



Etude asymptotique et transcendance de la fonctionvaleur en contrôle optimal. Catégorie log-exp en géométrie sous-Riemannienne dans le cas Martinet.

Emmanuel Trélat

► To cite this version:

Emmanuel Trélat. Etude asymptotique et transcendance de la fonctionvaleur en contrôle optimal. Catégorie log-exp en géométrie sous-Riemannienne dans le cas Martinet.. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 2000. Français. tel-00086511

HAL Id: tel-00086511

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00086511>

Submitted on 19 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

UFR de Sciences

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme de

Thèse de Doctorat

en sciences

Spécialité : Mathématiques

par

Emmanuel TRÉLAT

Le 13 décembre 2000 devant le jury composé de :

M. A. Agrachev	Examineur
M. B. Bonnard	Directeur de thèse
M. J.-M. Coron	Rapporteur
M. J.-P. Gauthier	Examineur
M. A. Jourani	Examineur
M. I. Kupka	Examineur
M. K. Kurdyka	Rapporteur
M. R. Roussarie	Président

**Etude asymptotique et transcendance de
la fonction valeur en contrôle optimal.
Catégorie log-exp en géométrie
sous-Riemannienne dans le cas Martinet.**

Emmanuel Trélat

Contents

I	Généralités	9
1	Introduction	10
2	Optimalité des trajectoires anormales	28
II	Propriétés asymptotiques et régularité de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux	42
3	S'il n'y a pas d'anormale minimisante	44
4	S'il existe une anormale minimisante	48

Articles en appendice

- [21] *B. Bonnard, G. Launay, E. Trélat*, The transcendence we need to compute the sphere and wave front in Martinet SR-geometry, Proceed. Int. Confer. dedicated to Pontryagin, Moscow, 1999.
- [23] *B. Bonnard, E. Trélat*, Stratification du secteur anormal dans la sphère de Martinet de petit rayon, Proceedings du NCN, A. Isidori, F. Lamnabhi Lagarrigue, W. Respondek (Eds), Nonlinear Control in the Year 2000.
- [58] *E. Trélat*, Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost, J. of Dynamical and Control Systems, Vol. 6, No. 4, Oct. 2000, pp 511-541.
- [59] *E. Trélat*, Optimality of singular trajectories and asymptotics of accessibility sets, Preprint Labo. de Topologie, Dijon, Oct. 2000 ; soumis à ESAIM/COCV.
- [60] *E. Trélat*, Non subanalyticity of sub-Riemannian Martinet spheres, Preprint Labo. de Topologie, Dijon, Nov. 2000 ; soumis aux CRAS.

Introduction générale

L'objet de cette thèse est l'étude du rôle des trajectoires anormales minimisantes en théorie du contrôle optimal.

Considérons un système de contrôle lisse sur \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

où l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U} est un ouvert de $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$, avec $T > 0$ fixé. On fixe $x(0) = x_0$ et on considère sur \mathcal{U} l'*application entrée/sortie* $E_T : u \mapsto x(T, x_0, u)$, où $x(t, x_0, u)$ est la solution de (1) associée à $u \in \mathcal{U}$ et partant de x_0 en $t = 0$. Une trajectoire $x(t, x_0, u)$ est dite *singulière* ou *anormale* sur $[0, T]$ si u est un point singulier de l'application entrée/sortie.

Considérons maintenant le problème de contrôle optimal suivant : parmi toutes les trajectoires solutions du système (1) reliant x_0 à x_1 , déterminer une trajectoire minimisant une fonction lisse appelée le *coût* : $C_T(u) = \int_0^T f^0(x, u) dt$. La fonction valeur S au point x_1 est alors définie comme la borne inférieure des coûts des trajectoires reliant x_0 à x_1 en temps T . Si un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe un *multiplieur de Lagrange* $(\psi, \psi^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ non trivial tel que :

$$\psi \cdot dE_T(u) = -\psi^0 dC_T(u)$$

De plus d'après le *Principe du Maximum de Pontryagin* (voir [50]) la trajectoire x correspondant à ce contrôle minimisant u est la projection d'une *extrémale*, i.e. une solution du système Hamiltonien :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u), \quad \frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0$$

où $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u)$ est le Hamiltonien du système, p est une fonction absolument continue sur $[0, T]$ appelée *vecteur adjoint*, et p^0 est une constante. De plus on a, à scalaire près : $(p(T), p^0) = (\psi, \psi^0)$. Si $p^0 \neq 0$, l'extrémale est dite *normale* ; Les anormales correspondent à $p^0 = 0$. Une anormale qui n'est pas la projection d'une extrémale normale est dite *stricte*. Le rôle des trajectoires anormales en théorie du contrôle optimal doit être étudié. Ce sont des singularités de l'ensemble des courbes solutions de (1) et elles ne dépendent donc pas du problème de minimisation considéré. C'est pourquoi leur analyse est essentielle. Le problème des anormales était déjà connu en théorie du calcul des variations classique (voir par exemple [13]) et a été un problème majeur au cours du développement, dans les années 40, de cette discipline qui est devenue la théorie du contrôle optimal. L'ouvrage [15] étudie leur rôle en théorie du contrôle non linéaire. On a souvent essayé d'éviter les anormales en cherchant un autre ensemble de multiplicateurs de Lagrange avec $\psi^0 \neq 0$, ou de les éliminer en prétendant (à tort) qu'elles ne sont jamais optimales. Dans [45] l'auteur donne un exemple d'anormale stricte minimisante en géométrie sous-Riemannienne, et donne une liste de plusieurs démonstrations fausses (de

plusieurs auteurs) du fait qu'une trajectoire anormale ne peut pas être optimale. Ce résultat a activé une série de travaux pour étudier le rôle des anormales en géométrie sous-Riemannienne.

Deux questions se posent alors naturellement :

Question 1 Sous quelles conditions une trajectoire anormale est-elle optimale, et jusqu'où l'est-elle ?

Question 2 Quelle influence ont les anormales minimisantes sur le comportement asymptotique et la transcendance de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux ?

En ce qui concerne la première question, une avancée majeure dans le traitement systématique des anormales a été faite par [19] pour des systèmes affines, par [8], [38], [43] pour des systèmes sous-Riemanniens, puis par [10] en général, où ces singularités sont traitées dans un contexte générique. Leur analyse donne des résultats de *rigidité* (cf [26]) des trajectoires anormales, c'est-à-dire qu'elles sont localement isolées parmi les trajectoires ayant les mêmes conditions aux limites, et donc localement optimales. De plus, les auteurs ont développé une *théorie de Morse* de l'application entrée/sortie, qui permet de caractériser les points où l'anormale perd son optimalité.

Des réponses partielles à la deuxième question existent dans le cadre sous-Riemannien pour un système analytique. Le problème est de savoir si les sphères ou la distance sous-Riemannienne appartiennent à une "bonne" catégorie (en particulier sont stratifiables), ou bien sont plutôt de nature fractale. Cette question est très importante du point de vue théorique et appliqué, mais aussi très difficile en général. Dans [1], [11], [36], les auteurs prouvent qu'en l'absence d'anormale minimisante la distance sous-Riemannienne $d_{SR}(0, \cdot)$ à 0 est sous-analytique dans un voisinage épointé de 0, et donc en particulier les sphères de petit rayon sont sous-analytiques. Cette situation est générique (pour la topologie de Whitney restreinte aux métriques analytiques) pour des distributions de rang supérieur ou égal à 3, voir [7]. En présence d'une anormale minimisante la catégorie sous-analytique n'est plus assez grande : dans [6] les auteurs prouvent que la sphère sous-Riemannienne dans le cas Martinet plat n'est pas sous-analytique, et dans [14], [17], le résultat est étendu à certaines déformations à un paramètre du cas plat. En fait les anormales minimisantes apparaissent génériquement pour des distributions de rang 2 en dimension assez grande, et on conjecture que dans ce cas les sphères sous-Riemanniennes ne sont jamais sous-analytiques. Remarquons que dans [7] les auteurs montrent que l'existence d'une anormale minimisante de type Martinet est responsable de la non sous-analyticité du germe en 0 de $d_{SR}(0, \cdot)$ (mais laissent ouverte la question de sous-analyticité des sphères).

La contribution de cette thèse est la suivante.

Le chapitre 2 de cette thèse concerne l'optimalité des anormales. Le but est de chercher des conditions sous lesquelles une anormale est *optimale* (minimisante ou maximisante), et de calculer son *temps conjugué*, c'est-à-dire le

temps au-delà duquel elle n'est plus optimale. S'inspirant de la méthode de [19], on améliore leurs résultats en les étendant aux systèmes affines mono-entrée *avec contrainte sur le contrôle* pour le problème du temps optimal (théorèmes 2.3.4, 2.3.7) mais aussi pour un coût quelconque (théorèmes 2.3.8, 2.3.9), retrouvant ainsi des résultats de [10]. On applique ensuite cette théorie aux *systèmes sous-Riemanniens de rang 2* (théorème 2.4.1), montrant que les *temps conjugués* peuvent être calculés en utilisant le formalisme introduit pour les systèmes affines, ce qui fait le lien entre les travaux de [19] et [8]. Les résultats obtenus sont du type :

Théorème. *Considérons le problème de temps optimal pour le système affine $\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x)$ où le contrôle u vérifie la contrainte $|u| \leq \eta$ (resp. le système sous-Riemannien $\dot{x} = v f_0(x) + u f_1(x)$, où $v^2 + u^2 \leq 1$). Soit γ une trajectoire anormale de référence. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées le long de γ :*

(H₀) γ est injective, associée à $u = 0$ sur $[0, T]$.

(H₁) $\forall t \in [0, T]$ $K_\gamma(t) = \text{Vect} \{ad^k f_0, f_1(\gamma(t)) \mid k \in \mathbf{N}\}$ (premier cône de Pontryagin le long de γ) est de codimension 1, et est engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs.

(H₂) $\forall t \in [0, T]$ $ad^2 f_1, f_0(\gamma(t)) \notin K_\gamma(t)$.

(H₃) Si $n = 2$ alors : $\forall t \in [0, T]$ $f_0(\gamma(t))$ et $f_1(\gamma(t))$ sont indépendants.
Si $n \geq 3$ alors : $\forall t \in [0, T]$ $f_0(\gamma(t)) \notin \text{Vect} \{ad^k f_0, f_1(\gamma(t)) \mid k = 0 \dots n - 3\}$.

Sous ces hypothèses, il existe un temps t_c appelé temps conjugué tel que γ est localement C^0 -optimale si et seulement si $T < t_c$.

Si pour le système affine on envisage un problème d'optimisation d'un coût quelconque $C(u)$, alors le résultat précédent reste vrai pourvu qu'on suppose de plus que ce coût soit indépendant de l'application entrée/sortie le long de γ .

L'équivalence entre le problème de temps optimal et le problème de coût optimal dépend de la nature de l'anormale (hyperbolique ou exceptionnelle), et du fait que le temps final soit fixé ou non, voir section 2.3.2.

La partie II de cette thèse répond à la question 2 pour des systèmes affines analytiques de \mathbf{R}^n avec un coût quadratique :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), x(0) = 0, C(u) = \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2 dt \quad (2)$$

Notons S la fonction valeur associée à ce coût. Le théorème 3.1.3 montre qu'en l'absence d'anormales minimisantes, la fonction valeur S est *sous-analytique* et *continue* :

Théorème. *Considérons le système (2), et soient $r, T > 0$ assez petits. Notons $M_{\leq r}(T) = S^{-1}([0, r])$. Alors :*

1. L'ensemble $M_{\leq r}(T)$ est compact dans \mathbb{R}^n .
2. Soit K un sous-ensemble sous-analytique de $M_{\leq r}(T)$. Supposons qu'il n'existe pas d'anormale minimisante reliant 0 à un point quelconque de K en temps T . Alors S est continue et sous-analytique sur K .

Ce résultat généralise aux systèmes affines les résultats correspondants obtenus en géométrie sous-Riemannienne par [1], [11], [36]. Le point clé de la démonstration est, comme dans [1], la compacité de l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés aux trajectoires optimales.

S'il existe une anormale minimisante la catégorie sous-analytique n'est plus assez grande en général pour décrire la régularité de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux, voir [6], [7]. La présence d'une anormale minimisante est liée à la *non-propreté* de l'application exponentielle (théorème 4.2.3), i.e. l'application paramétrisant les extrémales normales :

Théorème. *Soit γ une trajectoire anormale minimisante du système (2) associée à un unique contrôle anormal strict sur $[0, T]$, et $A = \gamma(T)$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que, dans tout voisinage de A , il existe au moins un point image par E_T d'un contrôle normal minimisant de coût inférieur à r . Alors l'application exponentielle restreinte aux minimisantes n'est pas propre au voisinage de A .*

Réciproquement si cette application n'est pas propre alors il existe une anormale minimisante. Cette *non-propreté* est caractéristique de l'anormalité. Cela provoque un phénomène de *tangence* des ensembles de niveaux de la fonction valeur par rapport à la direction anormale (théorème 4.2.2) :

Théorème. *Soit γ une trajectoire anormale du système (2) avec $m = 1$ (ou $m = 2$ et $f_0 = 0$) vérifiant les hypothèses $(H_0 - H_3)$ sur $[0, T]$, et $A = \gamma(T)$. Alors, au voisinage de A , les ensembles de niveaux $S^{-1}(r)$ de la fonction valeur sont constitués de deux parties : une sous-variété anormale (analytique), formée par les points finaux de trajectoires anormales minimisantes, et une partie normale, constituée de points finaux de trajectoires normales minimisantes, qui se ramifie sur la partie anormale, et est tangente en A à $K_\gamma(T)$ (voir fig. 4.3).*

Ceci nous donne une description qualitative des ensembles de niveaux de S , notamment des sphères sous-Riemanniennes pour une distribution de rang 2, au voisinage d'une anormale.

D'autre part, une analyse fine basée sur la théorie spectrale de l'application entrée/sortie (initialisée par [19]) permet, dans le cas d'un système affine mono-entrée, de décrire précisément le *contact des ensembles accessibles avec une direction anormale exceptionnelle* (théorème 4.3.1) :

Théorème. *Considérons le système $\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x)$, où le contrôle u vérifie la contrainte $|u| \leq \eta$. Soit γ une trajectoire anormale vérifiant les hypothèses $(H_0 - H_3)$ sur $[0, T]$. On suppose de plus que γ est exceptionnelle, c'est-à-dire que le Hamiltonien est nul le long de γ . Alors il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_n) localement le long de γ dans lesquelles, si T est assez petit :*

- $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$,
- l'ensemble accessible $Acc(T)$ au temps T depuis 0 est inclus dans le demi-espace $x_n \geq 0$ (voir fig. 4.5). De plus la frontière de cet ensemble dans le plan (x_1, x_n) au voisinage de $\gamma(T)$ ne dépend pas de la contrainte, et son graphe est

$$x_n \sim A_T \cdot (x_1 - T)^2$$

où $T \mapsto A_T$ est une fonction continue et décroissante (voir fig. 4.6).

Ce coefficient A_T est un invariant du système. Il peut être calculé grâce à la dérivée seconde intrinsèque de l'application entrée/sortie, voir remarque 4.3.1.

Dans le cas sous-Riemannien, le théorème précédent, ainsi qu'une comparaison fine du système sous-Riemannien et d'un système affine associé (lemme 4.3.2), conduisent au résultat suivant (section 4.3.2) :

Théorème. *Considérons le problème sous-Riemannien pour le système $\dot{x} = vf_0(x) + uf_1(x)$. Soit γ une trajectoire anormale de référence vérifiant les hypothèses $(H_0 - H_3)$ sur $[0, T]$. Alors il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_n) localement le long de γ dans lesquelles, si T est assez petit :*

- $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$,
- La sphère sous-Riemannienne $S(0, T)$ se scinde en deux secteurs au voisinage de $\gamma(T)$ (voir fig. 4.9) :

1. le secteur $L^\infty : (x_n > 0) \cap S(0, T)$, constitué de points de la sphère associés à des contrôles L^∞ -proches du contrôle anormal de référence. De plus dans le plan (x_1, x_n) , son graphe est (voir fig. 4.8 et 4.9) :

$$x_1 \geq T, x_n \sim A_T \cdot (x_1 - T)^2$$

où $T \mapsto A_T$ est continue, positive et décroissante.

2. le secteur $L^2 : (x_n < 0) \cap S(0, T)$, constitué de points de la sphère associés à des contrôles L^2 -proches (mais pas L^∞ -proches) du contrôle anormal de référence. Il est tangent à la direction anormale.

Ces deux secteurs sont séparés par le premier cône de Pontryagin $x_n = 0$ le long de γ .

Dans le cas Martinet on a un invariant du contact pour le secteur L^2 : le contact est en $\frac{1}{6}X^3$, voir [22].

La question de *transcendance* de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux en présence d'une anormale minimisante est étudiée dans le *cas sous-Riemannien de Martinet*. Considérons dans \mathbb{R}^3 la distribution $\Delta = \text{Ker}(dz - \frac{y^2}{2}dx)$ munie d'une métrique analytique g . L'unique direction anormale correspond à l'axe x ; elle est minimisante, voir [8]. Les variables x, y sont graduées en fonction de la règle de [12] avec les poids suivants : poids 1 pour x, y , poids 3 pour z . Une forme normale graduée pour la métrique g est, voir [6] :

- ordre -1 : $g = dx^2 + dy^2$ (cas plat),
- ordre 0 : $g = (1 + \alpha y)^2 dx^2 + (1 + \beta x + \gamma y)^2 dy^2$.

Dans le cas d'ordre 0 , l'anormale est stricte si et seulement si $\alpha \neq 0$; les équations des extrémales données par le Principe du Maximum se projettent sur une équation fondamentale, portant toute la transcendance du système, qui est l'équation d'un *pendule à paramètres* (4.8). Dans cette représentation la direction anormale se projette sur les singularités du pendule, qui sont des *points cols*. En estimant des temps de retour au voisinage d'un tel point, on montre (théorème 4.4.13) :

Théorème. *Si $\alpha \neq 0$, i.e. si l'anormale est stricte, alors les sphères sous-Riemanniennes de petit rayon ne sont pas sous-analytiques.*

On appelle cas Martinet général intégrable le cas où la métrique s'écrit : $g = a(y)dx^2 + c(y)dy^2$, où a et c sont des fonctions analytiques de y telles que $a(0) = c(0) = 1$. La métrique d'ordre 0 précédente avec $\beta = 0$ en est un cas particulier. Les équations du Principe du Maximum sont alors intégrables par quadratures, et conduisent au résultat suivant (corollaire 4.4.10) :

Théorème. *Dans le cas général intégrable, la sphère sous-Riemannienne de Martinet n'est pas sous-analytique, et appartient à la catégorie log-exp.*

La catégorie *log-exp*, conceptualisée dans [28], est une extension de la catégorie sous-analytique par les fonctions log et exp. En fait dans le cas Martinet intégrable on utilise une *sous-classe* de cette catégorie, dans laquelle on peut développer un algorithme général d'inversion de fonctions (algorithme 1.5.2). Cet algorithme permet d'obtenir une *échelle précise de fonctions* décrivant la trace de la sphère de Martinet dans le plan $y = 0$ (proposition 4.4.9).

Dans le cas général la question de transcendance est ouverte, et on conjecture :

Conjecture. La sphère sous-Riemannienne de Martinet n'est pas log-exp dans le cas non intégrable.

Cette thèse est organisée de la manière suivante.

La première partie rappelle des résultats de base en théorie du contrôle optimal (chap. 1), et traite la question de l'optimalité des anormales (chap. 2).

En deuxième partie on étudie la régularité et les propriétés asymptotiques de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux pour des systèmes affines quadratiques, tout d'abord s'il n'existe pas de trajectoire anormale minimisante (chap. 3), puis en présence d'une telle anormale (chap. 4).

Pour faciliter la lecture et ne pas alourdir l'exposé, aucune preuve n'est présentée. En effet les démonstrations notamment de l'optimalité des singulières ou de la transcendance des sphères de Martinet dans le cas intégrable sont très longues. Le lecteur souhaitant lire les démonstrations peut se reporter aux articles correspondants, en appendice de cette thèse ([21], [23], [58], [59], [60]).

Part I
Généralités

Chapter 1

Introduction

1.1 Problématique générale

D'un point de vue global, le problème doit se formuler sur une variété M , mais notre point de vue est *local* et on travaille sur un ouvert V assez petit de \mathbb{R}^n . Tous les objets manipulés sont, sauf mention particulière, C^∞ . La problématique générale du contrôle optimal est la suivante. Considérons un système sur V

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lisse et l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U} est composé des applications mesurables bornées $u : [0, T(u)] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soit l'application $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, on note $C_T(u) = \int_0^{T'} f^0(x(t), u(t)) dt$ le coût d'une trajectoire $x : t \mapsto x(t)$, associée à $u(\cdot)$ et définie sur $[0, T'(u)]$, $T'(u) \leq T(u)$. Soient N_0 et N_1 deux sous-variétés régulières de V . Le problème de contrôle optimal est de trouver parmi toutes les trajectoires $x(\cdot)$ joignant N_0 à N_1 , celles dont le coût est minimal. Ici nous nous restreignons au cas où N_0 et N_1 sont des points x_0 et x_1 de V . Notre point de vue étant local, on peut toujours supposer que $x_0 = 0$.

1.2 Application entrée/sortie

1.2.1 Définition

Considérons pour le système (1.1) le problème de *contrôle* suivant : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ tel que la trajectoire x_u associée à u , solution de (1.1), vérifie :

$$x_u(0) = 0, \quad x_u(T) = x_1$$

Ceci nous conduit à définir :

Définition 1.2.1. Soit $T > 0$. L'application entrée/sortie en temps T du système contrôlé (1.1) initialisé à 0 est l'application :

$$E_T : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ u & \longmapsto & x_u(T) \end{array}$$

où \mathcal{U} est l'ensemble des contrôles admissibles.

Autrement dit, l'application entrée/sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u . Une question importante en théorie du contrôle est d'étudier cette application en décrivant son image, ses singularités, etc.

1.2.2 Régularité de l'application entrée/sortie

La régularité de E_T dépend bien entendu de l'espace de départ et de la forme du système.

Pour un système général

En toute généralité on a le résultat suivant, voir par exemple [15], [55] :

Proposition 1.2.1. *Considérons le système (1.1) où f est lisse et $\mathcal{U} \subset L^\infty([0, T])$. Alors E_T est lisse au sens L^∞ .*

Soit $u \in \mathcal{U}$ un contrôle de référence. Exprimons la différentielle de E_T au point u (au sens de Fréchet) : elle est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante. Posons :

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_u(t), u(t)) , \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_u(t), u(t))$$

Le système :

$$\begin{aligned} \dot{y}_v(t) &= A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) &= 0 \end{aligned}$$

est appelé *système linéarisé* le long de (x_u, u) . Alors la différentielle de Fréchet de E_T en u est l'application :

$$dE_T(u).v = y_v(T) = \int_0^T M(T)M^{-1}(s)B(s)v(s)ds \quad (1.2)$$

où M est la solution matricielle de : $\dot{M} = AM, M(0) = \text{Id}$.

Pour un système affine

Définition 1.2.2. On appelle *système affine contrôlé* un système de la forme :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$$

où les f_i sont des champs de vecteurs.

Pour un système affine on peut améliorer le résultat précédent, voir [55] et [41] :

Proposition 1.2.2. *Considérons un système affine lisse et supposons que \mathcal{U} est un ouvert de $L^2([0, T])$. Alors l'application entrée/sortie E_T est lisse au sens L^2 , et est analytique si les champs de vecteurs sont analytiques.*

Il est très intéressant de considérer L^2 comme espace de contrôles. En effet dans cet espace on bénéficie d'une structure hilbertienne qui permet de faire une *théorie spectrale* de l'application entrée/sortie (voir chap. 2) ; on bénéficie d'autre part de bonnes propriétés de *compacité faible* qui sont à la base de tous les raisonnements effectués dans [58] (voir section 3.1).

