

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1
Institut de Physique Nucléaire de Lyon

Mémoire de thèse
pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Claude Bernard - Lyon 1
Spécialité : Physique
au titre de l'École doctorale de Physique et Astrophysique fondamentale Rhône-Alpes

présentée et soutenue publiquement le 05 décembre 2005
par M. Matthieu LEFRANÇOIS

**Théories des champs
topologiques et mécanique
quantique en espace
non-commutatif**

Devant la commission d'examen formée de :
M. François DELDUC
M. François GIERES (directeur de thèse)
M. Maurice KIBLER
M. Nicola MAGGIORE (rapporteur)
M. Manfred SCHWEDA (rapporteur)
M. Frank THUILLIER

Table des matières

Introduction		7
Préliminaires		11
1	Théories de jauge	11
1.1	Groupe de jauge abélien	11
1.2	Groupe de jauge non abélien	12
2	Formes différentielles	12
2.1	Produit extérieur	13
2.2	Définition des formes différentielles	13
2.3	Dérivée extérieure	14
2.4	Champs de vecteurs, produit intérieur et dérivée de Lie	14
3	Quantification et formalisme BRST	15
3.1	Propagateur et invariance de jauge	15
3.2	Le formalisme de Becchi, Rouet, Stora et Tyutin	15
A	Théories des champs topologiques et symétries	19
1	Généralités sur les théories topologiques et sur le superspace	21
1.1	La topologie en théorie des champs	21
1.1.1	Le monopôle magnétique de Dirac et sa généralisation au monopôle de 't Hooft et Polyakov	22
1.1.2	L'effet d'Aharonov et Bohm	23
1.1.3	L'instanton	26
1.2	Qu'est-ce qu'une théorie topologique ?	27
1.2.1	Théories topologiques de type Schwarz	27
1.2.2	Théories topologiques de type Witten	28

1.2.3	Le twist topologique	28
1.3	Étude des symétries des théories topologiques	29
1.3.1	Introduction	29
1.3.2	Le superespace	29
1.3.3	Degré de forme et degré total	31
2	Théorie de Yang-Mills topologique	33
2.1	Différences entre Yang-Mills ordinaire et Yang-Mills topologique . . .	34
2.1.1	Rappel sur la théorie de Yang-Mills ordinaire	34
2.1.2	Action de Yang-Mills topologique	34
2.2	Symétries et lois de transformation	35
2.2.1	Formulation générale dans le superespace	35
2.2.2	Superjauge de Wess et Zumino	38
2.2.3	Comparaison avec d'autres approches	38
2.2.4	Réécriture des symétries sous la forme d'un seul opérateur . .	39
2.3	Cohomologie équivariante en jauge de Wess et Zumino	39
2.3.1	Observables de Donaldson et Witten	40
2.3.2	Définition de la cohomologie équivariante	40
2.3.3	Formulations alternatives de la cohomologie équivariante . . .	41
2.4	Cohomologie dans la superjauge générale	42
2.4.1	Cohomologie équivariante	42
2.4.2	Équations de descente	43
2.4.3	Étude de la contrainte de supersymétrie	43
2.4.4	Équations de bi-descente	45
2.5	Résolution des équations de bi-descente	47
2.5.1	Remarque préliminaire	47
2.5.2	Équations de superdescente	47
2.5.3	Solutions générales des équations de bi-descente	50
2.6	Applications et développements explicites	51
2.6.1	Représentation graphique des équations de bi-descente	51
2.6.2	Exemples d'observables	52
2.7	Résumé	55

	3
3 Approche d'une théorie topologique de la gravité	57
3.1 Les différents formalismes de la relativité générale	58
3.1.1 Formalisme métrique	58
3.1.2 Formalisme du premier ordre	58
3.1.3 Formalisme du second ordre	59
3.2 Les précédentes formulations de la gravité topologique	59
3.2.1 Formalisme du premier ordre	59
3.2.2 Approche métrique	63
3.3 Champs et symétries dans le superspace	63
3.3.1 Formulation générale	63
3.3.2 Algèbre des transformations BRST	64
3.4 Réduction à la jauge de Wess et Zumino	66
3.4.1 Conditions de jauge	66
3.4.2 Algèbre BRST dans la jauge de Wess et Zumino	67
3.4.3 Autre approche	68
3.4.4 Remarques sur les différentes approches	69
3.5 Détermination des observables	70
3.5.1 Observables dans le formalisme d'horizontalité	70
3.5.2 Observables dans le formalisme de superspace	74
3.6 Remarques sur la fixation de jauge	74
3.7 Résumé	75
B Mécanique quantique et géométrie non-commutative	77
1 Vivre en espace non-commutatif?	79
1.1 Rappel sur le système de Landau en mécanique quantique	80
1.2 Algèbre non-commutative en dimension quelconque	81
1.3 Algèbre non-commutative en dimension 2	82
1.3.1 Notations	82
1.3.2 Représentations	83
1.4 Représentations de l'algèbre non-commutative en dimension quel- conque	87

1.5	Non-commutativité positionnelle et produit-étoile	88
1.6	Conséquences pour la théorie quantique	89
2	Mécanique quantique en espace non-commutatif	91
2.1	Potentiel scalaire	91
2.2	Le système de Landau	92
2.3	Le système de Landau avec potentiel harmonique	93
2.3.1	Cas général	93
2.3.2	Cas où $\phi_1 = \phi_2 = 0$	94
2.4	Le système de Landau avec potentiel central	96
2.5	Variétés non triviales	97
3	Mécanique quantique supersymétrique en espace non-commutatif	99
3.1	Supersymétrie en mécanique quantique ordinaire	99
3.1.1	Principales définitions	99
3.1.2	Forme explicite d'un système supersymétrique	100
3.2	Supersymétrie en espace non-commutatif	101
3.2.1	Généralités sur les systèmes quantiques en espace non-commutatif	101
3.2.2	Hamiltoniens supersymétriques en espace non-commutatif . .	102
3.2.3	Application : Oscillateur harmonique en espace non-commutatif	102
	Conclusion	105
	Bibliographie	107
A	Démonstrations des principaux théorèmes	115
A.1	Cohomologie de Q modulo d	115
A.2	Équations de bi-descente	117
A.3	Solutions générales des équations de bi-descente	118
A.3.1	Énoncé de la proposition	118
A.3.2	Superformes tronquées	119

B	Approche métrique	127
B.1	Notations générales	127
B.2	Algèbre des transformations BRST	127
B.3	Conditions d'horizontalité	128
B.4	Comparaison avec le formalisme de second ordre	130
B.5	Observables	130
B.5.1	Cas de la dimension $d = 2$	131
B.5.2	Cas de la dimension $d = 4$	132

Introduction

Au début du XX^{ème} siècle, la physique a subi deux révolutions majeures et pourtant incompatibles (du moins jusqu'à maintenant) : la théorie de la relativité générale et la théorie quantique. Si la première est l'oeuvre d'Albert Einstein, la deuxième a connu son essor grâce aux travaux de Planck, Bohr, Schrödinger, Heisenberg et bon nombre d'autres. Ces deux théories ont profondément changé notre manière d'appréhender le monde qui nous entoure.

La théorie de la relativité restreinte en 1905 et la théorie de la relativité générale en 1915 sonnent définitivement le glas de la vision classique du temps absolu en mécanique. Non seulement il convient désormais de parler d'espace-temps (le temps devient une variable dépendant du choix du repère au même titre que les coordonnées d'espace) mais on abandonne aussi la notion de gravitation en tant que force. La gravitation ne résulte désormais que de la déformation de l'espace, déformation due à la présence de matière.

La mécanique quantique et plus généralement, la théorie quantique des champs, mettent fin à la notion de particule ponctuelle de la mécanique classique. La dualité onde-corpuscule, la notion de fonction d'onde et de probabilité de présence ont modifié la perception intuitive des phénomènes physiques, l'exemple le plus célèbre étant vraisemblablement le chat de Schrödinger.

On distingue quatre interactions fondamentales : l'interaction forte (responsable de la cohésion entre les constituants des noyaux atomiques), l'interaction faible (responsable de la désintégration β), l'interaction électromagnétique (l'unification de l'électricité et du magnétisme effectuée par Maxwell au XIX^{ème} siècle) et la gravitation. La dernière mise à part, les trois autres sont regroupées au sein du Modèle Standard de la physique des particules. Ce modèle décrit les constituants élémentaires de la matière organisés qui sont des fermions (quarks, électrons, neutrinos ...) et leurs interactions dont les particules vecteurs sont des bosons (photon, gluon, W , Z).

Pourtant, un problème demeure : comment unifier au sein d'une même théorie Modèle Standard et relativité générale ? Alors que chacun de ces modèles a été largement vérifié expérimentalement dans ses domaines de validité, il n'existe toutefois aucune théorie quantique de la gravité. Le manque d'une théorie de la grande unification englobant la gravitation est l'un des problèmes majeurs de la physique moderne. Il paraît évident que le Modèle Standard n'est qu'un modèle effectif et ne peut pas tout expliquer. C'est pourquoi on a cherché à développer des théories au-delà du Modèle Standard : modèles supersymétriques, modèles avec dimensions supplémentaires, théorie des cordes, théorie \mathcal{M} ...

Toutes ces approches font intervenir ou donnent lieu à de nouveaux concepts ou outils. Parmi ces idées, nous allons nous intéresser dans la suite à deux notions *a priori* complètement différentes (même s'il est possible d'établir des ponts reliant l'une à l'autre) : les théories topologiques des champs et la mécanique quantique en espace non-commutatif. Les théories topologiques constituent une classe de théories des champs aux propriétés très particulières : leurs observables sont des invariants topologiques, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la forme globale de l'espace. Le cas d'école de ces théories est la théorie de Yang-Mills topologique mais des modèles plus complexes ont été étudiés, en particulier la gravité topologique. L'idée ici est de voir la théorie usuelle de la gravitation comme une théorie effective de basse énergie pouvant émerger d'une théorie topologique par un mécanisme de brisure de symétrie. Les théories en espace non-commutatif sont, paradoxalement, relativement anciennes (l'idée remonte aux travaux de H.S Snyder en 1947) mais l'intérêt actuel résulte avant tout de leur apparition dans le cadre de la théorie des cordes et de la gravité quantique. Une telle théorie doit, à très petite échelle, prendre en compte les fluctuations quantiques de la matière, c'est pourquoi on cherche à discrétiser l'espace-temps en petites cellules (et abandonner la notion de point). En mécanique quantique, les inégalités d'Heisenberg interdisent de connaître simultanément la position et la vitesse d'une particule (la mesure de l'une entraînant une perturbation inévitable du système). De manière similaire, sur un espace non-commutatif, il est impossible de mesurer simultanément toutes les coordonnées d'un point d'espace-temps et donc de connaître précisément sa position.

J'ai choisi de faire une distinction franche entre ces deux sujets de recherche. C'est pourquoi j'ai scindé le manuscrit en deux parties totalement indépendantes.

Dans un premier chapitre consacré aux préliminaires, j'ai donné une présentation succincte de quelques outils qui sont appliqués dans la suite : théories de jauge, formalisme des formes différentielles et méthode de quantification à la BRST.

La première partie est consacrée à l'étude des théories des champs topologiques et de leurs symétries. Mon travail de recherche s'est focalisé sur le développement d'une approche dans le superspace et sur un formalisme général de détermination des observables. Le premier chapitre présente quelques exemples de l'implication de la topologie en théorie quantique des champs ainsi que des définitions et relations utiles sur les théories topologiques et le superspace.

Deux exemples particuliers sont ensuite traités dans les chapitres 2 et 3 : la théorie de Yang-Mills topologique et la gravité topologique.

Dans la dernière partie, je me suis intéressé ensuite au cas de la mécanique quantique en espace non-commutatif, et plus spécifiquement de la mécanique quantique supersymétrique. Je présente les différentes algèbres de commutateurs qui généralisent l'algèbre de Heisenberg à un espace non-commutatif et m'attache à deux cas particuliers : l'oscillateur harmonique supersymétrique et le système de Landau (particule dans un champ magnétique constant uniforme).

Le travail sur les théories de Yang-Mills topologiques a donné lieu à l'article

« Observables in topological Yang-Mills theories », J.L. Boldo, C.P. Constantinidis, F.

Gieres, M. Lefrançois et O. Piguet, **Int.J.Mod.Phys A19, 2971** (2004) (hep-th/0303053)

dont les principaux résultats ont été présentés d'une manière légèrement différente dans

« Topological Yang-Mills theories and their observables : a superspace approach », J.L. Boldo, C.P. Constantinidis, F. Gieres, M. Lefrançois et O. Piguet, **Int.J.Mod.Phys.A18, 2119** (2003) (hep-th/0303084),

et dans

« Observables in topological theories : a superspace formulation », J.L. Boldo, C.P. Constantinidis, F. Gieres, M. Lefrançois et O. Piguet, **Nucl.Phys.Proc.Suppl.127, 30** (2004) (hep-th/0408112).

Le travail sur la gravité topologique a fait l'objet de la publication

« Symmetries and observables in topological gravity », C.P. Constantinidis, A. Deandrea, F. Gieres, M. Lefrançois et O. Piguet, **Class.Quant.Grav.21, 3515** (2004) (gr-qc/0402036).

L'étude de la mécanique quantique en espace non-commutatif est en cours de finition et fera l'objet de l'article

« Quantum mechanics on noncommutative space », Q. Duret, F. Gieres et M. Lefrançois, en préparation.

Préliminaires

Ce chapitre constitue une introduction succincte aux principales notions physiques et mathématiques utilisées dans la suite du manuscrit. Si le spécialiste n'y trouvera rien d'autre que ce qu'il connaît déjà, cela permet au moins de définir le contexte dans lequel s'est placé mon travail et de définir les notations et conventions utilisées.

1 Théories de jauge

Les interactions électro-faible et forte sont décrites par des théories de jauge. Ces théories représentent des systèmes physiques qui sont invariants sous des symétries locales paramétrées par des groupes de Lie.

1.1 Groupe de jauge abélien

La plus simple des théories de jauge consiste à prendre un groupe de Lie abélien. Le point de départ est un lagrangien pour un champ de matière ϕ de charge q . Ce lagrangien est invariant sous une transformation de ϕ par un facteur de phase $e^{iq\theta}$. Si l'on cherche à rendre ce θ local, c'est-à-dire à en faire une fonction $\theta(x)$ dépendante des points d'espace-temps, on obtient la théorie $U(1)$ de l'électromagnétisme. On définit alors une connexion, c'est-à-dire un champ vectoriel A_μ à valeurs réelles.¹ Cette connexion donne lieu à un tenseur de champ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1)$$

Le champ ϕ se transforme selon

$$\phi \longrightarrow e^{iq\theta(x)}\phi \quad (2)$$

et la connexion selon

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta. \quad (3)$$

La dérivée $\partial_\mu\phi$ de ϕ n'est pas invariante sous cette transformation de jauge, contrairement à la dérivée covariante

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi. \quad (4)$$

¹pour l'électromagnétisme, $(A_\mu) = (\phi, \vec{A})$ où ϕ est le potentiel électrique et \vec{A} le potentiel vecteur.

La dynamique du champ électromagnétique est décrite par le lagrangien quadratique $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Si on dérive les équations de Lagrange pour A_μ , on trouve deux des équations de Maxwell dans le vide,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (5)$$

autrement dit, en termes de \vec{E} et \vec{B} ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0}. \quad (6)$$

Les deux autres équations se retrouvent à partir de l'identité de Bianchi vérifiée par $F_{\mu\nu}$,

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0, \quad (7)$$

que l'on peut réécrire comme

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}. \quad (8)$$

1.2 Groupe de jauge non abélien

Plus généralement, on s'intéressera à des groupes de jauge non nécessairement abéliens, par exemple, le Modèle Standard fait intervenir les groupes $SU(3)$ (interaction forte) et $SU(2)$ (interaction faible). Si l'on peut toujours définir une connexion, celle-ci prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie et on peut la décomposer sur une base (T_a) de l'algèbre

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \quad \text{avec} \quad [T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c. \quad (9)$$

Le tenseur de champ prend la forme générale (g est la constante de couplage)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu], \quad (10)$$

et le lagrangien s'écrit $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$.

2 Formes différentielles

L'intérêt d'introduire des formes différentielles sur une variété est de simplifier le formalisme mathématique mais aussi de proposer une notation indépendante du choix du système de coordonnées $(x^\mu)_{\mu=1,\dots,d}$ sur la variété étudiée.

2.1 Produit extérieur

Le produit extérieur \wedge correspond à l'antisymétrisation du produit tensoriel \otimes de deux différentielles :

$$\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu = \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu - \mathbf{d}x^\nu \otimes \mathbf{d}x^\mu. \quad (11)$$

Propriétés :

$$\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu = -\mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu;$$

$$\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\mu = 0.$$

De la même manière, on définira les produits extérieurs pour p différentielles ($p \geq 3$). Par exemple, pour $p = 3$, on aura

$$\begin{aligned} \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\rho &= \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu \otimes \mathbf{d}x^\rho + \mathbf{d}x^\nu \otimes \mathbf{d}x^\rho \otimes \mathbf{d}x^\mu + \mathbf{d}x^\rho \otimes \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu \\ &\quad - \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\rho \otimes \mathbf{d}x^\nu - \mathbf{d}x^\rho \otimes \mathbf{d}x^\nu \otimes \mathbf{d}x^\mu - \mathbf{d}x^\nu \otimes \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\rho. \end{aligned} \quad (12)$$

Dans la suite, on omettra le plus souvent le symbole \wedge , la notation $\mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu$ étant alors à comprendre dans le sens d'un produit extérieur.

2.2 Définition des formes différentielles

À l'aide du produit extérieur, on peut définir des p -formes différentielles ou formes différentielles de degré p ($p \geq 0$) :

$$\begin{aligned} \text{degré 0 :} & \quad \omega_0 = \omega \\ \text{degré 1 :} & \quad \omega_1 = \omega_\mu \mathbf{d}x^\mu \\ \text{degré 2 :} & \quad \omega_2 = \frac{1}{2!} \omega_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu \\ & \quad \vdots \\ \text{degré } p : & \quad \omega_p = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \mathbf{d}x^{\mu_1} \mathbf{d}x^{\mu_2} \dots \mathbf{d}x^{\mu_p} \end{aligned} \quad (13)$$

où les $\omega, \omega_\mu, \omega_{\mu\nu} \dots$ sont des fonctions des coordonnées locales x^1, \dots, x^d .

Remarque : sur une variété de dimension d , toute forme différentielle de degré strictement supérieur à d est nécessairement nulle.

Le produit extérieur de deux formes différentielles est commutatif gradué, la graduation s'effectuant par rapport aux degrés de formes. Cela se traduit par la relation

$$\alpha_p \beta_q = (-1)^{pq} \beta_q \alpha_p. \quad (14)$$

Autrement dit, deux formes de degré impair anticommulent entre elles.

Dans les théories de jauge non-abéliennes sur lesquelles nous reviendrons par la suite, on considère des p -formes à valeurs dans une algèbre de Lie (cf. section (0.1.2)), $\alpha_p = \alpha_p^a T_a$ où les (T_a) forment une base de l'algèbre. Les commutateurs sont alors tous supposés gradués par le degré de forme de telle sorte que

$$[\alpha_p, \beta_q] = \alpha_p \beta_q - (-1)^{pq} \beta_q \alpha_p. \quad (15)$$

2.3 Dérivée extérieure

La dérivée extérieure d est un opérateur qui agit sur les formes différentielles de degré quelconque p selon

$$d\omega_p = \frac{1}{p!} \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}. \quad (16)$$

Propriétés :

- d transforme une p -forme en une $(p+1)$ -forme ;
- d est nilpotent d'ordre 2 : $d^2 = 0$. En effet, si l'on dérive deux fois la p -forme ω_p ,

$$\begin{aligned} dd\omega_p &= \partial_\rho \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\rho dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \\ &= \partial_\nu \partial_\rho \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\rho dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} && (\partial_\rho \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\rho) \\ &= -\partial_\nu \partial_\rho \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu dx^\rho dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} && (\wedge \text{ antisymétrique}) \\ &= 0; \end{aligned}$$

- La règle de Leibniz se généralise à la règle d'antidérivation

$$d(\alpha_p \beta_q) = (d\alpha_p) \beta_q + (-1)^p \alpha_p (d\beta_q).$$

2.4 Champs de vecteurs, produit intérieur et dérivée de Lie

Un champ de vecteurs sur une variété est défini par $w = w^\mu \partial_\mu$ où les w_μ sont des fonctions des coordonnées locales (x^1, \dots, x^d) . On lui attribue généralement un degré de fantôme noté $deg w$. On définit aussi le crochet de Lie gradué $[u, v]$ de deux champs de vecteurs. Ce crochet de Lie est également un champ de vecteurs de composantes

$$[u, v]^\mu = u^\nu \partial_\nu v^\mu - (-1)^{(deg u)(deg v)} v^\nu \partial_\nu u^\mu. \quad (17)$$

Le produit intérieur i_w par rapport à un champ de vecteurs $w = w^\mu \partial_\mu$ agit sur les formes différentielles comme une antidérivation satisfaisant

$$i_w \omega_0 = 0 \quad \text{pour une 0-forme } \omega_0 \quad \text{et} \quad i_w(dx^\mu) = w^\mu. \quad (18)$$

Le produit intérieur i_w diminue donc le degré de forme d'une unité.

Enfin la dérivée de Lie \mathcal{L}_w par rapport à w agit sur une forme différentielle comme le commutateur gradué du produit intérieur et de la dérivée extérieure

$$\mathcal{L}_w = [i_w, d] \equiv i_w d + (-1)^{(deg w)} d i_w \quad (19)$$

Ainsi, la dérivée de Lie conserve le degré de forme.

Propriétés :

- $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] = \mathcal{L}_{[u,v]}$ et $[\mathcal{L}_u, i_v] = i_{[u,v]}$;
- on peut aussi définir l'action de la dérivée de Lie \mathcal{L}_u sur un champ de vecteurs v comme identique au crochet de Lie des deux vecteurs : $\mathcal{L}_u v = [u, v]$.

3 Quantification et formalisme BRST

3.1 Propagateur et invariance de jauge

Prenons l'exemple d'une théorie de Yang-Mills sur \mathbb{R}^d muni de la métrique plate (minkowskienne ou euclidienne) $\eta_{\mu\nu}$. On considère un groupe de structure G avec une algèbre de Lie $Lie G$. L'algèbre est décrite au moyen d'une base (T_a) et des fonctions de structure associées $(f_{ab}{}^c)$ telles que

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c. \quad (20)$$

Le champ fondamental est une connexion à valeurs dans l'algèbre $Lie G$: $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_a$. Elle définit un tenseur de champ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$.

L'action de Yang-Mills vaut $S[A] = -\frac{1}{4} \int d^d x \text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Elle est invariante sous les transformations de jauge infinitésimales paramétrées par $\omega(x) = \omega^a(x)T_a$,

$$\begin{aligned} \delta_\omega A_\mu &= D_\mu \omega \equiv \partial_\mu \omega + [A_\mu, \omega] \\ \delta_\omega F_{\mu\nu} &= [\omega, F_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (21)$$

Le propagateur du potentiel de jauge A_μ correspond à l'inverse de l'opérateur

$$K^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu. \quad (22)$$

Cependant, $K^{\mu\nu}$ peut être vu comme un opérateur de projection car $K_{\mu\nu} K_\lambda^\nu \propto \partial^2 K_{\mu\lambda}$. Il n'est donc pas inversible ; l'action classique de Yang-Mills $S[A]$ est dite dégénérée (on dit aussi qu'elle possède des **modes zéro**) et ne peut pas être quantifiée directement.

La solution de ce problème consiste à briser cette invariance de jauge et à examiner les symétries restantes. C'est le formalisme BRST du nom de ses auteurs : Becchi, Rouet, Stora et Tyutin.

3.2 Le formalisme de Becchi, Rouet, Stora et Tyutin

Nous allons donc rajouter des termes supplémentaires à l'action classique précédente afin de rendre le propagateur inversible. Par la suite, nous n'emploierons plus que le formalisme des formes différentielles à valeurs dans l'algèbre de Lie pour décrire

les champs de jauge, celui-ci étant plus adapté. On définit donc la 1-forme différentielle A associée à la connexion A_μ ainsi que la 2-forme F correspondant à $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} A &= A_\mu dx^\mu \\ F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA + \frac{1}{2} [A, A], \end{aligned} \quad (23)$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur gradué (ici par rapport au degré de forme).

La procédure de « quantification à la BRST » se déroule en plusieurs étapes :

1. On remplace le paramètre infinitésimal $\omega(x)$ par une 0-forme $c(x)$. Ce champ $c(x)$ est appelé fantôme car il ne correspond pas à un champ physique. De plus, on introduit un degré de fantôme tel que tous les champs classiques² sont de degré 0 et c est de degré 1. Tous les commutateurs sont alors supposés gradués par rapport au degré total égal à la somme du degré de forme et du degré de fantôme.
2. On définit un nouvel opérateur appelé opérateur BRST \mathcal{S} qui agit sur les champs classiques comme les transformations infinitésimales de jauge, à un signe près,

$$\mathcal{S}A = -Dc = -(dc + [A, c]), \quad (24)$$

et sur le champ fantôme comme

$$\mathcal{S}c = -\frac{1}{2} [c, c] = -c^2. \quad (25)$$

Cette dernière équation assure la nilpotence de l'opérateur \mathcal{S} ($\mathcal{S}^2 = 0$); \mathcal{S} agit comme une antidérivation satisfaisant $\mathcal{S}d + d\mathcal{S} = 0$.

3. On choisit une fonction de jauge \mathcal{G} , comme par exemple la condition de jauge de Lorentz $\mathcal{G}(A) \equiv \partial_\mu A^\mu = 0$. On lui associe deux types de champs à valeurs dans $Lie G$: des champs auxiliaires b (de degré de fantôme nul) et des anti-fantômes \bar{c} (de degré de fantôme -1). Ces champs forment un doublet BRST

$$\mathcal{S}\bar{c} = -b, \quad \mathcal{S}b = 0. \quad (26)$$

4. On modifie l'action classique en une action invariante sous \mathcal{S}

$$S_{inv}[A, c, \bar{c}, b] = S[A] - \mathcal{S} \int d^d x \operatorname{Tr} \bar{c}(\mathcal{G} + Mb), \quad (27)$$

où M est une matrice constante. En général, on choisit M diagonale égale à $M^{ab} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1}$. L'intérêt du paramètre λ est de pouvoir s'assurer que les résultats obtenus sont indépendants de la valeur de λ , c'est-à-dire indépendants du choix de jauge effectué. Les choix les plus courants sont $\lambda = 0$ (jauge de Landau) et $\lambda = 1$ (jauge de Feynman).

²On entend désormais par « champ classique » tous les champs fondamentaux de la théorie, c'est-à-dire les champs de jauge et les champs de matière.

Pour les théories topologiques, nous ne nous intéresserons qu'à la version classique de la théorie, c'est-à-dire que nous nous contenterons de définir et d'étudier l'opérateur BRST sans aborder la quantification à proprement parler.

L'étude des classes de cohomologie de l'opérateur S (découlant de sa propriété de nilpotence) a plusieurs intérêts :

- au nombre de fantôme 0 se trouvent les observables de la théorie. Ce sont des quantités ne dépendant que des champs physiques de la théorie³ et invariante de jauge⁴.
- au nombre de fantôme 1 se trouvent les anomalies de la théorie, c'est-à-dire les quantités qui traduisent une symétrie qui existe au niveau classique mais pas au niveau quantique.

Comme les champs auxiliaires et les anti-fantômes forment des doublets BRST, ils n'interviennent pas dans la cohomologie de S (cf. section 2.7 de [1]). C'est pourquoi ils ne seront pas mentionnés par la suite.

³du fait que leur nombre de fantôme est nul.

⁴étant donné que, pour les champs physiques, l'action de S se résume aux transformations de jauge.

Première partie

**Théories des champs topologiques et
symétries**

Généralités sur les théories topologiques et sur le superespace

En 1988, Edward Witten [2, 3] introduit la notion de théorie topologique des champs. Cette classe de théories quantiques des champs se distingue par le fait que ses observables sont des invariants topologiques de la variété sous-jacente, c'est-à-dire qu'ils ne dépendent que de sa forme globale. Ces observables correspondent par ailleurs aux résultats obtenus auparavant par une approche purement mathématique. Ainsi, là où les mathématiques viennent souvent au secours de la physique, les théories des champs topologiques réalisent le chemin inverse, à savoir la détermination de quantités intéressantes sur le plan mathématique au moyen d'outils physiques (en particulier des techniques utilisées en théorie des champs).

Depuis, plusieurs théories ont été étudiées avec intérêt (pour une revue générale sur les théories topologiques, cf. [4]). On a ainsi pu retrouver des invariants topologiques comme les invariants de noeud en théorie de Chern-Simons [3], les invariants de Donaldson en théorie de Yang-Mills topologique [2] ainsi que leurs équivalents en gravité topologique [5–10]. Les théories topologiques constituent encore un terrain de recherche actif actuellement [11–17].

Après avoir passé en revue certains des phénomènes quantiques ayant un rapport profond avec la topologie, on s'intéressera à définir plus précisément le terme de « théorie topologique ». Enfin, on abordera à la fin de ce chapitre la notion de superespace qui est à la base de notre approche.

1.1 La topologie en théorie des champs

Dans cette section, nous évoquons certaines propriétés des théories des champs qui sont des phénomènes d'origine purement topologique. Nous allons voir que la topologie, c'est-à-dire la structure globale de la variété, indépendamment de la métrique et du système de coordonnées utilisés pour la décrire, peut avoir un rôle fondamental dans les théories de jauge. La présentation est relativement succincte, le but ici n'est pas de donner un cours sur les phénomènes topologiques mais on va plutôt chercher à passer en revue comment la topologie (au sens de la structure géométrique de l'espace) peut intervenir dans des manifestations physiques en théorie des champs. Une description

plus approfondie mais néanmoins abordable peut être trouvée dans l'ouvrage de Ryder [18].

1.1.1 Le monopôle magnétique de Dirac et sa généralisation au monopôle de 't Hooft et Polyakov

Le monopôle magnétique de Dirac

Au départ, la notion de monopôle magnétique remonte aux travaux de Dirac. L'idée de départ est de symétriser les équations de Maxwell en supposant l'existence d'une charge magnétique localisée en un point de l'espace. Les équations d'évolution des champs sont modifiées afin de tenir compte de cette charge. En prenant un monopôle magnétique de charge g à l'origine, la divergence du champ magnétique n'est plus nulle mais vaut désormais

$$\operatorname{div} \vec{B} = 4\pi g \delta^3(\vec{r}). \quad (1.1)$$

On a donc affaire à un champ magnétique radial qui satisfait une loi de Coulomb (par analogie directe avec le champ électrique). Cependant, il est impossible de trouver une expression du potentiel vecteur \vec{A} qui soit valable dans tout l'espace. En effet, si le potentiel était non singulier, en appliquant le théorème de Stokes à une surface fermée autour du monopôle, on arriverait à

$$\int_S \vec{dS} \cdot \vec{B} = \int_{\partial S} \vec{dl} \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.2)$$

étant donné que $\partial S = \emptyset$. Ceci est en contradiction avec la non-nullité de la divergence étant donné la relation

$$\int_S \vec{dS} \cdot \vec{B} = \int_V \mathbf{d}^3x \operatorname{div} \vec{B} = 4\pi g \neq 0. \quad (1.3)$$

Notre espace de base est \mathbb{R}^3 privé de l'origine (où se situe le monopôle magnétique). Cet espace est équivalent par homotopie à la sphère S^2 (c'est-à-dire qu'on peut déformer l'un en l'autre au moyen d'une application continue). Si l'on veut décrire cette sphère au moyen d'un atlas, il nous faut au minimum utiliser deux cartes. En coordonnées sphériques (θ, ϕ) , on choisit de décrire l'hémisphère Nord au moyen de

$$U_N \equiv \{(\theta, \phi) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon\} \quad (1.4)$$

et l'hémisphère Sud au moyen de

$$U_S \equiv \{(\theta, \phi) | \frac{\pi}{2} - \epsilon \leq \theta \leq \pi\}, \quad (1.5)$$

où ϵ est un paramètre positif non nul permettant un recouvrement non vide des deux ensembles.

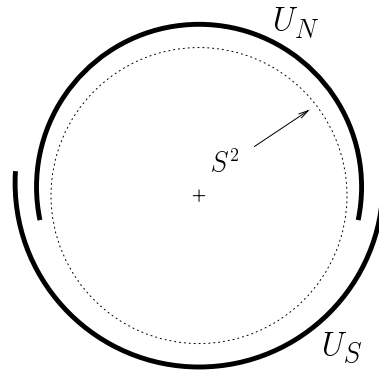


FIG. 1.1 – Le monopôle magnétique

Par conséquent, nous devons définir deux connexions (potentiels vecteurs décrivant le champ magnétique) : \vec{A}_N et \vec{A}_S . La fonction de transition entre U_N et U_S implique que ces potentiels sont reliés sur l'équateur $U_N \cap U_S$ par une transformation de jauge $\vec{A}_N = \vec{A}_S + \vec{\nabla}\Lambda$ (où Λ est une fonction à valeurs réelles).

La principale caractéristique de ce monopôle magnétique est que son existence impose une condition de quantification de la charge électrique suivant la loi

$$e = n \frac{\hbar c}{2g} \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Mais à ce jour, on n'a encore observé aucune trace de l'existence d'un monopôle magnétique. L'approche de Dirac est difficile à justifier car il n'existe aucune raison *a priori* de supposer l'existence d'un monopôle, si ce n'est qu'elle rend la théorie plus symétrique.

Le monopôle de 't Hooft et Polyakov

En 1974, 't Hooft et Polyakov ont proposé une généralisation de la notion de monopôle magnétique au cas des groupes de jauge non abéliens (contrairement au groupe $U(1)$ abélien de l'électromagnétisme). Ils ont mis en évidence que la brisure spontanée de cette symétrie entraînait dans certains cas l'existence d'un monopôle. Ce monopôle n'est donc pas un objet *ad hoc* comme le monopôle magnétique de Dirac.

1.1.2 L'effet d'Aharonov et Bohm

Considérons un électron (de charge e) et deux fentes de diffraction derrière lesquelles se trouve un solénoïde infiniment long et de rayon R très petit. Le champ magnétique vaut donc \vec{B} à l'intérieur du solénoïde et est nul en dehors.

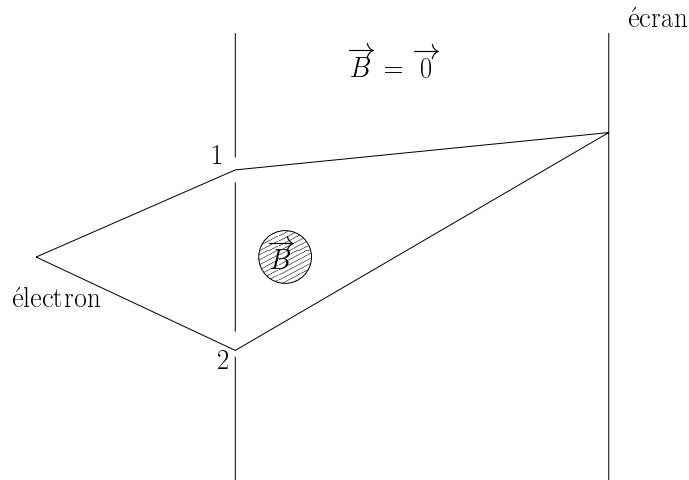


FIG. 1.2 – L'effet d'Aharonov et Bohm

On peut définir un potentiel vecteur \vec{A} suivant la relation $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$,⁵

$$\begin{aligned} \text{À l'intérieur du solénoïde :} & \quad A_\varphi = \frac{Br}{2}, \\ \text{À l'extérieur du solénoïde :} & \quad A_\varphi = \frac{BR^2}{2r}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Regardons l'influence de ce solénoïde sur la figure d'interférences créée, sur un écran (placé en aval des trous de diffraction), par la fonction d'onde plane monochromatique $\Psi(\vec{r}) = |\Psi|e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r})}$ décrivant l'électron. En présence du potentiel \vec{A} , on procède à la redéfinition canonique de \vec{p} en $\vec{p} - e\vec{A}$, ce qui entraîne un déphasage supplémentaire : $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{e}{\hbar}\vec{A} \cdot \vec{r}$.⁶

En conséquence, sur toute la trajectoire, la phase de l'onde varie de $-\frac{e}{\hbar} \int_{\text{traj}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$. La différence de phase Δ entre deux chemins γ_1 et γ_2 passant respectivement par chacune

⁵En coordonnées cylindriques (r, θ, ϕ) , on peut choisir \vec{A} tel que seule la composante angulaire A_φ soit non nulle, $A_r = A_z = 0$.

⁶en plus de la différence de chemin. Mais comme celle-ci ne dépend pas de la présence ou non du solénoïde, on ne la mentionnera pas.

des fentes 1 et 2 vaut

$$\begin{aligned}
 \Delta &= -\frac{e}{\hbar} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \frac{e}{\hbar} \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} \\
 &= \frac{e}{\hbar} \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} \\
 &= \frac{e}{\hbar} \int_{\Gamma} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{e}{\hbar} \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{e}{\hbar} \Phi,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface fermée Γ définie par les deux chemins γ_1 et γ_2 et correspond donc au flux traversant le solénoïde. Cette différence de phase entraîne une translation des franges d'interférence, proportionnelle au flux magnétique, par rapport à la figure obtenue en l'absence de solénoïde.

Il est remarquable de constater que les électrons subissent l'influence du champ magnétique alors qu'à tout instant, on peut considérer qu'ils se propagent dans des régions d'espace où \vec{B} est nul.⁷ À quoi est dû cet effet dans l'expérience idéalisée que nous venons de décrire? Simplement au fait que l'espace de configuration possède ici une structure topologique non triviale.

En dehors du solénoïde, il n'y a ni champ électrique ni champ magnétique, autrement dit le vide de la théorie électromagnétique. Dans le plan, ce vide a donc la structure de \mathbb{R}^2 privé de l'origine (correspondant au solénoïde), ce qui d'un point de vue topologique, est équivalent par homotopie au produit $\mathbb{R} \times S^1$. Dans l'expression du potentiel de jauge $A_\mu = \partial_\mu \chi$ (pure jauge décrivant le tenseur $F_{\mu\nu} = 0$ du vide), la fonction $\chi(x)$ peut être vue comme une application de l'espace de configuration $\mathbb{R} \times S^1$ dans le groupe de Lie $U(1)$. Or il existe différentes **classes d'homotopie** de telles applications incompatibles entre elles, au sens où deux éléments appartenant à des classes distinctes ne peuvent être mis en relation par le biais d'une déformation continue. On trouve donc parmi ces classes d'homotopie la classe d'équivalence de $\chi = \text{constante}$ correspondant à un potentiel nul (et ne produisant aucun effet) mais aussi d'autres classes correspondant à un potentiel de jauge non trivial responsables de l'effet d'Aharonov et Bohm.

