Anneaux de séries formelles à croissance contrôlée

Augustin Mouze

Numéro d'ordre : 2740

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

présentée pour obtenir
le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
discipline : Mathématiques

par

Augustin MOUZE

Anneaux de séries formelles à croissance contrôlée.

soutenue le 21 juin 2000 devant la commission d'examen

Directeur :	Mme Anne-Marie CHOLLET	Université Lille I
Rapporteurs :	M. Jacques CHAUMAT	Université Paris XI
	M. Robert MOUSSU	Université de Bourgogne
Président :	M. Jose-Manuel AROCA	Université de Valladolid, Espagne
Membres :	M. Arkadiusz PŁOSKI	Université de Kielce, Pologne
	M. Vincent THILLIEZ	Université Lille I
Invité :	M. Jean-Claude GENTINA	École Centrale Lille

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à exprimer ma profonde reconnaissance à Anne-Marie Chollet, qui a dirigé cette thèse avec une grande compétence. Elle m'a initié à la recherche et m'a fait partager sa passion des mathématiques. Son soutien, sa disponibilité et sa gentillesse sont autant de facteurs qui ont contribué à l'élaboration de ce travail. Je remercie vivement Madame Chollet pour son attention de tous les jours. Ce travail lui doit beaucoup et je lui dois beaucoup.

Je remercie aussi MM. Jacques Chaumat et Robert Moussu d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. J'ai pu, en particulier, avoir de nombreux échanges mathématiques avec Jacques Chaumat. Ses remarques, ses questions et ses suggestions ont à chaque fois apporté un regard nouveau sur les problèmes abordés et m'ont permis de mûrir ma réflexion. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie aussi Vincent Thilliez d'examiner ce travail. Il a toujours été très disponible pour répondre à mes questions ou pour me faire part de ses remarques. C'est avec grand plaisir que je le cotoie quotidiennement à l'Université Lille I.

Jose-Manuel Aroca a accepté d'examiner cette thèse et de participer au jury. J'en suis très honoré et je l'en remercie.

Je ne pouvais soutenir cette thèse sans la présence d'Arkadiusz Płoski, qui m'a accueilli en novembre 1999 en Pologne, et avec qui j'ai eu des échanges mathématiques fructueux. De plus, sa gentillesse à mon égard m'a beaucoup touché.

Enfin, Jean-Claude Gentina a accepté de participer à ce jury et j'en suis très honoré. C'est à chaque fois avec plaisir que je le rencontre.

Je tiens également à remercier Edward Bierstone avec qui j'ai eu l'occasion de parler de mes mathématiques lors de ses venues à Lille. Il m'a accordé de nombreuses discussions, toujours bénéfiques, et pleines de gentillesse.

Je remercie aussi l'ensemble du personnel du laboratoire de mathématiques au sein duquel j'ai préparé cette thèse, et, plus particulièrement, les membres de l'équipe d'analyse complexe et les doctorants.

Enfin, j'associe à ce travail tous mes proches, celle qui me supporte tous les jours et mes parents, grâce auxquels j'ai pu faire des études dans de bonnes conditions.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction. Classes de séries formelles à croissance contrôlée.

Ce travail a pour but l'étude de sous-anneaux de séries formelles définis par des conditions de croissance sur les coefficients. Ces séries apparaissent, par exemple, lorsque l'on étudie les solutions formelles d'équations différentielles à coefficients polynômiaux [Mai]. Plus précisément, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit $X = (X_1, \ldots, X_s)$ des indéterminées. On connaît bien $\mathbb{K}[[X]]$, l'anneau des séries formelles à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}\{X\}$, l'anneau des séries convergentes. On a l'inclusion triviale $\mathbb{K}\{X\} \subset \mathbb{K}[[X]]$. L'idée est d'introduire une classe d'anneaux intermédiaires. Pour cela, on considère $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que

$$(H_1) \qquad M_0 = 1 \text{ et } \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est logarithmiquement convexe.}$$

Soit C_0 une constante strictement positive. Pour tout $f \in \mathbb{K}[[X]]$, on écrit $f = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} f_J X^J$, avec les notations habituelles $J = (j_1, \ldots, j_s)$, $X^J = X_1^{j_1} \ldots X_s^{j_s}$ et $|J| = j_1 + \ldots + j_s$. On pose

$$||f||_{C_0,M} = \sup_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=j}} \frac{|f_J|}{C_0^j M_j}.$$

Il est facile de vérifier que $||.||_{C_0,M}$ est une norme sur l'espace $\mathbb{K}[[X]](M, C_0)$ défini par

$$\mathbb{K}[[X]](M, C_0) = \Big\{ f \in \mathbb{K}[[X]],\ f = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} f_J X^J; ||f||_{C_0,M} < \infty \Big\}.$$

On note enfin

$$\mathbb{K}[[X]](M) = \bigcup_{C_0>0} \mathbb{K}[[X]](M, C_0).$$

La condition (H_1) sur la suite M assure la stabilité par produit de $\mathbb{K}[[X]](M)$. C'est donc un anneau. Pour rappeler qu'il est défini par des conditions de croissance sur les coefficients, on dit que $\mathbb{K}[[X]](M)$ est un anneau de séries formelles à croissance contrôlée. On a l'inclusion $\mathbb{K}\{X\} \subset \mathbb{K}[[X]](M) \subset \mathbb{K}[[X]]$. Des exemples de tels anneaux sont donnés par les séries formelles à croissance Gevrey ($M_n = n!^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$). Si l'on a $M_n = 1$ pour tout entier n, on note $M = \mathbf{1}$ et $\mathbb{K}[[X]](\mathbf{1})$ n'est autre que $\mathbb{K}\{X\}$, l'anneau des séries convergentes. La suite M mesure, en quelque sorte, le "défaut d'analyticité" des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$. De plus $\mathbb{K}[[X]](M)$ est stable par inversion (voir II, 3.2.1), ce qui permet d'affirmer que $\mathbb{K}[[X]](M)$ est un anneau local ayant pour idéal maximal l'ensemble des séries formelles de $\mathbb{K}[[X]](M)$ sans terme constant.

La condition (H_1) équivaut à la croissance de la suite $\{M_{n+1}/M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et entraîne

$$(C_1) \qquad M_j M_k \leq M_{j+k}, \text{ pour tous } j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},$$

$$(C_2) \qquad (M_n)^{1/n} \leq M_{n+1}/M_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

L'étude de $\mathbb{K}[[X]](M)$ amène, parfois, à faire des hypothèses supplémentaires sur la suite M. Ce sont les conditions (H_2) et (H_3), que l'on imposera selon les cas envisagés.

$$(H_2) \qquad \text{il existe } C \geq 1 \text{ tel que } M_{n+1} \leq C^{n+1} M_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$(H_3) \qquad \text{il existe } C \geq 1 \text{ tel que } M_n \leq C^n M_{n-j} M_j, \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n.$$

L'hypothèse (H_2) est la condition de stabilité par dérivation. Elle assure simplement, pour tout $i = 1, \dots, s$, et tout f de $\mathbb{K}[[X]](M)$, l'appartenance de $\dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ à $\mathbb{K}[[X]](M)$. C'est une hypothèse assez naturelle. L'hypothèse (H_3), qui implique (H_2), est une condition dite de croissance modérée de la suite M; elle équivaut à

$$(C_3) \qquad \text{il existe } C \geq 1 \text{ tel que } M_{n+1}/M_n \leq C (M_n)^{1/n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Tout anneau de séries formelles défini par une suite à croissance modérée est contenu dans un anneau de séries formelles à croissance Gevrey (voir [CC4], remarque 32b, et aussi I, 3.1).

On utilisera, selon la situation, une famille de normes un peu différente sur $\mathbb{K}[[X]]$. Soit $r = (r_1, \dots, r_s)$ un poly-rayon de $\mathbb{R}_+^{*s}$. On pose

$$||f||_r^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J| = j}} \frac{|f_J|}{M_j} r^J,$$

$$\mathbb{K}[[X]](M, r) = \left\{ f \in \mathbb{K}[[X]],\ f = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} f_J X^J ; ||f||_r^{(M)} < \infty \right\}$$

et on a

$$\mathbb{K}[[X]](M) = \bigcup_r \mathbb{K}[[X]](M, r).$$

Ce point de vue est évidemment équivalent au précédent (voir I, 3.3). De plus, l'espace $\mathbb{K}[[X]](M, r)$ muni de la norme $||.||_r^{(M)}$ est une algèbre de Banach (voir II, 1.1.1).

Ce travail comporte trois parties et des annexes. Dans la première partie, on s'intéresse à des problèmes de composition. On montre, tout d'abord, sous l'hypothèse (H_1), que, si $F = (F_1, \dots, F_s)$ appartient à $(\mathbb{K}[[X]](M))^s$ et $\mathcal{A}$ appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$, alors $\mathcal{A} \circ F$ appartient encore à $\mathbb{K}[[X]](M)$. C'est la proposition [I, 1.8]. On obtient ainsi la stabilité par composition de l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$. Ce résultat ne surprendra pas les familiers du sujet. On l'a détaillé ici car il met en évidence l'intérêt de la méthode, dite de "la double constante", empruntée à M. Derridj et D. S. Tartakoff [DT] et largement utilisée par V. Thilliez [Th]. Dans le deuxième paragraphe, on étudie une réciproque. Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), on se propose d'établir une réponse à la question suivante : si $\mathcal{A} \circ F$ appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$ et si F appartient à $\Big(\mathbb{K}[[X]](M)\Big)^s$, que peut-on dire de $\mathcal{A}$? Pour cela, on suppose que le jacobien de F, noté Φ, est non nul dans $\mathbb{K}[[X]]$. En effet, P. M. Eakin et G. M. Harris ont obtenu le résultat suivant [EH].

THÉORÈME [EH]

Soit F une application analytique de $\mathbb{K}^s$ dans $\mathbb{K}^s$, définie au voisinage de 0, vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Φ *est non identiquement nul,*

(ii) *pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{K}[[X]]$, si $\mathcal{A} \circ F$ est analytique, alors $\mathcal{A}$ est analytique.*

Dans le cas où F est une application analytique de $\mathbb{K}^s$ dans $\mathbb{K}^p$, avec $p < s$, des théorèmes comparables ont été donnés par R. Moussu et J. C. Tougeron dans [MT]. Comme le signalent P. M. Eakin et G. A. Harris, leur résultat [EH] peut être vu comme une conséquence d'un théorème très général de A. M. Gabrielov [Ga]. J. Chaumat et A-M. Chollet ont obtenu des résultats analogues [CC1] dans le cas où F est analytique et $\mathcal{A}$ une série formelle à croissance contrôlée. De plus, les preuves de [CC1] permettent, dans le cas où $\mathcal{A}$ et F sont analytiques, un contrôle du rayon de convergence de $\mathcal{A}$ par celui de $\mathcal{A} \circ F$. Pour tout entier k, on note $M^{(k)}$ la suite $\{M_{kn}\}_{n \in \mathbf{N}}$. On a alors l'énoncé suivant.

THÉORÈME [CC1]

Soit F une application analytique de $\mathbb{K}^s$ dans $\mathbb{K}^s$, définie au voisinage de 0, vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ. Soit M une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Soit C_0 une constante strictement positive. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Φ *est non identiquement nul,*

(ii) *il existe D_0, $D_0 > 0$ et d un entier, $d \geq 1$, tels que pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{K}[[X]]$, on ait $||\mathcal{A}||_{D_0, M^{(d)}} \leq ||\mathcal{A} \circ F||_{C_0, M}$.*

Dans ce travail, on généralise ce résultat au cas où l'application F est une application formelle à croissance contrôlée. Pour établir (i) implique (ii), la méthode utilisée s'inspire des travaux de J. Chaumat et A.-M. Chollet [CC1] et de V. Thilliez [Th]. Cependant, comme ici l'application F n'est plus analytique, on évite le recours aux formules de Cauchy, largement utilisées dans [CC1]. Pour établir la réciproque, on suit la démarche présentée dans [EH]. On a alors le théorème [I, 3.8] suivant.

Soient M une suite vérifiant (H_1) et N vérifiant (H_1) et (H_2). On suppose qu'il existe une constante $D \geq 1$ telle que, pour tout entier n, on ait $N_n \leq D^n M_n$. On suppose aussi que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions (a) ou (b) suivantes.

(a) $\qquad M$ *vérifie* (H_3).

(b) $\qquad$ *il existe* D' *et* $\epsilon > 0$ *tel que* $N_h^{1+\epsilon} \leq {D'}^h M_h$ *pour tout entier* h.

Soit $F = (F_1, \ldots, F_s)$ une application de $(\mathbb{K}[[X]](N))^s$ de jacobien Φ telle que $F(0) = 0$. Soit C_0 une constante strictement positive. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\qquad \Phi$ *est non nul dans* $\mathbb{K}[[X]]$,

(ii) $\qquad$ *il existe* $C', C' > 0$ *et* d *entier,* $d \geq 1$, *tels que pour tout* $\mathcal{A} \in \mathbb{K}[[X]]$, *on ait* $||\mathcal{A}||_{C', M^{(d)}} \leq ||\mathcal{A} \circ F||_{C_0, M}$.

Les conditions (a) ou (b) n'interviennent que dans la réciproque. La condition $N_n \leq D^n M_n$ revient à dire que l'on a $\mathbb{K}[[X]](N) \subset \mathbb{K}[[X]](M)$.

Dans la deuxième partie, on suppose que la suite M vérifie seulement les conditions (H_1) et (H_2). On se propose d'établir des propriétés algébriques de l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$. On commence par prouver un théorème de division du type Weierstrass par plusieurs séries. Dans l'anneau des séries convergentes, on rappelle le théorème classique de division de Weierstrass.

THÉORÈME (de division de Weierstrass)

Soit f dans $\mathbb{K}\{X\}$. On suppose que f est régulière d'ordre p en X_s, c'est à dire $f(0, \ldots, 0, X_s) = X_s^p c(X_s)$, avec $c(0) \neq 0$. Alors, pour tout g dans $\mathbb{K}\{X\}$, il existe q et r uniques dans $\mathbb{K}\{X\}$ tels que

$$g(X) = q(X) f(X) + r(X) \text{ avec } r(X) = \sum_{j=0}^{p-1} r_j(X_1, \ldots, X_{s-1}) X_s^j.$$

On a le même énoncé dans $\mathbb{K}[[X]]$. Pour des preuves, on peut consulter les livres de H. Grauert et R. Remmert [GR], de B. Malgrange [Mal] ou J. C. Tougeron [To], par exemple. En revanche, l'énoncé analogue dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ est faux. On pourra se référer aux exemples donnés par J. Chaumat et A.-M. Chollet [CC2] et par M. A. Zurro [Z2] ou à l'exemple figurant ici dans [II, 3.5].

Cependant, une version du théorème de préparation de Weierstrass et de division par une série, dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, a été donnée par J. Chaumat et A-M. Chollet [CC2]. Son énoncé fait appel à une notion de p-régularité plus restrictive que la notion de régularité d'ordre p classique dans $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\{X\}$. Les auteurs en déduisent que, sous l'hypothèse (H_1), la condition (H_2) est nécessaire et suffisante pour que l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ soit noetherien.

Dans cette partie, en généralisant à plusieurs séries la notion de p-régularité, on établit un théorème de division dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ au sens d'Hironaka. C'est une conséquence du théorème [II, 2.2]. Pour cela, on adapte une preuve, donnée par J. Briançon, d'un théorème de division dans $\mathbb{K}\{X\}$, par perturbation d'un épimorphisme [Br].

Soient $E_1, \ldots, E_p$ des multi-indices de $\mathbb{N}^s$. On note $\Delta = \bigcup_{i=1}^{p}(E_i + \mathbb{N}^s)$. On choisit alors une partition $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_p$ de Δ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, p$, on ait $\Delta_i \subset E_i + \mathbb{N}^s$. On dit alors que l'on a effectué une partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i, $i = 1, \ldots, p$. Pour toute série formelle $f(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} f_J X^J$, on note $\mathrm{Exp}_X(f) = \{J \in \mathbb{N}^s \; ; \; f_J \neq 0\}$. On obtient, en particulier, le théorème [II, 2.4].

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Soient L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^s$ à coefficients strictement positifs et $E_1, \ldots, E_p$ des multi-indices de $\mathbb{N}^s$ tels que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ soit $(E_1, \ldots, E_p; L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X]]$, c'est à dire tels que, si on note $f_i(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (f_i)_J X^J$, pour tout $1 \leq i \leq p$, on ait

$$(f_i)_J = 0 \text{ si } |J| < |E_i|,\ (f_i)_{E_i} \neq 0 \text{ et } (f_i)_J = 0 \text{ si } L(J) \leq L(E_i) \text{ et } J \neq E_i.$$

Alors, pour tout élément g de $\mathbb{K}[[X]](M)$, il existe des séries $g_1, \ldots, g_p, h$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$ telles que l'on ait

$$(i) \qquad g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h,$$

avec, en notant $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$, la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i,

$$(ii) \qquad Exp_X(g_i(X) X^{E_i}) \subset \Delta_i,\ i = 1, \ldots, p,$$

$$(iii) \qquad h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s; \\ |B| = b}} h_B X^B \text{ avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta.$$

De plus, si $(g_1', \ldots, g_p'; h')$ vérifie (i), (ii) et (iii), alors, on a $h' = h$ et $g_i' = g_i$ pour $i = 1, \ldots, p$.

La condition sur la forme linéaire L n'est pas restrictive. Ce point est expliqué en [II, 2]. Dans le cas d'une seule série, on retrouve les résultats de [CC2]. Ce sont les théorèmes [II, 3.1] et [II, 3.2]. Dans le cas où $M_n = n!^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on améliore un théorème de M. A. Zurro [Z2]. En effet, on peut rapprocher cet énoncé du résultat suivant.

THÉORÈME [Z2]

Soit $M_n = n!^\alpha$. *Soient* $f_1, \ldots, f_p$ *des éléments de* $\mathbb{K}[[X]](M)$. *On suppose que, pour tout* $i = 1, \ldots, p$, *il existe un multi-indice* E_i *de* $\mathbb{N}^s$ *tel que, si on note* $f_i(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (f_i)_J X^J$, *on ait*

$$(f_i)_J = 0 \text{ si } |J| \leq |E_i|,\ J \neq E_i \text{ et } (f_i)_{E_i} \neq 0.$$

Soit $M'_n = n!^{s\alpha}$. *Alors, pour tout élément* g *de* $\mathbb{K}[[X]](M)$, *il existe des séries* $g_1, \ldots, g_p, h$ *de* $\mathbb{K}[[X]](M')$ *telles que l'on ait*

$$(i) \qquad g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h,$$

avec, en notant $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$, *la partition de* $\mathbb{N}^s$ *associée aux* E_i,

$$(ii) \qquad Exp_X(g_i(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i,\ i = 1, \ldots, p,$$

$$(iii) \qquad h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s; \\ |B| = b}} h_B X^B \text{ avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta.$$

De plus, si $(g'_1, \ldots, g'_p; h')$ *vérifie* (i), (ii) *et* (iii), *alors, on a* $h' = h$ *et* $g'_i = g_i$ *pour* $i = 1, \ldots, p$.

Ici, la forme linéaire considérée est $L = (1, \ldots, 1)$. Il s'agit d'un cas particulier du théorème 4.2 de [Z2] ; l'énoncé général de ce théorème peut aussi être comparé au théorème [II, 2.2]. On observera la perte de régularité (passage de M à M') que [II, 2.4] supprime.

Dans la suite, on utilise le théorème [II, 2.4], ainsi que le théorème de division formelle tel qu'il figure dans le mémoire de J. M. Aroca, H. Hironaka et J. L. Vicente [AHV], pour étudier le problème suivant. Étant donné $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$, peut-on associer, à toute série de $\mathbb{K}[[X]](M)$, un reste unique, dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, modulo cet idéal ? Le corollaire [II, 4.9] du théorème [II, 4.8] apporte une réponse affirmative à cette question. Pour cela, on construit une famille génératrice de $\mathcal{I}$ en s'inspirant de la recherche des bases de Groebner d'un idéal polynômial [CLO]. On déduit alors du théorème [II, 4.8] une nouvelle preuve de la noetherianité de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On obtient également, comme conséquence, le théorème [II, 4.11] suivant, sur les relations dans $\mathbb{K}[[X]](M)$.

Soient $f_1, \ldots, f_p$ *des éléments de* $\mathbb{K}[[X]](M)$. *On note* $\mathcal{I}$ *l'idéal engendré par ces éléments sur* $\mathbb{K}[[X]]$ *et* $\mathcal{I}_M$ *l'idéal engendré par ces éléments sur* $\mathbb{K}[[X]](M)$. *Alors* $\mathcal{I}_M = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[[X]](M)$.

La méthode développée permet enfin d'établir l'analogue d'un théorème de préparation de Malgrange [Mal] dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. C'est le théorème [II, 5.2].

Soient $F_1, \ldots, F_k$ *des éléments de* $\mathbb{K}[[X]](M)$. *On note* $\mathcal{I}_M$ *l'idéal engendré par ces éléments dans* $\mathbb{K}[[X]](M)$. *On suppose que la dimension de l'espace vectoriel* $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$, *notée μ, est finie et non nulle. Soient $e_1, \ldots, e_\mu$ des monômes telles que leurs classes d'équivalence dans $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$. Alors, pour tout élément $g(X)$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$, il existe des séries $R_i(u_1, \ldots, u_k)$, avec $1 \leq i \leq \mu$, de $\mathbb{K}[[u_1, \ldots, u_k]](M^{(\mu)})$, telles que l'on ait*

$$g(X) = \sum_{i=1}^{\mu} R_i(F_1, \ldots, F_k)e_i(X).$$

Dans le cas des fonctions ultradifférentiables, des résultats semblables ont été donnés par J. Chaumat et A.-M. Chollet [CC3]. On montre, enfin, que, quitte à bien choisir des générateurs $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ de l'idéal $\mathcal{I}_M$, on a, pour tout g de $\mathbb{K}[[X]](M)$, une décomposition

$$g(X) = \sum_{i=1}^{\mu} S_i(\Phi_1, \ldots, \Phi_p)e_i(X),$$

avec, pour tout $i = 1, \ldots, p$, l'appartennance de $S_i(\Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ à $\mathbb{K}[[X]](M)$. C'est le théorème [II, 5.3].

Dans cette partie, on retrouve en [II, 3.4] le fait que l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est hensélien [Z1]. Pour cela, on suit une démonstration classique [GR]. Ce résultat peut aussi être vu comme une conséquence du théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ [Dy] [Pł2].

On se propose, maintenant, d'obtenir d'autres résultats algébriques sur l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$. Pour cela, on suppose que la suite M vérifie les conditions (H_1) et (H_2). Dans l'anneau des séries convergentes, on sait que le célèbre théorème d'approximation d'Artin a de nombreux corollaires concernant la structure algébrique de $\mathbb{K}\{X\}$ [R] [To]. On rappelle ce théorème.

THÉORÈME D'APPROXIMATION D'ARTIN [Ar]

Soient $X = (X_1, \ldots, X_d)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_q)$. Soit $f(X,Y) = (f_1(X,Y), \ldots, f_m(X,Y))$ dans $(\mathbb{K}\{X,Y\})^m$. On suppose qu'il existe $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X), \ldots, \bar{y}_q(X))$, dans $\mathbb{K}[[X]]^q$, telle que $\bar{y}(0) = 0$ et $f(X, \bar{y}(X)) = 0$. Alors, pour tout entier $c \geq 1$, il existe $y(X) = (y_1(X), \ldots, y_q(X))$, dans $\Big(\mathbb{K}\{X\}\Big)^q$, tel que $y(0) = 0$, $f(X, y(X)) = 0$ et $y_\nu(X) \equiv \bar{y}_\nu(X)$ mod$(\underline{m}_X^c)$ pour $\nu = 1, \ldots, q$, en notant $\underline{m}_X$ l'idéal maximal de $\mathbb{K}[[X]]$.

Dans la troisième partie, on établit un théorème d'approximation dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ analogue au théorème d'approximation d'Artin dans $\mathbb{K}\{X\}$. C'est le théorème [III, 1.9]. En fait, on en établit une version à paramètres un peu plus forte qui est l'analogue de la version à paramètres dans $\mathbb{K}\{X\}$ donnée par A. Płoski [Pł1]. C'est le théorème [III, 1.8].

Soient $X = (X_1, \ldots, X_d)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_q)$. Soit $f(X,Y) = (f_1(X,Y), \ldots, f_m(X,Y))$ dans $\mathbb{K}[[X,Y]](M)^m$. On suppose qu'il existe $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X), \ldots, \bar{y}_q(X))$, dans $\mathbb{K}[[X]]^q$, *telle que* $\bar{y}(0) = 0$ *et* $f(X, \bar{y}(X)) = 0$. *Alors, il existe* $(t_1, \ldots, t_s)$, *un* s*-uple de nouvelles variables,* $Y(X,t) = (Y_1(X,t), \ldots, Y_q(X,t))$, *un élément de* $\mathbb{K}[[X,t]](M)^q$, *et* $\bar{t}(X) = (\bar{t}_1(X), \ldots, \bar{t}_s(X))$ *dans* $\mathbb{K}[[X]]^s$, *tels que* $Y(0,0) = 0$, $\bar{t}(0) = 0$, $f(X, Y(X,t)) = 0$ *et* $\bar{y}(X) = Y(X, \bar{t}(X))$.

La preuve établie ici s'inspire de celle de A. Płoski [Pł1]. Cependant, elle doit être soigneusement modifiée. En effet, dans le cadre des séries convergentes, A. Płoski fait un large usage des théorèmes de préparation et de division de Weierstrass. Comme on l'a signalé dans la partie II, ces théorèmes ne sont plus vrais dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. On utilise donc leur version donnée par J. Chaumat et A-M. Chollet [CC2] et que l'on trouve ici dans [II,3.1 et 3.2] et [Annexe B]. Comme dans le cadre analytique, on déduit du théorème d'approximation de nombreux corollaires. On montre, par exemple, que $\mathbb{K}[[X]](M)$ est un anneau factoriel [III, 2.2]. On retrouve aussi le théorème sur les relations donné dans la partie II. On montre encore que la racine p-ième d'une série de $\mathbb{K}[[X]](M)$, quand elle existe, appartient aussi à $\mathbb{K}[[X]](M)$. Les principaux résultats de cette troisième partie ont fait l'objet d'une note [Mo].

Ce travail est complété par une annexe. Le choix des résultats y figurant relève de points de vue divers.

On trouve, dans l'Annexe A, la réponse à une question posée par J. Chaumat et A-M. Chollet dans [CC1]. Elle ouvre des perspectives intéressantes sur un travail de recherche, qui n'a été qu'abordé ici.

On a placé, dans l'Annexe B, une nouvelle preuve des théorèmes de division de Weierstrass de J. Chaumat et A.-M. Chollet [CC2]. La méthode utilisée permet d'estimer la perte de régularité lors de la division de Weierstrass dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ par une série régulière d'ordre p en la variable X_s.

Dans l'Annexe C se trouve un théorème de composition qui, sous des hypothèses particulières, permet d'obtenir un gain sur la classe des séries formelles à croisance contrôlée. Ce résultat est indispensable pour obtenir le théorème [II, 5.3] avec des estimations optimales.

Enfin, dans l'Annexe D se trouve le détail des calculs concernant les exemples illustrant la partie II.

Partie I : Sur la composition des séries formelles à croissance contrôlée

INTRODUCTION

Dans tout ce chapitre, on notera $\mathbb{C}[[X]]$ l'anneau des séries formelles à s variables et à coefficients complexes. Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on écrit

$$\mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J|=j}} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} H_j \mathcal{A}(X)$$

où $|J|$ désigne la longueur du multi-indice J; $H_j\mathcal{A}(X)$ n'est autre que le polynôme homogène de degré j dans le développement de $\mathcal{A}$.

On note aussi $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) = \inf(j \in \mathbb{N}; H_j\mathcal{A}(X) \not\equiv 0)$, l'ordre d'annulation de $\mathcal{A}$, avec la convention $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) = \infty$ si $\mathcal{A}$ est nulle.

Dans tout ce chapitre, on considère F une application formelle notée

$$F: \ (X_1, \ldots, X_s) \to (F_1(X_1, \ldots, X_s), \ldots, F_s(X_1, \ldots, X_s)).$$

avec, pour tout $1 \leq i \leq s$, $F_i(X_1, \ldots, X_s) \in \mathbb{C}[[X]]$ et $F_i(0, \ldots, 0) = 0$.

§1. LE PROBLÈME DE LA COMPOSITION.

1.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On se propose d'étudier la composition de $\mathcal{A}$ par F. Plus précisément, on étudie la croissance des coefficients de la série $\mathcal{A} \circ F$ en fonction de celle des séries $\mathcal{A}$ et F. Lorsque F est une application analytique, il est bien connu que, si $\mathcal{A}$ est une série convergente, alors $\mathcal{A} \circ F$ est une série convergente. De manière analogue, on étudie le cas où F appartient à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ et $\mathcal{A}$ appartient à $\mathbb{C}[[X]](M)$, lorsque M et N sont des suites vérifiant la condition (H_1).

1.2 NOTATIONS

Pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \ldots, p_l) \in \{1, \ldots, s\}^l$, on pose

$$D_{(p_1, \ldots, p_l)} = \frac{\partial^l}{\partial X_{p_1} \ldots \partial X_{p_l}}$$

Enfin, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la sommation indexée par le k-uplet $(q_1, \ldots, q_k)$ de $\{1, \ldots, s\}^k$ est représentée par

$$\sum_{[[q,k]]}$$

1.3 LEMME

Avec les notations précédentes, on a, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout $(p_1,\ldots,p_l)$ de $\{1,\ldots,s\}^l$,

(1.3.1) $$D_{(p_1,\ldots,p_l)}(\mathcal{A}\circ F)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{[[q,k]]}A_{(q_1,\ldots,q_k)}^{(p_1,\ldots,p_l)}D_{(q_1,\ldots,q_k)}(\mathcal{A})\circ F,$$

où les coefficients $A_{(q_1,\ldots,q_k)}^{(p_1,\ldots,p_l)}$ sont déterminés par récurrence sur l à l'aide des relations

(1.3.2) $$A_{(q_1)}^{(p_1)}=\frac{\partial F_{q_1}}{\partial X_{p_1}},\ \textit{pour } l=1,$$

puis, pour $l>1$,

(1.3.3) $$A_{(q_1)}^{(p_1,\ldots,p_l)}=\frac{\partial A_{(q_1)}^{(p_2,\ldots,p_l)}}{\partial X_{p_1}},$$

(1.3.4) $$A_{(q_1,\ldots,q_k)}^{(p_1,\ldots,p_l)}=\frac{\partial A_{(q_1,\ldots,q_k)}^{(p_2,\ldots,p_l)}}{\partial X_{p_1}}+A_{(q_1)}^{(p_1)}A_{(q_2,\ldots,q_k)}^{(p_2,\ldots,p_l)},\ \textit{pour } 2\le k\le l-1,$$

(1.3.5) $$A_{(q_1,\ldots,q_l)}^{(p_1,\ldots,p_l)}=A_{(q_1)}^{(p_1)}A_{(q_2,\ldots,q_l)}^{(p_2,\ldots,p_l)}.$$

Preuve. Pour $l=1$, la formule est évidente. On la suppose vérifiée au rang $l-1$. Soit $(p)=(p_1,\ldots,p_l)$ dans $\{1,\ldots,s\}^l$. Par hypothèse, en notant $(p')=(p_2,\ldots,p_l)$, on a

(1.3.6) $$D_{(p')}(\mathcal{A}\circ F)=\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{[[r,j]]}A_{(r_1,\ldots,r_j)}^{(p')}D_{(r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F.$$

On obtient donc
(1.3.7)
$$D_{(p)}(\mathcal{A}\circ F)=\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{[[r,j]]}\frac{\partial A_{(r_1,\ldots,r_j)}^{(p')}}{\partial X_{p_1}}D_{(r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F+\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{[[r,j]]}A_{(r_1,\ldots,r_j)}^{(p')}\frac{\partial}{\partial X_{p_1}}(D_{(r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F).$$

Or, on a

(1.3.5) $$\frac{\partial}{\partial X_{p_1}}(D_{(r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F)=\sum_{h=1}^{s}\frac{\partial F_h}{\partial X_{p_1}}\frac{\partial^{j+1}\mathcal{A}}{\partial X_h\partial X_{r_1}\ldots\partial X_{r_j}}\circ F.$$

Ainsi, tenant compte des notations de (1.3.2) et (1.3.8), la relation (1.3.7) donne

(1.3.9) $$\begin{aligned}D_{(p)}(\mathcal{A}\circ F)\ &=\ \sum_{j=1}^{l-1}\sum_{[[r,j]]}\frac{\partial A_{(r_1,\ldots,r_j)}^{(p')}}{\partial X_{p_1}}D_{(r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F\\&\quad+\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{[[r,j]]}\sum_{h=1}^{s}A_{(r_1,\ldots,r_j)}^{(p')}A_{(h)}^{(p_1)}D_{(h,r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F.\end{aligned}$$

L'égalité (1.3.9) s'écrit aussi

$$(1.3.8)\qquad \begin{aligned} D_{(p)}(\mathcal{A}\circ F) &= \sum_{j=1}^{l-1}\sum_{[[r,j]]}\frac{\partial A^{(p')}_{(r_1,\dots,r_j)}}{\partial X_{p_1}}D_{(r_1,\dots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F \\ &\quad+\sum_{j=2}^{l}\sum_{[[r,j]]}A^{(p_1)}_{(r_1)}A^{(p')}_{(r_2,\dots,r_j)}D_{(r_1,\dots,r_j)}(\mathcal{A})\circ F. \end{aligned}$$

On en déduit alors les relations de récurrence annoncées. $\diamondsuit$

1.4 NOTATIONS

On introduit les notations suivantes

$$A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)=\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=j}}(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J X^J,$$

$$\forall\ 1\le i\le s\quad F_i(X)=\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=j}}(f_i)_J X^J.$$

Soit $N=\{N_n\}_{n\ge 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant la propriété (H_1). On suppose que F appartient à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$.

1.5 LEMME

Il existe des constantes C_1 et $C_2>0$, avec $C_1\ge 1$, $C_2\ge 1$, ne dépendant que de F, telles que, pour tous l-uplets $(p_1,\dots,p_l)$, tous k-uplets $(q_1,\dots,q_k)$ et tous multi-indices J de $\mathbb{N}^s$, on ait

$$|(a^{(p_1)}_{(q_1)})_J|\le C_1C_2^jN_{j+1}.$$

Preuve. D'après (1.3.2), on a la relation

$$(1.5.1)\qquad A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)=\frac{\partial F_{q_1}}{\partial X_{p_1}}(X).$$

Le lemme est alors une conséquence immédiate de cette relation. $\diamondsuit$

1.6 LEMME

Pour tous l et k entiers avec $1\le k\le l$, tous $(p_1,\dots,p_l)$ de $\{1,\dots,s\}^l$ et $(q_1,\dots,q_k)$ de $\{1,\dots,s\}^k$ et tout multi-indice J, on a

$$|(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J|\le (C_1C_3)^l(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k+1},$$

où C_3 et C_4 sont des constantes, avec $C_3\ge 1$, $C_4\ge 1$, ne dépendant que de s.

Preuve. On raisonne par récurrence sur l. Pour $l = 1$, on a $k = 1$ et le lemme précédent donne l'estimation annoncée.

On suppose la propriété vérifiée au rang $l - 1$. On regarde alors ce qui se passe au rang l.

Cas $k = 1$

On a, d'après (1.3.3),

$$A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1)}(X) = \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)}}{\partial X_{p_1}}(X), \tag{1.6.1}$$

l'inégalité

$$|(a^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1)})_J| \leq |(j+1)(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)})_{J^{(p_1)}}|, \tag{1.6.2}$$

avec $J^{(p_1)} = (j_1, \ldots, j_{p_1-1}, j_{p_1}+1, j_{p_1+1}, \ldots, j_s)$, si $J = (j_1, \ldots, j_s)$. Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence s'écrit

$$|(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)})_{J^{(p_1)}}| \leq (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-1}\frac{(l+j-1)!}{(j+1)!}N_{l+j}. \tag{1.6.3}$$

On obtient bien l'estimation annoncée après multiplication par $j + 1$.

Cas $2 \leq k \leq l - 1$

D'après (1.3.4), on a la relation

$$A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X) = \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)}{\partial X_{p_1}} + A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_k)}(X). \tag{1.6.1'}$$

On a donc à évaluer une somme de deux termes. L'estimation du premier terme est immédiate. En effet, si on note

$$\frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)}{\partial X_{p_1}} = \sum_{J\in\mathbf{N}^s}(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J X^J, \tag{1.6.2'}$$

on obtient aisément l'inégalité

$$|(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (j+1)|(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_{J^{(p_1)}}|. \tag{1.6.3'}$$

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence au coefficient $(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_{J^{(p_1)}}$, on obtient l'estimation

$$|(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (j+1)(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{(j+1)!}N_{l+j-k+1}, \tag{1.6.4'}$$

et donc

$$(1.6.5') \qquad |(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k+1}.$$

L'estimation du second terme est moins triviale. Il faut remarquer qu'un terme $(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J$ provenant du produit $A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_k)}(X)$ s'écrit

$$(1.6.6') \qquad (c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J = \sum_{H+I=J}(a^{(p_1)}_{(q_1)})_H(a^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_k)})_I.$$

Et donc, compte tenu de l'hypothèse de récurrence et du lemme 1.5, on a

$$(1.6.7') \qquad |(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le \sum_{H+I=J} C_1C_2^h(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+i-k}\frac{(l+i-k)!}{i!}N_{h+1}N_{l+i-k+1}.$$

La convexité logarithmique de la suite N implique

$$(1.6.8') \qquad N_{h+1}N_{l+i-k+1} \le N_{l+i+h-k+1}N_1.$$

En utilisant (1.6.8') et en remarquant que, pour tout $i \le j$,

$$(1.6.9') \qquad \frac{(l+i-k)!}{i!} \le \frac{(l+j-k)!}{j!},$$

on obtient l'estimation

$$(1.6.10') \qquad |(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le N_1C_1^lC_3^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k+1}\sum_{H+I=J}C_4^{-h}.$$

Puisque l'équation $h_1+h_2+\ldots+h_s = h$ a $\binom{s+h-1}{h}$ solutions entières, la série $\sum_{H+I=J}C_4^{-h}$ devient $\sum_{h=0}^{j}\binom{s+h-1}{h}C_4^{-h}$. En remarquant alors que $\binom{s+h-1}{h} \le s^h$, on choisit C_4 suffisamment grand pour que la série $\sum_{h=0}^{+\infty}s^hC_4^{-h}$ converge. Il vient donc, si on appelle C_5 cette somme,

$$(1.6.11') \qquad |(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le N_1C_1^lC_3^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k+1}C_5.$$

On obtient en sommant les deux estimations (1.6.5') et (1.6.11')

$$(1.6.11') \qquad |(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k+1}(1+N_1C_1C_5).$$

En choisissant alors C_3 telle que $C_1C_3 = 1 + N_1C_1C_5$, la propriété est bien vérifiée au rang l.

<u>Cas $k = l$</u>

En remarquant que

$$A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_l)}(X) = A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_l)}(X), \tag{1.6.1''}$$

l'estimation s'obtient de manière analogue à celle du second terme du cas précédent. $\diamondsuit$

1.7 NOTATIONS

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant (H_1). Soit C_0 une constante positive, on note, pour tout $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}[[X]]$,

$$||\mathcal{A}||_{C_0,M} = \sup_{\substack{J\in\mathbf{N}^s;\\ |J|=j}} \frac{|a_J|}{C_0^j M_j}.$$

Clairement, $||.||_{C_0,M}$ est une norme.

On suppose, en outre, qu'il existe une constante D, $D \geq 1$ telle que, pour tout entier n, on ait, soit

$$M_n \leq D^n N_n, \tag{1.7.1}$$

soit

$$N_n \leq D^n M_n. \tag{1.7.2}$$

On définit la suite $\max\{M,N\}$ par :
$\max\{M,N\}_n = D^n N_n$, pour tout entier n, si l'inégalité (1.7.1) est vérifiée.
$\max\{M,N\}_n = D^n M_n$, pour tout entier n, si l'inégalité (1.7.2) est vérifiée.

1.8 PROPOSITION

Soient $M = \{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et $N = \{N_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Soit $F(X_1,\dots,X_s) = (F_1(X),\dots,F_s(X))$ dans $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ vérifiant $F(0) = 0$. Il existe une constante C', $C' > 0$, ne dépendant que de F, telle que, pour tout $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathbb{C}[[X]]$ et tout $C_0 > 0$, on ait

$$||\mathcal{A}\circ F||_{C'C_0,\max\{M,N\}} \leq ||\mathcal{A}||_{C_0,M}.$$

Preuve. D'après (1.3.1), si on note $\mathcal{A}\circ F(X) = \sum_{\substack{J\in\mathbf{N}^s;\\ |J|=j}} \alpha_J X^J$, on a la relation

$$|l_1!\dots l_s!\alpha_{l_1,\dots,l_s}| \leq |\sum_{k=1}^{l}\sum_{[[q,k]]}(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_0 a_{(q_1,\dots,q_k)}k!|. \tag{1.8.1}$$

On obtient, en utilisant les estimations du lemme 1.6,

$$|l_1!\dots l_s!\alpha_{l_1,\dots,l_s}| \leq \sum_{k=1}^{l}\sum_{[[q,k]]}(C_1C_3)^l(C_2C_4)^{l-k}(l-k)!k!N_{l-k+1}C_0^k M_k||\mathcal{A}||_{C_0,M}. \tag{1.8.2}$$

Ainsi, en tenant compte de la convexité logarithmique da la suite $\max\{M,N\}$, de l'inégalité triviale $(l-k)!k! \leq l!$ et en majorant le nombre de termes de la double somme par $(2s)^l$, on a

$$(1.8.3) \qquad |l_1!\dots l_s!\alpha_{l_1,\dots,l_s}| \leq l!(2sC_1C_2C_3C_4)^l C_0^l \max\{M,N\}_1 \max\{M,N\}_l ||\mathcal{A}||_{C_0,M}.$$

Enfin, on obtient le résultat voulu en remarquant que $\dfrac{l!}{l_1!\dots l_s!} \leq (2^{s-1})^l$. $\Diamond$

1.9 REMARQUES

(a) On notera que seule l'hypothèse (H_1) est requise.

(b) Si on suppose $N_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on retrouve alors le résultat classique suivant :

Soit F une application holomorphe de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$ définie au voisinage de 0 et vérifiant $F(0) = 0$. Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Il existe une constante C', $C' > 0$, ne dépendant que de F, telle que, pour tout $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}[[X]]$ et tout $C_0 > 0$, on ait

$$||\mathcal{A} \circ F||_{C'C_0,M} \leq ||\mathcal{A}||_{C_0,M}.$$

§2. ÉTUDE DE LA RÉCIPROQUE.

2.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Soit $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant (H_1). On se propose d'apporter une réponse à la question suivante : si, pour un certain C_0, $||\mathcal{A}\circ F||_{C_0,M}$ est finie, que peut-on dire de $\mathcal{A}$?

Dans toute la suite, on note Φ le jacobien de l'application formelle F. On note aussi $T_{p,l}(X)$ le cofacteur (l,p) de la matrice jacobienne de F. Dans cette partie, on suppose, en outre, que $\mu=$ord$(\Phi)<\infty$, c'est à dire que le jacobien de l'application formelle F est non nul. On appelle aussi $\nu=\inf\limits_{l,p}(\mathrm{ord}(T_{p,l}(X)))$.

Lorsque F est une application analytique, P. M. Eakin et G. M. Harris ont obtenu le résultat suivant [EH].

THÉORÈME [EH]

Soit F une application holomorphe de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$ vérifiant $F(0)=0$ et de jacobien Φ. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $$\mathit{ord}(\Phi)<\infty,$$

(ii) *pour tout $\mathcal{A}\in\mathbb{C}[[X]]$, $\mathcal{A}\circ F$ analytique implique $\mathcal{A}$ analytique.*

Comme le signalent P. M. Eakin et G. A. Harris, ce résultat peut être vu comme une conséquence d'un théorème très général de A. M. Gabrielov [Ga]. J. Chaumat et A-M. Chollet [CC1] ont obtenu des résultats analogues dans le cas où $\mathcal{A}$ est une série formelle à croissance contrôlée.

Soit d un entier strictement positif. On note $M^{(d)}$ la suite définie par $M_n^{(d)}=M_{dn}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a alors l'énoncé suivant.

THÉORÈME [CC1]

Soit F une application holomorphe de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$ définie au voisinage de 0 vérifiant $F(0)=0$ et de jacobien Φ. Soit M une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $$\mathit{ord}(\Phi)<\infty,$$

(ii) *il existe D_0, $D_0>0$ et d un entier $d\geq 1$ tels que pour tout $\mathcal{A}\in\mathbb{C}[[X]]$, on ait $||\mathcal{A}||_{D_0,M^{(d)}}\leq||\mathcal{A}\circ F||_{C_0,M}$.*

On se propose d'établir un résultat analogue dans le cas où l'application F est, elle aussi, une application formelle à croissance contrôlée. On montre, dans ce paragraphe, que l'implication $(i)\Rightarrow(ii)$ ci-dessus est encore vraie.

2.2 DÉFINITIONS

Soit alors $N = \{N_n\}_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant les propriétés (H_1) et (H_2). On suppose, de plus, que la suite $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est comparable à la suite $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ au sens du paragraphe 1.7.

Enfin, dans toute la suite, on suppose que l'application $F(X) = (F_1(X), \ldots, F_s(X))$ appartient à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$.

On a une formule de composition analogue à celle du lemme 1.3.

