Equations de type Vortex et métriques canoniques

Julien Keller

Université Paul Sabatier Toulouse III
U.F.R. Mathématiques Informatique Gestion

Thèse

présentée en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université Toulouse III

Discipline : Mathématiques Pures

par

Julien KELLER

Equations de type Vortex et métriques canoniques

Soutenue le 28 Octobre 2005 à Toulouse devant le jury composé de :

M. Olivier BIQUARD	Professeur, Examinateur
M. Philippe EYSSIDIEUX	Professeur, Directeur
M. Zung NGUYEN TIEN	Professeur, Examinateur
M. Carlos SIMPSON	Professeur, Examinateur
M. Andrei TELEMAN	Professeur, Examinateur
M. Richard THOMAS	Professeur, Examinateur

au vu des rapports des Professeurs Nicholas Buchdahl et Andrei Teleman.

Université Paul Sabatier, MIG – Laboratoire Emile Picard. UMR 5580 –
31062 TOULOUSE Cedex 9 – FRANCE

Abstract

Soit M une variété projective lisse. Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe sur M, c'est à dire une filtration d'un fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{F}$ induite par des sous-fibrés. Nous introduisons une notion de Gieseker stabilité pour de tels objets puis donnons une condition analytique équivalente en terme de métriques sur $\mathcal{F}$, dites équilibrées au sens de S.K. Donaldson, provenant d'une construction de la Théorie des Invariants Géométriques. Si le fibré $\mathcal{F}$ peut être muni d'une métrique h solution de l'équation $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein étudiée par Álvarez-Cónsul et García-Prada :

$$\sqrt{-1}\Lambda F_h = \sum_i \widetilde{\tau}_i \pi^{\mathscr{F}}_{h,i}$$

alors nous prouvons que la suite de métriques équilibrées existe, converge et sa limite est, à un changement conforme, solution de l'équation précédente. De ce résultat nous déduisons, par réduction dimensionnelle, un théorème d'approximation dans le cas des équations Vortex de Bradlow ainsi que leurs généralisations aux équations couplées Vortex.

Abstract

Let M be a smooth projective manifold. Let $\mathcal{F}$ be a filtered holomorphic vector bundle over M. We introduce a notion of Gieseker stability for such objects and relate it to an analytic condition in terms of hermitian metrics on $\mathcal{F}$, called balanced metrics by S.K Donaldson, that come from the world of Geometric Invariant Theory (G.I.T). If there is a metric h on $\mathcal{F}$ that satisfies the $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein equation studied by Álvarez-Cónsul and García-Prada :

$$\sqrt{-1}\Lambda F_h = \sum_i \widetilde{\tau}_i \pi^{\mathscr{F}}_{h,i}$$

then we prove that the sequence of balanced metrics exists, converges and its limit, up to a conformal change, is a smooth hermitian metric on $\mathcal{F}$ that satisfies the previous equation. As a corollary, we give by dimensional reduction a theorem of approximation for Vortex equations introduced by Bradlow and their generalizations to coupled Vortex equations.

Remerciements

Je tiens à remercier Philippe Eyssideux à qui je dois l'essentiel de ma formation de chercheur en Mathématiques. S'il a su éclairer mon exploration par son talent et sa générosité, il m'a aussi appris, en fin de compte, ce qui ne peut s'écrire.

Nicholas Buchdahl et Andrei Teleman ont accepté de relire avec attention cette thèse, et je les remercie pour la pertinence de leurs conseils et critiques ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

C'est pour moi un honneur qu'Olivier Biquard, Zung Nguyen Tien et Carlos Simpson aient voulu participer à mon jury. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance. Je tiens également à dire toute ma gratitude à Richard Thomas dont le dynamisme et l'enthousiasme ne cessent de me subjuguer.

Ma pensée va également aux professeurs, collègues et amis du laboratoire Emile Picard. J'ai eu la chance d'y croiser des gens d'exception qui m'ont permis de progresser, par leurs conseils, leur patience, leurs encouragements. Je tiens à saluer ceux qui m'ont supporté au "bureau 31", mes amis Guy Casale et Emmanuel Ophstein ainsi que Mathieu Anel. Ils m'ont aidé par leur joie de vivre et leur amitié à surmonter les difficultés morales inhérentes à un travail de recherche. Je n'oublie pas non plus Slimane Benelkourchi, Olivier Drévillon, Christophe Dupont, Mathieu Fructus, Yohann Genzmer, Sophie Gombao, Frédéric Holweck, Laurent Mazet, Grégoire Montcouquiol, Sacha Mozgova, Ivane Pairaud, Dan Popovici, Nicolas Puignau, Guillaume Rond, Vanessa Vitse et tous ceux qui ont animé durant ces dernières années la vie du laboratoire. Merci aussi à ceux que j'ai eu la chance de rencontrer à l'autre bout du monde, Benoit Charbonneau, Yanir Rubinstein et Natasa Sesum.

Last but not least, j'ai une pensée toute particulière pour Eva. Enfin, par leur soutien constant et leur confiance, les membres de ma famille ont été d'une aide inestimable. Que vous soyez tous assurés de ma profonde et sincère affection.

Introduction

Un bref survol du contexte

Les travaux fondateurs de E. Calabi et S-T. Yau ont fait apparaître des méthodes intrinsèques globales en géométrie Kählérienne, en particulier avec l'étude de métriques de type Einstein. S.T. Yau a été en particulier le premier à soulever la question d'une interprétation algébro-géométrique de l'existence d'une métrique Kähler-Einstein dans le cadre des variétés complexes. Dans [Do4] où une partie de ce programme est mis en oeuvre, S.K. Donaldson propose une notion de stabilité algébrique introduite par H. Luo, pour les couples $\left(M, L^k\right)$ où M est projective et L est un fibré en droites ample sur M. Cette condition d'équilibre se lit alors analytiquement sur les métriques $\pi_k^*\omega_{FS}$ où π_k désigne le plongement naturel de la variété dans l'espace projectif $\mathbb{P}H^0\left(M, L^k\right)$ et ω_{FS} la métrique naturelle de cet espace, c'est à dire la métrique de Fubini-Study. Le résultat principal de l'article est la convergence des métriques $\pi_k^*\omega_{FS}$ vers une métrique à courbure scalaire constante lorsque celle-ci existe *a priori*. Le problème d'approximation de la métrique à courbure scalaire constante est ainsi résolu par une méthode de quantification, consistant à voir l'espace des potentiels Kähler comme la limite à l'infini des espaces symétriques $SL(h^0(M, L^k) + 1)/SU(h^0(M, L^k) + 1)$ des métriques de type Fubini-Study, cette quantification permettant de basculer dans le domaine de la dimension finie comme cela avait été conceptualisé dans [Do3].