Remarque : on peut montrer analytiquement que, dans le cas de $SU(2)$ qui est simplement connexe (ie de groupe d'homotopie trivial), il n'existe pas d'effet d'Aharonov et Bohm.

⁷Cela suppose que le solénoïde est de longueur infinie et de rayon très petit et entouré d'une barrière infinie de potentiel qui empêche la fonction d'onde des électrons de pénétrer à l'intérieur du solénoïde.

1.1.3 L'instanton

L'instanton est une solution particulière des équations du champ de Yang-Mills qui a la particularité d'être (anti-)self-dual. Rappelons que le dual du tenseur $F_{\mu\nu}$ est défini comme $\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ où $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur entièrement antisymétrique normalisé par $\varepsilon^{0123} = 1$. Ainsi, l'instanton est caractérisé par $\tilde{F}_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}$. Dans ce cas, on a l'égalité suivante,

$$\text{Tr}(FF) = \text{Tr}(F\tilde{F}) = \mathbf{d}K, \quad (1.9)$$

où K correspond à la forme de Chern-Simons

$$K = \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3). \quad (1.10)$$

Considérons l'espace euclidien E^4 et un champ A_μ qui tend vers une pure jauge à l'infini (c'est-à-dire sur la surface S^3). Autrement dit, $A_\mu \rightarrow g^{-1}\partial_\mu g(x)$ où $g(x)$ est un élément du groupe de jauge G . Cette situation correspond à un tenseur $F_{\mu\nu}$ nul à l'infini. Si l'on intègre la forme $\text{Tr}(F\tilde{F})$ sur tout l'espace, la non nullité de K impose que le tenseur $F_{\mu\nu}$ ne peut s'annuler en tout point mais uniquement sur la surface S^3 .

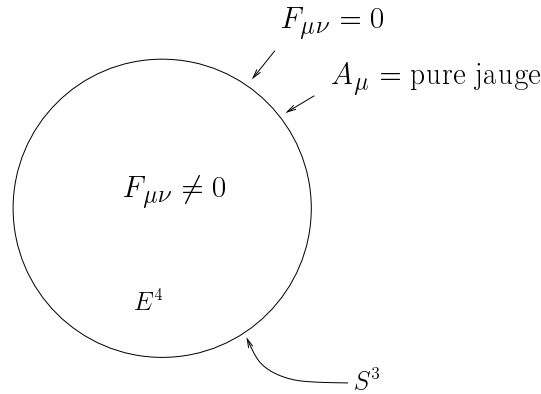


FIG. 1.3 – L'instanton

Comme dans le cas de l'effet d'Aharonov et Bohm, ce phénomène est dû au fait que les applications envoyant le groupe de configuration (ici la sphère tridimensionnelle S^3) sur le groupe de structure $SU(2)$ peuvent être réparties dans différentes classes d'équivalence. En particulier, on peut indexer ces différentes classes par un entier relatif n . L'instanton est une solution des équations du champ de jauge qui décrit le passage d'un vide appartenant à la classe d'homotopie $n - 1$ à un vide appartenant à la classe d'homotopie n .

1.2 Qu'est-ce qu'une théorie topologique ?

En premier lieu, il convient de définir ce que nous entendons précisément par théorie topologique [4]. Considérons une théorie des champs définie par son action classique S_{cl} , c'est-à-dire une fonctionnelle admettant comme variables les champs physiques. L'action quantique correspond à l'action classique à laquelle on rajoute un terme de fixation de jauge :

$$S_q[\Phi] = S_{cl} + \mathcal{S}\Psi_{gf}, \quad (1.11)$$

où l'opérateur \mathcal{S} est nilpotent ($\mathcal{S}^2 = 0$) et laisse invariant l'action classique, $\mathcal{S}S_{cl} = 0$. La variable Φ dénote collectivement les champs intervenant dans la fixation de jauge de S_{cl} : les champs physiques et les champs auxiliaires ainsi que les (anti-)fantômes. On suppose que tous ces champs vivent sur une variété riemannienne (M, g) .

Par ailleurs, on fait les hypothèses suivantes :

- la mesure d'intégration fonctionnelle $\mathcal{D}\Phi$ est indépendante de la métrique et invariante sous \mathcal{S} ;
- le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu} \equiv \frac{\delta S_q}{\delta g^{\mu\nu}}$ prend la forme d'une variation BRST : $T_{\mu\nu} = \mathcal{S}V_{\mu\nu}$ où V est une fonction de Φ et g .

DÉFINITION A.1

Une théorie des champs ayant toutes ces propriétés est appelée théorie topologique.

Pour une telle théorie, les fonctions de corrélation sont indépendantes de la métrique. En effet, considérons une fonction $\mathcal{O}(\Phi)$ satisfaisant les conditions

$$S\mathcal{O} = 0 \quad \text{et} \quad \delta_g \mathcal{O} = S R \quad (1.12)$$

où R est une fonction des champs Φ et de la métrique $g_{\mu\nu}$. Les hypothèses ci-dessus impliquent

$$\delta_g \langle \mathcal{O} \rangle = 0, \quad (1.13)$$

c'est-à-dire que la fonction de corrélation $\langle \mathcal{O} \rangle$ est un invariant topologique de la variété d'espace-temps étudiée.

Il existe plusieurs moyens de réaliser les hypothèses ci-dessus. On distingue ainsi deux familles de théories topologiques : celles de type Witten (Yang-Mills topologique par exemple, cf. section (2.1.2) page 34) [19, 20] et celles de type Schwarz (la théorie de Chern-Simons et plus généralement les modèles BF en sont les principaux exemples).

1.2.1 Théories topologiques de type Schwarz

Les théories de type Schwarz reposent sur une action classique S_{cl} qui est indépendante de la métrique mais représente une grandeur non triviale, c'est-à-dire que l'intégral ne peut pas se mettre sous la forme d'une différentielle totale.

La théorie de Chern-Simons est l'exemple le plus simple d'une telle théorie. Considérons une variété différentiable M_3 de dimension 3 sur laquelle nous introduisons une connexion $A = A_\mu dx^\mu$. L'action de Chern-Simons (CS) classique est définie par

$$S_{CS} = \int_{M_3} \text{Tr}(A dA + \frac{2}{3} A^3). \quad (1.14)$$

En dimension $d \geq 2$, on peut également définir la classe de théories dites BF,⁸

$$S_{BF} = \int_{M_d} \text{Tr}(B_{d-2} \wedge F), \quad (1.15)$$

où $F = dA + A^2$ et B_{d-2} est une $(d-2)$ -forme : $B_{d-2} = \frac{1}{(d-2)!} B_{\mu_1 \dots \mu_{d-2}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{d-2}}$.

1.2.2 Théories topologiques de type Witten

Une autre moyen de garantir les conditions caractérisant une théorie topologique est de partir d'une action classique qui est un invariant topologique de la variété d'espace-temps considérée.

Contrairement à une théorie de type Schwarz, l'action classique est définie comme l'intégrale sur une variété de dimension d d'une dérivée totale,

$$S_{cl} = \int d^d x \partial_\mu \Lambda^\mu.$$

L'exemple le plus simple d'une théorie de type Witten est la théorie de Yang-Mills topologique sur laquelle nous allons revenir plus en détail dans le prochain chapitre.

1.2.3 Le twist topologique

Il est possible de construire une théorie des champs topologique à partir d'une théorie supersymétrique (étendue) en réalisant ce que l'on appelle **un twist**.

Considérons la version supersymétrique $N = 2$ de Yang-Mills sur \mathbb{R}^4 . Le groupe de symétrie correspondant est localement isomorphe à $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I \times U(1)$ où $SU(2)_L \times SU(2)_R$ caractérise les rotations dans \mathbb{R}^4 et $SU(2)_I \times U(1)$ correspond au groupe de symétrie interne. Le twist consiste à remplacer $SU(2)_L$ par le sous-groupe diagonal de $SU(2)_L \times SU(2)_I$. Concrètement, cela revient à changer un indice d'isospin i en indice spinoriel α ,

$$Q_\alpha^i \rightarrow Q_\alpha^\beta, \quad \bar{Q}_{i\dot{\beta}} \rightarrow G_{\alpha\dot{\beta}} \quad (1.16)$$

⁸En regardant la forme de l'action, on comprend aisément l'origine de la terminologie.

1.3 Étude des symétries des théories topologiques

1.3.1 Introduction

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser à deux théories topologiques de type Witten : la théorie de Yang-Mills topologique et un modèle de gravité topologique. À travers l'étude de leurs symétries, nous allons montrer qu'il est possible de dégager un formalisme général et systématique de détermination des observables.

Comme nous allons le voir par la suite, en plus des symétries habituelles, les théories topologiques possèdent une symétrie particulière dite **symétrie topologique** qui traduit simplement le fait que notre action classique constitue un invariant topologique de la variété étudiée. Si l'on part d'une théorie topologique émergeant d'une théorie supersymétrique étendue au moyen d'un *twist*, la symétrie topologique n'est que la manifestation d'une symétrie bien connue : la supersymétrie. Dès lors, on peut s'intéresser à utiliser un formalisme de superespace (couramment utilisé dans les théories supersymétriques ordinaires) dans le cadre d'une théorie topologique.

Pour cela, nous allons reprendre l'approche initiée par Horne [21]. Le superespace est une extension de l'espace-temps usuel au moyen d'une (ou plusieurs) coordonnées grassmaniennes. Dans la suite, nous ne considérerons qu'un seul générateur de supersymétrie (une approche de la théorie de Yang-Mills topologique avec plusieurs générateurs peut être trouvée dans [22]).

1.3.2 Le superespace

Dans un premier temps, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de notations et de concepts utiles pour la description que nous voulons faire.

Le superespace est obtenu en rajoutant à l'espace-temps usuel (décrit par un système de coordonnées x^μ ($\mu = 0, \dots, d-1$)) une dimension grassmannienne décrite par une coordonnée anticommutante θ (telle que $\theta^2 = 0$). On peut ainsi attribuer à chaque quantité étudiée un degré de supersymétrie (SUSY) calculé en prenant comme convention que θ a la charge -1 .

Il reste maintenant à étendre les notions de champs et de formes différentielles dans le cadre du superespace. Pour cela, introduisons des superchamps et des superformes différentielles.

Un superchamp est une fonction définie sur le superespace, fonction qu'on peut écrire comme développement en puissances de θ . Ce qui, compte tenu des propriétés de nilpotence de θ , donne

$$F(x, \theta) = f(x) + \theta f'_\theta(x). \quad (1.17)$$

Dans le superespace, l'opérateur de supersymétrie Q agit comme un opérateur de translation ∂_θ ,

$$QF(x, \theta) = \partial_\theta F(x, \theta). \quad (1.18)$$

Les transformations supersymétriques des champs se mettent sous la forme⁹

$$Qf(x) = f'_\theta(x) \quad \text{et} \quad Qf'_\theta(x) = 0. \quad (1.19)$$

On remarque que Q est un opérateur nilpotent : $Q^2 = 0$. Par ailleurs, on voit que f'_θ est le partenaire supersymétrique de f .

De plus, on remarque que f et F ont même parité par rapport au degré de supersymétrie alors que f'_θ est de parité opposée. L'opérateur Q augmente le nombre de supersymétrie d'une unité.

On peut également définir **une superforme différentielle** de degré de forme p comme série en puissances de $d\theta$. En effet, comme θ est impair (variable grassmannienne), $d\theta$ est une entité paire et peut donc être élevée à n'importe quelle puissance :

$$\hat{\Omega}_p(x, \theta) = \sum_{k=0}^p \Omega_{p-k}(x, \theta) (d\theta)^k. \quad (1.20)$$

Dans cette expression, Ω_q désigne une forme différentielle de degré q possédant $p - q$ indices θ (donc de degré de supersymétrie $p - q$) et qui s'écrit

$$\Omega_q = \frac{1}{q!} \Omega_{\mu_1 \dots \mu_q}(x, \theta) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_q}, \quad (1.21)$$

où $\Omega_{\mu_1 \dots \mu_q}(x, \theta)$ est un superchamp.

On définit la dérivée extérieure \hat{d} sur le superspace (également appelée superdérivée extérieure) à partir des dérivées partielles par rapport aux coordonnées (x, θ) :

$$\hat{d} = dx^\mu \partial_\mu + d\theta \partial_\theta \equiv d + d\theta \partial_\theta. \quad (1.22)$$

La dérivée extérieure est bien un opérateur nilpotent : $\hat{d}^2 = 0$. En effet, on a les relations de nilpotence $d^2 = (d\theta \partial_\theta)^2 = 0$ ainsi que la nullité du commutateur gradué $[d, d\theta \partial_\theta] = 0$.

Afin de définir les règles d'intégration de ces superformes différentielles, je vais commencer par rappeler les principes de Berezin [23]. Du point de vue de la variable grassmannienne, il y a équivalence entre intégration et dérivation

$$\int_\theta F = \partial_\theta F = QF, \quad (1.23)$$

pour un superchamp $F(x, \theta)$ quelconque, compte tenu de (1.18).

Nous allons maintenant définir l'intégrale d'une p -superforme différentielle $\hat{\Omega}_p(x, \theta)$. Pour cela, on introduit une collection $\mathcal{M} = (M_0, \dots, M_p)$ de variétés M_k de dimension k telle que¹⁰

$$\int_{\mathcal{M}} \hat{\Omega}_p(x, \theta) = \sum_{k=0}^p (d\theta)^k \int_{M_{p-k}} \Omega_{p-k}(x, \theta). \quad (1.24)$$

⁹Nous faisons ici un abus de notation en utilisant le même symbole Q pour désigner l'opérateur SUSY agissant sur le superchamp ou sur ses composantes.

¹⁰Une variété de dimension nulle est un ensemble constitué d'un point.

Autrement dit, l'intégrale sur tout le superspace se met sous la forme

$$\int_{\theta} \int_{\mathcal{M}} \hat{\Omega}_p(x, \theta) = Q \int_{\mathcal{M}} \hat{\Omega}_p(x, \theta) = \sum_{k=0}^p (\mathbf{d}\theta)^k \int_{M_k} Q \Omega_{p-k}(x, \theta). \quad (1.25)$$

1.3.3 Degré de forme et degré total

On associe à toute forme, en plus de son degré de forme, un degré de fantôme et un degré de supersymétrie.

Le degré de fantôme g est défini de telle sorte que :

- les champs physiques ont un degré de fantôme nul ;
- l'opérateur BRST \mathcal{S} augmente g d'une unité.

Le degré de fantôme permet de distinguer les champs physiques ($g = 0$) des champs de fantômes utilisés dans le cadre de la quantification par un formalisme BRST ($g = 1$ correspond à un fantôme, $g = 2$ à un « fantôme pour le fantôme » et ainsi de suite).

De la même façon, le degré de supersymétrie s vérifie les propriétés suivantes :

- les champs classiques ont un degré nul ;
- θ est de degré -1 ;
- l'opérateur de supersymétrie Q augmente le degré d'une unité.

Dorénavant, nous adopterons la notation ${}^s\omega_p^g$ pour désigner une forme différentielle et ses différents degrés (forme, fantôme et supersymétrie) :

- le degré de forme sera comme habituellement en bas à droite ;
- le degré de supersymétrie sera en haut à gauche ;
- le degré de fantôme sera en haut à droite.

Enfin, nous définissons le degré total comme la somme $p + g + s$. Dans toute la suite, l'algèbre sera supposée graduée par rapport à ce degré total. Autrement dit, si on note $[X]$ le degré total d'une forme différentielle X , le commutateur gradué de deux formes X et Y s'écrit

$$[X, Y] = XY - (-1)^{[X][Y]} YX. \quad (1.26)$$

Chapitre 2 Théorie de Yang-Mills topologique

Pourquoi s'intéresser à une version topologique de la théorie de Yang-Mills ? Tout d'abord, il faut se rendre compte que la théorie de Yang-Mills ordinaire, basée sur l'article fondateur de 1954 [24], a été largement étudiée. Elle est à la base du modèle standard de la physique des particules et ses propriétés de renormalisation ont fait l'objet de nombreux travaux.

Initialement introduite par Witten [2, 19] comme déformation d'une théorie de Yang-Mills supersymétrique, la théorie de Yang-Mills topologique a ensuite été abordée dans un cadre plus mathématique [25–27]. En particulier, il a été montré que les observables obtenues par Witten appartiennent à la **cohomologie équivariante** d'un opérateur \hat{Q} de type BRST décrivant la symétrie topologique (symétrie caractéristique des théories topologiques). Cette cohomologie équivariante est en réalité la restriction de la cohomologie générale de \hat{Q} à l'espace des fonctionnelles invariantes de jauge.

L'approche abordée dans ce manuscrit est basée sur les travaux de Horne [21]. Elle part du principe que l'opérateur de supersymétrie peut être vu comme la dérivation par rapport à une variable grassmannienne θ dans un formalisme de superspace. Dès lors, on peut s'interroger sur l'apport éventuel d'une approche par le superspace dans des théories topologiques de type Witten. Or, si des travaux avaient déjà abordé la dynamique et les symétries de ces théories dans cette approche [21, 25, 28], rien n'avait été fait concernant la détermination des observables dans ce formalisme. Notre approche a donc consisté, dans un premier temps, à développer le formalisme de superspace et les symétries de Yang-Mills topologique mais surtout, dans un deuxième temps, à dégager une approche originale de détermination explicite des observables dans une superjauge générale en s'appuyant sur les résultats connus sur la cohomologie BRST [1]. Nous avons ainsi pu mettre en évidence une base d'observables et, en choisissant la superjauge de Wess et Zumino, retrouver les résultats de Witten [26, 27, 29–31]. Nous fournissons donc, par ce biais, une preuve que les observables déjà connues constituent bien la solution la plus générale (dans une superjauge de type Wess et Zumino).

Le formalisme détaillé ici possède plusieurs avantages non négligeables. D'une part, il est indépendant de la dimension de l'espace-temps étudié dans le sens où nous ne nous contentons que d'une approche purement algébrique (il ne sera pas fait mention de la dynamique ou de la fixation de jauge). D'autre part, le caractère systématique de cette approche permet de l'appliquer à des théories plus complexes, notamment la gravité

topologique [5–10] et une théorie de Yang-Mills topologique avec plusieurs générateurs de supersymétrie [12, 13, 32, 33].

Après une présentation générale de Yang-Mills topologique, nous nous attarderons sur la formulation dans le superspace des différents champs et symétries. Notre approche sera reliée à celle de Witten en imposant une superjauge de type Wess et Zumino. Enfin nous étudierons la détermination des observables en dégageant un système d'équations de bi-descente faisant intervenir trois opérateurs (BRST \mathcal{S} , supersymétrie Q et dérivée extérieure d). Une application simple sera également explicitée en fin de chapitre.

2.1 Différences entre Yang-Mills ordinaire et Yang-Mills topologique

Dans cette section, nous nous plaçons en dimension 4 mais l'étude finale de la théorie de Yang-Mills topologique qui suivra sera indépendante de la dimension d'espace-temps considérée.

2.1.1 Rappel sur la théorie de Yang-Mills ordinaire

Une théorie de Yang-Mills est basée sur une connexion $A(x)$ à valeurs dans une algèbre de Lie $Lie\ G$ (associée à un groupe de Lie G supposé non abélien). Le tenseur de champ correspondant à A vaut $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$. On peut définir aussi le tenseur dual $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ ($\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ étant le tenseur complètement antisymétrique normalisé par $\epsilon_{0123} = 1$).

L'action de Yang-Mills sur une variété riemannienne M_4 avec métrique $g^{\mu\nu}$ s'écrit

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= \int_{M_4} \text{Tr}(F \wedge \tilde{F}) \\ &= \frac{1}{4} \int_{M_4} \mathbf{d}^4 x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4} \int_{M_4} \mathbf{d}^4 x g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

On constate donc que cette action dépend explicitement de la métrique $g^{\mu\nu}$ de la variété d'espace-temps.

2.1.2 Action de Yang-Mills topologique

La théorie de Yang-Mills topologique est fondée sur le même contenu en champs que Yang-Mills ordinaire, à savoir la connexion $A(x)$. C'est au niveau de l'action que les

deux théories diffèrent. L'action de la théorie de Yang-Mills topologique vaut

$$\begin{aligned}
S_{\text{YM top}} &= \int_{M_4} \text{Tr}(F \wedge F) \\
&= \frac{1}{4} \int_{M_4} \mathbf{d}^4 x \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{4} \int_{M_4} \mathbf{d}^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Contrairement au cas précédent, l'action classique est ici indépendante de la métrique et constitue un invariant topologique : l'indice de Pontrjagin. Il s'agit donc bien d'une théorie des champs topologique.

Symétries de Yang-Mills topologique

L'action (2.2) possède plusieurs symétries. Tout d'abord, naturellement, l'invariance de jauge par rapport à un paramètre infinitésimal $\omega(x)$ agissant selon

$$\delta_\omega A_\mu = \partial_\mu \omega + [A_\mu, \omega], \quad \delta_\omega F_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu}, \omega].$$

Du fait que $\text{Tr}(F \wedge F)$ est un invariant topologique, il possède une invariance plus générale appelée symétrie topologique et définie par un *shift* de la connexion $A : \delta_{\text{top}} A_\mu = \psi_\mu$.

2.2 Symétries et lois de transformation

2.2.1 Formulation générale dans le superspace

Il est temps maintenant d'introduire les champs de notre théorie dans l'approche de superspace : une superconnexion $\hat{A}(x, \theta)$ (1-superforme) et un superfantôme $C(x, \theta)$ (0-superforme). Par analogie avec la théorie de Yang-Mills ordinaire, le superfantôme représente les transformations infinitésimales de superjauge (dans le cadre d'un formalisme BRST).

Ces superchamps sont à valeurs dans l'algèbre de Lie $Lie G$,

$$\hat{A}(x, \theta) = \hat{A}^a(x, \theta) T_a \quad \text{et} \quad C(x, \theta) = C^a(x, \theta) T_a, \tag{2.3}$$

où les T_a forment une base de $Lie G$ tels que $[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c$ (les $f_{ab}{}^c$ étant les constantes de structure associées à la base (T_a)).

Les transformations BRST de ces superchamps prennent une forme similaire à celles obtenues dans le cadre d'une théorie de Yang-Mills ordinaire, à savoir

$$\mathcal{S}\hat{A} = -\hat{D}C \equiv -(\hat{d}C + [\hat{A}, C]) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}C = -C^2. \tag{2.4}$$

L'opérateur BRST \mathcal{S} ainsi défini est bien un opérateur nilpotent : $\mathcal{S}^2 = 0$. Il reste maintenant à décomposer chaque superforme afin d'obtenir les relations de transformation des champs d'espace-temps.

La superconnexion \hat{A} peut se mettre sous la forme de superchamps (A_μ) et A_θ : $\hat{A}(x, \theta) = A(x, \theta) + \mathbf{d}\theta A_\theta(x, \theta) \equiv \mathbf{d}x^\mu A_\mu(x, \theta) + \mathbf{d}\theta A_\theta(x, \theta)$. Chacun de ces superchamps se décompose lui même en champs ordinaires suivant la règle évoquée en (1.17), respectivement selon

$$\begin{aligned} A(x, \theta) &= a(x) + \theta\psi_\theta(x), & A_\theta(x, \theta) &= \chi_\theta(x) + \theta\phi_{\theta\theta}(x), \\ C(x, \theta) &= c(x) + \theta c'_\theta(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nous avons volontairement alourdi l'écriture des champs afin de faire apparaître, d'une part, la dépendance dans les variables x et θ du superespace et d'autre part, le degré de supersymétrie porté par le champ (a et c ont un degré de SUSY nul, ψ , χ et c' ont un degré de SUSY égal à 1 et ϕ un degré de 2). Dans la suite, nous omettrons à la fois la dépendance explicite dans les variables x, θ ainsi que les indices θ caractérisant le degré de supersymétrie. Afin de garder à l'esprit les propriétés commutantes ou anticommutantes des différentes formes intervenant dans la théorie, nous avons regroupé dans le tableau suivant les différents degrés de chaque forme différentielle ainsi que le degré total.

	a	ψ	χ	ϕ	c	c'
Forme	1	1	0	0	0	0
Fantôme	0	0	0	0	1	1
SUSY	0	1	1	2	0	1
Total	1	2	1	2	1	2

TAB. 2.1 – Formes et degrés pour Yang-Mills topologique dans le superespace

En décomposant les relations (2.4), on peut écrire l'algèbre des transformations BRST agissant sur chacun des superchamps,

$$\mathcal{S}A = -\mathbf{D}_A C \equiv -(\mathbf{d}C + [A, C]) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}A_\theta = -(\partial_\theta C + [A_\theta, C]), \quad (2.6)$$

et sur les champs qui composent ces superchamps,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}a &= -\mathbf{D}c \equiv -(\mathbf{d}c + [a, c]), & \mathcal{S}\psi &= -[c, \psi] - \mathbf{D}c', \\ \mathcal{S}\chi &= -[c, \chi] - c', & \mathcal{S}\phi &= -[c, \phi] + [c', \chi], \\ \mathcal{S}c &= -c^2, & \mathcal{S}c' &= -[c, c']. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ici, on a adopté les notations suivantes : \mathbf{D}_A pour la dérivée covariante par rapport au superchamp $A(x, \theta)$ et \mathbf{D} pour la dérivée covariante usuelle par rapport au champ $a(x)$.

Pour rappel, l'opérateur de supersymétrie Q agit sur les champs suivant la relation (1.19) comme

$$\begin{aligned} Qa &= \psi, & Q\psi &= 0, \\ Q\chi &= \phi, & Q\phi &= 0, \\ Qc &= c', & Qc' &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nous allons introduire une redéfinition des champs qui nous sera utile par la suite pour étudier la cohomologie de cette théorie. Nous définissons trois nouveaux superchamps :

$$\begin{aligned} \Psi &= \partial_\theta A + \mathbf{D}_A A_\theta = \psi + \mathbf{D}_A A_\theta, \\ \Phi &= \partial_\theta A_\theta + A_\theta^2 = \phi + A_\theta^2, \\ K &= -(\partial_\theta C + [A_\theta, C]) = -c' - [A_\theta, C]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les champs Ψ et Φ correspondent à la décomposition de la supercourbure $\hat{F} = \hat{\mathbf{d}}\hat{A} + \hat{A}^2$ en puissances de $d\theta$,

$$\hat{F} = F_A + \Psi d\theta + \Phi (d\theta)^2 \quad \text{avec} \quad F_A = \mathbf{d}A + A^2. \quad (2.10)$$

Cette supercourbure vérifie l'équation de Bianchi généralisée

$$\hat{\mathbf{D}}\hat{F} = 0. \quad (2.11)$$

Les transformations BRST de A, C et des superchamps (2.9) prennent la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}A &= -\mathbf{D}_A C, & \mathcal{S}C &= -C^2, \\ \mathcal{S}\Psi &= -[C, \Psi], & \mathcal{S}\Phi &= -[C, \Phi], \\ \mathcal{S}A_\theta &= K, & \mathcal{S}K &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

et les transformations de supersymétrie s'écrivent

$$\begin{aligned} QA &= \Psi - \mathbf{D}_A A_\theta, & Q\Psi &= -\mathbf{D}_A \Phi - [A_\theta, \Psi], \\ QF_A &= -\mathbf{D}_A \Psi - [A_\theta, F_A], & Q\Phi &= -[A_\theta, \Phi]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'opérateur de supersymétrie Q peut alors se décomposer comme la somme de deux opérateurs

$$Q = Q_0 + \mathcal{S}|_{C=A_\theta}, \quad (2.14)$$

où

$$Q_0 A = \Psi, \quad Q_0 \Psi = -\mathbf{D}_A \Phi \quad \text{et} \quad Q_0 \Phi = 0 \quad (2.15)$$

et où l'action du second opérateur correspond aux transformations (2.12) en remplaçant C par A_θ .

On remarque que $(Q_0)^2$ est une transformation de superjauge infinitésimale de paramètre Φ , ce qui implique que Q_0 est nilpotent si l'on se restreint à des polynômes dépendant uniquement de $F_A, \Psi, \Phi, \mathbf{D}_A \Psi$ et $\mathbf{D}_A \Phi$.

2.2.2 Superjauge de Wess et Zumino

Tous les champs introduits ci-dessus n'ont pas nécessairement de sens physique. Ainsi, l'algèbre présentée en (2.7) peut être réduite par élimination de certains champs, sans pour autant anéantir sa nilpotence. Le choix de superjauge du type de Wess et Zumino revient à s'affranchir du champ χ en posant

$$\chi = 0, \quad (2.16)$$

ce qui implique nécessairement de poser $c' = 0$. Mais la condition de jauge (2.16) n'est pas invariante sous l'action de l'opérateur de supersymétrie Q (puisque $\phi \neq 0$, cf. (2.8)). Il convient donc de définir un nouvel opérateur \tilde{Q} qui laisse stable la condition (2.16), ce qui peut s'obtenir en rajoutant à Q une variation BRST particulière,

$$\tilde{Q} = Q + \mathcal{S}|_{\chi=c=0, c'=\phi}, \quad (2.17)$$

c'est-à-dire qu'on ajoute à Q les transformations décrites en (2.7) en prenant $\chi = c = 0$ et en identifiant c' et ϕ . Sous l'action de ce nouvel opérateur, les champs restants satisfont les relations de transformation

$$\tilde{Q}a = \psi, \quad \tilde{Q}\psi = -D\phi \quad \text{et} \quad \tilde{Q}\phi = 0, \quad (2.18)$$

tandis que les relations de transformation BRST se réécrivent

$$\mathcal{S}a = -Dc, \quad \mathcal{S}\psi = -[c, \psi] \quad \mathcal{S}\phi = -[c, \phi] \quad \text{et} \quad \mathcal{S}c = -c^2. \quad (2.19)$$

La contrepartie de cette redéfinition de l'opérateur de supersymétrie est que \tilde{Q} n'est pas nilpotent, \tilde{Q}^2 étant égal à une transformation de jauge infinitésimale de paramètre ϕ . Cependant, pour la recherche des observables de cette théorie, on ne considère pas la cohomologie générale de l'opérateur BRST \mathcal{S} mais une cohomologie restreinte à des fonctionnelles invariantes de jauge (nous reviendrons là-dessus dans la suite).

On remarque que l'action de \tilde{Q} sur les champs a, ψ, ϕ est très similaire à celle de Q_0 définie en (2.15). À vrai dire, l'algèbre engendrée par les formes différentielles a, ψ, ϕ et leurs dérivées covariantes ainsi que par les opérateurs \mathcal{S} et \tilde{Q} est isomorphe à celle engendrée par les superchamps A, Ψ, Φ et leurs dérivées extérieures ainsi que par les opérateurs \mathcal{S} et Q_0 . Cette remarque sera utile au moment où nous comparerons les expressions fournissant les observables en superjauge générale avec les observables originales de Witten (cf. section 2.5.3).

2.2.3 Comparaison avec d'autres approches

Il est utile de comparer notre approche aux travaux précédents dans ce domaine. Si l'on étudie les références [25, 30], on retrouve les mêmes champs (dans la jauge de Wess et Zumino) mais avec des degrés de fantôme différents. En effet, dans ces approches, les degrés de supersymétrie et de fantôme ont été additionnés pour ne former qu'un seul degré de fantôme.

	a	ψ	ϕ	c
Forme	1	1	0	0
Fantôme	0	0	0	1
SUSY	0	1	2	0

TAB. 2.2 – Approche dans le superespace

	a	ψ	ϕ	c
Forme	1	1	0	0
Fantôme	0	1	2	1

TAB. 2.3 – Approche habituelle

2.2.4 Réécriture des symétries sous la forme d'un seul opérateur

Il est possible de regrouper l'action des deux opérateurs BRST \mathcal{S} et SUSY \tilde{Q} définis respectivement dans (2.19) et (2.18) sous la forme d'un seul opérateur noté \mathcal{S}_{tot} . Pour cela, on introduit un fantôme commutant ε qui permet de décomposer l'opérateur \mathcal{S}_{tot} selon [29]

$$\mathcal{S}_{\text{tot}} = \mathcal{S}_0 + \varepsilon \mathcal{S}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{S}_2, \quad (2.20)$$

où chacun des trois opérateurs agit comme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 a &= -Dc, & \mathcal{S}_1 a &= \psi, & \mathcal{S}_2 a &= 0, \\ \mathcal{S}_0 \psi &= -[c, \psi], & \mathcal{S}_1 \psi &= -D\phi, & \mathcal{S}_2 \psi &= 0, \\ \mathcal{S}_0 \phi &= -[c, \phi], & \mathcal{S}_1 \phi &= 0, & \mathcal{S}_2 \phi &= 0, \\ \mathcal{S}_0 c &= -c^2, & \mathcal{S}_1 c &= 0, & \mathcal{S}_2 c &= \phi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Naturellement, on reconnaît que $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_1 = \tilde{Q}$. Cette formulation présente l'intérêt de regrouper sous un seul opérateur toutes les symétries du système (symétrie de jauge caractérisée par \mathcal{S} et symétrie « topologique » caractérisée par \tilde{Q}).

On a les trois relations

$$\mathcal{S}_0^2 = 0, \quad [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1] = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_1^2 + [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_2] = 0, \quad (2.22)$$

sur lesquelles nous reviendrons dans la section concernant la détermination des observables.

2.3 Cohomologie équivariante en jauge de Wess et Zumino

Dans toute la suite, on utilisera la notation ${}^s \varphi_p^g$ pour décrire une p -forme φ de nombre de fantôme g et de nombre de supersymétrie s .

Pour l'instant, nous travaillons en jauge de Wess et Zumino afin de présenter les approches existantes du problème cohomologique de détermination des observables.

2.3.1 Observables de Donaldson et Witten

Cette section constitue un rappel rapide des résultats de Witten concernant les observables de la théorie de Yang-Mills topologique à quatre dimensions. Cela sera utile dans la suite afin de comparer l'approche originelle et notre approche dans le superspace.

Les polynômes de Donaldson et Witten sont des p -formes ω_p^g

$$\begin{aligned}\omega_0^4 &= \text{Tr}(\phi^2), & \omega_1^3 &= \text{Tr}(2\psi\phi), & \omega_2^2 &= \text{Tr}(2F_a\phi + \psi^2), \\ \omega_3^1 &= \text{Tr}(2F_a\psi), & \omega_4^0 &= \text{Tr}(F_a^2),\end{aligned}\quad (2.23)$$

avec $F_a = da + a^2$. Ces polynômes satisfont un ensemble d'équations de descente

$$\tilde{Q}\omega_p^{4-p} + d\omega_{p-1}^{4-p+1} = 0. \quad (2.24)$$

Les observables globales correspondantes sont les intégrales de ces p -formes sur des variétés de dimension p .

Ces résultats sont généralisables en dimension d quelconque. On peut ainsi construire les polynômes de Donaldson et Witten en utilisant l'approche de Baulieu et Singer [30]. On définit la courbure \mathcal{F} du fibré universel à partir de la supercourbure \hat{F} introduite précédemment suivant la décomposition

$$\hat{F} = \mathcal{F} + \theta\tilde{Q}\mathcal{F}, \quad (2.25)$$

ce qui donne, en utilisant la définition (2.10),

$$\mathcal{F} = F_a + \psi d\theta + \phi(d\theta)^2 \quad (F_a = da + a^2). \quad (2.26)$$

Les polynômes de Donaldson et Witten satisfaisant les équations de descente (2.24) sont alors les formes ω_p^g définies par

$$\begin{aligned}\text{Tr } \mathcal{F}^m &= \text{Tr } F^m + \text{Tr}(mF^{m-1}\psi)d\theta + \cdots + \text{Tr}(m\psi\phi^{m-1})(d\theta)^{2m-1} + \text{Tr } \phi^m(d\theta)^{2m} \\ &= \sum_{p=0}^{2m} \omega_p^g(d\theta)^{2m-p},\end{aligned}\quad (2.27)$$

avec $m = 1, 2, \dots$

2.3.2 Définition de la cohomologie équivariante

Si l'on effectue la redéfinition [25]

$$\psi' = \psi - Dc, \quad \phi' = \phi - c^2, \quad (2.28)$$

les transformations (2.20) (avec $\varepsilon \equiv 1$) deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{tot}} a &= \psi', & \mathcal{S}_{\text{tot}} \psi' &= 0, \\ \mathcal{S}_{\text{tot}} c &= \phi', & \mathcal{S}_{\text{tot}} \phi' &= 0.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Par conséquent, l'opérateur \mathcal{S}_{tot} possède une cohomologie triviale (tous les champs intervenant sous forme de doublets) [25]. On cherche donc les observables comme éléments d'une cohomologie restreinte de \mathcal{S}_{tot} .

Reprenons les équations (2.22) en considérant des fonctionnelles Δ invariantes de jauge ($\mathcal{S}_0\Delta = 0$) ne dépendant que des champs a, ψ et ϕ ($\mathcal{S}_2\Delta = 0$). Alors la troisième égalité de (2.22) nous assure la nilpotence de l'opérateur \tilde{Q} puisque

$$\mathcal{S}_0\Delta = \mathcal{S}_2\Delta = 0 \implies \mathcal{S}_1^2\Delta \equiv \tilde{Q}^2\Delta = 0. \quad (2.30)$$

La cohomologie équivariante est définie comme la cohomologie de l'opérateur \tilde{Q} dans l'espace des fonctionnelles locales invariantes de jauge et de degré de fantôme 0,

$$\tilde{Q} \, {}^s\Delta = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{S} \, {}^s\Delta = 0 \quad (2.31)$$

satisfaisant la condition de non-trivialité

$${}^s\Delta \neq \tilde{Q} \, {}^{s-1}\Delta' \quad \text{avec} \quad \mathcal{S} \, {}^{s-1}\Delta' = 0. \quad (2.32)$$

Cette dernière approche est celle utilisée par Witten dans sa caractérisation des observables [2].

Remarque sur les observables de degré de forme nul

On considère une expression de la forme ${}^s\Delta_0 = \int_{M_0} {}^s\omega_0^0(x)$. D'après la définition de \tilde{Q} en (2.18), il est impossible d'écrire une 0-forme ${}^s\omega_0^0$ comme variation par rapport à \tilde{Q} . Par conséquent, la relation (2.32) est automatiquement vérifiée.

Ce n'est plus le cas pour des formes de degré supérieur. Prenons une fonctionnelle de la forme $\int \tilde{Q}P_{\text{inv}}(F_a, \psi, \phi, D\psi, D\phi)$ où P_{inv} est un polynôme invariant de jauge. Elle satisfait naturellement la définition (2.31) mais pas la contrainte de non-trivialité (2.32).

2.3.3 Formulations alternatives de la cohomologie équivariante

Il est possible de donner d'autres définitions de la cohomologie équivariante équivalentes à celle que nous venons de donner. En premier lieu, la cohomologie équivariante peut aussi être définie comme la cohomologie de l'opérateur \mathcal{S}_{tot} dans l'espace des fonctionnelles locales $\Delta[a, \psi, \phi, c]$ invariantes de jauge et indépendantes de c [29]. Les techniques mathématiques de la cohomologie équivariante [34] permettent alors de construire des éléments de cette cohomologie qui coïncident avec les observables de Witten. Cependant, une détermination complète des classes de cohomologie semble difficile dans cette approche.

