Morphologie des homéomorphismes des surfaces et méthodes géométriques en hydrodynamique

Boris Kolev

Morphologie des homéomorphismes des surfaces

et

Méthodes géométriques en hydrodynamique

Mémoire présenté par

Boris KOLEV

En vue de l'obtention de
L'Habilitation à Diriger des Recherches

Discipline : MATHÉMATIQUES

Après avis des rapporteurs :

Joachim ESCHER
David SATTINGER
Andrei TELEMAN

Soutenance le 8 juin 2006 devant le jury composé de :

Adrian CONSTANTIN
Paul DONATO
Thomas KAPPELER
Jérôme LOS
David SATTINGER
Andrei TELEMAN

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement *Joachim Escher*, *David Sattinger* et *Andrei Teleman* d'avoir accepté la tâche ingrate de rapporter sur cette habilitation.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury, dont certains sont venus de loin, *Adrian Constantin*, *Paul Donato*, *Thomas Kappeler*, *Jérôme Los*, *David Sattinger* et *Andrei Teleman*.

Je tiens à remercier les membres Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités de l'Université de Provence, dirigé par *Thierry Gallouet*, pour les subventions qu'ils ont bien voulu m'accorder.

J'exprime toute ma gratitude pour les secrétaires du LATP, *Aline Blanc* et *Marie-Christine Tort* pour leur aide précieuse dans les tâches administratives quotidiennes.

Je voudrais aussi remercier très chaleureusement *Christian Duval* pour son soutien et sa grande disponibilité chaque fois que je lui ai demandé son aide ou posé des questions.

Je remercie également *Patrick Iglesias*, sans qui je ne serais pas au LATP aujourd'hui.

Enfin, c'est pour moi un grand honneur (et bonheur) que d'avoir pu bénéficier de l'enseignement personnel et scientifique de *Jean-Marie Souriau* durant ces cinq dernières années à Marseille.

Table des matières

1 Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire portent essentiellement sur la théorie géométrique des systèmes dynamiques. Ils sont regroupés dans deux sections distinctes qui couvrent l'essentiel de mes recherches :

– L'étude de la dynamique et de la morphologie des homéomorphismes des surfaces (Section 2).
– L'utilisation de méthodes géométriques dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles apparaissant en mécanique et en hydrodynamique (Section 3).

Ce mémoire récapitule les travaux de dix-neuf articles[1] regroupés par thèmes et présentés dans la mesure du possible dans l'ordre chronologique de leur élaboration.

Au début du XX[e] siècle, Brouwer, Kerékjártó mais également Birkhoff et Poincaré se sont intéressés à la structure des transformations topologiques – on parle maintenant d'homéomorphismes – des surfaces. Parmi les questions qu'il se sont posés, on peut citer entre autres :

– Étudier la structure des points fixes, des points périodiques et des sous-ensembles invariants d'un transformation donnée.
– Caractériser topologiquement les transformations conformes ou plus généralement trouver un représentant naturel dans chaque classe de conjugaison.
– Classifier certains sous-groupes de transformations, notamment les sous-groupes compacts.

Un grand nombre de résultats et parmi eux de beaux théorèmes ont été formulés depuis et le sujet continue d'intéresser aujourd'hui. Parmi les thèmes qui semblent toujours à la mode, on trouve par exemple la théorie des *homéomorphismes de Brouwer* [8, 38, 48]. Ce sont les homéomorphismes du plan qui préservent l'orientation et qui sont sans point fixe. Brouwer avait d'abord conjecturé qu'ils étaient conjugués aux translations standards avant de montrer que ce n'est vrai que localement : tout point du plan appartient à un ouvert connexe, simplement connexe, invariant sur lequel l'homéomorphisme est conjugué à une translation. Ce résultat, connu sous le nom de *Théorème des translations planes de Brouwer* est en quelque sorte une version discrète (pour les homéomorphismes) du Théorème de Poincaré-Bendixon sur les champs de vecteurs, mais la théorie est dans ce cas beaucoup plus subtile et une classification complète s'avère illusoire [48].

[1]Les références concernant mes travaux sont repérées par des abréviations (auteurs + année) et regroupées dans la section *Publications*. Les références externes sont repérées par des numéros et regroupées dans la section *Références*.

Le problème de la classification topologique complète des homéomorphismes des surfaces est rapidement apparu comme un problème trop général et donc peu intéressant. Une autre classification – en classe d'isotopie cette fois – a été initiée par Nielsen [58] puis complétée par Handel et Thurston [67, 40] avec le succès qu'on connaît.

Malgré tout, certains résultats sur la morphologie des homéomorphismes des surfaces demeurent remarquables. Parmi eux, la classification complète des homéomorphismes périodiques, la caractérisation topologique des représentations conformes, les propriétés des homéomorphismes récurrents et plus généralement des pseudo-rotations, la classifications des actions sur les surfaces des sous-groupes compacts. De plus, la subtilité des démonstrations met en évidence une rigidité propre à la topologie de dimension 2 qui ne semble pas se généraliser aisément en dimension supérieure. La première partie de ce mémoire (Section 2) est consacrée à ma contribution sur le sujet.

Après avoir travaillé sur la dynamique des homéomorphismes des surfaces, mon intérêt s'est porté sur des problèmes issues de la mécanique, et plus précisément sur l'utilisation de la géométrie des groupes pour résoudre certains problèmes de la physique mathématique.

L'origine de ce point de vue est due à Arnold. Dans un article maintenant célèbre [2], il a montré que les équations décrivant l'évolution de la vitesse angulaire du mouvement d'un solide et les équations du mouvement d'un fluide incompressible non visqueux étaient de même nature. Ce sont des cas particuliers d'équations géodésiques d'une métrique riemannienne unilatéralement invariante sur un groupe de Lie : une métrique *invariante à gauche* sur le groupe des rotations SO(3) dans le premier cas et une métrique *invariante à droite* sur le groupe des difféomorphismes C^∞ qui préservent le volume pour la mécanique des fluides[2]. Dans les deux cas, cette métrique invariante est donnée par l'énergie cinétique du système. L'algorithme qui produit l'*équation d'Euler* est un processus général de réduction des équations géodésiques sur l'algèbre de Lie du groupe.

Il existe une abondante littérature sur cette approche géométrique de la mécanique des fluides (voir par exemple [3]) et pourtant, d'un certain point de vue, cette théorie demeure incomplète. En effet, cette description du mouvement d'un fluide consiste essentiellement à traduire *seulement formellement* des énoncés connus en géométrie riemannienne de dimension finie dans le cadre plus général des groupes de Lie-Fréchet.

Afin de remédier aux difficultés analytiques inhérentes à l'étude rigoureuse de cette approche, Ebin et Marsden [23] ont élargi l'espace de configuration, à

[2] Il s'agit dans ce dernier cas d'un *groupe de Lie-Fréchet*, c'est à dire dont les cartes prennent leur valeur dans un *espace vectoriel de Fréchet*.

savoir le groupe des difféomorphismes C^∞, à la variété[3] des difféomorphismes de classe H^s ($s \geq 2$). Leur travail a été généralisé depuis, dans de nombreuses directions. Un certain nombre d'articles ont été publiés sur le sujet, notamment [12] et [65] qui introduisent la notion de *flots généralisés*. Toutefois, le rapport entre les résultats obtenus pour les flots généralisés et les flots C^∞ demeure un problème ouvert.

La Section 3 de ce mémoire est consacrée à l'étude rigoureuse, dans le cadre des flots classiques C^∞, d'une famille de modèles issues de l'hydrodynamique qui ont pour espace de configuration $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ ou le groupe de Virasoro. Un des objectifs de ce travail a été de *montrer que l'approche géométrique pouvait être menée rigoureusement du point de vue analytique*. En plus de présenter des résultats d'existence et de régularité, on a traité également la question de l'intégrabilité des modèles étudiés avec ce point de vue géométrique.

Pour terminer (Section 4), on propose quelques questions ouvertes issues de ces recherches ou qui ont une relation avec les thèmes évoqués dans ce mémoire.

[3]qui n'est pas un groupe de Lie car la composition et l'inversion ne sont pas des applications différentiables dans ce cas mais seulement des applications continus. Il s'agit donc seulement d'un groupe topologique, muni d'une structure de variété.

