HAL
archives-ouvertes.fr

Résonances pour des problèmes de transmission et d'élasticité linéaire

Charles Rivière

▶ To cite this version:

Charles Rivière. Résonances pour des problèmes de transmission et d'élasticité linéaire. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2005. Français. tel-00096032

HAL Id: tel-00096032
https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00096032

Submitted on 18 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2005 N° B.U. :

Résonances pour des problèmes de de transmission et d'élasticité linéaire analyse numérique et méthodes de volumes finis

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Charles RIVIERE

le 19 octobre 2005 à l'Université de Nantes

devant le jury ci-dessous

Président du jury	:	Laurent GUILLOPÉ	Professeur (Nantes)
Examinateurs	:	Vincent BRUNEAU	MCF (Bordeaux)
		Georgi VODEV	CR (CNRS-Nantes)
Rapporteurs	:	Nicolas BURQ	Professeur (Paris XI-Orsay)
		Alain GRIGIS	Professeur (Paris XIII)
Directeur de thèse	:	Georgi POPOV	

Laboratoire : Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)
N° E.D. : ED 366-221

Résumé

Nous étudions la distribution des résonances dans le problème de transmission et pour l'opérateur d'élasticité linéaire. Dans le cas du problème de transmission, nous montrons l'existence de suites de résonances qui s'approchent rapidement de l'axe réel et de densité maximale. Pour le problème de Dirichlet dans l'élasticité linéaire, nous montrons l'absence de résonances sous une cubique du plan complexe.

Mots-clés : résonances, problème de transmission, problème d'élasticité linéaire, quasimodes

Abstract

We study the distribution of the resonances for the transmission problem as well as for the system of the linear elasticity. In the case of the transmission problem, we prove the existence of a sequence of resonances of optimal density rapidly approaching the real axis. For the Dirichlet problem in the linear elasticity we prove the absence of resonances under suitable cubic parabolas in the upper half-plane.

Key words : resonances, transmission problem, linear elasticity, quasimodes.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les résonances apparaissent très naturellement dans l'étude de modèles physiques, en électromagnétisme, en physique quantique... pour représenter des états oscillants et décroissant avec le temps. Cette décroissance peut être due à un amortissement, une perturbation ou à la possibilité d'une propagation des ondes à l'infini, ce qui distingue aussi les résonances des valeurs propres, lesquelles sont des états existant perpétuellement en l'absence de toute perturbation.

Connues depuis longtemps en physique mathématique, leur étude s'est principalement développée ces vingt dernières années grâce à l'introduction de nouvelles idées et de nouveaux outils dans ce domaine en réponse à leur intérêt pour la recherche sur des systèmes perturbés ou non bornés.

On peut citer par exemple l'utilisation de la distortion analytique (étudiée notamment par Sjöstrand et Zworski dans [25][26], puis par Hargé et Lebeau [12]), de la théorie des opérateurs mais aussi des systèmes dynamiques (par exemple avec la théorie KAM).

Les principaux axes de recherche sur le sujet des résonances portent sur la distribution de ces nombres dans le plan complexe, puis sur le dénombrement des résonances ayant les contributions les plus significatives à l'écriture des solutions des problèmes considérés.

Ainsi, ce mémoire a pour but de présenter trois situations pour lesquelles nous pouvons obtenir des informations sur la distribution des résonances près de l'axe réel, situations issues de deux problèmes : le problème de transmission des ondes et le problème de Dirichlet pour l'élasticité linéaire.

En effet, comme l'a expliqué Vainberg [29] dans le cas de perturbations non captives, et comme l'ont exposé Zworski [30] ou Burq [4] pour des perturbations captives, il est possible, grâce aux résonances, de donner un développement asymptotique, pour un temps suffisamment grand, des solutions de l'équation des ondes sous la forme

$$U(t)f \sim \sum_{\lambda \in Res P} e^{it\lambda} \Pi_\lambda f, \qquad t \to +\infty$$

avec Π_λ le projecteur spectral sur la fonction propre associée à λ, résonance de l'opérateur P, et $U(t)f$ la solution du problème

$$\begin{cases} (-\partial_t^2 - P)u &= 0 \\ u|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t u|_{t=0} &= f \end{cases}$$

On peut alors voir, dans cette écriture asymptotique, que $\Re\lambda$ correspond au taux d'oscillation et $\Im\lambda$ au taux de décroissance de la fonction propagée, c'est-à-dire que les résonances ayant des parties imaginaires petites en valeur absolue (et des parties réelles assez grandes) auront une contribution plus importante, en temps grand, à la forme de la solution.

L'étude des résonances doit donc s'orienter vers la détermination de l'existence (ou non) de ces résonances proches de l'axe réel. C'est ainsi que les résultats que nous proposons répondent à cette question : dans le cas du problème de transmission, nous montrons qu'il existe une suite de résonances proches de l'axe réel pour les deux situations étudiées tandis que, dans le cas duproblème de Dirichlet de l'élasticité linéaire, nous mettons en évidence l'absence de résonances sous une cubique. Ce dernier résultat permet d'affirmer que les contributions de ces résonances sont faibles en regard d'éventuelles contributions de résonances proches de l'axe réel (dont nous conjecturons l'existence).

Résonances pour le problème de transmission

Nous considérons un compact strictement convexe $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ (pour $n = 2, 3$ dans les cas que nous étudions), de complémentaire Ω dans $\mathbb{R}^n$, de bord $\Gamma = \partial\mathcal{O}$ ayant des propriétés de régularité suffisantes.

Sur $\mathcal{O}$ et sur Ω, nous considérons deux métriques riemanniennes g et h, telles que h soit la métrique euclidienne à l'extérieur. On note Δ_g et Δ_h les opérateurs de Laplace-Beltrami correspondants. On désigne également par ν la normale unitaire intérieure au bord Γ par rapport à (Ω, h), et par ν' la normale unitaire intérieure à Γ par rapport à $(\mathcal{O}, g)$.

Le domaine de définition de l'opérateur de transmission $P = (\Delta_g, \Delta_h)$ est défini par

$$\mathcal{D}(P) = \left\{ \begin{array}{l} u = (u_1, u_2) \in \mathcal{H},\ u_1 \in H^2(\mathcal{O}),\ u_2 \in H^2(\Omega), \\ u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma,\ (\partial_{\nu'} u_1)|_\Gamma + \alpha(\partial_\nu u_2)|_\Gamma = 0 \end{array} \right\},$$

qui est un sous-espace de l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O}; d_{\mathcal{O}}x) \oplus L^2(\Omega; d_\Omega x),$$

la somme directe orthogonale d'espaces de types L^2 sur $\mathcal{O}$ et sur Ω, on aura, pour tout $u = (u_1, u_2)$ de ce domaine, $Pu = (\Delta_g u_1, \Delta_h u_2)$.

P est un opérateur auto-adjoint, elliptique, $P \leq 0$, et son spectre est absolument continu sans valeurs propres immergées.

Fixons une constante $\alpha > 0$. Le nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé résonance pour le problème de transmission associé à $\mathcal{O}$ si et seulement si le problème suivant a une solution nontriviale :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\Delta_g+\lambda^2)u_1 & = & 0 \qquad \text{dans } \mathcal{O},\\ (\Delta_h+\lambda^2)u_2 & = & 0 \qquad \text{dans } \Omega,\\ u_1-u_2 & = & 0 \qquad \text{sur } \Gamma,\\ \partial_{\nu'}u_1+\alpha\partial_\nu u_2 & = & 0 \qquad \text{sur } \Gamma,\\ u_2 & - & \lambda-\text{sortante} \ ,\end{array}\right.$$

Cette situation est un exemple qui entre dans la famille des problèmes de boîtes noires étudiées assidûment depuis une quinzaine d'années et les travaux de Sjöstrand et Zworski [25], mais placé ici dans un cadre plus général.

Dans le cas universel du problème de transmission en dimension n à travers un obstacle strictement convexe quelconque, Popov et Vodev [22] ont montré qu'il existe une suite infinie de résonances $\{\lambda_j\}$ convergeant vers l'axe réel aussi vite que tout polynôme, c'est-à-dire telles que $\Im\lambda_j \leq C_N|\lambda_j|^{-N}$ pour tout $N \gg 1$.

Ils construisent pour cela un quasimode pour ce problème, dont la divergence est polynômiale. Puis le théorème de Stefanov [23] (étudié également par Tang et Zworski [28]), dont nous reparlons plus en détail ci-dessous, relie l'existence de ce quasimode réel à la présence de résonances à proximité de l'axe réel et fournissant une borne inférieure de la fonction de comptage des résonances.

Par contre, la construction de Popov et Vodev ne prend pas en compte la multiplicité des quasimodes et ne donne donc pas une borne inférieure optimale du nombre de résonances proches de l'axe réel. De plus, l'existence de résultats sur des opérateurs analogues amène à faire la conjecture de l'existence d'une suite de résonances qui convergent expoentiellement vite vers l'axe réel pour ce problème. L'étude d'obstacles en basses dimensions permet de vérifier cette conjecture.

Dans la première situation étudiée, celle de la sphère transparente en dimension 3, on pose $\Delta_g = c^2\Delta$ et $\Delta_h = \Delta$, avec $0 < c < 1$ et une constante de couplage α strictement positive. Nous montrons qu'il est possible d'obtenir ce résultat par le biais de l'analyse complexe (notamment du théorème de Rouché) et de l'étude des fonctions spéciales de Bessel et de Hankel, qui apparaissent naturellement lors de la réduction du problème au bord.

On peut également ajouter que le résultat obtenu est optimal car, selon les travaux de Burq [3] puis de Bellassoued [1], il ne peut pas exister de résonances s'approchant plus vite qu'exponentiellement de l'axe réel.

Dans le deuxième problème de transmission étudié, on se place en dimension deux avec des opérateurs $\Delta_g = c^2\Delta$ et $\Delta_h = \Delta$, avec $0 < c < 1$ et une constante de couplage α fixée à 1. Nous requérons de plus une régularité C^∞ pour le bord.

Il s'agit dans ce second chapitre d'extraire une famille infinie de résonances z de l'opérateur considéré, dont la partie imaginaire vérifie, cette fois, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 < \Im z \leq C_N|z|^{-N}, \qquad C_N > 0$$

Pour parvenir à ce résultat, l'idée employée ici consiste à construire un quasimode de l'opérateur P de densité positive, avant d'utiliser le résultat de Stefanov [23].

En dimension finie n, si on note $\Omega_R = \{x \in \Omega;\ |x| < R\}$, on définit un quasimode de P comme la donnée d'une famille

$$\mathcal{Q} = \{(u_\nu, \lambda_\nu), \nu \in \mathcal{M}\},$$

$\mathcal{M}$ étant un ensemble non borné d'indices, telle que

$$u_\nu = (u_{\nu 1}, u_{\nu 2}) \in (C^\infty(\overline{O}) \times C_0^\infty(\overline{\Omega}_R)) \cap D(P),\ \lambda_\nu > 0,\ \lim_{\nu \to \infty} \lambda_\nu \ \to \ +\infty$$

où $R \gg 1$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ||(\Delta_g + \lambda_\nu^2) u_\nu||_{L^2(O)} & \leq & R(\lambda_\nu) \\ ||(\Delta_h + \lambda_\nu^2) u_\nu||_{L^2(\Omega)} & \leq & R(\lambda_\nu) \\ |\langle u_\nu, u_{\nu'} \rangle_H - \delta_{\nu,\nu'}| & \leq & R(\lambda_\nu + \lambda'_\nu),\ \nu, \nu' \in \mathcal{M}, \end{cases}$$

où $\delta_{\nu,\nu'} = 0$ si $\nu \neq \nu'$ et $\delta_{\nu,\nu} = 1$, et pour toute $N \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to +\infty} x^N R(x) = 0$.

Si on note $N^*(r) = \sharp\{m \in \mathcal{M};\ \lambda_m \leq r\}$, on dit que $\mathcal{Q}$ est un quasimode de densité positive s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathcal{N}^*(r) \geq Cr^n$ pour tout $r \gg 1$.

Considérons maintenant les résonances dans la région

$$\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{C};\ \Re z \geq 1,\ 0 < \Im z \leq S(\Re z)\}$$

où S est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $S(x) = \mathcal{O}(x^{-\infty})$ quand $x \to +\infty$, $S(x) \geq 4x^{2n+3} R(x)$ et $-\gamma S \leq S' \leq 0$ avec $\gamma > 0$. Notons

$$N(r) = \sharp\{z \in \mathcal{N} \cap Res(P);\ 1 \leq \Re z \leq r\}$$

la fonction de comptage des résonances de l'opérateur P comptées avec leur multiplicité. Alors, le théorème 2 de [23] montre qu'il existe une constante strictement positive C' telle que $N(r) \geq C' r^n$ si $N^*(r) \geq C' r^n$.

La construction des quasimode dans notre cas résulte de l'existence d'une grande famille de cercles invariants de l'application du billard dans le domaine strictement convex $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. L'existence d'une telle famille a été prouvée par Lazutkin [15] par la théorie KAM [1]. Pour le resultat de Lazutkin il est indispensable que la dimension soit egale à deux.

Résonances pour le problème de l'élasticité linéaire

Le troisième problème que nous étudions concerne l'élasticité linéaire. Nous considérons un compact strictement convexe $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^3$, dont le bord Γ est analytique et de complémentaire $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$. ν désigne la normale unitaire extérieure à $\Gamma = \partial\mathcal{O}$.

On considère l'opérateur de l'élasticité linéaire, que l'on notera Δ_e. C'est un opérateur différentiel matriciel à trois lignes et trois colonnes, défini par la formule suivante :

$$\Delta_e v = \mu_0 \Delta v + (\lambda_0 + \mu_0) \nabla (\nabla . v),$$

[1] pour Kolmogorov, Arnol'd et Moser

où v désigne un vecteur de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$.

Les quantités λ_0 et μ_0 désignent les constantes de Lamé, dont on suppose qu'elles vérifient les conditions suivantes :

$$\mu_0 \geq 0, \qquad 3\lambda_0 + 2\mu_0 \geq 0.$$

L'opérateur d'élasticité $-\Delta_e$, agissant sur l'ensemble des fonctions à support compact $v \in C_0^\infty\left(\overline{\Omega}; \mathbb{C}^3\right)$ admet un prolongement en un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$. Cet opérateur est positif et n'a pas de spectre ponctuel.

Nous montrons que cet opérateur muni des conditions au bord de Dirichlet n'admet pas de résonances en dessous d'une courbe cubique qu'il est possible d'expliciter. Des résultats de ce type ont été obtenus par Hargé et Lebeau [12] et Sjöstrand et Zworski [26]. Nous obtenons des estimations de la résolvante dans cette région. Nous envisageons d'appliquer les résultats de ce chapitre dans l'étude de résonances du problème de transmission correspondant comme dans l'article de Cardoso, Popov et Vodev [7].

Chapitre 2

Résonances pour le problème de transmission à travers une sphère transparente

Résumé

On montre dans cette partie que, pour le problème de transmission des ondes à travers la boule, il existe une suite infinie de résonances exponentiellement proches de l'axe réel. De plus, on en déduit une borne inférieure optimale de la fonction de comptage de ces résonances.

On considère la boule unité de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{O} = \{\|x\| < 1\}$, de bord $\Gamma = S^2$, et de complémentaire Ω. La vitesse de propagation des ondes à l'intérieur de $\mathcal{O}$ est $0 < c < 1$ et est fixée à 1 à l'extérieur.

On définit l'opérateur de transmission P par $Pu = (-c^2\Delta u_1, -\Delta u_2)$, où $u = (u_1, u_2)$ appartient au domaine de définition

$$\mathcal{D}(P) = \left\{ \begin{array}{l} u = (u_1, u_2) \in \mathcal{H},\ u_1 \in H^2(\mathcal{O}),\ u_2 \in H^2(\Omega), \\ u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma,\ (\partial_{\nu'} u_1)|_\Gamma + a(\partial_\nu u_2)|_\Gamma = 0 \end{array} \right\},$$

avec $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert défini par

$$\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O}; a^{-1}c^{-2}dx) \oplus L^2(\Omega; dx).$$

et ν la normale extérieure unitaire au bord de la boule ; enfin $\nu' = -\nu$.

Les résonances sont définies comme les nombres complexes (de partie imaginaire strictement positive), tels que le problème (2.4) admet une solution nontriviale.

On peut également définir les résonances comme pôles de la résolvante sortante du problème de transmission tronquée, ce qui convient bien pour définir la multiplicité des résonances.

Comme dans le cas des problèmes extérieurs de Dirichlet (Neumann), on peut voir que P est un opérateur auto-adjoint, elliptique tel que $P \leq 0$, et le spectre de P est absolument continu sans valeurs propres immergées. Les résonances du problème de transmission coïncident donc avec les pôles du prolongement méromorphe de la résolvante tronquée

$$R_\chi(\lambda) := \chi(P + \lambda^2)^{-1}\chi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

de $\Im\lambda < 0$, dans le plan complexe. Ici $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $\chi = 1$ dans un voisinage de $\mathcal{O}_2$. La multiplicité de chaque résonance $\lambda \neq 0$ est donnée par l'expression

$$m(\lambda) = \operatorname{rank} \int_{|z-\lambda|=\varepsilon} z R_\chi(z)\, dz\,,\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

et ne dépend pas de χ. On définit la fonction de comptage $\mathrm{N}(r)$ par

$$\mathrm{N}(r) := \sharp \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \text{ résonance de } P, \\ 0 < \Im\lambda \leq C e^{-C|\lambda|},\ 1 \leq |\lambda| \leq r \end{array} \right\},$$

où les résonances sont comptées avec leurs multiplicités.

On peut alors énoncer le théorème :

Théorème 1.1
(a) Il existe une suite infinie de résonances de P, notées $\{\lambda_l\}_{l\geq 1}$, telles que

$$\exists C > 0,\ 0 < \Im\lambda_l \leq C e^{-C|\lambda_l|}.$$

(b) Il existe une constante $\rho > 0$ telle que

$$\mathrm{N}(r) \geq \rho r^3,\ r \gg 1.$$

Nous donnerons une valeur explicite de ρ au terme de la preuve. La preuve se divise en trois parties.

Tout d'abord, on prouve que les résonances du problème de transmission sont les racines d'une équation faisant intervenir des fonctions de Bessel et de Hankel (cf. lemme **2.1**) : pour cela, on transforme les problèmes intérieur et extérieur en explicitant les opérateurs de Neumann correspondants. Ensuite, les conditions au bord du problème (2.4) permettent de montrer que λ est une résonance du problème de transmission si et seulement si elle est solution de l'équation (2.2).

Dans un deuxième temps, on prouve l'existence des résonances recherchées en résolvant l'équation (2.2). Pour cela, on utilise des asymptotiques des fonctions spéciales quand le paramètre est proportionnel à l'ordre de la fonction, en posant

$$\lambda = \nu c z.$$

Nous obtenons ainsi une équation approchée, (2.22), que l'on étudie à l'aide du théorème de Rouché. Ce théorème nous permet de justifier qu'il y a au moins autant de solutions (complexes) de (2.2), comptées avec leurs multiplicités, que de solutions (réelles) de (2.22).

Enfin, dans la troisième partie de la preuve, nous adaptons une méthode utilisée par Stefanov et Vodev dans [24] pour prouver que la partie imaginaire des résonances est exponentiellement petite, à l'aide du théorème des fonctions implicites. La preuve du (b) du théorème est un problème de dénombrement faisant appel aux différentes approximations utilisées auparavant pour obtenir une borne inférieure de la fonction de comptage de l'ordre de r^3.

Si on rapproche notre théorème d'un résultat de Bellassoued [1], on remarque qu'il est optimal et qu'il n'existe pas de résonances convergeant plus vite qu'exponentiellement vers l'axe réel.

2.1 *Introduction and statement of results*

Let $\mathcal{O} = \{\|x\| < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ be the unit ball in $\mathbb{R}^3$, $\Gamma = S^2$ his boundary, and $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}\{\|x\| \geq 1\} \subset \mathbb{R}^3$. We denote by ν the unit exterior normal to the boundary Γ, and by $\nu' = -\nu$ the unit inner normal to the boundary. We denote by c the speed of propagation in the interior of the unit sphere, which will be a constant verifying $0 < c < 1$. We also assume that the speed of propagation of waves outside the ball is equal to 1. We work in the Hilbert space $\mathcal{H}$ of square-integrable functions which is written as a direct sum :

$$\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O}; a^{-1}c^{-2}dx) \oplus L^2(\Omega; dx).$$

where a is a strictly positive constant related to the nature of the boundary Γ. We consider the operator P, with a domain of definition

$$\mathcal{D}(P) = \left\{ \begin{array}{l} u = (u_1, u_2) \in \mathcal{H},\ u_1 \in H^2(\mathcal{O}),\ u_2 \in H^2(\Omega), \\ u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma,\ (\partial_{\nu'} u_1)|_\Gamma + a(\partial_\nu u_2)|_\Gamma = 0 \end{array} \right\}.$$

P is defined as follows : $Pu = (-c^2\Delta u_1,\ -\Delta u_2)$, where $u = (u_1, u_2)$ belongs to $\mathcal{D}(P) \subset \mathcal{H}$. It is well-known that P is a self-adjoint, elliptic, nonnegative operator the spectrum of which is absolutely continuous without embedded eigenvalues.

Definition 2.1.1 $\lambda \in \{\Im\lambda > 0\}$ *is said to be a resonance for the transmission problem if the following problem has a nontrivial solution :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (c^2\Delta + \lambda^2)u_1 = 0 & \textit{in } \mathcal{O} \\ (\Delta + \lambda^2)u_2 = 0 & \textit{in } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \textit{on } \Gamma \\ \partial_{\nu'} u_1 + a\partial_\nu u_2 = 0 & \textit{on } \Gamma \\ u_2 \textit{ is } \lambda\textit{-outgoing.} & \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Definition 2.1.2 *The function $v \in L^2(\Omega; dx)$ is λ-outgoing if, for some $\rho_0 \gg 1$, there exists a compactly supported function $g \in L^2_{comp}(\Omega)$, independent from λ such that*

$$v|_{|x| \geq \rho_0} = R_0(\lambda) g|_{|x| \geq \rho_0}$$

where $R_0(\lambda)$ denotes the free outgoing resolvent of the Laplacian in $\mathbb{R}^3$ and $R_0(\lambda) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3))$ when $\Im\lambda < 0$.

We define the counting function of the resonances exponentially close to the real axis $\mathrm{N}(r)$ for $r \gg 1$ as follows :

$$\mathrm{N}(r) := \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \text{ resonance of } P, \\ 0 < \Im\lambda \leq Ce^{-C|\lambda|},\ 1 \leq |\lambda| \leq r \end{array} \right\},$$

where $C \gg 1$ is a constant and each resonance is counted with its multiplicity.

Remark 1 : The condition "v is λ-outgoing" is equivalent to the Sommerfeld radiation condition to infinity :

$$\lim_{r \to +\infty} r(\partial_r \tilde{v} - i\lambda\tilde{v}) = 0$$

where we write $\tilde{v}(r,\omega) = v(r\omega)$, with $r = |x|$ and $x = r\omega$.

Remark 2 : The definition of λ as a resonance is equivalent to the definition of a resonance as a pole of the cutoff resolvent of P meromorphically extended from the complex half-plane $\{\Im\lambda < 0\}$ to $\mathbb{C}$.

Remark 3 : It was shown by Bellassoued [2], using Carleman estimates in a more general setting for the transmission problem, that there exists a constant $C' > 0$ such that there are no resonances under some exponential curve $\Im\lambda \geq C'e{-}C'\lambda$.

For $0 < c < 1$, according to the laws of geometric optics, rays coming from infinity split into two rays when hitting the boundary, one ray going back to infinity, and another entering the obstacle ; the latter is called refracted ray. Consider now a ray moving inside the transparent ball, there are two possibilities : the ray hits the boundary of the obstacle far away from what is usually called the glancing manifold of the boundary, then it splits in two rays, one going at infinity, and another reflects back to the obstacle ; in the second case, the ray meets the boundary of the obstacle sufficiently close to the glancing manifold of the boundary and it is totally reflected by the obstacle : it does not give birth to any ray refracted outside the obstacle.

Let us now state our main result :

Theorem 2.1.1 *With the hypotheses stated before, we have :*
(a) There exists an infinite sequence of resonances of P, $\{\lambda_l\}_{l\geq 1}$, such that each λ_l verifies :

$$\exists C > 0,\ 0 < \Im\lambda_l \leq Ce^{-C|\lambda_l|}.$$

(b) There exists a strictly positive constant ρ such that $\mathcal{N}(r)$ verifies

$$\mathcal{N}(r) \geq \rho r^3,\ r \gg 1.$$

The proof essentially uses tools of complex analysis and properties of the so-called special functions. After transforming the problem into a Dirichlet-to-Neumann problem at the boundary of the obstacle, we obtain an equation containing Bessel and Hankel functions which we prove equivalent to some approximate equation in $\mathbb{C}$ using explicit asymptotics of these special functions. The resolution of this last equation uses the Rouché theorem and we obtain an infinite sequence of complex solutions.

Along with Remark 3, we can say that our result is the worse that can happen in this setting and that no other sequence of resonances is converging faster than this one.

2.2 *Transformation of the problem to a Dirichlet-to-Neumann problem at the boundary*

The aim of this section is to prove the following lemma :

Lemma 2.2.1 *The set of the resonances of the transmission operator P coincides with the union of the roots of the equation*

$$\frac{H^{(1)'}_{l+1/2}(\lambda)}{H^{(1)}_{l+1/2}(\lambda)} - \frac{1}{ac}\frac{J'_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)}{J_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)} = 0. \tag{2.2}$$

for all integer $l \in \mathbb{N}$.

The proof is divided into three parts, the first two dealing with the transformation of the exterior and interior problems in terms of their respective Neumann operators, the last assembling the results to finish the proof.

2.2.1 Neumann resolution of the exterior problem

We will first consider the exterior Dirichlet problem, that is :

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)u_2 = 0 & \text{in } \Omega \\ u_2 = f & \text{on } \Gamma \\ u_2 \text{ is } \lambda\text{-outgoing.} \end{cases} \tag{2.3}$$

In spherical coordinates, we get $\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r}\Delta_{S^2}$, where Δ_{S^2} is the Laplace-Beltrami operator over S^2. This is a self-adjoint operator with domain $H^2(S^2) \subset L^2(S^2)$ and it has a compact resolvent. There exists a Hilbert basis of eigenfunctions $\{Y_l\}_{l\geq 0}$ associated to eigenvalues $-\lambda_l^2 = -l(l+1)$ such that $\Delta_{S^2}Y_l = -\lambda_l^2 Y_l = -l(l+1)Y_l$, Y_l being the spherical harmonics.

Moreover, it is well known that $-\lambda_l^2 = -l(l+1)$ is of multiplicity $2l+1$. The subspace $y_l^3 = \{Y_l\}_l$ of the eigenfunctions is generated by the functions $(Y_l^m)_{-l\leq m\leq l}$, where $Y_l^m(\theta,\phi) := P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$, $0 \leq m \leq l$.

For all indices (l,m), the functions P_l^m are the Legendre polynomials. Then $Y_l(\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{l} A_{l,m}Y_l^m(\theta,\phi)$ form a Hilbert basis of $L^2(S^2)$.

For $x = r\omega$, $\omega \in S^2$, we put, for $r > 1$,

$$u_2(x) = v(r)\Phi(\omega) = \sum_l v(r)\left(\Phi(\omega), Y_l(\omega)\right)Y_l(\omega) = \sum_l v_l(r)Y_l(\omega)$$

in the basis of spherical functions. Therefore, the exterior problem is equivalent to :

$$(\Delta + \lambda^2)u_2 = 0 \Leftrightarrow r^2\partial_r^2 v_l(r) + 2r\partial_r v_l(r) + (\lambda^2 r^2 - \lambda_l^2)v_l(r) = 0,\ r > 1,\ \forall l, \tag{2.4}$$

whose solutions for all integers l are of the form $v_l(r) = r^{-1/2}w_l(r)$, where $w_l(r)$ are solutions of the modified Bessel equation $r^2\partial_r^2 w_l(r) + 2r\partial_r w_l(r) + (\lambda^2 r^2 - (\lambda_l^2 + \frac{1}{4}))w_l(r) = 0$. Set $\nu_l^2 = \lambda_l^2 + \frac{1}{4}$. Then, for every l, we get solutions of the last equation : $v_l(r) = r^{-1/2}(a_l H^{(1)}_{\nu_l}(\lambda r) + b_l H^{(2)}_{\nu_l}(\lambda r))$.

We recall, from [19], the asymptotic expansions of the first and second order Hankel functions as $x \to +\infty$:

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\mathrm{i}(x - \pi\nu/2 - \pi/4)} \\ H_\nu^{(2)}(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\mathrm{i}(x - \pi\nu/2 - \pi/4)} \end{cases}$$

Replacing in the expression of $v_l(r)$ the Hankel functions by their expansions, then putting $x \to +\infty$, the Sommerfeld radiation condition implies that $b_l = 0$. On the other hand, the boundary condition $u_2 = f$ on Γ implies that $a_l = \frac{(f, Y_l)}{H_{\nu_l}^{(1)}(\lambda)}$, that is,

$$v_l(r) = \frac{(f, Y_l) H_{\nu_l}^{(1)}(\lambda r)}{H_{\nu_l}^{(1)}(\lambda) r^{1/2}}, \quad \nu_l = \left(\lambda_l^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

The operator $A = (-\Delta_{S^2} + \frac{1}{4})^{1/2}$ is self-adjoint and, by the spectral theorem, $AY_l = \nu_l Y_l$, and ν_l has the same multiplicity as $-\lambda_l^2$. Moreover, any function $f \in L^2(\Gamma)$ can be expressed as a series of spherical orthogonal functions

$$f(\omega) = \sum_l (f, Y_l) Y_l(\omega).$$

As the spectrum of A is given by $\sigma(A) = \{\nu_l = l + 1/2,\ l \in \mathbb{N}\}$, we can give the following expansion of the Neumann operator for the exterior problem :

$$\mathcal{N}_2(\lambda) f(\omega) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left[\lambda \frac{H_{l+1/2}^{(1)'}(\lambda)}{H_{l+1/2}^{(1)}(\lambda)} - \frac{1}{2} \right] (f, Y_l) Y_l(\omega). \tag{2.6}$$

2.2.2 Dirichlet-to-Neumann problem associated to the interior problem

We consider the interior problem the same way. We want to solve :

$$\begin{cases} (c^2\Delta + \lambda^2) u_1 = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ u_1 = f & \text{sur } \Gamma \\ \text{regularity at the origin.} \end{cases} \tag{2.7}$$

In polar coordinates, the Laplace operator is given by :

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r}\Delta_{S^2}.$$

As the functions $Y_l(\omega)$ form an orthogonal basis of $L^2(S^2)$, we find that

$$u_1(x) = u_1(r\omega) = \sum_l v_l(r) Y_l(\omega).$$

We then report in (2.7) and we get an equivalent system of equations :

$$\begin{aligned} (c^2\Delta + \lambda^2) u_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; & c^2 r^2 \partial_r^2 v_l(r) + 2rc^2 \partial_r v_l(r) + \\ & + (\lambda^2 r^2 - c^2 \lambda_l^2) v_l(r) = 0, \quad r < 1, \forall \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

which is, again, a modified Bessel equation, provided some change of variables. Using the notation $\nu_l^2 = \lambda_l^2 + 1/4$, the solution of this equation is of the form

$$v_l(r) = r^{-1/2}\left[\alpha_l J_{\nu_l}^{(1)}\left(\frac{\lambda r}{c}\right) + \beta_l J_{\nu_l}^{(2)}\left(\frac{\lambda r}{c}\right)\right].$$

However, we know that the Bessel functions of the second type, $J_{\nu_l}^{(2)}$ have a singularity at the origin, which implies that $\beta_l = 0$ in the expression of the solution [1].

Using the boundary condition in (2.7) we find

$$\alpha_l = \frac{(f, Y_l)}{J_{\nu_l}\left(\frac{\lambda}{c}\right)},$$

and we are able to give the expansion of the Neumann operator for the interior problem, involving the eigenvalues of A, as above :

$$\mathcal{N}_1(\lambda)f(\omega) = \sum_{l=0}^{+\infty}\left[\frac{\lambda}{c}\frac{J'_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)}{J_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)} - \frac{1}{2}\right](f, Y_l)Y_l(\omega). \tag{2.9}$$

2.2.3 Analysis on the sphere

Recall that

$$\partial_{\nu'} u_1 + a\partial_\nu u_2 = 0$$

on $\Gamma = S^2$.

Then, λ is a resonance of the transmission problem (2.3) if and only if the equation

$$a\mathcal{N}_2(\lambda)f - \mathcal{N}_1(\lambda)f = 0 \tag{2.10}$$

admits a nontrivial solution for $f \neq 0$. This equation is equivalent, from (2.6) and (2.9), to the following one :

$$\sum_{l=0}^{+\infty}\left[a\lambda\frac{H_{l+1/2}^{(1)'}(\lambda)}{H_{l+1/2}^{(1)}(\lambda)} - \frac{\lambda}{c}\frac{J'_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)}{J_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)}\right](f, Y_l)Y_l(\omega) = 0, \tag{2.11}$$

This is again equivalent to the following equation with respect to $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{H_{l+1/2}^{(1)'}(\lambda)}{H_{l+1/2}^{(1)}(\lambda)} - \frac{1}{ac}\frac{J'_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)}{J_{l+1/2}\left(\frac{\lambda}{c}\right)} = 0, \quad l \in \mathbb{N},$$

which is exactly (2.2). The corresponding eigenfunctions are $Y_l(\omega)$ and we get the spectral couple we have been looking for.

Reciprocally, if λ is a root of the equation (2.2) for some integer l, then $f(\omega) = Y_l(\omega)$ is a solution of (2.10), hence λ is a resonance of P.

[1] From now on, we will use the notation J_ν instead of $J_\nu^{(1)}$.

2.3 *Existence of resonances close to the real axis*

2.3.1 Resolution of a complex equation

We are going to solve (2.2) using well-known asymptotics of Bessel and Hankel functions and of their derivatives.

First, we set a variable consistent with our problem : we will look for solutions λ in the complex plane, possibly tending to infinity, but keeping a reasonable rate of growth. We saw in the previous section that the parameter λ is closely related to the order of the special functions ν. Thus it leads us to a new complex variable, z, defined by

$$\lambda = \nu c z$$

Let us note that we use the propagation speed c as a parameter for our new variable; by the way, it reminds us that the propagation of waves through the boundary involves a change of speed, also noticeable in the variables of Bessel and Hankel functions respectively.

2.3.2 Asymptotics of Bessel and Hankel functions

We recall from [19] some asymptotics of Bessel and Hankel functions when the order and the parameter are proportionate, and some subsequent formulas for their first derivatives.

First we define a function $\zeta(z)$, by :

$$\frac{2}{3}\zeta^{3/2} := \pm \int_1^z \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\, dy \ ,$$

and we addop the sign $\pm$ to make ζ real when z is real. Carrying out the integration we find that

$$\frac{2}{3}\zeta^{3/2}(z) = \log\left(\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}\right) - (1-z^2)^{1/2}.$$

Notice that ζ is a multiply-valued function; its branches take their principal values for $z \in (0,1)$, and it is holomorphic on the complex plane outside the set $\{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}$. Note also that for $y \in (1,+\infty)$ it has the form

$$-i\frac{2}{3}\zeta(y)^{3/2} = \tan\alpha - \alpha \ , \quad \cos\alpha = \frac{1}{y} \, .$$

Moreover, the first derivative of ζ verifies :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \frac{1-z^2}{z^2\zeta}.$$

We also define two other functions :

$$\phi(\zeta) := \left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4} , \qquad \psi(\zeta) := \frac{2}{z\phi(\zeta)} \, .$$

We will denote by $\mathrm{Ai}(z)$ the Airy function, and we introduce two other "Airy" functions, $\mathrm{A}_{\pm}(z) := \mathrm{Ai}(ze^{\mp 2\mathrm{i}\pi/3})$. These three functions are the complex solutions of the Airy equation : $w''(z) - zw(z) = 0$.

Using these designations, we write, after Olver, the asymptotics of the Bessel function and of the first order Hankel function in the complex variable y :

$$J_\nu(\nu y) \sim \nu^{-1/3}\phi(\zeta)\left\{\mathrm{Ai}(\nu^{2/3}\zeta)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_s(\zeta)}{\nu^{2s}} + \mathrm{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta)\nu^{-4/3}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\} \tag{2.12}$$

$$H_\nu^{(1)}(\nu y) \sim 2e^{-\mathrm{i}\pi/3}\nu^{-1/3}\phi(\zeta)\left\{\mathrm{A}_-(\nu^{2/3}\zeta)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_s(\zeta)}{\nu^{2s}} + \mathrm{A}_-'(\nu^{2/3}\zeta)\nu^{-4/3}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s(\zeta)}{\nu^{2s}}.\right\} \tag{2.13}$$

We deduce from this the asymptotics of the first derivatives of these two functions :

$$J_\nu'(\nu y) \sim -\psi(\zeta)\left\{\mathrm{Ai}(\nu^{2/3}\zeta)\nu^{-4/3}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{C_s(\zeta)}{\nu^{2s}} + \mathrm{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta)\nu^{-2/3}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{D_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\} \tag{2.14}$$

$$H_\nu^{(1)'}(\nu y) \sim -\frac{2\psi(\zeta)}{e^{\mathrm{i}\pi/3}}\left\{\mathrm{A}_-(\nu^{2/3}\zeta)\nu^{-4/3}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{C_s(\zeta)}{\nu^{2s}} + \mathrm{A}_-'(\nu^{2/3}\zeta)\nu^{-2/3}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{D_s(\zeta)}{\nu^{2s}}\right\} \tag{2.15}$$

Remark : The functions $A_s(\zeta), B_s(\zeta), C_s(\zeta), D_s(\zeta)$ are analytic for every value of ζ such that $\zeta(y)$ is defined. Furthermore, we note that $A_0 = D_0 = 1$. The error term is exponentially small in the domain $\{\mathrm{Arg}\,\zeta < 1/3\}$ and it may be exponentially large if $\{\mathrm{Arg}\,\zeta > 1/3\}$.

Moreover, we recall the following asymptotics for the Airy function and its first derivative :

$$\mathrm{Ai}(-\eta) \sim \pi^{-1/2}\eta^{-1/4}\left[\cos(\xi - \pi/4)P(\xi) + \sin(\xi - \pi/4)Q(\xi)\right] \tag{2.16}$$
$$\mathrm{Ai}'(-\eta) \sim \pi^{-1/2}\eta^{1/4}\left[\cos(\xi - \pi/4)R(\xi) + \sin(\xi - \pi/4)S(\xi)\right] \tag{2.17}$$

Here we have defined :

$$\eta := -\nu^{2/3}\zeta, \qquad \xi := \frac{2}{3}\eta^{3/2} = -\mathrm{i}\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}. \tag{2.18}$$

Finally, we give the first terms of the asymptotic expansions of the four functions P, Q, R, S depending on the ξ variable :

$$P(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\xi^{-2}),\ Q(\xi) = \mathcal{O}(\xi^{-1}),$$

$$R(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\xi^{-2}),\ S(\xi) = \mathcal{O}(\xi^{-1}).$$

2.3.3 An approximate equation of (2.2)

Using the asymptotics given in the previous section, we can study the quantities intervening in equation (2.2).