Enfin, on peut aussi utiliser les techniques usuelles en cohomologie tout en travaillant sur un espace des fonctionnelles restreint. Ainsi, on peut montrer que la solution du problème cohomologique est donné par certaines classes de cohomologie de

l'opérateur BRST \mathcal{S} au degré de fantôme nul. Cette approche reproduit également les observables de Witten. On regarde ici la cohomologie de \mathcal{S} (qui décrit les transformations de jauge, cf. (2.21)) dans l'espace des fonctionnelles locales de a, ψ, ϕ, c et qui sont de degré de fantôme nul et invariantes sous \tilde{Q} . On cherche donc des expressions ${}^s\Delta$ telles que

$$\mathcal{S} {}^s\Delta = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{Q} {}^s\Delta = 0, \quad (2.33)$$

et satisfaisant la contrainte

$${}^s\Delta \neq \mathcal{S} {}^s\Delta' \quad \text{avec} \quad \tilde{Q} {}^s\Delta' = 0. \quad (2.34)$$

On remarquera qu'étant donné que ${}^s\Delta$ est de degré de fantôme nul et qu'on ne considère ici aucun champ de degré de fantôme négatif, la condition (2.34) est automatiquement vérifiée quel que soit le degré de forme. Par conséquent, au degré de forme nul, cette approche se ramène exactement au problème cohomologique (2.31). Par contre, pour des degrés de forme non nuls, on trouve des solutions non triviales dans cette approche alors qu'elles le sont du point de vue de la cohomologie équivariante.

2.4 Cohomologie dans la superjauge générale

2.4.1 Cohomologie équivariante

Cette dernière approche peut facilement être généralisée au cas d'une superjauge générale. Dans la suite, nous allons donc déterminer complètement la cohomologie dans le formalisme de superespace. Ce n'est qu'à la fin que nous nous placerons explicitement dans la superjauge de Wess et Zumino ($\chi = 0$) afin de comparer avec les résultats précédents.

Nous définissons la cohomologie équivariante généralisée comme la cohomologie de l'opérateur BRST \mathcal{S} dans l'espace des fonctionnelles locales supersymétriques de degré de fantôme nul (ie invariantes sous l'action de l'opérateur Q tel qu'il est défini en (2.8)). Autrement dit, pour un degré de supersymétrie s et un degré de forme d fixés, on recherche les fonctionnelles ${}^s\Delta_{(d)}$ telles que

$$\mathcal{S} {}^s\Delta_{(d)} = 0 \quad \text{avec} \quad Q {}^s\Delta_{(d)} = 0 \quad (2.35)$$

et satisfaisant aux contraintes de non-trivialité

$${}^s\Delta_{(d)} \neq \mathcal{S} {}^s\Delta'_{(d)} \quad \text{avec} \quad Q {}^s\Delta'_{(d)} = 0. \quad (2.36)$$

Ici,

$${}^s\Delta_{(d)} = \int_{M_d} {}^s\omega_d^0 \quad (2.37)$$

est une fonctionnelle locale de degré de supersymétrie s obtenue par intégration d'une forme différentielle ${}^s\omega_d^0$. Dans la suite, nous allons donc déterminer les formes différentielles ${}^s\omega_d^0$ sous la forme la plus générale possible, les résultats dans la jauge de Wess et Zumino se retrouvant en appliquant la condition (2.16).

2.4.2 Équations de descente

Si ${}^s\Delta_{(d)}$ est un élément de la cohomologie de l'opérateur BRST \mathcal{S} , alors cela signifie que la variation BRST de la forme différentielle ${}^s\omega_d^0$ est une dérivée totale.¹¹ Il existe donc une forme ${}^s\omega_{d-1}^1$ vérifiant l'équation

$$\mathcal{S} {}^s\omega_d^0 + \mathbf{d} {}^s\omega_{d-1}^1 = 0, \quad (2.38)$$

ce qui montre l'appartenance de ${}^s\omega_d^0$ à la cohomologie de \mathcal{S} modulo \mathbf{d} .

En appliquant l'opérateur \mathcal{S} à l'équation précédente et compte tenu de la cohomologie triviale de l'opérateur \mathbf{d} dans l'espace \mathcal{E} des formes différentielles, on obtient une relation similaire pour ${}^s\omega_{d-1}^1$,

$$\mathcal{S} {}^s\omega_{d-1}^1 + \mathbf{d} {}^s\omega_{d-2}^2 = 0. \quad (2.39)$$

Le processus se réitère directement pour donner une tour d'équations que l'on appelle **équations de descente** :¹²

$$\mathcal{S} {}^s\omega_p^{d-p} + \mathbf{d} {}^s\omega_{p-1}^{d-p+1} = 0 \quad (p = 0, \dots, d). \quad (2.40)$$

Le but est maintenant de déterminer l'ensemble de ces formes ${}^s\omega_p^{d-p}$ en prenant en compte la contrainte de supersymétrie qui garantit la non-trivialité de cette cohomologie.

2.4.3 Étude de la contrainte de supersymétrie

La contrainte $Q^s \Delta_{(d)} = 0$ implique que la forme $Q {}^s\omega_{(d)}^0$ est une différentielle totale, c'est-à-dire qu'il est possible de trouver une forme ${}^{s+1}\omega_{d-1}^0$ satisfaisant

$$Q {}^s\omega_d^0 + \mathbf{d} {}^{s+1}\omega_{d-1}^0 = 0. \quad (2.41)$$

Nous allons maintenant énoncer une liste de propositions qui vont nous permettre de réécrire les équations de descente (2.40), non en fonction des formes différentielles ω mais en fonction de superchamps Ω . Afin de ne pas surcharger la lecture avec des calculs mathématiques un peu lourds quoique sans grande difficulté, les preuves de ces différentes propositions se trouvent en annexe A.

Note : Dans les deux premières propositions ci-dessous, le nombre de fantôme n'apparaît pas en haut à droite dans l'écriture des formes et des superchamps. En effet, il ne joue aucun rôle dans l'énoncé de ces propositions et a donc été volontairement omis afin d'alléger l'écriture. Les résultats sont valables quelque soit le degré de supersymétrie s et le degré de forme p .

¹¹conformément au fait que nous travaillons sur une variété sans bords.

¹²avec la convention que toute forme ayant un degré de forme, de fantôme ou de supersymétrie négatif est prise égale à zéro.

PROPOSITION A.1*La condition*

$$Q {}^s\omega_p + \mathbf{d}^{s+1}\omega_{p-1} = 0 \quad (2.42)$$

implique

$$\begin{cases} {}^s\omega_p = Q {}^{s-1}\varphi_p + \mathbf{d}^s\varphi_{p-1}, \\ {}^{s+1}\omega_{p-1} = Q {}^s\varphi_{p-1} + \mathbf{d}^{s+1}\varphi_{p-2}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Cette proposition peut s'étendre au cas de superchamps ${}^s\Omega_p$:

PROPOSITION A.2*La condition*

$$Q {}^s\Omega_p + \mathbf{d}^{s+1}\Omega_{p-1} = 0 \quad (2.44)$$

implique

$$\begin{cases} {}^s\Omega_p = Q {}^{s-1}\Phi_p + \mathbf{d}^s\Phi_{p-1}, \\ {}^{s+1}\Omega_{p-1} = Q {}^s\Phi_{p-1} + \mathbf{d}^{s+1}\Phi_{p-2}. \end{cases} \quad (2.45)$$

En conjuguant la proposition A.1 avec la relation (2.41), on en déduit que ${}^s\omega_d^0$ s'écrit sous la forme de la Q -variation

$${}^s\omega_d^0 = Q {}^{s-1}\omega_d^0. \quad (2.46)$$

On peut négliger le terme de dérivée totale $\mathbf{d} {}^s\omega_{d-1}^0$ compte tenu du fait qu'il ne joue aucun rôle dans l'intégrale définissant ${}^s\Delta_{(d)}$. Il en sera de même pour les termes de dérivée totale pouvant apparaître dans la suite. Par ailleurs, nous pouvons aussi remplacer les formes ${}^s\omega_d^0$ par des superchamps ${}^{s-1}\Omega_d^0$

$${}^{s-1}\Omega_d^0 = {}^{s-1}\omega_d^0 + \theta Q {}^{s-1}\omega_d^0. \quad (2.47)$$

La relation (2.46) prend alors la forme

$${}^s\omega_d^0 = Q {}^{s-1}\Omega_d^0. \quad (2.48)$$

En utilisant la définition (1.25), il vient que l'observable globale ${}^s\Delta_{(d)}$ peut se réécrire sous la forme de l'intégrale sur le superspace d'un superchamp ${}^s\Omega_d^0$:

$${}^s\Delta_{(d)} = \int_{M_d} {}^s\omega_d^0 = \int_{M_d} Q {}^{s-1}\Omega_d^0 = \int_{\theta} \int_{M_d} {}^{s-1}\Omega_d^0. \quad (2.49)$$

La dernière proposition de cette section nous permet de généraliser les résultats précédents à des formes et des superchamps de degré de fantôme quelconque.

PROPOSITION A.3

La contrainte de supersymétrie implique que toutes les formes ${}^s\omega_p^{d-p}$ apparaissant dans les équations de descente peuvent être remplacées, sans perte de généralité, par des superchamps

$${}^s\omega_p^{d-p} = Q^{s-1}\Omega_p^{d-p} \quad (p = 0, \dots, d). \quad (2.50)$$

2.4.4 Équations de bi-descente

Afin d'étudier la cohomologie équivariante, il est nécessaire de prendre en compte la contrainte de supersymétrie dans les équations de descente (2.40). On aboutit à un nouveau type d'équations de descente faisant intervenir cette fois non pas deux opérateurs mais les trois opérateurs \mathcal{S} , Q et d . C'est pour cela qu'elles sont appelées **équations de bi-descente** :

PROPOSITION A.4

Soit un couple (s, d) correspondant respectivement au nombre de supersymétrie et au nombre de forme de l'observable globale ${}^s\Delta_d$. Pour ce couple, les équations de descente (2.40) avec la contrainte de supersymétrie (A.3) impliquent une tour d'équations de bi-descente

$$\mathcal{S}^{s-r-1}\Omega_p^{d-p+r} + d^{s-r-1}\Omega_{p-1}^{d-p+r+1} + Q^{s-r-2}\Omega_p^{d-p+r+1} = 0, \quad (2.51)$$

où $r = 0, \dots, s-1$ et $p = 0, \dots, d$.

La démonstration s'appuie sur les résultats précédents concernant la contrainte de supersymétrie, à savoir qu'en injectant la proposition A.3 dans les équations de descente (2.40), on arrive à la nullité de la Q -variation

$$Q(\mathcal{S}^{s-1}\Omega_p^{d-p} + d^{s-1}\Omega_{p-1}^{d-p+1}) = 0. \quad (2.52)$$

Étant donnée la cohomologie triviale de l'opérateur Q dans l'espace \mathcal{E}_s , ceci implique qu'on peut trouver un superchamp ${}^{s-2}\Omega_p^{d-p+1}$ qui satisfait l'équation

$$\mathcal{S}^{s-1}\Omega_p^{d-p} + d^{s-1}\Omega_{p-1}^{d-p+1} + Q^{s-2}\Omega_p^{d-p+1} = 0 \quad (p = 0, \dots, d) \quad (2.53)$$

Ainsi on a obtenu les équations de bi-descente pour $r = 0$, la généralisation à des valeurs quelconques de r se faisant par récurrence (cf. Annexe A.2). On remarque d'ailleurs que tous les superchamps ${}^{s-r-1}\Omega_{d-p}^{d-p+r}$ intervenant dans l'équation (2.51) ont le même

degré total¹³

$$D = d + s - 1. \quad (2.54)$$

Par conséquent, il est possible de réécrire la tour d'équations de bi-descente non plus pour le couple (s, d) mais pour le couple (D, d) , où D prend une valeur positive arbitrairement fixée (le nombre s se déduisant directement de la connaissance du couple (D, d) via (2.54)). De la même façon, on modifie le paramètre r de manière à faire apparaître un nombre g pour simplifier un peu les écritures.

LEMME A.1

Pour un couple (D, d) donné, les équations de bi-descente s'écrivent

$$\mathcal{S}^{D-p-g}\Omega_p^g + \mathbf{d}^{D-p-g}\Omega_{p-1}^{g+1} + Q^{D-p-g-1}\Omega_p^{g+1} = 0, \quad (2.55)$$

$$p = 0, \dots, d; \quad g = d - p, \dots, D - p.$$

Les domaines de variation de p et g ci-dessus définissent un parallélogramme $Par(d, D)$ (cf. section (2.6) pour le cas $D = 3$) dont on donne une vue approchée ci-dessous :

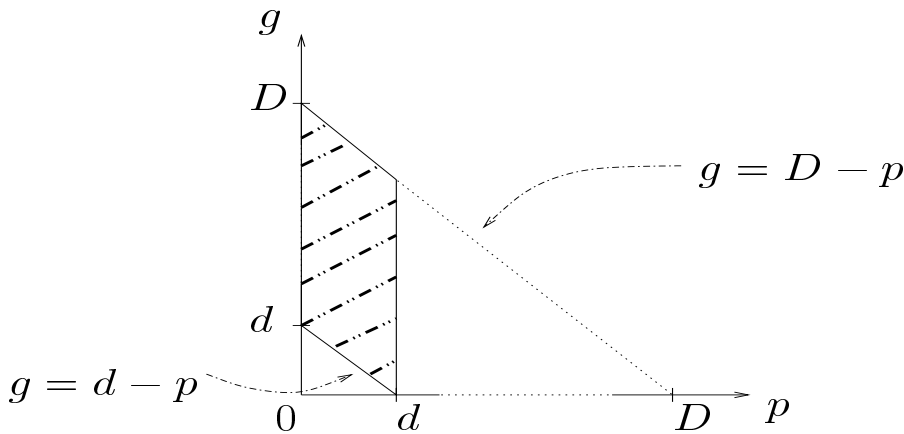


FIG. 2.1 – Le parallélogramme des équations de bi-descente

Chaque point de ce parallélogramme, c'est-à-dire la donnée d'un couple (p, g) correspond de manière univoque à une équation de l'ensemble des équations de bi-descente (2.55).

¹³qui, on le rappelle, vaut la somme du degré de forme, du degré de fantôme et du degré de supersymétrie.

2.5 Résolution des équations de bi-descente

2.5.1 Remarque préliminaire

Quand d varie entre ses valeurs extrêmes 0 et D , on observe que les parallélogrammes $Par(d, D)$ décrivent tout le triangle $Tri(D)$ compris entre les points $(0, 0)$, $(0, D)$ et $(D, 0)$ (dans le système d'axes (p, g)). Ce triangle correspond à l'ensemble des équations de bi-descente pour $d = p + g \leq D$,

$$\mathcal{S}^{D-p-g}\Omega_p^g + \mathbf{d}^{D-p-g}\Omega_{p-1}^{g+1} + Q^{D-p-g-1}\Omega_p^{g+1} = 0 \quad (2.56)$$

$$\text{avec } p \geq 0; g \geq 0; p + g \leq D.$$

À chacun des points du triangle $Tri(D)$ correspond une équation de (2.56) qui ne fait intervenir que des superchamps correspondant à des points d'un parallélogramme $Par(d, D)$. Autrement dit, elle représente une équation de l'ensemble (2.55). Donc une solution non triviale de (2.56) est une solution de (2.55).

Cependant, la réciproque n'est pas nécessairement vérifiée. En effet, si l'on considère deux superchamps ${}^{D-p-g}\Omega_p^g$ et ${}^{D-p-g}(\Omega')_p^g$ appartenant à la réunion de deux parallélogrammes $Par(d, D)$ et $Par(d', D)$, ils peuvent représenter des solutions différentes des deux ensembles d'équations de bi-descente correspondantes.

Nous allons donc commencer par étudier l'ensemble des solutions de (2.56) qui permettent d'obtenir certaines solutions des équations de bi-descente (2.55) avant de rechercher les solutions les plus générales. Ces dernières seront obtenues en faisant intervenir une troncation cohérente sur l'espace $\hat{\mathcal{E}}_S$ des superformes, ce qui justifiera la méthode a posteriori.

2.5.2 Équations de superdescente

Dans cette section, nous allons donc nous intéresser aux solutions des équations (2.56). Pour cela, nous introduisons des superformes $\hat{\Omega}_q^{D-q}$ définies par leur développement en puissance de $d\theta$ suivant

$$\hat{\Omega}_q^{D-q} = \sum_{p=0}^q {}^{q-p}\Omega_p^{D-q} (d\theta)^{q-p} \quad (q = 0, \dots, D). \quad (2.57)$$

Les coefficients de cette superforme sont tous les superchamps de degré de fantôme $D - q$, c'est-à-dire ceux qui se trouvent sur la ligne horizontale $g = D - q$ dans le triangle $Tri(D)$. Il est facile de voir que ces superformes satisfont des **équations de superdescente**,

$$\mathcal{S}\hat{\Omega}_q^{D-q} + \hat{\mathbf{d}}\hat{\Omega}_{q-1}^{D-q+1} = 0 \quad (q = 0, \dots, D), \quad (2.58)$$

où $\hat{\mathbf{d}}$ est la dérivée extérieure sur le superspace (cf. (1.22)).

Les deux systèmes d'équations (2.56) et (2.58) étant strictement équivalents, on va donc chercher les solutions sous la forme des superformes $\hat{\Omega}_q^{D-q}$, c'est-à-dire résoudre la cohomologie de \mathcal{S} modulo \hat{d} dans l'espace des superformes $\hat{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}}$.

À partir de la superforme $\hat{\Omega}_D^0$ de degré de fantôme nul qui est solution non triviale des équations de superdescente (2.58), on peut définir une «superobservable» $\hat{\Delta}_{(D)}$ comme l'intégrale sur le superspace

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_{(D)} &= \int_{\theta} \int_{\mathcal{M}} \hat{\Omega}_D^0 \\ &= \sum_{p=0}^D {}^{D-p+1}\Delta_{(p)} (\mathbf{d}\theta)^{D-p}\end{aligned}\quad (2.59)$$

conformément à la définition donnée en (1.25)). Les ${}^{D-p+1}\Delta_{(p)}$ sont les expressions définies en (2.49),

$${}^{D-p+1}\Delta_{(p)} = \int_{M_p} Q {}^{D-p}\Omega_p^0 = \int_{M_p} {}^{D-p+1}\omega_p^0 \quad (p = 0, \dots, D). \quad (2.60)$$

L'intérêt majeur est qu'il est possible de fonctionner par analogie avec le cas de Yang-Mills ordinaire. En effet, les équations de superdescente ont la même forme que les équations de descente de Yang-Mills ordinaire et les superformes \hat{A} et C ont des transformations BRST similaires aux champs a et c de la théorie ordinaire (cf. équations (2.4)).

Yang-Mills ordinaire	Yang-Mills topologique dans le superspace
a	\hat{A}
$\mathcal{S}a = -Dc$	$\mathcal{S}\hat{A} = -\hat{D}C$
c	C
$\mathcal{S}c = -c^2$	$\mathcal{S}C = -C^2$

TAB. 2.4 – Analogie entre Yang-Mills ordinaire et Yang-Mills topologique dans le superspace

Par conséquent, il suffit de reprendre les résultats concernant la cohomologie de Yang-Mills ordinaire [1] et de «rajouter des chapeaux un peu partout». On commence par introduire les différents cocycles fonctions de \hat{A} , C et de leurs superdérivées extérieures,

$$\begin{aligned}\theta_r(C) &= (-1)^{m_r-1} \frac{m_r!(m_r-1)!}{g_r!} \text{Tr } C^{g_r} & (g_r = 2m_r - 1), \\ f_r(\hat{F}) &= \text{Tr } \hat{F}^{m_r} & (r = 1, \dots, \text{rg } G),\end{aligned}\quad (2.61)$$

où $\text{rg } G$ représente le rang du groupe de structure G , r caractérisant le r -ième Casimir (de degré m_r).

Ces cocycles correspondent aux deux extrémités d'une tour d'équations de superdescente impliquant des superformes différentielles $[\hat{\theta}_r]_p^{g_r-p}$,

$$\mathcal{S} [\hat{\theta}_r]_p^{g_r-p} + \hat{\mathbf{d}} [\hat{\theta}_r]_{p-1}^{g_r-p+1} = 0 \quad (p = 0, \dots, g_r), \quad (2.62)$$

avec les relations $[\hat{\theta}_r]_0^{g_r} = \theta_{g_r}(C)$ et $\hat{\mathbf{d}} [\hat{\theta}_r]_{g_r}^0 = f_r(\hat{F})$.

Les superformes $[\hat{\theta}_r]_p^{g_r-p}$ constituent donc une solution particulière des équations (2.58). Afin de trouver une solution plus générale, il est possible de rajouter au terme de degré de forme nul $\theta_r(C)$ une combinaison de facteurs $f_s(\hat{F})$ puisque, de toute façon, ces derniers sont invariants sous \mathcal{S} (invariance de jauge) et sous $\hat{\mathbf{d}}$ (cf. équation de Bianchi généralisée (2.11)). On construit ainsi d'autres supercocycles

$$\hat{\mathcal{H}} = \theta_{r_1}(C) f_{r_2}(\hat{F}) \dots f_{r_L}(\hat{F}) \quad (L \geq 1, \quad r_i \leq r_{i+1}), \quad (2.63)$$

de degré de fantôme g_{r_1} et de degré de forme $D_R = \sum_{i=2}^L 2m_{r_i}$. Par suite des équations (2.62), les superformes

$$\hat{\Omega}_{D_R+p}^{g_{r_1}-p} = [\hat{\theta}_{r_1}]_p^{g_{r_1}-p} f_{r_2}(\hat{F}) \dots f_{r_L}(\hat{F}) \quad (p = 0, \dots, g_{r_1}; \quad L \geq 1), \quad (2.64)$$

satisfont aux équations de superdescente (2.58).

Remarque : Dans le cas le plus général, on devrait prendre des supercocycles $\hat{\mathcal{H}}$ comportant plusieurs formes $\theta_r(C)$. Cependant, nous nous intéressons ici à des observables de degré de fantôme nul. D'après [1], seuls les cocycles ne comportant qu'un seul monôme $\theta_r(C)$ permettent d'arriver à ce résultat.

À partir de (2.64), on obtient donc la forme générale des observables

$$\hat{\Omega}_D^0 = [\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}}^0 f_{r_2}(\hat{F}) \dots f_{r_L}(\hat{F}) \equiv \sum_{p=0}^D D^{-p} \Omega_p^0(\mathbf{d}\theta)^{D-p}, \quad (2.65)$$

avec le degré total $D = D_R + g_{r_1} = \sum_{i=2}^L 2m_{r_i} + 2m_{r_1} - 1 = 2 \sum_{i=1}^L m_{r_i} - 1 \quad (L \geq 1)$.

Écriture alternative des solutions

Afin d'obtenir les observables, il faut extraire le polynôme $D^{-p+1}\omega_p^0$ de la superforme $\hat{\Omega}_D^0$. Cela peut se faire de manière plus simple (mais équivalente) en partant du principe que la superdérivée extérieure $\hat{\mathbf{d}} \equiv \mathbf{d} + \mathbf{d}\theta\partial_\theta$ ne diffère de l'opérateur de supersymétrie (ie de ∂_θ) que par un facteur $\mathbf{d}\theta$ et l'addition d'une dérivée totale.

Ainsi si l'on calcule la superdérivée extérieure de $\hat{\Omega}_D^0$, on peut écrire le développement en puissances de $d\theta$ en utilisant l'identité de Bianchi généralisée (2.11),

$$\begin{aligned}\hat{d}\hat{\Omega}_D^0 &= f_{r_1}(\hat{F}) \dots f_{r_L}(\hat{F}) \\ &= f_{r_1}(F_A) \dots f_{r_L}(F_A) + \sum_{p=0}^D {}^{D+1-p}W_p^0 (d\theta)^{D+1-p},\end{aligned}\quad (2.66)$$

où les ${}^{D+1-p}W_p^0$ sont donnés par

$$\begin{aligned}{}^{D+1-p}W_p^0 &= Q {}^{D-p}\Omega_p^0 + \mathbf{d}^{D-p+1}\Omega_{p-1}^0 \\ &= {}^{D-p+1}\omega_p^0(x) + \mathbf{d}^{D-p+1}\Omega_{p-1}^0(x, \theta).\end{aligned}\quad (2.67)$$

Si l'on évalue ${}^{D+1-p}W_p^0$ en $\theta = 0$ alors le second terme dans l'expression précédente devient une dérivée totale qui disparaît à l'intégration. On trouve ainsi qu'il est possible de substituer ${}^{D-p+1}\omega_p^0(x)$ à ${}^{D+1-p}W_p^0|_{\theta=0}$ dans l'intégrale (2.37) définissant Δ .

Par ailleurs, en appliquant une nouvelle fois la superdérivée extérieure à l'expression (2.66), compte tenu de la nilpotence de l'opérateur \hat{d} , on peut en dégager le système d'équations

$$Q {}^{D-p+1}W_p^0 + \mathbf{d}^{D-p+2}W_{p-1}^0 = 0 \quad (p = 0, \dots, D), \quad (2.68)$$

ce qui donne, en $\theta = 0$,

$$Q {}^{D-p+1}\omega_p^0 + \mathbf{d}^{D-p+2}\omega_{p-1}^0 = 0 \quad (p = 0, \dots, D). \quad (2.69)$$

On obtient donc le même système d'équations de descente que dans la caractérisation de Witten des observables, à la différence près qu'ici, nous sommes en superjauge générale et non en jauge de Wess et Zumino (Q apparaît à la place de \tilde{Q}).

En imposant les conditions de jauge de Wess et Zumino, on retrouve les résultats de Witten, par exemple au degré de forme 0, on trouve

$${}^{D+1}\omega_0^0 = f_{r_1}(\phi) \dots f_{r_L}(\phi) \quad (L \geq 1, \quad r_i \leq r_{i+1}), \quad (2.70)$$

à savoir que la cohomologie à degré de forme nul est engendrée par les polynômes invariants de jauge ne dépendant que de ϕ .

2.5.3 Solutions générales des équations de bi-descente

Ainsi que nous l'avons évoqué à la section précédente, les solutions des équations de superdescente ne constituent qu'une partie de l'ensemble des solutions des équations de bi-descente. En réalité, il existe deux classes de solutions : une première qui reproduit les solutions données par les équations de superdescente et une deuxième qui est triviale au sens de la cohomologie équivariante de Witten (cf. section 2.3.2). Nous énonçons le résultat général ici, la démonstration est reléguée en annexe A afin de ne pas encombrer la discussion par des calculs un peu techniques.

Première classe de solutions

Elles sont données par les superchamps

$${}^{D-d}\Omega_d^0 = [[\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}}^0 f_{r_2}(\hat{F}) \cdots f_{r_L}(\hat{F})]_{s=D-d, p=d} \quad (2.71)$$

avec $D = 2 \sum_{i=1}^L m_{r_i} - 1, \quad L \geq 1,$

où la notation $[]_{s=D-d, p=d}$ signifie qu'on ne garde dans le développement du produit $[\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}}^0 f_{r_2}(\hat{F}) \cdots f_{r_L}(\hat{F})$ que les termes de degré de forme d et de degré de supersymétrie $D - d$.

Les observables sont obtenues par intégration de la Q -variation de (2.71) sur une variété de dimension d (cf. (2.60)). En réalité, pour $d = 0, 1, \dots, D$, les expressions (2.71) sont exactement celles introduites en (2.65). Par conséquent, cette première classe de solutions correspond aux solutions obtenues en résolvant les équations de superdescente.

Deuxième classe de solutions

Ces solutions, qui correspondent à une solution triviale au sens de la cohomologie équivariante mais pas dans notre approche, sont données par des polynômes invariants de jauge, ne dépendant que de la courbure F_A et des superchamps Ψ, Φ ainsi que de leurs dérivées covariantes,

$${}^{D-d}\Omega_d^0 = {}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0(F_A, \Psi, \Phi, D_A\Psi, D_A\Phi). \quad (2.72)$$

\mathcal{Z} est non-trivial dans le sens où ${}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0 \neq d {}^{D-d}\Phi_{d-1}^0 + Q {}^{D-d-1}\Phi_d^0$.

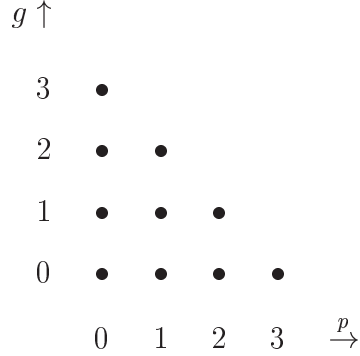
Les expressions intégrées sont donc de la forme $\Delta = \int_{M_d} Q {}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0$. Sur les fonctionnelles invariantes de jauge, Q se comporte de la même façon que Q_0 (voir la discussion suivant la relation (2.15)). Par conséquent, en projetant en jauge de Wess et Zumino, Q_0 est remplacé par \tilde{Q} et donc l'intégrale Δ précédente est simplement une variation supersymétrique (au sens de \tilde{Q}) d'une fonctionnelle invariante. Elle constitue donc une solution triviale du point de vue de la cohomologie équivariante.

2.6 Applications et développements explicites

2.6.1 Représentation graphique des équations de bi-descente

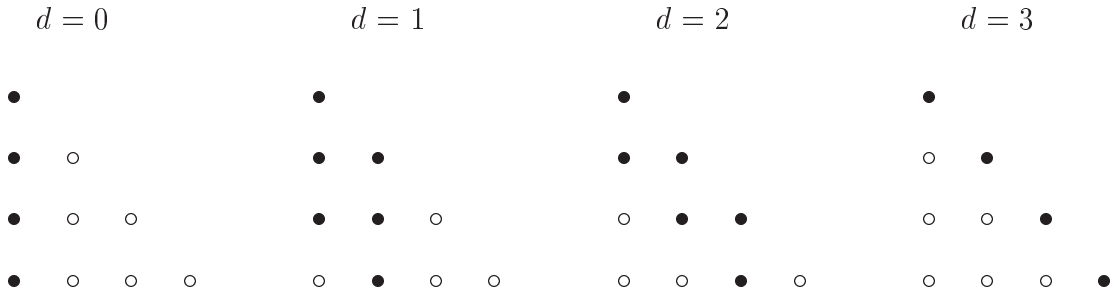
Nous allons maintenant donner une représentation graphique du système d'équations de bi-descente qui permet de visualiser quelles sont les superchamps intervenant dans les différentes équations.

Dans le cas du degré total $D = 3$, on a affaire à 10 superchamps ${}^{3-p-g}\Omega_p^g$ ($0 \leq p \leq 3$ et $0 \leq g \leq 3$). Dans le plan (p, g) , ces superchamps se répartissent comme suit :



On repère le degré de forme p sur l'axe horizontal et le degré de fantôme g sur l'axe vertical (par exemple, le point $(0, 2)$ correspond à ${}^1\Omega_0^2$).

Représentons maintenant les 4 parallélogrammes $Par(d, 3)$ correspondant aux 4 jeux distincts d'équations de bi-descente (2.55) :



Quand d varie de 0 à $D = 3$, les parallélogrammes $Par(d, D)$ décrivent bien la totalité du triangle qui décrit quant à lui l'ensemble (2.58) des équations de superdescente. Dans le cas $D = 3$, les équations de superdescente ont la même forme que les équations de descente de la théorie de Chern et Simons dont les solutions sont bien connues [35],

$$\begin{aligned}
 \hat{\Omega}_0^3 &= -\frac{1}{3} \text{Tr} (C^3), & \hat{\Omega}_1^2 &= \text{Tr} (C \hat{d}C), \\
 \hat{\Omega}_2^1 &= \text{Tr} (\hat{A} \hat{d}C), & \hat{\Omega}_3^0 &= \text{Tr} (\hat{A} \hat{d}\hat{A} + \frac{2}{3} \hat{A}^3).
 \end{aligned}
 \tag{2.73}$$

2.6.2 Exemples d'observables

Nous allons prendre comme exemple le groupe de jauge $U(1) \times SU(2)$. Ce groupe possède plusieurs opérateurs de Casimir : celui de $U(1)$ de degré $m_1 = 1$ et celui de $SU(2)$ de degré $m_2 = 2$. Dans la suite, l'indice (a) (pour abélien) renverra aux quantités du secteur $U(1)$, les quantités du secteur $SU(2)$ seront notées comme précédemment.

On définit les fantômes et les connexions sur chacun des secteurs

$$\begin{aligned} U(1) : \quad & C_{(a)}, \quad \hat{A}_{(a)}, \quad \hat{F}_{(a)} = \hat{\mathbf{d}}\hat{A}_{(a)}; \\ SU(2) : \quad & C, \quad \hat{A}, \quad \hat{F} = \hat{\mathbf{d}}\hat{A} + \hat{A}^2. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Les cocycles (2.61) prennent la forme

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_1(C_{(a)}) = C_{(a)}, \quad & f_1 = f_1(\hat{F}_{(a)}) = \hat{F}_{(a)}, \\ \theta_2 = \theta_2(C) = -\frac{1}{3} \text{Tr} C^3, \quad & f_2 = f_2(\hat{F}) = \text{Tr} \hat{F}^2. \end{aligned} \quad (2.75)$$

La résolution des équations de superdescente (2.58) fait intervenir les superformes $[\hat{\theta}_r]_p^{g_r-p}$,

$$\begin{aligned} U(1) : \quad & [\hat{\theta}_1]_0^1 = \theta_1, \quad [\hat{\theta}_1]_1^0 = \hat{A}_{(a)}; \\ SU(2) : \quad & [\hat{\theta}_2]_0^3 = \theta_2, \quad [\hat{\theta}_2]_1^2 = \text{Tr}(C\hat{\mathbf{d}}C), \\ & [\hat{\theta}_2]_2^1 = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\mathbf{d}}C), \quad [\hat{\theta}_2]_3^0 = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\mathbf{d}}\hat{A} + \frac{2}{3}\hat{A}^3). \end{aligned} \quad (2.76)$$

À partir de là, trois cas sont à envisager dans la construction des observables : on peut considérer les solutions correspondant au Casimir d'un seul secteur ($U(1)$ ou $SU(2)$) mais on peut aussi regarder des observables « composites » formées à partir des deux jeux de solutions ci-dessus.

En revanche, il est impossible de construire des observables de degré de fantôme nul en partant d'une superforme telle que $\hat{\Omega}_0^4 = \theta_1\theta_2$ par exemple. Cela illustre la remarque faite plus haut, selon lequel l'ascension dans la tour d'équations de descente s'arrête quand le degré de forme atteint le degré de fantôme de la forme θ_r de plus petit degré (ici, on s'arrête au niveau 1 à cause de θ_1).

Observables construites à partir du Casimir de $U(1)$

Le système d'équations de superdescente pour $D = 1$ s'écrit

$$\mathcal{S}\hat{\Omega}_0^1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}\hat{\Omega}_1^0 + \hat{\mathbf{d}}\hat{\Omega}_0^1 = 0 \quad (2.77)$$

et admet comme solutions les superformes différentielles données en (2.76) :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_0^1 &= {}^0\Omega_0^1 = \theta_1 = C_{(a)}, \\ \hat{\Omega}_1^0 &= {}^0\Omega_1^0 + {}^1\Omega_0^0\mathbf{d}\theta = \hat{A}_{(a)}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Afin de déterminer les observables correspondantes, on va calculer la superdérivée extérieure de $\hat{\Omega}_1^0$ évaluée en $\theta = 0$ (en accord avec la remarque faite précédemment à la fin de la section 2.5.2, page 49) :

$$\hat{\mathbf{d}}\hat{\Omega}_1^0|_{\theta=0} = \hat{F}_{(a)}|_{\theta=0} = F_{(a)} + {}^1w_1^0\mathbf{d}\theta + {}^2w_0^0(\mathbf{d}\theta)^2, \quad (2.79)$$

avec $F_{(a)}$, ${}^1w_1^0$ et ${}^2w_0^0$ donnés par

$$F_{(a)} = \mathbf{d}a_{(a)}, \quad {}^1w_1^0 = \psi_{(a)} + \mathbf{d}\chi_{(a)} \quad \text{et} \quad {}^2w_0^0 = \phi_{(a)}. \quad (2.80)$$

Si l'on écarte l'observable triviale $\int_{M_2} F_{(a)}$ du fait que $F_{(a)}$ est une différentielle totale, on aboutit à deux observables qui sont les intégrales de ${}^1w_1^0$ et ${}^2w_0^0$ respectivement sur des variétés M_1 de dimension 1 et M_0 de dimension 0.

Ces résultats sont équivalents au calcul de la superintégrale $\hat{\Delta}_{(1)}$ sur une collection $\mathcal{M} = (M_0, M_1 \dots)$ de variétés telle qu'elle a été définie en (2.59),

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_{(1)} &= \int_{\theta} \int_{\mathcal{M}} \hat{\Omega}_1^0 \\ &= \int_{\mathcal{M}} \partial_{\theta} \hat{\Omega}_1^0 \\ &= \sum_{p=0}^1 (\mathbf{d}\theta)^{1-p} \int_{M_p} {}^{2-p}w_p^0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Observables construites à partir du Casimir de $SU(2)$

Cette fois, le degré total vaut $D = 3$ et la superforme en bas de la tour d'équations de bi-descente est égale à $\hat{\Omega}_0^3 = \theta_2$. Les solutions sont données par les expressions (2.76) pour $SU(2)$. De la même manière, nous évaluons les observables en calculant en $\theta = 0$ la valeur de la superdérivée extérieure de la superforme de degré de fantôme nul,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}\hat{\Omega}_3^0|_{\theta=0} &= \text{Tr} \hat{F}^2|_{\theta=0} \\ &= \text{Tr} F^2 + \sum_{p=0}^3 {}^{4-p}w_p^0 (\mathbf{d}\theta)^{4-p}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

En décomposant la superconnexion \hat{A} suivant (2.5), on obtient les expressions de chacune des formes ${}^{4-p}w_p^0$,

$$\begin{aligned} {}^4w_0^0 &= \text{Tr}(\phi^2 + 2\phi\chi^2), \\ {}^3w_1^0 &= \text{Tr} 2(\psi\phi + \psi\chi^2 + \phi\mathbf{D}\chi) + \text{Tr}\left(\frac{2}{3}\chi^3\right), \\ {}^2w_2^0 &= \text{Tr}(\psi^2 + 2\phi F + 2\psi\mathbf{D}\chi) + \mathbf{d} \text{Tr}(\chi\mathbf{D}\chi), \\ {}^1w_3^0 &= \text{Tr}(2\psi F) + \mathbf{d} \text{Tr}(2\chi F). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Les observables sont les intégrales sur des variétés de dimension adéquate de ces formes différentielles (avec, en plus, l'intégrale de $\text{Tr} F^2$).