2 Morphologie des homéomorphismes des surfaces

Mes premiers travaux ont porté sur l'étude de la complexité des orbites périodiques des homéomorphismes du plan. Comment obtenir, à partir de données sur une orbite périodique d'un homéomorphisme, des informations sur la coexistence d'autres orbites périodiques et sur la complexité de la dynamique associée (§ 2.1).

Mes recherches ont ensuite évolué vers la classification des homéomorphismes des surfaces à conjugaison près. Mon premier travail dans ce domaine a été la rédaction en collaboration avec Adrian Constantin, d'une preuve élémentaire du théorème d'Eilenberg-Kerékjártó sur la classification des homéomorphismes périodiques de la sphère (§ 2.2).

Une généralisation naturelle de la notion de périodicité est la notion de régularité. Elle fait apparaître une version purement topologique (réguliers/singuliers) de la dichotomie (Fatou/Julia) en dynamique holomorphe. En collaboration avec Christian Bonatti, nous avons classifié complètement les homéomorphismes des surfaces dont l'ensemble singulier est totalement discontinu (§ 2.3).

La classe des homéomorphismes périodiques est strictement incluse dans la classe des homéomorphismes réguliers, elle même incluse dans une classe plus large : celle des homéomorphismes récurrents. Avec Marie-Christine Pérouème, nous nous sommes intéressés à l'étude des homéomorphismes récurrents des surfaces (§ 2.4).

L'adhérence du groupe engendré par un homéomorphisme régulier (c'est à dire dont tous les points sont réguliers) est un groupe compact. J'ai rédigé une preuve élémentaire du théorème de Kerékjártó sur les sous-groupes compacts d'homéomorphismes de la sphère (§ 2.5).

2.1 Complexité des orbites périodiques

En dimension 1, la structure d'ordre naturelle de la droite réelle permet une description combinatoire des orbites périodiques d'une application continue f de l'intervalle. A chaque orbite périodique de f, correspond la permutation induite par la façon dont sont parcourus les points de cette orbite sur l'intervalle : c'est le *type de permutation* associé à l'orbite périodique. Il est possible de décrire une relation d'ordre partiel entre les types de permutations[4], un outil qui est utile pour étudier la complexité du système

[4] Cet ordre partiel sur les types de permutations est plus fin que le très populaire ordre de Sarkovskii [64], qui est lui un ordre total sur les périodes.

dynamique associé [1].

En dimension 2, on peut se poser un problème similaire pour les orbites périodiques des homéomorphismes du disque. Dans ce dernier cas, on va toutefois caractériser l'orbite périodique d'un homéomorphisme du disque qui préserve l'orientation par son *type de tresse*, c'est à dire par la classe d'isotopie de l'homéomorphisme relativement à cette orbite ([Kol93] et [Kol96]). Deux questions naturelles se posent alors. D'une part, décrire explicitement cet ordre partiel et d'autre part estimer l'entropie topologique de l'homéomorphisme (qui caractérise la complexité de la dynamique) à partir de la connaissance d'un type de tresse présent.

Dans [Kol89], j'ai établi une minoration de l'entropie topologique d'un homéomorphisme possédant une orbite périodique de type de tresse donné à partir du rayon spectral de la représentation de Burau de cette tresse. Ces résultats ont été amélioré depuis. On pourra consulter en particulier [26, 51] pour obtenir des résultats plus récents sur le sujet.

Dans [Kol94], j'ai montré un résultat de "type Sarkovskii" pour les homéomorphismes du disque : la présence d'une orbite périodique de période 3, dont le type de tresse n'est pas périodique (c'est à dire ne correspond pas au type de tresse d'une rotation euclidienne), entraîne l'existence d'une orbite périodique de période n pour tout entier n. Ce travail généralise un résultat antérieur de Gambaudo et Tresser [30]. Des résultats plus précis ont été obtenu depuis, notamment dans [39] et [37].

Un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation n'a pas nécessairement de point fixe comme l'illustre l'exemple d'une translation. Toutefois, d'après un lemme de Brouwer, qui est une étape intermédiaire pour établir son célèbre *Théorème des translations planes*, un homéomorphisme du plan, sans point fixe, qui préserve l'orientation ne possède que des *points errants*[5]. Par conséquent, un homéomorphisme du plan, qui préserve l'orientation et possède une orbite périodique, possède également un point fixe.

On peut être cependant un peu plus précis sur la relation entre ce point fixe et cette orbite périodique. Dans [Kol90], j'ai montré qu'un tel homéomorphisme f possède un point fixe *lié* à cette orbite périodique, en ce sens que la tresse formée par l'orbite périodique et celle formée par le point fixe, *ne peuvent pas être séparées*[6], comme c'est le cas, par exemple, pour le centre

[5]Un point x est dit errant sous l'action d'un homéomorphisme f si il possède un voisinage U tel que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

[6]Cette notion se définit de façon plus précise (mais moins visuelle) de la façon suivante. On dit que le point fixe x_0 et l'orbite périodique $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ sont *liés*, s'il n'existe pas de courbe de Jordan $\mathcal{C}$, bordant un disque qui contient P mais pas x_0, et telle que $\mathcal{C}$ et $f(\mathcal{C})$ soient isotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

d'une rotation périodique euclidienne par rapport à n'importe quel autre point périodique. Un résultat analogue pour les homéomorphismes du plan qui *renversent l'orientation* vient d'être démontré tout récemment par Marc Bonino [9].

Dans le cas d'une rotation euclidienne périodique, le résultat est encore plus fort puisque le *nombre d'enlacement* entre une orbite périodique quelconque et le point fixe est non nul. Dans [10], une conjecture attribuée à John Franks énonçait que c'était le cas général.

> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, un homéomorphisme préservant l'orientation. Pour toute orbite périodique, il existe un point fixe ayant un nombre d'enlacement non nul avec cette orbite périodique.

En collaboration avec Christian Bonatti, nous avons montré dans [BK92], que cette conjecture est vraie pour les C^1-difféomorphismes assez proches de l'identité. On pourra consulter [36] pour des résultats plus récents sur cette conjecture.

2.2 Homéomorphismes périodiques

Il est bien connu qu'un homéomorphisme périodique du cercle est topologiquement conjugué à une rotation rationnelle ou à une symétrie axiale, suivant qu'il préserve ou renverse l'orientation du cercle. Qu'en est-il en dimension supérieure ? Dans deux articles datant de 1919, Kerékjártó [42] et indépendamment Brouwer [13] ont étudié la question de la conjugaison topologique des homéomorphisme périodiques de la sphère et du disque avec les isométries euclidiennes. Les arguments de Brouwer ont toutefois été considérés comme difficiles à suivre et la preuve de Kerékjártó semble juste esquissée. En 1934, une nouvelle démonstration plus élaborée mais toujours compliquée est présentée par Eilenberg [24].

Du fait de l'importance de ce résultat et comme il ne semblait pas y avoir de référence plus récente sur le sujet, nous avons, avec Adrian Constantin, rédigé un exposé moderne et une preuve (enfin) élémentaire de la conjugaison topologique des homéomorphismes périodiques de la sphère et du disque avec les isométries euclidiennes. Ce travail est paru dans [CK94]. Il est important de noter que ce théorème est propre à la dimension 2 et ne se généralise pas en dimension supérieure, comme le montre de nombreux contre-exemples [6, 55].

2.3 Homéomorphismes réguliers

Une généralisation naturelle de la notion de périodicité est celle de *régularité*. Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique (X, d). Un point x est *régulier* sous l'action de f si la famille des itérés (positifs et négatifs) de f est équicontinue au point x, c'est à dire si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dans le cas d'un espace compact métrisable, cette propriété est indépendante de la métrique d qui définit la topologie de X. Elle est également invariante par conjugaison topologique.

On définit le *lieu singulier* de f, noté $\Sigma(f)$ comme l'adhérence du complémentaire de l'ensemble des points réguliers. On pourra noter que $\Sigma(f)$ est l'analogue de l'*ensemble de Julia* pour une fonction holomorphe[7]. En suivant cette analogie, l'intérieur de l'ensemble des points réguliers correspond à l'*ensemble de Fatou*. Dans [BK98], nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soit f un homéomorphisme qui préserve l'orientation d'une surface fermée orientable M^2 dont l'ensemble singulier $\Sigma(f)$ est totalement discontinu. Alors :*

1. *Si $M^2 = \mathbb{S}^2$, f est topologiquement conjugué à une homographie.*
2. *Si $M^2 = \mathbb{T}^2$, f est périodique ou conjugué à une translation*

$$(s, t) \mapsto (s + \alpha, t + \beta) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

3. *Si $\chi(M^2) < 0$, f est périodique.*

Dans les trois cas, le Théorème 2.1 signifie qu'un homéomorphisme qui préserve l'orientation d'une surface fermée orientable laisse invariant une *structure conforme* de cette surface, si et seulement si, $\Sigma(f)$ est totalement discontinu.

