etienne Pardoux, Olivier Garet, Pierre Picco, pour avoir accepté d'être membres du jury.

Cette thèse n'aurait pu aboutir sans le soutien de l'équipe de Probabilité du CMI. Je tiens ainsi à remercier Amine Asselah pour son intérêt pour mes travaux et son écoute, Fabienne Castell, Enrique Andjel, Vlada Limic, Christophe Pouet, Sébastien Blachère et Xavier Bressaud, Laurent Miclo pour leur présence aux côtés des doctorants.

Le problème de l'isopérimétrie sur un produit en couronne est un point central de ma thèse, ainsi je remercie très fortement Anna Erschler qui m'a aidé à déchiffrer ses propres preuves, et qui a toujours su me donner matière à réfléchir, d'abord à travers ses explications, ensuite en m'expliquant ses explications.

Je voulais aussi également remercier tout ceux que j'ai pu rencontrer dans ma quête des mathématiques. Je pense entre autre à Damien Lambertson pour ses cours de DEA passionnants et d'une rigueur exemplaire, à Vincent Lafforgue pour son animation des groupes de lecture à l'école normale et son effort de ramener des choses compliquées à un niveau d'étudiant. Enfin, un clin d'oeil à Benoit Sanchez avec beaucoup de joie et de chaleur pour nos interminables discussions sur les mathématiques ou sur d'autres sujets, à Alexis Devulder, Aurelien Alfonsi, et Yvon Poitevineau pour m'avoir donné goût à la discipline.

Je considère comme une chance d'avoir exercé pendant 3 ans, les fonctions de moniteur à l'université, et à ce titre je remercie les personnes avec qui j'ai pu partager des TD, comme Nathalie Loraud ou Andrei Teleman, ainsi que tous les élèves que

j'ai eu le plaisir d'encadrer. Ces expériences ont été on ne peut plus enrichissantes et ont contribué efficacement à ma culture mathématique.

Je profite de cette thèse pour saluer ceux ont su m'apporter leur soutien sans faille, et avec qui j'ai pu apprécier d'agréables moments comme Nicolas Rattazzi, Benoit Daniel, Denis Conduché, Florian Pinault, Alban Moreau, Samuel Guillaume, Gilles Gassier.

Je remercie aussi Chantal Ravier pour le tirage de ce mémoire ainsi que toutes les personnes de l'administration qui ont pu m'aider.

Merci à ceux qui ont partagé mon quotidien, je pense notamment à mes colocataires de bureau, Franck Sueur, Konrad Schöbel, Raphael Zentner, Emmanuel Jalade, mais aussi Stephane Brull, Rémy Rhodes, Fida El-Hussein et Nicolas Klutchnikoff. Et de manière plus proche, une pensée pour Barbara Feray qui a réussi à me supporter pendant ma dure période "isopérimétrie" avec tout plein de petits dessins.

Je remercie également Emmanuelle pour son soutien, sa naive curiosité non limitée aux maths, ses immenses qualités humaines et son dévouement à parfois m'éclairer dans des sombres moments.

Je ne peux oublier de remercier pour toutes ces heures arrachées à la nuit noire de certaines de mes nuits blanches, égaré dans les méandres obscurs de raisonnement mathématiques, certaines musiques de Eels à Offspring en passant par Nirvana et Girls in Hawai. Et à cela je ne peux dissocier de remercier la "windsurf team" pour tout le bonheur que j'y trouve chaque jour, pour l'écoute et la complicité que chacun a pu me témoigner, pour l'excitation débordante qu'il en ressort et qui à coup de fronts, backside air et goiter surjit après une période de concentration pour les maths. Je remercie donc (dans un ordre qui ne tient qu'au hasard) Pompom, Fabrice, Christian, Benj, Yazzé, Petit Steph, Grand Steph Thierry, Luc, Dirk, Fabien (pour la correction des quelques fautes d'orthographe), les Oliviers, les Jérômes, Sophie, Sly, Cyril dit Le Gonze de bordeaux...

Derrière la façade de la thèse achevée se cache inmanquablement le spectre des journées, des semaines, des mois...de doutes et interrogations qui vont de pair avec l'évolution d'un travail de recherche. Et je dois donc mentionner l'appui indispensable de mes parents et de mon frère Florent.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Présentation du travail.	9
1.2	Rapide tour d’horizon des résultats connus pour les marches aléatoires simples en percolation.	10
1.2.1	Amas infini et marches aléatoires.	10
1.2.2	Récurrence et transience.	16
1.2.3	Décroissance des noyaux de transition et estimées Gaussiennes.	16
1.2.4	Théorème central limite.	17
1.2.5	Notations.	18
1.3	Un outil général pour l’étude des marches aléatoires au plus proche voisin : l’isopérimétrie.	19
1.3.1	Lien entre isopérimétrie et décroissance du noyau.	19
1.3.2	Quelques exemples.	21
1.4	Donsker et Varadhan sur \mathbb{Z}^d	23
1.4.1	Enoncé du théorème.	23
1.4.2	Deux mots de grandes déviations.	24
1.4.3	Point de départ de la thèse.	27
1.5	Résultats obtenus.	28
	Bibliographie	29
2	Nombre de points visités par une marche aléatoire simple sur un amas de percolation.	31
2.1	Introduction et résultats	31
2.1.1	Notations	34
2.2	Produit en couronne.	35
2.2.1	Définition	35
2.2.2	Marches aléatoires	36
2.2.3	Remontée de l’isopérimétrie sur le produit en couronne.	37
2.3	Isopérimétrie sur un amas de percolation	45
2.3.1	Point de départ.	45
2.3.2	Une autre inégalité isopérimétrique	46
2.3.3	Renormalisation	50
2.4	Preuve de la borne supérieure	52
2.4.1	Isopérimétrie sur $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$	52

2.4.2	Borne supérieure de $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o)$	55
2.4.3	Conclusion : borne supérieure pour la transformée de Laplace.	57
2.5	Borne inférieure de $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$	59
2.5.1	Faits généraux pour les marches aléatoires	60
2.5.2	Borne inférieure de $\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r)$	60
2.5.3	Preuve de la proposition 2.5.1.	63
2.6	Questions et extensions	64
2.6.1	Questions ouvertes	64
2.6.2	Extensions	64
3	Étude d'autres fonctionnelles.	65
3.1	Explication de la méthode.	65
3.2	Principal résultat pour l'isopérimétrie sur un produit en couronne.	68
3.2.1	Cas moyennable	68
3.2.2	Cas non moyennable	79
3.3	Étude de $\mathbb{E}_0(\exp^{-\lambda \sum_z L_{n;z}^\alpha})$	80
3.3.1	Borne supérieure.	80
3.3.2	Borne inférieure.	87
3.4	Étude de $\mathbb{E}_0(\prod_z L_{n;z}^{-\alpha} 1_{X_n=0})$	89
3.4.1	Borne supérieure.	89
3.4.2	Borne inférieure.	96
4	Annexe	99
4.1	Preuve de la propriété 3.3.1	99
4.1.1	cas $\alpha \geq 1/3$	100
4.1.2	cas $\alpha < 1/3$	105
4.2	Complément sur la satisfaisabilité.	112
	Bibliographie	121

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation du travail.

Une fois connue, la récurrence ou la transience, d'une marche aléatoire, une fois connues des estimées des probabilités des noyaux de transitions, une question naturelle est celle du nombre de points visités par la marche. Un des buts de cette thèse, est d'étudier la transformée de Laplace de certaines fonctionnelles des temps locaux d'une marche aléatoire simple sur un amas de percolation. Un cas particulier, extrêmement riche et intéressant, est justement la transformée de Laplace du nombre de points visités. Dans le cas de \mathbb{Z}^d , on sait estimer cette quantité depuis 1979 par le célèbre résultat de Donsker et Varadhan (voir [9] et [10]). Malheureusement, les techniques utilisées dans leur preuve, ne semblent pas s'adapter sur des graphes privés de propriétés de symétrie, comme par exemple sur un amas infini de percolation. Dans cette introduction, après avoir rappelé ce que l'on appelle processus de percolation, on présente les principaux résultats relatifs à des marches aléatoires sur un amas infini de percolation.

Dans la partie 1.3, nous rappelons un fait de base, qui lie la géométrie d'un graphe et la décroissance des noyaux d'une marche aléatoire simple sur ce graphe. Cette propriété sera un point central dans la stratégie d'étude de nos fonctionnelles, afin de contourner les difficultés que posent la preuve de Donsker et Varadhan sur un amas. Enfin, dans la partie 1.5, on donne les résultats obtenus sur un amas de percolation.

L'organisation de la thèse est la suivante, dans le chapitre 2, on étudie de manière assez précise la géométrie d'un amas. C'est par ce biais que l'on étendra en un certain sens Donsker-Varadhan sur un amas de percolation. Cette partie, indépendante des autres, reprend un preprint. Le chapitre 3, généralise cette méthode à d'autres fonctionnelles. Les notations fixées dans l'introduction, se conservent tout au long de la thèse.

1.2 Rapide tour d'horizon des résultats connus pour les marches aléatoires simples en percolation.

On présente, dans cette section, de manière chronologique, comment les notions et les propriétés sont apparues.

1.2.1 Amas infini et marches aléatoires.

1.2.1.1 Définition.

Soit d un entier supérieur ou égal à 2, considérons le graphe $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, où

$$\mathbb{E}^d = \{(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2, N_1(x - y) = 1\},$$

avec $N_1(a) = \sum_{i=1..d} |a_i|$ si $a = (a_i)_{i=1..d} \in \mathbb{Z}^d$. \mathbb{E}^d est l'ensemble des arêtes "standard" sur \mathbb{Z}^d . Soit maintenant $p \in [0, 1]$, on efface [resp. garde] chaque arête avec probabilité $1 - p$ [resp. p], de manière indépendante. On obtient ainsi un sous graphe de \mathcal{L}^d , aussi il est pratique d'introduire : $\omega : \mathbb{E}^d \rightarrow \{0, 1\}$ défini par $\omega(x, y) = 1$ si l'arête (x, y) est présente, et 0 sinon. Lorsque l'arête est présente, on dit qu'elle est ouverte sinon on dit qu'elle est fermée.

Soit $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$ et \mathcal{F} la tribu engendrée par les cylindres finis de Ω . On notera \mathbb{Q} la mesure sur (Ω, \mathcal{F}) , définie par, $\mathbb{Q} = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$, où les μ_e sont des mesures de Bernoulli, $\mu_e = p1_{\{\omega(e)=1\}} + (1-p)1_{\{\omega(e)=0\}}$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ l'espérance par rapport à la probabilité \mathbb{Q} .

Soit $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble des points que l'on peut atteindre depuis x par un chemin constitué d'arêtes ouvertes. Par l'invariance par translation de la mesure \mathbb{Q} , la distribution de $\mathcal{C}(x)$ est indépendante du point x . Nous choisirons donc l'amas $\mathcal{C}(0)$ que nous noterons $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0)$.

La quantité qui nous intéresse est la probabilité qu'un sommet donné appartienne à un amas infini ouvert. Par l'invariance par translation, nous pouvons choisir le point origine, et on pose donc :

$$\theta(p) = \mathbb{Q}(\#\mathcal{C} = +\infty).$$

On notera $\#A$ ou bien $|A|$, le cardinal d'un ensemble A .

Une propriété fondamentale en percolation est qu'il existe une valeur $p_c(d) = p_c$ tel que :

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{si } p < p_c, \\ > 0 & \text{si } p > p_c. \end{cases}$$

$p_c(d)$ est appelé la probabilité critique et est définie formellement par :

$$p_c(d) = \sup\{p; \theta(p) = 0\}.$$

La valeur numérique de $p_c(d)$ reste un problème ouvert en dimension supérieure ou égale à 3. Nous savons seulement que $p_c(2) = 1/2$. Par ailleurs, par projection naturelle de \mathbb{Z}^{d+1} dans \mathbb{Z}^d , on a : $p_c(d+1) \leq p_c(d)$.

Théorème 1.2.1. *Pour $d \geq 2$, on a : $0 < p_c(d) < 1$.*

Ce Théorème montre donc l'existence de deux phases dans le processus de percolation :

- la phase sous critique, quand $p < p_c(d)$, où tous les amas ouverts sont \mathbb{Q} presque sûrement finis.
- la phase sur critique, quand $p > p_c(d)$, où tout sommet a une probabilité strictement positive d'appartenir à un amas infini ouvert.

Ces deux phases sont assez bien comprises, mais on ne peut en dire autant de la phase critique $p = p_c(d)$. Quant à l'existence, d'une composante connexe ouverte infini, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.2. $\mathbb{Q}(\exists \text{ amas ouvert infini}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta(p) = 0, \\ 1 & \text{si } \theta(p) > 0. \end{cases}$

En fait, on peut montrer que pour toutes valeurs de p , pour lesquelles il y a une probabilité strictement positive d'avoir un amas ouvert infini, l'amas infini est unique \mathbb{Q} presque sûrement.

Théorème 1.2.3. *Si p satisfait $\theta(p) > 0$, alors $\mathbb{Q}(\exists! \text{ amas ouvert infini}) = 1$*

1.2.1.2 Propriétés géométriques.

Pour x, y deux points de \mathbb{Z}^d , nous écrirons $x \leftrightarrow y$ si x et y sont dans le même amas. C'est à dire, si il existe un chemin (x_0, x_1, \dots, x_n) tel que :

- $x_0 = x$ et $x_n = y$,
- pour tout $i \in [0, n - 1]$, $(x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{E}^d$ et $\omega(x_i, x_{i+1}) = 1$.

La longueur du chemin est le nombre d'arêtes, et vaut ici n . On note $D(x, y)$ la longueur minimale d'un chemin ouvert reliant x à y ; cette quantité est aussi appelée distance chimique entre x et y . Antal et Pisztora ont prouvé le résultat suivant très technique (voir [1]) :

Théorème 1.2.4. *Si $p > p_c$, alors il existe une constante $\rho = \rho(p, d) \geq 1$ telle que :*

$$\limsup_{N_1(y) \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_1(y)} \ln \mathbb{Q}[0 \leftrightarrow y, D(0, y) > \rho N_1(y)] < 0.$$

En appliquant le théorème 1.2.4 et le lemme de Borel-Cantelli, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.5. *Soit $p > p_c$, \mathbb{Q} presque sûrement on a :*

$$\limsup_{N_1(y) \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_1(y)} D(0, y) 1_{\{0 \leftrightarrow y\}} \leq \rho(p, d)$$

où $\rho(p, d)$ est la constante introduite dans le théorème 1.2.4.

Ce corollaire s'interprète de la manière suivante, en phase sur critique, si un point est loin de l'origine au sens de N_1 , et si ce point est dans la composante connexe de l'origine, alors la distance chimique entre l'origine et ce point n'explose pas. Elle est contrôlée à une constante multiplicative près par la norme N_1 de ce point.

Une autre propriété géométrique qui aura une importance capitale par la suite, concerne l'isopérimétrie que l'on récupère sur un amas de percolation, dans le cas sur critique. Sur \mathbb{Z}^d , on a l'inégalité isopérimétrie classique :

$$\exists C > 0, \frac{|\partial_{\mathbb{Z}^d} A|}{f(|A|)} > C,$$

où $f(x) = x^{1-1/d}$ et $\partial_{\mathbb{Z}^d} A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^d; x \in A \text{ et } y \in \mathbb{Z}^d - A\}$.

Qu'en est il sur la composante connexe de l'origine, sachant que celle ci est infinie ? Du fait de l'existence de "morceaux" linéaires arbitrairement longs, pour ne pas avoir une constante isopérimétrique nulle, plusieurs choix de définitions de l'isopérimétrie sont possibles. En premier, il faut définir le bord avec lequel on veut travailler, ensuite on peut par exemple modifier f , et se restreindre à des boîtes, on peut compter le bord dans une boîte, ou le bord "global"... En fonction du problème, on choisit "l'isopérimétrie la mieux adaptée". (voir [16] et [2])

Une manière de pratiquer est de poser, pour $\epsilon > d$:

$$I_\epsilon(\mathcal{C}_n) = \inf_{\substack{A \subset \mathcal{C}_n \\ |A| \leq |\mathcal{C}_n|/2}} \frac{|\partial_{\mathcal{C}_n} A|}{|A|^{1-1/\epsilon}},$$

où \mathcal{C}_n est la composante connexe de $\mathcal{C} \cap [-n, n]^d$ qui contient l'origine et $\partial_{\mathcal{C}_n} A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^d; \omega(x, y) = 1 \text{ et } x \in A, y \in \mathcal{C}_n - A, \text{ ou } y \in A, x \in \mathcal{C}_n - A\}$.

Mathieu et Rémy ont alors montré (voir [16]) :

Proposition 1.2.6. *Pour $p > p_c$, il existe une constante $\beta = \beta(p, d) > 0$ telle que \mathbb{Q} presque sûrement sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, pour n assez grand on a :*

$$I_{\epsilon(n)}(\mathcal{C}_n) \geq \frac{\beta}{n^{1-d/\epsilon(n)}},$$

avec $\epsilon(n) = d + 2d \frac{\ln \ln(n)}{\ln(n)}$.

Par ailleurs le volume des ensembles \mathcal{C}_n croît comme les boules de \mathbb{Z}^d ,

Proposition 1.2.7. *Pour $p > p_c$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que \mathbb{Q} presque sûrement sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, pour n assez grand on a :*

$$|\mathcal{C}_n| \geq \alpha n^d.$$

Dans [2], le même type d'estimées sont prouvées, en se plaçant sur des événements de probabilité exponentiellement petite, et en considérant à la fois, percolation sur les sites et sur les arêtes.

1.2.1.3 Événements croissants, renormalisation.

Parfois, il arrive qu'on puisse montrer une propriété \mathcal{P} pour des valeurs de p proches de 1. Sous certaines hypothèses (notamment de croissance) de \mathcal{P} , on peut étendre cette propriété à toutes valeurs de $p > p_c$. On nomme ainsi, le procédé de renormalisation, introduit par Antal et Pisztorá .

Événements croissants

La probabilité $\theta(p)$ que l'origine appartienne à un amas infini, est une fonction croissante de p . Il est effectivement intuitif, qu'une augmentation de p conduise à un graphe avec un nombre plus grand d'arêtes ouvertes, donc à un graphe qui reste infini. Plus formellement, on peut dire que, si $\omega \in \{|\mathcal{C}| = +\infty\}$ l'ajout d'une arête à ω préserve le fait que la composante connexe ouverte de l'origine de ce nouvel environnement reste infini. Si l'on note $\omega \leq \omega'$ dès que pour tout $e \in \mathbb{E}^d$, $\omega(e) \leq \omega'(e)$, on dira donc :

Définition 1.2.8. $A \in \mathcal{F}$ est un événement croissant si :

$$\omega \leq \omega' \Rightarrow 1_{\{\omega \in A\}} \leq 1_{\{\omega' \in A\}}.$$

Ainsi, on a bien par exemple que $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$ est un événement croissant.

Renormalisation

L'idée de la renormalisation est la suivante : on considère $p > p_c$ et une percolation de \mathbb{Z}^d . On recouvre \mathbb{Z}^d par des boîtes de taille N , et on décide si une boîte est bonne ou mauvaise, suivant certaines conditions de bon "remplissage" de la percolation dans la boîte. Ainsi on obtient une percolation sur l'ensemble des boîtes, qui s'identifie à une percolation sur \mathbb{Z}^d , en identifiant une boîte et un point de \mathbb{Z}^d , et les boîtes voisines par les voisins de ce point.

La propriété clef, non triviale, est que la loi de la percolation sur les boîtes domine la loi d'une percolation de paramètre $p(N)$, restreinte aux événements croissants, où $p(N)$ est une fonction qui tend vers 1 quand N tend vers $+\infty$. Si on prouve donc une propriété \mathbb{Q} p.s pour des valeurs de p proches de 1, en prenant N assez grand, on déduira que la propriété est également satisfaite pour la percolation sur les boîtes. Il restera à voir si la propriété appliquée aux boîtes se transmet à l'amas initial.

Plus précisément, pour $N \in \mathbb{Z}$, on considère les boîtes suivantes :

$$B_0(N) = [-N, N]^d \cap \mathbb{Z}^d \text{ et } B_{\mathbf{i}}(N) = \tau_{\mathbf{i}(2N+1)}B_0(N),$$

où $\tau_{\mathbf{b}}$ est la translation (ou le shift) de vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}$.

Les boîtes $(B_{\mathbf{i}}(N))_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ forment une partition de \mathbb{Z}^d , et on définit maintenant le réseau renormalisé comme le graphe où l'ensemble des sommets est $(B_{\mathbf{i}}(N))_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ et l'ensemble des arêtes est $\{(B_{\mathbf{i}}(N), B_{\mathbf{j}}(N)); N_1(i - j) = 1\}$. Ce graphe s'identifie donc à une copie de \mathcal{L}^d , où nous noterons en caractère gras les sommets afin de les distinguer du réseau initial.

Soit également, $B'_i(N) = \tau_{\mathbf{i}(2N+1)}B_0(5N/4)$ et soit $\mathcal{E}(N)$ l'ensemble d'arêtes suivant :

$$\mathcal{E} = \{(ke^{(1)}, (k+1)e^{(1)}); k = 0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{N} \rfloor\}$$

où $e^{(1)}$ désigne le premier vecteur unitaire de \mathbb{Z}^d .

Soit enfin,

$$\mathcal{E}_i = \tau_{\mathbf{i}(2N+1)}\mathcal{E}(N).$$

On dira qu'un amas \mathcal{A} contenu dans une boîte B' est un *amas traversant* pour $B \subset B'$, si dans les d directions il y a un chemin ouvert contenu dans $\mathcal{A} \cap B$ joignant la face gauche et la face droite de B . On considère alors les événements suivants :

$R_i^{(N)} = \{\exists! \text{ amas traversant } \mathcal{A} \text{ dans } B'_i(N) \text{ pour } B'_i(N), \text{ tous les chemins ouverts contenus dans } B'_i(N) \text{ de longueur supérieure à } N/10 \text{ sont connectés à } \mathcal{A} \text{ dans } B'_i(N) \text{ et } \mathcal{A} \text{ est traversant pour chaque sous boîte } B \subset B'_i(N) \text{ de taille supérieure à } N/10\}$,

$$S_i^{(N)} = \{\text{il y a au moins une arête ouverte dans } \mathcal{E}_i\}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \phi_N : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ \omega &\longmapsto \phi_N(\omega) : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1\} \\ &\mathbf{x} \mapsto 1_{\{R_{\mathbf{x}}^{(N)} \cap S_{\mathbf{x}}^{(N)}\}}. \end{aligned}$$

On note \mathbb{Q}_N l'image de la mesure \mathbb{Q} par ϕ_N . Par cette application ϕ_N , on définit ainsi un processus de percolation dépendant sur les sites du réseau renormalisé. Le théorème principal est :

Théorème 1.2.9. *Pour tout $p > p_c$, il existe une fonction $\bar{p} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ avec $\lim_{N \rightarrow +\infty} \bar{p}(N) = 1$ telle que \mathbb{Q}_N domine, sur les événements croissants, la loi d'un processus de percolation indépendant sur les sites de paramètre $\bar{p}(N)$. C'est à dire :*

$$\text{pour tout événement croissant } A, \quad \mathbb{Q}_N(A) \geq \mathbb{Q}_{\bar{p}(N)}^*(A),$$

où \mathbb{Q}_q^* désigne la loi d'un processus de percolation indépendant sur les sites de paramètre q .

Ainsi si on prouve qu'un événement croissant A est réalisé \mathbb{Q} presque sûrement pour des valeurs de p proches de 1, on déduira que pour N assez grand, $\mathbb{Q}_N(A) = 1$. C'est à dire que A est réalisé dans le processus renormalisé (on dit aussi le processus macroscopique) \mathbb{Q}_N presque sûrement. Il reste donc à voir si l'événement A dans le processus macroscopique implique l'événement A dans le processus de percolation initial (microscopique). Autrement dit, on examine si les propriétés qui définissent A sont stables par ϕ_N .

1.2.1.4 Marches aléatoires simples.

Définition.

Une fois avoir percolé \mathbb{Z}^d , on travaille sur les événements $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$ et on fait évoluer une marche simple sur cet amas infini partant de l'origine.

Pour $\omega \in \{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, on pose donc :

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = b | X_n = a) = \begin{cases} \frac{\omega(a,b)}{\sum_{x:(a,x) \in \mathbb{E}^d} \omega(a,x)} \text{ si } (a,b) \in \mathbb{E}^d, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

On notera $\nu(a) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \omega(a,x)$. Ce nombre correspond aux nombres de voisins de a dans l'amas. La mesure ν est réversible pour la marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On notera également $p(a,b) = \mathbb{P}(X_{n+1} = b | X_n = a)$, et $p_n(a,b)$ définit par récurrence par :

$$\begin{cases} p_1(a,b) = p(a,b) \\ p_{n+1}(a,b) = \sum_y p_n(a,y)p(y,b) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

On a bien sûr $p_n(a,b) = \mathbb{P}(X_n = b | X_0 = a)$

Marches aléatoires restreintes à la boîte \mathcal{C}_n .

Soit $(X_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ la marche issue de 0, et de noyaux de transition :

$$p^{(n)}(a,b) = \frac{\omega(a,b) 1_{\{b \in \mathcal{C}_n\}}}{\sum_{x \in \mathcal{C}_n} \omega(a,x)}.$$

$X_k^{(n)}$ est définie de la même manière que X_k , mis à part le fait que les sauts extérieurs à \mathcal{C}_n sont interdits. Dans la suite, l'exposant $^{(n)}$ correspond à des quantités restreintes à \mathcal{C}_n et non pas aux quantités itérées. Soit $P^{(n)}$ l'opérateur défini sur les fonctions f de \mathcal{C}_n dans \mathbb{R} , défini par :

$$(P^{(n)}f)(x) = \sum_y p^{(n)}(x,y)f(y).$$

Soit $\Delta^{(n)}$ le Laplacien discret sur \mathcal{C}_n , défini par :

$$\Delta^{(n)}(\cdot) = (P^{(n)} - Id)(\cdot),$$

c'est à dire : pour $f : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}$, et pour $x \in \mathcal{C}_n$,

$$\begin{aligned} (\Delta^{(n)}f)(x) &= (P^{(n)}f)(x) - f(x) \\ &= \sum_y p^{(n)}(x,y)[f(y) - f(x)]. \end{aligned}$$

La propriété 1.2.6 implique un contrôle inférieur de la plus petite valeur propre de $\Delta^{(n)}$ sur \mathcal{C}_n . Soit donc λ^n la plus petite valeur propre non nulle de $\Delta^{(n)}$, par l'inégalité de Cheeger (voir [6]) et par la propriété 1.2.6 on a :

Proposition 1.2.10. *Si $p > p_c$, il existe une constante $\beta > 0$ tel que \mathbb{Q} presque sûrement sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, pour n assez grand, on ait :*

$$\lambda^{(n)} \geq \frac{\beta}{n^2}.$$

1.2.2 Récurrence et transience.

Cas $d = 2$.

En dimension 2, on sait que la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 est récurrente, donc toute marche simple sur un sous graphe de \mathbb{Z}^2 sera récurrente. En particulier, on déduit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente.

Cas $d \geq 3$.

La transience de la marche simple sur un amas infini de percolation en dimension supérieure à 3 date de 1992 et a été prouvé initialement par Grimmet, Kesten et Zhang (voir [11]). On verra dans le paragraphe suivant que ce résultat est une conséquence de travaux plus récents.

La preuve dans [11], utilise les liens entre la théorie des marches aléatoires et la théorie des graphes munis de résistances (électriques) sur les arêtes. Dans le cas d'une percolation, chaque arête est remplacée par une résistance unité si l'arête est ouverte, et une résistance infinie si elle est fermée. La transience revient alors à prouver que pour tout x dans l'amas infini, la résistance entre x et l'infini est finie. Ce fait passe par l'étude de la résistance, entre un point x et le bord de la boule centrée en x de rayon n . Il est notamment prouvé que cette résistance admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

Théorème 1.2.11. *Pour $p > p_c$, la marche aléatoire simple sur un amas infini est transiente, \mathbb{Q} presque sûrement.*

Une preuve postérieure à celle de [11] est donné dans [3].

1.2.3 Décroissance des noyaux de transition et estimées Gaussiennes.

Pour la marche simple dans \mathbb{Z}^d , on sait que les noyaux de transition au temps n décroissent comme $C/n^{d/2}$. Qu'en est il sur un amas infini ?

Résultat presque sûr.

Soit \mathbb{P}_0^ω , la loi de la marche X_n partant de 0, évoluant dans l'amas ω . Par des méthodes basées sur l'obtention d'inégalités isopérimétriques telles que la propriété 1.2.6 (que nous développerons dans la section 1.3), Mathieu et Remy prouvent dans [16] :

Théorème 1.2.12. *Pour toute dimension supérieure ou égale à 2 et pour tout $p > p_c$, il existe une constante $c_1 = c_1(p, d)$ telle que \mathbb{Q} presque sûrement sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$ et pour n assez grand, on ait :*

$$\sup_{y \in \mathcal{C}} \mathbb{P}_0^\omega(X_n = y) \leq c_1/t^{d/2}$$

Remarques :

- On retrouve la transience lorsque $d \geq 3$ à l'aide de ce théorème.
- Antérieurement à ce résultat, des estimées supérieures (en moyenne) de $\mathbb{P}_0^\omega(X_n = y)$ ont été obtenues par Heicklen et Hoffman, mais leur résultat était moins précis. Ils avaient en effet établi, $\mathbb{E}_\mathbb{Q}\mathbb{P}_0^\omega(X_n = y) \leq C \frac{\ln(n)^{6d+14}}{n^{d/2}}$.

Barlow a obtenu en 2004 un résultat plus complet (voir [2]) :

Théorème 1.2.13. *Soit $p > p_c$, il existe des constantes $c_i = c_i(d, p)$ telle que \mathbb{Q} presque sûrement sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$, il existe une variable aléatoire $S_x(\omega)$ tel que :*

pour tout $n \geq S_x(\omega) \vee N_1(x - y)$, on ait :

$$\frac{c_1}{n^{d/2}} e^{-c_2 N_1(x-y)^2/n} \leq \frac{\mathbb{P}_x^\omega(X_n = y)}{\nu(y)} \leq \frac{c_3}{n^{d/2}} e^{-c_4 N_1(x-y)^2/n},$$

où \mathbb{P}_x^ω désigne la loi de la marche partant de x .

Ce théorème ainsi que le précédent sont initialement prouvés dans le cas d'une marche aléatoire à temps continu. La marche est construite de la même manière que X_n , mais avant chaque saut, elle attend un temps exponentiel de paramètre 1, indépendant les uns des autres. Ce procédé permet d'éviter d'éventuelles difficultés supplémentaires dues à la périodicité. On notera dans la suite $X(t)$ ce processus à temps continu.

Résultat en moyenne.

Toujours dans [2], le même type d'estimées est prouvé pour la loi moyennée Q_n définie par :

$$Q_n(x, y) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(\frac{\mathbb{P}_x^\omega(X_n = y)}{\nu(y)} \mid x, y \in \mathcal{C}\right).$$

Théorème 1.2.14. *Pour $p > p_c$, il existe des constantes $c_i = c_i(d, p)$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout $n \geq N_1(x - y)$,*

$$\frac{c_1}{n^{d/2}} e^{-c_2 N_1(x-y)^2/n} \leq Q_n(x, y) \leq \frac{c_3}{n^{d/2}} e^{-c_4 N_1(x-y)^2/n}.$$

1.2.4 Théorème central limite.

Soit $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, le processus à temps continu, construit à partir de la marche X_n , (voir çï dessus). Mathieu et Piatniski ont récemment prouvé dans [15], un principe d'invariance pour la marche sur un amas infini.

Théorème 1.2.15. *Soit $p > p_c$.*

\mathbb{Q} presque sûrement sur $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, sous \mathbb{P}_0^ω le processus $(X^\epsilon(t) = \epsilon X(t/\epsilon^2), t \in \mathbb{R}_+)$ converge en loi quand ϵ tend vers 0, vers un mouvement Brownien de matrice de covariance $\sigma^2 Id$, où $\sigma > 0$ et est indépendant de ω .

Remarques :

- Berger et Biskup (voir [4]) ont aussi obtenu ce résultat, par une méthode un peu différente que dans [15]. Des résultats partiels en dimension plus grande que 4 ont aussi été établis par Sznitman et Sidoravicius (voir [18]).
- Soit $QP_0^\omega = \int_{\Omega} \mathbb{P}_0^\omega(\cdot) dQ(\omega | \#\mathcal{C} = +\infty)$. Dans [14], il a été prouvé en 1989, que sous QP_0^ω , $(X^\epsilon(t) = \epsilon X(t/\epsilon^2), t \in \mathbb{R}_+)$ converge en loi quand ϵ tend vers 0, vers la loi d'un mouvement Brownien non dégénéré.

1.2.5 Notations.

Maintenant que l'on a introduit la plupart des objets avec lesquels nous allons travailler, fixons quelques notations.

Commençons par la notation des graphes. Dans cette thèse, il interviendra divers graphes dont certains auront le même ensemble de points mais avec des arêtes différentes. Notre notation doit donc tenir compte de cette remarque.

- Un graphe G est donc un couple $(V(G), E(G))$ où le premier argument $V(G)$ désigne les points de G (vertices of G) et le deuxième $E(G)$ représente l'ensemble des arêtes de G non orientées (edges of G).
- Si G est un graphe, pour $x \in V(G)$ on note $\nu_G(x)$ le nombre de voisins de x dans G . C'est à dire $\nu_G(x) = \#\{(x, y) \in E(G)\}$.
- Soit \mathcal{C} la composante connexe de l'origine après percolation de \mathbb{Z}^d , on note \mathcal{C}^g le graphe sous jacent. C'est à dire \mathcal{C}^g a pour ensemble de points \mathcal{C} et pour ensemble d'arêtes $E(\mathcal{C}^g) = \{(x, y) \in \mathcal{C}^2; \omega(x, y) = 1\}$
- La boule dans \mathcal{C} centrée à l'origine et de rayon r pour la distance chimique, est notée $B_r(\mathcal{C})$.
- Pour f, g fonctions réelles définies sur \mathbb{R}_+ , on écrira

$$f \preceq g \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leq C_1 g(C_2 x),$$

et

$$f \approx g \Leftrightarrow f \preceq g \quad \text{et} \quad f \succeq g.$$

- Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe non orienté, on désigne par Fol_G la fonction de Folner de G , définie par :

$$Fol_G(k) = \min\{|U|; U \subset V(G) \text{ et } \frac{|\partial_G U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}\},$$

où $\partial_G U = \{(x, y) \in E(G); x \in U \text{ et } y \in V(G) - U\}$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\partial U = \partial_G U$ pour ne pas alourdir les notations.

- Si G est un sous graphe de \mathcal{G} , c'est à dire $V(G) \subset V(\mathcal{G})$ et $E(G) \subset E(\mathcal{G})$, on notera :

$$Fol_G^{\mathcal{G}}(k) = \min\{|U|; U \subset V(G) \text{ et } \frac{|\partial_{\mathcal{G}} U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}\},$$

où $\partial_{\mathcal{G}}U = \{(x, y) \in E(\mathcal{G}); x \in U \text{ et } y \in V(\mathcal{G}) - U\}$.

$Fol_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}$ est toujours une fonction de Folner de G mais où le bord est compté dans \mathcal{G} .

• Si A et B sont des ensembles, $A \dot{\cup} B$ désigne l'union disjointe de A et B .

1.3 Un outil général pour l'étude des marches aléatoires au plus proche voisin : l'isopérimétrie.

Dans cette section, on se place dans un cadre général d'une marche aléatoire $(X_n)_n$ sur un graphe infini $U = (V(U), E(U))$, qui n'est pas forcément un amas de percolation. $V(U)$ désigne l'ensemble des points et $E(U)$ l'ensemble des arêtes (non orientées). On suppose que pour les taux de transitions $p(\cdot, \cdot)$ de $(X_n)_n$, il existe une mesure m réversible et que $\inf_{V(U)} m > 0$. Pour $A \subset V(U)$ on pose :

$$m(A) = \sum_{x \in A} m(x).$$

On note $l^p(V(U), m)$ l'espace des fonctions de $V(U)$ dans \mathbb{R} de puissance p ième intégrable par rapport à m . Pour $p = 2$, on note $(\cdot | \cdot)_{l^2(V(U), m)}$ le produit scalaire associé.

On note encore $p_n(\cdot, \cdot)$ les noyaux de transition et P l'opérateur défini sur les fonctions de $V(U)$ dans \mathbb{R} à support fini :

$$Pf(x) = \mathbb{E}(f(X_1) | X_0 = x) = \sum_y p(x, y)f(y).$$

Soient les noyaux a définis pour tout $x, y \in V(U)$ par :

$$a(x, y) = m(x)p(x, y),$$

$$\text{et si } e = (x, y), a(e) = a(x, y).$$

Dans la suite c désigne une constante dont la valeur peut changer de ligne en ligne.

1.3.1 Lien entre isopérimétrie et décroissance du noyau.

On note $IS_{\mathcal{F}}$ toute inégalité isopérimétrique sur U du type :

$$\exists c > 0, \forall A \subset V(U) \frac{a(\partial A)}{\mathcal{F}(m(A))} \geq c,$$

où $\partial A = \{(x, y) \in E(U); (x, y) \in A \times A^c\}$.

IS_d désignera l'inégalité isopérimétrique avec $\mathcal{F}(x) = x^{1-1/d}$.

Le cardinal du bord d'une boule peut s'interpréter comme une "dérivé" discrète du volume, ainsi la propriété $IS_{\mathcal{F}}$ est une sorte "d'inéquation différentielle". Par exemple, une conséquence de l'isopérimétrie IS_d est que le volume des boules centrées en un

point quelconque et de rayon n croît au moins en n^d .