On a donc besoin de connaître la régularité de l'application entrée/sortie par rapport à la topologie faible de L^2 . On note $u_n \rightharpoonup u$ la convergence faible de u_n vers u dans L^2 . On a :

Proposition 1.2.3 ([58]). *Soit $T > 0$ fixé. Considérons le système affine :*

$$\dot{x}_u = f_0(x_u) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x_u), \quad x_u(0) = 0$$

où les f_i sont des champs de vecteurs analytiques sur \mathbb{R}^n , et où $u = (u_1, \dots, u_m) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Alors :

1. Le domaine \mathcal{U} de E_T est ouvert dans L^2 .
2. Soit $u \in \mathcal{U}$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ alors pour n assez grand x_{u_n} est bien définie sur $[0, T]$ et $x_{u_n} \rightarrow x_u$ uniformément sur $[0, T]$. De plus :

$$dE(u_n) \longrightarrow dE(u) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

1.2.3 Contrôlabilité

On veut répondre à la question suivante : étant donné le système (1.1), où peut-on aller en temps T en faisant varier le contrôle u ? On est amené à définir la notion d'ensemble accessible.

Définition 1.2.3. *L'ensemble accessible en temps T pour le système (1.1), noté $Acc(T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de 0. Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée/sortie en temps T .*

Définition 1.2.4. Le système (1.1) est dit *contrôlable* si :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(T)$$

Par des arguments du type théorème des fonctions implicites, l'étude de la contrôlabilité du système linéarisé (qui est plus simple), permet de déduire des résultats de *contrôlabilité locale* du système de départ, voir [40]. Par exemple :

Considérons le système (1.1) où $f(0,0) = 0$. Notons $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$. On suppose que :

$$\text{rg} (B|AB|\cdots|A^{n-1}B) = n$$

Alors le système est localement contrôlable en 0.

Le théorème de Chow (voir [27]) relie la contrôlabilité à des propriétés de crochets de Lie du système. On a la conséquence suivante sur les systèmes dits *sous-Riemanniens*, voir par exemple [16] :

Proposition 1.2.4. *Considérons dans \mathbb{R}^n le système sous-Riemannien lisse :*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad x(0) = 0$$

On suppose que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs f_i est de dimension n . Alors le système est contrôlable.

1.3 Fonction valeur et contrôles optimaux

1.3.1 Existence de contrôles optimaux

Maintenant, en plus d'un problème de contrôle, on se donne un problème de minimisation : parmi toutes les solutions du système (1.1) reliant 0 à x_1 , trouver une trajectoire qui minimise une certaine fonction *coût* $C(T, u)$. Une telle trajectoire, si elle existe, est dite *optimale* pour ce coût. L'existence de trajectoires optimales dépend de la régularité du système et du coût ; pour un énoncé général, voir [30] ou [40]. Il se peut aussi qu'un contrôle optimal n'existe pas dans la classe de contrôles considérés, mais existe dans un espace plus gros : c'est le phénomène de Lavrentiev, voir [54]. En particulier on a intérêt à travailler dans un espace de contrôles complet et qui ait de bonnes propriétés de compacité : voilà pourquoi à nouveau l'espace L^2 est intéressant. On a par exemple pour les systèmes affines :

Proposition 1.3.1. *Considérons le système affine dans \mathbb{R}^n :*

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad x(0) = x_0, x(T) = x_1 \quad (1.3)$$

avec le coût

$$C_T(u) = \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt \quad (1.4)$$

où $T > 0$ est fixé et la classe \mathcal{U} des contrôles admissibles est le sous-ensemble de $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que :

1. $\forall u \in \mathcal{U}$ x_u est bien définie sur $[0, T]$.

2. $\exists B_T / \forall u \in \mathcal{U} \quad \forall t \in [0, T] \quad \|x_u(t)\| \leq B_T$

Si x_1 est accessible depuis x_0 en temps T , alors il existe un contrôle optimal reliant x_0 à x_1 .

1.3.2 Définition de la fonction valeur

Définition 1.3.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Définissons la *fonction valeur* $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ par :

- s'il n'existe aucune trajectoire du système reliant 0 à x en temps T , on pose : $S(T, x) = +\infty$.
- sinon on pose : $S(T, x) = \inf\{C_T(u) / E_T(u) = x\}$.

La fonction valeur est la généralisation du concept de distance. Par exemple en géométrie (sous-) Riemannienne, pour le coût (1.4), c'est le carré de la distance (sous-) Riemannienne.

La fonction valeur vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi, voir par exemple [40].

Définition 1.3.2. Soient $r, T > 0$. On définit les ensembles de niveaux de la fonction valeur :

1. $M_r(T) = S^{-1}(r)$.
2. $M_{\leq r}(T) = S^{-1}([0, r])$.

Ce sont les généralisations des sphères ou des boules (sous-) Riemanniennes. On a :

Théorème 1.3.2 ([58]). *Considérons le système affine (1.3) avec le coût (1.4). Si r est assez petit alors le sous-ensemble $M_{\leq r}(T)$ est compact dans \mathbb{R}^n .*

Remarque 1.3.1. En revanche $M_r(T)$ n'est pas nécessairement fermé, car S peut être discontinue, voir section 3.2.

1.3.3 Calcul des contrôles optimaux : Principe du Maximum de Pontryagin

Essayons de caractériser les contrôles optimaux. Pour cela on cherche d'abord des *conditions nécessaires d'optimalité*. Introduisons l'application entrée/sortie du système augmenté :

$$\tilde{E}(u) = (E(u), C(u))$$

où E est l'application entrée/sortie, et C le coût. Supposons que C soit différentiable. Il est bien clair d'après le théorème des fonctions implicites que si u est optimal alors c'est un point singulier de \tilde{E} . Autrement dit il existe un *multiplicateur de Lagrange* $(\psi, \psi^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ non trivial tel que :

$$\psi dE(u) = -\psi^0 dC(u)$$

En fait (ψ, ψ^0) est égal au vecteur adjoint $(p(T), p^0)$ associé au contrôle u dans le théorème suivant (voir [50], [40]) :

Théorème 1.3.3 (Principe du Maximum de Pontryagin). *Considérons le système $\dot{x} = f(x, u)$ avec un coût de la forme $C(u) = \int_0^T f^0(x, u)dt$ où f, f^0 sont lisses. Si le contrôle u est optimal alors il existe une fonction non triviale $(p(\cdot), p^0) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ absolument continue appelée vecteur adjoint, où p^0 est une constante, telle que la trajectoire optimale x associée au contrôle u vérifie le système :*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u)\end{aligned}\tag{1.5}$$

où $H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u)$ est le Hamiltonien du système, et de plus :

$$H(x, p, p^0, u) = \max_v H(x, p, p^0, v)\tag{1.6}$$

Définition 1.3.3. On appelle *extrémale* une solution du Principe du Maximum. Une extrémale est dite *normale* si $p^0 \neq 0$, et *anormale* ou *singulière* si $p^0 = 0$.

Le vecteur adjoint étant défini à *scalaire multiplicatif* près, on a deux normalisations possibles :

première normalisation : si l'extrémale est normale, on normalise de sorte que $p^0 = -\frac{1}{2}$.

seconde normalisation : on normalise de sorte que le vecteur adjoint final (ou multiplicateur de Lagrange) $(p(T), p^0)$ soit *de norme 1* dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, i.e. on considère un multiplicateur de Lagrange *projectivisé*.

La première normalisation sert principalement à calculer le *flot normal* (voir exemple 1.3.1 plus bas). On se sert de la seconde normalisation pour exprimer des propriétés géométriques, voir notamment section 4.2.

Définition 1.3.4. Il peut arriver qu'une trajectoire admette un relèvement normal et un relèvement anormal. Une trajectoire anormale n'admettant pas de relèvement normal est dite *stricte*.

Conséquence : calcul des contrôles extrémaux C'est la contrainte (1.6) qui permet de calculer les contrôles extrémaux. En particulier si le contrôle u est à l'intérieur du domaine des contrôles admissibles, alors cette contrainte devient :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, p^0, u) = 0\tag{1.7}$$

Exemple 1.3.1. (calcul des contrôles normaux pour un système affine)
 Considérons le système affine (1.3) avec le coût (1.4). Le Hamiltonien est :

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \rangle + p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2$$

On utilise ici la *première normalisation* sur le vecteur adjoint, i.e. $p^0 = -\frac{1}{2}$.
 Les contrôles normaux sont donc donnés par :

$$u_i = \langle p, f_i(x) \rangle$$

Réinjectant cette expression dans le système (1.5), on voit que les extrémals normales du système (1.3) sont solutions d'un système différentiel lisse (et donc en particulier *les extrémals normales sont lisses*). Par conséquent il devient possible de définir :

Définition 1.3.5. Pour le système affine (1.3) avec le coût (1.4), on appelle *application exponentielle* l'application $\exp : \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ p(0) & \longmapsto & x(T) \end{matrix}$ où $x(T)$ est l'extrémité au temps T de la trajectoire x , et $(x(\cdot), p(\cdot))$ est solution du système différentiel (1.5) avec $u_i = \langle p, f_i(x) \rangle$.

C'est une généralisation de l'application exponentielle en géométrie Riemannienne. Cette application a la même régularité que le système. Elle donne une *paramétrisation en dimension finie des extrémals normales*, et définit ce qu'on appelle le *flot normal*.

En revanche le calcul des contrôles singuliers n'est pas aussi systématique et est envisagé à la section suivante.

Condition suffisante d'optimalité Le Principe du Maximum nous donne des conditions *nécessaires* d'optimalité, et affirme que les trajectoires optimales sont à chercher parmi les extrémals. On s'intéresse maintenant à la réciproque, i.e. on se pose la question suivante : une extrémale est-elle optimale ?

La réponse est en fait positive pour les extrémals *normales* avec des conditions assez faibles (voir [40]). En particulier pour le système affine précédent :

Proposition 1.3.4. *Considérons le système affine (1.3) avec le coût (1.4). Soit $x(\cdot)$ une trajectoire normale. Alors elle est optimale sur $[0, T]$ si T est assez petit.*

1.3.4 Contrôles singuliers ou anormaux

Lemme 1.3.5. *Les définitions suivantes sont équivalentes :*

1. Le contrôle u est singulier, ou anormal, sur $[0, T]$.
2. Dans le Principe du Maximum, u est associé à un vecteur adjoint de la forme $(p(\cdot), 0)$, i.e. tel que $p^0 = 0$.

3. u est une singularité de l'application entrée/sortie E_T .
4. Il existe un vecteur non nul ψ de \mathbb{R}^n tel que : $\psi \cdot dE_T(u) = 0$.
5. Pour tout $t \in [0, T]$, le sous-espace $K(t) = \text{Im } dE_t(u)$ (appelé premier cône de Pontryagin le long de la trajectoire associée à u) est de codimension supérieure ou égale à 1 dans \mathbb{R}^n .

Définition 1.3.6. Soit u un contrôle anormal sur $[0, T]$. Pour $t \in [0, T]$ on note $k(t) = \text{codim } K(t)$. On appelle $k(t)$ l'ordre d'anormalité. Si k est constant, on dit aussi que u est de corang k .

Calcul des contrôles anormaux La méthode est de dériver par rapport à t la contrainte (1.7). On n'a cependant pas de résultat tout à fait général. Effectuons ce calcul sur les systèmes qui nous intéressent dans cette thèse, à savoir les *systèmes affines mono-entrée* lisses :

$$\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x)$$

L'algorithme est le suivant. Il convient d'utiliser le formalisme Hamiltonien. Posons : $H_i(x, p) = \langle p, f_i(x) \rangle, i = 0, 1$ et $z(t) = (x(t), p(t)) \in T^*\mathbb{R}^n$. On note \vec{H}_i le champ Hamiltonien associé à H_i . En dérivant deux fois la contrainte on obtient :

$$\{\{H_1, H_0\}, H_0\}(z(t)) + u(t)\{\{H_1, H_0\}, H_1\}(z(t)) = 0$$

où $\{, \}$ désigne le crochet de Poisson. Ceci nous permet de calculer $u(t)$ dans de nombreux cas et justifie la définition suivante :

Définition 1.3.7. Pour toute courbe singulière (z, u) sur $[0, T]$, on note $\mathcal{R}(z, u)$ l'ensemble $\{t \in [0, T] / \{\{H_0, H_1\}, H_1\}(z(t)) \neq 0\}$. L'ensemble $\mathcal{R}(z, u)$ est toujours un ouvert de $[0, T]$ (éventuellement vide).

Définition 1.3.8. Une trajectoire singulière $(z, u) : [0, T] \rightarrow T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est dite d'ordre 2 si $\mathcal{R}(z, u)$ est dense dans $[0, T]$.

La proposition suivante est claire :

Proposition 1.3.6. Si $(z, u) : [0, T] \rightarrow T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est une trajectoire singulière et $\mathcal{R}(z, u)$ est non vide alors :

1. z restreinte à $\mathcal{R}(z, u)$ est lisse.
2. $u(t) = \frac{\{\{H_0, H_1\}, H_0\}(z(t))}{\{\{H_1, H_0\}, H_1\}(z(t))}$ pour presque tout t .
3. $\frac{dz(t)}{dt} = \vec{H}_0(z(t)) + \frac{\{\{H_0, H_1\}, H_0\}(z(t))}{\{\{H_1, H_0\}, H_1\}(z(t))} \vec{H}_1(z(t))$ pour tout $t \in \mathcal{R}(z, u)$.

Réciproquement, soit (f_0, f_1) un couple de champs de vecteurs lisses tel que l'ensemble ouvert $\Omega = \{z \in T^* \mathbb{R}^n / \{\{H_0, H_1\}, H_1\}(z) \neq 0\}$ n'est pas vide. Si $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction $H_0 + \frac{\{\{H_0, H_1\}, H_0\}}{\{\{H_1, H_0\}, H_1\}} H_1$ alors toute trajectoire du champ Hamiltonien associé à H , partant au temps $t = 0$ de l'ensemble $H_1 = \{H_1, H_0\} = 0$, est une trajectoire singulière d'ordre 2.

On a donc vu comment calculer les trajectoires singulières d'ordre minimal. On peut généraliser ce calcul :

Définition 1.3.9. Pour tout multi-indice $\alpha \in \{0, 1\}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la fonction H_α est définie par récurrence par : $H_\alpha = \{\{H_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})}, H_{\alpha_n}\}$. Une trajectoire singulière (z, u) est dite d'ordre $k \geq 2$ si tous les crochets H_β d'ordre $m \leq k$ avec $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\beta_1 = 1$, sont nuls le long de z , et s'il existe $\alpha = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ tel que $H_{\alpha 1}(z)$ n'est pas identiquement nul.

Les propriétés génériques des trajectoires singulières sont décrites par les théorèmes suivants de [20].

Théorème 1.3.7. *Il existe un sous-ensemble G ouvert dense dans l'ensemble des couples de champs de vecteurs lisses tel que pour tout élément (f_0, f_1) de G , toutes les trajectoires singulières du système affine mono-entrée associé sont d'ordre 2.*

Théorème 1.3.8. *Il existe un sous-ensemble G_1 ouvert dense dans G tel que pour tout élément (f_0, f_1) de G_1 , toute trajectoire singulière du système affine associé est de corang 1.*

En géométrie sous-Riemannienne les contrôles anormaux ont aussi des propriétés génériques intéressantes, voir section suivante.

1.4 Généralités en géométrie sous-Riemannienne

On travaille dans la catégorie *analytique*. La référence principale de ces rappels est [12].

Définition 1.4.1. Une *structure sous-Riemannienne* (M, Δ, g) est composée d'un variété M de dimension n , d'une distribution Δ sur M de rang constant $m < n$ et d'une métrique g sur Δ .

Une *courbe admissible* $t \mapsto x(t)$ sur $[0, T]$ est une courbe absolument continue telle que pour presque tout t , $\dot{x}(t) \in \Delta(x(t)) \setminus \{0\}$.

La longueur et l'énergie de la courbe x sont définies respectivement par :

$$l(x) = \int_0^T \sqrt{g(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt, \quad E(x) = \int_0^T g(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) dt$$

La *distance sous-Riemannienne* entre deux points x_0 et x_1 de M , notée $d_{SR}(x_0, x_1)$, est la borne inférieure des longueurs des courbes admissibles reliant x_0 à x_1 .

La *sphère sous-Riemannienne* de rayon r centrée en x_0 est l'ensemble $S(x_0, r)$ de tous les points situés à une distance r de x_0 .

1.4.1 Equivalence avec un problème de contrôle optimal

Le problème sous-Riemannien de minimiser à T fixé la distance entre deux points peut être *localement* reformulé de la manière suivante. Soit $x_0 \in M$; on peut supposer que $x_0 = 0$ et $M = \mathbb{R}^n$. Choisissons alors m champs de vecteurs analytiques f_1, \dots, f_m formant une base g -orthonormée de Δ . Dans ces conditions une courbe admissible $t \mapsto x(t)$ est solution du système contrôlé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t))$$

La longueur d'une courbe ne dépend pas de sa paramétrisation et par conséquent on peut supposer que toute courbe admissible est paramétrée par sa longueur d'arc, voir [12] ou [43]. Dans ce cas, le système sous-Riemannien s'écrit :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m u_i^2 = 1 \quad (1.8)$$

et la longueur de cette courbe est : $l(x) = T$. Autrement dit :

Le problème sous-Riemannien de minimisation de la longueur est équivalent au problème du *temps minimal* pour le système avec contrainte (1.8).

Le domaine des contrôles n'est pas convexe pour cette contrainte, mais il est bien connu que le problème est encore équivalent au problème du temps minimal avec contrainte convexe sur les contrôles : $\sum_{i=1}^m u_i^2 \leq 1$. Il est également bien connu (voir [16]) qu'à T fixé le problème de minimisation de la longueur est équivalent au problème de minimisation de l'énergie.

1.4.2 Calcul des géodésiques

Le Hamiltonien du système (1.8) est :

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \rangle + p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2$$

On utilise ici la *première normalisation* sur le vecteur adjoint (voir section 1.3.3), i.e. $p^0 = -\frac{1}{2}$ pour les extrémals normales. En géométrie sous-Riemannienne une extrémale est encore appelée une géodésique.

Géodésiques normales

Le calcul est le même qu'à l'exemple 1.3.1, et on obtient : $u_i = \langle p, f_i(x) \rangle$. Le Hamiltonien restreint aux géodésiques normales s'écrit : $H_n(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u_i^2$.

Les géodésiques normales paramétrées par la longueur d'arc sont donc sur le niveau d'énergie $H_n = \frac{1}{2}$, et sont solutions du système Hamiltonien :

$$\dot{x} = \frac{\partial H_n}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_n}{\partial x} \quad (1.9)$$

Localement en 0 on peut compléter le système de champs de vecteurs (f_1, \dots, f_m) en une base (f_1, \dots, f_n) de \mathbb{R}^n dépendant analytiquement de x . La métrique sous-Riemannienne g peut être prolongée en métrique Riemannienne en décrétant que les f_i sont orthonormés. Posons alors, pour $i = 1 \dots n$: $P_i = \langle p, f_i(x) \rangle$ (coordonnées de Poincaré), et soit $P = (P_1, \dots, P_n)$. Dans les coordonnées (x, P) les géodésiques normales sont solutions des équations :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m P_i f_i(x)$$

$$\dot{P}_i = \{P_i, H_n\} = \sum_{j=1}^m \{P_i, P_j\} P_j$$

Remarquons que $\{P_i, P_j\} = \langle p, [f_i, f_j] \rangle$, où $[,]$ désigne le crochet de Lie de champs de vecteurs, et puisque les f_i forment un repère on peut écrire :

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k(x) f_k(x)$$

où les c_{ij}^k sont analytiques.

Géodésiques anormales

Elles correspondent à $p^0 = 0$ et sont les trajectoires singulières du système (1.8). Lorsque $m = 2$, elles peuvent être calculées en utilisant l'algorithme de la section 1.3.4. Le cas $m > 2$ sera exclu de notre analyse car l'existence d'anormales optimales n'est alors pas générique, comme le montre le théorème suivant de [7] :

Théorème 1.4.1. *Soit M une variété réelle analytique et $k \geq 3$. Il existe un ouvert dense (pour la topologie de Whitney restreinte aux métriques analytiques) tel que toute distribution dans cet ouvert dense n'a pas de géodésique anormale minimisante.*

D'autre part la propriété de stricte anormalité est générique en géométrie sous-Riemannienne. Précisément on a, voir [18] :

Théorème 1.4.2. *Il existe un ouvert dense de $\{(\Delta, g) / \text{rg } \Delta = m\}$ pour la topologie C^∞ de Whitney telle que toute extrémale anormale non triviale d'un couple (Δ, g) de cet ouvert est stricte.*

1.4.3 Application exponentielle. Lieu conjugué, lieu de coupure

Supposons que toutes les courbes soient paramétrées par la longueur d'arc. Si $t \mapsto x(t)$ est une géodésique, le premier point où x cesse d'être minimisante est appelé *point de coupure* ou *cut-point*. L'ensemble de tels points lorsque $x(0) = x_0$ forme le *lieu de coupure* $L(x_0)$. Par exemple il résulte du fait qu'une géodésique normale est lisse que l'intersection transverse de deux normales est un point de coupure.

Le *front d'onde* $W(x_0, r)$ est l'ensemble des extrémités des géodésiques de longueur r partant de x_0 . Si l'algèbre de Lie engendrée par Δ est de dimension n alors on déduit des sections 1.2.3 et 1.3.1 que si r est assez petit alors tout point à distance r de x_0 peut être joint par une géodésique minimisante, et donc la sphère $S(x_0, r)$ est un sous-ensemble du front d'onde $W(x_0, r)$.

L'application *exponentielle* a déjà été définie (voir définition 1.3.5). Pour une géodésique normale $(x(t), p(t))$ partant de $(0, p(0))$ en $t = 0$, c'est l'application :

$$\exp : (p(0), t) \longmapsto x(t, p(0))$$

Son domaine est l'ensemble $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{C} = \{p(0) / \sum_{i=1}^m P_i^2(p(0)) = 1\}$. Comme $m < n$, c'est un *cylindre non compact* contrairement au cas Riemannien ($m = n$) pour lequel c'est une sphère.

Un *point conjugué* le long d'une géodésique normale est défini de la manière suivante. Soit $(p(0), t)$ un point avec $t > 0$ tel que \exp n'est pas une immersion en ce point. On dit que t est un *temps conjugué* le long de cette géodésique normale, et son image est appelée *point conjugué*. Le *lieu conjugué* $C(x_0)$ est l'ensemble des points conjugués des géodésiques normales partant de x_0 .

1.4.4 Formes normales graduées

Définition 1.4.2. Soit $\Delta = \text{Vect} \{f_1, \dots, f_m\}$ une distribution de \mathbb{R}^n dont l'algèbre de Lie engendrée est de dimension n . On définit par récurrence : $\Delta_0 = \{0\}$, $\Delta_1 = \Delta$, et pour $p \geq 2$: $\Delta_p = \text{Vect} \{\Delta_{p-1} + [\Delta_1, \Delta_{p-1}]\}$. Ainsi Δ_p est engendrée par les crochets de Lie des f_i de longueur inférieure ou égale à p . En x_0 on a donc un drapeau :

$$\{0\} = \Delta_0(x_0) \subset \Delta_1(x_0) \subset \dots \subset \Delta_{r(x_0)}(x_0)$$

où $r(x_0)$ est le plus petit entier tel que $\Delta_{r(x_0)}(x_0) = \mathbb{R}^n$. On dit que x_0 est un point *régulier* si les entiers $n_p(x) = \dim \Delta_p(x)$ sont constants dans un voisinage de x_0 . Sinon on dit que x_0 est *singulier*.

Considérons maintenant un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) tel que dx_i s'annule identiquement sur $\Delta_{w_j-1}(x_0)$ et ne s'annule pas identiquement sur $\Delta_{w_j}(x_0)$ pour un entier w_j . Un tel système de coordonnées est dit *adapté* au drapeau, et l'entier w_j est appelé le *poids* de x_j .