En général, l'ensemble singulier d'un homéomorphisme, $\Sigma(f)$, contient des continus non-dégénérés et donc l'hypothèse de total discontinuité est assez forte. Il existe des exemples très simples d'homéomorphismes de la sphère $\mathbb{S}^2$ tels que $\Sigma(f) = \mathbb{S}^2$.

Par exemple, soit h un homéomorphisme du plan $\mathbb{R}^2$ qui laisse invariant chaque cercle euclidien $c_r, r \in [0, +\infty[$ centré à l'origine $(0, 0)$ et dont la restriction à chacun de ces cercles c_r est une rotation d'angle $\phi(r)$, où

[7] Bien que dans ce dernier cas on ne considère que les puissances positives bien entendu.

ϕ : $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui n'est constante sur aucun intervalle. Soit f l'homéomorphisme de la sphère $\mathbb{S}^2$, obtenu en étendant f à l'infini par un point fixe. Alors f est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$ tel que $\Sigma(f) = \mathbb{S}^2$.

Un autre exemple intéressant est celui d'un difféomorphisme C^1- structurellement stable d'une surface M^2. On peut montrer, dans ce cas également, que $\Sigma(f) = M^2$ (voir [BK98]).

Il est cependant remarquable qu'une condition aussi simple : $\Sigma(f)$ *totalement discontinu*, implique une telle rigidité : f *conjugué à une transformation conforme*. Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus indépendamment par Hiraide [41] et Lewowicz [50], dans le même esprit, mais pour les homéomorphismes *expansifs* ; une hypothèse diamétralement opposée. Un homéomorphisme f d'un espace métrique (X, d) est *expansif* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour toute paire de points distincts x et y, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) > \alpha.$$

Hiraide et Lewowicz ont montré que tout homéomorphisme expansif d'une surface fermée de caractéristique d'Euler négative était topologiquement conjugué à un homéomorphisme pseudo-Anosov[8].

Afin d'être tout à fait exhaustif, on a également traité le cas des homéomorphismes qui renversent l'orientation, celui des homéomorphismes des surfaces non-orientables et des surfaces à bord, orientables ou pas.

2.4 Homéomorphismes récurrents

Un homéomorphisme f d'un espace métrique (X, d) est *récurrent* s'il possède des puissances arbitrairement proches de l'identité, autrement dit s'il existe une suite $n_k \to +\infty$ telle que :

$$d\left(f^{n_k}, Id\right) \to 0 \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

Dans le cas d'un espace métrique compact, cette définition est indépendante de la métrique d qui définie la topologie de X. Autrement dit la notion d'homéomorphisme récurrent, comme celle d'homéomorphisme régulier du reste, est attachée aux espaces métriques compacts métrisables. Cette propriété de récurrence est également invariante par conjugaison topologique. La classe des homéomorphismes récurrents inclue les homéomorphismes périodiques et

[8]Un difféomorphisme pseudo-Anosov est un concept qui généralise les difféomorphismes linéaires du tore qui contracte une direction, le "feuilletage stable" et dilate une direction transverse, le "feuilletage instable", dans le cas des surfaces dont la caractéristique d'Euler est négative. Ces feuilletages ont nécessairement des singularités.

plus généralement les homéomorphismes *réguliers* (dont tous les points sont *réguliers*).

Dans [43], Kerékjártó s'était demandé si un homéomorphisme récurrent de la sphère $\mathbb{S}^2$, qui préserve l'orientation mais qui n'est pas périodique, était toujours conjugué à une rotation irrationnelle. La réponse, connue maintenant, est non. En particulier, un homéomorphisme récurrent de la sphère n'est pas nécessairement régulier. Dans [29], Fokkink et Oversteegen ont construit un exemple d'homéomorphisme récurrent et sans point périodique de l'anneau qui n'est pas conjugué à une rotation irrationnelle. Une variante de cette construction permet d'obtenir un homéomorphisme récurrent de la sphère $\mathbb{S}^2$ possédant seulement deux points fixes (et pas d'autre point périodique) qui n'est pas conjugué à une rotation. Dans ces exemples, l'homéomorphisme laisse invariant un continu non localement connexe H (un hérisson) qui possède une orbite dense.

Remarque. On pourra également consulter sur ce thème les recherches sur les *pseudo-rotations* (voir [5]). Une pseudo-rotation de l'anneau est un homéomorphisme isotope à l'identité et dont l'ensemble de rotation est réduit à un nombre unique[9]. Un homéomorphisme récurrent de l'anneau (ou de la sphère, en généralisant quelque peu la définition) est donc un exemple de pseudo-rotation. Comme nous l'avons déjà signalé, une pseudo-rotation irrationnelle[10] n'est pas toujours conjuguée à une rotation irrationnelle. Toutefois un résultat récent [5] affirme que la fermeture de la classe de conjugaison d'une pseudo-rotation irrationnelle contient la rotation euclidienne irrationnelle d'angle correspondant.

Tout homéomorphisme préservant l'orientation de la sphère possède un point fixe[11]. Si de plus cet homéomorphisme possède un *point non-errant* (en particulier un point récurrent) en plus de ce point fixe, alors il possède un second point fixe d'après le lemme sur les arcs de translations (déjà cité précédemment dans ce mémoire), dû également à Brouwer [14]. Dans le cas d'un homéomorphisme récurrent, nous avons établi avec Marie-Christine Pérouème [KP98], qu'il n'en possède pas d'autre.

[9] Si le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle, tel qu'il a été défini par Poincaré est un nombre unique, il n'en est pas de même de la généralisation de ce concept pour les homéomorphismes de l'anneau isotopes à l'identité. En effet, dans ce cas, les limites obtenues ne se réduisent pas, en général, à un nombre unique mais définissent un intervalle.

[10] C'est à dire dont le nombre de rotation est irrationnel.

[11] Ce résultat est dû à Brouwer et ne doit pas être confondu avec son autre célèbre théorème de point fixe pour les applications continues du disque. Il est antérieur au Théorème du point fixe de Lefschetz.

Théorème 2.2. *Un homéomorphisme récurrent de la sphère $\mathbb{S}^2$ qui préserve l'orientation et qui possède au moins trois points fixes est l'identité.*

Remarque. Ce résultat est à rapprocher d'un théorème beaucoup plus récent (2003), dû à Patrice Le Calvez [47] et qui énonce que *tout homéomorphisme de la sphère, sans point errant*[12], *et qui a au moins trois points fixes possède une infinité d'orbites périodiques.* Le sujet semble donc toujours bien vivant.

Un des corollaires du Théorème 2.2 est le fait qu'un homéomorphisme récurrent du disque fermé D^2 qui est l'identité sur le bord est l'identité sur le disque lui-même. Ceci est l'argument principal pour établir qu'un homéomorphisme récurrent du plan $\mathbb{R}^2$ (pour la métrique euclidienne) est périodique [59].

Dans la démonstration du Théorème 2.2, nous avons utilisé la *compactification en bouts premiers*, $\hat{U}$, d'un domaine simplement connexe U du plan, introduite par Carathéodory [18]. Si le bord d'un tel domaine peut-être fort compliqué, comme le montre de nombreux exemples, la construction de Carathéodory est une compactification de U, homéomorphe au disque unité fermé, très utile dans l'étude des représentations conformes. Nous avons établit en particulier dans [KP98], que si U est invariant par f, alors, f s'étend en un homéomorphisme *récurrent* de $\hat{U}$; un fait qui n'avait pas été remarqué jusqu'alors.

Ce travail nous a permis de classifier complètement les homéomorphismes récurrents des surfaces de genre g plus grand que 2 : ils sont tous périodiques. En particulier, un homéomorphisme d'une surface compacte de caractéristique d'Euler négative et qui possède au moins un point *régulier* ne peut pas être *topologiquement transitif* (i.e. posséder une orbite dense). Il ne peut donc pas non plus être *ergodique* pour une mesure qui charge les ouverts.