Suivant cette idée, et en appliquant $IS_{\mathcal{F}}$ à des classes d'ensembles plus 'grandes' que les boules, notamment à des ensembles de niveaux d'une fonction, et en utilisant divers outils tels que la coaire, on peut prouver les inégalités fonctionnelles suivantes :

Théorème 1.3.1. (*Inégalité de Nash*) Soit un graphe $U = (V(U), E(U))$ satisfaisant $IS_{\mathcal{F}}$. On suppose que $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est telle que $\mathfrak{f}(t) = t/\mathcal{F}(t)$ soit croissante, alors :

$$(1.1) \quad \text{pour tout } f \text{ à support fini dans } V(U), \quad \|f\|_2^2 \leq \mathfrak{g}\left(\frac{\|f\|_1^2}{\|f\|_2^2}\right)\mathcal{E}(f, f),$$

où $\mathfrak{g}(x) = 4(\mathfrak{f}(4x)/c)^2$ et \mathcal{E} est la forme de Dirichlet associée aux noyaux a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, f) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V(U)} (f(x) - f(y))^2 a(x, y) \\ &= \left((Id - P)f | f \right)_{l^2(V(U), m)}. \end{aligned}$$

Cette inégalité nous donne alors des estimées de la norme $\|\cdot\|_{1 \rightarrow 2}$ du semi groupe \bar{P}^n où $\bar{P} = (P + id)/2$ et $\|\cdot\|_{p \rightarrow q}$ désigne la norme d'opérateur de $l^p(V(U), m)$ dans $l^q(V(U), m)$. Coulhon (voir [5]) a largement contribué à prouver le théorème suivant. Pittet et Saloff-Coste (dans [13]) présentent aussi ces résultats.

Théorème 1.3.2. Soit $m_0 = \inf_{V(U)} m > 0$. Supposons que l'inégalité (1.1) soit satisfaite pour une fonction \mathfrak{g} continue et croissante de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, alors :

$$\sup_{x, y} \frac{p_{2n}(x, y)}{m(y)} \leq 2u(n),$$

où $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, 1/m_0]$ est solution de :

$$\begin{cases} u'(t) = -\frac{u(t)}{2\mathfrak{g}(1/u(t))}, \\ u(0) = 1/m_0. \end{cases}$$

Combinant ces 2 théorèmes 1.3.2 et 1.3.1, on comprend que l'isopérimétrie donne un contrôle supérieur des noyaux de transition. Dans la suite, nous utiliserons plutôt une formulation de l'isopérimétrie à l'aide de la fonction de Folner définie par :

$$Fol(n) = \min_{\substack{A \subset V(U) \\ \frac{a(\partial A)}{m(A)} \leq \frac{1}{n}}} m(A).$$

La fonction de Folner est reliée à l'isopérimétrie par :

$$IS_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \exists c > 0 \forall n \geq 1, \quad Fol(n) \geq \mathfrak{f}^{-1}(cn),$$

où $\mathfrak{f}(t) = \frac{t}{\mathcal{F}(t)}$ est supposée croissante.

On a alors la propriété suivante :

Proposition 1.3.3. *Soit $m_0 = \inf_{V(U)} m > 0$. Supposons que $F_{ol}(n) \geq F(n)$ avec F fonction croissante et positive, alors*

$$\sup_{x,y} \frac{p_{2n}(x,y)}{m(y)} \leq 2v(n),$$

où v est solution de :

$$\begin{cases} v'(t) = -\frac{v(t)}{8(F^{-1}(4/v(t)))^2}, \\ v(0) = 1/m_0. \end{cases}$$

Le point de départ de ces résultats est donc l'inégalité de Nash, déduite d'une inégalité isopérimétrique. Et comme il a déjà été dit, dans la preuve (par exemple dans [13]) on utilise l'isopérimétrie pour des ensembles de niveaux, plus précisément des ensembles du type $\{x \in V(U); (P^n f)(x) \geq t\}$.

Récemment Morris et Perres (dans [17]) ont prouvé ce même type de résultat en utilisant une approche complètement différente. Ils considèrent une suite S_n d'ensembles aléatoires, dits ensembles évoluant, et ils remarquent que les noyaux de transition de la marche initiale sont liés à certaines transitions de cette suite S_n . Le point intéressant est que dans leur preuve, l'isopérimétrie n'est utilisée que pour les ensembles S_n ou S_n^c .

L'hypothèse semble donc à priori ne pas être utilisée pour le même type d'ensembles. En fait, on peut voir que les S_n sont liés aux ensembles de niveaux précédents.

Remarque : Cas d'un groupe.

Soit G un groupe finiment engendré et soit \mathcal{S} un système de générateurs. Notons alors $U = (V(U), E(U))$ son graphe de Cayley associé. Soit $B_n^{\mathcal{S}}$ la boule centrée en l'élément neutre et de rayon n et $V^{\mathcal{S}}(n)$ son volume, $V^{\mathcal{S}}(n) = \#B_n^{\mathcal{S}}$. Et soit enfin :

$$w(t) = \inf\{n; V_n^{\mathcal{S}} > t\}.$$

Alors,

$$U \text{ satisfait } IS_{\mathcal{F}}, \text{ avec } \mathcal{F}(t) = t/w(t).$$

Dans le cas d'un groupe, le volume donne donc un contrôle de l'isopérimétrie. Par suite, pour un groupe il est remarquable de constater que le volume donne une borne supérieure des noyaux de transitions.

1.3.2 Quelques exemples.

• Tout graphe infini satisfait l'inégalité isopérimétrique $|\partial A| \geq 1$. C'est à dire IS_1 , en supposant $\inf_{x,y} a(x,y) > 0$. Si de plus $\inf m > 0$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \sup_{x,y} \frac{p_n(x,y)}{m(y)} \leq \frac{c}{n^{1/2}}.$$

C'est notamment le cas pour la marche simple sur un graphe U à géométrie bornée, avec $m(x)$ définie par l'inverse du nombre de voisins au point x .

- L'isopérimétrie sur \mathbb{Z}^d implique que la marche simple sur le graphe \mathcal{L}^d satisfait IS_d , ainsi on retrouve :

$$\forall n \in \mathbb{N} \sup_{x,y} p_n(x,y) \leq \frac{c}{n^{d/2}}.$$

- Pour une marche sur $U = (V(U), E(U))$, graphe satisfaisant $IS_{\mathcal{F}}$ avec $\mathcal{F}(t) = t$, on a toujours sous l'hypothèse $\inf_{V(U)} m > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \sup_{x,y} \frac{p_n(x,y)}{m(y)} \leq e^{-cn}.$$

On retrouve que la marche aléatoire simple sur un graphe non moyennable, (en prenant comme mesure réversible m , l'inverse du nombre de voisins), possède des noyaux de transition qui décroissent exponentiellement vite. C'est par exemple le cas pour le graphe de Cayley d'un groupe libre finiment engendré par plus de 2 générateurs, c'est à dire pour \mathcal{T}_M , l'arbre régulier à M voisins ($M > 2$).

- Signalons également l'exemple suivant, qui nous fournit une borne supérieure que nous rencontrerons plus tard. Soit $\alpha > 0$.

Si une marche $(X_n)_n$ sur $U = (V(U), E(U))$ satisfait $IS_{\mathcal{F}}$ avec $\mathcal{F}(t) = \frac{t}{[\ln(2+t)]^{1/\alpha}}$, ou bien plus simplement si $\forall n \geq 1 \text{ Fol}(n) \geq e^{cn^\alpha}$ et $\inf m > 0$ alors,

$$\forall n \in \mathbb{N} \sup_{x,y} \frac{p_n(x,y)}{m(y)} \leq e^{-cn^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}.$$

- Supposons toujours que le graphe $U = (V(U), E(U))$ est infini, et soit $U' = (V(U'), E(U')) \subset (V(U), E(U))$, avec $V(U')$ fini. Soit $(X_n)_n$ une marche sur U de noyaux de transition $p(\cdot, \cdot)$ et m une mesure réversible sur V . Posons $T = \inf\{k \geq 0; X_k \notin V(U')\}$ et imaginons que l'on veuille estimer $\mathbb{P}_x(X_{2n} = y, n < T)$, avec $x, y \in V(U')$.

Tout se passe comme si la marche évoluait sur le graphe \bar{U}' où $V(\bar{U}') = V(U') \cup \{\delta\}$, avec δ un point imaginaire, appelé cimenterre, qui représente $V(U) - V(U')$. Les arêtes $E(\bar{U}')$ sont définies par $E(\bar{U}') = E(U') \cup \{(x, \delta); \exists y \in V(U) - V(U') (x, y) \in E(U)\}$. Les noyaux étant alors donnés par :

$$\bar{p}(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & \text{si } x, y \in V(U')^2, \\ \sum_{a \in V(U)} p(x,a) & \text{si } x \in V(U') \text{ et } y = \delta, \\ 0 & \text{si } x = \delta \text{ et } y \in V(U'). \end{cases}$$

Si la marche arrive au point δ , elle y reste.

On note \bar{P} l'opérateur défini par $\bar{P}f(x) = \sum_{y \in V(\bar{U}')} \bar{p}(x,y)f(y)$. La forme de Dirichlet associée est définie par : pour tout $f, g : V(\bar{U}') \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(\delta) = g(\delta) = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}(f,g) &= (f|g - \bar{P}g)_{l^2(V(U'),m)}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V(U')} m(x)p(x,y)[g(x) - g(y)][f(y) - f(x)] + \sum_{x \in V(U')} p(x,\delta)m(x)f(x)g(x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir une inégalité de Nash de type 1.3.1, pour la forme $\bar{\mathcal{E}}$, il suffit d'avoir une inégalité isopérimétrique $IS_{\mathcal{F}}$, en comptant le bord de la manière suivante :

$$\text{pour tout } A \subset V(U') \quad \partial_{\bar{U}'} A = \{(x, y) \in E(\bar{U}'); x \in A, y \in V(\bar{U}') - A\}$$

et avec

$$\bar{a}(x, y) = \begin{cases} m(x)p(x, y) & \text{si } (x, y) \in V(U')^2 \\ m(x)p(x, \delta) & \text{si } x \in V(U') \text{ et } y = \delta. \end{cases}$$

De sorte que :

$$\bar{a}(\partial_{\bar{U}'} A) = \bar{\mathcal{E}}(1_A, 1_A) = \sum_{\substack{(x,y) \in V(U') \\ x \in A, y \notin A}} m(x)p(x, y) + \sum_{x \in A} m(x)p(x, \delta),$$

pour tout A de $V(U')$.

Finalement, toujours sous les hypothèses $\inf \bar{a} > 0$ et $\inf m > 0$, on constate qu'une inégalité isopérimétrique, portant sur le bord 'global' dans $V(U')$, permet d'obtenir une borne de $\sup_{x,y} \mathbb{P}_x(X_{2n} = y, n < T)$. Le majorant vérifie la même équation différentielle que dans la propriété 1.3.3 mais où le bord dans la fonction de Folner n'est plus compté de la même manière. On notera

$$Fol_{U'}^U(k) = \min_{\frac{|\partial_{\bar{U}'} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k}} |A| = \min_{\frac{|\partial_U A|}{|A|} \leq \frac{1}{k}} |A|.$$

1.4 Donsker et Varadhan sur \mathbb{Z}^d .

1.4.1 Énoncé du théorème.

Dans [10], on considère une marche X_n sur \mathbb{Z}^d plus générale qu'une marche simple. On note π la loi des incréments indépendants, on a donc $p(a, b) = \pi(b - a)$.

Soit $D_n = \{j \in \mathbb{Z}^d; \exists r \in [1, n] X_r = j\}$ et $N_n = \#D_n$, qui est donc le nombre de points visités par la marche jusqu'au temps n . Notons \mathbb{E} l'espérance partant de l'origine. Le travail de Donsker et Varadhan porte sur le comportement asymptotique de $\mathbb{E}(e^{-\nu N_n})$ lorsque n tend vers l'infini.

Evidemment, ce comportement dépend de la loi π . Pour tout $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{Z}^d$, soit $\hat{\pi}(t) = \mathbb{E}(e^{i(X_1|t)}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \pi(j) e^{i(j|t)}$. On suppose que π satisfait :

Hypothèses

(i) $\hat{\pi}(t) = 1$ si et seulement si $t = 2\pi(n_1, \dots, n_d)$ où les n_i sont entiers.

(ii) pour $|t|$ proche de 0, $\hat{\pi}(t) = 1 - \Omega(t) + o(|t|^\alpha)$ où $\alpha \in]0, 2]$ et où $e^{-\Omega(t)}$ est la fonction caractéristique d'une loi stable symétrique d'indice α non dégénérée, c'est à dire :

$$\Omega(t) = \begin{cases} \sum a_{i,j} t_i t_j \text{ avec } (a_{i,j})_{i,j} \text{ définie positive, si } \alpha = 2, \\ \int_{S^{d-1}} \int_0^{+\infty} [1 - \cos(t|ry)] \frac{M(dy)dr}{r^{\alpha+1}}, \text{ pour } 0 < \alpha < 2, \end{cases}$$

où M est une mesure symétrique sur la sphère S^{d-1} de \mathbb{R}^d , dont le support est \mathcal{S}^{d-1} .

Remarquons que les hypothèses sur π impliquent que $\mathbb{E}X_1 = 0$ (si $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$). Soit $(x(s))_{s \in \mathbb{R}_+}$ un processus de loi stable symétrique d'indice α sur \mathbb{R}^d . Soit L_Ω son générateur.

Théorème 1.4.1. *Pour $\nu > 0$, on a*

$$(1.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{d+\alpha}}} \ln \mathbb{E}(e^{-\nu N_n}) = -k(\nu, L),$$

où

$$k(\nu, L) = k(\nu, L, d, \alpha) = \nu^{\frac{\alpha}{d+\alpha}} \left(\frac{d+\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{\alpha \lambda_L}{d} \right)^{\frac{d}{d+\alpha}},$$

avec

$$\lambda_L = \inf_{G: |G|=1} \lambda(G),$$

l'inf est pris sur les sous ensembles ouverts G de \mathbb{R}^d de volume 1 et $\lambda(G)$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $-L_\Omega$ restreint à G avec les conditions de Dirichlet au bord.

Pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f|_{G^c} = 0$,

$$[L_\Omega f](x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(x(t)) \mathbf{1}_{\{\forall s \in [0, t] \ x(s) \in G\}}] - f(x)}{t},$$

où \mathbb{E}_x désigne l'espérance du processus $(x(s))_s$ partant du point x .

Remarque : Dans [8], il est prouvé que la constante $k(\nu, L)$ est strictement positive.

Evidemment la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d satisfait ces hypothèses. Dans ce cas $\pi(j) = \frac{1}{2d} \mathbf{1}_{\{(0, j) \in E^d\}}$ et en développant $\hat{\pi}$ au voisinage de 0, on a :

$$\hat{\pi}(t) = 1 - \sum_{i=1 \dots d} \frac{(e_i |t|)^2}{4d} + o(|t|^2),$$

où les e_i désignent les vecteurs de base. On peut donc énoncer :

Corollaire 1.4.2. *Pour la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d , pour tout $\nu > 0$ on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{d+2}}} \ln \mathbb{E}(e^{-\nu N_n}) = -k(\nu, d) < 0.$$

1.4.2 Deux mots de grandes déviations.

L'égalité de 1.2, est prouvée dans [10] par double inégalité. La borne supérieure repose sur un résultat de grandes déviations.

Soit X un espace métrique, complet et séparable. Soit μ_n une famille de probabilité sur la tribu borélienne de X et soit $(v_n)_n$ une suite positive tendant vers l'infini.

Définition 1.4.3. On dit que μ_n satisfait un principe de grandes déviations de vitesse v_n et de fonction de taux $I : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$, si :

- (1) I est semi continue inférieurement.
- (2) Pour tout $l < \infty$, l'ensemble $\{x; I(x) \leq l\}$ est un compact de X .
- (3) Pour tout fermé C de X ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \ln \mu_n(C) \leq - \inf_{x \in C} I(x)$$

- (4) Pour tout ouvert G de X ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \ln \mu_n(G) \geq - \inf_{x \in G} I(x)$$

Si l'on a juste les propriétés (1),(2) et (3) resp[(1),(2) et (4)], on dit qu'on a un principe de grandes déviations supérieur resp[inférieur].

Théorème 1.4.4. Si μ_n satisfait un principe de grandes déviations, de vitesse v_n et de fonction de taux I , alors pour toute fonction continue, bornée $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$(1.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} \ln \int_X e^{v_n F(x)} \mu_n(dx) = \sup_{x \in X} [F(x) - I(x)]$$

De plus, si on a juste un principe de grandes déviations supérieur resp[inférieur], l'égalité 1.3 devient \leq resp[\geq].

Théorème 1.4.5. Si μ_n satisfait un principe de grandes déviations supérieur, de vitesse v_n et de fonction de taux I , alors pour toute fonction semi continue inférieurement, bornée $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$(1.4) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} \ln \int_X e^{v_n F(x)} \mu_n(dx) \leq \sup_{x \in X} [F(x) - I(x)]$$

Expliquons brièvement comment ces propriétés sont utiles dans la preuve de Donsker et Varadhan.

Soit $(a_n)_n$ une suite d'entiers divergentes, et soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ et $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ la surjection canonique. Posons :

$$\mathcal{L}_d^{(n)} = \{x \in \mathbb{T}^d; x = p(j/a_n) \text{ pour } j \in \mathbb{Z}^d \},$$

et pour $x \in \mathcal{L}_d^{(n)}$ posons :

$$\tilde{\pi}(x) = \sum_{j; x=p(j/a_n)} \pi(j).$$

On peut ainsi définir sur \mathbb{T}^d une marche aléatoire $(\tilde{X}_n)_n$ partant de $p(0)$ et d'incrémentes indépendants et identiquement distribués selon $\tilde{\pi}$. Soit alors :

$$\tilde{N}_n = \#\{\tilde{X}_k; 0 \leq k \leq n\},$$

et

$$\bar{N}_n = \#\{p(X_k/a_n); 0 \leq k \leq n\}.$$

Remarquons que $\bar{N}_n \leq N_n$ et que \bar{N}_n et \tilde{N}_n ont même loi.

Considérons maintenant les mesures de probabilité (à ω fixé) sur les boréliens de \mathbb{T}^d . Pour A borélien de \mathbb{T}^d , soit :

$$\tilde{L}_l(\omega, A) = \frac{1}{l} \sum_{k=1 \dots l} 1_{\{\tilde{X}_k \in A\}},$$

et

$$\tilde{L}_l^{(n)}(\omega, x) = \int_{\mathbb{T}^d} \chi_n(x-y) \tilde{L}_l(\omega, dy),$$

où

$$\chi_n(x) = \begin{cases} a_n^d, & \text{si pour tout } i \in [1, d] \ |x_i| \leq 1/2a_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons $|x; \tilde{L}_l^{(n)}(\omega, x) > 0|$ la mesure de Lebesgue de $\{x; \tilde{L}_l^{(n)}(\omega, x)\}$. La mesure $\tilde{L}_l^{(n)}(\omega, \cdot)$ charge les points visités par la marche \tilde{X} jusqu'au temps l , ainsi qu'un petit voisinage de ces points, plus précisément un cube de côté a_n centré en ces points. Ainsi :

$$|x; \tilde{L}_l^{(n)}(\omega, x) > 0| = \frac{\tilde{N}_n}{a_n^d}$$

Soit $L_1(\mathbb{T}^d)$ l'espace des densités de probabilité sur \mathbb{T}^d muni de la topologie de la convergence L_1 , et soit Q_n la mesure de probabilité sur $L_1(\mathbb{T}^d)$ définie par, pour tout borélien B de $L_1(\mathbb{T}^d)$:

$$Q_n(B) = \tilde{\mathbb{P}}(\omega; \tilde{L}_l^{(n)}(\omega, \cdot) \in B),$$

où $\tilde{\mathbb{P}}$ est la loi de la marche \tilde{X} issue de $p(0)$.

On a alors enfin,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\nu N_n}) &\leq \mathbb{E}(e^{-\nu \bar{N}_n}) \\ &= \mathbb{E}(e^{-\nu \tilde{N}_n}) \\ &= \mathbb{E}(e^{-\nu a_n^d |x; \tilde{L}_l^{(n)}(\omega, x) > 0|}) \\ &= \mathbb{E}^{Q_n}(e^{-\nu a_n^d |x; f(x) > 0|}) \end{aligned}$$

Cette dernière expression s'interprète comme l'intégrale d'une fonctionnelle :

$$\int_X e^{\nu_n F(f)} \mu_n(df),$$

avec $X = L_1(\mathbb{T}^d)$, $\mu_n = Q_n$, $\nu_n = a_n^d$ et $F : \mathcal{L}_1(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$F(f) = \nu |x; f(x) > 0|,$$

qui est bien semi continue inférieurement . On cherche à prouver que la suite Q_n satisfait un principe de grandes déviations, ainsi par le théorème 1.4.5, si l'on trouve une fonction de taux I vérifiant (1) et (2) de la définition 1.4.3 et une suite a_n telle que pour tout fermé C de $L_1(\mathbb{T}^d)$ on ait

$$(1.5) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^d} \ln Q_n(C) \leq - \inf_{x \in C} I(x),$$

on aura

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n^d} \ln \int_{L_1(\mathbb{T}^d)} e^{\nu a_n^d F(f)} Q_n(df) \leq \sup_{f \in L_1(\mathbb{T}^d)} [F(f) - I(f)],$$

puis

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n^d} \ln \mathbb{E}(e^{-\nu N_n}) \leq \sup_{f \in L_1(\mathbb{T}^d)} [F(f) - I(f)].$$

Il restera donc à prouver l'inégalité 1.5 et à vérifier que la constante $K = \sup_{f \in L_1(\mathbb{T}^d)} [F(f) - I(f)]$ est strictement positive.

1.4.3 Point de départ de la thèse.

Une question naturelle est donc de savoir si lorsqu'on perturbe \mathbb{Z}^d , avec par exemple une percolation sur critique, le comportement de la transformée de Laplace du nombre de points visités par une marche simple reste de l'ordre de $\exp(-cn^{\frac{d}{d+2}})$?

En examinant la preuve de Donsker et Varadhan , on constate que plusieurs problèmes (pour la borne supérieure) apparaissent si on ne se place pas dans \mathbb{Z}^d . Notons X_n la marche aléatoire simple sur un amas de percolation infini.

La première difficulté est par exemple que la marche obtenue par projection de X_n sur le tore ne possède plus la propriété de Markov, du fait justement de la perte de la symétrie du graphe.

Par ailleurs, le fait que les accroissements soient d'espérances nulles dans \mathbb{Z}^d (hypothèses sur π) permet d'annuler des termes d'ordre 1 dans certains développements, en particulier pour prouver 1.5, ce qui n'est plus le cas dans un amas.

De manière générale, le nombre de points visités par une marche sur un graphe est une notion qui dépend des divers chemins et lacets... Evidemment, la symétrie apporte beaucoup d'informations sur ces chemins, si bien que la méthode de Donsker et Varadhan permet de conclure, néanmoins un graphe non symétrique mais avec des nombres de chemins comparables, pourrait avoir des bornes similaires pour la transformée de Laplace du nombre de points visités.

Il faut donc adopter une autre stratégie non basée sur la symétrie pour étudier cette transformée de Laplace dans un graphe autre que \mathbb{Z}^d . L'idée maîtresse sur laquelle est basée cette thèse, est de remarquer que des fonctionnelles, telle que la transformée de Laplace du nombre de points visités, peuvent s'interpréter comme une probabilité de retour sur un graphe plus "gros", qui sera un certain produit en couronne. Or

on sait, par les méthodes développées dans la section 1.3, que estimer (majorer) une probabilité de retour, est lié au profil isopérimétrique. C'est donc par ce biais qu'on contournera les difficultés que posent la preuve de Donsker et Varadhan dans un graphe privé de symétrie et que l'on obtiendra une borne supérieure. Pour les bornes inférieures, on utilisera des méthodes générales.

1.5 Résultats obtenus.

Notre méthode est basée sur une étude fine du profil isopérimétrique d'un amas. On se place dans le cas sur critique, \mathcal{C} désigne toujours la composante connexe infini contenant l'origine. On rappelle que \mathcal{C}_n est la composante connexe de $\mathcal{C} \cap [-n; n]^d$ contenant l'origine. $(X_n)_n$ est la marche aléatoire simple sur \mathcal{C} . \mathbb{P}_0^ω et \mathbb{E}_0^ω désignent respectivement la loi de $(X_n)_n$ issue de 0 et l'espérance. On pose également :

$$N_n = \#\{X_k; 0 \leq k \leq n\},$$

et

$$L_{z;n} = \#\{k; X_k = z \text{ et } 0 \leq k \leq n\}.$$

On prouve d'abord :

Proposition 1.5.1. *Soit $\gamma > 0$ et $p > p_c$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand, on a :*

$$\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \quad \text{pour tout ensemble connexe } A \text{ dans } \mathcal{C}_n,$$

$$\text{où } f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < cn^\gamma \\ x^{1-\frac{1}{d}} & \text{si } x \geq cn^\gamma, \end{cases}$$

$$\text{et } \partial_{\mathcal{C}^g} A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^d; \omega(x, y) = 1 \text{ et } x \in A; y \in \mathcal{C} - A\}.$$

Cette propriété nous permettra de prouver la borne supérieur dans le théorème suivant :

Théorème 1.5.2. *Soit $\alpha \in]0, 1[$, Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand :*

$$\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \approx e^{-n^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Les constantes intervenant dans la relation \approx ne dépendent pas de l'amas ω .

La preuve de la borne inférieure passe par la propriété suivante :

Proposition 1.5.3. *Il existe une constante c telle que, Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand (et $n \geq r$) nous avons :*

$$\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r) \geq e^{-c(r+n/r^2)},$$

où $D(0, x)$ désigne le nombre minimal d'arêtes dans ω pour atteindre 0 depuis x . Avec les notations de 1.2.1.2, $D(0, x)$ représente la distance chimique entre 0 et x .

Ce genre d'estimées est connu pour la marche dans \mathbb{Z}^d mais utilise un principe de réflexion, mis encore à défaut dans un amas.

Enfin, en utilisant la même démarche, on obtient des résultats pour d'autres fonctionnelles que le nombre de points visités.

Théorème 1.5.4. *Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand, on a :*

$$(1.6) \quad \forall \alpha \in [0, 1[\quad \mathbb{E}_0^\omega \left(e^{-\lambda \sum_{z; L_{z;n} > 0} L_{z;n}^\alpha} 1_{\{X_n=0\}} \right) \approx e^{-n^\eta},$$

$$(1.7) \quad \forall \alpha \geq 1/2 \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{z; L_{z;n} > 0} L_{z;n}^{-\alpha} 1_{\{X_n=0\}} \right) \approx e^{-n^{\frac{d}{d+2} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}},$$

$$\text{avec } \eta = \frac{d+\alpha(2-d)}{2+d(1-\alpha)}.$$

Les constantes qui apparaissent dans la relation \approx ne dépendent pas du tirage de la percolation ω .

Bibliographie

- [1] P. Antal and A. Pisztora. On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 24(2) :1036–1048, 1996.
- [2] M.T. Barlow. Random walks on supercritical percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(4) :3024–3084, 2004.
- [3] I. Benjamini, R. Pemantle, and Y. Peres. Unpredictable paths and percolation. *Ann. Probab.*, 26(3) :1198–1211, 1998.
- [4] N. Berger and M. Biskup. Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. *Preprint*, 2005.
- [5] T. Coulhon. Ultracontractivity and Nash type inequalities. *J. Funct. Anal.*, 141(2) :510–539, 1996.
- [6] J. Dodziuk. Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284(2) :787–794, 1984.
- [7] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. Asymptotics for the Wiener sausage. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(4) :525–565, 1975.
- [8] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. Erratum : “Asymptotics for the Wiener sausage” (Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), no. 4, 525–565). *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5) :677, 1975.
- [9] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. On the number of distinct sites visited by a random walk. In *Stochastic analysis (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1978)*, pages 57–62. Academic Press, New York, 1978.
- [10] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. On the number of distinct sites visited by a random walk. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(6) :721–747, 1979.

- [11] G.R. Grimmett, H. Kesten, and Y. Zhang. Random walk on the infinite cluster of the percolation model. *Probab. Theory Related Fields*, 96(1) :33–44, 1993.
- [12] D. Heicklen and C. Hoffman. Return probabilities of a simple random walk on percolation clusters. *Electron. J. Probab.*, 10 :no. 8, 250–302 (electronic), 2005.
- [13] C. Pittet L. Saloff-coste. A survey on the relationships between volume growth, isoperimetry , and the behaviour of simple random walk on cayley graphs, with examples. *Preprint*, 2001.
- [14] A. De Masi, P.A. Ferrari, S. Goldstein, and W.D. Wick. An invariance principle for reversible Markov processes. Applications to random motions in random environments. *J. Statist. Phys.*, 55(3-4) :787–855, 1989.
- [15] P. Mathieu and A. Piatnitski. Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. *Preprint*, 2005.
- [16] P. Mathieu and E. Remy. Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(1A) :100–128, 2004.
- [17] B. Morris and Y. Peres. Evolving sets and mixing. In *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 279–286 (electronic), New York, 2003. ACM.
- [18] V. Sidoravicius and A.S. Sznitman. Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances. *Probab. Theory Related Fields*, 129(2) :219–244, 2004.

Chapitre 2

Nombre de points visités par une marche aléatoire simple sur un amas de percolation.

Ce chapitre reprend un article à paraître dans les bulletins de la SMF.

Résumé

Dans cet article, on s'intéresse à une marche aléatoire simple sur un amas infini issu d'un processus de percolation surcritique sur les arêtes de \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) de loi Q . On montre que la transformée de Laplace du nombre de points visités au temps n , noté N_n , a un comportement similaire au cas où la marche évolue dans \mathbb{Z}^d . Plus précisément, on établit que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe des constantes $C_i, C_s > 0$ telles que pour presque toute réalisation de la percolation telle que l'origine appartienne à l'amas infini et pour n assez grand,

$$e^{-C_i n^{\frac{d}{d+2}}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-C_s n^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Le point principal du travail réside dans l'obtention de la borne supérieure. Notre approche consiste dans un premier temps, à trouver une inégalité isopérimétrique sur l'amas infini, et dans un deuxième temps à la remonter sur un produit en couronne, ce qui nous permet alors d'obtenir une majoration de la probabilité de retour d'une certaine marche sur ce produit en couronne. L'introduction d'un produit en couronne est justement motivée par le fait que la probabilité de retour sur un tel graphe s'interprète comme l'espérance de la transformée de Laplace du nombre de points visités.

2.1 Introduction et résultats

Soit $d \geq 2$. On appelle percolation de Bernoulli de paramètre p le sous graphe aléatoire de la grille de dimension d obtenu en supprimant (resp. gardant) une arête

avec probabilité p (resp. $1 - p$) de façon indépendante pour les différentes arêtes. On notera ω une réalisation typique de la percolation. On appelle alors amas infini une composante connexe infinie du graphe ω . On montre qu'une telle composante connexe infinie existe et est presque sûrement unique si le paramètre p est choisi au dessus d'une certaine valeur critique p_c . Une construction plus formelle de la percolation est donnée plus loin dans cette introduction.

La percolation est un modèle important de la mécanique statistique des milieux désordonnés, un 'concept unificateur' pour reprendre l'expression de P.G. De Gennes dans [8], qui intervient aussi dans de nombreuses applications, par exemple dans les problèmes de diffusion dans un environnement non homogène que l'on rencontre dans la recherche pétrolière. Depuis son introduction en 1956 par J.M. Hammersley, la percolation a également donné lieu à une jolie théorie mathématique qui recèle encore bien des défis. Nous renvoyons aux livres de Kesten et Grimmett (voir [10] et [9]) pour une introduction aux outils mathématiques de la percolation. On y trouvera en particulier de nombreux résultats sur la géométrie des amas infinis.

Depuis quelques années, différents auteurs se sont attachés à développer la théorie du potentiel des amas infinis ou, en d'autres termes, à décrire le comportement d'une marche aléatoire évoluant sur un amas infini (La 'fourmi dans un labyrinthe' pour reprendre une autre expression de P.G. De Gennes). Les premières bornes sur le noyau de la chaleur sur un amas infini ont été démontrées par P. Mathieu et E. Rémy (voir [14]) à l'aide d'estimées du profil isopérimétrique d'un amas infini. Puis, M. Barlow (voir [2]) a obtenu des estimées de type gaussien. Ces premiers résultats ont ensuite permis de prouver la convergence de la marche aléatoire vers un mouvement brownien sous la forme d'un principe d'invariance valable pour presque toute réalisation de ω , voir [16] [3] et [13]. L'objet du travail présenté ici est de compléter ce panorama en donnant des estimées précises sur le nombre de points visités par la marche aléatoire simple symétrique évoluant sur un amas infini.

Le processus de percolation est défini de la manière suivante. Pour $d \geq 2$, notons E^d l'ensemble des arêtes de \mathbb{Z}^d défini par,

$$E^d = \{(x, y); \sum_{i=1..d} |x_i - y_i| = 1\},$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$. Pour $p \in]0, 1[$, soit ω le sous graphe aléatoire de $\mathcal{L}^d := (\mathbb{Z}^d, E^d)$ obtenu en gardant (resp. effaçant) une arête avec probabilité p (resp. $1 - p$) de manière indépendante pour les différentes arêtes de E^d . On identifie ce sous graphe de \mathbb{Z}^d avec l'application $\omega : E^d \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\omega(x, y) = 1$ si l'arête (x, y) est présente dans ω (on dira qu'une telle arête est 'ouverte') et $\omega(x, y) = 0$ sinon. On munit $\{0, 1\}^{E^d}$ de la mesure de probabilité Q sous laquelle les variables aléatoires $(\omega(e), e \in E^d)$ sont indépendantes et suivent des lois de Bernoulli(p). Soit \mathcal{C} la composante connexe de ω contenant l'origine, $|\mathcal{C}|$ son cardinal et p_c la probabilité critique,

$$p_c = \sup\{p; Q(|\mathcal{C}| = +\infty) = 0\}.$$

On sait que $0 < p_c < 1$ (voir [9]), et désormais, on suppose que $p > p_c$. On se place sur l'événement $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, \mathcal{C} est alors l'unique amas infini. On considère alors sur

\mathcal{C} la marche aléatoire suivante : $X_0 = x$ et X_{n+1} est choisi uniformément parmi les voisins de X_n dans \mathcal{C} .

$$\text{ie : } \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \frac{\omega(x, y)}{\sum_{z; (x, z) \in E^d} \omega(x, z)}.$$

Le but de cet article est d'estimer le nombre de points visités par la marche X . Plus précisément, posons $N_n = |\{X_0, X_1, \dots, X_n\}|$, \mathbb{P}_x^ω la loi de la marche issue de x , et \mathbb{E}_x^ω son espérance. Le principal résultat est :

Théorème 2.1.1. *Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe deux constantes $C_i, C_s > 0$ telles que Q p.s sur l'événement $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand :*

$$e^{-C_i n^{\frac{d}{d+2}}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-C_s n^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Remarque 2.1.2. *Ce résultat est également valide pour la marche aléatoire à temps continu qui attend un temps exponentiel entre chaque saut.*

Dans le cas où $\omega = \mathcal{L}^d$ cette expression a déjà été étudiée par Donsker M D et Varadhan S R S (voir [5]). Ils prouvent, en particulier pour la marche aléatoire simple sur la grille \mathbb{Z}^d , le théorème suivant :

Théorème 2.1.3. *(voir [5]) Il existe une constante $c(d, \alpha) > 0$ telle que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{d+2}}} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d}(\alpha^{N_n}) = -c(d, \alpha)$$

Ce résultat est prouvé par double inégalité. La stratégie adoptée dans la preuve de Donsker M D et Varadhan S R S, pour obtenir une majoration de l'expression $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{d+2}}} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d}(\alpha^{N_n})$, ne semble pas se généraliser dans un amas infini de percolation pour plusieurs raisons. Par exemple, la symétrie de \mathbb{Z}^d est un point crucial dans leur preuve, qui n'est évidemment pas satisfait dans un amas. En particulier, la marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d satisfait une propriété de martingale qui n'est plus vraie pour la marche aléatoire sur l'amas de percolation.

La méthode développée ici repose sur le fait suivant : $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$ peut s'écrire comme une probabilité de retour à l'origine d'une marche Z construite à partir de X dans un graphe plus "gros" que \mathcal{C} , qui sera un produit en couronne. Trouver une borne supérieure de $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$ revient donc à trouver une borne supérieure de la probabilité de retour de la marche Z . On sait que les inégalités isopérimétriques sont un outil important pour prouver des inégalités fonctionnelles comme celles de Poincaré ou de Nash, qui elles mêmes, permettent d'obtenir des bornes supérieures du noyaux d'une marche simple (voir [4]). On étudie donc le profil isopérimétrique sur ce produit en couronne. Grâce aux récents travaux d'A.Erschler, on sait contrôler l'isopérimétrie du produit en couronne de deux graphes à partir de l'isopérimétrie de chacun d'entre eux. Ici, un des deux graphes étant le graphe ayant comme ensemble de points \mathcal{C} , on est finalement ramené à étudier de manière assez fine la géométrie d'un amas et ses

propriétés isopérimétriques. Notons $\mathcal{B}_n = [-n; n]^d$ et \mathcal{C}_n la composante connexe de $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_n$ contenant l'origine. Avec des techniques similaires à celles de [14], on prouve la propriété suivante.

Proposition 2.1.4. *Soient $\gamma > 0$ et $p > p_c$. Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$: Q p.s sur $\#\mathcal{C} = +\infty$, pour n assez grand, on ait,*

$$(2.1) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \quad \text{pour tout sous-ensemble } A \text{ connexe de } \mathcal{C}_n,$$

$$\text{où } f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < cn^\gamma \\ x^{1-\frac{1}{d}} & \text{si } x \geq cn^\gamma, \end{cases}$$

et $\partial_{\mathcal{C}_g} A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^d; \omega(x, y) = 1 \text{ et } x \in A; y \notin A\}$.

Le rang à partir duquel l'inégalité (2.1) est satisfaite dépend de l'amas ω et de c .

Remarque 2.1.5. *Les mêmes techniques s'appliquent pour des marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d aux plus proches voisins, symétriques et dont les taux de transitions sont bornés supérieurement et inférieurement (condition d'ellipticité). Cette dernière condition n'est pas satisfaite pour la percolation.*

Après avoir fixé quelques notations, ce papier se décompose en 4 parties. Dans la partie 2, nous définissons un produit en couronne, nous expliquons l'intérêt d'un tel outil dans notre cas et nous traitons le problème de l'isopérimétrie sur un produit en couronne. Dans la partie 3, nous étudions le profil isopérimétrique d'un amas et nous prouvons en particulier la propositions 2.1.4. A l'aide des parties 2 et 3, nous établissons dans la partie 4, une borne supérieure pour la probabilité de retour à l'origine dans le produit en couronne, et nous en déduisons une borne supérieure pour $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$. Enfin, dans la partie 5 nous prouvons la borne inférieure du théorème 2.1.1.