Définition 1.4.3. Considérons de plus une métrique g sur Δ et supposons que les champs f_i soient orthonormés pour cette métrique. Si f est un germe de fonction lisse en x_0 , l'*ordre* de f en x_0 est défini par :

- (i) si $f(x_0) \neq 0$: $\mu(f) = 0$. Par convention $\mu(0) = +\infty$.
- (ii) sinon : $\mu(f) = \inf \{p / \exists V_1, \dots, V_p \in \{f_1, \dots, f_m\} \text{ avec } L_{V_1} \circ \dots \circ L_{V_p}(f)(q_0) \neq 0\}$ où L_V désigne la dérivée de Lie.

Le germe f est dit *privilegié* si $\mu(f) = \min\{p / df(D^p(q_0)) \neq 0\}$. Un système de coordonnées $\{x_1, \dots, x_n\}$ est dit *privilegié* si toutes les coordonnées x_i sont privilégiées en x_0 .

On a alors l'estimation suivante, voir [12], [39] :

Proposition 1.4.3. *Si (M, Δ, g) est une structure sous-Riemannienne alors il existe en tout point x_0 un système de coordonnées privilégié $x = (x_1, \dots, x_n)$. On peut supposer que $x_0 = 0$. Si w_i est le poids de la coordonnée x_i , on a l'estimation suivante de la distance sous-Riemannienne :*

$$d_{SR}(0, x) \simeq |x_1|^{1/w_1} + \dots + |x_n|^{1/w_n}$$

Définition 1.4.4. Dans ces conditions, le poids de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est par convention égal à $-w_i$. Chaque vecteur f_i peut être développé en série de Taylor en utilisant la graduation précédente ; on note \hat{f}_i le terme homogène de poids le plus bas -1 . L'ensemble $\{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m\}$ est appelé la *partie principale* de la structure sous-Riemannienne.

Proposition 1.4.4. [12] *Les champs de vecteurs $\hat{f}_i, i = 1 \dots m$, engendrent une algèbre de Lie nilpotente de dimension n , indépendante du système de coordonnées privilégié.*

1.4.5 Classification locale des distributions génériques de rang 2 dans \mathbb{R}^3

On rappelle la classification générique locale des distributions de rang 2 dans \mathbb{R}^3 , voir [63], et son interprétation en termes de trajectoire singulière. Considérons le système :

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q)$$

où $q = (x, y, z)$. On pose $\Delta = \text{Vect} \{f_1, f_2\}$ et on suppose que Δ est de rang 2 localement en 0. On ne traite que les situations génériques, i.e. les cas de codimension inférieure ou égale à 3. On a trois situations qui peuvent être distinguées en utilisant les trajectoires anormales.

Posons $H_i = \langle p, f_i(x) \rangle, i = 1, 2$. Une trajectoire singulière doit satisfaire :

$$H_1 = H_2 = \{H_1, H_2\} = 0$$

et donc est contenue dans l'ensemble $M = \{q \in \mathbb{R}^3 / \det(f_1, f_2, [f_1, f_2]) = 0\}$ appelé *surface de Martinet*. Les contrôles singuliers d'ordre 2 satisfont :

$$u_1 \{\{H_1, H_2\}, H_1\} + u_2 \{\{H_1, H_2\}, H_2\} = 0$$

On définit le lieu singulier $S = S_1 \cap S_2$ où :

$$S_i = \{q / \det(f_1, [f_1, f_2], [[f_1, f_2], f_i])(q) = 0\}$$

On distingue trois cas :

Cas 1 : Soit $x_0 \notin M$; alors il ne passe aucune trajectoire singulière par x_0 . Dans ce cas Δ est (C^∞ ou C^ω)-isomorphe à $\text{Ker } \omega$ avec $\omega = ydx + dz$. Dans cette normalisation $d\omega = dy \wedge dx$ (Darboux) et $\frac{\partial}{\partial z}$ est la direction caractéristique. Ce cas est appelé le *cas de contact*.

Cas 2 : (codimension 1) Soit $x_0 \in M \setminus S$. Comme $x_0 \notin S$, M est une surface lisse au voisinage de x_0 , feuilletée par des trajectoires singulières. Une forme normale (C^∞ ou C^ω) est donnée par $\Delta = \text{Ker } \omega$, où $\omega = dz - \frac{y^2}{2}dx$. Dans cette normalisation, la surface de Martinet M est le plan $y = 0$, et les trajectoires singulières sont les courbes intégrales du champ $\frac{\partial}{\partial x}$ dans ce plan. Ce cas est appelé *cas de Martinet*, et est étudié en détail en section 4.4.1.

Cas 3 : (codimension 3) Soit $x_0 \in M \cap S$; on suppose que x_0 est un point régulier de M . L'analyse de [63] montre que dans ce cas on a deux réductions C^∞ différentes à une forme normale analytique dépendant toutes les deux d'un module m . Ces deux cas sont les suivants :

1. Cas hyperbolique : $\Delta = \text{Ker } \omega$ avec $\omega = dy + (xy + x^2z + mx^3z^2)dz$. La surface de Martinet est alors : $y + 2xz + 3mx^2z^2 = 0$, et le flot singulier sur M dans les coordonnées (x, z) est :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + (6m - 1)x^2z - 2mx^3z^2 \\ \dot{z} &= -2z - 6mxz^2\end{aligned}$$

On remarque que 0 est un col résonant. Le paramètre m est une obstruction à la C^∞ -linéarisation.

2. Cas elliptique : $\Delta = \text{Ker } \omega$ avec $\omega = dy + (xy + \frac{x^3}{3} + xz^2 + mx^3z^2)dz$. La surface de Martinet est : $y + x^2 + z^2 + 3mx^2z^2 = 0$, dans laquelle le flot singulier est :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2z - \frac{2}{3}x^3 + 6mx^2z - 2mx^3z^2 \\ \dot{z} &= -2x - 6mxz^2\end{aligned}$$

Dans ce cas, 0 est un centre et le paramètre m est encore une obstruction à la C^∞ -linéarisation. L'analyse de [62] montre que la singularité est C^0 -équivalent à un foyer.

Ce cas 3 est appelé *cas tangentiel* parce que Δ est tangente à la surface de Martinet en 0.

1.5 Ensembles sous-analytiques et log-exp

1.5.1 Ensembles sous-analytiques

Rappelons les définitions suivantes, qui peuvent être trouvées dans [33], [34].

Définition 1.5.1. Soit M une variété analytique réelle de dimension finie. Un sous-ensemble A de M est dit *semi-analytique* si et seulement si, pour tout x de M , on peut trouver un voisinage U de x dans M et $2pq$ fonctions analytiques g_{ij}, h_{ij} ($1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$) tels que

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^p \{y \in U / g_{ij}(y) = 0 \text{ et } h_{ij}(y) > 0 \text{ pour } j = 1 \dots q\}$$

On note $SEM(M)$ la famille des semi-analytiques de M .

Malheureusement l'image d'un semi-analytique par une application analytique propre n'est pas nécessairement semi-analytique. Par conséquent cette catégorie doit être élargie :

Définition 1.5.2. Un sous-ensemble A de M est dit *sous-analytique* si et seulement si, pour tout x de M , on peut trouver un voisinage U de x dans M et $2p$ couples $(\Phi_i^\delta, A_i^\delta)$ ($1 \leq i \leq p$ et $\delta = 1, 2$), où $A_i^\delta \in SEM(M_i^\delta)$ pour des variétés analytiques réelles M_i^δ , et où les applications $\Phi_i^\delta : M_i^\delta \rightarrow M$ sont analytiques et propres, tels que

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^p (\Phi_i^1(A_i^1) \setminus \Phi_i^2(A_i^2))$$

On note $SUB(M)$ la famille des sous-analytiques de M .

La classe des sous-analytiques est fermée par union, intersection, complémentaire, image inverse par une application analytique, image par une application analytique et propre. En bref, la catégorie sous-analytique est *o-minimale* (voir [29]). De plus les sous-analytiques sont *stratifiables*. Rappelons la définition :

Définition 1.5.3. Soit M une variété différentiable. Une *strate* dans M est une sous-variété localement fermée de M .

Une partition localement finie \mathcal{S} de M est appelée une *stratification* de M si tout élément S de \mathcal{S} est une strate telle que :

$$\forall T \in \mathcal{S} \quad T \cap \text{Fr } S \neq \emptyset \Rightarrow T \subset \text{Fr } S \text{ et } \dim T < \dim S$$

Enfin, une application $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés est dite *sous-analytique* si son graphe est un sous-analytique de $M \times N$.

La propriété de base des fonctions sous-analytiques qui les rend utiles en théorie du contrôle optimal est la suivante, voir [57].

Proposition 1.5.1. *Soient M et N deux variétés réelles analytiques de dimension finie et A un sous-ensemble de N . Etant données des applications sous-analytiques $\Phi : N \rightarrow M$ et $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, on définit :*

$$\forall x \in M \quad \psi(x) = \inf\{f(y) / y \in \Phi^{-1}(x) \cap A\}$$

Si $\Phi|_{\bar{A}}$ est propre, alors ψ est sous-analytique.

Remarque 1.5.1. On peut définir les sous-analytiques *globaux* de la manière suivante, voir [42]. On note \mathbb{P}_1 la droite projective réelle munie de sa structure analytique usuelle. Les espaces \mathbb{R}^n sont naturellement plongés dans les variétés analytiques \mathbb{P}_1^n , et tout sous-ensemble de \mathbb{R}^n peut être considéré comme un sous-ensemble de \mathbb{P}_1^n .

Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est un *semi-analytique global* si au voisinage de tout point de \mathbb{P}_1^n il est défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités satisfaites par des fonctions analytiques.

Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est un *sous-analytique global* si c'est l'image d'un semi-analytique global de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sur \mathbb{R}^n . Une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} est une *fonction sous-analytique globale* si son graphe est un sous-analytique global de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

1.5.2 Catégorie log-exp

C'est une extension de la catégorie sous-analytique par les fonctions log et exp, voir [28], [42]. Cette catégorie bénéficie des mêmes propriétés que celle des sous-analytiques. En particulier cette catégorie est o-minimale.

Définition 1.5.4. Une *fonction logarithmico-exponentielle* (en abrégé *log-exp*) est une composée finie de fonctions sous-analytiques globales, d'exponentielles et de logarithmes. Si g_1, \dots, g_m sont des fonctions log-exp de \mathbb{R}^n et si f est une fonction log-exp de \mathbb{R}^m , alors la composée $f \circ (g_1, \dots, g_m)$ est une fonction log-exp de \mathbb{R}^n .

Un *ensemble log-exp* est défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités satisfaites par des fonctions log-exp.

Pour les besoins de cette thèse (voir section 4.4.1), on construit en fait une *sous-classe \mathcal{E} de la catégorie log-exp* à l'aide des fonctions suivantes :

$$h_1(t) = t, \quad h_2(t) = \ln \frac{1}{t}, \quad h_3(t) = e^{-\frac{1}{t}}$$

Dans cette sous-classe, on développe un algorithme général d'inversion de la manière suivante.

Notation h^p signifie $h \times h \times \dots \times h$ (p fois).
 $h^{[p]}$ signifie $h \circ h \circ \dots \circ h$ (p fois).

Définition 1.5.5. Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \left\{ h_1^p \prod_{0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m} \left(h_2^{[i_k]} \right)^{i'_k} / i'_k \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{N}, (p = 1 \text{ et } i'_1 < 0) \text{ ou } (p \geq 2) \right\} \\ \mathcal{I} &= \left\{ h_1^p \prod_{0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m} \left(h_2^{[i_k]} \right)^{i'_k} / (p \geq 1) \text{ ou } (p = 0 \text{ et } i_1 = 1, i'_1 \leq -2) \right\} \\ \mathcal{E}_2 &= \left\{ h_1^p \prod_{0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m} \left(h_2^{[i_k]} \right)^{i'_k} e^{-\frac{1}{f}} / p \in \mathbb{Z}, i'_k \in \mathbb{Z}, f \in \mathcal{I} \right\} \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \end{aligned}$$

En gros, les fonctions de \mathcal{E} n'ont qu'un seul empilement d'exponentielle. Dans cette sous-classe on a :

Algorithme 1.5.2 ([21]). Soit $F(X_0, X_1, \dots, X_n)$ un germe de fonction analytique en 0 tel que : $F \underset{0}{\sim} X_0$. Soit $X(t) = F(t, f_1(t), \dots, f_n(t))$ où $f_i \in \mathcal{E}$. Cherchons à inverser $X(t)$, i.e. exprimer t en fonction de X . Soit r la plus grande puissance de $\frac{1}{t}$ dans les f_i . Soit $g_1(t)$ tel que : $X(t) = g_1(t) + o(t^{r+1})$ (en fait : $g_1 \in \text{Vect}(h_1, \mathcal{E}_1)$). Alors :

1. $\exists g_2 \in \text{Vect}(h_1, \mathcal{E}_1) / t(X) = g_2(X) + o(X^{r+1})$.
2. Si on pose : $t(X) = g_2(X) + X^{r+1}u(X)$, alors $u(X) \in \mathcal{E}$ peut être calculé avec le théorème des fonctions implicites analytique.

Cet algorithme permet, étant donné $X(t)$ dans la sous-classe \mathcal{E} , d'exprimer t comme fonction de X dans la catégorie log-exp, et de plus fournit une échelle précise de fonctions. L'idée, pour inverser $X(t)$, est d'isoler une partie de son développement asymptotique jusqu'à un certain ordre (contenant donc en particulier son équivalent), ce développement étant facile à inverser dans la classe \mathcal{E} . On procède ensuite à une *désingularisation* de l'équation (rendue possible par cette méthode) de manière à calculer $u(X)$ à l'aide du théorème des fonctions implicites analytique, voir exemple 1.5.1.

Remarque 1.5.2. On a besoin de calculer un développement asymptotique de $t(X)$ à l'ordre $r + 1$. En effet, par hypothèse, $t(X) \sim X$, donc $\frac{1}{t^r} \sim \frac{1}{X^r}$. Ainsi, pour développer $e^{-\frac{1}{t^r}}$ analytiquement en u (dans le but d'appliquer le théorème des fonctions implicites à u), on a besoin que u soit multiplié par une puissance assez grande de X , i.e. $t(X) = g_2(X) + X^{r+1}u(X)$, comme le montre l'exemple suivant. En revanche un simple équivalent suffit pour développer $\ln \frac{1}{t}$.

Exemple 1.5.1. Posons

$$X(t) = t + e^{-\frac{1}{t^2}} \tag{1.10}$$

et cherchons à exprimer $t(X)$ dans la sous-classe précédente. Selon l'algorithme, on a $r = 2$, donc on regarde le développement de $X(t)$ jusqu'à l'ordre 3 : $X(t) = t + o(t^3)$. Cherchons donc $u(X)$ sous la forme :

$$t(X) = X + X^3 u(X)$$

On note $An(\cdot)$ (resp. $An_0(\cdot)$) un germe de fonction analytique en 0 valant 1 en 0 (resp. valant 0 en 0). On a alors :

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{X^2} - u + uAn_0(X^2u)$$

et par conséquent :

$$e^{-\frac{1}{t^2}} = e^{-\frac{1}{X^2}} An(u, X^2u)$$

On voit donc ici l'intérêt d'avoir écrit un développement asymptotique de $X(t)$ à l'ordre $r + 1$: le terme en exponentielle s'exprime alors comme une fonction analytique en u (et d'autres termes). Remplaçant dans l'équation (1.10) il vient :

$$X = X + X^3u + e^{-\frac{1}{X^2}} An(u, X^2)$$

Là intervient l'étape fondamentale de *désingularisation*, qui consiste ici à diviser par X^3 :

$$0 = u + \frac{e^{-\frac{1}{X^2}}}{X^3} An(u, X^2)$$

et donc d'après le *théorème des fonctions implicites analytique* :

$$u = An(X^2, \frac{e^{-\frac{1}{X^2}}}{X^3})$$

Ainsi, finalement :

$$t(X) = X + X^3 An(X^2, \frac{e^{-\frac{1}{X^2}}}{X^3})$$

Chapter 2

Optimalité des trajectoires anormales

L'objectif de ce chapitre est de donner des conditions pour qu'une trajectoire *anormale* d'un système affine mono-entrée $\dot{x} = X(x) + uY(x)$, avec $|u| \leq \eta$, soit *optimale* pour un problème de minimisation donné. On applique ensuite cette théorie à l'étude de l'optimalité d'une anormale d'un système sous-Riemannien de rang 2 : $\dot{x} = vX(x) + uY(x)$. Les résultats de ce chapitre généralisent les résultats de [19], et s'inscrivent dans la théorie générale de [9], [10].

2.1 Introduction

Considérons un système affine de la forme :

$$\dot{x} = X(x) + uY(x) \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, X et Y sont deux champs de vecteurs lisses, et le contrôle $u(t) \in \mathbb{R}$ vérifie la *contrainte* :

$$|u| \leq \eta \tag{2.2}$$

où $\eta > 0$. On considère le problème de joindre deux points x_0 et x_1 en minimisant un certain coût. Les problèmes de minimisation que nous allons envisager sont les suivants :

1. joindre x_0 et x_1 en temps minimal.
2. joindre x_0 et x_1 en temps T (fixé à l'avance) en minimisant un coût $C(u)$.
3. joindre x_0 et x_1 en minimisant un coût $C(T, u)$ où le temps final T n'est pas fixé.

Bien entendu le premier problème est un cas particulier du troisième.

Bien qu'une théorie générale de l'optimalité existe déjà (voir [9], [10]), la méthode employée par [19] a l'avantage de représenter explicitement la dérivée

seconde intrinsèque par un *opérateur différentiel* dont l'étude du spectre peut en fait donner plus qu'un résultat d'optimalité : on peut en fait décrire asymptotiquement le bord de l'ensemble accessible, et appliquer ce résultat en géométrie sous-Riemannienne, voir section 4.3.2.

Considérons γ , une trajectoire singulière de référence, définie sur $[0, T]$ et telle que $\gamma(0) = x_0$. Si γ est lisse et injective, on peut supposer qu'elle est associée au contrôle $u = 0$. Dans tout le chapitre on fait les hypothèses suivantes :

(H_0) γ est injective, associée à $u = 0$ sur $[0, T]$.

(H_1) $\forall t \in [0, T]$ $K(t) = \text{Vect} \{ad^k X.Y(\gamma(t)) / k \in \mathbf{N}\}$ (premier cône de Pontryagin le long de γ) est de codimension 1, et est engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs, i.e. :

$$K(t) = \text{Vect} \{ad^k X.Y(\gamma(t)) / k = 0 \dots n - 2\}$$

(H_2) $\forall t \in [0, T]$ $ad^2 Y.X(\gamma(t)) \notin K(t)$.

(H_3) Si $n = 2$ alors : $\forall t \in [0, T]$ $X(\gamma(t))$ et $Y(\gamma(t))$ sont indépendants.
Si $n \geq 3$ alors : $\forall t \in [0, T]$ $X(\gamma(t)) \notin \text{Vect} \{ad^k X.Y(\gamma(t)) / k = 0 \dots n - 3\}$.

Sous ces hypothèses, γ est *de corang 1*, le vecteur adjoint p_γ associé à γ est unique à scalaire près, et pour tout $t \in [0, T]$, $p_\gamma(t)$ est orthogonal à $K(t)$.

Définition 2.1.1. Soit $D = \langle p_\gamma, X \rangle \cdot \langle p_\gamma, ad^2 Y.X \rangle_{|\gamma}$.

- Si $D > 0$, γ est dite *elliptique*.
- Si $D < 0$, γ est dite *hyperbolique*.
- Si $D = 0$, γ est dite *exceptionnelle*.

D'après la condition de Legendre-Clebsch (voir [37]), les trajectoires elliptiques ne peuvent pas être temps-minimales. Elles peuvent par contre être temps-maximales. L'étude des trajectoires elliptiques ou hyperboliques est totalement similaire (au signe près). Nous nous bornerons donc par la suite aux trajectoires hyperboliques et exceptionnelles.

L'objet de base qu'il faut étudier pour obtenir des résultats d'*isolement* est la *dérivée seconde intrinsèque* de l'application entrée/sortie le long de γ :

Définition 2.1.2. Notons u un contrôle associé à γ . La *dérivée seconde intrinsèque* le long de γ est la forme quadratique réelle :

$$E_u''(v) = p_\gamma(T) \cdot dE_T(u) \cdot (v, v)$$

où $v \in \text{Ker } dE_T(u)$.

En gros, si cette forme quadratique est définie positive (ou négative), alors γ est *localement isolée*, et donc *localement optimale*. Réciproquement si γ est optimale, alors E''_u est positive (ou négative), voir [10]. Cependant ce raisonnement ne marche que pour les trajectoires hyperboliques, voir [53]. Pour les trajectoires exceptionnelles la situation est plus compliquée, et il faut alors étudier la dérivée seconde intrinsèque sur un domaine plus grand (appelée application temps×entrée/sortie dans [10], opérateur réduit dans [19]), voir plus loin.

D'autre part il faut préciser le sens de *local*. Dans [10] où une théorie générale de l'optimalité est faite, cela signifie dans un *voisinage L^∞ du contrôle de référence u* . Dans [19] où les auteurs étudient le problème de temps optimal sur des systèmes affines mono-entrée *sans contrainte sur le contrôle*, cela signifie dans un *voisinage C^0 de la trajectoire de référence*, ce qui est une notion d'optimalité plus forte. Dans les deux théories, un *temps conjugué* est un temps t_1 pour lequel la dérivée seconde intrinsèque le long de γ a un *noyau non trivial*.

Nous allons d'abord étudier la temps-optimalité sur deux exemples représentatifs sur lesquels les hypothèses précédentes sont satisfaites, l'un dans le cas hyperbolique, l'autre dans le cas exceptionnel, sur lesquels les opérateurs différentiels représentant la dérivée seconde intrinsèque sont très simples. Ensuite nous envisagerons le cas général pour le problème de minimisation du temps, puis d'un coût quelconque.

2.2 Deux exemples

2.2.1 Cas hyperbolique

Considérons le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + y^2 - z^2 \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= u \end{aligned} \tag{2.3}$$

où u vérifie la contrainte : $|u| \leq \eta$. La trajectoire anormale de référence est $\gamma(t) = (t, 0, 0)$, associée à $u = 0$ sur $[0, T]$, avec $T > 0$ fixé. La partie contrôlable du système est (y, z) , et la dérivée seconde intrinsèque est :

$$E''_0(u) = \int_0^T (y^2 - z^2) dt$$

définie sur $\text{Ker } dE(0) = \{u / y(0) = z(0) = y(T) = z(T) = 0\}$. Par une intégration par parties on voit que :

$$E''_0(u) = \int_0^T (y^2 - \dot{y}^2) dt = \int_0^T y(y + \dot{y}) dt = Q(y) \tag{2.4}$$

avec $Q(y) = (y, Dy)_{L^2}$, où $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ désigne le produit scalaire sur $L^2([0, T])$, et D est l'opérateur différentiel :

$$Dy = y + \ddot{y}$$

On veut étudier le signe de la forme quadratique Q sur l'espace G correspondant à $\text{Ker } dE(0)$:

$$G = \{y \mid \ddot{y} \in L^2([0, T]), y(0) = \dot{y}(0) = y(T) = \dot{y}(T) = 0\}$$

G est un espace de Sobolev. Muni de la norme $\|y\|_G = \|\ddot{y}\|_{L^2}$, c'est un Banach. On est donc conduit à étudier le spectre de l'opérateur D . Or sur l'espace G ce spectre est vide ; on doit donc élargir le domaine de façon à ce que la relation (2.4) soit toujours vraie, et que le spectre soit non trivial. Voilà pourquoi on travaille sur l'espace de Sobolev :

$$F = \{y \mid \dot{y} \in L^2([0, T]), y(0) = y(T) = 0\}$$

Muni de la norme $\|y\|_F = \|\dot{y}\|_{L^2}$, F est un Banach. Le signe de $Q|_G$ est déduit du signe de $Q|_F$ par densité de G dans F et par continuité de la forme quadratique Q au sens de la norme $\|\cdot\|_F$.