2.3 LEMME [Th]

Avec les notations précédentes, on a pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout $(p_1, \ldots, p_l)$ de $\{1, \ldots, s\}^l$

$$\Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1,\ldots,p_l)}(\mathcal{A}) \circ F = \sum_{k=1}^{l} \sum_{[[q,k]]} A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X) D_{(q_1,\ldots,q_k)}(\mathcal{A} \circ F), \tag{2.3.1}$$

où les coefficients $A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}$ sont déterminés par récurrence sur l à l'aide des relations

$$A^{(p_1)}_{(q_1)}(X) = T_{p_1,q_1}(X), \text{ pour } l = 1, \tag{2.3.2}$$

puis, pour $l > 1$,

$$\begin{aligned} A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1)}(X) \;&=\; \sum_{t=1}^{s} \Phi(X) A^{(p_1)}_{(t)}(X) \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)}(X)}{\partial X_t} \\ &\quad -(2l-3) \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A^{(p_1)}_{(t)}(X) A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)}(X), \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

puis, pour $2 \leq k \leq l-1$,

$$\begin{aligned} A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X) = \;& \sum_{t=1}^{s} \Phi(X) A^{(p_1)}_{(t)}(X) \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)}{\partial X_t} \\ & -(2l-3) \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A^{(p_1)}_{(t)}(X) A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X) \\ & +\Phi(X) A^{(p_1)}_{(q_1)}(X) A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_k)}(X), \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$$A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_l)}(X) = \Phi(X) A^{(p_1)}_{(q_1)}(X) A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_l)}(X). \tag{2.3.5}$$

Preuve. Ces formules s'obtiennent de manière analogue à celles obtenues par [Th]. Pour $l = 1$, la formule est immédiate car, d'après la formule de composition des dérivations, encore vraie au sens des séries formelles, on a, pour tout $1 \leq p \leq s$,

$$\sum_{l=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l} \circ F(X) \right) \frac{\partial F_l}{\partial X_p} = \frac{\partial (\mathcal{A} \circ F)}{\partial X_p}. \tag{2.3.6}$$

Comme par hypothèse $\mathrm{ord}(\Phi) < \infty$, on obtient, d'après la règle de Cramer,

$$\forall 1 \leq l \leq s \quad \Phi(X)\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l}\right) \circ F(X) = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial(\mathcal{A} \circ F)}{\partial X_p}(X) T_{p,l}(X). \tag{2.3.7}$$

On suppose la formule établie au rang $l-1$ ($l \geq 2$). Soit $(p) = (p_1, \ldots, p_l)$ dans $\{1, \ldots, s\}^l$. On a, en notant $(p') = (p_2, \ldots, p_l)$,

$$\Phi(X)^{2l-3} D_{(p')}(\mathcal{A}) \circ F = \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)}(X) D_{(r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A} \circ F). \tag{2.3.8}$$

Ainsi, en utilisant (2.3.6), on remarque

$$\Phi(X) D_{(p)}(\mathcal{A}) \circ F = \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial}{\partial X_t}(D_{(p')}(\mathcal{A}) \circ F) T_{p_1,t}(X). \tag{2.3.9}$$

On obtient donc, d'après (2.3.8),

$$\begin{aligned} \Phi(X) D_{(p)}(\mathcal{A}) \circ F \;&=\; \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} \sum_{t=1}^{s} T_{p_1,t} \frac{\partial(\Phi^{-2l+3} A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)})}{\partial X_t} D_{(r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A} \circ F) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} \sum_{t=1}^{s} T_{p_1,t}(\Phi)^{-2l+3} A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)} D_{(t,r_1,\ldots,r_j)}(\mathcal{A} \circ F). \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

L'égalité (2.3.10) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Phi^{2l-1} D_{(p)}(\mathcal{A}) \circ F = \;& \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} \sum_{t=1}^{s} \Phi A^{(p_1)}_{(t)} \frac{\partial A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)}}{\partial X_t} - (2l-3) \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \Phi}{\partial X_t} A^{(p_1)}_{(t)} A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)} \\ & + \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} \sum_{t=1}^{s} \Phi A^{(p_1)}_{(t)} A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)} D_{(t,r_1,\ldots,r_j)} \\ & = \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} \sum_{t=1}^{s} \Phi A^{(p_1)}_{(t)} \frac{\partial A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)}}{\partial X_t} - (2l-3) \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{[[r,j]]} \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \Phi}{\partial X_t} A^{(p_1)}_{(t)} A^{(p')}_{(r_1,\ldots,r_j)} \\ & + \sum_{j=2}^{l} \sum_{[[r',j]]} \Phi A^{(p_1)}_{(r'_1)} A^{(p')}_{(r'_2,\ldots,r'_j)} D_{(r'_1,\ldots,r'_j)}. \end{aligned}$$

On en déduit alors les formules de récurrence annoncées. ♢

2.4 LEMME

On a

$$H_j(A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)) = 0 \quad si\ j < k - \mu + l(\mu + \nu - 1).$$

Preuve. Ce résultat sur l'ordre des séries formelles $A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)$ se démontre par une simple récurrence sur l à partir des formules du lemme 2.3. En effet, pour $l=1$, on a $k=1$ et $A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)=T_{p_1,q_1}(X)$, ainsi ordre$(A^{(p_1)}_{(q_1)}(X))=\nu$. On suppose la propriété vérifiée au rang $l-1$ et on regarde ce qui se passe au rang l. On se convainc facilement, au vu des formules de récurrence du lemme précédent, qu'il suffit d'obtenir l'ordre des séries $A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)$ avec $2\le k\le l-1$. On a alors, en reprennant (2.3.4),

$$A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)=B_1(X)+B_2(X)+B_3(X), \tag{2.4.1}$$

avec

$$\begin{aligned}B_1(X)= &\ \sum_{t=1}^{s}\Phi(X)A^{(p_1)}_{(t)}(X)\frac{\partial A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)}{\partial X_t}\\ B_2(X)= &\ -(2l-3)\sum_{t=1}^{s}\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_t}A^{(p_1)}_{(t)}(X)A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)\\ B_3(X)= &\ \Phi(X)A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_k)}(X).\end{aligned}$$

On évalue l'ordre de chacun des termes B_1, B_2 et B_3.
Pour le premier terme B_1, on sait que ordre$(\Phi)=\mu$, ordre$(A^{(p_1)}_{(t)})\ge\nu$ et, par l'hypothèse de récurrence, ordre$\Big(\dfrac{\partial A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)}{\partial X_t}\Big)\ge k-\mu+(l-1)(\mu+\nu-1)-1$. Ainsi, on obtient

$$\mathrm{ord}(B_1)\ge k-\mu+l(\mu+\nu-1). \tag{2.4.2}$$

Pour le deuxième terme B_2, on sait que ordre$(\frac{\partial\Phi}{\partial X_t})\ge\mu-1$, ordre$(A^{(p_1)}_{(t)})\ge\nu$ et, par l'hypothèse de récurrence, ordre$(A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X))\ge k-\mu+(l-1)(\mu+\nu-1)$, ainsi on obtient

$$\mathrm{ord}(B_2)\ge k-\mu+l(\mu+\nu-1). \tag{2.4.3}$$

Pour le troisième terme B_3, on sait que ordre$(\Phi)=\mu$, ordre$(A^{(p_1)}_{(t)})\ge\nu$ et, par l'hypothèse de récurrence, ordre$(A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_k)}(X))\ge k-1-\mu+(l-1)(\mu+\nu-1)$, ainsi on obtient

$$\mathrm{ord}(B_3)\ge k-\mu+l(\mu+\nu-1). \tag{2.4.4}$$

On conclut en remarquant que

$$\mathrm{ord}(A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X))\ge\min(\mathrm{ord}(B_1),\mathrm{ord}(B_2),\mathrm{ord}(B_3)). \tag{2.4.5}$$

$\diamondsuit$

En notant alors $A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)=\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^n;\\ |J|=j}}(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J X^J$, on obtient une estimation des coefficients $(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}$.

2.5 LEMME

Pour tous l et k entiers avec $1 \leq k \leq l$, tous $(p_1, \ldots, p_l)$ de $\{1, \ldots, s\}^l$ et $(q_1, \ldots, q_k)$ de $\{1, \ldots, s\}^k$ et tout multi-indice J, on a

$$|(a^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (C_1C_3)^l (C_2C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

où C_3 et C_4 sont des constantes, avec $C_3 \geq 1$, $C_4 \geq 1$, ne dépendant que de s.

Preuve. On remarque d'abord que l'expression $N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}$ a bien un sens car, d'après le lemme 2.4, on a $\mathrm{ord}(A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)) \geq k - \mu + l(\mu + \nu - 1)$. Il suffit donc d'estimer les termes pour tous les multi-indices J de longueur $j \geq k - \mu + l(\mu + \nu - 1)$.

Pour obtenir l'estimation demandée, on raisonne là aussi par récurrence sur l. Pour $l = 1$, on a $k = 1$ et les hypothèses sur F et sur la suite N permettent d'affirmer que le jacobien Φ, $\Phi(X) = \sum_{\substack{J\in\mathbf{N}^s;\\ |J|=j}} (\phi)_J X^J$, vérifie

$$|(\phi)_J| \leq C_1 C_2^j N_{j-\mu}, \tag{2.5.1}$$

et que $T_{p_1,q_1}(X) = \sum_{\substack{J\in\mathbf{N}^s;\\ |J|=j}} (a^{p_1}_{q_1})_J X^J$ vérifie

$$|(a^{p_1}_{q_1})_J| \leq C_1 C_2^j N_{j-\nu}, \tag{2.5.2}$$

pour des constantes C_1 et C_2 bien choisies. On remarquera que l'hypothèse (H_2) intervient de manière essentielle pour avoir (2.5.1) et (2.5.2). La récurrence est alors amorcée en tenant compte de la relation $A^{(p_1)}_{(q_1)}(X) = T_{p_1,q_1}(X)$.

On suppose la propriété vérifiée au rang $l-1$. On regarde alors ce qui se passe au rang l. On se convainc facilement, au vue des formules de récurrence du lemme 2.3, qu'il suffit d'obtenir l'estimation pour les coefficients $(a^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J$ avec $2 \leq k \leq l-1$. On reprend la relation (2.4.1). On est conduit à estimer chacun des trois termes de cette somme. Les idées utilisées sont les mêmes que celles du paragraphe 1.6 à ce détail près qu'il faut tenir soigneusement compte du lemme 2.4. On développe le calcul ici pour la commodité du lecteur.

<u>Estimation du premier terme B_1</u>

On note

$$\frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)}{\partial X_t} = \sum_{J\in\mathbf{N}^s} (b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J X^J. \tag{2.5.3}$$

On obtient aisément

$$|(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (j+1)|(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_{J^{(p_1)}}|. \tag{2.5.4}$$

avec $J^{(p_1)} = J + e_{p_1}$, $|J^{(p_1)}| = j + 1$. En appliquant alors l'hypothèse de récurrence au coefficient $(a^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_{J^{(p_1)}}$, on obtient l'estimation

$$(2.5.5) \qquad |(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le (j+1)(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{(j+1)!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}$$

et donc

$$(2.5.6) \qquad |(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}.$$

Un terme $(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J$, provenant alors du produit $A^{(p_1)}_{(t)}(X)\dfrac{\partial A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)}{\partial X_t}$, s'écrit

$$(2.5.7) \qquad (c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J = \sum_{H+I=J}(a^{(p_1)}_{(t)})_H(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_I.$$

Et donc, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, de (2.5.2), (2.5.6) et (2.5.7), on a
(2.5.8)

$$|(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le \sum_{H+I=J} C_1C_2^hN_{h-\nu}(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+i-k}\frac{(l+i-k)!}{i!}N_{l+i-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}.$$

En remarquant que, pour tout $i \le j$,

$$(2.5.9) \qquad \frac{(l+i-k)!}{i!} \le \frac{(l+j-k)!}{j!}$$

et en utilisant la convexité logarithmique de la suite N, on obtient l'estimation
(2.5.10)

$$|(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}\sum_{H+I=J}C_4^{-h}.$$

Ainsi en choisissant alors de nouveau C_4 suffisamment grand pour que la série $\sum_H C_4^{-h}$ converge et, en notant C_5 sa somme, on a alors l'inégalité

$$(2.5.11) \qquad |(c^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \le C_5C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}.$$

Et donc en multipliant la série obtenue par $\Phi(X)$, en sommant sur s termes et en notant $B_1(X) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s}(B_1)_JX^J$, on obtient une majoration, pour tout multi-indice J, du terme $(B_1)_J$
(2.5.12)

$$|(B_1)_J| \le sC_1C_5\sum_{H+I=J}C_1C_2^hN_{h-\mu}(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+i-k}\frac{(l+i-k)!}{i!}N_{l+i-k-l(\mu+\nu)+2\mu}.$$

Et ainsi, en tenant à nouveau compte de la convexité logarithmique de la suite $\{N_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et de la convergence de la série $\sum_H C_4^{-h}$, on a

$$|(B_1)_J| \leq sC_1^2C_5^2(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}. \tag{2.5.13}$$

<u>Estimation du deuxième terme B_2</u>

On note

$$\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_t}A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s}(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J X^J. \tag{2.5.14}$$

On obtient aisément, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, de (2.5.1) et (2.5.14)

$$|(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq \sum_{H+I=J}\Big((h+1)C_1C_2^{h+1}N_{h-\mu+1}(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l-1+i-k} \frac{(l-1+i-k)!}{i!}N_{l-1+i-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}\Big). \tag{2.5.15}$$

En remarquant que, pour tout $i\leq j$,

$$\frac{(l-1+i-k)!}{i!} \leq \frac{(l-1+j-k)!}{j!} \tag{2.5.16}$$

et que $h+1\leq 2^h$, on obtient l'estimation
(2.5.17)

$$|(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l-1+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu+\nu}\sum_{H+I=J}\frac{2^h}{C_4^{h+1}}.$$

Ainsi, quitte à changer C_4 pour que la série $\displaystyle\sum_{H+I=J}\frac{2^h}{C_4^{h+1}}$ converge et en notant $C_6 = \displaystyle\sum_H \frac{2^h}{C_4^{h+1}}$, on a alors l'inégalité

$$|(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq C_6C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l-1+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu+\nu}. \tag{2.5.18}$$

Et donc en multipliant par $A^{(p_1)}_{(t)}(X)$, on obtient après sommation sur s termes et multiplication par $(2l-3)$, une majoration du terme $(B_2)_J$, pour tout multi-indice J,
(2.5.19)

$$|(B_2)_J| \leq sC_1^2C_5C_6(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}(2l-3)\frac{(l-1+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'il suffit d'estimer les termes pour $j\geq k-\mu+l(\mu+\nu-1)$, car, d'après le lemme 2.4,

$$(a^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J = 0 \text{ si } j < k-\mu+l(\mu+\nu-1). \tag{2.5.20}$$

Dans ce cas, on a $j-k \geq \mu+2\nu-2 \geq 0$. On a donc l'inégalité triviale

$$(2.5.21) \qquad (2l-3)\frac{(l-1+j-k)!}{j!} \leq 2(l-1)\frac{(l-1+j-k)!}{j!} \leq 2\frac{(l+j-k)!}{j!}.$$

Et ainsi, (2.5.1) devient

$$(2.5.22) \qquad |(B_2)_J| \leq 2sC_1^2C_5C_6(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

Estimation du troisième terme B_3

On note

$$(2.5.23) \qquad A_{(q_1)}^{(p_1)}(X)A_{(q_2,\ldots,q_k)}^{(p_2,\ldots,p_l)}(X) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s}(b_{(q_1,\ldots,q_k)}^{(p_1,\ldots,p_l)})_J X^J.$$

On obtient aisément, de la même manière,

$$(2.5.24) \qquad |(b_{(q_1,\ldots,q_k)}^{(p_1,\ldots,p_l)})_J| \leq C_5C_1(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}.$$

Et donc, en remarquant qu'une multiplication par $\Phi(X)$ se traduit par une multiplication par C_1C_5 de l'estimation et une translation de $-\mu$ sur la suite $\{N_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, on obtient une majoration du terme $(B_3)_J$, pour tout multi-indice J,

$$(2.5.25) \qquad |(B_3)_J| \leq C_1^2C_5^2(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

On obtient alors en sommant les trois estimations (2.5.13), (2.5.22) et (2.5.25) l'inégalité

$$(2.5.26) \qquad \begin{aligned} |(a_{(q_1,\ldots,q_k)}^{(p_1,\ldots,p_l)})_J| \leq\ & (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu+1}(sC_1^2C_5^2 \\ & +2sC_1^2C_5C_6+C_1^2C_5^2) \end{aligned}$$

En choisissant alors la constante C_3 telle que $C_3 = C_1C_5((s+1)C_5+2sC_6)$, la propriété est bien vérifiée au rang l. $\diamondsuit$

On obtient alors le théorème suivant.

2.6 THÉORÈME

Soit $M=\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Soit $N=\{N_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1) et (H_2). Soit $F(X_1,\ldots,X_s)=(F_1(X),\ldots,F_s(X))$ dans $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ vérifiant $F(0)=0$ et de jacobien Φ non identiquement nul. Il existe une constante C', $C'>0$, ne dépendant que de F, telle que pour tout $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}[[X]]$ et tout $C_0>0$, on ait

$$||\mathcal{A}||_{C'C_0^{\mu-\nu+1},\max\{N^{(\mu-\nu+1)},M^{(\mu-\nu+1)}\}} \leq ||\mathcal{A}\circ F||_{C_0,M}.$$

Preuve. D'après (2.3.1), on a

$$\Phi(X)^{2l-1}D_{(p_1,\dots,p_l)}(\mathcal{A})\circ F = C_{(p_1,\dots,p_l)}(X), \tag{2.6.1}$$

avec

$$C_{(p_1,\dots,p_l)}(X) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{[[q,k]]} A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)D_{(q_1,\dots,q_k)}(\mathcal{A}\circ F) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s}(c^{(p_1,\dots,p_l)})_J X^J. \tag{2.6.2}$$

On pose alors

$$A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)}(X)D_{(q_1,\dots,q_k)}(\mathcal{A}\circ F)(X) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s}(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J X^J. \tag{2.6.3}$$

On obtient aisément, compte tenu du lemme 2.5 et de l'hypothèse $||\mathcal{A}\circ F||_{C_0,M} < \infty$, l'existence d'une constante C_7 telle que
(2.6.4)

$$|(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \leq \sum_{H+I=J}(C_1C_3)^l(C_2C_4)^{l+h-k}\frac{(l+h-k)!}{h!}N_{l+h-k-l(\mu+\nu)+\mu}C_7C_0^{i+k}\frac{(i+k)!}{i!}M_{i+k}.$$

D'une part, d'après la convexité logarithmique des suites, on a

$$N_{l+h-k-l(\mu+\nu)+\mu}M_{i+k} \leq \max\{M,N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}. \tag{2.6.5}$$

D'autre part, il faut remarquer que dans, la somme $\sum_{H+I=J}$, on a $h+i=j$. Or, d'après le lemme 2.4, on a $h \geq k-\mu+l(\mu+\nu-1)$. Ainsi, on a l'inégalité

$$C_0^{i+k} \leq C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}. \tag{2.6.6}$$

Et enfin, en utilisant, pour tout multi-indice $R=(r_1,\dots,r_s)$, avec $|R|=r$, $R!=r_1!\dots r_s!$, l'inégalité $r! \leq (2^{s-1})^r R!$ plusieurs fois, on obtient

$$\frac{(l+h-k)!}{h!}\frac{(i+k)!}{i!} \leq 2^{i+l+h}l!. \tag{2.6.7}$$

Ainsi, (2.6.4) devient
(2.6.8)

$$\begin{aligned}|(b^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \quad\leq\quad & 2^{l+j}l!(C_1C_3)^l(C_2C_4)^{l+j-k}C_7C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}\max\{M,N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}\\ & \textstyle\sum_{H+I=J}(C_2C_4)^{-i}.\end{aligned}$$

La série $\sum_{H+I=J}(C_2C_4)^{-i}$ converge ; on peut donc majorer ce terme par C_8. On majore alors après la double sommation le nombre de termes par $2^l s^l$ et on obtient l'estimation
(2.6.9)

$$|(c^{(p_1,\dots,p_l)})_J| \leq 2^{l+j}(2s)^l l!(C_1C_3)^l(C_2C_4)^{l+j-1}C_7C_8C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}\max\{M,N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}.$$

On reprend la relation (2.6.1). On a donc

$$C_{(p_1,\dots,p_l)}(X) = \Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1,\dots,p_l)}(\mathcal{A}) \circ F. \tag{2.6.10}$$

On en déduit ordre$(C_{(p_1,\dots,p_l)}(X)) \geq (2l-1)\mu$. En considérant les termes de degré $(2l-1)\mu$ dans (2.6.10), on a

$$H_{(2l-1)\mu}(\Phi(X)^{2l-1}) l_1! \dots l_s! a_{(l_1,\dots,l_s)} = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=(2l-1)\mu}} (c^{(p_1,\dots,p_l)})_J X^J. \tag{2.6.11}$$

Ainsi, si on note $\Phi(X)^{2l-1} = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} (\phi^{(2l-1)})_J X^J$, on obtient, pour tout multi-indice J, avec $|J| = (2l-1)\mu$,

$$(c^{(p_1,\dots,p_l)})_J = l_1! \dots l_s! a_{(l_1,\dots,l_s)} (\phi^{(2l-1)})_J. \tag{2.6.12}$$

On note alors

$$\Phi(X) = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|\geq\mu}} (\phi)_J X^J.$$

On ordonne l'ensemble des multi-indices J de $\mathbb{N}^s$ suivant l'ordre habituel, défini, pour $I = (i_1, \dots, i_s)$ et $J = (j_1, \dots, j_s)$, par

$$\begin{array}{lll} I \leq J & \text{équivaut à} & |I| < |J|, \text{ ou } I = J, \\ & \text{ou} & |I| = |J| \text{ et } \exists k \text{ tel que } i_l = j_l, \text{ pour } l = 1, \dots, k-1, \text{ et } i_k > j_k. \end{array}$$

Dans $\mathbb{N}^3$, on a donc, par exemple, $(1, 2, 1) \leq (1, 1, 2)$.
Si on note $(p_1, \dots, p_s)$ le premier multi-indice tel que $(\phi)_{(p_1,\dots,p_s)} \neq 0$, alors on a $p_1 + \dots + p_s = \mu$ et

$$(\phi^{(2l-1)})_{((2l-1)p_1,\dots,(2l-1)p_s)} = ((\phi)_{(p_1,\dots,p_s)})^{2l-1}. \tag{2.6.13}$$

En utilisant alors la relation

$$(c^{(p_1,\dots,p_l)})_{((2l-1)p_1,\dots,(2l-1)p_s)} = l_1! \dots l_s! a_{(l_1,\dots,l_s)} ((\phi)_{(p_1,\dots,p_s)})^{2l-1} \tag{2.6.14}$$

et l'estimation (2.6.9), on a

$$|(c^{(p_1,\dots,p_l)})_{((2l-1)p_1,\dots,(2l-1)p_s)}| \leq l!(4C_2C_4)^{-\mu} C_7 C_8 C_9^l C_0^{l(\mu-\nu+1)} \max\{M, N\}_{l(\mu-\nu+1)}, \tag{2.6.15}$$

avec $C_9 = 4^{\mu+1} s C_1 C_3 (C_2C_4)^{2\mu+1}$. On obtient bien le résultat annoncé en majorant $\dfrac{l!}{l_1! \dots l_s!}$ par $(2^{s-1})^l$. ◊

2.7 REMARQUES

(a) Si on suppose à nouveau $N_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on retrouve alors le résultat suivant donné par J. Chaumat et A-M. Chollet [CC1].

Soit $F(X_1, \ldots, X_s) = (F_1(X), \ldots, F_s(X))$ une application holomorphe de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$ vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ non identiquement nul. Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1). Il existe une constante C', $C' > 0$, ne dépendant que de F, telle que pour tout $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}[[X]]$ et tout $C_0 > 0$, on ait

$$||\mathcal{A}||_{C'C_0^{\mu-\nu+1}, M^{(\mu-\nu+1)}} \leq ||\mathcal{A} \circ F||_{C_0,M}.$$

(b) D'après la remarque [I, 3.9], $\mu - \nu + 1$ est le meilleur exposant possible dans l'inégalité (ii). Étant donné F, on note D_F la meilleure constante D de l'inégalité

$$(A) \qquad \operatorname{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq D \operatorname{ord}(\mathcal{A}), \text{ pour tout } \mathcal{A} \text{ de } \mathbb{C}[[X]].$$

On a $D_F \leq \mu-\nu+1$ [CC1]. Dans [CC1], J. Chaumat et A.-M. Chollet posent la question suivante : peut-on trouver une application F telle que D_F soit strictement inférieure à $\mu-\nu+1$? Dans l'Annexe A, en réponse à cette question, on donne une famille d'exemples où l'on a $D_F < \mu - \nu + 1$.

§3. COMPOSITION PAR UNE APPLICATION À JACOBIEN NUL.

On montre, dans ce paragraphe, que les résultats présentés dans les paragraphes précédents sont optimaux. On analyse le cas où le jacobien Φ de l'application F est nul.

3.1 DÉFINITIONS ET REMARQUES

Dans cette section, on suppose que les suites $M = \{M_n\}_{n\geq 0}$ et $N = \{N_n\}_{n\geq 0}$ vérifient la condition (3.1.a) suivante.

$$(3.1.a)\qquad \begin{array}{c} M \text{ et } N \text{ vérifient } (H_1), \\ N \text{ vérifient } (H_2) \text{ et} \\ \text{il existe } D \geq 1 \text{ tel que } N_n \leq D^n M_n, \text{ pour tout entier } n. \end{array}$$

On suppose, de plus, que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions suivantes.

$$(3.1.b)\qquad M \text{ vérifie } (H_3).$$

$$(3.1.c)\qquad \text{il existe } D' \text{ et } \epsilon > 0 \text{ tel que } N_h^{1+\epsilon} \leq {D'}^h M_h \text{ pour tout entier } h.$$

On peut remarquer que la condition (H_3) permet d'affirmer

$$(3.1.1)\qquad \exists i > 0,\ \exists E > 0, \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}^*\ (M_n)^{1/n} \leq E n^i.$$

Ce résultat figure dans [CC4], Remarque 32 b : on développe ici le calcul.

En effet, on sait que (H_3) est équivalente à

$$(3.1.2)\qquad M_n \leq C(M_{n-1})^{\frac{n}{n-1}}.$$

Soit alors $u > 0$. On a, en utilisant (3.1.2),

$$(3.1.3)\qquad \log\left(\frac{M_n^{1/n}}{n^u}\right) \leq \frac{1}{n}\log(C) + \frac{1}{n-1}\log(M_{n-1}) - u\log(n),$$

On utilise alors $n-2$ fois (3.1.2), on obtient donc

$$(3.1.4)\qquad \log\left(\frac{M_n^{1/n}}{n^u}\right) \leq \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\log(C) + \log(M_1) - u\log(n).$$

On a alors un développement asymptotique du membre de droite de l'inégalité (3.1.4), en notant γ la constante d'Euler,

(3.1.5)

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\log(C) + \log(M_1) - u\log(n) = (\log(C) - u)\log(n) + (\gamma - 1)\log(C) + \log(M_1) + o(1).$$

Pour $i = u > \log(C)$, le membre de droite de l'inégalité (3.1.4) tend vers $-\infty$, et ainsi on obtient qu'à partir d'un certain rang n_0, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{(M_n)^{1/n}}{n^i} \leq 1. \tag{3.1.6}$$

On obtient bien alors la condition (3.1.1) avec $E = \max_{n \leq n_0} \{\frac{(M_n)^{1/n}}{n^i}\}$. Celle-ci traduit simplement le fait que toute classe définie par une suite à croissance modérée est contenue dans une classe de Gevrey.

Soit $\tilde{r} = (r, \ldots, r)$. Le lemme suivant donne l'équivalence entre les normes $||.||_{C_0,M}$ et $||.||_{\tilde{r}}^{(M)}$ définies précédemment.

3.2 LEMME

Soit $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}[[X]]$ telle qu'il existe $C_0 > 0$ pour lequel on ait $||\mathcal{A}||_{C_0,M} < \infty$. Alors pour toute constante r, vérifiant $r < 1/sC_0$, on a

$$||\mathcal{A}||_{r^{-1},M} \leq ||\mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)} \leq \frac{1}{1 - sC_0 r} ||\mathcal{A}||_{C_0,M}.$$

Preuve. On a

$$||\mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbf{N}^s; \\ |J|=j}} \frac{|a_J|}{C_0^j M_j} (rC_0)^j. \tag{3.2.1}$$

En tenant compte des hypothèses, on obtient

$$||\mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbf{N}^s; \\ |J|=j}} ||\mathcal{A}||_{C_0,M} (rC_0)^j, \tag{3.2.2}$$

soit

$$||\mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)} \leq ||\mathcal{A}||_{C_0,M} \sum_{j=0}^{\infty} (srC_0)^j. \tag{3.2.3}$$

Cette dernière série converge pour tout $r < 1/sC_0$ et sa somme vaut $\frac{1}{1 - sC_0 r}$.

Pour obtenir l'autre inégalité, il faut remarquer que, si on note $H_j\mathcal{A}(X) = \sum_{\substack{J \in \mathbf{N}^s; \\ |J|=j}} h_J X^J$, on a

$$||\mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} ||H_j \mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)}. \tag{3.2.4}$$

Or, pour tout $J \in \mathbb{N}^s$, on a

$$(3.2.5) \qquad |h_J| \leq \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=j}} |h_J| = \frac{M_j}{r^j} \sum_{|J|=j} \frac{|h_J|}{M_j} r^j.$$

Donc, on obtient, pour tout $J \in \mathbb{N}^s$,

$$(3.2.6). \qquad \frac{|h_J|}{r^{-j} M_j} \leq ||H_j \mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)}$$

On a donc, pour tout $J \in \mathbb{N}^s$,

$$(3.2.7) \qquad \frac{|h_J|}{r^{-j} M_j} \leq ||\mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

On obtient alors l'inégalité voulue en passant au sup. $\diamondsuit$

3.3 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soient $\mathcal{A}(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} a_J X^J$, $\mathcal{B}(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} b_J X^J$ et $S(y) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j y^j$, on notera $\mathcal{A} << S$, lorsque, pour tout entier j, on a $\sum_{|J|=j} |a_J| \leq |s_j|$. Si les coefficients s_j sont positifs, on a alors facilement la propriété

$$(3.3.1) \qquad \mathcal{A} << S,\ \mathcal{B} << S \text{ implique } \mathcal{A}\mathcal{B} << S^2.$$

3.4 PROPRIÉTÉ

Dans la suite, on note aussi $(\mathcal{P})$ la propriété

$$(\mathcal{P}). \qquad (\forall\ P \in \mathbb{C}[X])\ (P \circ F = 0 \Rightarrow P = 0)$$

Les deux lemmes suivants reprennent des idées et des notations de P. M. Eakin et G. M. Harris.

On suppose que M et N vérifient (3.1.a) et l'une ou l'autre des hypothèses (3.1.b) ou (3.1.c).

3.5 LEMME

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \ldots, F_s$ des séries formelles de $\mathbb{C}[[X]](N)$, ne dépendant que des $s-1$ premières variables, telles que $F = (F_1, \ldots, F_s)$ vérifie $\mathcal{P}$. Alors il existe une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$(i) \qquad P_k \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s] \text{ est de degré } k$$

(ii) $\max\{|b|$ *tel que b est un coefficient de* $P_k\} = 1$

(iii) $\exists r_0 > 0$ *tel que* $\forall r < r_0$, $\forall e \in \mathbb{N}^*$ $lim_{k\to\infty}(M_{ek}||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$.

Preuve. Chaque $P_k \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_s]$ de degré k a $\binom{k+s}{s}$ coefficients. On peut écrire

$$(3.5.1) \qquad P_k(F_1,\ldots,F_s) = \sum_{i_1,\ldots,i_{s-1}} l_{i_1,\ldots,i_{s-1}}(\text{coeff.}P_k)X_1^{i_1}\ldots X_{s-1}^{i_{s-1}},$$

où les $l_{i_1,\ldots,i_{s-1}}$ sont des formes linéaires agissant sur les coefficients de P_k. Par hypothèse, on a donc $P_k(F_1,\cdots,F_s) \neq 0$. De plus, pour tout entier I_0, le nombre de termes de degré $\leq I_0$ dans $P_k(F_1,\ldots,F_s)$ est $\binom{I_0+s-1}{s-1}$. Et donc, pour chaque entier I_0, tel que $\binom{I_0+s-1}{s-1} < \binom{k+s}{s}$, on peut choisir P_k tel que $\text{ord}(P_k(F_1,\ldots,F_s)) \geq I_0$. Or l'inégalité $\binom{I_0+s-1}{s-1} < \binom{k+s}{s}$ est équivalente à

$$(I_0+s-1)(I_0+s-2)\ldots(I_0+s-(s-1)) < \frac{(k+s)(k+s-1)\ldots(k+s-(s-1))}{s}.$$

Le membre de gauche de cette dernière inégalité est inférieur ou égal à $(I_0+s-1)^{s-1}$ et le membre de droite est supérieur ou égal à $\frac{k^s}{s}$. Ainsi, pour $I_0 < \frac{k^{s/(s-1)}}{s^{1/(s-1)}} - s + 1$, on peut choisir P_k tel que l'on ait $\text{ord}(P_k(F_1,\ldots,F_s)) \geq I_0$. Donc, pour k suffisamment grand, on a $\frac{k^{s/(s-1)}}{s^{1/(s-1)}} - s + 1 > 0$. On peut donc choisir P_k tel que

$$(3.5.2) \qquad \text{ord}(P_k(F_1,\ldots,F_s)) \geq [C_{10}k^{s/(s-1)}],$$

pour une constante $C_{10} > 0$ bien choisie.

Pour obtenir (ii) du lemme, on divise P_k ainsi construit par le plus grand coefficient en valeur absolue.

Par hypothèse, il existe $t_0 > 0$ et $B > 0$ tels que, pour tout $t \leq t_0$ et pour tout $l = 1,2,\ldots,s$, on ait $||F_l||_{\tilde{t}}^{(N)} < B$. On obtient alors facilement $F_l << \sum_{k=0}^{\infty} BN_k\frac{y^k}{t^k}$. Ainsi, si on note $P_k = \sum_{i=0}^{k}\sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^s;\\|I|=i}} p_IX^I$, on obtient, en tenant compte de (ii),

$$(3.5.3) \qquad \forall t \leq t_0,\ \sum_{i=0}^{k}\sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^s;\\|I|=i}} p_IF_1^{i_1}\ldots F_s^{i_s} << \sum_{i=0}^{k}\sum_{\substack{I\in\mathbb{N}^s;\\|I|=i}} (\sum_{h=0}^{\infty} BN_h\frac{y^h}{t^h})^i.$$

Or, comme $i = |I| \leq k$, on a $(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h\frac{y^h}{t^h})^i << (\sum_{h=0}^{\infty} BN_h\frac{y^h}{t^h})^k$ et donc on en déduit l'inégalité

$$(3.5.4) \qquad \forall t \leq t_0,\ P_k(F_1,\ldots,F_s) << \binom{k+s}{s}(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h\frac{y^h}{t^h})^k.$$

On montre alors facilement par récurrence que

$$(\sum_{h=0}^{\infty} N_h \frac{y^h}{t^h})^k << \sum_{h=0}^{\infty} N_h \binom{h+k-1}{k-1} \frac{y^h}{t^h}. \tag{3.5.5}$$

En effet, pour $k = 2$, on a

$$(\sum_{h=0}^{\infty} N_h \frac{y^h}{t^h})^2 = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i+j=h} (N_i N_j) \frac{y^h}{t^h}, \tag{3.5.6}$$

et, en utilisant alors la convexité logarithmique de la suite N, on a aisément

$$(\sum_{h=0}^{\infty} N_h \frac{y^h}{t^h})^2 << \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+1}{1} N_h \frac{y^h}{t^h}. \tag{3.5.7}$$

On suppose la propriété vraie au rang $k-1$ et on regarde ce qui se passe au rang k. On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$(\sum_{h=0}^{\infty} N_h \frac{y^h}{t^h})^k << \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i+j=h} \binom{i+k-2}{k-2} N_i N_j \frac{y^h}{t^h}, \tag{3.5.8}$$

et donc, en utilisant de nouveau la convexité logarithmique de la suite N et l'égalité $\sum_{i+j=h} \binom{i+k-2}{k-2} = \binom{h+k-1}{k-1}$, on obtient le résultat.

Ainsi, on a donc

$$\forall t \leq t_0,\ P_k(F_1, \dots, F_s) << \binom{k+s}{s} B^k \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+k-1}{k-1} N_h \frac{y^h}{t^h}. \tag{3.5.9}$$

On utilise alors le fait que $\mathrm{ord}(P_k(F_1, \dots, F_s)) \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]$ et que $\binom{h+k-1}{k-1} \leq 2^{h+k}$ pour obtenir

$$\forall t \leq t_0,\ P_k(F_1, \dots, F_s) << 2^{s+k} 2^k B^k \sum_{h \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]} 2^h N_h \frac{y^h}{t^h}. \tag{3.5.10}$$

Premier cas : La suite M vérifie (3.1.b).

L'inégalité (3.5.10) devient, par définition de la norme, en utilisant l'inégalité $N_h \leq D^h M_h$,

$$\forall t \leq t_0,\ ||P_k(F_1, \dots, F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)} \leq 2^s 4^k B^k (\frac{2Dr}{t})^{[C_{10} k^{s/(s-1)}]} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2Dr)^h}{t^h}. \tag{3.5.11}$$

On a alors, pour tout $e \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \leq t_0$,

(3.5.12)

$$(M_{ek} ||P_k(F_1, \dots, F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq 2^{s/k} 4B (M_{ek})^{1/k} (\frac{2Dr}{t})^{[C_{10} k^{1/(s-1)}]} (\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2Dr)^h}{t^h})^{1/k}.$$

On remarque facilement alors que, pour $r < t/(2D)$, la série de droite converge. On note S sa somme. On a ainsi

$$(M_{ek}||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq (2^s S)^{1/k} 4B(M_{ek})^{1/k}(\frac{2Dr}{t})^{[C_{10}k^{1/(s-1)}]}. \tag{3.5.13}$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse (H_3). En effet, d'après (3.1.1), on obtient l'existence d'un entier i tel que

(3.5.14)

$$\forall e > 0,\ \forall t \leq t_0\ (M_{ek}||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq (2^s S)^{1/k} 4BE^e(ek)^{ei}(\frac{2Dr}{t})^{[C_{10}k^{1/(s-1)}]}.$$

Il est alors facile de conclure que, pour tout $t \leq t_0$, il existe r_0 tel que, pour tout $r < \min(r_0, t/(2D))$ et pour tout $e > 0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty}(M_{ek}||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$.

Second cas : Les suites M et N vérifient (3.1.c).

L'inégalité (3.5.10) devient, par définition,

$$\forall t \leq t_0,\ ||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)} \leq 2^s 4^k B^k \sum_{h\geq[C_{10}k^{s/(s-1)}]} \frac{N_h}{M_h}\frac{(2r)^h}{t^h}. \tag{3.5.15}$$

On a alors, pour tout $e > 0$ et tout $t \leq t_0$,

$$(M_{ek}||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq 2^{s/k}4B\Big(\sum_{h\geq[C_{10}k^{s/(s-1)}]} M_{ek}\frac{N_h}{M_h}\frac{(2r)^h}{t^h}\Big)^{1/k}. \tag{3.5.16}$$

On utilise alors l'inégalité (3.1.c). On a donc

$$\frac{N_h}{M_h} \leq (D'^{1/(1+\epsilon)})^h M_h^{\epsilon/(1+\epsilon)}. \tag{3.5.17}$$

On obtient alors

(3.5.18)

$$(M_{ek}||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq 2^{s/k}4B\frac{M_{ek}^{1/k}}{(M_{[C_{10}k^{s/(s-1)}]})^{\epsilon/k(1+\epsilon)}}\Big(\sum_{h\geq[C_{10}k^{s/(s-1)}]}\frac{(2D'^{1/(1+\epsilon)}r)^h}{t^h}\Big)^{1/k}.$$

D'une part, on remarque que l'on a, pour k suffisament grand,

$$[C_{10}k^{s/(s-1)}] \geq e[\frac{1+\epsilon}{\epsilon}]k, \tag{3.5.19}$$

D'autre part, on a clairement d'après (H_1), pour tout entier $\alpha \geq 1$,

$$M_{\alpha k} \geq M_k^{\alpha}. \tag{3.5.20}$$

De (3.5.18), on tire alors, en appliquant (3.5.20) avec $\alpha = [\frac{1+\epsilon}{\epsilon}]$,

$$(M_{ek}||P_k(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq 2^{s/k}4B\Big(\sum_{h\geq[C_{10}k^{s/(s-1)}]}\frac{(2D'^{1/(1+\epsilon)}r)^h}{t^h}\Big)^{1/k}. \tag{3.5.21}$$

On remarque facilement alors que, pour $r < t/(2D')$, la série de droite converge. Il est alors facile de conclure que, pour tout $t \leq t_0$, il existe r_0 tel que, pour tout $r < \min(r_0, t/(2D))$ et pour tout entier $e > 0$, on a $\lim_{k\to\infty} (M_{ek}||P_k(F_1, \dots, F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$. $\diamondsuit$

Remarque : La condition (H_3) n'est pas nécessaire. En effet, il suffit que la suite M vérifie la condition suivante

il existe une constante C positive telle que $M_n \leq C^{n^{\frac{s}{s-1}}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Clairement, (H_3) implique cette dernière condition. Sous cette hypothèse, on déduit de (3.5.13) que l'on a

(3.5.14′)

$$\forall e > 0,\ \forall t \leq t_0\ (M_{ek}||P_k(F_1, \dots, F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq (2^s S)^{1/k} 4BE^e (C^{e^{s/(s-1)}})^{k^{1/(s-1)}} (\frac{2Dr}{t})^{[C_{10}k^{1/(s-1)}]}.$$

Il est alors facile de conclure que, pour r suffisament petit, on a

$$\lim_{k\to\infty} (M_{ek}||P_k(F_1, \dots, F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0.$$

3.6 LEMME

Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle, sans terme constant, de $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ et dont le jacobien Φ est nul. Alors il existe deux applications formelles G et H, de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$, appartenant à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$, dont les jacobiens sont non nuls et telles que $G \circ F \circ H$ ne dépende que des $s-1$ premières variables.

Preuve. Quitte à changer l'ordre des variables et des séries, on peut supposer $\frac{\partial F_1}{\partial X_1} \neq 0$. Sinon F ne dépend déjà que de $s-1$ variables. On montre alors que l'application F peut être mise sous la forme $(X_1^d, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_s)$. En effet, soient d l'ordre de F_1 et P_d le polynôme homogène de degré d de F_1. Soit $(\lambda_{i,j})_{i,j=1}^s$ une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{C}$ telle que $P_d(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{s,1}) \neq 0$. On pose

$$T_1(X) = (\sum_{i=1}^s \lambda_{1,i} X_i, \dots, \sum_{i=1}^s \lambda_{s,i} X_i). \tag{3.6.1}$$

Ainsi T_1 est une application analytique dont le jacobien est non identiquement nul. On compose alors F par T_1. On obtient alors une application de la forme $F^{(1)} = (F_1^{(1)}, \dots, F_s^{(1)})$ avec

$$F_1^{(1)}(X) = P_d(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{s,1}) X_1^d + \dots + P_d(\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s}) X_s^d + R(X), \tag{3.6.2}$$

avec $R(X)$ une série formelle, d'ordre supérieur ou égal à d, sans terme du type X_i^d, pour tout $i = 1, \dots, s$. On définit alors $T_2(X) = (X_1, X_1X_2, \dots, X_1X_s)$. De nouveau, T_2 est une application analytique dont le jacobien est non identiquement nul. En composant $F^{(1)}$ par T_2, on obtient $F^{(2)}(X) = (F_1^{(2)}(X), \dots, F_s^{(2)}(X))$, avec

$$(3.6.3) \qquad (F_1^{(1)} \circ T_2)(X) = X_1^d Q(X),$$

où $Q(X)$ est une série formelle inversible. On peut donc définir pour cette série une racine d-ième $Q^{1/d}$. En outre, puisque $F_1^{(1)}(X)$ est tel qu'il existe une constante A telle que $||F_1^{(1)}||_{A,N} < \infty$, on a aussi $||Q||_{A,N} < \infty$. Il existe alors une constante A' telle que

$$(3.6.4) \qquad ||Q^{1/d}||_{A',N} < \infty.$$

En effet, $\tilde{Q} = Q^{1/d}$ est la composée de la série convergente $(Q(0) + y)^{1/d}$ avec la série formelle $Q(X) - Q(0)$. La proposition 1.8 assure alors (3.6.4). On définit alors une application inversible Γ, vérifiant les mêmes conditions de croissance que F, en posant

$$(3.6.5) \qquad \Gamma(X) = (X_1 Q^{1/d}, X_2, \dots, X_s).$$

On pose

$$(3.6.6) \qquad \tilde{F} = F^{(2)} \circ \Gamma^{-1}.$$

On obtient donc

$$(3.6.7) \qquad \tilde{F} = (X_1^d, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_s).$$

Si aucune des séries $\tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_s$ ne dépend de X_2, on a le résultat annoncé. Sinon, on recommence le processus avec la variable suivante. A une certaine étape, les restes $\tilde{F}_j$ seront indépendants d'une des variables restantes, sinon, au bout de s étapes, on aura réduit F en

$$(3.6.8) \qquad F = (X_1^{d_{1,1}}, g_2(X_1) + X_1^{d_{1,2}} X_2^{d_{2,2}}, \dots, g_s(X_1, \dots, X_{s-1}) + X_1^{d_{1,s}} X_2^{d_{2,s}} \dots X_s^{d_{s,s}}),$$

ce qui contredit l'hypothèse de nullité du jacobien. ♢

On déduit des lemmes 3.5 et 3.6 le résultat suivant.

3.7 LEMME

Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle, sans terme constant, de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$, appartenant à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$, et dont le jacobien Φ est nul. Soient C_0 et C' deux constantes strictement positives et d un entier supérieur ou égal à 1. Il existe une série formelle $\mathcal{A}$ qui ne satisfait pas l'inégalité

$$||\mathcal{A}||_{C',M^{(d)}} \leq ||\mathcal{A} \circ F||_{C_0,M} < \infty.$$

Preuve.

Premier cas :
On suppose que l'application F ne vérifie pas la propriété $(\mathcal{P})$. On a alors l'existence d'un polynôme P de degré p tel que $P(F_1,\cdots,F_s)=0$. Quitte à le diviser par le maximum des modules de ses coefficients, on peut supposer $\max\{|a|,\ a \text{ coefficient de } P\}=1$. En posant alors

$$\mathcal{A}(X_1,\cdots,X_s)=\sum_{i=\max(2,p)}^{\infty} a_{2i!}(P(X_1,\ldots,X_s))^{\frac{i!}{p}}X_1^{i!}, \tag{3.7.a}$$

on remarque que $\mathcal{A}$ est bien défini car, pour chaque i, $(P(X_1,\ldots,X_s))^{\frac{i!}{p}}X_1^{i!}$ est de degré $2(i!)$ et d'ordre $\geq i!$. Ainsi, les termes d'indice $i\geq 2$ ne se mélangent pas car $2(i!)<(i+1)!$. Avec un bon choix de $a_{2(i!)}$, on aura $||\mathcal{A}||_{C',M^{(d)}}=\infty$ et, par construction, $\mathcal{A}\circ F=0$, ce qui donne le résultat voulu.