2.1.1 Notations

- Nous utiliserons le symbole $:=$ pour définir une nouvelle quantité et on notera $|A|$ ou bien $\#A$ le cardinal d'un ensemble A .
- La somme disjointe de deux ensembles A et B quelconques sera notée $A \dot{\cup} B$. Cette notation représente un ensemble en bijection avec $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- On notera $D(0, x)$ la longueur minimale d'un chemin constitué d'arêtes ouvertes reliant x à 0, (appelé aussi distance chimique) et on pose $B_r(\mathcal{C}) = \{x \in \mathbb{Z}^d; D(0, x) \leq r\}$. On utilisera également la norme N_1 sur \mathbb{Z}^d définie par $N_1(x) = \sum_{i=1 \dots d} |x_i|$, si $x = (x_1, \dots, x_d)$.
- C et c représenteront des constantes dont la valeur peut évoluer de ligne en ligne mais la dépendance en n ou ω sera spécifiée par l'ordre des quantificateurs. La constante β dépendra uniquement de p .

- Un graphe G est un couple $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ désigne l'ensemble des points de G (vertices of G) et $E(G)$ désigne l'ensemble des arêtes de G . Dans ce papier, les graphes seront non orientés (sauf mention explicite comme par exemple dans le lemme 2.2.7), et où les arêtes de type (x, x) sont exclues. Un sous graphe de G est un graphe G' tel que $V(G') \subset V(G)$ et $E(G') \subset E(G)$.
- On utilisera en particulier le graphe \mathcal{C}^g défini par $V(\mathcal{C}^g) = \mathcal{C}$ et $E(\mathcal{C}^g) = \{(x, y) \in E^d; x, y \in \mathcal{C} \text{ et } \omega(x, y) = 1\}$ et le graphe \mathcal{C}_n^g défini par $V(\mathcal{C}_n^g) = \mathcal{C}_n$ (on rappelle que \mathcal{C}_n désigne la composante connexe de $\mathcal{C} \cap [-n, n]^d$ contenant l'origine) et $E(\mathcal{C}_n^g) = \{(x, y) \in E^d; x, y \in \mathcal{C}_n \text{ et } \omega(x, y) = 1\}$. De façon générale, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les arêtes, V^g désignera le graphe ayant cet ensemble d'arêtes et dont l'ensemble des points est V . On notera également \mathcal{B}_n^g le graphe ayant $\mathcal{B}_n = [-n, n]^d$ comme ensemble de points et où $E(\mathcal{B}_n^g) = \{(x, y) \in E^d; x \text{ et } y \in \mathcal{B}_n\}$.
- Soit G un graphe, pour $A \subset V(G)$, on notera

$$\partial_G A = \{(x, y) \in E(G); x \in A \text{ et } y \in V(G) - A\}.$$

Cette notation est évidemment cohérente avec la définition du bord $\partial_{\mathcal{C}^g}$ dans la proposition 2.1.4. En notant $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, le bord "classique" dans \mathbb{Z}^d d'un ensemble A est donc noté $\partial_{\mathcal{L}^d} A$.

- On travaillera plutôt avec les fonctions de Følner lorsqu'on parlera d'isopérimétrie. Soit G un graphe, on désigne par Fol_G la fonction de Følner de G , définie par :

$$Fol_G(k) = \min\{|U|; U \subset V(G) \text{ et } \frac{|\partial_G U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}\}.$$

- Si G' est un sous graphe de G , on notera :

$$Fol_{G'}^G(k) = \min\{|U|; U \subset V(G') \text{ et } \frac{|\partial_G U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}\}.$$

$Fol_{G'}^G$ est toujours une fonction de Følner de G' mais où le bord est compté dans G .

2.2 Produit en couronne.

Dans cette section, après avoir donné la définition d'un produit en couronne, on motive l'introduction de tels graphes par la propriété 2.2.3, en considérant une marche aléatoire construite à partir des noyaux de transition de la marche X , sur un certain produit en couronne. Enfin, on estime la fonction de Følner du produit en couronne en question à l'aide des fonctions de Følner des graphes considérés.

2.2.1 Définition

Soient A et B deux graphes, et b_0 un point de $V(B)$. Pour une fonction $f : V(A) \rightarrow V(B)$, on appelle support de f , l'ensemble $\{a \in V(A); f(a) \neq b_0\}$.

Définition 2.2.1. *Le produit en couronne $A \wr B$ de deux graphes A et B , est le graphe suivant :*

- $V(A \wr B)$ est l'ensemble des couples (a, f) où $a \in V(A)$ et $f : V(A) \rightarrow V(B)$ est à support fini,

- les arêtes sont définies de la manière suivante : $((a_1, f_1), (a_2, f_2)) \in E(A \wr B)$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \text{ et } \forall x \neq a_1 \ f_1(x) = f_2(x) \text{ et } (f_1(a_1), f_2(a_1)) \in E(B), \\ \text{ou} \\ f_1 = f_2 \text{ et } (a_1, a_2) \in E(A). \end{cases}$$

Si $(a, f) \in V(A \wr B)$, l'élément f est appelée la configuration. On appellera le graphe A la "base" du produit en couronne $A \wr B$.

Remarque 2.2.2. *Si A et B sont des graphes de Cayley de groupes, le produit en couronne de A et B est le graphe de Cayley du produit en couronne de ces groupes, avec l'ensemble "standard" de générateurs construits à partir des générateurs de A et B (voir [7]). [Le produit en couronne de deux groupes A et B est le produit semi direct de A et $\sum_A B$ où A agit sur $\sum_A B$ par ${}^a f(x) = f(xa^{-1})$.]*

2.2.2 Marches aléatoires

Dans notre cas, on prend $A = \mathcal{C}^g$ et pour B le graphe de Cayley du groupe $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$ avec $\bar{1}$ comme générateur. On notera 'encore' $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ce graphe. On choisit $b_0 = \bar{0}$. Soit o le point de $A \wr B$ tel que $o = (0, f_0)$ où 0 est l'origine de \mathbb{Z}^d et f_0 est la configuration qui vaut $\bar{0}$ en tous points. Notons $p(,)$ les noyaux de transition de la marche X définie dans l'introduction, ie : pour tout $a, b \in \mathcal{C}$ $p(a, b) = \mathbb{P}_x^\omega(X_1 = y) = \frac{\omega(a,b)}{\nu(a)}$ où $\nu(a)$ est le nombre de voisins dans \mathcal{C} de a . Pour $\alpha \in]0; 1[$, on considère alors la marche Z sur $\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ définie par $Z_0 = o$ et dont les noyaux de probabilité sont :

$$\begin{aligned} \tilde{p}\left((a, f), (b, f_{a, \bar{0}})_{b, \bar{0}}\right) &= \alpha^2 p(a, b), \\ \tilde{p}\left((a, f), (b, f_{a, \bar{1}})_{b, \bar{0}}\right) &= \alpha(1 - \alpha)p(a, b), \\ \tilde{p}\left((a, f), (b, f_{a, \bar{0}})_{b, \bar{1}}\right) &= \alpha(1 - \alpha)p(a, b), \\ \tilde{p}\left((a, f), (b, f_{a, \bar{1}})_{b, \bar{1}}\right) &= (1 - \alpha)^2 p(a, b), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f_{a,x} : u &\mapsto f(u) \text{ pour } u \neq a \text{ ou } b, \\ & a \mapsto x, \\ & b \mapsto y. \end{aligned}$$

L'interprétation de cette marche est la suivante : imaginons qu'il y ait une lampe en chaque point de \mathcal{C} , qui soit allumée [resp. éteinte] lorsque la configuration en ce point vaut $\bar{1}$ [resp. $\bar{0}$]. Supposons maintenant qu'à un certain instant le marcheur se trouve en un certain point de \mathcal{C} . En une unité de temps, il allume [resp. éteint] la lampe où il se trouve avec probabilité $1 - \alpha$ [resp. α], il saute ensuite dans \mathcal{C} uniformément sur ses voisins et il allume [resp. éteint] à nouveau la lampe au point où il se trouve avec probabilité $1 - \alpha$ [resp. α]. Ces trois étapes sont indépendantes. Remarquons que si on "oublie" les configurations et que l'on regarde uniquement le premier argument de la marche Z , on retrouve la marche X , ainsi on peut écrire $Z_n = (X_n, f_n)$. Par ailleurs, si nous fixons une trajectoire dans \mathcal{C} , les états des différentes lampes sont indépendants. Enfin, la marche Z admet des mesures réversibles, elles sont proportionnelles à :

$$m(a, f) = \nu(a) \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{\#\{i; f(i)=\bar{1}\}}.$$

Nous verrons plus tard qu'il suffit d'étudier le cas $\alpha = 1/2$ pour obtenir la borne supérieure dans le théorème 2.1.1 (la mesure m se réduit alors à $m(a, f) = \nu(a)$) mais pour la borne inférieure du théorème et pour d'autres valeurs de α , la mesure m nous sera utile.

Le lien, entre la marche Z sur ce produit en couronne et notre problème initial réside dans la propriété suivante. On note $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega$ la loi de la marche Z issue de o .

Proposition 2.2.3. *On a, $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) = \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}})$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega\left((X_{2n}, f_{2n}) = (0, f_0)\right) \\ &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_{2n}) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_{2n} = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{2n} = k_{2n} \\ &\hspace{15em} \text{et } f_{2n} = f_0) \\ &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_{2n}) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_{2n} = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{2n} = k_{2n}) \\ &\hspace{10em} \times \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(f_{2n} = f_0 | X_0 = k_0, \dots, X_{2n} = k_{2n}) \\ &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_{2n}) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_{2n} = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{2n} = k_{2n}) \\ &\hspace{15em} \times \alpha^{\#\{k_0, \dots, k_{2n}\}} \\ &= \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}). \end{aligned}$$

□

2.2.3 Remontée de l'isopérimétrie sur le produit en couronne.

On explique dans cette sous section, comment une inégalité isopérimétrique sur le graphe \mathcal{C}_n^g se transmet au produit en couronne $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Ce type de résultat est dû à

A. Erschler. Nous présentons ici, une preuve légèrement plus simple et plus détaillée. Le résultat principal est le suivant :

Proposition 2.2.4. *Il existe des constantes universelles $C_1, C_2 > 0$ telles que,*

$$Fol_{\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}^{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(k) \geq e^{C_1 Fol_{\mathcal{C}_n^g}^{\mathcal{C}^g}(C_2 k)}.$$

On peut prendre (cf preuve) $C_1 = \log(2)/9$ et $C_2 = 1/1000$.

La preuve de cette propriété est assez technique et découle de plusieurs lemmes. Pour alléger les notations, on notera, dans cette section, $\partial_l = \partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$. Pour comprendre la preuve, examinons d'où proviennent les points du bord d'un ensemble $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$. Il y en a de deux types :

- les points du bord provenant du bord de la base \mathcal{C}_n^g , ie : les points de la forme $((a, f); (b, f))$ avec $(a, b) \in E(\mathcal{C}^g)$,
- les points du bord provenant du bord en 'configuration', ie : les points de la forme $((a, f); (a, g))$ avec $f = g$ sauf en a .

Avant d'énoncer les lemmes préliminaires à la preuve de la propriété 2.2.4, introduisons quelques notions. Soit $U \subset V(\mathcal{C}_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$.

- A chaque U , on associe un graphe K_U de la manière suivante :
 - les points sont les configurations f de l'ensemble

$$\{f; \exists a \in \mathcal{C}_n \ (a, f) \in U\},$$

- deux points distincts f et g sont reliés par une arêtes si et seulement si :

$$\exists a \in \mathcal{C}_n \text{ tel que } \begin{cases} (a, g) \text{ et } (a, f) \in U, \\ \text{et} \\ \forall x \neq a \ f(x) = g(x). \end{cases}$$

ie : $f = g$ sauf en un point de $p(V)$, où p est la projection $V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \rightarrow V(\mathcal{C}_n^g) = \mathcal{C}_n$.

- Soit $f \in K_U$, on dit que f est b -satisfaisable, si il y a au moins b arêtes attachées à f dans K_U ,

$$ie : \quad \#\{x \in p(V); \dim_x f = 1\} \geq b,$$

où

$$\dim_x f = \#\{g; (x, g) \in V \text{ et } \forall y \neq x \ f(y) = g(y)\} \in \{0, 1\}.$$

Nous noterons $S_V(b)$ l'ensemble des configurations b -satisfaisables, pour alléger les notations, la plupart du temps nous oublierons la dépendance en U , et on notera donc $S(b)$ cet ensemble.

Remarque 2.2.5. *Pour tout U , on a*

$$|U| \geq 2|E(K_U)|,$$

et si pour tout $(x, f) \in U$, on a $\dim_x f = 1$ (si U n'a pas de points "isolés") alors,

$$|U| = 2\#E(K_U).$$

- Si f n'est pas b -satisfaisable, on dira que f est b -non satisfaisable et on notera $NS(b)$ l'ensemble des configurations b -non satisfaisables.
- Soit K un graphe, on étend la notion de satisfaisabilité à K . Un point $x \in V(K)$ sera dit b -satisfaisable [resp. b -non satisfaisable] si il y a au moins [resp. strictement moins de] b arêtes attachées à x .
- une arête sera dite b -satisfaisable si elle relie deux configurations b -satisfaisables sinon on dira qu'elle est b -non satisfaisable. On notera $S^e(b)$ ou $S_{\mathcal{U}}^e(b)$ [resp. $NS^e(b)$] l'ensemble des arêtes b -satisfaisables [resp. b -non satisfaisables].
- Un point $u = (x, f) \in U$ sera dit b -satisfaisable [resp. b -non satisfaisable] si $f \in S(b)$ [resp. $NS(b)$]. On utilisera la notation $S^p(b)$ et $NS^p(b)$ pour l'ensemble des points de U qui sont (ou ne sont pas) b -satisfaisables.
- Un point $u = (x, f) \in U$ sera dit *bon* si $\dim_x f = 1$ sinon on dira qu'il est *mauvais*.

Maintenant la preuve de la proposition 2.2.4 se décompose en trois étapes, on suppose que $\frac{|\partial_i U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}$, on prouve d'abord qu'il y a alors peu de points b -non satisfaisables (pour une certaine valeur de b), puis on extrait un sous graphe tel que tous les points soient $\frac{b}{3}$ -satisfaisables, et enfin on en déduit une minoration de $|U|$.

Dans la proposition suivante, on note ϕ la fonction $Fol_{\mathcal{C}_n^g}^g$.

Lemme 2.2.6. Soit $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, tel que $\frac{|\partial_i U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$ alors

- (i) $\frac{|\{u \in U; u \text{ mauvais}\}|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$,
- (ii) $\frac{|\{u \in U; u \in NS^p(\phi(k)/3)\}|}{|U|} \leq \frac{1}{500}$.

Démonstration.

Pour (i) on remarque qu'un point mauvais de U nous donne un point du bord en 'configuration' de U , ainsi :

$$|\partial_i U| \geq \#\{u \in U; u \text{ mauvais}\}.$$

Pour (ii) posons :

$$\begin{aligned} Neud &= \{u \in U; u \in NS^p(\phi(k)/3)\} \\ &= \{u = (x, f) \in U; f \in NS(\phi(k)/3)\}, \end{aligned}$$

et

$$Neud(f) = \{(x, f); (x, f) \in U\}.$$

Notons que l'on a $p(Neud(f)) = \{x; (x, f) \in U\}$. Pour un ensemble F de configurations, on pose $Neud(F) = \bigcup_{f \in F} Neud(f)$. Remarquons que c'est une union disjointe.

Soit maintenant $f \in NS(\phi(k)/3)$, intéressons-nous à l'ensemble $p(Neud(f))$. Chaque point du bord de $p(Neud(f))$ fournit un point du bord de U en 'base'. Soit

l'ensemble $p(\text{Neud}(f))$ possède une part importante de bord relativement à son volume, et il fournit alors une part de bord en 'base' dans U de l'ordre de son volume. Ou bien, cet ensemble possède peu de bord relativement à son volume, et dans ce cas, du fait que f soit non satisfaisable, cet ensemble fournit à U du bord en 'configuration'.

Dans tous les cas, on obtient des points du bord de U mais les hypothèses sur U limitent cet apport. On distingue donc deux cas.

Premier cas : $f \in F_1 := \{f \in NS(\phi(k)/3); \frac{|\partial_{c_g} p(\text{Neud}(f))|}{|p(\text{Neud}(f))|} > \frac{1}{k}\}$.

On fait correspondre à chaque point du bord de $p(\text{Neud}(f))$ un point du bord de U par l'application injective suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup}_{f \in F_1} \partial_{c_g} p(\text{Neud}(f)) &\longrightarrow \partial_l U \\ (x, y) &\longmapsto ((x, f); (y, f)). \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$|\partial_l U| \geq \sum_{f \in F_1} |\partial_{c_g} p(\text{Neud}(f))| \geq \frac{1}{k} \sum_{f \in F_1} |p(\text{Neud}(f))| \geq \frac{1}{k} |\text{Neud}(F_1)|. \quad (2.2)$$

Second cas : $f \in F_2 := \{f \in NS(\phi(k)/3); \frac{|\partial_{c_g} p(\text{Neud}(f))|}{|p(\text{Neud}(f))|} \leq \frac{1}{k}\}$.

Comme $f \in NS(\phi(k)/3)$, on a :

$$|\{x \in p(\text{Neud}(f)); \dim_x f = 1\}| < \frac{1}{3} \phi(k),$$

d'où

$$|\{x \in p(\text{Neud}(f)); \dim_x f = 0\}| \geq |\text{Neud}(f)| - \frac{1}{3} \phi(k).$$

(on a utilisé le fait que $|p(\text{Neud}(f))| = |\text{Neud}(f)|$.)

Or $f \in F_2$, donc par la définition de la fonction de Følner on a :

$$|\text{Neud}(f)| \geq \phi(k).$$

Ainsi,

$$|\{x \in p(\text{Neud}(f)); \dim_x f = 0\}| \geq \frac{2}{3} |\text{Neud}(f)|.$$

Mais pour tout $f \in F_2$, si $y \in \{x \in p(\text{Neud}(f)); \dim_x f = 0\}$ le point (y, f) nous donne un point du bord de U en configuration de manière injective, par l'application

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup}_{f \in F_2} \{(x, f) \in \text{Neud}(f); \dim_x f = 0\} &\longrightarrow \partial_l U \\ (x, f) &\longmapsto ((x, f); (y, \bar{f}_x)), \end{aligned}$$

où \bar{f}_x est la configuration qui vaut f en tout point différent de x et dont la valeur en x est $\bar{0}$ [resp. $\bar{1}$] si $f(x) = \bar{1}$ [resp. $f(x) = \bar{0}$]. Donc, on obtient,

$$|\partial_i U| \geq \frac{2}{3} \sum_{f \in F_2} |Neud(f)| \geq \frac{2}{3} |Neud(F_2)|.$$

D'où l'on déduit que pour $k \geq 2$

$$|\partial_i U| \geq \frac{1}{k} |Neud(F_2)|. \quad (2.3)$$

En additionnant (2.2) et (2.3) et en utilisant que $\frac{|\partial_i U|}{|U|} < \frac{1}{1000k}$, on a :

$$\frac{|Neud|}{|U|} < \frac{1}{500}.$$

□

Lemme 2.2.7. *Soit $b > 0$ et soit K un graphe. Supposons que $E(K) \neq \emptyset$ et :*

$$\frac{|NS_K^e(b)|}{|E(K)|} < 1/2.$$

Alors il existe un sous graphe non vide K' de K tel que toutes les arêtes soient $S_{K'}^p(b/3)$.

Démonstration. On efface tous les sommets $NS^p(b/3)$ et ainsi que toutes les arêtes adjacentes. Il peut alors apparaître de nouveaux sommets $NS^p(b/3)$ dans ce nouveau graphe. On les efface à nouveau ainsi que les arêtes adjacentes, et on itère ce processus "d'effacement" tant qu'il y a des sommets $NS^p(b/3)$. Prouvons que ce processus se termine avant que le graphe soit vide.

Posons,

$$\begin{aligned} C_1 &= |NS_K^e(b)|, \\ C_2 &= |\{e \in S_K^e(b); e \text{ effacée à la fin du processus}\}| \\ C_0 &= |\{e \in E(K); e \text{ effacée à la fin du processus}\}|. \end{aligned}$$

Si nous montrons que $C_2 \leq C_1$, le lemme sera démontré car

$$C_0 \leq C_1 + C_2 \leq 2C_1 < |E(K)|.$$

Ce qui signifiera qu'il reste des points non effacés.

Pour prouver que $C_2 \leq C_1$, introduisons une orientation des arêtes. Si A et B sont deux points du graphe K reliés par une arête, on oriente l'arête de A vers B , si A a été effacé avant B . Nous choisissons une orientation arbitraire si A et B sont effacés simultanément ou si A et B sont non effacés. Nous noterons $\overset{\downarrow}{A}$ [resp. $\overset{\uparrow}{A}$] l'ensemble des arêtes orientées quittant A [resp. arrivant en A].

Sous-lemme 2.2.8. *Soit $b > 0$ et A un point de K , effacé à la fin du processus. Supposons que A soit initialement $S^p(b)$, alors*

$$|A|_{\downarrow} \leq \frac{1}{2} |A|_{\uparrow}.$$

ETAT INITIAL

ETAT PRECEDENT L'EFFACEMENT DE A

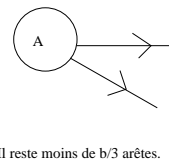
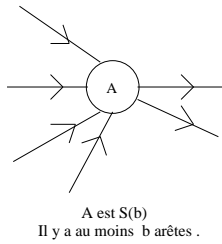


Figure a

Démonstration. La figure a illustre le début et la fin du processus au point A . On a,

$$|A|_{\downarrow} \leq b/3 \quad \text{et} \quad |A|_{\uparrow} \geq b - \frac{1}{3}b \geq \frac{2}{3}b.$$

D'où,

$$|A|_{\downarrow} \leq \frac{1}{2} |A|_{\uparrow}.$$

□

Pour finir la preuve, on pose :

- $D_1 = \{\text{points effacés à l'étape 1}\},$
- $D_i = \{\text{points initialement } S^p(b), \text{ effacés à l'étape } i\} \text{ pour } i \geq 2$
- $F_i = \{\text{arêtes entre } D_i \text{ et } D_{i-1}\},$
- $F'_i = \{\text{arêtes quittant } D_{i-1}\}.$

Ces ensembles sont schématisés sur la figure b.

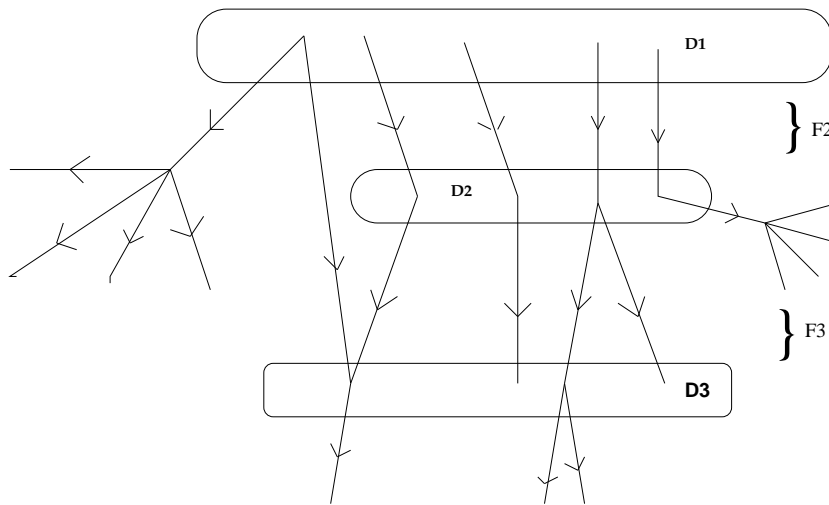


Figure b.

Notons que $F_i \subset F'_i$ et que par ailleurs les arêtes de F'_i sont effacées à l'étape $i - 1$. En appliquant le sous lemme 2.2.8, en chaque point de D_i , on obtient :

$$\forall i \geq 2 \quad |F'_{i+1}| \leq \frac{1}{2}|F_i|.$$

D'où,

$$|F'_{i+1}| \leq \frac{1}{2^{i-1}}|F_2|.$$

(On a utilisé le fait que $|F_i| \leq |F'_i|$.) Ainsi,

$$(2.4) \quad \left| \bigcup_{i \geq 3} F'_i \right| \leq \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i} \right) |F_2|.$$

Maintenant, les arêtes de F_2 sont $NS_K^e(b)$ car si elles étaient $S_K^e(b)$, elles relieraient deux points $S_K^p(b)$ et en particulier, les points de D_1 seraient $S_K^p(b)$, donc $S_K^p(b/3)$ donc non effacés à l'étape 1. Il s'en suit que,

$$(2.5) \quad |F_2| \leq |NS_K^e(b)| = C_1.$$

Par ailleurs, toute arête $S^e(b)$ effacée, est dans un certain F'_i avec $i \geq 3$, donc

$$(2.6) \quad C_2 = \#\{e \in S^e(b); e \text{ effacée à la fin du processus}\} \leq \left| \bigcup_{i \geq 3} F'_i \right|.$$

Des inégalités (2.6), (2.5) et (2.4), on déduit que $C_2 \leq C_1$, ce qui termine la preuve. \square

Lemme 2.2.9. Soit $Y > 0$ et soit \mathcal{A} un ensemble non vide de configurations, tel que pour toute configuration de \mathcal{A} , il existe au moins Y points où l'on peut changer la valeur de f tout en restant dans \mathcal{A} , alors : $|\mathcal{A}| \geq 2^Y$. i.e :

$(\forall f \in \mathcal{A} \exists a_1, a_2, \dots, a_Y \in \mathcal{C}_n \text{ tels que } \bar{f}_{a_i} \in \mathcal{A}) \implies |\mathcal{A}| \geq 2^Y$,
où \bar{f}_{a_i} est définie à partir de f par :

$$\bar{f}_{a_i}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a_i \\ \bar{1} - f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur Y .

-Si $Y = 1$ la propriété est satisfaite.

-Supposons $Y \geq 2$ et considérons un point x (dans la base) tel qu'il existe $f, g \in A$ satisfaisant $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$, et posons $\mathcal{A}_0 = \{h \in \mathcal{A}; h(x) = 0\}$ et $\mathcal{A}_1 = \{h \in \mathcal{A}; h(x) = 1\}$. \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 sont non vides. On a $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ et cette union est disjointe. Par ailleurs, $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ vérifient l'hypothèse de récurrence avec la constante $Y - 1$. D'où,

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| \geq 2 \cdot 2^{Y-1} = 2^{Y+1}.$$

□

A l'aide des trois lemmes précédents, on peut maintenant démontrer la propriété 2.2.4.

Preuve de la propriété 2.2.4 :

Soit $U \subset \mathcal{C}_n^g \cap \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ vérifiant $\frac{|\partial_i U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$. Procédons en 5 étapes.

1. Soit $U' = U - \{u \in U; u \text{ mauvais}\}$. Posons $\tilde{K} = K_{U'}$, on a $E(K_U) = E(K_{U'})$ (\tilde{K} est le sous graphe de K_U qui ne contient que des points attachés à une arête de K_U).
2. $V(\tilde{K})$ (et donc aussi $E(\tilde{K})$ par construction) est non vide, puisque par le (i) du lemme 2.2.6 :

$$|V(\tilde{K})| \geq (1 - \frac{1}{1000k})|U|.$$

3. On a successivement :

$$\begin{aligned} \#\{e \in E(\tilde{K}) \cap NS^e(\phi(k)/3)\} &= \#\{e \in E(K_U) \cap NS^e(\phi(k)/3)\} \\ &\leq \frac{1}{2} \#\{u \in U; NS^p(\phi(k)/3)\} \\ &\quad \text{(remarque 2.2.5)} \\ &\leq \frac{1}{1000}|U| \\ &\quad \text{(par le lemme 2.2.6 (ii))} \\ &\leq \frac{1}{1000 - \frac{1}{k}} \#\{u \in U; u \text{ bon}\} \\ &\quad \text{(par le lemme 2.2.6 (i))} \\ &= \frac{2}{1000 - \frac{1}{k}} |E(\tilde{K})| \\ &\leq \theta |E(\tilde{K})|, \end{aligned}$$

avec $\theta = \frac{2}{999} < \frac{1}{2}$.

4. Grâce aux points 2 et 3, on peut appliquer le lemme 2.2.7 à \tilde{K} et déduire qu'il existe un sous graphe K' de \tilde{K} où tous les points sont $S_{K'}^p(\phi(k)/9)$.

5. On déduit du lemme 2.2.9 que,

$$|U| \geq 2^{\phi(k)/9}.$$

Ainsi on a prouvé que pour tout ensemble $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$,

$$\frac{|\partial U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k} \Rightarrow |U| \geq 2^{Fol_{\mathcal{C}_n^g}^g(k)/9},$$

ce qui implique,

$$Fol_{\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}^g(k) \geq 2^{Fol_{\mathcal{C}_n^g}^g(k/1000)/9},$$

et fournit des valeurs numériques des constantes C_1 et C_2 .

2.3 Isopérimétrie sur un amas de percolation

Après avoir brièvement discuté d'une première inégalité isopérimétrique, on explique quel type d'inégalité isopérimétrique est nécessaire pour prouver le théorème 2.1.1. Enfin le reste de cette section est consacrée à la preuve de la propriété 2.1.4.

2.3.1 Point de départ.

Dans [14], l'inégalité suivante est prouvée.

Proposition 2.3.1. *Il existe une constante $\beta = \beta(p, d) > 0$ telle que Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$ on ait,*

$$\exists n_\omega \quad \forall n \geq n_\omega \quad \inf_{A \subset \mathcal{C}_n, |A| \leq |\mathcal{C}_n|/2} \frac{|\partial_{\mathcal{C}_n^g} A|}{|A|^{1-\frac{1}{\epsilon}}} \geq \frac{\beta}{n^{1-\frac{d}{\epsilon}}},$$

où $\epsilon = \epsilon(n) = d + 2d \frac{\log \log(n)}{\log(n)}$.

Dans cette inégalité, on peut remplacer le bord dans \mathcal{C}_n^g par le bord dans \mathcal{C}^g , et enlever la condition sur le volume de A , en remarquant les deux points suivants.

1. Pour tout $A \subset \mathcal{C}_n$, $\partial_{\mathcal{C}^g} A = \partial_{\mathcal{C}_{n+k}^g} A$ pour tout $k \geq 1$.
2. Puis pour enlever la condition sur le volume, rappelons la propriété relative à la croissance du volume de \mathcal{C}_n (voir Appendix B dans [14])

Proposition 2.3.2. *Il existe $\rho > 0$ tel que Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand,*

$$|\mathcal{C}_n| \geq \rho n^d.$$

Ainsi, par exemple il existe $c' > 0$ tel que Q p.s pour n assez grand, pour tout $A \subset \mathcal{C}_n$ on ait,

$$|A| \leq |\mathcal{C}_n| \leq |\mathcal{C}_{n+c'n}|/2.$$

En effet $|\mathcal{C}_n| \leq n^d \leq \frac{\rho}{2}(n+k)^d \leq \frac{1}{2}|\mathcal{C}_{n+k}|$ est réalisée dès que l'on prend $k \approx n$.

On déduit donc de la propriété 2.3.1, (en modifiant la constante β par une constante multiplicative) que :

$$\exists \beta > 0 \quad Q \text{ p.s pour } n \text{ assez grand, } \inf_{A \subset \mathcal{C}^n} \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{|A|^{1-\frac{1}{\epsilon}}} \geq \frac{\beta}{n^{1-\frac{d}{\epsilon}}}.$$

Cette manière de compter le bord nous donne une majoration de la probabilité de retour de la marche Z tuée quand elle sort de la boîte $\mathcal{B}_n = [-n, n]^d$. Si on applique alors la même démarche que l'on va utiliser à la section 4, à partir de cette inégalité isopérimétrique, nous trouvons une majoration de la probabilité de retour de Z (et donc de la transformée de Laplace du nombre de points visités) en

$$e^{-c \frac{t^{\frac{d}{d+2}}}{\log(t)^{c'}}}.$$

Ceci n'est pas la borne supérieure attendue. La principale partie du travail consiste donc à supprimer le terme logarithmique. Pour cela, l'idée est de prouver une nouvelle inégalité isopérimétrique, qui est similaire à celle que l'on a dans le graphe $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ pour les ensembles de 'gros' volume. Plus précisément, la propriété 2.1.4 peut s'interpréter ainsi, pour $A \subset \mathcal{C}_n$, si $|A|$ est grand, on a $\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{|A|^{1-\frac{d}{d}}}$ $\geq C$, et si $|A|$ est petit, on peut dire que $|\partial_{\mathcal{C}^g} A| \geq 1$.

Les deux sections suivantes sont consacrées à prouver la propriété 2.1.4 pour tout $p > p_c$, par des techniques de renormalisation. Dans la section 2.3.2, nous prouvons pour des valeurs de p proches de 1, une inégalité isopérimétrique modifiée, correspondant à un événement croissant. Puis dans la section 2.3.3, à l'aide du théorème 2.1 de [1], on déduit la propriété 2.1.4.

2.3.2 Une autre inégalité isopérimétrique

Soit \mathcal{G}_n l'ensemble des points de \mathcal{B}_n attachés à une arête ouverte. Soit alors \mathcal{L}_n la plus grosse composante connexe de ω dans \mathcal{B}_n . On note $\overline{\mathcal{L}_n}$ la composante connexe de \mathcal{L}_n dans le graphe ω . $\overline{\mathcal{L}_n^g}$ est le graphe ayant $\overline{\mathcal{L}_n}$ comme ensemble de points et l'ensemble des arêtes est défini par : $E(\overline{\mathcal{L}_n^g}) = \{(x, y); \omega(x, y) = 1, x, y \in \overline{\mathcal{L}_n}\}$.

Posons pour $A \subset \mathcal{B}_n$, $n(A)$ le nombre de composantes connexes de $\mathcal{B}_n - \mathcal{L}_n$ qui contiennent au moins une composante connexe de A . Notons que si A est connexe $n(A) = 0$ ou 1 suivant que $A \subset \mathcal{L}_n$ ou non.

Remarquons également que si $A \subset \mathcal{B}_n$, $|\partial_{\overline{\mathcal{L}_n^g}} A| = |\{(x, y) \in E^d; x \in A \cap \overline{\mathcal{L}_n}, y \in \mathcal{B}_{n+1} - A, \text{ et } \omega(x, y) = 1\}|$.

Proposition 2.3.3. *Il existe $p_0 < 1$ tel que pour tout $p \in [p_0; 1]$:*

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \exists \beta > 0 \quad \forall c > 0 \quad Q \text{ p.s } \exists n_{\omega, c} \quad \forall n \geq n_{\omega, c} \\ & \forall A \subset \mathcal{B}_n \text{ connexe} \quad \frac{n(A) + |\partial_{\overline{\mathcal{L}_n^g}} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta. \end{aligned}$$

Avant de prouver cette propriété, remarquons les deux faits suivants :
 -d'abord l'événement défini par l'équation (2.7) est croissant. En effet, l'ajout d'une arête à ω , ne fait pas diminuer $|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|$. Et si $n(A)$ diminue de 1, cela signifie qu'il y avait une composante connexe de A qui n'intersectait pas \mathcal{L}_n et qui maintenant intersecte \mathcal{L}_n , donc le bord $|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|$ a augmenté de 1. Finalement, la somme $n(A) + |\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|$ ne décroît pas.

C'est cette raison qui motive l'introduction d'une telle inégalité, afin de permettre l'utilisation des techniques de renormalisation.

-par ailleurs, pour n assez grand, $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$ (voir la première partie de la preuve de 2.3.3), si l'on prend alors $A \subset \mathcal{C}_n$ connexe, $n(A) = 0$ et on retrouve l'inégalité 2.1.4 pour p proche de 1, comme conséquence de la proposition 2.3.3.

Démonstration.

Commençons par prouver que pour n assez grand $\mathcal{L}_n = \mathcal{C}_n$, ce qui nous sera utile dans la suite de la preuve.

Supposons $\mathcal{L}_n \neq \mathcal{C}_n$. On a immédiatement par la propriété 2.3.2 que :

$$(2.8) \quad |\mathcal{L}_n| \geq |\mathcal{C}_n| \geq \rho n^d.$$

Soient C_i les composantes connexes de $\mathcal{B}_n - \mathcal{L}_n$ dans le graphe \mathcal{B}_n^g . Pour tout i on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i \text{ est } (*)\text{-connexe}^2 \\ (\text{car } C_i \text{ et } \mathcal{B}_n - C_i \text{ sont connexes}) \\ \text{et} \\ \frac{\sum_{e \in \partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i} 1_{\{w(e)=1\}}}{|\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i|} = 0. \end{array} \right.$$

Pour $\beta > 0$, posons,

$$(2.9) \quad \mathcal{A}'_n = \{ \exists F \subset E(\mathcal{B}_n^g); \frac{\sum_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta, \\ |F| \geq (\log n)^2, F \text{ } (*)\text{-connexe} \}.$$

On a :

$$Q(\mathcal{A}'_n) \leq \sum_{\substack{F \\ |F| \geq (\log n)^2 \text{ et } F \text{ } (*)\text{-connexe}}} Q\left(\frac{\sum_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta\right)$$

Du fait que les variables aléatoires $(\omega(e))_e$ suivent des lois de Bernouilli(p) et sont indépendantes, par l'inégalité de Bienaymée Tchebitchef, on a :

$$(2.10) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad Q\left(\frac{\sum_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta\right) \leq e^{\lambda \beta |F|} (pe^{-\lambda} + 1 - p)^{|F|}.$$

²un ensemble M d'arêtes est dit $(*)$ -connexe si pour tout e, e' de M , il existe une suite d'arêtes e_1, \dots, e_m de M telle que $e_1 = e$ et $e_m = e'$ et $e_i \overset{(*)}{\sim} e_{i+1}$ où $(x, y) \overset{(*)}{\sim} (x', y')$ si $\max |x_i - x'_i| \leq 1$ et $\max |y_i - y'_i| \leq 1$.