Le résultat est le suivant :

Lemme 2.2.1. *Il existe une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels, avec $\lambda_k = 1 - \left(\frac{\pi + k\pi}{T}\right)^2$ et une base Hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2([0, T])$ telles que $e_k \in C^2([0, T])$ et*

$$e_k + \ddot{e}_k = \lambda_k e_k$$

Par conséquent :

- si $T < \pi$, Q est définie négative.
- si $T > \pi$, Q est indéfinie.

En fait, les valeurs propres λ_k étant des fonctions croissantes de T , il suffit de considérer l'évolution de la plus grande : $\lambda_0 = 1 - \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$. Elle s'annule lorsque $T = \pi$. Ainsi le temps $T = \pi$ est le premier temps pour lequel l'opérateur D , ainsi que la dérivée seconde intrinsèque, admettent un noyau non trivial. On dit que π est le *premier temps conjugué* pour l'opérateur D ou pour la forme Q .

Conséquences sur l'ensemble accessible. Désignons par $\text{Acc}^\eta(T)$ l'ensemble des points accessibles en temps T pour le système (2.3) sous la contrainte $|u| \leq \eta$. Son allure en fonction de T est représentée sur la fig. 2.1.

On voit sur la figure que si $T < \pi$, $u = 0$ est le seul contrôle dont la trajectoire associée relie les points $(0, 0, 0)$ et $(T, 0, 0)$. Si $T > \pi$, l'ensemble accessible devient ouvert autour du point $(T, 0, 0)$. Par conséquent :

Corollaire 2.2.2. *La trajectoire γ est temps-optimale si et seulement si $T < \pi$. Autrement dit γ est temps-optimale avant son premier temps conjugué, et ne l'est plus après.*

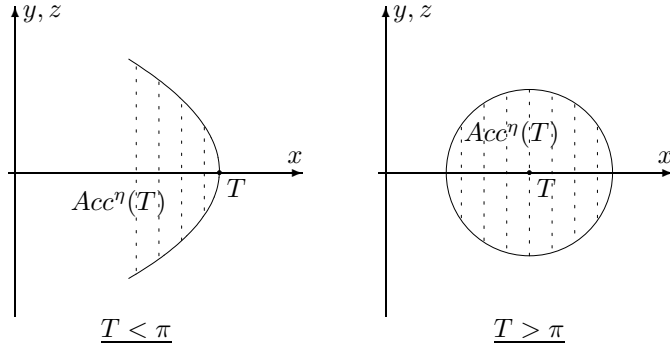


Figure 2.1: Cas hyperbolique

2.2.2 Cas exceptionnel

Considérons le système :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 1 + x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 \dot{x}_3 &= u \\
 \dot{x}_4 &= x_3^2 - x_2^2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

où u vérifie la contrainte $|u| \leq \eta$. Posons $x_1 = t + \xi$; on a : $\dot{\xi} = x_2$. La trajectoire anormale de référence, associée à $u = 0$, est $\gamma(t) = (t, 0, 0, 0)$. La partie contrôlable est (ξ, x_2, x_3) , et la dérivée seconde intrinsèque est la forme quadratique :

$$E_0''(u) = \int_0^T (x_3^2 - x_2^2) dt$$

Contrairement au cas hyperbolique où un seul opérateur différentiel était naturellement associé à la dérivée seconde intrinsèque, ici dans le cas exceptionnel on a deux opérateurs différentiels naturels :

$$1. E_0''(u) = \int_0^T (\ddot{\xi}^2 - \dot{\xi}^2) dt = \int_0^T \xi(\ddot{\xi} + \xi^{(4)}) dt = Q(\xi)$$

où $Q(\xi) = (\xi, D\xi)_{L^2}$, et D est l'opérateur différentiel :

$$D\xi = \ddot{\xi} + \xi^{(4)}$$

dont le domaine correspondant à $\text{Ker } dE(0)$ est :

$$G = \{\xi / \xi^{(4)} \in L^2([0, T]), \xi(0) = \dot{\xi}(0) = \ddot{\xi}(0) = \xi(T) = \dot{\xi}(T) = \ddot{\xi}(T) = 0\}$$

2. $E_0''(u) = \int_0^T (\dot{x}_2^2 - x_2^2) dt = - \int_0^T x_2(x_2 + \ddot{x}_2) dt = Q_1(x_2)$
où $Q_1(x_2) = -(x_2, D_1 x_2)_{L^2}$, et D_1 est l'opérateur différentiel :

$$D_1 x_2 = x_2 + \ddot{x}_2$$

dont le domaine correspondant à $\text{Ker } dE(0)$ est :

$$G_1 = \{x_2 / \ddot{x}_2 \in L^2([0, T]), x_2(0) = \dot{x}_2(0) = x_2(T) = \dot{x}_2(T) = \int_0^T x_2 dt = 0\}$$

On dit que D_1 est l'opérateur réduit de D . De même que dans le cas hyperbolique, le spectre de D (resp. D_1) sur G (resp. G_1) étant vide, on étudie :

1. Q sur $F = \{\xi / \ddot{\xi} \in L^2([0, T]), \xi(0) = \dot{\xi}(0) = \xi(T) = \dot{\xi}(T) = 0\}$
2. Q_1 sur $F_1 = \{x_2 / \dot{x}_2 \in L^2([0, T]), x_2(0) = x_2(T) = 0\}$

De même que dans le cas hyperbolique, on déduit par densité que le signe de Q sur G est le même que sur F . Par contre ce raisonnement ne marche pas pour Q_1 : en effet G_1 est un sous-espace fermé strict de H_1 , où

$$H_1 = \{x_2 / \ddot{x}_2 \in L^2([0, T]), x_2(0) = \dot{x}_2(0) = x_2(T) = \dot{x}_2(T) = 0\}$$

La densité de H_1 dans F_1 et la continuité de Q_1 au sens de la norme $\|x_2\|_{F_1} = \|\dot{x}_2\|_{L^2}$ permettent d'affirmer que le signe de Q_1 sur H_1 est le même que sur F_1 . Les résultats sont les suivants :

Lemme 2.2.3. *Le premier temps conjugué de Q sur F est $t_c = 2\pi$. Le premier temps conjugué de Q_1 sur F_1 est $t_{cc} = \pi$. Par conséquent, Q est définie positive sur G si $T < 2\pi$ et indéfinie si $T > 2\pi$; Q_1 est définie positive sur H_1 si $T < \pi$ et indéfinie si $T > \pi$.*

Conséquences sur l'ensemble accessible. Pour représenter les ensembles accessibles il faut comprendre la signification des formes Q et Q_1 . La forme Q sur G représente la coordonnée $x_4(T)$ lorsque les autres coordonnées sont fixées : $x_1(T) = T, x_2(T) = x_3(T) = 0$. Ainsi pour $T < 2\pi$ les points $(T, 0, 0, \alpha)$, $\alpha \geq 0$ sont accessibles en temps T . D'autre part, la forme quadratique Q_1 sur H_1 représente la coordonnée $x_4(T)$ lorsque seulement $x_2(T)$ et $x_3(T)$ sont fixées à 0, i.e. la coordonnée $x_1(T)$ est libre. D'où l'allure de $\text{Acc}^n(T)$ en fonction de T , représentée sur la fig. 2.2.

On voit sur la figure que si $T < \pi$, $u = 0$ est le seul contrôle dont la trajectoire associée relie les points $(0, 0, 0, 0)$ et $(T, 0, 0, 0)$. Si $T > \pi$, l'ensemble accessible au temps T contient le point $(T + \varepsilon, 0, 0, 0)$, avec $\varepsilon > 0$ petit. Par conséquent :

Corollaire 2.2.4. *La trajectoire γ est temps-optimale si et seulement si $T < \pi$. Autrement dit γ est temps-optimale avant le premier temps conjugué t_{cc} de l'opérateur réduit, et ne l'est plus après.*

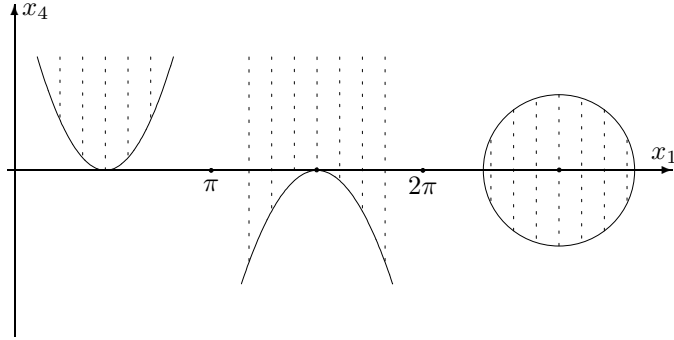


Figure 2.2: Cas exceptionnel

Différence avec le cas hyperbolique Dans le cas hyperbolique, la frontière de l'ensemble accessible est, pour $T < t_c$, une courbe *transverse* à la direction anormale (voir fig. 2.1), et donc quelle que soit la concavité de cette courbe l'ensemble $Acc^n(T)$ ne peut pas contenir $(T + \varepsilon, 0, 0, 0)$, $\varepsilon > 0$. Dans le cas exceptionnel au contraire elle est *tangente à la direction anormale*, donc sa concavité a une importance pour l'optimalité de la singulière. Pour l'étudier il faut connaître le signe de la dérivée seconde intrinsèque sur son domaine où on a relaxé la condition aux limites $\xi(T) = 0$. C'est précisément ce que permettent l'opérateur réduit D_1 et la forme Q_1 .

Remarque 2.2.1. Si on oublie la coordonnée x_1 , alors le système (2.5) se réduit au système (2.3), i.e. au cas hyperbolique étudié précédemment.

2.3 Cas général

Considérons le système affine (2.1) avec la contrainte (2.2), et on suppose que la trajectoire anormale de référence γ vérifie les hypothèses ($H_0 - H_3$) précédemment énoncées. Dans ces conditions on a des formes normales qui nous permettent d'exprimer facilement l'opérateur différentiel et donc facilitent le calcul des temps conjugués (voir [19]).

On envisage d'abord le problème du temps minimal, puis de la minimisation d'un coût quelconque.

2.3.1 Temps optimal

Définition 2.3.1. • On dit que γ est C^0 -temps-minimale sur $[0, T]$ s'il existe un voisinage C^0 de γ tel que T soit le temps minimal pour relier $\gamma(0)$

à $\gamma(T)$ relativement à l'ensemble des solutions du système (2.1) avec la contrainte (2.2) contenues dans ce voisinage.

- Rappelons que γ est associée au contrôle $u = 0$. On dit que γ est L^∞ -temps-minimale sur $[0, T]$ s'il existe un voisinage de 0 dans $L^\infty([0, T + \delta])$ tel que T soit le temps minimal pour relier $\gamma(0)$ à $\gamma(T)$ relativement à l'ensemble des trajectoires associées à un contrôle de ce voisinage. Bien entendu si γ est C^0 -temps-minimale alors elle est L^∞ -temps-minimale.

Comme précédemment on distingue les cas hyperbolique et exceptionnel. Les résultats suivants généralisent ceux de [19] qui considèrent un système affine (2.1) *sans contrainte* sur le contrôle.

1. Cas hyperbolique

Lemme 2.3.1 (cas hyperbolique). [19] *Si γ est hyperbolique, alors on peut normaliser le système (2.1) par feedback équivalence en :*

$$f_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=2}^{n-1} a_{ij}(t) x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_1} + R$$

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

où $a_{n,n} > 0$ sur $[0, T]$ et R est un terme résiduel que l'on peut négliger dans notre étude.

Dans ces conditions, la partie contrôlable du système est (x_2, \dots, x_n) , l'anormale de référence est $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$, et la dérivée seconde intrinsèque le long de γ est identifiée à :

$$\int_0^T \sum_{i,j=2}^n a_{ij}(t) \xi_i(t) \xi_j(t) dt, \text{ où :}$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_3, \dots, \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n, \dot{\xi}_n = v$$

Posons $y = \xi_2$. Alors elle se met sous la forme :

$$Q_T(y) = \int_0^T q_T(y) dt$$

où $q_T(y) = \sum_{i,j=0}^{n-2} b_{ij} y^{(i)} y^{(j)}$, avec $b_{i-2,j-2} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, et où y évolue dans l'espace correspondant au noyau de la dérivée première :

$$G = \{y / y^{(2(n-2))} \in L^2([0, T]), y^{(i)}(0) = y^{(i)}(T) = 0, i = 0 \dots n-2\}$$

On a par intégrations par parties :

Lemme 2.3.2 ([19]). *La forme quadratique Q_T est représentée sur G par l'opérateur D_T de sorte que :*

$$Q_T(y) = (D_T y, y)_{L^2}$$

et l'opérateur D_T s'écrit :

$$D_T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial q}{\partial y^{(i)}} = \sum_{i,j}^{n-2} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} b_{ij} \frac{d^i}{dt^i}$$

Comme dans les exemples étudiés précédemment, le spectre de D_T sur G est trivial. On doit donc agrandir cet espace de façon à ce que le spectre soit non trivial et que le lemme de représentation 2.3.2 soit encore valable. Posons donc :

$$F = \{y / y^{(n-2)} \in L^2([0, T]), y^{(i)}(0) = y^{(i)}(T) = 0, i = 0 \dots n-3\}$$

Lemme 2.3.3. *Pour tout $f \in L^2([0, T])$ il existe $y \in F$ unique tel que $y^{2(n-2)} \in L^2([0, T])$ et $D_T y = f$. On désigne par L l'opérateur $f \mapsto y$ considéré comme opérateur de $L^2([0, T])$ dans $L^2([0, T])$; il est autoadjoint et compact.*

Définition 2.3.2. On dit que T est un temps conjugué s'il existe $y \in F$ tel que $y^{2(n-2)} \in L^2([0, T])$ et $D_T y = 0$.

On note t_c le premier temps conjugué de l'opérateur D . On sait (voir par exemple [19], [53], [9]) que $t_c > 0$ ou $t_c = +\infty$. Le résultat suivant généralise exactement la situation décrite sur l'exemple 2.3 :

Théorème 2.3.4 ([59]). *La trajectoire γ est C^0 -temps-minimale si et seulement si $T < t_c$. De plus γ n'est pas L^∞ -temps-minimale si $T > t_c$.*

De plus l'allure des ensembles accessibles en fonction de T est similaire à celle représentée sur l'exemple dans le cas hyperbolique (fig. 2.1), en remplaçant π par t_c .

Remarque 2.3.1. En dimension 2, l'opérateur D est égal à $b_0 Id$, et donc $t_c = +\infty$ (pourvu que les hypothèses $(H_0 - H_3)$ soient vraies sur \mathbb{R}^+).

2. Cas exceptionnel

Lemme 2.3.5 (cas exceptionnel). [19] *Si γ est exceptionnelle, alors on peut normaliser le système (2.1) par feedback équivalence en :*

$$f_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=2}^{n-1} a_{ij}(t) x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_n} + R$$

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

où $a_{n-1,n-1} > 0$ sur $[0, T]$ et R est un terme résiduel que l'on peut négliger.

Posons $x_1 = t + \xi$. La partie contrôlable du système est $(\xi, x_2, \dots, x_{n-1})$, l'anormale de référence est $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$, et la dérivée seconde intrinsèque le long de γ est identifiée à :

$$\int_0^T \sum_{i,j=2}^{n-1} a_{ij}(t) \xi_i(t) \xi_j(t) dt, \text{ où :}$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dots, \dot{\xi}_{n-2} = \xi_{n-1}, \dot{\xi}_{n-1} = v$$

Comme dans l'exemple du cas exceptionnel, on peut l'écrire de deux manières différentes :

1. Si $\xi = x_1 - t$, elle se met sous la forme :

$$Q(\xi) = \int_0^T q(\xi) dt$$

où $q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n-2} b_{ij} \xi^{(i)} \xi^{(j)}$, avec $b_{i-1,j-1} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, et où ξ évolue dans l'espace correspondant au noyau de la dérivée première :

$$G = \{ \xi / \xi^{(2(n-2))} \in L^2([0, T]), \xi^{(i)}(0) = \xi^{(i)}(T) = 0, i = 0 \dots n-2 \}$$

Notons D l'opérateur représentant Q . On a :

$$Q(\xi) = (\xi, D\xi)_{L^2}$$

avec

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial q}{\partial y^{(i)}} = \sum_{i,j=1}^{n-2} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} b_{ij} \frac{d^i}{dt^i} \quad (2.6)$$

2. En fonction de x_2 , elle se met sous la forme :

$$Q_1(x_2) = \int_0^T q_1(x_2) dt$$

où $q_1(x_2) = \sum_{i,j=0}^{n-3} b_{i+1,j+1} x_2^{(i)} x_2^{(j)}$, et où x_2 évolue dans l'espace correspondant au noyau de la dérivée première :

$$G_1 = \{ x_2 / x_2^{(2(n-3))} \in L^2([0, T]), x_2^{(i)}(0) = x_2^{(i)}(T) = 0, i = 0 \dots n-3, \text{ et } \int_0^T x_2 dt = 0 \}$$

Notons D_1 l'opérateur représentant Q_1 . On a :

$$Q_1(x_2) = (x_2, D_1 x_2)_{L^2}$$

avec

$$D_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-3} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial q}{\partial y^{(i)}} = \sum_{i,j=0}^{n-3} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} b_{i+1,j+1} \frac{d^i}{dt^i} \quad (2.7)$$

Remarquons que $q(\xi) = q_1(\dot{\xi})$ et que $D = -\frac{d}{dt} D_1 \frac{d}{dt}$. Comme précédemment l'étude spectrale de ces opérateurs doit être effectuée sur des espaces plus grands :

- $F = \{\xi / \xi^{(n-2)} \in L^2([0, T]), \xi^{(i)}(0) = \xi^{(i)}(T) = 0, i = 0 \dots n-3\}$ pour l'opérateur D .
- $F_1 = \{x_2 / x_2^{(n-3)} \in L^2([0, T]), x_2^{(i)}(0) = x_2^{(i)}(T) = 0, i = 0 \dots n-4\}$ pour D_1 si $n \geq 4$ (si $n = 3$, aucune condition aux limites n'est imposée).

Le lemme suivant est une amélioration de [19], où l'inégalité large seulement est montrée :

Lemme 2.3.6 ([59]). *Notons t_c (resp. t_{cc}) le premier temps conjugué pour D sur F (resp. D_1 sur F_1). Alors : $0 < t_{cc} < t_c$.*

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.3.7 ([59]). *La trajectoire γ est C^0 -temps-minimale si et seulement si $T < t_{cc}$. De plus γ n'est pas L^∞ -temps-minimale si $T > t_{cc}$.*

De plus l'allure des ensembles accessibles en fonction de T est similaire à celle représentée sur l'exemple dans le cas exceptionnel (fig. 2.2), en remplaçant π par t_{cc} et 2π par t_c .

Remarque 2.3.2. Si $n = 3$, on a $t_{cc} = +\infty$ pourvu que les hypothèses ($H_0 - H_3$) soient satisfaites sur \mathbb{R}^+ .

Remarque 2.3.3. Dans les deux cas hyperbolique et exceptionnel, la notion de point conjugué et l'optimalité de γ ne dépendent pas de la contrainte imposée sur le contrôle. Cela vient du fait que le contrôle anormal de référence appartient à l'intérieur de l'ensemble de contraintes.

2.3.2 Optimalité pour un coût quelconque

On se pose maintenant le problème de minimiser un certain coût $C(T, u)$, qu'on note également $C_T(u)$, où C est une fonction lisse vérifiant l'hypothèse supplémentaire suivante le long de la trajectoire de référence γ :

$$(H_4) \quad \forall T \quad \text{rg} (dE_T(0), dC_T(0)) = n$$

où E_T est l'application entrée/sortie du système 2.1. Cette hypothèse signifie que la singularité de l'application entrée/sortie du système augmenté est de codimension 1. On envisage plusieurs problèmes d'optimisation :

1. Temps final non fixé

Définition 2.3.3. • On dit que γ est C^0 -coût-minimale sur $[0, T]$ s'il existe un voisinage C^0 de γ tel que pour toute trajectoire q contenue dans ce voisinage vérifiant $q(0) = \gamma(0)$ et $q(T) = \gamma(T)$ on a : $C(t, v) \geq C(T, 0)$, où v est le contrôle associé à q .

- On dit que γ est L^∞ -coût-minimale sur $[0, T]$ s'il existe un voisinage de 0 dans $L^\infty([0, T + \delta])$ tel que, pour toute trajectoire q associée à un contrôle v de ce voisinage, vérifiant $q(0) = \gamma(0)$ et $q(T) = \gamma(T)$, on a : $C(t, v) \geq C(T, 0)$.

Bien entendu la C^0 -coût-minimalité entraîne la L^∞ -coût-minimalité.

On a le résultat suivant (comparer avec [10]) :

Théorème 2.3.8 ([59]). 1. Si γ est hyperbolique, γ n'est jamais L^∞ -coût-minimale.

2. Si γ est exceptionnelle, alors γ est C^0 -coût-minimale si et seulement si elle est C^0 -temps-minimale. En fait, γ est C^0 -coût-minimale si $T < t_{cc}$, et n'est pas L^∞ -coût-minimale si $T > t_{cc}$.

Ainsi dans le cas exceptionnel, le problème de minimisation du coût et le problème du temps-optimal sont équivalents. En fait, pour $T < t_{cc}$, γ est isolée, et donc en particulier optimale pour les deux problèmes. Pour $T > t_{cc}$, l'hypothèse (H_4) permet de montrer l'existence d'un contrôle u de coût inférieur au coût de γ , voir [59].

2. Temps final fixé

Définition 2.3.4. • On dit que γ est C^0 -coût-minimale sur $[0, T]$ s'il existe un voisinage C^0 de γ tel que pour toute trajectoire q contenue dans ce voisinage vérifiant $q(0) = \gamma(0)$ et $q(T) = \gamma(T)$ on a : $C_T(v) \geq C_T(0)$, où v est le contrôle associé à q .

- On dit que γ est L^∞ -coût-minimale sur $[0, T]$ s'il existe un voisinage de 0 dans $L^\infty([0, T])$ tel que, pour toute trajectoire q associée à un contrôle v de ce voisinage, vérifiant $q(0) = \gamma(0)$ et $q(T) = \gamma(T)$, on a : $C_T(v) \geq C_T(0)$.

On a alors :

Théorème 2.3.9 ([59]). 1. Si γ est hyperbolique, alors γ est C^0 -coût-minimale si et seulement si elle est C^0 -temps-minimale. En fait, γ est C^0 -coût-minimale si $T < t_c$, et n'est pas L^∞ -coût-minimale si $T > t_c$.

2. Si γ est exceptionnelle, alors γ est C^0 -coût-minimale si et seulement si $T < t_c$. De plus, γ n'est pas L^∞ -coût-minimale si $T > t_c$ (alors que γ est C^0 -temps-minimale si et seulement si $T < t_{cc}$).

Ainsi dans le cas hyperbolique les temps où γ perd son optimalité sont les mêmes dans le problème de minimiser le coût à temps final fixé et dans le problème du temps minimal. Au contraire dans le cas exceptionnel ils sont différents : γ perd sa C^0 -temps-optimalité *avant* sa C^0 -coût-optimalité (puisque $t_{cc} < t_c$, voir lemme 2.3.6).

2.4 Application au cas sous-Riemannien

Soit (M, Δ, g) une structure sous-Riemannienne où M est une variété lisse, Δ est une distribution lisse de rang 2 sur M , et g est une métrique lisse sur Δ . Soit γ une trajectoire anormale de référence définie sur $[0, T]$, avec $\gamma(0) = q_0 \in M$. Sans perte de généralité on peut supposer que Δ est engendrée par deux champs de vecteurs lisses g -orthonormés X et Y , et que γ est la courbe intégrale du champ X . Alors, à reparamétrisation près, le problème sous-Riemannien est équivalent au problème du *temps minimal* pour le système :

$$\dot{x} = vX(x) + uY(x) \quad (2.8)$$

et où les contrôles v, u satisfont la *contrainte* :

$$v^2 + u^2 \leq 1 \quad (2.9)$$

La trajectoire anormale γ est associée au contrôle $v = 1, u = 0$.

Définition 2.4.1. On appelle *système affine associé au système sous-Riemannien (2.8)* le système affine :

$$\dot{x} = X(x) + wY(x) \quad (2.10)$$

où le contrôle w vérifie une contrainte du type : $|w| \leq \eta$.