Second cas :
Dans ce cas, on suppose que l'application F vérifie la propriété $(\mathcal{P})$. On utilise alors le fait que toute application formelle telle que $F(0)=0$ et dont le jacobien est identiquement nul ne dépend, à changement de variables près, que des $s-1$ premières variables. Le lemme 3.6 donne deux applications formelles G et H, satisfaisant les mêmes conditions de croissance que F, telles que l'application $T=G\circ F\circ H$ ne dépende que des $s-1$ premières variables. Alors, en utilisant le lemme 3.5, on pose, pour $r>0$ assez petit,

$$\mathcal{A}(X)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{||P_{i!}(T_1,\ldots,T_s)||_{\tilde{r}}^{(M)}}P_{i!}(X_1,\ldots,X_s)X_1^{i!}. \tag{3.7.b}$$

On remarque que $\mathcal{A}$ est bien défini car, pour chaque i, $P_{i!}(T_1,\ldots,T_s)\neq 0$ et $P_{i!}(X_1,\ldots,X_s)X_1^{i!}$ est de degré $2(i!)$ et d'ordre $\geq i!$. Ainsi, les termes d'indice $i\geq 2$ ne se mélangent pas car $2(i!)<(i+1)!$. En outre, pour chaque indice i, le polynôme $P_{i!}$ a un coefficient égal à 1. De plus, d'après le lemme 3.5, pour tout entier k, $i!\leq k\leq 2i!$, et, pour tout $e>0$, on a $\lim\limits_{i\to\infty}(1/||M_{ek}P_{i!}(T_1,\ldots,T_s)||_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k}=\infty$. Ainsi, pour tout $d>0$ et pour tout $r>0$, la quantité $||\mathcal{A}||_{\tilde{r}}^{M^{(d)}}$ n'est pas finie. Mais, on remarque, quitte à changer r, que l'on a la majoration

$$\begin{aligned}||\mathcal{A}\circ T||_{\tilde{r}}^{(M)} &\leq \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{||P_{i!}(T_1,\ldots,T_s)||_{\tilde{r}}^{(M)}}||P_{i!}(F_1,\ldots,F_s)||_{\tilde{r}}^{(M)}(||T_1||_{\tilde{r}}^{(M)})^{i!}\\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty}(||T_1||_{\tilde{r}}^{(M)})^{i!}<\infty.\end{aligned}$$

On utilise alors le lemme 3.2 pour conclure. Le lemme est donc vrai pour l'application T.

Supposons qu'il ne soit pas vérifié pour l'application F. On suppose donc que toutes les séries formelles $\tilde{\mathcal{A}}$, telles que $||\tilde{\mathcal{A}}\circ F||_{C_0,M}<\infty$, satisfont l'inégalité

$$||\tilde{\mathcal{A}}||_{C',M^{(d)}}\leq ||\tilde{\mathcal{A}}\circ F||_{C_0,M} \tag{3.7.1}$$

pour C' et d bien choisis. En utilisant le lemme 3.2, cela revient à supposer que toutes les séries formelles $\tilde{\mathcal{A}}$, vérifiant $||\tilde{\mathcal{A}} \circ F||_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty$, satisfont l'inégalité

$$(3.7.2) \qquad ||\tilde{\mathcal{A}}||_{\tilde{r}'}^{(M^{(d)})} \leq ||\tilde{\mathcal{A}} \circ F||_{\tilde{r}}^{(M)}$$

pour r' et d bien choisis. Quitte à changer r, comme les coefficients des séries de l'application H sont contrôlées par la suite N, donc aussi par la suite M, on peut supposer, d'après la proposition 1.8,

$$(3.7.3) \qquad ||\tilde{\mathcal{A}} \circ F \circ H||_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

On a donc, en notant k_h la constante associée, dans le théorème 2.6, à l'application H, puisque celle-ci est de jacobien non nul, l'existence d'une constante r_1 telle que

$$(3.7.4) \qquad ||\tilde{\mathcal{A}} \circ F||_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})} \leq ||\tilde{\mathcal{A}} \circ F \circ H||_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

Soit $\mathcal{A}$ la série construite ci-dessus. On pose $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \circ G$. L'inégalité (3.7.4) devient

$$(3.7.5) \qquad ||\mathcal{A} \circ G \circ F||_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})} \leq ||\mathcal{A} \circ G \circ F \circ H||_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

Or, par hypothèse, on a $||\mathcal{A} \circ G||_{\tilde{r}'}^{(M^{(d)})} \leq ||\mathcal{A} \circ G \circ F||_{\tilde{r}}^{(M)}$. Quitte à diminuer r', on a donc aussi

$$(3.7.6) \qquad ||\mathcal{A} \circ G||_{\tilde{r}'}^{(M^{(k_h d)})} \leq ||\mathcal{A} \circ G \circ F||_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})}.$$

Comme le jacobien de l'application G est non nul, d'après le théorème 2.6, il existe un entier k_g et une constante r_2 tels que

$$(3.7.7) \qquad ||\mathcal{A}||_{\tilde{r}_2}^{(M^{(k_g k_h d)})} \leq ||\mathcal{A} \circ G||_{\tilde{r}'}^{(M^{(k_h d)})}.$$

On obtient donc, en regroupant les inégalités (3.7.5), (3.7.6) et (3.7.7), l'inégalité

$$(3.7.8) \qquad ||\mathcal{A}||_{\tilde{r}_2}^{(M^{(k_h k_g d)})} \leq ||\mathcal{A} \circ G \circ F \circ H||_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

Ceci contredit la construction de la série $\mathcal{A}$. On a donc le résultat annoncé. $\diamondsuit$

On a donc, en regroupant le théorème 2.6 et le lemme 3.7, le théorème suivant :

3.8 THÉORÈME

Soient M et N deux suites vérifiant les conditions (3.1.a) et l'une ou l'autre des conditions (3.1.b) ou (3.1.c). Soit $F = (F_1, \ldots, F_s)$ une application formelle de $\mathbb{C}[[X]](N)^s$ de jacobien Φ. Soit C_0 une constante strictement positive. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \qquad ord(\Phi) < \infty,$$

$$(ii) \qquad \begin{array}{c} \textit{il existe } C', C' > 0 \textit{ et } d \textit{ entier } d \geq 1 \textit{ tels que} \\ \textit{pour tout } \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]], \textit{ on ait } ||\mathcal{A}||_{C',M^{(d)}} \leq ||\mathcal{A} \circ F||_{C_0,M}. \end{array}$$

3.9 REMARQUES

a- Le théorème 3.8 contient le théorème C de [CC1]. En effet, dans ce cas on a $N = \mathbf{1}$ et M et N vérifient clairement (3.1.c).

b- Il est intéressant de noter que, dans le cas où l'application formelle F ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$, la série formelle (3.7.a) construite dans la preuve du lemme 3.7 peut appartenir à n'importe quelle classe avec un bon choix des coefficients $a_{2i!}$. On peut alors se demander, dans le cas où l'application formelle F vérifie la propriété $\mathcal{P}$, à quelle classe appartient la série formelle (3.7.b) ?

c- L'estimation du théorème 2.6 est optimale. En effet, $\mu - \nu + 1$ est le meilleur exposant d possible dans l'inégalité (ii) du théorème 3.8. Il suffit, par exemple, de considérer l'application $F(X) = (X_1^i, X_2, \ldots, X_s)$, où i est un entier non nul. Un calcul élémentaire donne $\mu - \nu + 1 = i$. La série $\mathcal{A}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{ij} X_1^j$ est alors telle que $||\mathcal{A} \circ F||_{C,M} = ||\mathcal{A}||_{C^i,M^{(i)}}$.

d- On peut noter aussi que l'assertion (i) du théorème 3.8 est équivalente à

$$\text{il existe une constante } D' > 0 \text{ telle que } \operatorname{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq D' \operatorname{ord}(\mathcal{A}).$$

$\diamondsuit$

Partie II : Division dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée. Applications.

INTRODUCTION

Dans cette partie, $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels positifs qui vérifie les propriétés

(H_1) $\qquad M_0 = 1$ et $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est logarithmiquement convexe,

(H_2) $\qquad$ il existe $C \geq 1$ tel que $M_{n+1} \leq C^{n+1} M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note aussi, dans la suite, pour tout entier fixé k, M_{+k} la suite $\{M_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$, M_{-k} la suite $\{M_{n-k}\}_{n\in\mathbb{N},n\geq k}$ et $M^{(k)}$ la suite $\{M_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Afin d'étudier les propriétés de $\mathbb{K}[[X]](M)$, on se propose d'établir, dans cet anneau, un théorème de division du type Weierstrass par plusieurs séries. Une version du théorème de préparation de Weierstrass et de division par une seule série a déjà été donnée par J. Chaumat et A-M. Chollet [CC2]. On retrouve leur résultat ici. Il s'agit des théorèmes 3.1 et 3.2. Dans le même article, les auteurs montrent que, sous l'hypothèse (H_1), la condition (H_2) est nécessaire et suffisante pour que l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ soit noetherien. On notera que les énoncés font appel à une notion de p-régularité plus restrictive que la notion de régularité d'ordre p classique dans $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\{X\}$. On sait, en effet, [CC2] que la division dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ par une série régulière d'ordre p met, en général, en évidence une perte de régularité sur la croissance des coefficients du quotient et du reste dans cette division. Ce phénomène a été noté également par M. A. Zurro [Z1], [Z2], dans le cadre de la division par plusieurs séries formelles, au sens d'Hironaka [AHV]; en effet, dans [Z2], on trouve des énoncés avec "perte de régularité" concernant les anneaux à croissance Gevrey ($M_n = n!^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Dans cette partie, en généralisant à plusieurs séries la notion de p-régularité, on établit un théorème de division sans perte au sens d'Hironaka. C'est le théorème 2.2. Une autre version est le théorème 2.4. Pour cela, on adapte une preuve, donnée par J. Briançon, d'un théorème de division dans $\mathbb{K}\{X\}$, par perturbation d'un épimorphisme [Br]. On applique alors ce théorème au problème de division par un idéal. On considère $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Peut-on associer, à toute série de $\mathbb{K}[[X]](M)$, un reste unique, dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, modulo l'idéal $\mathcal{I}$? Le corollaire 4.9 du théorème 4.8 donne une réponse affirmative à ce problème. Pour cela, on construit une famille génératrice de $\mathcal{I}$ en s'inspirant des bases de Groebner d'un idéal polynômial [CLO]. On déduit alors du théorème 4.8 une nouvelle preuve de la noetherianité de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On obtient également, comme conséquence, le théorème 4.11 suivant.

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]](M)$. Alors $\mathcal{I}_M = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[[X]](M)$.

On note que ce résultat peut être vu aussi comme corollaire du théorème d'approximation d'Artin dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ (voir [partie III] et [Mo]).

§1. UNE MÉTHODE DE DIVISION.

1.1 NOTATIONS

Dans la suite, $\mathcal{A}$, munie de la norme $||.||$, désignera une algèbre de Banach commutative unitaire. On a, en particulier, pour a et b dans $\mathcal{A}$, $||ab|| \leq ||a||\ ||b||$.

On considère alors $\mathcal{A}[[X]]$ l'ensemble des séries formelles, d'indéterminées $X = (X_1, \ldots, X_s)$, à coefficients dans $\mathcal{A}$. Dans toute la suite, pour tout $f \in \mathcal{A}[[X]]$, on note f_J l'élément de $\mathcal{A}$ défini par la formule $f(X) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s} f_J X^J$. Soit $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_s) \in (\mathbb{R}_+^*)^s$ un poly-rayon. On pose

$$||f||_\rho^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{J\in\mathbf{N}^s;|J|=j} \frac{||f_J||}{M_j}\rho^J.$$

On note alors

$$\mathcal{A}[[X]](M,\rho) = \{f \in \mathcal{A}[[X]];\ ||f||_\rho^{(M)} < \infty\}.$$

On vérifie aisément que $||.||_\rho^{(M)}$ est une norme sur $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$.

Lemme 1.1.1

L'espace $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$ muni de la norme $||.||_\rho^{(M)}$ est une algèbre de Banach.

Preuve. On pourra par exemple consulter [GR]. On donne ici une idée de la preuve. Soit $(f_m)_{m\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(\mathcal{A}[[X]](M,\rho), ||.||_\rho^{(M)})$. On a donc :

(1.1.1.1) $\quad \forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq N$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $||f_{n+p} - f_n||_\rho^{(M)} < \epsilon$,

c'est à dire

(1.1.1.2)

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall n \geq N \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J\in\mathbf{N}^s;\\|J|=j}} \frac{||(f_{n+p})_J - (f_n)_J||}{M_j}\rho^J < \epsilon.$$

On obtient ainsi, pour tout multi-indice $J \in \mathbb{N}^s$,

(1.1.1.3) $\quad \forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq N$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $||(f_{n+p})_J - (f_n)_J|| < \epsilon\dfrac{M_j}{\rho^J}$,

Pour tout multi-indice J, d'après (1.1.1.3) la suite $((f_m)_J)_{m\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{A}$; elle est donc convergente. On note f_J sa limite. Il reste alors à prouver que $f(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J\in\mathbf{N}^s;\\|J|=j}} f_J X^J$ appartient à $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$. On montre pour cela que

(1.1.1.4) $\quad ||f||_\rho^{(M)} \leq ||f - f_m||_\rho^{(M)} + ||f_m||_\rho^{(M)} \leq \epsilon + ||f_m||_\rho^{(M)}$,

pour m bien choisi, et ceci quelque soit $\epsilon > 0$.
Il est enfin facile de vérifier que, pour f et g des éléments de $\mathcal{A}[[X]](M,r)$,

$$||fg||_\rho^{(M)} \leq ||f||_\rho^{(M)} \; ||g||_\rho^{(M)}.$$

En effet, on a

$$||fg||_\rho^{(M)} = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} \frac{||\sum_{H+I=J} f_H g_I||}{M_j} \rho^J.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, le fait que $\mathcal{A}$ soit une algèbre de Banach et la convexité logarithmique de la suite M, on obtient

$$||fg||_\rho^{(M)} \leq \sum_{J\in\mathbb{N}^s} \frac{\sum_{H+I=J} ||f_H|| \; ||g_I||}{M_h M_i} \rho^J = ||f||_\rho^{(M)} \; ||g||_\rho^{(M)}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. $\diamondsuit$

On pose alors

$$\mathcal{A}[[X]](M) = \bigcup_{\rho>0} \mathcal{A}[[X]](M,\rho).$$

Pour tout $f \in \mathcal{A}[[X]]$, on définit aussi l'ensemble d'exposants

$$\mathrm{Exp}_X(f) = \{B \in \mathbb{N}^s;\ f_B \neq 0\}.$$

Soient p multi-indices de $\mathbb{N}^s$, $E_1, \ldots, E_p$, on note

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{p} (E_i + \mathbb{N}^s). \tag{1.1.1}$$

On choisit alors une partition $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_p$ de Δ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, p$, on ait $\Delta_i \subset E_i + \mathbb{N}^s$. Par exemple, on pose $\Delta_1 = E_1 + \mathbb{N}^s$, $\Delta_2 = (E_2 + \mathbb{N}^s) - \Delta_1$, $\ldots$, $\Delta_i = (E_i + \mathbb{N}^s) - (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_{i-1})$. Dans toute la suite, on dira que $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i, pour $i = 1, \ldots, p$.
On note alors

$$(\mathcal{A}[[X]](M,\rho))^{E_i} = \{f \in \mathcal{A}[[X]];\ \mathrm{Exp}_X(f(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i \text{ et } ||f||_\rho^{(M_{+|E_i|})} < \infty\}, \tag{1.1.2}$$

$$R_\Delta(M,\rho) = \{f \in \mathcal{A}[[X]](M,\rho);\ f_B = 0 \text{ pour tout } B \in \Delta\}. \tag{1.1.3}$$

On considère alors l'espace produit

$$H_\Delta(M,\rho) = \times_{i=1}^{p} (\mathcal{A}[[X]](M,\rho))^{E_i} \times R_\Delta(M,\rho)$$

muni de la norme

$$||(g_1,\ldots,g_p;h)||_\rho^{\Delta(M)} = \sum_{i=1}^{p} \rho^{E_i} ||g_i||_\rho^{(M_{+|E_i|})} + ||h||_\rho^{(M)}.$$

Cette norme est, par construction, bien définie. On vérifie facilement que l'espace $H_\Delta(M,\rho)$ muni de la norme $||.||_\rho^{\Delta(M)}$ est un espace de Banach.

1.2 LEMME

Étant donnés p multi-indices E_i, $1 \leq i \leq p$, on leur associe l'application ϕ_1 définie par

$$(1.2.1) \qquad \begin{array}{rrcl} \phi_1 : & H_\Delta(M,\rho) & \rightarrow & \mathcal{A}[[X]](M,\rho) \\ & (g_1,\ldots,g_p;h) & \rightarrow & \phi_1(g_1,\ldots,g_p;h) = \sum_{i=1}^{p} g_i X^{E_i} + h. \end{array}$$

Pour tout multi-rayon ρ, ϕ_1 est alors une application linéaire bijective de $H_\Delta(M,\rho)$ sur $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$ telle que

$$||\phi_1(g_1,\ldots,g_p;h)||_\rho^{(M)} = ||(g_1,\ldots,g_p;h)||_\rho^{\Delta(M)}.$$

Preuve. La linéarité de l'application est évidente. En outre, on a, en utilisant la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i, $1 \leq i \leq p$,

$$(1.2.2) \qquad \begin{array}{rcl} ||\phi_1(g_1,\ldots,g_p;h)||_\rho^{(M)} & = & ||\sum_{i=1}^{p} g_i X^{E_i} + h||_\rho^{(M)} \\ & = & ||\sum_{i=1}^{p} g_i X^{E_i}||_\rho^{(M)} + ||h||_\rho^{(M)}. \end{array}$$

En écrivant alors, pour tout $i = 1,\ldots,p$, $g_i = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\|B|=b}} g_{i_B} X^B$, l'égalité (1.2.2) donne

$$(1.2.3) \qquad \begin{array}{rcl} ||\phi_1(g_1,\ldots,g_p;h)||_\rho^{(M)} & = & ||\sum_{i=1}^{p}\sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\|B|=b}} g_{i_B} X^B X^{E_i}||_\rho^{(M)} + ||h||_\rho^{(M)} \\ & = & \sum_{i=1}^{p}\sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\|B|=b}} \dfrac{||g_{i_B}||}{M_{b+|E_i|}} \rho^{B+E_i} + ||h||_\rho^{(M)}. \end{array}$$

On tire de (1.2.3)

$$(1.2.4) \qquad \begin{array}{rcl} ||\phi_1(g_1,\ldots,g_p;h)||_\rho^{(M)} & = & \sum_{i=1}^{p} \rho^{E_i} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\|B|=b}} \dfrac{||g_{i_B}||}{M_{b+|E_i|}} \rho^{B} + ||h||_\rho^{(M)} \\ & = & \sum_{i=1}^{p} \rho^{E_i} ||g_i||_\rho^{M_{+|E_i|}} + ||h||_\rho^{(M)}. \end{array}$$

Le membre de droite de l'égalité (1.2.4) n'est autre que $||(g_1, \ldots, g_p; h)||_\rho^{\Delta(M)}$, ce qui montre bien, d'une part, que ϕ_1 envoie, pour tout multi-rayon ρ, $H_\Delta(M, \rho)$ sur $\mathcal{A}[[X]](M, \rho)$, et, d'autre part, que l'on a une isométrie.

Il reste à prouver le caractère surjectif de l'application. On considère alors f un élément de $\mathcal{A}[[X]](M, \rho)$.

On a $f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J|=j}} f_J X^J$. On peut alors écrire, en utilisant la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i, $1 \leq i \leq p$,

$$f = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ J \in \Delta_i; \\ |J|=j}} f_J X^J + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ J \notin \Delta; \\ |J|=j}} f_J X^J. \tag{1.2.5}$$

Autrement dit, on a

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i X^{E_i} + h, \tag{1.2.6}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_i & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ J \in \Delta_i; \\ |J|=j}} f_J X^{J-E_i} \\ h & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ J \notin \Delta \\ |J|=j}} f_J X^J. \end{array} \right. \tag{1.2.7}$$

En utilisant la partition, on a aussi, comme f appartient à $\mathcal{A}[[X]](M, \rho)$, pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$\begin{array}{r} g_i X^{E_i} \in \mathcal{A}[[X]](M, \rho) \\ h \in \mathcal{A}[[X]](M, \rho) \end{array} \tag{1.2.8}$$

Par construction, d'après (1.2.7), on a donc, pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$\mathrm{Exp}_X(g_i X^{E_i}) \subset \Delta_i, \tag{1.2.9}$$

et, d'après (1.2.8),

$$||g_i X^{E_i}||_\rho^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ J \in \Delta_i; \\ |J|=j}} \frac{||f_J||}{M_j} \rho^J < \infty. \tag{1.2.10}$$

Or, on remarque

$$(1.2.11) \qquad ||g_i||_\rho^{(M_{+|E_i|})} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ J\in\Delta_i;\\ |J|=j}} \frac{||f_J||}{M_j}\rho^{J-E_i} = \rho^{-E_i}||g_iX^{E_i}||_\rho^{(M)}.$$

Ainsi, en regroupant (1.2.9), (1.2.10) et (1.2.11), on conclut aisément que, pour tout $i = 1, \dots, p$, l'on a

$$(1.2.12) \qquad g_i \in (\mathcal{A}[[X]](M,\rho))^{E_i},$$

et

$$(1.2.13) \qquad h \in R_\Delta(M,\rho).$$

Ainsi, on a bien $(g_1, \dots, g_p; h) \in H_\Delta(M,\rho)$. L'application ϕ_1 est donc surjective de $H_\Delta(M,\rho)$ sur $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$.
Enfin, le fait que ϕ_1 soit une isométrie assure que l'application ϕ_1 est une application linéaire bijective de $H_\Delta(M,\rho)$ sur $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$, ce qui achève la preuve du lemme. $\diamondsuit$

On construit maintenant une application linéaire ϕ_2 qui sera une perturbation de ϕ_1 en ce sens que $\phi_1 + \phi_2$ sera encore une application linéaire bijective $H_\Delta(M,\rho)$ sur $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$.

1.3 DÉFINITIONS ET REMARQUES

Dans la suite, L désignera une forme linéaire positive non nulle $L : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ telle que $L(j_1, \dots, j_s) = \sum_{k=1}^{s} l_k j_k$, les coefficients l_k étant des nombres réels strictement positifs.

(1.3.1) Tout d'abord, on remarque que, pour tout $B \in \mathbb{N}^s$, il existe un nombre réel positif δ_B tel que $A \in \mathbb{N}^s$ et $L(A) - L(B) > 0$ implique $L(A) - L(B) \geq \delta_B$.

(1.3.2) On applique alors cette remarque aux multi-indices E_i. Il existe donc, pour tout $i = 1, \dots, p$, des réels strictement positifs δ_i tels que $L(A) - L(E_i) > 0$ implique $L(A) - L(E_i) \geq \delta_i$.

(1.3.3) Ensuite, soit $\tau > 0$ un réel. On notera $\tilde{\tau}$ le poly-rayon $(\tau, \dots, \tau)$ associé de ${\mathbb{R}_+^*}^s$. A chaque multi-indice E_i, $i = 1, \dots, p$, de $\mathbb{N}^s$, on associe deux séries u_i et v_i de $\mathcal{A}[[X]](M, C^{|E_i|}\tilde{\tau})$, où C est la constante de (H_2), telles que

$$u_i = \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\ L(B)>L(E_i)}} u_{iB}X^B,$$

$$v_i = \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{B \in \mathbf{N}^s} v_{iB} X^B.$$

On remarque alors que, pour tout $i = 1, \dots, p$, u_i et v_i sont telles que, pour tout $A \in \mathrm{Exp}_X(u_i)$, ou, pour tout $A \in \mathrm{Exp}_X(v_i)$, $|A| \geq |E_i|$.

1.4 LEMME

Soit $0 < \eta < 1$, *on note* $r = (\tau\eta^{l_1}, \dots, \tau\eta^{l_s})$. *L'application linéaire* ϕ_2

$$(1.4.1) \qquad \begin{array}{rrcl} \phi_2 : & H_\Delta(M, r) & \to & \mathcal{A}[[X]](M, r) \\ & (g_1, \dots, g_p; h) & \to & \phi_2(g_1, \dots, g_p; h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (u_i + v_i) g_i \end{array}$$

est bien définie et vérifie, pour tout réel η, $0 < \eta < 1$,

$$||\phi_2|| \leq \sup_{i=1,\dots,p} \{\tau^{-|E_i|} (\eta^{\delta_i} ||u_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})} + \eta^{-L(E_i)} ||v_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})})\}.$$

Preuve.

1.4.1 Première étape :

Pour vérifier que la série $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (u_i + v_i) g_i$ appartient bien à $\mathcal{A}[[X]](M, r)$, il suffit donc de s'assurer que $\displaystyle||\sum_{i=1}^{p} (u_i + v_i) g_i||_r^{(M)} < \infty$. Il suffit d'abord de le vérifier pour un terme du type $u_i g_i$. On a, par définition,

$$(1.4.1.1) \qquad ||u_i g_i||_r^{(M)} = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbf{N}^s; \\ b=|B|}} \frac{||\displaystyle\sum_{K+L=B} u_{iK} g_{iL}||}{M_b} r^B.$$

On obtient alors, en utilisant, d'une part, le fait que l'on travaille dans des algèbres de Banach, et, d'autre part, la convexité logarithmique de la suite $\{M_n\}_{n \in \mathbf{N}}$,

$$(1.4.1.2) \qquad ||u_i g_i||_r^{(M)} \leq \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbf{N}^s; \\ b=|B|}} \sum_{K+L=B} \frac{||u_{iK}||}{M_{k-|E_i|}} \frac{||g_{iL}||}{M_{l+|E_i|}} r^{K+L}.$$

Le membre de droite de l'inégalité (1.4.1.2) est bien défini puisque, d'après (1.3.3), $u_{iK} = 0$ pour $|K| = k < |E_i|$. De plus, par hypothèse, $(g_1, \dots, g_p; h)$ appartient à $H_\Delta(M, r)$; cela implique que, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$(1.4.1.3) \qquad ||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})} < \infty.$$

En outre, par hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$u_i \in \mathcal{A}[[X]](M, C^{|E_i|}\tilde{\tau}),$$

ce qui signifie, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{K \in \mathbb{N}^s; \\ |K|=k}} \frac{||u_{iK}||}{M_k} C^{|E_i|k} \tilde{\tau}^K < \infty. \tag{1.4.1.4}$$

Or, en utilisant $|E_i|$ fois l'hypothèse (H_2), on obtient, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$\begin{array}{rcl} M_k & \leq & C^k M_{k-1} \\ & \leq & C^k C^{k-1} M_{k-2} \\ & \leq & \dots \\ & \leq & C^{-\frac{(|E_i|-1)|E_i|}{2}} C^{|E_i|k} M_{k-|E_i|} \end{array} \tag{1.4.1.5}$$

Ainsi, en utilisant à nouveau (1.3.3), en minorant $\dfrac{C^{|E_i|k}}{M_k}$ par $\dfrac{C^{\frac{(|E_i|-1)|E_i|}{2}}}{M_{k-|E_i|}}$ dans l'inégalité (1.4.1.4), on obtient

$$C^{\frac{(|E_i|-1)|E_i|}{2}} \sum_{k=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{K \in \mathbb{N}^s; \\ |K|=k}} \frac{||u_{iK}||}{M_{k-|E_i|}} \tilde{\tau}^K < \infty, \tag{1.4.1.6}$$

ce qui donne exactement, en remarquant que $r \leq \tilde{\tau}$,

$$||u_i||_r^{(M_{-|E_i|})} < \infty. \tag{1.4.1.7}$$

Dans (1.4.1.2), on reconnait un produit de séries ; on a alors

$$\begin{array}{rcl} ||u_i g_i||_r^{(M)} & \leq & \left(\displaystyle\sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s; \\ b=|B|}} \frac{||u_{iB}||}{M_{b-|E_i|}} r^B \right) \left(\displaystyle\sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s; \\ |B|=b}} \frac{||g_{iB}||}{M_{b+|E_i|}} r^B \right) \\ & \leq & ||u_i||_r^{(M_{-|E_i|})} ||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})}. \end{array} \tag{1.4.1.8}$$

De là, en utilisant (1.4.1.3) et (1.4.1.7), on conclut que, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$||u_i g_i||_r^{(M)} < \infty. \tag{1.4.1.9}$$

De la même manière, en utilisant à nouveau (1.3.3), on obtient

$$||v_i||_r^{(M_{-|E_i|})} < \infty, \tag{1.4.1.10}$$

$$||v_i g_i||_r^{(M)} \leq ||v_i||_r^{(M_{-|E_i|})} ||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})} < \infty. \tag{1.4.1.11}$$

Ceci donne bien $||\sum_{i=1}^{p}(u_i+v_i)g_i||_r^{(M)}<\infty$.

1.4.2 Seconde étape : on estime la norme de ϕ_2.

On a, par définition,

$$||\phi_2(g_1,\dots,g_p;h)||_r^{(M)}=||\sum_{i=1}^{p}(u_i+v_i)g_i||_r^{(M)}. \tag{1.4.2.1}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité triangulaire et le fait que l'on se trouve dans des algèbres de Banach, on obtient, d'après (1.4.1.8) et (1.4.1.11),
(1.4.2.2)

$$\begin{aligned}||\phi_2(g_1,\dots,g_p,h)||_r^{(M)} &\leq \sum_{i=1}^{p}\Big(||u_i||_r^{(M_{-|E_i|})}||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})}+||v_i||_r^{(M_{-|E_i|})}||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})}\Big)\\ &\leq \sum_{i=1}^{p}r^{E_i}||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})}\Big(||u_i||_r^{(M_{-|E_i|})}r^{-E_i}+||v_i||_r^{(M_{-|E_i|})}r^{-E_i}\Big).\end{aligned}$$

Or, on a, d'après (1.3.2) et la définition de r,

$$\begin{aligned}||u_i||_r^{(M_{-|E_i|})}r^{-E_i} &= \sum_{b=0}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbf{N}^s;\\ L(B)>L(E_i);\\ |B|=b}}\frac{||u_{iB}||}{M_{b-|E_i|}}\tau^{b-|E_i|}\eta^{L(B-E_i)}\\ &\leq \tau^{-|E_i|}\eta^{\delta_i}||u_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})}.\end{aligned} \tag{1.4.2.3}$$

De même, on a, puisque $0<\eta<1$,

$$\begin{aligned}||v_i||_r^{(M_{-|E_i|})}r^{-E_i} &\leq \sum_{b=0}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbf{N}^s;\\ |B|=b}}\frac{||v_{iB}||}{M_{b-|E_i|}}\tau^{b-|E_i|}\eta^{L(B-E_i)}\\ &\leq \tau^{-E_i}\eta^{-L(E_i)}||v_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})}.\end{aligned} \tag{1.4.2.4}$$

On obtient alors le résultat escompté en remarquant

$$\sum_{i=1}^{p}r^{E_i}||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})}\leq ||(g_1,\dots,g_p,h)||_r^{\Delta(M)}. \tag{1.4.2.5}$$

$\diamondsuit$

1.5 LEMME DE PERTURBATION

Si on a

$$\eta^{\delta_i}||u_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})}<\frac{\tau^{|E_i|}}{2}, \tag{1.5.1}$$

et

$$(1.5.2) \qquad \left(||v_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})}\right) < \frac{\tau^{|E_i|}}{2}\eta^{L(E_i)},$$

alors l'application $\phi_1+\phi_2$ est un isomorphisme entre les deux espaces de Banach $H_\Delta(M,r)$ et $\mathcal{A}[[X]](M,r)$.

Preuve. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^{*s}$, on a donc trouvé, d'après le lemme 1.2, une isométrie bijective ϕ_1 entre les deux espaces de Banach $H_\Delta(M,\rho)$ et $\mathcal{A}[[X]](M,\rho)$. On peut donc écrire

$$(1.5.3) \qquad \phi_1+\phi_2 = \phi_1(\mathrm{Id}+\phi_1^{-1}\phi_2).$$

Ainsi, si $||\phi_2|| < 1$, on aura

$$(1.5.4) \qquad ||\phi_1^{-1}\phi_2|| \leq ||\phi_1^{-1}||\ ||\phi_2|| < 1,$$

et $\mathrm{Id}+\phi_1^{-1}\phi_2$ sera donc inversible, ce qui donnera bien l'inversibilité de l'application $\phi_1+\phi_2$, d'inverse $(\mathrm{Id}+\phi_1^{-1}\phi_2)^{-1}\phi_1^{-1}$. Par conséquent, pour tout η, $0<\eta<1$, si, en notant $r=(\tau\eta^{l_1},\ldots,\tau\eta^{l_s})$, on a (1.5.1) et (1.5.2), alors, d'après le lemme 1.4, on a

$$\begin{aligned} ||\phi_2|| &\leq \sup_{i=1,\ldots,p}\{\tau^{-|E_i|}(\eta^{\delta_i}||u_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})}+\eta^{-L(E_i)}||v_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})})\} \\ &< \sup_{i=1,\ldots,p}\{\tau^{-|E_i|}(\frac{\tau^{|E_i|}}{2}+\frac{\tau^{|E_i|}}{2})\} \\ &< 1. \end{aligned}$$

De là, $\phi_1+\phi_2$ est une application linéaire continue bijective entre les deux espaces de Banach $H_\Delta(M,r)$ et $\mathcal{A}[[X]](M,r)$. Son inverse $(\mathrm{Id}+\phi_1^{-1}\phi_2)^{-1}\phi_1^{-1}$ est continu ; on a donc un isomorphisme entre les deux espaces de Banach $H_\Delta(M,r)$ et $\mathcal{A}[[X]](M,r)$. $\diamondsuit$

On obtient alors, comme conséquence des lemmes 1.2, 1.4 et 1.5, un théorème de division dans les séries formelles à coefficients dans des algèbres de Banach commutatives et unitaires.

1.6 PROPOSITION (de L-division dans $\mathcal{A}[[X]](M)$)

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative unitaire. Soient $f_1,\ldots,f_p$ des éléments de $\mathcal{A}[[X]](M,\tilde{\tau}_1)$ et soient des multi-indices $E_1,\ldots,E_p$, de $\mathbb{N}^s$, tels que, pour tout $i=1,\ldots,p$, on ait

$$(i) \qquad (f_i)_B = 0 \text{ pour tout } B\in\mathbb{N}^s,\ |B|<|E_i|.$$

$$(ii) \qquad (f_i)_{E_i} = 1+a_i,$$

avec 1 l'élément unité de l'algèbre $\mathcal{A}$ et a_i un élément de $\mathcal{A}$. Soit L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de $\mathbb{R}^s$. On écrit, pour tout $i=1,\ldots,p$,

$$f_i(X) = X^{E_i}+u_i(X)+v_i(X),$$

avec,

$$u_i(X) = \sum_{j=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{|J|=j;\\ L(J)>L(E_i)}} (f_i)_J X^J,$$

$$v_i(X) = \sum_{j=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{|J|=j;\\ L(J)\leq L(E_i);\\ J\neq E_i}} (f_i)_J X^J + a_i X^{E_i}.$$

On a alors les conclusions suivantes.

1) Il existe τ_2, $0<\tau_2\leq\tau_1$, tel que, pour tout $0<\tau\leq\tau_2$, il existe $\eta(\tau)$, $0<\eta(\tau)<1$, tel que, pour tout $i=1,\ldots,p$, on a

$$\eta(\tau)^{\delta_i}||u_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})} < \frac{\tau^{|E_i|}}{2}.$$

2) Si, de plus, on a

$$||v_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})} < \frac{1}{2}\tau^{|E_i|}\eta(\tau)^{L(E_i)},$$

alors, il existe un poly-rayon μ de $\mathbb{R}_+^{*\,s}$ strictement inférieur à $\tilde{\tau}$, tel que, pour tout élément g de $\mathcal{A}[[X]](M,\tilde{\tau})$, il existe des séries $g_1,\ldots,g_p,h$ de $\mathcal{A}[[X]](M,\mu)$ telles que l'on ait

$$g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h, \tag{1.6.1}$$

avec

$$Exp_X(g_i(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i,\ i=1,\ldots,p, \tag{1.6.2}$$

$$h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\ |B|=b}} h_B X^B,\ \text{avec } h_B = 0 \text{ pour } B\in\Delta, \tag{1.6.3}$$

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1\cup\ldots\cup\Delta_p\cup(\mathbb{N}^s-\Delta)$ est la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i, $1\leq i\leq p$. De plus, $(g_1,\ldots,g_p;h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

Preuve. On a donc

$$f_i(X) - X^{E_i} = u_i(X) + v_i(X),$$

avec

$$u_i(X) = \sum_{j=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{|J|=j;\\ L(J)>L(E_i)}} (f_i)_J X^J,$$

$$v_i(X) = \sum_{j=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{|J|=j;\\ L(J)\leq L(E_i);\\ J\neq E_i}} (f_i)_J X^J + a_i X^{E_i}.$$

Par hypothèse, pour tout $i = 1, \ldots, p$, f_i appartient à $\mathcal{A}[[X]](M, \tilde{\tau_1})$, et donc en utilisant alors l'hypothèse (H_2) sur la suite $\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, et en procédant comme dans (1.4.1.5), on obtient, pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$(1.6.4) \qquad ||f_i||_{\frac{\tilde{\tau_1}}{C^{|E_i|}}}^{(M_{-|E_i|})} < \infty.$$

On note $e = \min_{i=1,\ldots,p}(\frac{1}{C^{|E_i|}})$. En posant alors $\tau_2 = e\tau_1$, on obtient, pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$(1.6.5) \qquad ||u_i||_{\tilde{\tau_2}}^{(M_{-|E_i|})} < \infty \text{ et } ||v_i||_{\tilde{\tau_2}}^{(M_{-|E_i|})} < \infty.$$

Ainsi, pour tout $\tau \leq \tau_2$, on a

$$(1.6.6) \qquad \begin{aligned} ||u_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})} &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbf{N}^s;\\ L(B)>L(E_i);\\ |B|=b}} \frac{||(f_i)_B||}{M_{b-|E_i|}} \tau^b \\ &\leq ||u_i||_{\tilde{\tau_2}}^{(M_{-|E_i|})}, \end{aligned}$$

Pour tout $\tau \leq \tau_2$, on peut choisir $\eta(\tau) < 1$, assez petit, pour que l'on ait

$$(1.6.7) \qquad \eta(\tau)^{\delta_i} ||u_i||_{\tilde{\tau_2}}^{(M_{-|E_i|})} < \frac{\tau^{|E_i|}}{2}.$$

Cela donne, en utilisant (1.6.6),

$$(1.6.8) \qquad \eta(\tau)^{\delta_i} ||u_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})} < \frac{\tau^{|E_i|}}{2}.$$

On obtient donc le 1) de la proposition.

De plus, pour avoir le 2) de la proposition, il suffit de remarquer d'abord que (1.6.8) est exactement la condition (1.5.1). Si on a alors, dans le même temps,

$$(1.6.9) \qquad ||v_i||_{\tilde{\tau}}^{(M_{-|E_i|})} < \frac{1}{2} \tau^{|E_i|} \eta(\tau)^{L(E_i)},$$

la condition (1.5.2) est réalisée. On se trouve sous les hypothèses du lemme 1.5 et l'application

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 : \qquad H_\Delta(M, r) &\rightarrow \mathcal{A}[[X]](M, r) \\ (g_1, \ldots, g_p; h) &\rightarrow (\phi_1 + \phi_2)(g_1, \ldots, g_p; h) = \sum_{i=1}^{p} g_i Y^{E_i} + h + \sum_{i=1}^{p} (u_i + v_i) g_i, \end{aligned}$$

avec $r = (\tau\eta^{l_1}, \ldots, \tau\eta^{l_s})$, est une application linéaire bijective. Alors, pour tout élément g de $\mathcal{A}[[X]](M, \tilde{\tau})$, il existe un unique $p + 1$-uplet

$$(g_1, \ldots, g_p; h) \in H_\Delta(M, r)$$

tel que l'on ait

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^{p}(X^{E_i} + u_i + v_i)g_i + h, \\ h &= \sum_{b=0}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\ |B|=b}} h_B X^B \text{ avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta. \end{aligned}$$

En remarquant que, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $X^{E_i} + u_i + v_i = f_i$, on obtient exactement $g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h$. On a alors, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $||g_i||_r^{(M_{+|E_i|})} < \infty$ et $||h||_r^{(M)} < \infty$. En utilisant l'estimation de (1.4.1.5), on peut affirmer que, pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$||g_i||_{\frac{r}{C^{|E_i|}}}^{(M)} < \infty,$$

ce qui donne le résultat avec $\mu = re$.

Remarque : Si pour tout $i = 1, \ldots, p$, la série $v_i(X)$ est nulle, la condition (1.5.2) disparaît. La condition (1.5.1) est toujours réalisable. La division a lieu. $\diamondsuit$

§2. DIVISION DANS L'ANNEAU DES SÉRIES FORMELLES À CROISSANCE CONTRÔLÉE.

On va maintenant appliquer la proposition 1.6 pour obtenir des théorèmes de division avec estimations dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée.

2.1 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $(\mathbb{K}[[Y]])[[X]]$. Soient L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de $\mathbb{R}^s$ et $E_1, \ldots, E_p$ des multi-indices de $\mathbb{N}^s$. On dira que la famille f_i, $1 \leq i \leq p$, est $(E_1, \ldots, E_p; L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \qquad (f_i)_B(Y) = 0, \text{ pour tout } B \in \mathbb{N}^s,\ |B| < |E_i|,$$

$$(ii) \qquad (f_i)_{E_i}(0) \neq 0,$$

$$(iii) \qquad (f_i)_B(0) = 0, \text{ pour tout } B \in \mathbb{N}^s,\ B \neq E_i \text{ et } L(B) \leq L(E_i).$$

Il est facile de vérifier que, si on se donne des séries formelles f_i, $1 \leq i \leq p$, de $q + s$ variables, on peut toujours trouver une partition X, Y, sur l'ensemble des variables, des multi-indices $E_1, \ldots, E_p$ et une forme linéaire L tels que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ soit $(E_1, \ldots, E_p; L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$. On donne quelques exemples.

On considère $f_1(X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2^2 + X_1X_2^3 + X_1^3X_2X_3 + X_1^7$ et $f_2(X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2 + X_1^3X_3 + X_1^2X_2^2 + X_1^4$. On pose $E_1 = (2, 2)$ et $E_2 = (2, 1)$. Soit L la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $L(i_1, i_2) = i_1 + 2i_2$. On vérifie facilement que la famille (f_1, f_2) est $(E_1, E_2; L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X_3]][[X_1, X_2]]$. En revanche, elle ne sera jamais régulière dans $\mathbb{K}[[X_2, X_3]][[X_1]]$.

De même, on considère $f(X_1, X_2) = X_1 + X_2^2$. On pose $E_1 = (1, 0)$ et $E_2 = (0, 2)$. Soit L la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $L(i_1, i_2) = i_1 + \sqrt{2}i_2$. La série f est $(E_1; L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2]]$. En revanche, elle n'est pas $(E_2; L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2]]$. On utilisera, dans des exemples, cette remarque.

Soit $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant les conditions (H_1) et (H_2). Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la suite, on prendra pour $\mathcal{A}$ l'algèbre de Banach des séries formelles $\mathbb{K}[[Y]](N, \alpha)$, avec $Y = (Y_1, \ldots, Y_q)$, munie de la norme $||.||_\alpha^{(N)}$, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ est un poly-rayon de $\mathbb{R}_+^{*q}$. On a donc, en suivant les notations du paragraphe 1.1, pour tout $f \in \mathcal{A}[[X]]$,

$$||f||_{(N,\alpha)(\rho)}^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{J\in\mathbb{N}^s;|J|=j} \frac{||f_J||_\alpha^{(N)}}{M_j}\rho^J,$$

et

$$\Big(\mathbb{K}[[Y]](N, \alpha)\Big)[[X]](M, \rho) = \{f \in \Big(\mathbb{K}[[Y]](N, \alpha)\Big)[[X]];\ ||f||_{(N,\alpha)(\rho)}^{(M)} < \infty\}.$$

L'espace $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\alpha)\Big)[[X]](M,\rho)$ muni de la norme $||.||_{(N,\alpha)(\rho)}^{(M)}$ est une algèbre de Banach.