First, with the Bessel function dividing its first derivative, we obtain for $z = y$ with $|\mathrm{Arg}\,(y-1)| < \pi$,

$$\begin{aligned}\frac{J'_\nu(\nu y)}{J_\nu(\nu y)} &\sim -\nu^{-1/3}\frac{\psi(\zeta)}{\phi(\zeta)}\frac{\mathrm{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\mathrm{Ai}(\nu^{2/3}\zeta)} \\ &\sim -\frac{2}{y\phi^2(\zeta)\nu^{1/3}}\frac{\mathrm{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\mathrm{Ai}(\nu^{2/3}\zeta)},\end{aligned}$$

modulo some function $\mathcal{O}(\nu^{-1})$. Then, we look at what happens when ν tends to infinity and we can again obtain an asymptotics of the ratio (see (2.16)) :

$$\begin{aligned}\frac{J'_\nu(\nu y)}{J_\nu(\nu y)} &\sim -\frac{2}{y\nu^{1/3}}\left(\frac{y^2-1}{4\zeta}\right)^{1/2}(-\nu^{2/3}\zeta)^{1/2}\tan(\xi-\pi/4) \\ \frac{J'_\nu(\nu y)}{J_\nu(\nu y)} &\sim \frac{(y^2-1)^{1/2}}{y}\tan(\xi-\pi/4). \qquad (2.19)\end{aligned}$$

We proceed identically for the Hankel functions involved in (2.2) and write the following :

$$\begin{aligned}\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu y)}{H_\nu^{(1)}(\nu y)} &\sim -\nu^{-1/3}\frac{\psi(\zeta)}{\phi(\zeta)}\frac{\mathrm{A}_-{}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\mathrm{A}_-(\nu^{2/3}\zeta)} \\ &\sim -\frac{2}{y\phi^2(\zeta)\nu^{1/3}}\frac{\mathrm{A}_-{}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\mathrm{A}_-(\nu^{2/3}\zeta)}.\end{aligned}$$

This result is true when the complex y is such that $|y| < 1$, that is, when $|arg(\zeta)| < \frac{2\pi}{3}$ and $\Re\zeta > 0$. Then again, when ν tends to be large enough, we get to the limit $|\nu^{2/3}\zeta| \to \infty$ and we have the following asymptotics for Airy functions, which is a consequence of (2.16) :

$$\frac{\mathrm{A}_-{}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\mathrm{A}_-(\nu^{2/3}\zeta)} \sim -(\nu^{2/3}\zeta)^{1/2}.$$

Then, the ratio of Hankel functions is asymptotically equivalent, when ν is large, to :

$$\begin{aligned}\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu y)}{H_\nu^{(1)}(\nu y)} &\sim \frac{2}{y\phi^2(\zeta)\nu^{1/3}}\left(\frac{1-y^2}{4\zeta}\right)^{1/2}(-\nu^{2/3}\zeta)^{1/2} \\ \frac{H_\nu^{(1)'}(\nu y)}{H_\nu^{(1)}(\nu y)} &\sim \frac{(1-y^2)^{1/2}}{y}. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Now that we have proceeded with the asymptotics of special functions, we look back at (2.2) and transform it by substitution of (2.19) and (2.20). Note that the fact that λ is proportionate to ν allows us to take into account large orders of the special functions in the asymptotics.

We have

$$\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(1)}(\nu cz)} \sim \frac{(1-c^2z^2)^{1/2}}{cz}, \ \frac{J'_\nu(\nu z)}{J_\nu(\nu z)} \sim \frac{(z^2-1)^{1/2}}{z}\tan(\xi - \pi/4)\,,$$

so, we obtain

$$ac\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(1)}(\nu cz)} = \frac{J'_\nu(\nu z)}{J_\nu(\nu z)} \Longrightarrow \tan(\xi - \pi/4) = a\frac{(1-c^2z^2)^{1/2}}{(z^2-1)^{1/2}} \tag{2.21}$$

when we only keep track of the main contributions, the first neglected terms being of order $\mathcal{O}(\nu^{-1})$.

Having defined ξ and ζ as above, we obtain

$$\xi = \nu(\tan\alpha - \alpha)\,,$$

writing

$$\cos\alpha = \frac{1}{z}, \qquad \tan\alpha = (z^2-1)^{1/2}.$$

Eventually, we obtain the following equation which is an approximation of (2.2), neglecting the terms of order $\mathcal{O}(\nu^{-1})$:

$$\tan(\nu(\tan\alpha - \alpha) - \pi/4) = a\frac{(1-c^2z^2)^{1/2}}{(z^2-1)^{1/2}}\,. \tag{2.22}$$

It proves that, if $\lambda = \nu cz$ is a resonance of the transmission problem, then z is a solution of equation (2.22) modulo $\mathcal{O}(\nu^{-1})$.

2.3.4 Resolution of (2.2)

Let us define some open set

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{c} - 2\delta < \Re z < \frac{1}{c} - \delta,\ |\Im z| < \delta \right\}$$

where $0 < \delta < \frac{1-c}{2c}$ (recall that $0 < c < 1$). Let us also denote by $\partial\mathcal{U}$ the boundary of $\mathcal{U}$.

Proposition 2.3.1 *For any $\delta = \delta(a,c) \ll 1$ the zeros of*

$$\frac{H_{l+1/2}^{(1)'}}{H_{l+1/2}^{(1)}}(\nu cz) - \frac{1}{ac}\frac{J'_{l+1/2}}{J_{l+1/2}}(\nu z) = 0, \quad l \in \mathbb{N},\ \nu = l + \frac{1}{2} \tag{2.23}$$

in $z \in \mathcal{U}_\delta$ are all simple and there number is $\geq C\nu$ for some $C = C(c,\delta)$ and $\nu \gg 1$.

Proof. We know that the solutions of

$$\tan(\nu(\tan\alpha - \alpha) - \pi/4) = 0 \tag{2.24}$$

are real numbers, denoted by $\alpha^0_{K,\nu}$, such that we have the identity :

$$\tan\alpha^0_{K,\nu} - \alpha^0_{K,\nu} = \frac{(4K+1)\pi}{4\nu}, \quad K \in \mathbb{N}^*.$$

We have $(\tan\alpha - \alpha)' = 1/\cos^2\alpha - 1 \geq 0$ on $]-\pi/2, \pi/2[$ with equality only for $\alpha = 0$, which shows that the number of the solutions of (2.24) in $\mathfrak{U}$ can be estimated below by $C\nu$, $\nu \gg 1$, where $C = C(\delta) > 0$.

For $z = x + iy \in \partial\mathfrak{U}$ we have

$$|z^2 - 1| \;\; \geq \;\; |x^2 - 1| \geq \frac{1 - c^2 - 4\delta}{c^2} \geq \frac{1 - c^2}{2c^2} \tag{2.25}$$

for $\delta \leq (1 - c^2)/8$. On the other hand

$$|1 - c^2 z^2| \leq 1 - c^2x^2 + c^2y^2 + 2c^2x|y| \leq 6c\delta.$$

This implies

$$\left|\frac{a^2(1 - c^2z^2)}{z^2 - 1}\right| \leq \delta\frac{12a^2c}{1 - c^2}\,.$$

and finally, on $\partial\mathfrak{U}$,

$$\left|\frac{a(1 - c^2z^2)^{1/2}}{(z^2 - 1)^{1/2}}\right| \leq 4\sqrt{\delta c}a(1 - c^2)^{-1/2}.$$

On the other side of the equation, we look at

$$|\tan(\xi - \pi/4)| = \left|\frac{e^{\mathrm{i}(\xi-\pi/4)} - e^{-\mathrm{i}(\xi-\pi/4)}}{e^{\mathrm{i}(\xi-\pi/4)} + e^{-\mathrm{i}(\xi-\pi/4)}}\right|$$

With the definition of ξ given in (2.18), we obtain

$$\begin{aligned} |\tan(\xi - \pi/4)| \;\; &\geq \;\; \left|\frac{e^{\nu\left(ln\left|\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}\right| + \Re(1-z^2)^{1/2}\right)} - e^{-\nu\left(ln\left|\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}\right| + \Re(1-z^2)^{1/2}\right)}}{e^{\nu\left(ln\left|\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}\right| + \Re(1-z^2)^{1/2}\right)} + e^{-\nu\left(ln\left|\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}\right| + \Re(1-z^2)^{1/2}\right)}}\right| \\ &\geq \;\; \left|\tanh\left(\nu ln\left|\frac{1 + (1 - z^2)^{1/2}}{z}\right| + \nu\Re(1 - z^2)^{1/2}\right)\right| \end{aligned}$$

We note that $z = 1/c + O(\delta)$, which implies

$$\begin{aligned} \left|\frac{1 + (1 - z^2)^{1/2}}{z}\right| &= \left|\frac{1 + i(z^2 - 1)^{1/2}}{z}\right| \\ \geq c + (1 - c^2)^{1/2} + O(\delta) &= c + (1 - c)\sqrt{1 + 2c/(1 - c)} + O(\delta) > 1 \end{aligned}$$

for $\delta \leq \delta(c) \ll 1$, hence, on $\partial\mathfrak{U}_\delta$ we have,

$$ln\left|\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}\right| \geq 2\epsilon > 0$$

for some $\epsilon = \epsilon(c) > 0$.

From (2.25), we deduce that there exists some real constant $C > 0$ such that

$$\Re(1-z^2)^{1/2} = \Im(z^2-1)^{1/2} \leq C\delta$$

Finally, chossing $0 < \delta \leq \epsilon/C$ we obtain

$$\left|\tanh\left(\nu ln\left|\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}\right| + \nu\Re(1-z^2)^{1/2}\right)\right| \geq \tanh(\epsilon\nu)$$

on $\partial\mathfrak{U}$.

This leads us to the following inequalities on $\partial\mathfrak{U}_\delta$, when ν is large enough :

$$\begin{aligned}\left|\frac{a(1-c^2z^2)^{1/2}}{(z^2-1)^{1/2}}\right| &\leq 4a\sqrt{\delta c}(1-c^2)^{-1/2} \\ &< \tanh(\epsilon\nu) \\ &\leq |\tan(\nu(\tan\alpha-\alpha)-\pi/4)|\,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

We conclude by the Rouché theorem that the number of the zeroes of (2.22) in $\mathfrak{U}_\delta$ (counted with multiplicities) is equal to that of (2.24), in $\mathfrak{U}_\delta$, hence it is $\geq C\nu$, $\nu \gg 1$, for some $C > 0$ independent of ν.

It remains to show that the the number of the zeros of (2.2) equals to the number of zeroes of (2.22) in $\mathfrak{U}_\delta$.

To that end, we consider the two functions

$$f(z) = \tan(\nu(\tan\alpha-\alpha)-\pi/4) - a\frac{(1-c^2z^2)^{1/2}}{(z^2-1)^{1/2}}$$

and

$$g(z) = ac\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(1)}(\nu cz)} - \frac{J_\nu'(\nu z)}{J_\nu(\nu z)}$$

on $\mathfrak{U}$. f and g are defined and analytic in $\mathfrak{U}$. In the asymptotic expansions of Bessel and Hankel functions, when we look after the first neglected terms and put them in the expression of g, we find

$$\begin{aligned} & f(z)-g(z) \\ = \; & \frac{a}{\nu(z^2-1)}\left[\frac{3}{8} - \frac{7}{24(1-c^2z^2)}(1+\mathrm{o}(1)) + \frac{7}{48\zeta^{3/2}}(1-c^2z^2)^{1/2}(1+\mathrm{o}(1))\right] \\ & +\mathrm{o}(\nu^{-1}) \end{aligned}$$

and we estimate it on $\partial\mathfrak{U}_\delta$ by

$$|f(z)-g(z)| = O(\delta) + O_\delta(\nu^{-1})\,,$$

We have used that $|\zeta|^{3/2} = \frac{3}{2}\nu^{-1}|\xi| = \frac{3}{2}\nu^{-1}|\nu(\tan\alpha - \alpha)| \geq m\nu^{-1} > 0$ in $\mathfrak{U}_\delta$, where $m > 0$ depends only on c. On the other hand, we have

$$|f(z)| \geq \left| \left|\tan(\xi - \frac{\pi}{4})\right| - \left| a\frac{(1-c^2z^2)^{1/2}}{(z^2-1)^{1/2}}\right| \right|$$

and, while

$$\left|\tan(\xi - \frac{\pi}{4})\right| \geq \tanh(\epsilon\nu),$$

the second quantity is of the order of $\nu^{-1/3}$ when ν is large enough. Then, with some constant $\beta > 0$,

$$|f(z)| \geq \beta \tanh(\epsilon\nu)$$

and finally,

$$\begin{aligned} |g(z) - f(z)| &\leq O(\delta) + O_\delta(\nu^{-1}) < \beta\tanh(\epsilon\nu) \\ &< |f(z)| \end{aligned} \tag{2.27}$$

for all z on $\partial\mathfrak{U}_\delta$, and for large ν.

Here again, the Rouché theorem allows us to say that g and f have the same number of zeroes in $\mathfrak{U}_\delta$ counted with multiplicities, wich is $\geq C\nu$. Finally, using the asymptotic expansions we obtain

$$|g'(z)| \geq |f'(z)| - |(f(z) - g(z))'| \geq C_1\nu - C_2(\delta\nu + O_\delta(1)) > 0$$

in $\mathfrak{U}_\delta$. Hence, the equation $g(z) = 0$ has only simple zeros $z(K,\nu)$ in $\mathfrak{U}_\delta$ which are perturbations of solutions $\alpha^0_{K,\nu}$ of (2.24), and their number is $\geq C\nu$ for $\nu = l + 1/2 \gg 1$, where C is a positive constant depending only on c, a and δ. . Then any such zero is a resonance for the transmission problem of multiplicity $2l+1$. In the last section, we will show that these resonances are actually exponentially close to the real axis and give a lower bound of the counting function of the resonances. To to this we shall refine the proof of Proposition 1.3.1 using an argument of Stefanov and Vodev [24].

2.4 *Distribution and counting function of resonances*

2.4.1 Exponential decay of the imaginary part of resonances

In this section we follow Stefanov and Vodev [24] to show that the imaginary part of the resonances we obtained decrease exponentially.

From now on, we will consider the following functions

$$f(z,\nu) := ac\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(1)}(\nu cz)} - \frac{J_\nu'(\nu z)}{J_\nu(\nu z)}; \tag{2.28}$$

$$f_1(z,\nu) := \frac{1}{2}(f(z,\nu)+\overline{f(\overline{z},\nu)}) = \frac{1}{2}\left[ac\left(\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(1)}(\nu cz)} + \frac{H_\nu^{(2)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(2)}(\nu cz)}\right) - 2\frac{J_\nu'(\nu z)}{J_\nu(\nu z)}\right] \tag{2.29}$$

and

$$f_2(z,\nu) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(f(z,\nu)-\overline{f(\overline{z},\nu)}) = \frac{ac}{2\mathrm{i}}\left[\frac{H_\nu^{(1)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(1)}(\nu cz)} - \frac{H_\nu^{(2)'}(\nu cz)}{H_\nu^{(2)}(\nu cz)}\right]. \tag{2.30}$$

Our next step consists in proving an analogue of Lemma 3 in [24]. For the sake of completeness, we present the detailed proof.

Lemma 2.4.1 *For every $\delta_1 \in (0,1/2)$, there exists a $\delta_2 > 0$ such that in the connected open domain $B := \{z \in \mathbb{C};\ \delta_1/c < \Re z < (1-\delta_1)/c,\ |\Im z| < \delta_2\}$, we have*

$$|f_2(z,\nu)| \le Ce^{-\gamma\nu} \quad |f_2'(z,\nu)| \le Ce^{-\gamma\nu} \tag{2.31}$$

for all $z \in B$, with $C > 0$ and $\gamma > 0$.

Proof : Let us define $u_\nu(z) := zH_\nu^{(1)}(z)$.

The first order Hankel function $H_\nu^{(1)}(z)$ solves the differential equation

$$v''(z) + \frac{1}{z}v'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)v(z) = 0,$$

which implies that $u_\nu(z)$ solves the following one :

$$u_\nu''(z) = \left(1 + \frac{\nu^2 - 1/4}{z^2}\right)u_\nu(z). \tag{2.32}$$

Now, let us write

$$w_\nu(z) = \frac{u_\nu'(z)}{u_\nu(z)}, \quad \eta_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(w_\nu(z) + \overline{w_\nu(\overline{z})}\right), \quad \psi_\nu(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(w_\nu(z) - \overline{w_\nu(\overline{z})}).$$

We see that η_ν and ψ_ν are analytic functions in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. When z is real, $\eta_\nu = \Re w_\nu$ and $\psi_\nu = \Im w_\nu$. Moreover, $\psi_\nu(\nu cz) = f_2(z,\nu)$ for all z such that $1 < |z| < 1/c$.

First, let us assume that z is real. Then, we see by (2.32) that η_ν and ψ_ν satisfy

$$\begin{aligned}\psi_\nu'(z) &= \Im\left(\frac{u_\nu''(z)}{u_\nu(z)} - \left(\frac{u_\nu'(z)}{u_\nu(z)}\right)^2\right)\\ &= -2\eta_\nu(z)\psi_\nu(z).\end{aligned}$$

having a solution

$$\psi_\nu(\nu z) = \psi_\nu(\nu z_0)\exp\left[-2\nu\int_{z_0}^{z}\eta_\nu(\nu y)\mathrm{d}y\right] \tag{2.33}$$

with $1 < |z| < 1/c$ and z_0 is chosen such that $cz_0 = 1 - \delta_1/2$.

Let us assume now that z is no longer real, but belongs to $B \in \mathbb{C}$. Then, the solution (2.33) stays the same for all $z \in B$ if we consider the integral $\int_{z_0}^{z}..\mathrm{d}y$ as a path integral on $[z_0, \Re z] \cup [\Re z, z]$ in B.

The asymptotics of special functions used previously are true in some star-shaped domain of the complex plane (cf. [19]), denoted by K. We choose δ_2 small enough so that the domain $-\mathrm{i}B$ is contained in K, and apply those asymptotics to

$$w_\nu(\nu z) := -\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} + \mathcal{O}(\nu^{-1})$$

uniformly with respect to z for all $z \in B$, and we obtain

$$\eta_\nu(\nu z) = -\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} + \mathcal{O}(\nu^{-1}),$$

$$\psi_\nu(\nu z) = \mathcal{O}(\nu^{-1}).$$

When $z \in B$ and ν is large enough,

$$|\eta_\nu(\nu z)| \leq C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Moreover, for every $z \in B$ and real, we know that $\eta_\nu(\nu z) < -\delta_3 < 0$. We deduce from this the inequalities :

$$\begin{aligned}\Re\int_{z_0}^{z}\eta_\nu(\nu y)\mathrm{d}y &\geq \Re\int_{z_0}^{\Re z}\eta_\nu(\nu y)\mathrm{d}y - \left|\int_{\Re z}^{z}\eta_\nu(\nu y)\mathrm{d}y\right|\\ &\geq -\int_{\Re z}^{z_0}\eta_\nu(\nu y)\mathrm{d}y - C\delta_2\\ &> \frac{\delta_3\delta_1}{2} - C\delta_2\\ &> \frac{\gamma}{2} > 0\end{aligned}$$

with the notations $\gamma = \delta_3\delta_1/2$ and $\delta_2 < \delta_3\delta_1/(4C)$.

Comparing this last line with (2.33), we find

$$|f_2(z,\nu)| = |\psi_\nu(\nu z)| \leq Ce^{-\gamma\nu}. \tag{2.34}$$

To get a similar inequality on the first derivative $f_2'(z,\nu) = \psi_\nu'(\nu z)$, it suffices to observe the differential equation of which $\psi_\nu(\nu z)$ is a solution.

This concludes the proof of the lemma $\Box$

The result of the lemma allows us to say that $f_2(z,\nu) = \mathcal{O}(\nu^{-1})$, and consequently, after the asymptotic expansion of $f(z,\nu)$ we have :

$$f_1(z,\nu) = R(z) + \mathcal{O}(\nu^{-1})$$

with

$$R(z) = \tan(\nu(\tan\alpha - \alpha) - \pi/4) - a\frac{(1-c^2z^2)^{1/2}}{(z^2-1)^{1/2}}$$

for every z belonging to

$$B \cap \{|1-c^2z^2| < \delta\} \subset \{1 < |z| < 1/c\}.$$

When z is in this last open set and real, $R(z)$ is differentiable and :

$$\begin{aligned} R'(z) &= \nu[\tan\alpha - \alpha]'(z)(1+\tan^2(\nu(\tan\alpha-\alpha)-\pi/4)) \\ &+ a\frac{c^2z(z^2-1)^{1/2} + (1-c^2z^2)^{1/2}}{(z^2-1)} \end{aligned}$$

We proceed now as in the proof of Proposition 1.3.1. We have $[\tan\alpha - \alpha]'(z) > \epsilon > 0$ for the values of z we are interested in.

As $(1+\tan^2(\nu(\tan\alpha-\alpha)-\pi/4)) \geq 1$ and the second term of the first derivative of R bounded for z in the domain we look for, we conclude

$$|R'(z)| > \nu C, \quad \forall\, z \in \mathcal{U} \cap \mathbb{R}.$$

We then apply the implicit function theorem to f_1 for $\nu \gg 1$ and get that there exist $z_1(K,\nu) \in \mathcal{U} \cap \mathbb{R}$ (which are perturbations of solutions $\alpha^0_{K,\nu}$ of (2.24)) such that

$$f_1\left(z_1(K,\nu),\nu\right) = 0.$$

Moreover, we get

$$z_1(\nu) = \alpha^0(K,\nu) + \mathcal{O}(\nu^{-1}). \tag{2.35}$$

We then apply the Rouché theorem to f and f_1 in the following open domain of the complex plane

$$U = \left\{|z - z_1(\nu)| \leq Me^{-\gamma\nu}\right\}$$

with γ some strictly positive constant. It is known that

$$f_1(z) = (z - z_1(\nu)) \int_0^1 f_1'\left(z_1(\nu) + t(z - z_1(\nu))\right) \mathrm{dt}$$

which leads to

$$f_1(z) = (z - z_1(\nu)) \int_0^1 \left(R'\left(z_1(\nu) + t(z - z_1(\nu))\right) + \mathcal{O}(\nu^{-1})\right) \mathrm{dt}$$

Then, (2.35) and $R' > 0$ allow us to say that :

$$\int_0^1 f_1'\left(z_1(\nu) + t(z - z_1(\nu))\right) \mathrm{dt} = \mathrm{R}'(\alpha^0) + \mathcal{O}(\nu^{-1})$$

and

$$|f_1(z)| \geq C_0 |z - z_1(\nu)|$$

where $C_0 = R'(\alpha^0)/2$. We can now deduce the following estimates on the boundary ∂U :

$$|f_1(z)| \geq C_0 M e^{-\gamma\nu}$$
$$|f_2(z)| \leq \frac{C}{C_0 M} |f_1(z)|$$

according to (2.34). We conclude for M large enough that

$$|f_2(z)| < |f_1(z)|$$

on ∂U and the Rouché theorem implies that f has as many roots as f_1 has in U and that these roots satisfy

$$|z - z_1| \leq M e^{-\gamma\nu}$$

for some $z_1 \in \mathbb{R}$. Thus,

$$|\Im z| \leq M e^{-\gamma\nu} \tag{2.36}$$

By construction, the number of the zeros $z = z(K, \nu)$ obtained is $\geq C\nu$, $\nu \gg 1$, where $C > 0$ is a constant. Eventually, we observe that the complex numbers $z(K, \nu)$ are linked, by the formula $\lambda = \nu c z$, to solutions of (2.2), that is resonances of our problem. With this remark, we obtain the desired estimation on the imaginary part of the resonances and that concludes the proof of point (a) of our theorem.

2.4.2 Counting the resonances exponentially close to the real axis

To complete the proof of the theorem, it remains to get a lower bound of the counting function $\mathrm{N}(r)$ of the resonances close to the real axis. We consider the function $N(r)$, $r \geq 1$, counting with multiplicities the resonances $\lambda \in \mathbb{C}$ of P such that $0 < \Im\lambda \leq Ce^{-C\lambda}$, $1 \leq |\lambda| \leq r$. For any $\nu = l + 1/2 \gg 1$, $l \in \mathbb{N}$, we have found a set of resonances of the form $\lambda = \nu c z$, where $z = z(K, \nu) \in \mathcal{U}$, $K \in \mathbb{N}$, are simple zeros of (2.23) with exponentially small imaginary parts with respect to ν, and their number $n(\nu) := \#\{K\}$ satisfies $n(l) \geq C\nu$, $l \gg 1$. On the other hand, any such λ is a resonance of multiplicity $2l + 1$, which is just the dimension of the eigenspace of the Laplacian on S^2 generated by the sperical harmonics $(Y_l^m)_{-l\leq m\leq l}$. This implies with some $0 < \varrho < 1$

$$\mathrm{N}(r) \ \geq \ \sum_{l=1}^{\varrho r} n(l)(2l+1) \geq C \sum_{l=1}^{\varrho r} l(2l+1) \geq C_0 r^3 \ , \qquad r \to +\infty.$$

which concludes the proof of the theorem.

Chapitre 3

Résonances du problème de transmission en dimension deux.

3.1 *Introduction*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux résonances du problème de transmission à travers un obstacle strictement convexe dont le bord est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné, strictement convexe, dont le bord Γ est de classe C^∞, et dont le complémentaire est $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}$.

Considérons, dans $\mathcal{O}$, l'opérateur

$$\Delta_g := \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{x_i}(g_{ij}(x)\partial_{x_j}),$$

où $g_{ij}(x) \in C^\infty(\overline{\mathcal{O}})$.

On suppose que le symbole principal de l'opérateur $-\Delta_g$, noté $g(x,\xi)$, vérifie

$$g(x,\xi) := \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2, \qquad \forall (x,\xi) \in T^*\mathcal{O}, \quad C > 0.$$

On note $\mathcal{G}$ la métrique Riemannienne $\sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}(x)dx_idx_j$ de $\overline{\mathcal{O}}$, associée à l'Hamiltonien g, dans laquelle $(G_{ij}(x))_{i,j=1}^2$ est la matrice inverse de $(g_{ij}(x))_{i,j=1}^2$. Si on considère $x' \in \Gamma$, alors on désigne par $\nu'(x')$ la normale intérieure unitaire à Γ en x' par rapport à la métrique Riemannienne $\mathcal{G}$.

De la même manière, on considère l'opérateur suivant dans Ω :

$$\Delta_h := \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{x_i}(h_{ij}(x)\partial_{x_j}),$$

où $h_{ij}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ est tel que $h_{ij}(x) = \delta_{ij}$ en dehors d'une boule assez grande (avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon).

En d'autres termes, Δ_h coïncide avec le Laplacien libre Δ en dehors d'un compact.

On suppose que le symbole principal $h(x,\xi)$ de $-\Delta_h$ vérifie

$$h(x,\xi) := \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2, \qquad \forall (x,\xi) \in T^*\Omega, \quad C > 0.$$

On désigne par $\mathcal{H}$ la métrique Riemannienne $\sum_{i,j=1}^{n} H_{ij}(x)dx_idx_j$ dans $\overline{\Omega}$ associée à l'Hamiltonien h, où $(H_{ij}(x))_{i,j=1}^2$ désigne la matrice inverse de $(h_{ij}(x))_{i,j=1}^2$. Etant donné $x \in \Gamma$, on note $\nu(x')$ la normale extérieure unitaire de Γ en x par rapport à la métrique Riemannienne $\mathcal{H}$ dans Ω.

Le nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé résonance pour le problème de transmission associé à $\mathcal{O}$ si et seulement si le problème suivant a une solution nontriviale :

$$\begin{cases} (\Delta_g + \lambda^2)u_1 &= 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \\ (\Delta_h + \lambda^2)u_2 &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 - u_2 &= 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{\nu'}u_1 + \partial_\nu u_2 &= 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u_2 & - & \lambda - \text{sortante} \end{cases}, \tag{3.1}$$

Rappelons qu'une fonction v est dite λ-sortante si, pour un certain $\rho_0 \gg 1$, on a

$$v|_{|x|\geq\rho_0} \;=\; R_0(\lambda)g|_{|x|\geq\rho_0}\,,$$

où $g \in L^2_{\text{comp}}(\Omega)$ est une fonction à support compact et $R_0(\lambda)$ est la résolvante libre sortante de Δ dans $\mathbb{R}^2$.

Ici, "sortante" signifie que

$$R_0(\lambda) \;\in\; \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2), L^2(\mathbb{R}^2))$$

pour $\Im\lambda < 0$. Ainsi, toutes les résonances sont dans le demi-plan complexe supérieur $\Im\lambda > 0$.

On peut également définir les résonances comme pôles de la résolvante sortante du problème de transmission tronquée, ce qui convient bien pour définir la multiplicité des résonances.

Effectivement, dans l'espace de Hilbert

$$H = L^2(\mathcal{O}; dx) \oplus L^2(\Omega; dx)$$

considérons l'opérateur

$$Gu := (\Delta_g u_1, \Delta_h u_2), \qquad u = (u_1, u_2) \in D(G),$$

dont le domaine de définition $D(G)$ est composé de tous les couples de fonctions $(u_1, u_2) \in H$ tels que

$$u_1 \in H^2(\mathcal{O}), u_2 \in H^2(\Omega), u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma, \partial_{\nu'} u_1|_\Gamma + \alpha\partial_\nu u_2|_\Gamma = 0.$$

Comme dans le cas des problèmes extérieurs de Dirichlet (Neumann), on peut voir que G est un opérateur auto-adjoint, elliptique tel que $G \leq 0$, et le spectre de G est absolument continu sans valeurs propres immergées. Les résonances du problème de transmission coïncident donc avec les pôles du prolongement méromorphe de la résolvante tronquée

$$R_\chi(\lambda) := \chi(G + \lambda^2)^{-1}\chi : H \to H$$

de $\Im\lambda < 0$, dans le plan complexe tout entier si n est impair, et dans la surface de Riemann du logarithme si n est pair. Ici $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $\chi = 1$ dans un voisinage de $\mathcal{O}_2$. La multiplicité de chaque résonance $\lambda \neq 0$ est donnée par l'expression

$$m(\lambda) = \text{rank} \int\limits_{|z-\lambda|=\varepsilon} zR_\chi(z)dz\,,\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

et ne dépend pas de χ.

Nous allons chercher à déterminer la distribution asymptotique des résonances de G proches de l'axe réel sous certaines conditions naturelles sur g. L'Hamiltonien g induit un Hamiltonien r sur $T^*\Gamma$ que l'on peut définir comme ceci : Si on identifie chaque $\xi' \in T^*_{x'}\Gamma$ avec le covecteur $\xi = j(\xi') \in T^*_{x'}\mathbb{R}^2$ tel que $\xi|_{T_{x'}\Gamma} = \xi'$ et $\xi(\nu'(x')) = 0$, on peut poser $r(x', \xi') = g(x', j(\xi'))$.

Il est facile de décrire r dans les coordonnées locales dites "normales" au bord

$$y = (y_1, y_2) \in \Gamma \times [0, \delta),\ 0 < \delta \ll 1,$$

où y_1 sont les coordonnées locales dans Γ et

$$x = y_1(x) + y_2(x)\nu'(y_1(x)).$$

Dans ces coordonnées, le symbole principal de $-\Delta_g$ devient

$$g(y, \eta) = \eta_2^2 + g_0(y)\eta_1^2$$

où $r(y_1, \eta_1) := g_0(y_1, 0)\eta_1^2$ est le symbole principal de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Γ muni de la métrique Riemannienne induite par la métrique $\mathcal{G}$, tandis que

$$k(y_1, \eta_1) := 2^{-1}\frac{\partial g_0}{\partial y_2}(y_1, 0)\eta_1^2 = -4^{-1}\{g, \{g, y_2\}\}(y_1, 0, \eta_1, 0)$$

peut être identifiée par dualité avec le seconde forme fondamentale de Γ associée à ν'. De la même manière, on définit $r_0(x_1, \xi_1)$ et $k_0(x_1, \xi_1)$ pour le Laplacien Δ_h en utilisant le champ de vecteurs de ν.

On dit que Γ est localement strictement géodésiquement concave par rapport à $(\mathcal{G}, \nu)$ (et convexe par rapport à $(\mathcal{G}, -\nu)$) si k est une fonction strictement négative (positive) sur $T^*\Gamma \setminus 0$ (0 représente la section nulle).

Quand $g(x, \xi) = c^2|\xi|^2$, $c = \text{Const} < 1$, Popov et Vodev ont prouvé dans [22] qu'il existe une suite infinie de résonances de G distinctes, $\{\lambda_j\}$, telles que $\Im\lambda_j = O(|\lambda_j|^{-\infty})$, ce qui est justifié par l'existence de ce que l'on appelle les rayons intérieurs totalement réfractés dans $\mathcal{O}$ près de la variété *gliding* $\{(x_1, \xi_1) \in T^*\Gamma : c^2 r_0(x_1, \xi_1) = 1\}$.

Ce résultat reste vrai dans la situation plus générale que nous avons décrite précédemment, à condition que Γ soit localement strictement géodésiquement concave par rapport à $(\mathcal{G}, \nu)$, et que

$$r(x_1, \xi_1) < r_0(x_1, \xi_1), \quad \forall (x_1, \xi_1) \in T^*\Gamma \setminus 0. \tag{3.2}$$

Notre résultat principal dans ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *Supposons que Γ soit localement strictement géodésiquement convexe par rapport à $(\mathcal{G}, -\nu)$.*

Supposons de plus que (3.2) est vérifiée.

Alors, il existe une suite infinie de résonances $z \in \mathrm{Res}\,(G)$ du problème de transmission telles que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$z \in \mathcal{N} := \{z \in \mathbb{C}\,,\ |\mathrm{Re}\, z| > C_1\,,\ 0 < \mathrm{Im}\, z \le C_N\, |z|^{-N}\}\ ,$$

avec $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$.

De plus, la fonction de comptage des résonances (avec leurs multiplicités) vérifie

$$\#\{z \in \mathcal{N} \cap \mathrm{Res}\,(G)\ : C_1 < \mathrm{Re}\, z \le r\} \ge V\, r^2 + o(r^2)\,, \quad r \to +\infty\,,$$

où V est une constante positive.

La constante V sera interprétée plus tard comme le volume d'une famille convenable de cercles invariants dans $T^*\Gamma$ de l'application du billard correspondant à la métrique $\mathcal{G}$ dans $\overline{\mathcal{O}}$.

Les résonances sont liées à des quasimodes convenables du problème de transmission.

On définit un quasimode pour l'opérateur P de la façon suivante : on dit que

$$\mathcal{Q} = \{(u_\nu, \lambda_\nu), \nu \in \mathcal{M}\},$$

$\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^2$ étant un ensemble non borné d'indices, est un quasimode de P si

$$u_\nu = (u_{\nu 1}, u_{\nu 2}) \in (C_0^\infty(\overline{O}) \times C_0^\infty(\overline{\Omega})) \cap D(P),\ \lambda_\nu > 0,\ \lim_{\nu\to\infty} \lambda_\nu \ \to \ +\infty$$

et, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ||(\Delta_g + \lambda_\nu^2)u_\nu||_{L^2(O)} & \leq & C\lambda_\nu^{-N} \\ ||(\Delta_h + \lambda_\nu^2)u_\nu||_{L^2(\Omega)} & \leq & C\lambda_\nu^{-N} \\ |\langle u_\nu, u_{\nu'}\rangle_H - \delta_{\nu,\nu'}| & \leq & C\lambda_\nu^{-N},\ \nu,\nu' \in \mathcal{M}, \end{cases}$$

où $\delta_{\nu,\nu'} = 0$ si $\nu \neq \nu'$ et $\delta_{\nu,\nu} = 1$.

Théorème 3.1.2 *Supposons que Γ soit localement strictement géodésiquement convexe par rapport à $(\mathcal{G}, -\nu)$.*

Supposons de plus que (3.2) est vérifiée.

Alors, il existe des quasimodes $\mathcal{Q} = \{(u_\nu, \lambda_\nu), \nu \in \mathcal{M}\}$ de P. De plus

$$\#\{\nu \in \mathcal{M} :\ \lambda_\nu \leq \lambda\} \ = \ V\lambda^2 \ + \ o(\lambda^2)\,, \quad \lambda \to +\infty, \tag{3.3}$$

où $V > 0$.

Ainsi, le théorème 1 se déduit du théorème 2 et du résultat de Stefanov [23]. La construction des quasimode résulte de l'existence d'une grande famille de cercles invariants de l'application du billard donnée par le théorème KAM. L'existence d'une telle famille a été prouvée par Lazutkin [15].

Idée de la preuve : Considérons tout d'abord l'optique géométrique de notre problème. L'opérateur de Helmholtz

$$\Delta_g + \lambda^2 = -\lambda^2(-\lambda^{-2}\Delta_g - 1)$$

est considéré comme un opérateur de grand paramètre[1] $\lambda \gg 1$ et de symbole principal $g(x,\xi) - 1$ dont la variété caractéristique est

$$G := \{(x,\xi) \in T^*\mathcal{O} :\ g(x,\xi) = 1\}.$$

On sait que le front d'ondes (les oscillations) se propage le long des bicaractéristiques généralisées sur G. Considérons les géodésiques généralisées de la métrique $\mathcal{G}$ dans

[1] ou de petit paramètre $h = 1/\lambda$

$\overline{\mathcal{O}}$. Comme Γ est strictement géodésiquement concave, toute géodésique généralisée ayant des points en commun avec l'intérieur de $\mathcal{O}$ est une géodésique (par morceaux) qui ne peut intersecter Γ que transversalement. Le bord Γ est également une limite de géodésiques par morceaux, donc c'est également une géodésique généralisée au sens de Melrose et Sjöstrand. Les géodésiques par morceaux sont les projections de bicaractéristiques par morceaux du champ de vecteurs Hamiltonien X_g sur l'hypersurface G.

Considérons maintenant une bicaractéristique généralisée γ se déplaçant dans $\mathcal{O}$; supposons qu'elle rencontre $T^*\mathbb{R}^2|_\Gamma$ en un point $(x,\eta) \in G$. Soit $\xi = \eta|_{T_x\Gamma} \in T^*\Gamma$ la restriction de la forme linéaire ξ sur la tangente à Γ en x. Alors (x,η) appartient au fibré cosphérique

$$\Sigma_{i,h} := \{(x,\xi) \in T^*\Gamma : \; r(x,\xi) < 1\}$$

associé à $\mathcal{G}$, qui est précisément la région hyperbolique du bord associée à l'équation de Helmholtz dans l'intérieur de $\mathcal{O}$. La variété *gliding* correspondante est

$$\Sigma_{i,g} := \{(x,\xi) \in T^*\Gamma : \; r(x,\xi) = 1\}$$

et la région elliptique est

$$\Sigma_{i,e} := \{(x,\xi) \in T^*\Gamma : \; r(x,\xi) > 1\}.$$

Nous allons construire une paramétrix locale pour le problème de Dirichlet de l'équation de Helmholtz près d'un $(x_0,\xi_0) \in \Sigma_{i,h}$ fixé. Cette paramétrix est un opérateur intégral de Fourier à grand paramètre λ [2] $H(\lambda)$.

La relation canonique de $H(\lambda)$ est dans $T^*\Gamma \times T^*\mathbb{R}^2$ et est donnée par

$$\mathcal{C} \; := \; \left\{ \left((x,\xi)\,;\, \exp(sX_g)(x,\xi^+)\right) \; : \; \varrho \in \Sigma_1\,, \; -\varepsilon < s < T+\varepsilon \right\} \,, \; \varepsilon > 0\,,$$

où $\xi^+ \in T_x^*\mathbb{R}^2$ est le covecteur "sortant" correspondant à $\xi \in T_x^*\Gamma$, c'est-à-dire $(x,\xi^+) \in G$, $\xi^+|_{T_x\Gamma} = \xi$, et $\langle \xi^+, \nu'(x)\rangle > 0$. On la paramétrise par (ϱ, s). Considérons l'opérateur de restriction $\imath_\Gamma^* : C^\infty(X) \to C^\infty(\Gamma)$ tel que $\imath_\Gamma^*(u) = u_{|\Gamma}$, comme un λ-OIF d'ordre 0. Alors, la composition $\imath_\Gamma^* H(\lambda)$ est bien définie comme un λ-OIF et la relation canonique correspondante est la réunion disjointe de la diagonale de $\Sigma_1 \times \Sigma_1$ (pour $s = 0$) et du graphe de l'application du billard $B : \Sigma_1 \to \Sigma_{i,h}$.