2.5 Sous-groupes compacts d'homéomorphismes

L'adhérence du groupe engendré par un homéomorphisme régulier – c'est à dire dont tous les points sont réguliers – est un groupe compact, un fait qui résulte plus ou moins directement du théorème d'Ascoli. L'étude de la caractérisation topologique des homéomorphismes réguliers des surfaces conduit donc naturellement à la classification des sous-groupes compacts d'homéomorphismes des surfaces. Ce problème se situe en fait, dans le cadre plus

[12] Une hypothèse donc beaucoup moins forte.

général d'une suite de questions connue sous le nom de 5e problème de Hilbert [69]. Plus précisément, soit G un groupe localement compact qui agit fidèlement sur une variété M, on se pose les questions suivantes :

1. G est-il nécessairement localement euclidien[13] ?
2. Si G est localement euclidien, est-ce un groupe de Lie ?
3. Si G est un groupe de Lie, existe-il une structure analytique sur M invariante par G ?

La réponse à la première question n'est pas connue en dehors de quelques cas particuliers. La réponse à la deuxième question est positive (cf. Gleason [35], Montgomery and Zippin [55]). La réponse à la troisième question est négative en général. Il existe des contre-exemples simples dans le cas non compact. Citons également la construction par Bing [6] d'une involution négative de $\mathbb{S}^3$ non conjuguée à un élément de $\mathrm{O}(4)$, d'exemples d'homéomorphisme périodique de $\mathbb{S}^3$ non conjugué à un élément de $\mathrm{SO}(4)$ (Bing [7], Montgomery-Zippin [55], Bredon [11]), d'une action de $\mathbb{U}(1)$ sur $\mathbb{S}^4$ non linéarisable (Montgomery, Zippin [55]) et d'une action de $\mathbb{U}(1)$ sur $\mathbb{S}^{2n+2}$ non linéarisable [16]. Signalons enfin une preuve par Cairns et Ghys [16] que toute action topologique de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ qui préserve l'origine est globalement conjuguée à l'action standard.

Dans [Kol06a], j'ai donné une présentation moderne et complète de la classification topologique des sous-groupes compacts de la sphère $\mathbb{S}^2$, initialement dû à Kerékjártó.

Théorème 2.3. *Tout sous-groupe compact de Homeo*$(\mathbb{S}^2)$ *est topologiquement conjugué à un sous-groupe fermé de* $\mathrm{O}(3)$.

Un des arguments essentiels dans la preuve de ce théorème est le fait suivant : Soit G un groupe compact et B une boule euclidienne. Soit K la fermeture de la G-orbite de B, alors K est *localement connexe*. C'est un des arguments principaux, dont j'ai donné une preuve tout à fait élémentaire. En dimension 2 (et seulement en dimension 2), ce résultat permet d'établir que la frontière de K est constituée par une famille de courbes fermées simples invariantes par G. Il en résulte que tout point fixe de G possède un système fondamental de voisinages qui sont des disques invariants.

Remarque. Tout sous-groupe compact G d'homéomorphismes du tore $\mathbb{T}^2$ est également topologiquement conjugué à un sous-groupes d'isométries. Le schéma de la preuve est le suivant. Soit G_0 l'ensemble des éléments de G qui sont isotopes à l'identité. Alors G_0 est un sous-groupe compact, distingué

[13] Une autre terminologie pour désigner une variété topologique.

dans G et d'indice fini. On montre que tout élément de G_0 possède un *vecteur rotation*[14] unique. En utilisant une mesure invariante sur le tore, on montre ensuite que l'application qui associe à un élément de G_0 son vecteur rotation est un morphisme de groupe et enfin que ce morphisme est continue et injectif, ce qui est la partie délicate. On en déduit alors que ce groupe est isomorphe à un sous groupe fermé du tore lui même et on finit par établir que l'action sur le tore est topologiquement conjugué à l'action standard. On étend ensuite sans difficulté ces résultats au groupe G lui-même (voir [BK98]).

Ces questions sur la caractérisation topologique des groupes d'isométries des surfaces compactes conduisent naturellement à se poser la question pour d'autres types de groupes remarquables ; le groupe homographique ou l'un de ses sous-groupes par exemple. Ce problème a fait apparaître la notion de *groupe de convergence* [32] et a connu un regain d'intérêt dans les années 90 dans de nombreux domaines, en particulier dans la dynamique des groupes discrets.

[14] Le vecteur rotation d'un homéomorphisme du tore est une généralisation de la notion de nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle.

3 Méthodes géométriques en hydrodynamique

Dans un article devenu célèbre [2], Arnold a montré que les équations du mouvement d'un fluide parfait pouvaient être interprétées comme les équations géodésiques (Équations d'Euler) d'une certaine métrique riemannienne invariante à droite sur le groupe des difféomorphismes qui préservent le volume. Par la suite, il devint clair que de nombreuses équations issues de la physique mathématique pouvaient également s'écrire sous cette forme (§ 3.1).

Dans [34] (voir également [60]), Dorfman et Gelfand ont montré que l'équation de Korteweg-de Vries [45]

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{3.1}$$

s'obtenait comme l'équation des géodésiques, sur le groupe de Virasoro, de la métrique obtenue par translation à droite du produit scalaire L^2 sur l'algèbre de Lie. Dans [54], Misiolek (voir également [19]) a montré que l'équation de Camassa-Holm [17]

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, \tag{3.2}$$

qui sert également à décrire la propagation des ondes d'eau à une dimension en petite profondeur, pouvait s'obtenir comme équation géodésique sur le groupe de Virasoro pour la métrique H^1.

Si la re-formulation géométrique de ces équations célèbres a un aspect purement esthétique, il n'en demeure pas moins que l'un des objectifs de cette interprétation est de fournir des méthodes pour *clarifier les conditions d'existence et la stabilité de leurs solutions*. Une des étapes majeures de ce programme passe par l'étude rigoureuse de l'*exponentielle riemannienne* et des *courbures sectionnelles* de la métrique dans chacun des cas.

Mes premiers travaux dans ce domaine ont été mené dans cette direction, en collaboration avec Adrian Constantin (Trinity College, Dublin). Pour commencer, nous avons étudié le comportement de l'exponentielle riemannienne pour les métriques L^2 (equation de Burgers) et H^1 (equation de Camassa-Holm) sur le groupe des difféomorphismes du cercle (§ 3.2).

Les résultats encourageant que nous avons obtenu nous ont conduit à généraliser notre étude à l'ensemble des métriques H^k ($k \in \mathbb{N}$) sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$. Nous avons étudié le problème de Cauchy pour le flot géodésique et la régularité de l'exponentielle (§ 3.3). Cette étude nous a permis de comprendre pourquoi le cas L^2, qui correspond à l'équation de Burgers connue pour faire apparaître des ondes de choc, était singulier dans la famille H^k. Ce travail a été prolongé, par la suite, par une étude équivalente sur le groupe de Virasoro.

Dans une seconde série d'articles, nous nous sommes intéressés au problème de l'*intégrabilité* des équations d'Euler sur $\mathrm{Vect}^*(\mathbb{S}^1)$ et sur l'algèbre de Virasoro (§ 3.4).

3.1 L'équation d'Euler

Toute métrique unilatéralement invariante sur un groupe de Lie G est entièrement déterminée par sa valeur à l'élément neutre du groupe, autrement dit par un produit scalaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ce produit scalaire peut être représenté par un *opérateur d'inertie*

$$A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*.$$

Si $g(t)$ est une géodésique d'une métrique invariante à gauche (par exemple), et si on introduit la *vitesse eulérienne*

$$\omega = L_{g^{-1}} \dot{g} \in \mathfrak{g},$$

et sa version covariante le *moment eulérien*

$$m = A\omega \in \mathfrak{g}^*,$$

alors les équations du flot géodésique se réduisent à un système découplé du type :

$$\dot{m} = \mathrm{ad}^*_{A^{-1}m}\, m, \qquad \dot{g} = L_g\, \omega,$$

où ad^* est l'action coadjointe sur $\mathfrak{g}^*$. Cette dernière équation

$$\dot{m} = \mathrm{ad}^*_{A^{-1}m}\, m,$$

est l'*équation d'Euler*[15]. Elle est Hamiltonienne relativement à la structure de Poisson canonique sur $\mathfrak{g}^*$, communément appelée, la structure de *Lie-Poisson*.

Dans [Kol04], j'ai rédigé un article d'introduction sur l'équation d'Euler. Partant des équations du mouvement du solide, je formule le problème sur un groupe de Lie quelconque, et je traite ensuite le cas du groupe des difféomorphismes du cercle.