2.2 THÉORÈME (de L-division)

Soient $f_1,\ldots,f_p$ dans $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\tilde{\nu_1})\Big)[[X]](M,\tilde{\tau}_1)$. Soient L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de $\mathbb{R}^s$ et $E_1,\ldots,E_p$ des multi-indices de $\mathbb{N}^s$ tels que la famille $(f_1,\ldots,f_p)$ soit $(E_1,\ldots,E_p;L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$. Alors, il existe τ_2, $0<\tau_2\leq\tau_1$, tel que, pour tout $0<\tau\leq\tau_2$ et pour tout $\nu\leq\nu_1$, il existe un poly-rayon μ de ${\mathbb{R}_+^*}^s$, $\mu<\tilde{\tau}$, tel que, pour tout élément g de $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\tilde{\nu})\Big)[[X]](M,\tilde{\tau})$, il existe des séries $g_1,\ldots,g_p,h$ de $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\tilde{\nu})\Big)[[X]](M,\mu)$ telles que l'on ait

$$g=\sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h, \tag{2.2.1}$$

$$Exp_X(g_i(Y,X)X^{E_i})\subset\Delta_i,\ i=1,\ldots,p, \tag{2.2.2}$$

$$h=\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\|B|=b}} h_B X^B \text{ avec } h_B=0 \text{ pour } B\in\Delta, \tag{2.2.3}$$

où $\mathbb{N}^s=\Delta_1\cup\ldots\cup\Delta_p\cup(\mathbb{N}^s-\Delta)$ est la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i, $1\leq i\leq p$. De plus, $(g_1,\ldots,g_p;h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

Preuve. On reprend la démarche de la preuve de la proposition 1.6. On peut évidemment supposer $(f_i)_{E_i}(0)=1$. On a alors $(f_i)_{E_i}(Y)=1+a_i(Y)$ avec $a_i(0)=0$. On écrit donc d'après les conditions (i), (ii) et (iii) :

$$f_i(Y,X)-X^{E_i}=u_i(Y,X)+v_i(Y,X),$$

avec :

$$\begin{aligned} u_i(Y,X) &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\ L(B)>L(E_i);\\ |B|=b}} (f_i)_B(Y)X^B \\ v_i(Y,X) &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\ B\neq E_i;\\ L(B)\leq L(E_i);\\ |B|=b}} (f_i)_B(Y)X^B + a_i(Y)X^{E_i} \text{ et } v_i(0,X)=0. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

D'autre part, on sait que, pour tout $i=1,\ldots,p$, $f_i\in\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\tilde{\nu_1})\Big)[[X]](M,\tilde{\tau}_1)$. En utilisant alors l'hypothèse (H_2) sur la suite $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et en procédant comme dans (1.4.1.5), on obtient, pour tout $i=1,\ldots,p$,

$$||f_i||_{(N,\tilde{\nu_1})(\frac{\tilde{\tau}_1}{C^{|E_i|}})}^{(M_{-|E_i|})}<\infty. \tag{2.2.5}$$

En notant toujours $e=\min_{i=1,\dots,p}(\frac{1}{C^{|E_i|}})$, on pose $\tau_2=e\tau_1$. On a donc, pour tout $i=1,\dots,p$,

$$||u_i||_{(N,\tilde{\nu_1})(\tilde{\tau_2})}^{(M_{-|E_i|})}<\infty \text{ et } ||v_i||_{(N,\tilde{\nu_1})(\tilde{\tau_2})}^{(M_{-|E_i|})}<\infty. \tag{2.2.6}$$

Et donc, pour tout $\nu\le\nu_1$ et pour tout $\tau\le\tau_2$, on a

$$\begin{aligned} ||u_i||_{(N,\tilde{\nu})(\tilde{\tau})}^{(M_{-|E_i|})} &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbf{N}^s;\\ L(B)>L(E_i);\\ |B|=b}}\frac{||(f_i)_B||_{\tilde{\nu}}^{(N)}}{M_{b-|E_i|}}\tau^b \\ &\le ||u_i||_{(N,\tilde{\nu_1})(\tilde{\tau_2})}^{(M_{-|E_i|})}. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

On a aussi, pour tout coefficient $(f_i)_B$ tel que $(f_i)_B(0)=0$,

$$\begin{aligned} ||(f_i)_B||_{\tilde{\nu}}^{(N)} &= \sum_{a=1}^{\infty}\sum_{\substack{A\in\mathbf{N}^q;\\ |A|=a}}\frac{|(f_i)_{A,B}|}{N_a}\nu^a \\ &= \nu\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{\substack{A\in\mathbf{N}^q;\\ |A|=a}}\frac{|(f_i)_{A,B}|}{N_a}\nu^{a-1} \\ &\le \nu\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{\substack{A\in\mathbf{N}^q;\\ |A|=a}}\frac{|(f_i)_{A,B}|}{N_a}{\nu_1}^{a-1} \\ &\le \frac{\nu}{\nu_1}||(f_i)_B||_{\tilde{\nu_1}}^{(N)}. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Et donc, pour tout $\nu\le\nu_1$ et pour tout $\tau\le\tau_2$, on a

$$\begin{aligned} ||v_i||_{(N,\tilde{\nu})(\tilde{\tau})}^{(M_{-|E_i|})} &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbf{N}^s;\\ L(B)\le L(E_i);\\ |B|=b}}\frac{||(f_i)_B||_{\tilde{\nu}}^{(N)}}{M_{b-|E_i|}}\tau^b \\ &\le \sum_{b=|E_i|}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbf{N}^s;\\ L(B)\le L(E_i);\\ |B|=b}}\frac{\nu}{\nu_1}\frac{||(f_i)_B||_{\tilde{\nu_1}}^{(N)}}{M_{b-|E_i|}}(\tau_2)^b \\ &\le \frac{\nu}{\nu_1}||v_i||_{(N,\tilde{\nu_1})(\tilde{\tau_2})}^{(M_{-|E_i|})}. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Pour tout $\tau\le\tau_2$, on choisit alors $\eta(\tau)<1$, assez petit pour que l'on ait

$$\eta(\tau)^{\delta_i}||u_i||_{(N,\tilde{\nu_1})(\tilde{\tau_2})}^{(M_{-|E_i|})}<\frac{\tau^{|E_i|}}{2}. \tag{2.2.10}$$

Cela donne, en utilisant (2.2.7),

$$\eta(\tau)^{\delta_i}<\frac{\tau^{|E_i|}}{2}\Big(||u_i||_{(N,\tilde{\nu})(\tilde{\tau})}^{(M_{-|E_i|})}\Big)^{-1}, \text{ pour tout } \nu\le\nu_1. \tag{2.2.11}$$

On choisit ensuite $\nu = \nu(\tau, \eta(\tau))$ inférieur à ν_1, assez petit pour que l'on ait

$$\text{(2.2.12)} \qquad \frac{\nu}{\nu_1} ||v_i||^{(M_{-|E_i|})}_{(N,\tilde{\nu_1})(\tilde{\tau_2})} < \frac{1}{2}\tau^{|E_i|}\eta(\tau)^{L(E_i)}.$$

Cela donne, en utilisant (2.2.9),

$$\text{(2.2.13)} \qquad ||v_i||^{(M_{-|E_i|})}_{(N,\tilde{\nu})(\tilde{\tau})} < \frac{1}{2}\tau^{|E_i|}\eta(\tau)^{L(E_i)}.$$

Les conditions 1) et 2) de la proposition générale de L-division 1.6 sont données respectivement par (2.2.11) et (2.2.13). Il existe donc un polyrayon $\mu < \tilde{\tau}$ tel que les conclusions de cette proposition soient vérifiées. $\diamondsuit$

2.3 REMARQUE

Dans le théorème 2.2, on a, de plus, le résultat d'unicité suivant. Si $(g_1, \ldots, g_p; h)$ et $(g_1^{'}, \ldots, g_p^{'}; h')$ sont deux $p+1$-uplets vérifiant (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.3), alors, on a, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $g_i^{'} = g_i$ et $h' = h$. Il suffit de se référer à la version correspondante du théorème de division formelle dans [AHV].

2.4 DIVISION SANS PARAMÈTRES

On peut écrire une version du théorème 2.2 de L-division en imposant $q = 0$.

THÉORÈME (de L-division dans $\mathbb{K}[[X]](M)$)

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M, \tilde{\tau}_1)$. Soient L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de $\mathbb{R}^s$et $E_1, \ldots, E_p$ des multi-indices de $\mathbb{N}^s$, tels que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ soit $(E_1, \ldots, E_p; L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X]]$. Alors, il existe τ_2, $0 < \tau_2 \leq \tau_1$, tel que, pour tout $0 < \tau \leq \tau_2$, il existe un poly-rayon μ, $\mu < \tilde{\tau}$, de ${\mathbb{R}_+^*}^s$, tel que, pour tout élément g de $\mathbb{K}[[X]](M, \tilde{\tau})$, il existe des séries $g_1, \ldots, g_p, h$ de $\mathbb{K}[[X]](M, \mu)$ telles que l'on ait

$$\text{(2.4.1)} \qquad g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h,$$

avec, en notant $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$, la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i,

$$\text{(2.4.2)} \qquad Exp_X(g_i(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i, \ i = 1, \ldots, p,$$

$$\text{(2.4.3)} \qquad h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\ |B|=b}} h_B X^B \text{ avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta.$$

De plus, $(g_1, \ldots, g_p; h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

Remarque : En utilisant l'égalité $\mathbb{K}[[X]](M) = \cup_r \mathbb{K}[[X]](M, r)$, on déduit aisément la version de ce résultat mentionnée dans l'introduction.

2.5 DIVISION DANS $\mathbb{K}[[Y,X]]$

On peut aussi écrire une version du théorème 2.2 en prenant $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, si on impose la condition

(H_3) il existe $C \geq 1$ tel que $M_n \leq C^n M_{n-j} M_j$ pour tout $0 \leq j \leq n$,

qui est une condition dite de croissance modérée, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME (de L-division dans $\mathbb{K}[[Y,X]](M)$)

Soient $f_1,\dots,f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[Y,X]](M,(\tilde{\nu}_1,\tilde{\tau}_1))$. Soient L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de $\mathbb{R}^s$et $E_1,\dots,E_p$ des multi-indices de $\mathbb{N}^s$, tels que la famille $(f_1,\dots,f_p)$ soit $(E_1,\dots,E_p;L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$. Alors, il existe τ_2, $0<\tau_2\leq\tau_1$, tel que, pour tout $0<\tau\leq\tau_2$ et pour tout $\nu\leq\nu_1$, il existe un poly-rayon μ de ${\mathbb{R}_+^*}^s$, tel que, pour tout élément g de $\mathbb{K}[[X]](M,(\tilde{\nu},\tilde{\tau}))$, il existe des séries $g_1,\dots,g_p,h$ de $\mathbb{K}[[Y,X]](M,(\frac{\nu}{C},\mu))$ telles que l'on ait

$$g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h, \tag{2.5.1}$$

avec, en notant $\Delta_1\cup\ldots\cup\Delta_p\cup(\mathbb{N}^s-\Delta)$, la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i,

$$Exp_X(g_i(Y,X)X^{E_i})\subset\Delta_i,\ i=1,\dots,p, \tag{2.5.2}$$

$$h=\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{\substack{B\in\mathbb{N}^s;\\|B|=b}} h_B X^B \text{ avec } h_B=0 \text{ pour } B\in\Delta. \tag{2.5.3}$$

De plus, $(g_1,\dots,g_p;h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

On utilisera dans la preuve le lemme suivant :

<u>2.5.1 Lemme</u>

Si $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3), alors on a, en utilisant les notations précédentes,

$$||\mathcal{A}||^{(M)}_{(M,\frac{\alpha}{C})(\frac{r}{C})} \leq ||\mathcal{A}||^{(M)}_{(\alpha,r)} \leq ||\mathcal{A}||^{(M)}_{(M,\alpha)(r)}.$$

Preuve. C'est immédiat en utilisant (H_3) pour l'inégalité de gauche et en utilisant la convexité logarithmique pour celle de droite. En effet, on a, en utilisant (H_1),

$$||\mathcal{A}||^{(M)}_{(\alpha,r)} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\|J|=j}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{K\in\mathbb{N}^q;\\|K|=k}}\frac{|a_{J,K}|}{M_{j+k}}\alpha^K r^J \leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\|J|=j}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{K\in\mathbb{N}^q;\\|K|=k}}\frac{|a_{J,K}|}{M_j M_k}\alpha^K r^J, \tag{2.5.1.1}$$

ce qui donne exactement :

$$(2.5.1.2) \qquad ||\mathcal{A}||_{(\alpha,r)}^{(M)} \leq ||\mathcal{A}||_{(M,\alpha)(r)}^{(M)}.$$

Pour l'autre inégalité, (H_3) donne :

$$(2.5.1.3) \qquad ||\mathcal{A}||_{(\alpha,r)}^{(M)} \geq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^s;\\ |J|=j}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{K\in\mathbb{N}^q;\\ |K|=k}} \frac{|a_{J,K}|}{C^{j+k}M_jM_k}\alpha^K r^J,$$

ce qui permet de conclure à :

$$(2.5.1.4) \qquad ||\mathcal{A}||_{(\alpha,r)}^{(M)} \geq ||\mathcal{A}||_{(M,\frac{\alpha}{C})(\frac{r}{C})}^{(M)}.$$

Et, le lemme est donc démontré. $\diamondsuit$

Preuve de 2.5

Ainsi, par hypothèse, pour tout $i = 1,\ldots,p$, f_i appartient à $\mathbb{K}[[Y,X]](M,(\tilde{\nu_1},\tilde{\tau_1}))$. En appliquant le lemme 2.5.1, on trouve que, pour tout $i = 1,\ldots,p$, f_i appartient à $\Big(\mathbb{K}[[Y]](M,\frac{\tilde{\nu_1}}{C})\Big)[[X]](M,\frac{\tilde{\tau_1}}{C}))$. On applique alors le théorème 2.2 pour trouver des séries $g_1,\ldots,g_p,h$, de $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N_n,\lambda)\Big)[[X]](M_n,\mu)$, qui réalisent la division. Et, en utilisant à nouveau le lemme 2.5.1, on obtient aussi que $g_1,\ldots,g_p,h$ appartiennent à $\mathbb{K}[[Y,X]](M,(\lambda,\mu))$. $\diamondsuit$

2.6 DIVISION DANS $\mathbb{K}[[Y]](N)\{X\}$

Dans le cas où $M_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire $M = \mathbf{1}$, l'hypothèse (i) du théorème 2.2 est superflue. Le lecteur s'en convaincra en reprennant la démonstration de la proposition 1.4 et du théorème 2.2. On notera l'analogie avec la preuve du théorème de Briançon [Br]. On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME (de L-division)

Soit L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de $\mathbb{R}^s$. Soient $f_1,\ldots,f_p$ des éléments de $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\tilde{\nu_1})\Big)[[X]](\mathbf{1},\tilde{\tau_1})$ et soient des multi-indices $E_1,\ldots,E_p$, de $\mathbb{N}^s$, tels que, pour tout $i = 1,\ldots,p$, dans le développement de f_i par rapport à X à coefficients dans $\mathbb{K}[[Y]]$, on ait

$$(i) \qquad (f_i)_{E_i}(0) \neq 0,$$

$$(ii) \qquad (f_i)_B(0) = 0 \text{ pour tout } B \in \mathbb{N}^s,\ B \neq E_i \text{ et } L(B) \leq L(E_i).$$

Alors, il existe τ_2, $0 < \tau_2 \leq \tau_1$, tel que, pour tout $0 < \tau \leq \tau_2$ et pour tout $\nu \leq \nu_1$, il existe un poly-rayon μ de ${\mathbb{R}_+^*}^s$, $\mu < \tilde{\tau}$, tel que, pour tout élément g de $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\tilde{\nu})\Big)[[X]](\mathbf{1},\tilde{\tau})$, il existe des séries $g_1,\ldots,g_p,h$ de $\Big(\mathbb{K}[[Y]](N,\tilde{\nu})\Big)[[X]](\mathbf{1},\mu)$ telles que l'on ait

$$(2.6.1) \qquad g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h,$$

$$(2.6.2) \qquad Exp_X(g_i(Y,X)X^{E_i}) \subset \Delta_i,\ i = 1,\ldots,p,$$

$$(2.6.3) \qquad h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s; \\ |B|=b}} h_B X^B \text{ avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta,$$

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ *est la partition de* $\mathbb{N}^s$ *associée aux* E_i, $1 \leq i \leq p$. *De plus,* $(g_1, \ldots, g_p; h)$ *est donné par un opérateur linéaire continu.*

APPLICATIONS

§3. LA PRÉPARATION ET LA DIVISION DE WEIERSTRASS.

On retrouve, comme conséquence du théorème 2.4, une version des théorèmes de division et de préparation de Weierstrass dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ [CC2]. Pour cela, on rappelle une notion de p-régularité introduite par J. Chaumat et A.M. Chollet [CC2].

Soit f un élément de $\mathbb{K}[[X]]$, $f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J|=j}} f_J X^J$, et p un entier. On dira que f est p-régulière par rapport à la variable X_s si

$$f_J = 0 \text{ pour tout multi-indice } J \text{ tel que } |J| < p \text{ et } f_{(0,\ldots,0,p)} \neq 0.$$

Ainsi, pour tout élément f de $\mathbb{K}[[X]]$ non identiquement nul, il existe p tel que, éventuellement après changement de variables linéaire, f soit p-régulière par rapport à la variable X_s. On note aussi

$$\mathrm{ord}(f) = \min(j;\ f_J \neq 0).$$

3.1 THÉORÈME (Division de Weierstrass) [CC2]

Soit $f \in \mathbb{K}[[X]](M)$ une série formelle, p-régulière par rapport à la variable X_s. Alors, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X]](M)$, on peut écrire

$$g(X_1,\ldots,X_s) = q(X_1,\ldots,X_s)f(X_1,\ldots,X_s) + \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X_1,\ldots,X_{s-1})X_s^k,$$

avec $q \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $r_k \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $k = 0,\ldots,p-1$, uniques.

Cette proposition est immédiate par le théorème 2.4. En effet, on considère une forme linéaire L à coefficients strictement positifs et indépendants sur $\mathbb{Z}$ telle que $L(0,\ldots,0,p) < L(J)$, pour tout multi-indice J, $J \neq (0,\ldots,0,p)$, tel que $f_J \neq 0$. La série f est alors $((0,\ldots,0,p);L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X]]$.

3.2 THÉORÈME (Préparation de Weierstrass) [CC2]

Soit $f \in \mathbb{K}[[X]](M)$ une série formelle, p-régulière par rapport à la variable X_s. Il existe alors des uniques séries formelles $U \in \mathbb{K}[[X]](M)$ inversibles et $r_1,\ldots,r_{p-1} \in \mathbb{K}[[X_1,\ldots,X_{s-1}]](M)$ telles que

$$f(X_1,\ldots,X_s) = U(X_1,\ldots,X_s)\Big(X_s^p - \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X_1,\ldots,X_{s-1})X_s^k\Big).$$

En outre, on a, pour tout $k = 0,\ldots,p-1$, ord$(r_k(X_1,\ldots,X_{s-1})) \geq p-k$.

Preuve. On note $X' = (X_1, \ldots, X_{s-1})$. On applique alors le théorème de division à X_s^p. On peut donc écrire

$$X_s^p = q(X', X_s) f(X', X_s) + \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X') X_s^k, \tag{3.2.1}$$

avec $q(X', X_s) \in \mathbb{K}[[X]](M)$ et, pour tout $k = 0, \ldots, p-1$, $r_k(X') \in \mathbb{K}[[X]](M)$. L'égalité (3.2.1) permet d'affirmer que, pour tout $k = 0, \ldots, p-1$, $\mathrm{ord}(r_k(X_1, \ldots, X_{s-1})$ est supérieur ou égal à $p-k$. En effet, d'une part, comme f est p-réguliȓe en X_s, on déduit que $\mathrm{ord}(q(X', X_s) f(X', X_s))$ est supérieur ou égal à p. D'autre part, comme $\mathrm{ord}(X_s^p)$ est égal à p, l'égalité 3.2.1 donne alors $\mathrm{ord}(\sum_{k=0}^{p-1} r_k(X') X_s^k) \geq p$. On conclut en remarquant que les monômes, pour $k = 0, \ldots, p-1$, issus du produit $r_k(X') X_s^k$ sont deux à deux différents. En outre, l'égalité (3.2.1) donne aussi

$$X_s^p - \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X') X_s^k = q(X', X_s) f(X', X_s). \tag{3.2.1'}$$

En faisant $X' = (0, \ldots, 0)$ dans (3.2.1'), on a, en utilisant la p-régularité de f,

$$X_s^p - \sum_{k=0}^{p-1} r_k(0) X_s^k = q(0, X_s) X_s^p f_p(0) + q(0, X_s) \sum_{k=p+1}^{\infty} f_k(0) X_s^k. \tag{3.2.2}$$

On en déduit de manière évidente $q(0,0) \neq 0$. Ainsi, q est inversible. On note $U(X', X_s)$ son inverse. On a donc

$$U(X', X_s)\Big(X_s^p - \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X') X_s^k\Big) = f(X', X_s). \tag{3.2.3}$$

Il reste donc à prouver que $U(X', X_s) \in \mathbb{K}[[X]](M)$. Plus généralement, on a le lemme suivant :

3.2.1 Lemme *Soit $f \in \mathbb{K}[[X]](M)$ une série formelle inversible, c'est à dire telle que $f(0) \neq 0$. Alors, son inverse $g(X)$ appartient encore à $\mathbb{K}[[X]](M)$.*

Preuve. Dans la preuve on supposera par commodité $f(0) = 1$. Si on note $f(X) = \sum_{J \in \mathbf{N}^s} a_J X^J$ et $g(X) = \sum_{J \in \mathbf{N}^s} b_J X^J$, on a

$$f(X) g(X) = \sum_{J \in \mathbf{N}^s} \Big(\sum_{H+L=J} a_H b_L \Big) X^J = 1. \tag{3.2.1.1}$$

Par hypothèse, $f \in \mathbb{K}[[X]](M)$, ce qui signifie qu'il existe des constantes C_1, C_2 positives telles que, pour tout $J \in \mathbb{N}^s$, $|a_J| \leq C_1 C_2^j M_j$. On montre alors par récurrence sur j qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que, pour tout $J \in \mathbb{N}^s$, $|b_J| \leq C_1 (C_2 C_3)^j M_j$.

La récurrence est trivialement amorcée. On suppose alors que, pour tout multi-indice de longueur $j-1$, on ait l'estimation voulue. On regarde alors ce qui se passe pour un multi-indice J, de longueur $j \geq 1$. L'égalité (3.2.1.1) donne

$$\sum_{H+L=J} a_H b_L = 0, \tag{3.2.1.2}$$

ce qui implique

$$b_J = - \sum_{\substack{H+L=J;\\ L\neq J}} a_H b_L. \tag{3.2.1.3}$$

On a donc

$$|b_J| \leq \sum_{\substack{H+L=J;\\ L\neq J}} |a_H||b_L|. \tag{3.2.1.4}$$

Dans la somme de la dernière inégalité, la longueur l du multi-indice L est inférieure ou égale à $j-1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à b_L. Ainsi, on obtient l'estimation

$$|b_J| \leq \sum_{\substack{H+L=J;\\ L\neq J}} C_1 C_2^h M_h C_1 (C_2 C_3)^l M_l. \tag{3.2.1.5}$$

En utilisant la convexité logarithmique de la suite $\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, on a

$$|b_J| \leq C_1 (C_2 C_3)^j M_j \sum_{\substack{H+L=J;\\ L\neq J}} C_1 C_3^{-h}. \tag{3.2.1.6}$$

En remarquant que l'équation $i_1 + i_2 + ... + i_s = h$ a $\binom{s+h-1}{h}$ solutions entières, la série $\sum_{\substack{H+L=J\\ L\neq J}} C_3^{-h}$ devient $\sum_{h=1}^{j} \binom{s+h-1}{h} C_3^{-h}$. En remarquant que $\binom{s+h-1}{h} \leq s^h$, on choisit alors C_3, suffisamment grand, pour que la série $\sum_{h=1}^{+\infty} C_1 s^h C_3^{-h}$ converge et que sa somme soit inférieure à 1. On obtient donc

$$|b_J| \leq C_1 (C_2 C_3)^j M_j \sum_{h=1}^{+\infty} C_1 n^h C_3^{-h} \leq C_1 (C_2 C_3)^j M_j. \tag{3.2.1.7}$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang j ; elle est donc vraie pour tout multi-indice J. On a bien le résultat escompté. $\diamondsuit$

L'application de ce lemme à $U(X', X_s)$ achève donc la preuve de la proposition 3.2. $\diamondsuit$

3.3 PROPOSITION

Soit $f \in \mathbb{K}[[X_1,\dots,X_{s-1}]](M)[X_s]$ une série formelle polynômiale et régulière d'ordre p en X_s. Alors, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X_1,\dots,X_{s-1}]](M)[X_s]$, on peut écrire

$$g(X_1,\dots,X_s) = q(X_1,\dots,X_s)f(X_1,\dots,X_s) + \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X_1,\dots,X_{s-1})X_s^k,$$

avec $q \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $r_k \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $k = 0,\dots,p-1$, uniques.

Preuve. D'après le théorème 2.6, si $f(X)$ appartient à $\mathbb{K}[[X_1,\dots,X_{s-1}]](M)[X_s]$, l'anneau des polynômes en X_s à coefficients dans $\mathbb{K}[[X_1,\dots,X_{s-1}]](M)$, l'hypothèse de p-régularité dans les théorèmes 3.1 et 3.2 est superflue. Il suffit d'avoir la régularité d'ordre p de f, c'est à dire $f(0,\dots,0,X_s) = X_s^p c(X_s)$, avec $c(0) \neq 0$. ♢

3.4 COROLLAIRE

L'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est un anneau hensélien.

Preuve. C'est une application directe de la proposition 3.3, en suivant une démonstration classique [GR]. ♢

3.5 UN EXEMPLE

Pour illustrer le théorème 2.4 et le théorème 3.1, on donne un exemple.

Soit $M_n = n!$. Considérons la série formelle $g(X,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n}X^nY^n$, que nous allons diviser par $f(X,Y) = X + Y^2$.

On pose, pour tout entier i_1 et i_2, $L(i_1,i_2) = i_1 + \sqrt{2}i_2$. On vérifie facilement que $X + Y^2$ est $((1,0);L)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X,Y]]$. Les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées, $\Delta = (1,0) + \mathbb{N}^2$ et on obtient

$$g(X,Y) = f(X,Y)q_1(X,Y) + r_1(X,Y),$$

avec

$$q_1(X,Y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2(n+k)}X^nY^{n+3k-2} \text{ et } r_1(X,Y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n M_{2n}Y^{3n}.$$

Il est aisé de vérifier que g, q_1 et r_1 appartiennent à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$.

En revanche, on vérifie aussi facilement que $X + Y^2$ ne pourra jamais être $(0,2)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X,Y]]$. Mais, si on effectue la division formelle par rapport à Y^2, on a $\Delta = (0,2) + \mathbb{N}^2$ et on obtient

$$g(X,Y) = f(X,Y)q_2(X,Y) + r_2(X,Y),$$

avec

$$q_2(X,Y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k}X^{n+3k-1}Y^n$$

et

$$r_2(X,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (M_{4n} X^{3n} + M_{4n+2} X^{3n+1} Y).$$

Il est aisé de vérifier que q_2 et r_2 appartiennent à $\mathbb{K}[[X,Y]](M^{(2)})$ mais n'appartiennent pas à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$. Le choix de la variable par rapport à laquelle on effectue la division, est donc fondamental. Ici, $X+Y^2$ est 1-régulière en X. En revanche, bien que $X+Y^2$ soit régulière d'ordre 2 en Y, elle n'est pas 2-régulière en Y.

§4. DIVISION PAR UN IDÉAL.

Dans toute la suite, on se place dans l'anneau des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ et on suppose que

$$(**) \qquad \begin{array}{ll} L & \text{est une forme linéaire dont les coefficients} \\ (l_j)_{j=1,\ldots,s} & \text{sont strictement positifs et indépendants sur } \mathbb{Z}. \end{array}$$

4.1 NOTATIONS

Soit L une forme linéaire vérifiant $(**)$. Soient A et B deux multi-indices de $\mathbb{N}^s$, on dira que A est L-inférieur à B, et on notera $A \leq_L B$, si et seulement si $L(A) \leq L(B)$. Il est intéressant de remarquer que la condition $(**)$ sur la forme linéaire L donne alors un ordre total sur $\mathbb{N}^s$.

Pour tout élément f de $\mathbb{K}[[X]]$, on définit aussi l'exposant privilégié de f pour la direction L, ou L-ordre de f, le multi-indice $E = \mathrm{ord}_L(f)$ tel que

$$f_E \neq 0 \text{ et } f_A = 0 \text{ pour tout } A \in \mathbb{N}^s \text{ vérifiant } L(A) < L(E).$$

On a donc aussi

$$\mathrm{ord}_L(f) = \min_L(J \in \mathbb{N}^s ; J \in \mathrm{Exp}_X(f)).$$

4.1.1 THÉORÈME (de L-division formelle) [AHV]

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]]$. On note, pour tout $i = 1, \ldots, p$, E_i l'exposant privilégié dans la direction L de f_i. Alors, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X]]$, il existe des séries $g_1, \ldots, g_p, h$ de $\mathbb{K}[[X]]$ telles que

$$(i) \qquad g = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h,$$

$$(ii) \qquad Exp_X(g_i(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i, \ i = 1, \ldots, p,$$

$$(iii) \qquad h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s; \\ |B| = b}} h_B X^B \text{ avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta,$$

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i, $1 \leq i \leq p$. De plus, $(g_1, \ldots, g_p; h)$ est donné par un opérateur linéaire continu. En outre, si $(g_1^{'}, \ldots, g_p^{'}; h')$ est un $p+1$-uplet satisfaisant (i), (ii) et (iii), alors, on a, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $g_i^{'} = g_i$ et $h = h'$.

Preuve. La démonstration de ce résultat peut être lue dans [AHV]. On peut, comme pour la proposition 1.6, en donner une preuve par perturbation d'un épimorphisme. On reprend les notations du paragraphe 1.1. On associe alors aux p multi-indices de $\mathbb{N}^s$, $E_1, \ldots, E_p$, la partition $\Delta_1 \cup \Delta_2 \ldots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ de $\mathbb{N}^s$. On note alors

$$(\mathbb{K}[[X]])^{E_i} = \{f \in \mathbb{K}[[X]];\ \mathrm{Exp}_X(f(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i\},$$

$$R_\Delta = \{f \in \mathbb{K}[[X]];\ f(X) = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s; \\ |B|=b}} f_B X^B \text{ avec } f_B = 0 \text{ pour tout } B \in \Delta\}.$$

On définit alors

$$H_\Delta = \times_{i=1}^{p} (\mathbb{K}[[X]])^{E_i} \times R_\Delta.$$

On munit l'ensemble $\mathbb{K}[[X]]$ de la valeur absolue définie, pour $f \in \mathbb{K}[[X]]$, par $|f| = e^{-L(ord_L(f))}$. On vérifie aisément que l'espace $\mathbb{K}[[X]]$ est un groupe additif complet pour la métrique associée à la valeur absolue. On pose alors, pour tout $p+1$-uplet $(g_1, \ldots, g_p, h)$ de H_Δ,

$$|(g_1, \ldots, g_p, h)|^\Delta = \sup_{i=1,\ldots,p} (e^{-L(E_i)-L(ord_L(g_i))}, e^{-L(ord_L(h))}).$$

On vérifie facilement que $|.|^\Delta$ est une valeur absolue sur H_Δ et que l'espace produit H_Δ est un groupe additif complet pour la métrique associée à sa valeur absolue. On définit alors

$$\begin{array}{rccl} \phi_1 : & H_\Delta & \rightarrow & \mathbb{K}[[X]] \\ & (g_1, \ldots, g_p; h) & \rightarrow & \phi_1(g_1, \ldots, g_p; h) = \sum_{i=1}^{p} g_i X^{E_i} + h. \end{array}$$

On remarque que ϕ_1 est alors une application linéaire surjective de H_Δ sur $\mathbb{K}[[X]]$ telle que, du fait de la partition,

$$|\phi_1(g_1, \ldots, g_p; h)| = |(g_1, \ldots, g_p; h)|^\Delta.$$

D'après [To], si on perturbe l'application ϕ_1 par une application linéaire ϕ_2 telle que $|\phi_2(g_1, \ldots, g_p; h)| \leq C|(g_1, \ldots, g_p; h)|^\Delta$, avec C une constante positive strictement inférieure à 1, alors l'application $\phi_1 + \phi_2$ est encore une application linéaire surjective. Par hypothèse, on peut écrire, pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$f_i(X) = u_i(X) + X^{E_i},$$

avec, pour tout multi-indice A, tel que $A \in \mathrm{Exp}_X(f_i)$, $L(A) > L(E_i)$. On pose alors

$$\begin{array}{rccl} \phi_2 : & H_\Delta & \rightarrow & \mathbb{K}[[X]] \\ & (g_1, \ldots, g_p; h) & \rightarrow & \phi_2(g_1, \ldots, g_p; h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i g_i \end{array}$$

On a alors

$$|\phi_2(g_1, \ldots, g_p; h)| = \sup_{i=1,\ldots,p} (e^{-L(ord_L(u_i) - ord_L(g_i))}).$$

On utilise la remarque (1.3.2) pour trouver, pour tout $i = 1, \ldots, p$, des réels strictement positifs δ_i tels que $L(A) - L(E_i) > 0$ implique $L(A) - L(E_i) \geq \delta_i$. Ainsi, la forme des séries u_i permet d'écrire

$$\begin{aligned} |\phi_2(g_1, \ldots, g_p; h)| &= \sup_{i=1,\ldots,p}(e^{L(E_i)-L(ord_L(u_i))}e^{-L(E_i)-L(ord_L(g_i))}) \\ &\leq \sup_{i=1,\ldots,p}(e^{-\delta_i})|(g_1, \ldots, g_p; h)|^{\Delta}. \end{aligned}$$

On a, puisque, pour tout $i = 1, \ldots, p$, δ_i est strictement positif, $\sup\limits_{i=1,\ldots,p}(e^{-\delta_i}) < 1$. Par conséquent $\phi_1 + \phi_2$ est une application linéaire surjective. Ainsi, pour tout élément g de $\mathbb{K}[[X]]$, il existe un $p+1$-uplet $(g_1, \ldots, g_p; h)$ de H_Δ tel que

$$g = (\phi_1 + \phi_2)(g_1, \ldots, g_p; h) = \sum_{i=1}^{p}(u_i + X^{E_i})g_i + h = \sum_{i=1}^{p} f_i g_i + h.$$

L'unicité annoncée est élémentaire. En effet, si $(g_1, \ldots, g_p; h)$ et $(g_1^{'}, \ldots, g_p^{'}; h')$ sont deux $p+1$-uplets qui vérifient (i), (ii) et (iii) du théorème, on peut écrire

$$S = \sum_{i=1}^{p}(g_i - g_i^{'})f_i + (h - h') = 0.$$

Les conditions (ii) et (iii) assurent, du fait de la partition, que les L-ordres de $(g_i - g_i^{'})f_i$ et de $h - h'$ sont deux à deux disjoints. Ainsi, si h est différent de h' ou s'il existe un indice i, $1 \leq i \leq p$, tel que g_i soit différent de $g_i^{'}$, alors la quantité $L(\mathrm{ord}_L(S))$ est finie. Ceci contredit le fait que $S = 0$. L'unicité annoncée est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Remarque :

Si L' est une forme linéaire, distincte de L, telle que les exposants privilégiés des f_i, pour tout $i = 1, \ldots, p$, dans la direction L' soient les mêmes que dans la direction L, les quotients et les restes de la L'-division formelle sont les mêmes que ceux de la L-division formelle.

On a facilement le résultat suivant.

4.1.2 Lemme

Soient f et g deux séries formelles non nulles. Alors, on a

$$(i) \qquad ord_L(fg) = ord_L(f) + ord_L(g) \text{ et}$$

$$(ii) \qquad ord_L(f+g) \geq_L \min_L(ord_L(f), ord_L(g)) \text{ si } f + g \neq 0,$$

avec égalité dans (ii) si $ord_L(f) \neq ord_L(g)$.

4.2 NOTION DE BASE STANDARD

Etant donné un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[[X]]$, on note $E_L(\mathcal{I})$ l'ensemble des exposants privilégiés pour la direction L des éléments de $\mathcal{I}$. On vérifie facilement que $A \in E_L(\mathcal{I})$ implique $A + \mathbb{N}^s \subset E_L(\mathcal{I})$.

Le lemme suivant est à la base de l'intérêt de cette notion.

<u>4.2.1 Lemme</u>
Si $h = \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s;\\ J \notin E_L(\mathcal{I})}} h_J X^J$ *appartient à* $\mathcal{I}$*, alors* h *est identiquement nul.*

On appelle base standard de $\mathcal{I}$ dans la direction L, une famille $(g_1, \ldots, g_k)$ de $\mathcal{I}$ telle que, si on note pour tout $i = 1, \ldots, k$, $E_i = \mathrm{ord}_L(g_i)$, on ait $E_L(\mathcal{I}) = \bigcup_{i=1}^k (E_i + \mathbb{N}^s)$.

On appelle frontière distinguée de $E_L(\mathcal{I})$ la plus petite partie $F_L(\mathcal{I})$ telle que l'on ait $E_L(\mathcal{I}) = \cup_{E \in F_L(\mathcal{I})}(E + \mathbb{N}^s)$. On fait la remarque suivante.

$F_L(\mathcal{I})$ *est une partie finie.*

On écrit la justification de cette propriété dans le cas de deux variables. Le passage en s variables s'en déduit facilement. On pose

$$j_1 = \min\{j \in \mathbb{N} \text{ tel que } (i,j) \in E_L(\mathcal{I})\}$$

et

$$i_1 = \min\{i \in \mathbb{N} \text{ tel que } (i,j_1) \in E_L(\mathcal{I})\}.$$

On obtient un couple (i_1, j_1). De la même manière, on pose

$$i_2 = \min\{i \in \mathbb{N} \text{ tel que } (i,j) \in E_L(\mathcal{I})\}$$

et

$$j_2 = \min\{j \in \mathbb{N} \text{ tel que } (i_2,j) \in E_L(\mathcal{I})\}.$$

En utilisant alors la propriété $(i,j) \in E_L(\mathcal{I})$ implique $(i,j) + \mathbb{N}^2 \subset E_L(\mathcal{I})$, on en déduit

$$F_L(\mathcal{I}) \subset \{(i,j) \text{ tel que } i_2 \leq i \leq i_1 \text{ et } j_1 \leq j \leq j_2\}.$$

$F_L(\mathcal{I})$ est une sous-partie d'une partie finie ; elle est donc finie.

<u>4.2.2 Lemme</u>
Soit $(g_1, \ldots, g_k)$ *une base standard de* $\mathcal{I}$ *dans la direction* L*. Si on note pour tout* $i = 1, \ldots, k$, E_i *l'exposant privilégié de* g_i *dans la direction* L*, alors* $\mathcal{I}$ *est engendré par l'ensemble des* $(g_j)_{E_j \in F_L(\mathcal{I})}$.

On dit alors que l'ensemble $(g_j)_{E_j \in F_L(\mathcal{I})}$ est une base standard minimale de $\mathcal{I}$ dans la direction L.

Preuve. Soit g une série formelle appartenant à l'idéal $\mathcal{I}$. On effectue, d'après le théorème 4.1.1, la L-division formelle de g par l'ensemble des $(g_j)_{E_j \in F_L(\mathcal{I})}$. On obtient l'existence de séries formelles h_j et r telles que

$$\mathrm{Exp}_X(h_j(X)X^{E_j}) \subset \Delta_j,\ \mathrm{Exp}_X(r(X)) \subset \mathbb{N}^s - \Delta$$

et

$$g = \sum_{j;E_j \in F_L(\mathcal{I})} g_j h_j + r.$$

Par hypothèse, on a donc $r = g - \displaystyle\sum_{j;E_j \in F_L(\mathcal{I})} g_j h_j \in \mathcal{I}$, et le lemme 4.2.1 assure donc que $r = 0$. Ainsi, tout élément g de $\mathcal{I}$ appartient à l'idéal engendré par l'ensemble des $(g_j)_{E_j \in F_L(\mathcal{I})}$ ce qui achève la preuve du lemme. $\diamondsuit$

Étant donné un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[[X]]$ engendré par p éléments $(f_1, \ldots, f_p)$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$, on se propose de construire une base standard minimale $(g_1, \ldots, g_k)$ de $\mathcal{I}$ dans la direction L telle que, pour tout $i = 1, \ldots, k$, g_i appartienne à $\mathbb{K}[[X]](M)$. On s'inspire de la construction des bases de Groebner pour les idéaux de polynômes donnée dans [CLO].

4.3 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soient f et g deux séries formelles non identiquement nulles, on note

$$f_{\mathrm{ord}_{L(f)}} = FC(f) \text{ (le premier coefficient de } f),$$

$$X^{\mathrm{ord}_{L(f)}} = FM(f) \text{ (le premier monôme de } f),$$

$$FC(f).FM(f) = FT(f) \text{ (le premier terme de } f).$$

Si $\mathrm{ord}_L(f) = \alpha$ et $\mathrm{ord}_L(g) = \beta$, on pose $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ avec $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, s$. On appelle alors X^γ le plus petit commun multiple de $FM(f)$ et $FM(g)$ et on note $X^\gamma = PPCM(FM(f), FM(g))$. On appelle S-série de f et g la combinaison

$$S(f,g) = \frac{X^\gamma}{FT(f)} f - \frac{X^\gamma}{FT(g)} g.$$

Cette combinaison est celle qui fait disparaître $FT(f)$ et $FT(g)$. Dans l'autre sens, on va voir dans le lemme suivant que, si on a une combinaison de séries dont les premiers termes s'annulent entre eux, celle-ci peut s'écrire comme combinaison de S-séries.

4.4 LEMME

Soient $g_1, \dots, g_t$, t séries formelles. On note $\alpha(1), \dots, \alpha(t)$, t multi-indices tels que $\alpha(i) + \mathrm{ord}_L(g_i) = \mu \in \mathbb{N}^s$. Soient $c_1, \dots, c_t$, des constantes telles que, si on pose $f = \sum_{i=1}^{t} c_i X^{\alpha(i)} g_i$, $\mathrm{ord}_L(f)$ soit L-strictement supérieur à μ. Il existe alors des constantes $c_{j,k}$ telles que l'on ait

$$f = \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu - \gamma_{j,k}} S(g_j, g_k),$$

où $X^{\gamma_{j,k}} = PPCM(FM(g_j), FM(g_k))$. En outre, pour tout couple d'indices (j,k), la série $X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)$ a un L-ordre L-strictement supérieur à μ.

Preuve. On pose $d_i = FC(g_i)$. Pour tout $i = 1, \dots, t$, on a $\mathrm{ord}_L(c_i X^{\alpha(i)} g_i) = \mu$ $\mathrm{ord}_L(\sum_{i=1}^{t} c_i X^{\alpha(i)} g_i) >_L \mu$. Cela implique alors

$$\sum_{i=1}^{t} c_i d_i = 0. \tag{4.4.1}$$

On pose $p_i = \dfrac{X^{\alpha(i)} g_i}{d_i}$. On remarque que l'on a $FC(p_i) = 1$ et aussi

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{t} c_i X^{\alpha(i)} g_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} c_i d_i p_i \\ &= c_1 d_1 (p_1 - p_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2)(p_2 - p_3) + \dots \\ &\quad + (c_1 d_1 + \dots + c_{t-1} d_{t-1})(p_{t-1} - p_t) + (c_1 d_1 + \dots + c_t d_t) p_t. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

On pose $FT(g_i) = d_i X^{\beta(i)}$. Alors, par hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, t$, on a $\alpha(i) + \beta(i) = \mu$. Ainsi, pour tout $i = 1, \dots, t$, $FM(g_i) = X^{\beta(i)}$ divise X^μ. Par construction, on peut affirmer que, pour tout j, k, avec $j \neq k$, $X^{\gamma_{j,k}} = PPCM(FM(g_j), FM(g_k))$ divise X^μ. Ainsi, $X^{\mu - \gamma_{j,k}}$ est un monôme et on a

$$\begin{aligned} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k) &= X^{\mu-\gamma_{j,k}} \Big(\frac{X^{\gamma_{j,k}}}{FT(g_j)} g_j - \frac{X^{\gamma_{j,k}}}{FT(g_k)} g_k \Big) \\ &= \frac{X^\mu}{d_j X^{\beta(j)}} g_j - \frac{X^\mu}{d_k X^{\beta(k)}} g_k \\ &= \frac{X^{\alpha(j)}}{d_j} g_j - \frac{X^{\alpha(k)}}{d_k} g_k \\ &= p_j - p_k. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

En utilisant (4.4.1) et (4.4.2), f peut être mise sous la forme

$$(4.4.4)\qquad \begin{array}{rcl} f &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{t} c_i X^{\alpha(i)} g_i \\ &=& c_1 d_1 X^{\mu-\gamma_{1,2}} S(g_1,g_2) + (c_1d_1+c_2d_2) X^{\mu-\gamma_{2,3}} S(g_2,g_3) + \ldots \\ && +(c_1d_1+\ldots+c_{t-1}d_{t-1}) X^{\mu-\gamma_{t-1,t}} S(g_{t-1},g_t). \end{array}$$

En outre, par hypothèse pour tout $i = 1,\ldots,t$, le L-ordre de p_i est exactement égal à μ et le premier coefficient vaut 1; ainsi, on a $\mathrm{ord}_L(p_j - p_k) >_L \mu$. L'égalité (4.4.3) permet alors d'affirmer que $\mathrm{ord}_L(X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j,g_k)) >_L \mu$. $\diamondsuit$

Le critère suivant, analogue à celui de détermination des bases de Groebner pour des idéaux de polynômes [CLO], va permettre de vérifier si une famille de $\mathcal{I}$ est une base standard.

4.5 LEMME

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]]$. Soit L une forme linéaire vérifiant $(**)$. Une famille $G = (g_1,\ldots,g_t)$ est une base standard pour $\mathcal{I}$ dans la direction L si et seulement si, pour tout couple d'indices (i,j), avec $i \neq j$, le reste de la L-division formelle de $S(g_i,g_j)$ par G est nul.

Preuve. Le sens direct est élémentaire. En effet, $S(g_i,g_j)$, pour tout couple d'indices (i,j), appartient à $\mathcal{I}$. Puisque $G = (g_1,\ldots,g_t)$ est une base standard pour $\mathcal{I}$ dans la direction L, le lemme 4.2.1 permet alors d'affirmer que le reste de la L-division formelle de $S(g_i,g_j)$ par G est nul. Pour établir la réciproque, on considére $f \in \mathcal{I}$ une série formelle non nulle. Il existe donc des séries $(h_1,\ldots,h_t) \in \mathbb{K}[[X]]$ telles que l'on ait

$$(4.5.1)\qquad f = \sum_{i=1}^{t} h_i g_i.$$

Soit $m_h(i) = \mathrm{ord}_L(h_i g_i)$. On définit $\mu_h = \min_L(m_h(1),\ldots,m_h(t))$. On a clairement

$$(4.5.2)\qquad \mathrm{ord}_L(f) \geq_L \mu_h.$$

On considère l'ensemble des écritures possibles de f sous la forme (4.5.1). Comme l'ordre considéré est total, on choisit une expression de la forme (4.5.1),

$$f = \sum_{i=1}^{t} H_i g_i,$$

telle que μ_H soit maximale, c'est à dire $\mu_H \geq_L \mu_h$ pour tout ensemble $h = (h_1,\ldots,h_t)$ tel que f s'écrive sous la forme (4.5.1). Pour alléger les notations, on pose $\mu = \mu_H$. On se propose de montrer que $\mathrm{ord}_L(f) = \mu$.