Parallèlement au problème fondamental d'une bonne définition de stabilité pour les variétés, il est bien connu qu'il existe une notion de stabilité pour les fibrés vectoriels holomorphes au dessus d'une variété kählérienne[1]. Pour la Mumford stabilité, les travaux de Hitchin, Kobayashi, Lübke, Donaldson, Uhlenbeck, et Yau ont permis d'établir la correspondance –dite de Kobayashi-Hitchin– entre les fibrés holomorphes stables (plus précisément polystables) sur des variétés compactes Kähler et le monde de la géométrie différentielle, via l'existence d'une métrique hermitienne h vérifiant l'équation d'Hermite-Einstein :

$$\sqrt{-1}\Lambda F_h = \lambda Id_E, \tag{1}$$

[1] en fait deux notions différentes ont été développées par D. Mumford et D. Gieseker dans le cas où la variété sur laquelle vit les fibrés est de dimension supérieure ou égale à 2.

où λ est une constante ne dépendant que de la topologie de E et $\sqrt{-1}\Lambda F_h$ désigne l'endomorphisme de E obtenu en contractant la courbure de Chern F_h de la métrique h contre la forme Kählerienne ω de la variété. D'un point de vue historique, cette correspondance a été établie par Narasimhan et Seshadri pour les courbes, Donaldson pour les surfaces algébriques [Do1], Uhlenbeck et Yau dans le cas Kähler, Buchdahl dans le cas d'une surface complexe [Bu1], Bartolomeis et Tian dans le cas presque complexe, Li et Yau dans le cas d'une variété hermitienne. Ainsi, la correspondance de Kobayashi-Hitchin donne un isomorphisme d'espaces de modules entre l'espace de modules de structures holomorphes stables à déterminant fixé et l'espace de modules de connexions irréductibles d'Hermite-Einstein intégrables. Les métriques d'Hermite-Einstein, tout comme les métriques de Kähler-Einstein, sont des uniformisants de la géométrie complexe et leur existence impose des conditions très fortes sur la géométrie des objets considérés. Notons en particulier que la construction d'espaces de modules de connexions d'Hermite-Einstein et l'étude de leur topologie via les connexions ASD a eu beaucoup de conséquences en dimension 4 réelle, dont notamment les fameux invariants polynômiaux de Donaldson pour les espaces de modules de $PU(r)$-instantons en théorie de Jauge. Remarquons également que cette équation est nettement plus "linéaire" que l'équation de Monge-Ampère considérée dans le cas des métriques Kähler-Einstein. Avec les travaux de C. Simpson, cette correspondance a été étendue à des objets plus généraux, tels que les fibrés de Higgs introduits par N. Hitchin. En suivant les idées de P. Deligne sur la théorie de Hodge et en combinant ses résultats avec ceux de K. Corlette, C. Simpson établit notammment un pont entre 3 mondes : la géométrie algébrique (avec les fibrés de Higgs polystables avec première classe de Chern triviale), la géométrie différentielle (avec les fibrés harmoniques) et la topologie (avec les systèmes locaux semi-simples). En particulier, cela lui a permis de voir que tout fibré plat peut être déformé en une variation de structure de Hodge polarisée et donner des restrictions très fortes sur le groupe fondamental d'une variété Kählérienne. Il est aussi important de souligner à ce stade que la démonstration des correspondances de type Kobayashi-Hitchin repose toujours sur des méthodes de type flots de gradient/chaleur ou méthodes de la continuité (par exemple dans [L-T1]), le point crucial étant de prouver que la stabilité entraine l'existence d'une métrique vue en tant que point critique minimum d'une fonctionnelle de type Yang-Mills sous le flot de Jauge.

Une question légitime et naturelle est donc de se demander si les résultats de [Do4] peuvent s'appliquer dans le cas des fibrés stables et si l'on peut approcher les solutions de l'équation (1) par des métriques construites algébriquement. Cela sous-entend que l'on s'attend à ce que l'analyse globable utilisée pour la correspondance de Kobayashi-Hitchin contienne des techniques clé pour la construction d'objets algébriques. Par 'algébrique', nous entendrons ici des métriques provenant d'une construction de la Théorie des Invariants Géométriques (G.I.T) développée initialement par D. Mumford[2] [M-F-K].

[2] à l'origine pour traiter le cas des courbes, voir [M-F-K, Ses, LeP2].

Dans le cas des équations d'Hermite-Einstein au dessus d'une courbe, l'idée de voir des métriques particulières solution d'un système différentiel comme des limites de métriques algébriques h_k induites par les puissances de $E \otimes L^k$ est apparue sur une idée de C. Simpson dans le travail de C. Drouet [Dr, Théorème 5.1.3]. La convergence de la suite de métriques h_k vers h solution de (1) était assurée au sens L^1_2 dans le cas où la suite h_k considérée appartenait à un compact convexe donné de l'espace des métriques hermitiennes, c'est à dire dans le cas où l'on dispose de l'existence d'un maximum pour la fonctionnelle de Kempf-Ness considérée sur $E \otimes L^k$. Ce problème a été ensuite étudié très récemment par X. Wang, qui a fourni, simultanément à la préparation de cette thèse, une solution complète en toute dimension dans [W1, W2] en se libérant de cette contrainte. La démarche de X. Wang s'appuyait directement sur les travaux de D. Gieseker et les idées novatrices de S.K Donaldson.

Nous nous intéressons à un problème plus général en considèrant des équations de type Vortex qui sont à la frontière de la Physique théorique et de la Géométrie. En Physique, les théories bosoniques les plus générales sans théorie de la gravité sont dénommées σ-modèles non linéaires. Considérons M et F deux variétés Riemaniennes, E un fibré sur M avec fibre F, et G un groupe agissant sur F par isométries. Les champs de la théorie sont les sections $\Phi \in C^\infty(M,E)$ et les G-connexions A et l'énergie du système est décrit par la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(\Phi, A) = \int_M ||F_A||^2 + 2||\nabla^A \Phi||^2 + V(\Phi) \tag{2}$$

où $V(\Phi)$ est un certain potentiel d'énergie. Nous nous intéressons au cas où M et F sont des variétés Kähler et l'action de G est holomorphe et hamiltonienne. Le choix naturel $V(\Phi) = ||\mu(\Phi)||^2$ où μ est une application moment relativement à l'action de G, conduit à considérer un modèle qui bénéficie de deux propriétés remarquables. Tout d'abord, la théorie admet une extension supersymétrique au moins quand M est un espace euclidien ou le demi-plan de Poincaré. Ensuite, la fonctionelle d'énergie admet pour équation d'Euler-Lagrange l'équation de Bogomol'nyi, qui s'écrit sur une courbe complexe sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \bar\partial_A \Phi & = & 0 \\ \sqrt{-1}\Lambda F_A + \mu(\Phi) & = & 0 \\ F_A^{0,2} & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

et dont les solutions sont des états BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld) de la théorie supersymétrique attachés à des solitons qui correspondent à des particules avec charges à la fois électriques et magnétiques (appelées dyons en Physique des Hautes Energies). Lorsque $F = \mathbb{C}$ et $G = U(1)$, l'on retrouve le modèle de Higgs abélien standard (correspondant à la théorie de la supraconductivité) et pour $F = \mathbb{C}^n$ et $G = SU(n)$ et le choix d'une représentation dépendant de particules couplées aux champs de Jauge, les interactions électriques fortes-faibles.