Observables « composites »

Comme évoqué précédemment dans la section 2.5.2, il est possible de construire des observables en partant de formes $\hat{\mathcal{H}}$ plus générales.

Considérons par exemple le cas le plus simple construit en partant de la forme $\Omega_2^1 = \theta_1 f_1$. Ici, le degré total vaut $D = 3$ et la forme de degré de fantôme nul est $\hat{\Omega}_3^0 = \hat{A}_{(a)} \hat{F}_{(a)}$. Si l'on calcule sa superdérivée extérieure $\hat{d}\hat{\Omega}_3^0$, on détermine les formes différentielles \tilde{w}_p

$$\begin{aligned}
 {}^4\tilde{w}_0^0 &= ({}^2w_2^0)^2 = \phi_{(a)}^2, \\
 {}^3\tilde{w}_1^0 &= 2({}^1w_1^0)({}^2w_0^0), \\
 {}^2\tilde{w}_2^0 &= 2{}^2w_2^0 F_{(a)} + ({}^1w_1^0)^2, \\
 {}^1\tilde{w}_3^0 &= 2{}^1w_1^0 F_{(a)}, \\
 {}^0\tilde{w}_4^0 &= F_{(a)}^2.
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Comme prévu d'après les résultats généraux de la section précédente, ces solutions sont bien des polynômes dans les variables w_p précédentes ainsi que $F_{(a)}$. Comme précédemment, les observables sont les intégrales sur des variétés de dimension adéquate de ces formes différentielles.

2.7 Résumé

La représentation de la symétrie topologique à travers le superspace a permis de mettre en avant la structure des symétries du système : symétrie de jauge caractérisée par l'opérateur BRST \mathcal{S} usuel et symétrie topologique caractérisée par l'opérateur de supersymétrie Q .

L'étude des classes de la cohomologie équivariante de la théorie de Yang-Mills topologique peut être effectuée en étudiant la cohomologie de l'opérateur BRST \mathcal{S} (modulo d) dans l'espace des polynômes fonctions de la superconnexion \hat{A} , de son superfantôme C et de leurs dérivées covariantes. La détermination de cette cohomologie utilise des extensions des techniques habituelles [1], d'une part dans un formalisme de superspace, d'autre part dans le cas où l'on considère deux opérateurs de type BRST, à savoir \mathcal{S} et Q . Ceci nous amène à considérer des équations de bi-descente, généralisation des équations de descente habituelles.

Notre principal résultat est que la résolution de ces équations de bi-descente fournit deux types de solutions : l'un d'eux correspond à des observables triviales du point de vue de Witten, l'autre type correspond à une généralisation à une superjauge quelconque des résultats de Witten (ses résultats pouvant être retrouvés en appliquant une condition de jauge de type Wess et Zumino).

Au final, cette approche a permis de mettre en avant non seulement un formalisme général qui peut ensuite être appliqué à des théories plus complexes, par exemple la

gravité topologique (cf. chapitre suivant) ou des théories de Yang-Mills topologiques possédant plusieurs opérateurs de supersymétrie [36]. Mais nous avons également pu déterminer complètement l'ensemble des observables de la théorie de Yang-Mills topologique et confirmer que celles qui avaient été trouvées jusque là étaient les seules possibles.

Chapitre 3

Approche d'une théorie topologique de la gravité

La théorie d'Einstein de la relativité générale a la propriété intéressante à trois dimensions (une de temps et deux d'espace) d'être une théorie topologique. La remarque n'est cependant plus vraie en dimension 4, où l'existence du graviton traduit la présence de degrés de liberté locaux. Néanmoins, il peut être intéressant de chercher à construire une théorie topologique dont la relativité générale serait la manifestation de basse énergie résultant d'une brisure de la symétrie topologique. Depuis quelques années en effet se développe un lien important entre ces modèles topologiques et des théories non topologiques, telle que la gravité quantique non perturbative [37–41].

Initialement, la relativité générale s'appuie sur un formalisme métrique. Cela se comprend si l'on considère le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ comme la variable la plus « accessible » à première vue, en ce sens où il permet de décrire la distance entre deux points de l'espace-temps. Il représente la généralisation aux espaces courbes de la métrique plate (minkowskienne) de la théorie de la relativité restreinte. Cependant, on utilisera dans la suite plutôt un formalisme différent, faisant intervenir le *vielbein* qui fait en quelque sorte le lien entre l'espace-temps courbe et l'espace tangent plat.

Plusieurs modèles de gravité topologique ont ainsi été définis et étudiés dans le passé. Les premiers articles sur le sujet remontent à un peu moins de 20 ans [42–47] et étaient consacrés à la construction de modèles alors que les travaux plus récents se focalisent sur la détermination d'observables non triviales [5–10, 48]. Certains modèles ont proposé une version topologique de la gravité conforme à la Weyl [42–45, 49] mais ils ne fournissent pas d'observables non triviales. Enfin les modèles plus récents se concentrent sur la théorie topologique obtenue à partir du *twist* d'une théorie de supergravité étendue possédant, en plus des champs habituels, un secteur de Maxwell (correspondant au graviphoton) [50–52]. À noter qu'on trouve également des approches par les théories de type BF dans certains articles [53, 54].

Devant la profusion de formulations différentes, nous allons d'abord faire une mise au point des différentes approches (utilisant la métrique ou le vielbein) ainsi que des liens entre ces différents formalismes avant de développer une approche des champs et des symétries dans le superspace. Comme dans le cas de Yang-Mills topologique (cf. chapitre précédent), un choix de jauge judicieux de type Wess et Zumino permet de faire le lien avec les résultats antérieurs connus.

3.1 Les différents formalismes de la relativité générale

3.1.1 Formalisme métrique

Le plus souvent, on décrit la gravitation par un formalisme utilisant comme variable principale la métrique $g_{\mu\nu}$ de la variété considérée. On lui associe les symboles de Christoffel (ou la connexion affine)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}).$$

À partir de cette connexion, on peut définir la dérivée covariante d'un vecteur A^{ν} : $\nabla_{\mu}A^{\nu} = \partial_{\mu}A^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}A^{\alpha}$. Le commutateur de deux dérivées covariantes donne le tenseur de courbure de Riemann,

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]A_{\rho} = A_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu},$$

dont on tire le tenseur de Ricci en effectuant la contraction suivante sur deux indices :

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}.$$

On peut donner une formulation lagrangienne de la théorie d'Einstein. En présence de matière, l'action de la relativité générale à quatre dimensions s'écrit

$$S_G = \int \sqrt{g} \, d^4x \left(\mathcal{L}_M + \frac{\mathcal{R}}{16\pi G} \right), \quad (3.1)$$

où \mathcal{R} est la courbure scalaire définie à partir du tenseur de Ricci, $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ et \mathcal{L}_M le lagrangien décrivant la matière. Si l'on dérive les équations du mouvement de la variable métrique $g_{\mu\nu}$, on retrouve l'équation d'Einstein,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

où $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion.

3.1.2 Formalisme du premier ordre

Dans l'optique de traiter la relativité générale de manière analogue à une théorie de jauge (et par extension, la gravité topologique), on utilisera dans la suite un formalisme du premier ordre.

Pour cela, on introduit deux formes différentielles de degré 1 :

- une connexion de Lorentz $(\omega^a{}_b) \equiv (\omega^a{}_b)_{\mu} dx^{\mu}$;
- un vielbein¹⁴ $e^a \equiv (e^a)_{\mu} dx^{\mu}$.

¹⁴à 3+1 dimensions, on parle aussi de vierbein ou de tétrade. Dans notre discussion qui se veut indépendante de la dimension de la variété, nous emploierons systématiquement le terme de *vielbein*.

Ici, les indices a, b, \dots sont des indices d'espace plat (ils peuvent être élevés ou abaissés au moyen de la métrique η_{ab} de l'espace tangent (métrique dont la signature peut être choisie minkowskienne ou euclidienne) contrairement aux indices grecs μ, ν, \dots qui se réfèrent à l'espace courbe muni de la métrique $g_{\mu\nu}$. Dans la suite, on omettra souvent les indices a, b, \dots en utilisant la notation matricielle : e, ω, \dots

Les tenseurs de champ associés sont :

- pour le vielbein e , la torsion : $T = De \equiv de + \omega e$;
- pour la connexion ω , la courbure : $R = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

Ces champs satisfont aux identités de Bianchi

$$\begin{aligned} DR = 0 & \quad \text{avec} \quad DR = dR + [\omega, R]; \\ DT = Re & \quad \text{avec} \quad DT = dT + \omega T. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La métrique est en quelque sorte le « carré » du vielbein,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu. \tag{3.4}$$

3.1.3 Formalisme du second ordre

On peut aussi définir un formalisme du second ordre en éliminant la connexion de Lorentz ω . Pour cela, on utilise l'équation du mouvement pour ω dérivée à partir du lagrangien de Hilbert et Einstein.

Cette équation du mouvement est en réalité équivalente à la condition de torsion nulle $T = 0$. La connexion ω n'est donc plus un champ indépendant mais est une fonction du vielbein e^a et de son inverse. Remarquons que cela suppose que le vielbein soit inversible.

3.2 Les précédentes formulations de la gravité topologique

3.2.1 Formalisme du premier ordre

En plus des champs fondamentaux que sont le vielbein e et la connexion de spin ω évoqués dans la section précédente, nous introduisons également une connexion $U(1)$, a , qui correspond au graviphoton de la théorie de supergravité étendue dont est supposée émerger la théorie topologique après le *twist*.

Nous avons donc trois champs fondamentaux

- le vielbein e^a donnant lieu à la torsion $T = De = de + \omega e$;
- la connexion de spin $\omega^a{}_b$ donnant lieu à la courbure $R = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$;
- la connexion a donnant lieu au tenseur de champ $F_a = da$;

et trois symétries

- les transformations de jauge caractérisées par un champ fantôme $c^a{}_b$;

- les difféomorphismes caractérisés par un champ de vecteurs fantôme $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$;
- les transformations $U(1)$ locales caractérisées par un fantôme u .

Les champs ω et c prennent leurs valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, par conséquent on a $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ et $c_{ab} = -c_{ba}$.

Nous allons utiliser dans cette section le formalisme des conditions d'horizontalité [55–57]. On définit une dérivée généralisée $\hat{d} = d + \mathcal{S}$ et les champs généralisés

$$\begin{aligned}
\hat{\omega} &= e^{i\xi}(\omega + c) = \omega + c + i_\xi \omega, \\
\hat{e} &= e^{i\xi}e = e + i_\xi e, \\
\hat{a} &= e^{i\xi}(a + u) = a + u + i_\xi a, \\
\hat{R} &= \hat{d}\hat{\omega} + \frac{1}{2}[\hat{\omega}, \hat{\omega}], \\
\hat{T} &= \hat{D}\hat{e} \equiv \hat{d}\hat{e} + \hat{\omega}\hat{e}, \\
\hat{F}_a &= \hat{d}\hat{a}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

qui satisfont les identités de Bianchi généralisées

$$\begin{aligned}
\hat{D}\hat{R} &= 0, & \hat{D}\hat{T} &= \hat{R}\hat{e}, \\
\hat{d}\hat{F}_a &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Si l'on développe la 2-forme généralisée de courbure \hat{R} en fonction du degré de fantôme, on obtient

$$\hat{R} = R_2^0 + R_1^1 + R_0^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_2^0 = R, \\ R_1^1 = \mathcal{S}\omega + \mathbf{D}c_\xi, \\ R_0^2 = \mathcal{S}c_\xi + c_\xi^2. \end{cases} \quad (c_\xi = c + i_\xi \omega) \tag{3.7}$$

Les expressions sont similaires pour les autres 2-formes \hat{T} et \hat{F}_a .

On obtient les transformations BRST de tous les champs en imposant certaines conditions d'horizontalité sur les 2-formes précédentes. Dans le cas de la gravité topologique, on impose les conditions suivantes [51]¹⁵,

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= e^{i\xi}(R + \tilde{\psi} + \tilde{\phi}), \\
\hat{T} &= e^{i\xi}(T + \psi + \phi), \\
\hat{F}_a &= e^{i\xi}(F_a + \eta + t).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

¹⁵qui sont la généralisation des conditions d'horizontalité pour la théorie de Yang-Mills topologique, cf [4].

Les champs ψ , $\tilde{\psi}$ et η sont des 1-formes de degré de fantôme 1 et les champs ϕ , $\tilde{\phi}$ et t sont des 0-formes de degré de fantôme 2. Les champs $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\phi}$ sont à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, c'est-à-dire qu'on a $\tilde{\psi}_{ab} = -\tilde{\psi}_{ba}$ et $\tilde{\phi}_{ab} = -\tilde{\phi}_{ba}$.

Dans le développement, on peut factoriser le terme $e^{i\xi}$ au moyen de la relation [58, 59]

$$(\mathbf{d} + \mathcal{S})e^{i\xi} = e^{i\xi}(\mathbf{d} + \mathcal{S} - \mathcal{L}_\xi + i_{\mathcal{S}\xi - \xi^2}), \quad (3.9)$$

qui fait apparaître le champ de vecteurs $\varphi \equiv \varphi^\mu \partial_\mu = \mathcal{S}\xi - \xi^2$. Ce champ de vecteurs est de degré de fantôme 2 et caractérise un *shift* local du fantôme ξ des difféomorphismes ; il paramétrise donc la supersymétrie vectorielle [60]. La nilpotence de l'opérateur BRST impose les relations

$$\mathcal{S}\xi = \xi^2 + \varphi, \quad \mathcal{S}\varphi = [\xi, \varphi]. \quad (3.10)$$

À partir des relations (3.6) et (3.8), on obtient les transformations BRST des champs ainsi que la relation $\phi = i_\varphi e$, qu'on peut réécrire $\varphi^\mu = \phi^a e_a^\mu$ à condition de supposer le vielbein inversible. Cette hypothèse d'inversibilité est en réalité nécessaire car le champ φ (et non ϕ) intervient explicitement dans la variation BRST de ξ . On procède donc à la redéfinition

$$\tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\phi} - i_\varphi \omega, \quad t \rightarrow \tau \equiv t - i_\varphi a. \quad (3.11)$$

Les transformations BRST des champs prennent alors la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}e &= \mathcal{L}_\xi e - ce + \psi, & \mathcal{S}\xi &= \xi^2 + \varphi, \\ \mathcal{S}\psi &= \mathcal{L}_\xi \psi - c\psi - \mathcal{L}_\varphi e + \tilde{\varphi}e, & \mathcal{S}\varphi &= [\xi, \varphi], \\ \mathcal{S}\omega &= \mathcal{L}_\xi \omega - \mathbf{D}c + \tilde{\psi}, & \mathcal{S}c &= \mathcal{L}_\xi c - c^2 + \tilde{\varphi}, \\ \mathcal{S}\tilde{\psi} &= \mathcal{L}_\xi \tilde{\psi} - [c, \tilde{\psi}] - \mathcal{L}_\varphi \omega - \mathbf{D}\tilde{\varphi}, & \mathcal{S}\tilde{\varphi} &= \mathcal{L}_\xi \tilde{\varphi} - [c, \tilde{\varphi}] - \mathcal{L}_\varphi c, \\ \mathcal{S}a &= \mathcal{L}_\xi a - \mathbf{d}u + \eta, & \mathcal{S}u &= \mathcal{L}_\xi u + \tau, \\ \mathcal{S}\eta &= \mathcal{L}_\xi \eta - \mathcal{L}_\varphi a - \mathbf{d}\tau, & \mathcal{S}\tau &= \mathcal{L}_\xi \tau - \mathcal{L}_\varphi u \end{aligned} \quad (3.12)$$

et celles des tenseurs de champs correspondants

$$\begin{aligned} \mathcal{S}R &= \mathcal{L}_\xi R - [c, R] - \mathbf{D}\tilde{\psi}, & \mathcal{S}T &= \mathcal{L}_\xi T - cT + \tilde{\psi}e - \mathbf{D}\psi, \\ \mathcal{S}F_a &= \mathcal{L}_\xi F_a - \mathbf{d}\eta & & . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Par construction, l'opérateur BRST \mathcal{S} est nilpotent et les transformations précédentes correspondent à celles présentées dans [48, 51], à la différence que certains termes manquent dans la variation de T dans [48] et de $\tilde{\varphi}$ dans [51]. Ces termes sont pourtant nécessaires à la nilpotence de l'algèbre BRST.

Interprétation des différents termes de l'algèbre

On peut comprendre de manière très simple les différents termes apparaissant dans (3.12). Dans le secteur gravitationnel, nous avons deux champs de base : le vielbein e et la connexion de Lorentz ω et plusieurs symétries : les difféomorphismes (caractérisés par la dérivée de Lie \mathcal{L}_ξ), les transformations de Lorentz locales (transformations de jauge paramétrées par c) et la symétrie topologique ($\delta_{top} e = \psi$ et $\delta_{top} \omega = \tilde{\psi}$).

$\mathcal{S}e$ est réductible en ce sens qu'il reste invariant sous les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} - \delta_\varphi \xi &= \varphi & \text{et} & & \delta_\varphi \psi &= -\mathcal{L}_\varphi e; \\ - \delta_{\tilde{\varphi}} c &= \tilde{\varphi} & \text{et} & & \delta_{\tilde{\varphi}} \psi &= \tilde{\varphi} e. \end{aligned}$$

De la même façon, $\mathcal{S}\omega$ est réductible par rapport aux transformations suivantes :

$$\begin{aligned} - \delta_\varphi \xi &= \varphi & \text{et} & & \delta_\varphi \tilde{\psi} &= -\mathcal{L}_\varphi \omega; \\ - \delta_{\tilde{\varphi}} c &= \tilde{\varphi} & \text{et} & & \delta_{\tilde{\varphi}} \tilde{\psi} &= \mathbf{D}\tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

La construction complète de l'algèbre peut alors se faire en rajoutant les termes de difféomorphismes et de transformation de Lorentz locale pour tous ces champs. Notons que $\mathcal{S}c$ est réductible par rapport à $\delta_\varphi \xi = \varphi$ si l'on transforme $\tilde{\varphi}$ selon $\delta_\varphi \tilde{\varphi} = -\mathcal{L}_\varphi c$.¹⁶ Les champs φ et $\tilde{\varphi}$ jouent le rôle de fantômes pour les fantômes ξ et c .

Le raisonnement effectué ici se transpose sans encombre au secteur de Maxwell.

Analogie avec la théorie de Yang-Mills topologique

Les transformations BRST (3.12- 3.13) possèdent une propriété intéressante qui sera utile au moment de la discussion sur les observables. Pour mettre ceci en évidence, nous allons écrire les formes généralisées de manière légèrement différente au moyen d'une redéfinition de certains champs. Les relations (3.5) se mettent sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega + c_\xi & \text{avec} & & c_\xi &\equiv c + i_\xi \omega, \\ \hat{e} &= e + \varepsilon_\xi & \text{avec} & & \varepsilon_\xi &\equiv \xi^a = \xi^\mu e_\mu^a, \\ \hat{a} &= a + u_\xi & \text{avec} & & u_\xi &\equiv u + i_\xi a \end{aligned} \tag{3.14}$$

et les conditions d'horizontalité (3.8) deviennent

$$\begin{aligned} \hat{R} &= R + \tilde{\psi}_\xi + \tilde{\phi}_\xi, & \hat{T} &= T + \psi_\xi + \phi_\xi, \\ \hat{F}_a &= F_a + \eta_\xi + t_\xi, \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec $\tilde{\psi}_\xi = \tilde{\psi} + i_\xi R$ et $\tilde{\phi}_\xi = \tilde{\phi} + i_\xi \tilde{\psi} + \frac{1}{2} i_\xi i_\xi R$ et ainsi de suite.

¹⁶Lors de cette construction de l'algèbre, les différents signes sont ajustés afin d'assurer la nilpotence de l'algèbre complète.

Les transformations BRST s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}e &= -\mathbf{D}\varepsilon_\xi - c_\xi e + \psi_\xi, & \mathcal{S}\varepsilon_\xi &= -c_\xi \varepsilon_\xi + \phi_\xi, \\
 \mathcal{S}\psi_\xi &= -\mathbf{D}\phi_\xi - c_\xi \psi_\xi + \tilde{\psi}_\xi \varepsilon_\xi + \tilde{\phi}_\xi, & \mathcal{S}\phi_\xi &= -c_\xi \phi_\xi + \tilde{\phi}_\xi \varepsilon_\xi, \\
 \mathcal{S}\omega &= -\mathbf{D}c_\xi + \tilde{\psi}_\xi, & \mathcal{S}c_\xi &= -c_\xi^2 + \tilde{\phi}_\xi, \\
 \mathcal{S}\tilde{\psi}_\xi &= -\mathbf{D}\tilde{\phi}_\xi - [c_\xi, \tilde{\psi}_\xi], & \mathcal{S}\tilde{\phi}_\xi &= -[c_\xi, \tilde{\phi}_\xi], \\
 \mathcal{S}a &= -\mathbf{d}u_\xi + \eta_\xi, & \mathcal{S}u_\xi &= t_\xi, \\
 \mathcal{S}\eta_\xi &= -\mathbf{d}t_\xi, & \mathcal{S}t_\xi &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}R &= -\mathbf{D}\tilde{\psi}_\xi - [c_\xi, R], & \mathcal{S}T &= -\mathbf{D}\psi_\xi - c_\xi T + R\varepsilon_\xi + \tilde{\psi}_\xi e, \\
 \mathcal{S}F_a &= -\mathbf{d}\eta_\xi.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ces transformations coïncident avec celles présentées en [50]. On remarque que, dans l'algèbre ci-dessus, la partie concernant la connexion de spin ω est similaire à celle de l'opérateur \mathcal{S}_{tot} de la théorie de Yang-Mills topologique (cf chapitre 2, section (2.21), page 39).

3.2.2 Approche métrique

On peut aussi donner une formulation métrique de la gravité topologique et étudier les observables correspondantes. Le lecteur pourra trouver une présentation de cette approche en annexe B.

3.3 Champs et symétries dans le superspace

3.3.1 Formulation générale

Dans le superspace, on généralise naturellement les notions de vielbein et de connexion de Lorentz en introduisant un **supervielbein**, c'est-à-dire une superforme

$$\hat{E}^a = E^a(x, \theta) + \mathbf{d}\theta E_\theta^a(x, \theta) \quad \text{avec} \quad E^a = E_\mu^a \mathbf{d}x^\mu \tag{3.18}$$

et une **superconnexion**, à savoir une superforme

$$\hat{\Omega}^a{}_b = \Omega^a{}_b(x, \theta) + \mathbf{d}\theta \Omega_\theta^a{}_b(x, \theta) \quad \text{avec} \quad \Omega^a{}_b = \Omega_\mu^a{}_b \mathbf{d}x^\mu. \tag{3.19}$$

La gravité topologique étant supposée résulter d'un *twist* d'une théorie de supergravité étendue, nous introduisons aussi une connexion $U(1)$ (secteur de Maxwell) correspondant au **graviphoton** de la théorie usuelle,

$$\hat{A} = A(x, \theta) + \mathbf{d}\theta A_\theta(x, \theta) \quad \text{avec} \quad A = A_\mu \mathbf{d}x^\mu. \tag{3.20}$$

On peut décomposer chacun de ses superchamps, en accord avec la définition (1.17),

$$\begin{aligned}
E^a(x, \theta) &= e^a(x) + \theta \psi_\theta^a(x), & E_\theta^a(x, \theta) &= \chi_\theta^a(x) + \theta \phi_{\theta\theta}^a(x), \\
\Omega^a{}_b(x, \theta) &= \omega^a{}_b(x) + \theta \tilde{\psi}_{\theta b}^a(x), & \Omega_{\theta b}^a(x, \theta) &= \tilde{\chi}_{\theta b}^a(x) + \theta \tilde{\phi}_{\theta\theta b}^a(x), \\
A(x, \theta) &= a(x) + \theta \eta_\theta(x), & A_\theta(x, \theta) &= \sigma_\theta(x) + \theta t_{\theta\theta}(x).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Les transformations de symétrie sont au nombre de trois : les transformations de Lorentz, les transformations de coordonnées (difféomorphismes) et la transformation de jauge $U(1)$ du secteur de Maxwell. En formalisme BRST, les transformations des symétries infinitésimales sont paramétrées par des champs fantômes, en l'occurrence un superchamp $C^a{}_b(x, \theta)$ pour Lorentz, un superchamp $U(x, \theta)$ pour Maxwell ainsi qu'un superchamp de vecteurs $\hat{\Xi}(x, \theta) = \Xi^\mu(x, \theta)\partial_\mu + \Xi^\theta(x, \theta)\partial_\theta$.

Ces superfantômes ont comme composantes

$$\begin{aligned}
C^a{}_b(x, \theta) &= c^a{}_b(x) + \theta c_\theta'^a{}_b(x), & U(x, \theta) &= u(x) + \theta u'_\theta(x), \\
\Xi^\mu(x, \theta) &= \xi^\mu(x) + \theta \xi_\theta'^\mu(x), & \Xi^\theta(x, \theta) &= \varepsilon^\theta(x) + \theta \varepsilon'(x).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dans la suite, nous ne raisonnerons que sur les composantes des superchamps et pour simplifier la notation, les indices θ caractérisant le nombre de supersymétrie seront omis. Par ailleurs, les champs de vecteurs seront notés sous forme réduite $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$.

3.3.2 Algèbre des transformations BRST

Les transformations BRST prennent la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\hat{E} &= \mathcal{L}_{\hat{\Xi}}\hat{E} - C\hat{E}, & \mathcal{S}\hat{\Omega} &= \mathcal{L}_{\hat{\Xi}}\hat{\Omega} - \hat{D}C, & \mathcal{S}\hat{A} &= \mathcal{L}_{\hat{\Xi}}\hat{A} - \hat{d}U, \\
\mathcal{S}\hat{\Xi} &= \hat{\Xi}^2, & \mathcal{S}C &= \mathcal{L}_{\hat{\Xi}}C - C^2, & \mathcal{S}U &= \mathcal{L}_{\hat{\Xi}}U.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Les champs se transforment sous les superdifféomorphismes au moyen de la dérivée de Lie paramétrée par le superfantôme $\hat{\Xi}$ et les transformations de Lorentz agissent linéairement sur le supervielbein \hat{E} .

Si l'on réécrit ces transformations en décomposant sur les champs suivant les rela-

tions (3.21 - 3.22), il vient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}e &= \mathcal{L}_\xi e - ce + \varepsilon\psi - \mathbf{d}\varepsilon\chi, \\
 \mathcal{S}\psi &= \mathcal{L}_\xi\psi - \mathcal{L}_{\xi'}e - c\psi + c'e - \varepsilon'\psi - \mathbf{d}\varepsilon'\chi - \mathbf{d}\varepsilon\phi, \\
 \mathcal{S}\chi &= \mathcal{L}_\xi\chi - i_{\xi'}e - c\chi + \varepsilon\phi - \varepsilon'\chi, \\
 \mathcal{S}\phi &= \mathcal{L}_\xi\phi - \mathcal{L}_{\xi'}\chi - i_{\xi'}\psi - c\phi + c'\chi - 2\varepsilon'\phi, \\
 \\
 \mathcal{S}\omega &= \mathcal{L}_\xi\omega - \mathbf{D}c + \varepsilon\tilde{\psi} - \mathbf{d}\varepsilon\tilde{\chi}, \\
 \mathcal{S}\tilde{\psi} &= \mathcal{L}_\xi\tilde{\psi} - \mathcal{L}_{\xi'}\omega - [c, \tilde{\psi}] - \mathbf{D}c' - \varepsilon'\tilde{\psi} - \mathbf{d}\varepsilon'\tilde{\chi} - \mathbf{d}\varepsilon\tilde{\phi}, \\
 \mathcal{S}\tilde{\chi} &= \mathcal{L}_\xi\tilde{\chi} - i_{\xi'}\omega - [c, \tilde{\chi}] - c' + \varepsilon\tilde{\phi} - \varepsilon'\tilde{\chi}, \\
 \mathcal{S}\tilde{\phi} &= \mathcal{L}_\xi\tilde{\phi} - \mathcal{L}_{\xi'}\tilde{\chi} - i_{\xi'}\tilde{\psi} - [c, \tilde{\phi}] + [c', \tilde{\chi}] - 2\varepsilon'\tilde{\phi}, \\
 \\
 \mathcal{S}a &= \mathcal{L}_\xi a - \mathbf{d}u + \varepsilon\eta - \mathbf{d}\varepsilon\sigma, \\
 \mathcal{S}\eta &= \mathcal{L}_\xi\eta - \mathcal{L}_{\xi'}a - \mathbf{d}u' - \varepsilon'\eta - \mathbf{d}\varepsilon'\sigma - \mathbf{d}\varepsilon t, \\
 \mathcal{S}\sigma &= \mathcal{L}_\xi\sigma - i_{\xi'}a - u' + \varepsilon t - \varepsilon'\sigma, \\
 \mathcal{S}t &= \mathcal{L}_\xi t - \mathcal{L}_{\xi'}\sigma - i_{\xi'}\eta - 2\varepsilon't, \\
 \\
 \mathcal{S}c &= \mathcal{L}_\xi c - c^2 + \varepsilon c', \\
 \mathcal{S}c' &= \mathcal{L}_\xi c' - \mathcal{L}_{\xi'}c - [c, c'] - \varepsilon'c', \\
 \mathcal{S}\xi &= \xi^2 + \varepsilon\xi', \quad \mathcal{S}\xi' = [\xi, \xi'] - \varepsilon'\xi', \\
 \mathcal{S}\varepsilon &= \mathcal{L}_\xi\varepsilon + \varepsilon\varepsilon', \quad \mathcal{S}\varepsilon' = \mathcal{L}_\xi\varepsilon' - \mathcal{L}_{\xi'}\varepsilon, \\
 \mathcal{S}u &= \mathcal{L}_\xi u + \varepsilon u', \quad \mathcal{S}u' = \mathcal{L}_\xi u' - \mathcal{L}_{\xi'}u - \varepsilon'u'.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Comme dans le cas de la théorie de Yang-Mills, on résume dans le tableau 3.1 les différents degrés des champs ainsi que le degré total en fonction duquel les commutateurs de l'algèbre sont gradués.

	e	ψ	χ	ϕ	ω	$\tilde{\psi}$	$\tilde{\chi}$	$\tilde{\phi}$	a	η	σ	t	c	c'	ξ^μ	ξ'^μ	ε	ε'	u	u'
Forme	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fantôme	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
SUSY	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	0	1	-1	0	0	1
Total	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0	1	1	2

TAB. 3.1 – Degrés dans le superspace pour la gravité topologique

Chaque champ de fantôme (ils sont huit au total) caractérise une symétrie locale. On peut les séparer en deux familles.

Symétries caractérisées par ξ, ε, c et u

Ces fantômes correspondent respectivement aux difféomorphismes, à la supersymétrie locale, aux transformations de Lorentz locales et aux transformations de Maxwell locales. On vérifie bien que tous les champs se transforment sous les difféomorphismes au moyen de la dérivée de Lie par rapport au champ ξ .

Symétries caractérisées par ξ', ε', c' et u'

Ces fantômes correspondent respectivement à la supersymétrie vectorielle, aux R -transformations (ou transformations de Fayet) et aux transformations de superjauge. Nous allons bientôt voir que les symétries locales décrites par ξ', c' et u' peuvent être éliminées par un choix de superjauge (du type Wess et Zumino).

3.4 Réduction à la jauge de Wess et Zumino

3.4.1 Conditions de jauge

De manière analogue au cas de la théorie de Yang-Mills topologique, on observe que le formalisme en superespace introduit des champs et des symétries supplémentaires qui peuvent être éliminées de manière algébrique en imposant des conditions de fixation de superjauge du type Wess et Zumino. Dans le cas présent, la superjauge de Wess et Zumino est définie par

$$\chi = 0, \quad \tilde{\chi} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma = 0. \quad (3.25)$$

L'annulation de ces champs fixe les symétries paramétrées par les fantômes ξ', c' et u' . En effet, selon les équations (3.24), il est nécessaire d'imposer les trois relations

$$\varepsilon\phi - i_{\xi'}e = 0, \quad \varepsilon\tilde{\phi} - i_{\xi'}\omega - c' = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon t - i_{\xi'}a - u' = 0 \quad (3.26)$$

afin de garantir la stabilité de l'algèbre.

On peut réécrire ces relations sous forme de trois équations correspondant respectivement à chacun des champs ξ', c' et u' . Pour cela, on redéfinit certains champs de la théorie,

$$\varphi^\mu = \phi^a e_a^\mu, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\phi} - i_\varphi\omega \quad \text{et} \quad \tau = t - i_\varphi a. \quad (3.27)$$

Naturellement, cette redéfinition impose de pouvoir définir e_a^μ , c'est-à-dire que l'on impose que le vielbein soit inversible. Compte tenu de ces redéfinitions, les relations (3.26) prennent la forme

$$\xi'^\mu = \varepsilon\varphi^\mu, \quad c' = \varepsilon\tilde{\varphi} \quad \text{et} \quad u' = \varepsilon\tau. \quad (3.28)$$

3.4.2 Algèbre BRST dans la jauge de Wess et Zumino

L'algèbre (3.24) prend dans la jauge de Wess et Zumino la forme suivante

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}e &= \mathcal{L}_\xi e - ce + \varepsilon\psi, \\
\mathcal{S}\psi &= \mathcal{L}_\xi\psi - c\psi - \varepsilon(\mathcal{L}_\varphi e - \tilde{\varphi}e) - 2(\mathbf{d}\varepsilon)(i_\varphi e) - \varepsilon'\psi, \\
\mathcal{S}\varphi &= [\xi, \varphi] - 2\varepsilon'\varphi, \\
\\
\mathcal{S}\omega &= \mathcal{L}_\xi\omega - \mathbf{D}c + \varepsilon\tilde{\psi}, \\
\mathcal{S}\tilde{\psi} &= \mathcal{L}_\xi\tilde{\psi} - [c, \tilde{\psi}] - \varepsilon(\mathcal{L}_\varphi\omega + \mathbf{D}\tilde{\varphi}) - 2(\mathbf{d}\varepsilon)(\tilde{\varphi} + i_\varphi\omega) - \varepsilon'\tilde{\psi}, \\
\mathcal{S}\tilde{\varphi} &= \mathcal{L}_\xi\tilde{\varphi} - [c, \tilde{\varphi}] - \mathcal{L}_\varphi c - 2\varepsilon'\tilde{\varphi}, \\
\\
\mathcal{S}a &= \mathcal{L}_\xi a - \mathbf{d}u + \varepsilon\eta, \\
\mathcal{S}\eta &= \mathcal{L}_\xi\eta - \varepsilon(\mathcal{L}_\varphi a + \mathbf{d}\tau) - 2(\mathbf{d}\varepsilon)(\tau + i_\varphi a) - \varepsilon'\eta, \\
\mathcal{S}\tau &= \mathcal{L}_\xi\tau - \mathcal{L}_\varphi u - 2\varepsilon'\tau, \\
\\
\mathcal{S}\xi &= \xi^2 + \varepsilon^2\varphi, \\
\mathcal{S}c &= \mathcal{L}_\xi c - c^2 + \varepsilon^2\tilde{\varphi}, \\
\mathcal{S}u &= \mathcal{L}_\xi u + \varepsilon^2\tau, \\
\mathcal{S}\varepsilon &= \mathcal{L}_\xi\varepsilon + \varepsilon\varepsilon', \quad \mathcal{S}\varepsilon' = \mathcal{L}_\xi\varepsilon' - \varepsilon\mathcal{L}_\varphi\varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Plusieurs remarques sont à faire sur cette algèbre et en particulier son lien avec d'autres approches des théories de gravité topologique (cf. [50–52]). La principale différence se situe au niveau du rôle de la symétrie topologique.

Dans notre cas, la supersymétrie est caractérisée par le fantôme ε . Or il est toujours possible de redéfinir les champs de notre théorie afin d'y incorporer ce fantôme. Plus précisément, on va chercher à « faire disparaître » les indices θ de supersymétrie en absorbant une puissance adéquate de ε . Compte tenu du fait que ε possède un nombre de supersymétrie de -1 et un nombre de fantôme de $+1$, cela revient à redéfinir les degrés des champs physiques¹⁷ pour faire apparaître un degré de fantôme positif au lieu d'un degré de supersymétrie positif.

On effectue donc la redéfinition

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \varepsilon\psi, & \tilde{\psi}_0 &= \varepsilon\tilde{\psi}, & \eta_0 &= \varepsilon\eta, \\
\varphi_0 &= \varepsilon^2\varphi, & \tilde{\varphi}_0 &= \varepsilon^2\tilde{\varphi}, & \tau_0 &= \varepsilon^2\tau.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Du fait de cette redéfinition, les fantômes ε et ε' n'apparaissent plus que dans leurs propres relations de transformations $\mathcal{S}\varepsilon$ et $\mathcal{S}\varepsilon'$. Autrement dit, on peut les enlever de l'algèbre BRST et on se retrouve alors avec une supersymétrie rigide comme c'est le cas usuellement dans les théories topologiques. On notera par ailleurs que l'algèbre résultante est identique à celle présentée en (3.12).

¹⁷Cette remarque est à rapprocher de la remarque faite pour Yang-Mills topologique à propos du nombre de fantôme « total » comme somme du nombre de fantôme et du nombre de supersymétrie.

3.4.3 Autre approche

Une modification du contenu initial en champs permet de réaliser une autre construction de la gravité topologique. On ne considère plus le superchamp de Maxwell \hat{A} (ainsi que son fantôme U) mais on introduit à la place une composante supplémentaire au vielbein. Plus précisément, nous ajoutons à la super-1-forme \hat{E}^a déjà présente une composante \hat{E}^θ de sorte à obtenir une matrice de supervielbein

$$\begin{pmatrix} E_\mu^a & E_\theta^a \\ E_\mu^\theta & E_\theta^\theta \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

La superforme \hat{E}^θ se décompose selon

$$\hat{E}^\theta = E^\theta(x, \theta) + \mathbf{d}\theta E_\theta^\theta(x, \theta) \quad \text{avec} \quad E^\theta = dx^\mu E_\mu^\theta, \quad (3.32)$$

chacune de ces composantes pouvant s'écrire, suivant la définition (1.17),

$$\begin{aligned} E^\theta(x, \theta) &= a^\theta(x) + \theta\eta(x), \\ E_\theta^\theta(x, \theta) &= \sigma_\theta^\theta(x) + \theta t_\theta(x). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nous avons volontairement repris les mêmes notations que dans la partie précédente en anticipant sur les résultats à venir permettant la comparaison entre les deux approches. Cependant, une différence est à noter au niveau des indices θ portés par les champs. Contrairement aux champs décrits dans (3.21), ceux-ci véhiculent un indice supérieur θ . Nous reviendrons sur cette différence à la fin de cette section.