Pour étudier l'optimalité de la trajectoire γ pour le système sous-Riemannien (2.8), on compare ce système avec son système affine associé (2.10). Le fait que l'optimalité de γ pour le système affine ne dépende pas de la contrainte est essentiel. On obtient le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 ([59]). *Supposons que les hypothèses $(H_0 - H_3)$ soient satisfaites le long de γ pour le système (X, Y) . Alors γ est C^0 -optimale pour le système sous-Riemannien (2.8) si et seulement si elle est C^0 -temps-minimale pour son système affine associé (2.10). De plus γ est exceptionnelle pour ce système affine ; autrement dit γ est C^0 -optimale si $T < t_{cc}$ et n'est pas L^∞ -optimale si $T > t_{cc}$.*

En particulier les temps conjugués sont les mêmes le long de γ pour les deux systèmes. Par conséquent tout le formalisme de calcul du temps conjugué introduit pour les systèmes affines (l'opérateur différentiel D_1) est encore valable en sous-Riemannien. En particulier le temps conjugué du problème sous-Riemannien est calculable par un algorithme. Ce résultat fait le lien entre les travaux de [19] et [8], [9].

Exemple 2.4.1. Le cas Martinet (exposé en détails en section 4.4.1) est en dimension 3, donc $t_{cc} = +\infty$ (voir remarque 2.3.2). La trajectoire anormale est donc optimale sur \mathbb{R}^+ .

Remarque 2.4.1. D'après [3] la C^0 -optimalité est en géométrie sous-Riemannienne équivalente à l'optimalité au sens L^2 sur les contrôles.

Remarque 2.4.2. Si T est assez petit (dépendant du choix de la structure Riemannienne, et inférieur à t_{cc}), alors d'après [8] γ est de plus *globalement optimale* parmi toutes les trajectoires sous-Riemanniennes reliant 0 à $\gamma(T)$.

Remarque 2.4.3. Il est important de remarquer que la perte d'optimalité se fait dans L^∞ . Autrement dit les contrôles L^2 -proches du contrôle de référence n'ont aucune influence sur l'optimalité de l'anormale (voir découpage en secteurs, section 4.3.2).

Part II

Propriétés asymptotiques et régularité de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux

Dans toute cette partie on s'intéresse à des systèmes affines analytiques de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

avec le coût :

$$C(u) = \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt \tag{2.12}$$

En fait plus généralement tous les résultats de cette partie sont valables pour un coût $C(u) = \int_0^T f^0(x, u) dt$ analytique au sens L^2 , semi-continu inférieurement pour la topologie faible sur L^2 , et tel que $\frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}$ soit coercive, i.e. :

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^m \quad \left| \frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}(x, u) \cdot (v, v) \right| \geq \varepsilon \|v\|_{\mathbb{R}^m}^2$$

Cependant par commodité d'écriture toutes les démonstrations de [58] sont écrites avec le coût (2.12).

La régularité de la fonction valeur correspondante S et de ses ensembles de niveaux dépend de la présence ou non d'anormales minimisantes. Le but de cette partie est d'expliquer le rôle de ces anormales. Nous allons voir que s'il n'y en a pas, la catégorie des *ensembles sous-analytiques* est adaptée à la description de S . S'il y a des anormales minimisantes, cette catégorie n'est plus assez grande en général ; les anormales minimisantes sont responsables de la *non-propreté* de l'application exponentielle, ce qui provoque un phénomène de *tangence* des ensembles de niveaux par rapport à une direction anormale de référence. Si $m = 1$ et $f_0 \neq 0$, ou si $m = 2$ et $f_0 = 0$, on peut décrire précisément ce contact et en déduire une *partition en secteurs* au voisinage de l'anormale de référence. La transcendance de S au voisinage de l'anormale est étudiée précisément dans le cas sous-Riemannien de Martinet, et dans le cas général intégrable la sphère appartient à la catégorie *log-exp* ; de plus on a une échelle précise de fonctions paramétrant la sphère.

Chapter 3

S'il n'y a pas d'anormale minimisante

Pour tenter de comprendre le rôle des anormales minimisantes, plaçons-nous d'abord dans le cas où il n'y en a pas.

3.1 Sous-analyticité de la fonction valeur

Les ensembles de niveaux de la fonction valeur S correspondant au système (2.11) avec le coût (2.12), notés $M_r(T)$ et $M_{\leq r}(T)$, ont été définis précédemment (définition 1.3.2). On a :

Théorème 3.1.1 ([58]). *Considérons le système de contrôle affine (2.11) avec le coût (2.12). On suppose que r et T sont assez petits (de sorte que toute trajectoire ayant un coût inférieur à r est bien définie sur $[0, T]$). Soit K un compact sous-analytique inclus dans $M_{\leq r}(T)$. Supposons qu'il n'existe pas d'anormale minimisante reliant 0 à un point quelconque de K . Alors S est continue et sous-analytique sur K .*

Corollaire 3.1.2 ([58]). *Si r_0 et T sont assez petits et s'il n'existe pas d'anormale minimisante reliant 0 à un point quelconque de $M_{\leq r_0}(T)$, alors pour tout r inférieur à r_0 , $M_r(T)$ et $M_{\leq r}(T)$ sont des sous-analytiques de \mathbb{R}^n .*

Ce résultat généralise aux systèmes affines un théorème de [1] sur les systèmes sous-Riemanniens (voir aussi [11],[36]). L'argument principal pour prouver la sous-analyticité est le même que dans [1], i.e. la *compacité de l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés aux trajectoires minimisantes*.

Si le domaine \mathcal{U} de l'application entrée/sortie est égal à $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tout entier, i.e. si les trajectoires associées à un contrôle quelconque u dans L^2 sont bien définies sur $[0, T]$, alors tout point de $Acc(T)$ peut être atteint par une trajectoire minimisante. Le théorème 3.1.1 devient :

Théorème 3.1.3 ([58]). *Si $\mathcal{U} = L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ et s'il n'existe pas d'anormale minimisante, alors S est continue sur \mathbb{R}^n ; de plus $\text{Acc}(T)$ est ouvert et S est sous-analytique sur tout compact sous-analytique inclus dans $\text{Acc}(T)$.*

Remarque 3.1.1. En géométrie sous-Riemannienne (i.e. $f_0 = 0$) le contrôle $u = 0$ est toujours minimisant et anormal puisque $\text{Im } dE(0) = \text{Span} \{f_1(0), \dots, f_m(0)\}$ est de codimension supérieure ou égale à 1. Donc l'hypothèse du corollaire 3.1.2 n'est *jamais satisfaite*. C'est pourquoi on doit exclure l'origine. Dans [1], Agrachev prouve que la distance sous-Riemannienne est sous-analytique dans un voisinage épointé de 0, et donc les sphères sous-Riemanniennes de petit rayon sont sous-analytiques.

Le problème de la sous-analyticité de la distance sous-Riemannienne en 0 n'est pas trivial. Agrachev/Sarychev ([8]) ou Jacquet ([36]) prouvent ce fait sous certaines hypothèses sur la distribution. En fait pour certaines dimensions de l'espace d'états et codimensions de la distribution, l'absence d'anormales minimisantes (et donc la sous-analyticité des sphères) et la non sous-analyticité de la distance à 0 sont des propriétés génériques. (voir [7]).

Néanmoins pour les *systèmes affines* tels que $f_0 \neq 0$, le contrôle $u = 0$ (qui est toujours minimisant puisque $C(u) = 0$) n'est pas anormal en général. Les conditions assurant que ce contrôle est régulier sont bien connues (voir par exemple [40]). On peut alors améliorer le corollaire 3.1.2 et énoncer :

Corollaire 3.1.4 ([58]). *Considérons le système affine (2.11) avec le coût (2.12). Si $u = 0$ est admissible sur $[0, T]$ et est régulier, alors pour tout r assez petit, S est continue sur $M_{\leq r}(T)$ et est sous-analytique sur tout sous-ensemble compact sous-analytique de $M_{\leq r}(T)$. De plus si r est assez petit alors $M_r(T)$ et $M_{\leq r}(T)$ sont des sous-analytiques de \mathbb{R}^n .*

3.2 Sur la continuité de la fonction valeur

Le théorème 3.1.1 affirme en particulier que s'il n'y a pas d'anormale minimisante alors S est continue sur $M_{\leq r}(T)$. Sans cette hypothèse c'est faux, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2.1. Considérons dans \mathbb{R}^2 le système affine $\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x)$ avec

$$f_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial y}$$

Fixons $T > 0$. Il est clair que pour tout $u \in L^2$, x_u est bien définie sur $[0, T]$. On a :

$$\begin{aligned} x(T) &= T \\ y(T) &= \int_0^T u(t) dt \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{Acc}(T) = \{(T, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

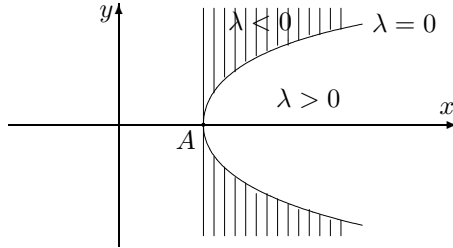


Figure 3.1: $\lambda < 0$

La fonction valeur prend des valeurs finies dans $Acc(T)$, et est infinie en dehors, donc n'est pas continue sur \mathbb{R}^n . Remarquons que pour tout contrôle u , l'application $dE(u)$ n'est jamais surjective, et donc toutes les trajectoires sont anormales.

Dans l'exemple précédent, S est cependant continue sur $Acc(T)$. Mais c'est faux en général, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2.2. Considérons dans \mathbb{R}^2 le système affine $\dot{x} = f_0 + uf_1$ avec

$$f_0 = (1 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial y}$$

Fixons $T = 1$. La seule trajectoire anormale γ est associée au contrôle $u = 0$: $\gamma(t) = (t, 0)$. Soit $A = \gamma(1)$; on a $S(A) = 0$. L'ensemble d'accessibilité au temps 1 est :

$$Acc(1) = A \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1\}$$

Considérons maintenant le problème de minimiser le coût $C(u) = \int_0^1 u^2(t) dt$.

Les extrémales normales sont solutions de :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + y^2 & \dot{y} &= p_y \\ \dot{p}_x &= 0 & \dot{p}_y &= -2yp_x \end{aligned}$$

Posons $p_x = \lambda$. Le domaine décrit par $(x(1), y(1))$ lorsque λ varie est représenté sur la fig. 3.1.

Les ensembles de niveaux $M_r(1)$ de la fonction valeur S sont représentés sur la fig. 3.2. La famille $(M_r(1))_{r>0}$ est une partition de $Acc(1)$. Remarquons que la pente du vecteur u_r tend vers l'infini lorsque r tend vers 0.

Les ensembles de niveaux $M_r(1)$ se ramifient en A , mais ne contiennent pas ce point, donc ne sont pas fermés. Maintenant on peut voir que la fonction valeur S n'est pas continue en A , même à l'intérieur de $Acc(1)$. En effet sur

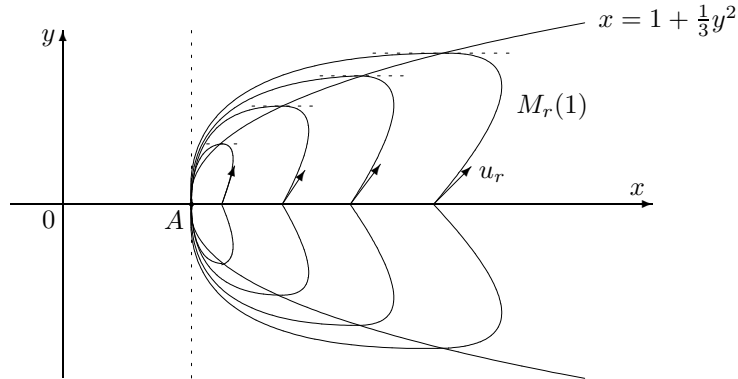


Figure 3.2: Ensembles de niveaux de la fonction valeur

$M_r(1)$, S prend la valeur r , mais est égale à 0 au point A .

De plus on peut donner un équivalent de S en A dans le domaine ($\lambda < 0$) (voir fig. 3.1) :

$$S(x, y) \sim \frac{1}{4} \frac{y^4}{x-1}$$

Remarquons que lorsque $y \neq 0$ est fixé, si $x \rightarrow 1, x > 1$, alors $\lambda \rightarrow -\infty$. C'est un phénomène de *non-propreté* dû à l'existence d'anormales minimisantes, cf section 3.2.2.

Dans cet exemple A est atteint par le contrôle $u = 0$. On voit facilement que l'ensemble des contrôles minimisants reliant 0 aux points d'un voisinage de A n'est pas (fortement) compact dans L^2 . En fait on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 ([58]). *Considérons le système affine analytique (2.11) avec le coût (2.12). On suppose que r et T sont assez petits. Alors S est continue sur $M_{\leq r}(T)$ si et seulement si l'ensemble des contrôles minimisants reliant 0 aux points de $M_{\leq r}(T)$ est compact dans L^2 .*

Remarque 3.2.1. En géométrie sous-Riemannienne la fonction valeur S est toujours continue, même s'il y a des anormales minimisantes. Ceci est dû au fait que S est le carré de la distance sous-Riemannienne (voir par exemple [12]). Remarquons que [36] (voir aussi [1]) prouve que l'ensemble des contrôles minimisants joignant $M_{\leq r}(T) = \overline{B}(0, r)$, r assez petit, est compact dans L^2 .

Chapter 4

S'il existe une anormale minimisante

4.1 Insuffisance de la catégorie sous-analytique

4.1.1 En géométrie sous-Riemannienne

Le cas Martinet plat étudié dans [6] est le cas sous-Riemannien le plus simple pour lequel il existe une anormale minimisante. Les auteurs montrent que les sphères de petit rayon, et donc la distance à 0, ne sont pas sous-analytiques (voir section 4.4.1 pour une étude plus générale du cas Martinet). Se basant sur ce fait, Agrachev et Gauthier montrent dans [7] le résultat suivant :

Théorème 4.1.1. *Considérons une structure sous-Riemannienne (M, Δ, g) de rang 2 telle que $\Delta^3 \neq \Delta^2$ en q_0 . Alors le germe en q_0 de la distance sous-Riemannienne à q_0 n'est pas sous-analytique.*

Leur étude ne se limite pas au rang 2. Mais l'étude du rang 2 est intéressante car génériquement il n'existe pas d'anormale minimisante pour les rangs supérieurs ou égaux à 3 (cf [7] ou théorème 1.4.1).

En revanche on n'a pas de résultat aussi général que le théorème précédent pour les sphères sous-Riemanniennes pour des structures de rang 2. On conjecture cependant qu'elles ne sont jamais sous-analytiques au voisinage d'une anormale minimisante (voir cas Martinet, section 4.4.1).

Conclusion La catégorie sous-analytique est donc insuffisante pour décrire la régularité de la distance dans le cas où il existe des anormales minimisantes. Il faut donc trouver une catégorie plus large et qui bénéficie des mêmes propriétés que la classe des sous-analytiques. Bref il faut trouver une catégorie *o-minimale* plus large, ou du moins une catégorie dans laquelle on a de bonnes propriétés de stratification.

4.1.2 Pour des systèmes affines

Considérons de nouveau l'exemple (3.2.2). On montre que la fonction valeur S a le développement asymptotique suivant au voisinage du point $A = (1, 0)$:

$$S(x, y) = \frac{1}{4} \frac{y^4}{x-1} + \frac{y^4}{x-1} e^{-\frac{y^2}{x-1}} + o\left(\frac{y^4}{x-1} e^{-\frac{y^2}{x-1}}\right)$$

Elle n'est donc pas sous-analytique en A . De même la branche $S^{-1}(r)$, qui se ramifie en A , n'est pas sous-analytique au voisinage de A et a le développement suivant :

$$x = 1 + \frac{1}{4r} y^4 - 3y^2 e^{-\frac{4r}{y^2}} + o\left(y^2 e^{-\frac{4r}{y^2}}\right)$$

En fait on peut montrer que cette branche et la fonction valeur s'expriment au voisinage de A comme des fonctions analytiques d'une certaine échelle de fonctions composées de logarithmes et d'exponentielles. Par exemple le graphe de cette branche est :

$$x = 1 + F\left(y, \frac{e^{-\frac{4r}{y^2}}}{y^3}\right)$$

où F est un germe de fonction analytique en 0. Ceci signifie que la branche, ainsi que la fonction valeur S , appartiennent à la *catégorie log-exp* introduite en section 1.5.2. C'est une bonne catégorie dans le sens où elle est o-minimale. Elle contient les sous-analytiques. C'est un bon candidat pour décrire les phénomènes anormaux.

Malheureusement on n'a pas de résultat général dans cette catégorie. Voyons donc d'abord ce qu'on peut dire de général.

4.2 Aspect qualitatif : théorème de tangence

Le but de ce paragraphe est d'expliquer de manière générale sur des systèmes de contrôle affines que l'existence d'une anormale minimisante est à l'origine d'un *phénomène de non-propreté*, ce qui a des conséquences sur l'aspect qualitatif des ensembles de niveaux de la fonction valeur.

4.2.1 Théorème de tangence

Lemme 4.2.1 ([58]). *Considérons le système affine (2.11) avec le coût (2.12). Supposons qu'il existe une trajectoire minimisante γ sur $[0, T]$ associée à un unique contrôle anormal minimisant u de corang 1, et qu'il existe $r > 0$ assez petit pour que $A = \gamma(T) \in M_{\leq r}(T)$. Notons $(p_1, 0)$ le multiplicateur de Lagrange projectivisé en A . Soit $\sigma(\tau)_{0 < \tau \leq 1}$ une courbe sur $M_{\leq r}(T)$ telle que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma(\tau) = A$. Pour tout τ on note $\mathcal{P}(\tau) \subset P(T_{\sigma(\tau)}^* M)$ l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange projectivisés en $\sigma(\tau)$: $\mathcal{P}(\tau) = \{(p_u(\tau), p_u^0) / E(u) = \sigma(\tau), u \text{ est minimisant}\}$. Alors :*

$$\mathcal{P}(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \{(p_1, 0)\}$$

c'est-à-dire que chaque multiplicateur de Lagrange de $\mathcal{P}(\tau)$ tend vers $(p_1, 0)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$.

Soit \tilde{E} l'application entrée/sortie du système augmenté dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \\ \dot{x}^0 &= \sum_{i=1}^m u_i^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si $P \in M_r(T) \subset \mathbb{R}^n$, on note $\tilde{P} = (P, r)$ le point correspondant dans l'espace augmenté. De la même façon, on note $\tilde{M}_r(T)$, $\tilde{M}_{\leq r}(T)$ les ensembles correspondants dans l'espace augmenté.

Théorème 4.2.2 ([58]). *Supposons que les hypothèses du lemme 4.2.1 soient satisfaites, et posons $r_0 = S(A)$. Si de plus $\tilde{M}_{\leq r}(T)$ est C^1 -stratifiable au voisinage de $\tilde{A} = (A, r_0)$, alors les strates de $\tilde{M}_{\leq r}(T)$ sont tangentes en \tilde{A} à l'hyperplan $\text{Im } d\tilde{E}(u)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Si de plus $A \in \overline{M_{r_1}(T)}$, $r_1 < r$, alors $r_1 \geq r_0$ et les strates de $M_{r_1}(T)$ sont tangentes en A à l'hyperplan $\text{Im } dE(u)$ dans \mathbb{R}^n , voir fig. 4.1.*

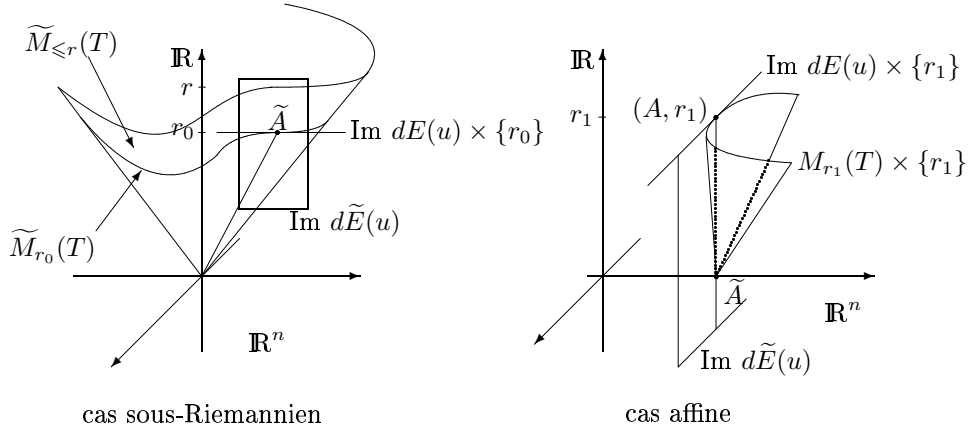


Figure 4.1: tangence dans l'espace augmenté

Exemple 4.2.1. Dans [22] est faite une description précise de la sphère sous-Riemannienne dans le cas Martinet (voir aussi section 4.4.1). Génériquement, l'anormale minimisante est de corang 1. La section de la sphère avec le plan $(y = 0)$ au voisinage du point final A de l'anormale est représentée sur la fig. 4.2, (b).

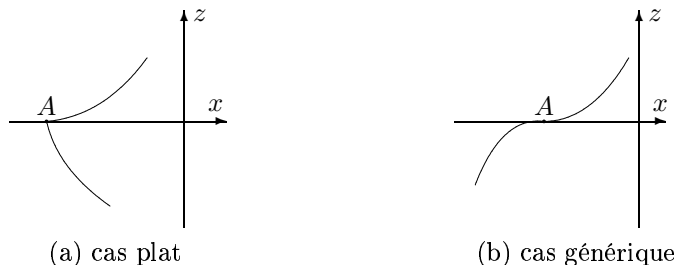


Figure 4.2:

Dans le cas dit plat, l'anormale n'est pas stricte, et l'allure de la sphère est représentée sur la fig. 4.2, (a). Dans ce cas, l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés aux points d'un voisinage de $(-r, 0)$ tels que $z < 0$ est borné. C'est pourquoi la pente ne tend pas vers 0 lorsque $z \rightarrow 0, z < 0$.

Ainsi le théorème 4.2.2 donne une explication géométrique au pincement de la sphère de Martinet générique au voisinage de la direction anormale.

Exemple 4.2.2. Revenons à l'exemple 3.2.2. On a vu que l'ensemble $M_r(1)$ est tangent en A à l'hyperplan $\text{Im } dE(u) = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial y}$.

4.2.2 Interaction entre minimisantes normales et anormales

Considérons le système affine (2.11) avec le coût (2.12), et supposons qu'il existe une trajectoire minimisante γ associée à un unique contrôle anormal strict sur $[0, T]$. Notons $A = \gamma(T)$.

Appelons *point normal* un point final au temps T d'une géodésique minimisante normale. On fait l'hypothèse suivante :

(H) Pour tout voisinage V de A il existe au moins un point normal dans $V \cap M_{\leq r}(T)$.

Pour décrire le *flot normal* on utilise l'*application exponentielle* (voir définition 1.3.5). On a :

Théorème 4.2.3 ([58]). *Sous les hypothèses précédentes l'application exp restreinte aux minimisantes n'est pas propre au voisinage de A .*

Remarque 4.2.1. Réciproquement si \exp n'est pas propre alors il existe une anormale minimisante. Ceci montre l'interaction entre les minimisantes normales et anormales. En un sens les extrémales normales *reconnaissent* les extrémales anormales. Ce phénomène de *non-propreté* est caractéristique de l'anormalité. Notons que dans cette représentation les anormales sont vues comme une situation limite de normales.