Nous serons amenés à considérer la généralisation en dimension supérieure des équations (3) dans le cadre Kählérien. Dans ce contexte, ces équations sont encore appelées équations Vortex et furent étudiées par C.H. Taubes [Tau] et S. Bradlow [Bra1, Bra2] puis généralisées au dessus d'une variété Kähler pour G compact et F un espace vectoriel hermitien[3] par D. Banfield [Ba]. D'un autre côté, García-Prada [GP] a proposé de considérer plus qu'un seul fibré via la notion d'équations Vortex couplées et la notion de Quivers, cette dernière recouvrant notamment le cas des fibrés de Higgs [AC-GP2, AC-GP3]. Finalement, un cadre unificateur a été précisé par Lübke et Teleman [L-T2] pour une variété hermitienne, donnant ainsi une correspondance de Kobayshi-Hitchin très générale sur des variétés compactes. Nous retiendrons en fin de compte que le travail de Banfield recouvre le cas des équations d'Hermite-Einstein, des équations Vortex de Bradlow, des équations de Seiberg-Witten réduites (triplets de Witten), des équations de Vafa-Witten ($N=4$ supersymétrique Yang-Mills) sur une variété kählérienne compacte. La question d'une construction G.I.T pour les équations de Banfield en toute généralité reste délicate même si des progrès considérables [Sc1, G-S] ont été faits dans ce domaine dans le cas où μ provient d'une représentation linéaire. Les équations Vortex ou les triplets (équations Vortex couplées) apparaissent naturellement dans dans la théorie de Seiberg-Witten pour des surfaces Kähler afin d'étudier l'espace de modules de $PU(2)$-monopoles [O-T3]. A. Bertram, G. Daskalopoulos et R. Wentworth [Be, B-D-W] ont utilisé de manière cruciale les équations Vortex pour le calcul d'invariants de Gromov-Witten pour des applications holomorphes d'une surface de Riemann vers une Grassmanienne (Voir aussi à ce sujet [O-T5], pour des développements récents utilisant les équations de Vortex couplées). Dans le cas d'une variété symplectique, cette théorie a conduit à la généralisation des invariants de Gromov-Witten hamiltoniens qui comptent les solutions de telles équations, et qui sont reliés à l'homologie de Floer [MR2, C-G-S, O-T4].

Dans cette thèse, nous commencerons par étudier l'équation $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein introduite par Álvarez-Cónsul & García-Prada pour une filtration $\mathscr{F}$ holomorphe (c'est à dire donnée par des sous-fibrés) au dessus d'une variété projective

$$\mathscr{F} : 0 \hookrightarrow \mathcal{F}_1 \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathcal{F}_m = \mathcal{F}$$

pour lesquelles l'équation $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein en la métrique h sur $\mathcal{F}$ s'écrit :

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h + \sum_{i=1}^{m-1} \tau_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} = Cst \times Id_{\mathcal{F}} \tag{4}$$

Ici $\pi_{h,i}^{\mathscr{F}}$ est la projection h-orthogonale sur le sous-fibré $\mathcal{F}_i$, et τ_i sont des réels positifs (Cf Section 4.1). Notre théorème principal consiste à construire explicitement une suite de métriques lisses hermitiennes convergeant vers une métrique solution d'une telle équation. Ces métriques sont données comme zéros d'application moment provenant de la G.I.T pour l'action du groupe spécial unitaire. A ce stade, il est capital de comprendre que c'est la notion, légèrement plus faible, de Gieseker stabilité (et

[3]Notons que dans [MR1], l'action sur la fibre Kählérienne n'est plus nécessairement linéaire.

non de Mumford stabilité) qui permet d'introduire la machinerie G.I.T. Cette notion de Gieseker stabilité peut être comprise comme une quantification de la notion de Mumford stabilité, et a été en particulier reliée par N.C. Leung pour des fibrés holomorphes sans structure supplémentaire, à l'existence d'une solution h_k pour un système elliptique non linéaire :

$$\left[e^{k\omega Id_E+\sqrt{-1}F_{h_k}}Todd(M)\right]^{(n,n)} = \frac{\chi(E\otimes L^k)}{r(E)}\frac{\omega^n}{n!}Id_E \tag{5}$$

où $Todd(M)$ désigne la classe de Todd de M, $\chi(E\otimes L^k)$ la caractéristique d'Euler du fibré $E\otimes L^k$, $r(E)$ le rang du fibré E et $[\theta]^{(n,n)}$ représente la partie (n,n) de la forme $\theta\in\Omega^{*,*}(M,End(E))$. Les métriques que nous construirons ne sont pas reliées directement au résultat de Leung, néanmoins elles proviennent d'une condition sur le noyau de Bergman, qui est bien sûr la limite du noyau de la chaleur à $t\to+\infty$ pour l'opérateur de Dirac $\sqrt{-2}(\bar\partial+\bar\partial^*)$. D'un autre côté, le théorème d'Atiyah-Singer local assure que l'expression du noyau de la chaleur à $t=0$ est relié au membre de gauche de (5) par sa supertrace. Pour le noyau de Bergman de $E\otimes L^k$, nous disposons d'un développement asymptotique lorsque $k\to+\infty$ principalement grâce aux travaux de G. Tian, Z. Lu, W.D. Ruan, S. Zelditch et D. Catlin [T2, Ze, Ca, Lu, W2, B], dont le second terme fait apparaître la courbure du fibré. Ce fait nous permettra de voir que si la suite de métriques équilibrées converge, sa limite est nécessairement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein quitte à faire un changement conforme.

Présentation des résultats de la thèse

Dans une première partie, nous rappelons des résultats très généraux sur la notion d'application moment et relions quotients symplectiques et quotients G.I.T. Le but de cette partie est d'introduire les résultats de S.K. Donaldson [Do4] concernant les zéros d'applications moment.

Dans une deuxième partie, nous introduisons une notion de Gieseker stabilité pour les filtrations holomorphes $\mathscr{F}$ et faisons une construction G.I.T pour paramétrer les filtrations holomorphes stables par un espace de type Gieseker.