La superforme \hat{E}^θ se transforme exclusivement sous l'action des superdifféomorphismes, autrement dit : $\mathcal{S}\hat{E}^\theta = \mathcal{L}_{\hat{\Xi}}\hat{E}^\theta$. Les transformations BRST résultantes des champs d'espace-temps sont identiques à celles données en (3.24) (si l'on prend $u = u' = 0$),

$$\begin{aligned} \mathcal{S}a^\theta &= \mathcal{L}_\xi a^\theta + \varepsilon\eta - \mathbf{d}\varepsilon\sigma_\theta^\theta, \\ \mathcal{S}\eta &= \mathcal{L}_\xi\eta - \mathcal{L}_{\xi'}a^\theta - \varepsilon'\eta - \mathbf{d}\varepsilon'\sigma_\theta^\theta - \mathbf{d}\varepsilon t_\theta, \\ \mathcal{S}\sigma_\theta^\theta &= \mathcal{L}_\xi\sigma_\theta^\theta - i_{\xi'}a^\theta + \varepsilon t_\theta - \varepsilon'\sigma_\theta^\theta, \\ \mathcal{S}t_\theta &= \mathcal{L}_\xi t_\theta - \mathcal{L}_{\xi'}\sigma_\theta^\theta - i_{\xi'}\eta - 2\varepsilon' t_\theta. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Les conditions de superjauge de Wess et Zumino changent légèrement. On impose toujours $\chi = \tilde{\chi} = 0$ mais la condition sur σ est dorénavant $\sigma_\theta^\theta = 1$. Les conditions sur les fantômes ξ' et c' restent donc inchangées mais on obtient une nouvelle contrainte,

$$\varepsilon t_\theta - i_{\xi'}a^\theta - \varepsilon' = 0, \quad (3.35)$$

qui nous permet d'éliminer le fantôme ε' en écrivant $\varepsilon' = \varepsilon\tau$ où τ est défini selon $\tau = t_\theta - i_{\xi'}a^\theta$. Si l'on procède à la même redéfinition des champs qu'en (3.30) de manière à absorber le fantôme ε , on obtient les mêmes lois de transformation que précédemment, à la seule différence que u est remplacé par ε .

Il convient de revenir sur l'interprétation de ce champ ε . En effet, après cette redéfinition, il n'apparaît plus que dans les transformations faisant intervenir a , η_0 et τ_0 . Par conséquent, il ne faut plus voir ε comme se rapportant à une supersymétrie locale mais plutôt comme fantôme d'une transformation de jauge $U(1)$. Le champ a doit alors être vu comme le potentiel correspondant, c'est-à-dire le graviphoton. Cependant, cette interprétation oblige à faire un changement de statistiques (en l'occurrence ici, du degré de supersymétrie) des champs du secteur de Maxwell, ce qui peut se faire en abandonnant l'indice θ supérieur porté par a , ε , η_0 et τ_0 . Cette manipulation est rendue possible par le fait que le fantôme ε' (qui caractérise le nombre de supersymétrie) a été éliminé suite au choix de jauge de Wess et Zumino.

3.4.4 Remarques sur les différentes approches

Il est étonnant de constater que les deux approches qui font intervenir des champs, des symétries et des choix de jauge différents donnent finalement des résultats similaires. Si l'on regarde de plus près les champs a , η et σ dans la superjauge générale, on peut remarquer une certaine similitude formelle entre l'action de $U = u + \theta u'$ et celle de $\Xi^\theta = \varepsilon + \theta \varepsilon'$ (cf. (3.24))¹⁸

$$\begin{aligned} \mathcal{S}a &= -\mathbf{d}u - (\mathbf{d}\varepsilon)\sigma + \dots, \\ \mathcal{S}\eta &= -\mathbf{d}u' - (\mathbf{d}\varepsilon')\sigma + \dots, \\ (\mathcal{S} - \mathcal{L}_\xi)\sigma &= -u' - \varepsilon'\sigma + \varepsilon t - i_\xi a. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Autrement dit, pour chaque terme faisant intervenir u (respectivement u'), on trouve un terme analogue en ε (respectivement ε') multiplié par σ . La projection sur la jauge de Wess et Zumino $\sigma = 0$ donne

$$\begin{aligned} \mathcal{S}a &= -\mathbf{d}u + \dots, \\ \mathcal{S}\eta &= -\mathbf{d}u' + \dots \quad \text{avec } u' = \varepsilon(t - i_\varphi a), \end{aligned} \quad (3.37)$$

alors que la projection sur la jauge $\sigma = 1$ donne

$$\begin{aligned} \mathcal{S}a &= -\mathbf{d}\varepsilon + \dots, \\ \mathcal{S}\eta &= -\mathbf{d}\varepsilon' + \dots \quad \text{avec } \varepsilon' = \varepsilon(t - i_\varphi a). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Une autre remarque intéressante concerne la propriété d'inversibilité du supervielbein. En effet, nous avons vu que pour pouvoir imposer la condition de jauge $\chi = 0$, il était nécessaire d'imposer que le vielbein (e_μ^a) soit inversible. Par ailleurs, dans l'approche alternative, la condition de jauge concernant σ_θ^θ généralise cette inversibilité à celle de la matrice du supervielbein (3.31). Bien entendu, cette restriction n'est valable que dans la jauge de Wess et Zumino. En superjauge générale, rien n'empêche de considérer des vielbeins (ou des matrices de supervielbeins) dégénéré(e)s.

Cette considération est à rapprocher du fait qu'en dimension 2+1, la gravité quantique évite cette contrainte, une fois formulée en termes d'une théorie de Chern et Simons ou de type BF [59, 61, 62].

¹⁸On n'écrit ici que les termes intéressants pour la discussion.

3.5 Détermination des observables

3.5.1 Observables dans le formalisme d'horizontalité

Revenons au formalisme des conditions d'horizontalité présenté à la section (3.2.1), page 59. Les observables sont construites à partir des polynômes invariants de jauge fonctions de la courbure, par exemple $\text{Tr}(R^k)$ avec $k = 1, 2, \dots$, et de la torsion.

Un invariant dépendant de la torsion a été introduit la première fois par Nieh et Yan [63, 64] à quatre dimensions et a ensuite fait l'objet de généralisations à des dimensions supplémentaires [65–68].

Dans cette section, nous allons évoquer les cas $k = 2$ (respectivement $k = 1$) qui sont définis pour des variétés de dimension minimale quatre (respectivement deux).

Cas $k = 2$

Compte tenu de l'identité de Bianchi $DR = 0$, nous pouvons définir une 4-forme

$$W_4^0 = -\frac{1}{2} \text{Tr}\{RR\} \quad (3.39)$$

qui satisfait $dW_4^0 = -\text{Tr}\{(DR)R\} = 0$.

De la même façon, nous définissons une 4-forme généralisée

$$\hat{W} = -\frac{1}{2} \text{Tr}\{\hat{R}\hat{R}\} \quad (3.40)$$

qui satisfait

$$\hat{d}\hat{W} = 0 \iff \mathcal{S}\hat{W} = -d\hat{W}. \quad (3.41)$$

En injectant la relation (3.8) et en développant par rapport au degré de fantôme, il vient

$$\hat{W} = -\frac{1}{2} e^{i\xi} \text{Tr}\{(R + \tilde{\psi} + \tilde{\phi})(R + \tilde{\psi} + \tilde{\phi})\} = \sum_{k=0}^4 W_{4-k}^k(\xi), \quad (3.42)$$

où les polynômes $W_{4-k}^k(\xi)$ peuvent se mettre sous la forme

$$W_{4-k}^k(\xi) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} (i\xi)^n W_{4-k+n}^{k-n}. \quad (3.43)$$

Les formes W_{4-k+n}^{k-n} qui apparaissent dans le membre de droite correspondent aux polynômes de Donaldson et Witten obtenus en théorie de Yang-Mills topologique,

$$\begin{aligned} W_4^0 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}\{RR\}, & W_3^1 &= -\text{Tr}\{\tilde{\psi}R\}, & W_2^2 &= -\text{Tr}\{\tilde{\phi}R + \frac{1}{2}\tilde{\psi}\tilde{\psi}\}, \\ W_1^3 &= -\text{Tr}\{\tilde{\phi}\tilde{\psi}\}, & W_0^4 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}\{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

On remarque, en conjuguant (3.43) avec (3.39), que $W_4^0(\xi) = W_4^0$. Par ailleurs, comme les transformations BRST font intervenir le champ $\tilde{\varphi}$ à la place de $\tilde{\phi}$, on peut effectuer la redéfinition $\tilde{\varphi} = \tilde{\phi} + i_\varphi\omega$ dans les expressions précédentes. Les formes $W_2^2(\xi)$, $W_1^3(\xi)$ et $W_0^4(\xi)$ dépendent alors du champ fantôme φ .

Étant donnée la relation (3.41), les polynômes (3.43) sont solutions d'un système d'équations de descente,¹⁹

$$\begin{aligned} dW_4^0(\xi) &= 0, \\ SW_{4-k}^k(\xi) + dW_{4-k-1}^{k+1}(\xi) &= 0, \quad \text{avec } 0 \leq k \leq 3 \\ SW_0^4(\xi) &= 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Les polynômes $W_{4-k}^k(\xi)$ appartiennent à la cohomologie équivariante de la gravité topologique [25–27]. À la différence avec la théorie de Yang-Mills topologique, les observables dépendent ici explicitement d'un champ fantôme, en l'occurrence ξ . Cependant, il faut bien voir que ξ ne joue pas le même rôle que c ou encore u au niveau des symétries car il caractérise non pas une symétrie interne mais plutôt les déplacements sur la variété d'espace-temps ; sa présence est donc nécessaire [69].

Nous sommes partis ici de la densité de Pontrjagin $W_4^0 \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}\{RR\}$ afin de construire un ensemble d'observables. Mais, à quatre dimensions, il est également possible de partir de la classe d'Euler $V_4^0 \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}\{\varepsilon_{abcd}R^{ab}R^{cd}\}$ (dont l'intégrale sur la variété donne la caractéristique d'Euler qui est un invariant topologique). Par conséquent, on peut suivre la même démarche, à savoir définir une forme généralisée $\hat{V} = -\frac{1}{2} \text{Tr}\{\varepsilon_{abcd}\hat{R}^{ab}\hat{R}^{cd}\}$ et développer par rapport au degré de fantôme afin d'obtenir des polynômes $V_{4-k}^k(\xi)$ tels que $\hat{V} = \sum_{k=0}^4 V_{4-k}^k(\xi)$.

Enfin, il est possible de construire des observables « composites », compte tenu de la relation $\hat{d}(\hat{W}^m\hat{V}^n) = 0$ pour $m, n = 0, 1, \dots$. En développant par rapport au degré de fantôme, on obtient une nouvelle classe de cohomologie [6],

$$\hat{W}^m\hat{V}^n = w_0^{4(m+n)}(\xi) + w_1^{4(m+n)-1}(\xi) + \dots + w_4^{4(m+n)-4}(\xi), \tag{3.46}$$

avec

$$\begin{aligned} w_0^{4(m+n)}(\xi) &= [W_0^4(\xi)]^m [V_0^4(\xi)]^n, \\ w_1^{4(m+n)-1}(\xi) &= n [W_0^4(\xi)]^m [V_0^4(\xi)]^{n-1} V_1^3(\xi) + m [W_0^4(\xi)]^{m-1} W_1^3(\xi) [V_0^4(\xi)]^n, \text{ etc.} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Comme nous l'avons vu à la fin de la section (3.2.1), l'algèbre de transformations du secteur de Lorentz est isomorphe à l'algèbre des transformations d'une théorie de Yang-Mills topologique. Par conséquent, nous pouvons utiliser les résultats connus sur la

¹⁹La variation de $\tilde{\phi}$ vaut $S\tilde{\phi} = \mathcal{L}_\xi\tilde{\phi} - [c, \tilde{\phi}] - i_\varphi\tilde{\psi}$.

théorie de Yang-Mills et considérer que nous pouvons générer des solutions à partir des polynômes invariants de Lorentz $\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^n$ avec $n = 1, 2, \dots$. Pour la variété de dimension quatre qui nous intéresse ici, il existe *a priori* quatre invariants, $\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}$, $\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^2$, $\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^3$, et $\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^4$. Mais, compte tenu du caractère antisymétrique de la matrice $\tilde{\phi}_\xi$, les puissances impaires s'annulent. Il ne reste plus donc que $\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^2$ et $\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^4$, ce dernier pouvant s'écrire également

$$\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^4 = \frac{1}{16} \left(\text{Tr}\{\varepsilon_{abcd}\tilde{\phi}_\xi^{ab}\tilde{\phi}_\xi^{cd}\} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\}^2 \right)^2. \quad (3.48)$$

Ainsi, pour $k = 2$, les polynômes $W_0^4(\xi) \propto \text{Tr}\{\tilde{\phi}_\xi\tilde{\phi}_\xi\}$ et $V_0^4(\xi) \propto \text{Tr}\{\varepsilon_{abcd}\tilde{\phi}_\xi^{ab}\tilde{\phi}_\xi^{cd}\}$ génèrent toute la cohomologie du secteur de Lorentz. En résumé, le fait que les transformations BRST agissant sur le secteur de Lorentz soient analogues aux transformations BRST d'une théorie de Yang-Mills topologique nous permet d'utiliser les résultats connus concernant la cohomologie équivariante de cette dernière (voir par exemple [70, 71]).

Considérons maintenant les transformations BRST concernant le secteur du vielbein. Il existe un invariant topologique construit à partir de la torsion T qui est l'intégrale sur une variété de dimension quatre de la forme de Nieh et Yan [63, 64]

$$Z_4^0 \equiv -\frac{1}{2}(TT - eRe) = -\frac{1}{2}(T^a T_a - e^a R_{ab} e^b). \quad (3.49)$$

Remarquons que Z_4^0 s'annule avec la torsion (compte tenu de l'identité de Bianchi $Re = DT$). Par ailleurs, cette forme est également fermée et localement exacte puisque $d(eT) = D(eT) = -2Z_4^0$. Nous pouvons procéder comme auparavant avec la densité de Pontrjagin ou d'Euler en définissant une 4-forme généralisée $\hat{Z} \equiv -\frac{1}{2}(\hat{T}\hat{T} - \hat{e}\hat{R}\hat{e})$ qui vérifie $\hat{d}\hat{Z} \equiv (d + \mathcal{S})\hat{Z} = 0$. En développant \hat{Z} par rapport au degré de fantôme (de manière identique à ce que nous avons précédemment fait avec \hat{W}), nous construisons des polynômes $Z_{4-k}^k(\xi)$ qui satisfont le système d'équations de descente (3.45). Des expressions explicites peuvent être données en utilisant les définitions de \hat{e} , \hat{T} et \hat{R} des équations (3.5). Ces dernières peuvent se mettre sous forme plus concise si l'on utilise les reparamétrisations ε_ξ , $\tilde{\psi}_\xi$, $\tilde{\phi}_\xi$, ψ_ξ et ϕ_ξ définies en (3.14) et (3.15) :

$$\begin{aligned} Z_4^0(\xi) &= -\frac{1}{2}(TT - eRe), \\ Z_3^1(\xi) &= -(T\psi_\xi - \varepsilon_\xi Re - \frac{1}{2}e\tilde{\psi}_\xi e), \\ Z_2^2(\xi) &= -(T\phi_\xi + \frac{1}{2}\psi_\xi\psi_\xi - \varepsilon_\xi\tilde{\psi}_\xi e - \frac{1}{2}e\tilde{\phi}_\xi e - \frac{1}{2}\varepsilon_\xi R\varepsilon_\xi), \\ Z_1^3(\xi) &= -(\psi_\xi\phi_\xi - \varepsilon_\xi\tilde{\phi}_\xi e - \frac{1}{2}\varepsilon_\xi\tilde{\psi}_\xi\varepsilon_\xi), \\ Z_0^4(\xi) &= -\frac{1}{2}(\phi_\xi\phi_\xi - \varepsilon_\xi\tilde{\phi}_\xi\varepsilon_\xi). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Enfin, considérons le secteur de Maxwell. Nous sommes en présence ici d'une théorie de Yang-Mills topologique avec un groupe de structure abélien. Les observables sont générées par la 4-forme $F_a F_a$.

En regroupant tous ces résultats, on voit que les solutions les plus générales appartenant à la cohomologie équivariante de la gravité topologique sont données par des produits adéquats d'expressions tirées des secteurs gravitationnel et de Maxwell.

Cas $k = 1$

Ce cas se traite de manière similaire au précédent en partant de la 2-forme $W_2^0 \equiv \varepsilon^{ab} R_{ab}$. La 2-forme généralisée s'écrit $\hat{W}_0^2 \equiv \varepsilon^{ab} \hat{R}_{ab} = W_2^0 + W_1^1(\xi) + W_0^2(\xi)$ et satisfait l'équation de Bianchi généralisée $\hat{d}\hat{W} \equiv (d + S)\hat{W} = 0$.

Les composantes de \hat{W} de degré de fantôme non nul sont des polynômes dépendant du fantôme ξ et définis comme

$$W_1^1(\xi) = \varepsilon^{ab}(\tilde{\psi}_{ab} + i_\xi R_{ab}) \quad \text{et} \quad W_0^2(\xi) = \varepsilon^{ab}(\tilde{\phi}_{ab} + i_\xi \tilde{\psi}_{ab} + \frac{1}{2} i_\xi i_\xi R_{ab}). \quad (3.51)$$

À partir de la relation $\hat{d}(\hat{W})^n = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$ et de la décomposition $(\hat{W})^n = w_0^{2n} + w_1^{2n-1} + w_2^{2n-2}$, on obtient des représentants plus généraux de la cohomologie équivariante en dimension deux [72–75],

$$\begin{aligned} w_0^{2n} &= [W_0^2(\xi)]^n, \\ w_1^{2n-1} &= n [W_1^1(\xi)] [W_0^2(\xi)]^{n-1}, \\ w_2^{2n-2} &= n [W_2^0(\xi)] [W_0^2(\xi)]^{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) [W_0^2(\xi)]^{n-2} [W_1^1(\xi)]^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Il n'existe pas, à deux dimensions, d'invariant topologique construit à partir de la torsion [65–68]. Enfin, dans le secteur de Maxwell, l'invariant topologique de base est la 2-forme F_a .

Remarque sur le formalisme de second ordre :

Dans le formalisme de second ordre, la contrainte de torsion nulle impose à la connexion de spin ω d'être fonction du vielbein (et de son inverse),

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2}(P_{abc} + P_{bca} - P_{cab}), \quad \text{avec} \quad P^a{}_{bc} \equiv (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) e_b^\mu e_c^\nu. \quad (3.53)$$

De plus, cela impose que $\tilde{\psi}$ ne soit plus indépendant mais soit désormais fonction de ψ et de e ,²⁰

$$\tilde{\psi}^a{}_b e^b = D\psi^a. \quad (3.54)$$

²⁰La solution de cette relation et l'expression précédente imposent naturellement d'avoir un vielbein inversible.

Les seules différences avec le formalisme de premier ordre sont que $\omega, \tilde{\psi}$ ainsi que leurs transformations BRST ne sont plus des quantités indépendantes. *A fortiori*, cela ne modifie pas le secteur de Lorentz de la cohomologie équivariante (tant que ω et $\tilde{\psi}$ sont exprimés en termes de e et ψ (par le biais des relations ci-dessus)).

On peut également dériver certains résultats de l'approche métrique en utilisant les résultats précédents et la relation (3.4).

3.5.2 Observables dans le formalisme de superspace

Dans le superspace, la gravité topologique se présente comme une théorie de jauge topologique comprenant comme groupes de symétrie le groupe de Lorentz et le groupe $U(1)$ (pour le secteur de Maxwell). Nous pouvons donc nous appuyer sur le formalisme décrit précédemment dans le cas de la théorie de Yang-Mills topologique pour déterminer les équations de descente donnant accès aux observables.

Le principal intérêt de cette approche est qu'elle nous permettrait d'obtenir des expressions valables dans la superjauge générale et non pas seulement dans une superjauge de type Wess et Zumino.

3.6 Remarques sur la fixation de jauge

Le lagrangien complet (fixé de jauge) de la gravité topologique peut s'obtenir en partant d'un invariant topologique comme pour toutes les théories topologiques de type Witten. La condition de jauge est déterminée de telle sorte à localiser l'intégrale de chemin sur un espace de module intéressant. Parmi les conditions de jauge possibles, on trouve :

- la condition de platitude : $R_{ab} = 0$;
- la condition de self-dualité : $R_{ab}^- \equiv \frac{1}{2}(R_{ab} - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R_{cd}) = 0$.

Sur une variété riemannienne quadridimensionnelle possédant une holonomie $SU(2)$, il existe une propriété de self-dualité intéressante concernant la connexion $\omega(e)$ dans le formalisme de second ordre (torsion nulle) [51, 76]. La condition de self-dualité de la courbure R_{ab} , c'est-à-dire $R_{ab}^- = 0$, est satisfaite **si et seulement si** la connexion est self-duale ($\omega_{ab}^- = 0$). Cependant, alors que la contrainte $R_{ab}^- = 0$ est invariante sous $SO(4)$ (qui est localement équivalent à $SU(2)_+ \times SU(2)_-$), la contrainte $\omega_{ab}^- = 0$ n'est invariante que sous $SU(2)_+$.

La gravité topologique peut d'une autre façon être obtenue en twistant une théorie de supergravité $N = 2$ sur une variété riemannienne de dimension 4 possédant une holonomie $SU(2)$ [50, 52]. Dans ce cas, il existe deux spineurs covariamment constants avec lesquels on peut effectuer le twist des gravitinos de manière à obtenir les transformations de « shift » paramétrées par le champ $\varepsilon(x)$. Comme nous l'avons vu précédemment, il est nécessaire de réabsorber cette variable $\varepsilon(x)$ afin de retrouver les transformations venant de l'approche précédente.

Le twist de la supergravité donne naissance, en plus de la supersymétrie locale, à une supersymétrie vectorielle et une supersymétrie tensorielle. Cependant, contrairement à la supersymétrie vectorielle globale de la théorie de Yang-Mills topologique, cette supersymétrie vectorielle locale modifie le vielbein et le graviphoton et, par conséquent, modifie aussi l'invariant topologique de départ. En conséquence de quoi, on peut s'attendre à ce que cette symétrie impose davantage de contraintes à propos de la renormalisation de la gravité topologique que pour la théorie de Yang-Mills topologique.

3.7 Résumé

Nous avons donc vu que, de manière analogue au cas de la théorie de Yang-Mills, il est possible de construire une théorie de gravité topologique dans le superspace. À ce sujet, nous avons mis en avant le fait qu'il existe (au moins) deux manières différentes de faire intervenir le graviphoton a_μ : soit en introduisant une superconnexion $U(1)$ en plus des champs gravitationnels, soit en utilisant une version étendue (matricielle) du supervielbein. Cette seconde approche est d'ailleurs peut-être plus géométrique en un sens et peut sembler moins *ad hoc*.

Un autre point soulevé par l'approche de superspace concerne l'inversibilité du (super)vielbein. En effet, dans le superspace, rien n'impose *a priori* de ne considérer que des vielbeins inversibles, contrairement à ce qui se passe en superjauge de Wess et Zumino. Dans cette perspective, la théorie dans le superspace peut sûrement avoir une portée plus générale qu'une théorie ne faisant intervenir que des métriques non singulières.

Deuxième partie

**Mécanique quantique et géométrie
non-commutative**

Vivre en espace non-commutatif?

La première apparition de la notion d'espace-temps non-commutatif en physique des particules remonte aux travaux de Snyder en 1947 [77]. Le but était de pouvoir se débarrasser des divergences ultraviolettes de la théorie quantique des champs tout en conservant la covariance de Lorentz. Mais, comme parallèlement à cela, la théorie de la renormalisation produisait des résultats remarquables, la théorie de Snyder tomba dans l'oubli. Récemment, le concept de coordonnées non-commutatives est réapparu dans le contexte des théories de supercordes, la longueur intrinsèque des cordes induisant une structure non-commutative de l'espace-temps à très petite échelle.

La mécanique quantique en espace non-commutatif correspond à l'étude de hamiltoniens dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique. L'étude de modèles exactement solubles en mécanique quantique peut nous permettre d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes survenant en théorie quantique des champs non-commutative. Les applications physiques éventuelles peuvent, entre autres, se trouver dans des problèmes de matière condensée comme l'effet Hall quantique.

Dans la lignée des premiers travaux concernant les variables de l'espace de phase non-commutatif [78–82], la mécanique quantique en espace non-commutatif a été définie de manière simple et directe en suivant plusieurs approches [83–88] et quelques modèles de base ont été étudiés [83–93]. Par la suite, plusieurs aspects ont été développés, par exemple dans les références [94–101].

Le travail développé ici cherche à présenter de manière unifiée et synthétique certains résultats des références ci-dessus afin de clarifier les relations entre ces différentes approches. Les aspects algébriques et dynamiques sont traités dans des chapitres distincts : le premier chapitre concerne l'étude des différentes algèbres de commutateurs et de leurs représentations tandis que le deuxième chapitre traite de l'étude de systèmes simples (particule dans un champ magnétique, oscillateur harmonique, . . .). Enfin le dernier chapitre introduit la supersymétrie à travers la discussion de l'oscillateur harmonique supersymétrique [100].

1.1 Rappel sur le système de Landau en mécanique quantique

En mécanique quantique ordinaire, les relations de commutation canoniques dans l'espace de phase prennent la forme :

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0 \quad \text{et} \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1}. \quad (1.1)$$

Considérons le cas d'une particule chargée électriquement (de charge e) se propageant dans un l'espace tridimensionnel soumis à un champ magnétique constant \vec{B} décrit par un potentiel vecteur \vec{A} tel que $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$.

Le hamiltonien d'un tel système est donné par

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2, \quad (1.2)$$

c'est-à-dire que l'on modifie l'impulsion canonique usuelle \vec{p} en définissant une impulsion $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$. Or, étant données les relations (1.1), les composantes de cette impulsion $\vec{\Pi}$ ne commutent plus entre elles,

$$[\Pi_i, \Pi_j] = -i\hbar\frac{e}{c}B_{ij}\mathbb{1} \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}). \quad (1.3)$$

Dans le cas où le champ magnétique est constant suivant \vec{e}_3 , $\vec{B} = B\vec{e}_3$, on peut utiliser les jauge suivantes pour le potentiel vecteur $\vec{A} = (A_1, A_2, 0)$:

- Jauge symétrique : $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x} \wedge \vec{B}$;
- Jauge de Landau : $\vec{A} = (0, Bx_1, 0)$ ou $\vec{A} = (-Bx_2, 0, 0)$.

Le hamiltonien du système prend la forme $H = \frac{1}{2m}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2)$ où nous avons omis le terme $\frac{1}{2m}p_3^2$ décrivant le mouvement libre le long de la direction x_3 . On a la relation de commutation $[\Pi_1, \Pi_2] = i\hbar\frac{e}{c}B\mathbb{1}$. Or, si l'on définit un nouvel opérateur $X = \frac{c}{eB}\Pi_1$, la relation de commutation et le hamiltonien deviennent

$$[X, \Pi_2] = i\hbar\mathbb{1}, \quad (1.4)$$

$$H = \frac{1}{2m}\Pi_2^2 + \frac{1}{2}m\omega_B^2 X^2 \quad \text{avec} \quad \omega_B = \frac{|eB|}{mc},$$

autrement dit, les opérateurs X et Π_2 sont des variables canoniquement conjuguées pour lesquelles le hamiltonien prend la forme de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_B . Grâce à cette remarque, on en déduit directement le spectre d'énergie

$$E_n = \hbar\frac{|eB|}{mc}(n + \frac{1}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.5)$$

Résumé : Le hamiltonien du système de Landau (c'est-à-dire une particule dans un plan soumis à un champ magnétique externe constant perpendiculaire au plan), peut s'écrire sous la forme d'un hamiltonien pour une particule libre dans un espace où les opérateurs de moment ne commutent plus entre eux.

Dans le cas où la particule possède un spin, il faut rajouter à ce hamiltonien un terme supplémentaire d'interaction spin-champ magnétique,

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 - \frac{e\hbar}{2mc} B \sigma_3, \quad (1.6)$$

où $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la troisième matrice de Pauli.

1.2 Algèbre non-commutative en dimension quelconque

Dorénavant, on se place dans un système d'unités où $\hbar = c = e = 1$. De plus, on travaille en dimension d quelconque.

Nous allons maintenant présenter l'algèbre non-commutative dans la forme générale,

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij}, \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= iB_{ij}, \quad (i, j \in \{1, \dots, d\}) \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\delta_{ij}\mathbb{1} + i(1 - \delta_{ij})C_{ij}\mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ici, les quantités \hat{x} et \hat{p} dénotent respectivement les opérateurs position et impulsion, les quantités θ_{ij}, B_{ij} et C_{ij} sont les éléments de matrices pouvant dépendre des opérateurs \hat{x} et \hat{p} et satisfaisant

$$(\theta_{ij})^\dagger = -\theta_{ji}, \quad (B_{ij})^\dagger = -B_{ji}, \quad (C_{ij})^\dagger = C_{ij}, \quad C_{11} = \dots = C_{dd} = 0. \quad (1.8)$$

Dans la suite, on adoptera la notation suivante : les opérateurs comportant un chapeau $\hat{}$ caractériseront les générateurs de l'algèbre de Heisenberg déformée par opposition aux quantités x et p de la mécanique quantique ordinaire satisfaisant l'algèbre de Heisenberg

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= 0, \\ [p_i, p_j] &= 0, \\ [x_i, p_j] &= i\delta_{ij}\mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Non seulement, nous faisons intervenir des commutateurs position-position et impulsion-impulsion non nuls mais nous introduisons par ailleurs des relations de commutation non triviales entre \hat{x}_i et \hat{p}_j pour i et j différents. Les termes C_{ij} dans le commutateur position-impulsion sont imposés par l'identité de Jacobi. En effet, si l'on considère

par exemple l'opérateur \hat{p}_1 (l'exemple se généralise directement aux autres composantes de l'impulsion) et $\hat{x}_i, \hat{x}_j (i \neq j)$, l'identité de Jacobi se met sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{x}_i, [\hat{x}_j, \hat{p}_1]] + [\hat{x}_j, [\hat{p}_1, \hat{x}_i]] + [\hat{p}_1, [\hat{x}_i, \hat{x}_j]] \\ &= [\hat{x}_i, [\hat{x}_j, \hat{p}_1]] + [\hat{x}_j, [\hat{p}_1, \hat{x}_i]] + i[\hat{p}_1, \theta_{ij}]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ainsi, si les θ_{ij} ne commutent pas avec \hat{p}_1 , il est impossible que \hat{p}_1 commute simultanément avec \hat{x}_i et \hat{x}_j . Par conséquent, il est obligatoire de tenir compte de termes non-diagonaux (ie proportionnels à $(1 - \delta_{ij})$ dans les commutateurs position-impulsion). Par ailleurs, les opérateurs C_{ij} ne peuvent pas non plus appartenir au centre de l'algèbre générée par $\mathbb{1}$ et $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$, c'est-à-dire commuter avec tous les opérateurs position [79].

Dans la suite, on supposera que les opérateurs θ_{ij}, B_{ij} et C_{ij} sont constants, c'est-à-dire que les θ_{ij} et B_{ij} sont des éléments de matrices antisymétriques réelles et que les C_{ij} sont des éléments d'une matrice réelle de diagonale nulle. Les opérateurs « déformés » peuvent alors être vus comme fonctions des opérateurs ordinaires et des paramètres θ_{ij}, B_{ij} et C_{ij} . Dans cette optique, il est naturel qu'en prenant la **limite commutative**²¹, à savoir $(\theta, B, C) \rightarrow 0$, l'algèbre déformée (1.7) redonne l'algèbre canonique de Heisenberg (1.9). On reviendra par la suite sur cette limite commutative en étudiant des exemples. Le paramètre B_{ij} est naturellement assimilable physiquement à un champ magnétique (cf. le système de Landau). De la même façon, le paramètre θ_{ij} a un rôle très similaire à B_{ij} [92, 93].

1.3 Algèbre non-commutative en dimension 2

1.3.1 Notations

Dans cette section, on se restreint au cas où la dimension d'espace est $d = 2$. Par conséquent, les matrices antisymétriques θ_{ij} et B_{ij} sont proportionnelles au tenseur antisymétrique ϵ_{ij} (normalisé par $\epsilon_{12} = 1$),

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ij}\theta \quad \text{et} \quad B_{ij} = \epsilon_{ij}B. \quad (1.11)$$

L'algèbre des commutateurs (1.7) se réécrit alors

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\epsilon_{ij}\theta\mathbb{1}, \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\epsilon_{ij}B\mathbb{1}, \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\delta_{ij}\mathbb{1} + i(1 - \delta_{ij})C_{ij}\mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Par ailleurs, $(C_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ est une matrice 2×2 à coefficients diagonaux nuls qu'on note par la suite $C = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ -\phi_2 & 0 \end{pmatrix}$. Comme souligné plus haut, on assimilera les coefficients $\theta, B, \phi_1, \phi_2$ à des constantes réelles afin de simplifier l'approche.

²¹Le terme de limite commutative, employé dans la littérature, est ambigu. Le terme de limite canonique serait peut-être plus approprié.

1.3.2 Représentations

Nous allons commencer par regarder des cas particuliers de l'algèbre bidimensionnelle.

$$(i) \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0$$

Cette situation correspond au système de Landau évoqué précédemment. L'algèbre (1.12) se réécrit donc

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 0, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = iB\mathbb{1}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{1}. \quad (1.13)$$

Différentes représentations sont données par différents choix de jauge $(A_1(\vec{x}), A_2(\vec{x}))$ satisfaisant $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ et sont toutes de la forme

$$\hat{x}_i = x_i \quad \text{et} \quad \hat{p}_i = \Pi_i \equiv p_i - A_i(\vec{x}). \quad (1.14)$$

Si l'on définit de nouveaux opérateurs

$$\hat{q}_i = B\hat{x}_i + \epsilon_{ij}\hat{p}_j \quad (i, j \in \{1, 2\}) \quad (1.15)$$

l'algèbre (1.13) se transforme en une algèbre où les opérateurs \hat{q} et \hat{p} sont découplés,

$$[\hat{q}_1, \hat{q}_2] = -iB\mathbb{1}, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = iB\mathbb{1}, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (1.16)$$

On arrive ainsi à deux algèbres sensiblement identiques. De manière plus générale, si l'on définit un changement d'opérateurs $\hat{x} \mapsto \hat{q}$ de la forme $\hat{q}_1 = \alpha\hat{x}_1 + \beta\hat{p}_2$, $\hat{q}_2 = \gamma\hat{x}_2 + \delta\hat{p}_1$, alors la condition $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = 0$ (pour i et j quelconques) équivaut à une algèbre du type (1.16) dans laquelle $[\hat{q}_1, \hat{q}_2] \propto i\mathbb{1}$.

$$(ii) B = \phi_1 = \phi_2 = 0$$

La situation est analogue au cas précédent, les rôles de \hat{x} et \hat{p} étant simplement inversés. C'est l'algèbre la plus fréquemment rencontrée dans la littérature,

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta\mathbb{1}, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{1}. \quad (1.17)$$

On peut définir la représentation

$$\hat{p}_i = p_i \quad \text{et} \quad \hat{x}_i = x_i - \tilde{A}_i(\vec{p}), \quad (1.18)$$

où les fonctions $\tilde{A}_i(\vec{p})$ satisfont $\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial p_2} - \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial p_1} = \theta$. Le vecteur $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ joue en quelque sorte le rôle de « potentiel vecteur » et θ le rôle d'un champ magnétique. Par analogie avec le cas précédent, on peut ainsi définir plusieurs « choix de jauge » pour \hat{x} .

De même, nous pouvons découpler cette algèbre en redéfinissant les opérateurs d'impulsion suivant la combinaison linéaire

$$\hat{k}_i = \theta \hat{p}_i - \epsilon_{ij} \hat{x}_j \quad (1.19)$$

afin d'arriver aux relations de commutation

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta \mathbb{1}, \quad [\hat{k}_1, \hat{k}_2] = -i\theta \mathbb{1}, \quad [\hat{x}_i, \hat{k}_j] = 0. \quad (1.20)$$

Par conséquent, si l'on construit une algèbre à partir de deux copies commutantes de l'algèbre des \hat{x} (et faisant intervenir respectivement θ et $-\theta$), le changement $\hat{k} \mapsto \hat{p}$ nous permet d'aboutir à une algèbre de la forme (1.17). Les représentations (1.17) peuvent être construites à partir de là et, comme évoqué dans [87], la théorie des champs non commutative dans la limite d'une seule particule conduit naturellement à une algèbre du type de (1.20).

(iii) $\phi_1 = \phi_2 = 0$

Si l'on combine les deux exemples précédents, on aboutit à l'algèbre

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta \mathbb{1}, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = iB \mathbb{1}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \mathbb{1}, \quad (1.21)$$

dont on peut donner la réalisation,

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1, & \hat{p}_1 &= p_1 + Bx_2, \\ \hat{x}_2 &= x_2 + \theta p_1, & \hat{p}_2 &= p_2, \end{aligned} \quad (1.22)$$

qui correspond en quelque sorte à un choix de jauge de Landau pour \hat{x} . Mais on peut aussi choisir une jauge symétrique en utilisant la représentation donnée en [92, 93] pour $\theta \neq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= ax_1 - \frac{\theta}{2a} p_2, & \hat{p}_1 &= cp_1 + dx_2, \\ \hat{x}_2 &= ax_2 + \frac{\theta}{2a} p_1, & \hat{p}_2 &= cp_2 - dx_1, \end{aligned} \quad (1.23)$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$, $c = \frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{\kappa})$, $d = \frac{a}{\theta}(1 \mp \sqrt{\kappa})$. Ici, $\kappa = 1 - B\theta$ est un paramètre qui reviendra souvent par la suite. Les expressions (1.23) sont inversibles à condition que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(\hat{x}, \hat{p})}{\partial(x, p)} = \kappa \quad (1.24)$$

ne s'annule pas. Cela interdit d'avoir $B = \frac{1}{\theta}$. Ce cas singulier [84, 91] est un cas particulier sur lequel nous reviendrons ultérieurement et pour lequel la limite commutative $(\theta, B) \rightarrow 0$ n'existe pas.

Le choix de jauge symétrique (1.23) possède une propriété intéressante si l'on regarde les rotations. En mécanique quantique, le générateur infinitésimal des rotations est l'opérateur de moment cinétique $L \equiv \epsilon_{jk} x_j p_k = x_1 p_2 - x_2 p_1$ avec les relations de commutation

$$[L, x_i] = i \epsilon_{ij} x_j, \quad [L, p_i] = i \epsilon_{ij} p_j \quad \text{avec } i = 1, 2. \quad (1.25)$$

Si l'on se sert des relations (1.23) pour réécrire les opérateurs \vec{x} et \vec{p} en termes de $\hat{\vec{x}}$ et $\hat{\vec{p}}$, l'opérateur de moment cinétique prend la forme

$$L = \frac{1}{\kappa} (\epsilon_{ij} \hat{x}_i \hat{p}_j + \frac{B}{2} \hat{x}^2 + \frac{\theta}{2} \hat{p}^2), \quad (1.26)$$

qui se trouve correspondre au générateur infinitésimal des rotations dans le plan non-commutatif,

$$[L, \hat{x}_i] = i \epsilon_{ij} \hat{x}_j, \quad [L, \hat{p}_i] = i \epsilon_{ij} \hat{p}_j \quad \text{avec } i = 1, 2. \quad (1.27)$$

Par conséquent, si le hamiltonien ordinaire $H(\vec{x}, \vec{p})$ est invariant sous les rotations ($[H, L] = 0$), le hamiltonien en espace non-commutatif $\hat{H}(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$ obtenu à partir des définitions (1.23) le sera également ($[\hat{H}, L] = 0$).