4.2.3 Application en géométrie sous-Riemannienne de rang 2 : description de la sphère au voisinage d'une direction anormale

Soit (M, Δ, g) une structure sous-Riemannienne de rang 2, où M est une variété analytique de dimension $n \geq 3$, et g est une métrique analytique sur Δ . Notre point de vue est local et on peut supposer que M est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , et que $\Delta = \text{Span} \{f_1, f_2\}$ où f_1, f_2 sont des champs de vecteurs analytiques g -orthonormés. À reparamétrisation près, le problème de minimiser le coût (2.12) en temps T fixé est équivalent au problème du temps optimal avec la contrainte $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$. Soit $\hat{\gamma}$ une trajectoire anormale de référence sur $[0, r]$, associée à un vecteur adjoint \hat{p} . On suppose que $\hat{\gamma}$ est *injective*, associée à un unique contrôle \hat{u} ; sans perte de généralité on peut supposer que $\hat{\gamma}(t) = \exp t f_1(0)$.

On fait les hypothèses $(H_0 - H_3)$ sur le système affine associé (voir chap. 2), que l'on rappelle :

(H_1) Soit $K(t) = \text{Im } dE_t(\hat{u}) = \text{Span} \{ad^k f_1 \cdot f_2|_{\hat{\gamma}} / k \geq 0\}$ le premier cône de Pontryagin le long de $\hat{\gamma}$. On suppose que $K(t)$ est de codimension 1 pour tout $t \in]0, r]$ et est engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs $ad^k f_1 \cdot f_2|_{\hat{\gamma}}, k = 0 \dots n - 2$.

(H_2) $ad^2 f_2 \cdot f_1|_{\hat{\gamma}} \notin K(t)$ le long de $\hat{\gamma}$.

(H_3) $f_1|_{\hat{\gamma}} \notin \{ad^k f_1 \cdot f_2|_{\hat{\gamma}}, k = 0 \dots, n - 3\}$.

Sous ces hypothèses, $\hat{\gamma}$ est de corang 1. De plus d'après le théorème 2.4.1 $\hat{\gamma}$ est minimisante si r est assez petit. Les hypothèses du lemme 4.2.1 sont donc satisfaites.

Soit maintenant V un voisinage de $\hat{p}(0)$ tel que toutes les géodésiques anormales partant de 0 avec $p_\gamma(0) \in V$ satisfont aussi les hypothèses $(H_1) - (H_2) - (H_3)$. Remarquons que si V est assez petit, elles sont aussi injectives. On a alors d'après le théorème 2.4.1 :

Proposition 4.2.4. *Il existe $r > 0$ tel que les géodésiques anormales précédentes sont C^0 -temps-minimales sur $[0, r]$.*

Corollaire 4.2.5 ([58]). *Les points finaux de ces anormales minimisantes forment au voisinage de $\hat{\gamma}(r)$ une sous-variété de dimension $n - 3$ incluse dans la sphère $S(0, r)$.*

Ainsi au voisinage de $\hat{\gamma}(r)$ la sphère sous-Riemannienne $S(0, r)$ est constituée de deux parties : la *partie anormale* précédente, et une *partie normale* (faite de points finaux de géodésiques normales minimisantes). Pour décrire $S(0, r)$ au voisinage de $\hat{\gamma}(r)$ nous devons les *recoller*. Si l'hypothèse de C^1 -stratification est satisfaite, alors la partie normale se ramifie *tangentiellement* sur la partie anormale au sens du théorème 4.2.2. Ceci nous donne une description qualitative de la sphère au voisinage de $\hat{\gamma}(r)$, voir fig. 4.3.

En section 4.3.2, on améliore partiellement ce résultat en décrivant précisément le *contact* avec la direction anormale.

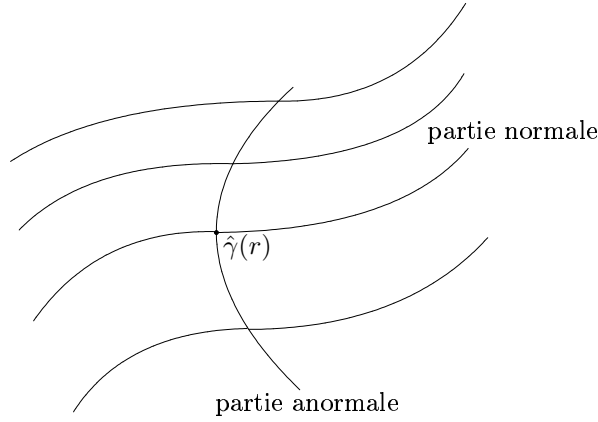


Figure 4.3:

Remarque 4.2.2. Si la structure sous-Riemannienne est analytique, alors la sous-variété anormale précédente l'est aussi. En revanche on conjecture que la partie normale *ne se ramifie pas analytiquement* sur la partie anormale. Ceci est lié à l'étude de la transcendance des sphères sous-Riemanniennes, voir section 4.4.

4.2.4 Application : description des ensembles de niveaux pour un système affine mono-entrée avec coût quadratique au voisinage d'une direction anormale

Soit $T > 0$ fixé. Considérons le système affine $\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x)$, avec un coût $C_T(u) = \int_0^T f^0(x, u) dt$. Soit $\hat{\gamma}$ une anormale de référence, le long de laquelle les hypothèses $(H_0 - H_4)$ (voir chap. 2) sont satisfaites. On suppose de plus que les conditions évoquées en introduction de la partie II sont vérifiées, i.e. la fonction C_T est analytique sur $L^2([0, T])$, semi-continue inférieurement pour la topologie faible sur L^2 , et tel que $\frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}$ est coercive, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^m \quad \left| \frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}(x, u) \cdot (v, v) \right| \geq \varepsilon \|v\|_{\mathbb{R}^m}^2$$

Sous ces hypothèses, le théorème de tangence 4.2.2 est encore valable, et $\hat{\gamma}$ est stricte de corang 1. On note \hat{p} un vecteur adjoint associé à $\hat{\gamma}$, et \hat{u} son contrôle anormal associé. On note $r = C_T(\hat{u})$ le coût au temps T de la trajectoire $\hat{\gamma}$.

Soit S la fonction valeur associée au coût C_T au temps T , et soit $M_r(T) = S^{-1}(r)$ l'ensemble de niveau r de S .

Soit V un voisinage de $\hat{p}(0)$ tel que toutes les anormales partant de 0 avec $p_\gamma(0) \in V$ satisfont aussi les hypothèses $(H_0 - H_4)$. Si $\hat{\gamma}$ est de plus hyperbolique,

i.e. si $\langle \hat{p}, f_0(\hat{\gamma}) \rangle \neq 0$, alors si V est assez petit toutes les anormales précédentes sont aussi hyperboliques.

On a alors d'après le théorème 2.3.9 :

Proposition 4.2.6. *Il existe $T > 0$ tel que sur $[0, T]$:*

1. *si $\hat{\gamma}$ est hyperbolique, toutes les anormales précédentes sont minimisantes.*
2. *si $\hat{\gamma}$ est exceptionnelle, toutes les anormales précédentes qui sont de plus exceptionnelles (i.e. qui vérifient de plus $\langle p_\gamma, f_0(\gamma) \rangle = 0$), sont minimisantes.*

En particulier, $\hat{\gamma}(T) \in M_r(T)$. Comme précédemment on peut maintenant décrire $M_r(T)$ au voisinage de $\hat{\gamma}(T)$. La contrainte $C_T(u) = r$ impose une codimension supplémentaire. Il vient :

Corollaire 4.2.7. *Les points finaux au temps T des anormales de la proposition précédente forment au voisinage de $\hat{\gamma}(T)$ une sous-variété de $M_r(T)$, et :*

1. *si $\hat{\gamma}$ est hyperbolique, cette sous-variété est de dimension $n - 3$ si $n \geq 3$, et est réduite à un point si $n = 2$.*
2. *si $\hat{\gamma}$ est exceptionnelle, elle est de dimension $n - 4$ si $n \geq 4$, et est réduite à un point si $n = 3$.*

Ainsi comme précédemment l'ensemble de niveau $M_r(T)$ se scinde en une *partie normale* et une *partie anormale*. Si l'hypothèse de C^1 -stratification est satisfaite, la partie normale se ramifie tangentiellement sur la partie anormale, comme sur la fig. 4.3.

Remarque 4.2.3. Ces théorèmes ne s'appliquent pas au problème du temps minimal, i.e. lorsque $C_T(u) = T$, car ce coût ne vérifie pas les hypothèses précédentes, notamment la condition de coercivité. Donc pour décrire le bord des ensembles accessibles $Acc(T)$ (qui sont les ensembles de niveaux de la fonction valeur associée au problème du temps minimal) il faut procéder autrement, ce que l'on fait dans la section suivante.

4.3 Asymptotique des ensembles accessibles le long d'une anormale

Dans cette section on décrit précisément le bord des ensembles accessibles $Acc(T)$ en temps T au voisinage d'une direction anormale pour un système affine mono-entrée, i.e. un système de la forme (2.11) avec $m = 1$. Ce sont les ensembles de niveaux de la fonction valeur associée au problème du temps minimal. On applique ensuite cette étude au cas sous-Riemannien de rang 2, en se ramenant à un système affine mono-entrée. On obtient plus qu'une simple tangence (voir section précédente) : on décrit ici précisément le contact des ensembles accessibles en temps fixé avec la direction anormale.

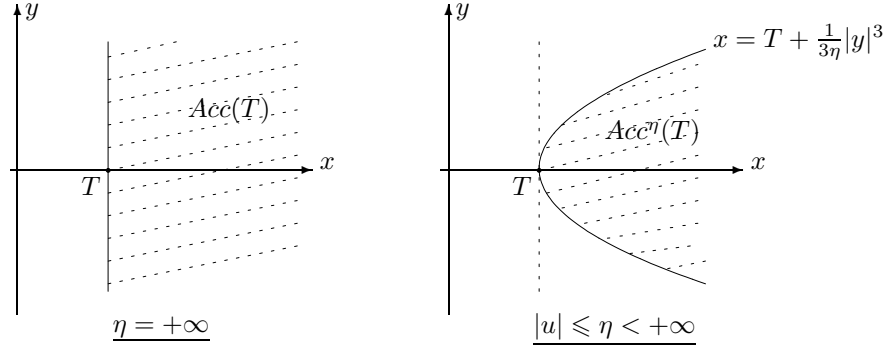


Figure 4.4:

4.3.1 Pour un système affine mono-entrée

Cas hyperbolique

Dans ce cas l'allure de l'ensemble accessible dépend de la contrainte, comme le montre l'exemple :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + y^2 \\ \dot{y} &= u \end{aligned} \quad \text{où } |u| \leq \eta$$

Cas exceptionnel

L'ensemble accessible $Acc^\eta(T)$ est représenté sur la fig. 4.4.

Dans ce cas le bord de $Acc^\eta(T)$ ne dépend pas de la contrainte au voisinage de $\gamma(T)$. Précisément on a le résultat suivant :

Théorème 4.3.1 ([59]). *Considérons le système affine (2.1) avec la contrainte (2.2), et supposons que les hypothèses $(H_0 - H_3)$ soient satisfaites le long de la trajectoire anormale de référence γ sur $[0, T]$. On suppose que γ est exceptionnelle. Notons t_{cc} et t_c les temps conjugués associés à γ (voir chap. 2). Alors :*

1. *Il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_n) localement le long de γ telles que dans ces coordonnées γ s'écrit : $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$, et le cône de Pontryagin le long de γ est : $K(t) = \text{Vect} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\} |_{\gamma}$.*
2. *Si T est assez petit alors pour tout point (x_1, \dots, x_n) de $Acc^\eta(T) \setminus \{\gamma(T)\}$ on a $x_n > 0$ (voir fig. 4.5).*
3. *Si $T < t_c$, alors dans le plan (x_1, x_n) , au voisinage du point $(T, 0)$, le bord de $Acc^\eta(T)$ ne dépend pas de η , est une courbe de classe C^2 tangente à la direction anormale dont le premier terme est :*

$$x_n = A_T(x_1 - T)^2 + o((x_1 - T)^2)$$

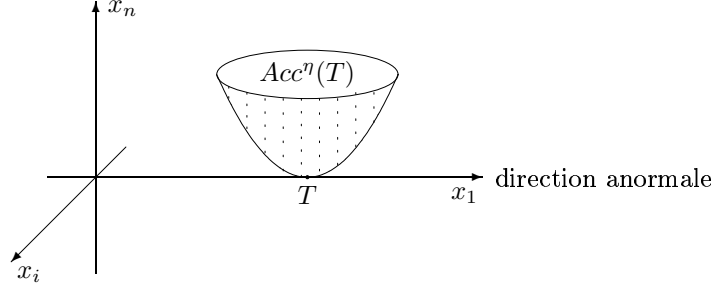


Figure 4.5: Allure de $Acc^\eta(T)$, T petit

La fonction $T \mapsto A_T$ est continue et strictement décroissante sur $[0, t_c[$. Elle est positive sur $[0, t_{cc}]$ et négative sur $[t_{cc}, t_c[$. De plus, si η dépend de $x_1 - T$ alors le résultat reste vrai pourvu que : $x_1 - T = o(\eta)$ lorsque $x_1 \rightarrow T$.

L'allure de $Acc^\eta(T)$ en fonction de T est représenté sur la fig. 4.6. Le contact avec la direction anormale est d'ordre 2. Au-delà de t_{cc} , l'ensemble accessible est ouvert.

Remarque 4.3.1. Le coefficient A_T peut être calculé de la manière suivante (voir [19], [39]). Notons D l'opérateur (2.6) introduit en section 2.3.1 et Q la forme quadratique associée à D , représentant la dérivée seconde intrinsèque le long de γ . Il existe une fonction J de classe $C^{2(n-2)}$ sur $[0, T]$ telle que $DJ = 0$ et vérifiant les conditions aux limites :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-3\} \quad J^{(k)}(0) = 0, \quad J^{(k)}(T) = \delta_0^k$$

Alors :

$$A_T = Q(J) \tag{4.2}$$

Remarque 4.3.2. Lorsque $T = t_{cc}$ on a $A_T = 0$. Le contact de $Acc^\eta(t_{cc})$ est alors d'ordre supérieur ou égal à 3 et dépend du système.

4.3.2 Application en géométrie sous-Riemannienne

Considérons le problème sous-Riemannien comme le problème de temps minimal pour le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= vX(x) + uY(x) \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs orthonormés pour une certaine métrique sous-Riemannienne, et où les contrôles vérifient la contrainte :

$$v^2 + u^2 \leq 1 \tag{4.4}$$

Définissons une notion d'ensemble accessible contraint :

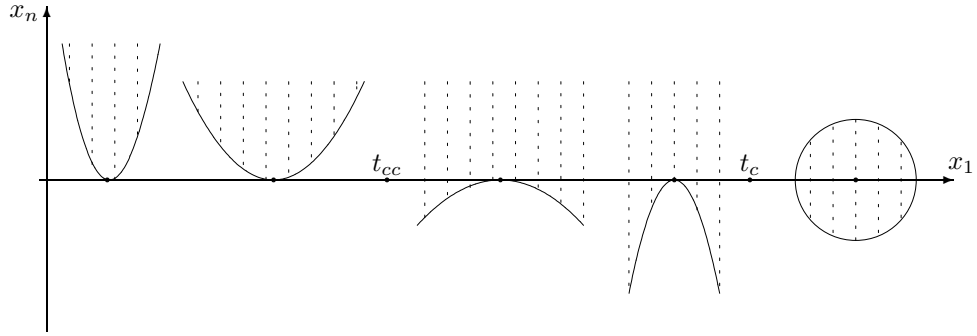


Figure 4.6:

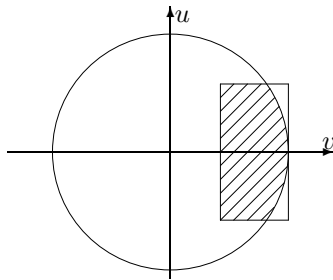


Figure 4.7:

Définition 4.3.1. On appelle $Acc_{SR}^\alpha(T)$ l'ensemble accessible en temps T pour le système sous-Riemannien (4.3) avec la contrainte :

$$v^2 + u^2 \leq 1, \quad 1 - \alpha \leq v \leq 1, \quad |u| \leq \alpha$$

(voir fig. 4.7)

Considérons le *système affine associé* au système sous-Riemannien (4.3) (voir définition 2.4.1) :

$$\dot{x} = X(x) + wY(w)$$

et notons $Acc_A^\eta(T)$ l'ensemble accessible en temps T pour ce système affine avec la contrainte : $|w| \leq \eta$.

Le lemme suivant donne une comparaison fine des ensembles accessibles des deux systèmes :

Lemme 4.3.2 ([59]). 1. $\forall \alpha \in]0, 1[\quad Acc_{SR}^\alpha(T) \subset \bigcup_{(1-\alpha)T \leq s \leq T} Acc_A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(s)$

$$2. \quad \bigcup_{T_0 \leq s \leq \frac{T}{\sqrt{1+\eta^2}}} Acc_A^\eta(s) \subset Acc_{SR}^\alpha(T) \quad \text{où } \alpha = \max\left(1 - \frac{T_0}{T}, \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\right).$$

Le théorème suivant est alors un corollaire du théorème 4.3.1 :

Théorème 4.3.3 ([59]). *Supposons que les hypothèses $(H_0 - H_3)$ soient satisfaites le long de la trajectoire anormale de référence γ pour le système (X, Y) . Notons t_{cc} et t_c les temps conjugués de γ pour le système affine associé. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Alors :*

1. *Il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_n) localement le long de γ telles que dans ces coordonnées γ s'écrit : $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$, et le cône de Pontryagin le long de γ est : $K(t) = Vect \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\}_{|\gamma}$.*
2. *Si T est assez petit alors pour tout point (x_1, \dots, x_n) de $Acc_{SR}^\alpha(T)$ au voisinage de $\gamma(T)$ on a $x_n \geq 0$ (voir fig. 4.5).*

3. *Si $T < t_{cc}$, alors dans le plan (x_1, x_n) , au voisinage du point $(T, 0)$, le bord de $Acc_{SR}^\alpha(T)$ ne dépend pas de α , est une courbe de classe C^2 sauf en $(T, 0)$ tangente à la direction anormale dont le premier terme est :*

- *si $x_1 \leq T$ alors $x_n = 0$.*
- *si $x_1 \geq T$ alors $x_n = A_T(x_1 - T)^2 + o((x_1 - T)^2)$*

La fonction $T \mapsto A_T$ est la même que dans le théorème 4.3.1.

La figure 4.8 représente l'évolution de $Acc_{SR}^\alpha(T)$ en fonction de T . Il est ouvert au voisinage de $\gamma(T)$ si $T > t_{cc}$, contrairement au cas affine où il ne devient ouvert qu'au delà de t_c .

Remarque 4.3.3. La méthode de comparaison du système (4.3) et de son système affine associé utilise le changement de paramétrage (voir [59]) :

$$\frac{ds}{dt} = v$$

qui n'est possible que si le contrôle v ne s'annule pas. Cette condition est satisfaite lorsque (v, u) est dans un voisinage L^∞ du contrôle anormal de référence $(1, 0)$, car alors v est proche de 1 au sens L^∞ . Voilà pourquoi par cette méthode on ne peut décrire qu'un ensemble accessible *contraint* au sens de la définition 4.3.1, i.e. *dans un voisinage L^∞ du contrôle anormal de référence.*

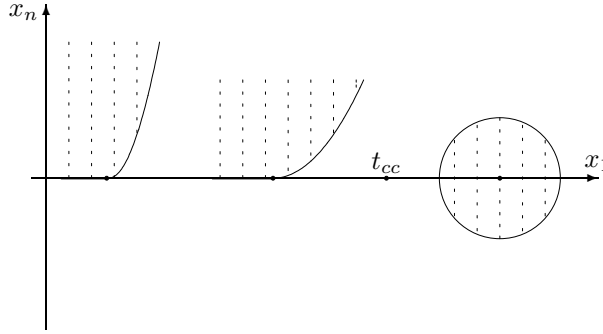


Figure 4.8:

Partition de la sphère en secteurs au voisinage d'une anormale Soit $T > 0$ assez petit de sorte que les propriétés 2 et 3 du théorème 4.3.3 sont satisfaites, et que la trajectoire anormale γ est globalement minimisante. Le point $A = \gamma(T)$ appartient alors à la sphère sous-Riemannienne $S(0, T)$ de rayon T . Si les contrôles transférant 0 aux points du bord de $Acc_{SR}^\alpha(T)$ (qui sont L^∞ -optimaux) sont en fait *globalement optimaux*, alors ce bord est dans la sphère $S(0, T)$. Dans ce cas on obtient le découpage de la sphère en *deux secteurs* au voisinage de $\gamma(T)$, délimités par le cône de Pontryagin $x_n = 0$:

- secteur $x_n > 0$ correspondant à la description précédente,
- secteur $x_n < 0$.

Les résultats précédents montrent que les points finaux associés à des contrôles L^∞ -proches du contrôle de référence sont dans le premier secteur : $x_n > 0$. Bien entendu à cause de la contrôlabilité le secteur $x_n < 0$ est accessible. En fait il est facile de vérifier par un calcul que :

Lemme 4.3.4 ([59]). *Pour tout voisinage V du point A dans \mathbb{R}^n on a :*

$$S(0, T) \cap V \cap (x_n < 0) \neq \emptyset$$

Ces points dans $(x_n < 0)$ sont atteints par des contrôles qui sont proches *au sens L^2* mais *pas au sens L^∞* du contrôle de référence.

Ainsi au voisinage de la direction anormale la sphère est constituée de deux secteurs : un *secteur L^∞* ($x_n > 0$) décrit par le théorème 4.3.3, et un *secteur L^2* ($x_n < 0$). On connaît le contact du premier secteur, mais pas celui du deuxième a priori. Cependant d'après le théorème de tangence 4.2.2, sous des bonnes hypothèses de stratification, ce secteur se ramifie de manière *tangente* au cône de Pontryagin $x_n = 0$, voir fig. 4.9.

Remarque 4.3.4. En particulier, les trajectoires minimisantes γ_∞ joignant 0 aux points de la sphère situés dans le secteur L^∞ sont C^1 -proches de la trajectoire

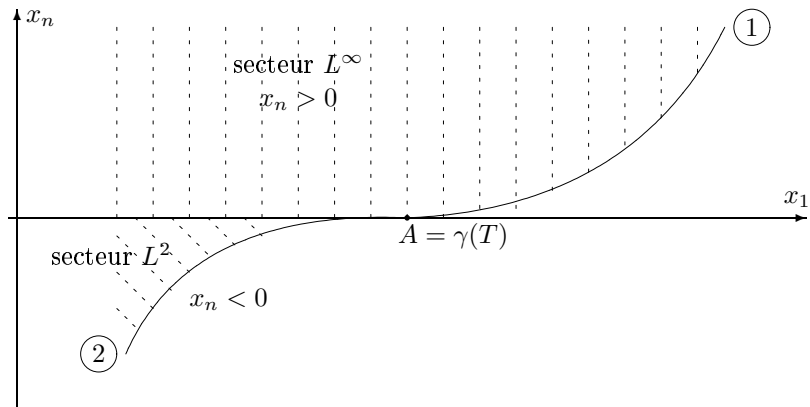


Figure 4.9:

anormale de référence γ . Les trajectoires minimisantes γ_2 joignant 0 aux points de la sphère dans le secteur L^2 sont C^0 -proches, mais pas C^1 -proches de γ , voir fig. 4.9.

Exemple typique : le cas Martinet. Ce cas sous-Riemannien est étudié de manière plus systématique en section 4.4.1. On considère les deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^3 :

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

et on munit la distribution engendrée par ces deux champs de vecteurs d'une métrique analytique g de la forme :

$$g = adx^2 + cdy^2$$

avec $a = (1 + \alpha y)^2$ et $c = (1 + \beta x + \gamma y)^2$. Le contrôle anormal de référence pour le système sous-Riemannien $\dot{x} = vX(x) + uY(x)$ avec la contrainte $v^2 + u^2 \leq 1$ est $v = 1, u = 0$, et correspond à : $x(t) = t, y(t) = z(t) = 0$. On a :

Lemme 4.3.5. *Les hypothèses $(H_0 - H_3)$ sont satisfaites si et seulement si $\alpha \neq 0$. Dans ce cas les branches 1 et 2 (voir fig. 4.9 avec $x_1 = x, x_n = z$) ont les contacts suivants avec la direction anormale :*

- *branche 1* : $x \geq T, z = \frac{1}{2T\alpha^2}(x - T)^2 + o((x - T)^2)$
- *branche 2* : $x \leq T, z \sim \frac{1}{6}(1 + O(T))(x - T)^3$

Remarque 4.3.5. Pour la première branche on peut vérifier à l'aide de la formule (4.2) (voir remarque 4.3.1) que :

$$A_T = \frac{1}{2T\alpha^2}$$

4.4 Transcendance requise en géométrie sous-Riemannienne. Catégorie log-exp.

L'étude est faite sur le cas sous-Riemannien de Martinet. Dans le cas dit *général intégrable* la sphère appartient à la *catégorie log-exp*.