On suppose

$$(4.5.3)\qquad \mathrm{ord}_L(f) >_L \mu.$$

On isole dans l'expression (4.5.1) choisie pour f les termes d'ordre μ. On peut donc écrire, en notant $\mu = \min_L(m(1), \ldots, m(t))$,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{m(i)=\mu} H_i g_i + \sum_{m(i)>_L\mu} H_i g_i \\ &= \sum_{m(i)=\mu} FT(H_i)g_i + \sum_{m(i)=\mu} (H_i - FT(H_i))g_i + \sum_{m(i)>_L\mu} H_i g_i \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Les monômes qui apparaissent dans la seconde et la troisième somme ont tous un L-ordre L-strictement supérieur à μ. L'hypothèse $\mathrm{ord}_L(f) >_L \mu$ assure que la première somme a aussi un L-ordre L-strictement supérieur à μ. On pose $FT(H_i) = c_i X^{\alpha(i)}$. On a donc $\displaystyle\sum_{m(i)=\mu} FT(H_i)g_i = \sum_{m(i)=\mu} c_i X^{\alpha(i)} g_i$. Les hypothèses du lemme 4.4 sont vérifiées; cela implique donc l'existence de constantes $c_{j,k}$ telles que l'on ait

$$\sum_{m(i)=\mu} FT(H_i)g_i = \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k) \tag{4.5.5}$$

et

$$\mathrm{ord}_L(X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)) >_L \mu, \tag{4.5.6}$$

où $X^{\gamma_{j,k}} = PPCM(FM(g_j), FM(g_k))$. Puisque, par hypothèse, le reste de la L-division formelle de $S(g_j, g_k)$ par G est nul, on peut écrire

$$S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^{t} a_{ijk} g_i, \tag{4.5.7}$$

où $a_{ijk} \in \mathbb{K}[[X]]$ et $\mathrm{ord}_L(a_{ijk}g_i) \geq_L \mathrm{ord}_L(S(g_j, g_k))$, pour tout i, j, k. En effet, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $\mathrm{ord}_L(a_{ijk}g_i) \subset \Delta_i$ avec $\Delta_i \cap \Delta_l = \emptyset$, pour tout $l \neq i$.
Ainsi, l'égalité (4.5.7) donne

$$\mathrm{ord}_L(S(g_j, g_k)) = \min_i(\mathrm{ord}_L(a_{ijk}g_i)) \tag{4.5.8}$$

et

$$X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^{t} b_{ijk} g_i, \tag{4.5.9}$$

où $b_{ijk} = a_{ijk} X^{\mu-\gamma_{j,k}}$. De plus, (4.5.8) et (4.5.6) impliquent

$$\mathrm{ord}_L(b_{ijk}g_i) \geq_L \mathrm{ord}_L(X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)) >_L \mu. \tag{4.5.10}$$

En outre, en utilisant (4.5.5) et (4.5.9), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{m(i)=\mu} FT(H_i)g_i &= \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k) \\ &= \sum_{j,k} c_{j,k} \Big(\sum_i b_{ijk} g_i \Big) \\ &= \sum_i \Big(\sum_{j,k} c_{j,k} b_{ijk} \Big) g_i. \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

On pose $\sum_{j,k} c_{j,k} b_{ijk} = \tilde{H}_i$. Puisque les $c_{j,k}$ données par le lemme 4.4 sont des constantes, l'égalité (4.5.10) implique, pour tout i,

$$\text{(4.5.12)} \qquad \mathrm{ord}_L(\tilde{H}_i g_i) >_L \mu.$$

On remplace dans (4.5.3) $\sum_{m(i)=\mu} FT(H_i)g_i$ par $\sum_i \tilde{H}_i g_i$ pour obtenir

$$\text{(4.5.13)} \qquad f = \sum_i \tilde{H}_i g_i + \sum_{m(i)=\mu} (H_i - FT(H_i))g_i + \sum_{m(i)>_L\mu} H_i g_i.$$

On a donc trouvé une expression de f du type (4.5.1) où tous les termes ont un L-ordre L-strictement supérieur à μ. Ceci est impossible d'après la maximalité de μ. L'hypothèse $\mathrm{ord}_L(f) >_L \mu$ est donc absurde. On conclut aisément avec (4.5.2) que $\mathrm{ord}_L(f) = \mu$. On a donc bien $FM(f) = X^\mu$ avec $\mu = \min_L(m(1), \ldots, m(t))$. Ainsi μ appartient à $E_L(\mathcal{I})$ et G est une base standard de $\mathcal{I}$ pour la direction L. $\diamondsuit$

On considère l'ordre naturel défini, pour $I = (i_1, \ldots, i_s)$ et $J = (j_1, \ldots, j_s)$, par

$$I \le_{nat} J \quad \text{équivaut à} \quad \begin{array}{l} |I| < |J| \text{ ou } I = J \\ \text{ou } |I| = |J| \text{ et } \exists k \text{ tel que, } i_l = j_l, \text{ pour } l = 1, \ldots, k-1, \text{ et } i_k > j_k. \end{array}$$

Soient I, J des multi-indices de $\mathbb{N}^s$. Si $I \le_{nat} J$ et $I \neq J$, on écrira $I <_{nat} J$. On peut considérer pour cet ordre l'exposant privilégié d'un élément f de $\mathbb{K}[[X]]$. De plus, on montre aisément que, étant donné un entier k, il existe une forme linéaire L vérifiant $(**)$ qui préserve l'ordre naturel jusqu'à l'entier k, c'est à dire telle que, pour tous multi-indices $I, J \in \mathbb{N}^s$ satisfaisant $|I| \le k$ et $|J| \le k$, on ait

$$I <_{nat} J \Rightarrow L(I) < L(J).$$

4.6 PROPOSITION

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Il existe alors une forme linéaire L vérifiant $(**)$ et une base standard minimale $G = (g_1, \ldots, g_k)$ pour $\mathcal{I}$ dans la direction L telle que, pour tout $i = 1, \ldots, k$, $g_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$. De plus, L peut être choisie de sorte qu'elle préserve l'ordre naturel jusqu'à un entier arbitrairement grand.

Preuve. La preuve de cette proposition donne en plus une construction explicite de cette base standard.

On pose $G_0 = (f_1, \ldots, f_p)$. Soit alors, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $E_i^{(0)}$ l'exposant privilégié, pour l'ordre naturel, associé à f_i. Soit un entier k_0 tel que $k_0 > \max_{i=1,\ldots,p} |E_i^{(0)}|$. Soit L_0 une forme linéaire vérifiant $(**)$ qui préserve l'ordre naturel jusqu'à l'entier k_0. Les multi-indices $E_i^{(0)}$ sont aussi les exposants privilégiés dans la direction L_0 des séries f_i. On peut s'assurer que G_0 est $(E_1^{(0)}, \ldots, E_p^{(0)}; L_0)$-régulière dans $\mathbb{K}[[X]]$. On se trouve dans les conditions du théorème 2.4. Pour chaque couple d'indices (i, j) avec $i \neq j$, on ajoute alors à G_0 l'ensemble des restes non nuls de la L_0-division des séries $S(f_i, f_j)$ par G_0. On appelle G_1 l'ensemble ainsi construit. Si $G_1 = G_0$, d'après le lemme 4.5, G_0 est une base standard de $\mathcal{I}$ dans la direction L_0. Sinon, on note $r_{i,j}^{(1)}$ le reste de la L_0-division de $S(f_i, f_j)$ par G_0 et $E_{i,j}^{(1)}$ l'exposant privilégié de $r_{i,j}^{(1)}$ pour l'ordre naturel. Clairement $r_{i,j}^{(1)}$ appartient à l'idéal $\mathcal{I}$.

Si $\max_{i,j} |E_{i,j}^{(1)}| < k_0$, ces multi-indices sont aussi les exposants privilégiés dans la direction L_0. Sinon, soit $k_1 > \max_{i,j} |E_{i,j}^{(1)}|$, alors on peut trouver L_1 une forme linéaire qui préserve l'ordre naturel usuel jusqu'à l'entier k_1. L_1 est alors un "raffinement" de L_0 en ce sens que les restes issus de la L_1-division des S-séries de G_0 coincident avec les restes issus de la L_0-division des S-séries de G_0, puisque les exposants privilégiés dans la direction L_1 de G_0 sont les mêmes que ceux dans la direction L_0.

On réitère alors le processus; c'est à dire, pour chaque couple d'indices (i, j), avec $i \neq j$, on ajoute à G_1 l'ensemble des restes non nuls de la division des séries $S(f_i, f_j)$ par G_1. On appelle G_2 l'ensemble ainsi construit. Si $G_2 = G_1$, d'après le lemme 4.5, G_1 est une base standard de $\mathcal{I}$ dans la direction L_1. Sinon, on recommence. L'algorithme s'arrête lorsque on trouve $i \in \mathbb{N}$ tel que $G_{i+1} = G_i$; G_i est alors une base standard pour $\mathcal{I}$ dans la direction L_i. En outre, toutes les séries qui composent les ensembles G_k sont issus de restes de la L_i-division d'une série de $\mathbb{K}[[X]](M)$ par des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$, ce sont donc aussi, d'après le théorème 2.4, des séries qui appartiennent à $\mathbb{K}[[X]](M)$.

Pour achever la preuve, il reste à montrer que l'algorithme comporte un nombre fini d'itérations, c'est à dire qu'il existe bien un entier i tel que, pour tout entier $k \geq i$, $G_k = G_i$. Pour cela, on considère l'idéal $< FT(G_k) >$ engendré dans $\mathbb{K}[X]$ par l'ensemble des $FT(h)$, pour tout $h \in G_k$. Si $G_{i+1} \neq G_i$, on peut affirmer que $< FT(G_i) >$ est strictement plus petit que $< FT(G_{i+1}) >$. En effet, par hypothèse, au moins un reste non nul r a été ajouté à G_i. Comme r est un reste de division par l'idéal engendré par G_i, $FT(r)$ n'est divisible par aucun des $FT(h)$, $h \in G_i$. On a donc une suite croissante d'idéaux monômiaux dans l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ qui est noetherien; elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang. Ceci achève la démonstration.

On a donc obtenu une base standard de $\mathcal{I}$ dans la direction de la forme linéaire $L = L_i$. Pour avoir une base standard minimale, il suffit d'appliquer le lemme 4.2.2, c'est à dire de ne garder que les éléments de G_i dont les exposants privilégiés dans la direction L_i appartiennent à la frontière distinguée de $\mathcal{I}$ dans la direction L_i. $\diamondsuit$

4.7 ÉTUDE D'UN EXEMPLE

On considère l'idéal $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{K}[[X, Y]]$ engendré par

$$f_1(X, Y) = X^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n \text{ et } f_2(X, Y) = X + Y.$$

On a donc clairement pour $i = 1, 2$, $f_i \in \mathbb{K}[[X, Y]](M)$. On se propose de construire une base standard minimale de $\mathcal{I}$ suivant un ordre proche de l'ordre naturel. Pour cela, on applique l'algorithme donné dans la proposition 4.6.

On a $G_0 = (f_1, f_2)$, $E_1^{(0)} = (2, 0)$, $E_2^{(0)} = (1, 0)$. En choisissant alors $L_0 = i_1 + \sqrt{2}i_2$, L_0 vérifie bien (∗∗) et respecte l'ordre naturel jusqu'à l'entier 3. En effet, on vérifie facilement que, pour tous multi-indices I et J de longueur inférieure ou égale à 3, on a $I <_{nat} J \Rightarrow L_0(I) < L_0(J)$. Mais on a $L_0(0, 3) > L_0(4, 0)$. Les exposants privilégiés de f_1 et f_2 dans la direction de L_0 sont donc respectivement $E_1^{(0)}$ et $E_2^{(0)}$. En outre, on a

$$S(f_1, f_2)(X, Y) = Y^3 - XY + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n. \tag{4.7.1}$$

On effectue alors la L_0-division de $S(f_1, f_2)$ par G_0. On obtient

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2)(X, Y) &= -(X + Y)Y + (Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n) \\ &= -Y f_1(X, Y) + Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n. \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

Ainsi, on a, en posant $f_3(X, Y) = Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n$,

$$G_1 = (f_1(X, Y), f_2(X, Y), f_3(X, Y)), \tag{4.7.3}$$

et, suivant l'ordre naturel, les exposants privilégiés de f_1, f_2 et f_3 sont respectivement $E_1^{(1)} = (2, 0)$, $E_2^{(1)} = (1, 0)$, $E_3^{(1)} = (0, 2)$. Ils coincident bien avec les exposants privilégiés dans la direction de L_0. Ainsi, on pose $L_1 = L_0$. En outre, on a

$$S(f_1, f_2)(X, Y) = Y^3 - XY + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n, \tag{4.7.4}$$

$$S(f_1, f_3)(X, Y) = Y^5 - X^2Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^{n+2} - X^2Y^3 - \sum_{n=4}^{\infty} M_n X^2 Y^n, \tag{4.7.5}$$

et

$$S(f_2, f_3)(X, Y) = Y^3 - XY^3 - \sum_{n=4}^{\infty} M_n X Y^n, \tag{4.7.6}$$

On effectue alors la L_1-division des S-séries $S(f_i, f_j)$, pour $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, par G_1. On obtient

$$S(f_1, f_2)(X, Y) = -Y f_1(X, Y) + f_3(X, Y). \tag{4.7.7}$$

$$(4.7.8) \qquad S(f_1,f_3)(X,Y) = -(Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n) f_1(X,Y) + (Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n) f_3(X,Y).$$

$$(4.7.9) \qquad S(f_2,f_3)(X,Y) = -(Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n) f_2(X,Y) + Y f_3(X,Y).$$

L'ensemble des restes de ces divisions sont nuls, ainsi, d'après la preuve de la proposition 4.6, $G_1 = (f_1, f_2, f_3)$ est une base standard de $\mathcal{I}$ suivant la direction L_1. On remarque alors que, pour $i = 1,2,3$, f_i appartient bien à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$. Enfin, à partir de G_1, on a facilement une base standard minimale de $\mathcal{I}$, en remarquant que l'on a

$$(4.7.10) \qquad (E_1 + \mathbb{N}^2) \cup (E_2 + \mathbb{N}^2) \cup (E_3 + \mathbb{N}^2) = (E_2 + \mathbb{N}^2) \cup (E_3 + \mathbb{N}^2).$$

Ainsi, $(f_2(X,Y), f_3(X,Y)) = (X + Y, Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n)$ est une base standard minimale de $\mathcal{I}$ suivant la direction L_1. On vérifie d'ailleurs que l'on a

$$(4.7.11) \qquad X^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n = (Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n) + (X - Y)(X + Y).$$

Une conséquence du théorème 2.4 et de la proposition 4.6 est alors le théorème de division par un idéal pour des séries appartenant à des classes de séries formelles à croissance contrôlée.

4.8 THÉORÈME

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Il existe alors une forme linéaire L à coefficients strictement positifs vérifiant $(**)$, et une base standard $G = (g_1, \ldots, g_k)$ pour $\mathcal{I}$ dans la direction L telle que, pour tout $i = 1, \ldots, k$, g_i appartienne $\mathbb{K}[[X]](M)$, et telle que, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X]](M)$, on puisse écrire $g = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i + h_0$ avec, pour tout $i = 0, \ldots, k$, $h_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$. En outre, $g \in \mathcal{I}$ si et seulement si $h_0 = 0$.

4.9 COROLLAIRE

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Il existe alors une forme linéaire L vérifiant $(**)$ telle que, si on note $E_L(\mathcal{I})$ l'ensemble des exposants privilégiés de $\mathcal{I}$ dans la direction L, $F_L(\mathcal{I})$ la frontière distinguée de $E_L(\mathcal{I})$ et $(g^E)_{E \in F_L(\mathcal{I})}$ une base standard minimale de $\mathcal{I}$, on ait

(4.9.1) $\qquad$ *$\mathcal{I}$ est engendré par $(g^E)_{E \in F_L(\mathcal{I})}$,*

(4.9.2) $\qquad$ *tout élément $g \in \mathbb{K}[[X]](M)$ est équivalent modulo $\mathcal{I}$ à un unique élément $h \in \mathbb{K}[[X]](M)$ de la forme :*
$$h = \sum_{J \notin E_L(\mathcal{I})} h_J X^J.$$

En particulier, l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ *est noethérien.*

Preuve. Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 4.8 et des lemmes 4.2.1 et 4.2.2. En effet, on pose $E(\mathcal{I})$ l'ensemble des exposants privilégiés pour l'ordre naturel des séries de $\mathcal{I}$. La frontière distinguée $F(\mathcal{I})$ de $E(\mathcal{I})$ étant une partie finie, on note $E_1, \ldots, E_p$ les multi-indices de $F(\mathcal{I})$. Soient alors, pour pour tout $i = 1, \ldots, p$, g_i appartenant à $\mathcal{I}$ tel que E_i soit l'exposant privilégié de g_i pour l'ordre naturel. De la même manière que dans 4.2.2, on montre que $g_1, \ldots, g_p$ engendrent $\mathcal{I}$. L'assertion 4.9.2 se déduit aisément de 4.8. $\diamondsuit$

On donne dans la suite un exemple de l'importance du choix de la famille génératrice de l'idéal lors de la division par cet idéal.

4.10 ÉTUDE D'UN EXEMPLE

On considère l'idéal $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{K}[[X, Y]]$ engendré par

$$f_1(X, Y) = X^2 + Y^3 \text{ et } f_2(X, Y) = X^5.$$

Soit $M_n = n!$. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tels que

$$u_0 = 0,\ u_p = 0 \text{ pour tout entier } p \not\equiv 0[6] \text{ et } u_{6n} = M_{6n}.$$

On pose alors $g(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} X^n Y^n$. On a donc clairement $g \in \mathbb{K}[[X, Y]](M)$. En outre, on vérifie que l'on a

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= (X^2+Y^3)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k-2}Y^n\Big) \\ &\quad + X^5\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_{6k}X^{5(k-1)}\Big). \end{aligned} \tag{4.10.1}$$

On a donc écrit g sous la forme

$$g(X, Y) = q_1(X, Y) f_1(X, Y) + q_2(X, Y) f_2(X, Y), \tag{4.10.2}$$

ainsi $g \in \mathcal{I}$. Mais, $q_1(X, Y)$ s'écrit

$$\begin{aligned} q_1(X,Y) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{6k}X^{5k-2} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k-2}Y^n \\ &= q_1^{(1)}(X,Y) + q_1^{(2)}(X,Y) \end{aligned}. \tag{4.10.3}$$

Il est clair que la série $q_1^{(1)}(X, Y)$ n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. Par conséquent, puisque les séries $q_1^{(1)}(X, Y)$ et $q_1^{(2)}(X, Y)$ ont un support disjoint, on déduit de (4.10.3) que la série $q_1(X, Y)$ n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. On vérifie de même que la série $q_2(X, Y)$ n'appartient pas, non plus, à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. Ainsi, pour $i = 1, 2$, q_i n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$.

Cependant, si on applique directement le théorème 2.4, avec une forme linéaire L qui associe aux séries $f_1(X,Y)$ et $f_2(X,Y)$ les mêmes exposants privilégiés que ceux donnés par l'ordre naturel (on peut prendre $L(i_1,i_2)=i_1+\sqrt{2}i_2$), on trouve

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= (X^2+Y^3)(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k-3}) \\ &\quad +\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(u_{4k}Y^{5k}+u_{4k+2}XY^{5k+1}). \end{aligned} \tag{4.10.4}$$

Ainsi, on vérifie aisément, en utilisant l'hypothèse (H_2) sur la suite $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que les quotients appartiennent bien à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$. Cependant, bien que g appartienne à $\mathcal{I}$, le reste de cette division n'est pas nul.

Le problème se pose donc de construire un système fini de générateurs (g_i) de l'idéal $\mathcal{I}$ appartenant à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$ tel que l'on puisse écrire, pour tout $u\in\mathcal{I}$,

$$u(X,Y)=\sum_i h_i^{(u)}g_i, \tag{4.10.5}$$

avec, pour tout i, $h_i^{(u)}\in\mathbb{K}[[X,Y]](M)$.

Selon le schéma de la preuve de la proposition 4.6, on construit alors une base standard minimale de $\mathcal{I}$ dans la direction L. On obtient

$$(g_1(X,Y),g_2(X,Y),g_3(X,Y))=(X^2+Y^3,XY^6,Y^9). \tag{4.10.6}$$

Et par rapport à cette nouvelle base, on applique le théorème 2.4 pour obtenir

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= (X^2+Y^3)(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k-3}) \\ &\quad +XY^6(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_{4k+2}Y^{5(k-1)}) \\ &\quad +Y^9(\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k u_{4k}Y^{5k-9}). \end{aligned} \tag{4.10.7}$$

Et, cette fois, on a bien écrit g sous la forme (4.10.5) avec $h_i^{(g)}\in\mathbb{K}[[X,Y]](M)$.

4.11 RELATIONS DE DIVISION

Soient $f_1,\dots,f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note alors $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Le théorème 4.8 assure qu'il existe $g_1,\dots,g_k$, dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, des générateurs de $\mathcal{I}$, tels que, pour toute série g de $\mathbb{K}[[X]](M)$ appartenant à $\mathcal{I}$, la division de g par $G=(g_1,\dots,g_k)$ donne

$$g=\sum_{i=1}^{k}h_ig_i,$$

avec, pour tout $i = 1, \ldots, k$, $h_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$. Il est alors naturel de se poser la question suivante : peut-on écrire g sous la forme $g = \sum_{i=1}^{p} \tilde{h}_i f_i$ avec, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $\tilde{h}_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$? La division 2.4 appliquée directement à g ne donne pas forcément un reste nul (voir 4.10). En fait, en utilisant à nouveau la construction de la proposition 4.6, on a une réponse affirmative à la question.

THÉORÈME (Relations dans $\mathbb{K}[[X]](M)$)

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Alors, pour toute série g de $\mathbb{K}[[X]](M)$ appartenant à $\mathcal{I}$, on peut écrire $g = \sum_{i=1}^{p} q_i f_i$, avec, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $q_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$. Si on note $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_p$ sur $\mathbb{K}[[X]](M)$, on a donc

$$\mathcal{I}_M = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[[X]](M).$$

Preuve. C'est une conséquence directe de la construction opérée dans la preuve de la proposition 4.6. En effet, le théorème 4.8 assure qu'il existe une direction L et une base standard $g_1, \ldots, g_k$ de $\mathcal{I}$ dans cette direction telles que l'on ait

$$g = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i, \tag{4.11.1}$$

avec, pour tout $i = 1, \ldots, k$, $h_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$. On regarde alors comment cette base standard est construite. À la première étape, on ajoute, pour une forme linéaire L bien choisie, les restes $r_{i,j}$ non nuls de la L-division des S-séries $S(f_i, f_j)$, pour $i, j = 1, \ldots, p$, $i \neq j$, par $(f_1, \ldots, f_p)$. On a donc

$$S(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^{p} q_k^{(i,j)} f_k + r_{i,j}, \tag{4.11.2}$$

avec, pour tout $i, j = 1, \ldots, p$, $i \neq j$, et pour tout $k = 1, \ldots, p$, $q_k^{(i,j)}$ et $r_{i,j}$ des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Or, par construction, on a

$$S(f_i, f_j) = \frac{X^{\gamma_{i,j}}}{FT(f_i)} f_i - \frac{X^{\gamma_{i,j}}}{FT(f_j)} f_j \tag{4.11.3}$$

On peut donc écrire, pour tout $i, j = 1, \ldots, p$, $i \neq j$,

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \tilde{q}_k^{(i,j)} f_k, \tag{4.11.4}$$

avec, pour tout $i, j = 1, \ldots, p$, $i \neq j$, et pour tout $k = 1, \ldots, p$, $\tilde{q}_k^{(i,j)}$ des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On réitère ce processus à chaque étape de construction de la base standard pour conclure que, pour tout $i = 1, \ldots, k$, on peut écrire

$$g_i = \sum_{l=1}^{p} \tilde{h}_i f_i, \tag{4.11.5}$$

avec, pour tout $i = 1, \ldots, p$, h_i dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. On utilise alors (4.11.1) pour obtenir le résultat escompté. $\diamondsuit$

4.12 RETOUR À L'EXEMPLE 4.10

On considère l'idéal $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{K}[[X, Y]]$ engendré par

$$f_1(X, Y) = X^2 + Y^3 \text{ et } f_2(X, Y) = X^5.$$

On reprend la série $g(X, Y)$. On sait qu'elle appartient à l'idéal $\mathcal{I}$. On veut donc écrire $g(X, Y) = h_1(X, Y)f_1(X, Y) + h_2(X, Y)f_2(X, Y)$ avec $h_1(X, Y)$ et $h_2(X, Y)$ des séries de $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. La base standard minimale de $\mathcal{I}$ construite dans (4.10.6) est $(X^2 + Y^3, XY^6, Y^9)$. En effet, la première étape de la construction donne

$$X^3(X^2 + Y^3) - X^5 = XY^3(X^2 + Y^3) - XY^6. \tag{4.12.2}$$

On ajoute alors à $(f_1(X, Y), f_2(X, Y))$ le reste non nul de cette division, c'est à dire XY^6. On obtient l'ensemble

$$E_1 = (X^2 + Y^3, X^5, XY^6), \tag{4.12.3}$$

avec

$$XY^6 = (-X^3 + XY^3)(X^2 + Y^3) + X^5. \tag{4.12.4}$$

De même à E_1 on ajoute les restes non nuls de la division des S-séries de E_1 par E_1. On obtient simplement

$$S(X^2 + Y^3, XY^6) = Y^6(X^2 + Y^3) - X(XY^6) = Y^9. \tag{4.12.5}$$

Ainsi, on a, en regroupant (4.12.4) et (4.12.5),

$$Y^9 = (Y^6 + X^4 - X^2Y^3)(X^2 + Y^3) - (X)X^5. \tag{4.12.6}$$

Finalement, en remplaçant dans (4.10.8) XY^6 par son expression issue de (4.12.4) et Y^9 par son expression issue de (4.12.6), on obtient

(4.12.7)

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= (X^2 + Y^3)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k-3}\Big) \\ &\quad +((-X^3 + XY^3)(X^2 + Y^3) + X^5)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_{4k+2}Y^{5(k-1)}\Big) \\ &\quad +((Y^6 + X^4 - X^2Y^3)(X^2 + Y^3) - (X)X^5)\Big(\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k u_{4k}Y^{5k-9}\Big). \end{aligned}$$

On voit que l'on peut écrire $g(X, Y) = (X^2 + Y^3)h_1(X, Y) + X^5h_2(X, Y)$ avec $h_1(X, Y)$ et $h_2(X, Y)$ des séries de $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$.

Pour la commodité du lecteur, on écrit, ci-dessous, quelques variations du lemme 4.5 et de la proposition 4.6 que l'on utilisera dans le paragraphe 5.

4.13 REMARQUE

Soit $\mathcal{I}_M$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Soit L une forme linéaire, vérifiant $(**)$, qui respecte l'ordre naturel jusqu'à un entier suffisamment grand. Il est facile de vérifier que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Une famille $G=(g_1,\ldots,g_t)$ est une base standard pour $\mathcal{I}_M$ dans la direction L.

(b) Pour tout couple d'indices (i,j), avec $i\neq j$, le reste de la L-division de $S(g_i,g_j)$ par G est nul.

(c) Pour tout g appartenant à $\mathcal{I}_M$, le reste de la L-division de g par G est nul.

4.14 PROPOSITION

Soient $f_1,\ldots,f_p$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]](M)$. Il existe alors une forme linéaire L vérifiant $(**)$ et une base standard minimale $G=(g_1,\ldots,g_k)$ pour $\mathcal{I}_M$ dans la direction L. De plus, L peut être choisie de sorte qu'elle préserve l'ordre naturel jusqu'à un entier arbitrairement grand.

Preuve. On note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $f_1,\ldots,f_p$ sur $\mathbb{K}[[X]]$. On applique la proposition 4.6 à $\mathcal{I}$. On trouve une forme linéaire L vérifiant $(**)$ et une base standard minimale $G=(g_1,\ldots,g_k)$ pour $\mathcal{I}$ dans la direction L telle que, pour tout $i=1,\ldots,k$, $g_i\in\mathbb{K}[[X]](M)$. On note, pour tout $i=1,\ldots,k$, E_i $=\mathrm{ord}_L(E_i)$. On note alors $\Delta=\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_k$ la partition de $\mathbb{N}^s$ associée aux E_i. Soit g un élément de $\mathcal{I}_M$. Selon le thórème 4.8, on effectue la L-division de g par G dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. On écrit donc

$$g=\sum_{i=1}^{k}h_ig_i+h_0,$$

avec, pour tout $i=1,\ldots,k$, $h_i\in\mathbb{K}[[X]](M)$, $\mathrm{Exp}_X(h_iX^{E_i})\subset\Delta_i$, et $h_0\in\mathbb{K}[[X]](M)$, $\mathrm{Exp}_X(h_0)\subset\mathbb{N}^s-\Delta$. La série g appartient à $\mathcal{I}_M$ donc aussi à $\mathcal{I}$. Alors, toujours d'après le théorème 4.8, h_0 est nul et, d'après 4.13, $G=(g_1,\ldots,g_k)$ est une base standard pour $\mathcal{I}_M$ dans la direction L. ◇

4.15 DÉFINITION

Soit $\mathcal{I}_M$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Puisque l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est noethérien, $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ est engendré par k séries, $F_1,\ldots,F_k$. La proposition 4.14 assure qu'il existe une forme linéaire L vérifiant $(**)$ et une base standard minimale $\Phi=(\Phi_1(X),\ldots,\Phi_p(X))$ de $\mathcal{I}_M$ dans la direction L. En outre, on peut choisir la forme linéaire L telle que, si on note $d=\max_{i=1,\ldots,p}(d_i)$, avec, pour tout $i=1,\ldots,p$, d_i $=\mathrm{ord}(\Phi_i)$, elle respecte l'ordre naturel jusqu'à l'entier $2d$. On note, pour tout $1\leq i\leq p$, E_i l'exposant privilégié de Φ_i dans la direction L. Par choix de la forme linéaire L, on a $|E_i|=\mathrm{ord}(\Phi_i)$.

On dit alors que l'on a **une "bonne" base standard** de l'idéal $\mathcal{I}_M$.

4.16 REMARQUE

L'intérêt d'une "bonne" base standard G, d'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$, est de pouvoir effectuer la division de tout élément g de $\mathbb{K}[[X]](M)$ par G dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. De plus, le reste de cette division est nul si et seulement si g appartient à $\mathcal{I}$.

Pour un éclairage sur les relations entre bases standard et exposants privilégiés dans $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\{X\}$, on peut se reférer aux travaux de E. Bierstone et P. Milman, par exemple à [BM].

§5. DEUX THÉORÈMES DE PRÉPARATION.

On se propose d'établir des théorèmes qui rappellent dans leur forme le théorème classique de préparation de Malgrange [Mal].

5.1 NOTATIONS ET REMARQUES

Soit M une suite de réels positifs vérifiant les conditions (H_1) et (H_2). On reprend les notations et définitions du paragraphe 4. Soit $F = (F_1(X), \dots, F_k(X))$ un élément de $(\mathbb{K}[[X]](M))^k$. On note $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré par les séries $F_1(X), \dots, F_k(X)$ sur $\mathbb{K}[[X]](M)$. On suppose que

(5.1.1) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$ est de dimension finie μ, avec $\mu \geq 1$.

Ceci implique $F(0) = 0$ et $k \geq s$.

Remarques.

(a) Comme dans 4.14, on associe à $F_1, \dots, F_k$ une "bonne" base standard $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$ de l'idéal $\mathcal{I}_M$ dans une direction L bien choisie. On note alors, pour tout $i = 1, \dots, p$, E_i l'exposant privilégié dans la direction L de Φ_i. On pose aussi $\Delta = \cup_{i=1}^{p}(E_i + \mathbb{N}^s)$. Comme le $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$ est de dimension finie μ, l'ensemble $\mathbb{N}^s - \Delta$ a exactement μ éléments (voir (4.9.2)). On note $m_1(X), \dots, m_\mu(X)$ les monômes associés. Leurs classes d'équivalence modulo $\mathcal{I}_M$ engendrent donc $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$.

(b) On note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $F_1, \dots, F_k$ sur $\mathbb{K}[[X]]$. La condition (5.1.1) est équivalente à

(5.1.2) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}[[X]]/\mathcal{I}$ est de dimension finie μ, avec $\mu \geq 1$.

On a facilement (5.1.1) à partir de (5.1.2). Pour avoir la réciproque, il suffit de reprendre la preuve de la proposition 4.14 qui établit qu'une base standard G pour $\mathcal{I}_M$ dans une "bonne" direction L est aussi une base standard pour $\mathcal{I}$ dans la même direction L. On conclut alors en remarquant que le reste de la division d'une série de $\mathbb{K}[[X]]$ par G est alors polynômial et appartient donc aussi à $\mathbb{K}[[X]](M)$.

On note enfin $e_1, \dots, e_\mu$ des monômes quelconques telles que leurs classes d'équivalence dans $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$.

On a le résultat suivant.

5.2 THÉORÈME

Soient $F_1, \dots, F_k$ des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré par ces éléments dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. On suppose que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$, notée μ, est finie et non nulle. Soient $e_1, \dots, e_\mu$ des monômes telles que leurs classes d'équivalence dans $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$. Alors, pour tout élément $g(X)$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$, il existe des séries $R_i(u_1, \dots, u_k)$, avec

$1 \leq i \leq \mu$, *de* $\mathbb{K}[[u_1, \ldots, u_k]](M^{(\mu)})$, *telles que l'on ait*

$$g(X) = \sum_{i=1}^{\mu} R_i(F_1, \ldots, F_k) e_i(X).$$

Preuve. Soit $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ une base standard de $\mathcal{I}_M$ telle que dans 5.1. D'après le théorème 4.11, il existe, pour tout $i = 1, \ldots, p$, des séries $h_{i,j}$, $1 \leq j \leq k$, de $\mathbb{K}[[X]](M)$, telles que l'on ait

$$\Phi_i(X) = \sum_{j=1}^{k} h_{i,j}(X) F_j(X). \tag{5.2.1}$$

Soit $v = (v_1, \ldots, v_k)$ des nouvelles variables. On pose alors, pour tout $i = 1, \ldots, p$,

$$\tilde{F}_i(X, v^\mu) = \Phi_i(X) - \sum_{j=1}^{k} h_{i,j}(X) v_j^\mu. \tag{5.2.2}$$

Clairement, par construction on a l'égalité ord$(\tilde{F}_i(X, v))$ =ord$(\Phi_i(X))$. Soit L' une forme linéaire de $\mathbb{R}^{s+k}$, à coefficients strictement positifs, telle que, pour tout $i = 1, \ldots, p$, E_i est l'exposant privilégié de $\tilde{F}_i(X, v^\mu)$ dans la direction L'. Il suffit de compléter la forme linéaire L de $\mathbb{R}_+^{*s}$. Soit $g(X)$ un élément de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Le théorème de L'-division dans $\mathbb{K}[[X, v]](M)$ [II, 2.4] et l'algorithme de division formelle de [AHV] permettent d'écrire l'égalité

$$g(X) = \sum_{i=1}^{p} q_i(X, v_1^\mu, \ldots, v_k^\mu) \tilde{F}_i(X, v^\mu) + \sum_{i=1}^{\mu} H_i(v_1^\mu, \ldots, v_k^\mu) m_i(X), \tag{5.2.3}$$

avec, pour tout $1 \leq i \leq \mu$, $H_i(v_1^\mu, \ldots, v_k^\mu)$ dans $\mathbb{K}[[v_1, \ldots, v_k]](M)$. En effet, pour vérifier que les séries q_i et h_i de l'égalité (5.2.3) sont des séries en les variables X et $v_1^\mu, \ldots, v_k^\mu$, il suffit de considérer l'algorithme de division formelle de [AHV]. On pose $\Phi_i(X) = X^{E_i} + \tilde{\Phi}_i(X)$, pour tout $1 \leq i \leq p$. À la première étape de cette algorithme, on écrit

$$g(X) = \sum_{i=1}^{p} X^{E_i} Q_i^{(1)}(X) + r^{(1)}(X), \tag{5.2.4}$$

avec X^{E_i} qui ne divise aucun monôme de $r^{(1)}(X)$. Ainsi, l'égalité (5.2.4) donne

$$\begin{aligned} g(X) &= \sum_{i=1}^{p} \Big(X^{E_i} + \tilde{\Phi}_i(X) - \sum_{j=1}^{k} h_{i,j}(X) v_j^\mu \Big) Q_i^{(1)}(X) \\ &\quad + \Big(r^{(1)}(X) - \sum_{i=1}^{p} Q_i^{(1)}(X) (\tilde{\Phi}_i(X) - \sum_{j=1}^{k} h_{i,j}(X) v_j^\mu) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \tilde{F}_i(X, v^\mu) Q_i^{(1)}(X) + H^{(1)}(X, v^\mu). \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

On itère alors le processus en remplaçant $g(X)$ par $H^{(1)}(X, v^\mu)$. D'après [AHV], l'algorithme converge. Clairement, les séries q_i et H_i obtenues sont des séries des variables X et $v_1^\mu, \dots, v_k^\mu$. Par unicité de la division formelle, ce sont bien celles qui réalisent (5.2.3). On écrit, pour tout $1 \leq i \leq \mu$,

$$H_i(v_1^\mu, \dots, v_k^\mu) = \sum_{J \in \mathbf{N}^k} h_J^{(i)} v_1^{\mu j_1} ... v_k^{\mu j_p}. \tag{5.2.6}$$

Par hypothèse, on a donc l'existence d'une constante C_0 telle que l'on ait

$$\sup_{J \in \mathbf{N}^k} \frac{|h_J^{(i)}|}{M_{\mu(j_1 + \dots + j_k)}} \leq C_0. \tag{5.2.7}$$

On pose $u_i = v_i^\mu$, pour tout $1 \leq i \leq k$. D'après (5.2.6), les séries $H_k(u_1, \dots, u_p)$ appartiennent à $\mathbb{K}[[u_1, \dots, u_k]](M^{(\mu)})$. De (5.2.3), on tire l'égalité

$$\begin{aligned} g(X) \;\; &= \;\; \sum_{i=1}^{p} q_i(X, u_1, \dots, u_p)(\Phi_i(X) - \sum_{j=1}^{k} h_{i,j}(X) u_j) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\mu} H_k(u_1, \dots, u_p) m_k(X). \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

En posant $u_i = F_i(X)$, pour tout $1 \leq i \leq k$, dans (5.2.8), on obtient

$$g(X) = \sum_{i=1}^{\mu} H_i(F_1, \dots, F_k) m_i(X). \tag{5.2.9}$$

En effectuant un calcul similaire pour les e_i, $1 \leq i \leq \mu$, on a

$$e_i(X) = \sum_{j=1}^{\mu} T_{i,j}(F_1, \dots, F_k) m_j(X), \tag{5.2.10}$$

avec $T_{i,j}(u_1, \dots, u_k)$ dans $\mathbb{K}[[u]](M^{(\mu)})$. Soit $T(X)$ la matrice à μ lignes et μ colonnes de composantes $T_{i,j}(F_1, \dots, F_k)$. Pour obtenir le théorème, il est facile de voir qu'il suffit de montrer que $T(X)$ est une matrice inversible au sens des séries formelles. Il suffit donc de prouver que, si on note $D(X)$ =det$(T(X))$, on a $D(0) \neq 0$.

D'après (5.2.3), on a, pour tout $i = 1, \dots, \mu$,

$$e_i(X) = \sum_{j=1}^{p} q_{i,j}(X, v_1^\mu, \dots, v_k^\mu) \tilde{F}_j(X, v^\mu) + \sum_{j=1}^{\mu} T_{i,j}(v_1^\mu, \dots, v_k^\mu) m_j(X). \tag{5.2.11}$$

Puisque $F(0) = 0$, en posant $v = 0$ dans (5.2.11) et en tenant compte de (5.2.2), on obtient

$$e_i(X) = \sum_{j=1}^{p} q_{i,j}(X, 0) \Phi_j(X) + \sum_{j=1}^{\mu} T_{i,j}(0) m_j(X). \tag{5.2.12}$$

On a, de manière évidente,

$$D(0) = \begin{bmatrix} T_{1,1}(0) & T_{1,2}(0) & \cdots & T_{1,\mu}(0) \\ T_{2,1}(0) & T_{2,2}(0) & \cdots & T_{2,\mu}(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{\mu,1}(0) & T_{\mu,2}(0) & \cdots & T_{\mu,\mu}(0) \end{bmatrix} \tag{5.2.13}$$

L'égalité $D(0) = 0$ équivaut à l'existence de scalaires λ_i, $1 \leq i \leq \mu$, non tous nuls, ,tels que l'on ait, pour tout $j = 1, \ldots, \mu$,

$$\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i T_{i,j}(0) = 0. \tag{5.2.14}$$

En multipliant alors l'égalité (5.2.12) par λ_i et en sommant pour i allant de 1 à μ, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i e_i(X) &= \sum_{j=1}^{p} (\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i q_{i,j}(X,0)) \Phi_j(X) + \sum_{j=1}^{\mu} (\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i T_{i,j}(0)) m_j(X) \\ &= \sum_{j=1}^{p} (\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i q_{i,j}(X,0)) \Phi_j(X). \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Cette dernière égalité donne alors une contradiction. En effet, on déduit, de (5.2.15),

$$\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i e_i(X) \in \mathcal{I}_M. \tag{5.2.16}$$

Ceci est impossible compte tenu du fait que les e_i forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$. On déduit alors $D(0) \neq 0$. La preuve du théorème est donc achevée. $\diamondsuit$

Remarques.

(a) Dans le cas $M = \mathbf{1}$, c'est à dire $M_n = 1$ pour tout entier n, le théorème 5.2 n'est autre que le théorème classsique de préparation de Malgrange [Mal].

(b) Ce théorème est à rapprocher du théorème 59 de [CC3].

On note $(M, \mathbb{R}^s)_0$ l'ensemble des germes en 0 de fonctions C^∞ dont les dérivées d'ordre l sont contrôlées par M_l.

Soient $F = (F_1, \ldots, F_s)$ un s-uple d'éléments de $(M, \mathbb{R}^s)_0$. Soit $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré dans $(M, \mathbb{R}^s)_0$ par les germes de fonctions $F_1, \ldots, F_s$. On suppose que l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $(M, \mathbb{R}^s)_0/\mathcal{I}_M$ est de dimension finie μ. Il existe alors des monômes $e_1, \ldots, e_\mu$ de degré strictement inférieur à μ dont les classes d'équivalence dans $(M, \mathbb{R}^s)_0/\mathcal{I}_M$ forment une base de $(M, \mathbb{R}^s)_0/\mathcal{I}_M$. Soit g une fonction de $(M, \mathbb{R}^s)_0$, alors il existe des fonctions γ_i, $1 \leq i \leq \mu$, appartenant à $(M^{(\mu)}, \mathbb{R}^s)_0$ telles que l'on ait dans un voisinage de 0,

$$g = \sum_{k=1}^{\mu} \gamma_k(F) e_k.$$

Dans cet énoncé de [CC3], on remarque que le nombre de variables est égal au nombre de fonctions F_i. Dans le théorème 5.2, cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Soit $\mathcal{I}_M$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On reprend les notations du paragraphe 5.1. On a maintenant la version plus précise suivante.

5.3 THÉORÈME

Soit $\mathcal{I}_M$ un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On suppose que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$, notée μ, est finie et non nulle. Soit $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ une "bonne" base standard de $\mathcal{I}_M$. Soient $e_1, \ldots, e_\mu$ des monômes telles que leurs classes d'équivalence dans $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X]](M)/\mathcal{I}_M$. On note $d = \max_{i=1,\ldots,p}(d_i)$, avec, pour tout $i = 1, \ldots, p$, d_i =ord(Φ_i). Alors, pour tout élément $g(X)$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$ il existe des séries $R_i(u_1, \ldots, u_p)$, avec $1 \leq i \leq \mu$, de $\mathbb{K}[[u_1, \ldots, u_p]](M^{(d)})$, telles que l'on ait

$$g(X) = \sum_{i=1}^{\mu} R_i(\Phi_1, \ldots, \Phi_p)e_i(X).$$

De plus, pour tout $1 \leq i \leq \mu$, la série $R_i(\Phi_1(X), \ldots, \Phi_p(X))$ appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$.

Preuve. Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $F_i(X, v_i) = \Phi_i(X) - v_i^{d_i}$. Clairement, par construction on a l'égalité ord$(F_i(X, v_i))$ =ord$(\Phi_i(X))$. Soit L' une forme linéaire de $\mathbb{R}^{s+p}$, à coefficients strictement positifs, telle que, pour tout $i = 1, \ldots, p$, E_i est l'exposant privilégié de $F_i(X, v_i)$ dans la direction L'. Il suffit de compléter la forme linéaire L de $\mathbb{R}_+^{*s}$. Soit $g(X)$ un élément de $\mathbb{K}[[X]](M)$. De la même manière que dans la preuve du théorème 5.2, le théorème de L'-division dans $\mathbb{K}[[X, v]](M)$ [II, 2.4] et l'algorithme de divison formelle de [AHV] permettent d'écrire l'égalité

$$g(X) = \sum_{i=1}^{p} q_i(X, v_1^{d_1}, \ldots, v_p^{d_p})(\Phi_i(X) - v_i^{d_i}) + \sum_{k=1}^{\mu} R_k(v_1^{d_1}, \ldots, v_p^{d_p})m_k(X), \tag{5.3.1}$$

avec, pour tout $1 \leq k \leq \mu$, $R_k(v_1^{d_1}, \ldots, v_p^{d_p})$ dans $\mathbb{K}[[v_1, \ldots, v_p]](M)$. On écrit alors, pour tout $1 \leq k \leq \mu$,

$$R_k(v_1^{d_1}, \ldots, v_p^{d_p}) = \sum_{J \in \mathbf{N}^p} r_J^{(k)} v_1^{d_1 j_1} \ldots v_p^{d_p j_p}. \tag{5.3.2}$$

Par hypothèse, on a donc l'existence d'une constante C_0 telle que l'on ait

$$\sup_{J \in \mathbf{N}^p} \frac{|r_J^{(k)}|}{M_{d_1 j_1 + \ldots + d_p j_p}} \leq C_0. \tag{5.3.3}$$

On pose $u_i = v_i^{d_i}$, pour tout $1 \leq i \leq p$. D'après (5.3.3), les séries $R_k(u_1, \ldots, u_p)$ vérifient les hypothèses du théorème [C, 1.8]. Ainsi, pour tout $1 \leq k \leq \mu$, $R_i(\Phi_1(X), \ldots, \Phi_p(X))$

appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$. Clairement, de (5.3.3), on déduit aussi que, pour $1 \leq k \leq \mu$, $R_k(u_1, \ldots, u_p)$, appartient à $\mathbb{K}[[u_1, \ldots, u_p]](M^{(d)})$. De (5.3.1), on tire l'égalité

$$g(X) = \sum_{i=1}^{p} q_i(X, u_1, \ldots, u_p)(\Phi_i(X) - u_i) + \sum_{k=1}^{\mu} R_k(u_1, \ldots, u_p) m_k(X). \tag{5.3.6}$$

En posant $u_i = \Phi_i(X)$, pour tout $1 \leq i \leq p$, dans (5.3.6), on obtient

$$g(X) = \sum_{i=1}^{\mu} R_i(\Phi_1, \ldots, \Phi_p) m_i(X). \tag{5.3.7}$$

Pour obtenir le théorème, on procède comme dans (5.2.10). On applique (5.3.7) aux e_i, $1 \leq i \leq \mu$, et on inverse l'égalité obtenue. $\diamondsuit$

Remarque.