L'algèbre (1.21) peut aussi être découplée de manière analogue aux deux cas précédents en effectuant (pour $\theta \neq 0$) le changement [87, 91]

$$\hat{k}_i = \hat{p}_i - \frac{1}{\theta} \epsilon_{ij} \hat{x}_j \quad \text{avec } i = 1, 2. \quad (1.28)$$

On obtient alors deux algèbres découplées mais de forme similaire,

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i \theta \mathbb{1}, \quad [\hat{k}_1, \hat{k}_2] = -i \frac{\kappa}{\theta} \mathbb{1}, \quad [\hat{x}_i, \hat{k}_j] = 0. \quad (1.29)$$

Ainsi, si $\kappa = 0$, c'est-à-dire $B = \frac{1}{\theta}$, les \hat{k}_i commutent avec tous les générateurs de l'algèbre. D'après le lemme de Schur, cela entraîne qu'ils sont proportionnels à l'identité, $\hat{k}_i = \lambda_i \mathbb{1}$ pour un certain $\lambda_i \in \mathbb{R}$. En conséquence de quoi, il ne reste plus qu'un seul commutateur non trivial, à savoir

$$[\hat{x}_1, \hat{\Pi}] = i \mathbb{1}, \quad \text{où } \hat{\Pi} = \frac{1}{\theta} \hat{x}_2. \quad (1.30)$$

L'algèbre se réduit donc à celle d'un système mécanique unidimensionnel.

Enfin, le cas particulier $B = -\theta$ a également été étudié et une représentation possible est décrite dans [89].

(iv) Cas général

Définissons le vecteur

$$\hat{u} = (u_1, \dots, u_4)^t \equiv (\omega \hat{x}_1, \hat{p}_1, \omega \hat{x}_2, \hat{p}_2)^t \quad (1.31)$$

où t désigne la transposée. Le paramètre ω n'est introduit qu'en vue d'applications futures (en particulier, l'étude de l'oscillateur harmonique).

Les relations de commutation (1.12) se mettent sous la forme d'une matrice 4×4 ,

$$[\hat{u}_I, \hat{u}_J] = i \hat{M}_{IJ} \mathbb{1} \quad (I, J = 1, \dots, 4), \quad (1.32)$$

où \hat{M} est la matrice antisymétrique

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \theta & \omega \phi_1 \\ -\omega & 0 & \omega \phi_2 & B \\ -\omega^2 \theta & -\omega \phi_2 & 0 & \omega \\ -\omega \phi_1 & -B & -\omega & B \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Si l'on calcule le déterminant de cette matrice \hat{M} , on s'aperçoit que celui-ci est toujours non-négatif $\det \hat{M} = \kappa^2$ avec

$$\kappa = \omega^2(1 - B\theta + \phi_1\phi_2). \quad (1.34)$$

Ainsi la matrice \hat{M} donne lieu à deux phases distinctes (c'est-à-dire deux régions dans l'espace des paramètres $(\theta, B, \phi_1, \phi_2)$) suivant le signe de κ . Notons que la limite commutative se situe dans la région $\kappa > 0$.

Étant donné que \hat{M} est antisymétrique, $i\hat{M}$ est hermitienne et possède donc des valeurs propres réelles, plus précisément deux valeurs propres (Ω_+, Ω_-) et leurs opposées,

$$\Omega_{\pm} = \sqrt{4\omega^2 + (B - \omega^2\theta)^2 + \omega^2(\phi_1 + \phi_2)^2} \pm \sqrt{(B + \omega^2\theta)^2 + \omega^2(\phi_1 - \phi_2)^2}. \quad (1.35)$$

On notera que Ω_+ est toujours positif alors que Ω_- est du même signe que κ . Par ailleurs, on a la relation

$$\det \hat{M} = \kappa^2 = \det(i\hat{M}) = (\Omega_+\Omega_-)^2. \quad (1.36)$$

Il est possible de trouver une transformation orthogonale qui diagonalise \hat{M} par blocs [89, 97, 98], c'est-à-dire qu'il existe une matrice R de $O(4)$ ($R^t R = \mathbb{1}$) telle que

$$M = R^t \hat{M} R = \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

où D_{\pm} sont des matrices 2×2 qui valent par définition

$$D_{\pm} \equiv \begin{pmatrix} 0 & |\Omega_{\pm}| \\ -|\Omega_{\pm}| & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Par ailleurs, le vecteur \hat{u} se transforme sous l'effet de R en un vecteur

$$\vec{u} = R^t \hat{u}, \quad (1.39)$$

de telle sorte que les commutateurs (1.32) s'écrivent dorénavant

$$[u_I, u_J] = i M_{IJ} \mathbb{1} \quad (I, J = 0, \dots, 4). \quad (1.40)$$

Si l'on définit de nouveaux opérateurs x_1, x_2, p_1 et p_2 tels que

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^t \equiv (|\Omega_+| x_1, p_1, |\Omega_-| x_2, p_2)^t, \quad (1.41)$$

on voit que ceux-ci vérifient les relations de commutation canoniques (1.9).

Par conséquent, la transformation $\vec{u} = R^t \hat{u}$ fournit une représentation de l'algèbre non-commutative (1.12) en termes d'opérateurs satisfaisant des relations de commutations canoniques. Dans la limite commutative $\theta, B, \phi_1, \phi_2 \rightarrow 0$, on remarque que $\Omega_+ = \Omega_- = \omega$ et les opérateurs (\hat{x}, \hat{p}) coïncident bien avec les opérateurs (x, p) .

Remarque : Les représentations de type Landau données en (1.22) pour le cas particulier $\phi_1 = 0 = \phi_2$ ne rentrent pas dans ce cadre.

1.4 Représentations de l'algèbre non-commutative en dimension quelconque

(i) $B_{ij} = C_{ij} = 0$

Reprenons le cas particulier où les opérateurs d'impulsion commutent entre eux,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i \theta_{ij} \mathbb{1}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \delta_{ij} \mathbb{1} \quad i, j \in \{1, \dots, d\}. \quad (1.42)$$

Une représentation analogue à celle donnée en (1.18) existe sous la forme [83, 85]

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{1}{2} \theta_{ij} p_j, \quad \hat{p}_i = p_i. \quad (1.43)$$

La comparaison avec la jauge de Landau pour une particule dans un champ magnétique B_{ij} constant à trois dimensions est immédiate. Elle conduit à la correspondance

$$(\hat{x}_i, \hat{p}_i, \theta_{ij}) \longleftrightarrow (\Pi_i, -x_i, B_{ij}). \quad (1.44)$$

(ii) Cas général

La procédure indiquée dans la section 1.3.2 est généralisable directement en dimension quelconque [89, 97, 98].

$$(iii) C_{ij} = 0$$

Le cas particulier où les commutateurs position-impulsion sont pris canoniques a été abordé dans quelques travaux. Ainsi, dans [93], on présente des représentations pour le modèle isotropique tridimensionnel, c'est-à-dire

$$\theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{31} \equiv \theta, \quad B_{12} = B_{23} = B_{31} \equiv B. \quad (1.45)$$

La référence [101] traite quant à elle le cas particulier où $B_{ij} \propto (\theta_{ij})^{-1}$.

1.5 Non-commutativité positionnelle et produit-étoile

Dans la littérature, on s'intéresse plus souvent à un cas particulier de l'algèbre non-commutative dans laquelle les coefficients B_{ij} et C_{ij} sont nuls. Ainsi, la non-commutativité n'est réalisée que sur les opérateurs position par le biais des paramètres θ_{ij} (voir équations (1.42)) :²²

Le moyen usuel de réaliser cette algèbre non-commutative consiste à déformer le produit ordinaire. Ainsi, plutôt que de travailler avec des fonctions dépendant des coordonnées non-commutatives \hat{x} en utilisant le produit ordinaire, nous allons travailler avec des fonctions dépendant des variables ordinaires (commutantes) x mais en utilisant le produit-étoile qui, dans le cas particulier $\theta_{ij} = \text{constante}$, s'écrit

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= f(x) e^{-i\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta_{ij} \overrightarrow{\partial}_j} g(x) \\ &= f(x) e^{-i\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_{x_i} \theta_{ij} \overrightarrow{\partial}_{y_j}} g(y) \Big|_{x=y}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Cette expression est compatible avec les relations de commutation (1.42) :

$$[x_i * x_j] \equiv x_i * x_j - x_j * x_i = i\theta_{ij}. \quad (1.47)$$

En mécanique quantique ordinaire, le potentiel V agit sur la fonction d'onde $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ comme un opérateur de multiplication, à savoir $\psi \mapsto V \cdot \psi$. En mécanique quantique non-commutative, le potentiel V agit sur ψ au moyen du produit-étoile, $\psi \mapsto V * \psi$. Si l'on calcule la transformée de Fourier de cette relation, on se rend compte que l'action du potentiel au moyen du produit-étoile est identique à l'action du potentiel dépendant des coordonnées \hat{x} et non plus des x ordinaires [83] :

$$(V * \psi)(\vec{x}) = V(\hat{\vec{x}})\psi(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad \hat{x}_i \equiv x_i - \frac{1}{2}\theta^{ij}p_j. \quad (1.48)$$

L'objet $V(\hat{\vec{x}})$ peut donc être vu comme un opérateur agissant sur la fonction d'onde ψ . En particulier, si on prend pour l'opérateur V l'opérateur position, on obtient bien

$$(x_i * \psi)(\vec{x}) = \hat{x}_i \psi(\vec{x}). \quad (1.49)$$

²²On notera que dans le cas où les θ_{ij} sont des opérateurs, ceux-ci commutent avec les opérateurs impulsion \hat{p}_i d'après la discussion précédente sur l'identité de Jacobi, cf. équations (1.10).

L'équation (1.48) correspond en réalité à une prescription d'ordre particulière. Il est possible de vérifier que cette prescription est en réalité celle de Weyl : en décomposant $(x_1 x_2) * \psi$ à l'aide de (1.46), on obtient

$$((x_1 x_2) * \psi)(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_2 \hat{x}_1)\psi(\vec{x}). \quad (1.50)$$

En résumé, en mécanique quantique non-commutative, le hamiltonien décrivant le système peut être exprimé, soit en fonction des opérateurs \hat{x} et \hat{p} , soit en fonction des opérateurs x et p satisfaisant des relations de commutation canoniques mais agissant sur la fonction d'onde au moyen du produit-étoile.

1.6 Conséquences pour la théorie quantique

Les relations de commutation $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}\mathbb{1}$ impliquent les inégalités d'Heisenberg $(\Delta \hat{x}_i)(\Delta \hat{x}_j) \geq \frac{1}{2}|\theta_{ij}|$, c'est-à-dire que la particule ne peut plus être localisée de manière précise. L'espace prend alors une structure de réseau [79].

Par ailleurs, si l'on peut encore considérer des fonctions d'onde Ψ dépendant des coordonnées non-commutatives, il n'est pas possible d'adopter la notation de Dirac $\langle \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d | \Psi \rangle$ puisque les opérateurs $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d$ ne commutent plus entre eux et ne peuvent donc pas être diagonalisés simultanément.

Chapitre 2

Mécanique quantique en espace non-commutatif

Le hamiltonien d'un système évoluant dans un espace non-commutatif est obtenu en remplaçant dans l'expression du hamiltonien ordinaire les opérateurs canoniques x et p par leurs équivalents non-commutatifs \hat{x} et \hat{p} . Ce hamiltonien est toujours supposé agir sur des fonctions d'onde $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, cette action étant naturelle si l'on possède une représentation des \hat{x} et \hat{p} en termes des x et p . Cependant, dans certains cas, on peut même se passer d'une représentation, le spectre du hamiltonien pouvant être déterminé d'une manière purement algébrique. Dans certains travaux, le paramètre θ est pris infiniment petit de telle sorte qu'il est possible d'établir une théorie de perturbation autour de la limite commutative.

Concernant le paramètre B de non-commutativité des opérateurs d'impulsion \hat{p}_i , suivant les remarques faites précédemment, celui-ci est assimilable à un champ magnétique. C'est pourquoi, dans le cas où $B \neq 0$, il n'est pas nécessaire d'introduire de potentiel vecteur dans le hamiltonien (bien que cela ait déjà été fait dans certains travaux).

Indépendamment de la forme générale de l'algèbre satisfaite par (\hat{x}, \hat{p}) pour $d = 2$, le générateur infinitésimal des rotations agit comme

$$\begin{aligned} [\hat{L}, \hat{x}_i] &= i \epsilon_{ij} \hat{x}_j, \\ [\hat{L}, \hat{p}_i] &= i \epsilon_{ij} \hat{p}_j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour $i, j = 1, 2$. Par conséquent, les termes quadratiques \hat{x}^2 et \hat{p}^2 sont invariants sous les rotations.

Dans toute la suite, on se place dans un système d'unités où $\hbar = c = e = 1$ et on considère un système de masse unité $m = 1$.

2.1 Potentiel scalaire

On se place dans le cas de l'algèbre (1.42) en dimension $d = 3$. On peut regrouper tous les termes θ_{ij} indépendants au sein d'un vecteur $\vec{\theta} = (\theta_k)$ tel que $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk} \theta_k$. La

représentation (1.43) se met alors sous la forme

$$\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \frac{1}{4}\vec{\theta} \times \vec{p}, \quad \hat{\vec{p}} = \vec{p}. \quad (2.2)$$

Le hamiltonien $H = \frac{1}{2}\hat{\vec{p}}^2 + V(\hat{\vec{x}})$ s'écrit, dans cette représentation,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V\left(\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{\theta} \times \vec{p}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{x}) + \frac{1}{4}(\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{\nabla}V(\vec{x}) + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le potentiel V décrit une interaction non locale mais qui peut être traitée en théorie des perturbations si l'on considère que le paramètre θ est suffisamment petit devant les longueurs caractéristiques du système [85].

Pour un potentiel central $V(r)$, on a $\vec{\nabla}V(r) = V' \frac{\vec{x}}{r}$ et alors

$$(\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{\nabla}V \propto (\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{x} = (\vec{p} \times \vec{x}) \cdot \vec{\theta} \equiv -\vec{L} \cdot \vec{\theta}.$$

Ainsi, le hamiltonien (2.3) prend la forme

$$H = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(r) - \frac{1}{4} \frac{V'(r)}{r} \vec{L} \cdot \vec{\theta} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (2.4)$$

Le dernier terme est similaire à un terme d'interaction spin-orbite du type $\vec{L} \cdot \vec{S}$.

Il faut noter que le changement de variables $(\vec{x}, \vec{p}) \rightarrow (\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$ n'est pas unitaire car il ne préserve pas l'algèbre des commutateurs. En conséquence de quoi, le hamiltonien (2.3) n'est pas unitairement équivalent au hamiltonien ordinaire $H = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{x})$.

Enfin, suite à la remarque (1.48), le remplacement du produit ordinaire par le produit-étoile, en lieu et place de l'utilisation des opérateurs « non-commutatifs », conduit au même hamiltonien.

2.2 Le système de Landau

Le problème de Landau en espace non-commutatif [87, 88, 90] peut être traité de la même façon que le modèle ordinaire (cf. section 1.1). On considère donc le hamiltonien de la particule libre $H = \frac{1}{2}\hat{\vec{p}}^2$ écrit avec des opérateurs impulsion satisfaisant l'algèbre (1.21). Le spectre en énergie est calculé en utilisant la même méthode que pour les relations (1.4) - (1.5). On remarque que le résultat final

$$E_n = |B|(n + \frac{1}{2}) \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

est indépendant du paramètre θ . Par conséquent, les niveaux d'énergie sont identiques à ceux obtenus en mécanique quantique ordinaire ($\theta = 0$). Cependant, il existe des quantités observables qui diffèrent d'un modèle à l'autre. On peut mentionner, par exemple, la densité d'états par unité de surface [87], $\rho = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{1 - B\theta} \right|$. Cette dernière expression diverge au point singulier $B = \frac{1}{\theta}$.

2.3 Le système de Landau avec potentiel harmonique

Nous allons commencer par étudier le cas général de l'algèbre (1.12) avant de considérer le cas particulier où les coefficients ϕ_1 et ϕ_2 s'annulent.

2.3.1 Cas général

L'exemple du système de Landau tel qu'il a été décrit à la section précédente peut être étendu à des algèbres de commutateurs et/ou des hamiltoniens plus généraux. Ainsi nous supposons que les opérateurs $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2)$ satisfont les relations (1.12) et nous considérons une particule en mouvement plan soumise à l'action d'un champ magnétique constant dans la direction perpendiculaire ainsi qu'à un potentiel harmonique central fonction des coordonnées non-commutatives $\hat{\vec{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$:

$$H = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2) \quad (\omega \geq 0). \quad (2.6)$$

Le spectre de ce système [87, 89, 91–93] peut être déterminé de manière algébrique [89] en utilisant les résultats concernant les représentations de l'algèbre (1.12) énoncés au paragraphe (iv) de la section 1.3.2. En effet, le hamiltonien (2.6) peut se réécrire en fonction du vecteur $\hat{\vec{u}}$ ou \vec{u} introduits dans les relations (1.31) et (1.39), à savoir $H = \frac{1}{2}\hat{\vec{u}}^2 = \frac{1}{2}\vec{u}^2$. Si l'on développe maintenant \vec{u} sur ses composantes u_I dépendant des opérateurs canoniques x_i et p_j (cf. relations (1.41)), on obtient

$$2H = (p_1^2 + \Omega_+^2 x_1^2) + (p_2^2 + \Omega_-^2 x_2^2), \quad (2.7)$$

avec Ω_{\pm} définis dans l'équation (1.35).

Par conséquent, l'oscillateur harmonique isotrope en espace non-commutatif (2.6) fonction de $\hat{\vec{x}}$ et $\hat{\vec{p}}$ satisfaisant l'algèbre (1.12) est équivalent à l'oscillateur anisotropique en espace commutatif de fréquences Ω_+ et Ω_- . Les valeurs propres de H sont donc caractérisées par deux entiers n_+ et n_- (positifs) :

$$E = (n_+ + \frac{1}{2})\Omega_+ + (n_- + \frac{1}{2})|\Omega_-| \quad \text{avec} \quad n_+, n_- \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.8)$$

Au point singulier $\kappa \equiv \omega^2(1 - B\theta + \phi_1\phi_2) = 0$, la pulsation Ω_- s'annule ; on aboutit donc à une dégénérescence des valeurs propres. Un cas particulier de cette situation

correspond à $\omega = 0$. On a alors $\Omega_+ = |B|$ et les niveaux d'énergie (2.8) correspondent aux niveaux de Landau (2.5). Si $\kappa > 0$, on peut prendre la limite commutative qui redonne l'oscillateur harmonique isotrope. La discussion sur le hamiltonien à deux dimensions (2.6) se généralise aux dimensions supérieures [89, 93].

Remarque : Dans les équations (1.41), nous aurions également pu définir les nouvelles variables canoniques d'espace de phase comme

$$(u_1, \dots, u_4) \equiv \left(\sqrt{\Omega_+} x'_1, \sqrt{\Omega_+} p'_1, \sqrt{|\Omega_-|} x'_2, \sqrt{|\Omega_-|} p'_2 \right), \quad (2.9)$$

ce qui nous permet de reformuler le hamiltonien (2.6) sous la forme

$$2H = \Omega_+^2 (p_1'^2 + x_1'^2) + \Omega_-^2 (p_2'^2 + x_2'^2). \quad (2.10)$$

Le spectre est strictement identique à celui donné en (2.8). Cette approche est celle utilisée dans les références [89, 92, 98] et dans la section suivante où nous faisons l'hypothèse $\phi_1 = \phi_2 = 0$ dans l'algèbre (1.12).

2.3.2 Cas où $\phi_1 = \phi_2 = 0$

Dans ce cas précis, les définitions (1.35) des valeurs propres Ω_\pm se réduisent à

$$2\Omega_\pm = \sqrt{4\omega^2 + (B - \omega^2\theta)^2} \pm |B + \omega^2\theta| \quad (2.11)$$

et l'algèbre a la forme (1.21). Dans la suite, nous considérerons la représentation (1.23) afin d'exprimer les opérateurs \hat{x} et \hat{p} en fonction d'opérateurs \vec{x} et \vec{p} canoniques [92]. Le hamiltonien (2.6) s'écrit alors

$$H = \alpha \vec{p}^2 + \beta \vec{x}^2 - \frac{1}{2} (B + \omega^2\theta) L, \quad (2.12)$$

où $L = x_1 p_2 - x_2 p_1$ est le moment angulaire canonique et

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(c^2 + \omega^2 \frac{\theta^2}{4a^2} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} (d^2 + \omega^2 a^2). \quad (2.13)$$

La hamiltonien (2.12) décrit un oscillateur isotropique plan avec un couplage entre le moment angulaire orbital L et un champ magnétique externe donné par la combinaison particulière $B + \omega^2\theta$. Ce dernier terme est un effet purement non-commutatif²³. Le spectre de ce hamiltonien peut s'écrire

$$E = \omega_B (n + 1) + \frac{1}{2} (B + \omega^2\theta) m \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m \in \mathbf{Z}), \quad (2.14)$$

avec $\omega_B \equiv 2\sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega^2 + (B - \omega^2\theta)^2}$. Pour $B + \omega^2\theta > 0$, cette caractérisation des niveaux d'énergie est équivalente à (2.8) en vertu des relations $\Omega_\pm = \omega_B \pm \frac{1}{2} (B + \omega^2\theta)$ (cf. références [92] pour plus de détails).

²³Le cas particulier $B = -\omega^2\theta$ est discuté dans la référence [89].

L'égalité des expressions (2.10) et (2.12) de H implique que les variables canoniques \vec{x}', \vec{p}' et \vec{x}, \vec{p} sont reliées par la transformation canonique

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta(x'_1 - p'_2), & p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta^{-1}(x'_2 + p'_1) \\ x_2 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \Delta(x'_2 - p'_1), & p_2 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \Delta^{-1}(x'_1 + p'_2) \end{aligned} \right\} \text{ avec } \Delta \equiv \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/4}. \quad (2.15)$$

On peut définir en fonction des opérateurs canoniques \vec{x}' et \vec{p}' les opérateurs [91, 92]

$$\begin{aligned} L' &\equiv x'_1 p'_2 - x'_2 p'_1 \\ L &\equiv x_1 p_2 - x_2 p_1 = -\frac{1}{2}(x_1'^2 - x_2'^2 + p_1'^2 - p_2'^2) \\ \bar{L} &\equiv -(x'_1 x'_2 + p'_1 p'_2) \end{aligned}$$

qui satisfont les relations de structure de l'algèbre de Lie $su(2)$,

$$[L', L] = 2i\bar{L} \quad \text{ainsi que les permutations circulaires,}$$

et l'équation (2.10) implique que le hamiltonien peut être réécrit sous la forme

$$H = \frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-)C - \frac{1}{2}(\Omega_+ - \Omega_-)L, \quad (2.16)$$

où $C \equiv \frac{1}{2}(\vec{x}'^2 + \vec{p}'^2)$ correspond à l'opérateur de Casimir $L^2 + L'^2 + \bar{L}^2 = C^2 - \mathbb{1}$.

On peut étudier la dynamique du système physique décrit par le hamiltonien (2.6) et l'algèbre (1.21) dans le formalisme de Heisenberg. En appliquant la relation $\dot{\mathcal{O}} = i[H, \mathcal{O}]$ aux opérateurs \hat{x}_i et \hat{p}_j , on obtient les équations du mouvement [87]

$$\ddot{\hat{x}}_j + \tilde{\omega}^2 \hat{x}_j - \tilde{B} \varepsilon_{jk} \dot{\hat{x}}_k = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.17)$$

avec $\tilde{\omega}^2 \equiv \omega^2(1 - B\theta)$ et $\tilde{B} \equiv B + \omega^2\theta$. Ce résultat peut être interprété comme une équation du mouvement classique pour un système de pulsation effective $\tilde{\omega}$ soumis à une force de Lorentz due à un champ magnétique effectif \tilde{B} . Nous pouvons noter encore une fois que les quantités $1 - B\theta$ et $B + \omega^2\theta$ apparaissent comme des grandeurs caractéristiques du système étudié. L'ansatz $\hat{\vec{x}}(t) = \hat{\vec{x}}_0 \exp(i\Omega t)$ donne les trajectoires classiques de pulsations $\Omega_{\pm} = \frac{1}{2}|\sqrt{\tilde{B}^2 + 4\tilde{\omega}^2} \pm \tilde{B}|$ en accord avec la relation (2.11).

Au point singulier $B = \theta^{-1}$, on a $\tilde{\omega} = 0$ et $\tilde{B} = \theta^{-1} + \omega^2\theta$, c'est-à-dire que l'oscillateur harmonique ne se manifeste que par le biais du champ magnétique [87]. Si l'on part de l'algèbre complète (1.12) (avec les paramètres ϕ_1 et ϕ_2), l'équation du mouvement (2.17) inclut un champ de force qui ne possède pas d'interprétation physique naturelle. Ce champ fait intervenir le paramètre $\phi_2 - \phi_1$ et se simplifie donc dans le cas où $\phi_1 = \phi_2 \equiv \phi$. Dans ce cas, on obtient de nouveau l'équation (2.17) avec \tilde{B} défini comme ci-dessus et

$\tilde{\omega}^2 \equiv \omega^2(1 - B\theta + \phi^2)$, c'est-à-dire le paramètre κ introduit de manière algébrique dans la relation (1.34).

En conclusion, nous pouvons noter qu'à trois dimensions, des expressions sensiblement analogues aux équations (1.23) et (2.12) peuvent être obtenues [93] dans le cas complètement isotrope décrit par la relation (1.45) et en imposant la condition $B = \omega^2\theta$, celle-ci permettant d'avoir une expression invariante sous les rotations du hamiltonien exprimé en termes d'opérateurs canoniques (de manière similaire à (2.12)).

2.4 Le système de Landau avec potentiel central

Revenons à l'algèbre (1.21) et remplaçons dans le hamiltonien (2.6) le potentiel de l'oscillateur harmonique par un potentiel central arbitraire :

$$H = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + V(\hat{x}^2). \quad (2.18)$$

Il est difficile d'espérer résoudre complètement ce système bidimensionnel. Cependant, il est remarquable de constater qu'il est entièrement soluble pour un potentiel V arbitraire pour peu que l'on se place au point singulier défini comme solution de l'équation $\kappa \equiv 1 - B\theta = 0$ (c'est-à-dire $B = \frac{1}{\theta}$) car il se réduit alors à un problème unidimensionnel [91]. En réalité, comme nous l'avons vu dans la section (1.3.2), le changement de variables $\hat{p} \mapsto \hat{k}$ défini par (1.28) permet de découpler l'algèbre (1.21) en la mettant sous la forme (1.29). Or cette algèbre découplée a la particularité pour $\kappa = 0$ de ne plus contenir qu'un seul commutateur non trivial faisant intervenir des variables canoniquement conjuguées \hat{x}_1 et $\hat{\Pi}$ à une dimension (cf. équation (1.30)). Le hamiltonien (2.18) peut se réduire de la même façon : ainsi, après changement de variables, on a, pour une valeur quelconque de κ ,

$$H = \frac{1}{2} \hat{k}^2 - \frac{1}{\theta} (\hat{x}_1 \hat{k}_2 - \hat{x}_2 \hat{k}_1) + \frac{1}{2\theta^2} \hat{x}^2 + V(\hat{x}^2).$$

Pour $\kappa = 0$, les opérateurs \hat{k}_1 et \hat{k}_2 sont nécessairement proportionnels à l'identité (voir la discussion suivant (1.29)). Si l'on impose l'invariance rotationnelle de H , le seul choix possible est $\hat{k}_1 = 0 = \hat{k}_2$ [91], de telle sorte que le hamiltonien prend la forme

$$H = \frac{1}{2\theta^2} \hat{x}^2 + V(\hat{x}^2). \quad (2.19)$$

On peut réécrire cette expression en fonction des variables canoniquement conjuguées \hat{x}_1 et $\hat{\Pi} \equiv \frac{1}{\theta} \hat{x}_2$:

$$\frac{1}{2\theta^2} \hat{x}^2 = \frac{1}{2} \hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\theta^2} \hat{x}_1^2,$$

qui correspond au hamiltonien d'un oscillateur harmonique de fréquence $\frac{1}{\theta}$ (on suppose $\theta > 0$). Par conséquent, pour $\kappa = 0$, le système non-commutatif est exactement soluble et son spectre vaut

$$E_n = \frac{1}{\theta} \left(n + \frac{1}{2} \right) + V(\theta(2n+1)) \quad \text{avec } n = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

Dans le cas particulier où $V(\hat{x}^2) = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2$, on retrouve le résultat (2.8) avec $\kappa = 0$.

Considérons maintenant le hamiltonien (2.18) pour une valeur non nulle de κ . On peut décrire ce hamiltonien en utilisant des opérateurs d'annihilation $a = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (\hat{x}_1 + i \hat{x}_2)$

et $b = \sqrt{\frac{\theta}{2|\kappa|}} (\hat{k}_1 + i \hat{k}_2)$, ainsi que les opérateurs de création a^\dagger et b^\dagger associés (on suppose encore $\theta > 0$). Le système admet qualitativement des propriétés différentes suivant le signe de κ . Pour $\kappa > 0$, (respectivement $\kappa < 0$), le spectre peut être caractérisé en termes des représentations du groupe de Lie $SU(2)$ (respectivement $SU(1, 1)$) et il existe un nombre fini (respectivement infini) d'états stationnaires pour une valeur donnée du moment angulaire. De plus, pour $\kappa < 0$, certains niveaux d'énergie peuvent être calculés de manière exacte alors que la théorie de perturbation autour de la valeur $\kappa = 0$ permet d'obtenir des résultats approchés pour tous les niveaux d'énergie (voir la référence [91] pour plus de détails).

Finalement, nous pouvons aussi noter qu'il existe une autre description du système physique qui conduit à un spectre d'énergie différent : le modèle « exotique » [82, 94] consiste à modifier les crochets de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\text{CP}}$ associés à l'algèbre quantique (1.21) avec un facteur $\frac{1}{\kappa}$:

$$\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}_{\text{CP}} = \frac{\theta}{\kappa}, \quad \{\hat{p}_1, \hat{p}_2\}_{\text{CP}} = \frac{B}{\kappa}, \quad \{\hat{x}_i, \hat{p}_j\}_{\text{CP}} = \frac{\delta_{ij}}{\kappa}.$$

Ces crochets divergent pour $\kappa \rightarrow 0$. Cette approche permet des applications à l'effet Hall quantique ou la dynamique des vortex dans un film fin d'hélium ^4He superfluide [94]. La question de savoir quel schéma de quantification doit être adopté dans le cas présenté ici est toujours un problème ouvert.

2.5 Variétés non triviales

La mécanique quantique sur la sphère non-commutative, le tore non-commutatif ou des variétés riemanniennes plus générales a fait l'objet des références [87, 88, 95]. Dans la limite de grand rayon, les calculs sur la sphère redonnent effectivement les résultats obtenus dans le plan.

Chapitre 3

Mécanique quantique supersymétrique en espace non-commutatif

Après avoir rappelé les principales notions autour de la formulation de systèmes supersymétriques en mécanique quantique [102, 103], nous allons voir comment ils se transposent dans un espace non-commutatif. Après une formulation générale, on s'intéressera plus particulièrement à un cas particulier : l'oscillateur harmonique supersymétrique à 2 dimensions.

3.1 Supersymétrie en mécanique quantique ordinaire

La mécanique quantique supersymétrique est apparue il y a une vingtaine d'années avec les travaux de Nicolai [104] et Witten [105]. Un système supersymétrique est caractérisé par une décomposition de l'espace de Hilbert en deux sous-espaces en somme directe (un espace dit « bosonique » et un espace dit « fermionique ») et un opérateur Q qui transforme les états bosoniques en états fermioniques et vice-versa.

3.1.1 Principales définitions

DÉFINITION B.1

Un système quantique (\mathcal{H}, H) est la donnée d'un opérateur H auto-adjoint ($H^\dagger = H$) appelé **hamiltonien** agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{H} appelé **espace des états**.

DÉFINITION B.2

Un système quantique (\mathcal{H}, H) est dit **supersymétrique** s'il existe un nombre fini d'opérateurs auto-adjoints Q_i ($i \in \{1, \dots, N\}$) ainsi qu'une **involution** (c'est-à-dire un opérateur auto-adjoint non borné) agissant sur \mathcal{H} satisfaisant

$$\begin{array}{lll}
 K^2 = \mathbb{1} & \text{et} & K \neq \pm \mathbb{1} \\
 \{K, Q_i\} = 0 & \text{avec} & i \in \{1, \dots, N\} \\
 \{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{ij}H & \text{avec} & i, j \in \{1, \dots, N\}.
 \end{array} \tag{3.1}$$

Les opérateurs Q_i sont aussi appelés **supercharges**.

Une propriété importante relie la supersymétrie $N = 1$ à la supersymétrie $N = 2$ [102].

PROPOSITION B.1

Il est possible de construire à partir de la supercharge Q_1 et de l'involution K une deuxième supercharge

$$Q_2 = \pm i K Q_1. \quad (3.2)$$

Un système supersymétrique vérifie plusieurs propriétés :

- Son spectre est entièrement positif ;
- L'espace des états \mathcal{H} peut se décomposer en somme directe : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_f$ où les sous-espaces sont définis comme $\mathcal{H}_b = \{\varphi \in \mathcal{H} | K\varphi = +\varphi\}$ et $\mathcal{H}_f = \{\varphi \in \mathcal{H} | K\varphi = -\varphi\}$;
- Q_i envoie un état de \mathcal{H}_b sur un état de \mathcal{H}_f et réciproquement.

Autrement dit, on retrouve des propriétés analogues aux théories des champs supersymétriques, où des bosons et des fermions sont reliés entre eux par des opérateurs de supersymétrie.

3.1.2 Forme explicite d'un système supersymétrique

Algèbre de Clifford

On considère l'algèbre de Clifford associé à la métrique euclidienne dans un espace de dimension r [106]. Cette algèbre peut être décrite par un ensemble de matrices hermitiennes γ_α ($\alpha = 1, \dots, r$) qui vérifient les relations d'anticommutation

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}\mathbb{1} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r). \quad (3.3)$$

Si r est pair, nous introduisons également une matrice γ_{r+1} qui est définie comme le produit de toutes les matrices γ_α ,

$$\gamma_{r+1} = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_r, \quad (3.4)$$

qui anticommute avec toutes les matrices γ_α ($\alpha = 1, \dots, r$) et qui satisfait $\gamma_{r+1}^2 = \mathbb{1}$.

Dans la suite, nous considérons le produit tensoriel de cette algèbre de Clifford avec l'algèbre engendrée par les opérateurs x_i et p_j . Naturellement, les matrices γ_α ($\alpha = 1, \dots, r$) et γ_{r+1} commutent avec tous les x_i et p_j ,

$$[\gamma_\alpha, x_i] = [\gamma_\alpha, p_i] = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, \dots, r \quad \text{et} \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.5)$$

En dimension quatre, les matrices γ peuvent être représentées en termes des matrices de Pauli σ_i selon

$$\gamma_4 = -\sigma_2 \otimes \mathbb{1} = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_\alpha = \sigma_1 \otimes \sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ \sigma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.6)$$

Forme explicite des supercharges

Les supercharges sont définies comme combinaisons linéaires de matrices γ_α ,

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^r \gamma_\alpha \otimes a_i^\alpha \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.7)$$

où les coefficients a_i^α sont des opérateurs auto-adjoints dépendant de x et p .

Si r est pair, on a alors $\gamma_{r+1} \neq \pm \mathbb{1}$. Par conséquent, nous pouvons définir un opérateur d'involution

$$K = \gamma_{r+1} \otimes \mathbb{1} \quad (3.8)$$

tel que les supercharges (3.7) anticommulent toutes avec K .

Remarque : pour de grandes valeurs de r , il existe une forme plus générale pour les supercharges, qui fait intervenir le produit de deux ou plus matrices γ_α , la condition d'anticommuation avec γ_{r+1} étant de fait conservée. Cependant, cela complique l'analyse, c'est pourquoi dans la suite, nous ne considérerons que des supercharges linéaires en γ .

Le hamiltonien

Le hamiltonien de ce système supersymétrique, défini suivant (3.1) pour une supercharge $Q \equiv \sum_{\alpha=1}^r \gamma_\alpha \otimes a_\alpha$, vaut

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} Q^2 \\ &= \mathbb{1} \otimes \left(\sum_{\alpha=1}^r a_\alpha^2 \right) + \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=1}^r [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \otimes [a_\alpha, a_\beta]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Afin d'avoir un hamiltonien qui possède des termes quadratiques dans les impulsions, il est nécessaire de prendre des coefficients a_α qui soient au plus linéaires dans les opérateurs p_j .

3.2 Supersymétrie en espace non-commutatif

3.2.1 Généralités sur les systèmes quantiques en espace non-commutatif

Soit un système quantique en espace ordinaire décrit par son hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{p})$. En espace non-commutatif, on définira le hamiltonien correspondant $H(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$ en remplaçant les coordonnées de l'espace de phase ordinaire (x, p) par leurs équivalents non-commutatifs (\hat{x}, \hat{p}) . L'espace de Hilbert des états reste cependant le même.

3.2.2 Hamiltoniens supersymétriques en espace non-commutatif

Dans toute la suite, on considérera un espace de dimension d et une algèbre de Clifford associée à l'espace euclidien de dimension $r = 2d$. Par ailleurs, le produit tensoriel sera dorénavant sous-entendu.

En reprenant la forme générale présentée à la section précédente, on peut définir une supercharge

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{2d} \gamma_i a_i, \quad (3.10)$$

à la différence que les coefficients a_i dépendent maintenant des opérateurs \hat{x}, \hat{p} : $a_i = a_i(\hat{x}, \hat{p})$.