Dans une troisième partie, nous appliquons la théorie de Kempf-Ness aux résultats précédents. Cela nous permet d'obtenir une condition équivalente à la stabilité en terme de métriques vivant sur les fibrés $\mathcal{F}\otimes L^k$ que nous nommerons métriques équilibrées. Ces métriques sont donc obtenues par construction algébrique, et les métriques Hilbertiennes qui leur sont associées sur $H^0(M,\mathcal{F}\otimes L^k)$ minimisent une fonctionnelle explicite. Soit M une variété projective lisse de dimension complexe n, et soit $\mathbf{R}=(R_1,...,R_{m-1})$ un m-uplet de polynômes rationnels de degrés inférieurs strictement à n et tels que $\lim_{k\to+\infty}R_i(k)=+\infty$. Dans ces conditions, le résultat principal de cette partie est le théorème suivant :

Théorème. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe*

$$\mathscr{F}:0\hookrightarrow\mathcal{F}_1\hookrightarrow...\hookrightarrow\mathcal{F}_m=\mathcal{F}$$

de longueur m au dessus d'une variété projective. Alors $\mathscr{F}$ est $\mathbf{R}$-Gieseker stable si et seulement si son groupe d'automorphisme est fini et pour tout k assez grand, il existe une métrique hermitienne lisse h_k sur $\mathcal{F}\otimes L^k$ telle que

$$\widehat{\mathsf{B}}_{h_k} + \epsilon_k \sum_{j=1}^{m-1} \frac{R_j(k)}{k^n} \pi^{\mathscr{F}}_{j,h_k} = \frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k) + \epsilon_k \sum_{j=1}^{m-1} \frac{R_j(k)}{k^n} r_j}{rV} Id_{\mathcal{F}\otimes L^k} \tag{6}$$

où $\widehat{\mathsf{B}}_h$ est la restriction sur la diagonale du noyau de Bergman de la métrique h, $\pi^{\mathscr{F}}_{j,h}$ est la projection h-orthogonale sur le sous-fibré $\mathcal{F}_j$ et enfin $\epsilon_k = \frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k)}{r-\sum_j \varepsilon_j r_j}$.

Dans une quatrième partie, nous suivons la démarche de [Do4]. En fait, notre problème se distingue fondamentalement de celui étudié originellement par S.K Donaldson, au sens où les groupes naturels agissants associés à aux équations sont différents, puisqu'il s'agit du groupe de Jauge $\mathcal{G}$ du fibré E et de $SU(N)$ avec $N = \chi(\mathcal{F}\otimes L^k)$. Dans cette partie, nous supposons a priori l'existence d'une métrique $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein. Dans un premier temps, nous construisons des métriques “presque” équilibrées (c'est à dire qui vérifie la condition d'équilibre (6) du théorème précédent jusqu'à un certain ordre fixe en k) en itérant des résolutions d'équations différentielles elliptiques, c'est à dire en perturbant la métrique spéciale donnée a priori. Ceci nous permet de considérer de basculer dans le monde de la dimension finie grâce au formalisme subtil développé par S.K. Donaldson qui s'applique au “double” quotient symplectique par $\mathcal{G}\times SU(N)$ (i.e le produit d'un groupe de dimension infinie par un groupe de dimension finie). Les métriques presque équilibrées peuvent alors être déformées, en suivant le flot engendré par l'action de $SU(N)$, vers des métriques équilibrées correspondant à celles construites par la G.I.T pour un choix convenable de $\mathbf{R}$. Enfin, nous aurons besoin d'une étude analytique assez fine pour obtenir des estimées contrôlant la convergence de ce flot. Finalement, avec la notation $\boldsymbol{h}_k = h_k\otimes h_L^{-k}$, nous obtenons

Théorème. *Soit M une variété projective lisse. Si $\mathscr{F}$ est une filtration holomorphe irréductible sur M munie d'une métrique h_{HE} solution de l'équation $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein (4), alors il existe une suite de métriques $\boldsymbol{h}_k$ équilibrées sur $\mathcal{F}$ qui converge, quitte à faire un changement conforme, vers la métrique h_{HE} de manière C^∞.*

Dans une quatrième partie, nous utilisons des arguments de réduction dimensionnelle pour obtenir une approximation en terme des métriques équilibrées que nous venons de construire pour les métriques solutions d'équations Vortex couplées (chaînes d'équations Vortex) qui recouvrent entre autres, le cas des équations Vortex de Bradlow, ou des triplets de Witten (monopoles non abéliens).

Dans un futur proche, nous espérons étendre ces résultat au cas des équations de Banfield pour lesquels l'action du groupe est linéaire en suivant les lignes de [G-S] ainsi qu'aux Quivers pour traiter le cas des fibrés de Higgs en toute généralité.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est d'exposer quelques objets classiques comme la notion d'application moment provenant du monde de la géométrie symplectique et la notion de G.I.T-stabilité provenant du monde de la géométrie algébrique. En fait, il est bien connu (voir [M-F-K]) qu'en dimension finie les conditions de G.I.T stabilité sont reliées à l'annulation d'applications moments.
Notre objectif est notamment de présenter dans cette section des travaux récents de S.K. Donaldson qui permettent, dans le cas Kählérien, de trouver sous certaines conditions des zéros d'une application moment.

Dans toute la suite, le corps de base est le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1.1 Stabilité au sens G.I.T

La Théorie des Invariants Géométriques (G.I.T) a pour but d'étudier les quotients X/G où X est un $\mathbb{C}$-schéma et G est un groupe algébrique agissant dessus. La théorie de Mumford ([M-F-K]) explique que de "bons" quotients apparaissent dans le cas où le groupe est réductif et agit de manière linéaire.

Définition 1.1.1. *Un groupe algébrique linéaire G est dit réductif si son radical unipotent est trivial. Ceci est équivalent au fait que G est la complexification de son sous-groupe compact maximal. Si de plus G est connexe et de centre fini, on dit que G est semi-simple.*

Notation. *Pour W un espace de G-représentation, W^G désigne le sous-espace des éléments invariants.*

Définition 1.1.2. *Un groupe algébrique affine est un groupe Γ muni d'une structure de variété algébrique affine, telle que la multiplication* $\begin{array}{ccc}\Gamma\times\Gamma & \to & \Gamma\\ (g_1,g_2) & \mapsto & g_1g_2\end{array}$ *et l'inverse* $\begin{array}{ccc}\Gamma & \to & \Gamma\\ g & \mapsto & g^{-1}\end{array}$ *soient des morphismes de variétés algébriques.*

Définition 1.1.3 (Quotient catégoriel - géométrique). *Soit G groupe algébrique affine agissant par γ sur un $\mathbb{C}$-schéma X et soit $\Psi : G \times X \to X \times X$ le morphisme (γ, pr_2) où pr_2 est la projection sur le deuxième facteur. Un quotient catégoriel de X est un morphisme G-invariant $\phi : X \to Y$ tel que pour tout morphisme G-invariant $\psi : X \to Z$, il existe un unique morphisme $\bar{\phi} : Y \to Z$ tel que $\bar{\phi} \circ \psi = \phi$ et G agisse trivialement sur Y et Z. Cela revient à dire que l'on dispose des diagrammes commutatifs suivants :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times X & \xrightarrow{\gamma} & X \\ pr_2 \downarrow & & \phi \downarrow \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & Z \\ \phi \downarrow & \nearrow_{\bar{\phi}} & \\ Y & & \end{array}$$

Un quotient catégoriel est dit géométrique si l'image de Ψ est $(\phi \times \phi)^{-1}(\Delta_Y)$, c'est à dire que la fibre de ϕ est précisément une orbite, et donc un quotient géométrique est un espace d'orbite X/G au sens de la théorie des ensembles.