Si on choisit les conditions initiales $\mathrm{OP}_\lambda(\psi)$ sur Γ pour $s = 0$, la résolution des équations de transport correspondantes permet d'obtenir un opérateur $H(\lambda)$ vérifiant

$$(\Delta_g + \lambda^2)H(\lambda)g = O_N(\lambda^{-N})g\,, \quad g \in L^2(\Gamma),$$

et tel que

$$\imath_\Gamma^* H(\lambda)g = g + G(\lambda)g + O_N(|\lambda|^{-N})g,$$

où $G(\lambda)$ est un λ-OIF d'ordre 0 dont la relation canonique est le graphe de l'application du billard $B : \Sigma_1 \to \Sigma_{i,h}$. De plus, son symbole principal est égal à 1 dans un voisinage de Σ_2.

De la même manière, on considère les bicaractéristiques généralisées de X_h sur

$$H := \{(x,\xi) \in T^*\Omega : \; h(x,\xi) = 1\}\,,$$

[2] on utilisera l'abréviation λ-OIF

et on note $\Sigma_{e,h}$, $\Sigma_{e,g}$ et $\Sigma_{e,e}$ les régions hyperbolique, glancing et elliptique correspondantes. La condition (3.2) signifie que $\Sigma_{i,g} \subset \Sigma_{e,e}$ et par conséquent qu'il existe un $\delta > 0$ tel que la région

$$\Sigma_1 := \{(x, \xi) \in T^*\Gamma : \ 1 - \delta < r(x, \xi) < 1\}$$

est incluse dans la région elliptique $\Sigma_{e,e}$ correspondant au problème extérieur. En termes d'optique géométrique, cela signifie qu'il existe une réflection intérieure totale de la bicaractéristique γ de X_g rencontrant le bord par l'intérieur sur Σ_1 (il n'y a pas de réfraction). D'autre part, si γ rencontre le bord en un point $\rho \in \Sigma_{i,h}$ suffisamment éloigné de la variété glancing $\Sigma_{i,g}$, alors $\rho \in \Sigma_{e,h}$ et ainsi, il existe une bicaractéristique dans l'extérieur et partant de ρ : celle-ci est appelée "rayon réfracté". On construit une paramétrix $R_e(\lambda) : C^\infty(\Gamma) \to C_0^\infty(\Omega_R)$, $R \gg 1$, dans la zone elliptique du problème de Dirichlet de $\Delta_h + \lambda^2$, i.e.

$$(\Delta_h + \lambda^2) R_e(\lambda) g = O_N(\lambda^{-N}) g \ , \quad R_e(\lambda) g|_\Gamma = g + O_N(\lambda^{-N}) g.$$

Notons que la partie imaginaire de la phase de l'OIF $R_e(\lambda)$ est positive dans l'intérieur de Ω.

En utilisant les conditions au bord, nous réduisons microlocalement le problème de transmission à une équation intégrale $M(\lambda)g = g$ sur le bord Γ. Ici $M(\lambda)$ désigne un λ-OIF dont la relation canonique est le graphe de l'application du billard sur Σ_1 correspondant à la métrique $\mathcal{G}$. Son symbole principal $m_0 \in C_0^\infty(T^*\mathbb{T})$ vérifie $m_0(x_1, \xi_1)| = 1$ dans un voisinage de Σ_1.

Pour résoudre cette équation modulo $O_N(\lambda^{-N})$, nous explicitons tout d'abord une forme normale microlocale de $M(\lambda)$ près d'une grande famille de cercles invariants de B donnée par le théorème KAM. Microlocalement, $M(\lambda)$ est défini comme un opérateur intégral dont le noyau est une intégrale oscillante

$$M(\varphi, \psi, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda \Phi(\varphi,\psi,\eta)} a(\varphi, \eta, \lambda) d\eta,$$

où $\Phi(\varphi, \psi, \eta) = \phi(\varphi, \eta) - \psi\eta$ définit localement la variété lagrangienne $\operatorname{graph} B \subset T^*\Gamma \times T^*\Gamma$, c'est-à-dire que, localement,

$$\operatorname{graph} B = C_\Phi := \{(\varphi, d_\varphi \Phi, \psi, d_\psi \Phi) \ : \ d_\eta \Phi = 0\},$$

et $a = a_0 + a_1 \lambda^{-1} + \cdots$ est une amplitude classique par rapport à λ, avec $a_j \in C_0^\infty(U)$, où U est borné dans $T^*\Gamma$.

Notre but est de trouver une forme normale symplectique de B qui va nous donner une forme normale de la phase Φ. Rappelons que Γ est strictement géodésiquement concave, ce qui nous permet d'utiliser un résultat de Lazutkin autour du théorème KAM. Ce résultat nous permet d'obtenir une forme normale de B de la même manière que Popov [21].

Plus précisement, il existe une transformation symplectique exacte $\chi : \mathbb{T}\times] - \delta, \delta[\to \mathbb{T}\times] - \delta, \delta[$ (ce qui signifie que $\chi^*(Id\varphi) = Id\varphi + df$), il existe un intervalle $E \subset]0, \delta[$ de mesure de Lebesgue positive et $K \in C^\infty(]0, \delta]$, $K' > 0$, tels que l'application du billard transformée $B^0 = \chi^{-1} B \chi$ est de la forme

$$B^0(\varphi, I) = (\varphi - K'(I), I) + R(\varphi, I) \ , \quad \text{où } \forall \alpha \in \mathbb{N}, \ \partial_I^\alpha R|_{\mathbb{T}\times E} = 0.$$

De plus, $E = (K')^{-1}(\Theta)$, et Θ est un ensemble de nombres diophantiens

$$\Theta = \{\omega \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2] : \ \forall\, 0 \neq k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 , \ |\omega k_1 + k_2| \geq \kappa(|k_1| + |k_2|)^{-\tau}\},$$

où $\kappa > 0$, $\tau > 1$, sont fixés et $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta$ sont des constantes. On peut aussi trouver une fonction de phase $\Phi(\varphi, \psi, I) = (\varphi - \psi)I - K(I) + Q(\varphi, I)$ telle que $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $\partial_I^\alpha Q|_{\mathbb{T}\times E} = 0$ et $\operatorname{graph} B = C_\Phi$. Puis, en conjuguant $M(\lambda)$ avec des OIFs convenables on écrit le noyau de $M(\lambda)$ sous la forme

$$M(\varphi, \psi, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda((\varphi-\psi)I - K(I) + Q(\varphi, I))} m(\varphi, \eta, \lambda) d\eta,$$

où la partie principale de l'amplitude m est de module 1 dans $\mathbb{T} \times D$, D étant un intervalle ouvert contenant E. On peut donc écrire l'amplitude sous la forme

$$m(\varphi, I, \lambda) = \exp(ip(\varphi, I, \lambda))\kappa(\varphi, I),$$

dans un voisinage de $\mathbb{T} \times D$ où p est un symbole classique d'ordre 0 et $\kappa \in C_0^\infty$, $\kappa = 1$ sur $\mathbb{T} \times D$.

On trouve tout d'abord une famille de "valeurs propres" $Z(\lambda)$ et de "fonctions propres" $e(\varphi, \lambda)$ de $M(\lambda)$ vérifiant

$$M(\lambda)e(\lambda) = Z(\lambda)e(\lambda) + O_N(|\lambda|^{-N}e(\lambda). \tag{3.4}$$

Puis on cherche à résoudre l'equation $Z(\lambda) = 1 + O_N(|\lambda|^{-N})$, ce qui nous donne les quasimodes $(\lambda_j, e(\lambda_j))$. On introduit deux paramètres : $Y \in E = K'(\Theta)$ et $\zeta = Y + \eta/\lambda$, $|\eta| \leq C$, où $C \gg 1$ est une constante. On cherche $Z(\lambda)$ et $e(\lambda)$ sous la forme

$$Z(\lambda) = \exp(i\lambda S(Y, \zeta, \lambda)) \ , \ \text{ et } e(\varphi, \lambda) = \exp(i\lambda f(\varphi, Y, \zeta, \lambda)),$$

2π-périodiques par rapport à φ, où S et f sont données asymptotiquement par

$$S(Y, \zeta, \lambda) = s(Y, \eta) + \sum_{j=0}^{\infty} s_j(Y, \eta)\lambda^{-j-1} \ , \ f(\varphi, Y, \zeta, \lambda) = \varphi\zeta + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\varphi, Y, \eta)\lambda^{-j-1},$$

avec des f_j 2π-périodiques par rapport à φ et analytiques par rapport à η. La fonction λf doit être 2π-périodique, ce qui donne la condition de quantification

$$\lambda\zeta \in \mathbb{Z} .$$

On calcule $M(\lambda)e(\varphi, \lambda)$ par la méthode de la phase stationnaire puis (3.4) est équivalente à des équations de la forme

$$f(\varphi - \omega, \omega, \eta) - f(\varphi, \omega, \eta) = s(\omega, \eta) - b(\varphi, \omega, \eta), \quad (\varphi, \omega) \in \mathbb{T} \times \Theta,$$

que nous résolvons par rapport à f et s en utilisant les conditions diophantiennes.

Fixons par exemple $\omega \in \Theta$. En intégrant en φ, on trouve

$$s(\omega, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} b(\varphi, \omega, \eta) d\varphi.$$

Puis, on développe f et $c = s - b$ en séries de Fourier

$$c(\varphi, \omega, \eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\omega, \eta) \exp(ik\varphi) \,, \quad f(\varphi, \omega, \eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(\omega, \eta) \exp(ik\varphi) \,,$$

avec $c_0 = 0$. On fixe $f_0 = 0$. Pour tout $k \neq 0$ et $\omega \in \Theta$, on trouve

$$f_k(\omega, \eta)(1 - e^{-i\omega k}) = -c_k(\omega, \eta).$$

On voit facilement que

$$|1 - e^{-i\omega k}| \ \geq \ \frac{\kappa_0}{|k|^\tau} \,, \quad \omega \in \Omega, \ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \,,$$

où $\kappa_0 = \kappa/2\pi$, et donc que $f(\varphi, \omega, \eta)$ est C^∞ par rapport à (φ, η). En modifiant l'équation en dehors d'un voisinage convenable de Θ, on gagne aussi une classe C^∞ par rapport à ω. Enfin, l'équation $Z(\lambda) = 1$ modulo $O_N(|\lambda|^{-N})$ se réduit à un système linéaire 2×2, et on trouve λ_j.

3.2 *Réduction au bord*

3.2.1 *Parametrix du problème extérieur de Dirichlet dans la région elliptique*

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que Γ est le cercle unitaire $\mathbb{T}$ muni de la métrique $r_0(s)\eta^2$, $s \in \Gamma$. Nous considérons maintenant les coordonnées normales (x_1, x_2) au voisinage de Γ. Alors, dans un petit voisinage $\Gamma \times [0, \epsilon]$, la métrique est donnée par la formule suivante :

$$h(x, \xi) = \xi_2^2 + h_0(x)\xi_1^2 = \xi_2^2 + r_0(x_1, \xi_1) + x_2 k_0(x_1, \xi_1) + O(x_2^2).$$

Soit $a \in C_0^\infty(\Gamma \times \mathbb{R})$ une fonction dont le support est inclus dans $\Sigma_{e,e}$ et telle que $a = 1$ dans un voisinage de Σ_1. Nous considérons a comme une fonction 2π-périodique par rapport à la variable x_1. On note $\mathrm{OP}_\lambda(a) : L^2(\Gamma) \to C^\infty(\Gamma)$ l'opérateur pseudo-différentiel correspondant, à grand paramètre λ [3], dont le noyau de Schwartz est

$$\mathrm{OP}_\lambda(a)(y, y') = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(y-y')\eta} a(y, \eta) d\eta.$$

Remarque 1.1. L'opérateur $\mathrm{OP}_\lambda(a)$ agit sur $L^2(\Gamma)$ de la façon suivante. Etant donnée une fonction g 2π-périodique, nous pouvons régulariser l'intégrale oscillante

$$\mathrm{OP}_\lambda(a)g(y) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(y-y')\eta} a(y, \eta) g(y') d\eta dy'.$$

Le support de a en fonction de η est inclus dans un compact qui ne dépend pas de y. On choisit $\kappa \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\kappa = 1$ sur $[-1, 1]$ et $\kappa = 0$ en dehors de $[-2, 2]$.

[3] on abréviera cette notation en λ-OPD

Puis, nous pouvons intégrer par parties en fonction de la variable η dans l'intégrale oscillante avec la fonction phase $(y-y')\eta$ et l'amplitude $a(y,\eta)[1-\kappa(y-y')]$, ce qui fait gagner $O_N(|\lambda|^{-N}(1+|y-y'|)^{-N})$ et donc permet de remplacer l'amplitude par $a(y,\eta)\kappa(y-y')$. Remarquons également que, si g est 2π-périodique, alors la fonction $\mathrm{OP}_\lambda(a)g(y)$ l'est aussi.

Nous cherchons une fonction u_2 dans le système (3.1), qui soit de la forme $R_e(\lambda)g$, où $g \in C^\infty(\Gamma)$ et $R_e(\lambda) : L^2(\Gamma) \to C_0^\infty(\overline{\Omega})$ est une paramétrix microlocale du problème de Dirichlet extérieur

$$\begin{cases} (\Delta_h + \lambda^2)R_e(\lambda)g = O_N(\lambda^{-N})g \\ R_e(\lambda)g|_\Gamma = \mathrm{OP}_\lambda(a)g + O_N(\lambda^{-N})g\,,\ g \in L^2(\Gamma)\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Dans la suite, on notera

$$O_N(|\lambda|^{-N})\ :\ L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

pour représenter les familles d'opérateurs continus dépendant du paramètre λ, dont les normes sont $\leq C_N(1+|\lambda|)^{-N}$, avec $C_N > 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Nous noterons aussi

$$O_N(|\lambda|^{-N})\ :\ L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)\ ,$$

les familles d'opérateurs continus dépendant de λ dont les normes sont uniformément bornées par $C_N(1+|\lambda|)^{-N}$, avec $C_N > 0$.

Proposition 3.2.1 *Il existe un λ-OIF $R_e(\lambda)$ vérifiant (3.5). Son noyau est donné par*

$$R_e(\lambda)(x,y) := \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(\phi(x,\eta)-y\eta)}b(x,\eta,\lambda)d\eta,$$

où $\phi(x_1,x_2,\eta)-x_1\eta$ est une fonction 2π-périodique par rapport à x_1,

$$\mathrm{Re}\,\phi(x,\eta) = x_1\eta + O(x_2^2)\,,\ \mathrm{Im}\,\phi(x,\eta) = x_2\sqrt{r_0(x_1,\eta)-1} + O(x_2^2)\,,$$

et b est un symbole classique de support compact, c'est-à-dire donné par la série formelle

$$b(x,\eta,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x,\eta)\lambda^{-j},$$

où les $b_j(x_1,x_2,\eta)$, $j\in\mathbb{N}$, sont des fonctions 2π-périodiques par rapport à x_1 et à support uniformément compact par rapport à (x_2,η). De plus, $b(x_1,0,\eta,\lambda) = a(x_1,\eta)$.

Remarque 1.2. L'intégrale oscillante $R_e(\lambda)g(x)$ peut être régularisée comme dans la remarque 1.1.

Preuve : Nous avons

$$(\Delta_h+\lambda^2)R_e(\lambda)(x,y)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(\phi(x,\eta)-y\eta)}c(x,\eta,\lambda)d\eta,$$

où

$$c(x,\eta,\lambda)=\lambda^2\sum_{j=0}^{\infty}c_j(x,\eta)\lambda^{-j},$$

et

$$c_0(x,\eta)=(1-h(x,\nabla_x\phi(x,\eta))b_0(x,\eta),$$
$$c_1(x,\eta)=(h(x,\nabla_x\phi(x,\eta))-1)b_1(x,\eta)+2i\mathfrak{L}b_0(x,\eta),$$
$$c_j(x,\eta)=(h(x,\nabla_x\phi(x,\eta))-1)b_j(x,\eta)+2i\mathfrak{L}b_{j-1}(x,\eta)+\Delta_h b_{j-2}(x,\eta),\ j\geq 2.$$

Ici $\mathfrak{L}=f_1\partial_{x_1}+f_2\partial_{x_2}+f_3$, $f_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}h_0$, $f_2=\frac{\partial\phi}{\partial x_2}$, et f_3 est une fonction à valeurs réelles. Nous allons tout d'abord chercher une solution asymptotique, quand $x_2\to 0$, de l'équation eikonale pour les variables (x,η) dans un voisinage de Σ_1. Considérons

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+h_0\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2=1+O_N(x_2^N),\\ \phi(x_1,0,\eta)=x_1\eta.\end{cases}\tag{3.6}$$

On écrit ϕ comme une série formelle $\phi(x,\eta)=\phi_0(x_1,\eta)+x_2\phi_1(x_1,\eta)+\cdots$.

Posons $\phi_j'(x_1,\eta)=\partial_{x_1}\phi_j(x_1,\eta)$ et écrivons formellement $h_0(x)=\sum_{j=0}^{\infty}h_{0j}(x_1)x_2^j$.

Alors, $\phi_0(x_1,\eta)=x_1\eta$ et (3.6) est formellement équivalente à

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\phi_{j+1}x_2^j\right)^2+\left(\sum_{j=0}^{\infty}h_{0j}x_2^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j'x_2^j\right)^2=1+O_N(x_2^N).$$

Pour $x_2=0$, on obtient $\phi_1^2+r_0=1$ et on pose

$$\phi_1(x_1,\eta)=i\sqrt{r_0(x_1,\eta)-1}$$

dans un voisinage de (y_0,η_0). Si on compare les coefficients des x_2^j, $j\geq 1$, on trouve

$$2(j+1)\phi_1\phi_{j+1}+\sum_{k=2}^{j}k(j+2-k)\phi_k\phi_{j+2-k}+\eta^2h_{0j}+2\sum_{k=0}^{j-1}h_{0k}\phi_{j-k}'+\sum_{k=0}^{j}h_{0k}\sum_{m+n=j-k}\phi_m'\phi_n'=0,$$

que l'on résout par récurrence par rapport à ϕ_{j+1}. Par cette récurrence, on obtient que ϕ_{j+1}, $j\geq 0$, est 2π-périodique par rapport à x_1. Ensuite, on utilise un théorème de Borel[4] pour obtenir une fonction $\widetilde{\psi}$ dont la série de Taylor est $\widetilde{\psi}(x_1,x_2,\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j(x_1,\eta)x_2^j$.

La fonction $\widetilde{\psi}$ n'est pas forcément 2π-périodique par rapport à x_1. Pour la rendre périodique, on choisit $\kappa\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\kappa(x_1+2k\pi)=1$ et on pose

$$\psi(x_1,x_2,\eta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\psi}(x_1+2k\pi,x_2,\eta)\kappa(x_1+2k\pi).$$

[4]voir par exemple [18], théorème 1.5.4, p. 30

Il est évident que les séries de Taylor de ψ et de $\widetilde{\psi}$ par rapport à x_2 en $x_2 = 0$ sont identiques car $\phi_j(x_1, \eta)$, $j \geq 1$ sont 2π-périodiques par rapport à x_1.

Puis nous résolvons les équations de transport comme ci-dessus. Pour $j = 0$, on a

$$2i\mathcal{L}b_0(x, \eta) = O_N(x_2^N),$$

avec les données initiales $b_0(x_1, 0, \eta) = a(x_1, \eta)$. On développe les coefficients f_k, $k = 1, 2, 3$ de $\mathcal{L}$ en séries de Taylor par rapport à x_2 en $x_2 = 0$ et on cherche les séries formelles $b_0(x, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j}(x_1, \eta)x_2^j$ qui vérifient formellement l'équation de transport. On note que les f_k sont 2π-périodiques par rapport à x_1.

Remarquons aussi que $f_2(x_1, 0, \eta) = \phi_1(x_1, \eta) = i\sqrt{r_0(x_1, \eta) - 1}$. Alors $b_{00} = a$ et on obtient, pour les b_{0j}, $j \geq 1$, une équation linéaire de la forme $2i\phi_1 b_{0j} = R_j$, où R_j dépend seulement des b_{0k} pour $k \leq j - 1$ et est 2π-périodique par rapport à x_1.

Par récurrence, on obtient que le support de b_{0j} par rapport à (x_1, η) est contenu dans un petit voisinage de Σ_1. Alors, en utilisant un théorème de Borel, on trouve b_0.

De la même manière, on résout de manière approchée l'équation de transport pour tout b_j. Par récurrence, on trouve que le support des b_j par rapport à (x_1, η) est contenu dans le même voisinage de Σ_1. Si on multiplie par une fonction de troncature $\kappa(x_2)$ qui s'annule près de $x_2 = 0$, on peut supposer que l'amplitude est uniformément à support compact. Comme précédemment, on transforme l'amplitude pour qu'elle soit 2π-périodique par rapport à x_1.

Par construction, nous avons, pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $|\mathrm{Im}\lambda| \leq 1$, $|\mathrm{Re}\lambda| \geq 1$

$$|(\Delta_h + \lambda^2)R_e(\lambda)(x, y)| \leq C_N(e^{-cx_2\mathrm{Re}\lambda}x_2^N + |\lambda|^{-N}) \leq C'_N|\lambda|^{-N}$$

où c, C_N et C'_N sont des constantes positives. L'application de Dirichlet-to-Neumann est un λ-OPD dont le noyau est

$$\lambda A(\lambda)(x_1, y) := \frac{\partial}{\partial x_2}R_e(\lambda)(x_1, 0, y) = \lambda\frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(x_1 - y)\eta}q(x_1, \eta, \lambda)d\eta, \tag{3.7}$$

avec $q = q_0 + q_1\lambda^{-1} + \cdots$, un symbole classique uniformément à support compact dans un voisinage de Σ_1, et

$$q_0(x_1, \eta) = -a(x_1, \eta)\sqrt{r_0(x_1, \eta) - 1}.$$

3.2.2 *Parametrix du problème intérieur de Dirichlet dans la région hyperbolique*

Nous allons utiliser une paramétrix sortant de l'équation de Helmholtz avec conditions initiales sur Γ. Dans le cas dépendant du temps, une telle parametrix a été construite par Guillemin et Melrose [11].

Considérons des coordonnées normales (x_1, x_2) par rapport à $\mathcal{G}$ dans un voisinage de Γ. Prolongeons g_0 en une fonction C^∞ et positive dans un voisinage de $\Gamma \times \{0\}$ dans $X := \Gamma \times \mathbb{R}$, et postulons que Γ est le cercle unité. Posons $S := \{(x, \xi) \in$

$T^*(\Gamma \times \mathbb{R}) : \ x_2 = 0, \xi_2^2 + r(x_1, \xi_1) = 1\}$ et notons, d'une part $\pi_0 : S \to T^*\Gamma$ la projection naturelle $\pi_0(x_1, 0, \xi_1, \xi_2) = (x_1, \xi_1)$, d'autre part $\pi_0^{\pm} : \Sigma_{i,h} \to S$ ses applications inverses dans la région hyperbolique définies par

$$\pi_0^{\pm}(x_1, \xi_1) = (x_1, 0, \xi_1, \pm\sqrt{1 - r(x_1, \xi_1)}).$$

On désigne par $\exp(tX_g)$ le flot Hamiltonien de g dans X. Comme Γ est localement strictement géodésiquement convexe par rapport à $(\mathcal{G}, -\nu)$, si on choisit un δ suffisamment petit, on trouve que toute courbe intégrale $t \to \gamma(t) = \exp(tX_g)(\varrho)$ du champ de vecteurs Hamiltonien X_g, commençant en $\varrho \in \pi_0^+(\Sigma_1)$, intersecte transversalement $T^*\mathbb{R}^2|_\Gamma$ à un certain instant $T(\varrho) > 0$ et nous avons

$$\exp(T(\varrho)X_g)(\pi_0^+(\varrho)) \in \pi_0^-(\Sigma_{i,h}) .$$

On choisit pour $T(\varrho)$ le premier instant positif d'intersection. L'application du billard

$$B : \Sigma_1 \to \Sigma_{i,h}$$

est donnée par

$$B(\varrho) = \pi_0 \circ \exp(T(\varrho)X_g) \circ \pi_0^+(\varrho).$$

On fixe $\delta > \delta_1 > \delta_2 > 0$ et on pose $\Sigma_2 := \{(x, \xi) \in T^*\Gamma : \ 1 - \delta_1 < r(x, \xi) < 1 - \delta_2\}$.

Soit $\mathrm{OP}_\lambda(\psi)$ un λ-OPD classique d'ordre 0 sur Γ de grand paramètre λ, $\psi(x_1, \eta)$ une amplitude lisse et 2π-périodique par rapport à x_1 telle que $\psi = 1$ dans un voisinage de Σ_2 et $\operatorname{supp}\psi$ est un sous-ensemble de Σ_1. On choisit λ dans la bande du plan complexe suivante :

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbf{C} : \ |\operatorname{Im} z| \le 1, \ \operatorname{Re} z \ge 1\} .$$

Nous cherchons une paramétrix microlocale sortante du problème de Dirichlet pour l'équation de Helmholtz, $H : L^2(\Gamma) \to C^\infty(X)$, avec des "données initiales" concentrées dans Σ_2, telles que

$$\forall N \in \mathbb{N} , \quad (\Delta_g + \lambda^2)H(\lambda) = O_N(|\lambda|^{-N}) \tag{3.8}$$

dans un voisinage de Γ dans X.

L'opérateur H est un opérateur intégral de Fourier d'ordre $1/4$ avec un grand paramètre $\lambda \in \mathcal{D}$ (λ-OIF) ; son noyau au sens des distributions est une intégrale oscillante au sens de [8] (voir aussi [20]).

Dans toutes coordonnées locales, son amplitude est de classe C^∞, à support uniformément compact pour $\lambda \in \mathcal{D}$, et elle admet un développement asymptotique en puissances de λ à tout ordre négatif. En particulier, $H(\lambda)u$ est une fonction C^∞ pour tous λ et $u \in L^2(\Gamma)$ fixés.

La relation canonique correspondante est dans $T^*\Gamma \times T^*X$ et est donnée par

$$\mathcal{C} := \left\{\left(\varrho ; \exp(sX_g)(\pi_0^+(\varrho))\right) : \ \varrho \in \Sigma_1 , \ -\varepsilon < s < T + \varepsilon\right\} , \ \varepsilon > 0 .$$

On la paramétrise par (ϱ, s). Considérons l'opérateur de restriction $\imath_\Gamma^* : C^\infty(X) \to C^\infty(\Gamma)$ tel que $\imath_\Gamma^*(u) = u_{|\Gamma}$, comme un λ-OIF d'ordre 0, dont la relation canonique

$\mathcal{R}$ est justement l'inverse de la relation canonique donnée par le fibré conormal du graphe de l'inclusion $\imath : \Gamma \to \widetilde{X}$.

Remarquons que la composée $\mathcal{R} \circ \mathcal{C}$ est transversale pour tout j et est la réunion disjointe de la diagonale de $\Sigma_1 \times \Sigma_1$ (pour $s = 0$) et du graphe de l'application du billard $B : \Sigma_1 \to \Sigma_{i,h}$(pour $s = T$).

Si on choisit les conditions initiales $\mathrm{OP}_\lambda(\psi)$ sur Γ pour $s = 0$, la résolution des équations de transport correspondantes permet d'obtenir un opérateur $H(\lambda)$ vérifiant (3.8) et tel que

$$(H(\lambda)g)(x_1, 0) = (\imath_\Gamma^* H(\lambda)g)(x_1) = \mathrm{OP}_\lambda(\psi)g(x_1) + G(\lambda)g(x_1) + O_N(|\lambda|^{-N})g,\ g \in L^2(\Gamma)\,, \tag{3.9}$$

où $G(\lambda)$ est un λ-OIF d'ordre 0 dont la relation canonique est le graphe de l'application du billard $B : \Sigma_1 \to \Sigma_{i,h}$. De plus, son symbole principal est égal à 1 dans un voisinage de Σ_2 modulo le facteur de Maslov multiplié par le facteur de Liouville $\exp(i\lambda A(\varrho))$, où $A(\varrho) = \int_{\gamma(\varrho)} \xi dx$ est l'action le long de la courbe intégrale $\gamma(t), 0 \leq t \leq T(\varrho)$ du champ de vecteurs Hamiltonien X_g commençant en $\varrho+ = \pi_0^+(\varrho)$ et de point final $\exp(T(\varrho)X_g)(\varrho^+)$.

Remarquons que $2A(\varrho)$ est exactement la longueur $T(\varrho)$ de la géodésique correspondante $\widetilde{\gamma}_j(\varrho)$ dans X.

Considérons maintenant la dérivée normale de $H(\lambda)g$ en Γ. En utilisant le calcul symbolique, on trouve

$$\imath_\Gamma^* \frac{\partial}{\partial x_2} H(\lambda)g = \lambda G^+(\lambda)\, \mathrm{OP}_\lambda(\psi)g + \lambda G^-(\lambda)\, G(\lambda)\mathrm{OP}_\lambda(\psi)g + O_M(|\lambda|^{-M})\,.$$

Ici, $G^\pm(\lambda)$ sont des λ-OPD classiques d'ordre 0 sur Γ avec des symboles classiques et des symboles principaux qui sont

$$\sigma(G^\pm)(x_2, \eta) \;=\; \pm i\sqrt{1 - r(x_2, \eta)}\,.$$

Revenons maintenant au système (3.1). On pose $u_1 = H(\lambda)g$ et $u_2 = R_e(\lambda)f$, avec $\lambda \in \mathcal{D}$ et $f, g \in L^2(\Gamma)$ qui ne sont pas connues. Par construction,

$$(\Delta_g + \lambda^2)u_1 = O_N(|\lambda|^{-N})g \quad \text{and} \quad (\Delta_h + \lambda^2)u_2 = O_N(|\lambda|^{-N})g.$$

Nous allons vérifier les conditions au bord de (3.1) modulo $O_N(|\lambda|^{-N})g$. La première condition entraîne

$$(u_1 - u_2)|_\Gamma = \mathrm{OP}_\lambda(\psi)g + G(\lambda)g - \mathrm{OP}_\lambda(a)f + O_N(|\lambda|^{-N})g = O_N(|\lambda|^{-N})g.$$

On peut supposer que $a = 1$ dans un voisinage de $\mathrm{supp}\,(\psi) \cap B(\Sigma_2)$ en choisissant $\delta > 0$ suffisamment petit. Alors,

$$f = \mathrm{OP}_\lambda(\psi)g + G(\lambda)g + O_N(|\lambda|^{-N})g.$$

La deuxième condition nous donne

$$\begin{aligned} &\partial_{\nu'} u_1 + \partial_\nu u_2 \\ &= \lambda G^+(\lambda)\, \mathrm{OP}_\lambda(\psi)g + \lambda G^-(\lambda)\, G(\lambda)\mathrm{OP}_\lambda(\psi)g - \lambda A(\lambda)f + O_N(|\lambda|^{-N})g = O_N(|\lambda|^{-N})g. \end{aligned}$$

Par le même argument que précédemmment, $A(\lambda)$ est elliptique dans un voisinage de l'ensemble des fréquences de $G^+(\lambda)\,\mathrm{OP}_\lambda(\psi)g$ et de $\lambda G^-(\lambda)\,G(\lambda)\mathrm{OP}_\lambda(\psi)g$ et nous obtenons

$$f = Q(\lambda)G^+(\lambda)\,\mathrm{OP}_\lambda(\psi)g + Q(\lambda)G^-(\lambda)G(\lambda)\mathrm{OP}_\lambda(\psi)g + O_N(|\lambda|^{-N})g,$$

où $Q(\lambda)$ désigne un λ-OPD classique de symbole principal $-i(h_0(x_2)\eta^2-1)^{-1/2}$.

La fonction g dépend du paramètre λ. Comme toujours, étant donné un ensemble non borné $\mathcal{M}\subset\mathcal{D}$ et une famille de fonctions lisses $g_\lambda := g(\cdot,\lambda)\in C_0^\infty(\Gamma)$, $\lambda\in\mathcal{M}$, on note $\widetilde{\mathrm{WF}}(g_\lambda)$ l'ensemble des fréquences de $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{M}}$. Rappelons que $(x_0,\xi_0)\notin\widetilde{\mathrm{WF}}(g_\lambda)$ s'il existe des voisinages U_1 et U_2 de x_0 et ξ_0, respectivement, tels que, pour tout $\varphi\in C_0^\infty(U_1)$, la transformée de Fourier $\widehat{\varphi g_\lambda}(\lambda\xi)$, $\lambda\in\mathcal{M}$, décroît rapidement quand $\mathrm{Re}\,\lambda\to+\infty$, uniformément par rapport à $\xi\in U_2$ [5].

La famille g_λ vérifie $\widetilde{\mathrm{WF}}(g_\lambda)\subset\Sigma_1$. Alors $\mathrm{OP}_\lambda(\psi)g = g + O_N(|\lambda|^{-N})g$ et nous obtenons l'équation

$$g + G(\lambda)g = Q(\lambda)G^+(\lambda)g + Q(\lambda)G^-(\lambda)G(\lambda)g + O_N(|\lambda|^{-N})g.$$

qui est équivalente à

$$(A(\lambda)-G^+(\lambda))g + (A(\lambda)-G^-(\lambda))G(\lambda)g = O_N(|\lambda|^{-N})g.$$

De cette façon, nous obtenons l'équation suivante, par rapport à (λ, g)

$$B(\lambda)M(\lambda)g - g = O_N(|\lambda|^{-N})g. \tag{3.10}$$

Ici, $B(\lambda)$ est un λ-OPD classique d'ordre 0 dont le symbole est $b(y,\eta,\lambda) = b_0(y,\eta) + b_1(y,\eta)\lambda^{-1}+\cdots$, 2π-périodique par rapport à y et uniformément à support compact par rapport à η et

$$b_0(y,\eta) = \frac{\sqrt{r_0(y,\eta)-1} - i\sqrt{1-r(y,\eta)}}{\sqrt{r_0(y,\eta)-1} + i\sqrt{1-r(y,\eta)}},$$

$M(\lambda)$ est un λ-OIF classique dont la relation canonique $\mathcal{C}$ est le graphe de l'application du billard $B:\Sigma_1\to\Sigma_{i,h}$, c'est-à-dire qu'on a $\mathcal{C} = \{(x,\xi;B(x,\xi)) : (x,\xi)\in\Sigma_1\}$, et son symbole est uniformément à support compact dans un voisinage de Σ_2 dans Σ_1. De plus, le symbole principal de $M(\lambda)$ est égal à 1 dans un voisinage de Σ_2 modulo un facteur de Maslov multiplié par un facteur de Liouville $\exp(i\lambda A(x,\xi))$, $(x,\xi)\in\Sigma_1$.

3.3 *Forme normale de l'application du billard et Théorème KAM*

Considérons l'application du billard dans $\mathcal{O}$ près du bord Γ. Lazutkin [15] a montré que l'application du billard près du bord d'un domaine strictement convexe est proche d'une application symplectique complètement intégrable. Une fonction

[5] voir [9] dans le cas des distributions

$\zeta \in C^\infty(T^*\Gamma)$ sera appelée un Hamiltonien d'interpolation approché de B si $\zeta = 0$ et $d\zeta \neq 0$ sur la variété glancing $S^*\Gamma := \Sigma_{i,g} = \{(y,\eta) \in T^*\Gamma : r(y,\eta) = 1\}$, $\zeta > 0$ dans la zone hyperbolique $B^*\Gamma := \Sigma_{i,h} = \{(y,\eta) \in T^*\Gamma : r(y,\eta) < 1\}$ et si, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$B(y,\eta) = \exp\left(\zeta(y,\eta)^{1/2} H_\zeta\right)(y,\eta) + O_N(\zeta(\rho)^N),\ (y,\eta) \in B^*\Gamma.$$

Ici, $t \to \exp(tH_\zeta)$ désigne le groupe à un paramètre des difféomorphismes du champ de vecteurs hamiltonien lisse H_ζ de ζ par rapport à la forme canonique dans $T^*\Gamma$. Lazutkin [15], d'une part, Marvizi et Melrose [16] d'autre part, ont trouvé un Hamiltonien d'interpolation approché de B, $\zeta \in C^\infty$.

La variété glancing est constituée de deux composantes $S^*_\pm\Gamma := \{(x,\xi) \in T^*\Gamma : \xi = \pm g_0(x, 0^{-1/2}\}$. Comme dans [21], Sect. 3, nous obtenons des coordonnées action-angle pour l'Hamiltonien ζ près de $S^*_+\Gamma$. En d'autres termes, nous obtenons des coordonnées symplectiques exactes C^∞, $(\theta(x,\xi), r(x,\xi))$ dans un voisinage de $S^*_+\Gamma$ à valeurs dans $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, équipé de la 1-forme canonique $(\ell - r)d\theta$, $\ell =$ longueur$(\Gamma)/2\pi$, telle que $S^*_+\Gamma = \{r = 0\}$, $B^*\Gamma = \mathbb{T} \times \{r > 0\}$ près de $S^*_+\Gamma$, et ζ est une fonction dépendant seulement de la variable r et ne dépendant pas de θ. Alors l'application symplectique exacte B est engendrée dans les coordonnées (θ, r) par la fonction

$$G(\theta,r) = -\frac{2}{3}\zeta(r)^{3/2} + Q(\theta,r)\,,$$

où $Q(\theta,r) = \widetilde{Q}(\theta,\sqrt{r})$, $\widetilde{Q}(\theta,x)$ étant une fonction de classe C^∞ et $\widetilde{Q}(\theta,x) = O_N(x^N)$. De plus, $\zeta(0) = 0$ et $\zeta'(0) > 0$. Nous dirons que G est une fonction génératrice de l'application symplectique exacte B si

$$\operatorname{graph} B \;=\; \{(\theta, r - \partial G/\partial\theta(\theta,r); \theta - \partial G/\partial r(\theta,r), r) : (\theta,r) \in \mathbb{A}\}$$

et $|\partial^2 G/\partial\theta\partial r| \ll 1$ dans $\mathbb{A} = \mathbb{T} \times \{0 < r \leq \delta\}$, $0 < \delta \ll 1$ étant fixé.

Fixons $0 < c < 1$ et $0 < a_0 \ll 1$ et considérons la fonction $G_a = -\frac{2}{3}\zeta(r)^{3/2} + \kappa_a(r)Q(\theta,r)$ dans $\mathbb{A}_a := \mathbb{T} \times [ca/2, 2c^{-1}a]$, où $\kappa_a(r) = \kappa(r/a)$, $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R})$, et $\kappa = 0$ en dehors de $[2c/3, 3c^{-1}/2]$, $\kappa = 1$ sur $[3c/4, 4c^{-1}/3]$.

Alors G_a est une fonction génératrice d'une application symplectique exacte B_a qui coïncide avec B sur $\mathbb{A}^0_a := \mathbb{T} \times [ca, c^{-1}a]$ pour tous $0 < a \leq a_0$, en choisissant $a_0 \ll 1$. Nous allons déterminer une famille C^∞ de cercles invariants de B_a dans $\mathbb{A}^0_a$.