En utilisant l'involution $K = \gamma_{r+1}$ (puisque r est pair), on peut construire une seconde supercharge

$$Q_2 = i K Q_1, \quad (3.11)$$

qui est fonction des opérateurs \hat{x}_i et \hat{p}_j et on a les relations d'anticommutation

$$\{Q_1, Q_2\} = \{Q_1, K\} = \{Q_2, K\} = 0. \quad (3.12)$$

Le hamiltonien supersymétrique H est défini, comme précédemment, par le carré des supercharges

$$\{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{ij}H \quad (i, j \in \{1, 2\}). \quad (3.13)$$

Un exemple intéressant de supercharge est donné par l'expression

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^d \left(\gamma_i \hat{p}_i + \gamma_{d+i} \hat{W}_i \right), \quad (3.14)$$

où le superpotentiel $\hat{W} = (\hat{W}_i)_{i=1, \dots, d}$ ne dépend que des opérateurs position $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d)$. Le hamiltonien s'écrit alors

$$2H = (\hat{p}^2 + \hat{W}^2) \mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^d \gamma_i \gamma_{d+j} [\hat{p}_i, \hat{W}_j] + \sum_{1 \leq i < j \leq d} (\gamma_i \gamma_j [\hat{p}_i, \hat{p}_j] + \gamma_{d+i} \gamma_{d+j} [\hat{W}_i, \hat{W}_j]). \quad (3.15)$$

Le commutateur $[\hat{W}_i, \hat{W}_j]$ fait intervenir le paramètre θ_{ij} de non-commutativité des coordonnées spatiales, le terme $[\hat{p}_i, \hat{W}_j]$ fait intervenir les coefficients C_{ij} de l'algèbre (1.7). Quant au terme $[\hat{p}_i, \hat{p}_j]$, il décrit la présence d'un champ magnétique.

3.2.3 Application : Oscillateur harmonique en espace non-commutatif

Notre discussion se fonde sur la référence [100]. L'oscillateur harmonique correspond au superpotentiel $\hat{W} = \omega \hat{x}$ où ω est la pulsation du système ($\omega > 0$). On s'intéresse ici au cas bidimensionnel $d = 2$. En conséquence de quoi, le hamiltonien (3.15)

prend la forme

$$H = \frac{1}{2} \left(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2 \right) + \frac{i}{2} \left[B\gamma_1\gamma_2 - \omega(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4) + \omega(\phi_2\gamma_1\gamma_4 - \phi_1\gamma_2\gamma_3) + \omega^2\theta\gamma_3\gamma_4 \right] \quad (3.16)$$

Ce hamiltonien possède deux parties bien distinctes : une partie H_{xp} ne dépendant que des variables d'espace de phase \hat{x} et \hat{p} et une partie H_γ ne dépendant que des matrices γ de l'algèbre de Clifford : $H = H_{xp} + H_\gamma$.

Ces deux parties commutent entre elles et sont donc diagonalisables séparément. Le spectre complet du hamiltonien H est donné par la somme du spectre de H_{xp} et du spectre de H_γ .

Spectre de H_{xp}

Le spectre de H_{xp} est identique à celui calculé en (2.8).

Spectre de H_γ

On peut prendre (3.6) comme représentation de l'algèbre de Clifford. En reportant dans l'expression de H_γ , on arrive au spectre

$$E_\gamma = \left\{ \pm \frac{1}{2}(\Omega_+ + |\Omega_-|); \pm \frac{1}{2}(\Omega_+ - |\Omega_-|) \right\}. \quad (3.17)$$

Conclusion

Dans nos travaux sur les théories de Yang-Mills topologiques et de gravité topologique, nous avons développé une approche simple de superespace. Dans un premier temps, nous avons utilisé ce formalisme pour discuter les symétries des théories topologiques. En considérant une superjauge de type Wess et Zumino (choisie de manière appropriée dans chacun des cas), nos résultats sur les transformations de symétrie dans le superespace nous ont permis de retrouver de manière directe et naturelle un certain nombre de résultats connus. En gravité topologique, une approche de superespace n'avait pas encore été considérée (à part quelques résultats partiels à deux dimensions) et elle nous a conduit à une algèbre de symétries « off-shell » complète. La formulation particulière de cette algèbre qui fait directement intervenir le paramètre de supersymétrie locale généralise les résultats « on-shell » présentés auparavant dans la littérature. En étudiant la manière d'introduire le graviphoton dans la gravité topologique, nous avons constaté que deux approches ne possédant pas le même contenu en superchamps et symétries pouvaient néanmoins aboutir aux mêmes lois de transformation dans la superjauge de Wess et Zumino (pour peu que les paramètres soient interprétés de manière appropriée).

Alors que l'approche dans le superespace avait été appliquée dans le passé à la description du lagrangien et de certaines symétries dans les théories de Yang-Mills topologique, elle n'avait pas encore été exploitée pour discuter les observables de ces théories. Ces dernières ont généralement été étudiées par le biais de la cohomologie équivariante qui n'est pas un outil standard dans les théories de jauge ordinaires. Nous avons montré que, dans le cadre d'une approche de superespace, la détermination des observables se réduit à un problème de cohomologie BRST standard pour des théories de jauge supersymétriques ordinaires : ceci permet d'appliquer les résultats bien connus correspondants. Nos résultats sur les équations de bi-descente (apparaissant dans une étape intermédiaire) pourraient servir dans d'autres contextes ou des relations de ce type apparaissent [17]. À des complications techniques près, notre discussion des observables pour les théories de Yang-Mills topologiques devrait pouvoir se généraliser au cas de la gravité topologique.

Aussi bien pour les théories topologiques que pour la mécanique quantique en espace non-commutatif, nous avons fait une mise au point dans laquelle nous avons essayé de présenter de manière simple et concise les résultats connus et de comparer différentes approches. En particulier, pour la gravité topologique, nous avons discuté de manière détaillée les liens entre l'approche métrique et le formalisme des vielbeins. Dans ce contexte, nous avons aussi trouvé de nouvelles observables associées à la torsion et

construites à partir de l'invariant topologique de Nieh et Yan.

Même si les théories topologiques sont déjà connues depuis une quinzaine d'années, elles restent néanmoins d'actualité par des aspects très variés : des théories de cordes et de membranes topologiques ont été développées récemment [107], la gravitation a été présentée comme un modèle topologique déformé [108, 109] et certains auteurs ont proposé de construire les théories de jauge supersymétriques à partir des théories de Yang-Mills topologiques [110]. Très récemment, l'approche de superspace que nous avons développé en détail pour le cas d'un générateur de supersymétrie a été généralisé au cas de plusieurs générateurs [36].

En ce qui concerne la mécanique quantique en espace non-commutatif, elle représente un sujet de recherche assez récent et nous espérons que notre mise au point pourra servir pour une étude plus complète des représentations et des propriétés de cette théorie. Il serait en effet intéressant d'avoir une classification générale des représentations de l'algèbre non-commutative dans le cas où les paramètres de non-commutativité sont des opérateurs (constants ou non). Par ailleurs, on peut également s'intéresser à des systèmes mécaniques plus complexes : système de plusieurs particules en interaction, monopôle magnétique,...

Bibliographie

- [1] Glenn Barnich, Friedemann Brandt, and Marc Henneaux, « *Local BRST cohomology in gauge theories* », Phys. Rept. **338** (2000), hep-th/0002245.
- [2] Edward Witten, « *Topological quantum field theory* », Commun. Math. Phys. **117** (1988).
- [3] Edward Witten, « *Quantum field theory and the Jones polynomial* », Commun. Math. Phys. **121** (1989).
- [4] Danny Birmingham, Matthias Blau, Mark Rakowski, and George Thompson, « *Topological field theory* », Phys. Rept. **209** (1991).
- [5] Robert C. Myers and Vipul Periwal, « *Topological gravity and moduli space* », Nucl. Phys. **B333** (1990).
- [6] Frank Thuillier, « *Some remarks on topological 4D-gravity* », J. Geom. Phys. **27** (1998), hep-th/9707084.
- [7] Robert C. Myers, « *New observables for topological gravity* », Nucl. Phys. **B343** (1990).
- [8] Robert C. Myers and Vipul Periwal, « *Invariants of smooth four manifolds from topological gravity* », Nucl. Phys. **B361** (1991).
- [9] L. Baulieu and I. M. Singer, « *Conformally invariant gauge fixed actions for 2-D topological gravity* », Commun. Math. Phys. **135** (1991).
- [10] C. M. Becchi, R. Collina, and C. Imbimbo, « *A functional and Lagrangian formulation of two dimensional topological gravity* », (1994), hep-th/9406096.
- [11] Diego Bellisai, Francesco Fucito, Alessandro Tanzini, and Gabriele Travaglini, « *Multi-instantons, supersymmetry and topological field theories* », Phys. Lett. **B480** (2000), hep-th/0002110.
- [12] B. Geyer and D. Mulsch, « *Higher dimensional analogue of the Blau-Thompson model and $N_T = 8$, $d = 2$ Hodge-type cohomological gauge theories* », Nucl. Phys. **B662** (2003), hep-th/0211061.
- [13] Bodo Geyer and Dietmar Mulsch, « *$N_T = 4$ equivariant extension of the 3D topological model of Blau and Thompson* », Nucl. Phys. **B616** (2001), hep-th/0108042.

- [14] Paul de Medeiros, Christopher M. Hull, Bill Spence, and Jose M. Figueroa-O'Farrill, «*Conformal topological Yang-Mills theory and de Sitter holography*», JHEP **08** (2002), hep-th/0111190.
- [15] Alberto S. Cattaneo, Jurg Frohlich, and Bill Pedrini, «*Topological field theory interpretation of string topology*», Commun. Math. Phys. **240** (2003), math.gt/0202176.
- [16] Christiaan Hofman and Jae-Suk Park, «*Topological open membranes*», (2002), hep-th/0209148.
- [17] Laurent Baulieu, Pietro Antonio Grassi, and Daniel Zwanziger, «*Gauge and topological symmetries in the bulk quantization of gauge theories*», Nucl. Phys. **B597** (2001), hep-th/0006036.
- [18] L. H. Ryder, *QUANTUM FIELD THEORY*, Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1985).
- [19] Edward Witten, «*Introduction to cohomological field theories*», Int. J. Mod. Phys. **A6** (1991).
- [20] Pierre van Baal, «*An introduction to Topological Yang-Mills Theory*», Acta Phys. Polon. **B21** (1990).
- [21] James H. Horne, «*Superspace versions of topological theories*», Nucl. Phys. **B318** (1989).
- [22] Clisthenis P. Constantinidis, Olivier Piguet, and Wesley Spalenza, «*Superspace gauge fixing of topological Yang-Mills theories*», Eur. Phys. J. **C33** (2004), hep-th/0310184.
- [23] F. A. Berezin, *THE METHOD OF SECOND QUANTIZATION*, Academic Press, (1966).
- [24] Chen-Ning Yang and R. L. Mills, «*Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*», Phys. Rev. **96** (1954).
- [25] Stephane Ouvry, Raymond Stora, and Pierre van Baal, «*On the algebraic characterization of Witten's topological Yang-Mills theory*», Phys. Lett. **B220** (1989).
- [26] Hiroaki Kanno, «*Weyl algebra structure and geometrical meaning of BRST transformation in topological quantum field theory*», Z. Phys. **C43** (1989).
- [27] Hiroaki Kanno, «*Observables in topological Yang-Mills theory and the Gribov problem*», Lett. Math. Phys. **19** (1990).
- [28] C. Aragao de Carvalho and L. Baulieu, «*Local BRST symmetry and superfield formulation of the Donaldson-Witten theory*», Phys. Lett. **B275** (1992).

- [29] Francois Delduc, Nicola Maggiore, Olivier Piguet, and Sylvain Wolf, «*Note on constrained cohomology*», Phys. Lett. **B385** (1996), hep-th/9605158.
- [30] L. Baulieu and I. M. Singer, «*Topological Yang-Mills symmetry*», Nucl. Phys. Proc. Suppl. **5B** (1988).
- [31] A. Blasi and R. Collina, «*Basic cohomology of topological quantum field theories*», Phys. Lett. **B222** (1989).
- [32] Matthias Blau and George Thompson, « *$N=2$ topological gauge theory, the Euler characteristic of moduli spaces, and the Casson invariant*», Commun. Math. Phys. **152** (1993), hep-th/9112012.
- [33] Matthias Blau and George Thompson, «*Aspects of $N_T \geq 2$ topological gauge theories and D-branes*», Nucl. Phys. **B492** (1997), hep-th/9612143.
- [34] Raymond Stora, Frank Thuillier, and Jean-Christophe Wallet, «*Algebraic structure of cohomological field theory models and equivariant cohomology*», . Lectures at the Caribbean Spring School of Mathematics and Theoretical Physics, St. Francois, Guadeloupe, May 30 - Jun 13, 1993.
- [35] O. Piguet and S. P. Sorella, *ALGEBRAIC RENORMALIZATION : PERTURBATIVE RENORMALIZATION, SYMMETRIES AND ANOMALIES*, Lect. Notes Phys., (1995).
- [36] Clisthenis P. Constantinidis, Olivier Piguet, and Wesley Spalenza, «*Observables in topological Yang-Mills theories with extended shift supersymmetry*», (2005), hep-th/0502244.
- [37] Lee Smolin and Artem Starodubtsev, «*General relativity with a topological phase : An action principle*», (2003), hep-th/0311163.
- [38] Alejandro Perez, «*Spin foam models for quantum gravity*», Class. Quant. Grav. **20** (2003), gr-qc/0301113.
- [39] Thomas Thiemann, «*Lectures on loop quantum gravity*», Lect. Notes Phys. **631** (2003), gr-qc/0210094.
- [40] Ichiro Oda, «*A relation between topological quantum field theory and the Kodama state*», (2003), hep-th/0311149.
- [41] G. Bonelli and A. M. Boyarsky, «*Six dimensional topological gravity and the cosmological constant problem*», Phys. Lett. **B490** (2000), hep-th/0004058.
- [42] Edward Witten, «*Topological gravity*», Phys. Lett. **B206** (1988).
- [43] J. M. F. Labastida and M. Pernici, «*A Lagrangian for topological gravity and its BRST quantization*», Phys. Lett. **B213** (1988).

- [44] Roger Brooks, David Montano, and Jacob Sonnenschein, « *Gauge fixing and renormalization in topological quantum field theory* », Phys. Lett. **B214** (1988).
- [45] David Montano and Jacob Sonnenschein, « *Topological strings* », Nucl. Phys. **B313** (1989).
- [46] David Montano and Jacob Sonnenschein, « *The topology of moduli space and quantum field theory* », Nucl. Phys. **B324** (1989).
- [47] J. M. F. Labastida, M. Pernici, and Edward Witten, « *Topological gravity in two-dimensions* », Nucl. Phys. **B310** (1988).
- [48] M. Mena and M. Tahiri, « *BRST - anti-BRST symmetry and observables for topological gravity* », Phys. Rev. **D57** (1998).
- [49] Malcolm J. Perry and Edward Teo, « *Topological conformal gravity in four-dimensions* », Nucl. Phys. **B401** (1993), hep-th/9211063.
- [50] Damiano Anselmi and Pietro Fre, « *Twisted N=2 supergravity as topological gravity in four dimensions* », Nucl. Phys. **B392** (1993), hep-th/9208029.
- [51] Laurent Baulieu and Alessandro Tanzini, « *Topological gravity versus supergravity on manifolds with special holonomy* », JHEP **03** (2002), hep-th/0201109.
- [52] P. de Medeiros and B. Spence, « *Four-dimensional topological Einstein-Maxwell gravity* », Class. Quant. Grav. **20** (2003), hep-th/0209115.
- [53] Hjoer Yol Lee, Akika Nakamichi, and Tatsuya Ueno, « *Topological two form gravity in four dimensions* », Phys. Rev. **D47** (1993), hep-th/9205066.
- [54] Mitsuko Abe, Akika Nakamichi, and Tatsusya Ueno, « *Gravitational instantons and moduli spaces in topological two form gravity* », Phys. Rev. **D50** (1994), hep-th/9408178.
- [55] R. A. Bertlmann, *ANOMALIES IN QUANTUM FIELD THEORY*, Oxford, UK : Clarendon (1996).
- [56] F. Langouche, Thomas Schucker, and R. Stora, « *Gravitational anomalies of the Adler-Bardeen type* », Phys. Lett. **B145** (1984).
- [57] Laurent Baulieu and Jean Thierry-Mieg, « *Algebraic structure of quantum gravity and the classification of the gravitational anomalies* », Phys. Lett. **B145** (1984).
- [58] L. Baulieu and M. Bellon, « *p-forms and supergravity : gauge symmetries in curved space* », Nucl. Phys. **B266** (1986).

- [59] Clisthenis Constantinidis, Francois Gieres, Olivier Piguet, and Marcelo S. Sarandy, « *On the symmetries of BF models and their relation with gravity* », JHEP **01** (2002), hep-th/0111273.
- [60] Olivier Piguet, « *Ghost equations and diffeomorphism invariant theories* », Class. Quant. Grav. **17** (2000), hep-th/0005011.
- [61] Edward Witten, « *(2+1)-dimensional gravity as an exactly soluble system* », Nucl. Phys. **B311** (1988).
- [62] Edward Witten, « *Topology changing amplitudes in (2+1)-dimensional gravity* », Nucl. Phys. **B323** (1989).
- [63] H. T. Nieh and M. L. Yan, « *An identity in Riemann-Cartan geometry* », J. Math. Phys. **23** (1982).
- [64] H. T. Nieh and M. L. Yan, « *Quantized Dirac field in curved Riemann-Cartan background. 1. Symmetry properties, Green's function* », Ann. Phys. **138** (1982).
- [65] Osvaldo Chandia and Jorge Zanelli, « *Torsional topological invariants (and their relevance for real life)* », (1997), hep-th/9708138.
- [66] Osvaldo Chandia and Jorge Zanelli, « *Topological invariants, instantons and chiral anomaly on spaces with torsion* », Phys. Rev. **D55** (1997), hep-th/9702025.
- [67] Alejandro Mardones and Jorge Zanelli, « *Lovelock-Cartan theory of gravity* », Class. Quant. Grav. **8** (1991).
- [68] Han-Ying Guo, Ke Wu, and Wei Zhang, « *On torsion and Nieh-Yan form* », Commun. Theor. Phys. **32** (1999), hep-th/9805037.
- [69] S. Wu, « *Appearance of universal bundle structure in four- dimensional topological gravity* », J. Geom. Phys. **12** (1993).
- [70] Jose Luis Boldo, Clisthenis P. Constantinidis, Francois Gieres, Matthieu Lefrancois, and Olivier Piguet, « *Observables in topological Yang-Mills theories* », (2003), hep-th/0303053.
- [71] Jose Luis Boldo, Clisthenis P. Constantinidis, Francois Gieres, Matthieu Lefrancois, and Olivier Piguet, « *Topological Yang-Mills theories and their observables : A superspace approach* », Int. J. Mod. Phys. **A18** (2003), hep-th/0303084.
- [72] Erik Verlinde and Herman Verlinde, « *A solution of two-dimensional topological quantum gravity* », Nucl. Phys. **B348** (1991).
- [73] C. M. Becchi, R. Collina, and C. Imbimbo, « *On the semirelative condition for closed (topological) strings* », Phys. Lett. **B322** (1994), hep-th/9311097.

- [74] Carlo M. Becchi and Camillo Imbimbo, « *Gribov horizon, contact terms and Čech-De Rham cohomology in 2D topological gravity* », Nucl. Phys. **B462** (1996), hep-th/9510003.
- [75] Carlo M. Becchi and Camillo Imbimbo, « *A Lagrangian formulation of two-dimensional topological gravity and Cech-De Rham cohomology* », (1995), hep-th/9511156.
- [76] Tohru Eguchi and Andrew J. Hanson, « *Selfdual solutions to euclidian gravity* », Ann. Phys. **120** (1979).
- [77] Hartland S. Snyder, « *Quantized space-time* », Phys. Rev. **71** (1947).
- [78] Gerald V. Dunne, R. Jackiw, and C. A. Trugenberger, « *'Topological' (Chern-Simons) quantum mechanics* », Phys. Rev. **D41** (1990).
- [79] J. Madore, *AN INTRODUCTION TO NONCOMMUTATIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY AND PHYSICAL APPLICATIONS*, Cambridge University Press, (2000).
- [80] Jerzy Lukierski, Peter C. Stichel, and Wojtek J. Zakrzewski, « *Galilean-invariant (2+1)-dimensional models with a Chern- Simons-like term and $D = 2$ noncommutative geometry* », Annals Phys. **260** (1997), hep-th/9612017.
- [81] Daniela Bigatti and Leonard Susskind, « *Magnetic fields, branes and noncommutative geometry* », Phys. Rev. **D62** (2000), hep-th/9908056.
- [82] C. Duval and P. A. Horvathy, « *The exotic Galilei group and the "Peierls substitution"* », Phys. Lett. **B479** (2000), hep-th/0002233.
- [83] Luca Mezincescu, « *Star Operation in Quantum Mechanics* », (2000), hep-th/0007046.
- [84] Corneliu Sochichiu, « *A note on noncommutative and false noncommutative spaces* », Applied Sciences **3** (2001), hep-th/0010149.
- [85] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, « *Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED* », Phys. Rev. Lett. **86** (2001), hep-th/0010175.
- [86] J. Gamboa, M. Loewe, and J. C. Rojas, « *Non-Commutative Quantum Mechanics* », Phys. Rev. **D64** (2001), hep-th/0010220.
- [87] V. P. Nair and A. P. Polychronakos, « *Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere* », Phys. Lett. **B505** (2001), hep-th/0011172.
- [88] Bogdan Morariu and Alexios P. Polychronakos, « *Quantum mechanics on the non-commutative torus* », Nucl. Phys. **B610** (2001), hep-th/0102157.

- [89] Agapitos Hatzinikitas and Ioannis Smyrnakis, « *The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimensions* », J. Math. Phys. **43** (2002), hep-th/0103074.
- [90] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, and J. C. Rojas, « *The Landau problem and noncommutative quantum mechanics* », Mod. Phys. Lett. **A16** (2001), hep-th/0104224.
- [91] Stefano Bellucci, Armen Nersessian, and Corneliu Sochichiu, « *Two phases of the non-commutative quantum mechanics* », Phys. Lett. **B522** (2001), hep-th/0106138.
- [92] Anais Smailagic and Euro Spallucci, « *Isotropic representation of the noncommutative 2D harmonic oscillator* », Phys. Rev. **D65** (2002), hep-th/0108216.
- [93] Anais Smailagic and Euro Spallucci, « *Noncommutative 3D harmonic oscillator* », J. Phys. **A35** (2002), hep-th/0205242.
- [94] P. A. Horvathy, « *The non-commutative Landau problem and the Peierls substitution* », Ann. Phys. **299** (2002), hep-th/0201007.
- [95] Bogdan Morariu and Alexios P. Polychronakos, « *Quantum mechanics on noncommutative Riemann surfaces* », Nucl. Phys. **B634** (2002), hep-th/0201070.
- [96] Olivier Espinosa and Patricio Gaete, « *Symmetry in noncommutative quantum mechanics* », (2002), hep-th/0206066.
- [97] Larisa Jonke and Stjepan Meljanac, « *Representations of noncommutative quantum mechanics and symmetries* », Eur. Phys. J. **C29** (2003), hep-th/0210042.
- [98] Ivan Dadic, Larisa Jonke, and Stjepan Meljanac, « *Harmonic oscillator on noncommutative spaces* », Acta Phys. Slov. **55** (2005), hep-th/0301066.
- [99] E. Harikumar, V. Sunil Kumar, and A. Khare, « *Supersymmetric quantum mechanics on non-commutative plane* », Phys. Lett. **B589** (2004), hep-th/0402064.
- [100] Pijush K. Ghosh, « *Supersymmetric quantum mechanics on noncommutative space* », (2004), hep-th/0403083.
- [101] Kang Li, Jian-hua Wang, and Chi-yi Chen, « *Representation of noncommutative phase space* », Mod. Phys. Lett. **A20** (2005), hep-th/0409234.
- [102] Monique Combescure, Francois Gieres, and Maurice Kibler, « *Are $N = 1$ and $N = 2$ supersymmetric quantum mechanics equivalent ?* », J. Phys. **A37** (2004), quant-ph/0401120.
- [103] François Gieres and Matthieu Lefrançois, « *The general structure of supersymmetric quantum mechanics (and of some of its generalizations)* », en préparation.
- [104] H. Nicolai, « *Supersymmetry and spin systems* », J. Phys. **A9** (1976).

- [105] Edward Witten, « *Constraints on supersymmetry breaking* », Nucl. Phys. **B202** (1982).
- [106] M. Nakahara, *GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS*, Adam Hilger (1990).
- [107] Giulio Bonelli, Alessandro Tanzini, and Maxim Zabzine, « *On topological M-theory* », (2005), hep-th/0509175.
- [108] L. Freidel, Kirill Krasnov, and R. Puzio, « *BF description of higher-dimensional gravity theories* », Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), hep-th/9901069.
- [109] Laurent Freidel and Artem Starodubtsev, « *Quantum gravity in terms of topological observables* », (2005), hep-th/0501191.
- [110] Laurent Baulieu, Guillaume Bossard, and Alessandro Tanzini, « *Topological vector symmetry of BRSTQFT and construction of maximal supersymmetry* », JHEP **08** (2005), hep-th/0504224.
- [111] Jean Pierre Ader, Francois Gieres, and Yves Noirod, « *Gauged BRST symmetry and covariant gravitational anomalies* », Phys. Lett. **B256** (1991).
- [112] M. Knecht, S. Lazzarini, and F. Thuillier, « *Shifting the Weyl anomaly to the chirally split diffeomorphism anomaly in two-dimensions* », Phys. Lett. **B251** (1990).

Annexe

A

Démonstrations des principaux théorèmes

Dans toute cette annexe, nous revenons sur les théorèmes présentés durant l'étude de la théorie de Yang-Mills topologique. Ces démonstrations comportent des aspects plutôt techniques, c'est pourquoi nous avons pris le parti de les reporter en annexe plutôt que dans le cours du manuscrit.

A.1 Cohomologie de Q modulo d

Revenons sur les propositions A.1 et A.2 :

PROPOSITION B.1

La condition

$$Q {}^s\omega_p + \mathbf{d} {}^{s+1}\omega_{p-1} = 0 \quad (\text{A.1})$$

implique

$$\begin{cases} {}^s\omega_p = Q {}^{s-1}\varphi_p + \mathbf{d} {}^s\varphi_{p-1}, \\ {}^{s+1}\omega_{p-1} = Q {}^s\varphi_{p-1} + \mathbf{d} {}^{s+1}\varphi_{p-2}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Cette proposition peut s'étendre au cas de superchamps : ${}^s\Omega_p$.

PROPOSITION B.2

La condition

$$Q {}^s\Omega_p + \mathbf{d} {}^{s+1}\Omega_{p-1} = 0 \quad (\text{A.3})$$

implique

$$\begin{cases} {}^s\Omega_p = Q {}^{s-1}\Phi_p + \mathbf{d} {}^s\Phi_{p-1}, \\ {}^{s+1}\Omega_{p-1} = Q {}^s\Phi_{p-1} + \mathbf{d} {}^{s+1}\Phi_{p-2}. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La preuve s'articule autour de la trivialité des cohomologies de Q et d dans l'espace des formes différentielles. En vertu d'un corollaire du théorème 9.2 de la référence [1], on montre que toute forme ${}^s\omega_p$ qui est Q -invariante modulo d est Q -exacte modulo d ,

$${}^s\omega_p = Q {}^{s-1}\varphi_p + \mathbf{d} {}^s\varphi_{p-1}. \quad (\text{A.5})$$

Elle satisfait donc la première équation des équations (A.2).

En interchangeant le rôle de Q et d , on peut montrer que ${}^{s+1}\omega_{p-1}$ est aussi d -exacte modulo Q ,

$${}^{s+1}\omega_{p-1} = d^{s+1}\chi_{p-2} + Q^s\chi_{p-1}. \quad (\text{A.6})$$

Reste à montrer que ce sont les mêmes formes χ et φ qui apparaissent dans les expressions (A.5) et (A.6). Pour cela, nous reportons les expressions précédentes dans la condition (A.1), ce qui nous donne

$$dQ({}^s\chi_{p-1} - {}^s\varphi_{p-1}) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Compte tenu de la cohomologie triviale de d , on aboutit à

$$Q({}^s\chi_{p-1} - {}^s\varphi_{p-1}) + d^{s+1}\chi_{p-2} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Ainsi, on se retrouve avec un problème de cohomologie de Q modulo d mais à l'ordre précédent en p . On a donc le résultat

$${}^s\chi_{p-1} = {}^s\varphi_{p-1} + Q^{s-1}\xi_{p-1} + d^s\xi_{p-2}. \quad (\text{A.9})$$

En reportant dans (A.6) et en posant ${}^{s+1}\varphi_{p-2} = {}^{s+1}\chi_{p-2} - Q^s\xi_{p-2}$, on arrive au résultat final,

$${}^{s+1}\omega_{p-1} = Q^s\varphi_{p-1} + d^{s+1}\varphi_{p-2}. \quad (\text{A.10})$$

Le même raisonnement peut être fait en ce qui concerne les superchamps, étant donné que la cohomologie de Q et de d est également triviale dans l'espace \mathcal{E}_S des superchamps. ■

À partir de là, nous pouvons montrer le résultat avancé dans la proposition A.3.

PROPOSITION B.3

La contrainte de supersymétrie implique que toutes les formes ${}^s\omega_p^{d-p}$ apparaissant dans les équations de descente peuvent être remplacées, sans perte de généralité, par des superchamps

$${}^s\omega_p^{d-p} = Q^{s-1}\Omega_p^{d-p} \quad (p = 0, \dots, d). \quad (\text{A.11})$$

Nous avons déjà établi la relation pour $p = d$, un raisonnement par récurrence va nous permettre de généraliser ce résultat à un degré de forme p quelconque. Supposons que la relation est vraie au degré $p + 1$. On a l'équation de descente

$$\mathcal{S}^s\omega_{p+1}^{d-p-1} + d^s\omega_p^{d-p} = 0, \quad (\text{A.12})$$

ce qui donne si l'on applique Q et en utilisant le fait que $Q^s \omega_{p+1}^{d-p-1}$ est nul, compte tenu de notre hypothèse de récurrence,

$$dQ^s \omega_p^{d-p} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Comme la cohomologie de d est triviale, on obtient la relation

$$Q^s \omega_p^{d-p} + d^{s+1} \omega_{p-1}^{d-p} = 0. \quad (\text{A.14})$$

En utilisant la proposition A.1 et en éliminant le terme en dérivée totale (qui ne contribue pas à l'équation de descente), on finit par avoir

$${}^s \omega_p^{d-p} = Q^{s-1} \omega_p^{d-p}. \quad (\text{A.15})$$

Suivant le même argument avancé précédemment, on peut remplacer la forme différentielle ${}^{s-1} \omega_p^{d-p}$ par un superchamp ${}^{s-1} \Omega_p^{d-p}$, ce qui nous fournit le résultat de la proposition à l'ordre p et achève la récurrence. ■

A.2 Équations de bi-descente

PROPOSITION B.4

Soit un couple (s, d) correspondant respectivement au nombre de supersymétrie et au nombre de forme de l'observable globale ${}^s \Delta_d$. Pour ce couple, les équations de descente avec la contrainte de supersymétrie impliquent une tour d'équations de bi-descente

$$S^{s-r-1} \Omega_p^{d-p+r} + d^{s-r-1} \Omega_{p-1}^{d-p+r+1} + Q^{s-r-2} \Omega_p^{d-p+r+1} = 0, \quad (\text{A.16})$$

où $r = 0, \dots, s-1$ et $p = 0, \dots, d$.

Le raisonnement procède comme précédemment par récurrence sur r . Pour simplifier la démonstration, il est commode d'utiliser le formalisme des formes étendues. Ces formes sont définies comme sommes des formes différentielles de même degré total, autrement dit

$${}^{s-1-r} \tilde{\Omega}_{d+r} = \sum_{p=0}^d {}^{s-1-r} \Omega_p^{d-p+r} \quad (r = 0, \dots, s-1). \quad (\text{A.17})$$

On définit aussi une dérivée extérieure étendue $\tilde{d} = d + S$ nilpotente elle aussi ($\tilde{d}^2 = 0$). Les équations de descente se réécrivent sous la forme ²⁴

$$\tilde{d}^{s-r-1} \tilde{\Omega}_{d+r} + Q^{s-r-2} \tilde{\Omega}_{d+r+1} = d^{s-r-1} \Omega_d^r \quad (r = 0, \dots, s-1) \quad (\text{A.18})$$

²⁴le terme de droite n'est là que pour compenser le terme de degré de forme $d+1$ en trop dans le membre de gauche.

Pour l'instant, nous savons que (A.18) est valable pour $r = 0$ (d'après l'équation (2.53)). Supposons qu'il en est de même pour r et intéressons nous au rang $r + 1$. Si l'on applique \tilde{d} à l'équation au rang r et en utilisant sa nilpotence ainsi que celle de d , on arrive à

$$Q\tilde{d}^{s-r-2}\tilde{\Omega}_{d+r+1} = dS^{s-r-1}\Omega_d^r. \quad (\text{A.19})$$

Or, d'après les équations de descente pour $p = d$ et r quelconque, le terme $S^{s-r-1}\Omega_d^r$ est équivalent à $-Q^{s-r-2}\Omega_d^{r+1} - d^{s-r-1}\Omega_{d-1}^r$, ce qui nous donne au final

$$Q\tilde{d}^{s-r-2}\tilde{\Omega}_{d+r+1} = -dQ^{s-r-2}\Omega_d^{r+1} = Qd^{s-r-2}\Omega_d^{r+1}, \quad (\text{A.20})$$

compte tenu que Q et d anticommulent.

La cohomologie de Q étant triviale, on aboutit à l'existence d'une forme étendue $^{s-r-3}\tilde{\Omega}_{d+r+2}$ satisfaisant

$$\tilde{d}^{s+r-2}\tilde{\Omega}_{d+r+1} + Q^{s-r-3}\tilde{\Omega}_{d+r+2} = d^{s-r-2}\Omega_d^{r+1}, \quad (\text{A.21})$$

ce qui achève la récurrence. ■

A.3 Solutions générales des équations de bi-descente

A.3.1 Énoncé de la proposition

Nous arrivons au résultat principal de cette étude sur les observables de la théorie de Yang-Mills topologique.

Il existe deux classes de solutions :

(i) Observables non-triviales au sens de la cohomologie équivariante données par

$${}^{D-d}\Omega_d^0 = [[\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}}^0 f_{r_2}(\hat{F}) \dots f_{r_L}(\hat{F})]_{s=D-d, p=d} \quad (\text{A.22})$$

avec $D = 2 \sum_{i=0}^L m_{r_i} - 1, \quad L \geq 1.$

(ii) Observables triviales au sens de la cohomologie équivariante données par

$${}^{D-d}\Omega_d^0 = {}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0(F_A, \Psi, \Phi, D_A\Psi, D_A\Phi), \quad (\text{A.23})$$

où \mathcal{Z} est un polynôme invariant de jauge non-trivial dans le sens où ${}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0 \neq d^{D-d}\Phi_{d-1}^0 + Q^{D-d-1}\Phi_d^0$.

A.3.2 Superformes tronquées

Nous nous intéressons aux équations de bi-descente pour des valeurs fixées de d et D (qui déterminent le parallélogramme $Par(d, D)$ dans le repère d'axes (p, g)). La donnée de d et D impose des contraintes sur le degré de forme et le degré de supersymétrie

$$s \leq D - d \quad \text{et} \quad p \leq d. \quad (\text{A.24})$$

Nous introduisons des superformes tronquées (à ne pas confondre avec les formes étendues de la section précédente). Ces formes tronquées sont définies comme

$$\check{\Omega}_p^g = [\hat{\Omega}_p^g]^{tr} = \sum_{p=q-D+d}^d q^{-p} \Omega_p^g(\mathbf{d}\theta)^{q-p}. \quad (\text{A.25})$$

Remarque : Dans le cas où $g + q = D$, la forme tronquée contient tous les champs appartenant à la ligne g dans le parallélogramme $Par(d, D)$.

De la même façon, nous pouvons introduire une dérivée extérieure tronquée \check{d} qui n'opère en réalité que comme la troncation de la dérivée extérieure usuelle,

$$\check{d}\check{\Omega}_q^g = [\hat{d}\check{\Omega}_q^g]^{tr}. \quad (\text{A.26})$$

Les équations de bi-descente (2.55) se réécrivent en fonction des formes tronquées selon

$$S\check{\Omega}_{D-g}^g + \check{d}\check{\Omega}_{D-g-1}^{g+1} = 0 \quad (g = 0, \dots, D). \quad (\text{A.27})$$

Ces équations décrivent donc la cohomologie de \mathcal{S} modulo \check{d} mais dans l'espace $\check{\mathcal{E}}_{(d,D)}$ des formes tronquées. En suivant la procédure usuelle de résolution de cette cohomologie [1], il nous faut tout d'abord déterminer la cohomologie de \mathcal{S} dans l'espace $\check{\mathcal{E}}_{(d,D)}$.

Revenons à la redéfinition opérée en (2.9). On remarque que A_θ et K forment un doublet BRST; par conséquent, ils ne participent pas à la cohomologie de \mathcal{S} (en vertu des résultats de la section (2.7) de [1]). Ainsi, la cohomologie de \mathcal{S} dans l'espace \mathcal{E}_S est constituée des polynômes ne dépendant que de C , du superchamp de courbure F_A ainsi que des « superchamps de matière » Ψ et Φ et de leurs dérivées covariantes. Plus spécifiquement, elle est générée par

$$\theta_r(C) \quad (r = 0, \dots, \text{rg } G) \quad \text{et} \quad P^{inv}(F_A, \Psi, \Phi, D_A\Psi, D_A\Phi), \quad (\text{A.28})$$

où $\theta_r(C)$ est associé au r -ième Casimir du groupe G et P^{inv} est un polynôme invariant de jauge.

Ce qui vient d'être fait dans l'espace \mathcal{E}_S des superformes se porte directement dans l'espace $\mathcal{E}_{(d,D)}$ des formes tronquées.

LEMME B.1

La cohomologie de \mathcal{S} dans cet espace est donnée par les formes tronquées dont les coefficients sont des polynômes dans les variables (A.28).

Ainsi, si l'on considère la dernière équation de la tour d'équations de descente (A.27),

$$\mathcal{S}\check{\Omega}_0^D = 0, \quad (\text{A.29})$$

cela signifie que $\check{\Omega}_0^D = {}^0\Omega_0^D$ est un polynôme fonction des θ_r . Comme nous l'avons déjà remarqué dans la remarque de la section (2.5.2) (page 49), seul un monôme en θ_r permet d'avoir des observables de degré de fantôme 0.

Nous choisissons donc $\check{\Omega}_0^D = \theta_r(C)$.²⁵ À partir de cette forme $\check{\Omega}_0^D$, on peut remonter la tour d'équations de descente en prenant à chaque étage la troncation des superformes $[\hat{\theta}_r]_{D-g}^g$ qui satisfont les équations de superdescente. Arrivés en haut de la tour, on obtient la forme tronquée de degré de fantôme 0,

$$\check{\Omega}_D^0 = {}^{D-d}\Omega_d^0(d\theta)^{D-d} = [[\hat{\theta}_r]_D^0]^{tr}. \quad (\text{A.30})$$

Pour construire la solution générale à partir de cette solution particulière, il faut rajouter la solution générale des équations de descente commençant par $\check{\Omega}_0^D = 0$.²⁶ Relativisons ce dernier point : comme nous ne nous intéressons qu'aux classes de cohomologie, nous pouvons relâcher cette dernière hypothèse (sans perte de généralité) en prenant plutôt $\check{\Omega}_0^D = \mathcal{S}\check{\Phi}_0^{D-1}$ où $\check{\Phi}_0^{D-1}$ est une forme tronquée de degré de fantôme $D-1$.