Définition 1.1.4 (Quotient universel). *Soit G groupe algébrique affine agissant sur un $\mathbb{C}$-schéma X. Un morphisme $\phi : X \to Y$ donne un bon quotient (Y, ϕ) si :*

- *ϕ est affine et invariant : $\phi(gx) = \phi(x)$ pour tout $g \in G$, $x \in X$.*
- *ϕ est surjectif, et $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert de X, c'est à dire que ϕ est submersive pour la topologie quotient.*
- *L'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_Y \to \phi_* \mathcal{O}_X^G$ est un isomorphisme, c'est à dire que $\mathcal{O}_Y(U) \simeq \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U))^G$ pour tout $U \subset Y$ ouvert.*
- *Si W est un sous-ensemble invariant fermé de X, $\phi(W)$ est encore fermé. Si $W_1, W_2 \subset X$ sont des fermés invariants disjoints, alors $\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \varnothing$.*

Le morphisme ϕ constitue un bon quotient universel (resp. quotient géométrique universel) si $Y' \times_Y X \to Y'$ est un bon quotient (resp. quotient géométrique) pour tout morphisme $Y' \to Y$ de $\mathbb{C}$-schémas.
Quand il existe, un bon quotient géométrique de X est unique (car c'est aussi un quotient catégoriel) et on le notera $X//G$.

Définition 1.1.5. *Une linéarisation $\boldsymbol{l}$ de l'action γ du groupe algébrique linéaire réductif G sur X est la donnée d'un fibré en droites L sur X et d'une action linéaire de G sur L induisant celle sur X. Cela revient à dire que l'on dispose du diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathsf{L} & \xrightarrow{\boldsymbol{l}} & \mathsf{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

Lorsque X est munie d'une métrique Kähler ω, nous étendons la définition de linéarisation pour un groupe de Lie compact G pour lequel sa complexification $G^{\mathbb{C}}$ agisse holomorphiquement (i.e $G^{\mathbb{C}} \times X \to X$ est holomorphe) et G agisse par difféomorphismes symplectiques (i.e $g^*(\omega) = \omega$ pour tout $g \in G$).

L'introduction de ces définitions sont justifiées par le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.1.6. *Soit G un groupe linéaire réductif agissant sur un $\mathbb{C}$-schéma affine X de type fini. Notons $A(X)$ l'anneau des coordonnées de X ainsi que $Y = Spec\left(A(X)\right)^G$. Alors $A(X)^G$ est finiment engendré sur $\mathbb{C}$, Y est de type fini et l'application naturelle $\pi : X \to Y$ est un bon quotient universel pour l'action de G.*

Supposons que Ξ est un schéma projectif avec G groupe algébrique linéaire réductif et L une G-linéarisation avec L ample sur Ξ. Le groupe G agit naturellement sur $H^0(\Xi, \mathsf{L})$ et le morphisme naturel $H^0(\Xi, \mathsf{L}) \otimes \mathcal{O}_\Xi \to \mathsf{L}$ est équivariant et induit un plongement G-équivariant $\Xi \hookrightarrow \mathbb{P}\left(H^0(\Xi, \mathsf{L})^\vee\right)$. Ainsi, la G-linéarisation L linéarise l'action sur Ξ au sens que cette action est induite par le plongement projectif donné par L et une représentation linéaire sur $H^0(\Xi, \mathsf{L})$. Nous pouvons considérer l'anneau gradué

$$R(\Xi) = \bigoplus_{k\geq 0} H^0\left(\Xi, \mathsf{L}^k\right)^\vee. \tag{1.1}$$

Alors $R(\Xi)^G$ est finiment engendré en tant qu'algèbre $\mathbb{Z}$-graduée. De plus, l'inclusion $R(\Xi)^G \subset R(\Xi)$ induit une application rationnelle $\mathrm{Proj}(R(\Xi)) \dashrightarrow \mathrm{Proj}\left(R(\Xi)^G\right)$ qui est définie exactement sur l'ensemble ouvert des points $\theta \in \Xi$ pour lequel il existe $k \in \mathbb{N}$, $s \in H^0\left(\Xi, \mathsf{L}^k\right)^G$ avec $s(\theta) \neq 0$. Si l'on veut donc former un quotient projectif, l'on est par conséquent conduit à la définition naturelle suivante :

Définition 1.1.7 (G.I.T-stabilité). *Soit Ξ schéma projectif et $\theta \in \Xi$.*
- *Le point θ est semi-stable respectivement à un fibré ample G-linéarisé L s'il existe un entier k et une section globale $s \in H^0(\Xi, \mathsf{L}^k)$ G-invariante telle que $s(\theta) \neq 0$.*
- *Le point θ est polystable si θ est semi-stable et son orbite sous l'action de G fermée dans l'ensemble de tous les points semi-stables dans Ξ.*
- *Le point θ est stable si θ est polystable et de plus son groupe de stabilisateurs sous G est fini.*

Notation. *Nous dénoterons Ξ^s, Ξ^{ps} et Ξ^{ss} l'ensembles des points stables, polystables et semi-stables. Ξ^s et Ξ^{ss}sont des ouverts G-invariants possiblement vides.*

Remarque 1.1. *Ces définitions sont indépendantes du choix de θ dans une orbite fixée, donc nous pouvons parler de stabilité pour une orbite.*

Remarque 1.2. *Dans le cas projectif $\Xi \subset \mathbb{CP}^n$, la semi-stabilité du point $\theta \in \Xi$ est équivalente à ce que pour un représentant $\bar{\theta} \in \mathbb{C}^{n+1}$ de θ, l'on ait que 0 n'appartienne pas à l'adhérence de l'orbite : $0 \notin \overline{Orb_G\left(\bar{\theta}\right)}$.*

Le résultat principal de la G.I.T est l'existence d'un quotient projectif des points semi-stables sous l'action de G et que l'on puisse distinguer deux orbites polystables distinctes :