4.4.1 Présentation du cas Martinet

Considérons le cas sous-Riemannien de Martinet (U, Δ, g) où U est un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant 0, $\Delta = \text{Ker } \omega$, $\omega = dz - \frac{y^2}{2}dx$, et $g = adx^2 + cdy^2$ où a, c sont des germes de fonctions analytiques en 0 tels que $a(0) = c(0) = 1$.

Il existe une seule ligne anormale L issue de 0 correspondant à l'axe x . Paramétrée par la longueur, elle s'écrit $L = (\pm t, 0, 0)$. Elle est minimisante, voir [8]. On note :

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

Le repère orthonormé est :

$$F_1 = \frac{G_1}{\sqrt{a}}, \quad F_2 = \frac{G_2}{\sqrt{c}}, \quad F_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

où F_1, F_2 engendrent Δ .

Sans nuire à la généralité de notre analyse, on peut supposer que la métrique g ne dépend pas de z ; c'est le cas pour la forme normale graduée d'ordre 0 (voir plus bas). Ceci correspond à la situation *isopérimétrique*, i.e. il existe un champ de vecteurs Z identifié ici à $\frac{\partial}{\partial z}$ transverse en 0 à $D(0)$ et la métrique g ne dépend pas de z . On note g_R la métrique Riemannienne induite par g sur le plan (x, y) considéré comme l'espace quotient $\mathbb{R}^3/(\partial/\partial z)$.

Le système s'écrit :

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad \dot{z} = \frac{y^2}{2}u_1$$

et le Hamiltonien associé aux géodésiques normales est :

$$H_n(q, p) = \frac{1}{2}(u_1^2 a + u_2^2 c)$$

Les contrôles normaux sont :

$$u_1 = \frac{1}{a} (p_x + p_z y^2 / 2), \quad u_2 = \frac{p_y}{c}.$$

Les géodésiques normales sont, d'après le Principe du Maximum (théorème 1.3.3), solutions du système suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{1}{a}(p_x + p_z y^2/2) \\
\dot{y} &= \frac{p_y}{c} \\
\dot{z} &= \frac{y^2}{2a}(p_x + p_z y^2/2) \\
\dot{p}_x &= \frac{p_y^2 c_x}{2c^2} + \frac{(p_x + p_z y^2/2)^2}{2a^2} a_x \\
\dot{p}_y &= \frac{p_y^2 c_y}{2c^2} + \frac{(p_x + p_z y^2/2)^2}{2a^2} a_y - \frac{(p_x + p_z y^2/2)}{a} p_z y \\
\dot{p}_z &= 0
\end{aligned}$$

Introduisons les coordonnées de Poincaré : $P_i = \langle p, F_i(q) \rangle, i = 1, 2, 3$. Dans les coordonnées (q, P) les extrémales normales sont solutions des équations :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{P_1}{\sqrt{a}}, \quad \dot{y} = \frac{P_2}{\sqrt{c}}, \quad \dot{z} = \frac{y^2}{2} \frac{P_1}{\sqrt{a}} \\
\dot{P}_1 &= \frac{P_2}{\sqrt{a}\sqrt{c}}(yP_3 - \frac{a_y}{2\sqrt{a}}P_1 + \frac{c_x}{2\sqrt{c}}P_2) \\
\dot{P}_2 &= -\frac{P_1}{\sqrt{a}\sqrt{c}}(yP_3 - \frac{a_y}{2\sqrt{a}}P_1 + \frac{c_x}{2\sqrt{c}}P_2) \\
\dot{P}_3 &= 0
\end{aligned}$$

En paramétrant par la longueur $H_n = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) = \frac{1}{2}$ et en introduisant les coordonnées cylindriques :

$$P_1 = \cos \theta, \quad P_2 = \sin \theta, \quad P_3 = \lambda$$

on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{P_1}{\sqrt{a}}, \quad \dot{y} = \frac{P_2}{\sqrt{c}}, \quad \dot{z} = \frac{y^2}{2} \frac{P_1}{\sqrt{a}} \\
\dot{\theta} &= -\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{c}}(\lambda y - \frac{a_y}{2\sqrt{a}}P_1 + \frac{c_x}{2\sqrt{c}}P_2)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Les variables x, y, z sont graduées en fonction de la règle de [12] avec les poids suivants : le poids de x, y est un et le poids de z est trois. Une forme normale graduée est, voir [6] :

- ordre -1 : $g = dx^2 + dy^2$ (cas plat).
- ordre 0 : $g = adx^2 + cdy^2$ avec $a = (1 + \alpha y)^2$ et $c = (1 + \beta x + \gamma y)^2$.

et à l'ordre 0 les équations (4.5) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\cos \theta}{1 + \alpha y}, \quad \dot{y} = \frac{\sin \theta}{1 + \beta x + \gamma y}, \quad \dot{z} = \frac{y^2}{2} \frac{\cos \theta}{1 + \alpha y} \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{(1 + \alpha y)(1 + \beta x + \gamma y)} (-\lambda y + \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) \end{aligned}$$

En introduisant le paramétrage $(1 + \alpha y)(1 + \beta x + \gamma y)d\tau = dt$, les équations se projettent dans le plan (y, θ) en :

$$\frac{dy}{d\tau} = (1 + \alpha y) \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = -\lambda y + \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta \quad (4.6)$$

et le système équivaut à :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \lambda \sin \theta + \alpha^2 \sin \theta \cos \theta - \alpha\beta \sin^2 \theta + \sqrt{\lambda}\beta \frac{d\theta}{d\tau} \cos \theta = 0 \quad (4.7)$$

Dans cette projection, la ligne anormale L s'identifie à $\theta = k\pi$. On a le résultat suivant, cf [6].

Lemme 4.4.1. *Il existe un ouvert $V \subset U$ contenant 0 tel que :*

1. *Si $\lambda = 0$, les géodésiques normales correspondantes dans V sont minimisantes et en particulier sans point conjugué.*
2. *Si $\lambda \neq 0$, les points conjugués des géodésiques normales correspondantes $q(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\theta_0 = \theta(0)$, sont solutions de :*

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \theta_0} - \frac{\partial y}{\partial \theta_0} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0$$

et les premiers points conjugués contenus dans V correspondent à $|\lambda| \geq M_V$ où $M_V \rightarrow +\infty$ quand le diamètre de V tend vers 0.

Cela conduit en particulier à la description d'un *premier secteur de la sphère de Martinet*.

Définition 4.4.1. Les géodésiques normales et strictes correspondant à $\lambda = 0$ forment le *secteur Riemannien* de la sphère sous-Riemannienne de Martinet. Si $\alpha \neq 0$, elles sont toutes strictes et forment l'équateur de la sphère $S(0, r)$ de Martinet (r assez petit).

Les élastiques d'Euler Ces élastiques sont l'outil géométrique pour comprendre la nature des géodésiques normales au voisinage de L . Pour $\lambda \neq 0$, on peut paramétrer les géodésiques par $s = \tau\sqrt{\lambda}$. Sans nuire à la généralité on peut supposer $\lambda > 0$ et l'équation (4.7) s'écrit en paramétrant par s :

$$\theta'' + \sin \theta + \frac{\alpha^2}{\lambda} \sin \theta \cos \theta - \frac{\alpha\beta}{\lambda} \sin^2 \theta + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \theta' \cos \theta = 0 \quad (4.8)$$

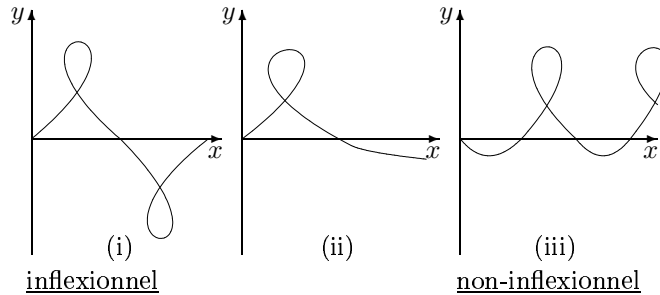


Figure 4.10:

Pour λ assez grand, l'équation précédente représente un *pendule perturbé*. Par ailleurs les projections des géodésiques dans le plan (x, y) sont proches des élastiques d'Euler et lorsque $\theta(0) \rightarrow \pm\pi$ ils prennent la forme représentée sur la figure 4.10.

Le cas (i) correspond aux trajectoires oscillantes du pendule, (iii) aux trajectoires en rotation, et le cas (ii) de transition correspond aux séparatrices. L'amplitude de l'oscillation de y est de l'ordre de $O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$.

Les points de coupure et les points conjugués ont été estimés dans le cas plat : $g = dx^2 + dy^2$, et l'on a (cf [6]) :

Proposition 4.4.2. *Dans le cas plat :*

1. *Le point de coupure d'une géodésique normale issue de 0 avec $\lambda \neq 0$ correspond à sa première intersection avec le plan de Martinet $y = 0$.*
2. *Le premier point conjugué d'une géodésique normale avec $\lambda \neq 0$, issue de 0, est compris strictement entre la première et la deuxième intersection avec le plan de Martinet.*
3. *La direction anormale est dans le lieu singulier de l'application exponentielle et est contenue dans l'adhérence du lieu conjugué $C(0)$.*

Lien avec le problème d'uniformité Pour construire au voisinage de $L = (\pm t, 0, 0)$ un champ central il faudrait pouvoir paramétrer les géodésiques normales par x , or ce n'est pas possible à cause des boucles des élastiques car \dot{x} change de signe, voir fig. 4.11. C'est bien la différence avec le cas Heisenberg où $\Delta = \text{Ker } \omega$, $\omega = ydx + xdy - dz$, $g = dx^2 + dy^2$, où les points conjugués s'accroissent le long de la direction caractéristique $\frac{\partial}{\partial z}$ mais où on peut paramétrer les géodésiques par z .

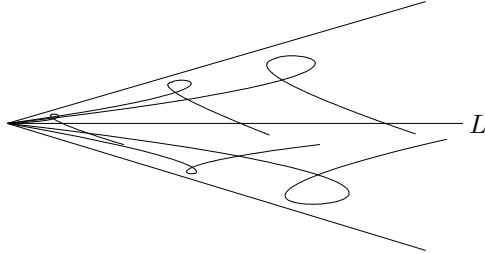


Figure 4.11:

4.4.2 Transcendance du secteur Martinet

Toute la transcendance du secteur au voisinage de la direction anormale est contenue dans l'équation du pendule (4.8). C'est un pendule perturbé par trois paramètres : α , β , γ (les paramètres de la métrique). Il s'agit donc de comprendre le rôle de chacun de ces paramètres. On a le lemme suivant :

Lemme 4.4.3. *L'anormale est stricte si et seulement si $\alpha = 0$.
Le pendule (4.8) est conservatif si et seulement si $\beta = 0$.*

Le paramètre γ peut en fait être absorbé par une reparamétrisation. Cependant l'étude asymptotique de la sphère dans le cas $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma \neq 0$ a fait l'objet d'un article ([17]).

On s'intéresse à la section de la sphère avec le plan $y = 0$ au voisinage du point anormal A , car ce plan, appelé *plan de Martinet*, contient la direction anormale. Pour construire cette section on considère toutes les géodésiques partant de 0 au temps 0, et on considère le premier temps auquel elles recoupent le plan $y = 0$. Dans le plan de phase du pendule (4.8), $y = 0$ se projette d'après les équations (4.6) sur la courbe :

$$\theta' = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \cos \theta - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \sin \theta \quad (4.9)$$

Les géodésiques reliant 0 aux points proches de A correspondent à des conditions initiales en θ proches de $-\pi$. On voit donc qu'on a construit, dans le plan de phase du pendule, une *application premier retour*. Sa transcendance est en fait directement liée à celle de la sphère. Analysons maintenant les différents cas.

1. Cas plat : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Dans ce cas l'équation du pendule se réduit à :

$$\theta'' + \sin \theta = 0$$

et la sphère peut être paramétrée par des *fonctions elliptiques*. On rappelle le paramétrage explicite des géodésiques normales, cf [6] :

Proposition 4.4.4. *Les géodésiques normales issues de 0 paramétrées par la longueur sont données par :*

- $\lambda \neq 0, u = K + t\sqrt{\lambda}$

$$x(t) = -t + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}(E(u) - E(K))$$

$$y(t) = -\frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{cn} u$$

$$z(t) = \frac{2}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \left((2k^2 - 1)(E(u) - E(K)) + k'^2 t\sqrt{\lambda} + 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \right)$$

où $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ et $E(u)$ sont les fonctions elliptiques de Jacobi, et $K, E(K)$ sont les intégrales complètes.

- $\lambda = 0$

$$x(t) = t \sin \phi, \quad y(t) = t \cos \phi$$

$$z(t) = \frac{t^3}{6} \sin \phi \cos^2 \phi \quad \text{où } \phi \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

et les courbes déduites des précédentes en utilisant les symétries $S_1 : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ et $S_2 : (x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$.

Chaque extrémale normale est minimisante jusqu'à son premier retour en $y = 0$, c'est-à-dire pour $t\sqrt{\lambda} \leq 2K$. Le premier temps conjugué vérifie $2K < t_{1c}\sqrt{\lambda} < 3K$, et plus précisément une simulation numérique montre que $\frac{t_{1c}\sqrt{\lambda}}{3K} \simeq 0.97$.

Le module k des fonctions de Jacobi est donné par : $k^2 = \frac{1-P_1(0)}{2}$. Lorsque $k \rightarrow 0$, $K(k) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, et lorsque $k'^2 = 1 - k^2 \rightarrow 0$, $K(k) \sim \ln \frac{1}{k'}$. La trace de la sphère dans le plan de Martinet $y = 0$ et pour $z \geq 0$ est représentée fig. 4.12 ; elle forme l'adhérence du lieu de partage. Le théorème de non propreté 4.2.3 ne s'applique pas ici dans le cas plat car la géodésique anormale n'est pas stricte, néanmoins l'application exponentielle n'est pas propre. Dans ce cas dégénéré, l'application exponentielle applique tout le bord du cylindre sur la direction anormale. Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, les points de coupure et les points conjugués s'accumulent le long de la direction anormale.

L'intersection de la sphère avec le plan $y = 0$, représentée sur la figure 4.12, est en fait symétrique par rapport à l'origine. Deux branches se ramifient sur le point $(-r, 0)$. L'une, située dans $z < 0$, est *semi-analytique* et admet le développement asymptotique suivant :

$$z = -\frac{2r^2}{3\pi^2}(x+r) + o(x+r)$$

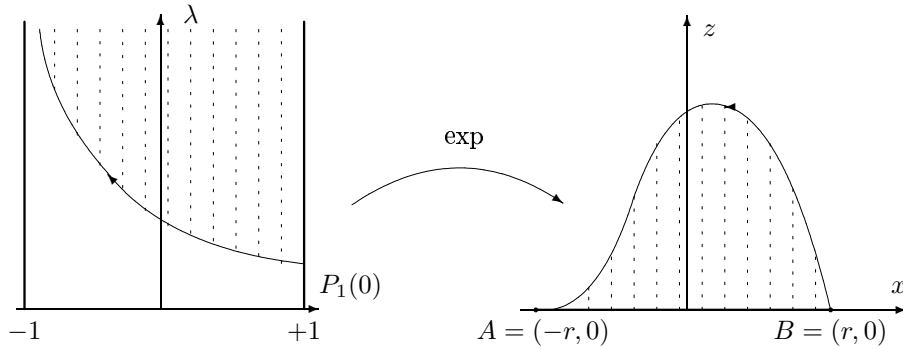


Figure 4.12:

L'autre, située dans $z > 0$, n'est pas sous-analytique, comme le montre son développement :

$$z = \frac{1}{6}(x+r)^3 - 4e^{-\frac{1}{x+r}}(x+r)^3 + o(e^{-\frac{1}{x+r}}(x+r)^3)$$

Remarque 4.4.1. Le cas Martinet plat se relève isométriquement sur le groupe d'Engel dont les géodésiques normales peuvent être uniformément paramétrées par la fonction elliptique de Weierstrass \mathcal{P} (voir [23], en appendice).

2. Cas intégrable : $\beta = 0$

Dans ce cas : $g = (1 + \alpha y)^2 dx^2 + (1 + \gamma y)^2 dy^2$. En fait, on peut généraliser cette situation à ce qu'on appelle le *cas général intégrable*, i.e. $g = a(y)dx^2 + c(y)dy^2$, où a et c sont des fonctions analytiques de y telles que $a(0) = c(0) = 1$. Dans ce cas, la métrique g ne dépend pas de x , et on peut utiliser les formules intégrales suivantes de [38] pour calculer x et z en fonction de y .

Soit $(x(t), y(t), z(t)), t \in [0, T]$ une géodésique normale partant de 0 ; supposons que la composante $y(t)$ oscille périodiquement avec la période \mathcal{P} . Appelons $0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$ les temps successifs tels que $y(t_i) = 0$. On définit :

$$\sigma = \begin{cases} \text{signe } \dot{y}(0) & \text{si } \dot{y}(0) \neq 0 \\ \text{signe } \ddot{y}(0) & \text{si } \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

et on pose :

$$y_+ = \max_{t \in [0, \mathcal{P}]} y(t) \quad , \quad y_- = \min_{t \in [0, \mathcal{P}]} y(t)$$

Si on paramétrise les géodésiques par y , on doit intégrer les équations :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{c} P_1}{\sqrt{a} P_2} \quad , \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y^2 \sqrt{c} P_1}{2 \sqrt{a} P_2} \quad , \quad dt = \frac{\sqrt{c}}{P_2} dy$$

où $P_2(y) = \sigma\sqrt{1 - P_1^2(y)}$ pour $t \in [0, t_1]$. On obtient ainsi des formules intégrales explicites. En particulier si $y(T) = 0$ pour $T = t_N$ on a :

- N impair

$$\begin{aligned} x(T) &= 2 \int_0^{y^\sigma} \sigma \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \frac{P_1(y)}{\sqrt{1 - P_1^2(y)}} dy + (N - 1) \int_{y_-}^{y_+} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \frac{P_1(y)}{\sqrt{1 - P_1^2(y)}} dy \\ z(T) &= \int_0^{y^\sigma} \sigma \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \frac{y^2 P_1(y)}{\sqrt{1 - P_1^2(y)}} dy + (N - 1) \int_{y_-}^{y_+} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{a}} \frac{y^2 P_1(y)}{\sqrt{1 - P_1^2(y)}} dy \end{aligned} \quad (4.10)$$

- N pair

$$\begin{aligned} x(T) &= N \int_{y_-}^{y_+} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \frac{P_1(y)}{\sqrt{1 - P_1^2(y)}} dy \\ z(T) &= N \int_{y_-}^{y_+} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{a}} \frac{y^2 P_1(y)}{\sqrt{1 - P_1^2(y)}} dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

et la période est donnée par :

$$\mathcal{P} = 2 \int_{y_-}^{y_+} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1 - P_1^2(y)}} dy. \quad (4.12)$$

Les fonctions intégrées ont des pôles simples lorsque $P_1(y) = \pm 1$, donc les intégrales sont bien définies.

On a la symétrie : $(x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$ et donc on peut supposer $\lambda \geq 0$. Une autre symétrie est : $(x, y, z, p_x, p_y, p_z, \alpha, \gamma) \mapsto (x, -y, z, p_x, -p_y, p_z, -\alpha, -\gamma)$. Par conséquent on peut supposer que $\alpha \geq 0$. D'autre part :

Lemme 4.4.5 ([22]). *Toute géodésique normale $(x(t), y(t), z(t))$ telle que y oscille périodiquement n'est plus minimisante après sa seconde intersection avec le plan $y = 0$.*

On est donc amené à définir :

Définition 4.4.2. Soit $(t, \theta(0), \lambda) \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une géodésique normale paramétrée par la longueur d'arc. Si $y \neq 0$, on peut définir les temps $0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$ correspondant à $y(t_i) = 0$. On définit l'application :

$$R_n : (\lambda, \theta(0)) \mapsto (x(t_n), z(t_n))$$

Ainsi la sphère est-elle contenue dans l'image de R_1 et R_2 . Notons c_i, d_i les courbes correspondant aux géodésiques dans le plan de phase du pendule, et C_i, D_i leurs images par R_i (voir figures 4.13 et 4.14). La contrainte $y = 0$ prend la forme $S : \frac{d\theta}{ds} = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \cos \theta$. Contrairement au cas plat on doit distinguer le cas $\theta(0) \in]-\pi, 0[$ où $\sigma = \text{signe } \dot{y}(0) = +1$ du cas $\theta(0) \in]0, \pi[$ où $\sigma = -1$. Lorsque $\sigma = +1$, on utilise le symbole '.

On doit estimer les branches $C_1, D_1, C'_1, D'_1, \bar{C}_1, \bar{C}'_1, C_2, D_2$ et \bar{C}_2 . Les résultats sont les suivants :

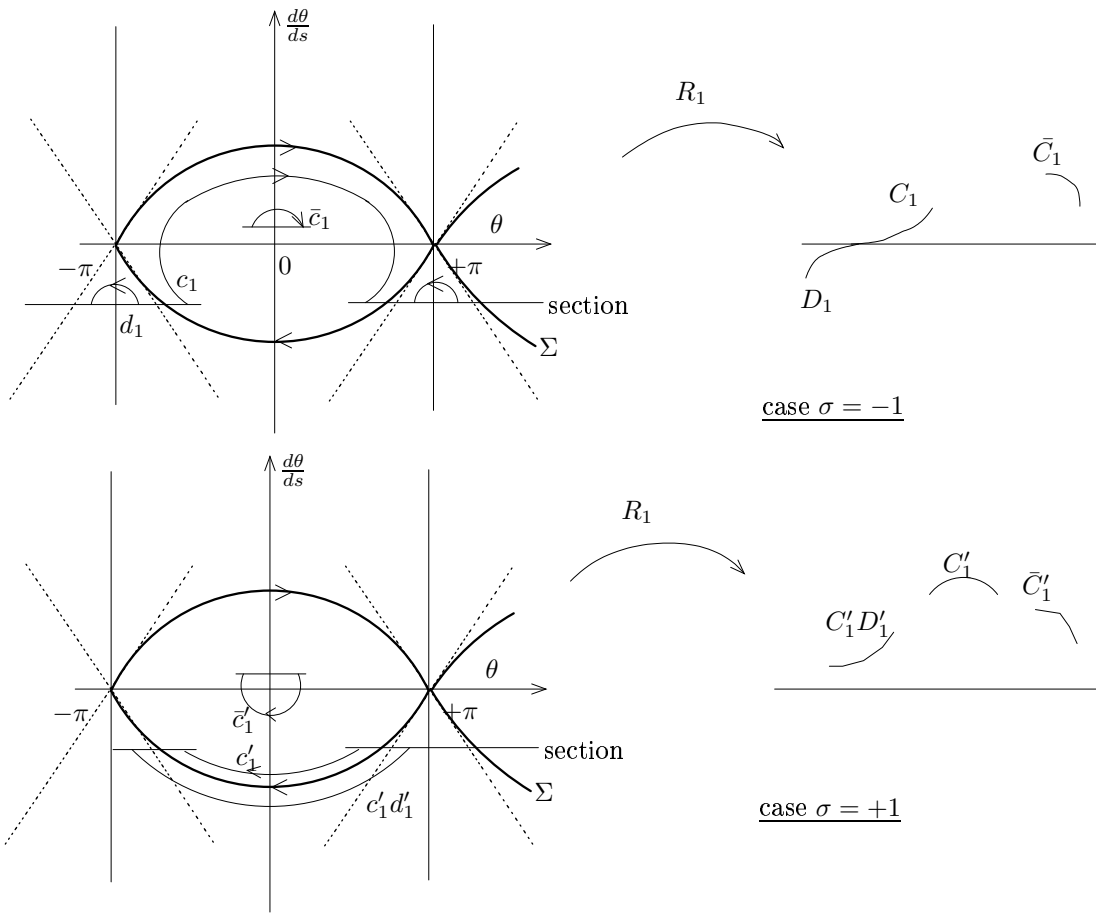


Figure 4.13:

Proposition 4.4.6 ([22]). *Si $\alpha \neq 0$, les branches $\bar{C}_1, \bar{C}'_1, C'_1 D'_1$ et \bar{C}_2 sont semi-analytiques et ne se ramifient pas sur la direction anormale. Les branches C_1, D_1, C_2 et D_2 se ramifient sur la direction anormale.*

On doit donc comparer les positions des branches C_1, D_1, C_2 et D_2 pour déterminer lesquelles sont dans la sphère.