D'où, pour tout $\lambda \geq 0$ on déduit :

$$(2.11) \quad Q(\mathcal{A}'_n) \leq \sum_{k \geq (\log n)^2} e^{\lambda \beta k} (pe^{-\lambda} + 1 - p)^k \times \\ |\{F \subset E(\mathcal{B}_n^g); F(*) - \text{connexe}, |F| = k\}|.$$

Mais $|\{F \subset E(\mathcal{B}_n^g); F(*) - \text{connexe}, |F| = k\}| \leq (2n+1)^d e^{ak}$, où a est une constante qui dépend seulement de d (voir [17]). Ainsi, le terme général de la série du membre de droite de l'équation (2.11) est majoré par :

$$(2n+1)^d e^{k[a + \lambda\beta + \log(pe^{-\lambda} + 1 - p)]}.$$

Si p est proche de 1, et si on choisit β assez petit (avec $\beta < 1$), il existe $\lambda > 0$ tel que $a + \lambda\beta + \log(pe^{-\lambda} + 1 - p) = -\xi < 0$. Donc pour n assez grand,

$$Q(\mathcal{A}'_n) \leq C (2n+1)^d e^{-\xi(\log n)^2} \leq e^{-\frac{\xi}{2}(\log n)^2}$$

Cette dernière expression est sommable en n , donc par le lemme de Borel Cantelli, on déduit :

$$\forall \omega \exists n_\omega, \forall n \geq n_\omega \omega \in \mathcal{A}'_n.$$

Ainsi, Q p.s pour n assez grand $\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i \in A_n^c$.

$$(2.12) \quad ie : |\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i| \leq (\log n)^2.$$

Or

$$|C_i| \leq |B_n| - |\mathcal{L}_n|.$$

Puis de (2.8), on déduit :

$$|C_i| \leq c'n^d \text{ avec } c' < 1.$$

Puisque C_i a un volume plus petit qu'une fraction du volume de \mathcal{B}_n , on peut donc lui appliquer l'inégalité isopérimétrique restreinte à une boîte \mathbb{Z}^d , pour en déduire

$$(2.13) \quad |C_i| \leq C_d \log(n)^{\frac{2d}{d-1}}.$$

Or, si $\mathcal{L}_n \neq \mathcal{C}_n$, il existe i tel que $\mathcal{C}_n \subset C_i$. Ce qui est impossible compte tenu de (2.13) et de la propriété 2.3.2. Donc pour n assez grand, $\mathcal{L}_n = \mathcal{C}_n$.

Fixons-nous à présent un $c > 0$.

Si $|A| < cn^\gamma$, (2.7) est satisfaite puisque $n(A) + |\partial_{\mathcal{L}_n^g} A| \geq 1$.

Supposons donc maintenant $|A| \geq cn^\gamma$. Par la majoration (2.13) vérifiée par les volumes des C_i , nécessairement A intersecte \mathcal{L}_n . De ce fait, on a $n(A) = 0$. Nous voulons donc prouver que

$$(2.14) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|}{|A|^{1-\frac{1}{d}}} \geq \beta.$$

Procédons en 5 étapes.

1. L'isopérimétrie classique dans \mathbb{Z}^d fournit,

$$(2.15) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{L}^d} A|}{|A|^{1-\frac{1}{d}}} \geq C_d.$$

2. On voudrait remplacer $\partial_{\mathcal{L}^d} A$ par $\partial_{\overline{\mathcal{L}_n^g}} A$. Mais si on applique un argument de contour à A , il peut exister des arêtes de $\partial_{\mathcal{L}^d} A$ qui appartiennent à $\omega - \overline{\mathcal{L}_n^g}$. Nous allons donc appliquer un argument de contour à l'ensemble A auquel nous avons rajouté les "morceaux" de $\omega - \overline{\mathcal{L}_n^g}$ connexes à A .

Du fait que p.s, il n'existe qu'une seule composante connexe infini dans ω (qui est $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$ pour n assez grand), on peut trouver un $k = k_{n,\omega}$ tel que tous les chemins de $\omega - \mathcal{C}_n^g$ commençant dans \mathcal{B}_n , se terminent avant d'atteindre une arête de $\partial_{\mathcal{L}^d} \mathcal{B}_{n+k}$.

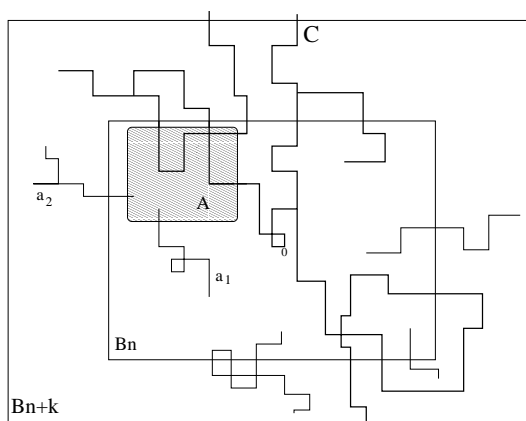


figure c.

Soient $(a_i)_{i=1..m}$ les chemins de $\omega - \overline{\mathcal{L}_n^g}$ qui débutent dans A (voir figure d). Tous ces chemins sont contenus dans \mathcal{B}_{n+k} . Ajoutons ces chemins à A , et posons

$$A'' = A \cup a_1 \dots \cup a_m.$$

3. A'' vérifie les propriétés suivantes. A'' est connexe et on peut supposer que $\mathbb{Z}^d - A''$ est connexe. En effet, si ce n'est pas le cas, on remplit les trous, en prenant B le complémentaire dans \mathbb{Z}^d de la composante connexe de $\mathbb{Z}^d - A''$ (dans le graphe \mathcal{L}^d) qui contient les points à l'infini, et une inégalité isopérimétrique pour l'ensemble B se transmet à A'' , puisque $|B| \geq |A''|$ et $|\partial_{\mathcal{L}^d} B| \leq |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|$.

Ainsi $\partial_{\mathcal{L}^d} A''$ est (*)-connexe .

Par ailleurs, on a

$$(2.16) \quad |\partial_{\omega} A''| = |\partial_{\overline{\mathcal{L}_n^g}} A|,$$

(ω désigne dans l'égalité précédente le graphe issu du processus de percolation) et l'inégalité isopérimétrique classique dans \mathbb{Z}^d donne :

$$|\partial_{\mathcal{L}^d} A''| \geq C_d |A''|^{1-\frac{1}{d}} \geq C_d (cn^\gamma)^{1-\frac{1}{d}}.$$

4. Appliquons un argument de contour à A'' . Pour $\beta' > 0$ on pose :

$$\mathcal{A}_n'' = \{\omega; \exists F \subset E^d, |F| \geq C_d(cn^\gamma)^{1-\frac{1}{d}}, \frac{\sum_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta', \\ F (*) - \text{connexe}, F \cap E(\mathcal{B}_n^g) \neq \emptyset\}.$$

Comme précédemment, à l'aide de (2.10) on a :

$$Q(\mathcal{A}_n'') \leq \sum_{j \geq C_d(cn^\gamma)^{1-\frac{1}{d}}} e^{\lambda \beta' j} (pe^{-\lambda} + 1 - p)^j \times h(n, j),$$

où $h(n, j) = \sup_{k \geq 0} |\{H \subset E^d, H (*) - \text{connexe}, |H| = j, \\ \text{et } H \cap E(\mathcal{B}_n^g) \neq \emptyset\}|$.

Mais $|\{H \subset E(\mathcal{B}_{n+k_{n,\omega}}^g), H (*) - \text{connexe}, |H| = j, H \cap E(\mathcal{B}_n) \neq \emptyset\}|$ est inférieur à $(2n+1)^d e^{aj}$ pour tout $k \geq 0$ (avec a indépendant de k). Donc, on obtient finalement que si p est proche de 1, il existe une valeur $\beta' > 0$, et un $\delta > 0$ tels que pour n assez grand :

$$Q(\mathcal{A}_n'') \leq e^{-\delta n^{\gamma(1-\frac{1}{d})}}.$$

Puis par le lemme de Borel-Cantelli, on déduit que Q p.s pour n assez grand, $\partial_{\mathcal{L}^d} A'' \notin \mathcal{A}_n''$.

$$\text{ie : } |\partial_\omega A''| \geq \beta' |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|.$$

5. On peut alors terminer la preuve : par (2.16) on a,

$$|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A| \geq \beta' |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|.$$

En appliquant alors, l'inégalité isopérimétrique dans \mathbb{Z}^d à A'' et par le fait que $A \subset A''$, on déduit qu'il existe $\beta > 0$ tel que Q p.s, pour n assez grand,

$$|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A| \geq \beta |A|^{1-\frac{1}{d}}.$$

□

2.3.3 Renormalisation

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la propriété 2.1.4 pour tout $p > p_c$. Reprenons les notations et résultats de [1]. Soit $p > p_c$ et $N \in \mathbb{N}$. On recouvre \mathbb{Z}^d par une union disjointe de boîtes de taille N telles que $\mathbb{Z}^d = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d} B_i$ où B_i est la boîte centrée en $(2N+1)i$. Soit B'_i la boîte de même centre que B_i mais de taille $\frac{5}{4}N$.

Introduisons (voir [1]), $\mathcal{E}(N) = \{(ke_1, (k+1)e_1); k = 0, \dots, [\sqrt{N}]\}$ et $\mathcal{E}_i = \tau_{i(2N+1)} \mathcal{E}(N)$, où τ_b représente le décalage dans \mathbb{Z}^d avec $b \in \mathbb{Z}^d$. On dit qu'un amas K contenu dans

B' est traversant pour $B \subset B'$, si dans les d directions il existe un chemin ouvert contenu dans $K \cap B$ reliant la face droite de B à la face gauche de B .

Considérons les deux événements suivants :

R_i^N : = {il existe un amas traversant K dans B'_i pour B'_i , tout chemin ouvert contenu dans B'_i de longueur plus grande que $N/10$ est connecté à K dans B'_i , et K est traversant pour toute sous-boite $B \subset B'_i$ de taille supérieure à $N/10$ },

S_i^N : = { Il y a au moins une arête ouverte dans \mathcal{E}_i }.

Nous écrirons $K(B'_i)$ quand cela est nécessaire pour indiquer que nous considérons l'amas traversant K de la boîte B'_i .

On définit alors $\phi_N : \omega \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ telle que $(\phi_N \omega)(x) = 1_{R_x^N \cap S_x^N}(\omega)$, et on dit qu'une boîte B_x est *bonne* si $(\phi_N \omega)(x) = 1$. (ie : si les deux événements sont réalisés) sinon on dit que la boîte est *mauvaise*. Cela définit un processus (dépendant) de percolation sur les sites du réseau renormalisé, voir [1] pour plus de détails.

Preuve de la proposition 2.1.4.

On a prouvé la propriété 2.3.3 pour un paramètre de percolation sur les arêtes assez grand. Puisque l'ensemble des amas qui vérifie l'inégalité (2.7) est un événement croissant, cette inégalité est donc aussi vérifiée pour un paramètre de percolation sur les sites assez grand (voir [12]).

Soit $A \subset \mathcal{C}_n$ connexe, notons $\tilde{A} = \{i \in \mathbb{Z}^d; A \cap B_i \neq \emptyset\}$. \tilde{A} est connexe et remarquons que l'on a :

$$|\tilde{A}| \geq \frac{|A|}{(2N + 1)^d}.$$

On utilise la notation \sim pour les quantités définies dans le processus renormalisé.

Pour un bon choix de N , par la proposition 2.1 de [1], on peut appliquer la proposition 2.3.3 pour \tilde{A} dans le processus renormalisé, donc (2.7) est vérifiée pour \tilde{A} : il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q p.s pour n assez grand on ait,

$$(2.17) \quad \frac{n(\tilde{A}) + |\partial_{\mathcal{L}_n^g} \tilde{A}|}{f_c(|\tilde{A}|)} \geq \beta.$$

On distingue alors deux cas.

1. Si $\tilde{n}(\tilde{A}) = 1$, alors \tilde{A} est contenu dans une des composantes connexes de $\tilde{\mathcal{B}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_n$. Ainsi, $\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A} = \emptyset$, et donc (2.17) donne $1 \geq \beta f_c(|\tilde{A}|)$. Du fait que $\partial_{\mathcal{C}_g} A \neq \emptyset$, on déduit :

$$|\partial_{\mathcal{C}_g} A| \geq \beta f_c(|\tilde{A}|) \geq \beta f_c\left(\frac{|A|}{(2N + 1)^d}\right) \geq \frac{\beta}{(2N + 1)^{d-1}} f_{c(2N+1)^d}(|A|).$$

qui est l'inégalité de la proposition 2.1.4 (pour tout $c > 0$ et avec une constante β plus petite).

2. Si $\tilde{n}(\tilde{A}) = 0$, alors par (2.17) on a,

$$\frac{|\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}|}{f(|\tilde{A}|)} \geq \beta.$$

Soit $(i, i') \in \partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}$ alors B_i et $B_{i'}$ sont des bonnes boites et A intersecte B_i mais pas $B_{i'}$. Nous allons montrer que chaque couple ainsi choisi donne au moins une arête de $\partial_{\mathcal{C}^g} A$. En effet, du fait que les deux boites B_i et $B_{i'}$ sont bonnes, on peut trouver $x \in B_i \cap A$ et $y \in B_{i'} \cap (\mathcal{C} - A)$ reliés par un chemin ouvert dans $B_i \cup B_{i'}$, et sur ce chemin se trouve une arête de $\partial_{\mathcal{C}^g} A$.

[Expliquons rapidement comment trouver x et y . On prend $x \in A$ donc $x \in B_i \cap \mathcal{C}$. \mathcal{C} est infini donc il existe un chemin dans \mathcal{C} reliant x à l'extérieur de $B_{i'}$. Comme ce chemin a une longueur supérieure à $N/4$, il est connecté à l'amas $K(B_{i'})$ dans $B_{i'}$ (donc par connexité $K(B_{i'}) \subset \mathcal{C}$). Prenons maintenant un chemin ouvert contenu dans $K(B_{i'}) \cap B_{i'}$ joignant la face gauche à la face droite de la boite $B_{i'}$ dans la direction de $B_{i'}$ et soit y sur ce chemin et dans $B_{i'}$. Toujours par connexité, on en déduit finalement l'existence d'un chemin dans \mathcal{C} reliant x à y .]

Il y a au plus 2^d arêtes (i, i') qui peuvent donner la même arêtes dans $\partial_{\mathcal{C}^g} A$ (toutes les arêtes (i, i') avec i' voisin de i dans \mathbb{Z}^d). Donc finalement, on a, pour tout $c > 0$:

$$|\partial_{\mathcal{C}^g} A| \geq \frac{1}{2^d} |\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}| \geq \frac{\beta}{2^d} f_c(|\tilde{A}|) \geq \frac{\beta}{2^d (2N+1)^{d-1}} f_{c(2N+1)^d}(|A|).$$

Ce qui termine la preuve de la propriété 2.1.4, pour tout $p \geq p_c$.

2.4 Preuve de la borne supérieure

Par les résultats de la section 2.3 et 2.2.3, on prouve une minoration de la fonction de Følner sur $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, puis par des outils analytiques (type inégalité de Nash) on obtient une borne supérieure de la probabilité de retour de Z puis de la transformée de Laplace du nombre de points visités.

2.4.1 Isopérimétrie sur $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

La propriété 2.1.4, donne la minoration suivante pour la fonction de Følner de \mathcal{C}_n^g relative à \mathcal{C}^g .

Proposition 2.4.1. *Soit $\gamma > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand, on ait :*

$$(2.18) \quad \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}^{C^g}(k) \geq \begin{cases} k & \text{si } k < cn^\gamma \\ (\beta k)^d & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

Démonstration. On procède en deux étapes.

1. D'abord il est facile de voir que l'on peut restreindre le minimum définissant la fonction de Følner à des ensembles connexes,

$$\begin{aligned} \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}(k) &= \min\{|A|; A \subset \mathcal{C}_n \text{ et } \frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k}\} \\ &= \min\{|A|; A \subset \mathcal{C}_n \text{ } A \text{ connexe et } \frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k}\}. \end{aligned}$$

En effet, si A n'est pas connexe, notons $(A_i)_{i=1..t}$ ses composantes connexes. Au moins une satisfait la condition $\frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A_i|}{|A_i|} < \frac{1}{k}$, et on a $|A_i| \leq |A|$.

2. Maintenant, par la proposition 2.1.4, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand, on a

$$\frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \quad \text{pour tout ensemble } A \subset \mathcal{C}_n \text{ connexe,}$$

Donc, pour tout A connexe de \mathcal{C}_n , on a,

$$(2.19) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k} \implies \frac{|A|}{f_c(|A|)} \geq \beta k.$$

Posons alors $\mathcal{G}(x) = \frac{x}{f_c(x)}$ et définissons \mathcal{G}^{-1} par :

$$\mathcal{G}^{-1}(y) = \inf\{x ; \mathcal{G}(x) = y\} = \begin{cases} y & \text{si } x < cn^\gamma, \\ y^d & \text{si } x \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

On déduit de (2.19)

$$|A| \geq \mathcal{G}^{-1}(\beta k).$$

$$(2.20) \quad \text{ie : } \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}(k) \geq \mathcal{G}^{-1}(\beta k).$$

□

Grâce à la proposition (2.2.4) et à l'inégalité (2.20), on déduit immédiatement qu'il existe $C > 0$, tels que pour tout $c > 0$, Q p.s pour n assez grand,

$$(2.21) \quad \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(k) \geq \begin{cases} e^{Ck} & \text{si } k < cn^\gamma, \\ e^{Ck^d} & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

On ne peut déduire directement une majoration des noyaux de la marche Z , à partir de cette minoration car les arêtes du graphe $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ne sont pas adaptées aux sauts de Z . On construit donc les graphes suivants.

Soit G un graphe, on note $G \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ le graphe tel que,

$$\left\{ \begin{array}{l} V(G \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = V(G \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}), \\ E(G \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = \left\{ \left((x, f)(y, f_{y,j}^{x,i}) \right); (x, y) \in E(G) \text{ et } (i, j) \in \{0, 1\} \right. \\ \left. \text{et } \text{supp}(f) \subset G \right\}. \end{array} \right.$$

Soit δ un point imaginaire, on pose $\overline{\mathcal{C}}_n = \mathcal{C}_n \cup \{\delta\}$ et $\overline{\mathcal{C}}_n^g$ le graphe ayant $\overline{\mathcal{C}}_n$ comme ensemble de points et l'ensemble des arêtes est défini par $E(\overline{\mathcal{C}}_n^g) = \{(x, y); \omega(x, y) = 1, x, y \in \mathcal{C}_n\} \cup \{(x, \delta); x \in \mathcal{C}_n, \exists z \in V(\omega) (x, z) \in \partial_\omega \mathcal{C}_n\}$. Notons alors

$$W_n = \overline{\mathcal{C}}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

et

$$W'_n = \overline{\mathcal{C}}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

On prouve :

Proposition 2.4.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $c > 0$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,*

$$(2.22) \quad \text{Fol}_{\overline{\mathcal{C}}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}^{C^g} (k) \geq F(k) := F_{C,c}(k) = \begin{cases} e^{Ck} & \text{si } k < cn^\gamma, \\ e^{Ck^d} & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

Démonstration. On procède en 4 étapes.

1. Soient ϵ et ϵ' les formes de Dirichlet respectives de W_n et W'_n définies pour tout $f, g : V(\overline{\mathcal{C}}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\epsilon(f, g) = \sum_{(x,y) \in E(W_n)} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)),$$

et

$$\epsilon'(f, g) = \sum_{(x,y) \in E(W'_n)} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)).$$

2. Les graphes W_n et W'_n sont quasi isométriques par l'application identité sur $V(W_n) = V(W'_n)$. En effet, soient d et d' les distances respectives sur ces graphes, pour tout u, v de $V(W_n)$ on a :

$$\frac{1}{3}d'(u, v) \leq d(u, v) \leq 3d'(u, v).$$

Ainsi (voir I.3 dans [18]), il existe $C_1, C_2 > 0$ (indépendant de n) tels que, pour tout $f : V(\overline{\mathcal{C}}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(2.23) \quad C_1\epsilon(f, f) \leq \epsilon'(f, f) \leq C_2\epsilon(f, f).$$

3. Soit $U \subset V(\overline{\mathcal{C}}_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, prenons $f = 1_{\{U\}}$ dans (2.23), on obtient

$$(2.24) \quad C_1 |\partial_{W_n} U| \leq |\partial'_{W'_n} U| \leq C_2 |\partial_{W_n} U|$$

4. Or on a $|\partial_{W_n} U| = |\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|$ et $|\partial'_{W'_n} U| = |\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|$. Finalement, on déduit de (2.21) et (2.24), que l'on peut remplacer $\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$ par $\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$ dans (2.21), cela n'affecte que les constantes c et C .

□

2.4.2 Borne supérieure de $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o)$

On suppose pour cette section $\alpha = 1/2$. Grâce à (2.22), nous obtenons une majoration de la probabilité de retour de la marche aléatoire Z .

Proposition 2.4.3. *Supposons $\alpha = 1/2$. Il existe une constante $c > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand,*

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o) \leq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Démonstration. Posons $\tau_n = \inf\{s \geq 0 ; Z_s \notin \mathcal{C}_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\}$. Ainsi, on peut écrire,

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n \leq 2n) \\ &\quad + \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n > 2n). \end{aligned}$$

-Le premier terme du membre de droite est nul, puisque la marche ne peut revenir à l'origine au temps $2n$ en sortant de la "boite" $V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ avant le temps $2n$.

-Le deuxième terme est égal à $\mathbb{P}_o(\bar{Z}_{2n}^n = o)$, où $(\bar{Z}_i^n)_i$ désigne la marche aléatoire sur W'_n , coïncidant avec Z mais tuée quand elle sort de W'_n . $(\bar{Z}_i^n)_i$ est réversible pour la mesure m restreinte à $V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ (m est définie à la sous section 2.2.2). Par les méthodes développées dans [4]), pour obtenir une borne supérieure de $\mathbb{P}_o(\bar{Z}_{2n}^n = o)$, posons pour $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$:

$$\begin{cases} |\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|_m = \sum_{u_1, u_2} m(u_1) \tilde{p}(u_1, u_2) 1_{\{(u_1, u_2) \in \partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U\}} \\ \text{et} \\ |U|_m = \sum_{u \in U} m(u). \end{cases}$$

Comme on suppose $\alpha = 1/2$, la mesure m se réduit à $m(a, f) = \nu(a)$ (qui est bornée car la valence du graphe \mathcal{C}^g est comprise entre 1 et $2d$) et on déduit donc à l'aide de l'inégalité (2.22) que dans ce cas, il existe une constantes $C > 0$ telle que pour tout $c > 0$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand,

$$(2.26) \quad \min\{|U|_m; U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \text{ et } \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|_m}{|U|_m} \leq \frac{1}{k}\} \geq F_{C,c}(k).$$

Prenons $c = 1$. $F := F_{C,1}$ est positive et croissante, et son inverse est :

$$(2.27) \quad \begin{aligned} F^{-1}(y) &= \inf\{x \geq 0 ; F(x) \geq y\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{C} \log(y) & \text{si } y < e^{Cn^\gamma} \\ cn^\gamma & \text{si } e^{Cn^\gamma} \leq y \leq e^{Cn^{d\gamma}} \\ (\frac{1}{C} \log(y))^{1/d} & \text{si } e^{Cn^{d\gamma}} < y, \end{cases} \end{aligned}$$

Comme F^{-1} est croissante, (2.26) implique une inégalité de Nash (voir par exemple 14.1 in [18]) pour la forme de Dirichlet associée à \bar{Z}^n , puis une majoration du noyau :

$$\text{pour tout } i \geq 0, \quad \mathbb{P}_0(\bar{Z}_{2i}^n = 0) \leq 2a(i),$$

où a est la solution de l'équation différentielle suivante,

$$\begin{cases} a' = -\frac{a}{8(F^{-1}(4/a))^2}, \\ a(0) = 1. \end{cases}$$

A l'aide de l'expression de F^{-1} par (3.20) et en résolvant l'équation différentielle dans chaque cas, on obtient qu'il existe des constantes c_i (avec c_3, c_9 et $c_{13} > 0$) telles que :

- Pour $0 \leq t \leq c_1 n^{3\gamma} + c_2$,

$$a(t) = e^{-(c_3 t + c_4)^{1/3}}.$$

- Pour $c_1 n^{3\gamma} + c_2 \leq t \leq c_5 n^{(d+2)\gamma} + c_6 n^{3\gamma} + c_7 n^{2\gamma} + c_8$,

$$a(t) = e^{-c_9 t/n^{2\gamma} + c_{10} n^\gamma + c_{11}/n^{2\gamma} + c_{12}}.$$

- Pour $c_5 n^{(d+2)\gamma} + c_6 n^{3\gamma} + c_7 n^{2\gamma} + c_8 \leq t$,

$$a(t) = e^{-(c_{13} t + c_{14} n^{(d+2)\gamma} + c_{15} n^{3\gamma} + c_{16} n^{2\gamma} + c_{17})^{d/d+2}}.$$

On choisit $\gamma < \frac{1}{d+2}$, ainsi on déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $t = 2n$ assez grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(\bar{Z}_{2n}^n = o) \leq e^{-cn \frac{d}{d+2}}.$$

Finalement par (2.25) et comme $n \mapsto \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o)$ est une fonction décroissante, on obtient l'existence d'une constante $c > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o) \leq e^{-cn \frac{d}{d+2}}.$$

□

2.4.3 Conclusion : borne supérieure pour la transformée de Laplace.

Nous pouvons alors démontrer la borne supérieure de la propriété 2.1.1.

Proposition 2.4.4. *Pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $c(d, \alpha, p) > 0$ telle que Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$,*

$$\exists n_\omega \quad \forall n \geq n_\omega \quad \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-c(d, \alpha) n^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Démonstration. La résultat découle des 3 faits suivants.

1. D'abord, il suffit de prouver le résultat pour une valeur $0 < \alpha_0 < 1$ de α . En effet, supposons que $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha_0^{N_n}) \leq e^{-c(d, \alpha_0) n^{\frac{d}{d+2}}}$, alors
 - si $\alpha \leq \alpha_0$, il est clair que $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha_0^{N_n}) \leq e^{-c(d, \alpha_0) n^{\frac{d}{d+2}}}$,
 - si $\alpha_0 < \alpha < 1$, nous pouvons trouver $\lambda > 0$ tel que $\alpha = \alpha_0^\lambda$, avec $0 < \lambda < 1$. Puis, on écrit,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) &= \mathbb{E}_0^\omega([\alpha_0^{N_n}]^\lambda) \\ &\leq [\mathbb{E}_0^\omega(\alpha_0^{N_n})]^\lambda \quad (\text{inégalité de Jensen}) \\ &\leq e^{-\lambda c(d, \alpha_0) n^{\frac{d}{d+2}}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat pour α en prenant $c(d, \alpha) = \lambda c(d, \alpha_0) = (\frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha_0)})c(d, \alpha_0)$.

2. La deuxième étape est résumée dans le lemme suivant (voir [15]).

Lemme 2.4.5. *Il existe une valeur $\alpha_1 > 0$ et une constante $c'_0 > 0$ telles que,*

$$\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) \geq c'_0 \mathbb{E}_0^\omega(\alpha_1^{N_n}).$$

Démonstration. Pour "retirer" la condition $\{X_{2n} = 0\}$, l'idée est de couper les chemins à l'instant n et d'utiliser la réversibilité entre l'instant n et $2n$. On utilise en particulier le fait suivant :

$$(2.28) \quad [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 \leq 2d(2m + 1)^d \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0).$$

Ecrivons en effet,

$$\begin{aligned}
 [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 &= \left(\sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \right)^2 \\
 &= \left(\sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \sqrt{\nu(h)} \times 1/\sqrt{\nu(h)} \times \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \right)^2 \\
 &\leq \nu(B_m(\mathcal{C})) \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} (1/\nu(h)) \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h)^2 \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
 &\leq 2d(2m+1)^d \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \times \\
 &\qquad \qquad \qquad \mathbb{P}_h^\omega(N_n = m; X_n = 0)(1/\nu(0)) \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{(par réversibilité)} \\
 &\leq 2d(2m+1)^d \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \times \\
 &\qquad \qquad \qquad \mathbb{P}_0^\omega(N_n^{2n} = m; X_n = h; X_{2n} = 0) \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{(où } N_n^{2n} = \#\{X_n, \dots, X_{2n}\}) \\
 &\leq 2d(2m+1)^d \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0).
 \end{aligned}$$

Calculons maintenant, $\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}})$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &= \sum_{m \geq 1} (1/2)^m \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} = m; X_{2n} = 0) \\
 &= 1/2 \sum_{m \geq 1} (1/2)^m \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq m; X_{2n} = 0).
 \end{aligned}$$

Car $\{N_{2n} = m\} = \{N_{2n} \leq m\} - \{N_{2n} \leq m-1\}$. Puis,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &\geq 1/2 \sum_{m \geq 1} (1/4)^m \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0) \\
&\quad (\text{par le fait (2.28)}) \\
&\geq \sum_{m \geq 1} \frac{1}{4d(2m+1)^d} (1/4)^m [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 \\
&\geq c_0 \sum_{m \geq 1} (1/5)^m [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 \\
&\geq c_0 \left(\sum_{m \geq 1} (1/4)^m \right)^{-1} \times \\
&\quad \left(\sum_{m \geq 1} \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^m \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m) \right) \\
&\quad (\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\
&\geq c'_0 \mathbb{E}_0^\omega \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^{N_n} \right].
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 2.4.5. □

3. On peut alors conclure. Pour $\alpha = 1/2$, la propriété 2.4.3 donne

$$\mathbb{P}_o^\omega(Z_n = o) \leq e^{-cn \frac{d}{d+2}}.$$

Par ailleurs, par la propriété 2.2.3 on a

$$\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) = \mathbb{P}_o^\omega(Z_n = o).$$

Donc le lemme 2.4.5 du point 2, nous donne une borne supérieure du bon ordre pour une valeur α_1 , et le point 1 permet d'étendre cette borne à tout α de $]0, 1[$. □

2.5 Borne inférieure de $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$

Dans cette partie, on montre la

Proposition 2.5.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand, on ait :*

$$\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \geq e^{-cn \frac{d}{d+2}}.$$

2.5.1 Faits généraux pour les marches aléatoires

Ce qui suit peut s'appliquer à toute chaîne de Markov Z qui admet une mesure réversible m . Soit A un ensemble de points du graphe sur lequel Z évolue. On peut écrire

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) &= \sum_z \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z) \tilde{\mathbb{P}}_z^\omega(Z_n = o), \\
 &\geq \sum_{z \in A} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z) \times \frac{m(0)}{m(z)} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z), \\
 &\geq \frac{m(0)}{m(A)} \left[\sum_{z \in A} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z) \right]^2, \\
 &\geq \frac{m(0)}{m(A)} [\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n \in A)]^2.
 \end{aligned}$$

Dans notre cas, nous prenons :

$$A = A_r = \{(a, f); a \in B_r(\mathcal{C}) \text{ et } \text{supp}(f) \subset B_r(\mathcal{C})\}.$$

Rappelons que $m(a, f) = \nu(a) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\#\{i; f(i)=\bar{1}\}}$. Donc, on a :

$$m(A_r) \leq 2dr^d \sum_{k=0 \dots r^d} C_{r^d}^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k = 2d \frac{r^d}{\alpha^{r^d}}.$$

Par ailleurs, la structure des arêtes sur un produit en couronne, implique :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n \in A_r) &\geq \mathbb{P}_0^\omega(\forall i \in [0, n] X_i \in B_r(\mathcal{C})) \\
 &\geq \mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r),
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) \\
 (2.29) \qquad \qquad \qquad &\geq \frac{\alpha^{r^d}}{2dr^d} [\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r)]^2.
 \end{aligned}$$

On est ramené à trouver une borne inférieure de $\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r)$, ce qui est le but de la section suivante.

2.5.2 Borne inférieure de $\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r)$

Ce type d'estimée inférieure est connue dans le cas de \mathbb{Z}^d , mais la preuve utilise un principe de réflexion (voir[11]), que l'on ne peut utiliser dans \mathcal{C} . Notre démarche (inspirée de [15]) pour contourner cette difficulté, utilise des outils analytiques. On prouve :

Proposition 2.5.2. *Il existe une constante c telle que Q p.s, pour r assez grand et pour $n \geq r$, on ait :*

$$\mathbb{P}_0^\omega\left(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r\right) \geq e^{-c(r+n/r^2)}.$$

(Pour $n < r$ cette probabilité est égale à 1.)

Démonstration. Divisons la preuve en 5 temps.

1. Notons $\sigma_r = \min\{j \geq 0; X_j \notin B_r(\mathcal{C})\}$ et considérons les opérateurs $P^{B_r(\mathcal{C})}$ définis sur les fonctions $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$P^{B_r(\mathcal{C})}(f)(x) = 1_{B_r(\mathcal{C})}(x) \mathbb{E}_x^\omega(f(X_1); \sigma_r > 1).$$

L'opérateur $P^{B_r(\mathcal{C})}$ est sous markovien mais néanmoins symétrique par rapport à la restriction de ν à $B_r(\mathcal{C})$. On note $p^{B_r(\mathcal{C})}(\cdot, \cdot)$ les noyaux de $P^{B_r(\mathcal{C})}$ et $p_n^{B_r(\mathcal{C})}(\cdot, \cdot)$ les noyaux de $(P^{B_r(\mathcal{C})})^n$. Pour tout $x, y \in B_r(\mathcal{C})$, on a :

$$p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) = 1_{\{(x,y) \in B_r(\mathcal{C})^2\}} \mathbb{P}_x^\omega(X_1 = y),$$

et

$$p_n^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) = \mathbb{P}_x^\omega(X_n = y; \sigma_r > n).$$

2. Pour $n \geq r$ on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^\omega\left(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r\right) &= \mathbb{P}_0^\omega(\sigma_r > n) \\ &= \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p_n^{B_r(\mathcal{C})}(0, y) \\ &\geq \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p_r^{B_r(\mathcal{C})}(0, y) p_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}(y, y) \\ &\geq e^{-rc} \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}(y, y) \\ &\quad \text{(avec } c = \log(2d), \text{ puisque par connexité,} \\ &\quad \text{il existe un chemin entre 0 et } y) \\ &\geq e^{-rc} T_r(P_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}) \\ (2.30) \quad &\geq e^{-rc} (1 - \lambda_1)^{n-r}, \end{aligned}$$

où $\lambda_1 = \lambda_1(B_r(\mathcal{C}))$ est la plus petite valeur propre strictement positive de l'opérateur $(Id - P^{B_r(\mathcal{C})})1_{B_r(\mathcal{C})}$.

$$(2.31) \quad \lambda_1(B_r(\mathcal{C})) = \inf_{\substack{\text{supp}(f) \subset B_r(\mathcal{C}) \\ f \neq 0}} \frac{\xi(f, f)}{\|f\|_{l^2(\nu)}^2},$$

avec

$$\xi(f, f) = \left((Id - P^{B_r(\mathcal{C})}) 1_{B_r(\mathcal{C})} f | f \right)_\nu.$$

Notons que si $\text{supp}(f) \subset B_{r-1}(\mathcal{C})$, on peut simplifier l'expression de ξ .

$$\begin{aligned} \xi(f, f) &= \sum_{x \in B_r(\mathcal{C})} \nu(x) f(x) [f(x) - \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) f(y)] \\ &= \sum_{x \in B_r(\mathcal{C})} \nu(x) f(x) \left[\sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) (f(x) - f(y)) \right] \\ &\quad (\text{Car si } x \in B_{r-1}(\mathcal{C}), \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) = 1.) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in B_r(\mathcal{C})} \nu(x) p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) (f(x) - f(y))^2. \end{aligned}$$

3. Prenons maintenant $h(x) = (r - |x|) 1_{B_r(\mathcal{C})}$. On a $\text{supp}(h) \subset B_{r-1}(\mathcal{C})$, donc on peut utiliser la formule précédente pour $\xi(h, h)$, et on a :

- $\xi(h, h) \leq |B_r(\mathcal{C})|$.
- $h \geq r/2$ sur $B_{r/2}(\mathcal{C})$, donc $\|h\|_{l^2(\nu)}^2 \geq (r/2)^2 \nu(B_{r/2}(\mathcal{C})) \geq \frac{1}{2d} (r/2)^2 |B_{r/2}(\mathcal{C})|$.

Ainsi par (2.31), on déduit :

$$(2.32) \quad \lambda_1 \leq 8d \frac{|B_r(\mathcal{C})|}{r^2 |B_{r/2}(\mathcal{C})|}$$

4. L'étape suivante consiste à minorer $|B_{r/2}(\mathcal{C})|$. On a le lemme suivant :

Lemme 2.5.3. *Pour $p > p_c$, il existe $c > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour r assez grand, on ait :*

$$|B_r(\mathcal{C})| \geq cr^d.$$

Démonstration. Remarquons que :

$$\text{si } m \geq \max_{x \in \mathcal{C}_r} D(0, x), \text{ alors } \mathcal{C}_r \subset B_m(\mathcal{C}).$$

Maintenant, par le corollaire 1.3 de [1], il existe une constante $\rho' = \rho'(p, d) \geq 1$ telle que Q p.s,

$$\limsup_{N_1(y) \rightarrow +\infty} \frac{D(0, y)}{N_1(y)} \leq \rho'.$$

Donc,

$$(2.33) \quad \begin{aligned} &\exists \rho' \geq 1 \text{ } Q \text{ p.s } \exists A_\omega \geq 0 \forall y \in \mathcal{C}, \\ &(N_1(y) \geq A_\omega \Rightarrow D(0, y) \leq 2\rho' N_1(y)). \end{aligned}$$

Soit $r \geq r_\omega = \max_{\substack{z \in \mathcal{C} \\ N_1(z) < A_\omega}} D(0, z)$ et prenons $m = 2\rho'r$. Soit maintenant $x \in \mathcal{C}_r$, on

distingue deux cas :

-soit $N_1(x) \geq A_\omega$, alors par (2.33), $D(0, x) \leq 2\rho'N_1(x) \leq 2\rho'r = m$,

-ou bien $N_1(x) < A_\omega$, mais alors par notre choix de r , $D(0, x) \leq r \leq 2\rho'r = m$.