Théorème 1.1.8. *Si Ξ est une sous-variété algébrique fermée de $\mathbb{CP}^n$ et si l'action de G sur Ξ provient d'une action linéaire de G sur $\mathbb{C}^{n+1}$, la linéarisation étant l'action naturelle de G sur $\mathcal{O}(1)$, alors il existe un bon quotient universel $\Xi//G$ de Ξ^{ss} par (G, π) et c'est une variété projective. Il existe un ouvert $\mathcal{M} \subset \Xi//G$ tel que $\pi^{-1}(\mathcal{M}) = \Xi^s$ et $\left(\mathcal{M}, \pi_{|\Xi^s}\right)$ est un quotient géométrique universel de Ξ^s par G et a une structure de variété quasi-projective.*

Notons désormais $\gamma : G \times \Xi \to \Xi$ l'action du groupe G sur le schéma Ξ. Pour un sous-groupe à un paramètre $g_m : G_m \to G$, l'action de G induit une action de G_m sur Ξ. Comme Ξ est projectif, l'orbite $(\gamma(g_m(t), \theta))_{t \in G_m}$ s'étend de manière unique à un morphisme $\psi : \mathbb{A}^1 \to \Xi$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} G_m & \overset{g_m}{\to} & G & & g \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^1 & \overset{\psi}{\to} & \Xi & & \gamma(g,\theta) \end{array}$$

où $G_m \to \mathbb{A}^1$ est donné par l'inclusion. Le point $\overrightarrow{\gamma}(0) := \lim_{t \to 0} \gamma(g_m(t), \theta)$ est un point fixe de l'action de G_m sur Ξ via g_m. En particulier G_m agit sur la fibre $\mathsf{L}_{\overrightarrow{\gamma}(0)}$ avec un certain poids r, c'est à dire que si $\boldsymbol{l}$ est la linéarisation de L, l'on a $\boldsymbol{l}_{g_m(t)}(\overrightarrow{\gamma}(0)) = \frac{1}{t^r} \times Id_{\mathsf{L}_{\overrightarrow{\gamma}(0)}}$. Nous définissons dans ces conditions le poids de l'action de g_m

$$\mu^{\mathsf{L}}(\theta, g_m) := r.$$

Si $\mu^{\mathsf{L}}(\theta, g_m)$ est négatif, alors 0 appartient clairement à la fermeture de l'orbite de tout représentant $\widehat{\theta}$ et θ est instable. La réciproque est vraie et constitue un critère fort utile dans la pratique :

Critère 1.1.9 (Hilbert-Mumford). *Un point $\theta \in \Xi$ est semi-stable si et seulement si pour tout sous-groupe non trivial à 1-paramètre $g_m : G_m \to G$, on a*

$$\mu^{\mathsf{L}}(\theta, g_m) \geq 0$$

Le point θ est polystable si cette inégalité est stricte ou G_m se factorise par le groupe $Stab_G(\theta)$ des stabilisateurs de θ. Le point θ est stable si et seulement si cette inégalité est stricte pour tout G_m non trivial.

1.2 Stabilité au sens de la géométrie symplectique

De manière générale, il est relativement difficile de vérifier explicitement la stabilité d'un point. Cependant le critère suivant nous permettra de voir que les points stables sont caractérisés par des propriétés géométriques et ainsi de basculer dans le monde géométrique différentielle :

Théorème 1.2.1 (Kempf-Ness [K-N]). *Soit $\Gamma^{\mathbb{C}}$ un groupe algébrique réductif de sous-groupe maximal compact Γ et Υ un espace vectoriel complexe muni d'une représentation linéaire $\rho : \Gamma \to GL(\Upsilon)$ et d'une métrique $\rho(\Gamma)$-invariante h.*

- *Un point $\theta \in \mathbb{P}\Upsilon$ est G.I.T-stable vis à vis de la linéarisation $\mathcal{O}_{\mathbb{P}\Upsilon}(1)$ si et seulement si la fonction*
$$g \mapsto ||\rho(g) \cdot \overline{\theta}||_h^2$$
est propre et bornée inférieurement par une constante strictement positive sur $\Gamma^{\mathbb{C}}/\Gamma$ où $\overline{\theta}$ est un relèvement de θ dans l'espace Υ.
- *Un point $\theta \in \mathbb{P}\Upsilon$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}\Upsilon}(1)$-polystable si et seulement si la fonction*
$$g \mapsto ||\rho(g) \cdot \overline{\theta}||_h^2$$
admet un minimum strictement positif, qui est unique modulo l'action du groupe $Stab_{\Gamma^{\mathbb{C}}}\left(\overline{\theta}\right)$ des stabilisateurs de $\overline{\theta}$.

A ce niveau, l'on doit noter également que l'existence d'une linéarisation (l'action du groupe Γ préservant la metrique hermitienne sur le fibré) est équivalente à la donnée d'une application moment Γ équivariante ([Bry, Do1] ou [Ki1, §8]), ce qui constitue un autre pont entre géométrie symplectique et géométrie algébrique que nous explicitons à présent.

Plus précisément, soit L un fibré ample en droites holomorphe sur une variété kählérienne (Ξ, ω) et Γ un groupe de Lie compact agissant de manière symplectique respectivement à ω et tel que sa complexification $\Gamma^{\mathbb{C}}$ agisse holomorphiquement sur Ξ. Supposons que l'action de $\Gamma^{\mathbb{C}}$ sur L recouvre l'action sur la variété. Considérons de plus h_{L} une métrique hermitienne sur L telle que sa forme de courbure est $-\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log h_{\mathsf{L}} = \omega$, et qui est donc Γ-invariante.

Pour tout élément $\zeta \in Lie(\Gamma^{\mathbb{C}})$, notons ν_ζ l'action induite sur l'espace des sections $H^0(\Xi, \mathsf{L})$, c'est à dire que pour toute section s, nous avons :

$$\nu_\zeta^{\mathsf{L}}(s)(p) = \frac{d}{du}e^{u\zeta}s(e^{-u\zeta}p)|_{u=0}$$

Ainsi ν_ζ^{L} n'est autre que la dérivée respectivement au champ de vecteur $\overrightarrow{X}_\zeta(p)$ (qui est induit par l'action de groupe à un paramètre $u \mapsto \exp(u\zeta)\,p$). Dès lors, si l'on note D^{L} la connexion de Chern associée à h_{L}, $\nu_\zeta^{\mathsf{L}} - D^{\mathsf{L}}_{\overrightarrow{X}_\zeta}$ est un homomorphisme du fibré L qui est simple, et par conséquent il existe une fonction μ_ζ telle que

$$\nu_\zeta^{\mathsf{L}}s = D^{\mathsf{L}}_{\overrightarrow{X}_\zeta}s + \sqrt{-1}\mu_\zeta s \tag{1.2}$$

Dans ces conditions, l'application $\mu := \Xi \to Lie(\Gamma)^*$ donnée par

$$\langle \mu, \zeta \rangle = \mu_\zeta$$

est une application moment Γ-équivariante au sens de la définition suivante :

Définition 1.2.2. *Une application moment* $\mu : \Xi \to Lie\,(\Gamma)^*$ *pour l'action de* Γ *est une application lisse* $\Gamma-$*équivariante :*

$$\mu\,(g \cdot p) = Ad^*\,(g)\,(\mu\,(p))$$

telle que pour tout $p \in \Xi$,

$$\langle d\mu\,(p)\,,\zeta\rangle\,(u) = \omega_p\left(\overrightarrow{X}_\zeta\,(p)\,,u\right)$$

c'est à dire que la composante de μ *le long de* ζ *est une fonction Hamiltonienne pour le champ de vecteur défini par* ζ *sur* Ξ. *Lorsque* Γ *est connexe, il existe au moins localement une application moment associée à* Γ. *L'unicité de l'application moment est contrôlée par* $H^1(Lie(\Gamma),\mathbb{R})$.