Remarque. Ce processus de *réduction Hamiltonienne* en dimension fini remonte en fait à Poincaré [62]. Il semble avoir été étendu à l'hydrodynamique par Moreau [56] avant Arnold. Il a été ensuite développé par de nombreux auteurs, notamment Marsden et Weinstein [53], dans le cas plus général des

[15]En fait, on la trouve surtout sous sa forme contravariante $\dot{\omega} = B(\omega, \omega)$ où B est défini par $< [a, b], c >=< B(c, a), b >$, dans les ouvrages classiques de mécanique.

problèmes variationnels qui possèdent un groupe de symétrie G mais où l'espace de configuration n'est plus nécessairement le groupe lui-même. Il est tout à fait naturel qu'il apparaisse de façon récurrente en mécanique où les groupes de symétrie jouent un rôle fondamental.

Toutefois, si cette approche est tout à fait satisfaisante d'un point de vue *géométrique* purement formel, elle est plus délicate du point de vue de l'*analyse* dans le cas des groupes de dimension infinie, autrement dit en hydrodynamique, où ces derniers sont en général des *groupes de Lie-Fréchet*.

Pour contourner ces difficultés, certains auteurs, notamment Ebin et Marsden [23], ont étudiés des flots généralisés ou solutions faibles. On considère par exemple, à la place du groupe des difféomorphisme C^∞, le groupe des homéomorphismes qui sont dans les espaces de Sobolev H^s ainsi que leur inverse. Bien qu'on ne puisse plus parler rigoureusement de groupe de Lie dans ce cas puisque ni l'inverse ni la composition ne sont ici des applications continûment différentiables, ce point de vue permet d'éviter certains écueils inhérents à l'analyse sur les variétés de Fréchet.

Afin de transposer rigoureusement les résultats classiques de la géométrie riemannienne de dimension finie (ou banachique) et ne pas en rester à des conclusions purement formelles, une des premières étapes consiste à vérifier que l'*exponentielle riemannienne*, qui joue un rôle de carte locale privilégiée pour établir de nombreux résultats, est un difféomorphisme local. Mais il n'existe pas de résultat général. Chaque type d'équation doit être étudié, cas par cas. Ce qu'on peut espérer, c'est tenter de comprendre les mécanismes qui aboutissent à un résultat positif ou pas.

3.2 Le cas des équations de Burgers et de Camassa-Holm

L'exemple le plus simple en dimension infinie est le groupe des difféomorphismes du cercle $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$. Une métrique invariante à droite sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ est déterminée par un produit scalaire $\mathbf{a}$ sur l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1) = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$. Si ce produit est *local* (voir Peetre [61]), il est donné par une expression du type

$$\mathbf{a}(u,v) = \int_{\mathbb{S}^1} u\, A(v)\, dx \qquad u,v \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}^1),$$

où A est un opérateur différentiel, linéaire, symétrique, inversible, appelé *opérateur d'inertie*. On associe à cet opérateur A la *fonctionnelle d'énergie*

$$H_A(m) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} m\, A^{-1}(m),$$

sur le *dual régulier*[16], $\mathrm{Vect}^*(\mathbb{S}^1)$. Le champ de vecteur hamiltonien associé, X_A, est donné par

$$X_A(m) = (mD + Dm)(A^{-1}m),$$

où $D = d/dx$.

Parmi les équations d'Euler qui s'obtiennent de cette façon, on trouve l'équation de *Burgers* [15]

$$u_t + 3uu_x = 0,$$

pour $A = I$ (métrique L^2) et l'équation de *Camassa-Holm*[17] [17, 28]

$$u_t + uu_x + D(1 - D^2)^{-1}\Big(u^2 + \frac{1}{2}\,u_x^2\Big) = 0,$$

pour $A = I - D^2$ (métrique H^1). Dans [CK01] et [CK02], nous avons étudié l'approche géométrique de ces équations. On a établit en particulier que l'exponentielle riemannienne est bien un difféomorphisme local dans le cas H^1 (équation de Camassa-Holm) mais qu'elle ne l'est pas dans le cas L^2 (équation de Burgers).

Le fait que l'exponentielle soit un difféomorphisme local nous à permis de vérifier, pour l'équation de Camassa-Holm, des résultats connus en dimension finie : par exemple, que *deux états voisins sont toujours joints par une unique géodésique minimisante.*

3.3 Les métriques H^k sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$

Afin de mieux saisir la différence structurelle entre le cas L^2 et H^1, nous avons généralisé l'étude précédente pour les métriques H^k, où l'opérateur A est donné par

$$A_k = 1 - \frac{d^2}{dx^2} + \cdots + (-1)^k \frac{d^{2k}}{dx^{2k}},$$

ce qui nous a permis de comprendre pourquoi le cas L^2 ($k = 0$) était dégénéré [CK03a]. Nous avons étudié le problème de Cauchy pour le flot géodésique et établi en particulier [CK03b], le résultat suivant.

[16] La formulation de l'équation d'Euler nécessite que l'opérateur d'inertie A soit inversible. Or le dual topologique de $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$, qui n'est autre que l'espace des distributions sur le cercle, est beaucoup trop "grand" pour être isomorphe à $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$. On se restreint donc au sous-espace de ce dual constitué par les distributions qui ont une densité C^∞ : c'est le *dual régulier* avec lequel on travaille ici.

[17] En appliquant à cette équation l'opérateur inversible $I - D^2$, on retrouve la formulation équivalente (3.2).

Théorème 3.1. *Soit $k \geq 1$. Pour tout $u_0 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$, il existe une unique géodésique $\varphi \in C^\infty([0,T]; \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1))$ issue de $\varphi(0) = Id \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ dans la direction $u_0 = \varphi_t(0) \in T_{Id}\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$, pour la métrique définie par l'opérateur d'inertie A_k. De plus cette solution dépend de manière C^∞ de la donnée initiale $u_0 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$.*

La preuve de ce théorème repose sur les deux arguments principaux que voici.

1. L'équation des géodésiques sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \times \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi_t = v, \\ v_t = P_k(\varphi, v). \end{cases} \tag{3.3}$$

On a donc un problème de Cauchy. La difficulté, c'est qu'on n'a pas de théorème pour le résoudre sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) \times \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$[18]. On va donc d'abord montrer que (3.3) est un *problème de Cauchy bien posé* sur l'espace $\mathcal{D}_n \times H^n(\mathbb{S}^1)$ si n est plus grand que $2k+1$, où $\mathcal{D}_n$ est l'espace des difféomorphismes C^1 qui sont de classe H^n. La question délicate étant de montrer que l'application

$$(\varphi, v) \mapsto (v, P_k(\varphi, v))$$

est un champ de vecteur bien défini et de classe C^∞ sur la variété de Banach $\mathcal{D}_n \times H^n(\mathbb{S}^1)$. L'opérateur P_k s'écrit :

$$P_k(\varphi, v) = R_\varphi \circ A_k^{-1} \circ C_k \circ R_{\varphi^{-1}}(v)$$

où A_k est l'opérateur d'inertie, qui est un opérateur linéaire continue (donc C^∞) de H^n dans H^{n-2k}, R_φ est la composition à droite par φ et C_k est un opérateur différentiel quadratique borné de H^n dans H^{n-2k}.

On ne peut malheureusement pas conclure directement que P_k est C^∞ car ni la composition, ni l'inversion ne sont des application C^∞ dans $\mathcal{D}_n$. Pour établir que l'application $(\varphi, v) \mapsto (\varphi,\ P_k(\varphi, v))$ est C^∞, on le décompose en deux applications

$$E_k(\varphi, v) = \Big(\varphi,\ R_\varphi \circ C_k \circ R_{\varphi^{-1}}(v)\Big),$$

et

$$Q_k(\varphi, v) = \Big(\varphi,\ R_\varphi \circ A_k^{-1} \circ R_{\varphi^{-1}}(v)\Big).$$

[18] Le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas valable sur les espaces de Fréchet.

Le fait que E_k soit de classe C^∞ repose sur l'*observation essentielle suivante* : $E_k(\varphi, v)$ est un polynôme des variables

$$\frac{1}{\varphi_x}, \varphi_{xx}, \dots, \varphi^{(2k)}, v, v_x, \dots, v^{(2k)},$$

ce qui permet de conclure sachant que $H^n(\mathbb{S}^1)$ est une algèbre de Banach, pour $n \geq 1$. Pour montrer que Q_k est de classe C^∞, on remarque d'abord qu'il possède un inverse

$$Q_k^{-1}(\varphi, v) = \Big(\varphi,\ R_\varphi \circ A_k \circ R_{\varphi^{-1}}(v)\Big)$$

et que cette inverse est C^∞ pour les mêmes raisons que E_k. On conclut ensuite par un argument d'inversion locale dans les espaces de Banach.