Fixons les constantes $\mu > 0$, $\nu > 1/2$ et $\tau > 1$. Les nombres de rotation correspondants sont définis par la condition Diophantienne

$$\{\omega \in \mathbb{R} : |\omega k_1 + k_2| \geq \mu a^\nu |k|^{-\tau} \text{ for any } 0 \neq k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2\}\,, \tag{3.11}$$

où $|k| = |k_1| + |k_2|$. Posons $S(r) = \frac{3}{2}\zeta(r)^{3/2}$ et désignons par Ω_a l'image de l'intervalle $D_a := [ca/2, 2c^{-1}a]$ par la fonction strictement croissante $r \to S'(r) = \sqrt{\zeta(r)}\zeta'(r)$ et par Ω^0_a l'image de $[ca, c^{-1}a]$ par la même fonction. Nous notons Θ_a l'intersection de Ω^0_a et de l'ensemble de Cantor (3.11). Remarquons que la mesure de Lebesgue de Θ_a est positive pour μ et a suffisamment petits.

Nous allons maintenant pouvoir formuler le théorème KAM pour l'application symplectique exacte B_a, initialement démontré par Lazutkin [15].

Théorème 3.3.1 *Pour tous $0 < a \leq a_0$ et $a_0 \ll 1$, il existe un difféomorphisme symplectique exact χ_0 envoyant l'ensemble $\mathbb{T} \times D_a$ sur lui-même, et $K \in C^\infty(D_a)$, tels que l'application symplectique exacte*

$$B^0 = \chi_0^{-1} \circ B_a \circ \chi_0 \in C^\infty(\mathbb{T} \times D_a; \mathbb{T} \times D_a)$$

admet une fonction génératrice $Q(\varphi, I) \ = \ -K(I) \ + \ R(\varphi, I)$, où

$$\partial_I^\alpha R(\varphi, I) \ = \ 0 \ , \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N} \, ,$$

sur $\mathbb{T} \times E_a$ où $E_a := \{I \in D_a : \ K'(I) \in \Omega_a\}$.

L'application symplectique χ_0 est exacte, de fonction génératrice $\Phi \in C^\infty(\mathbb{T} \times D_a)$ et nous avons

$$\left|\partial_\varphi^\alpha \partial_I^\beta \Phi(\varphi, I)\right| \ + \ \left|\partial_I^\beta (K'(I) - S'(I))\right| \ + \ \left|\partial_\varphi^\alpha \partial_I^\beta R(\varphi, I)\right| \ = \ O_N(a^N) \, , \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \, ,$$

pour tous $(\varphi, I) \in \mathbb{T} \times D_a$.

Une démonstration de ce théorème est donnée dans [21] dans un cadre plus général. On note χ_1 la transformation symplectique exacte $(x, \xi) \to (\theta(x, \xi), r(x, \xi))$ et on pose $\chi = \chi_1^{-1} \circ \chi_0$.

Comme $S' > 0$, nous avons $K' > 0$, et on note $I : \Omega_a \to D_a$ la fonction réciproque. Remarquons que tout cercle $\Lambda_\omega := \mathbb{T} \times \{I(\omega)\}$, $\omega \in \Theta_a$, est invariant par rapport à B^0 et que $B^0(\varphi, I(\omega)) = (\varphi - \omega, I(\omega))$ sur celui-ci.

En nous appuyant sur la forme normale B^0 de B, nous pouvons mettre en évidence une forme normale de $M(\lambda)$. Tout d'abord, nous construisons un λ-OIF elliptique sur Σ_2 d'ordre zéro, $\widetilde{U}_1 : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, associé à la transformation exacte symplectique χ_1, dont la phase est une fonction génératrice de χ_1 et dont l'amplitude est une fonction à support compact.

Alors, $A(\lambda) = \widetilde{U}_1^* \widetilde{U}_1$ est un λ-OPD elliptique classique tel que $A^*(\lambda) = A(\lambda)$ modulo $O_N(\lambda^N)$ et tel que son symbole principal est positif dans un voisinage de Σ_2 ; nous pouvons également obtenir un λ-OPD classique et formellement auto-adjoint , d'ordre 0, tel que le support du symbole de $A(\lambda)B(\lambda)^2 - \mathrm{Id}$ n'intersecte pas Σ_2.

Posons $U_1(\lambda) = \widetilde{U}_1(\lambda)B(\lambda)$. Alors, le symbole de $U_1^* U_1 - \mathrm{Id}$ n'intersecte pas Σ_2. De la même manière, on construit un λ-OIF d'ordre zéro, elliptique sur $\chi_1(\Sigma_2)$, noté $\widetilde{U}_0 : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, et dont la relation canonique est le graphe de la transformation exacte symplectique χ_0^{-1} ; son amplitude est à support compact et cet opérateur est tel que le symbole de $U_0^* U_0 - \mathrm{Id}$ n'intersecte pas $\chi_1(\Sigma_2)$. Posons maintenant $U(\lambda) = U_0(\lambda)U_1(\lambda) : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ et considérons

$$M^0(\lambda) := U(\lambda)B(\lambda)M(\lambda)U^*(\lambda) = U(\lambda)B(\lambda)U^*(\lambda)U(\lambda)M(\lambda)U^*(\lambda) + O_N(\lambda^{-N}).$$

Ici, $B_1(\lambda) := U(\lambda)B(\lambda)U^*(\lambda)$ est un λ-OPD agissant sur $L^2(\mathbb{T})$ dont le symbole principal est $b_0 \circ \chi$ et $M_1(\lambda) := U(\lambda)M(\lambda)U^*(\lambda) : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ est un λ-OIF d'ordre zéro et de symbole classique, dont la relation canonique $\mathcal{C}_0$ est le graphe de $B^0 = \chi^{-1} B \chi$. De plus, son symbole principal est égal à 1 modulo un facteur de Maslov multiplié par le facteur de Liouville correspondant. Par conséquent, $\mathcal{C}_0$ est engendrée par une phase $\Phi(\varphi, \psi, I) = \langle \varphi - \psi, I \rangle - K(I) - R(\varphi, I) + C$, où C est une constante. Comme dans [5], nous prouvons que $C=0$. Par conséquent, le noyau de distribution de $M_1(\lambda)$ est

$$\frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(\langle\varphi-\psi,I\rangle-K(I)-R(\varphi,I))}\, e^{i\pi\mu/2}c(\varphi,I,\lambda)J_\Phi(\varphi,I)d\eta$$

où μ est un indice de Maslov, $c(\varphi,I,\lambda)=c_0(\varphi,I)+c_1(\varphi,I)\lambda^{-1}+\cdots$ est 2π-périodique par rapport à φ et uniformément à support compact dans $\mathbb{T}\times D_a$, $c_0=1$ dans un voisinage de $\mathbb{T}\times D_a$, et

$$J_\Phi(\varphi,I)=|\det(\partial_\varphi\partial_I\Phi(\varphi,\psi,I))|^{-1/2}=|\det(I-\partial_\varphi\partial_I R(\varphi,I))|^{-1/2}.$$

Remarquons que $J_\Phi=1$ sur $\mathbb{T}\times E_a$. Finalement, on trouve que le noyau de distribution de $M_0(\lambda)$ est

$$M_0(\varphi,\psi,\lambda):=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(\langle\varphi-\psi,I\rangle-K(I)-R(\varphi,I))}\, e^{i\pi\mu/2}m(\varphi,I,\lambda)J_\Phi(\varphi,I)d\eta,$$

où $m(\varphi,I,\lambda)=m_0(\varphi,I)+m_1(\varphi,I)\lambda^{-1}+\cdots$ est 2π-périodique par rapport à φ et uniformément à support compact dans $\mathbb{T}\times D_a$ et $m_0=b_0\circ\chi$ dans un voisinage de $\mathbb{T}\times D_a$.

3.4 *Construction de quasimodes*

Nous cherchons à mettre en évidence un ensemble dénombrable $\mathcal{M}=\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda_j\to+\infty$, et une suite $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions $L^2(\mathbb{T})$ telles que $\widetilde{\mathrm{WF}}(g_j)\subset\mathbb{T}\times D_a$ et

$$M_0(\lambda_j)g_j=g_j+O_N(\lambda_j)g_j. \tag{3.12}$$

Alors, la suite $(u_{1j},u_{2j})=(H(\lambda_j)U(\lambda_j)g_j,R_e(\lambda_j)f_j)$, $f_j=U(\lambda_j)g_j+G(\lambda_j)U(\lambda_j)g_j$ donne une solution de (3.1) modulo $O_N(\lambda_j^{-N})g_j$, ce qui signifie que c'est un quasimode pour le problème de transmission.

Nous allons tout d'abord décrire des fonctions propres et des valeurs propres de $M_0(\lambda)$ modulo $O_N(\lambda_j^{-N})$. Par la suite, nous suivrons la méthode exposée dans la section 3 de [5].

3.4.1 *Valeurs propres asymptotiques et fonctions propres de $M_0(\lambda)$*

On choisit des fréquences Y et ζ dans D telles que

$$Y\in E=K'(\Theta)\,,\quad \zeta=Y+\eta/\lambda\,,\quad |\eta|\le C\,, \tag{3.13}$$

où $C>>1$ est une constante. Nous recherchons des valeurs propres asymptotiques de $M_0(\lambda)$ qui soient de la forme

$$Z(Y,\zeta,\lambda)=\exp(i\lambda S(Y,\zeta,\lambda)),$$

et des fonctions propres

$$e(\varphi, Y, \zeta, \lambda) = \exp(i\lambda f(\varphi, Y, \zeta, \lambda))$$

2π-périodiques par rapport à φ, où S et f sont données asymptotiquement par

$$S(Y, \zeta, \lambda) = s(Y, \eta) + \sum_{j=0}^{\infty} s_j(Y, \eta)\lambda^{-j-1}$$

$$f(\varphi, Y, \zeta, \lambda) = \varphi\zeta + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\varphi, Y, \eta)\lambda^{-j-1},$$

avec des f_j 2π-périodiques par rapport à φ et analytiques par rapport à η. La fonction λf doit être 2π-périodique, ce qui donne la condition de quantification

$$\lambda\zeta \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.14}$$

Proposition 3.4.1 *[5] Il existe des fonctions lisses e et Z, de la forme donnée précédemment, telles que*

$$M_0(\lambda)e(\varphi, Y, \zeta, \lambda) = Z(Y, \zeta, \lambda)e(\varphi, Y, \zeta, \lambda) + O_N(\lambda^{-N})e$$

pour $\lambda \in \mathcal{D}$.

Idée de la preuve : La preuve de cette proposition est donnée dans [5] et nous n'en donnons que l'idée principale pour l'exhaustivité de l'exposé.

Le symbole principal $m_0(\varphi, I)$ vérifie $|m_0(\varphi, I)| = 1$ et sa partie imaginaire est strictement négative ; nous prenons une fonction lisse, à valeurs réelles, 2π-périodique par rapport à φ telle que $m_0 = \exp(ip_0)$ et nous écrivons

$$m(\varphi, I, \lambda) = \exp(ip(\varphi, I, \lambda))\kappa(\varphi, I, \lambda)\,, \tag{3.15}$$

où $p = \sum_{j=0}^{\infty} p_j\lambda^{-j}$ et κ est un symbole classique à support dans un voisinage fixé de E par rapport à la variable I, tel que $\kappa(\varphi, I, \lambda) = 1 + O_N(\lambda^{-N})$ pour I dans un autre voisinage de E.

Asymptotiquement,

$$\begin{aligned} M_0(\lambda)e(\varphi, Y, \zeta, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} & e^{i\lambda(\langle\varphi-\psi, I\rangle - K(I) - R(\varphi, I) + Y\psi)} \exp(ip(\varphi, I, \lambda) + i\pi\mu/2)\kappa(\varphi, I, \lambda) \\ & \times \exp\left(i\eta\psi + i\sum_{j=0} f_j(\psi, Y, \eta)\lambda^{-j}\right) J_\Phi(\varphi, I)d\eta d\psi\,. \end{aligned}$$

Les points stationnaires de la phase

$$(\psi, I) \to F(\psi, I, \varphi, Y) := \langle\varphi - \psi, I\rangle - K(I) - R(\varphi, I) + Y\psi$$

sont donnés par

$$I = Y \in E\,, \quad \psi = \varphi - K'(I)\,.$$

Nous nous sommes servis ici du fait que R s'annule à l'ordre infini sur $\mathbb{T}\times E$. De plus, les dérivées secondes de F sont $F_{\psi\psi}=0$, $F_{\psi I}=-1$ et $F_{II}=-K''(I)+O_N(|I-Y|^N)$. En particulier, la Hessienne de F aux points critiques est égale à 1. Soit $g(\psi,I)$ une fonction lisse, 2π-périodique par rapport à ψ et à support compact par rapport à I. Alors, une intégration par parties en dehors d'un voisinage des points critiques et l'application du lemme de la phase stationnaire[6], on obtient,pour tout $N\in\mathbb{N}$, l'asymptotique suivante :

$$\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(\langle\varphi-\psi,I\rangle-K(I)-R(\varphi,I)+Y\psi)}g(\psi,I)d\psi dI=e^{-i\lambda K(Y)}\sum_{j=0}^{N}c_j\lambda^{-j}+O_N(\lambda^{-N})$$

où $c_0=g(\varphi-K'(Y),Y)$ et $c_j=(L_jg)(\varphi-K'(Y),Y)$, avec L_j de opérateurs différentiels d'ordre $\leq 2j$. En particulier, $L_1=-\frac{i}{2}(K''(Y)\partial_\psi^2+2\partial_\psi\partial_I)$.

Nous avons vu que $J_\Phi(\varphi,I)-1$ s'annule à l'ordre infini sur $\mathbb{T}\times E$. Alors, d'après le lemme de la phase stationnaire déjà cité, et en utilisant le fait que $c_0=\exp(i(p_0(\varphi,Y)+\eta\varphi))\neq 0$, on trouve

$$\begin{aligned}M_0(\lambda)e(\varphi,Y,\zeta,\lambda)&=\exp\left(-i(\lambda K(Y)+K'(Y)\eta)+i\pi\mu/2\right)\\&\times\exp\left(i\lambda\zeta+i\textstyle\sum_{j=0}d_j(\varphi,Y,\eta)\lambda^{-j}\right)+O_N(\lambda^{-N})\,,\end{aligned}$$

Ici,

$$d_j(\varphi,Y,\eta)=f_j(\varphi-K'(Y),Y,\eta)+p_j(\varphi,Y)+r_j(\varphi,Y,\eta)\,,$$

avec $r_0=0$ et r_j, $j\geq 1$ qui dépendent seulement de $p_0,\dots,p_{j-1}$ et $f_0,\dots,f_{j-1}$. De plus, les fonctions r_j sont analytiques en $(p_0,\dots,p_{j-1},f_0,\dots,f_{j-1})$ et η. Afin de rassembler ces différents termes dans l'exponentielle, nous pouvons observer que $1+\lambda^{-j}q$ est simplement le premier terme du développement de $\exp(\lambda^{-j}q)$ en séries entières.

A l'aide de l'expression de L_1, nous écrivons explicitement la dépendance de r_j par rapport à p_{j-1} et f_{j-1}. Nous avons

$$r_j(\varphi,Y,\eta)=(\eta\partial_I-(1/2)K''(Y)\partial_\psi^2)\left[f_{j-1}(\varphi,Y,\eta)+p_{j-1}(\varphi,I,\eta)\right]|_{I=Y,\psi=\varphi-K'(Y)}+r'_j\,,\tag{3.16}$$

où r'_j ne dépend pas de f_{j-1} et de p_{j-1}.

Pour démontrer la proposition, nous devons trouver des fonctions lisses f_j et s_j, $j\geq 0$, qui soient solutions pour tout $Y\in E$ de l'équation homologique

$$f_j(\varphi-K'(Y),Y,\eta)-f_j(\varphi,Y,\eta)=s_j(Y,\eta)-p_j(\varphi,Y)-r_j(\varphi,Y,\eta).\tag{3.17}$$

Lemme 3.4.1 *Il existe des fonctions lisses $f_j(\varphi,Y,\eta)$ et $s_j(Y,\eta)$ dans $(\varphi,Y)\in\mathbb{T}\times D$, dépendantes analytiquement de η dans le disque unité B_1 de $\mathbb{C}$ et telles que (3.17) soit vérifiée dans $\mathbb{T}\times E$ et*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} f_j(\varphi,Y,\eta)d\varphi=0.$$

[6] par exemple : [13], Théorème 7.7.5

Preuve : Par un changement de variables $\omega = K'(I)$, on obtient une équation de la forme

$$f(\varphi - \omega, \omega, \eta) - f(\varphi, \omega, \eta) = s(\omega, \eta) - b(\varphi, \omega, \eta), \quad (\varphi, \omega) \in \mathbb{T} \times \Theta,$$

que nous résolvons par rapport à f et s comme suit : En intégrant en φ, on trouve

$$s(\omega, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} b(\varphi, \omega, \eta) d\varphi.$$

Puis, on développe f et $c = s - b$ en séries de Fourier

$$c(\varphi, \omega, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\omega, \eta) \exp(ik\varphi)\,, \quad f(\varphi, \omega, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega, \eta) \exp(ik\varphi)\,,$$

avec $c_0 = 0$. On fixe $f_0 = 0$. Pour tout $k \neq 0$ et $\omega \in \Theta$, on trouve

$$f_k(\omega, \eta)(1 - e^{-i\omega k}) = -c_k(\omega, \eta).$$

Fixons $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 0$ pour $|x| \geq \kappa/2$, et $\psi(x) = 1$ pour $|x| \leq \kappa/4$, $0 < \kappa = \mu a^\nu \ll 1$ étant la petite constante dans (3.11). On définit le résidu $[z]_{2\pi}$ de $z \in \mathbb{R}$ par $z = [z]_{2\pi} + 2\pi n\,,\ -\pi < [z]_{2\pi} \leq \pi\,,\ n \in \mathbb{Z}$, et pour $0 \neq k \in \mathbb{Z}$, on considère

$$z_k(\omega) = 1 - e^{-i\omega k} + \ \kappa |k|^{-\tau}\, \psi\left(|k|^\tau [\omega k]_{2\pi}\right)\,.$$

On voit facilement que

$$|z_k(\omega)| \ \geq \ \frac{\kappa_0}{|k|^\tau}\,, \quad \omega \in \Omega,\ k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\,,$$

où $\kappa_0 = \kappa/2\pi$. En fait, quand on écrit

$$z_k(\omega) = 1 - \cos\left([\omega k]_{2\pi}\right) + \ \kappa |k|^{-\tau}\, \psi\left(|k|^\tau [\omega, k]_{2\pi}\right) + i \sin\left([\omega k]_{2\pi}\right)\,,$$

en minorant $\operatorname{Re} z_k(\omega)$ (respectivement $|\operatorname{Im} z_k(\omega)|$) quand $|[\omega k]_{2\pi}|$ appartient à la réunion $[0, \kappa|k|^{-\tau}/4] \cup [\pi/2, \pi]$ (respectivement à l'intervalle $[\kappa|k|^{-\tau}/4, \pi/2]$), on obtient l'estimation.

Posons maintenant

$$f_k(\omega, \eta) \ = \ -z_k(\omega)^{-1}\, c_k(\omega, \eta), \quad \omega \in \Omega,\ 0 \neq k \in \mathbb{Z}\,, \quad j \geq 1\,.$$

f est bien la fonction recherchée car $z_k(\omega) = 1 - \exp(-i\omega k)$ sur Θ. En utilisant le théorème de Cauchy, on prouve que f est analytique en η si c est analytique.

De cette façon, on trouve, asymptotiquement, que

$$S(Y, \eta, \lambda) = -K'(Y) + \left(\pi\mu/2 - K(Y)\eta + s_0(Y, \eta)\right) \lambda^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(Y, \eta) \lambda^{-j-1}\,,$$

où $s_0(Y, \eta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p_0(\varphi, Y) d\varphi.$

3.4.2 *Résolution de (3.12).*

Nous allons chercher des valeurs de ζ et λ vérifiant (3.14) et telles que

$$Z(Y,\zeta,\lambda) = 1. \tag{3.18}$$

Comme dans [5], on pose

$$\lambda_\nu^0 = K(Y_\nu)^{-1}q \ , \quad Y_\nu = I(\omega_\nu) \in E \, , \quad \nu = (p,q) \in \mathcal{M} \, ,$$

où l'ensemble d'indices $\mathcal{M}$ est défini par

$$\mathcal{M} \ = \ \{\nu = (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ |\lambda(Y_\nu, K(Y_\nu)) - (p,q)| \leq C \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \, , \ Y_\nu \in E\} \, ,$$

avec $C \gg 1$ fixée.

Nous cherchons d'abord des ζ_ν et λ_ν, $\nu \in \mathcal{M}$, donnés asyptotiquement, quand $q \to +\infty$, par

$$\zeta_\nu = Y_\nu + \frac{\eta_\nu}{\lambda_\nu}, \quad \eta_\nu = c_0(w_\nu) + c_1(w_\nu)(\lambda_\nu^0)^{-1} + \dots \tag{3.19}$$

$$\lambda_\nu = \lambda_\nu^0 + a_0(w_\nu) + a_1(w_\nu)(\lambda_\nu^0)^{-1} + \dots \tag{3.20}$$

et telles que

$$p = \lambda_\nu \zeta_\nu \tag{3.21}$$

et

$$\begin{aligned} & -\lambda_\nu K(Y_\nu) - K'(Y_\nu)\eta_\nu - \frac{\pi\mu_2}{2} + s_0(Y_\nu) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(Y_\nu, \eta_\nu)\lambda_\nu^{-j} = 2\pi q + O_N(q^{-N}), \ q \to +\infty. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Proposition 3.4.2 *Il existe des fonctions bornées $a_j : \Theta \to \mathbb{R}$ et $c_j : \Theta \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots$, et des fonctions λ_ν, ζ_ν, $\nu \in \mathcal{M}$, données asymptotiquement par (3.19) et (3.20), telles que (3.21) et (3.23) soient vérifiées.*

Preuve : On suit ici la preuve de [5].

Si nous remplaçons λ_ν, ζ_ν et η_ν par leurs valeurs données dans (3.19) et (3.20) dans les expressions (3.21) et (3.23), et si nous utilisons ensuite, à la fois la formule de Taylor et l'égalité $\vartheta_2(w_\nu) = -K(Y_\nu)$, nous trouvons

$$\begin{cases} p - \lambda_\nu^0 Y_\nu - \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_j(Y_\nu)Y_\nu + c_j(Y_\nu) - V_j\right)(\lambda_\nu^0)^{-j} = O_N\left((\lambda_\nu^0)^{-N}\right) \, , \\ \sum_{j=0}^{\infty} \left(K(Y_\nu)a_j(Y_\nu) + K'(Y_\nu)c_j(Y_\nu) - W_j\right)(\lambda_\nu^0)^{-j} = O_N\left((\lambda_\nu^0)^{-N}\right) \, , \end{cases}$$

où V_j et W_j sont des polynômes de a_ℓ et c_ℓ, $\ell \leq j-1$. Pour $j = 0$ on a

$$V_0(Y) = -\pi\mu/2 + s_0(Y), \ W_0 = -p + \lambda_\nu^0 Y_\nu \, .$$

On obtient le système

$$\begin{cases} K(Y_\nu)a_0(Y_\nu) + K'(Y_\nu)c_0(Y_\nu) = W_0, \\ \qquad\qquad Y_\nu a_0(Y_\nu) + c_0(Y_\nu) = V_0 \, . \end{cases}$$

Notons que $K'(Y_\nu) = \omega_\nu$. Soit $g_0 =\in \Lambda_{\omega_\nu} = \chi(\mathbb{T} \times \{Y_\nu\}$ et $g_j = B^j g_0 \in \Lambda_{\omega_\nu}$. Notons $A(x,\xi)$, $(x,\xi) \in \Lambda_{\omega_\nu}$ la distance $|x-y|_g$ dans X, où $B(x,\xi) = (y,\eta)$. En utilisant la formule(4.8) dans [21] et le théorème ergodique on montre

$$K'(Y_\nu)Y_\nu - K(Y_\nu) = \omega_\nu Y_\nu - K(Y_\nu)$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\sum_{j=0} kA(g_j)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda_\omega} A(g)dg > C > 0\,,$$

où dg est la mesure de Liouville sur $\Lambda_{\omega_\nu} \subset T^*\Gamma$ et $C > 0$ est indépendante de ν. On obtient

$$a_0(Y_\nu) = (K'(Y_\nu)Y_\nu - K(Y_\nu))^{-1}(V_0 - K'(Y_\nu)W_0)$$

$$c_0(Y_\nu) = V_0 - a_0(Y_\nu)Y_\nu.$$

Les fonctions $a_0 : E \to \mathbb{R}$ et $c_0 : E \to \mathbb{R}$ sont bornées mais pas continues. De même, pour $j \geq 1$ on résout le système

$$\begin{cases} K(Y_\nu)a_j(Y_\nu) + K'(Y_\nu)c_j(Y_\nu) = W_j \\ \qquad\qquad Y_\nu a_0(Y_\nu) + c_0(Y_\nu) = V_j\,. \end{cases}$$

3.5 *Normalisation et relations d'orthogonalité*

3.5.1 *Normalisation*

Considérons la suite

$$u_\nu = (u_{1\nu}, u_{2\nu}) := (H(\lambda_\nu)U(\lambda_\nu)g_\nu, R_e(\lambda_\nu)f_\nu)\ ,$$

où

$$f_\nu = U(\lambda_\nu)g_\nu + G(\lambda_\nu)U(\lambda_\nu)g_\nu\ , \quad g_\nu(\varphi) = e(\varphi, Y_\nu, \zeta_\nu, \lambda_\nu)\ , \quad \nu \in \mathcal{M}.$$

Lemme 3.5.1 *Il existe une constante $C > 1$ telle que*

$$C^{-1} \leq \|u_\nu\|_H \leq C$$

pour tout $\nu \in \mathcal{M}$.

Preuve : Posons $v_\nu = U(\lambda_\nu)g_\nu$.

L'opérateur $U(\lambda)$ est un λ-OIF classique d'ordre 0 dont la relation canonique est le graphe d'une transformation canonique et qui est elliptique dans un voisinage de l'ensemble fréquentiel de $\{g_\nu : \nu = (p,q) \in \mathcal{M}\}$. Alors, il existe un $C > 1$ tel que

$$\forall \nu \in \mathcal{M}\,, \quad C^{-1} \ \leq\ \|v_\nu\|_{L^2(\Gamma)}\ \leq C\,.$$

Considérons maintenant $u_{1\nu} = H(\lambda_\nu)v_\nu$. Comme $H(\lambda) : L^2(\Gamma) \to L^2(X)$ est une famille uniformément bornée d'opérateurs, nous obtenons que $\|u_{1\nu}\| \leq C$ pour un certain $C > 0$ et pour tout $\nu \in \mathcal{M}$. Par le même argument, $\|u_{2\nu}\| \leq C$.

Nous allons ensuite montrer que la suite $\|v_{1\nu}\|$ est minorée par une constante positive. Nous introduisons des "coordonnées normales $(x_1, x_2) \in \Gamma \times [0,\varepsilon]$, $0 < \varepsilon \ll$

1, à l'aide de l'application exponentielle $(x_1, x_2) \to \exp(x_2\nu(x_1))(x_1)$ correspondant à la métrique g et nous posons $U = \Gamma \times [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, où $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$.

Nous pouvons ainsi écrire $H(\lambda)$ dans un voisinage de U comme une famille continue de λ-OIFs $H(t,\lambda) : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$. La relation canonique de $H(t,\lambda)$ est le graphe d'une transformation canonique

$$\{\varrho; \pi_t \exp(s(\varrho,t)X_g)(\pi_0^+(\varrho)) \, : \varrho \in \Sigma_1\}$$

pour $0 < \varepsilon_1 \leq t \leq \varepsilon \ll 1$, où $\pi_t : T^*X|_{\Gamma_t} \to T^*\Gamma_t$, $\Gamma_t = \Gamma \times \{t\}$, est l'application de restriction, et la fonction lisse $s(\varrho,t)$ est obtenue, à partir de l'équation $\exp(s(\varrho,t)X_h)(\pi_\Sigma^+(\varrho)) \in T^*X|_{\Gamma_t}$, en utilisant le théorème des fonctions implicites. C'est simplement l'application représentant le temps que met la particule, partant de $\pi_0^+(\varrho) \in T^*X|_\Gamma$, pour arriver à $T^*X|_{\Gamma_t}$ en suivant la trajectoire correspondante de l'Hamiltonien X_g.

De plus, son symbole principal est égal à 1 dans un voisinage de Λ. En effet, près du bord, on peut écrire $H_j(\lambda)$ dans les coordonnées locales $x = (x_1, x_2)$, $t = x_2$, comme une intégrale oscillante dont la phase $\phi(x,\xi) + y_1\xi$, avec $\phi(x_1, 0, \xi) = x_1\xi$, est lisse et non dégénérée, et avec une amplitude C^∞ à support compact

$$a(x,\xi,\lambda)|\det(\partial^2\phi/\partial x_1\partial\xi(x,\xi)|^{-1/2}$$

d'ordre 0, $a(x,\xi,\lambda) = a_0(x,\xi) + \lambda^{-1}a_1(x,\xi) + \cdots$, et $a_0 = 1$ dans un voisinage de Σ_1. Cela entraîne

$$\|H(\lambda_\nu)v_\nu\|^2_{L^2(U)} \geq \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \|H(t,\lambda_\nu)v_\nu\|^2_{L^2(\Gamma)}\, dt - O(|\lambda_\nu|^{-1})\|v_q\|_{L^2(\Gamma)} \geq c\|v_\nu\|_{L^2(\Gamma)}$$

pour un $c > 0$ et pour tout $q \in \mathcal{M}$, ce qui termine la preuve du lemme. □

Pour satisfaire aux conditions au bord de (3.1), nous ajoutons à $u_{2\nu}$ une fonction à support compacte qui est un $O_N(|\lambda_\nu|^{-N})$. Alors, u_ν appartient au domaine de définition de G. En normalisant u_ν, on obtient un quasimode (λ_ν, u_ν), $\nu \in \mathcal{M}$, de G.

Nous montrons ensuite que λ_q peut être choisi à valeurs réelles. Comme G est auto-adjoint et que $u_\nu \in D(G)$, $\|u_\nu\| = 1$, nous trouvons

$$|\lambda_\nu^2 - \overline{\lambda_\nu}^2| \;=\; |\langle\lambda_\nu^2 u_\nu, u_\nu\rangle \,-\, \langle u_\nu, \lambda_\nu^2 u_\nu\rangle| \;=\; O_N(|\lambda_\nu|^{-N})\,,$$

ce qui nous permet de choisir λ_ν dans $\mathbb{R}$. La relation $p = \lambda_\nu\zeta_\nu$ implique enfin $\operatorname{Im}\zeta_\nu = 0$.

3.5.2 *Relations d'orthogonalité*

Considérons tout d'abord la fonction de comptage

$$\mathcal{N}(r) := \#\{\nu = (p,q) \in \mathcal{M} : |\nu| \leq r\}\,.$$

Dans [5], Cardoso et Popov ont donné les asymptotiques suivantes :

$$\mathcal{N}(r) = (4\pi)^{-1}r^2 \int_E (IK'(I) - K(I))dI + o(r^2) = (8\pi)^{-1}r^2\text{meas}(\mathcal{T}) + o(r^2), \quad (3.23)$$

avec $\mathcal{T}$ le flot sortant de la réunion Λ de la famille de cercles invariants Λ_ω, $\omega \in \Theta$, par le flot de X_g de X, et 'meas' la mesure de Liouville dans le fibré cosphère $\{g = 1\}$.

Fixons $N \gg 1$ et considérons le quasimode (λ_ν, u_ν), $\nu \in \mathcal{M}$, d'ordre $2N + 2$, de l'opérateur P construit précédemment, c'est-à-dire tel que $Pu_\nu = \lambda_\nu^2 u_\nu + O_N(|\lambda_\nu|^{-2N-2})$.

Nous allons montrer les relations d'orthogonalité

$$|\langle u_\nu, u_\mu\rangle| \leq C(|\lambda_\nu| + |\lambda_\mu|)^{-N} \ , \quad \nu, \mu \in \mathcal{M}.$$

Comme dans [15] et [5], nous considérons trois cas.

Cas 1. Supposons que $\lambda_\nu^{-N-2} \leq |\lambda_\nu - \lambda_\mu| \leq 2\lambda_\nu$. Nous avons alors

$$\lambda_\nu^{-N-1}|\langle u_\nu, u_\mu\rangle| \leq |\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2||\langle u_\nu, u_\mu\rangle| = |\langle \lambda_\nu^2 u_\nu, u_\mu\rangle - \langle u_\nu, \lambda_\mu^2 u_\mu\rangle| \leq C(|\lambda_\nu| + |\lambda_\mu|)^{-2N-2}.$$

Par conséquent,

$$|\langle u_\nu, u_\mu\rangle| \leq C(|\lambda_\nu| + |\lambda_\mu|)^{-N-1}.$$

Cas 2 . Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et supposons que $|\lambda_\nu - \lambda_\mu| \leq \lambda_\nu^{-N-2}$ et que $|Y_\nu - Y_\mu| \geq \lambda_\nu^{-\varepsilon}$. Nous allons intégrer par parties dans les intégrales oscillantes correspondantes. D'abord, nous écrivons $H(\lambda)$ comme une famille continue de λ-OIFs comme dans la preuve du Lemme 4.1. Fixons

$$0 < \varepsilon_0 < \inf\{T(\varrho) : \ \varrho \in \Sigma_1\},$$

où $T(\varrho)$ est le premier temps positif d'intersection de la géodésique de g, issue de ϱ, avec Γ. Nous prenons maintenant une partition de l'unité $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$ de X telle que $\operatorname{supp}\phi_1 \subset \mathbb{T} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ et $\phi_1 = 1$ dans un voisinage de $x_1 = 0$. Nous pouvons maintenant écrire $\phi_1 H(\lambda)$ comme une somme de deux familles continues de λ-OIFs sur Γ

$$\phi_1(t,\cdot)H^+(\lambda, t) + \phi_1(t,\cdot)H^-(\lambda, t), \quad t \in [0, \epsilon_0].$$

Ici, la relation canonique de $H^+(t, \lambda)$ est le graphe de la transformation canonique

$$\{\varrho; \pi_t \exp(s(\varrho, t)X_g)(\pi_0^+(\varrho)) \ : \varrho \in \Sigma_1\}$$

pour $0 \leq t \leq \varepsilon_0$, où $\pi_t : T^*X|_{\Gamma_t} \to T^*\Gamma_t$, $\Gamma_t = \Gamma \times \{t\}$, est l'applivation de restriction, et la fonction lisse $s(\varrho, t)$ est obtenue à partir de l'équation $\exp(s(\varrho, t)X_h)(\pi_\Sigma^+(\varrho)) \in T^*X|_{\Gamma_t}$.

De plus, la relation canonique de $H^-(t, \lambda)$ est le graphe de la transformation canonique

$$\{\varrho; \pi_t \exp(s(\varrho, t)X_g)(\pi_0^-(B(\varrho))) \ : \varrho \in \Sigma_1\}.$$

Nous écrivons $\phi_2 H(\lambda)$ comme une famille continue de λ-OIFs sur Γ comme dans le Lemme 4.1.

Remarquons que, pour ε assez petit, les relations canoniques de $H^+(\lambda, t)$ et $H^-(\lambda, t)$ ne s'intersectent pas, ce qui implique

$$\langle \phi_1 H^+(\lambda, t)f, \phi_1 H^-(\lambda, t)f\rangle = O_N(\lambda^{-N})\|f\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Comme $|\lambda_\nu - \lambda_\mu| \le \lambda_\nu^{-N-2}$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle u_\nu, u_\mu\rangle_{L^2(X)} &= \textstyle\sum_{j=\pm}\int_0^{\varepsilon_0}\langle \phi_1 H^\pm(\lambda_\nu,t)U(\lambda_\nu)g_\nu, \phi_1 H^\pm(\lambda_\nu,t)U(\lambda_\nu)g_\mu\rangle dt\\ &+ \textstyle\int_{\mathbb{R}}\langle(\phi_2 H(\lambda_\nu,t)U(\lambda_\nu)g_\nu, \phi_2 H(\lambda_\nu,t)U(\lambda_\nu)g_\mu\rangle dt + O_N(\lambda_\nu^{-N}).\end{aligned}$$

Désormais, chaque intégrale peut s'écrire sous la forme

$$G_{\nu,\mu} = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle A(\lambda_\nu,t)g_\nu, g_\mu\rangle dt,$$

avec $A(\lambda_\nu,t)$ une famille continue de λ-OPDs d'ordre 0 sur $\mathbb{T}$ ayant des symboles classiques $a(t,x_1,\eta,\lambda)$ uniformément à supports compacts par rapport à (t,η). Nous avons

$$G_{\nu,\mu} = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda_\nu[((x_1-y)\eta + x_1\zeta_\nu - y\zeta_\mu])a(t,x_1,\eta,\lambda_\nu)b_\nu(x_1)b_\mu(y)d\eta dx_1 dy dt + O_N(\lambda_\nu^{-N}),$$

avec $b_\nu(\varphi) = \exp(i\sum_{j=0}^N f_j(\varphi, Y_\nu, \eta_\nu)\lambda_\nu^{-j})$. Comme $|\zeta_\nu - \zeta_\mu| = |Y_\nu - Y_\mu| + O(\lambda_\nu^{-1}) \ge c\lambda_\nu^{-\varepsilon}$ et $0 < \varepsilon < 1$, par une intégration par parties on gagne $O_N(\lambda_\nu^{-N})$.

Cas 3. Supposons enfin que $|\lambda_\nu - \lambda_\mu| \le \lambda_\nu^{-N-2}$ and $|Y_\nu - Y_\mu| \le \lambda_\nu^{-\varepsilon}$. Comme dans [15] et [5], il faut ajouter une petite perturbation auto-adjointe de P, d'ordre $O_N(\lambda_\nu^{-N-1})$, afin de séparer λ_ν et λ_μ.

Considérons le problème de transmission

$$\begin{cases} (\Delta_g + \lambda^2)u_1 &= 0 \qquad \text{dans } \mathcal{O},\\ (\Delta_h + \lambda_\nu^{-N-1}\Psi(\lambda_\nu) + \lambda^2)u_2 &= 0 \qquad \text{dans } \Omega,\\ u_1 - u_2 &= 0 \qquad \text{sur } \Gamma,\\ \partial_{\nu'}u_1 + \alpha\partial_\nu u_2 &= 0 \qquad \text{sur } \Gamma,\\ u_2 &- \quad \lambda - \text{sortante}\ . \end{cases}$$

Ici, $\Psi(\lambda)$ est un λ-OPD auto-adjoint, d'ordre 0, dans Ω, tel que dans les coordonnées normales $(x_1,x_2) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}$, son symbole est donné par $\psi(x_1,\eta,\lambda)\kappa(x_2)$, où ψ est uniformément à support compact par rapport à η et $\kappa \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est égal à 1 dans un petit voisinage de $x_2 = 0$. En d'autres termes, $\Psi(\lambda) = \mathrm{OP}_\lambda(\psi)\kappa$, où $\mathrm{OP}_\lambda(\psi)$ est le λ-OPD classique sur $\mathbb{T}$ de symbole ψ. Il est alors facile de voir que l'opérateur de transmission perturbé, $\widetilde{P}$, est auto-adjoint dans H.