Réciproquement, si l'on dispose d'une application moment qui satisfait (1.2), nous posons

$$\overrightarrow{X}_\zeta\,(p) = \widehat{\overrightarrow{X}^\Xi_\zeta\,(p)}^D - \mu_\zeta \overrightarrow{e^{iu}}(p) \tag{1.3}$$

où l'on a noté par $\widehat{\overrightarrow{X}^\Xi_\zeta\,(p)}^D$ le relèvement horizontal du champ de vecteurs $\overrightarrow{X}^\Xi_\zeta\,(p)$ respectivement à la connexion D et enfin $\overrightarrow{e^{iu}}$ désigne le champ de vecteurs induit par rotation le long de la fibre de L. De plus, ceci s'étend bien à une action, comme il est remarqué dans [Bry], En regardant les flots correspondants aux champs de vecteurs complets $\overrightarrow{X}_\zeta\,(p)$, nous obtenons une action globale, c'est à dire une linéarisation.

1.2.1 Intégrale d'une application moment

Considérons toujours le cas d'une variété kählérienne (Ξ,ω) polarisée par L et d'une application moment μ associée à l'action d'un groupe linéaire réductif Γ tel que son complexifié agisse holomorphiquement. A l'application moment μ correspond naturellement une fonctionnelle

$$\Psi : \Xi \times \Gamma^{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$$

que nous appellerons "*intégrale de l'application moment* μ" et qui satisfait les deux propriétés suivantes :

- pour tout $p \in \Xi$, les points critiques de la restriction Ψ_p de Ψ à $\{p\} \times \Gamma^{\mathbb{C}}$ coincident avec les points de l'orbite $Orb_{\Gamma^{\mathbb{C}}}(p)$ en lesquels l'application moment s'annule,
- la restriction Ψ_p sur les 'lignes' $\{e^{\lambda u} : u \in \mathbb{R}\}$ où $\lambda \in Lie\left(\Gamma^{\mathbb{C}}\right)$ est convexe.

Théorème 1.2.3 (Mundet i Riera). *Il existe une unique application* $\Psi : \Xi\times\Gamma^{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ *qui vérifie :*

1. $\Psi(p,e) = 0$ *pour tout* $p \in \Xi$;
2. $\frac{d}{du}\Psi\left(p, e^{i\lambda u}\right)_{|u=0} = \langle \mu(p), \lambda\rangle$ *pour tout* $\lambda \in Lie(\Gamma)$;

Résumons les propriétés de l'intégrale de l'application moment démontrées dans [MR1], par la

Proposition 1.2.4. *La fonctionnelle* Ψ *est* $\Gamma-$*invariante à gauche et vérifie la relation de cocycle*

$$\Psi(p,\gamma) + \Psi(\gamma p, \gamma') = \Psi(p, \gamma'\gamma)$$

pour tout $p \in \Xi$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma^{\mathbb{C}}$, *ainsi que la relation d'équivariance*

$$\Psi(\gamma p, \gamma') = \Psi\left(p, \gamma^{-1}\gamma'\gamma\right)$$

pour tout $p \in \Xi$, $\gamma \in \Gamma, \gamma' \in \Gamma^{\mathbb{C}}$.
Enfin, $\frac{d^2}{du^2}\Psi\left(p, e^{i\lambda u}\right) \geq 0$ *pour tout* $\lambda \in Lie(\Gamma)$ *avec égalité si et seulement si le champ de vecteurs* $\overrightarrow{X}_\lambda\left(e^{i\lambda u}p\right) = 0$.

Remarque 1.3. *Notons que pour tout* $p \in \Xi$, *un point* γ *de* Ψ_p *est critique si et seulement si* $\mu(\gamma p) = 0$.

Rappelons à ce stade que nous disposons d'un difféomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times Lie(\Gamma) & \to & \Gamma^{\mathbb{C}} \\ (\gamma, u) & \mapsto & \gamma e^{iu} \end{array} \tag{1.4}$$

Soit $\rho : \Gamma^{\mathbb{C}} \to GL(W)$ une représentation fidèle sur un espace vectoriel de dimension finie muni d'une métrique hermitienne telle que $\rho(\Gamma) \subset U(W)$. Nous noterons ρ la représentation induite sur $Lie(\Gamma)$ ainsi que Γ. Nous pouvons définir dans ces conditions une métrique donnée par la forme de Killing sur $Lie(\Gamma)$ par

$$\langle a, b\rangle_\Gamma = Tr\left(\rho(a)\rho(b)^*\right).$$

qui est définie positive les imaginaires purs. Via le difféomorphisme (1.4), nous pouvons associer à tout élement $\gamma e^{iu} \in \Gamma^{\mathbb{C}}$ où u est dans la représentation adjointe de Γ, son logarithme $\log_{\Gamma^{\mathbb{C}}}(\gamma e^{iu}) = u$. Ceci nous conduit à la définition suivante, qui nous sera utile dans le prochain chapitre :

Définition 1.2.5. *Nous dirons que* Ψ *est linéairement log-propre en* $p \in \Xi$ *vis à vis de la métrique* $\langle .,. \rangle_\Gamma$ *sur* $\Gamma^{\mathbb{C}}$ *s'il existe deux constantes strictement positives* c_1, c_2 *telles que pour tout* $g \in \Gamma^{\mathbb{C}}$ *et tout point* $p \in \Xi$,

$$|\log_{\Gamma^{\mathbb{C}}}(g)|_\Gamma \leq c_1 \Psi_p(g) + c_2.$$

1.2.2 Zéros d'une application moment

Finalement, par simple application du Théorème de Kempf-Ness et du Théorème 1.2.3, nous obtenons en dimension finie une correspondence entre G.I.T stabilité et zéros d'application moment :

Lemme 1.2.6. *Une orbite complexe est stable si l'application moment associée à la Γ-linéarisation L s'annule le long de la Γ orbite avec stabilisateur fini.*