Dans tous les cas, on obtient que pour tout $r \geq r_\omega$ et pour tout x dans \mathcal{C}_r , $D(0, x) \leq m = 2\rho n$. On déduit donc,

$$\exists \rho' \text{ tel que } Q \text{ p.s pour } r \text{ assez grand, } \mathcal{C}_r \subset B_{2\rho'r}(\mathcal{C}).$$

Puis par la propriété 2.3.2 (voir Appendice B dans [14]), on sait qu'il existe une constante $\rho > 0$ telle que Q p.s, pour r assez grand, $|\mathcal{C}_r| \geq \rho r^d$. Finalement, on a bien l'existence d'une constante $c > 0$ telle Q p.s pour r assez grand, $|B_r(\mathcal{C})| \geq cr^d$. \square

5. On déduit alors immédiatement de l'étape 4 et de (2.32) qu'il existe $C > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour r assez grand,

$$\lambda_1(B_r(\mathcal{C})) \leq \frac{C}{r^2}.$$

Donc pour r assez grand, on peut écrire : $1 - \lambda_1 \geq e^{-2\lambda_1}$. Et finalement, avec (2.30), on déduit :

$$\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r) \geq e^{-c(r+(n-r)/r^2)} \geq e^{-c(r+n/r^2)}.$$

\square

2.5.3 Preuve de la proposition 2.5.1.

Par l'inégalité (2.29) et par la propriété 2.5.2, on déduit, qu'il existe $c > 0$ tel que Q p.s, pour r assez grand et $n \geq r$, on ait :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &\geq \frac{\alpha^{r^d}}{2dr^d} e^{-2c(r+n/r^2)} \\ &\geq e^{-c'(r^d+n/r^2)}. \end{aligned}$$

choisissons r proportionnel à $n^{\frac{1}{d+2}}$ (qui est bien plus petit que n , pour n assez grand), ainsi on obtient finalement l'existence d'une constante $c > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand,

$$\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}}) \geq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Pour les temps impairs, on remarque simplement que $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}}) \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n-1}})$. Ce qui achève la preuve de 2.5.1.

2.6 Questions et extensions

2.6.1 Questions ouvertes

La première question naturelle, est de savoir si $\frac{1}{n^{d/d+2}} \log \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$ converge lorsque n tend vers l'infini ? Nous savons seulement que cette expression est bornée .

Une autre question intéressante est d'estimer $Q(\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}))$. Pour la borne supérieure, à n fixé on doit estimer la Q probabilité que l'inégalité isopérimétrique de la propriété 2.1.4 ne soit pas réalisée. Dans [2], des calculs assez précis donnent un contrôle de ce type d'événement en e^{-cn^β} avec $\beta = \frac{d-1}{d+1} < \frac{d}{d+2}$. Or $e^{-cn^{d/d+2}} \ll e^{-cn^\beta}$, et ce terme d'erreur est déjà trop "gros" pour la borne espérée.

2.6.2 Extensions

La même démarche donne des bornes supérieures pour des fonctionnelles plus générales, comme par exemple, $\exp - \sum_{z; L_{z;n} \neq 0} F(L_{z;n}, z)$ où F une fonction positive et $L_{z;n}$ est le nombre de visite de z par la marche X sur l'amas avant le temps n .

Remerciements

*Je remercie mon directeur de thèse Pierre Mathieu ainsi que Christophe Pittet, Enri-
 que Andjel et Anna Erschler pour leurs remarques très utiles.*

Chapitre 3

Étude d'autres fonctionnelles.

3.1 Explication de la méthode.

Les notations sont les mêmes que dans l'introduction et la partie 1. $(X_n)_n$ désigne toujours la marche simple sur \mathcal{C} . Supposons que nous voulions étudier :

$$(3.1) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(e^{-\sum_{x; L_x; 2n > 0} F(L_x; 2n, x)} \mathbf{1}_{\{X_{2n}=0\}} \right),$$

où $L_{x;n} = \#\{k; X_k = x \text{ et } 0 \leq k \leq n\}$ et F est une fonction positive de deux variables.

Pour les bornes inférieures nous allons utiliser des méthodes classiques. Mais pour les bornes supérieures, l'idée est de faire apparaître la transformée de Laplace de ces fonctionnelles, comme probabilité de retour dans un graphe plus "gros".

Soient $B_x = (V(B_x), E(B_x))_{x \in \mathcal{C}}$ une famille de graphes et soit 0_x un point dans chaque B_x que nous appellerons origine. Pour tout $x \in \mathcal{C}$, considérons la marche $(Y_n^x)_n$ sur $V(B_x)$ issue de 0_x , qui saute uniformément sur ses voisins et le point où elle se trouve et notons $\mathbb{P}_{0_x}^{B_x}$ la loi de $(Y_n^x)_n$.

Les noyaux de transition de Y^x vérifient :

$$p^{B_x}(a, b) = \frac{1}{\nu_x(a) + 1} (\mathbf{1}_{\{a=b\}} + \mathbf{1}_{\{(a,b) \in E(B_x)\}}),$$

où $\nu_x(a)$ désigne le nombre de voisins de a dans B_x .

Considérons le graphe

$$(3.2) \quad W_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^g \wr B_z.$$

Comme dans la partie 2.2, rappelons la définition de ce produit en couronne :

-les points de $W_{\mathcal{C}}$, notés $V(W_{\mathcal{C}}) = V(\mathcal{C}^g \wr B_z)$, sont les couples (a, f) , avec $a \in \mathcal{C}$ et $f : \mathcal{C} \rightarrow \cup_{x \in \mathcal{C}} V(B_x)$, tel que pour tout $x \in \mathcal{C}$, $f(x) \in V(B_x)$.

-les arêtes de $W_{\mathcal{C}}$ sont les éléments de la forme $((a, f); (b, g))$ tels que, soit $f = g$ et $\omega(a, b) = 1$,

soit $a = b$ et $\forall x \neq a$ $f(x) = g(x)$ et $(f(a), g(a)) \in E(B_a)$.

Notons o le point $(0, f_0)$ de $V(W_{\mathcal{C}})$ où f_0 est la configuration nulle, ie : pour tout $x \in \mathcal{C}$, $f_0(x) = 0_x$.

Soit alors $(Z_n)_n$ la marche aléatoire sur $V(W_{\mathcal{C}})$ issue de o , définie de la manière suivante, supposons que la marche soit en $z = (x, f)$ à un certain instant, en une unité de temps, on change la valeur de f au point x suivant la valeur de la marche Y^x issue de $f(x)$, on saute maintenant dans la base \mathcal{C} selon la loi uniforme sur les voisins de x , on arrive en $y \in \mathcal{C}$, et on change à nouveau la valeur de f au point y selon la valeur de la marche issue de $f(y)$. Ces 3 étapes sont indépendantes.

Ainsi, en notant \tilde{p} les noyaux de transition de Z , on a :
pour tout $((a, f); (b, g)) \in (V(\mathcal{C}^g \wr B_z))^2$:

$$(3.3) \quad \tilde{p}[(a, f)(b, g)] = \frac{\chi[(a, f), (b, g)]}{\nu(a) [\nu_a(f(a)) + 1] [\nu_b(f(b)) + 1]},$$

où $\chi[(a, f), (b, g)]$ est égal à 1 si la marche peut sauter de (a, f) à (b, g) et 0 sinon. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \chi[(a, f), (b, g)] = \omega(a, b) & (\chi_1[(a, f), (b, g)] + \chi_2[(a, f), (b, g)] \\ & + \chi_3[(a, f), (b, g)] + \chi_4[(a, f), (b, g)]), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_1[(a, f), (b, g)] &= 1_{\{\forall x \ f(x)=g(x)\}}, & \chi_2[(a, f), (b, g)] &= 1_{\{(f(a),g(a)) \in E(B_a)\}}, \\ & & & \forall x \neq a \ f(x)=g(x) \\ \chi_3[(a, f), (b, g)] &= 1_{\{(f(b),g(b)) \in E(B_b)\}}, & \chi_4[(a, f), (b, g)] &= 1_{\{\forall x \in \{a,b\} \ (f(x),g(x)) \in E(B_x)\}}, \\ & \forall x \neq b \ f(x)=g(x) & & \forall x \neq a,b \ f(x)=g(x) \end{aligned}$$

Remarquons que la mesure \tilde{m} définie par,

$$(3.4) \quad \tilde{m}(a, f) = \nu(a),$$

est réversible pour la marche Z . On notera \tilde{a} les noyaux :

$$(3.5) \quad \tilde{a}(x, y) = \tilde{m}(x)\tilde{p}(x, y)$$

Il est alors intéressant d'introduire le graphe $W'_{\mathcal{C}}$ avec les mêmes points que $W_{\mathcal{C}}$ mais où les arêtes sont adaptées aux sauts de Z .

$$(3.6) \quad \begin{aligned} V(W'_{\mathcal{C}}) &= V(W_{\mathcal{C}}) \text{ et,} \\ ((a, f); (b, g)) \in E(W'_{\mathcal{C}}) &\iff \chi[(a, f); (b, g)] = 1. \end{aligned}$$

Avec les notations de la parties 2.4.1 $W'_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^g \wr B_x$. Ainsi, dans le graphe $W'_{\mathcal{C}}$, Z est une marche au plus proche voisin. Remarquons également que la projection de Z sur \mathcal{C} donne la marche X .

Soit $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega$ la loi de Z issue de o . On a :

Proposition 3.1.1.

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o) = \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;n} > 0} \mathbb{P}_{0_x}^{B_x}(Y_{L_{x;n}}^x = 0_x) \mathbf{1}_{\{X_n=0\}} \right).$$

Preuve : C'est identique à la propriété 2.2.3.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega \left((X_n, f_n) = (0, f_0) \right) \\ &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_n = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n \text{ et } f_n = f_0) \\ &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_n = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) \\ &\quad \times \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(f_n = f_0 | X_0 = k_0, \dots, X_n = k_n) \\ &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_n = 0}} \mathbb{P}_0^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) \\ &\quad \times \prod_{x; L_{x;n} > 0} \mathbb{P}_{0_x}^{B_x}(Y_{L_{x;n}}^x = 0_x) \\ &= \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;n} > 0} \mathbb{P}_{0_x}^{B_x}(Y_{L_{x;n}}^x = 0_x) \mathbf{1}_{\{X_n=0\}} \right). \end{aligned}$$

Supposons que nous trouvions des graphes B_x tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{0_x}^{B_x}(Y_m^x = 0) = e^{-F(m,x)},$$

alors nous aurons bien l'expression 3.1 qui s'écrit comme une probabilité de retour. Ainsi, une méthode est d'étudier le profil isopérimétrique que l'on a sur $\mathcal{C}^g \wr B_x$, pour en déduire, via les inégalités de Nash, une borne supérieure des noyaux de transitions.

En fait, pour être exactement dans le cadre des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2, nous devons étudier, le profil isopérimétrique, non pas avec les arêtes classiques d'un produit en couronne (ie : dans le graphe $W_{\mathcal{C}}$), mais avec les arêtes constituées par les sauts possibles de la marche (ie : dans le graphe $W'_{\mathcal{C}}$). Les deux graphes sous-jacents étant comme on le verra quasi isométriques, ils satisfont le même type d'inégalités isopérimétriques et on étudie l'isopérimétrie sur le produit en couronne muni des arêtes classiques $W_{\mathcal{C}}$.

On notera $W = W_{\mathcal{C}}$ et $W' = W'_{\mathcal{C}}$ dans la suite pour alléger les notations.

Remarque 3.1.2. *On aurait pu aussi considérer la marche aléatoire $(R_n)_n$ sur W , dont les sauts possibles sont donnés par les arêtes de W , avec les noyaux :*

- $\tilde{q}[(a, f), (a, g)] = \frac{1}{2}p^{B_a}(f(a), g(a))$, où $f = g$ sauf en a , et
- $\tilde{q}[(a, f)(b, f)] = \frac{1}{2}p(a, b)$.

C'est le point de vue adopté dans [6], de cette manière, on évite les problèmes de quasi isométries, mais on obtient alors des estimées des transformées de Laplace des fonctionnelles, non pas de la marche $(X_n)_n$, mais de la marche sur l'amas qui reste à sa position avec probabilité 1/2 et qui avec probabilité 1/2 saute uniformément sur les voisins. (Puisque la projection sur la base de R n'est plus la marche simple X .) En fait, la méthode présentée ici, possède l'avantage de donner directement des informations sur la marche simple X , mais l'on peut aussi déduire ces estimées avec la marche R .

3.2 Principal résultat pour l'isopérimétrie sur un produit en couronne.

3.2.1 Cas moyennable

Rappelons que pour un graphe $G = (V(G), E(G))$, on note

$$Fol_G(k) = \min_{\frac{|\partial_G V|}{|V|} \leq \frac{1}{k}} |V|,$$

où $\partial_G V = \{(x, y) \in E(G); x \in V \text{ et } y \notin V\}$.

Un graphe G est dit non moyennable si il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute partie finie U de $E(G)$, on ait $\frac{|\partial_G U|}{|U|} \geq c$.

On suppose dans cette partie, A et B moyennables, ainsi leur fonction de Folner est finie en tout point. Par rapport à la définition donnée dans la partie 1.3, c'est le cas particulier où les noyaux $a(\cdot, \cdot)$ valent 1 sur $E(G)$. C'est notamment le cas lorsqu'on étudie une marche simple.

Proposition 3.2.1. *Soit $A = (V(A), E(A))$ et $B = (V(B), E(B))$ deux graphes de valence finie en chaque point. Supposons que pour tout $M > 0$ il existe $C_M > 0$ tel que :*

$$(3.7) \quad \forall k > 0 \quad M Fol_A(k) < Fol_A(C_M k).$$

Alors, on a :

$$Fol_{A \wr B}(n) \approx Fol_B(n)^{Fol_A(n)}.$$

(La constante dans la relation \approx ne dépend pas des graphes A et B .)

Ce résultat est dû à A.Erschler, voir [7].

Borne inférieure de $Fol_{A \wr B}$.

Nous prenons $U \subset V(A \wr B)$ tel que $\frac{|\partial_{A \wr B} U|}{|U|} \leq 1/k$ et nous voulons trouver une minoration de $|U|$.

Remarquons qu'il y a deux sortes de points sur le bord de U :

-les points de bord en 'base', ie : les points de la forme $\left((a, f); (b, f) \right)$ où $(a, b) \in E(A)$,

-les points de bord en 'configuration', ie : les points de la forme $\left((a, f); (a, g)\right)$ où $f = g$ sauf en a et $(f(a), g(a)) \in E(B_a)$.

A partir de U , on construit un certain nombre d'objets.

- A chaque $U \subset V(A \wr B)$, on associe un hypergraphe $K_U = \left(V(K_U), \xi(K_U)\right)$ de la manière suivante :

- les sommets sont les f tels qu'il existe x dans A tel que $(x, f) \in U$, ce sont les éléments de $V(K_U)$

- les arêtes sont définies par : pour $f \in V(K_U)$ et $x \in A$, on considère les configurations g telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, g) \in V \\ \text{et} \\ \forall y \neq x f(y) = g(y). \end{array} \right.$$

On relie f et tous ces g par une arête multidimensionnelle, de dimension $d = \dim_x f$.

Où,

$$\dim_x f = \#\{g; (x, g) \in U \text{ and } \forall y \neq x f(y) = g(y)\}.$$

Ces arêtes multidimensionnelles sont les éléments de $\xi(K_U)$.

- A chaque hypergraphe K_U , on associe un graphe appelé le "squelette de dimension un" de U , noté par $\Gamma(K_U) = \Gamma_U = \left(V(\Gamma_U), E(\Gamma_U)\right)$ et défini par :

- les points de Γ_U , sont les configurations de U . $V(\Gamma_U) = V(K_U)$.

- deux sommets v_1, v_2 de Γ_U sont reliés par une arête (de dimension 1), si v_1, v_2 appartiennent à la même arête de dimension d dans $\xi(K_U)$.

- Soit également les poids w sur $E(\Gamma_U)$ définis par $w(e) = 1/d$ pour $e \in E(\Gamma_U)$.

Remarque 3.2.2. On a

$$|U| \geq 2 \sum_{e \in E(\Gamma_U)} w(e).$$

Si de plus, pour tout $(x, f) \in U$ on a $\dim_x f \geq 1$ (U n' a pas de points isolés), alors

$$|U| = 2 \sum_{e \in E(\Gamma_U)} w(e).$$

- Soit $f \in V(K_U)$, nous dirons que f est $(a, b) - \text{satisfaisable}$ si :

$$\#\{x \in p(U); \dim_x f \geq a\} \geq b,$$

où p est la projection $A \wr B \rightarrow A$.

ie : f est $(a, b) - \text{satisfaisable}$ si il y a au moins b arêtes multidimensionnelles attachées à f dans K_U de dimension au moins a . Nous appellerons $S_U(a, b)$ l'ensemble

de ces configurations, si il n'y a pas ambiguïté, la plupart du temps nous ne noterons pas la dépendance en U . (Remarquons que nous pouvons donner un sens à $S(a, b)$, même si a et b ne sont pas entiers.)

- Sinon, nous dirons que f est (a, b) – *non satisfaisable* et noterons $NS(a, b)$.
- Une arête de Γ_U sera dite (a, b) – *satisfaisable* si elle joint deux configurations (a, b) -satisfaisables sinon elle sera (a, b) – *non satisfaisable*. On notera $S^e(a, b)$ [resp $NS^e(a, b)$] l'ensemble des arêtes (a, b) -satisfaisables [resp (a, b) -non satisfaisables].
- Un point $u = (x, f) \in U$ sera dit (a, b) –*satisfaisable* [resp (a, b) –*non satisfaisable*] si $f \in S(a, b)$ [resp $NS(a, b)$]. Nous noterons $S^p(a, b)$ et $NS^p(a, b)$ pour l'ensemble des points de U qui sont (ou ne sont pas) (a, b) -satisfaisables.
- Un point $u = (x, f) \in U$ sera dit a – *bon* si $\dim_x f \geq a$ sinon on dira qu'il est a – *mauvais*.

La preuve de la propriété 3.2.1 comporte 3 étapes (et donc 3 lemmes), on suppose que U vérifie $\frac{|\partial_{A \setminus B} U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}$, nous prouvons d'abord qu'il y a peu de points $NS^p(a, b)$ (pour un certain couple (a, b)), puis on extrait un sous graphe où tous les points sont $S^p(\frac{a}{10}, \frac{b}{10})$, enfin nous déduisons une minoration de $|U|$.

Lemme 3.2.3. Soit $U \in V(A \setminus B)$, tel que $\frac{|\partial_{A \setminus B} U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$ alors

- (i) $\frac{\#\{u \in U; u \text{ } Fol_B(k)\text{-mauvais}\}}{\#U} \leq \frac{1}{1000}$,
- (ii) $\frac{\#\{u \in U; u \in NS^p(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3})\}}{\#U} \leq \frac{1}{500}$.

Démonstration.

Pour (i) on remarque qu'un point $Fol_B(k)$ – *mauvais* de U nous donne au moins un point du bord en 'configuration' de U . En effet, soit (x, f) un point $Fol_B(k)$ – *mauvais*, posons :

$$\tilde{P}_{x,f} = \{g(x); (x, g) \in U \text{ et } \forall y \neq x \ g(y) = f(y)\} \text{ et}$$

$$P_{x,f} = \{(x, g); g(x) \in \tilde{P}_{x,f}\}. \text{ Notons que } |\tilde{P}_{x,f}| = |P_{x,f}|.$$

Soit F_0 l'ensemble des configurations tel que :

$$\bigcup_{x \in A, f \in F_0} P_{x,f} = \{u \in U; u \text{ est } Fol_B(k) \text{-mauvais}\}.$$

Puisque (x, f) est mauvais, on a $|\tilde{P}_{x,f}| < Fol_B(k)$ et par définition de la fonction de Folner :

$$|\partial_B \tilde{P}_{x,f}| > \frac{1}{k} |\tilde{P}_{x,f}|.$$

Or on a une injection $\bigcup_{x \in A, f \in F_0} \partial_B \tilde{P}_{x,f} \longrightarrow \partial U$,

$$(g_1, g_2) \mapsto \left((x, f_{x,g_1}), (x, f_{x,g_2}) \right)$$

$$\text{où } (g_1, g_2) \in \partial_B \tilde{P}_{x,f} \text{ et } f_{a,h} : \begin{array}{l} v \rightarrow f(v) \text{ pour } v \neq a. \\ a \rightarrow h \end{array}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{|U|}{1000k} \geq |\partial_{A \setminus B} U| \geq \sum_{x \in A, f \in F_0} |\partial_B \tilde{P}_{x,f}| \geq \frac{1}{k} \sum_{x \in A, f \in F_0} |\tilde{P}_{x,f}| = \frac{1}{k} \#\{u \in U; u \text{ } Fol_B(k)\text{-mauvais}\}.$$

Pour (ii).

1. Définissons,

$$\begin{aligned} Neud &= \{u \in U; u \in NS^p(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3})\} \\ &= \{u = (x, f) \in U; f \in NS(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3})\}, \end{aligned}$$

et posons :

$$Neud(f) = \{(x, f); (x, f) \in U\}.$$

Remarquons que $p(Neud(f)) = \{x; (x, f) \in U\}$.

Pour F ensemble de configurations, soit

$$Neud(F) = \bigcup_{f \in F} Neud(f).$$

Notons que c'est une union disjointe.

2. Soit maintenant $f \in NS(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3})$, étudions l'ensemble $p(Neud(f))$.

Ou bien, il donne beaucoup de points de bord en 'base' .

Ou bien, il en donne peu et dans ce cas, par le fait que f soit non satisfaisable, ce point va contribuer à donner du bord en 'configuration'.

Dans tout les cas, on obtient du bord de U , mais les hypothèses du lemme limitent cet apport.

On distingue donc 2 cas :

$$\underline{\text{Premier cas}} : f \in F_1 := \{f \in NS(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3}); \frac{\#\partial_{Ap}(Neud(f))}{\#p(Neud(f))} > \frac{1}{k}\}.$$

L'application $\bigcup_{f \in F_1} \partial_{Ap}(Neud(f)) \rightarrow \partial U$ est injective.

$$(x, y) \mapsto ((x, f); (y, f))$$

donc, on a :

$$|\partial_{A \setminus B} U| \geq \sum_{f \in F_1} |\partial_{AP}(Neud(f))| \geq \frac{1}{k} \sum_{f \in F_1} |p(Neud(f))| \geq \frac{1}{k} |Neud(F_1)|. \quad (3.8)$$

Second cas : $f \in F_2 := \{f \in NS(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3}); \frac{\#\partial_{AP}(Neud(f))}{\#p(Neud(f))} \leq \frac{1}{k}\}$.

Comme $f \in NS(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3})$ on a :

$$\#\{x \in p(Neud(f)); \dim_x f \geq \frac{Fol_B(k)}{3}\} < \frac{1}{3} Fol_A(k).$$

Donc

$$\#\{x \in p(Neud(f)); \dim_x f < \frac{Fol_B(k)}{3}\} \geq |Neud(f)| - \frac{1}{3} Fol_A(k)$$

(On a utilisé que $|p(Neud(f))| = |Neud(f)|$.)

Du fait que $f \in F_2$ et par la définition de la fonction de Folner :

$$|Neud(f)| \geq Fol_A(k).$$

Donc

$$\#\{x \in p(Neud(f)); \dim_x f < \frac{Fol_B(k)}{3}\} \geq \frac{2}{3} |Neud(f)|.$$

$$(3.9) \quad ie : |P_f| \geq \frac{2}{3} |Neud(f)|,$$

avec $P_f = \{x \in p(Neud(f)); \dim_x f < \frac{Fol_B(k)}{3}\}$.

A chaque point de P_f (pour f dans F_2), on peut faire correspondre de manière injective un point du bord (en configuration) de U . En effet, comme précédemment : Pour $x \in P_f$ et $f \in Neud(F_2)$, on a :

$$|\tilde{P}_{x,f}| \leq \frac{Fol_B(k)}{3} < Fol_B(k).$$

où $\tilde{P}_{x,f} = \{g(x); (x, g) \in U \text{ and } \forall y \neq x \ g(y) = f(y)\}$.

On a donc,

$$|\partial_B \tilde{P}_{x,f}| > \frac{1}{k} |\tilde{P}_{x,f}| \geq 0,$$

d'où

$$|\partial_B \tilde{P}_{x,f}| \geq 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 |\partial_{A|B}U| &\geq \sum_{x \in P_f, f \in F_2} |\partial_B \tilde{P}_{x,f}| \\
 &\geq \sum_{f \in F_2} \frac{2}{3} |\text{Neud}(f)| \quad \text{par (4.9),} \\
 &\geq \frac{2}{3} |\text{Neud}(F_2)| \\
 &\geq \frac{1}{k} |\text{Neud}(F_2)| \text{ pour } k \geq 2.
 \end{aligned}$$

3. En sommant (3.8) et cette dernière inégalité et en utilisant le fait que $\frac{|\partial_{A|B}U|}{|U|} < \frac{1}{1000k}$, on obtient :

$$\frac{|\text{Neud}|}{|U|} < \frac{1}{500}.$$

□

Lemme 3.2.4. Soit $a, b > 0$. Soit $(V(\Gamma_U), E(\Gamma_U), w)$ le squelette de dimension 1 construit à partir de K_U . Supposons que $E(\Gamma_U) \neq \emptyset$ et $\forall (x, f) \in U \dim_x f \geq a$. Si de plus :

$$\frac{\sum_{e \in NS_U^e(a,b)} w(e)}{\sum_{e \in E(\Gamma_U)} w(e)} < 1/2,$$

alors, il existe un sous graphe non vide Γ' de Γ_U tel que toutes les arêtes sont $S_U(a/10, b/10)$.

Démonstration. Dans le graphe $(V(\Gamma_U), E(\Gamma_U))$, on efface tous les points $NS_U^p(a/10, b/10)$ et les arêtes adjacentes. Après cette première étape, il peut alors apparaître des nouveaux points $NS_{U_1}^p(a/10, b/10)$, où $U_1 = U - NS_U^p(a/10, b/10)$.

On efface à nouveau ces points et les arêtes adjacentes, et on itère ce processus.

Soit U_i l'ensemble des sommets restant à l'étape i .

$$\begin{cases} U_0 = U, \\ \text{pour } i \geq 1 \quad U_{i+1} = U_i - NS_{U_i}^p(a/10, b/10). \end{cases}$$

Il suffit de prouver que le processus prend fin avant que le graphe soit vide.

$$\text{Soit } C_1 = \sum_{e \in NS_U(a,b)} w(e), \quad C_2 = \sum_{\substack{e \in S_U^e(a,b); e \text{ effacée} \\ \text{à la fin du processus}}} w(e),$$

et

$$C_0 = \sum_{\substack{e \in E(\Gamma_U); e \text{ effacée} \\ \text{à la fin du processus}}} w(e).$$

Si nous montrons que $C_2 \leq C_1$, le résultat découlera, puisque :

$$C_0 \leq C_1 + C_2 \leq 2C_1 < \sum_{e \in E(\Gamma_U)} w(e).$$

Ce qui signifiera qu'il reste un (ou des) point(s) non effacé(s). ie : $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les sommets du graphe obtenus à l'étape k , sont $S_{U_{k_0}}^p(a/10, b/10)$, donc $S_U^p(a/10, b/10)$.

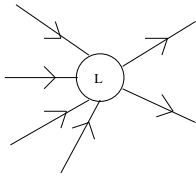
Pour voir cela, introduisons une orientation sur les arêtes effacées : si L et Q sont des points du graphe, nous orientons l'arête de L vers Q si L est effacé avant Q , et nous choisissons une orientation arbitraire si ils sont effacés en même temps. We notons L_{\downarrow} l'ensemble des arêtes quittant le point L et L_{\uparrow} pour l'ensemble des arêtes arrivant en L , à l'étape 0.

Sous-lemme 3.2.5. *Soit $k \in \mathbb{N}$, et L un point du graphe Γ_U (satisfaisant les hypothèses du lemme 3.2.4), effacé après $k+1$ étapes. Supposons que L soit initialement $S_U^p(a, b)$, alors*

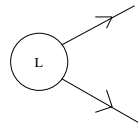
$$\sum_{e \in L_{\downarrow}} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{e \in L_{\uparrow}} w(e).$$

ETAT INITIAL

ETAT PRECEDENT L'EFFACEMENT DE A



L est $S(a', b')$
Il y a au moins b' arêtes multidimensionnelles
de dimension au moins a'



Il reste moins de $b'/3$ arêtes multidimensionnelles
de dimension au moins $a'/3$.

Ce dessin est représenté à l'étape 0 à gauche et à l'étape k à droite.

Démonstration. Il est utile de remarquer le fait suivant, pour une arête multidimensionnelle e , la somme des poids dans le squelette des arêtes provenant de e et adjacente à un point, vaut 1. Ceci résulte des poids que l'on a choisis.

1. Soit maintenant N_0 le nombre d'arêtes multidimensionnelles à l'étape 0, quittant L . Du fait que L soit $S_U^p(a, b)$, il y a au moins b arêtes multidimensionnelles attachées à L . Donc,

$$(3.10) \quad N_0 \geq b.$$

Remarquons par ailleurs que :

$$\sum_{\substack{e \in E(\Gamma_U) \\ e \text{ contient } L}} w(e) = N_0.$$

2. Posons :

$$L_1 = \{e \in L, e \text{ provenant d'une arête multidimensionnelle de } K_{U_k}, \\ \downarrow \hspace{15em} \text{de } \dim \geq a/10\},$$

et

$$L_2 = \{e \in L, e \text{ provenant d'une arête multidimensionnelle de } K_{U_k}, \\ \downarrow \hspace{15em} \text{de } \dim < a/10\}.$$

On a $L = L_1 \cup L_2$, car les arêtes de L , sont les arêtes quittant A à l'étape k .

3. Du fait que L devient $NS_{U_k}^p(a/10, b/10)$, il a moins de $b/10$ arêtes multidimensionnelles de dimension au moins $a/10$. Notons les par exemple f_1, \dots, f_q , avec $q < b/10$.

$$(3.11) \quad \sum_{\substack{e \in L_1 \\ \downarrow}} w(e) = \sum_{k=1..q} \underbrace{\sum_{\substack{e \\ \text{provenant de } f_k}} w(e)}_{\leq 1} \leq q.$$

(Initialement cette dernière somme valait 1, mais après l'effacement de certaines arêtes, elle est plus petite que 1.)

4. Par ailleurs, notons g_1, \dots, g_h les autres arêtes multidimensionnelles, de dimension strictement inférieure à $a/10$, attachées à L à l'étape k , avec $h \leq N_0 - q$.
Pour tout $k = 1..h$,

$$(3.12) \quad \sum_{\substack{e \\ \text{provenant de } g_k}} w(e) \leq \frac{1}{a} \frac{a}{10} \leq \frac{1}{10}.$$

(En effet, premièrement puisque tous les points ont initialement pour dimension au moins a , on déduit $\forall e \in E(\Gamma_{U_i}) w(e) \leq 1/a$ et deuxièmement une arête de dimension inférieur à $a/10$ donne moins de $a/10$ arêtes attachées à un point, dans le squelette.)

5. Finalement avec (3.11) et (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in A_{\downarrow}} w(e) &= \sum_{e \in A_1_{\downarrow}} w(e) + \sum_{e \in A_2_{\downarrow}} w(e) \\ &\leq q + (N_0 - q) \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} N_0 + \frac{9}{10} q \\ &= \frac{19}{100} N_0. \end{aligned}$$

($q < b/10 \leq N_0/10$ par (3.10).)

Donc,

$$\sum_{e \in A_{\downarrow}} w(e) \leq \frac{19}{100} N_0 \quad \text{et} \quad \sum_{e \in A_{\uparrow}} w(e) \geq N_0 - \frac{19}{100} N_0 = \frac{81}{100} N_0.$$

D'où,

$$\sum_{e \in A_{\downarrow}} w(e) \leq \frac{19}{81} \sum_{e \in A_{\uparrow}} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{e \in A_{\uparrow}} w(e).$$

□

Pour finir la preuve, posons :

$D_1 = \{\text{sommets effacés à l'étape 1}\}$,

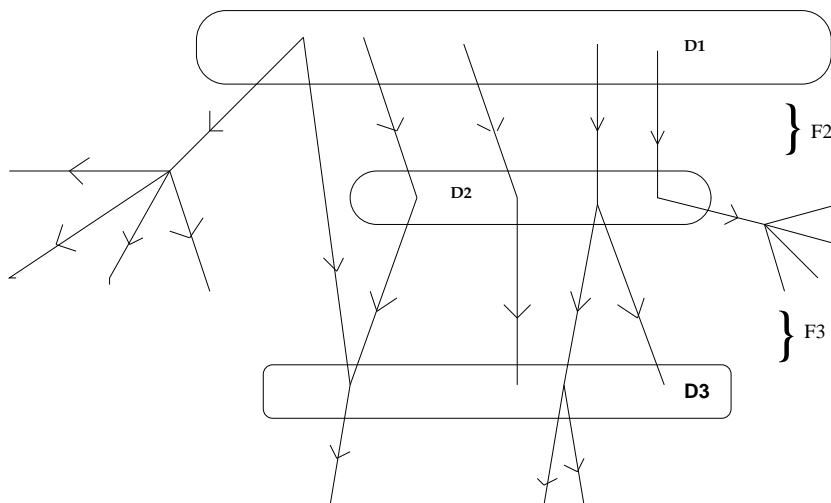
et pour $i \geq 2$

$D_i = \{\text{sommets } S_U^p(a, b) \text{ effacés à l'étape } i\}$,

$F_i = \{\text{arêtes entre } D_i \text{ et } D_{i-1}\}$,

$F'_i = \{\text{arêtes quittant } D_{i-1}\}$.

Notons que $F_i \subset F'_i$ et que les arêtes de F'_i sont effacées.



On pratique en 4 étapes :

1. En appliquant le sous lemme 4.2.3 en chaque point de D_i , dans le graphe restant à l'étape $i - 2$. (Chaque point de D_i est $S(a, b)$.) On obtient :

$$\forall i \geq 2 \quad \sum_{e \in F'_{i+1}} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{e \in F_i} w(e).$$

donc,

$$\sum_{e \in F'_{i+1}} w(e) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \sum_{e \in F_2} w(e).$$

(Nous avons utilisé que $F_i \subset F'_i$.)

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \bigcup_{i \geq 3} F'_i} w(e) &\leq \left(\sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \sum_{e \in F_2} w(e) \\ &= \sum_{e \in F_2} w(e). \end{aligned}$$

2. Maintenant , une arête de F_2 est $NS^e_U(a, b)$ car si elle était $S^e_U(a, b)$, elle aurait relié deux points $S^p_U(a, b)$ et en particulier, les points de D_1 auraient été $S^p_U(a, b)$, donc $S^p_U(a/10, b/10)$ et donc non effacés. Par conséquence :

$$\sum_{e \in F_2} w(e) \leq \sum_{e \in NS^e(a, b)} w(e) = C_1.$$

3. Par ailleurs, toute arête effacée $S^e_U(a, b)$ est dans un certain F'_i avec $i \geq 3$, donc

$$C_2 = \sum_{\substack{e \text{ effacée à la fin du processus} \\ e \in S^e_U(a, b)}} w(e) \leq \sum_{e \in \bigcup_{i \geq 3} F'_i} w(e).$$

4. Ainsi $C_2 \leq C_1$, ce qui termine la preuve. □

Lemme 3.2.6. *Soit $Y > 0$ et $X > 0$. Soit \mathcal{A} un ensemble non vide de configurations, tel que, pour toute configuration de \mathcal{A} , il existe au moins Y points où on peut changer la valeur de la configuration de X manière sans quitter \mathcal{A} alors : $|\mathcal{A}| \geq X^Y$.*

ie :

$$(\forall f \in \mathcal{A} \exists a_1, a_2, \dots, a_Y \in A \text{ such that } g \in \mathcal{A}) \implies |\mathcal{A}| \geq X^Y,$$

$$\text{où } g \text{ est définie à partir de } f \text{ par : } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a_{i_0}, \\ X \text{ possibilités pour } g(a_{i_0}) & \text{si } x = a_{i_0}. \end{cases}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur Y .

Si $Y = 1$, c'est exact.

Supposons $Y \geq 1$ et considérons un point x_0 dans la base tel que il existe X configurations distinctes $f_1, \dots, f_X \in A$ vérifiant $\forall y \neq x_0 f_1(y) = f_2(y) = \dots = f_X(y)$.

Posons alors, pour $i = 1 \dots X$,

$$\mathcal{A}_i = \{f \in \mathcal{A}; f(x_0) = f_i(x_0)\},$$

qui sont non vides.

$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1 \dots X} \mathcal{A}_i$ et les \mathcal{A}_i vérifient l'hypothèse de récurrence avec la constante $Y - 1$.

D'où $|\mathcal{A}| = \sum_{i=1 \dots X} |\mathcal{A}_i| \geq X \cdot X^{Y-1} = X^Y$. \square

Preuve de la propriété 3.2.1 :

Soit $U \subset V(A \wr B)$ tel que $\frac{|\partial U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$.

Soit $\tilde{K} = (V(\tilde{K}), \xi(\tilde{K}))$ le sous hypergraphe de $K_U = (V(K_U), \xi(K_U))$ qui contient uniquement les configurations qui correspondent aux points $Fol_B(k)$ -bons de U .

ie : $\tilde{K} = K_{U - \{u \text{ } Fol_B(k) \text{ mauvais points}\}}$.

\tilde{K} est non vide, par (i) du lemme 3.2.3 $|V(\tilde{K})| \geq (1 - \frac{1}{1000k})|U|$.