Considérons maintenantla paramétrix microlocale correspondante, $\widetilde{R}_e(\lambda) : L^2(\Gamma) \to C_0^\infty(\overline{\Omega})$, du problème de Dirichlet extérieur

$$\begin{cases} (\Delta_h - \lambda_\nu^{-N-1}\Psi(\lambda_\nu) + \lambda^2)\widetilde{R}_e(\lambda)g = O_N(\lambda^{-2N-2})g\\ \widetilde{R}_e(\lambda)g|_\Gamma = \mathrm{OP}_\lambda(a)g + O_N(\lambda^{-2N-2})g\,,\ g \in L^2(\Gamma)\,. \end{cases}$$

Nous avons $\widetilde{R}_e(\lambda) = R_e(\lambda) + \lambda^{-N}R(\lambda)$ pour $|\lambda - \lambda_\nu| \le C'\lambda_\nu^{-N}$, avec $R(\lambda)$ un λ-OIF de phase $\phi(x,\eta) - y\eta$ donnée par la Proposition 1.1, et de symbole principal r vérifiant l'équation de transport

$$2i\mathcal{L}r(x,\eta) = \psi_0(x_1,\eta) + O_N(x_2^{2N+2}),$$

avec les données initiales $r(x_1, 0, \eta) = 0$. Rappelons que $\mathfrak{L} = f_1\partial_{x_1} + f_2\partial_{x_2} + f_3$, $f_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}h_0$, $f_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2}$, et que f_3 est une fonction à valeurs réelles. De plus, $f_2 = i\sqrt{r_0(x_1,\eta) - 1} + O(x_2)$. Par conséquent,

$$r(x, \eta) = x_2 \frac{\psi_0(x_1, \eta)}{2\sqrt{r_0(x_1, \eta) - 1}} + O(x_2^2).$$

Ainsi, l'application de Dirichlet-to-Neumann correspondante est un λ-OPD sur $\mathbb{T}$ donné par

$$\lambda\widetilde{A}(\lambda) := \frac{\partial}{\partial x_2}\widetilde{R}_e(\lambda)|_{x_2=0} = \lambda\widetilde{A}(\lambda) + \lambda^{1-N}A'(\lambda)$$

où le symbole principal de $A'(\lambda)$ est

$$a_0(x_1, \eta) = \frac{\psi_0(x_1, \eta)}{2\sqrt{r_0(x_1, \eta) - 1}}.$$

Alors, $u_1 = H(\lambda)g$ et $u_2 = \widetilde{R}_e(\lambda)f$ sont solutions des équations de Helmholtz correspondantes modulo $O_N(|\lambda|^{-2N-1})$. Au bord, nous avons

$$(u_1 - u_2)|_\Gamma = g + G(\lambda)g - f + O_N(|\lambda|^{-2N-2})g = O_N(|\lambda|^{-2N-2})g.$$

ce qui implique, comme précédement, que

$$f = g + G(\lambda)g + O_N(|\lambda|^{-2N-2})g.$$

La seconde condition au bord donne

$$\begin{aligned} &(\partial_{\nu'}u_1 + \partial_\nu u_2)|_\Gamma \\ &= \lambda G^+(\lambda)\, g + \lambda G^-(\lambda)\, G(\lambda)g - \lambda\widetilde{A}(\lambda)f + O_N(|\lambda|^{-2N-1})g = O_N(|\lambda|^{-2N-1})g, \end{aligned}$$

et on obtient

$$\widetilde{A}(\lambda)(g + G(\lambda)g) = G^+(\lambda)g + G^-(\lambda)G(\lambda)g + O_N(|\lambda|^{-N})g.$$

De cette façon, on trouve l'équation suivante par rapport à (λ, g)

$$\widetilde{B}(\lambda)M(\lambda)g - g = O_N(|\lambda|^{-N})g,$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(\lambda) &:= -(A(\lambda) + \lambda^{-N}A'(\lambda) - G^+(\lambda))^{-1}(A(\lambda) + \lambda^{-N}A'(\lambda) - G^-(\lambda)) \\ &= B(\lambda) - \lambda^{-N}[A'(\lambda)(A(\lambda) - G^+(\lambda))^{-1}B(\lambda) - B(\lambda)(A(\lambda) - G^-(\lambda))^{-1}A'(\Lambda)] + O_N(|\lambda|^{-2N}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\widetilde{B}(\lambda) = B(\lambda)(1 + \lambda^{-N}B'(\lambda)) + O_N(|\lambda|^{-N-1}),$$

où $B'(\lambda)$ est un λ-OPD classsique d'ordre 0 dont le symbole principal est

$$b_0'(y, \eta) = i\frac{\psi_0(y, \eta)}{r(y, \eta) - r_0(y, \eta)} \frac{\sqrt{1 - r(y, \eta)}}{\sqrt{r_0(y, \eta) - 1}}. \tag{3.24}$$

On obtient par conséquent l'équation

$$\widetilde{M}_0(\widetilde{\lambda}_j)\widetilde{g}_j = \widetilde{g}_j + O_N(\lambda_j)\widetilde{g}_j,$$

où le symbole de $\widetilde{M}_0$ est

$$\widetilde{m}(\varphi, I, \lambda) = \exp(i[p(\varphi, I, \lambda) + \lambda^{-N}\beta(\varphi, I) + O(\lambda^{-N-1})])\kappa(\varphi, I, \lambda),$$

et $\beta = b_0' \circ \chi$. En choisissant de manière appropriée la fonction lisse à valeurs réelles ψ_0, on peut supposer que $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ne dépend que de I. On note alors

$$\widetilde{Z}(Y, \zeta, \lambda) = \exp(i\lambda\widetilde{S}(Y, \zeta, \lambda))$$

et

$$\widetilde{e}(\varphi, Y, \zeta, \lambda) = \exp(i\lambda\widetilde{f}(\varphi, Y, \zeta, \lambda))$$

les valeurs et fonctions propres correspondantes, avec

$$\widetilde{S}(Y, \zeta, \lambda) = S(Y, \zeta, \lambda) + \lambda^{-N}s_0'(Y, \zeta) + \lambda^{-N-1}s_1'(Y, \zeta) + O(\lambda^{-N-2}),$$

$$\widetilde{f}(\varphi, Y, \zeta, \lambda) = f(\varphi, Y, \zeta, \lambda) + \lambda^{-N-1}f_1'(\varphi, Y, \zeta) + O(\lambda^{-N-2}).$$

On a

$$s_0'(Y, \zeta) = \beta(Y),$$

et (3.18) implique

$$\widetilde{r}_{N+1}(\varphi, Y, \zeta) = r_{N+1}(\varphi, Y, \zeta) + \eta(d\beta/dY)(Y) + \beta_1(Y),$$

β_1 étant une fonction lisse. Par conséquent,

$$s_1'(Y, \zeta) = \eta(d\beta/dY)(Y) + \gamma(Y),$$

où γ est lisse.

On utilise maintenant la même procédure que dans la section 4 de [5]. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}$ tel que $|\lambda_\mu - \lambda_\nu| \leq C'\lambda_\nu^{-N}$, on trouve

$$\widetilde{\lambda}_\mu = \lambda_\mu + (\lambda_\mu^0)^{-N}d_0(Y_\mu) + (\lambda_\mu^0)^{-N-1}d_1(Y_\mu) + O((\lambda_\mu^0)^{-N-2})),$$

$$\widetilde{\zeta}_\mu = \zeta_\mu + (\lambda_\mu^0)^{-N}e_0(Y_\mu) + (\lambda_\mu^0)^{-N-1}e_1(Y_\mu) + O((\lambda_\mu^0)^{-N-2})),$$

où $d_j(Y_\mu)$ et $e_j(Y_\mu)$, $j = 0, 1$, sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d_0(Y_\mu) & = & (K(Y_\mu) - Y\mu K'(Y_\mu)^{-1}\beta(Y_\mu), \\ e_0(Y_\mu) & = & -Y_\mu(K(Y_\mu) - Y\mu K'(Y_\mu)^{-1}\beta(Y_\mu). \end{array} \right. \tag{3.25}$$

De plus, $d_1(Y_\mu)$ et $e_1(Y_\mu)$ vérifient

$$\left\{ \begin{array}{r} K(Y_\mu)d_1(Y_\mu) + K'(Y_\mu)e_1(Y_\mu) = W(Y_\mu), \\ Y_\mu d_1(Y_\mu) + e_1(Y_\mu) = -c_0(Y_\mu)d_0(Y_\mu), \end{array} \right. \tag{3.26}$$

avec

$$W(Y_\mu) = c_0(Y_\mu)\beta'(Y_\mu) + \gamma(Y_\mu) + (\partial s_1/\partial_\eta)(Y_\mu, c_0(Y_\mu))d_0(Y_\mu).$$

Par conséquent,

$$d_1(Y_\mu) = (K(Y_\mu) - Y_\mu K'(Y_\mu))^{-1} c_0(Y_\mu)\beta'(Y_\mu) + q_1(Y_\mu)\beta(Y_\mu) + q(Y_\mu),$$

où q est lisse et q_1 bornée. Nous rappelons que $\zeta_\mu = Y_\mu + (\lambda_\mu^0)^{-1} c_0(Y_\mu) + O((\lambda_\mu^0)^{-2})$. Alors,

$$\begin{aligned} D(Y_\mu) &:= d_0(Y_\mu) + (\lambda_\mu^0)^{-1} d_1(Y_\mu) \\ &= (K(Y_\mu) - Y_\mu K'(Y_\mu))^{-1}\beta(\zeta_\mu) + (\lambda_\mu^0)^{-1}(q_1(Y_\mu)\beta(Y_\mu) + q(Y_\mu)) + O((\lambda_\mu^0)^{-2}), \end{aligned}$$

avec, encore une fois, q lisse et q_1 bornée.

Nous choisissons maintenant $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(0) = R \gg 1$, et nous posons $\beta(Y) = \alpha(Y - Y_\nu)$. Alors, en utilisant les inégalités $|\lambda_\nu - \lambda_\mu| \leq \lambda_\nu^{-N-2}$, on trouve

$$|D(Y_\mu) - D(Y_\nu)| \geq (R - C)|Y_\nu - Y_\mu| - C_1(R)(|Y_\nu - Y_\mu|\lambda_\nu^{-1} + \lambda_\nu^{-2}),$$

où $C > 0$ ne dépend que de K et E, et $C_1(R)$ ne dépend pas de ν et μ. A l'aide des inégalités $C\lambda_\nu^{-1} \leq |Y_\nu - Y_\mu| \leq \lambda_\nu^{-\varepsilon}$ on trouve ensuite

$$|\widetilde{\lambda}_\nu - \widetilde{\lambda}_\mu| \geq \lambda_\nu^{-N}|D(Y_\mu) - D(Y_\nu)| - C\lambda_\nu^{-N-2} \geq C_1\lambda_\nu^{-N-1} - C_2\lambda_\nu^{-N-1-\varepsilon},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives independantes de ν et μ. De plus, par construction, on a $|\widetilde{u}_\mu - u_\mu| \leq C\lambda_\mu^{-N}$. Nous pouvons maintenant appliquer le Cas 1 pour trouver

$$|\langle u_\nu, u_\mu\rangle| \leq |\langle \widetilde{u}_\nu, \widetilde{u}_\mu\rangle| + O(\lambda_\nu^{-N}) \leq C\lambda_\nu^{-N},$$

ce qui termine la preuve des relations d'orthogonalité dans ce cas.

Soit E_ν le projecteur spectral de G sur l'intervalle $[\lambda_\nu^2 - 1, \lambda_\nu^2 + 1]$. Le théorème spectral implique

$$\|E_\nu u_\nu - u_\nu\| \leq C\lambda_\nu^{-2N-2}.$$

Alors, on peut remplacer u_ν par $E_\nu u_\nu$ et on obtient

$$\langle u_\nu, u_\mu\rangle = 0$$

si $|\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2| \geq 2$, ce qui termine la preuve des relations d'orthogonalité. $\square$

Chapitre 4

Estimations de la résolvante pour le problème de Dirichlet de l'élasticité linéaire à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe

4.1 *Introduction et notations*

Soit $\mathcal{O}$ un obstacle compact, strictement convexe de $\mathbb{R}^3$, dont le bord Γ est analytique (lisse) et pour lequel on désigne par Ω son complémentaire $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$. ν désigne la normale unitaire extérieure à $\Gamma = \partial\mathcal{O}$.

On considère l'opérateur de l'élasticité linéaire, que l'on notera Δ_e. C'est un opérateur différentiel matriciel à trois lignes et trois colonnes, défini par la formule suivante :

$$\Delta_e v = \mu_0 \Delta v + (\lambda_0 + \mu_0) \nabla (\nabla . v) , \tag{4.1}$$

où v désigne un vecteur de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$.

Les quantités λ_0 et μ_0 désignent les constantes de Lamé, dont on suppose qu'elles vérifient les conditions suivantes :

$$\mu_0 \geq 0, \qquad 3\lambda_0 + 2\mu_0 \geq 0. \tag{4.2}$$

L'opérateur d'élasticité $-\Delta_e$, agissant sur l'ensemble des fonctions à support compact $v \in C_0^\infty \left(\overline{\Omega}; \mathbb{C}^3\right)$ telles que (4.6) est vérifié, admet un prolongement en un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$. Cet opérateur est positif et n'a pas de spectre ponctuel. Dans ce cas, sa résolvante tronquée par une fonction $\chi \in C_0^\infty$ égale à 1 près du bord Γ, notée $R_\chi(\lambda) = \chi \left(-\Delta_e - \lambda^2\right)^{-1} \chi$, admet un prolongement méromorphe du demi-plan $\{\Im\lambda \leq 0\} \subset \mathbb{C}$ au plan complexe tout entier, ses seuls pôles pouvant se trouver dans le demi-plan $\{\Im\lambda \geq 0\}$ étant les résonances.

On peut également définir les résonances du problème d'élasticité linéaire comme les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que le problème suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} (\Delta_e + \lambda^2)\, u = 0 &\quad \text{dans } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0 &\quad \text{sur } \Gamma, \\ u \text{ est } \lambda - \text{sortante.} & \end{aligned} \right. \tag{4.3}$$

admet une solution non triviale. Le terme λ-sortante a été défini dans les chapitres précédents.

De nombreux travaux sur des problèmes tels que la diffusion ou la transmission des ondes portent sur la distribution des résonances dans ce demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire positive. Ils tournent autour de deux recherches : d'une part, la mise en évidence de résonances de parties réelles très petites, apportant donc les contributions les plus significatives aux développements asymptotiques approchés des solutions de ces équations d'ondes ; d'autre part, la détermination d'un secteur du plan, situé sous une certaine courbe, ne contenant aucune résonance, ce qui permet de négliger les contributions apportées par les fonctions associées à ces résonances.

Dans le cas du problème de transmission, traité par Cardoso, Popov et Vodev, il est démontré qu'il existe un secteur situé sous une cubique tel qu'il n'existe pas de résonances dont la partie imaginaire soit plus grande qu'une certaine constante. Nous adapterons leurs méthodes, faisant intervenir le *complex scaling* à la manière de Sjöstrand et Zworski [25], ainsi que des estimations de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann associé au problème, pour améliorer un résultat de Vainberg, établissant l'existence d'un secteur sans résonances en dessous d'une courbe logarithmique, ce qui aboutira à un théorème de distribution des résonances du problème d'élasticité en dehors d'un secteur du plan complexe situé sous une cubique.

Dans la section **3.3**, nous réduirons le problème en diagonalisant le problème matriciel, utilisant en cela une idée de Bellassoued [1]. La suite de l'analyse est dans les sections **3.4** à **3.6** où nous donnons une version détaillée de l'exposé de Cardoso, Popov et Vodev [7].

Dans la section **3.7**, nous montrons un résultat supplémentaire d'estimation de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann du problème, étape préalable à la démonstration de résultats plus précis sur la distribution des résonances pour le problème de transmission de l'élasticité.

Ces résultats sont l'objet de la section **3.9**, en appendice à ce chapitre, où nous exposons les premières étapes de ce travail en progrès.

Quant à la section **3.8**, elle récapitule des résultats sur des opérateurs pseudodifférentiels et intégraux de Fourier totalement caractéristiques, notamment des relations de commutation utiles dans la preuve des résultats principaux de ce chapitre.

4.2 *Théorèmes et esquisse de la preuve*

Absence de résonances sous une cubique. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant, qui identifie une zone sans résonances pour le problème de Dirichlet de l'élasticité linéaire.

Théorème 4.2.1 *Pour toute constante $C > 0$, il existe deux constantes C', C'' strictement positives telles que le domaine du plan complexe*

$$S = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}\, 0 < \Im\lambda < C|\lambda|^{1/3} - C', \quad |\Re\lambda| > C'' \right\} \tag{4.4}$$

ne contienne pas de résonances du problème de Dirichlet pour le système d'élasticité linéaire.

Nous obtenons également une description explicite de la constante C sous la forme :

$$C = \chi_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{a_0^{1/3} K_{min}^{-2/3}}{2^{1/3}}$$

où $-\chi_1 < 0$ désigne le premier zéro de la fonction de Airy Ai(z), K_{min} est le minimum d'une fonction liée à la description du bord Γ, et

$$a_0 = min\{\mu_0, \lambda_0 + 2\mu_0\}$$

Dans la démonstration que nous proposons du théorème, nous allons utiliser le principe de la distorsion analytique de J. Sjöstrand et M. Zworski [25]. Nous étudions l'analyticité de la résolvante de Dirichlet de l'opérateur déformé, auto-adjoint, afin de prouver qu'il n'a pas de valeurs propres, ce qui est associé à l'absence de résonances le long de l'axe correspondant du plan complexe pour l'opérateur initial.

Estimations de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann pour le problème de l'élasticité linéaire. Les conditions de Neumann sur le bord Γ de l'obstacle pour l'opérateur d'élasticité Δ_e sont de la forme

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(v)\nu_j|_\Gamma = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4.5}$$

Dans cette écriture apparaissent les *tenseurs de rigidité* σ_{ij}, pour $i, j = 1, 2, 3$, définis pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ par

$$\sigma_{ij}(v) = \lambda_0 \nabla.v\delta_{ij} + \mu_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \tag{4.6}$$

ν désigne la normale unitaire extérieure à $\Gamma = \partial\mathcal{O}$.

On définit l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur le bord Γ, pour tout nombre complexe λ par :

$$\mathcal{N}_e(\lambda)f := \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j=1}^{3} \Xi_j \left(K_e(\lambda)f\right) \nu_j|_\Gamma \tag{4.7}$$

Pour tous les $j = 1, 2, 3$, les opérateurs Ξ_j sont des opérateurs différentiels vectoriels définis par

$$H^s(\Omega) \ni \Xi_j(v) = \begin{pmatrix} \sigma_{1j}(v) \\ \sigma_{2j}(v) \\ \sigma_{3j}(v) \end{pmatrix} \quad \forall v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in H^{s+1}(\Omega) \tag{4.8}$$

Théorème 4.2.2 *Pour tout $\lambda \in \Upsilon_+$, nous avons*

$$\|\mathcal{N}_e(\lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq C \tag{4.9}$$

et

$$\Re\langle \mathcal{N}_e(\lambda) f, f\rangle \leq \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})\|f\|^2 \tag{4.10}$$

avec une constante $C > 0$ indépendante de λ.

La preuve de ce résultat repose, comme précédemment, sur le formalisme de la distorsion analytique, qui permet de comparer l'opérateur de Neumann non déformé avec son homologue déformé, puis sur l'utilisation d'un résultat de Cardoso, Popov et Vodev [7] sur l'estimation de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann quand le paramètre λ est réel.

Ces estimations sont un premier pas dans la direction d'un travail en progrès, dans lequel nous espérons démontrer un analogue du résultat de Cardoso, Popov et Vodev [7] pour le problème de transmission. Dans le cas de la transmission pour l'élasticité linéaire, nous pensons pouvoir démontrer que les résonances sont comprises dans un secteur compris sous une cubique (objet de notre premier théorème) et au-dessus d'une bande du plan complexe, c'est-à-dire :

"Les résonances du problème de transmission pour l'élasticité linéaire sont situées dans un secteur du plan complexe de la forme

$$\left\{C_1 \leq \Im\lambda \leq C_2|\lambda|^{1/3} - C_3;\ \Re\lambda \geq C_4\right\}$$

selon la valeur de la constante α dans la deuxième condition au bord du problème".

4.3 *Distorsion analytique*

Après avoir transformé le symbole dans un système de coordonnées géodésiques locales, nous réduisons le système de l'élasticité linéaire à l'aide de l'opérateur modèle, le Laplacien, puis nous utilisons le formalisme mis en place par J. Sjöstrand et M. Zworski [25] pour le scattering par des obstacles strictement convexes.

4.3.1 Coordonnées géodésiques locales

$\mathcal{O}$ étant un ouvert borné strictement convexe à bord lisse, nous pouvons dire que la fonction $d(x) := dist(x, \mathcal{O})$ est positive et de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$. De plus, c'est une fonction convexe, ce qui signifie également que le noyau $ker(d''_{xx}(x))$ est de dimension 1, engendré par le vecteur normal au bord de $\mathcal{O}$ passant par $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$. Nous remarquons également que, en tout point $z \in \partial\mathcal{O}$, la normale extérieure unitaire de $\partial\mathcal{O}$ en z est donnée par

$$\nu(z) = \nabla d(z). \tag{4.11}$$

Soit un point de $\Gamma = \partial\mathcal{O}$, noté z_0 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$; en nous plaçant au voisinage du bord de l'obstacle, nous allons considérer un système de coordonnées géodésiques locales $y := (y', y_3)$, où $y' = (y_1, y_2) \in \partial\mathcal{O}$ telles que le bord soit représenté localement comme l'hyperplan $\{y_3 = 0\}$.

On choisit ces coordonnées sur un voisinage de $\partial\mathcal{O}$ centré en z_0 de telle sorte qu'on ait un difféomorphisme

$$s : \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}[(0,0)] \longrightarrow \mathcal{V}_{\partial\mathcal{O}}(z_0). \tag{4.12}$$

On notera également que $s[(0,0)] = z_0$. Localement, les coordonnées géodésiques d'un secteur au voisinage de $\mathcal{O}$ dans $\overline{\Omega}$ sont donc (y', y_3), avec $y' \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}[(0,0)]$ et $y_3 \in [0, \delta)$, $\delta > 0$. Les points d'un tel secteur sont donnés par la formule suivante :

$$x = s(y') + y_3\nu(s(y')) = s(y') + y_3\nabla d(s(y')) = \tilde{s}(y). \tag{4.13}$$

Notre but étant de calculer les contributions à l'opérateur d'élasticité Δ_e en coordonnées locales, nous nous plaçons en un point de Ω

$$x_0 := s(0) + y_3\nu(s(0)) = z_0 + y_3\nu(z_0) \in \mathcal{V}_{\partial\mathcal{O}}(z_0) \times [0, \delta); \tag{4.14}$$

en coordonnées locales y, c'est le point $y_0 = (\mathbf{0}, y_3)$, et nous supposons que $y_3 \geq 0$.

Dans les coordonnées locales, d'après (4.14), on trouve :

$$\frac{\partial x}{\partial y_3} = \nabla d(s(y')) = \nu(s(y')) \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y_3}(y_0) = \nu(z_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

De même, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial y'} &= \frac{\partial s}{\partial y'} + y_3\nabla^2 d(s(y')) \circ \frac{\partial s}{\partial y'} \\ &= \left(\mathbb{I}_2 + y_3\nabla^2 d(s(y'))\right) \circ \frac{\partial s}{\partial y'} \end{aligned} \tag{4.16}$$

et donc
$$\frac{\partial x}{\partial y'}(y_0) = \left(\mathbb{I}_2 + y_3 d''_{x'x'}(z_0)\right)\left(\frac{\partial s}{\partial y'}(0)\right). \tag{4.17}$$
En effet, on remarque que $\nabla^2 d(s(y'))|_{y'=0} = d''_{x'x'}(z_0)$. Afin d'alléger les notations, on notera dorénavant $d''_{x'x'}(z_0) =: d''z_0$.

Ainsi, on détermine la matrice du gradient en y_0, c'est-à-dire pour $y' = 0$:
$$\frac{\partial x}{\partial y}(y_0) = \left(\begin{array}{cc|c} (\mathbb{I}_2 + y_3 d''z_0)\,(\partial_{y'} s(0)) & & \begin{array}{c}0\\0\end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{4.18}$$

Puisque l'obstacle est strictement convexe, nous pouvons dire que $d''_{x'x'}(z_0) > 0$. Dans ce cas, dès que $y_3 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$, la matrice diagonale par blocs 3×3 (4.18) est inversible.

Son inverse, pour $y' = 0$ et pour y_3 suffisamment petit ($0 \leq y_3 < \delta \ll$), est par conséquent la matrice donnée par :
$${}^t\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}(y_0) = \left(\begin{array}{cc|c} \begin{array}{c}(\mathbb{I}_2 - y_3 d''z_0)\,({}^t\partial_{y'} s)^{-1}(0)\\ +\mathcal{O}(y_3^2)\end{array} & & \begin{array}{c}0\\0\end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{4.19}$$

Nous pouvons maintenant étudier le symbole principal de l'opérateur d'élasticité Δ_e dans notre nouveau système de coordonnées. C'est un symbole matriciel 3×3, qui s'écrit
$$\sigma_e(\xi) = \mu_0 |\xi|^2 \mathbb{I}_3 + (\lambda_0 + \mu_0)\, \xi.\, {}^t\xi \tag{4.20}$$
dans $\mathbb{R}^3$. Dans les coordonnées géodésiques locales, en $y_0 = (\mathbf{0}, y_3)$, on pose le changement de variables
$$\xi = {}^t\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}(y_0)\eta \tag{4.21}$$
On pose alors $\eta = (\eta', \eta_3)$, puis on note
$$\zeta' = ({}^t\partial_{y'} s)^{-1}(0)\eta' \tag{4.22}$$

Dans le premier terme du symbole, on calcule alors
$$\begin{aligned}
|\xi|^2 &= \left\langle {}^t\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}(y_0)\eta\,,\ {}^t\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}(y_0)\eta \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\begin{array}{c} (\mathbb{I}_2 - y_3 d''z_0)\,({}^t\partial_{y'} s)^{-1}(0)\eta' \\ +\mathcal{O}(y_3^2)\eta' \\ \hline \eta_3 \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{c} (\mathbb{I}_2 - y_3 d''z_0)\,({}^t\partial_{y'} s)^{-1}(0)\eta' \\ +\mathcal{O}(y_3^2)\eta' \\ \hline \eta_3 \end{array}\right) \right\rangle \\
&= \eta_3^2 + \|\,(\mathbb{I}_2 - y_3 d''z_0)\,({}^t\partial_{y'} s)^{-1}(0)\eta'\| + \mathcal{O}(y_3^2|\eta'|^2) \\
&= \eta_3^2 + |\zeta'|^2 - 2y_3\langle d''z_0\zeta';\, \zeta'\rangle + \mathcal{O}(y_3^2|\eta'|^2).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

D'autre part, nous écrivons le deuxième terme de ce symbole principal :

$$
\begin{aligned}
\xi.\,^t\xi &= \left(\frac{\begin{array}{c}(\mathbb{I}_2 - y_3 d''z_0)\,(^t\partial_{y'}s)^{-1}(0)\eta' \\ +\mathcal{O}(y_3^2)\eta'\end{array}}{\eta_3}\right).\,^t\left(\frac{\begin{array}{c}(\mathbb{I}_2 - y_3 d''z_0)\,(^t\partial_{y'}s)^{-1}(0)\eta' \\ +\mathcal{O}(y_3^2)\eta'\end{array}}{\eta_3}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c}\zeta'.^t\zeta' \\ -y_3(d''z_0\zeta'.^t\zeta' + \zeta'.^td''z_0\zeta')\end{array} & \begin{array}{c}\eta_3.\zeta'- \\ y_3\eta_3.d''z_0\zeta'\end{array} \\ \hline \eta_3.^t\zeta' - y_3\eta_3.^t(d''z_0\zeta') & \eta_3^2 \end{array}\right) + \mathcal{O}(y_3^2) \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Grâce aux notations employées, nous pouvons maintenant donner l'écriture matricielle du symbole principal de Δ_e en coordonnées locales en séparant les contributions :

$$
\begin{aligned}
\sigma_e(\eta) &= \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 + 2\mu_0 \end{pmatrix}.\eta_3^2 + \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\mu_0|\zeta'|^2.\mathbb{I}_2+} & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{(\lambda_0+\mu_0)\zeta'.^t\zeta'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu_0|\zeta'|^2 \end{array}\right) + \\
&\quad +(\lambda_0+\mu_0)\eta_3.\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \zeta' \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{^t\zeta'} & 0 \end{array}\right) - 2y_3\Bigg\{\mu_0\langle d''z_0\zeta', \zeta'\rangle\,\mathbb{I}_3 + \qquad (4.25) \\
&\quad +\frac{\lambda_0+\mu_0}{2}\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{d''z_0\zeta'.^t\zeta'+} & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{\zeta'.^td''z_0\zeta'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + \frac{\lambda_0+\mu_0}{2}\eta_3\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & d''z_0\zeta' \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{^td''z_0\zeta'} & 0 \end{array}\right)\Bigg\} \\
&\quad +\mathcal{O}(y_3^2) \\
&= M_0.\eta_3^2 + [r_e(y',\eta') + \eta_3 r_m(y',\eta')] - 2y_3\,[q_e(y',\eta') + \eta_3 q_m(y',\eta')] + \mathcal{O}(y_3^2|\eta|^2)
\end{aligned}
$$

avec la notation de la matrice

$$
M_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 + 2\mu_0 \end{pmatrix} \qquad (4.26)
$$

Par conséquent, on obtient une écriture de l'opérateur d'élasticité lui-même dans le système de coordonnées sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\Delta_e &= -M_0 D_3^2 + [R_e(y',D') + D_3 R_m(y',D')] \\
&\quad -2y_3\,[Q_e(y',D') + D_3 Q_m(y',D')] + \mathcal{O}(y_3^2 D^2) \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

On a posé :

$$D = (D', D_3)$$

l'opérateur de differentiation, avec les correspondances suivantes entre les symboles et les opérateurs différentiels :

$$D' = D_{y'} = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{y'} = Op(\eta'); \quad D_3 = D_{y_3} = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{y_3} = Op(\eta_3).$$

Remarque : il est possible d'interpréter les termes de cette expression de la façon suivante :

- r_e est le symbole principal de $\Delta_{e,\partial\mathcal{O}} = R_e(y', D')$ exprimé dans les coordonnées locales
- r_m représente un terme transversal ou mixte
- on peut interpréter $d''_{x'x'}z_0$ comme la Hessienne de la fonction d en 0, restreinte à $T_0\partial\mathcal{O}$, que l'on peut voir comme un sous-espace de $T_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$; par la dualité euclidienne, on la considère comme la Hessienne sur $T_0^*\partial\mathcal{O}$ et, ainsi, $\langle d''z_0\zeta', \zeta'\rangle \mathbb{I}_3$ est la forme quadratique correspondante exprimée dans les coordonnées (y', η') sur $T_0^*\partial\mathcal{O}$
- les coefficients de l'opérateur d'élasticité sont analytiques par rapport à y_3

4.3.2 Réduction du problème

La présence de termes transversaux dans l'expression de l'opérateur d'élasticité n'est pas opportune car nous cherchons une séparation des variables dans la différentiation. Pour traiter ce problème, nous allons alors utiliser une méthode de réduction déjà employée par Bellassoued [1].

En premier lieu, considérons le symbole principal de l'opérateur de Laplace dans notre système de coordonnées :

$$\begin{aligned}
|\xi|^2 =^t \xi.\xi &= {}^t\left({}^t\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}(y_0)\eta\right)\left({}^t\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}(y_0)\eta\right) \\
&= {}^t l(y,\eta) l(y,\eta) \\
&= \eta_3^2 + \|\left(\mathbb{I}_2 - y_3 d''z_0\right)({}^t\partial_{y'}s)^{-1}(0)\eta'\| + \mathcal{O}(y_3^2|\eta'|^2) \\
&= \eta_3^2 + |\zeta'|^2 - 2y_3\langle d''z_0\zeta';\, \zeta'\rangle + \mathcal{O}(y_3^2|\eta'|^2). \\
&:= \eta_3^2 + r(y,\eta') \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

où $r(y, \eta')$ est la forme quadratique donnée par

$$r(y,\eta') = {}^t\zeta'\zeta' - 2y_3\langle d''z_0\zeta',\, \zeta'\rangle + \mathcal{O}(y_3^2\eta'^2)$$

Comme $\mathcal{O}$ est strictement convexe, $d''z_0 > 0$ et on se restreint au besoin à un voisinage du bord suffisamment proche pour qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$r(y,\eta') \geq C|\eta'|^2$$

pour tout y dans ce voisinage et pour tout $\eta' \in T^*\Gamma$.

Nous définissons alors deux fonctions vectorielles l_0 et l_1 analytiques par rapport à y_3 sur leurs domaines de définition, telles que

$$l(y,\eta) = l_0(y)\eta_3 + l_1(y,\eta'). \qquad (4.29)$$

D'après (4.28), elles sont caractérisées par les relations suivantes :

$${}^tl_0l_0 = 1, \quad {}^tl_0l_1 = {}^tl_1l_0 = 0, \quad {}^tl_1l_1 = r. \qquad (4.30)$$

Nous allons maintenant passer à la réduction de l'opérateur d'élasticité. On écrit le symbole principal de l'opérateur d'élasticité linéaire comme

$$\sigma_e(y,\eta) = \mu_0\,{}^t l(y,\eta) l(y,\eta) \mathbb{I}_3 + (\lambda_0+\mu_0) l(y,\eta)\,{}^t l(y,\eta). \tag{4.31}$$

Nous définissons enfin la fonction $\gamma(y,\eta')$ qui vérifie

$$\sigma := \eta_3^2 + r = (\eta_3 + \mathrm{i}\gamma)(\eta_3 - \mathrm{i}\gamma).$$

Elle a donc pour propriété :

$$\gamma = \sqrt{r}; \quad r = -(\mathrm{i}\gamma)^2 = {}^t l_1 l_1$$

On peut supposer que γ ne s'annule pas dans un voisinage du bord et définir une fonction vectorielle w qui engendre $\{l_0, (\mathrm{i}\gamma)^{-1} l_1\}^{\perp}$. On définit la matrice $H = (w, l_0, (\mathrm{i}\gamma)^{-1} l_1)$, analytique par rapport à y_3, et on a alors, dans un voisinage du bord de l'obstacle,

$$\hat{\sigma}_e = H^{-1}\sigma_e H = \mu_0 \sigma \mathbb{I}_3 + (\lambda_0+\mu_0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_3^2 & -(\mathrm{i}\gamma)\eta_3 \\ 0 & (\mathrm{i}\gamma)\eta_3 & -(\mathrm{i}\gamma)^2 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

en développant le deuxième terme du symbole dans la nouvelle base ; en effet, le produit $l_i\,{}^t l_i$ représente la projection orthogonale sur l'espace engendré par l_i.

Nous allons maintenant poser la fonction

$$\tilde{l}(y,\eta) = (\mathrm{i}\gamma)^{-1} l_1 \eta_3 + (\mathrm{i}\gamma) l_0. \tag{4.33}$$

Elle vérifie ${}^t l \tilde{l} = 0$, d'une part, et d'autre part, on remarque que :

$$\hat{\sigma}_e \tilde{l} = \hat{\sigma}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\gamma \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 0$$

tandis que

$$\hat{\sigma}_e l = \hat{\sigma}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_3 \\ \mathrm{i}\gamma \end{pmatrix} = \sigma l$$

Cela nous permet de recalculer le symbole principal de l'opérateur d'élasticité dans la base $P = (w, \tilde{l}, l)$:

$$\tilde{\sigma}_e = P^{-1}\sigma_e P = \mu_0 \sigma \mathbb{I}_3 + (\lambda_0+\mu_0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} = \sigma M_0 \tag{4.34}$$

avec M_0 la matrice définie en (4.26).

Grâce à cette transformation, nous réduisons le problème à l'étude d'un opérateur matriciel diagonal.

4.3.3 Distorsion analytique

Nous allons procéder maintenant à la distorsion analytique proprement dite. La déformation, près du bord Γ, est de la forme

$$z = x + \mathrm{i}\theta f'(x). \tag{4.35}$$

Dans cette écriture, on pose $f(x) = \frac{1}{2}d(x)^2$. Par conséquent, $f'(x) = d(x)d'(x)$ et, quand on remplace x par les coordonnées locales, c'est-à-dire $x = s(y') + y_3\nabla d(s(y'))$, on trouve :

$$\begin{aligned} z &= s(y') + y_3\nabla d(s(y')) + \mathrm{i}\theta d\left(s(y') + y_3\nabla d(s(y'))\right) d'\left(s(y') + y_3\nabla d(s(y'))\right) \\ &= s(y') + (1+\mathrm{i}\theta)y_3\nabla d(s(y')). \end{aligned} \tag{4.36}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} d\left(s(y') + y_3\nabla d(s(y'))\right) &= dist\left(s(y') + y_3\nabla d(s(y')), \Gamma\right) \\ &= d(y_3\nu(s(y'))) \;=\; y_3 \qquad (4.37) \\ d'\left(s(y') + y_3\nabla d(s(y'))\right) &= d'\left(s(y') + y_3\nu(s(y'))\right) \\ &= \nu(s(y')) \;=\; \nabla d(s(y')) \qquad (4.38) \end{aligned}$$

D'après Hargé et Lebeau [12], on peut déformer près de $\partial\mathcal{O}$ jusqu'à l'angle $\pi/3$ de telle sorte que

$$\frac{1+\mathrm{i}\theta}{|1+\mathrm{i}\theta|} = e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \tag{4.39}$$

près de Γ.

Pour $\theta > 0$ suffisamment petit, on choisit donc une application $g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ injective telle que

$$\left\{ \begin{array}{rl} |g'| = 1 & \\ g(0) = 0 & \\ g(t) = te^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} & \text{pour } 0 \le t \le \delta_0 \ll 1 \\ g(t) = t\frac{1+\mathrm{i}\theta}{|1+\mathrm{i}\theta|} & \text{pour } t \ge 2\delta_0 \\ -arg(1+\mathrm{i}\theta) \le -arg(g(t)) \le \frac{\pi}{3} & \\ -\frac{arg(1+\mathrm{i}\theta)}{2} \le -arg(g'(t)) \le \frac{\pi}{3} & \end{array} \right. \tag{4.40}$$

où δ_0 est une constante positive telle que $0 < \delta_0 \ll 1$. De plus, on nomme $\Omega_{sc} \subset \mathbb{C}^3$ l'ensemble image de l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \partial\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x', x_3) & \longmapsto & x' + g(x_3)\nabla d(x'). \end{array} \right. \tag{4.41}$$

Quand on remplace $x' \in \partial\mathcal{O}$ par les coordonnées locales correspondantes telles que nous les avons définies plus haut par y', nous avons pour la variable après déformation (4.36) les renseignements suivants au point y_0 :

$$\frac{\partial z}{\partial y_3} = g'(y_3)\nabla d(s(y')) = \nu(s(y')) \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y_3}(y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g'(y_3) \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y'} &= \frac{\partial s}{\partial y'} + g(y_3)\nabla^2 d(s(y')) \circ \frac{\partial s}{\partial y'} \\
&\Downarrow \\
\frac{\partial z}{\partial y'}(y_0) &= \big(\mathbb{1}_2 + g(y_3)\nabla^2 d(s(y'))\big) \circ \frac{\partial s}{\partial y'}(0)
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

Puis, on obtient la matrice du gradient en y_0 après la déformation :

$$
\frac{\partial z}{\partial y}(y_0) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{(\mathbb{1}_2 + g(y_3)d''z_0)\,(\partial_{y'}s(0)} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & g'(y_3) \end{array}\right). \tag{4.44}
$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, cette matrice est inversible et on obtient :

$$
{}^t\!\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1}(y_0) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{(\mathbb{1}_2 - g(y_3)d''z_0)\,({}^t\partial_{y'}s)^{-1}(0)} & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{+\mathcal{O}(g(y_3)^2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{g'(y_3)} \end{array}\right). \tag{4.45}
$$

Nous appliquons la distorsion dans l'expression (4.34) du symbole principal et nous remplaçons donc dans (4.21) l'écriture de (4.19) par celle que nous avons trouvé en (4.45) ; ainsi, nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_e &= P^{-1}\sigma_e P = \sigma M_0 && (4.46) \\
&= \left(\frac{1}{g'(y_3)^2}\eta_3^2 + |\zeta'|^2 - 2g(y_3)\langle d''z_0\zeta', \zeta'\rangle + \mathcal{O}(g(y_3)^2\eta'^2)\right) M_0 && (4.47)
\end{aligned}
$$

Nous pouvons alors en déduire, avec les notations de (4.27), la forme de l'opérateur déformé : pour cela, nous tenons compte du symbole sous-principal (voir [13]) et nous avons

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta_{e,sc}} &= [P^{-1}\Delta_e P]_{sc} \\
&= \Delta_{sc} M_0 \\
&= \left(\frac{1}{g'(y_3)^2}D_3^2 + R(y', D') - 2g(y_3)Q(y', D') + \frac{1}{g'(y_3)}D_3\right) M_0 + \\
&\quad +\mathcal{O}(g(y_3)^2 D'^2)\mathbb{1}_3 + \mathcal{O}(1)\mathbb{1}_3
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

Comme, d'autre part, quand y_3 est suffisamment proche de 0, $g(y_3) = y_3 \exp(-\mathrm{i}\pi/3)$ et $g'(y_3) = \exp(-\mathrm{i}\pi/3)$, nous voyons finalement que :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta_{e,sc}} &= \Delta_{sc} M_0 \\
&= e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} M_0 \left(D_3^2 + e^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}} R(y', D') + 2y_3 Q(y', D') + e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} D_3\right) + \\
&\quad +\mathcal{O}(y_3^2 D'^2)\mathbb{1}_3 + \mathcal{O}(1)\mathbb{1}_3 \qquad (4.49)
\end{aligned}
}
$$

4.4 *Estimations de résolvantes du problème de Dirichlet*

4.4.1 Proposition

Le but de cette partie et de la suivante est d'obtenir des estimations de résolvantes dans notre problème. Nous allons tout d'abord définir les résolvantes que nous étudions, et comment elles se rattachent au problème de l'élasticité.