2. Soit $u_0 \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$. Pour chaque $n \geq 2k+1$, on obtient un réel strictement positif T_n et une solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_n$, avec conditions initiales $\varphi(0) = Id$ et $v(0) = u_0$, dans $\mathcal{D}_n \times H^n(\mathbb{S}^1)$ définie sur l'intervalle de temps maximal $[0, T_n[$. Chaque solution du problème $\mathcal{P}_{n+1}$ est elle-même solution du problème $\mathcal{P}_n$: la suite T_n est décroissante. On montre alors, par des estimations assez fines, que

$$T_n \geq T_{2k+1},$$

pour tout $n \geq 2k+1$. Un des ingrédient essentiel pour obtenir cette majoration est l'existence d'une *loi de conservation*. L'invariance de la fonctionnelle d'énergie H_A par l'action à droite du groupe $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ conduit à la conservation du *moment*

$$m_k(\varphi, t) = A_k(u) \circ \varphi \cdot \varphi_x^2.$$

C'est également en utilisant cette loi de conservation que l'on a pu montrer le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Pour la métrique H^k ($k \geq 1$) sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$, l'exponentielle riemannienne est un difféomorphisme local de classe C^∞ d'un voisinage de l'origine de $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$ sur un voisinage de Id dans $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$.*

Ces méthodes ont été appliquées par Thomas Kappeler et Peter Topalov (Université de Zürich) pour le *groupe de Virasoro*, une extension centrale du groupe des difféomorphismes du cercle par $\mathbb{R}$ dans [CKKT05]. Comme je l'ai déjà signalé, ce groupe sert d'*espace de configuration* pour l'équation de *Korteweg-de Vries*. Dans ce cas, on montre que l'exponentielle riemannienne est un difféomorphisme local pour les métriques H^k, si $k \geq 2$ mais elle ne l'est pas pour $k = 0$ et $k = 1$.

3.4 Systèmes bi-Hamiltoniens sur $\mathrm{Vect}^*(\mathbb{S}^1)$

L'équation de Korteweg-de Vries a été l'objet d'une intense activité de recherche en physique mathématique ces quarante dernières années, notamment à travers les travaux de Gardner, Green, Kruskal, Miura, ... (voir [63] pour une bibliographie complète et une étude historique). C'est d'ailleurs à partir de ces travaux, qu'a émergé la *théorie des solitons* ainsi qu'une méthode de résolution de certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires connue maintenant sous le nom d'*inverse scattering method*.

Une des propriétés remarquables de l'équation de Korteweg-de Vries, mise en évidence à cette occasion, est la présence d'une infinité d'intégrales premières. Ce mécanisme, qui engendre ces grandeurs conservées, est à l'origine d'un nouveau formalisme connu sous le nom de *schéma de Lenard* ou de *formalisme bi-Hamiltonien* [52, 33]. Il caractérise les systèmes d'évolution de dimension infinie dits *formellement intégrables*, en réminiscence des systèmes intégrables classiques (au sens de Liouville) de dimension finie. Il s'applique en particulier à l'équation de Camassa-Holm [17, 20, 28] et à l'équation de Burgers. Détaillons-le.

Deux crochets de Poisson $\{,\}_P$ et $\{,\}_Q$ sur une même variété M, définis par les *bi-vecteurs de Poisson* P et Q sont dit compatibles, si toute combinaison linéaire de ces deux crochets

$$\{f,g\}_{\lambda,\mu} = \lambda\{f,g\}_P + \mu\{f,g\}_Q, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

est également un crochet de Poisson, c'est à dire vérifie l'identité de Jacobi.

Lorsqu'un champ de vecteur X est hamiltonien relativement à deux structures de Poisson compatibles, on dit que ce champ de vecteurs est *bi-hamiltonien*. Dans les cas favorables, cette situation engendre une hiérarchie, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'intégrales premières *en involution* (relativement aux deux structures) de la façon suivante. Soit H_1 le hamiltonien de X relativement à P, et H_2 son hamiltonien relativement à Q

$$X = X_1 = P\,dH_1 = Q\,dH_2.$$

On définit ensuite de façon inductive

$$X_n = P\,dH_n = Q\,dH_{n+1}.$$

Cet algorithme est connu sous le nom de *Schéma de Lenard* [46, 27, 33, 52, 63]. Il permet dans la plupart des cas connus de générer suffisamment d'intégrales premières pour établir l'*intégrabilité* du système initial.

Sur le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie, il y a une structure de Poisson *linéaire*[19] canonique (dite de Lie-Poisson) définie par

$$\{f,g\}_{LP}(m) = m([d_m f, d_m g])$$

où $f,g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Toute équation d'Euler sur $\mathfrak{g}^*$ associée à un opérateur d'inertie

$$A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$$

est hamiltonienne pour la structure canonique. Il se trouve que pour certains opérateurs A, l'équation d'Euler est hamiltonienne par rapport à une seconde structure compatible dite *affine* (après Souriau [66]). Cette seconde structure est définie par une forme bilinéaire antisymétrique γ de $\mathfrak{g}$

$$\{f,g\}_\gamma(m) = \gamma(d_m f, d_m g).$$

La compatibilité de ce crochet avec la structure canonique se traduit par le fait que γ soit un 2-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On parle alors de structure de *Poisson affine* définie par le cocycle γ.

Remarque. Dans le cas particulier ou le cocycle γ est un cobord

$$\gamma(u,v) = m_0([u,v]), \quad u,v \in \mathfrak{g}, \quad m_0 \in \mathfrak{g}^*,$$

la structure de Poisson associée est appelée par certains auteurs, une structure "gelée" (*freezing structure*) [3, 44] et l'algorithme utilisé pour engendrer la hiérarchie d'intégrales premières est la *méthode de translation de l'argument.*

Il se trouve justement que les équations de Burgers, de Korteweg-de Vries et de Camassa-Holm sont bi-hamiltoniennes relativement à des structures affines de Lie-Poisson[20]. Comme ces équations sont des cas particuliers d'équation d'Euler induites par des métriques H^k, il est naturel de se demander si, plus généralement, les équations d'Euler associées aux métriques H^k, possèdent des propriétés semblables pour toute valeur de k. Dans [CK06], nous avons montré avec Adrian Constantin, qu'il n'existait aucune structure affine de Lie-Poisson qui fasse de X_k un champ bi-hamiltonien, en dehors des cas particuliers $k = 0$ (Burgers) et $k = 1$ (Camassa-Holm). Un résultat analogue pour le groupe de Virasoro est donné dans [CKL06].

[19] Le crochet de 2 formes linéaires sur $\mathfrak{g}^*$ est encore une forme linéaire.

[20] Il semble que la structure affine sur l'algèbre de Virasoro qui serve à intégrer l'équation de Korteweg-de Vries ait été découvert en premier par Gardner [31] et certains auteurs donne à la structure de Poisson associée le nom de *crochet de Gardner* (Voir également [25].

Dans un article à paraître [Kol06b], je me suis intéressé au problème plus général suivant : Quels sont les opérateurs différentiels linéaires, symétriques A sur $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$ dont l'équation d'Euler associée est bi-hamiltonienne relativement à une structure affine ? J'ai obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.3. *Les seuls opérateurs différentiels, linéaires, symétriques, inversibles*

$$A : \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)^*$$

à coefficients constants*, dont l'équation d'Euler associée est bi-hamiltonienne relativement à une structure affine de Lie-Poisson, sont*

$$A = aI + bD^2,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a - bn^2 \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}$*. La seconde structure Hamiltonienne est définie par l'opérateur*

$$Q = DA = aD + bD^3,$$

où $D = d/dx$ *et le second Hamiltonien est la fonction*

$$H_3(m) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} \left(au^3 - bu(u_x)^2\right) dx,$$

où $m = Au$*.*

4 Perspectives de recherches

Cette section contient une liste non-exhaustive de questions ouvertes et de perspectives en relation avec les recherches présentées dans ce mémoire.