On a alors successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{e \in NS^e(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3}) \\ e \in E(\Gamma(\tilde{K}))}} w(e) &\leq \frac{1}{2} \#\{u \in U; NS(\frac{Fol_B(k)}{3}, \frac{Fol_A(k)}{3})\} && \text{remarque 3.2.2} \\ &\leq \frac{1}{1000}|U| && \text{par(3.2.3)(ii)} \\ &\leq \frac{1}{1000 - \frac{1}{k}} \#\{u \in U, Fol_B(k) - \text{bon}\} && \text{par(3.2.3)(i)} \\ &= \frac{2}{1000 - \frac{1}{k}} \sum_{e \in E(\Gamma(\tilde{K}))} w(e) \\ &\leq \theta \sum_{e \in E(\Gamma(\tilde{K}))} w(e). \end{aligned}$$

avec $\theta = \frac{2}{999} < \frac{1}{2}$ donc nous pouvons appliquer le sous lemme 3.2.4 à $(V(\tilde{K}), \xi(\tilde{K}))$,

pour en déduire qu'il existe $(V(K'), E(K'))$ sous graphe de $(V(\Gamma(\tilde{K})), E(\Gamma(\tilde{K})))$ où toutes les arêtes sont $S(\frac{Fol_B(k)}{30}, \frac{Fol_A(k)}{30})$.

Et donc par le lemme (3.2.6), on déduit :

$$|U| \geq \left(\frac{Fol_B(k)}{30}\right)^{\frac{Fol_A(k)}{30}}.$$

Par l'hypothèse (3.7), et le fait que Fol_B est croissante, on a :

$$Fol_{A \wr B}(n) \succeq Fol_B(n)^{Fol_A(n)}.$$

Remarque 3.2.7. *Par cette méthode, on peut remplacer le facteur 1/10 par n'importe quel facteur inférieur à $1 - \sqrt{2}/2$.*

Borne supérieure de $Fol_{A \wr B}$.

Soit $\epsilon > 0$, prenons U_a un ensemble de A tel que

$$|\partial_A U_a|/|U_a| \leq 1/n \text{ et } |U_a| \leq Fol_A(n) + \epsilon,$$

et soit U_b dans B tel que

$$|\partial_B U_b|/|U_b| \leq 1/n \text{ et } |U_b| \leq Fol_B(n) + \epsilon.$$

(U_a et U_b sont appelés des ensembles de Folner, si $\epsilon = 0$.)

Soit alors $U = \{(x, f) \in A \wr B; x \in U_a \text{ et } \text{supp}(f) \subset U_b \text{ et } \text{Im}(f) \subset U_b\}$.

on a :

$$|U| = |U_a||U_b|^{|U_a|} \text{ et } |\partial_{A \wr B} U| = |U_a||\partial_B U_b| + |\partial_A U_a|.$$

Donc,

$$\frac{|\partial_{A \wr B} U|}{|U|} \leq 2/n.$$

D'où,

$$Fol_{A \wr B}(2n) \leq |U| \leq |U_b|^{|U_a|} \leq (Fol_B(n) + \epsilon)^{Fol_A(n) + \epsilon}.$$

Puis en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient :

$$Fol_{A \wr B}(2n) \leq (Fol_A(n))^{Fol_B(n)}.$$

Remarque 3.2.8. *Soient $A = (V(A), E(A))$ et $B = (V(B), E(B))$ deux graphes et soit A' un sous graphe de A . Pour $U \subset V(A')$, on a au moins 2 manières de compter le bord :*

-soit $\partial_{A'} U = \{(x, y) \in E(A'); x \in U \text{ et } y \in A' - U\}$, notons $Fol_{A'}$ la fonction de Folner correspondante,

-ou bien $\partial_A U = \{(x, y) \in E(A); x \in U \text{ et } y \in A - U\}$, notons Fol_A^A la fonction de Folner correspondante.

Dans le premier cas, le résultat 3.2.1 s'applique directement et on a un "équivalent" de $Fol_{A \wr B}$. Dans le deuxième cas, en adaptant le bord dans le produit en couronne, ie : pour $H \in V(A \wr B)$, on prend $\partial_{A \wr B} H = \{(x, y) \in E(A \wr B), x \in H \text{ et } y \in V(A \wr B) - H\}$, la même preuve donne alors un "équivalent" de la fonction de Folner correspondante. On a

$$Fol_{A \wr B}^{A \wr B} \approx (Fol_B)^{Fol_{A'}^A}.$$

3.2.2 Cas non moyennable

Si A ou B est non moyennable, l'une des 2 fonctions de Folner est infinie à partir d'un certain rang et on ne peut pas raisonner comme dans la partie précédente. On a néanmoins la propriété suivante.

Proposition 3.2.9. *Si A ou B est non moyennable alors, $A \wr B$ est non moyennable.*

Démonstration.

1. Supposons A non moyennable et B quelconque. Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $U \subset V(A)$, on ait $\frac{|\partial_A U|}{|U|} \geq C_1$. Soit $\Omega \subset V(A \wr B)$, et soit $F = \{f; \exists a \in V(A) (a, f) \in \Omega\}$. On a une injection de

$$\dot{\bigcup}_{f \in F} \partial_A p(\text{Neud}(f)) \hookrightarrow \partial_{A \wr B} \Omega,$$

qui a (x, y) associe $(x, f)(y, f)$, si $(x, y) \in \partial_{AP}(\text{Neud}(f))$. D'où,

$$|\partial_{A \wr B} \Omega| \geq \sum_{f \in F} |\partial_{AP}(\text{Neud}(f))| \geq C_1 \sum_{f \in F} |p(\text{Neud}(f))| = C_1 |\Omega|.$$

La dernière égalité vient du fait que $\Omega = \dot{\bigcup}_{f \in F} \text{Neud}(f)$.

2. Supposons maintenant B non moyennable, et soit encore $\Omega \subset V(A \wr B)$. Il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $U \subset V(B)$, $\frac{|\partial_B U|}{|U|} \geq C_2$. Posons $P_{x,f} = \{(x, g) \in \Omega; g = f \text{ sauf éventuellement en } x\}$ et choisissons des ensembles $A' \subset V(A)$ et F' de configurations tels que

$$\Omega = \dot{\bigcup}_{(x,f) \in A' \times F'} P_{x,f}.$$

Posons $\tilde{P}_{x,f} = \{g(x); (x, g) \in P_{x,f}\}$, on a une injection de

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup}_{(x,f) \in A' \times F'} \partial_B \tilde{P}_{x,f} &\hookrightarrow \partial_{A \wr B} V \\ (y_1, y_2) &\mapsto \left((x, f_{x,y_1}), (x, f_{x,y_2}) \right), \end{aligned}$$

avec $(y_1, y_2) \in \partial_B \tilde{P}_{x,f}$ et pour tout x' de A , $f_{x,z}(x') = f(x')1_{\{x' \neq x\}} + z1_{\{x'=x\}}$. D'où,

$$|\partial_{A \wr B} \Omega| \geq \sum_{(x,f) \in A' \times F'} |\partial_B \tilde{P}_{x,f}| \geq C_2 \sum_{(x,f) \in A' \times F'} |\tilde{P}_{x,f}| = C_2 |\Omega|.$$

□

3.3 Étude de $\mathbb{E}_0(\exp^{-\lambda \sum_z L_{n,z}^\alpha})$.

3.3.1 Borne supérieure.

3.3.1.1 Construction d'un certain graphe.

On s'intéresse au cas où $\alpha \in [0, 1[$.

Pour la borne supérieure, par la propriété 3.1.1, il suffit de trouver des graphes B_x tels que

$$\mathbb{P}_{0_x}^{B_x}(Y_s^x = 0) \geq e^{-\lambda s^\alpha},$$

et tels que la fonction de Folner de ces graphes B_x soit connue (du moins une minoration).

Puisque le membre de droite ne dépend pas de x , on peut se contenter de chercher un graphe B tel que :

- la fonction de Folner soit connue, et
- $\mathbb{P}_0^B(Y_s^B = 0) \succeq e^{-s^\alpha} \quad (*)$.

Nous déduirons alors par les résultats de la section 3.2.1 et la propriété 2.1.4 , une inégalité isopérimétrique sur le produit en couronne $\mathcal{C}_n \wr B_x$.

Evidemment pour obtenir le bon ordre de grandeur de la transformée de Laplace de cette fonctionnelle (ie : la borne inf et la borne sup coïncident), nous devons trouver un graphe où l'inégalité (*) n'est pas trop "mauvaise".

Une première idée pour obtenir (*) est d'utiliser un groupe méta-abélien. Or un tel groupe est à croissance du volume soit exponentielle soit polynomiale. Dans un groupe à croissance exponentielle, la décroissance des probabilités de retour de la marche simple est au plus en $e^{-n^{1/3}}$. Donc cette idée ne pourra pas aboutir si $\alpha \leq 1/3$. Et dans un groupe à croissance polynomiale, l'estimée (*) sera trop "mauvaise". Par ailleurs, on ne connaît pas en général, l'isopérimétrie sur un tel groupe. On va donc construire "directement à la main" un graphe qui satisfait ces conditions. Cette idée est due à A.Erschler, voir [6].

Posons $\sigma(s) = e^{-s^\alpha}$, et supposons que (*) soit tellement précise que cela soit une égalité. A la vue de la propriété 1.3.3, on est tenté de prendre un graphe G (si il en existe) tel que sa fonction de Folner Fol_G vérifie :

$$\sigma' = -\frac{\sigma}{8(Fol_G^{-1}(4/\sigma))^2},$$

ie :

$$Fol_G(x) \approx F(x) := e^{x^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}.$$

En fait on a la propriété suivante :

Proposition 3.3.1. *Soit $\alpha \in [0; 1[$ et soit $F := e^{x^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}$, il existe un graphe $D_F = (V(D_F), E(D_F))$ à géométrie bornée tel que :*

- (i) $Fol_{D_F} \approx F$,
- (ii) *il existe un point $d_0 \in V(D_F)$ tel que pour tout n , $p_n^{D_F}(d_0, d_0) \succeq \sigma(n)$, où $p_n^{D_F}(\cdot, \cdot)$ désignent les transitions de la marche Y sur $V(D_F)$ (Y est définie à la partie 3.1), Y saute uniformément sur l'ensemble des points constitués, des voisins et du point où elle se trouve.*

Remarque 3.3.2. *En fait, on a même $p_n^{D_F}(d_0, d_0) \approx \sigma(n)$.*

La construction du graphe D_F proposée ici, est un prolongement des idées de la section 3.2.1, et a été mis en annexe.

3.3.1.2 Utilisation du graphe D_F .

Dans cette sous section, on obtient une inégalité isopérimétrique sur le graphe constitué des points de $\mathcal{C}_n^g \wr D_F$ et tel que les arêtes soient adaptées à la marche Z . Prenons pour tout $x \in \mathcal{C}$, $B_x = D_F$ et considérons les graphes :

$$(3.13) \quad \mathcal{C}_n^g \wr D_F \text{ et}$$

$$(3.14) \quad \mathcal{C}_n^g \wr \wr D_F.$$

On procède alors en 3 étapes :

1. Par la propriété 3.2.1, et par la remarque 3.2.8 on a :

$$Fol_{\mathcal{C}_n^g \wr D_F}^{\mathcal{C}_n^g \wr D_F}(k) \approx (Fol_{D_F}(k))^{Fol_{\mathcal{C}_n^g}(k)}.$$

On rappelle que

$$Fol_{\mathcal{C}_n^g}(k) = \min\{|A|; \frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k}\},$$

avec $\partial_{\mathcal{C}_g} A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^d; \omega(x, y) = 1 \text{ et } x \in A, y \in \mathcal{C} - A\}$.

2. Par la propriété 2.4.1, on déduit alors :
pour tout $\gamma > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, \mathbb{Q} p.s pour n assez grand, on ait :

$$(3.15) \quad Fol_{\mathcal{C}_n^g \wr D_F}^{\mathcal{C}_n^g \wr D_F}(k) \succeq \begin{cases} F(k)^k & \text{if } k < cn^\gamma, \\ (F(k))^{\beta k^d} & \text{if } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

3. On veut transmettre (3.15) à $Fol_{\mathcal{C}_n^g \wr \wr D_F}^{\mathcal{C}_n^g \wr \wr D_F}$. Pour cela, considérons :

$$(3.16) \quad W_n = \overline{\mathcal{C}_n^g} \wr D_F,$$

et

$$(3.17) \quad W'_n = \overline{\mathcal{C}_n^g} \wr \wr D_F,$$

où $\overline{\mathcal{C}_n^g}$ est défini à la section 2.4 et où on rappelle que

$$E(W_n) = E(\mathcal{C}_n^g \wr D_F) \cup \{(x, \delta); x \in V(\mathcal{C}_n^g \wr D_F) \text{ et } \exists y \in V(W) (x, y) \in E(W)\},$$

et

$$E(W'_n) = E(\mathcal{C}_n^g \wr \wr D_F) \cup \{(x, \delta); x \in V(\mathcal{C}_n^g \wr \wr D_F) \text{ et } \exists y \in V(W) (x, y) \in E(W')\}.$$

Soient d et d' les distances respectives sur W et W' , induites par les arêtes de ces

graphes. W_n et W'_n sont quasi isométriques avec des constantes indépendantes de n . Avec les notations de la définition 3.7 dans [18], on a $A = 3$ et $B = 0$. Considérons en effet :

$$id : (V(W_n), d) \rightarrow (V(W'_n), d).$$

On a pour tout $x, y \in V(W_n) = V(W'_n)$,

$$\frac{1}{3}d(x, y) \leq d'(x, y) \leq 3d(x, y).$$

Ainsi par exemple, les formes de Dirichlet \mathcal{E} et \mathcal{E}' correspondantes aux marches simples sur W_n et W'_n se comparent. Il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout $f : V(W_n) \rightarrow \mathbb{R}$, on ait :

$$c_1\mathcal{E}(f, f) \leq \mathcal{E}'(f, f) \leq c_2\mathcal{E}(f, f),$$

avec

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{(x,y) \in E(W_n)} (f(x) - f(y))^2,$$

et

$$\mathcal{E}'(f) = \sum_{(x,y) \in E(W'_n)} (f(x) - f(y))^2.$$

Soit alors $U \subset V(C_n^g \wr D_F)$, en prenant $f = 1_U$, on obtient :

$$c_1|\partial_W U| \leq |\partial_{W'} U| \leq c_2|\partial_W U|.$$

Ainsi on a bien (3.15) qui se transmet à $Fol_{C_n^g \wr D_F}^{C_n^g \wr D_F}$ en comptant le bord relativement au graphe W' et on a donc :

Proposition 3.3.3. *Pour tout $\gamma > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, \mathbb{Q} p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand, on ait :*

$$(3.18) \quad Fol_{C_n^g \wr D_F}^{C_n^g \wr D_F}(k) \succeq \begin{cases} F(k)^k & \text{si } k < cn^\gamma, \\ (F(k))^{\beta k^d} & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

3.3.1.3 Conclusion.

Cette minoration de la fonction de Folner, nous donne une borne supérieure de $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o)$. Soit $\tau_n = \inf\{s \geq 0 ; Z_s \notin V(C_n^g \wr D_F)\}$.

On a,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) = \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n \leq n) + \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n > n).$$

Le premier terme est nul, puisque la marche ne peut pas sortir de la boîte $V(C_n^g \wr D_F)$ avant le temps n .

Quant au deuxième terme, grâce à notre manière de compter le bord, (voir le dernier exemple dans la section 1.3), on peut le majorer. Posons :

$$(3.19) \quad \mathcal{H}(k) = \begin{cases} F(k)^k & \text{if } k < cn^\gamma, \\ (F(k))^{\beta k^d} & \text{if } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

- \mathcal{H} est croissante et on peut définir un inverse par $\mathcal{H}^{-1}(y) = \inf\{x; \mathcal{H}(x) \geq y\}$.
- Par ailleurs, à l'aide de 3.18,

$$Fol_{C_n^g \cap D_F}^{C^g \cap D_F} \succeq \mathcal{H}.$$

- \mathcal{C} et D_F sont à valence bornée donc d'après les formes de \tilde{m} et de \tilde{a} (voir (3.5) et (3.4)) on a : $\inf_{V(W')} \tilde{m} \geq \frac{1}{2d} > 0$ et $\inf_{E(W')} \tilde{a} > 0$.

Ainsi, (voir section 1.3) il existe des constantes c_1, c_2 et $c_3 > 0$ telles que

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n > n) \leq u(n)$$

où u est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} u' = -\frac{u}{c_2(\mathcal{H}^{-1}(c_3/u))^2}, \\ u(0) = c_1. \end{cases}$$

En remplaçant $F(k)$ par $e^{ck^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}$ dans \mathcal{H} , l'expression de \mathcal{H}^{-1} est de la forme :

$$(3.20) \quad \mathcal{H}^{-1}(y) = \begin{cases} c(\ln(y))^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} & \text{si } 1 \leq y < e^{cn^{\frac{\gamma(1+\alpha)}{1-\alpha}}}, \\ cn^\gamma & \text{si } e^{cn^{\frac{\gamma(1+\alpha)}{1-\alpha}}} \leq y < e^{cn^{\frac{\gamma(d+\alpha(2-d))}{1-\alpha}}}, \\ c(\ln(y))^{\frac{1-\alpha}{d+\alpha(2-d)}} & \text{si } e^{cn^{\frac{\gamma(d+\alpha(2-d))}{1-\alpha}}} \leq y. \end{cases}$$

On peut alors résoudre l'équation différentielle dans les divers cas, et on obtient :

$$u(t) = \begin{cases} ce^{-ct^{\frac{1+\alpha}{3-\alpha}}} & \text{si } t \leq cn^{\frac{\gamma(3-\alpha)}{1-\alpha}}, \\ ce^{cn^{\gamma\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}} e^{-ct/n^{2\gamma}} & \text{si } cn^{\frac{\gamma(3-\alpha)}{1-\alpha}} < t \leq cn^{\frac{\gamma(d+2-d\alpha)}{1-\alpha}} + n^{\frac{\gamma(3-\alpha)}{1-\alpha}}, \\ ce^{-(ct-c'n^{\frac{\gamma(d+2-d\alpha)}{1-\alpha}} - cn^{\frac{\gamma(3-\alpha)}{1-\alpha}})^{\frac{d+\alpha(2-d)}{2+d-d\alpha}}} & \text{si } cn^{\frac{\gamma(d+2-d\alpha)}{1-\alpha}} + n^{\frac{\gamma(3-\alpha)}{1-\alpha}} \leq t. \end{cases}$$

(Chaque c désigne une constante différente.)

Choisissons maintenant γ tel que $0 < \gamma < \min(\frac{1-\alpha}{d+2-d\alpha}, \frac{1-\alpha}{3-\alpha})$, on a alors :

il existe $c = c(p, d, \alpha, \lambda) > 0$ tel que

$$u(2n) \leq e^{-cn^\eta},$$

avec $\eta = \frac{d+\alpha(2-d)}{2+d(1-\alpha)}$.

Donc \mathbb{Q} p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n plus grand qu'une certaine valeur qui dépend de l'amas ω ,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) \preceq e^{-n^\eta}.$$

On déduit immédiatement par la propriété 3.1.1, que \mathbb{Q} p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand,

$$(3.21) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} \mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(Y_{L_{x;2n}}^{D_F} = d_0) \mathbf{1}_{\{X_{2n}=0\}} \right) \preceq e^{-n^\eta}.$$

Par le choix du graphe D_F , il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$:

$$(3.22) \quad \mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(Y_n^{D_F} = d_0) \geq C_1 e^{-(C_2 n)^\alpha},$$

$$(3.23) \quad \geq e^{-\lambda_0 n^\alpha},$$

pour un certain $\lambda_0 > 0$, assez grand.

De (3.21) et (3.23), on obtient qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que \mathbb{Q} p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand,

$$(3.24) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(e^{-\lambda_0 \sum_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^\alpha} \mathbf{1}_{\{X_{2n}=0\}} \right) \preceq e^{-n^\eta}.$$

Pour conclure, et pour montrer la borne supérieure de la deuxième partie du théorème 1.5.4, il ne reste plus qu'à prouver que l'on peut supprimer l'indicatrice dans l'inégalité précédente et que l'on peut étendre (3.24) à tout $\lambda > 0$. On procède en trois étapes.

1. On remarque d'abord qu'il suffit de prouver (1.7) pour une seule valeur de λ . En effet, soit $\lambda > 0$ et supposons que pour $\lambda = \lambda_0$, on ait :

$$(3.25) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(e^{-\lambda_0 \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} \right) \preceq e^{-n^\eta}.$$

-Si $\lambda \geq \lambda_0$, (3.25) est vraie en remplaçant λ_0 par λ , par simple décroissance.

-Si $\lambda < \lambda_0$, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega \left[e^{-\lambda \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} \right] &= \mathbb{E}_0^\omega \left[\left(e^{-\lambda_0 \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda_0}} \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}_0^\omega \left[e^{-\lambda_0 \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} \right] \right)^{\frac{\lambda}{\lambda_0}} \\ &\quad \text{(Inégalité de Jensen à la fonction concave } x \rightarrow x^{\frac{\lambda}{\lambda_0}} \text{.)} \\ &\preceq e^{-n^\eta}. \end{aligned}$$

2. Pour retirer l'indicatrice, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.3.4. *Pour tout $m \geq 0$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m \right)^2 \leq 2d(2m+1)^d \mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x L_{x;2n}^\alpha \leq 2m \text{ et } X_{2n} = 0 \right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
[\mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m)]^2 &= \left(\sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m; X_n = h) \right)^2 \\
&= \left(\sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \sqrt{\nu(h)} \times 1/\sqrt{\nu(h)} \times \right. \\
&\quad \left. \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m; X_n = h) \right)^2 \\
&\leq \nu(B_m(\mathcal{C})) \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} (1/\nu(h)) \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m; X_n = h)^2 \\
&\quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq 2d(2m+1)^d \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m; X_n = h) \times \\
&\quad \mathbb{P}_h^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m; X_n = 0)(1/\nu(0)) \\
&\quad \text{(par réversibilité)} \\
&\leq 2d(2m+1)^d \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m; X_n = h) \times \\
&\quad \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;[n;2n]}^\alpha = m; X_n = h; X_{2n} = 0) \\
&\quad \text{(où } L_{x;[n;2n]}^\alpha = \#\{i \in [n; 2n]; X_i = x\}) \\
&\leq 2d(2m+1)^d \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;2n}^\alpha \leq 2m; X_{2n} = 0).
\end{aligned}$$

car $\{\sum_x L_{x;n}^\alpha = m \text{ et } \sum_x L_{x;[n;2n]}^\alpha = m\} \subset \{\sum_x L_{x;2n}^\alpha \leq 2m\}$, puisque pour $\alpha \in [0, 1[$, on a :

$$L_{x;2n}^\alpha \leq (L_{x;n} + L_{x;[n;2n]})^\alpha \leq L_{x;n}^\alpha + L_{x;[n;2n]}^\alpha.$$

□

On écrit alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda_0 \sum_x L_{x;2n}^\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &= \sum_{m \geq 1} e^{-\lambda_0 m} \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;2n}^\alpha = m; X_{2n} = 0) \\
&= (1 - e^{-\lambda_0}) \sum_{m \geq 1} e^{-\lambda_0 m} \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;2n}^\alpha \leq m; X_{2n} = 0).
\end{aligned}$$

Car $\{\sum_x L_{x;2n}^\alpha = m\} = \{\sum_x L_{x;2n}^\alpha \leq m\} - \{\sum_x L_{x;2n}^\alpha \leq m-1\}$. Puis,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda_0 \sum_x L_{x;2n}^\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &\geq (1 - e^{-\lambda_0}) \sum_{m \geq 1} e^{-2\lambda_0 m} \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;2n}^\alpha \leq 2m; X_{2n} = 0) \\
 &\quad (\text{on ne somme que les } m \text{ pairs}) \\
 &\geq (1 - e^{-\lambda_0}) \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2d(2m+1)^d} e^{-2\lambda_0 m} [\mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m)]^2 \\
 &\quad (\text{par le lemme 3.3.4}) \\
 &\geq \sum_{m \geq 1} e^{-\lambda_1 m} [\mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m)]^2 \\
 &\quad (\text{pour une certaine valeur de } \lambda_1 > 2\lambda_0) \\
 &\geq \left(\sum_{m \geq 1} e^{-\lambda_1 m} \right)^{-1} \times \\
 &\quad \left(\sum_{m \geq 1} e^{-m\lambda_1} \mathbb{P}_0^\omega(\sum_x L_{x;n}^\alpha = m) \right) \\
 &\quad (\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\
 &\geq c_0 \mathbb{E}_0^\omega[e^{-\lambda_1 \sum_x L_{x;n}^\alpha}].
 \end{aligned}$$

3. On peut alors conclure. Par l'inégalité précédente et par (3.24), il existe un λ_1 tel que :

$$\mathbb{E}_0^\omega[e^{-\lambda_1 \sum_x L_{x;n}^\alpha}] \preceq e^{-n^\eta}.$$

puis par l'étape 1, on peut étendre cette inégalité à tous λ_1 .

Finalement, on a prouvé :

Proposition 3.3.5. *Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand, et pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\alpha \in [0, 1[$,*

$$\mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \sum_{x; L_{x;n}^\alpha > 0} L_{x;n}^\alpha}) \preceq e^{-n^\eta},$$

où $\eta = \frac{d+\alpha(2-d)}{2+d(1-\alpha)}$.

Remarque 3.3.6.

1) Si $\alpha = 0$, on retrouve la transformée de Laplace du nombre de points visités par la marche simple sur un amas infini, car $\sum_{x; L_{x;n}^\alpha > 0} 1 = N_n$. De plus le majorant est du

bon ordre (voir chapitre 2).

2) Pour $\alpha = 1$, l'inégalité est également vérifiée puisque $\sum_{x; L_{x;n}^\alpha > 0} L_{x;n}^\alpha = n$ et $\eta = 1$

lorsque $\alpha = 1$.

3.3.2 Borne inférieure.

Procédons en quatre étapes

1. Utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ lorsque $\alpha \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha &\leq N_n \left(\sum_{x; L_{x;n} > 0} \frac{L_{x;n}}{N_n} \right)^\alpha \\ &= N_n^{1-\alpha} n^\alpha. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} \right) &\geq \mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda n^\alpha N_n^{1-\alpha}} \right) \\ &\geq \mathbb{P}_0 \left(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq m \right) e^{-\lambda V(m)^{1-\alpha} n^\alpha}. \end{aligned}$$

où $V(m) = |B_m(\mathcal{C})|$ désigne le volume de la boule centrée à l'origine de \mathcal{C} et de rayon m .

2. Par la propriété 2.5.2, on a :

$$(3.26) \quad \mathbb{P}_0 \left(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq m \right) \geq e^{-c(m + \frac{n}{m^2})}$$

3. Par le lemme 2.5.3, il existe $c > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,

$$V(m) \geq cm^d.$$

4. D'où, on déduit, il existe $C > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,

$$\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} \right) \geq e^{-C(m + \frac{n}{m^2} + \lambda n^\alpha m^{d(1-\alpha)})}$$

Prenons, $m = n^{\frac{1-\alpha}{2+d(1-\alpha)}}$, nous obtenons ainsi :

$$\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} 1_{\{X_n=0\}} \right) \geq e^{-cn^\eta},$$

avec $\eta = \frac{d+\alpha(2-d)}{d(1-\alpha)+2}$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

On a donc prouvé :

Proposition 3.3.7. *pour tout $\alpha \in [0, 1]$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,*

$$\mathbb{E}_0 \left(e^{-\lambda \sum_{x; L_{x;n} > 0} L_{x;n}^\alpha} \right) \geq e^{-cn^\eta},$$

avec $\eta = \frac{d+\alpha(2-d)}{d(1-\alpha)+2}$.

3.4 Étude de $\mathbb{E}_0(\prod_z L_{n;z}^{-\alpha} 1_{X_n=0})$.

3.4.1 Borne supérieure.

Par la section 3.1, on cherche donc des graphes B_x de fonctions de Folner connues tels que la marche Y^x sur B_x qui saute uniformément sur les voisins et la position du marcheur, vérifie :

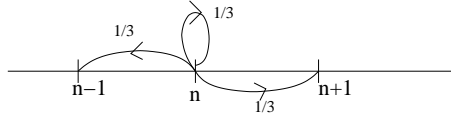
$$\mathbb{P}_{0_x}^{B_x}(Y_s^x = 0_x) \geq \frac{1}{s^\alpha}.$$

Or dans les graphes B_x , on a toujours l'inégalité isopérimétrique suivante : pour toute partie finie U de $V(B_x)$, $|\partial_{B_x} U| \geq 1$. Ainsi, (voir le premier exemple de la section 1.3.2) on a $\mathbb{P}_{0_x}^{B_x}(Y_s^x = 0_x) \leq c/n^{1/2}$. De ce fait, on suppose dans cette section $\alpha > 1/2$. On pense alors à prendre un certain \mathbb{Z}^r avec $r \leq 2\alpha$ pour les graphes B_x . En fait, on peut se contenter de prendre pour tout $x \in \mathcal{C}$, $B_x = \mathbb{Z}$. (On obtient en effet, la même borne avec \mathbb{Z}^r .)

Sur le graphe $(\mathbb{Z}, E(\mathbb{Z}))$ (où $(a, b) \in E(\mathbb{Z}) \Rightarrow |a - b| = 1$) on a :

$$Fol_{\mathbb{Z}}(k) = 2k,$$

et on considère la marche $Y^{\mathbb{Z}}$ dont les sauts sont schématisés par :



et on note $\mathbb{P}^{\mathbb{Z}}$ sa loi.

Soient W, W', W_n et W'_n les graphes définis respectivement par (3.2) (3.6) (3.16) et (3.17) en prenant $D_F = (\mathbb{Z}, E(\mathbb{Z}))$. A l'aide de la propriété 2.4.1 et de 3.2.1, on déduit, pour tout $\gamma > 0$, il existe $c, \beta > 0$ tels que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ on ait :

$$(3.27) \quad Fol_{C_n^g \wr D_F}^{C^g \wr D_F}(k) \succeq \begin{cases} k^k & \text{if } k < cn^\gamma, \\ k^{\beta k^d} & \text{if } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

De la même manière que dans la section 3.3.1.2, on transmet (3.27) à $Fol_{C_n^g \wr D_F}^{C^g \wr D_F}$ par quasi isométrie entre les graphes W_n et W'_n . On obtient ainsi : pour tout $\gamma > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ on ait :

$$(3.28) \quad Fol_{C_n^g \wr D_F}^{C^g \wr D_F}(k) \succeq \begin{cases} k^k & \text{if } k < cn^\gamma, \\ k^{\beta k^d} & \text{if } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

Toujours en vue de majorer $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o)$, posons :

$$\kappa_n = \inf\{s \geq 0; Z_s \notin V(C_n^g \wr D_F)\}.$$

On a encore $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) = \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \kappa_n > n)$ et de nouveau cette probabilité se majore à l'aide de l'isopérimétrie (3.28).

L'inégalité (3.28) implique en particulier :

$$(3.29) \quad \forall k \geq 0 \quad \text{Fol}_{C_n^g \cup D_F}^{C^g \cup D_F}(k) \succeq \mathcal{J}_N(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < cn^\gamma, \\ N^{\beta d' k^d} & \text{si } k \geq cn^\gamma, \end{cases}$$

où $N \leq cn^\gamma$.

\mathcal{J}_N est croissante et on peut calculer \mathcal{J}_N^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N^{-1} &= \inf\{x; \mathcal{J}_N(x) \geq y\} \\ &= \begin{cases} cn^\gamma & \text{si } 1 \leq y < N^{cn^{d\gamma}}, \\ c\left(\frac{\ln(y)}{\ln(N)}\right)^{1/d} & \text{si } N^{cn^{d\gamma}} \leq y. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1. *Soit*

$$(3.30) \quad \mathcal{J}(k) = \begin{cases} k^k & \text{if } k < cn^\gamma, \\ k^{\beta k^d} & \text{if } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

L'inégalité (3.28) s'écrit $\text{Fol}_{C_n^g \cup D_F}^{C^g \cup D_F}(k) \succeq \mathcal{J}(k)$. \mathcal{J} est croissante mais la forme de \mathcal{J} ne permet pas d'exhiber un inverse, c'est la raison pour laquelle on minore $\text{Fol}_{C_n^g \cup D_F}^{C^g \cup D_F}(k)$ par \mathcal{J}_N plutôt que par \mathcal{J} .

- \mathcal{C} et \mathbb{Z} sont à valence bornée donc on a toujours : $\inf_{V(W')} \tilde{m} \geq \frac{1}{2d} > 0$ et $\inf_{E(W')} \tilde{a} > 0$.

Ainsi, (voir section 1.3) il existe des constantes c_1, c_2 et $c_3 > 0$ telles que

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \kappa_n > n) \preceq u(n)$$

où u est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} u' = -\frac{u}{c_2(\mathcal{J}_N^{-1}(c_3/u))^2}, \\ u(0) = c_1. \end{cases}$$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$u(t) = \begin{cases} e^{-ct/n^{2\gamma}} & \text{si } t \leq t_0 := cn^{\gamma(d+2)} \ln(N), \\ e^{-\left(c(\ln(N))^{2/d}(t-t_0) + \ln(1/u(t_0))\right)^{\frac{d+2}{d}} \frac{d}{d+2}} & \text{si } t > t_0. \end{cases}$$

Choisissons $\gamma < \frac{1}{d+2}$ et prenons $N = cn^\gamma$. On obtient en $t = n$:
 Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) \preceq e^{-n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

A l'aide de la propriété (3.1.1), on déduit alors :

Proposition 3.4.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,*

$$(3.31) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} \mathbb{P}_0^{\mathbb{Z}}(Y_{L_{x;2n}}^{\mathbb{Z}} = 0) 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) \leq e^{-Cn^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

Or, pour la marche $Y^{\mathbb{Z}}$ décrite au début de cette section, on sait qu'il existe $c_0 > 0$ tel que pour n grand, $\mathbb{P}_0^{\mathbb{Z}}(Y_n^{\mathbb{Z}} = 0) \sim \frac{c_0}{n^{1/2}}$. En particulier,

$$(3.32) \quad \exists c_1 > 0 \forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}_0^{\mathbb{Z}}(Y_n^{\mathbb{Z}} = 0) \geq \frac{c_1}{n^\alpha},$$

avec $c_1 \leq 1$, car cette inégalité est valide pour tout $n \geq 1$. On peut même trouver $A > 0$ et $c_2 > 0$ tels que

$$(3.33) \quad \forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}_0^{\mathbb{Z}}(Y_n^{\mathbb{Z}} = 0) \geq \begin{cases} \frac{1}{n^\alpha} & \text{si } n \geq A, \\ \frac{c_2}{n^\alpha} & \text{si } n < A, \end{cases}$$

et nécessairement $c_2 \leq 1$. Si l'on applique alors directement cette dernière minoration (3.33) aux temps $L_{x;2n}$ dans (3.31), il apparaît un facteur $c_2^{\#\{x; 0 < L_{x;2n} < A\}}$ supplémentaire que l'on ne contrôle pas. Pour cela posons :

$$N_{n,2} = \#\{x; L_{x;n} \geq 2\},$$

qui est le nombre de points visités par la marche au moins deux fois. Et pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, considérons alors les événements suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{N_{2n} \leq \varepsilon_1 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}\}, \\ A_2 &= \{N_{2n} \geq \varepsilon_1 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}} \text{ et } N_{2n,2} \leq \varepsilon_2 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}\}, \\ A_3 &= \{N_{2n} \geq \varepsilon_1 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}} \text{ et } N_{2n,2} \geq \varepsilon_2 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}\}. \end{aligned}$$

On a

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) &= \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_1} \right) \\ &+ \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_2} \right) \\ &+ \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_3} \right). \end{aligned}$$

Traitons chacun des 3 termes.

1. Pour le terme correspondant à A_1 , on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_1} \right) &= \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} \frac{c_1}{L_{x;2n}^\alpha} \times \prod_{x; L_{x;2n} > 0} \frac{1}{c_1} \times 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_1} \right) \\
&\leq \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} \mathbb{P}_0^\mathbb{Z}(Y_{L_{x;2n}}^\mathbb{Z} = 0) \times \left(\frac{1}{c_1}\right)^{N_{2n}} \right. \\
&\quad \left. \times 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_1} \right) \\
&\quad (\text{par 3.32}) \\
&\leq \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} \mathbb{P}_0^\mathbb{Z}(Y_{L_{x;2n}}^\mathbb{Z} = 0) 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{c_1}\right)^{\varepsilon_1 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}} \\
&\leq e^{-(C+\varepsilon_1 \ln(c_1))n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}. \\
&\quad (\text{par la propriété 3.4.2})
\end{aligned}$$

Puis, en choisissant ε_1 assez petit (on a $\ln(c_1) \leq 0$), on déduit l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, on ait

$$(3.35) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_1} \right) \leq e^{-C_1 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

2. Pour le deuxième terme, on remarque que le produit intervenant dans ce terme est majoré par $(1/2)^{\varepsilon_2 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}$ sur l'événement A_2 . Ainsi il existe une constante $C_2 > 0$ telle que,

$$(3.36) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_2} \right) \leq e^{-C_2 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

3. Pour le dernier terme, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.4.3. *Il existe un $\varepsilon' > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que, pour tout $n, N \geq 0$,*

$$(3.37) \quad \mathbb{P}_0^\omega(N_n \geq \varepsilon N \text{ et } N_{n,2} \leq \varepsilon' N) \leq e^{-C_3 N}.$$

Démonstration.

• Soit $\tau_0 = 0$ et pour $k \geq 1$ posons,

$$\tau_k = \min\{s \geq \tau_{k-1}; X_s \notin \{X_0, X_1, \dots, X_{s-1}\}\}.$$

Les τ_k représentent les instants de visite des points nouveaux de la marche X . Considérons alors, les variables ϵ_k définies par :

$$(3.38) \quad \epsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{\tau_k} = X_{\tau_k+2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces variables s'interprètent ainsi, ϵ_k vaut 1 uniquement lorsque le point nouveau X_{τ_k} est immédiatement revisité après un aller-retour. Les ϵ_k ne sont pas indépendants mais suivent tous des lois de Bernoulli de paramètres différents. Par ailleurs, ces paramètres sont uniformément minorés par une constante $\delta > 0$, car le graphe \mathcal{C}^g est à valence bornée.