Par construction, $\{x \in \Omega_{sc} : d(x) \geq \delta_0\}$ est contenu dans une sous-variété totalement réelle de $\mathbb{C}^3$, notée $\mathbb{R}^3_{sc}$, telle que $\lambda_1^{-2}(\Delta|_{\mathbb{R}^3_{sc}} + \lambda^2)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^3_{sc}$, elliptique, avec un grand paramètre $\lambda_1 = \Re\lambda$, tant que $0 \leq arg(\lambda) \leq \pi/6$.

En d'autres termes, la résolvante

$$G^0_{sc}(\lambda) := \left(\Delta|_{\mathbb{R}^3_{sc}} + \lambda^2\right)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^3_{sc}) \to H^2(\mathbb{R}^3_{sc})$$

est un $\mathcal{O}(|\lambda|^{-2})$.

De plus, on pose $\Delta_{sc} = \Delta|_{\Omega_{sc}}$. On peut alors définir les opérateurs

$$G_{sc}(\lambda) : L^2(\Omega_{sc}) \to H^2(\Omega_{sc}), \;\text{ et } K_{sc}(\lambda) : L^2(\Gamma) \to H^{1/2}(\Omega_{sc})$$

comme les solutions respectives des systèmes

$$\begin{cases} (\Delta_{sc} + \lambda^2)G_{sc}(\lambda)u = u \quad \text{dans } \Omega_{sc} \\ G_{sc}(\lambda)u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\Delta_{sc} + \lambda^2)K_{sc}(\lambda)g = 0 \quad \text{dans } \Omega_{sc} \\ K_{sc}(\lambda)g|_\Gamma = g \end{cases}$$

avec $u \in L^2(\Omega_{sc})$ et $g \in L^2(\Gamma)$

Ainsi, nous définissons les opérateurs matriciels correspondants :

$$\mathcal{G}_{sc} = M_0^{-1} \begin{pmatrix} G_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & G_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & G_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_0+2\mu_0}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{sc} = M_0^{-1} \begin{pmatrix} K_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & K_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & K_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_0+2\mu_0}}\right) \end{pmatrix}$$

tels que :

$$\begin{cases} (\widetilde{\Delta_{e,sc}} + \lambda^2)\mathcal{G}_{sc}(\lambda)v = v \quad \text{dans } \Omega_{sc} \\ \mathcal{G}_{sc}(\lambda)v|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\widetilde{\Delta_{e,sc}} + \lambda^2)\mathcal{K}_{sc}(\lambda)f = 0 \quad \text{dans } \Omega_{sc} \\ \mathcal{K}_{sc}(\lambda)f|_\Gamma = f \end{cases}$$

ce qu'on peut vérifier par le calcul matriciel. Dans cette écriture, $v = {}^t(v_1, v_2, v_3) \in (L^2(\Omega_{sc}))^3$ et $f = {}^t(f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\Gamma))^3$.

Aux changements d'échelles près, il nous reste donc à étudier le cas "scalaire" de G_{sc} et K_{sc} afin d'obtenir des estimations de ces opérateurs.

On note $-\chi_1 < 0$ le premier zéro de la fonction de Airy Ai(z) et on pose

$$K_{min} = \min\left\{ \frac{q(y', \eta')}{\zeta'^2};\ (y', \eta') \in T^*\Gamma \setminus 0 \right\}.$$

Nous définissons alors l'ensemble

$$\Lambda_+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; 1 \leq \Im\lambda < C_1 \lambda^{1/3} - C_2 \right\}$$

où

$$C_1 = \chi_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{K_{min}^{-2/3}}{2^{1/3}}$$

et $C_2 \gg 1$ est une constante dépendant de C_1.

De plus, nous définissons également

$$a_0 = min\{\mu_0, \lambda_0 + 2\mu_0\}$$

(λ_0 et μ_0 sont les constantes de Lamé) et l'ensemble

$$\Upsilon_+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; 1 \leq \Im\lambda < C_1' \lambda^{1/3} - C_2' \right\}$$

où

$$C_1' = \chi_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{a_0^{1/3} K_{min}^{-2/3}}{2^{1/3}}$$

et $C_2' \gg 1$ est une constante dépendant de C_1'.

Enonçons maintenant les propriétés que nous allons démontrer dans ce qui suit :

Proposition 4.4.1 *Pour tout $\lambda \in \Lambda_+$, nous avons*

$$\|G_{sc}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_{sc}),H^2(\Omega_{sc}))} \leq \mathcal{O}(|\lambda^{-4/3}|) \tag{4.50}$$

$$\|\partial_{\tilde{\nu}} G_{sc}(\lambda)|_\Gamma\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_{sc},H^2(\Gamma))} \leq \mathcal{O}(|\lambda^{-1/3}|) \tag{4.51}$$

$$\|K_{sc}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma),H^2(\Omega_{sc}))} \leq \mathcal{O}(|\lambda^{-1/3}|) \tag{4.52}$$

dont on déduit le corollaire suivant

Corollaire 4.4.1 *Pour tout $\lambda \in \Upsilon_+$, nous avons*

$$\|\mathcal{G}_{sc}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_{sc}),H^2(\Omega_{sc}))} \leq \mathcal{O}(|\lambda^{-4/3}|) \tag{4.53}$$

$$\|\partial_{\tilde{\nu}} \mathcal{G}_{sc}(\lambda)|_\Gamma\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_{sc},H^2(\Gamma))} \leq \mathcal{O}(|\lambda^{-1/3}|) \tag{4.54}$$

$$\|\mathcal{K}_{sc}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma),H^2(\Omega_{sc}))} \leq \mathcal{O}(|\lambda^{-1/3}|) \tag{4.55}$$

4.4.2 Transformation de P le long de la variété glancing

Nous définissons une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = 1$ si $|t| \leq \delta_0/2$ et $\psi(t) = 0$ si $|t| \geq \delta_0$ pour une constante $0 < \delta_0 \ll 1$, puis nous posons $\varphi(y) = \psi(d(y))$, où $d(y)$ désigne la distance entre $y \in \Omega_{sc}$ et Γ.

Pour toute fonction $v \in L^2(\Omega_{sc})$, on pose alors

$$u_1 = \varphi G_{sc}(\lambda)v, \quad v_1 = \frac{1}{\lambda_1^2}(\Delta_{sc} + \lambda^2)u_1, \quad h = \frac{1}{\lambda_1}\partial_{\tilde{\nu}} u_1|_\Gamma$$

On note $\mathcal{V}$ un voisinage de $z_0 = (0,0) \in \Gamma$ dans $\Omega_{e,sc}$, tel que $\overline{\mathcal{V}} \subset \overline{\Omega_{e,sc}}$.

Dans les coordonnées locales (y', y_3) de $\mathcal{V}$, $y_3 \geq 0$ représente la distance de $\rho = (y', y_3) \in \mathcal{V}$ à Γ, $y' \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées sur $\mathcal{V} \cap \Gamma$, et $\mathcal{V} \cap \Gamma = \{y_3 = 0\}$.

Alors, d'après (4.49) nous donnons une expression modifiée dans ces coordonnées de l'opérateur

$$\tilde{P} = -\frac{e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{\lambda_1^2} M_0^{-1}(\widetilde{\Delta_{e,sc}} + \lambda^2 \mathbb{1}_3)$$

en étudiant l'opérateur transformé suivant

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{\lambda_1^2}(\Delta_{sc} + \lambda^2) \\ &= e^{-\frac{2i\pi}{3}}\Big[\lambda_1^{-2}(D_3^2 + e^{\frac{-2i\pi}{3}} R(y', D') + 2y_3 Q(y', D') + e^{-\frac{i\pi}{3}} D_3 \\ &\quad + \mathcal{O}(y_3^2 D'^2) + \mathcal{O}(1)) - 1 - \beta\Big] \\ &= \mathcal{D}_3^2 + T - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\beta. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Dans cette expression, on a utilisé l'opérateur différentiel $\mathcal{D} = (\mathcal{D}', \mathcal{D}_3)$ où $\mathcal{D}_3 = \frac{1}{i\lambda_1}\partial_3 = \frac{1}{\lambda_1}D_3$, et $\mathcal{D}'$ est défini de la même manière ; d'autre part,

$$\beta = \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} - 1 = 2i\frac{\Im\lambda}{\lambda_1} - \left(\frac{\Im\lambda}{\lambda_1}\right)^2 = \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3}) \tag{4.57}$$

quand $\lambda \in \Lambda^+$.

Enfin, T est un opérateur différentiel de second ordre, que l'on décompose comme suit :

$$T = T_0 + T_1$$

avec

$$T_0 = t_0(y', y_3, \mathcal{D}')$$

dont le symbole principal est de la forme

$$t_0(y', y_3, \eta') = e^{-\frac{2i\pi}{3}}(r(y', \eta') - 1) + 2y_3 q(y', \eta') + \mathcal{O}(y_3^2|\eta'|^2), \tag{4.58}$$

avec

$$r(y', \eta') = \zeta'^2,$$

et

$$T_1 = \lambda_1^{-1}\mathcal{D}_3$$

t_0 est un symbole analytique en y_3 sur $\{y_3 = 0\}$.

Soient $\widetilde{U}$ et U deux voisinages de l'origine sur l'hyperplan $\{y_3 = 0\}$, tels que $\widetilde{U} \subset U$. Soit $\chi \in C_0^\infty(U)$ une fonction de troncature telle que $\chi = 1$ sur $\widetilde{U}$.

Posons alors

$$u = \chi u_1.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} Pu &= (\mathcal{D}_3^2 + T - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\beta)\chi u_1 \\ &= \chi(\mathcal{D}_3^2 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\beta)u_1 + T\chi u_1 \\ &= \chi P u_1 + [T, \chi]u_1 \\ &= \chi P u_1 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1}\mathcal{D})u_1. \end{aligned}$$

Soit $0 < \varepsilon \ll 1$ et $0 < \delta$ tel que $\delta \leq \frac{1}{3} + 2\varepsilon$; on définit les deux fonctions suivantes

$$\kappa_\delta(y', \eta', \lambda_1) = \psi\left((r(y', \eta') - 1)\lambda_1^\delta\right)$$

et

$$\phi(y_3) = \psi(y_3 \lambda_1^{(1-\varepsilon)/2})$$

Estimations "loin" de la variété glancing

Lemme 4.4.1 *Nous avons*

$$\|(1 - \phi)u\|_{2,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1/2})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{2,+}\,; \tag{4.59}$$

$$\|Op_{\lambda_1}(1 - \kappa_\delta)\phi u\|_{2,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1/2})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{2,+}\,; \tag{4.60}$$

$$\|\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(1 - \kappa_\delta)\phi u|_{y_3=0}\|_0 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{2,+}\,. \tag{4.61}$$

Preuve : Notons

$$w_0 = Op_{\lambda_1}(1 - \kappa_\delta)\phi u.$$

Alors $w_0|_{y_3=0} = 0$ et $w_0 = 0$ quand $y_3 \geq \delta_0$ (par définition de ϕ). Une intégration par parties nous donne par conséquent

$$\int_0^\infty \mathcal{D}_3^2 w_0.\bar{w}_0 dy_3 = \int_0^\infty |\mathcal{D}_3 w_0|^2 dy_3\,.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \left|\langle T_0 w_0, w_0\rangle_+ + \|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2\right| &= \left|\langle (T_0 + \mathcal{D}_3^2) w_0, w_0\rangle_+\right| \\ &= \left|\langle (P - T_1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}\beta) w_0, w_0\rangle_+\right| \\ &\leq |\langle P w_0, w_0\rangle_+| + \lambda_1^{-1}\,|\langle \mathcal{D}_3 w_0, w_0\rangle_+| + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3})\|w_0\|_{0,+}^2 \\ &\leq |\langle P w_0, w_0\rangle_+| + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\|w_0\|_{1,+}^2 \\ &\quad + (\mathcal{O}(\lambda_1^{-1}) + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3}))\|w_0\|_{0,+}^2 \\ &\leq |\langle P w_0, w_0\rangle_+| + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3}))\|w_0\|_{1,+}^2\,. \end{aligned}$$

D'autre part, les parties réelle et imaginaire du symbole principal de T_0 sont :

$$\Re t_0(y', y_3, \eta') = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(r(y', \eta') - 1) + 2y_3 q(y', \eta') + \mathcal{O}(y_3^2|\eta'|^2),$$
$$\Im t_0(y', y_3, \eta') = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)(r(y', \eta') - 1) + \mathcal{O}(y_3^2|\eta'|^2).$$

Or, sur le support de ϕ,

$$y_3 = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2+\varepsilon/2})$$

et nous savons également, de par la convexité de l'obstacle, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$q(y', \eta') \geq C|\eta'|^2, \quad \forall (y', \eta') \in T^*\Gamma.$$

Nous obtenons alors, d'une part, pour la partie imaginaire,

$$|\langle Op_{\lambda_1}(r-1)w_0, w_0\rangle_+| - \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\|w_0\|_{1,+}^2 \leq \left|\langle T_0 w_0, w_0\rangle_+ + \|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2\right|$$

d'où

$$\begin{aligned} |\langle Op_{\lambda_1}(r-1)w_0, w_0\rangle_+| &\leq |\langle P w_0, w_0\rangle_+| + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3}))\|w_0\|_{1,+}^2 \\ &\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\gamma})\|P w_0\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-\gamma})\|w_0\|_{1,+}^2 \end{aligned} \tag{4.62}$$

pour tout $0 < \gamma \leq 2/3$; d'autre part, en étudiant la partie réelle, et grâce à (4.62),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y_3\|w_0(.,y_3)\|_1^2 dy_3 + \|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2 &\leq \frac{1}{2C}\langle 2y_3 q(y', \mathcal{D}')w_0, w_0\rangle_+ + \|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2 \\ &\leq \mathcal{O}(1)\Bigg(\left\langle \left(\Re T_0 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) Op_{\lambda_1}(r-1)\right) w_0, w_0\right\rangle_+ \\ &\quad + \|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2\Bigg) \\ &\leq \left|\langle T_0 w_0, w_0\rangle_+ + \|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2\right| \\ &\quad + |\langle Op_{\lambda_1}(r-1)w_0, w_0\rangle_+| \\ &\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\gamma})\|P w_0\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-\gamma})\|w_0\|_{1,+}^2. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Du fait que $|r-1| \geq C\lambda_1^{-\delta}|\eta'|^2$ sur le support de $(1-\kappa_\delta)\phi$, on déduit, d'après (4.62) que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\lambda_1^{\gamma})\|P w_0\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-\gamma})\|w_0\|_{1,+}^2 &\geq C\lambda_1^{-\delta}\,|\rangle \mathcal{D}' w_0, w_0\rangle_+| \\ &\geq C\lambda_1^{-\delta}\int_0^\infty \|\mathcal{D}' w_0(.,y_3)\|_0^2 dy_3 \\ &\geq C\lambda_1^{-\delta}\int_0^\infty \|w_0(.,y_3)\|_1^2 dy_3. \end{aligned}$$

On déduit également de (4.63) que

$$\|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\gamma})\|Pw_0\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-\gamma})\|w_0\|_{1,+}^2$$

et la réunion de ces deux estimations nous permet d'écrire la suivante :

$$\int_0^\infty \|w_0(.,y_3)\|_1^2 dy_3 + \lambda_1^{\delta}\|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta+\gamma})\|Pw_0\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta-\gamma})\|w_0\|_{1,+}^2. \quad (4.64)$$

Si, maintenant, on pose $0 < \delta < \gamma \leq 1/3 + 3\varepsilon$, on déduit alors immédiatement de (4.64) que

$$\|w_0\|_{1,+}^2 + \lambda_1^{\delta}\|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta+\gamma})\|Pw_0\|_{0,+}^2. \quad (4.65)$$

Montrons ensuite la propriété suivante par récurrence :

$$\forall m \geq 1,\ \|w_0\|_{1,+}^2 + \lambda_1^{\delta}\|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta+\gamma})\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})\|u\|_{1,+}^2. \quad (4.66)$$

Pour cela, on remarque tout d'abord qu'il existe une fonction w_1, de la même forme que w_0, telle que

$$Pw_0 = Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi Pu + [P, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]\, w_1 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})u.$$

En effet, il est possible de choisir un δ_1 définissant une nouvelle fonction κ_{δ_1} telle que

$$\begin{aligned}[P, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]\, u &= [P, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]\, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_{\delta_1})\phi u + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})u \\ &= [P, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]\, w_1 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})u.\end{aligned}$$

et ceci, pour tout m.

Or, le commutateur est

$$[P, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]\, w_1 = \left[\mathcal{D}_3^2, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi\right] w_1 + [T, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]\, w_1$$

et nous notons que, d'une part,

$$\left[\mathcal{D}_3^2, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi\right] w_1 = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\psi'\mathcal{D}_3 w_1 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1-\varepsilon})Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\psi'' w_1$$

et, d'autre part, le symbole principal de $[T, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]$ est un $\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})$ car

$$\{r, (1-\kappa_\delta)\phi\} = 0.$$

Alors, on majore le commutateur par

$$\|\, [P, Op_{\lambda_1}(1-\kappa_\delta)\phi]\, w_1\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{-1-\varepsilon})\|w_1\|_{1,+}^2$$

et

$$\|Pw_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1-\varepsilon})\|w_1\|_{1,+}^2 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})\|u\|_{1,+}^2.$$

Nous remarquons enfin que w_1 vérifie (4.65) s'il est de la même forme que w_0, et nous obtenons ainsi l'estimation

$$\|Pw_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1-\varepsilon+\delta+\gamma})\|Pw_1\|_{1,+}^2 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})\|u\|_{1,+}^2. \qquad (4.67)$$

On répète cet argument pour w_1 et, la récurrence nous donne, en itérant (4.67)

$$\|Pw_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})\|u\|_{1,+}^2.$$

(4.66) découle de cette dernière estimation et de (4.65).

De même, on prouve que $\tilde{w} = Op_{\lambda_1}(\sqrt{r(y',\eta')})w_0$ vérifie également (4.66). Pour cela, on remarque d'abord que $Op_{\lambda_1}(\sqrt{r(y',\eta')})$ commute avec $\mathcal{D}_3^2$, β, $\mathcal{D}_3$ et y_3, mais également avec $Op_{\lambda_1}(r(y',\eta')-1)$. De plus, $[Op_{\lambda_1}\sqrt{r}, y_3Q]$ a pour symbole principal $\{\sqrt{r}, y_3q\}$ et $y_3 = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2+\varepsilon/2})$ sur le support de ϕ.

Par conséquent, $Op_{\lambda_1}(r)$ et $Op_{\lambda_1}(q)$ étant des opérateurs d'ordre 0, en dehors du symbole principal, il ne reste qu'un commutateur d'ordre $\mathcal{O}(\lambda^{-1})$, et donc

$$P\tilde{w} = Op_{\lambda_1}(\sqrt{r})Pw_0 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-3/2+\varepsilon/2})w_0$$

ou encore

$$(P - \mathcal{O}(\lambda^{-1}))\tilde{w} = Op_{\lambda_1}(\sqrt{r})Pw_0.$$

Soit $\bar{P} = P + \lambda^{-1}P_1$ l'opérateur tel que

$$P\tilde{w} = Op_{\lambda_1}(\sqrt{r})Pw_0 + \lambda^{-1}P_1w_0 = Op_{\lambda_1}(\sqrt{r})\bar{P}w_0$$

et $\bar{P}$ est du même type que P. Nous pouvons donc répéter l'argument précédent, et montrer que $\tilde{w}$ vérifie également (4.66).

De plus, en considérant la définition de P donnée en (4.56), et en séparant dans cette expression la dérivée seconde dans la direction y_3, avec les estimations précédentes, on peut évaluer

$$\|\mathcal{D}_3^2 w\|_0^2 \leq \mathcal{O}(1)\left(\|Pu\|_{0,+}^2 + \|w\|_{1,+}^2 + \|\mathcal{D}_3 w\|_{1,+}^2 + \|\tilde{w}\|_{1,+}^2\right) \qquad (4.68)$$

En combinant (4.68) avec (4.66), on trouve, pour tous $0 < \delta < \gamma \leq 1/3 + \sigma$,

$$\|w_0\|_{2,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta+\gamma})\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})\|u\|_{2,+}^2, \qquad (4.69)$$

ce qui permet de conclure pour (4.60).

Nous allons maintenant prouver (4.61). Tout d'abord, remarquons que

$$\int_0^\infty \langle \mathcal{D}_3^2 w_0, \mathcal{D}_3 w_0\rangle_0 dy_3 = \frac{1}{\lambda_1}\|\mathcal{D}_3 w_0|_{y_3=0}\|_0^2 - \int_0^\infty \langle \mathcal{D}_3 w_0, \mathcal{D}_3^2 w_0\rangle_0 dy_3.$$

Puis, grâce à (4.66), avec $m = 1$, et pour σ fixé tel que $3\varepsilon \leq \sigma \ll 1$, nous avons $\delta < \gamma \leq 1/3 + \sigma$ et

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_3 w_0|_{y_3=0}\|_0^2 &= -2\lambda_1 \int_0^\infty \Im\langle \mathcal{D}_3^2 w_0, \mathcal{D}_3 w_0\rangle_0 dy_3 \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1)\int_0^\infty \left(\|\mathcal{D}_3^2 w_0\|_0^2 \mathcal{O}(\lambda_1^{\sigma}) + \|\mathcal{D}_3 w_0\|_0^2 \mathcal{O}(\lambda_1^{-\sigma})\right) dy_3 \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1+\sigma})\|\mathcal{D}_3^2 w_0\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{1-\sigma})\|\mathcal{D}_3 w_0\|_{0,+}^2 \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1+\sigma})\|\mathcal{D}_3^2 w_0\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{4/3})\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\|u\|_{1,+}^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, par définition de la norme $\|.\|_{2,+}$, on déduit de (4.69) que

$$\|\mathcal{D}_3^2 w_0\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta+\gamma})\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2})\|u\|_{2,+}^2,$$

et (4.61) est donc vérifiée, mais seulement quand $1+\delta+\gamma+\sigma \leq 4/3$, soit $\delta+\gamma+\sigma \leq 1/3$. Il nous reste donc à la vérifier pour tous les $\delta < \gamma \leq 1/3 + 3\varepsilon$.

Pour cela, nous fixons des valeurs initiales δ_0 et γ_0 telles que $0 < \delta_0 < \gamma_0 < 1/6$ et $\delta_0 + \gamma_0 + \sigma < 1/3$. (4.61) est vérifiée pour ces valeurs.

On pose $\delta_1 = 2\delta_0$ et $\gamma_1 = \gamma_0 + \delta_0$.On note alors

$$w_j = Op_{\lambda_1}(1-\kappa_{\delta_j})\phi u, \qquad j = 0,1.$$

On peut alors écrire, en remarquant que, par définition de κ_δ, $\kappa_{\delta_0}(1-\kappa_{\delta_1}) = 0$

$$\begin{aligned} w_1 &= (Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_0}) + Op_{\lambda_1}(1-\kappa_{\delta_0}) + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m}))w_1 \\ &= v_1 + w_0 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})u, \end{aligned}$$

avec $v_1 = Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_0})$. Par définition de P en (4.56), nous pouvons estimer

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_3^2 v_1\|_{0,+}^2 &= \|Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_0})(P-(T_0+T_1)+e^{-2i\pi/3}\beta)w_1\|_{0,+}^2 \\ &\leq \mathcal{O}(1)\|Pw_1\|_{0,+}^2 + \|Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_0})T_0 w_1\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2})\|u\|_{1,+}^2 + \|\beta w_1\|_{0,+}^2 \\ &\leq \mathcal{O}(1)\|Pw_1\|_{0,+}^2 + \|T_0 Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_0})w_1\|_{0,+}^2 + \|[T_0, Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_0})]w_1\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2 \end{aligned}$$

Or, nous avons déjà montré dans la récurrence que

$$\|Pw_1\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})\|u\|_{2,+}^2.$$

Nous savons aussi que, par définition des fonctions, le symbole principal de T_0 est un $\mathcal{O}(\lambda_1^{-\delta_0})$ sur le support de $\kappa_{\delta_0}\phi$. Nous pouvons calculer également que le symbole principal du commutateur $[T_0, Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_0})]$ est un $\mathcal{O}(\lambda_1^{-1+\delta_0})$ sur le support de $\kappa_{\delta_0}\phi$.

Nous en déduisons donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_3^2 v_1\|_{0,+}^2 &\leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2+2\delta_0})\|w_1\|_{1,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2 \\ \mathcal{O}(\lambda_1^{-2\delta_0})\|w_1\|_{2,+}^2 + &\leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2\delta_0})\|w_1\|_{2,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2. \end{aligned}$$

Si on applique maintenant (4.69) à $\|w_1\|_{2,+}^2$, par définition des coefficients,
$\delta_1 + \gamma_1 - 2\delta_0 = \delta_0 + \gamma_0$, donc

$$\|\mathcal{D}_3^2 v_1\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta_0+\gamma_0})\|Pu\|_{0,+}^2 + +\mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2.$$

Enfin, par définition de v_1, on a

$$\|\mathcal{D}_3^2 w_1\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta_0+\gamma_0})\|Pu\|_{0,+}^2 + +\mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2.$$

et on obtient bien (4.61) pour w_1 définie ci-dessus, ce qui vérifie le premier pas de l'itération.

Nous itérons maintenant cet argument de la façon suivante : on pose $\delta_k = (k+1)\delta_0$; $\gamma_k = \gamma_0 + k\delta_0$ et $w_k = Op_{\lambda_1}(1-\kappa_{delta_k})\phi u$. Tant que $\gamma_k \leq 1/3 + 3\varepsilon$, on trouve que w_k vérifie (4.61).

On suppose que

$$\|\mathcal{D}_3^2 w_{k-1}\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta_0+\gamma_0})\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2.$$

Il est possible d'écrire w_k sous la forme $w_{k-1} + v_k + \mathcal{O}_m(\lambda_1^{-m})u$, avec $v_k = Op_{\lambda_1}(\kappa_{\delta_{k-1}})w_k$. On obtient, comme précédemment, l'estimation

$$\|\mathcal{D}_3^2 v_k\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2\delta_{k-1}})\|w_k\|_{2,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2.$$

L'hypothèse de récurrence et (4.69) appliquée à w_k permettent d'obtenir

$$\|\mathcal{D}_3^2 w_k\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{\delta_0+\gamma_0})\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3})\|u\|_{2,+}^2$$

et par conséquent (4.61) est vérifiée pour δ_k, ce qui permet de conclure pour toutes les valeurs de δ et γ voulues.

Enfin, nous montrons (4.59) en remarquant tout d'abord que (4.63) est également vraie pour $\gamma = 1/2$ si on remplace w_0 par $w = (1-\phi)u$ et par $\tilde{w} = (1-\phi)Op_{\lambda_1}(\sqrt{r})u$.

Comme $y_3 \geq C\lambda_1^{(\varepsilon-1)/2}$ sur le support de $(1-\phi)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\lambda_1^{1/2})\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2})\|u\|_{2,+}^2 &\geq \int_0^\infty y_3\|w(.,y_3)\|_1^2 dy_3 + \|\mathcal{D}_3 w\|_{0,+}^2 + \int_0^\infty y_3\|\tilde{w}(.,y_3)\|_1^2 dy_3 + \|\mathcal{D}\\
&\geq \mathcal{O}(\lambda_1^{(\varepsilon-1)/2})\left(\|w\|_{1,+}^2 + \|\tilde{w}\|_{1,+}^2\right) + \|\mathcal{D}_3 w\|_{0,+}^2 + \|\mathcal{D}_3\tilde{w}\|_{0,+}^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\lambda_1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-\varepsilon/2})\|u\|_{2,+}^2 &\geq \left(\|w\|_{1,+}^2 + \|\tilde{w}\|_{1,+}^2\right) + \mathcal{O}(\lambda_1^{(1-\varepsilon)/2})\left(\|\mathcal{D}_3 w\|_{0,+}^2 + \|\mathcal{D}_3\tilde{w}\|_{0,+}^2\right)\\
&\geq \|w\|_{1,+}^2 + \|\tilde{w}\|_{1,+}^2 + \|\mathcal{D}_3 w\|_{0,+}^2 + \|\mathcal{D}_3\tilde{w}\|_{0,+}^2.
\end{aligned}$$

Quand on estime largement (d'après (4.56))

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_3^2 w\|_{0,+}^2 &\leq \mathcal{O}(1)\left(\|Pw\|_{0,+}^2 + \|w\|_{1,+}^2 + \|\tilde{w}\|_{1,+}^2 + \|\mathcal{D}_3 w\|_{0,+}^2 + \|\mathcal{D}_3\tilde{w}\|_{0,+}^2\right)\\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-\varepsilon/2})\|u\|_{2,+}^2,
\end{aligned}$$

on obtient une majoration qui prouve (4.59).

La preuve du lemme est donc terminée.

□

Un lemme calculatoire. On fixe à présent $\delta = \frac{1}{3} + 2\varepsilon$ et on note $\kappa = \kappa_{\frac{1}{3}+2\varepsilon}$.

Lemme 4.4.2 *Nous avons*

$$\begin{aligned}
\|y_3\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u\|_{0,+} &+ \lambda_1^{-1/2}\|\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u\|_{0,+} + \lambda_1^{-1/3}\|\mathcal{D}_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u\|_{0,+}\\
&\leq \mathcal{O}_{\lambda_1}(1)\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon/2})\|u\|_{0,+}. \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

Preuve : On définit

$$W = Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u$$

Nous rappelons que, par définition, $u|_{y_3=0} = 0$, ce qui implique $W|_{y_3=0} = 0$[1].

Par intégration par parties, on calcule :

$$\begin{aligned}
\|y_3\mathcal{D}_3 W\|_{0,+}^2 &= \langle y_3\mathcal{D}_3 W, y_3\mathcal{D}_3 W\rangle_+ \\
&= \langle \mathcal{D}_3 y_3^2\mathcal{D}_3 W, W\rangle_+ + 0 \\
&= \langle y_3^2\mathcal{D}_3^2 W, W\rangle_+ + \frac{2}{\mathrm{i}\lambda_1}\langle y_3\mathcal{D}_3^2 W, W\rangle_+
\end{aligned}$$

(cf. §4.4.2 pour la définition des opérateurs différentiels)

Traitons le premier terme :

$$\begin{aligned}
\langle y_3^2\mathcal{D}_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u, W\rangle_+ &= \langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2 u, W\rangle_+ + \lambda_1^{-1-\varepsilon}\langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_2 u, W\rangle_+ \\
&+ \frac{2}{\mathrm{i}\lambda_1}\lambda_1^{1/2-\varepsilon/2}\langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_1\mathcal{D}_3 u, W\rangle_+ \\
&= \langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2 u, W\rangle_+ + \lambda_1^{-1-\varepsilon}\langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_2 u, W\rangle_+ \\
&\quad + \frac{2}{\mathrm{i}}\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2}\langle y_3 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_1 u, y_3\mathcal{D}_3 W\rangle_+ \\
&\quad + 4\lambda_1^{-3/2-\varepsilon/2}\langle y_3 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_1 u, W\rangle_+
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, nous avons noté $\phi_1 = \psi'(y_3\lambda_1^{(1-\varepsilon)/2})$ et $\phi_2 = \psi''(y_3\lambda_1^{(1-\varepsilon)/2})$.

Par définition de ϕ et ψ, sur le support de ϕ, on a $y_3 = \mathcal{O}(\lambda_1^{\varepsilon/2-1/2})$, ce qui nous donne la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
|\langle y_3^2\mathcal{D}_3^2 W, W\rangle_+| &\leq |\langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2 u, W\rangle_+| \\
&\quad + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})\|y_3\mathcal{D}_3 W\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-3/2+\varepsilon/2})\|u\|_{0,+}^2.
\end{aligned}$$

Comme on se trouve sur le support de κ, par définition de cette fonction, on a $r - 1 = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/3-2\varepsilon})$ et donc

$$y_3^2 q(y,\eta') = \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3-\varepsilon})$$

sur le support de $\kappa\phi$.

Alors, (4.56) et (4.57) nous donnent :

$$\begin{aligned}
|\langle y_3^2\mathcal{D}_3^2 W, W\rangle_+| &\leq |\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi P u, y_3^2 W\rangle_+| + |\langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi T u, W\rangle_+| \\
&\quad + |\langle y_3^2 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\beta u, W\rangle_+| + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})\|y_3\mathcal{D}_3 W\|_{0,+}^2 \\
&\quad + \mathcal{O}(\lambda_1^{-3/2+\varepsilon/2})\|u\|_{0,+}^2 \\
&\leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})\|y_3\mathcal{D}_3 W\|_{0,+}^2 \\
&+ \left(\mathcal{O}(\lambda_1^{-2+2\varepsilon}) + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3-\varepsilon}) + \mathcal{O}(\lambda_1^{-5/3+\varepsilon}) + \mathcal{O}(\lambda_1^{-3/2+\varepsilon/2})\right)\|u\|_{0,+}^2 \\
&\leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})\|y_3\mathcal{D}_3 W\|_{0,+}^2 + \mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}^2
\end{aligned}$$

[1] Considérer, dans l'expression de W, $\int e^{-\mathrm{i}\lambda_1 x_3\eta_3}u(y)dy_3 d\eta_3$ comme la trace de u sur le bord $\{y_3 = 0\}$.

D'autre part, nous traitons le deuxième terme directement par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1}|\langle y_3\mathcal{D}_3W,W\rangle_+| &\leq \frac{1}{\lambda_1}\left[\mathcal{O}(\lambda_1^{1-\varepsilon})\|y_3\mathcal{D}_3W\|_{0,+}^2+\mathcal{O}(\lambda_1^{\varepsilon-1})\|u\|_{0,+}^2\right.\\ &\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{-\varepsilon})\|y_3\mathcal{D}_3W\|_{0,+}^2+\mathcal{O}(\lambda_1^{-2+\varepsilon})\|u\|_{0,+}^2\left.\right]\end{aligned}$$

Nous en concluons donc :

$$\|y_3\mathcal{D}_3W\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}^2+\mathcal{O}(\lambda_1^{-4/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}^2$$

et finalement

$$\|y_3\mathcal{D}_3W\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}+\mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon/2})\|u\|_{0,+}$$

Nous allons maintenant passer à une estimation du second terme du membre de gauche dans l'énoncé du lemme.

A l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_3W\|_{0,+}^2=|\langle\mathcal{D}_3^2Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u,W\rangle_+| &\leq |\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2u,W\rangle_+|+\\ &\quad \lambda_1^{-1-\varepsilon}|\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_2u,W\rangle_+|\\ &\quad +\frac{2}{\lambda_1}\lambda_1^{1/2-\varepsilon/2}|\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_1u,\mathcal{D}_3W\rangle_+|\\ &\leq |\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2u,W\rangle_+|+\mathcal{O}(\lambda_1^{-1-\varepsilon})\|u\|_{0,+}^2\\ &\quad +\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})(\|u\|_{0,+}^2+\|\mathcal{D}_3W\|_{0,+}^2)\end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu plus haut, $q(y,\eta')=\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/3-2\varepsilon})$ sur $supp(\kappa\phi)$. Dans ce cas, on estime le dernier terme à l'aide de (4.56) et (4.57) par

$$\begin{aligned}|\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2u,W\rangle_+| &\leq |\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi Pu,W\rangle_+|+|\langle y_3^2Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi Tu,W\rangle_+|\\ &+ |\langle y_3^2Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\beta u,W\rangle_+|\\ &\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1/3+2\varepsilon})\|Pu\|_{0,+}^2+\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/3-2\varepsilon})\|u\|_{0,+}^2.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\|\mathcal{D}_3W\|_{0,+}^2 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1/3+2\varepsilon})\|Pu\|_{0,+}^2+\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/3-2\varepsilon})\|u\|_{0,+}^2+\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})\|\mathcal{D}_3W\|_{0,+}^2$$

et on écrit enfin :

$$\lambda_1^{-1/2}\|\mathcal{D}_3W\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+}+\mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon/2})\|u\|_{0,+}.$$

Pour le dernier terme à majorer dans ce lemme, on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_3^2W\|_{0,+}^2 &= |\langle\mathcal{D}_3^2Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u,\mathcal{D}_3^2W\rangle_+|\\ &\leq |\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2u,\mathcal{D}_3^2W\rangle_+|+\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})|\langle\mathcal{D}_3Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_1u,\mathcal{D}_3^2W\rangle_+|\\ &+ \mathcal{O}(\lambda_1^{-1-\varepsilon})|\langle Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_2u,\mathcal{D}_3^2W\rangle_+|\end{aligned}$$

On majore alors chacun de ces termes à l'aide des mêmes techniques que précédemment ; pour le terme $\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_1 u$, il suffit de le considérer comme un $\mathcal{D}_3 W_1$, où $W_1 = Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi_1 u$, et d'utiliser la majoration précédente de $\|\mathcal{D}_3 W\|_{0,+}$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_3^2 W\|_{0,+} &\leq \|Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi\mathcal{D}_3^2 u\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/4-\varepsilon/4})\|\mathcal{D}_3 W_1\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})\|u\|_{0,+} \\ &\leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+},\end{aligned}$$

et finalement, en multipliant par un facteur $\lambda_1^{-1/3}$, on conclut

$$\lambda_1^{-1/3}\|\mathcal{D}_3^2 W\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}.$$

Ceci termine la preuve du lemme

□

Microlocalisation par rapport à $y_3\eta_3$. Nous opérons une microlocalisation près de l'origine par rapport à $y_3\eta_3$ en utilisant une classe de λ-opérateurs pseudo-différentiels totalement caractéristiques .