Encore une fois, le raisonnement procède par récurrence, ici sur le degré de fantôme g . On suppose donc qu'au degré $g+1$, nous avons la relation

$$\check{\Omega}_{D-g-1}^{g+1} = \mathcal{S}\check{\Omega}_{D-g-1}^g + \check{d}\check{\Omega}_{D-g}^{g+1}, \quad (\text{A.31})$$

qui est bien vérifiée au degré de fantôme D . On injecte cette hypothèse dans l'équation de descente (A.27) au rang g et, compte tenu de la nilpotence de \check{d} , on obtient

$$\mathcal{S}(\check{\Omega}_{D-g}^g - \check{d}\check{\Omega}_{D-g-1}^g) = 0. \quad (\text{A.32})$$

D'après le lemme B.1, on en déduit que $\check{\Omega}_{D-g}^g$ est de la forme

$$\check{\Omega}_{D-g}^g = \mathcal{S}\check{\Omega}_{D-g}^{g-1} + \check{d}\check{\Omega}_{D-g-1}^g + \check{Z}_{D-g}^g, \quad (\text{A.33})$$

où la forme tronquée \check{Z}_{D-g}^g appartient à la cohomologie de l'opérateur BRST \mathcal{S} .²⁷

²⁵Notons que D est nécessairement impair, θ_r étant de degré de fantôme $g_r = 2m_r - 1$ où m_r est le degré du r -ième Casimir.

²⁶Le principe de superposition s'applique sans problème ici compte tenu de la linéarité des équations de descente.

²⁷pour autant que l'on puisse trouver une telle forme.

Cette forme \check{Z}_{D-g}^g doit satisfaire une contrainte afin de garantir la résolution de l'équation de descente suivante. En effet, considérons l'équation au degré $g-1$ en remplaçant $\check{\Omega}_{D-g}^g$ par son expression ci-dessus,

$$\mathcal{S}(\check{\Omega}_{D-g+1}^{g-1} - \check{d}\check{\Omega}_{D-g}^{g-1}) + \check{d}\check{Z}_{D-g}^g = 0. \quad (\text{A.34})$$

Cette équation n'admet une solution que si $\check{d}\check{Z}_{D-g}^g$ est la variation BRST d'une forme tronquée \check{H}_{D-g+1}^{g-1} ,

$$\mathcal{S}\check{H}_{D-g+1}^{g-1} + \check{d}\check{Z}_{D-g}^g = 0. \quad (\text{A.35})$$

À ce moment là, l'équation de descente se factorise sous forme d'une équation du même type que (A.32), donnant ainsi la solution au niveau $g-1$,

$$\check{\Omega}_{D-g+1}^{g-1} = \mathcal{S}\check{\Omega}_{D-g+1}^{g-2} + \check{d}\check{\Omega}_{D-g}^{g-1} + \check{H}_{D-g+1}^{g-1} + \check{Z}_{D-g+1}^{g-1}, \quad (\text{A.36})$$

où, de nouveau, \check{Z}_{D-g+1}^{g-1} est un élément de la cohomologie de \mathcal{S} qui doit satisfaire une contrainte pour garantir l'intégrabilité de l'équation au rang $g-2$.

Si l'on oublie pour le moment les superformes tronquées \check{Z} en les supposant nulles, on se retrouve en haut de la tour d'équations de descente à

$$\check{\Omega}_D^0 = \check{d}\check{\Phi}_{D-1}^0, \quad (\text{A.37})$$

ce qui donne en développant suivant (A.25)

$${}^{D-d}\Omega_d^0 = \mathbf{d}{}^{D-d}\Phi_{d-1}^0 + Q{}^{D-d-1}\Phi_d^0. \quad (\text{A.38})$$

Or, si l'on calcule l'observable correspondante ${}^{D-d+1}\Delta_d = \int_{M_d} Q{}^{D-d}\Omega_d^0$, on s'aperçoit qu'elle est nulle.²⁸

Par conséquent, les solutions non triviales sont nécessairement issues de la présence d'un ou de plusieurs facteurs \check{Z} . Ces superformes tronquées appartiennent à la cohomologie de \mathcal{S} , elles peuvent donc être de deux formes différentes (suivant le degré de fantôme),

$$\check{Z}_D^0 = \check{P}_D^0(F_A, \Psi, \Phi, \mathbf{D}_A\Psi, \mathbf{D}_A\Phi) \quad (\text{A.39})$$

ou

$$\check{Z}_{D-g_{r_1}}^{g_{r_1}} = \theta_{r_1}(C)\check{P}_{D-g_{r_1}}^0(F_A, \Psi, \Phi, \mathbf{D}_A\Psi, \mathbf{D}_A\Phi). \quad (\text{A.40})$$

Comme précédemment, θ_{r_1} est défini suivant (2.61) et \check{P}_D^0 et $\check{P}_{D-g_{r_1}}^0$ sont des polynômes invariants de jauge.

Commençons par le cas le plus simple, celui de $\check{Z}_D^0 = {}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0(\mathbf{d}\theta)^{D-d}$. D'après la relation (A.33) pour $g=0$, la superforme tronquée $\check{\Omega}_D^0 = \check{Z}_D^0$ satisfait les équations de descente. Par ailleurs, si les composantes ${}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0$ satisfont la contrainte

$${}^{D-d}\mathcal{Z}_d^0 \neq \mathbf{d}{}^{D-d}\Phi_{d-1}^0 + Q{}^{D-d-1}\Phi_d^0, \quad (\text{A.41})$$

²⁸étant donné la nilpotence de Q et l'hypothèse sur la nullité des termes de surface.

on a affaire à une observable non triviale. Cette classe de solutions correspond à la deuxième évoquée au début de cette section, page 118.

Terminons en revenant sur les superformes tronquées $\check{Z}_{D-g_{r_1}}^{g_{r_1}}$ qui doivent donc satisfaire la contrainte (A.35). On sait que l'on peut construire une série de superformes $[\hat{\theta}_{r_1}]_p^{g_{r_1}-p}$, ($p = 0, \dots, g_{r_1}$) au-dessus du cocycle θ_{r_1} . En reportant la définition (A.40) dans la contrainte (A.35) et en utilisant les équations de superdescente pour les superformes $[\hat{\theta}_{r_1}]_1^{g_{r_1}-1}$, on aboutit à la relation

$$\mathcal{S}\check{H}_{D-g_{r_1}+1}^{g_{r_1}-1} - [(\mathcal{S}[\hat{\theta}_{r_1}]_1^{g_{r_1}-1})\check{P}_{D-g_{r_1}}^0]^{tr} + (-1)^{g_{r_1}}\theta_{r_1}(C)\check{d}\check{P}_{D-g_{r_1}}^0 = 0, \quad (\text{A.42})$$

où nous avons réalisé la troncation en accord avec la définition (A.25).

Les deux membres de gauche sont des variations BRST et n'appartiennent donc pas à la cohomologie de \mathcal{S} , contrairement au terme $\check{d}\check{P}_{D-g_{r_1}}^0$. La seule possibilité pour que l'identité soit satisfaite est que chacun des termes soit nul, autrement dit

$$\check{d}\check{P}_{D-g_{r_1}}^0 = 0 \quad (\text{A.43})$$

et

$$\mathcal{S}\check{H}_{D-g_{r_1}+1}^{g_{r_1}-1} - [(\mathcal{S}[\hat{\theta}_{r_1}]_1^{g_{r_1}-1})\check{P}_{D-g_{r_1}}^0]^{tr} = 0. \quad (\text{A.44})$$

Cette dernière équation permet de montrer que $\check{H}_{D-g_{r_1}+1}^{g_{r_1}-1}$ est de la forme

$$\check{H}_{D-g_{r_1}+1}^{g_{r_1}-1} = [[\hat{\theta}_{r_1}]_1^{g_{r_1}-1}\check{P}_{D-g_{r_1}}^0]^{tr}. \quad (\text{A.45})$$

Afin de simplifier, nous n'avons pas rajouté de termes \mathcal{S} -exact ou de termes appartenant à la cohomologie de \mathcal{S} . Cette superforme tronquée est la première d'un ensemble de supercocycles tronqués,

$$\check{H}_{D-g}^g = [[\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}-g}^g\check{P}_{D-g_{r_1}}^0]^{tr} \quad (g = 0, \dots, g_{r_1} - 1), \quad (\text{A.46})$$

qui obéissent aux équations de superdescente tronquées

$$\mathcal{S}\check{H}_{D-g}^g + \check{d}\check{H}_{D-g-1}^{g+1} = 0 \quad (g = 0, \dots, g_{r_1} - 1). \quad (\text{A.47})$$

La résolution de la contrainte (A.43) nécessite de déterminer la cohomologie de \check{d} dans l'espace des superformes tronquées $\check{\mathcal{E}}_{(d,D)}$.

LEMME B.2

La cohomologie $\mathcal{H}(\check{d})$ dans l'espace $\check{\mathcal{E}}_{(d,D)}$ est donnée par les superformes tronquées de degré de fantôme nul et de degré total D :

$$\check{\Omega}_D^0 = {}^{D-d}\Omega_d^0(\mathbf{d}\theta)^{D-d}. \quad (\text{A.48})$$

Ici, ${}^{D-d}\Omega_d^0$ est un polynôme invariant de jauge fonction des superchamps F_A, Ψ, Φ et de leurs dérivées covariantes (comme dans l'équation (A.28)), de degré de forme d et de degré de fantôme nul, non-trivial au sens où

$${}^{D-d}\Omega_d^0 \neq \mathbf{d}{}^{D-d}\Phi_{d-1}^0 + Q{}^{D-d-1}\Phi_d^0, \quad (\text{A.49})$$

où les superchamps ${}^{D-d}\Phi_{d-1}^0$ et ${}^{D-d-1}\Phi_d^0$ sont les composantes d'une superforme tronquée appartenant à $\check{\mathcal{E}}_{(d,D)}$. En particulier, la cohomologie $\mathcal{H}(\check{d})$ est triviale pour les superformes tronquées de degré strictement inférieur à D .

Preuve : dans cette démonstration, on ne mentionnera le degré de fantôme, étant donné qu'il ne joue aucun rôle dans la discussion.

En développant sur les composantes de la superforme tronquée, on peut mettre la condition de cohomologie $\check{d}\check{\Omega}_q = 0$ (pour $q < D$) sous la forme

$$Q{}^{q-p-1}\Omega_{p+1} + \mathbf{d}{}^{q-p}\Omega_p = 0 \quad (p = q - D + d, \dots, d - 1). \quad (\text{A.50})$$

La première de ces équations, correspondant à $p = q - D + d$ peut être résolue au moyen de la proposition A.2, ce qui donne

$$\begin{aligned} {}^{D-d}\Omega_{q-D+d} &= Q{}^{D-d-1}\Phi_{q-D+d} + \mathbf{d}{}^{D-d}\Phi_{q-D+d-1}, \\ {}^{D-d-1}\Omega_{q-D+d+1} &= Q{}^{D-d-2}\Phi_{q-D+d+1} + \mathbf{d}{}^{D-d-1}\Phi_{q-D+d}. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

En reportant ce résultat dans la seconde équation de (A.50), on obtient

$$Q({}^{D-d-2}\Omega_{q-D+d+2} - \mathbf{d}{}^{D-d-2}\Phi_{q-D+d+1}) = 0. \quad (\text{A.52})$$

Du fait de la cohomologie triviale de Q , la solution à l'équation précédente est donnée par

$${}^{D-d-2}\Omega_{q-D+d+2} = Q{}^{D-d-3}\Phi_{q-D+d+2} + \mathbf{d}{}^{D-d-2}\Phi_{q-D+d+1}. \quad (\text{A.53})$$

La procédure peut se répéter jusqu'à ce que l'on parvienne à la dernière équation de (A.50) :

$${}^{q-d}\Omega_d = Q{}^{q-d-1}\Phi_d + \mathbf{d}{}^{q-d}\Phi_{d-1}. \quad (\text{A.54})$$

Si l'on recombine ces résultats, on voit que, pour $q < D$,

$$\check{\Omega}_q = \check{\mathbf{d}}\check{\Phi}_{q-1} \quad \text{avec} \quad \check{\Phi}_{q-1} = \sum_{p=q-D+1}^d {}^{q-1-p}\Phi_p(\mathbf{d}\theta)^{q-1-p}. \quad (\text{A.55})$$

Ainsi, la solution générale pour $q < D$ est triviale. La cohomologie de \check{d} est donc générée par les superformes tronquées du type

$$\check{\Omega}_D = {}^{D-d}\Omega_d(d\theta)^{D-d}. \quad (\text{A.56})$$

Pour $q = D$, la condition $\check{d}\check{\Omega}_D^0 = 0$ est automatiquement vérifiée. En effet, on a par définition $\check{\Omega}_D^0 = {}^{D-d}\Omega_d^0(d\theta)^{D-d}$ et donc l'action de \hat{d} sur cette superforme ne produit que des termes ne satisfaisant pas aux conditions (A.24) qui sont donc supprimées par la troncation.

Ainsi, la cohomologie de \check{d} dans l'espace des superformes tronquées $\check{\mathcal{E}}_{(d,D)}$ se résume aux superformes ${}^{D-d}\Omega_d^0(d\theta)^{D-d}$. Ici, ${}^{D-d}\Omega_d^0$ est un polynôme invariant de jauge dépendant des mêmes superchamps que les polynômes (A.28) et satisfait la condition de non-trivialité

$${}^{D-d}\Omega_d^0 \neq \mathbf{d} {}^{D-d}\Phi_{d-1}^0 + Q {}^{D-d-1}\Phi_d^0. \quad (\text{A.57})$$

■

Revenons sur la condition (A.43) portant sur le polynôme $\check{P}_{D-g_{r_1}}^0$. Nous pouvons maintenant conclure, compte tenu du lemme B.2 et de l'inégalité $D - g_{r_1} < D$, de la trivialité de cette contrainte,

$$\check{P}_{D-g_{r_1}}^0 = \check{d}\check{R}_{D-g_{r_1}-1}^0. \quad (\text{A.58})$$

\check{P} devant être invariant de jauge, cela implique que \check{R} satisfait une série d'équations de superdescente analogues à celles de (2.58),²⁹

$$S\check{R}_{D-g_{r_1}-g-1}^g + \check{d}\check{R}_{D-g_{r_1}-g-1}^{g+1} = 0 \quad (g = 0, \dots, D - g_{r_1} - 1). \quad (\text{A.59})$$

La résolution est semblable à celle que nous avons déjà effectuée. En partant du bas de la tour d'équations, on a³⁰

$$\check{R}_0^{g_{r_2}} = \theta_{r_2}(C) \quad (g_{r_2} = D - g_{r_1} - 1). \quad (\text{A.60})$$

On peut ensuite remonter tout en haut jusqu'à la superforme tronquée de degré de fantôme nul

$$\check{R}_{D-g_{r_1}-1}^0 = [[\hat{\theta}_{r_2}]_{g_{r_2}}^0]^{tr}. \quad (\text{A.61})$$

En reportant ce résultat dans l'expression (A.46), on arrive à

$$\check{H}_D^0 = [[\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}}^0 \check{d}[\hat{\theta}_{r_2}]_{g_{r_2}}^0]^{tr} = [[\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}}^0 f_{r_2}(\hat{F})]^{tr}, \quad (\text{A.62})$$

avec la condition $g_{r_1} + g_{r_2} + 1 = D$.

Revenons à l'endroit où nous avons laissé de côté les éventuels termes supplémentaires appartenant à la cohomologie de \mathcal{S} . Ces termes se traitent de la même manière que

²⁹à la différence qu'ici, on tronque le parallélogramme $Par(d, D)$ pour en faire un pentagone délimité par $p = 0, p = d, s = 0, s = D - d$ et $g = 0$.

³⁰à condition de pouvoir trouver une forme avec ce degré de fantôme.

\check{P} , rajoutant à leur tour des termes $\check{d}[\hat{\theta}_r]_{g_r}^0 = f_r(\hat{F})$. On aboutit donc à la forme générale des solutions,

$$\check{H}_D^0 = [[\hat{\theta}_{r_1}]_{g_{r_1}}^0 f_{r_2}(\hat{F}) \dots f_{r_L}(\hat{F})]^{tr}, \quad (\text{A.63})$$

avec la condition $\sum_{k=1}^L g_{r_k} + L - 1 = D$. ■

Annexe B

Approche métrique

Dans cette annexe, nous nous intéressons à la formulation métrique de la gravité topologique. Nous ne détaillerons que le secteur gravitationnel, étant donné que le secteur de Maxwell reste inchangé.

B.1 Notations générales

La métrique est un tenseur $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ qui peut être vu comme une 0-forme à valeurs dans l'ensemble des tenseurs covariants de rang 2. Les symboles de Christoffel seront alors vus comme des 1-formes $\Gamma^\nu{}_\sigma = \Gamma^\nu_{\mu\sigma} dx^\mu$.

La dérivée de Lie \mathcal{L}_w par rapport à un champ de vecteurs $w = w^\mu \partial_\mu$ agit sur la métrique comme

$$\mathcal{L}_w g_{\mu\nu} \equiv (\mathcal{L}_w g)_{\mu\nu} = w^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + (\partial_\mu w^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu w^\rho) g_{\rho\mu}. \quad (\text{B.1})$$

On définit également un opérateur linéaire $l_w \equiv [i_w, \mathbf{d}] = i_w \mathbf{d} + (-1)^{[w]} \mathbf{d} i_w$ (où $[w]$ est le degré du champ de vecteurs) qui agit comme

$$\begin{aligned} l_w g_{\mu\nu} &= w^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}, \\ (l_w \Gamma)^\nu{}_{\mu\sigma} &= w^\rho \partial_\rho \Gamma^\nu_{\mu\sigma} + (\partial_\mu w^\rho) \Gamma^\nu_{\lambda\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Remarquons que l_w et \mathcal{L}_w agissent de la même façon sur des formes ne portant pas d'indices d'espace courbe μ, ν, \dots supplémentaires (comme par exemple, le vielbein qui ne porte que des indices d'espace plat a, b, \dots supplémentaires). Cette remarque prend tout son sens si l'on cherche à comparer les résultats présentés ci-dessous avec ceux obtenus dans le formalisme de vielbein.

B.2 Algèbre des transformations BRST

Le seul champ classique indépendant ici est donc la métrique et l'algèbre des transformations BRST s'écrit [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}g &= \mathcal{L}_\xi g + \Psi, & \mathcal{S}\Psi &= \mathcal{L}_\xi \Psi - \mathcal{L}_\varphi g, \\ \mathcal{S}\xi &= \xi^2 + \varphi, & \mathcal{S}\varphi &= [\xi, \varphi]. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Le tenseur symétrique Ψ est défini en composantes comme

$$\Psi_{\mu\nu} \equiv \eta_{ab}(e_\mu^a \psi_\nu^b + e_\nu^a \psi_\mu^b) = \psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu}. \quad (\text{B.4})$$

et est habituellement désigné comme le **gravitino**.

Nous pouvons introduire un opérateur $\check{S} \equiv \mathcal{S} - \mathcal{L}_\xi$ qui découple les difféomorphismes,

$$\check{S}g = \Psi, \quad \check{S}\Psi = -\mathcal{L}_\varphi g, \quad \check{S}\varphi = 0. \quad (\text{B.5})$$

\check{S} satisfait la propriété $\check{S}^2 = -\mathcal{L}_\varphi$. Cette algèbre est similaire à celle d'une théorie de Yang-Mills topologique où l'opérateur \check{S} correspondrait au générateur de supersymétrie \check{Q} (qui est nilpotent à une transformation de jauge près, cf. chapitre 2, section (2.17), page 38).

Le symbole de Christoffel se transforme quant à lui selon

$$S\Gamma_{\mu\sigma}^\rho = (l_\xi \Gamma)_{\mu\sigma}^\rho + \nabla_\mu(\partial_\sigma \xi^\rho) + \check{\Psi}_{\mu\sigma}^\rho, \quad (\text{B.6})$$

où l_ξ est défini par (B.2) et ∇_μ désigne la dérivée covariante calculée au moyen de la connexion de Levi-Civita, c'est-à-dire $\nabla_\mu v^\rho_\sigma \equiv \partial_\mu v^\rho_\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho v^\lambda_\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda v^\rho_\lambda$. Le tenseur $\check{\Psi}$ de rang 3 est défini selon

$$\check{\Psi}_{\mu\sigma}^\rho \equiv \frac{1}{2}(\nabla_\mu \Psi_\sigma^\rho + \nabla_\sigma \Psi_\mu^\rho - \nabla^\rho \Psi_{\mu\sigma}). \quad (\text{B.7})$$

Remarque : La quantité $\partial_\sigma \xi^\rho$ ne désigne pas un tenseur, par conséquent la notation $\nabla_\mu(\partial_\sigma \xi^\rho)$ est une notation conventionnelle.

La relation (B.6) peut également s'écrire en utilisant la dérivée de Lie [55]

$$S\Gamma_{\mu\sigma}^\rho = \mathcal{L}_\xi \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \partial_\mu(\partial_\sigma \xi^\rho) + \check{\Psi}_{\mu\sigma}^\rho. \quad (\text{B.8})$$

Cependant, ici aussi, il s'agit d'une convention de notation puisque les symboles de Christoffel ne sont pas les composantes d'un tenseur.

B.3 Conditions d'horizontalité

Comme pour le formalisme du premier ordre, il est possible de déterminer l'algèbre BRST (B.3) - (B.6) au moyen de conditions d'horizontalité. Pour cela, introduisons les formes à valeurs matricielles

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \underline{\Gamma}_\mu \mathbf{d}x^\mu, & \text{avec} \quad \underline{\Gamma}_\mu &= (\Gamma_{\sigma\mu}^\rho), \\ \underline{R} &= \frac{1}{2} \underline{R}_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu, & \text{avec} \quad \underline{R}_{\mu\nu} &= (R^\rho_{\sigma\mu\nu}), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

où \underline{R} désigne la courbure associée à la connexion de Levi-Civita (il s'agit d'une 2-forme). Les connexions ω et $\underline{\Gamma}$ sont reliées par une transformation de jauge formelle faisant intervenir la matrice du vielbein $E \equiv (e_\mu^a)$,

$$\omega_\mu = E \underline{\Gamma}_\mu E^{-1} + E \partial_\mu E^{-1}. \quad (\text{B.10})$$

De la même façon, les courbures \underline{R} et R sont reliées par $R = E\underline{R}E^{-1}$.

Considérons maintenant les champs généralisés [111]

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\Gamma}} &\equiv e^{i\xi}(\underline{\Gamma} + \underline{v}) = \underline{\Gamma} + \underline{v} + i_\xi \underline{\Gamma}, & \text{avec } \underline{v} = (v^\rho_\sigma) &\equiv (\partial_\sigma \xi^\rho), \\ \hat{\underline{R}} &\equiv \hat{d}\hat{\underline{\Gamma}} + \hat{\underline{\Gamma}}^2, & \text{avec } \hat{d} &= d + \mathcal{S}.\end{aligned}\tag{B.11}$$

Par construction, $\hat{\underline{R}}$ satisfait la relation de Bianchi généralisée $0 = \hat{\nabla}\hat{\underline{R}} \equiv \hat{d}\hat{\underline{R}} + [\hat{\underline{\Gamma}}, \hat{\underline{R}}]$. Comme $(\underline{v} + i_\xi \underline{\Gamma})^\rho_\sigma = \nabla_\sigma \xi^\rho$, nous allons aussi prendre en compte la dérivée covariante $\nabla_\sigma \varphi^\rho$ ainsi que la combinaison des dérivées covariantes (B.7) qui décrivent le *shift* de $\underline{\Gamma}$,

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{\Phi}} &= (\tilde{\Phi}^\rho_\sigma), & \text{avec } \tilde{\Phi}^\rho_\sigma &= \nabla_\sigma \varphi^\rho, \\ \tilde{\underline{\Psi}} &= \tilde{\Psi}_\mu dx^\mu, & \text{avec } \tilde{\Psi}_\mu &= (\tilde{\Psi}^\rho_{\sigma\mu}).\end{aligned}\tag{B.12}$$

La condition d'horizontalité s'écrit alors

$$\hat{\underline{R}} = e^{i\xi}(\underline{R} + \tilde{\underline{\Psi}} + \tilde{\underline{\Phi}})\tag{B.13}$$

et nous pouvons procéder à la détermination des transformations BRST (de la même façon qu'au chapitre 1.3, section (3.2.1)).

Remarque : on aurait aussi pu considérer que les champs $\tilde{\underline{\Psi}}$ et $\tilde{\underline{\Phi}}$ apparaissant dans (B.13) sont des inconnues. Les définitions (B.12) sortiraient alors de la connaissance des variations BRST de ξ et g ainsi que de la définition du symbole de Christoffel.

Comme dans le cas du formalisme du premier ordre, on procède à la redéfinition

$$\tilde{\underline{\Phi}} \rightarrow \tilde{\underline{\varphi}} \equiv \tilde{\underline{\Phi}} - i_\varphi \underline{\Gamma}, \quad \text{ie } \tilde{\varphi}^\rho_\sigma = \partial_\sigma \varphi^\rho.\tag{B.14}$$

Les transformations BRST obtenues en développant la condition (B.13) et en utilisant l'identité de Bianchi généralisée $\hat{\nabla}\hat{\underline{R}} = 0$ prennent la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\underline{\Gamma} &= l_\xi \underline{\Gamma} - \nabla \underline{v} + \tilde{\underline{\Psi}}, & \mathcal{S}\tilde{\underline{\Psi}} &= l_\xi \tilde{\underline{\Psi}} - [\underline{v}, \tilde{\underline{\Psi}}] - l_\varphi \underline{\Gamma} - \nabla \tilde{\underline{\varphi}} \\ \mathcal{S}\underline{v} &= l_\xi \underline{v} - \underline{v}^2 + \tilde{\underline{\varphi}}, & \mathcal{S}\tilde{\underline{\varphi}} &= l_\xi \tilde{\underline{\varphi}} - [\underline{v}, \tilde{\underline{\varphi}}] - l_\varphi \underline{v} \\ \mathcal{S}\xi &= \xi^2 + \varphi & \mathcal{S}\varphi &= [\xi, \varphi]\end{aligned}\tag{B.15}$$

et

$$\mathcal{S}\underline{R} = l_\xi \underline{R} - [\underline{v}, \underline{R}] - \nabla \tilde{\underline{\Psi}},\tag{B.16}$$

où $\nabla \underline{v} \equiv d\underline{v} + [\underline{\Gamma}, \underline{v}]$. Du fait de la relation (B.10), l'algèbre (B.15) a exactement la même forme que l'algèbre obtenue en utilisant un formalisme de second ordre pour les vielbeins. Cela s'explique par le fait qu'en passant du vielbein à la métrique, un indice d'espace tangent sur lequel agit le paramètre de Lorentz c^{ab} (avec $\mathcal{S}c^{ab} = \tilde{\varphi}^{ab} + \dots$) devient un indice d'espace courbe sur lequel agit le paramètre des difféomorphismes par le biais de $v^\mu_\nu = \partial_\nu \xi^\mu$ (avec $\mathcal{S}v^\mu_\nu = \tilde{\varphi}^\mu_\nu + \dots = \partial_\nu \varphi^\mu + \dots$).

Enfin nous pouvons noter que l'algèbre de symétrie du prépotentiel g telle qu'elle est définie en (B.3) et celle du potentiel $\underline{\Gamma}$ donnée par les relations (B.15) ont la même structure,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}g &= \delta_\xi g + \Psi, & \mathcal{S}\Psi &= \delta_\xi \Psi - \delta_\varphi g \\ \mathcal{S}\underline{\Gamma} &= \delta_\xi \underline{\Gamma} + \underline{\tilde{\Psi}}, & \mathcal{S}\underline{\tilde{\Psi}} &= \delta_\xi \underline{\tilde{\Psi}} - \delta_\varphi \underline{\Gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

B.4 Comparaison avec le formalisme de second ordre

Comparons les variables apparaissant dans l'approche métrique évoquée ci-dessus et celles du formalisme de second ordre. On représente sur le schéma ci-dessous les transformations de *shift* (correspondant à la symétrie topologique) par une flèche verticale.

	Approche métrique	Formalisme de second ordre
Champs fondamentaux :	$g_{\mu\nu}$	e_μ^a
	↓	↓
Fantômes :	$\psi_{\mu\nu}, \xi^\mu$	$\psi_\mu^a, \xi^\mu, c^{ab}$
	↓	↓ ↓
Fantômes pour les fantômes :	φ^μ	$\varphi^\mu, \tilde{\varphi}^{ab}$

Le champ fondamental du formalisme de second ordre, le vielbein e_μ^a , possède un indice de Lorentz, ce qui implique que le fantôme de Lorentz c^{ab} (ainsi que son fantôme pour le fantôme, $\tilde{\varphi}^{ab}$) apparaissent en plus des champs déjà présents dans l'approche métrique. En particulier, le champ $\tilde{\varphi}^{ab}$ apparaît dans la variation BRST de ψ_μ^a et, par conséquent, dans l'expression des observables du formalisme de vielbein alors qu'en formalisme métrique, il n'intervient que de manière déguisée au moyen de la relation $\tilde{\varphi}^\rho_\sigma = \partial_\sigma \varphi^\rho$ (cf. section suivante). Nous nous attendons à ce que les observables de ces différentes approches soient cohomologiquement équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ne diffèrent que par une variation BRST ou une différentielle exacte, comme cela est le cas pour l'anomalie gravitationnelle qui se manifeste sous plusieurs formes (anomalie de Lorentz ou anomalie des difféomorphismes aussi bien qu'anomalie de Weyl ou anomalie factorisée chiralemment en dimension deux) [55, 112].

B.5 Observables

Si l'on se réfère à la relation (B.10) qui est en quelque sorte une transformation de jauge formelle, on peut s'attendre à ce que les expressions des observables en formalisme de second ordre aient exactement la même forme que celles du formalisme métrique. Cependant, ce n'est pas tout à fait le cas, comme nous allons le voir.

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{M}_d^0, \mathcal{M}_{d-1}^1, \dots, \mathcal{M}_0^d$ les observables dans le formalisme métrique afin de les distinguer des observables $W_d^0, W_{d-1}^1, \dots, W_0^d$ du formalisme de vielbein. Les polynômes \mathcal{M}_{d-k}^k satisfont des équations de descente analogues à celles décrites en (3.45) dans le cas où $d = 4$.

Naturellement, l'invariant topologique $\mathcal{M}_d^0(g_{\mu\nu})$ coïncide avec l'invariant topologique $W_d^0(e_\mu^a)$ puisque la métrique $g_{\mu\nu}$ peut s'écrire en fonction du vielbein.

Compte tenu des relations (B.4) et (3.54), le polynôme $\mathcal{M}_{d-1}^1(g_{\mu\nu}, \Psi_{\mu\nu}, \xi^\mu)$ coïncide avec le polynôme $W_{d-1}^1(e_\mu^a, \psi_\mu^a, \xi^\mu)$. Cependant, pour un degré de fantôme $k \geq 2$, les polynômes $\mathcal{M}_{d-k}^k(g_{\mu\nu}, \Psi_{\mu\nu}, \xi^\mu, \varphi^\mu)$ ne dépendent plus des mêmes variables que les polynômes $W_{d-k}^k(e_\mu^a, \psi_\mu^a, \xi^\mu, \varphi^\mu, \tilde{\varphi}^{ab})$.

Même si $\tilde{\varphi}^{ab}$ (ou $\tilde{\varphi}^{ab}$) peut être considéré comme similaire à $\tilde{\varphi}^\mu{}_\nu \equiv \partial_\nu \varphi^\mu$ (ou $\tilde{\Phi}^\mu{}_\nu \equiv \nabla_\nu \varphi^\mu$), les polynômes de degré de fantôme $k \geq 2$ n'ont pas la même forme. Nous allons voir que les différences sont dues aux transformations de *shift* qui montent ou descendent les indices covariants.

B.5.1 Cas de la dimension $d = 2$

Nous partons de la 2-forme $\mathcal{M}_2^0 = \text{As } \underline{R}$ où \underline{R} est la 2-forme définie dans l'équation (B.9) et As dénote sa partie antisymétrique,

$$\mathcal{M}_2^0 = \text{As } \underline{R} \equiv \sqrt{g} \varepsilon_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \varepsilon_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} \sqrt{g} \varepsilon_{\mu\nu} \mathcal{R} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{B.18})$$

Ici, g est le déterminant de la métrique, $\varepsilon_{\rho\sigma}$ le tenseur antisymétrique dans l'espace plat (normalisé par $\varepsilon_{12} = 1$) et \mathcal{R} la courbure scalaire.

Après une résolution laborieuse des équations de descente

$$\mathcal{S}\mathcal{M}_2^0 = -d\mathcal{M}_1^1(\xi), \quad \mathcal{S}\mathcal{M}_1^1(\xi) = -d\mathcal{M}_0^2(\xi), \quad \mathcal{S}\mathcal{M}_0^2(\xi) = 0, \quad (\text{B.19})$$

on trouve les expressions suivantes [73–75], qui correspondent aux classes de Mumford [9],

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^1(\xi) &= \sqrt{g} [\varepsilon_{\mu\nu} \nabla^\nu \Psi_\rho^\mu + \varepsilon_{\mu\rho} \xi^\mu \mathcal{R}] dx^\rho, \\ \mathcal{M}_0^2(\xi) &= \sqrt{g} \varepsilon_{\mu\nu} \left[\nabla^\mu \varphi^\nu - \frac{1}{4} \Psi^{\mu\rho} \Psi_\rho{}^\nu - \xi^\rho \nabla^\nu \Psi_\rho{}^\mu + \frac{1}{2} \xi^\mu \xi^\nu \mathcal{R} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

En utilisant l'identité (en dimension $d = 2$) $0 = \varepsilon_{\mu\nu} V_\rho + \text{permutations circulaires}$, le terme faisant intervenir la dérivée de $\Psi_\rho{}^\mu$ peut être exprimé en termes de la partie de trace nulle du tenseur symétrique Ψ , à savoir

$$\varepsilon_{\mu\nu} \nabla^\nu \Psi_\rho{}^\mu = -\varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\rho (\Psi^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} \Psi^\sigma{}_\sigma). \quad (\text{B.21})$$

Dans la référence [34], les résultats (B.20) ont été obtenus au moyen de techniques mathématiques sur la cohomologie équivariante, ce qui a permis de justifier les discussions présentées dans les références [7, 69].

Nous aurions pu également procéder en utilisant les formes généralisées comme dans la sous-section (3.5.1), c'est-à-dire en développant

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}} &\equiv \text{As } \underline{\hat{R}} = e^{i\xi} \text{As } (\underline{R} + \underline{\tilde{\Psi}} + \underline{\tilde{\Phi}}) \\ &= \text{As } \underline{R} + \text{As } (\underline{\tilde{\Psi}} + i_\xi \underline{R}) + \text{As } (\underline{\tilde{\Phi}} + i_\xi \underline{\tilde{\Psi}} + \frac{1}{2} i_\xi i_\xi \underline{R}).\end{aligned}\quad (\text{B.22})$$

Ces expressions ont exactement la même forme que celles obtenues dans le formalisme de vielbein. On retrouve ainsi les résultats (B.20) au terme quadratique $\Psi^{\mu\rho}\Psi_\rho{}^\nu$ près qui apparaît dans l'expression de $\mathcal{M}_0^2(\xi)$. Un tel terme est généré par

$$\mathcal{S}\Psi_\nu^\mu = -\Psi^{\mu\rho}\Psi_{\rho\nu} + \mathcal{L}_\xi\Psi_\nu^\mu - g^{\mu\rho}(\mathcal{L}_\varphi g_{\rho\nu}),$$

et il est dû au fait que le tenseur métrique, qui monte ou abaisse les indices, se transforme sous la symétrie topologique. Cela montre que le passage purement algébrique entre les champs ordinaires et les champs généralisés, ainsi qu'entre la différentielle ordinaire et la différentielle généralisée ($\hat{d} = d + \mathcal{S}$) est une démarche compliquée dans le cadre d'un formalisme métrique. Un traitement approprié consiste à étendre l'action des symétries de la variété d'espace-temps à l'espace de toutes les métriques (qui est de dimension infinie), utilisant par là même la machinerie de la géométrie différentielle globale [34].

En conclusion, on notera que le tenseur métrique en dimension $d = 2$ (et les observables correspondantes) peuvent également être paramétrées en utilisant les différentielles de Beltrami [9, 34].

B.5.2 Cas de la dimension $d = 4$

On part cette fois de la 4-forme

$$\mathcal{M}_4^0 = E_{\lambda\chi}^{\mu\rho} \underline{R}^\lambda{}_\mu \underline{R}^\chi{}_\rho, \quad (\text{B.23})$$

avec

$$E_{\lambda\chi}^{\mu\rho} = \begin{cases} \delta_\lambda^\mu \delta_\chi^\rho - \delta_\chi^\mu \delta_\lambda^\rho & \text{pour la densité de Pontrjagin} \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\nu\lambda} g_{\sigma\chi} & \text{pour la densité d'Euler} \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_4^0 = \underline{R}^{\mu\nu} \underline{R}_{\mu\nu} \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_4^0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \underline{R}_{\mu\nu} \underline{R}_{\rho\sigma}. \quad (\text{B.25})$$

Le polynôme de degré de fantôme 1 peut être obtenu directement en développant la forme généralisée $\hat{\mathcal{M}} \equiv E_{\lambda\chi}^{\mu\nu} \underline{\hat{R}}^\lambda{}_\mu \underline{\hat{R}}^\chi{}_\nu$ par rapport au degré de fantôme,

$$\mathcal{M}_3^1(\xi) = 2E_{\mu\rho}^{\nu\sigma} \underline{R}^\mu{}_\nu \left[\frac{1}{2} (\nabla_\sigma \Psi^\rho{}_\beta - \nabla^\rho \Psi^{\sigma\beta}) + \xi^\alpha R^\rho{}_{\sigma\alpha\beta} \right] \mathbf{d}x^\beta. \quad (\text{B.26})$$

Pour une détermination complète et explicite des autres polynômes, nous renvoyons à la référence [6].

Enfin, on peut remarquer que la 4-forme de Nieh et Yan, qui donne les observables construites à partir de la torsion, prend la forme [63, 64]

$$Z_4^0 = \frac{1}{4} \sqrt{g} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^\lambda T_{\lambda\rho\sigma}) \mathbf{d}x^1 \dots \mathbf{d}x^4. \quad (\text{B.27})$$