- Considérons les tribus,

$$\mathcal{G}_m = \sigma(X_j; 0 \leq j \leq m),$$

$$\mathcal{F}_m = \sigma(X_j; 0 \leq j \leq \tau_m).$$

Les ϵ_k sont $\mathcal{G}_{2+\tau_k}$ mesurables donc en particulier \mathcal{F}_{k+2} mesurables. Pour tout $\lambda > 0$ et tout $L > 0$, on peut écrire,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \sum_{k=1}^L \epsilon_k}) &= \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \sum_{k=1}^{L-2} \epsilon_k} \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda(\epsilon_{L-1} + \epsilon_L)} | \mathcal{F}_L)) \\ (3.39) \qquad \qquad \qquad &\leq \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \sum_{k=1}^{L-2} \epsilon_k} \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \epsilon_L} | \mathcal{F}_L)). \end{aligned}$$

- Intéressons nous au terme $\mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \epsilon_L} | \mathcal{F}_L)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \epsilon_L} | \mathcal{F}_L) &= e^{-\lambda} \mathbb{P}_0^\omega(\epsilon_L = 1 | \mathcal{F}_L) + \mathbb{P}_0^\omega(\epsilon_L = 0 | \mathcal{F}_L) \\ (3.40) \qquad \qquad \qquad &= 1 + (e^{-\lambda} - 1) \mathbb{P}_0^\omega(\epsilon_L = 1 | \mathcal{F}_L). \end{aligned}$$

Minorons $\mathbb{P}_0^\omega(\epsilon_L = 1 | \mathcal{F}_L)$. On a successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^\omega(\epsilon_L = 1 | \mathcal{F}_L) &= \mathbb{P}_0^\omega(\epsilon_L = 1 | X_{\tau_L}) \\ &\quad (\text{propriété de Markov}) \\ &= \sum_{x; \mathbb{P}_0^\omega(X_{\tau_L}=x) > 0} 1_{\{X_{\tau_L}=x\}} \mathbb{P}_0^\omega(\epsilon_L = 1 | X_{\tau_L} = x) \\ (3.41) \qquad \qquad \qquad &\geq \delta^2. \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que le graphe \mathcal{C}^g soit à valence bornée, donc en tout point x la probabilité de faire un aller-retour est minorée par δ^2 (avec $\delta \geq 1/2d$).

- D'où, on tire de (3.40) et (3.41) que,

$$\mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \epsilon_L} | \mathcal{F}_L) \leq 1 + (e^{-\lambda} - 1) \delta^2.$$

Et l'on déduit immédiatement, en itérant (3.39), que

$$(3.42) \qquad \mathbb{E}_0^\omega(e^{-\lambda \sum_{k=1}^L \epsilon_k}) \leq (1 + (e^{-\lambda} - 1) \delta^2)^{\lfloor L/2 \rfloor},$$

où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a . En posant $a_\lambda = -\ln(1 + (e^{-\lambda} - 1) \delta^2) > 0$, par Bien-aymé, on déduit,

$$\mathbb{P}_0^\omega\left(\sum_{k=1}^L \epsilon_k \leq \varepsilon' L\right) \leq e^{\varepsilon' \lambda L - a_\lambda \lfloor L/2 \rfloor}.$$

En utilisant que pour $L \geq 2$, $L \leq 3\lfloor L/2 \rfloor$, on obtient :

$$\mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_{k=1}^L \epsilon_k \leq \varepsilon' L \right) \leq e^{-\lfloor L/2 \rfloor (a_\lambda - 3\lambda\varepsilon')}.$$

Remarquons que cette dernière inégalité reste valide pour $L = 1$.

Fixons nous un $\lambda > 0$, (par exemple $\lambda = 1$), on peut alors choisir un ε' assez petit, de sorte que $a_\lambda - 3\varepsilon' > 0$. On déduit l'existence d'une constantes b telle que :

$$(3.43) \quad \mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_{k=1}^L \epsilon_k \leq \varepsilon' L \right) \leq e^{-bL}.$$

- Maintenant, il suffit de remarquer que

$$\{N_n \geq \varepsilon N \text{ et } N_{n,2} \leq \varepsilon' N\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\varepsilon N} \epsilon_k \leq \varepsilon' N \right\}.$$

En effet, d'abord si $N_n \geq \varepsilon N$, cela signifie qu'il y a eu au moins εN points nouveaux, puis par ailleurs, si il y a moins de $\varepsilon' N$ points visités plus de 2 fois, alors il y en a moins de $\varepsilon' N$ qui sont revisités immédiatement après leur première visite. Finalement, on a bien :

$$\mathbb{P}_0^\omega (N_n \geq \varepsilon N \text{ et } N_{n,2} \leq \varepsilon' N) \leq e^{-\varepsilon b N}.$$

□

Majorons alors le terme correspondant à A_3 . Le produit étant majorée par 1, on peut écrire :

$$\mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_3} \right) \leq \mathbb{P}_0(A_3)$$

Soit ε_1 assez petit réalisant le point 1, le lemme 3.4.3 avec $\varepsilon = \varepsilon_1$ nous donne l'existence d'un ε' vérifiant (3.37). On prend alors $\varepsilon_2 = \varepsilon'$ et on déduit qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que,

$$\mathbb{P}_0^\omega (A_3) \leq e^{-C_3 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

D'où,

$$(3.44) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} 1_{A_3} \right) \leq e^{-C_3 n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

Finalement, on déduit de (3.35) (3.36) et (3.44), la propriété suivante.

Proposition 3.4.4. *Q p.s sur $|C| = +\infty$ et pour n assez grand, pour tout $\alpha > 1/2$,*

$$\mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;2n} > 0} \frac{1}{L_{x;2n}^\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) \leq e^{-n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

Pour prouver la borne supérieure dans la relation (1.6) du théorème 1.5.4, on "lève" l'indicatrice $1_{\{X_{2n}=0\}}$ en utilisant la même démarche qu'à la section 3.3. On prouve :

Lemme 3.4.5. *Pour tout $m \geq 0$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;n}) = m \right)^2 \leq 2d(2m+1)^d \mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;2n}) \leq 2m \text{ et } X_{2n} = 0 \right).$$

La preuve est analogue au lemme 3.3.4. On utilise en particulier :

$$\ln(L_{x;2n}) \leq \ln(L_{x;n} + L_{x;[n;2n]}) \leq \ln(L_{x;n}) + \ln(L_{x;[n;2n]}).$$

Puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_x L_{x;2n}^{-\alpha} 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) &= \mathbb{E}_0^\omega \left(e^{-\alpha \sum_x \ln(L_{x;2n})} 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) \\ &= \sum_{m \geq 1} e^{-\alpha m} \mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;2n}) = m; X_{2n} = 0 \right) \\ &= (1 - e^{-\alpha}) \sum_{m \geq 1} e^{-\alpha m} \mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;2n}) \leq m; X_{2n} = 0 \right). \\ &\geq (1 - e^{-\alpha}) \sum_{m \geq 1} e^{-2\alpha m} \mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;2n}) \leq 2m; X_{2n} = 0 \right) \\ &\geq (1 - e^{-\alpha}) \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2d(2m+1)^d} e^{-2\alpha m} \left[\mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;n}) = m \right) \right]^2 \\ &\quad \text{(par le lemme 3.4.5)} \\ &\geq \sum_{m \geq 1} e^{-\alpha_1 m} \left[\mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;n}) = m \right) \right]^2 \\ &\quad \text{(pour une certaine valeur de } \alpha_1 > 2\alpha \text{)} \\ &\geq \left(\sum_{m \geq 1} e^{-\alpha_1 m} \right)^{-1} \times \\ &\quad \left(\sum_{m \geq 1} e^{-\alpha_1 m} \mathbb{P}_0^\omega \left(\sum_x \ln(L_{x;n}) = m \right) \right) \\ &\quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\geq c \mathbb{E}_0^\omega \left[e^{-\alpha_1 \sum_x \ln(L_{x;n})} \right] \\ &= c \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_x L_{x;n}^{-\alpha_1} \right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi par cette dernière inégalité et la propriété 3.4.4, la borne supérieure attendue pour une certaine valeur α_1 :

$$(3.45) \quad \mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_x L_{x;n}^{-\alpha_1} \right) \preceq e^{-n \frac{d}{d+2} \ln(n) \frac{2}{d+2}}.$$

A partir de cette inégalité en α_1 , on étend cette relation à tout $\alpha > 1/2$. Soit $\alpha > 1/2$.

-Si $\alpha \geq \alpha_1$, (3.45) est vraie en remplaçant α_1 par α , par simple décroissance.

-Si $\alpha < \alpha_1$, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega \left[e^{-\alpha \sum_{x; L_{x;n} > 0} \ln(L_{x;n})} \right] &= \mathbb{E}_0^\omega \left[\left(e^{-\alpha_1 \sum_{x; L_{x;n} > 0} \ln(L_{x;n})} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}_0^\omega \left[e^{-\alpha_1 \sum_{x; L_{x;n} > 0} \ln(L_{x;n})} \right] \right)^{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \\ &\quad \text{(Inégalité de Jensen à la fonction concave } x \rightarrow x^{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \text{.)} \\ &\preceq e^{-n^\eta}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve :

Proposition 3.4.6. *Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand, pour tout $\alpha > 1/2$,*

$$\mathbb{E}_0^\omega \left(\prod_{x; L_{x;n} > 0} \frac{1}{L_{x;n}^\alpha} \right) \preceq e^{-n \frac{d}{d+2} \ln(n) \frac{2}{d+2}}.$$

3.4.2 Borne inférieure.

Par concavité de la fonction \ln , on a :

$$\begin{aligned} \prod_{z; L_{z;n} > 0} L_{z;n}^{-\alpha} &= e^{-\alpha N_n \sum_{z; L_{z;n} > 0} \frac{1}{N_n} \ln(L_{z;n})} \\ &\geq e^{-\alpha N_n \ln \left(\sum_{z; L_{z;n} > 0} \frac{L_{z;n}}{N_n} \right)} \\ &= e^{-\alpha N_n \ln \left(\frac{n}{N_n} \right)}. \end{aligned}$$

Sur l'événement $\{ \sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq m \}$, on a :

$$N_n \leq |B_m(\mathcal{C})| \leq c m^d,$$

et

$$\frac{n}{N_n} \geq \frac{n}{c m^d}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ étant décroissante sur $[e, +\infty]$, si l'on choisit m tel que

$$(3.46) \quad \frac{n}{c m^d} \geq e,$$

on peut alors écrire :

$$E_0\left(\prod_{x;L_{x;n}>0} L_{x;n}^{-\alpha}\right) \geq e^{-\alpha c m^d \ln(\frac{n}{c m^d})} \mathbb{P}_0\left(\sup_{0 \leq i \leq n} |X_i| \leq m\right).$$

Puis en utilisant (3.26), on déduit :

$$E_0\left(\prod_{x;L_{x;n}>0} L_{x;n}^{-\alpha}\right) \geq e^{-\alpha c m^d \ln(\frac{n}{c m^d})} e^{-c(m + \frac{n}{m^2})}.$$

Prenons $m = (\frac{n}{\ln(n)})^{\frac{1}{d+2}}$, l'inégalité (3.46) est bien satisfaite pour n assez grand. On obtient, finalement pour n assez grand,

$$E_0\left(\prod_{x;L_{x;n}>0} L_{x;n}^{-\alpha}\right) \geq e^{-n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

D'où,

Proposition 3.4.7. *Pour tout $\alpha > 1/2$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,*

$$E_0\left(\prod_{x;L_{x;n}>0} L_{x;n}^{-\alpha}\right) \geq e^{-n^{\frac{d}{d+2}} \ln(n)^{\frac{2}{d+2}}}.$$

Remarque 3.4.8. *On a utilisé uniquement le fait que $\alpha \geq 0$, donc cette borne inférieure est valable pour tout $\alpha \geq 0$.*

Chapitre 4

Annexe

4.1 Preuve de la propriété 3.3.1

Pour $\alpha \in [0, 1[$, on pose $\sigma(s) = e^{-s^\alpha}$ et $F(x) = e^{x^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}$.
On prouve ici :

Propriété : Il existe un graphe $D_F = (V(D_F), E(D_F))$ à géométrie bornée tel que :

(i) $Fol_{D_F} \approx F$,

(ii) il existe un point $d_0 \in V(D_F)$ tel que pour tout n , $p_n^{D_F}(d_0, d_0) \succeq \sigma(n)$,

où $p_n^{D_F}(\cdot, \cdot)$ désignent les transitions de la marche Y sur $V(D_F)$ (Y est définie à la partie 3.1), Y saute uniformément sur l'ensemble des points, constitué des voisins et du point où elle se trouve.

Expliquons la démarche proposée pour obtenir un tel graphe D_F . Considérons le produit en couronne de \mathbb{Z} avec des fibres identiques et finies, par exemple le graphe de Cayley de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Par la propriété 3.2.1, on a immédiatement que la fonction de Folner de ce graphe est en e^n . Sous réserve que la probabilité de retour à l'origine dans ce graphe satisfasse la condition (ii), ce graphe répond à la question dans le cas $\frac{2\alpha}{1-\alpha} = 1$, c'est à dire lorsque $\alpha = 1/3$. Lorsque $\alpha \neq 1/3$, par la preuve de la propriété 3.2.1, on peut penser à obtenir un graphe de fonction de Folner F en considérant le produit en couronne de \mathbb{Z} avec des fibres de cardinaux variables.

• Si $\alpha \geq 1/3$, la probabilité de retour dans le graphe D_F doit être en e^{-n^α} , donc plus petite que celle dans le graphe $\mathbb{Z} \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ en $e^{-n^{1/3}}$. Ainsi pour contraindre la marche à revenir "moins souvent" à l'origine, une idée est d'augmenter le cardinal des fibres afin que la marche ait tendance à plus s'échapper. Au plus α est grand, au plus le cardinal des fibres devra être grand. Par ailleurs, en supposant que les ensembles de Folner sont du type : $\Omega_n = \{(a, f); a \in [-n; n] \text{ et } \text{supp}(f) \subset [-n; n]\}$, si l'on prend au point n une fibre de cardinal $\frac{F(|n|+1)}{F(|n|)}$, on obtient $|\Omega_n| = 2n \left(\prod_{-n \leq j \leq n} \frac{F(|j|+1)}{F(|j|)} \right) \approx F^2(n) \approx F(n)$.

Mais pour obtenir une minoration du volume d'un certain ensemble de configurations satisfaisables, telle que dans le lemme 3.2.6, les cardinaux des fibres doivent croître lorsqu'on s'écarte de l'origine. Et par la forme de F , cette idée ne pourra aboutir que

lorsque $\alpha \geq 1/3$.

Remarquons également que dès que $\alpha \geq 1$ la condition (ii) est automatiquement satisfaite (dans un graphe à valence bornée).

- Si $\alpha \leq 1/3$, la probabilité de retour dans le graphe D_F doit être en e^{-n^α} , donc plus grande que celle dans le graphe $\mathbb{Z} \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ en $e^{-n^{1/3}}$. Rajouter certains liens (certaines arêtes) dans le graphe $\mathbb{Z} \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ peut contribuer à faire revenir plus "souvent" la marche à l'origine. Si par exemple, on identifie toutes les lampes, alors on peut toutes les éteindre à partir de l'origine, on obtient une probabilité de retour au temps n de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. Alors que si chaque lampe reste indépendante, on a une probabilité de retour en $e^{-n^{1/3}}$. Il reste donc à trouver quelles identifications des lampes permet d'obtenir un comportement (intermédiaire) en e^{-n^α} . On va donc construire un produit en couronne où l'on s'autorise à modifier la valeur de la configuration en un point, lorsqu'on se trouve en différents points de la base.

En supposant encore les ensembles de Folner de la forme : $\Omega_n = \{(a, f); a \in [-n; n] \text{ et } \text{supp}(f) \subset [-n; n]\}$, on peut comprendre combien de lampes doivent être identifiées sur un l'intervalle $[-n; n]$ en raisonnant par induction. Notons l_n le nombre de lampes indépendantes sur $[-n; n]$, supposons que l'on sache combien de lampes sont identifiées sur $[-n; n]$, on rajoute au point $n + 1$ une nouvelle lampe si $(2n + 1)2^{l_n} \leq F(n + 1)$ et on identifie la lampe au point $n + 1$ avec une lampe précédente sinon. Pour préciser cette idée, il reste à savoir avec quelle lampe on identifie la lampe du point $n + 1$, ce point sera traité au paragraphe 4.1.2.

4.1.1 cas $\alpha \geq 1/3$.

Soit $A' = (\mathbb{Z}, E(\mathbb{Z}))$ où $E(\mathbb{Z}) = \{(x, y); |x - y| = 1\}$ et $(B'_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ les graphes de Cayley des groupes $(\frac{\mathbb{Z}}{l(z)\mathbb{Z}}, +)$ avec $\{1\}$ comme système de générateurs.

On pose $l(z) = |V(B_z)| = \frac{F(|z|+1)}{F(|z|)}$.

Notons que puisque $\alpha \in [1/3, 1]$, on a $z \mapsto l(z)$ qui est croissant sur \mathbb{R}_+ . Posons,

$$D_F = A' \wr B'_z,$$

Prouvons tout d'abord (ii).

1. Soit $d_0 = (0, f_0)$ où f_0 est la configuration nulle.

Soit $H_n = (K_n, g_n)$ la marche aléatoire sur D_F issue de d_0 qui saute uniformément sur l'ensemble des points, constitué par le point où le marcheur se trouve et ses voisins.

Cette marche est réversible pour la mesure μ définie par $\mu(x) = \nu_{D_F}(x) + 1$.

Remarquons que pour tout $x \in V(D_F)$, $\mu(x) \leq 5$.

2. Écrivons maintenant,

$$\begin{aligned}
p_{2n}^{D_F}(d_0, d_0) &= \sum_z p_n^{D_F}(d_0, z) p_n^{D_F}(z, d_0) \\
&\geq \sum_{z \in A} p_n^{D_F}(d_0, z)^2 \frac{\mu(d_0)}{\mu(z)} \\
&\geq \frac{\mu(d_0)}{\mu(A)} \left[\sum_{z \in A} p_n^{D_F}(d_0, z) \right]^2 \\
&\geq \frac{\mu(d_0)}{\mu(A)} [\mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(H_n \in A)]^2,
\end{aligned}$$

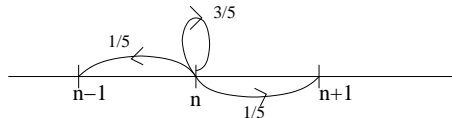
où A est un sous ensemble quelconque de $V(D_F)$.

Prenons $A = A_r = \{(a, f) ; |a| \leq r \text{ et } \text{supp}(f) \subset [-r, r]\}$.

3. De part la structure des arêtes sur D_F , on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(H_n \in A_r) &\geq \mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r) \\
&\geq \mathbb{P}_0^K(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r),
\end{aligned}$$

où \mathbb{P}_0^K est la loi de (K_i) qui est encore une marche aléatoire dont les transitions peuvent être représentées pour n assez grand par :



En effet, dès que $l(|n|) > 3$, le point (n, f) a 2 voisins en "configuration", 2 voisins en "base" et lui même, comme voisins. Or on peut montrer, par exemple comme dans la partie 2.5.2, que pour cette marche,

$$\exists c > 0, \forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}_0^K(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r) \geq e^{-c(n/r^2+r)}.$$

En fait, on a même $\mathbb{P}_0^K(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r) \geq e^{-cn/r^2}$ (voir par exemple le lemme 7.4.3 de [11]) mais ici ce n'est pas nécessaire.

Ainsi,

$$(4.1) \quad \mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(H_n \in A_r) \geq e^{-c(n/r^2+r)}.$$

4. Estimons maintenant $\mu(A_r)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(A_r) &\leq |A_r| \max_{A_r} \mu \\
&\leq (2r+1) \frac{F(1)}{F(0)} \left(\prod_{k=1..r} \frac{F(k+1)}{F(k)} \right)^2 \times 5 \\
&\leq CrF(r+1)^2 \\
&\leq F(r).
\end{aligned}$$

(La dernière inégalité provient de la forme de $F(r)$ en $e^{cr \frac{2\alpha}{1-\alpha}}$.)

5. Rassemblons les résultats. Avec l'inégalité (4.1), et le fait $\frac{2\alpha}{1-\alpha} \geq 1$, on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$p_{2n}^{D_F}(d_0, d_0) \geq e^{-c(\frac{n}{r^2} + r^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}})}.$$

Or la fonction $r \mapsto \frac{n}{r^2} + r^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$, est minimale pour r de l'ordre de $n^{\frac{1-\alpha}{2}}$.
D'où, il existe $c > 0$ tel que :

$$p_{2n}^{D_F}(0, 0) \geq e^{-cn^\alpha}.$$

Prouvons (i).

La preuve est similaire à la proposition 3.2.1, mais on modifie quelques définitions. Pour plus de simplicité, on gardera les mêmes noms de ces notions, mais elles sont indépendantes à la partie 3.2.1.

Soit $\psi(n) = \text{Fol}_{\mathbb{Z}}(n) = \min_{\substack{U \subset \mathbb{Z} \\ \frac{|\partial_{A'} U|}{|U|} \leq 1/n}} |U| = 2n$, où on rappelle que $A' = (\mathbb{Z}, E(\mathbb{Z}))$.

Soit $U \subset V(D_F) = V(A' \wr B'_z)$ tel que $\frac{|\partial_{D_F} U|}{|U|} \leq 1/k$.

De la même manière qu'à la section 3.2.1, on associe à U , un hypergraphe $K_U = (V(K_U), \xi(K_U))$ tel que :

- les sommets vertices K_U sont les $\{f; \exists a \in \mathbb{Z} (a, f) \in U\}$,
- les arêtes de K_U sont définies par : pour $f \in V(K_U)$ et $a \in \mathbb{Z}$, on relie f par une arête multidimensionnelle de dimension d , à toute les configurations g telles que :

$$\begin{cases} (a, g) \in U \\ \text{et} \\ \forall x \neq a f(x) = g(x), \end{cases}$$

et

$$d = \dim_a f,$$

où on note toujours $\dim_a f = \#\{g; (a, g) \in U \text{ et } \forall x \neq a f(x) = g(x)\}$.

A chaque hypergraphe K_U on associe encore le graphe appelé "le squelette de dimension un", noté $\Gamma(K_U) = \Gamma_U = (V(\Gamma_U), E(\Gamma_U))$ défini par :

- $V(\Gamma_U) = V(K_U)$,
- deux configurations f_1 et f_2 sont reliées par une arête si elles appartiennent à une même arête multidimensionnelle dans K_U . Soit encore les poids w définis par $w(e) = 1/d$ pour $e \in E(\Gamma_U)$.

Soit $\lambda \in [0, 1]$ et $b \geq 0$.

- Soit $f \in V(K_U)$, on dit que f est (λ, b) -satisfaisable si :

$$\#\{a \in p(V); \dim_a f \geq \lambda(l(a) - 1)\} \geq b,$$

où p est la projection $\mathbb{Z} \wr B'_z \rightarrow \mathbb{Z}$ et $l(a) = |V(B'_a)|$.

ie : f est (λ, b) – *satisfaisable* si il existe au moins b multidimensionnelles arêtes attachées à f dans K_U de dimension : λ de la dimension maximale. On note $S_U(\lambda, b)$ l'ensemble de ces points, et une fois de plus pour ne pas alourdir les notations, nous oublierons la plupart du temps la dépendance en U lorsque ce n'est pas nécessaire.

- Sinon on dira que f est (λ, b) – *nonsatisfaisable* et on notera $NS(\lambda, b)$.
- Une arête de Γ_U est (λ, b) – *satisfaisable* si elle joint deux configurations (λ, b) – *satisfaisable* sinon elle est (λ, b) – *nonsatisfaisable*. On note $S^e(\lambda, b)$ [resp $NS^e(\lambda, b)$] l'ensemble des arêtes (λ, b) – *satisfaisable* [resp (λ, b) – *nonsatisfaisable*].
- Un point $u = (x, f) \in U$ est (λ, b) – *satisfaisable* [resp (λ, b) – *nonsatisfaisable*] si $f \in S(\lambda, b)$ [resp $NS(\lambda, b)$]. On note $S^p(\lambda, b)$ et $NS^p(\lambda, b)$ pour l'ensemble des points de V qui sont (ou ne sont pas) (λ, b) – *satisfaisable*.
- Un point $u = (a, f) \in V$ est dit λ – *bon* si $\dim_a f = \lambda(l(a) - 1)$ sinon il est dit λ – *mauvais*

Expliquons à présent la trame de la preuve, on montre d'abord que si $\frac{|\partial U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}$, alors il y a peu de points $(1/3, b/3)$ – *nonsatisfaisables* (pour un certain b), ensuite on extrait un sous graphe de Γ_U où tout les points sont $(\frac{1}{30}, \frac{b}{30})$ – *satisfaisables*, puis enfin on déduit une minoration de $|U|$.

Les preuves des 2 lemmes suivants sont similaires aux lemmes 3.2.3 et 3.2.4.

Lemme 4.1.1. *Soit $U \in V(A' \wr B'_z)$, tel que $\frac{|\partial_{D_E} U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$ alors*

- (i) $\frac{\#\{u \in U; u \text{ 1/3-bad}\}}{\#U} \leq \frac{1}{1000k}$
- (ii) $\frac{\#\{u \in U; u \in NS^p(1/3, \psi(n)/3)\}}{\#U} \leq \frac{1}{500}$.

Lemme 4.1.2. *Soit (Γ_U, w) le squelette de dimension un muni des poids w , construit à partir de K_U . Supposons que $E(\Gamma_U) \neq \emptyset$ et $\forall (a, f) \in U \dim_a f \geq \lambda(l(a) - 1)$. Si de plus on a :*

$$\frac{\sum_{e \in NS^e_U(\lambda, b)} w(e)}{\sum_{e \in E(\Gamma_U)} w(e)} < 1/2.$$

Alors il existe un sous graphe non vide $\Gamma' = (V(\Gamma'), E(\Gamma'))$ de Γ_U tel que toutes les arêtes soient $S^e_U(\lambda/10, b/10)$.

Puis on utilise alors le lemme suivant pour minorer le volume de U .

Lemme 4.1.3. *Soit $n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction croissante.*

Soit $b \in \mathbb{N}^$ et \mathcal{A} un ensemble non vide de configurations, tel que :*

$\forall f \in \mathcal{A} \exists x_1, x_2, \dots, x_b \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall i \in [1; b] g_i \in \mathcal{A}$

où g_i est une des fonctions suivantes, définies à partir de f par :

$$g_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_i, \\ \text{il y a } n(|x_i|) \text{ possibilités pour } g_i(x_i) & \text{si } x = x_i, \end{cases}$$

$$\text{alors } |\mathcal{A}| \geq \begin{cases} n(0) \left(n(1)n(2)\dots n\left(\frac{b-1}{2}\right) \right)^2 & \text{si } b \text{ est impair,} \\ n(0) \left(n(1)n(2)\dots n\left(\frac{b-2}{2}\right) \right)^2 n\left(\frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur b .

Si $b = 1$ c'est exact, car n est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Supposons $b \geq 1$ et considérons un point x_0 dans la base tel que :

- $|x_0| \geq \frac{b-1}{2}$ si b est impair et $|x_0| \geq \frac{b}{2}$ si b est pair.
- Et il existe $f_1, \dots, f_{n(|x_0|)} \in A$ satisfaisant $\forall i \in [1; n(|x_0|)]$ $f_i(x_0)$ parcourt les $n(|x_0|)$ images possibles.

Soit pour $i \in [1; n(|x_0|)]$:

$\mathcal{A}_i = \{f \in \mathcal{A}; f(x_0) = f_i(x_0)\}$, qui sont non vides.

On a $\mathcal{A} = \bigcup_{1 \leq i \leq n(|x_0|)} \mathcal{A}_i$.

Par ailleurs, les \mathcal{A}_i vérifient l'hypothèse de récurrence avec la constante $b - 1$.

Donc, si par exemple b est impair, $n(|x_0|) \geq n\left(\frac{b-1}{2}\right)$ et on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \sum_{1 \leq i \leq n(|x_0|)} |\mathcal{A}_i| \\ &\geq \sum_{1 \leq i \leq n(|x_0|)} n(0) \left(n(1)\dots n\left(\frac{b-3}{2}\right) \right)^2 n\left(\frac{b-1}{2}\right) \\ &\geq n(0) \left(n(1)\dots n\left(\frac{b-3}{2}\right) \right)^2 n\left(\frac{b-1}{2}\right) n(x_0) \\ &\geq n(0) \left(n(1)\dots n\left(\frac{b-1}{2}\right) \right)^2. \end{aligned}$$

On conclut de la même manière si b pair. □

Fin de la preuve de (i) de la proposition 3.3.1 :

- Soit $U \subset V(A' \wr B'_z)$ tel que $\frac{|\partial_{D_F} U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$. Let $\tilde{K} = \left(V(\tilde{K}), \xi(\tilde{K}) \right)$ le sous hypergraphe de K_U qui contient uniquement des points $1/3$ - bons. \tilde{K} est non vide, car par la partie (i) du lemme 4.1.1 $|V(\tilde{K})| \geq \left(1 - \frac{1}{1000k}\right)|U|$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E(\Gamma(\tilde{K})) \cap NS^e(1/3, \psi(k)/3)} w(e) &\leq \frac{1}{2} \#\{u \in U; NS^p(1/3, \psi(n)/3)\} \quad \text{remarque 3.2.2} \\
&\leq \frac{1}{1000} |U| \quad \text{par(4.1.1)(ii)} \\
&\leq \frac{1}{1000 - \frac{1}{k}} \#\{u \in U, 1/3 - \text{bon}\} \quad \text{par(4.1.1)(i)} \\
&= \frac{2}{1000 - \frac{1}{k}} \sum_{e \in E(\Gamma(\tilde{K}))} w(e) \\
&\leq \theta \sum_{e \in E(\Gamma(\tilde{K}))} w(e).
\end{aligned}$$

avec $\theta = \frac{2}{999} < \frac{1}{2}$, donc on peut appliquer le sous lemme(4.1.2) à \tilde{K} , pour en déduire qu'il existe $K' = (V(K'), E(K'))$ sous graphe de \tilde{K} tel que toutes les arêtes soient $S^e(1/30, \psi(k)/30)$.

Puis par le lemme (4.1.3) appliqué avec $n(|x|) = l(|x|)/30$ on déduit :
pour k assez grand,

$$|V| \geq l(0) \left(l(1) \dots l\left(\frac{\psi(k)}{40}\right) \right)^2 = \frac{F(1)}{F(0)} \left(\frac{F(2)}{F(1)} \dots \frac{F(k/40 + 1)}{F(k/40)} \right)^2.$$

D'où,

$$|V| \geq cF(k/40)^2 \succeq F(k).$$

puisque avec $F(x) = e^{cx^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}$ on a $F \approx F^2$.

ie :

$$Fol_{D_F}(k) \succeq F(k).$$

• Pour la borne supérieure de la fonction de Folner de D_F , on prend :

$$U = \{(a, f); 0 \leq a \leq k; \text{supp}(f) \subset [0; k]\}.$$

On a

$$|U| = kF(k) \text{ et } |\partial_{D_F} U|/|U| \leq c/k,$$

d'où,

$$Fol_{D_F}(k) \leq kF(k) \preceq F(k).$$

Ce qui achève la preuve dans le cas $\alpha \geq 1/3$.

4.1.2 cas $\alpha < 1/3$.

Plaçons nous dans le cadre général suivant : Soient A et B deux graphes, et ϕ une application de $A \rightarrow A'$. Considérons le graphe :

-les points sont des éléments de $(A \times B^{A'})$,

-le couple $((a, f); (b, g))$ est une arête si :

(i) ou bien $\forall x \in A', f(x) = g(x)$ et a est voisin de b dans A .

(ii) ou bien $a = b$ et $\forall x \neq \phi(a) f(x) = g(x)$ et $f(\phi(a))$ est voisin de $g(\phi(a))$ dans B .

On appellera produit en couronne généralisé ce type de graphe.

Si $A' = A$ et $\phi = id$ on retrouve le produit en couronne usuel.

Prenons pour le cas qui nous intéresse, $A = A' = (\mathbb{Z}, E(\mathbb{Z}))$ et B le graphe de Caley associé à $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ avec $\bar{1}$ comme système de générateur.

Se donner $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ revient à se donner les ensembles $\mathcal{A}_i = \{x; \phi(x) = i\}$, qui forment une partition de \mathbb{Z} . Soit $\mathcal{A} = \{A_i\}$, on notera alors $A \lambda_{\mathcal{A}} B$ le produit en couronne généralisé associé.

Posons $\beta = \frac{2\alpha}{1-\alpha} < 1$.

Si l'on veut avoir une fonction de Folner de l'ordre de e^{n^β} , nous devons construire ϕ (ou la partition \mathcal{A}) avec un certain nombre de redondances. Si par exemple, on pense à l'ensemble suivant comme ensemble de Folner :

$$(4.2) \quad U_n = \{(a, f); a \in [-n; n] \text{ et } \text{supp}(f) \in [-n; n]\},$$

on doit avoir

$$\#\phi([[-n; n]]) = \{i; A_i \cap [-n; n] \neq \emptyset\} \approx n^\beta.$$

Pour $\Omega \subset A$, il est alors utile d'introduire :

$$N^{\mathcal{A}}(\Omega) = \#\{i; A_i \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

et

$$S_j(\Omega) = \#(A_j \cap \Omega).$$

En particulier, on pose

$$N^{\mathcal{A}}(k, k+m) = N^{\mathcal{A}}([k, k+m]) \text{ et } S_j(k, k+m) = S_j([k, k+m]).$$

Le lemme suivant nous donne la construction d'une partition qui répondra à notre problème.

Lemme 4.1.4.

Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante avec $g(1) = 1$ et vérifiant pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$g(2n) \leq 2g(n).$$

Alors il existe une partition $\mathcal{A}_g = \{A_i\}$ de \mathbb{Z} satisfaisant :

(i) pour tout $m \geq 0$ et tout k dans \mathbb{Z} ,

$$N^{\mathcal{A}_g}(k, k+m) \approx g(m),$$

(ii) il existe $K > 0$ tel que pour tout $m \geq 0$, pour tout k dans \mathbb{Z} et pour tout i, j avec $S_j(k, k+m) \neq 0$:

$$\frac{S_i(k, k+m)}{S_j(k, k+m)} \leq K.$$

Démonstration.

1. On construit d'abord la partition sur les intervalles $[1, 2^s]$ ($s \geq 0$) par récurrence sur s , de sorte que :

$$(\mathcal{P}_s) \quad \begin{cases} N^{\mathcal{A}_g}(1, 2^s) = g(2^s), \\ \frac{S_i(1, 2^s)}{S_j(1, 2^s)} \leq 2 \quad \text{pour } S_j(1, 2^s) \neq 0. \end{cases}$$

- Pour $s = 0$, on met le point 1 dans un certain A_i , puisque $g(1) = 1$ (par ex A_1).

- Soit $s \geq 1$ et supposons avoir construit une partition sur $[1, 2^s]$. Étendons cette partition à $]2^s, 2^{s+1}]$.

Soit $A_1, A_2, \dots, A_{g(2^s)}$ la partition sur $[1, 2^s]$ donnée par l'hypothèse de récurrence.

Rangeons par cardinal décroissant ces ensembles en $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{g(2^s)}}$. (*)

ie : $\#(A_{i_1} \cap [1, 2^s]) \geq \#(A_{i_2} \cap [1, 2^s]) \geq \dots \geq \#(A_{i_{g(2^s)}} \cap [1, 2^s])$.

(*) est juste nécessaire pour obtenir (ii).

Soit $j \in]2^s, 2^{s+1}]$, il existe i_k tel que $j - 2^s \in A_{i_k}$,

-si $k > g(2^{s+1}) - g(2^s)$, on met j dans A_{i_k} ,

-sinon, on met j dans une "nouvelle" classe, $j \in A_{g(2^s)+k}$.

Ainsi on a bien :

$$\begin{aligned} N^{\mathcal{A}_g}(1, 2^{s+1}) &= N^{\mathcal{A}_g}(1, 2^s) + \#\{k \in [1, g(2^s)]; k \leq g(2^{s+1}) - g(2^s)\} \\ &= g(2^s) + g(2^{s+1}) - g(2^s) \\ &= g(2^{s+2}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, remarquons que par construction, ou bien $S_i(1, 2^{s+1}) = S_i(1, 2^s)$ ou bien $S_i(1, 2^{s+1}) = 2S_i(1, 2^s)$. La deuxième assertion de (\mathcal{P}) est donc trivialement satisfaite au rang $s + 1$, sauf lorsque $S_i(1, 2^{s+1})$ a doublé et $S_j(1, 2^{s+1})$ est inchangé. Mais dans ce cas, par (*) on a $\#(A_i \cap [1, 2^s]) \leq \#(A_j \cap [1, 2^s])$, qui se réécrit $S_i(1, 2^s) \leq S_j(1, 2^s)$. D'où,

$$\frac{S_i(1, 2^{s+1})}{S_j(1, 2^{s+1})} = 2 \frac{S_i(1, 2^s)}{S_j(1, 2^s)} \leq 2.$$

Ce qui achève la récurrence.

2. On termine la construction de la partition sur \mathbb{Z} en mettant pour $j \leq 0$, $j \in A_i$, où $-j + 1 \in A_i$. On note \mathcal{A}^g cette partition.
3. Vérifions à présent, les conditions (i) et (ii).
Remarquons d'abord que par construction, pour tout entier A , et pour tout

$s \geq 0$, les partitions sur $[1, 2^s]$ et $[A2^s + 1, (A + 1)2^{s+1}]$ sont équivalentes. Et on a en particulier :

$$(4.3) \quad N^{\mathcal{A}_g}(0, 2^s) = N^{\mathcal{A}_g}(2^s A, 2^s(A + 1)),$$

$$(4.4) \quad \text{et } \frac{S_i(2^s A, 2^s(A + 1))}{S_j(2^s A, 2^s(A + 1))} \leq 2.$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 0$.