On se place dans le cas d'une variable X. Clairement, toute série formelle $f(X)$ se décompose de la façon suivante.

$$f(X) = R_1(X^2).1 + R_2(X^2).X.$$

De plus, si f appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$, il est facile de vérifier que $R_1(X^2)$ et $R_2(X^2)$ appartiennent aussi à $\mathbb{K}[[X]](M)$. Le théorème de préparation 5.3 généralise en quelque sorte ce phénomène.

Dans la suite, on montre qu'il est indispensable de bien présenter l'idéal pour obtenir l'information supplémentaire, après recomposition, donnée par le théorème 5.3. Pour cela, on donne un exemple d'application $F = (F_1, F_2)$ et de série g où, dans une décomposition comme dans le théorème 5.2, les séries $R_i(F_1, \ldots, F_p)$ n'appartiennent pas à $\mathbb{K}[[X]](M)$.

5.4 EXEMPLE

On se place en deux variables X et Y. On pose

$$F_1(X, Y) = X + Y^3 \text{ et } F_2(X, Y) = X^4.$$

On note $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré par (F_1, F_2) sur $\mathbb{K}[[X]]$. On vérifie facilement que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X, Y]](M)/\mathcal{I}_M$ est égale à 12. Il est aussi facile de remarquer que (F_1, F_2) ne constitue pas une "bonne " base standard de l'idéal $\mathcal{I}_M$. On va donc montrer que l'on ne peut pas espérer, sous les hypothèses du théorème 5.2, les conclusions du théorème 5.3.

Soit $M = \{M_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant (H_1) et (H_2). On prend $M_n = n!$. Soit $g(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n Y^n$.

On vérifie facilement que les monômes $X^i Y^j$, pour $i \leq 3$ et $j \leq 2$, forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[[X, Y]]/\mathcal{I}_M$ dans la direction $L = (4, 1)$. On pose

$$e_1 = 1,\ e_2 = X,\ e_3 = Y,\ e_4 = X^2,\ e_5 = XY,$$

$$e_6 = Y^2,\ e_7 = X^3,\ e_8 = X^2Y,\ e_9 = XY^2,\ e_{10} = X^3Y,$$
$$e_{11} = X^2Y^2,\ e_{12} = X^3Y^2.$$

On donne une représentation de $g(X,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n Y^n$ de la forme

$$g(X,Y) = \sum_{i=1}^{12} R_i(F_1,F_2)e_i(X,Y), \tag{5.4.1}$$

où $R_1(F_1,F_2)$ n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$.

Pour cela, on effectue la L-division formelle de $g(X,Y)$ par $X+Y^3-u_1$ et X^4-u_2. On a déjà facilement l'égalité, après division par $X+Y^3-u_1$,

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= (X+Y^3-u_1)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k+1}M_{n+3k}Y^n(X-u_1)^{k-1}\Big) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(X-u_1)^k(M_{3k}+M_{3k+1}Y+M_{3k+2}Y^2). \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Pour achever la division, il reste à diviser le terme $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(X-u_1)^k(M_{3k}+M_{3k+1}Y+M_{3k+2}Y^2)$ par X^4-u_2. On ne s'intéresse qu'au terme $R_1(u_1,u_2)$. Il suffit donc de considérer la division de $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(X-u_1)^kM_{3k}$ par X^4-u_2. Or, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(X-u_1)^kM_{3k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^iX^iu_1^{k-i}M_{3k}. \tag{5.4.3}$$

La division par X^4-u_2 revient à remplacer X^4 par u_2. Clairement on obtiendra alors le terme $R_1(u_1,u_2)$ de la division par X^4-u_2 du terme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{i=0;\\ i=4i'}}^{k}\binom{k}{i}X^{4i'}u_1^{k-i}M_{3k}. \tag{5.4.4}$$

On obtient alors, en tenant compte de la remarque $X^4 \equiv u_2 \bmod (X^4-u_2)$,

$$R_1(u_1,u_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{i=0;\\ i=4i'}}^{k}\binom{k}{i}u_2^{i'}u_1^{k-i}M_{3k}. \tag{5.4.5}$$

On a donc

$$R_1(X+Y^3,X^4) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{i=0;\\ i=4i'}}^{k}\binom{k}{i}X^{4i'}(X+Y^3)^{k-i}M_{3k}. \tag{5.4.6}$$

De (5.4.6), on tire

$$R_1(X+Y^3,X^4)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{i=0;\\ i=4i'}}^{k}\binom{k}{i}X^{4i'}X^{k-4i'}M_{3k}+T(X,Y), \tag{5.4.7}$$

avec la série $T(X,Y)$ ne comportant pas de termes en X^n, $n\in\mathbb{N}$, dans son développement. Or, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{i=0;\\ i=4i'}}^{k}\binom{k}{i}X^{4i'}X^{k-4i'}M_{3k}=\sum_{k=0}^{\infty}M_{3k}X^k(\sum_{\substack{i=0;\\ i=4i'}}^{k}\binom{k}{i}). \tag{5.4.8}$$

On en déduit facilement que $R_1(X+Y^3,X^4)$ n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$.

$\diamondsuit$

Partie III : Autour d'un théorème d'Artin

INTRODUCTION.

Dans cette partie, $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels positifs vérifiant les propriétés (H_1) et (H_2). Soit aussi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\underline{m}_X$ l'idéal maximal de $\mathbb{K}[[X]](M)$, c'est à dire l'ensemble des séries formelles de $\mathbb{K}[[X]](M)$ sans terme constant.

Dans toute la suite, $f(X,Y) = (f_1(X,Y),\ldots,f_m(X,Y))$ désignera un élément de $\Big(\mathbb{K}[[X,Y]](M)\Big)^m$ avec $X = (X_1,\ldots,X_d)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_q)$, des variables et m, d, q des entiers naturels. On se propose de montrer que le classique théorème d'approximation d'Artin [Ar] reste vrai dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée. Plus précisément, si les f_i, $1 \le i \le m$, sont des séries de $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$ telles qu'il existe $\bar{y}(X)$ dans $\mathbb{K}[[X]]^q$ tel que $\bar{y}(0) = 0$ et $f(X,\bar{y}(X)) = 0$, alors, pour tout entier $c \ge 1$, on prouve qu'il existe $y(X)$ dans $\mathbb{K}[[X]](M)^q$ tel que $y(0) = 0$, $f(X,y(X)) = 0$ et $y(X) - \bar{y}(X) \in \underline{m}_X^c$. C'est le théorème 1.9. On obtient ce résultat à partir du théorème 1.8, qui, dans l'anneau des séries convergentes, est la version à paramètres du théorème d'Artin dûe à A. Płoski [Pł1]. On en déduit, par exemple, que l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est factoriel. On retrouve aussi le théorème sur les relations obtenu dans la partie précédente [II, 4.11].

§1. UN THÉORÈME D'APPROXIMATION.

1.1 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

On notera $\dfrac{J(f_1,\ldots,f_m)}{J(Y_1,\ldots,Y_k)}$ la matrice jacobienne de l'application $f(X,Y)$ par rapport aux k variables $Y_1,\ldots,Y_k$ et $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(Y_1,\ldots,Y_m)}$ son déterminant.

On dit alors qu'une suite $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X),\ldots,\bar{y}_q(X))$ de $\mathbb{K}[[X]]^q$, $\bar{y}(0) = 0$, est une solution simple du système $f(X,Y) = 0$ si et seulement si $f(X,\bar{y}(X)) = 0$ et $\text{rang}(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_\nu}(X,\bar{y}(X)))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le\nu\le q}} = m$ (ceci signifie qu'au sens des séries formelles un mineur d'ordre m est non nul). On a, dans ce cas, $m \le q$.

On va voir que toute solution formelle du système $f(X,Y) = 0$ peut être réduite en une solution simple. On a tout d'abord le lemme suivant.

1.2 LEMME

Soit $\mathcal{I} \neq (0)$, un idéal premier de l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$, $X = (X_1,\ldots,X_d)$. Il existe *des séries $h_1, \ldots, h_r$, de $\mathbb{K}[[X]](M)$, appartenant à $\mathcal{I}$, telles que*

$$(i) \qquad rang(\frac{\partial h_i}{\partial X_j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le d}}(mod\, \mathcal{I}) = r,$$

$$(ii) \qquad \forall\ h \in \mathcal{I},\ \exists a \notin \mathcal{I},\ a \in \mathbb{K}[[X]](M),\ telle\ que\ ah \in (h_1, \ldots, h_r)\mathbb{K}[[X]](M).$$

Preuve. On remarque, d'abord, que la proposition est invariante par rapport aux changements de variables linéaires. On démontre, ensuite, le lemme par récurrence sur le nombre de variables, d. Pour $d = 1$, on a de manière évidente $\mathcal{I} = (X_1)$, $h_1 = X_1$ et le lemme est clair. On suppose alors $d > 1$ et la proposition vraie pour les idéaux premiers de l'anneau $\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_{d-1}]](M)$, de $d-1$ variables. Grâce à la remarque ci-dessus, on peut supposer que l'idéal $\mathcal{I}$ contient une série $f(X_1, \ldots, X_d)$, k-régulière en X_d, $k \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire $\mathrm{ord}(f(X_1, \ldots, X_d)) \ge k$ et $f(0, \ldots, 0, X_d) = X_d^k c(X_d)$ avec $c(0) \ne 0$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass [II,3.2], on peut écrire, en notant $X' = (X_1, \ldots, X_{d-1})$,

$$(1.2.1) \qquad f(X', X_d) = W(X', X_d)U(X', X_d),$$

avec $W(X', X_d)$, $U(X', X_d)$ des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$ qui vérifient

$$(1.2.2) \qquad U(0, 0) \ne 0,$$

$$(1.2.3) \qquad W(X', X_d) = X_d^k + \sum_{j=1}^{k} r_j(X')X_d^{k-j} \text{ et } W(X', X_d)\ k-\text{régulière en } X_d.$$

Comme $\mathcal{I}$ est un idéal premier , on a, en utilisant (1.2.1) et (1.2.2), $W(X', X_d) \in \mathcal{I}$. On pose alors $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[[X']](M)$. $\mathcal{I}'$ est clairement un idéal premier de $\mathbb{K}[[X']](M)$. On considère l'ensemble $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'[X_d]$. On déduit alors de (1.2.3) que $W(X', X_d) \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'[X_d]$. On considère

$$(1.2.4) \qquad h_1(X', X_d) = c_0(X')X_d^l + c_1(X')X_d^{l-1} + \ldots + c_l(X'),$$

le polynôme en X_d de degré minimal l, $l \ge 0$, appartenant à $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'[X_d]$. On a donc,

$$(1.2.5) \qquad k \ge l > 0,$$

$$(1.2.6) \qquad c_0(X') \notin \mathcal{I}'$$

sinon la série $c_1(X')X_d^{l-1} + \ldots + c_l(X')$ appartient à $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'[X_d]$, ce qui contredit la minimalité de l. On a aussi, par minimalité de l,

$$(1.2.7) \qquad \frac{\partial h_1}{\partial X_d} \notin \mathcal{I}.$$

Pour tout $h(X', X_d) \in \mathcal{I}$, on applique alors le théorème de division de Weierstrass [II,3.1] puisque, d'après (1.2.3), $W(X', X_d)$ est k-régulière en X_d. On trouve

$$h(X', X_d) = Q_0(X', X_d)W(X', X_d) + R(X', X_d), \tag{1.2.8}$$

avec $Q_0(X', X_d)$, $R(X', X_d)$, des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$ et $R(X', X_d)$ polynôme en X_d. En outre, comme $h(X', X_d)$ et $W(X', X_d)$ appartiennent à $\mathcal{I}$, on a, d'après (1.2.8), $R(X', X_d) \in \mathcal{I}$. En divisant alors le polynôme $R(X', X_d)$ par le polynôme $h_1(X', X_d)$, suivant la division euclidienne classique dans $\mathbb{K}[[X']](M)[X_d]$, on peut écrire, avec un certain entier s_1,

$$c_0(X')^{s_1} R(X', X_d) = Q_1(X', X_d)h_1(X', X_d) + R_1(X', X_d), \tag{1.2.9}$$

avec $Q_1(X', X_d)$, $R_1(X', X_d)$, des polynômes de $\mathbb{K}[[X']](M)[X_d]$, tels que $\deg(R_1) < l$. De plus, comme $R(X', X_d)$ et $h_1(X', X_d)$ appartienent à $\mathcal{I}$, (1.2.9) assure que $R_1(X', X_d)$ appartient aussi à $\mathcal{I}$. Enfin, par minimalité de l, on a

$$R_1(X', X_d) \in \mathcal{I}'[X_d]. \tag{1.2.10}$$

De même, en divisant alors le polynôme $W(X', X_d)$ par le polynôme $h_1(X', X_d)$, suivant la division euclidienne classique dans $\mathbb{K}[[X']](M)[X_d]$, on peut écrire, avec un certain entier s_2,

$$c_0(X')^{s_2} W(X', X_d) = Q_2(X', X_d)h_1(X', X_d) + R_2(X', X_d), \tag{1.2.11}$$

avec $Q_2(X', X_d)$, $R_2(X', X_d)$, des polynômes de $\mathbb{K}[[X']](M)[X_d]$, tels que $\deg(R_2) < l$ et $R_2(X', X_d) \in \mathcal{I}$. On a donc aussi, par minimalité de l,

$$R_2(X', X_d) \in \mathcal{I}'[X_d]. \tag{1.2.12}$$

En regroupant alors (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11) et (1.2.12), on peut écrire, pour un certain entier s,

$$c_0(X')^{s} h(X', X_d) = Q_3(X', X_d)h_1(X', X_d) + R_3(X', X_d), \tag{1.2.13}$$

avec $Q_3(X', X_d)$, $R_3(X', X_d)$, des polynômes de $\mathbb{K}[[X']](M)[X_d]$, tels que $\deg(R_3) < l$ et $R_3(X', X_d) \in \mathcal{I}$. Par minimalité de l, on a aussi

$$R_3(X', X_d) \in \mathcal{I}'[X_d]. \tag{1.2.14}$$

Deux cas se présentent alors. Si $\mathcal{I}' = (0)$, on a $R_3(X', X_d) = 0$ et (1.2.13) démontre la proposition. Sinon on a $\mathcal{I}' \neq (0)$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe des séries $h_2, \ldots, h_r$ de $\mathcal{I}'$, telles que $\operatorname{rang}(\frac{\partial h_i}{\partial X_j})_{\substack{2 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq d-1}} \pmod{\mathcal{I}'} = r - 1$. En outre, toujours en utilisant l'hypothèse de récurrence appliquée aux coefficients de $R_3(X', X_d)$, il existe une série $a(X')$, n'appartennant pas à $\mathcal{I}'$, telle que $a(X')R_3(X', X_d)$ appartienne à $(h_2, \ldots, h_r)\mathbb{K}[[X']](M)$. De plus, (1.2.13) donne, pour toute série h de $\mathcal{I}$,

$$c_0(X')^{s} a(X')h(X', X_d) = a(X')Q_3(X', X_d)h_1(X', X_d) + a(X')R_3(X', X_d). \tag{1.2.15}$$

Comme $\mathcal{I}'$ est premier, $c_0(X')^s a(X')$ n'appartient pas à $\mathcal{I}'$. En revanche, l'hypothèse de récurrence et (1.2.15) donnent l'appartennance de la série $c_0(X')^s a(X')h(X', X_d)$ à $(h_1, \ldots, h_r)\mathbb{K}[[X]](M)$, ce qui est exactement (ii) de la proposition. Pour avoir (i) de la proposition, il suffit de remarquer qu'il existe $r-1$ variables deux à deux distinctes, $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}})$, telles que l'on ait

$$\frac{\partial(h_2, \ldots, h_r)}{\partial(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}})} \notin \mathcal{I}'. \tag{1.2.16}$$

Ainsi, comme les séries $h_2, \ldots, h_r$ ne dépendent pas de la variable X_d, on a

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_r)}{\partial(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}}, X_d)} = \frac{\partial h_1}{\partial X_d} \frac{\partial(h_2, \ldots, h_r)}{\partial(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}})}. \tag{1.2.17}$$

Comme $\mathcal{I}$ est premier, en utilisant (1.2.7) et (1.2.16), l'égalité (1.2.17) permet d'affirmer

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_r)}{\partial(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}}, X_d)} \notin \mathcal{I} \tag{1.2.18}$$

et on obtient (i) du lemme. ♢

En appliquant le lemme 1.2 à un idéal premier bien choisi, on va voir que toute solution formelle du système $f(X, Y) = 0$ est solution simple d'un autre système $h(X, Y) = 0$. En effet, on a la proposition suivante :

1.3 PROPOSITION

Soit $f(X, Y) = (f_1(X, Y), \ldots, f_m(X, Y))$, dans $\mathbb{K}[[X, Y]](M)^m$, $f(X, Y) \neq 0$. On suppose qu'il existe $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X), \ldots, \bar{y}_q(X))$, dans $\mathbb{K}[[X]]$, tel que $\bar{y}(0) = 0$ et $f(X, \bar{y}(X)) = 0$. Alors, il existe $h(X, Y) = (h_1(X, Y), \ldots, h_r(X, Y))$, dans $(\mathbb{K}[[X, Y]](M))^r$, tel que

$$h_i(X, \bar{y}(X)) = 0, \text{ pour tout } i = 1, \ldots, r, \tag{3.1}$$

$$\text{rang}\left(\frac{\partial h_i}{\partial Y_\nu}(X, \bar{y}(X))\right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq \nu \leq q}} = r, \tag{3.2}$$

En outre, s'il existe$Y(X, t) = (Y_1(X, t), \ldots, Y_q(X, t))$, $Y(0, 0) = 0$, dans $\mathbb{K}[[X, t]](M)^m$, avec $t = (t_1, \ldots, t_s)$, des variables, et $\bar{t}(X) = (\bar{t}_1(X), \ldots, \bar{t}_s(X))$, $\bar{t}(0) = 0$, des séries formelles, tels que $h(X, Y(X, t)) = 0$ et $\bar{y}(X) = Y(X, \bar{t}(X))$ alors $f(X, Y(X, t)) = 0$.

Preuve. On considère l'ensemble

$$\mathcal{I} = \{g(X, Y) \in \mathbb{K}[[X, Y]](M) \text{ tel que } g(X, \bar{y}(X)) = 0\}. \tag{1.3.3}$$

De manière évidente, $\mathcal{I}$ est un idéal premier de l'anneau $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. De plus, $\mathcal{I}$ est non vide car, par hypothèse, $f_1(X, Y), \ldots, f_m(X, Y)$ appartiennent à $\mathcal{I}$. On applique alors le lemme 1.2. On trouve des séries $h_1(X, Y), \ldots, h_r(X, Y)$, de $\mathcal{I}$, telles que

$$\text{rang}\left(\frac{\partial(h_1, \ldots, h_r)}{\partial(X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_q)}(X, \bar{y}(X))\right)(\text{mod } \mathcal{I}) = r,$$

c'est à dire

$$\text{rang}(\frac{\partial(h_1,\ldots,h_r)}{\partial(X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_q)}(X,\bar{y}(X))) = r, \tag{1.3.4}$$

et

$$\forall\ g \in \mathcal{I},\ \exists a \notin \mathcal{I},\ a \in \mathbb{K}[[X,Y]](M), \text{ telle que } ag \in (h_1,\ldots,h_r)\mathbb{K}[[X,Y]](M). \tag{1.3.5}$$

L'assertion (1.3.1) est satisfaite puisque $h_1,\ldots,h_r$ appartiennent à $\mathcal{I}$. Pour avoir l'assertion (1.3.2), il suffit de remarquer

$$\text{rang}\Big(\frac{\partial(h_1,\ldots,h_r)}{\partial(X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_q)}(X,\bar{y}(X))\Big) = \text{rang}\Big(\frac{\partial(h_1,\ldots,h_r)}{\partial(Y_1,\ldots,Y_q)}(X,\bar{y}(X))\Big), \tag{1.3.6}$$

car l'égalité, pour tout $i = 1,\ldots,r$, $h_i(X,\bar{Y}(X)) = 0$ implique

$$\frac{\partial h_i}{\partial X_j}(X,\bar{y}(X)) + \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial h_i}{\partial Y_\nu}(X,\bar{y}(X))\frac{\partial \bar{y}_\nu}{\partial X_j} = 0, \text{ pour } j = 1,\ldots,d. \tag{1.3.7}$$

En outre, l'assertion (ii) du lemme 1.2 assure l'existence, pour tout $i = 1,\ldots,m$, de séries $a_i(X,Y)$ de $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$, n'appartenant pas à $\mathcal{I}$, telles que l'on ait

$$a_i(X,Y)f_i(X,Y) \in (h_1,\ldots,h_r)\mathbb{K}[[X,Y]](M). \tag{1.3.8}$$

On a donc, pour tout $i = 1,\ldots,m$,

$$a_i(X,\bar{y}(X)) \neq 0, \tag{1.3.9}$$

$$a_i(X,Y)f_i(X,Y) = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k}(X,Y)h_k(X,Y), \tag{1.3.10}$$

avec, pour tout $k = 1,\ldots,r$, $a_{i,k}(X,Y) \in \mathbb{K}[[X,Y]](M)$. Ainsi, s'il existe des séries $Y(X,t) = (Y_1(X,t),\ldots,Y_q(X,t))$, $Y(0,0) = 0$, de $\mathbb{K}[[X,t]](M)$, avec $t = (t_1,\ldots,t_s)$, des variables, et $\bar{t}(X) = (\bar{t}_1(X),\ldots,\bar{t}_s(X))$, $\bar{t}(0) = 0$, telles que $h(X,Y(X,t)) = 0$ et $\bar{y}(X) = Y(X,\bar{t}(X))$ alors (1.3.9) et (1.3.10) assurent $f(X,Y(X,t)) = 0$. ◊

1.4 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

On reprend les notations du paragraphe 1.1. On suppose aussi $m \leq q$. On note $J(X,Y)$ la matrice

$$J(X,Y) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial Y_\nu}(X,Y)\right]_{\substack{i=1,\ldots,m;\\ \nu=q-m+1,\ldots,q}} \tag{1.4.1}$$

On pose alors

$$\delta(X,Y) = \det(J(X,Y)). \tag{1.4.2}$$

La stabilité par dérivation et par produit de $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$ assurent que $\delta(X,Y)$ appartient à l'anneau $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$. On note aussi $M(X,Y)$ la transposée de la matrice des cofacteurs de $J(X,Y)$, c'est à dire, on a

$$M(X,Y)J(X,Y)=J(X,Y)M(X,Y)=\delta(X,Y)I_m, \tag{1.4.3}$$

où I_m est la matrice identité m lignes, m colonnes. On pose enfin

$$\begin{bmatrix} g_1(X,Y) \\ \vdots \\ g_m(X,Y) \end{bmatrix} = M(X,Y) \begin{bmatrix} f_1(X,Y) \\ \vdots \\ f_m(X,Y) \end{bmatrix} \tag{1.4.4}$$

On a encore clairement, pour tout $i=1,\dots,m$, $g_i(X,Y)\in\mathbb{K}[[X,Y]](M)$.

Dans la suite, on utilisera aussi la formule de Taylor sous la forme suivante. Soient $v=(v_1,\dots,v_q)$, $h=(h_1,\dots,h_q)$ des variables. Pour toute suite $(a_1(X,Y),\dots,a_m(X,Y))$ de séries formelles, on a alors

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1(X,v+h) \\ \vdots \\ a_m(X,v+h) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1(X,v) \\ \vdots \\ a_m(X,v) \end{bmatrix} + \frac{J(a_1,\dots,a_m)}{J(Y_1,\dots,Y_{q-m})}(X,v) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{q-m} \end{bmatrix} \\ &\quad + J(X,v) \begin{bmatrix} h_{q-m+1} \\ \vdots \\ h_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1(X,v,h) \\ \vdots \\ P_m(X,v,h) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{Ta}$$

où, pour tout $i=1,\dots,m$, $P_i(X,v,h)\in(h_1,\dots,h_q)^2$.

Enfin, on dit qu'une suite $y^0(X)=(y_1^0(X),\dots,y_q^0(X))$, $y^0(0)=0$, est une solution approchée du système d'équations $f(X,Y)=0$ si, pour tout $i=1,\dots,m$, on a

$$g_i(X,y^0(X))\equiv 0 \bmod (\delta(X,y^0(X))^2\underline{m}_X). \tag{1.4.5}$$

On utilisera aussi une version du théorème des fonctions implicites [Bo] [To] dont on démontre qu'elle est encore vraie dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée.

1.5 THÉORÈME

On suppose qu'il existe $y^0(X)=(y_1^0(X),\dots,y_q^0(X))$, *dans* $\Big(\mathbb{K}[[X]](M)\Big)^q$, $y^0(0)=0$, *solution approchée du système* $f(X,Y)=0$. *On suppose, en outre,* $\delta(X,y^0(X))\neq 0$. *Soient* $t=(t_1,\dots,t_{q-m})$ *des variables. On pose, pour tout* $\nu=1,\dots,q-m$,

$$Y_\nu(X,t)=y_\nu^0(X)+\delta(X,y^0(X))^2t_\nu.$$

Il existe $Y_{q-m+1}(X,t),\dots,Y_q(X,t)$, *dans* $\mathbb{K}[[X,t]](M)$, *sans terme constant, tels que*

$$f_i(X,Y(X,t))=0 \text{ pour } i=1,\dots,m,$$

$$Y_\nu(X,t) \equiv y_\nu^0(X) \ mod \ (\delta(X,y^0(X))\underline{m}_X) \ pour \ \nu = q-m+1,\dots,q.$$

Remarques-Définitions

1.5.1- On dit alors que la suite $Y(X,t)$ est une solution à paramètres déterminée par la solution approchée $y^0(X)$.

1.5.2- Soit $y(X) = (y_1(X),\dots,y_q(X))$, $y(0)=0$, une suite de séries formelles. Sous les conditions du théorème, il est alors facile de voir que $y(X) = Y(X,t(X))$, pour une suite de séries formelles $t(X) = (t_1(X),\dots,t_{q-m}(X))$, $t(0)=0$, si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} f(X,y(X)) = 0 \\ y_\nu(X) \equiv y_\nu^0(X) \text{ mod } (\delta(X,y^0(X))^2\underline{m}_X) \text{ pour } \nu = 1,\dots,q-m \\ y_\nu(X) \equiv y_\nu^0(X) \text{ mod } (\delta(X,y^0(X))\underline{m}_X) \text{ pour } \nu = q-m+1,\dots,q \end{array}\right.$$

On dira alors que la soultion $y(X) = Y(X,t(X))$ est associée à la solution approchée $y^0(X)$.

Preuve du th. 1.5- Soient $u = (u_{q-m+1},\dots,u_q)$ des variables. On pose, pour tout $i = 1,\dots,m$,

(1.5.3)

$$\begin{aligned} F_i(X,t,u) \ = f_i\Big(\ & X, y_1^0(X) + \delta(X,y^0(X))^2 t_1, \dots, y_{q-m}^0(X) + \delta(X,y^0(X))^2 t_{q-m}, \\ & y_{q-m+1}^0(X) + \delta(X,y^0(X)) u_{q-m+1}, \dots, y_q^0(X) + \delta(X,y^0(X)) u_q \Big). \end{aligned}$$

En appliquant alors à $f(X,Y)$ la formule de Taylor (Ta) avec,

pour tout $i = 1,\dots,q$, $v_i = y_i^0(X)$,

pour tout $i = 1,\dots,q-m$, $h_i = \delta(X,y^0(X))^2 t_i$ et,

pour tout $i = q-m+1,\dots,q$, $h_i = \delta(X,y^0(X)) u_i$,

on obtient

$$(1.5.4)\quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} F_1(X,t,u) \\ \vdots \\ F_m(X,t,u) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(X,y^0(X)) \\ \vdots \\ f_m(X,y^0(X)) \end{bmatrix} \\ &+ \delta(X,y^0(X))^2 \frac{J(f_1,\dots,f_m)}{J(Y_1,\dots,Y_{q-m})}(X,y^0(X)) \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{q-m} \end{bmatrix} \\ &+ \delta(X,y^0(X)) J(X,y^0(X)) \begin{bmatrix} u_{q-m+1} \\ \vdots \\ u_q \end{bmatrix} \\ &+ \delta(X,y^0(X))^2 \begin{bmatrix} Q_1(X,t,u) \\ \vdots \\ Q_m(X,t,u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $Q_i(X,t,u) \in (t,u)^2$. En multipliant l'égalité (1.5.4) par $M(X,y^0(X))$ et en tenant compte de l'hypothèse, traduite par l'égalité (1.4.5), on obtient

$$M(X,y^0(X)) \begin{bmatrix} F_1(X,t,u) \\ \vdots \\ F_m(X,t,u) \end{bmatrix} = \delta(X,y^0(X))^2 \begin{bmatrix} G_1(X,t,u) \\ \vdots \\ G_m(X,t,u) \end{bmatrix}, \tag{1.5.5}$$

où $G_i(X,t,u)$ sont des séries de $\mathbb{K}[[X,t,u]](M)$, car obtenues par produit et composition de séries de $\mathbb{K}[[X,t,u]](M)$, avec $G_i(0,0,0) = 0$. En outre, en différentiant l'égalité (1.5.5), on obtient

$$M(X,y^0(X))\frac{J(F_1,\ldots,F_m)}{J(u_{q-m+1},\ldots,u_q)}(X,t,u) = \delta(X,y^0(X))^2\frac{J(G_1,\ldots,G_m)}{J(u_{q-m+1},\ldots,u_q)}(X,t,u). \tag{1.5.6}$$

En remarquant alors que l'on a, d'après (1.5.3),

$$\det(\frac{J(F_1,\ldots,F_m)}{J(u_{q-m+1},\ldots,u_q)})(X,0,0) = \det(\frac{J(f_1,\ldots,f_m)}{J(Y_{q-m+1},\ldots,u_q)})(X,y^0(X))\delta(X,y^0(X))^m \tag{1.5.7}$$

et, d'après (1.4.3),

$$\det(M(X,y^0(X))) = \delta(X,y^0(X))^{m-1}, \tag{1.5.8}$$

on a

$$\det(\frac{J(F_1,\ldots,F_m)}{J(u_{q-m+1},\ldots,u_q)})(X,0,0) = \delta(X,y^0(X))^{m+1}, \tag{1.5.9}$$

$$\det(\frac{J(G_1,\ldots,G_m)}{J(u_{q-m+1},\ldots,u_q)})(X,0,0) = 1, \tag{1.5.10}$$

d'où, en particulier,

$$\det(\frac{J(G_1,\ldots,G_m)}{J(u_{q-m+1},\ldots,u_q)})(0,0,0) = 1, \tag{1.5.11}$$

On obtient alors le théorème en appliquant le théorème classique des fonctions implicites, valable dans $\mathbb{K}[[X,t,u]](M)$, au vecteur $G(X,t,u)$, par rapport à la variable u et autour du point $X=0$, $t=0$. On trouve donc un élément $u(X,t) = (u_{q-m+1}(X,t),\ldots,u_q(X,t))$, de $\Big(\mathbb{K}[[X,t]](M)\Big)^m$, tel que l'on ait

$$G(X,t,u(X,t)) = 0 \text{ et } u(0,0) = 0. \tag{1.5.12}$$

En utilisant (1.5.5), (1.5.8) et le fait que $\delta(X,y^0(X)) \neq 0$, on en déduit, pour tout $i = 1,\ldots,m$,

$$F_i(X,t,u(X,t)) = 0 \text{ et } u(0,0) = 0. \tag{1.5.13}$$

On obtient ainsi le résultat voulu avec, pour tout $\nu = q-m+1,\ldots,q$,

$$Y_\nu(X,t) = y_\nu^0(X) + \delta(X, y^0(X))u(X,t). \tag{1.5.14}$$

$\diamondsuit$

Sous les notations du paragraphe 1.4, on a aussi

1.6 LEMME

Soit $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X),\cdots,\bar{y}_q(X))$, $\bar{y}(0) = 0$, *une solution formelle du système* $f(X,Y) = 0$, $m \leq q$. *On suppose que la série* $\delta(X,\bar{y}(X))$ *est* p*-régulière en* X_d. *Il existe alors une solution approchée polynômiale,* $\bar{v}(X) = (\bar{v}_1(X),\cdots,\bar{v}_q(X))$, *de* $\mathbb{K}[[X']][X_d]^q$, $\bar{v}(0) = 0$, *du système* $f(X,Y) = 0$, *telle que*

$$\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{v}_\nu(X) \ \mathit{mod}\ (\delta(X,\bar{v}(X))^2\underline{m}_X) \ \mathit{pour}\ \nu = 1,\cdots,q-m, \tag{1.6.1}$$

$$\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{v}_\nu(X) \ \mathit{mod}\ (\delta(X,\bar{v}(X))\underline{m}_X) \ \mathit{pour}\ \nu = q-m+1,\cdots,q, \tag{1.6.2}$$

$$\delta(X,\bar{v}(X)) \ \mathit{est}\ p-\mathit{régulière\ en}\ X_d. \tag{1.6.3}$$

Preuve. On applique le théorème de préparation de Weierstrass à la série $\delta(X,\bar{y}(X))$, p-régulière en X_d [II,3.2]. On a donc

$$\delta(X,\bar{y}(X)) = (X_d^p + \sum_{j=1}^{p} \bar{a}_j(X')X_d^{p-j})U(X',X_d) = \bar{a}(X)U(X',X_d), \tag{1.6.4}$$

avec $U(0,0) \neq 0$ et $\mathrm{ord}(\bar{a}_j(X')) \geq j$. La série $\bar{a}(X)$ est donc p-régulière en X_d. On applique alors successivement le théorème de division pour les séries formelles par $\bar{a}(X)^2$, qui est $2p$-régulière en X_d, et par $\bar{a}(X)$ aux séries $\bar{y}_\nu(X)$, respectivement pour $\nu = 1,\ldots,q-m$ et pour $\nu = q-m+1,\ldots,q$. On peut alors écrire, d'une part,

$$\bar{y}_\nu(X) = \sum_{j=0}^{2p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_d^j + \bar{a}(X)^2(c_\nu + \bar{t}_\nu(X)), \tag{1.6.5}$$

où $c_\nu \in \mathbb{K}$ et $\bar{t}_\nu(0) = 0$, pour $\nu = 1,\ldots,q-m$, et, d'autre part,

$$\bar{y}_\nu(X) = \sum_{j=0}^{p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_d^j + \bar{a}(X)(c_\nu + \bar{u}_\nu(X)), \tag{1.6.6}$$

où $c_\nu \in \mathbb{K}$ et $\bar{u}_\nu(0) = 0$ pour $\nu = q-m+1,\ldots,q$. On pose $\bar{t}(X) = (\bar{t}_1(X),\ldots,\bar{t}_{q-m}(X))$, $\bar{u}(X) = (\bar{u}_{q-m+1}(X),\ldots,\bar{u}_q(X))$ et

$$\bar{v}_\nu(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{2p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_d^j + \bar{a}(X)^2 c_\nu \ \text{pour}\ \nu = 1,\ldots,q-m \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_d^j + \bar{a}(X) c_\nu \ \text{pour}\ \nu = q-m+1,\ldots,q \end{cases} \tag{1.6.7}$$

Par construction, $\bar{v}_\nu(X)$ appartient à $\mathbb{K}[[X']][X_d]$ pour $\nu = 1, \ldots, q$. De plus, on remarque aussi, par construction, que, pour tout $\nu = 1, \ldots, q$,

$$\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{v}_\nu(X) \bmod (\bar{a}(X)\underline{m}_X). \tag{1.6.8}$$

On a donc, puisque la composition ne modifie pas la congruence modulo un idéal,

$$\delta(X, \bar{y}(X)) \equiv \delta(X, \bar{v}(X)) \bmod (\bar{a}(X)\underline{m}_X). \tag{1.6.9}$$

L'égalité (1.6.4) donne alors

$$\delta(X, \bar{v}(X)) = \bar{a}(X)\tilde{U}(X) \text{ avec } \tilde{U}(0) \neq 0. \tag{1.6.10}$$

On en déduit la p-régularité de la série $\delta(X, \bar{v}(X))$ en X_d, ce qui est exactement (1.6.3). On pose ensuite, pour tout $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} F_i(X,t,u) \ = f_i\Big(& X, \bar{v}_1(X) + \bar{a}(X)^2 t_1, \ldots, \bar{v}_{q-m}(X) + \bar{a}(X)^2 t_{q-m}, \\ & \bar{v}_{q-m+1}(X) + \bar{a}(X) u_{q-m+1}, \ldots, \bar{v}_q(X) + \bar{a}(X) u_q \Big). \end{aligned} \tag{1.6.11}$$

On a donc, d'après (1.6.5), (1.6.6) et (1.6.7), $F(X, \bar{t}(X), \bar{u}(X)) = f(X, \bar{y}(X)) = 0$. En appliquant alors à $f(X, Y)$ la formule de Taylor (Ta) avec,

pour tout $i = 1, \ldots, q$, $v_i = \bar{v}_i(X)$,
pour tout $i = 1, \ldots, q-m$, $h_i = \bar{a}(X)^2 t_i$ et,
pour tout $i = q-m+1, \ldots, q$, $h_i = \bar{a}(X) u_i$,
on obtient

(1.6.12)
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_1(X,t,u) \\ \vdots \\ F_m(X,t,u) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(X, \bar{v}(X)) \\ \vdots \\ f_m(X, \bar{v}(X)) \end{bmatrix} + \bar{a}(X)^2 \frac{J(f_1, \ldots, f_m)}{J(Y_1, \ldots, Y_{q-m})}(X, \bar{v}(X)) \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{q-m} \end{bmatrix} \\ &+ \bar{a}(X) J(X, \bar{v}(X)) \begin{bmatrix} u_{q-m+1} \\ \vdots \\ u_q \end{bmatrix} + \bar{a}(X)^2 \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(X,t,u) \\ \vdots \\ \bar{Q}_m(X,t,u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\bar{Q}_i(X,t,u) \in (t,u)^2$ pour $i = 1, \ldots, m$. En multipliant alors l'égalité (1.6.12) par $M(X, \bar{v}(X))$, puis en remplaçant t par $\bar{t}(X)$ et u par $\bar{u}(X)$, on obtient

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(X, \bar{v}(X)) \\ \vdots \\ g_m(X, \bar{v}(X)) \end{bmatrix} + \bar{a}(X)^2 \mathrm{Mat}(X), \tag{1.6.13}$$

avec $\mathrm{Mat}(X)$ une matrice de séries en X sans terme constant. On a donc, pour tout $i = 1, \ldots, m$,

$$g_i(X, \bar{v}(X)) \equiv 0 \bmod (\bar{a}(X)^2 \underline{m}_X). \tag{1.6.14}$$

Les égalités (1.6.10) et (1.6.14) entrainent, par définition, que $\bar{v}(X)$ est une solution approchée du système $f(X,Y)=0$. Les assertions (1.6.1) et (1.6.2) du lemme sont données par la construction. $\diamondsuit$

1.7 LEMME-CLÉ

Soit $f(X,Y)=(f_1(X,Y),\dots,f_m(X,Y))$ dans $\mathbb{K}[[X,Y]](M)^m$, et la série $\delta(X,Y)$ définie dans 4. Soient aussi D, p des entiers non nuls, $V=(V_{\nu,I,j})$, des variables, avec $\nu=1,\dots,q$, $I=(i_1,\dots,i_{d-1})$ un multi-indice de longueur $|I|=p$ et $j=0,\dots,D$. Soit enfin P_j des polynômes en $X'=(X_1,\dots,X_{d-1})$ de degré total inférieur ou égal à p, tels que

$$\delta\Big(X,\sum_{j=0}^{D}P_1(X')X_d^j,\dots,\sum_{j=0}^{D}P_q(X')X_d^j\Big) \text{ soit } p-\text{régulière en } X_d.$$

Alors, il existe $F(X',V)=(F_1(X',V),\cdots,F_K(X',V))$, dans $(\mathbb{K}[[X',V]](M))^K$, et $Q(X,V)=(Q_1(X,V),\dots,Q_m(X,V))$, dans $(\mathbb{K}[[X,V]](M))^m$, tels que, si on note, pour toute famille de séries $\{\bar{V}_{\nu,I,j}(X')\}$, $\bar{v}_\nu(X)=\sum_{j=0}^{D}\Big(P_\nu(X')+\sum_{|I|=p}X'^I\bar{V}_{\nu,I,j}(X')\Big)X_d^j$, pour $\nu=1,\dots,q$, on ait l'équivalence des propriétés

$$(i)\qquad \bar{v}(X) \text{ est une solution approchée de } f(X,Y)=0,$$

et

$$(ii)\qquad F(X',\{\bar{V}_{\nu,I,j}(X')\})=0 \text{ et } Q(0,0)=0.$$

Preuve. On écrit, pour tout $\nu=1,\dots,q$,

$$\bar{v}_\nu(X)=\sum_{j=0}^{D}\Big(P_{\nu,j}(X')+\sum_{|I|=p}X'^I\bar{V}_{\nu,I,j}(X')\Big)X_d^j, \tag{1.7.1}$$

avec $P_{\nu,j}(X')$ des polynômes en X' de degré total inférieur ou égal à p et $V_{\nu,I,j}(X')$ des séries formelles sans terme constant, pour tout multi-indice $I=(i_1,\dots,i_{d-1})$ de longueur p et pour tout $j=0,\dots,D$. On pose alors, pour $\nu=1,\dots,q$,

$$v_\nu(X,V)=\sum_{j=0}^{D}\Big(P_{\nu,j}(X')+\sum_{|I|=p}X'^I V_{\nu,I,j}\Big)X_d^j. \tag{1.7.2}$$

Par hypothèse,

$$\delta\Big(X,\sum_{j=0}^{D}P_1(X')X_d^j,\dots,\sum_{j=0}^{D}P_q(X')X_d^j\Big)$$

est p-régulière en X_d. Puisque, dans $v(X,V)$, on n'a perturbé que des termes d'ordre supérieur ou égal à $p+1$, $\delta(X,v(X,V))$ est aussi p-régulière en X_d. De plus, pour tout $\nu=$

$1,\ldots,q$, $v_\nu(X,V)$ sont des polynômes ; ainsi $\delta(X,v(X,V))$ appartient à $\mathbb{K}[[X,V]](M)$. On peut donc, pour $i=1,\ldots,m$, appliquer le théorème de division de Weierstrass [II,3.1] [CC2] aux séries $g_i(X,v(X,V))$, de $\mathbb{K}[[X,V]](M)$, par la série $\delta(X,v(X,V))^2$, p-régulière en X_d. On obtient alors

$$g_i(X,v(X,V)) = Q_i(X,V)\delta(X,v(X,V))^2 + \sum_{j=0}^{2p-1} R_{i,j}(X',V)X_d^j, \tag{1.7.3}$$

avec $Q_i(X,V)$ et $R_{i,j}(X',V)$ des séries de $\mathbb{K}[[X,V]](M)$. En remplaçant alors les variables $V_{\nu,I,j}$ par les séries $\bar{V}_{\nu,I,j}(X')$ dans l'égalité (1.7.3), on obtient l'identité

$$g_i(X,\bar{v}(X)) = Q_i(X,\bar{v}(X))\delta(X,\bar{v}(X))^2 + \sum_{j=0}^{2p-1} R_{i,j}(X',\{\bar{V}_{\nu,I,j}(X')\})X_d^j. \tag{1.7.4}$$

On rappelle que $\bar{v}(X)$ est une solution approchée du système $f(X,Y)=0$ si et seulement si, pour tout $i=1,\ldots,m$, $g_i(X,\bar{v}(X)) \equiv 0$ modulo $\delta(X,\bar{v}(X))^2\underline{m}_X$. En utilisant (1.7.4), on a alors le fait que $\bar{v}(X)$ est une solution approchée du système $f(X,Y)=0$ si et seulement si, pour tout $i=1,\ldots,m$, pour tout $j=0,\ldots,2p-1$, $R_{i,j}(X',\{\bar{V}_{\nu,I,j}(X')\})=0$ et $Q_i(0,0)=0$. Ceci démontre le lemme 1.7. $\diamondsuit$

De tout ce qui précède, on déduit alors une version à paramètres du théorème d'Artin.