• Y a-t-il une caractérisation topologique simple des rotations euclidiennes de la sphère $\mathbb{S}^3$ et plus généralement du sous-groupe des rotations $\mathrm{SO}(4)$? Je reçois occasionnellement des messages qui m'interrogent à ce sujet mais je ne connais pas la réponse.

• Nous avons procédé à une étude exhaustive de l'équation d'Euler pour les métriques H^k ($k \in \mathbb{N}$) sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ et sur le groupe de Virasoro. S'il semble très probable que nos résultats s'étendent, sans trop de difficultés, au cas d'une métrique donnée par un opérateur différentiel, linéaire à coefficients constants A, il n'en est pas de même si A a des coefficients qui sont des fonctions C^∞ non constantes. Et qu'en est-il pour un opérateur pseudo-différentiel ? Nous avons essayé de voir ce que l'on pouvait faire pour les métriques H^s où s n'est pas un entier mais il s'est avéré rapidement que le problème devenait beaucoup plus compliqué. Certains de nos arguments clefs ne fonctionnent plus dans ce cas.

• Après l'étude des équations d'Euler sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$, la généralisation la plus simple en dimension supérieure est celle du groupe des difféomorphismes sur le tore $\mathbb{T}^2$. Ce modèle avait déjà été étudié par Arnold mais pas du point de vue analytique. Il semble que Thomas Kappeler et Peter Topalov aient entamé des recherches dans cette direction.

• La formulation géométrique initiale d'Arnold de l'hydrodynamique est restreinte au problème des fluides occupant un domaine fixe. A la suite d'une formulation hamiltonienne prometteuse dû à Zakharov [70] dans le cas bi-dimensionnel et irrotationnel, cette approche a été généralisée au moins formellement dans le cas des problèmes à frontière libre [49] où l'espace de configuration est un espace de plongements qui n'est plus un groupe. Toutefois, il semble que la puissance géométrique de ces méthodes n'ai pas encore été totalement exploitée. Il serait intéressant de formuler des problèmes variationnels *exploitables* pour traiter certains écoulements fluides bidimensionnels, avec rotationnel non nul [21, 22]. Avec David Sattinger nous avons commencé des recherches dans cette direction.

- Dans [CK06], nous avons montré qu'il n'existait pas de structure affine de Lie-Poisson pour laquelle l'équation d'Euler associée à la métrique H^k était bi-hamiltonienne, si $k > 1$. On est en droit de se demander si ces équations sont bi-hamiltoniennes pour une autre structure de Poisson. Le problème tel quel semble beaucoup trop général. Toutefois, il serait intéressant de traiter la question pour des déformations linéaires de la structure de Lie-Poisson. On pourra remarquer à ce sujet, que l'équation du mouvement du solide (en dimension finie) n'est pas bi-hamiltonienne par rapport à une structure affine mais elle l'est par rapport à une déformation linéaire de la structure canonique [57].

- Dans [Kol06b], j'ai déterminé les seuls opérateurs différentiels, linéaires à coefficients constants A, représentant une métrique invariante à droite sur $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$, dont l'équation d'Euler était bi-hamiltonienne relativement à une structure de Poisson affine. Il serait intéressant de connaître la réponse pour un opérateur différentiel linéaire quelconque. Et dans ce cas, quels sont les 2-cocycles γ sur $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$ pour lesquels il existe une équation d'Euler bi-hamiltonienne ? Il semblerait que Zakharevich ait construit de tels exemples sur l'algèbre de Virasoro.

- Je me suis également intéressé à l'intégrabilité du flot géodésique d'une variété riemannienne de dimension finie, ou plus généralement d'une variété munie d'une connexion affine symétrique. Ce problème a été très étudié notamment dans le cas de certaines solutions de la relativité générale [68]. Dans un travail en préparation, je m'intéresse à l'existence de certain champs de tenseurs qui engendrent des intégrales premières comme le fond les tenseurs de Killing ou de Killing-Yano. Ces champs de tenseurs sont une généralisation des *champs équiprojectifs* définis sur un espace affine [4] mais dans le cadre plus général d'une variété munie d'une connexion affine.

Publications

[**Kol89**] B. Kolev, *Entropie topologique et représentation de Burau*, C. R. Acad. Sci. Paris **309**, Série 1, pp. 835-838(1989).

[**Kol90**] B. Kolev, *Point fixe lié à une orbite périodique d'un difféomorphisme du plan*, C. R. Acad. Sci. Paris **310**, Série 1, pp. 831-833 (1990).

[**BK92**] C. Bonatti & B. Kolev, *Existence de point fixe enlacé à une orbite périodique d'un homéomorphisme du plan*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **12**, pp. 677-682 (1992).

[**Kol93**] B. Kolev, *Type de tresse d'orbites périodiques*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, **11**, pp. 73-84(1993).

[**Kol94**] B. Kolev, *Periodic points of period 3 in the disk*, Nonlinearity **7**, pp. 1067-1071 (1994).

[**CK94**] A. Constantin & B. Kolev, *The theorem of Kerékjártó on periodic homeomorphisms of the disc and the sphere*, L'Enseignement Mathématique, **40**, No 3-4, pp. 193–204, (1994).

[**Kol96**] B. Kolev, *Braid types of periodic orbits*, The Nepali Math. Soc Report, **15**, pp. 11-21(1996).

[**BK98**] C. Bonatti & B. Kolev, *Surface homeomorphisms with zero-dimensional singular set*, Topology and its applications, **90**, No 1-3, pp. 69–95, (1998).

[**KP98**] B. Kolev & M.-C. Pérouème, *Recurrent surface homeomorphisms*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **124**, No 1, pp. 161-168, (1998).

[**CK01**] A. Constantin & B. Kolev, *Least action principle for an integrable shallow water equation*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **8**, No 4, pp. 471-474, (2001).

[**CK02**] A. Constantin & B. Kolev, *On the geometric approach to the motion of inertial mechanical systems*, Journal of Physics A, **35**, No 32, pp. R51-R79, (2002).

[**CK03a**] A. Constantin & B. Kolev, *H^k-metrics on the group of diffeomorphisms of the circle*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **10**, No 4, pp. 424-430, (2003).

[**CK03b**] A. Constantin & B. Kolev, *Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle*, Commentarii Mathematici Helvetici, **78**, No 4, pp. 787-804, (2003).

[**Kol04**] B. Kolev, *Mechanics and Lie groups : an introduction*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **11**, No 4, pp. 480-498, (2004).

[**CKKT06**] A. Constantin, T. Kappeler, B. Kolev & P. Topalov, *On geodesic exponential maps of the Virasoro group*, Annals of Global Analysis and Geometry, **31**, No 2, pp. 155-180, (2007).

[**Kol06a**] B. Kolev, *Sous-groupes compacts d'homéomorphismes de la sphère*, L'Enseignement Mathématique, **52**, No 3-4, pp. 193–214, (2006).

[**CK06**] A. Constantin & B. Kolev, *Integrability of invariant metrics on the diffeomorphism group of the circle*, Journal of Nonlinear Science, **16**, No 2, pp. 109-122, (2006).

[**CKL06**] A. Constantin, B. Kolev & J. Lenells, *Integrability of invariant metrics on the Virasoro group*, Physics Letters A, **350**, No 1-2, pp. 75-80, (2006).

[**Kol06b**] B. Kolev, *Bi-Hamiltonian systems on the dual of the Lie algebra of vector fields of the circle*, Phil. Trans. R. Soc. A, **365**, No 1858, pp. 2333-2357 , (2007).

Références

[1] L. Alsedà, J. Llibre, and M. Misiurewicz. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, volume 5 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 2000.

[2] V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc. 1) :319–361, 1966.

[3] V. I. Arnold and B. A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] Y. Bamberger and J.-P. Bourguignon. *Torseurs sur un espace affine*, pages i+203. Hermann, Paris, second edition, 1981. Voir également : Y. Bamberger & J.-P. Bourguignon, "Torseurs sur un espace affine", Ecole polytechnique, Fasc. n° M25.0470, Avril 1970.

[5] F. Béguin, S. Crovisier, F. Le Roux, and A. Patou. Pseudo-rotations of the closed annulus : variation on a theorem of J. Kwapisz. *Nonlinearity*, 17(4) :1427–1453, 2004.

[6] R. H. Bing. A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres. *Ann. of Math. (2)*, 56 :354–362, 1952.

[7] R. H. Bing. Inequivalent families of periodic homeomorphisms of E^3. *Ann. of Math. (2)*, 80 :78–93, 1964.