Soit $s \geq 0$ tel que $2^{s-2} < m \leq 2^{s-1}$ et soit $A = \min\{D; k \leq D2^{s-2}\}$. On a alors $[A2^{s-2}, (A + 1)2^{s-2}] \subset [k, k + m]$ et par suite

$$\begin{aligned} N^{\mathcal{A}_g}(k, k + m) &\geq N^{\mathcal{A}_g}(2^{s-2}A, 2^{s-2}(A + 1)) \\ &= N^{\mathcal{A}_g}(0, 2^{s-2}) \\ &= g(2^s/4) \\ &\geq g(m/4) \\ &\succeq g(m). \end{aligned}$$

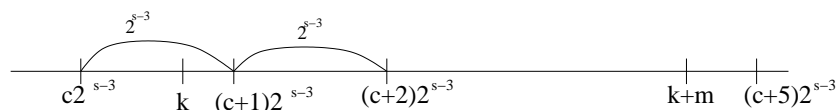
Soit $B = \max\{D; D2^{s-1} \leq k\}$, on a alors $[k, k + m] \subset [B2^{s-1}, (B + 2)2^{s-1}]$. D'où

$$\begin{aligned} N^{\mathcal{A}_g}(k, k + m) &\leq N^{\mathcal{A}_g}(B2^{s-1}, (B + 2)2^{s-1}) \\ &= N^{\mathcal{A}_g}(B2^{s-1}, (B + 1)2^{s-1}) + N^{\mathcal{A}_g}((B + 1)2^{s-1}, (B + 2)2^{s-1}) \\ &= 2g(2^{s-1}) \\ &\leq 2g(2m) \\ &\preceq g(m). \end{aligned}$$

Ce qui prouve le (i).

Soit maintenant $C = \max\{D; D2^{s-3} \leq k\}$, grâce à la définition de s , on vérifie que l'on a :

$$(4.5) \quad [(C + 1)2^{s-3}, (C + 2)2^{s-3}] \subset [k, k + m] \subset [C2^{s-3}, (C + 5)2^{s-3}].$$



Soient i, j des indices indexant la partition tels que $S_i(k, k + m) \neq 0$ et $S_j(k, k + m) \neq 0$, on peut donc écrire,

$$\begin{aligned} S_i(k, k + m) &\leq S_i(C2^{s-3}, (C + 5)2^{s-3}) \\ &\leq 2S_j(C2^{s-3}, (C + 5)2^{s-3}) \quad \text{par (4.4)} \\ (4.6) \quad &= 2[S_j(C2^{s-3}, k) + S_j(k, k + m) + S_j(k + m, (C + 5)2^{s-3})]. \end{aligned}$$

Étudions les termes $S_j(C2^{s-3}, k)$ et $S_j(k + m, (C + 5)2^{s-3})$.

D'abord on a $S_j(C2^{s-3}, k) \leq S_j(C2^{s-3}, (C + 1)2^{s-3})$.

Par ailleurs, il existe j_1 tel que

$$S_j(C2^{s-3}, (C + 1)2^{s-3}) = S_{j_1}((C + 1)2^{s-3}, (C + 2)2^{s-3}).$$

On déduit alors

$$\begin{aligned} S_j(C2^{s-3}, (C+1)2^{s-3}) &= S_{j_1}((C+1)2^{s-3}, (C+2)2^{s-3}) \\ &\leq 2S_j((C+1)2^{s-3}, (C+2)2^{s-3}) \text{ par (4.4)} \\ &\leq 2S_j(k, k+m) \text{ par la première inclusion de (4.5)} \end{aligned}$$

De même, on prouve que, $S_j(k+m, (C+5)2^{s-3}) \leq 2S_j(k, k+m)$. Finalement avec (4.6) on obtient,

$$S_i(k, k+m) \leq KS_j(k, k+m) \text{ avec } K = 10.$$

Ce qui prouve le (ii). □

Remarque 4.1.5. La propriété (ii) du lemme 4.1.4, s'étend immédiatement à tout ensemble Ω fini. On a en effet, pour chaque composante connexe Ω^s de Ω , $S_i(\Omega^s) \leq KS_j(\Omega^s)$. Puis en sommant sur s , on obtient $S_i(\Omega) \leq KS_j(\Omega)$

Avant de montrer que le graphe $A_{\mathcal{A}_g} B$ est solution de notre problème, remarquons la propriété suivante de la partition \mathcal{A}_g , qui nous sera fort utile dans la suite.

Lemme 4.1.6. Soit g réalisant les hypothèses de la propriété 4.1.4 et $\mathcal{A}_g = \{A_i\}$ la partition associée. Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $\Omega \subset \mathbb{Z}$, satisfaisant $\frac{|\partial_{A'}\Omega|}{|\Omega|} \leq \frac{1}{k}$, pour tout $\Omega_\delta \subset \Omega$ avec $|\Omega_\delta| \geq \delta|\Omega|$, ($\delta > 0$) on ait :

$$\#\{i; A_i \cap \Omega_\delta \neq \emptyset\} \geq c_1 \frac{\delta}{2K} g(c_2 \text{Fol}_A(k)),$$

où K est la constante intervenant dans le (ii) du lemme 4.1.4.

Démonstration.

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{Z}$ tel que $\frac{|\partial_{A'}\Omega|}{|\Omega|} \leq \frac{1}{k}$. Il existe au moins une composante connexe Ω^{s_0} de Ω telle que $\frac{|\partial_{A'}\Omega^{s_0}|}{|\Omega^{s_0}|} \leq \frac{1}{k}$ et donc $|\Omega^{s_0}| \geq \text{Fol}_A(k)$.
2. Prenons pour c_1 et c_2 les constantes vérifiant $N^{\mathcal{A}_g}(k, k+m) \geq c_1 g(c_2 m)$, pour tout k dans \mathbb{Z} et m dans \mathbb{N} .
3. Il existe i_0 tel que $0 < |A_{i_0} \cap \Omega| \leq \frac{|\Omega|}{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))}$.

En effet, si pour tout j tel que $|A_j \cap \Omega| > 0$ on avait $|A_j \cap \Omega| > \frac{|\Omega|}{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))}$ alors,

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \sum_j |A_j \cap \Omega| \\ &> N^{\mathcal{A}_g}(\Omega) \frac{|\Omega|}{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))} \\ &> N^{\mathcal{A}_g}(\Omega^{s_0}) \frac{|\Omega|}{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))} \\ &> |\Omega| \text{ (par le choix de } c_1 \text{ et } c_2.) \end{aligned}$$

Absurde.

4. On déduit alors que pour tout i , $|A_i \cap \Omega| \leq \frac{K|\Omega|}{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))}$.

En effet, pour tout i , grâce à la remarque 4.1.2, on peut écrire :

$$|A_i \cap \Omega| = S_i(\Omega) \leq K S_{i_0}(\Omega) = K |A_{i_0} \cap \Omega| \leq \frac{K|\Omega|}{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))}.$$

5. Supposons alors maintenant que $\#\{i; A_i \cap \Omega_\delta \neq \emptyset\} \leq c_1 \frac{\delta}{2K} g(c_2 \text{Fol}_A(k))$. Alors on a successivement,

$$\begin{aligned} \delta|\Omega| &\leq |\Omega_\delta| \\ &= \sum_{i; A_i \cap \Omega_\delta \neq \emptyset} |A_i \cap \Omega_\delta| \\ &\leq \#\{i; A_i \cap \Omega_\delta \neq \emptyset\} \times \max_i |A_i \cap \Omega_\delta| \\ &\leq \#\{i; A_i \cap \Omega_\delta \neq \emptyset\} \times \max_i |A_i \cap \Omega| \\ &\leq c_1 \frac{\delta}{2K} g(c_2 \text{Fol}_A(k)) \times \frac{K|\Omega|}{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))} = \frac{\delta|\Omega|}{2}. \end{aligned}$$

Absurde.

□

Prenons $g : x \rightarrow x^\beta$. Du fait que $\beta < 1$, les hypothèses du lemme 4.1.4 sont vérifiées. Posons $D_F = A \wr_{\mathcal{A}_g} B$, ce graphe va satisfaire les propriétés souhaitées.

Proposition 4.1.7. *La fonction de Folner du graphe $D_F = A \wr_{\mathcal{A}_g} B$ vérifie,*

$$\text{Fol}_{D_F}(n) \approx e^{n^\beta}.$$

Démonstration.

Borne supérieure.

A l'aide des ensembles U_n définis dans (4.2), on obtient une majoration de la fonction de Folner.

$$\text{Fol}_{D_F}(n) \preceq |U_n| = (2n+1)2^{N_{\mathcal{A}_g}(-n,n)} \approx e^{n^\beta}.$$

Borne inférieure

La borne inférieure s'obtient de la même manière que dans la preuve de la proposition 3.2.1 mais en améliorant la définition de la satisfaisabilité. Soit \mathcal{M} un ensemble de parties de $V(A)$ et soit $\epsilon > 0$ et $y > 0$. Etant donné un $U \subset V(A \wr_{\mathcal{A}_g} B)$, on dira qu'une configuration f est $(1-\epsilon, y)_{\mathcal{M}}$ satisfaisable si il existe $M \in \mathcal{M}$ tel que $M' \subset M$ et $(1-\epsilon)|M| \leq |M'|$, où $M' = \{a \in V(A); \dim_{\phi(a)} f \geq y\}$.

La preuve peut s'expliquer en 3 étapes.

1. Soit $U \subset V(D_F)$ tel que $\frac{|\partial_{D_F} U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}$. (**)

2. Pour $W \subset V(D_F)$, on note $W_c = \{f; \exists a \in V(A) (a, f) \in W\}$. De la même manière que dans la preuve de la proposition 3.2.1, on prouve qu'il existe $\epsilon > 0$

tel que pour tout U vérifiant (**), il existe $W \subset U$ tel que tout f de W_c soit $(1 - \epsilon, \text{Fol}_B(k)/30)_M$ satisfaisable, avec

$$\mathcal{M} = \left\{ D \subset V(A); \frac{|\partial_A D|}{|D|} \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Ce résultat similaire aux lemmes 3.2.3 et 3.2.4 est prouvé en complément à la section suivante.

3. Soit alors $f \in W_c$, il existe $M \in \mathcal{M}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} M' = \{a \in V(A); \dim_{\phi(a)} f \geq \text{Fol}_B(k)/30\} \subset M \\ \text{et} \\ |M'| \geq (1 - \epsilon)|M|. \end{array} \right.$$

Le lemme 4.1.6 s'applique avec $\delta = 1 - \epsilon$, $M = \Omega$ et $M' = \Omega_\delta$. On déduit donc que l'on peut changer la valeur de f en au moins $c_1 \frac{1-\epsilon}{2K} g(c_2 \text{Fol}_A(k))$ points de $\text{Fol}_B(k)/30$ manières, en restant dans W_c . Le lemme 3.2.6 permet alors de dire que,

$$|U| \geq |W_c| \geq \left(\frac{\text{Fol}_B(k)}{30} \right)^{c_1 g(c_2 \text{Fol}_A(k))} \geq e^{g(k)},$$

car d'une part $\text{Fol}_B(n) = 2$ et d'autre part, $\text{Fol}_A(k) = 2k$.

□

Il ne reste plus qu'à prouver le point (ii) de la propriété 3.3.1. C'est identique au cas $\alpha \geq 1/3$.

1. Soit $d_0 = (0, f_0)$ où f_0 est la configuration nulle. Soit $H_n = (K_n, g_n)$ la marche aléatoire sur D_F issue de d_0 qui saute uniformément sur l'ensemble des points, constitué par le point où le marcheur se trouve et ses voisins. Cette marche est réversible pour la mesure uniforme. En effet dans D_F , le nombre de voisins est constant, égal à 4. Ecrivons maintenant,

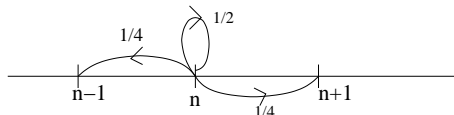
$$\begin{aligned} p_{2n}^{D_F}(d_0, d_0) &= \sum_z p_n^{D_F}(d_0, z) p_n^{D_F}(z, d_0) \\ &\geq \sum_{z \in G} p_n^{D_F}(d_0, z)^2 \\ &\geq \frac{1}{|G|} \left[\sum_{z \in G} p_n^{D_F}(d_0, z) \right]^2 \\ &\geq \frac{1}{|G|} \left[\mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(H_n \in G) \right]^2, \end{aligned}$$

où G est un sous ensemble quelconque de $V(D_F)$.

2. Prenons $G = G_r = \{(a, f) ; |a| \leq r \text{ et } \text{supp}(f) \subset \phi([-r, r])\}$.
De part la structure des arêtes sur D_F , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(H_n \in G_r) &\geq \mathbb{P}_{d_0}^{D_F}(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r) \\ &\geq \mathbb{P}_0^K(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r), \end{aligned}$$

où \mathbb{P}_0^K est la loi de (K_i) qui est encore une marche aléatoire mais dont les transitions sont représentées par :



3. Minorons le terme $\mathbb{P}_0^K(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r)$. Cette fois, on ne peut pas se contenter d'une minoration en $e^{-c(n/r^2+r)}$ comme dans 2.5.2 car $\beta = \frac{2\alpha}{1-\alpha} < 1$ (voir étape suivante). On peut par contre montrer que pour cette marche,

$$\exists c > 0, \forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}_0^K(\forall i \in [0, n] |K_i| \leq r) \geq e^{-cn/r^2}.$$

Ce résultat est, par exemple, prouvé dans le lemme 7.4.3 dans [11]. Il est connu pour une marche simple dans \mathbb{Z}^d et l'on peut d'ailleurs le déduire dans ce cas particulier à l'aide d'un couplage. Considérons K'_i à valeurs dans \mathbb{Z}^2 qui suit le déplacement (horizontal) de K_i si K_i bouge, et saute uniformément sur ses 2 voisins verticaux si K_i reste sur place. On vérifie que l'on a, d'une part $\{\sup_{0 \leq i \leq n} |K'_i| \leq r\} \subset \{\sup_{0 \leq i \leq n} |K_i| \leq r\}$ et par ailleurs que K'_i est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 . Ainsi le résultat pour K_i dans \mathbb{Z} se déduit du résultat pour K'_i dans \mathbb{Z}^2 .

4. Terminons la preuve. De $|G_r| = (2r+1)2^{N^{Ag}(-r,r)} \preceq e^{r^\beta}$, on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$p_{2n}^{D_F}(d_0, d_0) \geq e^{-c(\frac{n}{r^2} + r^\beta)}.$$

Or la fonction $r \mapsto \frac{n}{r^2} + r^\beta$, est minimale pour r de l'ordre de $n^{\frac{1}{\beta+2}}$.
D'où, il existe $c > 0$ tel que :

$$p_{2n}^{D_F}(0, 0) \geq e^{-cn^{\frac{\beta}{\beta+2}}} = e^{-cn^\alpha}.$$

4.2 Complément sur la satisfaisabilité.

Cette section pourrait se substituer à la section 3.2.1 car elle reprend les mêmes idées et permet également d'obtenir le théorème 3.2.1. Si elle n'est placée qu'en complément, c'est tout simplement dû au fait que le concept de satisfaisabilité introduit ici, est bien plus abstrait et est plus compréhensible après la lecture de la preuve 3.2.1.

On se place toujours dans le produit en couronne $A \wr B$ de deux graphes A et B , et on considère $U \subset V(A \wr B)$. On associe alors à chaque U comme précédemment un hypergraphe K_U et son squelette de dimension 1 noté Γ_U , construits de la même manière qu'en 3.2.1.

On se donne maintenant $\epsilon > 0$ et $a \geq 0$ et soit \mathcal{M} un ensemble de partie de $V(A)$, pour s'éclairer les idées et voir le lien avec l'ancienne définition de la satisfaisabilité, on peut penser dans la suite à prendre pour \mathcal{M} des ensembles de la forme $\{D \subset V(A); \frac{|\partial_A D|}{|D|} \leq \frac{1}{n}\}$.

- Une configuration f de $V(K_U)$ est dite $(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ satisfaisable si :

$$\text{il existe } M \in \mathcal{M} \text{ tel que } \begin{cases} M' \subset M \\ (1 - \epsilon)|M| < |M'| \end{cases}$$

où $M' = \{m \in V(A); \underset{m}{\dim} f \geq a\}$.

On note $S_U(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ (ou $S(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$) l'ensemble des configurations satisfaisables.

- Sinon on dit que f est non satisfaisable, et on note $NS(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ l'ensemble des configurations non satisfaisables.
- Si Γ' est un sous graphe de Γ_U , on dit que f est $S(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ par rapport à Γ' si f vérifie la même condition que ci-dessus mais où la dimension de f compte uniquement les arêtes dans Γ' . Plus précisément, ici :
 $\underset{m, \Gamma'}{\dim} f = \#\{g; (f, g) \in E(\Gamma') \text{ et } (x, g) \in U \text{ et } \forall y \neq x f(y) = g(y)\}$.
- Une arête de Γ_U sera dite $(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ satisfaisable si elle joint deux configurations $(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ satisfaisables sinon elle sera $(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ non satisfaisable. On notera $S^e(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ [resp $NS^e(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$] l'ensemble des arêtes satisfaisables [resp non satisfaisables].
- Un point $u = (x, f) \in U$ sera dit $(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ satisfaisable [resp $(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ non satisfaisable] si $f \in S(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ [resp $NS(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$]. Nous noterons $S^p(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$ et $NS^p(1 - \epsilon, a)$ pour l'ensemble des points de U qui sont (ou ne sont pas) satisfaisables.
- On garde la même définition pour les points bons, $u = (x, f) \in U$ sera dit a - bon si $\underset{x}{\dim} f \geq a$ sinon on dira qu'il est a - mauvais.

L'intérêt de cette nouvelle notion de satisfaisabilité réside dans le fait suivant : lorsqu'on a un ensemble U_c de configurations toutes (a, b) - satisfaisables (avec la "vieille" définition), on sait que l'on peut changer la valeur de f en au moins b points de a manières en restant dans U_c , mais on ne sait pas où sont ces b points, alors qu'avec la "nouvelle" définition, pour un ensemble U_c qui ne contient que des configurations $S(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$, on sait que l'on peut changer la valeur de f en au moins $(1 - \epsilon) \min_{M \in \mathcal{M}} |M|$ points de a manières en restant dans U_c et on sait de plus que ces points sont contenus dans un certain $M \in \mathcal{M}$. Ce qui est fort utile pour les produits

en couronne généralisés par exemple, puisqu'on localise les points où l'on peut changer f et par les propriétés de la partition, il ne reste plus qu'à minorer $\#\phi(M)$.

Soit $U \in V(A \wr B)$ tel que $\frac{|\partial_{A \wr B} U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$, les 2 lemmes suivants sont similaires aux lemmes 3.2.3 et 3.2.4.

Lemme 4.2.1. *Soit $\mathcal{M} = \{D \subset V(A); \frac{|\partial_A D|}{|D|} \leq \frac{1}{k}\}$, alors on a :*

$$(i) \frac{\#\{u \in U; u \text{ Fol}_B(k)\text{-mauvais}\}}{|U|} \leq \frac{1}{1000},$$

$$(ii) \text{ Il existe } \epsilon > 0 \text{ tel que } \frac{\#\{u \in U; (1-\epsilon, \text{Fol}_B(k)/3)_\mathcal{M}\text{-non satisfaisable}\}}{|U|} \leq \frac{1}{500}.$$

Démonstration.

Pour (i), c'est exactement la même chose que le (i) du lemme 3.2.3.

Pour (ii) définissons,

$$\begin{aligned} \text{Neud} &= \{u \in U; u \in NS^p(1-\epsilon, \frac{\text{Fol}_B(k)}{3})_\mathcal{M}\} \\ &= \{u = (x, f) \in U; f \in NS(1-\epsilon, \frac{\text{Fol}_B(k)}{3})\}, \end{aligned}$$

et posons :

$$\text{Neud}(f) = \{(x, f); (x, f) \in U\}.$$

Remarquons que $p(\text{Neud}(f)) = \{x; (x, f) \in U\}$.

Pour F ensemble de configurations, soit

$$\text{Neud}(F) = \bigcup_{f \in F} \text{Neud}(f).$$

Notons que c'est une union disjointe.

Soit maintenant $f \in NS(1-\epsilon, \frac{\text{Fol}_B(k)}{3})_\mathcal{M}$, étudions l'ensemble $p(\text{Neud}(f))$.

On distingue donc 2 cas :

$$\text{Premier cas : } f \in F_1 := \{f \in NS(1-\epsilon, \frac{\text{Fol}_B(k)}{3})_\mathcal{M}; \frac{\#\partial_A p(\text{Neud}(f))}{\#p(\text{Neud}(f))} > \frac{1}{k}\}.$$

L'application $\bigcup_{f \in F_1} \partial_A p(\text{Neud}(f)) \longrightarrow \partial_{A \wr B} U$ est injective.

$$(x, y) \longmapsto ((x, f); (y, f))$$

donc, on a :

$$|\partial_{A \wr B} U| \geq \sum_{f \in F_1} |\partial_A p(\text{Neud}(f))| \geq \frac{1}{k} \sum_{f \in F_1} |p(\text{Neud}(f))| \geq \frac{1}{k} |\text{Neud}(F_1)|. \quad (4.7)$$

Second cas : $f \in F_2 := \{f \in NS(1 - \epsilon, \frac{Fol_B(k)}{3})_{\mathcal{M}}; \frac{\#\partial_A p(Neud(f))}{\#p(Neud(f))} \leq \frac{1}{k}\}$.

Comme $f \in NS(1 - \epsilon, \frac{Fol_B(k)}{3})_{\mathcal{M}}$ on a :

$$(4.8) \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M} \quad \begin{cases} \exists m' \in M' - M, \\ \text{ou bien} \\ |M'| \leq (1 - \epsilon)|M|, \end{cases}$$

où M' désigne toujours $\{m \in V(A); \dim_m f \geq \frac{Fol_B(k)}{3}\}$.

Choisissons $M = p(Neud(f))$ puisque $f \in F_2$, on a $M \in \mathcal{M}$ et $M' \subset M$, donc c'est le deuxième point dans l'assertion (4.8) qui est vérifié. ie : $|M'| \leq (1 - \epsilon)|M|$. D'où,

$$\#\{x \in p(Neud(f)); \dim_x f \geq \frac{Fol_B(k)}{3}\} < (1 - \epsilon)|M| = (1 - \epsilon)|Neud(f)|.$$

(On a utilisé que $|p(Neud(f))| = |Neud(f)|$.)

Donc

$$\#\{x \in p(Neud(f)); \dim_x f < \frac{Fol_B(k)}{3}\} \geq \epsilon|Neud(f)|$$

$$(4.9) \quad \text{ie : } |P_f| \geq \epsilon|Neud(f)|,$$

avec $P_f = \{x \in p(Neud(f)); \dim_x f < \frac{Fol_B(k)}{3}\}$.

A chaque point de P_f (pour f dans F_2), on peut faire correspondre de manière injective un point du bord (en configuration) de U . En effet, comme précédemment :

Pour $x \in P_f$ et $f \in Neud(F_2)$, on a :

$$|\tilde{P}_{x,f}| \leq \frac{Fol_B(k)}{3} < Fol_B(k).$$

où $\tilde{P}_{x,f} = \{g(x); (x, g) \in U \text{ et } \forall y \neq x \ g(y) = f(y)\}$.

On a donc,

$$|\partial_B \tilde{P}_{x,f}| > \frac{1}{k} |\tilde{P}_{x,f}| \geq 0,$$

d'où

$$|\partial_B \tilde{P}_{x,f}| \geq 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\partial_{A \setminus B} U| &\geq \sum_{x \in P_f, f \in F_2} |\partial_B \tilde{P}_{x,f}| \\ &\geq \sum_{f \in F_2} \epsilon |Neud(f)| \quad \text{par (4.9),} \\ &\geq \epsilon |Neud(F_2)| \\ &\geq \frac{1}{k} |Neud(F_2)| \text{ en choisissant } \epsilon < 1/k. \end{aligned}$$

En sommant (4.7) et cette dernière inégalité et en utilisant le fait que $\frac{|\partial_{A|B}U|}{|U|} < \frac{1}{1000k}$, on obtient :

$$\frac{|Neud|}{|U|} < \frac{1}{500}.$$

□

Lemme 4.2.2. Soit $\epsilon > 0$ et $x > 0$. Considérons Γ_U le squelette de dimension un muni des poids w , construit à partir de K_U . Supposons que $E(\Gamma_U) \neq \emptyset$ et $\forall f \in K_U \dim_x f \geq a$. On suppose également que \mathcal{M} ne contient pas l'ensemble vide. Si de plus :

$$\frac{\sum_{e \in NS_U^e(1-\epsilon, a)_\mathcal{M}} w(e)}{\sum_{e \in E(\Gamma_U)} w(e)} < 1/2,$$

alors, il existe un sous graphe non vide Γ' de Γ_U tel que toutes les arêtes soient $S_U(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_\mathcal{M}$ satisfaisable par rapport à Γ' .

Démonstration. Dans le graphe Γ_U , on efface tous les points $NS_U^p(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_\mathcal{M}$ et les arêtes adjacentes. Après cette première étape, il peut alors apparaître des nouveaux points $NS_{U_1}^p(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_\mathcal{M}$, où $U_1 = U - NS_U^p(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_\mathcal{M}$.

On efface à nouveau ces points et les arêtes adjacentes, et on itère ce processus.

Soit U_i l'ensemble des sommets restant à l'étape i .

$$\begin{cases} U_0 = U, \\ \text{pour } i \geq 1 \quad U_{i+1} = U_i - NS_{U_i}^p(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_\mathcal{M}. \end{cases}$$

Il suffit de prouver que le processus prend fin avant que le graphe soit vide.

$$\text{Soit } C_1 = \sum_{e \in NS_U(1-\epsilon, a)_\mathcal{M}} w(e), \quad C_2 = \sum_{\substack{e \in NS_U^e(1-\epsilon, a)_\mathcal{M}; e \text{ effacée} \\ \text{à la fin du processus}}} w(e),$$

et

$$C_0 = \sum_{\substack{e \in E(\Gamma_U); e \text{ effacée} \\ \text{à la fin du processus}}} w(e).$$

Si nous montrons que $C_2 \leq C_1$, le résultat découlera, puisque :

$$C_0 \leq C_1 + C_2 \leq 2C_1 < \sum_{e \in E(\Gamma_U)} w(e).$$

Ce qui signifiera qu'il reste un (ou des) point(s) non effacé(s). ie : $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les sommets du graphe obtenu à l'étape k , sont $S_{U_{k_0}}^p(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_\mathcal{M}$, donc $S_U^p(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_\mathcal{M}$.

Pour voir cela, introduisons une orientation sur les arêtes effacées : si L et Q sont des

points du graphe, nous orientons l'arête de L vers Q si L est effacé avant Q , et nous choisissons une orientation arbitraire si ils sont effacés en même temps. Nous notons L l'ensemble des arêtes quittant le point L et L pour l'ensemble des arêtes arrivant en L à l'étape 0.

Sous-lemme 4.2.3. *Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit L un point du graphe Γ_U (satisfaisant les hypothèses du lemme 4.2.2), effacé après $k+1$ étapes. Supposons que L soit initialement $S_U^p(1-\epsilon, a)_M$, alors*

$$\sum_{e \in L_{\downarrow}} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{e \in L_{\uparrow}} w(e).$$

Démonstration. Il est utile de remarquer le fait suivant, pour une arête multidimensionnelle e , la somme des poids dans le squelette des arêtes provenant de e et adjacente à un point, vaut 1. Ceci résulte des poids que l'on a choisi.

1. Soit maintenant N_0 le nombre d'arêtes multidimensionnelles à l'étape 0, quittant L . Du fait que L soit initialement $S_U^p(1-\epsilon, a)_M$, il existe $M_0 \in \mathcal{M}$ tel que L ait au moins $(1-\epsilon)|M_0|$ arêtes multidimensionnelles attachées à L . Donc,

$$(4.10) \quad N_0 \geq (1-\epsilon)|M_0|.$$

Remarquons par ailleurs que :

$$\sum_{\substack{e \in E(\Gamma_U) \\ e \text{ contient } L}} w(e) = N_0.$$

Posons :

$$L_1 = \{e \in L_{\downarrow}, e \text{ provenant d'une arête multidimensionnelle de } K_{U_k}, \\ \text{de } \dim \geq a/10\},$$

et

$$L_2 = \{e \in L_{\downarrow}, e \text{ provenant d'une arête multidimensionnelle de } K_{U_k}, \\ \text{de } \dim < a/10\}.$$

On a $L_{\downarrow} = L_1 \cup L_2$, car les arêtes de L_{\downarrow} sont les arêtes quittant A à l'étape k .

2. Du fait que L devient $NS_{U_k}^p(1-\frac{9+\epsilon}{10}, \frac{a}{10})_M$, on a :

$$\text{pour tout } M \text{ dans } \mathcal{M} \begin{cases} M'' \not\subset M \\ \text{ou} \\ |M''| \leq (1-\frac{9+\epsilon}{10})|M| \end{cases}$$

où $M'' = \{m \in V(A); \dim_{m, U_k} L \geq \frac{a}{10}\}$.

Or $M'' \subset M_0$ (les U_k décroissent) donc c'est que l'on a $|M''| \leq (1 - \frac{9+\epsilon}{10})|M_0|$. Finalement L a moins de $(1 - \frac{9+\epsilon}{10})|M_0|$ arêtes multidimensionnelles de dimension au moins $a/10$. Notons les par exemple f_1, \dots, f_q , avec $q < (1 - \frac{9+\epsilon}{10})|M_0|$.

$$(4.11) \quad \sum_{\substack{e \in L_1 \\ \downarrow}} w(e) = \sum_{k=1..q} \underbrace{\sum_{\substack{e \\ \text{provenant de } f_k}} w(e)}_{\leq 1} \leq q.$$

(Initialement cette dernière somme valait 1, mais après l'effacement de certaines arêtes, elle est plus petite que 1.)

Par ailleurs, notons g_1, \dots, g_h les autres arêtes multidimensionnelles, de dimension strictement inférieure à $a/10$, attachées à L à l'étape k , avec $h \leq N_0 - q$. Pour tout $k = 1..h$,

$$(4.12) \quad \sum_{\substack{e \\ \text{provenant de } g_k}} w(e) \leq \frac{1}{a} \frac{a}{10} \leq \frac{1}{10}.$$

(En effet, premièrement puisque tout les points ont initialement dimension au moins a , on déduit $\forall e \in E(\Gamma_{U_i}) w(e) \leq 1/a$ et deuxièmement une arête de dimension inférieur à $a/10$ donne moins de $a/10$ arêtes attachée à un point, dans le squelette.)

3. Finalement avec (4.11) et (4.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{e \in L \\ \downarrow}} w(e) &= \sum_{\substack{e \in L_1 \\ \downarrow}} w(e) + \sum_{\substack{e \in L_2 \\ \downarrow}} w(e) \\ &\leq q + (N_0 - q) \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} N_0 + \frac{9}{10} q \\ &= \frac{19}{100} N_0. \end{aligned}$$

($q < (1 - \frac{9+\epsilon}{10})|M_0| \leq N_0 \frac{1 - \frac{9+\epsilon}{10}}{1 - \epsilon} \leq \frac{N_0}{10}$ par (4.10).)

Donc,

$$\sum_{\substack{e \in L \\ \downarrow}} w(e) \leq \frac{19}{100} N_0 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{e \in L \\ \uparrow}} w(e) \geq N_0 - \frac{19}{100} N_0 = \frac{81}{100} N_0.$$

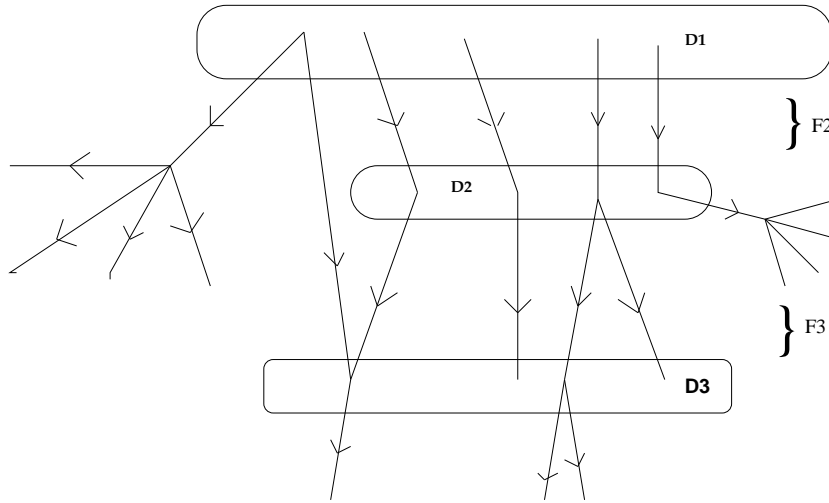
D'où,

$$\sum_{\substack{e \in L \\ \downarrow}} w(e) \leq \frac{19}{81} \sum_{\substack{e \in L \\ \uparrow}} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{e \in L \\ \uparrow}} w(e).$$

□

On finit la preuve de la manière analogue à 3.2.1, posons :
 $D_1 = \{\text{sommets effacés à l'étape 1}\}$,
 et pour $i \geq 2$
 $D_i = \{\text{sommets } S_U^p(1 - \epsilon, a) \text{ effacés à l'étape } i\}$,
 $F_i = \{\text{arêtes entre } D_i \text{ et } D_{i-1}\}$,
 $F'_i = \{\text{arêtes quittant } D_{i-1}\}$.

Notons que $F_i \subset F'_i$ et que les arêtes de F'_i sont effacées.



Par le sous lemme 4.2.3 appliqué en chaque point de D_i , dans le graphe restant à l'étape $i - 2$. (Chaque point de D_i est à cette étape, au moins $S(1 - \epsilon, a)_{\mathcal{M}}$.) On obtient :

$$\forall i \geq 2 \quad \sum_{e \in F'_{i+1}} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{e \in F_i} w(e).$$

donc,

$$\sum_{e \in F'_{i+1}} w(e) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \sum_{e \in F_2} w(e).$$

(Nous avons utilisé que $F_i \subset F'_i$.)

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \bigcup_{i \geq 3} F'_i} w(e) &\leq \left(\sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \sum_{e \in F_2} w(e) \\ &= \sum_{e \in F_2} w(e). \end{aligned}$$

Maintenant, une arête de F_2 est $NS_U^e(1 - \epsilon, a)$ car si elle était $S_U^e(1 - \epsilon, a)$, elle aurait relié deux points $S_U^p(1 - \epsilon, a)$ et en particulier, les points de D_1 auraient été

$S_U^p(1 - \epsilon, a)$, donc $S_U^p(1 - \frac{9+\epsilon}{10}, a/10)$ et donc non effacés. Par conséquence :

$$\sum_{e \in F_2} w(e) \leq \sum_{e \in NS^e(a,b)} w(e) = C_1.$$

Par ailleurs, toute arête effacée $S_U^e(1 - \epsilon, a)$ est dans un certain F'_i avec $i \geq 3$, donc

$$C_2 = \sum_{\substack{e \text{ effacée à la fin du processus} \\ e \in S_U^e(1-\epsilon, a)}} w(e) \leq \sum_{e \in \bigcup_{i \geq 3} F'_i} w(e).$$

Ce qui termine la preuve. □

Expliquons alors le fait que l'on a utilisé dans la propriété 4.1.7 pour prouver la borne inférieure de Fol_{D_F} (point 2). Soit $U \subset V(D_F)$ tel que $\frac{|\partial_{A|B}U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}$. Soit \tilde{K} le sous hypergraphe de K_U qui ne contient que les points $Fol_B(k)/3$ bons. Comme dans la fin de la preuve de 3.2.1, on prouve en utilisant le lemme 4.2.1 qu'il existe $\theta < 1/2$ tel que,

$$\frac{\sum_{\substack{e \in NS_U^e(1-\epsilon, Fol_B(k)/3)_{\mathcal{M}} \\ e \in E(\Gamma_{\tilde{K}})}} w(e)}{\sum_{e \in E(\Gamma_{\tilde{K}})} w(e)} < \theta,$$

pour un certain $\epsilon > 0$ et $\mathcal{M} = \{D \subset V(A); \frac{|\partial_{A|D}|}{|D|} \leq \frac{1}{k}\}$.

Le lemme 4.2.2 nous donne alors un sous graphe où toutes les arêtes sont $S(1 - \delta, Fol_B(k)/30)_{\mathcal{M}}$ pour $\delta = 1 - \frac{9+\epsilon}{10}$. Ce qui prouve le fait annoncé, de par la définition de la satisfaisabilité.

Bibliographie

- [1] P. Antal and A. Pisztora. On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 24(2) :1036–1048, 1996.
- [2] M.T. Barlow. Random walks on supercritical percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(4) :3024–3084, 2004.
- [3] N. Berger and M. Biskup. Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. *Preprint*, 2005.
- [4] T. Coulhon. Ultracontractivity and Nash type inequalities. *J. Funct. Anal.*, 141(2) :510–539, 1996.
- [5] M.D. Donsker and S.R.S Varadhan. On the number of distinct sites visited by a random walk. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(6) :721–747, 1979.
- [6] A. Erschler. Isoperimetry for wreath products of markov chains and multiplicity of selfintersections of random walk. *preprint*, 2003.
- [7] A. Erschler. On isoperimetric profiles of finitely generated groups. *Geom. Dedicata*, 100 :157–171, 2003.
- [8] P.G. De Gennes. La percolation : un concept unificateur. *La Recherche n° 72*, 919, 1976.
- [9] G.R. Grimmett. Percolation. *book*, 1989.
- [10] H. Kesten. Percolation theory for mathematicians. *book*, 1982.
- [11] C. Pittet L. Saloff-coste. A survey on the relationships between volume growth, isoperimetry , and the behaviour of simple random walk on cayley graphs, with examples. *Preprint*, 2001.
- [12] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, and A. M. Stacey. Domination by product measures. *Ann. Probab.*, 25(1) :71–95, 1997.
- [13] P. Mathieu and A. Piatnitski. Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. *Preprint*, 2005.
- [14] P. Mathieu and E. Remy. Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(1A) :100–128, 2004.
- [15] C. Pittet and L. Saloff-Coste. On random walks on wreath products. *Ann. Probab.*, 30(2) :948–977, 2002.
- [16] V. Sidoravicius and A.S Sznitman. Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances. *Probab. Theory Related Fields*, 129(2) :219–244, 2004.
- [17] Y.G. Sinai. Theory of phase transition : Rigourous results. *Int Series in Natural Phil.*, 108.
- [18] W. Woess. Random walks on infinite graphs and groups. *book*, 2000.