Nous notons ψ_1 une fonction appartenant à $C_0^\infty(T^*\Gamma \times \mathbb{R})$ telle que $\psi_1(y,\eta') = 1$ dans un voisinage de

$$\{y_3 = r(y',\eta') - 1 = 0\} \subset T^*\Gamma \times \mathbb{R}.$$

Nous rappelons que ψ est une fonction à support compact dans $\mathbb{R}$ telle que $\psi(t) = 1$ quand $|t| \leq \delta_0/2$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geq \delta_0$, avec toujours $0 < \delta_0 \ll 1$.

Nous définissons alors le symbole suivant dans $S_{la}^{0,0}$,

$$\varphi_0(\eta_3,\lambda_1) = \psi_\rho(\eta_3,\lambda_1) = \int \psi\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)\rho(s)ds.$$

D'après les propriétés de ρ, on a alors $\varphi_0 - \psi \in S_+^{-\infty,-\infty}$. Nous posons ensuite

$$\varphi(y,\eta,\lambda_1) = \varphi_0(\eta_3,\lambda_1)\psi_1(y,\eta')$$

et

$$\tilde\varphi(y,\eta,\lambda_1) = \tilde\varphi_0(y_3,\eta_3,\lambda_1)\psi_1(y,\eta').$$

Nous rappelons que $\tilde\varphi_0(y_3,\eta_3,\lambda_1) = \varphi_0(y_3\eta_3,\lambda_1)$ (idem pour φ). Nous avons alors $\varphi \in S_{la}^0$. Finalement, nous définissons

$$Op_{\lambda_1}(\tilde\varphi) = Op_{\lambda_1}(\tilde\varphi_0)Op_{\lambda_1}(\psi_1).$$

Notons que $Op_{\lambda_1}(\psi_1)$ est défini modulo un opérateur d'ordre -1 sur Γ. Nous énonçons alors le résultat suivant :

Lemme 4.4.3 *Il existe une constante indépendante de $\lambda_1 \geq 1$, notée $C > 0$, telle que*

$$\|(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}))Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u\|_{0,+} + \|(\mathcal{D}_3(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}))Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u)\,|_{y_3=0}\|_{0,+}$$
$$\leq C\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+} \tag{4.71}$$

Preuve : Dans un premier temps, par définition de φ_0 et d'après les propriétés de ρ, nous calculons

$$\begin{aligned}
1 - \varphi_0(\eta_3, \lambda_1) &= 1 - \int \left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)^{-1} \psi\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)\rho(s)ds \\
&= \int \rho(s)ds - \eta_3 \int \left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)^{-1} \psi\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)\rho(s)ds + \\
&\quad \frac{1}{\lambda_1}\int \left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)^{-1} \psi\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)s\rho(s)ds \\
&= \eta_3 \int \left(1 - \psi\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)\right)\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)^{-1} \rho(s)ds - \\
&\quad -\frac{1}{\lambda_1}\int \left(1 - \psi\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)\right)\left(\eta_3 - \frac{s}{\lambda_1}\right)^{-1} \rho_1(s)ds \\
&= \eta_3\kappa_1(\eta_3, \lambda_1) - \frac{1}{\lambda_1}\kappa_2(\eta_3, \lambda_1).
\end{aligned}$$

Ici, nous avons noté $\rho_1(s) = s\rho(s)$; tout comme pour ρ, on a supp$\rho_1 \subset (-1, 1/2)$. Si on y ajoute des estimations sur $(1 - \psi)(\eta_3 - s/\lambda_1)^{-1}$, on trouve que κ_1 et κ_2 appartiennent bien à $S_{la}^{0,0}$.

Nous conservons toujours la notation $W = Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u$; on voit aisément que

$$\begin{aligned}
1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) &= 1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}_0)Op_{\lambda_1}(\psi_1) \\
&= (1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}_0))Op_{\lambda_1}(\psi_1) + (1 - Op_{\lambda_1}(\psi_1)) \\
&= (1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}_0))Op_{\lambda_1}(\psi_1) + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1}).
\end{aligned}$$

Ensuite, nous remarquons que

$$1 - \tilde{\varphi}_0 = y_3\eta_3\tilde{\kappa}_1 - \frac{1}{\lambda_1}\tilde{\kappa}_2.$$

Au vu de la classe à laquelle appartiennent κ_1 et κ_2, nous en déduisons alors, à l'aide du lemme 4.4.1, l'estimation

$$\begin{aligned}
\|(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}))W\|_{0,+} &\leq \|(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}_0))Op_{\lambda_1}(\psi_1)W\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\|u\|_{0,+} \\
&\leq C\|y_3\mathcal{D}_3W\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\|u\|_{0,+} \\
&\leq C\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}.
\end{aligned}$$

Passons à la deuxième partie de cette preuve : nous avons vu que $W|_{y_3=0} = 0$. Nous voyons également par sa définition que

$$(1 - \tilde{\varphi}_0)\,|_{y_3=0} = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})$$

Par le même développement que précédemment, et en utilisant en plus la définition de l'opérateur pseudodifférentiel W, nous trouvons

$$\begin{aligned}\| \left(\mathcal{D}_3 \left(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})\right) W\right) |_{y_3=0}\|_0^2 &\leq \| \left(\mathcal{D}_3 \left(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}_0)\right) Op_{\lambda_1}(\psi_1) W\right) |_{y_3=0}\|_0^2 + \\ &\quad \mathcal{O}(\lambda_1^{-2}) \| \left(\mathcal{D}_3 W\right) |_{y_3=0}\|_0^2 \\ &\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{-2}) \| \left(\mathcal{D}_3 W\right) |_{y_3=0}\|_0^2.\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons vu auparavant, de manière équivalente (preuve du lemme 4.4.1), que

$$\|(\mathcal{D}_3 W)|_{y_3=0}\|_0^2 = -2\lambda_1 \Im \langle \mathcal{D}_3^2 W, \mathcal{D}_3 W\rangle_+,$$

et le lemme 4.4.2 nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}\| \left(\mathcal{D}_3 \left(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})\right) W\right) |_{y_3=0}\|_0 &\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{-1}) \| \left(\mathcal{D}_3 W\right) |_{y_3=0}\|_0 \\ &\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2}) \left(\|\mathcal{D}_3^2 W\|_{0,+} \|\mathcal{D}_3 W\|_{0,+}\right) \\ &\leq C\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}.\end{aligned}$$

Le résultat du lemme est bien démontré.

$\square$

4.5 *Formes normales*

Nous allons effectuer une transformation de l'opérateur P en une forme normale convenant à notre problème. Nous poserons

$$\zeta_0(y', \eta') = b(y', \eta')\,(1 - r(y', \eta')) \tag{4.72}$$

avec

$$b(y', \eta') = (2q(y', \eta'))^{-2/3}. \tag{4.73}$$

De plus, nous définirons

$$a(y', \eta') = b(y', \eta')^{1/2}. \tag{4.74}$$

Nous chercherons à obtenir une forme normale convenable pour le problème de Dirichlet pour P dans un voisinage de la variété glancing. Pour cela, nous allons utiliser une classe spéciale de λ_1-opérateurs intégraux de Fourier totalement caractéristiques .

On définit

$$P_0 = \mathcal{D}_3^2 + y_3 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\,(B_1(y', \mathcal{D}') + \beta B_2(y', \mathcal{D}')) \tag{4.75}$$

où $B_1(y', \mathcal{D}')$ et $B_2(y', \mathcal{D}')$ sont des λ_1-opérateurs pseudodifférentiels autoadjoints sur Γ, dont les symboles principaux respectifs sont $\zeta_0(y', \eta')$ et $b(y', \eta')$.

On considère le λ_1-opérateur intégral de Fourier totalement caractéristique A défini par

$$Af(y, \lambda_1) = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^3 \int e^{i\lambda_1}\,(\langle y' - x', \eta'\rangle + (y_3 a(y', \eta') - x_3)\eta_3)\,\widetilde{\Psi}^a(y, \eta, \lambda_1) f(x) d\eta dx.$$

Nous renvoyons à l'appendice 2 pour des définitions des différents termes de cette expression ((4.121) et (4.122)).

D'après la proposition 4.8.4, pour tout symbole $g(y', \eta', \lambda) \in S_{cl}^{0,0}(T^*\mathbb{R}^2)$, on a

$$AOp_{\lambda_1}(g) = (Op_{\lambda_1}(g) + Op_{\lambda_1}(\tilde{r}) y_3 \mathcal{D}_3) Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\varrho}) A + \lambda^{-1} A_1$$

où A_1 est de la même forme que A et $r, \theta_\varrho \in S^0_{la}$. De plus, θ_ϱ est donnée par (4.118), $\theta(y, \eta) = 1$ dans un voisinage de $supp\psi_0$.

4.5.1 Formules de commutation

Lemme 4.5.1 *Soit A un λ_1-opérateur intégral de Fourier totalement caractéristique défini comme précédemment. Alors, on montre que*

$$AP = P_1 A + \lambda^{-1} A_1 \tag{4.76}$$

avec

$$P_1 = \left(P_0 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)\mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_2) y_3 \mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3) y_3^2\right) Op_{\lambda_1}(\tilde{h}_\rho) \tag{4.77}$$

les fonctions g_j appartenant à S^0_{la} ; A_1 est du même type que A ; h est une fonction à support compact dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$h(y, \eta) = a(y', \eta')^{-2} + \mathcal{O}(\eta_3).$$

Preuve : La démonstration de ce lemme est basée sur les propriétés du calcul pseudodifférentiel à la manière de Hörmander, dans le cadre des λ_1-opérateurs intégraux de Fourier totalement caractéristiques .

D'après la proposition 4.8.4, on a l'égalité suivante pour un λ_1-opérateur intégral de Fourier totalement caractéristique $I(\phi)$ et un λ_1-opérateur pseudodifférentiel P

$$I(\phi)P = (P + Op_{\lambda_1}(\tilde{g})y_3\mathcal{D}_3)\, Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})I(\phi) + \lambda^{-1}I(\phi_1) \tag{4.78}$$

où g et ϕ_1 appartiennent à S^0_{la} . De plus $\widetilde{\theta_\rho}$ est définie par (4.118) et θ est une fonction C_0^∞ telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de $supp\phi$ et $|\eta_3| \leq 2\delta_0$ sur $supp\theta$.

Si on applique les opérateurs $\mathcal{D}_3$ et y_3 à A, on obtient les relations de commutation suivantes :

$$y_3A = Op_{\lambda_1}(a^{-1})Ay_3 + \lambda^{-1}A_1 \tag{4.79}$$

$$\mathcal{D}_3A = Op_{\lambda_1}(a)A\mathcal{D}_3 + \lambda^{-1}A_2 \tag{4.80}$$

On trouve donc

$$\mathcal{D}_3^2A = Op_{\lambda_1}(a^2)A\mathcal{D}_3^2 + \lambda^{-1}A_3$$

Ainsi, on peut calculer

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_3^2 + y_3)A &= Op_{\lambda_1}(a^2)A\mathcal{D}_3^2 + Op_{\lambda_1}(a^{-1})Ay_3 \\
&= A\left(Op_{\lambda_1}(a^2)\mathcal{D}_3^2 + Op_{\lambda_1}(a^{-1})y_3\right) \\
&= Op_{\lambda_1}(a^2)A\left(\mathcal{D}_3^2 + Op_{\lambda_1}(a^{-3})y_3\right)
\end{aligned}$$

Posons donc $a = (2q)^{-1/3}$, de telle sorte que $a^{-3} = 2q$.

A l'aide de (4.78), nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}
B_1A &= Op_{\lambda_1}(b(1-r))A = AB_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\
&= Op_{\lambda_1}(a^2)A(Op_{\lambda_1}(a^{-2})B_1) + \mathcal{O}(\lambda^{-1})
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
B_2A &= Op_{\lambda_1}(b)A = AB_2 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\
&= Op_{\lambda_1}(a^2)A(Op_{\lambda_1}(a^{-2})B_2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

Si nous posons maintenant $b = a^2$, nous vérifions $a^{-2}\sigma(B_1) = (1-r)$ et $a^{-2}\sigma(B_2) = \beta$.

Avec ces notations, nous pouvons déduire l'égalité suivante :

$$P_0A = Op_{\lambda_1}(a^2)A\widetilde{P}$$

où $\widetilde{P} = P_0 + R_1 = P_0 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})$ et on peut estimer

$$\|AR_1Op_{\lambda_1}(\kappa\phi u\|_{0,+})\| \leq C\|R_1Op_{\lambda_1}(\kappa\phi u\|_{0,+})\| \leq \mathcal{O}(\lambda^{-1})$$

On remarque alors que cette égalité entraîne :

$$\begin{aligned}
AP_0 &= Op_{\lambda_1}(a^{-2})P_0A + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\
&= (P_0 + Op_{\lambda_1}(g)y_3\mathcal{D}_3)Op_{\lambda_1}(a^{-2})A + \mathcal{O}(\lambda^{-1})
\end{aligned}$$

Et si on considère de la même manière les autres composantes de cette écriture de l'opérateur P, c'est-à-dire les composantes en $\mathcal{D}_3$, y_3 et $\mathcal{O}(y_3^2)$, on trouve bien, avec (4.78)

$$AP = (P_0 + R)Op_{\lambda_1}(\widetilde{h_\rho})A = P_1 A$$

où

$$R = Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)\mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_2)y_3\mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3)y_3^2$$

□

Nous posons maintenant

$$A_0 = Op_{\lambda_1}(\widetilde{h_\rho})A.$$

Nous obtenons l'écriture suivante :

$$AP = (P_0 + R)\, A_0 + \lambda^{-1} A_r \tag{4.81}$$

où P_0 est donné par (4.75) et

$$R = \lambda_1^{-1} Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)\mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_2)y_3\mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3)y_3^2.$$

D'après les propositions 4.8.1 et 4.8.2, les opérateurs A, A_0, A_r sont bornés dans $L^2(\mathbb{R}^3_+)$ et leurs normes sont bornées par une constante indépendante de λ_1.

D'autre part, nous pouvons utiliser une nouvelle fois les relations de commutation (4.79) et (4.80) dans le terme RA_0, ainsi que (4.78) . Nous calculons donc :

$$\begin{aligned}
RA_0 &= \lambda_1^{-1} Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)\mathcal{D}_3 A_0 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_2)y_3\mathcal{D}_3 A_0 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3)y_3^2 A_0 \\
&= \lambda_1^{-1} Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)\underbrace{A_0 Op_{\lambda_1}(a)}\mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_2)A_0 y_3\mathcal{D}_3 \\
&\quad + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3)\underbrace{A_0 Op_{\lambda_1}(a^{-2})}y_3^2 + \lambda^{-1}A_6 \\
&= \lambda_1^{-1} Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)Op_{\lambda_1}(a)Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0\mathcal{D}_3 + \lambda_1^{-1} Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)Op_{\lambda_1}(\tilde{r}_1)y_3\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0\mathcal{D}_3 \\
&\quad + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3)Op_{\lambda_1}(a^{-2})Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0 y_3^2 + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3)Op_{\lambda_1}(\tilde{r}_3)y_3\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0 y_3^2 \\
&\quad + Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_2)A_0 y_3\mathcal{D}_3 + \lambda^{-1}A_6
\end{aligned}$$

Parmi ces termes, nous précisons le comportement de deux d'entre eux à l'aide des relations de commutation :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^{-1} Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_1)Op_{\lambda_1}(\tilde{r}_1)y_3\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0\mathcal{D}_3 = \\
&\qquad = \lambda_1^{-1} R_4 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0\mathcal{D}_3 y_3\mathcal{D}_3 \\
&\qquad = \lambda_1^{-1} R_4 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0 y_3\mathcal{D}_3^2 + \lambda_1^{-2} R_4' Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0\mathcal{D}_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Op_{\lambda_1}(\tilde{g}_3)Op_{\lambda_1}(\tilde{r}_3)y_3\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0 y_3^2 &= R_5 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0 y_3\mathcal{D}_3 y_3^2 \\
&= R_5 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0 y_3^3\mathcal{D}_3 + \lambda_1^{-1} R_5' Op_{\lambda_1}(\widetilde{\theta_\rho})A_0 y_3^2.
\end{aligned}$$

D'après les formes des opérateurs ainsi calculés, nous pouvons rejeter dans un reste tous les termes comportant les puissances élevées de y_3, ce qui nous permet de conclure :

Lemme 4.5.2 *Nous avons*

$$RA_0 = \lambda_1^{-1} R_1 A_0 \mathcal{D}_3 + R_2 A_0 y_3 \mathcal{D}_3 + R_3 A_0 y_3^2 + \lambda^{-1} A_7$$

où A_7 est de la même nature que A_0, et $R_j = Op_{\lambda_1}(\tilde{p_j})$, avec $j = 1, 2, 3$ et $p_j \in S^0_{la}(\mathbb{R}^3_+)$

Nous passons maintenant à l'estimation de $RA_0 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W$: d'après le lemme, on remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned}\|RA_0 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} \quad \leq \quad & \|R_3 A_0 y_3^2 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} + \|R_2 A_0 y_3 \mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} + \\ & + \lambda_1^{-1} \|R_1 A_0 \mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} + \lambda^{-1} \|A_7 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+}\end{aligned}$$

Par définition des $R_j = Op_{\lambda_1}(\tilde{p_j})$ et par la proposition 4.8.1, comme $sup|p_j| \leq C_j$ alors $\|R_j\| \leq C_j + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})$; nous pouvons également dire que A_0 et A_7 sont des opérateurs bornés par une constante indépendante de λ_1.

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|RA_0 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} \quad \leq \quad & \mathcal{O}(1) \left[\lambda_1^{-1} \|\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} + \|y_3 \mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} + \right. \\ & \left. + \|y_3^2 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} + \lambda^{-1} \|Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+}\right]\end{aligned}$$

Pour pouvoir utiliser le résultat du lemme 4.4.2, nous allons commuter les opérateurs de multiplication et de différentiation y_3 et $\mathcal{D}_3$ avec $Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})$. Pour cela, nous aurons besoin des relations (4.120) (et des notations qui y sont définies). Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) \quad &= \quad Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})\mathcal{D}_3 + [\mathcal{D}_3, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})] \\ &= \quad Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})\mathcal{D}_3 + \frac{\mathrm{i}}{\lambda} Op_{\lambda_1}(\widetilde{\varphi^{(3)}})\mathcal{D}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3 \mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) \quad &= \quad y_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})\mathcal{D}_3 + y_3 [\mathcal{D}_3, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})] \\ &= \quad y_3 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})\mathcal{D}_3 + \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\left(y_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\varphi_{(3)}}) + y_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\varphi^{(3)}})\mathcal{D}_3\right) \\ &= \quad Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) y_3 \mathcal{D}_3 + \frac{1}{\mathrm{i}\lambda} y_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\varphi_{(3)}})\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}y_3^2 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) \quad &= \quad y_3 \left(Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) y_3 + [y_3, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})]\right) \\ &= \quad Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) y_3^2 + \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\left(y_3 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\varphi^{(3)}}) y_3 + y_3^2 Op_{\lambda_1}(\widetilde{\varphi^{(3)}})\right)\end{aligned}$$

Il nous reste à rappeler que $y_3 = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})$ sur le support de $\kappa\phi$ et que, φ appartenant à S^0_{la}, $Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})$ est borné par une constante indépendante de λ_1. Nous pouvons alors appliquer le lemme 4.4.2 :

$$\begin{aligned}\|RA_0 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} \quad \leq \quad & \mathcal{O}(1) \left[\lambda_1^{-1} \|Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})\mathcal{D}_3 W\|_{0,+} + \|Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}) y_3 \mathcal{D}_3 W\|_{0,+} + \right. \\ & \left. + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \|Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+}\right] \\ \leq \quad & \mathcal{O}(1) \left(\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda^{-2/3-\varepsilon}) \|u\|_{0,+}\right). \qquad (4.82)\end{aligned}$$

De plus, si la trace d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^3_+)$ sur le bord est nulle, c'est-à-dire $f|_{y_3=0} = 0$, alors

$$A_0 f|_{y_3=0} = 0 \tag{4.83}$$

et

$$\mathcal{D}_3 A_0 f|_{y_3=0} = \mathcal{A}(\mathcal{D}_3 f|_{y_3=0}), \tag{4.84}$$

avec $\mathcal{A}$ un λ_1-opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0 dans $\mathbb{R}^2$, elliptique dans un voisinage de $\{r = 1\}$. En effet,

$$A_0 f(y, \lambda_1) = [Op_{\lambda_1}(\tilde{h_\rho})(y', \mathcal{D}', \lambda) A f](y, \lambda_1)$$

et, par définition,

$$A f|_{y_3=0} = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^3 \int e^{i\lambda_1[\langle y'-x', \eta'\rangle - x_3\eta_3]} \widetilde{\Psi^a}(y', 0, \eta, \lambda_1) f(x) d\eta dx.$$

On reconnaît dans l'expression la trace de f après applications des transformées de Fourier et de Fourier inverse dans la troisième variable : il reste alors

$$\left(\int \widetilde{\Psi^a}(y', 0, \eta, \lambda_1) d\eta_3\right) f(y', 0) = 0.$$

De même, on montre que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_3 A f &= \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^3 \int e^{i\lambda_1(\ldots)}(-i\lambda_1\eta_3)\left(\frac{a(y',\eta')}{i\lambda}\widetilde{\Psi^a} - \frac{a(y',\eta')}{(i\lambda)(i\lambda_1)}\partial_{\eta_3}\Psi\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(i\lambda)(i\lambda_1)}\partial_{y_3}\Psi\right) f(x) d\eta dx \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^3 \int \mathcal{D}_{x_3}\left[e^{i\lambda_1(\ldots)}(-i\lambda_1\eta_3)\left(\frac{a(y',\eta')}{i\lambda}\widetilde{\Psi^a} - \frac{a(y',\eta')}{(i\lambda)(i\lambda_1)}\partial_{\eta_3}\Psi\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{(i\lambda)(i\lambda_1)}\partial_{y_3}\Psi\right)\right] f(x) d\eta dx \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^3 \int \left[e^{i\lambda_1(\ldots)}(-i\lambda_1\eta_3)\left(\frac{a(y',\eta')}{i\lambda}\widetilde{\Psi^a} - \frac{a(y',\eta')}{(i\lambda)(i\lambda_1)}\partial_{\eta_3}\Psi\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{(i\lambda)(i\lambda_1)}\partial_{y_3}\Psi\right)\right] (\mathcal{D}_{x_3} f)(x) d\eta dx
\end{aligned}$$

et comme précédemment, on reconnaît la multiplication d'une certaine fonction par la trace de la dérivée de f après transformation par Fourier, et enfin :

$$\mathcal{D}_3 A_0 f|_{y_3=0} = \mathcal{A}(\mathcal{D}_3 f|_{y_3=0})$$

quand on réintroduit $Op_{\lambda_1}(\tilde{h_\rho})$.

4.5.2 Estimations près de la variété glancing

Posons maintenant deux nouvelles notations :

$$w = A_0 Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W$$

$$W_2 = Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W$$

Lemme 4.5.3 *Nous avons*

$$\|P_0 w\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(1)\left(\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}\right). \tag{4.85}$$

Preuve :

$$\|w\|_{0,+}^2 = \langle A_0^* A_0 W_2, W_2\rangle$$

et, d'après la proposition 4.8.5, $A_0^* A_0 = Op_\lambda(\widetilde{\Phi})$, avec $\Phi \in S_{la}^0$ telle que $\inf(\Phi) \geq C$, et donc

$$\|w\|_{0,+}^2 \geq C\|W_2\|_{0,+}^2 - \mathcal{O}(\lambda^{-1})\|u\|_{0,+}^2. \tag{4.86}$$

D'autre part, (4.81) et (4.82) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
\|P_0 w\|_{0,+} &= \|P_0 A_0 W_2\|_{0,+} \\
&\leq \|APW_2\|_{0,+} + \|RA_0 W_2\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\|u\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(1)\left(\|PW_2\|_{0,+} + \|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}\right).
\end{aligned}$$

Il reste donc à estimer $\|PW_2\|_{0,+}$. Pour cela, on développe :

$$\begin{aligned}
\|PW_2\|_{0,+} &= \|POp_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} \\
&\leq \|Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})PW\|_{0,+} + \|[P, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})]W\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(1)\|PW\|_{0,+} + \|[P, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})]W\|_{0,+}.
\end{aligned}$$

Or, (4.56) et les relations de commutation nous donnent :

$$\begin{aligned}
[P, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})] &= [\mathcal{D}_3^2 + T - \beta, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})] \\
&= [\mathcal{D}_3^2, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})] + [T, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})] \\
&= \mathcal{O}(\lambda^{-1})\left(Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}_1)\mathcal{D}_3 + Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}_1)\mathcal{D}_3^2\right) + [T, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})]
\end{aligned}$$

Les deux premiers termes du membre de droite seront estimés directement à l'aide du lemme 4.4.1.

Quant au dernier terme, on remarque que le symbole principal de $[T, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})]$ est $\{r, \tilde{\varphi}\} = 0$, au voisinage de $\{y_3 = r - 1 = 0\}$.

Par conséquent,

$$\|[P, Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u]\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(1)\|POp_{\lambda_1}(\kappa)\phi u\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\|u\|_{0,+}. \tag{4.87}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\|PW_2\|_{0,+} &\leq \mathcal{O}(1)\|POp_{\lambda_1}(\kappa)\phi u\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\|u\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(1)\left(\|[P, Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi]u\|_{0,+} + \|Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi Pu\|_{0,+}\right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\|u\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(1)\left(\|Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi Pu\|_{0,+} + \|[T, Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi]u\|_{0,+} + \right. \\
&\qquad \left. \|[\mathcal{D}_3^2, Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi]u\|_{0,+}\right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1})\|u\|_{0,+}
\end{aligned}$$

Dans ce cas, d'une part, nous utilisons le lemme 4.4.1 pour évaluer

$$\begin{aligned}
\|[\mathcal{D}_3^2, Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi]u\|_{0,+} &= \|[\mathcal{D}_3^2,\phi]Op_{\lambda_1}(\kappa)u\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda^{-1/2-\varepsilon/2})\,(\|\mathcal{D}_3(\phi_1 Op_{\lambda_1}(\kappa)u)\|_{0,+} + \|\phi_1\mathcal{D}_3 Op_{\lambda_1}(\kappa)u\|_{0,+}) \\
&\leq \mathcal{O}(1)\|Pu\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}.
\end{aligned}$$

ϕ_1 a été définie dans la preuve du lemme 4.4.1.

D'autre part, pour le terme $[T, Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi] = [T, Op_{\lambda_1}(\kappa)]\phi$, nous remarquons que son symbole principal est $\{t_0,\kappa\}$, mais nous calculons directement :

$$\{r,\kappa\} = \{r, \psi((1-r)\lambda_1^{1/3+2\varepsilon})\} = 0$$

et

$$\{2y_3q,\kappa\} = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1+1/3+2\varepsilon}) \times \mathcal{O}(y_3).$$

Comme, de plus, $y_3 = \mathcal{O}(\lambda_1^{-1/2-\varepsilon/2})$ sur suppϕ, nous avons l'estimation suivante :

$$\|[T, Op_{\lambda_1}(\kappa)]\phi u\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon})\|u\|_{0,+}.$$

Il ne reste qu'à rassembler ces résultats pour conclure que (4.85) est démontrée.

□

Nous avons encore besoin d'un dernier résultat avant de pouvoir terminer cette partie :

Lemme 4.5.4 *Nous avons*

$$\|w\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|P_0 w\|_{0,+} \tag{4.88}$$

et

$$\|\mathcal{D}_3 w|_{y_3=0}\|_0 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|P_0 w\|_{0,+}. \tag{4.89}$$

Preuve de (4.88) : Nous notons $D_t = -\mathrm{i}\partial_t$ et L désigne la réalisation de Dirichlet autoadjointe de l'opérateur $D_t^2 + t$, défini sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Cet espace de Hilbert est doté d'une norme et d'un produit scalaire que nous noterons respectivement $\|\ \|$ et $\langle\,,\,\rangle$, sans indices, pour les différencier des normes déjà employées sur $H^s(\mathbb{R}^3_+)$.

Les valeurs propres de L sont les réels $0 < \varsigma_1 < \varsigma_2 < \ldots < \varsigma_j < \ldots$, les ς_j étant les racines de l'équation $\mathrm{Ai}(-\varsigma)=0$; Ai est la fonction d'Airy.

Le théorème spectral nous donne immédiatement

$$\langle Lf, f\rangle \geq \varsigma_1\|f\|^2$$

pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{R}_+)$.

Si on pose ensuite $t = \lambda_1^{2/3}y_3$, en appliquant l'inégalité précédente à w, nous obtenons

$$\langle\lambda_1^{2/3}(\mathcal{D}_3^2 + y_3)w, w\rangle \geq \varsigma_1\|w\|^2.$$

Enfin, (4.83) implique l'inégalité suivante :

$$\langle\lambda_1^{2/3}(\mathcal{D}_3^2 + y_3)w, w\rangle_+ \geq \varsigma_1\|w\|^2_{0,+}.$$

Nous allons maintenant séparer les parties réelle et imaginaire de cette dernière inégalité. Pour cela, nous utilisons l'écriture (4.75) et (4.57), soit

$$\begin{aligned}\lambda_1^{2/3}\langle(\mathcal{D}_3^2+y_3)w,w\rangle_+ &= \lambda_1^{2/3}\left[\langle P_0w,w\rangle_+\right.\\ &\left.+e^{-\frac{2i\pi}{3}}\langle B_1w,w\rangle_+ + e^{-\frac{2i\pi}{3}}\beta\langle B_2w,w\rangle_+\right]\end{aligned}$$

D'une part, nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_1^{2/3}\Re\langle P_0w,w\rangle_+ &\geq \varsigma_1\|w\|_{0,+}^2-\lambda_1^{2/3}\left[-\cos\frac{\pi}{3}\langle B_1w,w\rangle_+\right.\\ &\left.+\left(\cos\frac{\pi}{3}\left(\frac{\Im\lambda}{\lambda_1}\right)^2+2\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{\Im\lambda}{\lambda_1}\right)\right)\langle B_1w,w\rangle_+\right]\\ &\geq \varsigma_1\|w\|_{0,+}^2+\lambda_1^{2/3}\cos\frac{\pi}{3}\langle B_1w,w\rangle_+\\ &-\left(2\sin\frac{\pi}{3}\Im\lambda\lambda_1^{-1/3}+o(1)\right)\langle B_2w,w\rangle_+.\end{aligned}$$

Pour la partie imaginaire, nous trouvons

$$\begin{aligned}\lambda_1^{2/3}\Im\langle P_0w,w\rangle_+ &= -\lambda_1^{2/3}\left[-\sin\frac{\pi}{3}\langle B_1w,w\rangle_+\right.\\ &\left.+\left(\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{\Im\lambda}{\lambda_1}\right)^2-2\cos\frac{\pi}{3}\left(\frac{\Im\lambda}{\lambda_1}\right)\right)\langle B_1w,w\rangle_+\right]\\ &= \lambda_1^{2/3}\sin\frac{\pi}{3}\langle B_1w,w\rangle_+ +\left(2\cos\frac{\pi}{3}\Im\lambda\lambda_1^{-1/3}+o(1)\right)\langle B_2w,w\rangle_+.\end{aligned}$$

Ensuite, une combinaison linéaire adéquate de ces deux relations permet d'éliminer $\langle B_1w,w\rangle_+$:

$$\begin{aligned}\lambda_1^{2/3}|\Re\langle P_0w,w\rangle_+| &= \lambda_1^{2/3}|e^{\frac{2i\pi}{3}}\Re\langle P_0w,w\rangle_+|\\ &\geq \lambda_1^{2/3}\sin\frac{\pi}{3}\Re\langle P_0w,w\rangle_+-\lambda_1^{2/3}\cos\frac{\pi}{3}\Im\langle P_0w,w\rangle_+\\ &\geq \varsigma_1\sin\frac{\pi}{3}\|w\|_{0,+}^2-\left(2\Im\lambda\lambda_1^{-1/3}+o(1)\right)\langle B_2w,w\rangle_+.\end{aligned}\tag{4.90}$$

Or, nous avons déterminé le symbole principal de B_2 comme étant

$$\sigma(B_2)(y,\eta)=b(y',\eta')=(2q(y',\eta'))^{-2/3}$$

avec

$$q(y',\eta')=\langle d''z_0\zeta',\zeta'\rangle\geq K_{min}+\mathcal{O}(\lambda_1^{-1/3-2\varepsilon})$$

sur $supp(\kappa)$; en effet, on a noté

$$K_{min}=\inf\{\frac{q(y',\eta')}{r(y',\eta')}|(y',\eta')\in T^*\Gamma\setminus\{0\}\}.$$

Nous avons donc

$$\sigma(B_2)(y,\eta)\leq(2K_{min})^{-2/3}+\mathcal{O}(\lambda_1^{(???)})(???)$$

et

$$\langle B_2 w, w\rangle_+ \leq \left((2K_{min})^{-2/3} + o(1)\right) \|w\|^2_{0,+} \tag{4.91}$$

Enfin, nous concluons par (4.90) et (4.91) que

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1^{2/3}|\Re\langle P_0 w, w\rangle_+| & \geq & \left(\varsigma_1 \sin\frac{\pi}{3} - 2^{1/3}K_{min}^{-2/3}\Im\lambda\lambda_1^{-1/3} - o(1)\right)\|w\|^2_{0,+} \\ & \geq & \mathcal{O}(1)\|w\|^2_{0,+} \end{array}$$

tant que $\lambda \in \Lambda_+$, ce qui implique (4.88) directement.

□

Preuve de (4.89) : Posons

$$\tilde{w} = \left(\mathcal{D}_3^2 + y_3 - e^{\frac{-2i\pi}{3}} B_1\right) w;$$
$$V(y', t) = w(y', \lambda_1^{-2/3} t);$$
$$\widetilde{V}(y', t) = \lambda_1^{2/3}\tilde{w}(y', \lambda_1^{-2/3} t).$$

Nous avons alors, avec la correspondance des variables $t = \lambda_1^{2/3} y_3$, et par le même procédé qu'au début de la preuve de (4.88),

$$\left(D_t^2 + t - \lambda_1^{2/3} e^{\frac{-2i\pi}{3}} B_1\right) V = \widetilde{V}.$$

De plus, grâce à (4.83), on montre aussi que

$$V|_{t=0} = w|_{y_3=0} = 0.$$

Posons

$$c_j = \left(\int_0^\infty (\mathrm{Ai}(t - \varsigma_j))^2 dt\right)^{1/2},$$

puis

$$e_j(t) = \frac{1}{c_j}\mathrm{Ai}(t - \varsigma_j).$$

Nous voyons alors que $Le_j = \varsigma e_j$ (en effet, $\partial_t^2 e_j = (t - \varsigma_j)e_j$), mais aussi $\|e_j\| = 1$ et $\langle e_j, e_k\rangle = 0$ si $j \neq k$.

D'après le théorème spectral, on écrit ensuite, dans la base hilbertienne des $\{e_j\}$,

$$\begin{array}{rcl} V & = & \left(D_t^2 + t - \lambda_1^{2/3} e^{\frac{-2i\pi}{3}} B_1\right)^{-1} \widetilde{V} \\ & = & \sum_{j=1}^{\infty} \left(\varsigma_j - \lambda_1^{2/3} e^{\frac{-2i\pi}{3}} B_1\right)^{-1} \langle e_j, \widetilde{V}\rangle e_j \\ & = & e^{\frac{2i\pi}{3}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\varsigma_j - \lambda_1^{2/3} B_1\right)^{-1} \langle e_j, \widetilde{V}\rangle e_j, \end{array}$$

d'où on déduit

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}|_{t=0} &= e^{\frac{2i\pi}{3}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{\frac{2i\pi}{3}} \varsigma_j - \lambda_1^{2/3} B_1 \right)^{-1} \langle e_j, \widetilde{V} \rangle \frac{de_j}{dt}|_{t=0} \\
&= e^{\frac{2i\pi}{3}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{3}} \varsigma_j - \lambda_1^{2/3} B_1 \right)^{-1} \langle e_j, \widetilde{V} \rangle \mathrm{Ai}'(-\varsigma_j).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, en passant à la norme, on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}|_{t=0} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{-1} \| \left(e^{\frac{2i\pi}{3}} \varsigma_j - \lambda_1^{2/3} B_1 \right)^{-1} \| \| \langle e_j, \widetilde{V} \rangle \|_0 |\mathrm{Ai}'(-\varsigma_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} (c_j \varsigma_j)^{-1} |\mathrm{Ai}'(-\varsigma_j)| \| \langle e_j, \widetilde{V} \rangle \|_0 \,,
\end{aligned}
$$

et, si nous montrons que la série numérique réelle

$$
\mathbb{S} = \sum (c_j \varsigma_j)^{-2} (\mathrm{Ai}'(-\varsigma_j))^2
$$

est convergente, alors nous aurons

$$
\left\| \frac{dV}{dt}|_{t=0} \right\|_0 \leq \mathbb{S}^{1/2} \| \widetilde{V} \|_{0,+}. \tag{4.92}
$$

Montrons donc que la série $\mathbb{S}$ est bien convergente. D'après le développement asymptotique de la fonction de Airy et de sa première dérivée (cf [19], p. 392), quand $j \to \infty$, nous avons

$$
\mathrm{Ai}(-\varsigma_j) \sim \left(\frac{1}{\varsigma_j \pi^2} \right)^{1/4} \cos\left(\frac{2}{3} \varsigma_j^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right).
$$

$$
\mathrm{Ai}'(-\varsigma_j) \sim \left(\frac{\varsigma_j}{\pi^2} \right)^{1/4} \sin\left(\frac{2}{3} \varsigma_j^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right).
$$

Comme, d'autre part, on a l'équivalent suivant des zéros de la fonction de Airy(cf [19], pp. 403-405) :

$$
\varsigma_j \sim \left(\frac{3\pi j}{2} \right)^{2/3} \quad , \quad j \to \infty, \tag{4.93}
$$

nous avons

$$
\mathrm{Ai}'(-\varsigma_j) \sim \left(\frac{\varsigma_j}{\pi^2} \right)^{1/4} \sin\left(\pi j - \frac{\pi}{4} \right). \tag{4.94}
$$

Ensuite, nous évaluons les c_j par

$$\begin{aligned}
c_j^2 &= \int_0^\infty (\mathrm{Ai}(t-\varsigma_j))^2 dt = \int_{-\varsigma_j}^\infty (\mathrm{Ai}(\tau))^2 d\tau \\
&\geq \int_{-\varsigma_j}^{-\varsigma_j/2} (\mathrm{Ai}(\tau))^2 d\tau = \int_{\varsigma_j/2}^{\varsigma_j} (\mathrm{Ai}(-\tau))^2 d\tau \\
&\sim \int_{\varsigma_j/2}^{\varsigma_j} \frac{1}{\tau^{1/2}\pi} \cos^2\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) d\tau \\
&\geq \frac{1}{\varsigma_j^{1/2}\pi} \int_{\varsigma_j/2}^{\varsigma_j} \cos^2\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) d\tau \\
&\underset{\mu=\frac{2}{3}\tau^{3/2}}{\geq} \frac{(3/2)^{-1/3}}{\varsigma_j^{1/2}\pi} \int_{\frac{1}{3}\varsigma_j^{3/2}}^{\frac{2}{3}\varsigma_j^{3/2}} \mu^{-1/3} \cos^2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \\
&\geq \frac{1}{\varsigma_j \pi} \int_{\frac{1}{3}\varsigma_j^{3/2}}^{\frac{2}{3}\varsigma_j^{3/2}} \cos^2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \\
&\geq \frac{1}{2\varsigma_j \pi} \int_{\frac{1}{3}\varsigma_j^{3/2}}^{\frac{2}{3}\varsigma_j^{3/2}} \left(1 + \cos\left(2\mu - \frac{\pi}{2}\right)\right) d\mu \\
&\geq C\varsigma_j^{1/2},
\end{aligned}$$

avec $C > 0$ une constante réelle indépendante de j.