[8] M. Bonino. A Brouwer-like theorem for orientation reversing homeomorphisms of the sphere. *Fund. Math.*, 182(1) :1–40, 2004.

[9] M. Bonino. Nielsen theory and linked periodic orbits of homeomorphisms of $\mathbb{S}^2$. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 140 :425–430, 2006.

[10] P. Boyland. Notes on dynamics of surface homeomorphisms : lectures by P. Boyland and J. Franks. notes by C. Carroll, J. Guaschi and T. Hall, August 1989, Warwick, pp. 1–48, 1989.

[11] G. E. Bredon. Exotic actions on spheres. In *Proc. Conf. on Transformation Groups (New Orleans, La., 1967)*, pages 47–76. Springer, New York, 1968.

[12] Y. Brenier. Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(4) :411–452, 1999.

[13] L. E. J. Brouwer. Über die periodischen transformationen der kugel. *Math. Ann.*, 80 :39–41, 1919.

[14] M. Brown. A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs. *Houston J. Math.*, 10(1) :35–41, 1984.

[15] J. M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In *Advances in Applied Mechanics*, pages 171–199. Academic Press Inc., New York, N. Y., 1948.

[16] G. Cairns and E. Ghys. The local linearization problem for smooth SL(n)-actions. *Enseign. Math. (2)*, 43(1-2) :133–171, 1997.

[17] R. Camassa and D. D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 71(11) :1661–1664, 1993.

[18] C. Carathéodory. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. *Math. Ann.*, 73(3) :323–370, 1913.

[19] A. Constantin. A Lagrangian approximation to the water-wave problem. *Appl. Math. Lett.*, 14(7) :789–795, 2001.

[20] A. Constantin and H. P. McKean. A shallow water equation on the circle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52 :949–982, 1999.

[21] A. Constantin, D. H. Sattinger, and W. Strauss. Variational formulations for steady water waves with vorticity. *Jour. Fluid Mech.*, 548 :151–163, 2006.

[22] A. Constantin and W. Strauss. Exact steady periodic water waves with vorticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57(4) :481–527, 2004.

[23] D. G. Ebin and J. Marsden. Groups of diffeomorphisms and the notion of an incompressible fluid. *Ann. of Math. (2)*, 92 :102–163, 1970.

[24] S. Eilenberg. Sur les transformations periodiques de la surface de la sphère. *Fund. Math.*, 22 :28–44, 1934.

[25] L. D. Faddeev and V. E. Zaharov. The Korteweg-de Vries equation is a fully integrable Hamiltonian system. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 5(4) :18–27, 1971.

[26] J. Fehrenbach and J. Los. Une minoration de l'entropie topologique des difféomorphismes du disque. *J. London Math. Soc. (2)*, 60(3) :912–924, 1999.

[27] A. S. Fokas and B. Fuchssteiner. On the structure of symplectic operators and hereditary symmetries. *Lett. Nuovo Cimento (2)*, 28(8) :299–303, 1980.

[28] A. S. Fokas and B. Fuchssteiner. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries. *Phys. D*, 4 :47–66, 1981/82.

[29] R. J. Fokkink and L. G. Oversteegen. A recurrent nonrotational homeomorphism on the annulus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(2) :865–875, 1992.

[30] J. M. Gambaudo, S. van Strien, and C. Tresser. Vers un ordre de Sarkovskiĭ pour les plongements du disque préservant l'orientation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 310(5) :291–294, 1990.

[31] C. S. Gardner. Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system. *J. Mathematical Phys.*, 12 :1548–1551, 1971.

[32] F. W. Gehring and G. J. Martin. Discrete quasiconformal groups. I. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(2) :331–358, 1987.

[33] I. M. Gel'fand and I. J. Dorfman. Hamiltonian operators and algebraic structures associated with them. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 13(4) :13–30, 96, 1979.

[34] I. M. Gel'fand and I. Ja. Dorfman. Hamiltonian operators and infinite-dimensional Lie algebras. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 15(3) :23–40, 1981.

[35] A. M. Gleason. Spaces with a compact Lie group of transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 :35–43, 1950.

[36] J. Guaschi. Representations of Artin's braid groups and linking numbers of periodic orbits. *J. Knot Theory Ramifications*, 4(2) :197–212, 1995.

[37] J. Guaschi. Nielsen theory, braids and fixed points of surface homeomorphisms. *Topology Appl.*, 117(2) :199–230, 2002.

[38] L. Guillou. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. *Topology*, 33(2) :331–351, 1994.

[39] M. Handel. The forcing partial order on the three times punctured disk. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(3) :593–610, 1997.

[40] M. Handel and W. P. Thurston. New proofs of some results of Nielsen. *Adv. in Math.*, 56(2) :173–191, 1985.

[41] K. Hiraide. Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov. *Osaka J. Math.*, 27(1) :117–162, 1990.

[42] B. von Kerékjártó. Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche. *Math. Ann.*, 80 :36–38, 1919-1920.

[43] B. von Kerékjártó. Sur la structure des transformations topologiques des surfaces en elles-mêmes. *Enseign. Math.*, 35 :297–316, 1936.

[44] B. Khesin and G. Misiolek. Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits. *Adv. Math.*, 176 :116–144, 2003.

[45] D. J. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.*, 39 :422–443, 1895.

[46] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 :467–490, 1968.

[47] P. Le Calvez. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Ann. Sci. école Norm. Sup. (4)*, 36(1) :139–171, 2003.

[48] F. Le Roux. Structure des homéomorphismes de Brouwer. *Geom. Topol.*, 9 :1689–1774 (electronic), 2005.

[49] D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery, and T. Ratiu. The Hamiltonian structure for dynamic free boundary problems. *Phys. D*, 18(1-3) :391–404, 1986. Solitons and coherent structures (Santa Barbara, Calif., 1985).

[50] J. Lewowicz. Expansive homeomorphisms of surfaces. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 20(1) :113–133, 1989.

[51] J. Los, K. H. Ko, and W. T. Song. Entropies of braids. *J. Knot Theory Ramifications*, 11(4) :647–666, 2002. Knots 2000 Korea, Vol. 2 (Yongpyong).

[52] F. Magri. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. *J. Math. Phys.*, 19(5) :1156–1162, 1978.

[53] J. Marsden and A. Weinstein. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Rep. Mathematical Phys.*, 5(1) :121–130, 1974.

[54] G. Misiołek. A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott-Virasoro group. *J. Geom. Phys.*, 24(3) :203–208, 1998.

[55] D. Montgomery and L. Zippin. *Topological transformation groups.* Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1974. Reprint of the 1955 original.

[56] J. J. Moreau. Une méthode de "cinématique fonctionnelle" en hydrodynamique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 249 :2156–2158, 1959.

[57] C. Morosi and L. Pizzocchero. On the Euler equation : bi-Hamiltonian structure and integrals in involution. *Lett. Math. Phys.*, 37(2) :117–135, 1996.

[58] J. Nielsen. *Investigations in the topology of closed orientable surfaces I, II and III*, pages xii + 441. Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1986.

[59] L. G. Oversteegen and E. D. Tymchatyn. Recurrent homeomorphisms on $\mathbf{R}^2$ are periodic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110(4) :1083–1088, 1990.

[60] V. Yu. Ovsienko and B. A. Khesin. The super Korteweg-de Vries equation as an Euler equation. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(4) :81–82, 1987.

[61] J. Peetre. Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels. *Math. Scand.*, 7 :211–218, 1959.

[62] H. Poincaré. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 132 :369–371, 1901.

[63] J. Praught and R. G. Smirnov. Andrew Lenard : a mystery unraveled. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 1 :Paper 005, 7 pp. (electronic), 2005.

[64] O. M. Sarkovskii. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrain. Mat. Ž.*, 16 :61–71, 1964.

[65] A. I. Shnirel'man. Generalized fluid flows, their approximation and applications. *Geom. Funct. Anal.*, 4(5) :586–620, 1994.

[66] J. M. Souriau. *Structure of Dynamical Systems*, volume 149 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. A symplectic view of physics, Translated from the French by C. H. Cushman-de Vries, Translation edited and with a preface by R. H. Cushman and G. M. Tuynman.

[67] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2) :417–431, 1988.

[68] M. Walker and R. Penrose. On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {22} spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 18 :265–274, 1970.

[69] C. T. Yang. Hilbert's fifth problem and related problems on transformation groups. In *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974)*, pages 142–146. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.

[70] V. E. Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2 :190–194, 1968.