1.8 THÉORÈME

Soit $f(X,Y)=(f_1(X,Y),\ldots,f_m(X,Y))$ dans $\mathbb{K}[[X,Y]](M)^m$. On suppose qu'il existe $\bar{y}(X)=(\bar{y}_1(X),\ldots,\bar{y}_q(X))$, dans $\mathbb{K}[[X]]^q$, telle que $\bar{y}(0)=0$ et $f(X,\bar{y}(X))=0$. Alors, il existe un s-uple de nouvelles variables $(t_1,\ldots,t_s)$, un q-uple de séries formelles $Y(X,t)=(Y_1(X,t),\ldots,Y_q(X,t))$, dans $\mathbb{K}[[X,t]](M)^q$, et un s-uple de séries formelles $\bar{t}(X)=(\bar{t}_1(X),\ldots,\bar{t}_s(X))$ dans $\mathbb{K}[[X]]^s$, tels que $Y(0,0)=0$, $\bar{t}(0)=0$, $f(X,Y(X,t))=0$ et $\bar{y}(X)=Y(X,\bar{t}(X))$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur le nombre d de variables X. Pour $d=0$, le théorème est trivial. On suppose donc $d\geq 1$ et le théorème vrai pour $d-1$. Grâce à la proposition 1.3, on peut supposer que $\bar{y}(X)$ est une solution simple du système $h(X,Y)=0$, avec $h(X,Y)=(h_1(X,Y),\ldots,h_r(X,Y))$ un élément de $\Big(\mathbb{K}[[X,Y]](M)\Big)^r$. On reprend alors les notations du paragraphe 1.4 associées au nouveau système $h(X,Y)$. Sans diminuer la généralité, on peut alors supposer que $\delta(X,\bar{y}(X))\neq 0$. Si $\delta(0,0)$ est non nul, le théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ s'applique et le résultat s'ensuit. On suppose alors $\delta(0,0)=0$. Après un éventuel changement de variables linéaires, on peut en outre supposer que la série $\delta(X,\bar{y}(X))$ est p-régulière en X_d, $p>0$. Le lemme 1.6 permet d'affirmer qu'il existe une solution approchée $\bar{v}(X)=(\bar{v}_1(X),\ldots,\bar{v}_q(X))$ de $(\mathbb{K}[[X']](M)[X_d])^q$, $\bar{v}(0)=0$, du système $h(X,Y)=0$ telle que l'on ait

$$\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{v}_\nu(X) \bmod (\delta(X,\bar{v}(X))^2\underline{m}_X) \text{ pour } \nu=1,\ldots,q-m, \tag{1.8.1}$$

$$\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{v}_\nu(X) \bmod (\delta(X,\bar{v}(X))\underline{m}_X) \text{ pour } \nu = q-m+1,\dots,q, \tag{1.8.2}$$

et $\delta(X,\bar{v}(X))$ p-régulière en X_d. On écrit alors, pour tout $\nu = 1,\dots,q$, avec D assez grand,

$$\bar{v}_\nu(X) = \sum_{j=0}^{D}\Big(P_{\nu,j}(X') + \sum_{|I|=p} X'^I \bar{V}_{\nu,I,j}(X')\Big)X_d^j, \tag{1.8.3}$$

avec $P_{\nu,j}(X')$ des polynômes en X' de degré total inférieur ou égal à $p+1$ et $\bar{V}_{\nu,I,j}(X')$ des séries formelles sans terme constant. On pose alors, pour tout $\nu = 1,\dots,q$,

$$v_\nu(X,V) = \sum_{j=0}^{D}\Big(P_{\nu,j}(X') + \sum_{|I|=p} X'^I V_{\nu,I,j}\Big)X_d^j. \tag{1.8.4}$$

D'après le lemme 1.7, il existe des séries $F(X',\{V_{\nu,I,j}\})$ de $\mathbb{K}[[X',V]](M)$ et des séries $Q(X,V)$ de $\mathbb{K}[[X,V]](M)$ telles que $F(X',\{\bar{V}^0_{\nu,I,j}(X')\}) = 0$ et $Q(0,0) = 0$. En appliquant alors l'hypothèse de récurrence, on trouve des séries $\{V^0_{\nu,I,j}(X',e)\}$, de variables $X' = (X_1,\dots,X_{d-1})$ et $e = (e_1,\dots,e_k)$, appartennant à $\mathbb{K}[[X',e]](M)$, telles que $\bar{V}_{\nu,I,j}(X') = V_{\nu,I,j}(X',\bar{e}(X'))$, avec $\bar{e}(X') = (\bar{e}_1(X'),\dots,\bar{e}_k(X'))$, $\bar{e}(0) = 0$ et
$F(X',\{V_{\nu,I,j}(X',e)\}) = 0$. Le lemme 1.7, appliqué à nouveau, implique alors que, si on pose, pour tout $\nu = 1,\dots,q$,

$$v_\nu(X,e) = \sum_{j=0}^{D}\Big(P_{\nu,j}(X') + \sum_{|I|=p} (X')^I \bar{V}_{\nu,I,j}(X',e)\Big)X_d^j, \tag{1.8.5}$$

la suite de séries $v(X,e) = (v_1(X,e),\dots,v_q(X,e))$ est une solution approchée du système $h(X,Y) = 0$. De plus, on a $\bar{v}(X) = v(X,\bar{e}(X'))$. Le théorème 1.5 implique alors l'existence d'une solution à paramètres $Y(X,e,t)$, qui appartient à $\Big(\mathbb{K}[[X,e,t]](M)\Big)^q$, déterminée par la solution approchée $v(X,e)$, donnée par les formules

$$Y_\nu(X,e,t) = v_\nu(X,e) + \delta(X,v(X,e))^2 t_\nu \text{ pour } \nu = 1,\dots,q-m, \tag{1.8.6}$$

$$Y_\nu(X,e,t) = v_\nu(X,e) + \delta(X,v(X,e))u_\nu(X,e,t) \text{ pour } \nu = q-m+1,\dots,q. \tag{1.8.7}$$

Ainsi

(1.8.8), $$Y_\nu(X,\bar{e}(X'),t) = \bar{v}_\nu(X) + \delta(X,\bar{v}_\nu(X))^2 t_\nu \text{ pour } \nu = 1,\dots,q-m$$

$$Y_\nu(X,\bar{e}(X'),t) = \bar{v}_\nu(X) + \delta(X,\bar{v}_\nu(X))u_\nu(X,\bar{e}(X'),t) \text{ pour } \nu = q-m+1,\dots,q, \tag{1.8.9}$$

est une solution à paramètres déterminée par $\bar{v}(X)$. La solution $\bar{y}(X)$ est associée à $\bar{v}(X)$. En utilisant la remarque 1.5.2, on a alors l'existence de séries $\bar{t}(X)$, $\bar{t}(0) = 0$, telles que

$Y(X, \bar{e}(X'), \bar{t}(X)) = \bar{y}(X)$. On a donc $h(X, Y(X, e, t)) = 0$ et $\bar{y}(X) = Y(X, \bar{e}(X'), \bar{t}(X))$. En utilisant alors à nouveau la proposition 1.3, on peut affirmer que $f(X, Y(X, e, t)) = 0$. Le théorème est donc démontré. $\diamondsuit$

On obtient alors comme conséquence du théorème 1.8 le théorème d'approximation d'Artin dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée.

1.9 THÉORÈME D'APPROXIMATION

Soit $f(X,Y) = (f_1(X,Y), \ldots, f_m(X,Y))$ *dans* $\Big(\mathbb{K}[[X,Y]](M)\Big)^m$. *On suppose qu'il existe* $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X), \ldots, \bar{y}_q(X))$, *dans* $\mathbb{K}[[X]]^q$, *telle que* $\bar{y}(0) = 0$ *et* $f(X, \bar{y}(X)) = 0$. *Alors, pour tout entier* $c \geq 1$, *il existe* $y(X) = (y_1(X), \ldots, y_q(X))$, *dans* $\Big(\mathbb{K}[[X]](M)\Big)^q$, *tel que* $y(0) = 0$, $f(X, y(X)) = 0$ *et* $y_\nu(X) \equiv \bar{y}_\nu(X)$ *mod*$(\underline{m}_X^c)$ *pour* $\nu = 1, \ldots, q$.

1.10 REMARQUES

a- Dans le cas où $M_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}[[X]](M)$ est l'anneau des séries convergentes et le théorème 1.9 n'est autre que le théorème classique de M. Artin [Ar]; le théorème 1.8 en est la version à paramètres donnée par A. Płoski [Pł1]. La preuve établie ici s'inspire de celle de A. Płoski [Pł1]. Dans le cadre des séries convergentes, on utilise fortement les théorèmes de préparation et de division de Weierstrass. Dans l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$, ces théorèmes de division par une série formelle régulière d'ordre p ne sont vrais qu'avec une perte de régularité sur la classe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ [CC2] [Z]. On a contourné ici cette difficulté en utilisant la notion de p-régularité, introduite par J. Chaumat et A.-M. Chollet [CC2], plus restrictive que la régularité d'ordre p. Dans ce cadre, on a les théorèmes de préparation et de division de Weierstrass établis dans [CC2] et retrouvés en [II, 3.1] et [II, 3.2] comme corollaires du théorème [II, 2.4].

b- Le théorème 1.8 implique de manière évidente le théorème 1.9. En effet, on prend $Y(X,t)$ et $\bar{t}(X)$ les séries données par le théorème 1.8. Soit alors $t(X)$ une suite de séries convergentes telle que $t(X) \equiv \bar{t}(X)$ mod$(\underline{m}_X^c)$ (on prend par exemple les polynômes de Taylor de degré c de $\bar{t}(X)$). On a alors $y(X, t(X)) \equiv y(X, \bar{t}(X))$ mod$(\underline{m}_X^c)$ et le théorème d'approximation est obtenu en posant $y(X) = y(X, t(X))$.

c- On notera qu'il n'y a pas de perte de régularité sur la classe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

§2. APPLICATIONS.

Comme dans le cadre analytique, on déduit du théorème d'approximation de nombreux corollaires [R] [To]. On donne ici quelques applications intéressantes.

2.1 COROLLAIRE

Si $f(X)$ est une série de $\mathbb{K}[[X]](M)$ irréductible dans l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$, alors $f(X)$ est irréductible dans $\mathbb{K}[[X]]$.

Preuve. Soit $f(X)$ une série irréductible de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On suppose que $f(X)$ est réductible dans $\mathbb{K}[[X]]$, ce qui équivaut à dire qu'il existe des séries formelles $a(X)$ et $b(X)$ telles que l'on ait

(2.1.1) $$f(X) = a(X)b(X) \text{ avec } a(0) = 0 \text{ et } b(0) = 0.$$

Soient Y et Z des nouvelles variables. On pose

(2.1.2) $$F(X, Y, Z) = YZ - f(X).$$

Clairement, la série $F(X, Y, Z)$ appartient à $\mathbb{K}[[X, Y, Z]](M)$. En outre, le système, en les variables (Y, Z), $F(X, Y, Z) = 0$ admet une solution formelle $s(X) = (a(X), b(X))$ telle que $s(0) = (0, 0)$. Les hypothèses du théorème 1.8 sont vérifiées. On obtient alors, quitte à rajouter des variables $t = (t_1, \cdots, t_s)$, deux séries $\tilde{a}(X, t)$ et $\tilde{b}(X, t)$ de $\mathbb{K}[[X, t]](M)$ telles que

(2.1.3) $$\tilde{a}(X, t)\tilde{b}(X, t) = f(X),$$

et

(2.1.4) $$\text{il existe } \bar{t}(X),\ \bar{t}(0) = 0, \text{ vérifiant } \tilde{a}(X, \bar{t}(X)) = a(X) \text{ et } \tilde{b}(X, \bar{t}(X)) = b(X).$$

En faisant $t = 0$ dans l'égalité (2.1.3), on obtient

(2.1.5) $$\tilde{a}(X, 0)\tilde{b}(X, 0) = f(X),$$

òu $\tilde{a}(X, 0)$ et $\tilde{b}(X, 0)$ sont des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$. En outre, l'égalité (2.1.4) assure que les séries $\tilde{a}(X, 0)$ et $\tilde{b}(X, 0)$ sont sans terme constant. Ceci contredit l'irréductibilité de $f(X)$ dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. ♢

On déduit alors facilement du corollaire 2.1 la proposition suivante :

2.2 PROPOSITION

L'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est un anneau factoriel et normal.

Preuve. La factorialité de l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ se déduit directement du corollaire 2.1. On sait alors qu'un anneau noetherien et factoriel est normal [To]. ♢

On retrouve aussi le théorème sur les relations dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ établi dans la partie II [II,4.11].

2.3 COROLLAIRE (Relations dans $\mathbb{K}[[X]](M)$)

Soient $f_1(X), \ldots, f_p(X)$, des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Soit aussi $f(X)$ une série de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On suppose qu'il existe des séries $q_1(X), \ldots, q_p(X)$, de $\mathbb{K}[[X]]$ telles que $f(X) = \sum_{i=1}^p q_i(X)f_i(X)$. Alors il existe des séries $h_1(X), \ldots, h_p(X)$, de $\mathbb{K}[[X]](M)$ telles que $f(X) = \sum_{i=1}^p h_i(X)f_i(X)$. Ainsi, si on note $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$ sur $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathcal{I}_M$ l'idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$ sur $\mathbb{K}[[X]](M)$, on a

$$\mathcal{I}_M = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[[X]](M).$$

Preuve. On pose, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $q_i^0(X) = q_i(X) - q_i(0)$. Soient $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)$ des nouvelles variables. On considère alors

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^{p}(Y_i + q_i(0))f_i(X). \tag{2.3.1}$$

Clairement, la série $F(X,Y)$ appartient à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$. En outre, le système, en les variables Y, $F(X,Y) = 0$ admet une solution formelle $q^0(X) = (q_1^0(X), \ldots, q_p^0(X))$ telle que $q^0(0) = 0$. Les hypothèses du théorème 1.8 sont vérifiées. On obtient alors, quitte à rajouter des variables $t = (t_1, \ldots, t_s)$, des séries $\tilde{h}_1(X,t), \ldots, \tilde{h}_p(X,t)$ de $\mathbb{K}[[X,t]](M)$ telles que

$$f(X) = \sum_{i=1}^{p}(\tilde{h}_i(X,t) + q_i(0))f_i(X). \tag{2.3.2}$$

En posant alors, pour tout $i = 1, \ldots, m$, $h_i(X) = \tilde{h}_i(X,0) + q_i(0)$, on obtient le résultat annoncé. $\diamondsuit$

Remarque :

On obtient ici un théorème d'existence. La démonstration établie dans la partie II donnait en plus une construction explicite des séries solutions.

2.4 COROLLAIRE

Soient $f(X)$ dans $\mathbb{K}[[X]]$ et p un entier non nul. Si f^p appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$, alors $f(X)$ appartient aussi à $\mathbb{K}[[X]](M)$.

Preuve. On considère la série $F(X,Y) = (Y + f(0))^p - f(X)^p$. Clairement, $F(X,Y)$ appartient à $\mathbb{K}[[X,Y]](M)$. De plus, si on pose $\tilde{f}(X) = f(X) - f(0)$, on a $F(X, \tilde{f}(X)) = 0$, avec $\tilde{f}(0) = 0$. On applique alors le théorème 1.9. Pour tout entier $c \geq 1$, il existe une série $\tilde{a}(X)$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$ telle que $\tilde{a}(0) = 0$ et $\tilde{a}(X) - \tilde{f}(X)$ appartient à $\underline{m}_X^c$. On pose $a(X) = \tilde{a}(X) + f(0)$. On a donc

$$a(X)^p = f(X)^p \text{ et } a(X) - f(X) \in \underline{m}_X^c. \tag{2.4.1}$$

Ainsi, on obtient

$$(2.4.2)\qquad \begin{array}{rcl} a(X)^p - f(X)^p & = & (a(X) - f(X))(a(X)^{p-1} + a(X)^{p-2} f(X) + \ldots \\ & & \ldots + a(X) f(X)^{p-2} + f(X)^{p-1}) \\ & = & 0. \end{array}$$

Soit c suffisamment grand ($c \geq$ord$(f) + 1$). Le premier terme de la série f, $f(X) = \sum_{J \in \mathbf{N}^s} f_J X^J$, pour l'ordre naturel [voir II, 4.6] est du type $(f_{J_1}) X^{J_1}$, avec $|J_1| =$ord(f). D'après (2.4.1), le premier terme de la série $a(X)$, pour le même ordre, est $(a_{J_1}) X^{J_1} = (f_{J_1}) X^{J_1}$. Clairement, le premier terme d'un produit du type $f(X)^k a(X)^i$ est alors $(f_{J_1})^{k+i} X^{(k+i)J_1}$. Ainsi, la série

$$a(X)^{p-1} + a(X)^{p-2} f(X) + \ldots + a(X) f(X)^{p-2} + f(X)^{p-1}$$

n'est pas nulle puisque son premier terme, pour l'ordre naturel, est égal à $p(f_{J_1})^p X^{pJ_1}$. Donc, d'après (2.4.2), $f(X) = a(X)$ et f appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$. $\diamondsuit$

$\diamondsuit$

Annexe A : Sur la constante $\mu - \nu + 1$ de la partie I.

On reprend les notations de la partie I. On note $\mathbb{C}[[X]]$ l'anneau des séries formelles à s variables et à coefficients complexes. On notera $\underline{m}_X$ son idéal maximal. Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$; on écrit

$$\mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J|=j}} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} H_j \mathcal{A}(X)$$

où $|J|$ désigne la longueur du multi-indice J; $H_j\mathcal{A}(X)$ n'est autre que le polynôme homogène de degré j dans le développement de $\mathcal{A}$.

On note $\operatorname{ord}(\mathcal{A}) = \inf(j \in \mathbb{N}; H_j\mathcal{A}(X) \not\equiv 0)$, l'ordre d'annulation de $\mathcal{A}$, avec la convention $\operatorname{ord}(\mathcal{A}) = \infty$ si $\mathcal{A}$ est identiquement nul.

On considère l'application formelle

$$F : \ (X_1, ..., X_s) \to (F_1(X_1, ..., X_s), ..., F_s(X_1, ..., X_s)),$$

avec, pour tout $1 \leq i \leq s$, $F_i(X_1, ..., X_s) \in \mathbb{C}[[X]]$ et $F_i(0, ..., 0) = 0$. On suppose aussi que le jacobien de F, noté Φ, est non nul dans $\mathbb{C}[[X]]$, i.e. $\operatorname{ord}(\Phi) < \infty$. On note dans la suite $\mu = \operatorname{ord}(\Phi)$. Et si on note $T_{p,l}(X)$ le cofacteur (l, p) de la matrice jacobienne de F, on pose $\nu = \inf_{l,p}(\operatorname{ord}(T_{p,l}(X)))$.

On sait [I, 2.6] que, sous les hypothèses (H_1) et (H_2), si F appartient à $(\mathbb{C}[[X]](M))^s$ et $\mathcal{A} \circ F$ appartient à $\mathbb{C}[[X]](M)$, alors $\mathcal{A}$ appartient à $\mathbb{C}[[X]](M^{(\mu-\nu+1)})$. On dit alors que la perte de régularité sur la classe M est au plus $\mu - \nu + 1$. De plus, d'après la remarque [I, 3.9], $\mu - \nu + 1$ est le meilleur exposant d possible dans l'inégalité (ii) de [I, 3.8]. Étant donné F, on note D_F la meilleure constante D de l'inégalité

$$(A) \qquad \operatorname{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq D \operatorname{ord}(\mathcal{A}), \text{ pour tout } \mathcal{A} \text{ de } \mathbb{C}[[X]].$$

On a $D_F \leq \mu - \nu + 1$ [CC1]. Dans [CC1], J. Chaumat et A.-M. Chollet posent la question suivante : peut-on trouver une application F telle que D_F soit strictement inférieure à $\mu - \nu + 1$? Il serait alors intéressant de décrire dans l'inégalité (ii) de [I, 3.8] le meilleur entier d et dans l'inégalité (A) la meilleure constante D_F en fonction de la donnée F. Dans ce travail, en réponse à cette question, on donne une famille d'exemples où l'on a $D_F < \mu - \nu + 1$.

1. ÉTUDE DE D_F.

On se place dans le cas général où $\mathcal{A}$ appartient à $\mathbb{C}[[X]]$ et F appartient à $(\mathbb{C}[[X]])^s$. On associe alors à F l'application

$$\begin{aligned} \phi_F\colon \ \mathbb{C}[[X]] &\longrightarrow \ \mathbb{C}[[X]] \\ \mathcal{A} &\longrightarrow \ \mathcal{A} \circ F \end{aligned}$$

Le lemme suivant est une forme légèrement précisée d'un lemme de Glaeser [T].

1.1 LEMME *On a*

(i) $\qquad$ *pour tout* $q \in \mathbb{N}^*$, $\phi_F{}^{-1}(\underline{m}_X^{q(\mu-\nu+1)}) \subset \underline{m}_X^q$,

(ii) $\qquad$ *pour tout* $q \in \mathbb{N}$, *pour tout* $r \in \mathbb{N}^*$ $\phi_F{}^{-1}(\underline{m}_X^{q(\mu-\nu+1)+r}) \subset \underline{m}_X^{q+1}$.

Preuve. On démontre d'abord (i). On raisonne par récurrence sur q. Pour $q = 1$, la propriété est vérifiée car ϕ_F est un homomorphisme local. On a en effet $\phi_F{}^{-1}(\underline{m}_X) \subset \underline{m}_X$.

Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$. En dérivant par rapport aux variables $X_1, \cdots, X_s$, on a, pour tout p, $1 \leq p \leq s$,

$$\sum_{l=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l} \circ F(X) \right) \frac{\partial F_l}{\partial X_p} = \frac{\partial (\mathcal{A} \circ F)}{\partial X_p}. \tag{1.1.1}$$

Comme on a $\mathrm{ord}(\Phi) < \infty$, on obtient, pour tout $l = 1, \ldots, s$,

$$\Phi(X) \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l} \right) \circ F(X) = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial (\mathcal{A} \circ F)}{\partial X_p}(X) T_{p,l}(X). \tag{1.1.2}$$

On suppose la propriété (i) vérifiée à l'ordre $q - 1$, $q > 1$. Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$ vérifiant $\mathcal{A} \circ F \in \underline{m}_X^{q(\mu-\nu+1)}$, on a

$$\forall 1 \leq p \leq s \qquad \frac{\partial (\mathcal{A} \circ F)}{\partial X_p}(X) \in \underline{m}_X^{(\mu-\nu+1)q-1}. \tag{1.1.3}$$

De (1.1.2) et (1.1.3), on tire

$$\forall 1 \leq l \leq s \quad \Phi(X) \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l} \right) \circ F(X) \in \underline{m}_X^{(\mu-\nu+1)q-1+\nu}. \tag{1.1.4}$$

Or, on sait

$$\Phi(X) \in \underline{m}_X^{\mu} \text{ et } \Phi(X) \notin \underline{m}_X^{\mu+1}. \tag{1.1.5}$$

Ainsi, (1.1.4) et (1.1.5) donnent

$$\forall 1 \leq l \leq s \quad \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l} \right) \circ F(X) \in \underline{m}_X^{(\mu-\nu+1)(q-1)}. \tag{1.1.6}$$

De l'hypothèse de récurrence, on déduit

$$\forall 1 \leq l \leq s \quad \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l} \right) \in \underline{m}_X^{q-1}. \tag{1.1.7}$$

Comme par hypothèse $\mathcal{A} \circ F \in \underline{m}_X^{q(\mu-\nu+1)}$, on a donc $\mathcal{A}(0) = 0$ et on conclut $\mathcal{A} \in \underline{m}_X^q$.

On démontre ensuite (ii). On raisonne encore par récurrence.

Pour $q = 0$, l'hypothèse est vérifiée car ϕ_F est un homomorphisme local. On suppose $q \geq 1$. Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$ vérifiant $\mathcal{A} \circ F \in \underline{m}_X^{q(\mu-\nu+1)+r}$. Par un raisonnement analogue au précédent, on trouve

$$(1.1.8) \qquad \forall 1 \leq l \leq s \quad \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l}\right) \circ F(X) \in \underline{m}_X^{(\mu-\nu+1)(q-1)+r}.$$

En utilisant alors l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$(1.1.9) \qquad \forall 1 \leq l \leq s \quad \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_l}\right) \in \underline{m}_X^q.$$

Comme $\mathcal{A}(0) = 0$, on obtient $\mathcal{A} \in \underline{m}_X^{q+1}$. $\diamondsuit$

On en déduit alors le résultat suivant.

1.2 PROPOSITION *On a, pour toute série formelle $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}[[X]]$,*

$$ord(\mathcal{A} \circ F) \leq (\mu - \nu + 1) ord(\mathcal{A}).$$

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une série formelle telle que $\mathrm{ord}(\mathcal{A} \circ F) = p$. La division euclidienne de p par $\mu - \nu + 1$ donne

$$(1.2.1) \qquad p = (\mu - \nu + 1)q + r \text{ avec } 0 \leq r < \mu - \nu + 1.$$

Si $r = 0$, le (i) du lemme 1.1 permet de conclure directement. En effet, on a $\mathcal{A} \circ F \in \underline{m}_X^{(\mu-\nu+1)q}$, ainsi $\mathcal{A} \in \underline{m}_X^q$. On a donc $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) \geq q$ et

$$(1.2.2) \qquad \mathrm{ord}(\mathcal{A} \circ F) = (\mu - \nu + 1)q \leq (\mu - \nu + 1)\mathrm{ord}(\mathcal{A}).$$

Sinon, on a $r \geq 1$. Par un raisonnement analogue, en utilisant (ii) du lemme 1.1, on trouve

$$(1.2.3) \qquad \mathrm{ord}(\mathcal{A}) \geq q + 1.$$

Ainsi, (1.2.1) et (1.2.3) permettent d'écrire

$$(1.2.4) \qquad \mathrm{ord}(\mathcal{A} \circ F) = (\mu - \nu + 1)q + r \leq (\mu - \nu + 1)\mathrm{ord}(\mathcal{A}) + r - (\mu - \nu + 1).$$

En tenant compte du fait que $r - (\mu - \nu + 1) < 0$, on obtient bien le résultat annoncé. $\diamondsuit$

Nous allons tout d'abord obtenir une condition suffisante pour que la constante $\mu - \nu + 1$ soit optimale.

1.3 NOTATIONS ET DÉFINITIONS On pose, pour tout $1 \leq i \leq s$, $\mathrm{ord}(F_i) = p_i$. Sans diminuer la généralité, on peut supposer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante. On note $\mathcal{H}_i^{\nu}(X_1, ..., X_s)$ la partie homogène de degré ν de $F_i(X_1, ..., X_s)$. On a alors,

$$\text{pour tout } i = 1, \dots, s,\ F_i(X_1, ..., X_s) = \mathcal{H}_i^{p_i}(X_1, ..., X_s) + F_i^{p_i+1}(X_1, ..., X_s),$$

avec $\mathrm{ord}(F_i^{p_i+1}) \geq p_i + 1$.

On suppose $\mathrm{ord}(\Phi) < \infty$. On pose aussi

$$\mathcal{H}: \quad (X_1, ..., X_s) \to (\mathcal{H}_1^{p_1}(X_1, ..., X_s), ..., \mathcal{H}_s^{p_s}(X_1, ..., X_s)).$$

J. Chaumat et A.-M. Chollet ont montré que, dans le cas où F est une application polynômiale à composantes homogènes, l'inégalité de la proposition 1.2 est optimale [CC1]. Plus généralement, on montre que l'inégalité reste optimale si on peut voir F comme la perturbation d'une application à composantes homogènes dont le jacobien est non identiquement nul.

1.4 LEMME *Si l'ordre de $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ est fini, alors on a ord$(\Phi) =$ ord$(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}) = \sum_{i=1}^{s} p_i - s$.*

Preuve. $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ est un polynôme homogène. Son ordre est fini. Il est donc égal à son degré total $p_1 + \ldots + p_s - s$. En utilisant la s-linéarité du déterminant, on a clairement

$$\Phi = \mathcal{J}_{\mathcal{H}} + \tilde{\Phi}, \tag{1.4.1}$$

avec $\tilde{\Phi}$ une série formelle d'ordre supérieur ou égal à $\sum_{i=1}^{s} p_i - s + 1$. On a donc l'égalité $\mathrm{ord}(\Phi) = \mathrm{ord}(\mathcal{J}_{\mathcal{H}})$. $\diamondsuit$

1.5 LEMME *Si l'ordre de $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ est fini, alors le plus petit ordre des mineurs extraits de la matrice $(\mathcal{J}_F)$ est égal à $\sum_{i=2}^{s} p_i - (s-1)$.*

Preuve. Comme l'ordre de $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ est fini, il existe au moins un cofacteur $(1, i)$, $i = 1, \dots, s$, de la matrice jacobienne de F non nul dans $\mathbb{C}[[X]]$. L'ordre de ce cofacteur est égal à $\sum_{i=2}^{s} p_i - (s-1)$. De plus, l'hypothèse de décroissance faite sur la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ assure que ce mineur est bien d'ordre le plus petit possible. Ceci achève la preuve du lemme.$\diamondsuit$

On obtient donc, en regroupant les deux lemmes précédents, la proposition suivante.

1.6 PROPOSITION *Si l'ordre de $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ est fini, alors il existe une série formelle $\mathcal{A}$ telle que*

$$ord(\mathcal{A} \circ F) = (\mu - \nu + 1) ord(\mathcal{A}).$$

Preuve. D'après le lemme 1.4, on a $\mu = \sum_{i=1}^{s} p_i - s$. D'après le lemme 1.5, on a $\nu = \sum_{i=2}^{s} p_i - (s-1)$. Ainsi on a $\mu - \nu + 1 = p_1$. En posant, pour tout entier non nul m, $\mathcal{A}_m(X_1, ..., X_s) = X_1^m$, on obtient le résultat. $\diamondsuit$

On a, de plus, obtenu la valeur de la constante $\mu-\nu+1$ dans ce cas. On a $\mu-\nu+1 = p_1$.

Remarque :
La condition obtenue dans la proposition 1.6 n'est pas nécessaire. En effet, si on pose $F(X,Y) = (X^2+Y^3, X)$, on a $\mathcal{H}(X,Y) = (X^2, X)$, donc $\mathcal{J}_{\mathcal{H}} \equiv 0$. Mais un simple calcul donne $\mu-\nu+1 = 3$. La série $\mathcal{A}(X,Y) = X - Y^2$ est telle que $\mathcal{A} \circ F(X,Y) = Y^3$. On a, dans ce cas, $\mathrm{ord}(\mathcal{A} \circ F) = (\mu-\nu+1)\mathrm{ord}(\mathcal{A})$.

2. UN CAS OÙ $D_F \neq \mu - \nu + 1$

Dans toute la suite, on suppose $s = 2$. On note alors (X,Y) les indéterminées. On donne une famille d'exemples où la constante $\mu-\nu+1$ n'est pas optimale. On trouve donc une application F et une constante D_F, strictement inférieure à $\mu-\nu+1$, telle que, pour toute série formelle $\mathcal{A}$, on ait l'inégalité $\mathrm{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq D_F\ \mathrm{ord}(\mathcal{A})$.

2.1 NOTATIONS ET DÉFINITIONS On pose $e_{k,l}(X,Y) = X^kY^l$. Pour toute série $\mathcal{A} = \sum_{k,l} a_{k,l}e_{k,l}$, on pose

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{A}) = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ tel que } a_{k,l} \neq 0\}.$$

On utilise l'ordre lexicographique habituel, noté $\leq$, sur les monômes $e_{k,l}(X,Y)$ et défini par

$$(e_{k,l}(X,Y) \leq e_{m,n}(X,Y)) \Leftrightarrow (\ k+l < m+n) \text{ ou } (k+l = m+n \ et \ l \leq n))$$

La base ainsi ordonnée devient $(1, X, Y, X^2, XY, Y^2, \ldots)$.

On pose $F(X,Y) = (X^{p_1} + Y^{p_2}, X^q)$ avec p_1, p_2 et q des entiers non nuls tels que $p_1 \geq q$ et $p_1 < p_2$. On suppose, en outre, que q ne divise pas p_1.

Soit $\mathcal{A}$ une série formelle d'ordre n, $\mathcal{A}(X,Y) = \sum_{k,l} a_{k,l}X^kY^l$. On a donc $a_{k,l} = 0 \ si \ k+l < n$ et $a_{i,j} \neq 0$ pour un couple d'indices (i,j)avec $i+j = n$. Pour (i,j) ainsi fixé, $i+j = n$, on note

$$\mathcal{A}_{i,j,n} = \{\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X,Y]] \text{ tel que } \mathrm{ord}(\mathcal{A}) = n \text{ et } a_{i,j} \neq 0\}$$

et

$$I_{i,j,n} = \mathrm{Exp}(e_{i,j} \circ F).$$

On a facilement

$$I_{i,j,n} = \{((p_1-q)i + qn - p_1k, p_2k) \text{ avec } 0 \leq k \leq i\}$$

et cardinal $I_{i,j,n} = i+1$.

On peut donc écrire

$$
(2.1.1) \qquad \begin{aligned}
\mathcal{A} \circ F(X,Y) &= \sum_{(t,u)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} L_{(t,u)}(\mathcal{A}) X^t Y^u \\
&= \sum_{(t,u)\in I_{i,j,n}} L_{(t,u)}(\mathcal{A}) X^t Y^u \\
&\quad + \sum_{(t,u)\notin I_{i,j,n}} L_{(t,u)}(\mathcal{A}) X^t Y^u,
\end{aligned}
$$

où les $L_{(t,u)}$ sont des formes linéaires agissant sur la série $\mathcal{A}$.

De plus, la division euclidienne de p_1 par q donne

$$
(2.1.2) \qquad p_1 = \beta q + \alpha \text{ avec } 0 < \alpha < q.
$$

Soit alors

$$
(2.1.3) \qquad d = pgcd(p_1, q) = pgcd(\alpha, q).
$$

On a donc les relations

$$
(2.1.4) \qquad q = q'd,\ \alpha = \alpha' d \text{ avec } pgcd(\alpha', q') = 1.
$$

Enfin, en utilisant (2.1.2), on a

$$
(2.1.5) \qquad q' \geq 2.
$$

On pose

$$
B_{i,j,n} = \{(i',j') \text{ tel que } i'+j' = n' \geq n \text{ et } \mathrm{Exp}(e_{i,j}\circ F) \cap \mathrm{Exp}(e_{i',j'}\circ F) \neq \emptyset\}.
$$

Clairement, le couple (i,j) appartient à $B_{i,j,n}$. Avec ces notations, on a un premier lemme.

2.2 LEMME *Un couple d'indices (i',j') appartient à $B_{i,j,n}$ si et seulement si on a $(i',j') = (i - \frac{qs}{p_1-q}, j + \frac{p_1 s}{p_1-q})$ avec $s = s'((\beta-1)q' + \alpha')$, pour tout entier s' vérifiant $0 \leq s' \leq [\frac{i}{q'}]$.*

Preuve.

$$
(2.2.1) \qquad \begin{aligned}
\phi_F(X^i Y^j) &= (X^{p_1} + Y^{p_2})^i X^{qj} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^{(p_1-q)i+qn-p_1k} Y^{p_2 k}.
\end{aligned}
$$

Soit $(i',j') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $i'+j' = n' \geq n$; on a de même

$$
(2.2.1') \qquad \phi_F(X^{i'} Y^{j'}) = \sum_{k'=0}^{i'} \binom{i'}{k'} X^{(p_1-q)i'+qn'-p_1k'} Y^{p_2 k'}.
$$

Ainsi pour k fixé, $0 \leq k \leq i$, le terme $X^{(p_1-q)i+qn-p_1k}Y^{p_2k}$ se retrouve à partir d'un monôme $X^{i'}Y^{j'}$, avec $i'+j'=n' \geq n$, après application de ϕ_F, si et seulement si il existe $k' \in \{0,...,i'\}$ tel que

$$(2.2.2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (p_1-q)i'+qn'-p_1k' &=& (p_1-q)i+qn-p_1k \\ p_2k' &=& p_2k \end{array} \right.$$

La dernière condition équivaut, en posant $n' = n+s$ et $s \in \mathbb{N}$, à l'existence de $k' \in \{0,...,i'\}$ tel que

$$(2.2.3) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} i' &=& i - \frac{qs}{p_1-q} \\ k' &=& k \end{array} \right.$$

On obtient donc les relations

$$(2.2.4) \qquad i' = i - \frac{qs}{p_1-q},$$

$$(2.2.4') \qquad j' = j + \frac{p_1s}{p_1-q}.$$

On obtient le lemme en respectant la condition $i' \in \mathbb{N}$, ce qui, d'une part, implique l'inégalité $0 \leq s \leq [\frac{i(p_1-q)}{q}]$. D'autre part, la condition $i' \in \mathbb{N}$ est équivalente à

$$(2.2.5) \qquad \frac{sq}{p_1-q} = \gamma \text{ avec } \gamma \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, en utilisant (2.1.2), on a

$$(2.2.6) \qquad p_1 - q = (\beta-1)q + \alpha.$$

L'égalité (2.2.5) devient alors

$$(2.2.7) \qquad q'ds = (\beta-1)\gamma q'd + \alpha'd\gamma.$$

Le théorème de Gauss permet d'affirmer alors que q' divise γ. Finalement, on a

$$(2.2.8) \qquad \gamma \in \{0, q', 2q', \cdots, [\frac{i}{q'}]q'\}.$$

Et donc l'indice s décrit l'ensemble

$$(2.2.9) \qquad s \in \{0, (\beta-1)q'+\alpha', 2((\beta-1)q'+\alpha'), \cdots, [\frac{i}{q'}]((\beta-1)q'+\alpha')\}.$$

Réciproquement, si $s = s'((\beta-1)q'+\alpha')$, avec $0 \leq s' \leq [\frac{i}{q'}]$, on vérifie alors que $\frac{sq}{p_1-q} = \frac{s'q((\beta-1)q'+\alpha')}{(\beta-1)q+\alpha} = s'q' \in \mathbb{N}$. On a donc obtenu le résultat escompté. $\diamondsuit$

2.3 NOTATIONS ET DÉFINITIONS On note $e^*_{k,l}$ les formes linéaires vérifiant $e^*_{k,l}(e_{t,u}) = 0$ si $(k,l) \neq (t,u)$ et $e^*_{k,l}(e_{k,l}) = 1$. On pose alors

$$E^*_{i,j,n} = \mathrm{Vect}(e^*_{k,l}\ ,\ (k,l) \in B_{i,j,n}).$$

Ainsi, $E^*_{i,j,n}$ est le sous-espace vectoriel engendré par les $e^*_{i-\frac{qs}{p_1-q},j+\frac{p_1 s}{p_1-q}}$, pour tout couple d'indices $(i - \frac{qs}{p_1-q}, j + \frac{p_1 s}{p_1-q})$ défini dans le lemme 2.2. On a clairement $\dim E^*_{i,j,n} = [\frac{i}{q'}]+1 = \sigma(i)$. De plus, d'après le lemme 2.2, pour (t,u) appartenant à $I_{i,j,n}$, les formes linéaires $L_{(t,u)}$ définies dans (2.1.1) appartiennent à $E^*_{i,j,n}$. On considère l'ensemble E des monômes $e_{t,u}$ tels que (t,u) appartiennent à $I_{i,j,n}$. D'après (2.2.1), on a clairement

$$E = \{X^{(p_1-q)i+qn-p_1 k} Y^{p_2 k} \text{ avec } 0 \leq k \leq i\}. \tag{2.3.1}$$

On ordonne alors, selon l'ordre défini au paragraphe 2.1, l'ensemble E. On ordonne, de la même manière, les formes linéaires $L_{(t,u)}$, avec $(t,u) \in I_{i,j,n}$.

2.4 LEMME *Pour tout $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathcal{A}_{i,j,n}$, il existe un couple d'indices (t,u), appartenant à $I_{i,j,n}$, tel que l'on ait*

$$L_{(t,u)}(\mathcal{A}) \neq 0$$

et

$$(t,u) \leq (t_{i,n}, u_{i,n}),$$

avec $t_{i,n} = (p_1 - q)i + qn - p_1(\sigma(i) - 1)$ et $u_{i,n} = p_2(\sigma(i) - 1)$.

Preuve. D'après (2.3.1), pour $(t,u) \in I_{i,j,n}$, on a $(t,u) \in \{((p_1-q)i+qn-p_1 k, p_2 k) \text{ avec } 0 \leq k \leq i\}$. On ne considère, dans la suite, que les $\sigma(i)$ premières formes linéaires $L_{(t,u)}$. D'après (2.3.1), on ne s'intéresse donc qu'aux formes linéaires $L_{(t,u)}$, avec $(t,u) \leq (t_{i,n}, u_{i,n})$. Un calcul similaire à (2.2.1) donne alors, pour tout $0 \leq k \leq \sigma(i) - 1$,

$$L_{((p_1-q)i+qn-p_1 k, p_2 k)} = \sum_{s'=0}^{[\frac{i}{q'}]} \binom{i - \frac{qs'((\beta-1)q'+\alpha')}{p_1-q}}{k} e^*_{i-\frac{qs}{p_1-q},j+\frac{p_1 s}{p_1-q}}. \tag{2.4.1}$$

On est donc amené à considérer le système

$$\forall 0 \leq k \leq \sigma(i) - 1,\ \sum_{s'=0}^{[\frac{i}{q'}]} \binom{i - \frac{qs'((\beta-1)q'+\alpha')}{p_1-q}}{k} a_{i-\frac{qs}{p_1-q},j+\frac{p_1 s}{p_1-q}} = 0, \tag{2.4.2}$$

qui s'écrit encore, à l'aide de (2.1.4) et (2.2.6),

$$\forall 0 \leq k \leq \sigma(i) - 1,\ \sum_{s'=0}^{[\frac{i}{q'}]} \binom{i - q's'}{k} a_{i-q's',j+\frac{p_1 s}{p_1-q}} = 0. \tag{2.4.3}$$

On note $M_{i,n}$ la matrice à $\sigma(i)$ lignes et $\sigma(i)$ colonnes de ce système. On a

$$M_{i,n} = \begin{bmatrix} \binom{i}{0} & \binom{i-q'}{0} & \cdots & \binom{i-(\sigma(i)-1)q'}{0} \\ \binom{i}{1} & \binom{i-q'}{1} & \cdots & \binom{i-(\sigma(i)-1)q'}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{i}{\sigma(i)-1} & \binom{i-q'}{\sigma(i)-1} & \cdots & \binom{i-(\sigma(i)-1)q'}{\sigma(i)-1} \end{bmatrix}$$

avec la convention $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$. Pour montrer le lemme, il suffit donc de prouver que $\det(M_{i,n}) \neq 0$, car alors la seule solution du sytème est la solution nulle.
Or, en mettant $\dfrac{1}{k!}$ en facteur sur la k-ième ligne, on a

(2.4.4) $$0!1!...(\sigma(i)-1)!\det(M_{i,n}) = \begin{vmatrix} (\mathcal{C}_{i,n})_1 & (\mathcal{C}_{i,n})_2 & \cdots & (\mathcal{C}_{i,n})_{\sigma(i)} \end{vmatrix},$$

où le membre de droite de cette dernière égalité est le déterminant des $\sigma(i)$ vecteurs colonnes
(2.4.5)

$$(\mathcal{C}_{i,n})_l = \begin{pmatrix} 1 \\ (i-(l-1)q') \\ (i-(l-1)q')(i-(l-1)q'-1) \\ \vdots \\ (i-(l-1)q')(i-(l-1)q'-1)\cdots(i-(l-1)q'-\sigma(i)) \end{pmatrix}, \ 1 \leq l \leq \sigma(i).$$

Ainsi, en notant

(2.4.6) $$\alpha_l = i-(l-1)q',$$

on obtient, d'après (2.4.5),

(2.4.7) $$(\mathcal{C}_{i,n})_l = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_l \\ \alpha_l(\alpha_l-1) \\ \vdots \\ \alpha_l(\alpha_l-1)\cdots(\alpha_l-\sigma(i)) \end{pmatrix}$$

On reconnait alors en (2.4.4) un déterminant de Vandermonde relativement à la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \cdots, X(X-1)(X-2)\cdots(X-\sigma(i))$ pris aux points $(\alpha_l)_{1\leq l\leq\sigma(i)}$ qui sont deux à deux distincts. Le déterminant est donc non nul. Ceci achève la preuve du lemme. $\diamondsuit$

On obtient alors la proposition suivante.

2.5 PROPOSITION *Pour toute série formelle $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, telle que ord($\mathcal{A}$) $= n$, on a*

$$ord(\phi_F(\mathcal{A})) \leq p_1 n + (p_2 - p_1)[\frac{n}{q'}]$$

La constante $\mu - \nu + 1 = p_2$ n'est donc pas optimale.

Preuve. Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ d'ordre n. Il existe donc (i,j,n) tel que $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{i,j,n}$. D'après le lemme 2.4, il existe alors $(t,u) \leq (t_{i,n}, u_{i,n})$ tel que $L_{(t,u)}(\mathcal{A}) \neq 0$. D'après (2.1.1), on a donc

$$\text{ordre}(\mathcal{A} \circ F) \leq t + u \leq t_{i,n} + u_{i,n}. \tag{2.5.1}$$

Ainsi, d'après le lemme 2.4, on a

$$\text{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq (p_1 - q)i + qn + (p_2 - p_1)(\sigma(i) - 1). \tag{2.5.2}$$

Et, ainsi on a

$$\text{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq \max_{1 \leq i \leq n}((p_1 - q)i + qn + (p_2 - p_1)(\sigma(i) - 1)) \tag{2.5.3}$$

Or, dans (2.5.3), on vérifie facilement que le max est obtenu pour $i = n$ et vaut $p_1 n + (p_2 - p_1)[\frac{n}{q'}]$. On obtient donc bien le résultat voulu.

D'après (2.1.5), on obtient bien alors que la constante $\mu - \nu + 1 = p_2$ n'est pas optimale. En effet, on a, d'après (2.1.5),

$$p_1 n + (p_2 - p_1)[\frac{n}{q'}] \leq p_1 n + (p_2 - p_1)\frac{n}{q'} < p_2 n. \tag{2.5.4}$$

$\diamondsuit$

2.6 EXEMPLE

On pose $F(X,Y) = (X^3 + Y^4, X^2)$. On a donc $p_1 = 3$, $p_2 = 4$ et $q = 2$. Clairement, on a aussi $\mu - \nu + 1 = 4$. On alors (2.1.2) avec $\beta = 1$, $\alpha = 1$. D'après (2.1.3) et (2.1.4), on a aussi $d = 1$, $q' = 2$ et $\alpha' = 1$. Ainsi, (2.2.4) et (2.2.4') deviennent $i' = i - 2s$ et $j' = j + 3s$. Ainsi

$$E^*_{i,n} = \text{Vect}(e^*_{i-2s,j+3s} \text{ avec } 0 \leq s \leq [\frac{i}{2}]).$$

Et on a $\dim E^*_{i,n} = \sigma(i) = [\frac{i}{2}] + 1$. On a aussi

$$E = \{X^{i+2n-3k} Y^{4k} \text{ avec } 0 \leq k \leq i\}.$$

La proposition 2.5 donne alors

$$\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X,Y]]\ ;\ \text{ordre}(\mathcal{A}) = n\ ,\ \text{ordre}(\phi_F(\mathcal{A})) \leq 3n + [\frac{n}{2}].$$

Plus précisément, on a alors

$$\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X,Y]]\ ,\ \text{ordre}(\phi_F(\mathcal{A})) \leq \frac{7}{2}\text{ordre}(\mathcal{A}).$$

Et on a bien $\frac{7}{2} < 4$. Il est aussi facile de vérifier que la constante trouvée ici est optimale. En effet, avec $\mathcal{A}(X,Y) = X^2 - Y^3$, on a $\mathcal{A} \circ F(X,Y) = 2X^3Y^4 + Y^8$. Ainsi, on a $\operatorname{ord}(\mathcal{A} \circ F) = 7 = \frac{7}{2}\operatorname{ord}(\mathcal{A})$.