Si nous revenons au terme principal de la série $\mathbb{S}$, nous le majorons à l'aide du résultat précédent et de (4.93) et (4.94) par

$$(c_j\varsigma_j)^{-2}(\mathrm{Ai}'(-\varsigma_j))^2 \leq C\varsigma_j^{-2} = \mathcal{O}(j^{-4/3}).$$

Nous en déduisons donc que la série est convergente et que (4.92) est vérifiée.

Enfin, si nous repassons dans la variable y_3 dans (4.92) avec le changement de variable $t = \lambda_1^{2/3} y_3$, nous aurons

$$\|\mathcal{D}_3 w|_{y_3=0}\|_0 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|\tilde{w}\|_{0,+}.$$

Par définition de $\tilde{w}$, et en utilisant (4.75) et (4.91), nous obtenons

$$\|\mathcal{D}_3 w|_{y_3=0}\|_0 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|P_0 w\|_{0,+} + \mathcal{O}(1)\|\tilde{w}\|_{0,+}. \tag{4.95}$$

Clairement, (4.89) découle de (4.88) et de (4.95), ce qui termine la preuve du lemme.

□

Nous terminons cette partie en démontrant le résultat qui découle de notre travail sur P et des estimations obtenues.

Proposition 4.5.1 *Pour tout* $\lambda_1 \gg 1$, *nous avons les estimations suivantes :*

$$\|W_2\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}, \tag{4.96}$$

$$\|\mathcal{D}_3 W_2|_{y_3=0}\|_0 \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}. \tag{4.97}$$

Preuve : Pour prouver (4.96), on considère d'abord (4.86) :

$$\|W_2\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(1)\|A_0 W_2\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\|u\|_{0,+};$$

puis, les résultats des lemmes précédents donnent :

$$\begin{aligned}
\|W_2\|_{0,+} &\underset{(4.88)}{\leq} \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|P_0 A_0 W_2\|_{0,+} + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\|u\|_{0,+} \\
&\underset{(4.85)}{\leq} \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + \left(\mathcal{O}(\lambda_1^{-\varepsilon}) + \mathcal{O}(\lambda_1^{-1})\right)\|u\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}.
\end{aligned}$$

De même, pour prouver (4.97), on utilise (4.84) ($\mathcal{A}$ est un λ_1-opérateur pseudo-différentiel elliptique), puis (4.89) et (4.85) :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_3 W_2|_{y_3=0}\|_0 &\leq \mathcal{O}(1)\|\mathcal{A}(\mathcal{D}_3 W_2|_{y_3=0})\|_0 \\
&\leq \mathcal{O}(1)\|\mathcal{D}_3 A_0 W_2|_{y_3=0}\|_0 \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|P_0 W_2\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}.
\end{aligned}$$

□

4.6 *Preuve de la proposition 4.4.1*

4.6.1 Un résultat intermédiaire

Les notations utilisées sont celles du début de la section 4.4.2.

Proposition 4.6.1 *Nous avons les majorations suivantes pour tout* $\lambda \in \Lambda_+$

$$\|u_1\|_{2,+} \leq \mathcal{O}(\lambda^{2/3})\|v_1\|_{0,+} \tag{4.98}$$

$$\|h\|_0 \leq \mathcal{O}(\lambda^{2/3})\|v_1\|_{0,+} \tag{4.99}$$

Preuve : Pour prouver (4.98), on majore tout d'abord $W = Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u$ à l'aide de (4.71) et de (4.96), comme suit :

$$\begin{aligned}
\|W\|_{0,+} &\leq \|(1 - Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi}))W\|_{0,+} + \|Op_{\lambda_1}(\tilde{\varphi})W\|_{0,+} \\
&\leq \left(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\right)\|Pu\|_{0,+} + \left(\mathcal{O}(\lambda_1^{-2/3-\varepsilon}) + o(1)\right)\|u\|_{0,+} \\
&\leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}.
\end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 4.4.2, on peut majorer $\mathcal{D}_3 W$ et $\mathcal{D}_3^2 W$ directement par

$$\|\mathcal{D}_3 W\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1/2})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}$$

et

$$\|\mathcal{D}_3^2 W\|_{0,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{1/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}.$$

Enfin, par définition de κ et de $r(y', \eta')$, on a déjà vu que η' était borné sur suppκ, ce qui permet de majorer toutes les normes $\|\mathcal{D}_3^\alpha W\|_{0,+}$ pour $1 \leq |\alpha| \leq 2$ de la même manière.

Nous avons ainsi :

$$\|W\|_{2,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+}.$$

Ensuite, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,+} &\leq \|(1-\phi)u\|_{2,+} + \|\phi u\|_{2,+} \\
&\leq \|(1-\phi)u\|_{2,+} + \|Op_{\lambda_1}(\kappa)\phi u\|_{2,+} + \|Op_{\lambda_1}(1-\kappa))\phi u\|_{2,+}
\end{aligned}$$

et il suffit d'utiliser l'inégalité précédente, (4.59) et (4.60) pour obtenir

$$\|u\|_{2,+} \leq \mathcal{O}(\lambda_1^{2/3})\|Pu\|_{0,+} + o(1)\|u\|_{0,+},$$

ce qui est bien équivalent à (4.98).

Pour prouver (4.99), on procède de la même manière, en utilisant cette fois les majorations (4.61), (4.71) et (4.97).

□

4.6.2 Preuve de (4.50) et (4.51)

On réemploie ici les notations de la section 4.4.1**1.4.1**.

Pour ce qui est de la preuve de (4.50), on a, d'une part :

$$\begin{aligned}(1-\varphi)G_{sc}(\lambda)v &= G^0_{sc}(\lambda)\left(\Delta|_{\mathbb{R}^3_{sc}}+\lambda^2\right)(1-\varphi)G_{sc}(\lambda)v\\ &= G^0_{sc}(\lambda)(1-\varphi)\left(\Delta|_{\mathbb{R}^3_{sc}}+\lambda^2\right)G_{sc}(\lambda)v+\\ &\quad +G^0_{sc}(\lambda)\left[\varphi,\Delta|_{\mathbb{R}^3_{sc}}\right]G_{sc}(\lambda)v\end{aligned}$$

d'où l'estimation :

$$\begin{aligned}\|(1-\varphi)G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})} &\leq \|G^0_{sc}(\lambda)(1-\varphi)\left(\Delta|_{\mathbb{R}^3_{sc}}+\lambda^2\right)G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}+\\ &\quad +\|G^0_{sc}(\lambda)\left[\varphi,\Delta|_{\mathbb{R}^3_{sc}}\right]G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}\\ &\leq \mathcal{O}(1)\|G^0_{sc}(\lambda)(1-\varphi)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}+\mathcal{O}(\lambda^{-1})\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}\\ &\leq \mathcal{O}(\lambda^{-2})\|v\|_{L^2(\Omega_{sc})}+\mathcal{O}(\lambda^{-1})\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}\end{aligned}$$

D'autre part, on évalue, d'après (4.98),

$$\begin{aligned}\|\varphi G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})} &\leq C|\lambda|^{2/3}\|v_1\|_{L^2(\Omega_{sc})}\\ &\leq C|\lambda|^{2/3}\|\lambda_1^{-2}\varphi v\|_{L^2(\Omega_{sc})}+C|\lambda|^{2/3}\|\lambda_1^{-2}[\varphi,\Delta_{sc}]G_{sc}(\lambda)v\|_{H^1(\Omega_{sc})}\\ &\leq C|\lambda|^{-4/3}\|v\|_{L^2(\Omega_{sc})}+C|\lambda|^{2/3}|\lambda_1|^{-2}|\lambda|\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}\\ &\leq \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}+\mathcal{O}(\lambda^{-4/3})\|v\|_{L^2(\Omega_{sc})}\end{aligned}$$

Et, finalement

$$\begin{aligned}\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})} &\leq \|\varphi G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}+\|(1-\varphi)G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}\\ &\leq \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}+\mathcal{O}(\lambda^{-4/3})\|v\|_{L^2(\Omega_{sc})}\end{aligned}$$

nous donne le résultat

$$\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}\leq \mathcal{O}(\lambda^{-4/3})\|v\|_{L^2(\Omega_{sc})}$$

et donc

$$\|G_{sc}(\lambda)\|\leq \mathcal{O}(\lambda^{-4/3})$$

Ensuite, l'estimation (4.51) découle de (4.50) et de (4.99) ; en effet :

$$\begin{aligned}\|\delta_\Gamma\partial_{\tilde{\nu}}G_{sc}(\lambda)v\|_{L^2(\Gamma)} &= \|\delta_\Gamma\partial_{\tilde{\nu}}\varphi G_{sc}(\lambda)v\|_{L^2(\Gamma)}\\ &\underset{(4.99)}{\leq} \lambda_1.\mathcal{O}(\lambda^{2/3})\|P\varphi G_{sc}(\lambda)v\|_{L^2(\Omega_{sc})}\\ &\leq \mathcal{O}(\lambda^{5/3})\left(\lambda_1^{-2}\|\varphi v\|_{L^2(\Omega_{sc})}+\|[P,\varphi]G_{sc}(\lambda)v\|_{L^2(\Omega_{sc})}\right)\\ &\leq \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})\|v\|_{L^2(\Omega_{sc})}+\mathcal{O}(\lambda^{2/3})\|G_{sc}(\lambda)v\|_{H^2(\Omega_{sc})}\\ &\underset{(4.50)}{\leq} \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})\|v\|_{L^2(\Omega_{sc})},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de ces estimations.

$\square$

Remarque : La position de λ dans la portion du plan complexe Λ_+ découle de la démonstration du lemme 4.5.4 ; il apparaît là comme une condition nécessaire pour notre proposition.

4.6.3 Estimation de K_{sc}

Un analogue de la formule de Green La formule de Green

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dx = \int_\Gamma \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}\sigma,$$

où $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, admet une généralisation pour un opérateur différentiel du second ordre dans Ω.

Soit A cet opérateur, de symbole principal $a(x,\xi)$, dont on note l'adjoint formel A^*. ν désigne toujours la normale extérieure unitaire à Γ dans Ω.

On a alors le résultat suivant :

Lemme 4.6.1 *Pour tout couple* $(u,v) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$*, on a l'identité*

$$\langle Au, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, A^*v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle (a(x,\nu)u)\,|_\Gamma, \partial_\nu v|_\Gamma\rangle_{L^2(\Gamma)} \tag{4.100}$$

et $\nu|_\Gamma = 0$.

Remarque : Cette formule est dérivée de la *formule de Green généralisée* (cf lemme 10.1 et ses corollaires 10.2 et 10.3, puis la remarque 37.2 dans [27]) et s'obtient à l'aide d'intégrations par parties.

Preuve de (4.52) Dans notre problème, nous obtenons, pour toutes fonctions $u, v \in H^2(\Omega_{sc})$,

$$\langle (\Delta_{sc} + \lambda^2)u, v\rangle_{L^2(\Omega_{sc})} - \langle u, (\Delta^*_{sc} + \overline{\lambda}^2)v\rangle_{L^2(\Omega_{sc})} = \langle (\sigma(x,\widetilde{\nu})u)\,|_\Gamma, \partial_{\widetilde{\nu}} v|_\Gamma\rangle_{L^2(\Gamma)} \tag{4.101}$$

D'après (4.46), on obtient

$$\langle \sigma(y,\tilde{\nu})u|_\Gamma, \partial_{\tilde{\nu}} v|_\Gamma\rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle M_0 u|_\Gamma, \partial_{\tilde{\nu}} v|_\Gamma\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

En effet, l'application $\partial_{y'}s$ étant linéaire, l'antécédent du point considéré est $({}^t\partial_{y'}s)^{-1}(0)\tilde{\nu}' = \mathbf{0}$.

On désigne ensuite par $G^*_{sc}(\lambda)w \in h^2(\Omega_{sc}$, pour toute fonction $w \in L^2(\Omega_{sc})$, la solution du problème

$$\begin{cases} (\Delta^*_{sc} + \overline{\lambda}^2)G^*_{sc}(\lambda)w = w & \text{dans } \Omega_{sc} \\ G^*_{sc}(\lambda)w|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

On a alors, pour toutes fonctions $f \in L^2(\Gamma)$ et $w \in L^2(\Omega_{sc})$,

$$\begin{aligned} \langle K_{sc}(\lambda)f, w\rangle &= \langle K_{sc}(\lambda)f, (\Delta^*_{sc} + \overline{\lambda}^2)G^*_{sc}(\lambda)w\rangle \\ &= \langle (\Delta_{sc} + \lambda)K_{sc}(\lambda)f, G^*_{sc}(\lambda)w\rangle \\ &+ \langle M_0 f, \delta_\Gamma \partial_{\tilde{\nu}} G^*_{sc}(\lambda)w\rangle \end{aligned}$$

et finalement, on peut évaluer la norme

$$\|K_{sc}(\lambda)\| \leq \|M_0\| \|\delta_\Gamma \partial_{\tilde{\nu}} G^*_{sc}(\lambda)\|$$

en majorant le terme de droite de la même manière que dans la majoration de $\|\delta_\Gamma \partial_{\tilde{\nu}} G_{sc}(\lambda)\|$. Finalement, on a l'estimation recherchée :

$$\|K_{sc}(\lambda)\| \leq \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})$$

4.6.4 Preuve du corollaire 4.4.1

Pour passer à la forme matricielle, on a besoin de déterminer pour quelles valeurs de λ l'estimation (4.52) est vraie dans chaque composante.

Rappelons que nous avons défini :

$$\mathcal{K}_{sc} = M_0^{-1} \begin{pmatrix} K_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & K_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & K_{sc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_0+2\mu_0}}\right) \end{pmatrix}$$

et que, si $\lambda \in \Lambda_+$, alors on a l'estimation de Dirichlet

$$\|K_{sc}(\lambda)\| \leq \mathcal{O}(\lambda^{-1/3}).$$

On a (4.50), (4.51) et (4.52) quand $\lambda \in \Lambda_+$. Quand $\lambda \in \Upsilon_+$, ces trois estimations sont vérifiées en remplaçant λ par $\lambda/\sqrt{\mu_0}$ et par $\lambda/\sqrt{\lambda_0 + 2\mu_0}$, et seulement quand $\lambda \in \Upsilon_+$. Par conséquent, si on considère les normes matricielles de $\mathcal{G}_{sc}(\lambda)$ et $\mathcal{K}_{sc}(\lambda)$, et celle de $\partial_{\tilde{\nu}} \mathcal{G}_{sc}(\lambda)$ sur le bord Γ, pour ces valeurs de λ, on a bien les estimations (4.53), (4.54) et (4.55), ce qui prouve le corollaire.

4.7 *Estimations de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann du problème d'élasticité linéaire*

Preuve : Cardoso, Popov et Vodev ont montré ces résultats dans le cas où λ est réel. Nous allons l'étendre dans un voisinage du plan complexe grâce aux propriétés de la distorsion analytique et aux estimations du corollaire 4.4.1.

Pour cela, rappelons que $K_e(\lambda)f$ est une solution de l'équation

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)K_e(\lambda)f = 0 & \text{dans } \Omega \\ K_e(\lambda)f|_\Gamma = f & \\ K_e(\lambda)f & \lambda - \text{sortante} \end{cases} \tag{4.102}$$

pour $f \in H^s(\Gamma)$.

On définit l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur le bord Γ, pour tout nombre complexe λ par :

$$\mathcal{N}_e(\lambda)f := \frac{1}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{3} \Xi_j\left(K_e(\lambda)f\right)\nu_j|_\Gamma \tag{4.103}$$

Pour tous les $j = 1, 2, 3$, les opérateurs Ξ_j sont des opérateurs différentiels vectoriels définis par

$$H^s(\Omega) \ni \Xi_j(v) = \begin{pmatrix} \sigma_{1j}(v) \\ \sigma_{2j}(v) \\ \sigma_{3j}(v) \end{pmatrix} \quad \forall v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in H^{s+1}(\Omega) \tag{4.104}$$

Les tenseurs de rigidité σ_{ij} ont été définis en (4.6).

Nous allons exprimer cet opérateur de Dirichlet-to-Neumann tout d'abord dans les coordonnées locales (y', y_3), puis dans les variables déformées par le *complex scaling*.

Nous comparerons ensuite $\mathcal{N}_e(\lambda)$ à sa version déformée $\mathcal{N}_{e,sc}(\lambda)$ sur le bord.

Comme dans la section précédente, nous étudions le symbole principal de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann, qui est une application matricielle dans la variable ξ. Nous utilisons alors l'identité de passage en coordonnées locales

$$\xi = {}^t\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}(y_0)\eta$$

Tout d'abord, le symbole principal de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann est une application matricielle 3×3 . Or, dans les coordonnées locales (y', y_3), la normale extérieure au bord de l'obstacle est transformée en $\overline{\nu} = {}^t\ (\mathbf{0}, 1)$, et le bord est défini par l'équation $y_3 = 0$; par conséquent, l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann se résume à :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{N}_e(\lambda)f} &= \frac{1}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{3} \overline{\Xi_j\left(K_e(\lambda)f\right)}\,\overline{\nu_j}|_\Gamma \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\overline{\Xi_3(K_e(\lambda)f)}|_{\{y_3=0\}} \end{aligned} \tag{4.105}$$

Nous allons maintenant exprimer le symbole principal de Ξ_3, que nous noterons S_3, en coordonnées locales. Tout d'abord, nous notons que l'on peut exprimer chacune des composantes de S_3 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_{13}(\xi) &= \mu_0 \ {}^t(J_{13}\xi) \\ S_{23}(\xi) &= \mu_0 \ {}^t(J_{23}\xi) \\ S_{33}(\xi) &= \mu_0 \ {}^t(J_{33}\xi) + \lambda_0{}^t\xi \end{aligned}$$

où les J_{i3} sont les matrices 3×3 :

$$J_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on utilise l'identité du passage en coordonnées rappelée plus haut et on obtient :

$$\overline{S_3}(\eta) = \left(\begin{array}{cc|c} \mu_0\eta_3 & 0 & \\ 0 & \mu_0\eta_3 & \mu_0^t(\partial_{y'}s)^{-1}(0)\eta' \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\lambda_0^t({}^t(\partial_{y'}s)^{-1}(0)\eta')} & (\lambda_0 + 2\mu_0)\eta_3 \end{array}\right) \tag{4.106}$$

que l'on peut réécrire, grâce aux notations de la section précédente, sous la forme :

$$S_3(\eta) = M_0\eta_3 + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \mu_0^t(\partial_{y'}s)^{-1}(0)\eta' \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\lambda_0^t({}^t(\partial_{y'}s)^{-1}(0)\eta')} & 0 \end{array}\right) \tag{4.107}$$

Nous écrivons ensuite :

$$\overline{\Xi_3}(v) = M_0 D_3 v + \left(\begin{array}{c} \mu_0 D' v_3 \\ \\ \hline \lambda_0(div'v') \end{array}\right)$$

où div' est la divergence par rapport aux variables y' sur Γ.

L'opérateur de Dirichlet-to-Neumann en coordonnées locales, avec la restriction au bord (soit $y_3 = 0$), est alors :

$$\overline{\mathcal{N}_e(\lambda)f} = \frac{1}{\lambda_1}\left[M_0 D_3 v(y',0) + \left(\begin{array}{c} \mu_0(\nabla' v_3)(y',0) \\ \\ \hline \lambda_0(\nabla' \times v')(y',0) \end{array}\right)\right] \tag{4.108}$$

avec $v = K_e(\lambda)f$.

Pour effectuer la comparaison avec l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann après la distortion analytique, on modifie les coordonnées par la même méthode que dans la section précédente :

$$\xi = {}^t\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1}(y_0)\eta$$

ce qui donne, avec $\tilde{v} = K_{e,sc} f$:

$$\widetilde{\Xi_3}(\tilde{v}) = \frac{1}{g'(y_3)} M_0 D_3 \tilde{v} + \begin{pmatrix} \mu_0 D' \tilde{v}_3 \\ \hline \lambda_0 (div' \tilde{v}') \end{pmatrix} + \mathcal{O}(g(y_3))\tilde{v} \tag{4.109}$$

Comme précédemment, quand on est proche du bord, on a $g(y_3) = y_3 exp(-\mathrm{i}\pi/3)$ et $g'(y_3) = exp(-\mathrm{i}\pi/3)$, puis, quand on se restreint au bord, $y_3 = 0$, la normale extérieure au bord est $\tilde{\nu} = (0, e^{-\mathrm{i}\pi/3})$ dans les coordonnées choisies ; en tenant compte de ces conditions, l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann déformé analytiquement au bord est alors :

$$\widetilde{\mathcal{N}_e}(\lambda) f = \frac{1}{\lambda_1}\left[M_0 D_3 \tilde{v}(y', 0) + e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \begin{pmatrix} \mu_0 (\nabla' \tilde{v}_3)(y', 0) \\ \hline \lambda_0 (\nabla' \times \tilde{v}')(y', 0) \end{pmatrix} \right] \tag{4.110}$$

Nous obtenons finalement

$$\mathcal{N}_e(\lambda) - \mathcal{N}_{e,sc}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_1} e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \begin{pmatrix} \mu_0 (\nabla' v_3)(y', 0) \\ \hline \lambda_0 (\nabla' \times v')(y', 0) \end{pmatrix} \tag{4.111}$$

sur Γ. Posons $\lambda_1 = \Re(\lambda) \gg 1$.

On réutilise ici le principe de la distorsion analytique jusqu'au bord, en rappelant la notation $\Omega_{sc} \subset \mathbb{C}^3$, l'ensemble image de l'application (4.41), et $\Delta_{e,sc} = \Delta|_{\Omega_{sc}}$. On peut alors définir les opérateurs

$$G_{e,sc}(\lambda) : L^2(\Omega_{sc}) \to H^2(\Omega_{sc}), \text{ et } K_{e,sc}(\lambda) : L^2(\Gamma) \to H^{1/2}(\Omega_{sc})$$

comme les solutions respectives des systèmes

$$\begin{cases} (\Delta_{e,sc} + \lambda^2) G_{e,sc}(\lambda) v = v & \text{dans } \Omega_{sc} \\ G_{e,sc}(\lambda) v|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\Delta_{e,sc} + \lambda^2) K_{e,sc}(\lambda) f = 0 & \text{dans } \Omega_{sc} \\ K_{e,sc}(\lambda) f|_\Gamma = f \end{cases}$$

On note $\delta_\Gamma : C^\infty(\Omega_{sc}) \to C^\infty(\Gamma)$ l'opérateur de restriction sur le bord. Alors, on a, pour tout $\lambda \in \Lambda$, d'après (4.111)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_e(\lambda) - \mathcal{N}_e(\lambda_1) &= \mathcal{N}_{e,sc}(\lambda) - \mathcal{N}_{e,sc}(\lambda_1) \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \delta_\Gamma \widetilde{\Xi_3} (K_{e,sc}(\lambda) - K_{e,sc}(\lambda_1)) \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \delta_\Gamma \widetilde{\Xi_3} \left((\Im\lambda (\Im\lambda - 2\mathrm{i}\lambda_1)) \, G_{e,sc}(\lambda) K_{e,sc}(\lambda_1) \right) \\ &= \Im\lambda \left(\frac{\Im\lambda}{\lambda_1} - 2\mathrm{i} \right) \delta_\Gamma \widetilde{\Xi_3} \left(G_{e,sc}(\lambda) K_{e,sc}(\lambda_1) \right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_e(\lambda) - \mathcal{N}_e(\lambda_1)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma))} &\le \mathcal{O}(\Im\lambda) \|\delta_\Gamma \widetilde{\Xi_3} \left(G_{e,sc}(\lambda) K_{e,sc}(\lambda_1) \right) \|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma))} \\ &\le \mathcal{O}(|\lambda|^{1/3}) \|\delta_\Gamma \widetilde{\Xi_3} G_{e,sc}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_{sc}, L^2(\Gamma))} \|K_{e,sc}(\lambda_1)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Omega_{sc}))} \end{aligned} \tag{4.112}$$

Or, d'après le résultat de la proposition 4.4.1 et de son corollaire, nous pouvons majorer directement

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}_e(\lambda) - \mathcal{N}_e(\lambda_1)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma))} &\leq \mathcal{O}(|\lambda|^{1/3})\mathcal{O}(|\lambda|^{-1/3})\mathcal{O}(|\lambda|^{-1/3}) \\
&\leq \mathcal{O}(|\lambda|^{-1/3}). \qquad (4.113)
\end{aligned}$$

Enfin, d'après le résultat de [6] dans le même cas pour λ réel, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}_e(\lambda)\| &\leq \|\mathcal{N}_e(\lambda) - \mathcal{N}_e(\lambda_1)\| + \|\mathcal{N}_e(\lambda_1)\| \\
&\leq c + +\mathcal{O}(|\lambda|^{-1/3}) \\
&\leq C
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Re\langle \mathcal{N}_e(\lambda) f, f\rangle &= \Re\langle (\mathcal{N}_e(\lambda) - \mathcal{N}_e(\lambda_1))\, f, f\rangle + \Re\langle \mathcal{N}_e(\lambda_1) f, f\rangle \\
&\leq \mathcal{O}(|\lambda|^{-1/3})\|f\|^2.
\end{aligned}$$

□

4.8 *Appendice 1 : Calcul pseudodifférentiel et opérateurs totalement caractéristiques*

λ-opérateurs pseudodifférentiels totalement caractéristiques. Nous rassemblons ici la définition et certaines propriétés d'une classe d'opérateurs pseudodifférentiels sur $\overline{\mathbb{R}^3_+}$, la fermeture du demi-espace $\mathbb{R}^3_+ = \{y \in \mathbb{R}^3\,;\, y_3 > 0\}$.

Définition 4.8.1 *Etant donnés $m, k \in \mathbb{R}$, on note $S^{m,k}_+$ l'ensemble des fonctions $\varphi(y,\eta,\lambda)$ définies dans $\overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^3 \times [1,+\infty)$, telles que $\varphi(.,\lambda) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^3 \times [1,+\infty))$ pour tout $\lambda \in [1,+\infty)$, et pour tous les multi-indices α, β et tous les entiers $\nu \geq 1$,*

$$\left|\partial^\alpha_\eta \partial^\beta_y \varphi(y,\eta,\lambda)\right| \geq C_{\alpha,\beta,\nu}(1+y_3)^{-\nu}(1+|\eta|)^{m-|\alpha|}\lambda^k\,, \quad \forall (y,\eta,\lambda) \in \overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^3 \times [1,+\infty)$$

De plus, on définit $S^{-\infty,-\infty}_+ = \cap_{m,k} S^{m,k}_+$, la classe résiduelle associée.

Pour toute fonction $\varphi \in S^{m,k}_+$, on pose

$$\tilde\varphi(y,\eta,\lambda) = \begin{cases} \varphi(y,\eta',y_3\eta_3,\lambda) & \text{pour } y_3 \geq 0, \\ 0 & \text{quand } y_3 < 0. \end{cases} \tag{4.114}$$

On définit également l'opérateur

$$\tilde\varphi(y,\mathcal{D},\lambda)u = Op_\lambda(\tilde\varphi)u = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^3 \int e^{\mathrm{i}\lambda\langle y,\eta\rangle}\tilde\varphi(y,\eta,\lambda)\hat u(\lambda\eta)\,d\eta \tag{4.115}$$

pour $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^3)$.

Remarquons que

$$(\tilde\varphi(y,\mathcal{D},\lambda)u)\,|_{y_3=0} = \varphi(y',0,\mathcal{D}',0,\lambda)\,(u|_{y_3=0})\,. \tag{4.116}$$

Le noyau de Schwartz de $\tilde\varphi(y,\mathcal{D},\lambda)$ est donné par l'intégrale oscillante

$$K_{\tilde\varphi}(x,y,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^3 \int e^{\mathrm{i}\lambda\langle y-x,\eta\rangle}\tilde\varphi(y,\eta,\lambda)\,d\eta, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^6.$$

On remarque alors que

$$supp K_{\tilde\varphi}(.,.,\lambda) \subset \{x_3 \geq 0, y_3 \geq 0\}, \quad \lambda \geq 1$$

si et seulement si la *condition lacunaire* est satisfaite :

$$\begin{cases} \int e^{\mathrm{i}\lambda t\eta_3}\varphi(y,\eta,\lambda)\,d\eta_3 = 0 \\ \text{pour } t \geq 1,\ (y,\eta',\lambda) \in \overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^2 \times [1,+\infty). \end{cases} \tag{4.117}$$

Dans ce cas, on écrit que la fonction φ appartient à la classe $S^{m,k}_{la}$.

Si on note ϱ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat\varrho = 1$ dans un voisinage de 0 et $supp\hat\varrho \subset (-1, 1/2)$, alors, pour toute $\varphi \in S^{m,k}_+$, le symbole

$$\varphi_\varrho(y,\eta,\lambda) = \int \varphi(y,\eta',\eta_3 - \frac{s}{\lambda},\lambda)\varrho(s)\,ds \tag{4.118}$$

vérifie la *condition lacunaire forte*

$$\begin{cases} \int e^{\mathrm{i}\lambda t\eta_3}\varphi_\varrho(y,\eta,\lambda)\,d\eta_3 = 0 \\ \text{pour } t \notin (-1,1/2)\,(y,\eta',\lambda) \in \overline{\mathbb{R}^3_+} \times \mathbb{R}^2 \times [1,+\infty). \end{cases} \tag{4.119}$$

et $\varphi_\varrho - \varphi \in S_+^{-\infty,-\infty}$. Dans ce cas, on dit que $\varphi_\varrho \in S^{m,k}_{sla}$.

On a également les propositions suivantes :

Proposition 4.8.1 *Soit $\varphi \in S^{0,0}_{la}$ et $sup|\varphi(y,\eta,\lambda)| \leq C_0$. Alors, l'opérateur*

$$\tilde{\varphi}(y,\mathcal{D},\lambda) : L^2(\mathbb{R}^3_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3_+)$$

est uniformément borné de norme $\leq C_0 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})$ pour tout $\lambda \geq 1$.

Proposition 4.8.2 *Pour toute fonction $\varphi \in S^{m,k}_{la}$, les relations de commutation suivantes sont vraies :*

$$\begin{cases} [\mathcal{D}_3, \tilde{\varphi}(y,\mathcal{D},\lambda)] = \frac{1}{i\lambda}\widetilde{\varphi_{(3)}}(y,\mathcal{D},\lambda) + \frac{1}{i\lambda}\widetilde{\varphi^{(3)}}(y,\mathcal{D},\lambda)\mathcal{D}_3, \\ [y_3, \tilde{\varphi}(y,\mathcal{D},\lambda)] = \frac{iy_3}{\lambda}\widetilde{\varphi^{(3)}}(y,\mathcal{D},\lambda), \end{cases} \tag{4.120}$$

où $\varphi_{(3)} = \partial\varphi/\partial y_3$ et $\varphi^{(3)} = \partial\varphi/\partial\eta_3$.

λ-opérateurs intégraux de Fourier totalement caractéristiques. Nous allons maintenant rassembler les définitions et quelques résultats utiles sur une classe d'opérateurs intégraux de Fourier particulière.

Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ une fonction telle que $a > 0$ et $a(y',\eta') = 1$ pour tous $|\eta'| \gg 1$. Etant donnés une fonction $\varphi \in S^{m,k}_+$, on pose

$$\tilde{\varphi}^a(y,\eta,\lambda) = \begin{cases} \varphi(y,\eta',y_3\eta_3 a(y',\eta'),\lambda) & \text{pour } y_3 \geq 0, \\ 0 & \text{pour } y_3 \leq 0. \end{cases} \tag{4.121}$$

On considère la classe des λ-opérateurs intégraux de Fourier $I(\varphi)$ ayant des noyaux de Schwartz de la forme

$$K_{I(\varphi)}(y,x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^3 \int e^{\mathrm{i}\lambda(\langle y'-x',\eta'\rangle + (y_3 a(y',\eta') - x_3)\eta_3)}\tilde{\varphi}^a(y,\eta,\lambda)\,d\eta \tag{4.122}$$

pour tous $(y,x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. On constate alors que

$$suppK_{I(\varphi)}(.,.,\lambda) \subset \{y_3 \geq 0, x_3 \geq 0\} \text{ pour } \lambda \geq 1,$$

si et seulement si $\varphi \in S^{m,k}_{la}$.

Etant donnée $\varphi \in S^{m,k}_+$,on désigne par $supp\varphi$ la fermeture de $\bigcap_{\lambda\geq 1}(\bigcup_{\mu\geq\lambda} supp\varphi(.,\mu))$. Fixons $0 < \delta_0 \ll 1$, ne dépendant que de a. On notera S^k_{la} l'ensemble des fonctions $\varphi \in S^{-\infty,k}_{la}$ qui peuvent s'écrire sous la forme d'une somme $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_2 \in S_+^{-\infty,-\infty}$, $supp\varphi_1$ est un compact et $|\eta_3| \leq \delta_0$ sur ce support. De tels symboles sont donnés par (4.118).

En choisissant δ_0 suffisamment petit, on peut définir une *transformation canonique compressée* χ par

$$(y'+\eta_3\nabla_{\eta'}a(y',\eta')/a(y',\eta'), y_3 a(y',\eta'), \eta', \eta_3) = \chi(y', y_3, \eta'+\eta_3\nabla_{y'}a(y',\eta')/a(y',\eta'), \eta_3)$$

dans un voisinage compact de $supp\varphi_1$ où $|\eta_3| \leq 2\delta_0$.

On a alors un analogue du théorème d'Egorov pour $I(\varphi)$.

Proposition 4.8.3 *Soient $\varphi \in S^0_{la}$ et $b \in S^{0,0}_{la}$. Alors, il existe des fonctions ψ, $c_\varrho \in S^0_{la}$ telles que*

$$\widetilde{c_\varrho}(y, \mathcal{D}, \lambda) I(\varphi) = I(\varphi)\widetilde{b}(y, \mathcal{D}, \lambda) + \lambda^{-1} I(\psi),$$

et c_ϱ est donnée par (4.118), tandis que

$$c(y, \eta, \lambda) = (b(\chi(y, \eta), \lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}))\theta(y, \eta)$$

avec $\theta \in C_0^\infty$, $\theta = 1$ dans un voisinage de $supp\varphi_1$ et $|\eta_3| \leq 2\delta_0$ sur $supp\theta$.

Nous énonçons également une version plus faible de cette proposition pour des λ-opérateurs pseudodifférentiels classiques dont les symboles $g(y', \eta', \lambda)$ sont dans $S^{0,0}_{cl}$.

Proposition 4.8.4 *Soient $\varphi \in S^0_{la}$ et $g \in S^{0,0}_{cl}$. Alors*

$$I(\varphi) Op_\lambda(g) = (Op_\lambda g + Op_\lambda(\tilde{r}) y_3 \mathcal{D}_3) Op_\lambda(\widetilde{\theta_\varrho}) I(\varphi) + \lambda^{-1} I(\psi),$$

où $r \in S^0_{la}$ et ψ, θ sont comme dans la proposition précédente.

Par des intégrations par parties, on obtient les relations de commutation suivantes

$$y_3 I(\varphi) = I(\varphi) Op_\lambda(a^{-1}) y_3 + \lambda^{-1} I(\psi_1) \tag{4.123}$$

$$\mathcal{D}_3 I(\varphi) = I(\varphi) Op_\lambda(a) \mathcal{D}_3 + \lambda^{-1} I(\psi_2) \tag{4.124}$$

avec ψ_1, $\psi_2 \in S^0_{la}$. Ici, $Op_\lambda(a)$ représente TOUT λ-opérateur pseudodifférentiel ayant pour symbole principal a.

De la même manière, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.8.5 *Soit $\varphi \in S^0_{la}$. Alors, il existe $\Phi \in S^0_{la}$ telle que*

$$I(\varphi)^* I(\varphi) = Op_\lambda(\tilde{\Phi}), \quad \lambda \geq 1,$$

où $I(\varphi)^*$ est l'adjoint formel de $I(\varphi)$. De plus, on a

$$\Phi(y, \eta, \lambda) = |\varphi(y, \eta, \lambda)|^2 + \mathcal{O}(y_3) + \mathcal{O}(\eta_3) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}).$$

Bibliographie

[1] M. Bellassoued, *Unicité, Contrôle, Stabilisation, Distribution des Résonances et Décroissance de l'Energie Locale de l'Equation des Ondes Elastiques*, Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2000.

[2] M. Bellassoued, *Carleman estimates and distribution of resonances for the transparent obstacle and application to the stabilization*, Asympt. Anal. **35**, pp.257-281, 2003.

[3] N. Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel*, Acta Math **180**, pp.1-29, 1998.

[4] N. Burq, *Formules de trace, résonances et quasimodes...*, Séminaire Bourbaki 1998-1999. 856.

[5] F. Cardoso, G. Popov, *Rayleigh quasimodes in linear elasticity*, Comm. Partial Diff. Equations **17** (1992), 1327-1367.

[6] F. Cardoso, G. Popov, G. Vodev, *Distribution of resonances and local energy decay in the transmision problem, II*, Math. Res. Lett. **6**, pp ; 377-396, 1999.

[7] F. Cardoso, G. Popov, G. Vodev, *Asymptotics of the Number of Resonances in the Transmission Problem*, Comm. in PDE **26**, pp.1811-1859, 2001.

[8] J. Duistermaat, *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, Commun. Pure Appl. Math. **27**, 207-281 (1974)

[9] C. Gérard, *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*. Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 31, **116**, 1988.

[10] T. Gramchev, G. Popov, *Nekhoroshev type estimates for billiard ball maps*, Ann. Inst. Fourier **45**, 859-895, 1995.

[11] V.Guillemin, R.Melrose *The Poisson summation formula for manifolds with boundary*, Advances in Mathematics, **32**, 204-232, 1979.

[12] T. Hargé, G. Lebeau, *Diffraction par un convexe*, Invent. Math. **118**, pp.161-196, 1994.

[13] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vols I-IV, Springer Verlag, 1985.

[14] V. Kovachev, G. Popov, *Invariant tori for the billiard ball map*, Trans. Am. Math. Soc. **317**, 45-81, 1990.

[15] V. Lazutkin, *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*, Springer, Berlin, 1993.

[16] Sh. Marvizi, R. Melrose, *Spectral invariants of convex planar regions*, J. Differ. Geom. **17**, 475-502, 1982.

[17] R. Melrose, *Equivalence of glancing hypersurfaces*, Inventiones Math., **37**, 165-191, 1976.

[18] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North Holland, London, 1973.

[19] F. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, London, 1974.

[20] V. Petkov, G. Popov, *Semi-classical trace formula and clustering of eigenvalues for Schrödinger operators.* Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique). **68** (1997), 17-83

[21] G. Popov, *Spectral invariants of planar convex domains*, Commun. Math. Phys. **161**, 335-364(1994).

[22] G. Popov, G. Vodev, *Resonances Near the Real Axis for Transparent Obstacles*, Commun. Math. Phys. **207**, pp.411-438, 1999.

[23] P. Stefanov, *Quasimodes and Resonances : Sharp lower bounds*, Duke Math. J. **99**, pp.75-92, 1999.

[24] P. Stefanov, G. Vodev, *Distribution of Resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a ball*, Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique) **60**, pp.303-321, 1994.

[25] J. Sjöstrand, M. Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. Amer. Math. Soc. **4**, pp.729-769, 1991.

[26] J. Sjöstrand, M. Zworski, *The complex scaling method for scattering by strictly convex obstacles*, Ark Mat. **33**, pp.135-172, 1995.

[27] F. Treves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1975.

[28] S.-H. Tang, M. Zworski, *From Quasimodes to Resonances*, Math. Res. Lett. **5**, pp.261-272, 1998.

[29] Vainberg,*On the short waveasymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of nonstationary problems*, Russian Math. Surveys, **30**, pp.1-53, 1975.

[30] M. Zworski, *Resonances in Physics and Geometry*, Notices of the AMS **46**, pp.319-328, 1999.