Tous les calculs de [21], [22], sont en fait effectués dans le cas général intégrable où les coefficients a et c de la métrique sont des *fonctions analytiques* de y telles que :

$$a = 1 + 2\alpha y + \dots$$

$$c = 1 + 2\gamma y + \dots$$

Proposition 4.4.7 (Comparaison des branches C_1, C_2, D_2). [22] *Soit $X = \frac{x+r}{2r}$ et $Z = \frac{z}{r^3}$. On a les estimations suivantes :*

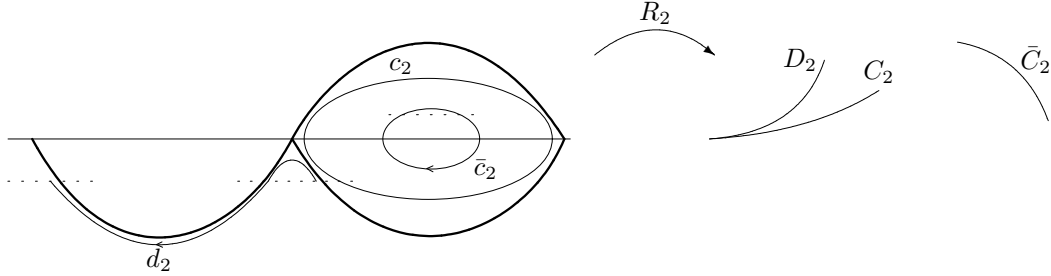


Figure 4.14: $\sigma = \pm 1$

- *branche C_1* : $Z = \frac{1}{6}X^3 + \left(\frac{r^2\alpha^2}{64} + \frac{\pi r}{32}(\alpha + \gamma)\right)X^4 + o(X^4)$
- *branche C_2* : $Z = \frac{1}{24}X^3 + o(X^3)$
- *branche D_2* : $Z = \frac{1}{6}X^3 + \left(\frac{r^2\alpha^2}{64} - \frac{\pi r}{32}(\alpha + \gamma)\right)X^4 + o(X^4)$

et par conséquent la *branche C_2* n'est jamais dans la sphère, et :

- *if $\gamma > -\alpha$, la *branche C_1* est dans la sphère.*
- *if $\gamma < -\alpha$, la *branche D_2* est dans la sphère.*

Remarque 4.4.2. En 0 la courbure de Gauss de la métrique Riemannienne $g_R = adx^2 + cdy^2$ est $K = \frac{\alpha(\alpha+\gamma)+\beta^2}{4}$. Si $\beta = 0$, elle se réduit à $\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{4}$. Donc la valeur critique $\alpha + \gamma = 0$ est reliée à $K = 0$.

En fait des calculs très précis conduisent au résultat suivant :

Théorème 4.4.8 ([21]). *Dans le cas général intégrable la sphère n'est pas sous-analytique.*

Remarque 4.4.3. Ce résultat ne peut pas être obtenu par un argument de perturbation du cas plat, car les coefficients des développements asymptotiques des branches ne sont pas continus par rapport aux coefficients de la métrique, voir [22] pour plus de détails.

La question essentielle est maintenant la suivante : dans quelle catégorie est la sphère ? La réponse précise est la suivante, et utilise l'algorithme 1.5.2 :

Proposition 4.4.9 ([21]). *Posons $X = \frac{x+r}{2r}$, $Z = \frac{z}{r^3}$. Les branches C_1 , D_2 et D_1 admettent les graphes suivants :*

- *branche C_1* : $Z = An(X, X \ln X, X \ln^2 X, X \ln^3 X, \frac{e^{-\frac{1}{X}}}{X^3}) = \frac{1}{6}X^3 + \dots$
où $An(\cdot)$ est un germe en 0 de fonction analytique. De plus la partie

analytique de $Z(X)$ est continue par rapport à r et aux coefficients de la métrique.

On a le même résultat pour D_2 .

- *branche D_1* : $Z = An(\sqrt{-X}, \sqrt{-X} \ln(-X), e^{-\frac{r\alpha}{2\sqrt{2}\sqrt{-X}}}) = \frac{-8}{r^2\alpha^2} X^2 + \dots$
De plus la partie analytique de $X(\sqrt{Z})$ est continue par rapport à r et aux coefficients de la métrique.

Corollaire 4.4.10 ([21]). *Dans le cas Martinet général intégrable la sphère est dans la catégorie log-exp.*

Le corollaire précédent donne donc une réponse à la question de transcendance. La proposition 4.4.9 donne de plus une *échelle précise de fonctions*.

3. Cas général : $\beta \neq 0$

Dans ce cas l'équation du pendule (4.7) n'est pas intégrable. Pour calculer un développement asymptotique des branches on peut utiliser des *intégrales premières formelles* près des points cols. Les techniques sont similaires à celles utilisées par [51] et d'autres pour calculer l'application retour de Poincaré au voisinage d'un polycycle pour une famille à un paramètre (X_ε) de champs de vecteurs. Ce calcul peut être réduit à l'évaluation de l'application de Poincaré au voisinage d'un col résonant :

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= \lambda_1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x'} + \lambda_2(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial y'} \\ r &= \frac{\lambda_1(\varepsilon)}{\lambda_2(\varepsilon)} \quad \lambda_1 \lambda_2 < 0 \\ r(0) &= -1 \quad r = -1 + \alpha_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

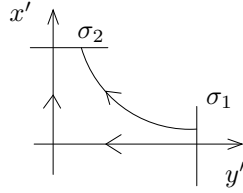
Dans cette méthode on utilise une forme normale pour laquelle :

- les séparatrices sont normalisées à : $x' = 0, y' = 0$.
- $X_\varepsilon \sim x' \frac{\partial}{\partial x'} - y' \frac{\partial}{\partial y'} - \left(\sum_{i=0}^N \alpha_{i+1}(\varepsilon) (x' y')^i \right) y' \frac{\partial}{\partial y'}$

à un changement de paramétrage du temps près, et dans un voisinage $U \times \mathcal{E}(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, avec $\mathcal{E}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, voir [51], [52] pour plus de détails.

Dans notre cas la méthode doit être adaptée. En effet ici la section dépend du paramètre et est imposée par le problème. En particulier la distance du point col à la section σ_ε tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans un premier temps, on calcule le contact de la branche D_1 avec la direction anormale. Dans ce cas le 1-jet de $(X_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ suffit pour calculer le premier terme du développement. Pour les termes suivants, le k-jet permet de déterminer les $N(k)$ premiers termes du développement, où $N(k)$ est un entier dépendant de k qui tend vers $+\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ (voir [52]). On obtient :



Proposition 4.4.11 ([22]). *Supposons que $a = (1 + \alpha y)^2$, $c = (1 + \beta x + \gamma y)^2$ avec $\alpha > 0$. Posons $X = \frac{x+r}{2r}$, $Z = \frac{z}{r^3}$. Alors au voisinage de $X = 0$ le graphe de la branche D_1 est une courbe de classe C^∞ dont le premier terme est :*

$$Z = \frac{-2}{r^2 \alpha^2} X^2 + o(X^2)$$

Remarque 4.4.4. Ce premier terme est d'ordre 2, ce qui est conforme au théorème 4.3.3 et au lemme 4.3.5.

La méthode précédente ne peut pas s'appliquer à l'étude des branches C_1 et D_2 , car dans le plan de phase du pendule ces branches ne sont pas localisées au voisinage d'un col (voir fig. 4.13, 4.14). Elles correspondent donc à un calcul *global* d'application premier retour. Cependant un examen approfondi du système (4.5) conduit à :

Lemme 4.4.12. *Le contact des branches C_1 et D_2 avec la direction anormale est :*

$$z = \left(\frac{1}{6} + O(r)\right) X^3 + o(X^3)$$

Notons que les contacts sont polynomiaux.

Comme précédemment on s'intéresse maintenant à la transcendance du secteur. En estimant le temps de retour sur la branche d_1 (voir figure 4.4.2), i.e. au voisinage d'un point col, et en utilisant le fait que, en gros, les multiplicateurs de Lagrange coïncident avec le gradient de la distance sous-Riemannienne, on montre (voir [60]) que la branche D_1 n'est pas sous-analytique. Par conséquent :

Théorème 4.4.13 ([60]). *Si $\alpha \neq 0$, i.e. si l'anormale est stricte, alors les sphères de Martinet de petit rayon ne sont pas sous-analytiques.*

Malheureusement on n'a pas de résultat analogue au corollaire 4.4.10. Il semble que la catégorie log-exp ne soit pas assez grande, à cause d'un phénomène de dissipation ($\beta \neq 0$). On conjecture :

Conjecture : Si $\beta \neq 0$ les sphères de Martinet ne sont pas log-exp.

En fait à cause de cette dissipation on ne peut pas espérer avoir des propriétés analytiques ; il faudrait donc étendre la catégorie log-exp à une catégorie plus grande dans laquelle on remplace l'analyticité par une propriété asymptotique.

Voilà pourquoi on peut s'intéresser à la *classe de fonctions* \mathcal{FC}^1 d'Il'Yashenko (voir [35]). En effet, le problème de Dulac de finitude des cycles limites a été résolu il y a quelques années indépendamment par Ecalte et Il'Yashenko ; dans sa preuve, Il'Yashenko construit une classe très large de fonctions non-oscillantes pour décrire les applications premier retour de Poincaré. Mais précisément dans notre problème on construit de telles applications dans le plan de phase du pendule, où la section est $y = 0$. La différence est que notre pendule dépend de paramètres ; donc notre problème est lié au problème de Dulac à paramètres, i.e. au 16^e problème de Hilbert, sur le cas particulier du pendule. Remarquons que l'on ne s'intéresse pas à la finitude des cycles limites, mais à cette catégorie de fonctions que construit Il'Yashenko pour décrire les applications premier retour.

Il faudrait donc construire une catégorie similaire à \mathcal{FC}^1 , mais avec des paramètres, i.e. une classe à plusieurs variables, dans laquelle on puisse développer un bon calcul différentiel. C'est en tout cas une piste de recherche possible pour tenter de résoudre le problème. Une telle catégorie serait très intéressante car le cas Martinet est un modèle que l'on peut immerger en dimension supérieure, le but ultime étant d'avoir une catégorie générale pour décrire les phénomènes anormaux en géométrie sous-Riemannienne.

Conclusion

Dans cette thèse on a donc d'abord étudié l'optimalité des anormales pour des systèmes affines mono-entrée avec contrainte sur le contrôle, d'abord pour le problème du temps optimal, puis pour un coût quelconque à temps final fixé ou non (chap. 2), généralisant ainsi les résultats de [19] et retrouvant des résultats de [9]. On a ensuite étendu cette théorie aux systèmes sous-Riemanniens de rang 2, en montrant qu'on se ramène à un système affine du type précédent, faisant ainsi le lien entre les travaux de [19] et [8]. Ces résultats montrent que, sous des conditions générales, une trajectoire anormale est *isolée* parmi toutes les solutions du système ayant les mêmes conditions aux limites, et donc *localement optimale*, jusqu'à un premier point dit *conjugué* que l'on peut caractériser.

On s'est ensuite intéressé (deuxième partie) au comportement asymptotique et à la régularité de la fonction valeur associée à un système affine analytique avec un coût quadratique. On a montré que, en l'absence d'anormale minimisante, la fonction valeur est *sous-analytique et continue*. En particulier ses ensembles de niveaux (généralisations des sphères sous-Riemanniennes) sont sous-analytiques. On dispose donc d'une "bonne" catégorie pour décrire ces objets ; en particulier ils sont stratifiables.

S'il existe une anormale minimisante, on sort de la catégorie sous-analytique en général, notamment en géométrie sous-Riemannienne. La présence d'une anormale minimisante est responsable de la *non-propreté* de l'application exponentielle, ce qui provoque un phénomène de *tangence* des ensembles de niveaux de la fonction valeur par rapport à la direction anormale. Dans le cas affine mono-entrée ou sous-Riemannien de rang 2, on a décrit précisément ce contact, et on en a déduit une partition de la sphère sous-Riemannienne au voisinage de l'anormale en deux secteurs appelés *secteur L^∞* et *secteur L^2* . Ces résultats donnent une idée du comportement qualitatif au voisinage d'une anormale minimisante.

La question de transcendance de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux a été abordée dans le cas sous-Riemannien de Martinet où on a montré les faits suivants : pour une métrique graduée d'ordre 0, les sphères de petit rayon *ne sont pas sous-analytiques*. Dans le cas général intégrable, les sphères de Martinet appartiennent à la *catégorie log-exp* ; c'est un résultat encourageant pour étudier les cas plus généraux. Mais dans le cas Martinet non intégrable on conjecture que cette catégorie est insuffisante. La représentation du problème dans le plan de phase d'un pendule à paramètres montre le lien avec le 16è problème de Hilbert, et on espère pouvoir appliquer une classe de fonctions similaire à celle introduite par Il'Yashenko pour résoudre le problème de Dulac de finitude des cycles limites ; c'est en tout cas une piste possible de recherche dans l'étude de la transcendance au voisinage d'une anormale.

Bibliography

- [1] *A. Agrachev*, Compactness for sub-Riemannian length minimizers and subanalyticity, *Rend. Semin. Mat. Torino*, Vol. 56, 1999.
- [2] *A. Agrachev*, Quadratic mappings in geometric control theory, *J. Soviet Math.*, Vol. 51, 2667-2734, 1990.
- [3] *A. Agrachev*, Any smooth simple H^1 -local length minimizer in the Carnot-Carathéodory space is a C^0 -local length minimizer, Preprint Dijon, 1996.
- [4] *A. Agrachev, El Alaoui, J. P. Gauthier* Sub-Riemannian metrics on \mathbb{R}^3 , *Canadian Math. Cont. Proc.*, Vol. 25, 29-76, 1998.
- [5] *A. Agrachev, El Alaoui, J. P. Gauthier, I. Kupka*, Generic singularities of sub-Riemannian metrics on \mathbb{R}^3 , C.R.A.S., Paris, 377-384, 1996.
- [6] *A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka*, Sub-Riemannian sphere in the Martinet flat case, *ESAIM/COCV*, Vol. 2, 377-448, 1997.
- [7] *A. Agrachev, J. P. Gauthier*, On subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances, à paraître aux *Annales de l'IHP*.
- [8] *A. Agrachev, A. V. Sarychev*, Strong minimality of abnormal geodesics for 2-distributions, *J. of Dynamical and Control Systems*, Vol. 1, No. 2, 1995.
- [9] *A. Agrachev, A. V. Sarychev*, Abnormal sub-Riemannian geodesics : Morse index and rigidity, *Annales de l'IHP*, 1996, Vol. 13, 635-690.
- [10] *A. Agrachev, A. V. Sarychev*, On abnormal extremals for Lagrange variational problems, *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, Vol. 8, No. 1, 1998, 87-118.
- [11] *A. Agrachev, A. V. Sarychev*, Sub-Riemannian metrics : minimality of abnormal geodesics versus subanalyticity, *ESAIM/COCV*, 1999, Vol. 4, 377-403.
- [12] *A. Bellaïche*, Tangent space in sub-Riemannian geometry, *Sub-Riemannian geometry*, Birkhäuser, 1996.
- [13] *G. A. Bliss*, *Lectures on the calculus of variations*, U. of Chicago Press, 1946.
- [14] *B. Bonnard, M. Chyba*, Méthodes géométriques et analytiques pour étudier l'application exponentielle, la sphère et le front d'onde en géométrie SR dans le cas Martinet, *ESAIM/COCV*, 1999.
- [15] *B. Bonnard, M. Chyba*, The role of singular trajectories in control theory, *Math. Monograph*, Springer-Verlag, à paraître.
- [16] *B. Bonnard, M. Chyba, H. Heutte*, Contrôle optimal géométrique appliqué, Preprint Labo. de Topologie, Dijon, 1995.
- [17] *B. Bonnard, M. Chyba, E. Trélat*, Sub-Riemannian geometry : one-parameter deformation of the Martinet flat case, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 4, No. 1, Janvier 1998, 59-76.

- [18] *B. Bonnard, H. Heutte*, La propriété de stricte anormalité est générique, Preprint Labo. de Topologie de Dijon, 1995.
- [19] *B. Bonnard, I. Kupka*, Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal, Forum Math. 5 (1993), 111-159.
- [20] *B. Bonnard, I. Kupka*, Generic properties of singular trajectories, Annales de l'IHP, Analyse non linéaire, Vol. 14, No. 2, 167-186, 1997.
- [21] *B. Bonnard, G. Launay, E. Trélat*, The transcendence we need to compute the sphere and wave front in Martinet SR-geometry, Proceed. Int. Confer. dedicated to Pontryagin, Moscow, 1999.
- [22] *B. Bonnard, E. Trélat*, On the role of abnormal minimizers in SR-geometry, Preprint Labo. Topologie Dijon, 1998 ; soumis aux Annales de Toulouse.
- [23] *B. Bonnard, E. Trélat*, Stratification du secteur anormal dans la sphère de Martinet de petit rayon, Proceedings du NCN, A. Isidori, F. Lamnabhi Lagarrigue, W. Respondek (Eds), Nonlinear Control in the Year 2000.
- [24] *H. Brezis*, Analyse fonctionnelle, Masson, 1993.
- [25] *P. Brunovsky*, Existence of Regular Synthesis for General Control Problems, J. of Differential Equations, 38, 317-343, 1980.
- [26] *R. L. Bryant, L. Hsu*, Rigidity of integral curves of rank 2 distributions, Invent. math. 114, 1993, 435-461.
- [27] *W.-L. Chow*, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann., 1940-41, Vol. 117, Berlin.
- [28] *L. van den Dries, A. Macintyre, D. Marker*, The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation, Ann. of Math., Vol. 140, 1994, 183-205.
- [29] *L. van den Dries, C. Miller*, Geometric categories and o-minimal structures, Duke Math. Journal, Vol. 84, No. 2, 1996.
- [30] *A. F. Filippov*, On certain questions in the theory of optimal control, Vestnik Moskov. Univ., Ser. Matem., Mekhan., Astron., Vol. 2, 1959.
- [31] *A. Gabrielov*, Projections of semi-analytic sets, Funct. An. Appl., 2, 1968.
- [32] *M. Gromov*, Carnot-Caratheodory spaces seen from within, Sub-Riemannian geometry, Birkhäuser, 85-318, 1996.
- [33] *R. M. Hardt*, Stratification of real analytic mappings and images, Invent. Math., 28, 1975.
- [34] *H. Hironaka*, Subanalytic sets, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Y. Akizuki, Tokyo, 1973.
- [35] *Yu.S. Il'yashenko*, Finiteness theorems for limit cycles, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 94, 1991.
- [36] *S. Jacquet*, Subanalyticity of the sub-Riemannian distance, J. of Dynamical and Control Systems, Vol. 5, No. 3, 1999, 303-328.
- [37] *A. J. Krener*, The higher order maximal principle and its applications to singular extremals, SIAM J. on Control and Opt., Vol. 15, 256-293, 1977.
- [38] *I. Kupka*, Abnormal extremals, Preprint, 1992.
- [39] *I. Kupka*, Géométrie sous-Riemannienne, Séminaire Bourbaki, 1996.
- [40] *E. B. Lee, L. Markus*, Foundations of optimal control theory, John Wiley, New York, 1967.
- [41] *C. Lesiak, A. J. Krener*, The existence and Uniqueness of Volterra Series for Nonlinear Systems, IEEE Transactions on Aut. Cont., Vol. 23, No. 6, 1978.

- [42] *J. M. Lion, J. P. Rolin*, Théorèmes de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles, *Ann. Inst. Fourier*, 47, 3, 859-884, 1997.
- [43] *W. S. Liu, H. J. Sussmann*, Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions, *Memoirs AMS*, No. 564, Vol. 118, 1995.
- [44] *S. Lojasiewicz (Jr.), H. J. Sussmann*, Some examples of reachable sets and optimal cost functions that fail to be subanalytic, *SIAM J. on Control and Opt.*, Vol. 23, No. 4, 584-598, 1985.
- [45] *R. Montgomery*, Geodesics which do not satisfy geodesic equations, PrePrint, 1991.
- [46] *R. Montgomery*, Abnormal minimizers, *SIAM J. on Control and Opt.*, Vol. 32, No. 6, 1605-1620, 1994.
- [47] *A. Mourtada, R. Moussu*, Applications de Dulac et applications pfaffiennes, *Bulletin SMF*, 125, 1-13, 1997.
- [48] *R. Moussu, A. Roche*, Théorie de Khovanski et problème de Dulac, *Inv. Math.*, 105, 431-441, 1991.
- [49] *M. A. Naimark*, Linear differential operators, Frederick U. Pub. Co, 1967.
- [50] *L. Pontryagin et al.*, Théorie mathématique des processus optimaux, Eds Mir, Moscou, 1974.
- [51] *R. Roussarie*, Bifurcations of planar vector fields and Hilbert's 16th problem, Birkhäuser, Berlin, 1998.
- [52] *R. Roussarie*, On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields, *Bol. Soc. Br. Mat.*, Vol. 17, No. 2, 1986.
- [53] *A. V. Sarychev*, The index of the second variation of a control system, *Math. USSR Sbornik*, 1982, Vol. 41, No. 3.
- [54] *A. V. Sarychev*, First- and second-order integral functionals of the calculus of variations which exhibit the Lavrentiev phenomenon, *J. of Dynamical and Control Systems*, Vol. 3, No. 4, 1997, 565-588.
- [55] *E. D. Sontag*, Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems, Springer-Verlag, 1990.
- [56] *H. J. Sussmann*, Regular Synthesis for Time-Optimal Control of Single-Input Real Analytic Systems in the Plane, *SIAM J. Cont. and Opt.*, 25-5, 1987.
- [57] *M. Tamm*, Subanalytic sets in the calculus of variation, *Acta Math.* 146, 1981.
- [58] *E. Trélat*, Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost, *J. of Dynamical and Control Systems*, Vol. 6, No. 4, Oct. 2000, pp 511-541.
- [59] *E. Trélat*, Optimality of singular trajectories and asymptotics of accessibility sets, Preprint Labo. de Topologie, Dijon, Oct. 2000 ; soumis à ESAIM/COCV.
- [60] *E. Trélat*, Non subanalyticity of sub-Riemannian Martinet spheres, Preprint Labo. de Topologie, Dijon, Nov. 2000 ; soumis aux CRAS.
- [61] *A. J. Wilkie*, A general theorem of the complement and some new o-minimal structures, *Selecta Math.*, Vol. 5, 1999, 397-421.
- [62] *I. Zelenko, M. Zhitomirski*, Rigid paths of generic 2-distributions on 3-manifolds, *Duke Math. Journal*, Vol. 79, No. 2, 281-307, 1995.
- [63] *M. Zhitomirski*, Typical singularities of differential 1-forms and pfaffian equations, *Trans. of Math. Monographs*, Vol. 113, AMS, 1992.
- [64] *Zhong Ge*, Horizontal path space and Carnot-Caratheodory metric, *Pacific J. Math.*, 1993, Vol. 161, 255-286.