2.7 REMARQUES

On peut vérifier que la constante trouvée dans 2.5 est optimale pour la famille d'applications F considérée. On a alors la proposition suivante.

La constante $\mu - \nu + 1$ est optimale si et seulement si q divise p_1 et p_2.

Une étude analogue pour les applications $F(X,Y) = (X^{p_1} + Y^{p_2}, X^q)$, avec $p_1 < q$, aboutit à la proposition suivante :

La constante $\mu - \nu + 1$ est optimale si et seulement si p_1 divise q et p_2.

Il est alors facile de voir que le meilleur exposant d possible dans l'inégalité (ii) de [I, 3.8] est tel que l'on ait

$$D_F \leq d \leq \mu - \nu + 1.$$

Une question n'a pas été abordée ici : a-t-on $d = D_F$?

♢

Annexe B : Une nouvelle preuve du théorème de division de Weierstrass dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée.

Dans toute la suite, $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels positifs qui vérifie les propriétés

$$(H_1) \qquad M_0 = 1 \text{ et } \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est logarithmiquement convexe,}$$

$$(H_2) \qquad \text{il existe } C \geq 1 \text{ tel que } M_{n+1} \leq C^{n+1} M_n.$$

Soit $a(X)$ une série formelle. On note $X' = (X_1, \dots, X_{s-1})$. On utilisera la décomposition suivante

$$(D_1) \qquad a(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(X') X_s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j^{(k)}(X') X_s^j,$$

avec $a_j^{(k)}(X')$ polynôme homogène de degré k en X'. On donne ici une preuve élémentaire de la version du théorème de division de Weierstrass dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée [CC2] [II, 3.1]. C'est la preuve développée à la suite du théorème 1. On applique alors la méthode employée pour estimer la perte lorsque l'on effectue la division de Weierstrass dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ par une série régulière d'ordre p. C'est le théorème 2.

On établit d'abord un lemme préliminaire.

Lemme *Soit $a(X)$ dans $\mathbb{K}[[X]]$. On utilise les notations de la décomposition (D_1). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \qquad a(X) \text{ appartient à } \mathbb{K}[[X]](M),$$

$$(ii) \qquad \text{il existe des constantes } C_1 \text{ et } C_2 \text{ telles que } \sup_{|x'|=1} |a_j^{(k)}| \leq C_1 C_2^{j+k} M_{j+k}.$$

Preuve. On sait [Ca] qu'il existe une constante universelle $C_u > 0$ telle que, pour tout polynôme homogène de degré l de la variable x dans $\mathbb{K}^s$, on ait, si on note $P_l(x) = \sum_{L\in\mathbb{N}^s;|L|=l} p_L x^L$,

$$(1) \qquad C_u^l \sup_{|L|=l} |p_L| \leq \sup_{|x|=1} |P_l(x)| \leq s^l \sup_{|L|=l} |p_L|.$$

On montre d'abord le sens direct de l'implication. On écrit alors, pour tout entier j, k, $a_j^{(k)}(X') = \sum_{K\in\mathbb{N}^s;|K|=k} (a_j^{(k)})_K X'^K$. Par hypothèse, il existe des constantes C_3 et C_4 telles que, pour tout multi-indice K de $\mathbb{N}^{s-1}$, on ait

$$|(a_j^{(k)})_K| \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+k}.$$

Puisque $a_j^{(k)}$ est un polynôme homogène de degré k, en utilisant alors l'inégalité (1), on en déduit (ii). Réciproquement, si on a $\sup_{|x'|=1} |a_j^{(k)}| \leq C_1 C_2^{j+k} M_{j+k}$, en utilisant la première inégalité de (1), on en déduit (i). $\diamondsuit$

THÉORÈME 1 (Division de Weierstrass) [CC2]

Soit $f(X) = \sum_{J \in \mathbf{N}^s} f_J X^J \in \mathbb{K}[[X]](M)$ *une série formelle* p*-régulière par rapport à la variable* X_s*, c'est à dire*

$$f_J = 0 \text{ pour tout muti-indice } J \text{ tel que } |J| < p \text{ et } f_{(0,\ldots,0,p)} \neq 0.$$

Alors, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X]](M)$*, on peut écrire*

$$g(X_1, \ldots, X_s) = q(X_1, \ldots, X_s) f(X_1, \ldots, X_s) + \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X') X_s^k,$$

avec $q \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $r_k \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $k = 0, \ldots, p-1$, *uniques.*

Preuve. On a, dans l'anneau des séries formelles, le théorème de division de Weierstrass. Il suffit donc de montrer que les séries q et r appartiennent à $\mathbb{K}[[X]](M)$. On décompose les séries q, f, g et r selon (D_1). Comme f est p-régulière en X_s, on a

$$f_j^{(k)} = 0 \text{ si } j + k < p \text{ et } f_p^{(0)} = 1. \tag{1.1}$$

Par hypothèse, on a

$$g(X) - q(X) f(X) = r(X). \tag{1.2}$$

En tenant compte des égalités précédentes et du fait que $r_j = 0$ dès que $j \geq p$, on obtient donc la relation, pour tout entier j, k,

$$g_{j+p}^{(k)} = \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{l=0}^{k} f_h^{(l)} q_{j+p-h}^{(k-l)}, \tag{1.3}$$

avec, d'après (1.1), $f_h^{(l)} = 0$ si $h + l < p$. Nous allons voir que ces relations nous suffisent pour estimer la croissance de tous les polynômes $q_j^{(k)}$ sur un voisinage compact de l'origine bien choisi.

Par hypothèse, les séries f et g appartiennent à $\mathbb{K}[[X]](M)$. On applique le lemme précédent. Il existe donc des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que l'on ait, pour tout entier j, k,

$$\sup_{|x'|=1} |f_j^{(k)}| \leq C_1 C_2^{j+k} M_{j+k} \text{ et } \sup_{|x'|=1} |g_j^{(k)}| \leq C_1 C_2^{j+k} M_{j+k}. \tag{1.4}$$

Quitte alors à choisir un compact K assez petit au voisinage de l'origine, on peut supposer, comme p est un entier fixé,

$$\sup_K |f_h^{(l)}| \leq 4^{-l}, \text{ si } l + h = p,\ h \neq p. \tag{1.5}$$

D'après le lemme, il suffit de montrer qu'il existe des constantes C_3 et C_4 strictement positives telles que, pour tout entier j, k, on ait

$$\sup_K |q_j^{(k)}| \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+k}. \tag{1.6}$$

Dans la suite, on note $\sup_K |.| = |.|_K$. On fait une démonstration par récurrence sur la quantité $t = j+2k$. Pour $t=0$, $j=0$, $k=0$ et l'hypothèse de récurrence est trivialement vérifiée. Soit t un entier; on suppose la propriété vraie pour tout polynôme $q_j^{(k)}$ tel que $j+2k<t$. La relation (1.3) donne

$$g_{j+p}^{(k)} = q_j^{(k)} + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p;\\ (l,h)\neq(0,p)}}^{k} f_h^{(l)} q_{j+p-h}^{(k-l)}. \tag{1.7}$$

Dans la double somme de la dernière égalité, il faut remarquer

$$j+p-h+2k-2l < j+2k. \tag{1.8}$$

En effet, on a $p \leq h+l$. Ainsi, si $p-h-l<0$, la relation (1.8) est triviale. Sinon, on a $h+l=p$. Comme $l\neq 0$, on a $p-h-2l<0$. Ainsi on obtient l'inégalité (1.8). Par conséquent, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux polynômes $q_{j+p-h}^{(k-l)}$ de la double somme de l'égalité (1.7). On a donc

$$|q_j^{(k)}|_K \leq |g_{j+p}^{(k)}|_K + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=1;\\ h+l=p}}^{k} |f_h^{(l)}|_K |q_{j+p-h}^{(k-l)}|_K + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k} |f_h^{(l)}|_K |q_{j+p-h}^{(k-l)}|_K. \tag{1.9}$$

En tenant compte des inégalités (1.4), (1.5) et de l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} |q_j^{(k)}|_K \quad &\leq \quad C_1 C_2^{j+p+k} M_{j+p+k} + \sum_{\substack{l=1;\\ h+l=p}}^{k} 4^{-l} C_3 C_4^{j+k} M_{j+k} \\ &\quad + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k} C_1 C_2^{h+l} M_{h+l} C_3 C_4^{j+p-h+k-l} M_{j+p-h+k-l}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

En tenant compte de l'hypothèse (H_2) sur la suite M, on a les majorations

$$M_{j+p+k} \leq C^{p(j+k)} C^{\frac{p(p+1)}{2}} M_{j+k} \tag{1.11}$$

et

$$M_{h+l} \leq C^{p(l+h)} C^{\frac{-p(p-1)}{2}} M_{l+h-p}. \tag{1.12}$$

En tenant compte des inégalités (1.11), (1.12) et de l'hypothèse (H_1), l'inégalité (1.10) donne

$$(1.13)\qquad \begin{aligned} |q_j^{(k)}|_K \;\leq\; & C_3 C_4^{j+k} M_{j+k}\Big(\frac{C_1}{C_3}\Big(\frac{C_2C^p}{C_4}\Big)^{j+k} C_2^p C^{\frac{p(p+1)}{2}} \\ & + \sum_{l=1}^{k} 4^{-l} + C_1 C^{\frac{-p(p-1)}{2}} C_4^p \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k} \Big(\frac{C_2C^p}{C_4}\Big)^{h+l}.\Big) \end{aligned}$$

On majore $\sum_{l=1}^{k} 4^{-l}$ par $\sum_{l=1}^{\infty} 4^{-l} = \frac{1}{3}$. On majore de manière évidente, pour tout entier u fixé, le nombre de termes de la double somme $\displaystyle\sum_{h=0}^{j+p}\sum_{\substack{l=0;\\ h+l=u}}^{k}$ par le nombre de termes de la double somme $\sum_{h+l=u}$, lui-même majoré par 2^u. En choisissant alors C_4 suffisamment grand pour que $\sum_{u=0}^{\infty}(\frac{2C_2C^p}{C_4})^u$ converge, on obtient

$$(1.14)\quad |q_j^{(k)}|_K \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+k}\Big(\frac{C_1}{C_3}\Big(\frac{C_2C^p}{C_4}\Big)^{j+k} C_2^p C^{\frac{p(p+1)}{2}} + \frac{1}{3} + C_1 C^{\frac{-p(p-1)}{2}} \frac{(2C_2C^p)^{p+1}}{C_4 - 2C_2C^p}\Big).$$

Quitte à choisir C_4 encore plus grand, on peut supposer

$$(1.15)\qquad C_1 C^{\frac{-p(p-1)}{2}} \frac{(2C_2C^p)^{p+1}}{C_4 - 2C_2C^p} < \frac{1}{3}.$$

De même, C_4 étant ainsi fixé, on choisit C_3 tel que

$$(1.16)\qquad \frac{C_1}{C_3} C_2^p C^{\frac{p(p+1)}{2}} < \frac{1}{3}.$$

On aura alors

$$(1.17)\qquad |q_j^{(k)}|_K \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+k}.$$

L'hypothèse de récurrence est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier j, k, on a

$$(1.18)\qquad |q_j^{(k)}|_K \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+k}.$$

Ainsi, la série q appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$. Comme $r = g - qf$, on peut aussi affirmer que la série r appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$. Le théorème est donc démontré. $\diamondsuit$

On étudie maintenant ce qui se passe lorsque l'on effectue la division de Weierstrass dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ avec l'hypothèse classique de régularité d'ordre p en X_s.

Pour un monôme $X_1^{i_1}\ldots X_{s-1}^{i_{s-1}}X_s^{i_s}$, on définit d' son degré total en X'. On a donc $d' = i_1 + \ldots + i_{s-1}$. On a alors l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2

Soit $f(X) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s} f_J X^J \in \mathbb{K}[[X]](M)$ *une série formelle régulière d'ordre* p *en* X_s, *c'est à dire*

$$f(0,\ldots,0,X_s) = X_s^p c(X_s) \text{ avec } c(0) \neq 0.$$

Alors, il existe $\alpha \geq 1$, *tel que, pour tout* $g \in \mathbb{K}[[X]](M)$, *on ait*

$$(i) \qquad g(X_1,\ldots,X_s) = q(X_1,\ldots,X_s) f(X_1,\ldots,X_s) + \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X') X_s^k,$$

avec $q(X) = \sum_{J\in\mathbf{N}^s} q_J X^J$, $r(X) = \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X') X_s^k$, $k = 0,\ldots,p-1$, *uniques, et*

(ii) *il existe des constantes* C_6 *et* C_7 *telles que* $|q_J| \leq C_6 C_7^j M_{j_s+[\alpha(j_1+\ldots+j_{s-1})]}$.

Les séries $q(X)$ *et* $r(X)$ *appartiennent donc à* $\mathbb{K}[[X]](M^{([\alpha]+1)})$ *et les séries* $q(0,\ldots,0,X_s)$ *et* $r(0,\ldots,0,X_s)$ *appartiennent à* $\mathbb{K}[[X_s]](M)$.

De plus, on a

$$\begin{aligned}\alpha \;&= \max\{\; c \text{ tel que } c = \tfrac{p-i_s}{d'} \text{ pour tous les monômes } X_1^{i_1}\ldots X_{s-1}^{i_{s-1}} X_s^{i_s} \\ &\qquad \text{de } f \text{ tels que } i_1+\ldots+i_s \leq p,\ i_s \neq p\}.\end{aligned}$$

On a $\alpha \leq p - ord(f) + 1$.

Preuve. On reprend la démarche de la preuve précédente. On a, dans l'anneau des séries formelles, le théorème de division de Weierstrass. On décompose les séries q, f, g et r selon (D_1). Comme f est régulière d'ordre p en X_s, on a

$$(2.1) \qquad f_j^{(0)} = 0 \text{ si } j < p \text{ et } f_p^{(0)} = 1.$$

Par hypothèse, on a

$$(2.2) \qquad g(X) - q(X)f(X) = r(X).$$

En tenant compte des égalités précédentes et du fait que $r_j = 0$ dès que $j \geq p$, on obtient donc la relation, pour tout entier j, k,

$$(2.3) \qquad g_{j+p}^{(k)} = \sum_{h=0}^{j+p}\sum_{l=0}^{k} f_h^{(l)} q_{j+p-h}^{(k-l)},$$

avec, d'après (1.1), $f_h^{(0)} = 0$ si $h < p$. Nous allons voir que ces relations nous suffisent pour estimer la croissance de tous les polynômes $q_j^{(k)}$ sur un voisinage compact de l'origine bien choisi.

Par hypothèse, les séries f et g appartiennent à $\mathbb{K}[[X]](M)$. On applique le lemme précédent. Il existe donc des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que l'on ait, pour tout entier j, k,

$$(2.4) \qquad \sup_{|x'|=1} |f_j^{(k)}| \leq C_1 C_2^{j+k} M_{j+k} \text{ et } \sup_{|x'|=1} |g_j^{(k)}| \leq C_1 C_2^{j+k} M_{j+k}.$$

Soit C_5 une constante positive. Quitte alors à choisir un compact K assez petit au voisinage de l'origine, on peut supposer, comme p est un entier fixé,

$$|f_h^{(l)}|_K \leq C_5^{-l}, \text{ si } l+h \leq p,\ h \neq p, \tag{2.5}$$

en notant toujours $\sup_K |.| = |.|_K$. On montre alors qu'il existe des constantes C_3 et C_4 strictement positives telles que, pour tout entier j, k, on ait

$$|q_j^{(k)}|_K \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+[\alpha k]}. \tag{2.6}$$

On fait une démonstration par récurrence sur la quantité $t = j + (p+1)k$. Pour $t = 0$, $j = 0$, $k = 0$ et l'hypothèse de récurrence est trivialement vérifiée. Soit t un entier; on suppose la propriété vraie pour tout polynôme $q_j^{(k)}$ tel que $j + (p+1)k < t$. La relation (2.3) donne

$$g_{j+p}^{(k)} = q_j^{(k)} + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\leq p;\\ (l,h)\neq(0,p)}}^{k} f_h^{(l)} q_{j+p-h}^{(k-l)} + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k} f_h^{(l)} q_{j+p-h}^{(k-l)}. \tag{2.7}$$

Dans les doubles sommes de la dernière égalité, il faut remarquer

$$j + p - h + (p+1)(k-l) < j + (p+1)k. \tag{2.8}$$

En effet, on a $j+p-h+(p+1)(k-l) = j+(p+1)k+p-h-(p+1)l$. Or, si l est non nul, on a clairement $p - h - (p+1)l < 0$, l'inégalité (2.8) est alors triviale. Si l est nul, par hypothèse on a $h > p$. On obtient ainsi l'inégalité (2.8). Par conséquent, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux polynômes $q_{j+p-h}^{(k-l)}$ des doubles sommes de l'égalité (2.7). On a donc

$$|q_j^{(k)}|_K \leq |g_{j+p}^{(k)}|_K + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=1;\\ h+l\leq p}}^{k} |f_h^{(l)}|_K |q_{j+p-h}^{(k-l)}|_K + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k} |f_h^{(l)}|_K |q_{j+p-h}^{(k-l)}|_K. \tag{2.9}$$

En tenant compte des inégalités (2.4), (2.5) et de l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_K |q_j^{(k)}| \quad &\leq \quad C_1 C_2^{j+p+k} M_{j+p+k} + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=1;\\ h+l\leq p}}^{k} C_5^{-l} C_3 C_4^{j+p+k-h-l} M_{j+p-h+[\alpha(k-l)]} \\ &\quad + \sum_{h=0}^{j+p} \sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k} C_1 C_2^{h+l} M_{h+l} C_3 C_4^{j+p-h+k-l} M_{j+p-h+[\alpha(k-l)]}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

D'une part, en tenant compte de l'hypothèse (H_2) sur la suite M, on a les majorations données en (1.11) et (1.12). En tenant alors compte des inégalités (1.11), (1.12) et de l'hypothèse (H_1), l'inégalité (2.10) donne

$$
\begin{aligned}
|q_j^{(k)}|_K \quad \leq \quad & C_1(C_2C^p)^{j+k}C_2^pC^{\frac{p(p+1)}{2}}M_{j+k} \\
& +\sum_{h=0}^{j+p}\sum_{\substack{l=1;\\ h+l\leq p}}^{k} C_5^{-l}C_3C_4^{j+p+k-h-l}M_{[j+\alpha k+p-h-\alpha l]} \\
& +C_1C^{\frac{-p(p-1)}{2}}C_4^{p+j+k}C_3\sum_{h=0}^{j+p}\sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k}\left(\frac{C_2C^p}{C_4}\right)^{h+l}M_{[j+\alpha k-(\alpha-1)l]}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

On choisit alors

$$\alpha = \max\{c \text{ tel que } p-h-cl=0 \text{ pour } h+l\leq p,\ l\neq 0 \text{ et } f_h^{(l)}\neq 0\}. \tag{2.12}$$

Ainsi, dans la première double somme du membre de droite de l'inégalité (2.11), on majore $M_{[j+\alpha k+p-h-\alpha l]}$ par $M_{j+[\alpha k]}$. De même, dans la seconde double somme du membre de droite de l'inégalité (2.11), on a $M_{[j+\alpha k-(\alpha-1)l]}\leq M_{[j+\alpha k]}=M_{j+[\alpha k]}$. On obtient alors

$$
\begin{aligned}
|q_j^{(k)}|_K \quad \leq \quad & C_3C_4^{j+k}M_{j+[\alpha k]}\Bigg(\frac{C_1}{C_3}\left(\frac{C_2C^p}{C_4}\right)^{j+k}C_2^pC^{\frac{p(p+1)}{2}}\frac{M_{j+k}}{M_{j+[\alpha k]}} \\
& +C_4^p\sum_{h=0}^{j+p}\sum_{\substack{l=1;\\ h+l\leq p}}^{k} C_5^{-l}C_4^{-(h+l)} \\
& +C_1C^{\frac{-p(p-1)}{2}}C_4^p\sum_{h=0}^{j+p}\sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k}\left(\frac{C_2C^p}{C_4}\right)^{h+l}\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

D'une part, en suivant la même démarche que dans (1.14), on a

$$C_1C^{\frac{-p(p-1)}{2}}\sum_{h=0}^{j+p}\sum_{\substack{l=0;\\ h+l\geq p+1}}^{k}\left(\frac{C_2C^p}{C_4}\right)^{h+l}\leq C_1C^{\frac{-p(p-1)}{2}}\frac{(2C_2C^p)^{p+1}}{C_4-2C_2C^p}. \tag{2.14}$$

On choisit alors C_4 suffisamment grand tel que dans (1.15).
D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
C_4^p\sum_{h=0}^{j+p}\sum_{\substack{l=1;\\ h+l\leq p}}^{k} C_5^{-l}C_4^{-(h+l)} \quad & \leq \quad C_4^p\frac{1}{1-C_4^{-1}}\sum_{u=1}^{\infty}(C_4C_5)^{-u} \\
& \leq \quad \frac{C_4^{p+1}}{C_4-1}\frac{1}{C_4C_5-1}.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Quitte à choisir C_5 assez grand, c'est à dire quitte à avoir choisi le compact K suffisamment petit, on peut supposer

$$\frac{C_4^{p+1}}{C_4-1}\frac{1}{C_4C_5-1}<\frac{1}{3}. \tag{2.16}$$

De même, on choisit C_3 tel que

$$\frac{C_1}{C_3} C_2^p C^{\frac{p(p+1)}{2}} < \frac{1}{3}. \tag{2.17}$$

On aura alors

$$|q_j^{(k)}|_K \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+[\alpha k]}. \tag{2.18}$$

L'hypothèse de récurrence est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier j, k, on a

$$|q_j^{(k)}|_K \leq C_3 C_4^{j+k} M_{j+[\alpha k]}. \tag{2.19}$$

Ainsi, la série $q(X)$ appartient à $\mathbb{K}[[X]](M^{([\alpha]+1)})$ et la série $q(0,\ldots,X_s)$ appartient à $\mathbb{K}[[X_s]](M)$. Comme $r = g - qf$, on peut aussi affirmer que les coefficients de la série r vérifient les mêmes estimations (2.19) et que la série $r(0,\ldots,X_s)$ appartient à $\mathbb{K}[[X_s]](M)$. Enfin, pour avoir, pour tout couple (h,l) tel que $l \neq 0$ et $f_h^{(l)} \neq 0$, $p-h-cl \leq 0$, il suffit d'avoir, pour de tels couples (h,l), $p - \mathrm{ord}(f) - (c-1)l \leq 0$. En prenant $c = p - \mathrm{ord}(f) + 1$, la dernière condition est vérifiée. Ceci implique que le réel α défini dans (2.12) vérifie $\alpha \leq p - \mathrm{ord}(f) + 1$. $\diamondsuit$

Remarque : On donne un exemple de calcul de la perte α. Soit $f(X,Y) = X^3Y + XY^4 + Y^7$. La série f est régulière d'ordre 7 en Y. L'ordre de f est 4. D'après le théorème 2, on a donc $\alpha \leq 4$. Pour affiner l'estimation, on utilise la relation (2.12). On calcule donc le nombre c_1 associé au monôme X^3Y et le nombre c_2 associé au monôme XY^4. On trouve c_1 solution de l'équation $7-1-3c_1 = 0$. C'est à dire $c_1 = 2$. On trouve c_2 solution de l'équation $7-4-c_2 = 0$. C'est à dire $c_2 = 3$. D'après (2.12), on a $\alpha = \max(c_1,c_2) = 3$.

Annexe C : Un Théorème de composition précisé.

1.1 POSITION DU PROBLÈME

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant (H_1) et (H_2). Soit $F(X) = (F_1(X), \ldots, F_s(X))$ un élément de $(\mathbb{K}[[X]](M))^s$ tel que $F(0) = 0$. On pose, pour tout $i = 1, \ldots, s$,

$$d_i = \mathrm{ord}(F_i). \tag{1.1.1}$$

Soit $\mathcal{A}(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} a_J X^J$ un élément de $\mathbb{K}[[X]]$. On suppose qu'il existe une constante C_0 telle que l'on ait

$$\sup_{J\in\mathbb{N}^s} \frac{|a_J|}{M_{d_1 j_1+\ldots+d_s j_s}} \leq C_0. \tag{1.1.2}$$

Sous ces hypothèses, on montre que $\mathcal{A}\circ F$ appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$. Pour cela, on utilise la même méthode que celle développée dans la partie I. On affine, simplement, les estimations compte tenu des hypothèses sur l'application F.

On rappelle d'abord les formules de composition établies dans la partie I [I, 1.3].

1.2 NOTATIONS

Pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \ldots, p_l) \in \{1, \ldots, s\}^l$, on pose

$$D_{(p_1,\ldots,p_l)} = \frac{\partial^l}{\partial X_{p_1}\ldots\partial X_{p_l}}$$

Enfin, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la sommation indexée par le k-uplet $(q_1, \ldots, q_k)$ de $\{1, \ldots, s\}^k$ est représentée par

$$\sum_{[[q,k]]}$$

1.3 LEMME

Avec les notations précédentes, on a pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout $(p_1, \ldots, p_l)$ de $\{1, \ldots, s\}^l$:

$$D_{(p_1,\ldots,p_l)}(\mathcal{A}\circ F) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{[[q,k]]} A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)} D_{(q_1,\ldots,q_k)}(\mathcal{A})\circ F, \tag{1.3.1}$$

où les coefficients $A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}$ sont déterminés par récurrence sur l à l'aide des relations

$$A^{(p_1)}_{(q_1)} = \frac{\partial F_{q_1}}{\partial X_{p_1}},\ \textit{pour } l = 1, \tag{1.3.2}$$

puis, pour $l > 1$,

$$A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1)} = \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)}}{\partial X_{p_1}}, \tag{1.3.3}$$

$$A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)} = \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}}{\partial X_{p_1}} + A^{(p_1)}_{(q_1)} A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_k)}, \text{ pour } 2 \leq k \leq l-1, \tag{1.3.4}$$

$$A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_l)} = A^{(p_1)}_{(q_1)} A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_l)}. \tag{1.3.5}$$

1.4 NOTATIONS

On introduit alors les notations suivantes

$$A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X) = \sum_{\substack{J \in \mathbf{N}^s; \\ |J|=j}} (a^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J X^J,$$

$$\forall\ 1 \leq i \leq s \quad F_i(X) = \sum_{\substack{J \in \mathbf{N}^s; \\ |J|=j}} (f_i)_J X^J.$$

1.5 LEMME

On a, pour tous l*-uplets* $(p_1, \ldots, p_l)$ *et tous* k*-uplets* $(q_1, \ldots, q_k)$*, avec* $1 \leq k \leq l$,

$$ord(A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}) \geq d_{q_1} + \ldots + d_{q_k} - l.$$

Preuve. On démontre cette propriété par récurrence. Pour $l = 1$, on a $k = 1$. En utilisant (1.3.2) et (1.1.1), la propriété est clairement vérifiée à l'ordre 1. On suppose $l > 1$ et la propriété vraie jusqu'au rang $l - 1$. Par la relation (1.3.3), pour $k = 1$, on a

$$\operatorname{ord}(A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1)}) \geq \operatorname{ord}(A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)}) - 1 = d_{q_1} - l. \tag{1.5.1}$$

Par la relation (1.3.4), pour $2 \leq k \leq l - 1$, on a

$$\operatorname{ord}(A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}) \geq \min(\operatorname{ord}(\frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}}{\partial X_{p_1}}), \operatorname{ord}(A^{(p_1)}_{(q_1)} A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_k)})). \tag{1.5.2}$$

Or, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\operatorname{ord}(\frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}}{\partial X_{p_1}}) \geq d_{q_1} + \ldots + d_{q_k} - l \tag{1.5.3}$$

et

(1.5.4)

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(A^{(p_1)}_{(q_1)}A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_k)}) &\geq \operatorname{ord}(A^{(p_1)}_{(q_1)}) + \operatorname{ord}(A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_2,\dots,q_k)}) \\ &\geq d_{q_1} - 1 + d_{q_2} + \ldots + d_{q_k} - (l-1) = d_{q_1} + \ldots + d_{q_k} - l. \end{aligned}$$

Pour $k = l$, la vérification se fait comme dans (1.5.4). Le lemme est donc établi. ◊

1.6 LEMME

Il existe des constantes C_1 et $C_2 > 0$, avec $C_1 \geq 1$, $C_2 \geq 1$, ne dépendant que de F, telles que pour tous l-uplets $(p_1, \ldots, p_l)$, tous k-uplets $(q_1, \ldots, q_k)$ et tous multi-indices J de $\mathbb{N}^s$, on ait

$$|(a^{(p_1)}_{(q_1)})_J| \leq C_1 C_2^j M_{j-d_{q_1}+1}.$$

Preuve. D'après (1.3.2), on a la relation

$$A^{(p_1)}_{(q_1)}(X) = \frac{\partial F_{q_1}}{\partial X_{p_1}}(X). \tag{1.6.1}$$

Par hypothèse, l'ordre de $A^{(p_1)}_{(q_1)}$ est supérieur ou égal à $d_{q_1} - 1$. Puisque F appartient à $(\mathbb{K}[[X]](M))^s$, le lemme est alors une conséquence immédiate de cette relation et de l'hypothèse (H_2). ◊

1.7 LEMME

Pour tous l et k entiers, avec $1 \leq k \leq l$, tous $(p_1, \ldots, p_l)$ de $\{1, \ldots, s\}^l$, $(q_1, \ldots, q_k)$ de $\{1, \ldots, s\}^k$ et tout multi-indice J, on a

$$|(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1,\dots,q_k)})_J| \leq (C_1C_3)^l (C_2C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} M_{l+j-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})},$$

où C_3 et C_4 sont des constantes, avec $C_3 \geq 1$, $C_4 \geq 1$, ne dépendant que de s.

Preuve. Le lemme 1.5 assure que l'expression $M_{l+j-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})}$ a bien un sens. On raisonne par récurrence sur l. Pour $l = 1$, on a $k = 1$ et le lemme précédent donne l'estimation annoncée. On suppose la propriété vérifiée au rang $l-1$ et on regarde alors ce qui se passe au rang l.

Cas $k = 1$

On a, d'après (1.3.3),

$$A^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1)}(X) = \frac{\partial A^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1)}}{\partial X_{p_1}}(X), \tag{1.7.1}$$

l'inégalité

$$|(a^{(p_1,\dots,p_l)}_{(q_1)})_J| \leq |(j+1)(a^{(p_2,\dots,p_l)}_{(q_1)})_{J^{(p_1)}}|, \tag{1.7.2}$$

avec $J^{(p_1)} = (j_1, \ldots, j_{p_1-1}, j_{p_1}+1, j_{p_1+1}, \ldots, j_s)$, si $J = (j_1, \ldots, j_s)$. Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence s'écrit

$$(1.7.3) \qquad |(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1)})_{J^{(p_1)}}| \leq (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-1}\frac{(l+j-1)!}{(j+1)!}M_{l+j-d_{q_1}}.$$

On obtient bien l'estimation annoncée après multiplication par $j+1$.

<u>Cas $2 \leq k \leq l-1$</u>

D'après (1.3.4), on a la relation

$$(1.7.1') \qquad A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X) = \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)}{\partial X_{p_1}} + A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_k)}(X),$$

On a donc à évaluer une somme de deux termes. L'estimation du premier terme est immédiate. En effet, si on note

$$(1.7.2') \qquad \frac{\partial A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)}(X)}{\partial X_{p_1}} = \sum_{J\in\mathbf{N}^s}(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J X^J,$$

on obtient aisément l'inégalité

$$(1.7.3') \qquad |(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (j+1)|(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_{J^{(p_1)}}|.$$

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence au coefficient $(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_{J^{(p_1)}}$, on obtient l'estimation

$$(1.7.4') \qquad |(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (j+1)(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{(j+1)!}M_{l+j-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})}.$$

On obtient donc l'estimation

$$(1.7.5') \qquad |(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}M_{l+j-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})}.$$

L'estimation du second terme est moins triviale. Il faut remarquer qu'un terme $(c^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J$ provenant du produit $A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_k)}(X)$ s'écrit

$$(1.7.6') \qquad (c^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J = \sum_{H+I=J}(a^{(p_1)}_{(q_1)})_H(a^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_k)})_I.$$

Et donc, compte tenu de l'hypothèse de récurrence et du lemme 1.5, on a
(1.7.7′)

$$|(c^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq \sum_{H+I=J} C_1C_2^h(C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+i-k}\frac{(l+i-k)!}{i!}M_{h-d_{q_1}+1}M_{l-1+i-d_{q_2}-\ldots-d_{q_k}}.$$

La convexité logarithmique de la suite M implique

$$(1.7.8') \qquad M_{h-d_{q_1}+1}M_{l-1+i-d_{q_2}-\ldots-d_{q_k}} \leq M_{l+i+h-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})}.$$

En utilisant (1.7.8') et en remarquant que, pour tout $i \leq j$,

$$(1.7.9') \qquad \frac{(l+i-k)!}{i!} \leq \frac{(l+j-k)!}{j!},$$

on obtient l'estimation

$$(1.7.10') \qquad |(c^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq C_1^l C_3^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}M_{l+j-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})}\sum_{H+I=J}C_4^{-h}.$$

En remarquant alors que l'équation $h_1+h_2+\ldots+h_s=h$ a $\binom{s+h-1}{h}$ solutions entières, la série $\sum_{H+I=J}C_4^{-h}$ devient $\sum_{h=0}^{j}\binom{s+h-1}{h}C_4^{-h}$. En remarquant alors que $\binom{s+h-1}{h} \leq s^h$, on choisit C_4 suffisamment grand pour que la série $\sum_{h=0}^{+\infty}s^hC_4^{-h}$ converge. Il vient donc, si on appelle C_5 cette somme,

$$(1.7.11') \qquad |(b^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq C_1^l C_3^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}M_{l+j-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})}C_5.$$

On obtient en sommant les deux estimations (1.7.5') et (1.7.11')

$$(1.7.12') \qquad |(a^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_J| \leq (C_1C_3)^{l-1}(C_2C_4)^{l+j-k}\frac{(l+j-k)!}{j!}M_{l+j-(d_{q_1}+\ldots+d_{q_k})}(1+C_1C_5).$$

En choisissant alors C_3 telle que $C_1C_3 = 1+C_1C_5$, l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang l.

Cas $k=l$

En remarquant que

$$(1.7.1'') \qquad A^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_l)}(X) = A^{(p_1)}_{(q_1)}(X)A^{(p_2,\ldots,p_l)}_{(q_2,\ldots,q_l)}(X),$$

l'estimation s'obtient de manière analogue à celle du second terme du cas précédent. $\diamondsuit$

1.8 THÉORÈME

Soient $M=\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1) et (H_2). Soit $F(X_1,\ldots,X_s)=(F_1(X),\ldots,F_s(X))$ dans $(\mathbb{K}[[X]](M))^s$ tel que $F(0)=0$. On pose, pour tout $i=1,\ldots,s$, $d_i=ord(F_i)$. Soit $\mathcal{A}(X)=\sum_{J\in\mathbf{N}^s}a_JX^J$ un élément de $\mathbb{K}[[X]]$ vérifiant (1.1.2). Alors la série $\mathcal{A}\circ F$ appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$.

Preuve. D'après (1.3.1), si on note $\mathcal{A}\circ F(X) = \sum_{\substack{J\in\mathbf{N}^s;\\ |J|=j}}\alpha_JX^J$, on a la relation

$$(1.8.1) \qquad |l_1!\ldots l_s!\alpha_{l_1,\ldots,l_s}| \leq |\sum_{k=1}^{l}\sum_{[[q,k]]}(a^{(p_1,\ldots,p_l)}_{(q_1,\ldots,q_k)})_0 a_{(q_1,\ldots,q_k)}k!|.$$

On obtient, en utilisant les estimations du lemme 1.7 et (1.1.2),
(1.8.2)

$$|l_1! \dots l_s! \alpha_{l_1,\dots,l_s}| \leq \sum_{k=1}^{l} \sum_{[[q,k]]} (C_1C_3)^l (C_2C_4)^{l-k} (l-k)!k! M_{l-(d_{q_1}+\dots+d_{q_k})} C_0 M_{d_{q_1}+\dots+d_{q_k}}.$$

Ainsi, en tenant compte de la convexité logarithmique da la suite M, de l'inégalité triviale $(l-k)!k! \leq l!$ et en majorant le nombre de termes de la double somme par $(2s)^l$, on a

$$|l_1! \dots l_s! \alpha_{l_1,\dots,l_s}| \leq l!(2sC_1C_2C_3C_4)^l C_0 M_l. \tag{1.8.3}$$

Enfin, on obtient le résultat voulu en remarquant que $\dfrac{l!}{l_1! \dots l_s!} \leq (2^{s-1})^l$. ♢

Annexe D : Détails des calculs des exemples de la partie II.

1. L'EXEMPLE 3.5

On considére les séries formelles

$$g(X,Y)=\sum_{n=0}^{\infty} M_{2n}X^nY^n \text{ et } f(X,Y)=X+Y^2.$$

1.1 On montre d'abord la relation

$$g(X,Y)=f(X,Y)q_1(X,Y)+r_1(X,Y),$$

avec

$$q_1(X,Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2(n+k)}X^nY^{n+3k-2} \text{ et } r_1(X,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nM_{2n}Y^{3n}.$$

On a

$$\begin{aligned}
&(X+Y^2)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2(n+k)}X^nY^{n+3k-2}\\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2(n+k)}X^{n+1}Y^{n+3k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+2k}X^nY^{n+3k}\\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+2k-2}X^nY^{n+3k-3}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+2k}X^nY^{n+3k}\\
=\ &\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k}M_{2n+2k}X^nY^{n+3k}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+2k}X^nY^{n+3k}\\
=\ &\sum_{n=1}^{\infty}M_{2n}X^nY^n+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2k}Y^{3k}.
\end{aligned}$$

On en déduit aisément la relation cherchée.

1.2 On montre ensuite la relation

$$g(X,Y)=f(X,Y)q_2(X,Y)+r_2(X,Y),$$

avec

$$q_2(X,Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k}X^{n+3k-1}Y^n$$

et

$$r_2(X,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(M_{4n}X^{3n}+M_{4n+2}X^{3n+1}Y).$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned}
&(X+Y^2)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k}X^{n+3k-1}Y^n \\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k}X^{n+3k}Y^n+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k}X^{n+3k-1}Y^{n+2} \\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k}X^{n+3k}Y^n+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k-4}X^{n+3k-3}Y^{n} \\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{2n+4k}X^{n+3k}Y^n+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{k}M_{2n+4k}X^{n+3k}Y^{n} \\
=\ &\sum_{n=2}^{\infty}M_{2n}X^nY^n+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{4k}X^{3k}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}M_{4k+2}X^{3k+1}Y.
\end{aligned}$$

On en déduit aisément la relation cherchée.

2. L'EXEMPLE 4.10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tels que

$$u_0=0,\ u_p=0 \text{ pour tout entier } p\not\equiv 0[6] \text{ et } u_{6n}=M_{6n}.$$

On pose alors $g(X,Y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}X^nY^n$.

2.1 On montre d'abord la relation

$$\begin{aligned}
g(X,Y) &= (X^2+Y^3)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k-2}Y^n\Big) \\
&\quad +X^5\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_{6k}X^{5(k-1)}\Big).
\end{aligned}\tag{4.10.1}$$

On a

$$\begin{aligned}
Y^3\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k-2}Y^n\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k-2}Y^{n+3} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k-6}X^{n+5k-5}Y^{n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{k}u_{2n+6k}X^{n+5k}Y^{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}(X^2+Y^3)(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k-2}Y^n) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k}Y^n\\ &\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{k}u_{2n+6k}X^{n+5k}Y^n\\ &= \sum_{n=3}^{\infty}u_{2n}X^nY^n+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{6k}X^{5k}.\end{aligned}$$

On en déduit aisément, en utilisant la forme de la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+6k}X^{n+5k-2}Y^n)+X^5(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}u_{6k}X^{5(k-1)} &= \sum_{n=3}^{\infty}u_{2n}X^nY^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}u_{2n}X^nY^n.\end{aligned}$$

2.2 On montre ensuite la relation

$$\begin{aligned}g(X,Y) &= (X^2+Y^3)(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k-3})\\ &\quad+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(u_{4k}Y^{5k}+u_{4k+2}XY^{5k+1}).\end{aligned}\tag{4.10.4}$$

On a

$$\begin{aligned}&(X^2+Y^3)(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k-3})\\ =\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^{n+2}Y^{n+5k-3}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k}\\ =\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k-4}X^nY^{n+5k-5}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k}\\ =\ &\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{k}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{2n+4k}X^nY^{n+5k}\\ =\ &\sum_{n=2}^{\infty}u_{2n}X^nY^n+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(u_{4k}Y^{5k}+u_{4k+2}XY^{5k+1}).\end{aligned}$$

En tenant compte de la forme de la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, on en déduit alors la relation (4.10.4).

La relation (4.10.8) n'est qu'un réarrangement de (4.10.4).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Ar] M. Artin *On the solutions of analytic equations.* Invent. Math. 5 (1968), 277-291.

[AHV] J.M. Aroca, H. Hironaka & J.L. Vicente *The theory of the maximal contact.* Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan, N. 19 (1975).

[BM] E. Bierstone & P. Milman *The local geometry of analytic mappings.* Università Di Pisa, (1988).

[Bo] N. Bourbaki *Algèbre commutative.* Fasc. XXVIII, Chap. 3, Hermann (1961).

[Br] J. Briançon *Weierstrass préparé à la Hironaka.* Singularités à Cargèse, Astérisque 7 et 8 (1973).

[Ca] H. Cartan *Calcul Différentiel.* Hermann-Paris (1967).

[CC1] J. Chaumat & A. M. Chollet *Sur la composition de certaines séries formelles.* Pub. IRMA, Lille 41 (1997), XII.

[CC2] J. Chaumat & A. M. Chollet *Caractérisation des anneaux noethériens de séries formelles à croissance contrôlée. Application à la synthèse spectrale.* Publicacions Matemàtiques 41 (1997), 545-561.

[CC3] J. Chaumat & A. M. Chollet *Théorèmes de préparation dans des classes ultra-différentiables.* Math. Z. 226 (1997), 631-679.

[CC4] J. Chaumat & A. M. Chollet *Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes.* Bull. Sci. Math. 122 (1998), 455-485.

[CLO] D. Cox, J. Little & D. O'Shea *Ideals, Varieties and Algorithms.* Springer Verlag, Berlin (1992).

[DT] M. Derridj & D. S. Tartakoff *Global analyticity for $\Box_b$ on three-dimensional pseudoconvex CR manifolds.* Comm. in P.D.E. 18 (1993), 1847-1868.

[Dy] E. M. Dynkin *Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale.* Amer. Math. Soc. Transl. 115 (1980), 33-58.

[EH] P.M. Eakin & G.A. Harris *When $\Phi(f)$ convergent implies f is convergent.* Math. Ann. 229 (1977), 201-210.

[Ga] A. M. Gabrielov *Formal Relations Between Analytic Functions.* Math. USSR. Isvetija 7 (1973), 1056-1088.

[GR] H. Grauert & R. Remmert *Analytische Stellenalgebren.* Springer Verlag, Berlin (1971).

[Mai] E. Maillet *Sur les séries divergentes et les équations différentielles.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 (1903), 487-518.

[Mal] B. Malgrange *Ideals of differentiable functions.* Oxford University Press, (1966).

[Mo] A. Mouze *Un théorème d'Artin pour des anneaux de séries formelles à croissance* *contrôlée.* C. R. Acad. Sci., Paris, 330 (2000), 15-20.

[MT] R. Moussu & J. C. Tougeron *Fonctions composées analytiques et différentiables.* C. R. Acad. Sci., Paris, 282 (1976), 1237-1240.

[Pł1] A. Płoski *Note on a theorem of M.Artin.* Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Math. 22 (1974), 1107-1109.

[Pł2] A. Płoski *Remarque sur le lemme de Hensel.* Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Math. 28 (1980), 115-116.

[R] J. M. Ruiz *The basic theory of power series rings.* Advanced Lectures in Mathematics.

[Th] V. Thilliez *Sur les fonctions composées différentiables.* J. Math. Pures Appl. (1997), 499-524.

[To] J. C. Tougeron *Idéaux de fonctions différentiables.* Springer Verlag, Berlin (1972).

[Z1] M. A. Zurro *Series y funciones Gevrey en varias variables.* Ph. D. Thesis, University of Valladolid, Spain (1994).

[Z2] M. A. Zurro *On the rings of formal solutions of polynomial differential equations.* Banach Center Publications, Vol. 44 (1998).

♢

Résumé. Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs logarithmiquement convexe. On étudie les sous-anneaux Γ_M de l'anneau des séries formelles en s variables dont la croissance des coefficients est contrôlée par la suite M. Sous de faibles hypothèses sur M, on obtient, tout d'abord, des théorèmes de composition. On apporte, par exemple, une réponse à la question suivante. Étant donnée une application F dans $(\Gamma_M)^s$, si $\mathcal{A} \circ F$ appartient à Γ_M, à quelle classe Γ_N la série $\mathcal{A}$ appartient-elle? On établit ensuite quelques propriétés algébriques de ces anneaux. On montre qu'étant donné un bon ordre sur $\mathbb{N}^s$, on peut diviser dans Γ_M toute série par une famille finie $f_1, \ldots, f_p$ telle que les quotients et le reste appartiennent encore à Γ_M. Cela permet d'aborder des problèmes comme la division modulo un idéal, la noetherianité ou la platitude. On obtient aussi des théorèmes de préparation du type Malgrange. On étend également le célèbre théorème d'approximation d'Artin.

Rings of formal power series defined by the growth of coefficients

Abstract. Given a sequence $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of real positive numbers logarithmically convex, we study subrings Γ_M of the ring of formal power series in s variables whose coefficients satisfy growth conditions with respect to M. Under very few restrictive conditions on M, we get in these rings composition theorems. We study the following problem. Given F in $(\Gamma_M)^s$, if $\mathcal{A} \circ F$ belongs to Γ_M, which Γ_N does the series $\mathcal{A}$ belong to ? We also prove that, given a good order on $\mathbb{N}^s$, we can divide any series in Γ_M by a finite family of series $f_1, \ldots, f_p$ in such a way that the quotients and the remainder belong to Γ_M. Then we discuss algebraic properties of Γ_M as division properties modulo an ideal, noetherianity and flatness. We get preparation theorems of Malgrange type in these rings. We also prove a version of Artin's theorem.