Démonstration. En effet, définissons sur $\mathbb{P}\Upsilon \times \Gamma^{\mathbb{C}}$ la fonctionnelle

$$\Phi(p,g) = \log \frac{||g \cdot l_p^{\vee}||_h}{||l_p^{\vee}||_h}$$

où $l_p^{\vee}$ est un élément non nul dans la fibre de $\mathsf{L}^{\vee}$ au dessus de $p \in \mathbb{P}\Upsilon$. Bien sur Φ est définie indépendamment du choix du représentant dans la fibre et peut être vue comme une fonctionnelle sur l'espace homogène $\Gamma^{\mathbb{C}}/\Gamma$. D'un autre côté, si l'on note $\Xi := \mathbb{P}\Upsilon$ et J_{L}, J_{Ξ} les structures complexes sur la polarisation et la variété, Φ satisfait

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(p,e^{iu\zeta})}{du}_{|u=0} &= \left(J_{\mathsf{L}}\overrightarrow{X}_{\zeta}\frac{\log h}{2}\right)_{u=0} \\
&= \left(\left(J_{\Xi}\widehat{\overrightarrow{X}_{\zeta}^{\Xi}(p)}^{D} - \mu_{\zeta}J_{\mathsf{L}}\overrightarrow{e^{iu}}\right)\frac{\log h}{2}\right)_{u=0} \\
&= \left(-\mu_{\zeta}J_{\mathsf{L}}\overrightarrow{e^{iu}}\frac{\log h}{2}\right)_{u=0} \\
&= \langle \mu(p), \zeta \rangle
\end{aligned}$$

en utilisant successivement l'identité (1.3) puis que h est Γ-invariante.

Ceci prouve que Φ est bien l'intégrale d'une application moment μ et elle est bien évidemment linéairement log-propre puisqu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. □

Quotients symplectiques et quotients G.I.T

Le groupe Γ agit aussi sur l'ensemble des zéros de l'application moment et l'on peut munir, l'espace quotient $\mu^{-1}(0)/\Gamma$ d'une structure symplectique naturelle (sur ses points lisses) par le théorème de réduction de Marsden-Weinstein ; de manière plus générale pour toute orbite co-adjointe $O \subset Lie(\Gamma)^*$, Γ agit sur l'image inverse dans Ξ et le quotient $\mu^{-1}(O)/\Gamma$ admet une structure symplectique (sur ses points lisses). Dans le cas où Ξ est Kähler et l'action est holomorphe, alors par un théorème de Guillemin et Sternberg, la structure sur le quotient symplectique $\mu^{-1}(0)/\Gamma$ est aussi Kähler parce que l'extension de l'action de Γ à $\Gamma^{\mathbb{C}}$ préserve la structure complexe. La question de relier quotients géométriques de la G.I.T et quotients symplectiques en dimension infinie est encore largement ouverte. Dans cette perspective, nous retiendrons le théorème suivant (Cf [M-F-K, 148-149], [H-H, §3 & §4]) :

Théorème 1.2.7. *Soit Ξ une variété Kähler et μ une application moment sur Ξ induite par l'action d'un groupe réductif Γ. L'ensemble*

$$\Xi^{ss}(\mu) := \left\{ \theta \in \Xi : \overline{Orb_{\Gamma^{\mathbb{C}}}(\theta)} \cap \mu^{-1}(0) \neq \varnothing \right\}$$

est ouvert et il existe un bon quotient $\Xi^{ss}(\mu) \to \mathcal{Q}$ où $\mathcal{Q}$ est un espace complexe de Haudorff ; l'inclusion $\mu^{-1}(0) \hookrightarrow \Xi^{ss}(\mu)$ induit un homéomorphisme $\mu^{-1}(0)/\Gamma \to \mathcal{Q}$. Enfin, si Ξ est algébrique projective, ce quotient est celui obtenu par la G.I.T.

En fait, il est important de remarquer que le problème que nous allons définir dépassera le cadre de ce résultat (ainsi que celui des systèmes d'énergies complets présentés dans [Te]).

Un exemple d'action de $SL(N)$

Notons $Gr(r,N)$ la Grassmanienne des r plans de $\mathbb{C}^N$. Un élément $[\mathsf{R}] \in Gr(r,N)$ peut être décrit par une matrice $\mathsf{R} \in \mathbb{M}_{N\times r}(\mathbb{C})$ représentant r vecteurs de $\mathbb{C}^N$ formant une base orthonormale, c'est à dire que l'on dispose de l'identification naturelle

$$Gr(r,N) = \left\{ \mathsf{R}_0 \in \mathbb{M}_{N\times r}(\mathbb{C}) : \ {}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}_0}\mathsf{R}_0 = Id \right\} // U(r) = \mu^{-1}_{U(r),Gr(r,N)}(0)/U(r)$$

où l'on a posé $\mu_{U(r),Gr(r,N)}(\mathsf{R}_0) = {}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}_0}\mathsf{R}_0 - Id$, application moment associée au produit hermitien $\langle \mathsf{X}, \mathsf{Y}\rangle = \operatorname{tr}\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{X}}\mathsf{Y}\right)$ et $\mathsf{R}_0 = \mathsf{R}({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}}\mathsf{R})^{-1/2}$. Ici, nous avons noté

$$U(r) = \{\mathsf{R}_0 \in \mathbb{M}_{r\times r}(\mathbb{C}) : \mathsf{R}_0\,{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}_0} = Id_{r\times r}\}$$

le groupe des matrices unitaires et nous désignerons par $SU(N)$ l'ensemble des matrices unitaires de $U(N)$ de déterminant 1.
Sur la Grassmannienne des r quotients de $\mathbb{C}^N$ que nous noterons $Gr(N,r)$, nous avons un fibré universel $\underline{\mathbf{U}}_{r,N}$ de rang r que l'on peut construire ainsi :

A un sous-espace linéaire $W_r \subset (\mathbb{C}^N)^\vee$ de dimension r, on associe le sous-espace linéaire

$$K_{W_r} = \bigcap_{\delta \in W_r} Ker(\delta) \subset \mathbb{C}^N$$

de codimension r, et dans ces conditions la fibre de $\underline{\mathbf{U}}_{r,N} \to Gr(N,r)$ est l'espace quotient $\mathbb{C}^N/K_{W_r}$. Cela revient à dire en fait, que nous disposons d'un morphisme surjectif

$$\mathcal{O}_{Gr(N,r)} \otimes \mathbb{C}^N \to \underline{\mathbf{U}}_{r,N}$$

Sur $Gr(r,N)$ vue en tant que variété projective, nous disposons d'une application moment relativement à l'action de $SU(N)$ et la métrique de Fubini-Study. Pour tout réel θ, l'on peut donner une linéarisation de cette action qui s'écrit pour $g = e^S$,

$$g \cdot (\mathsf{R}, \zeta) = (g\mathsf{R}, e^{\theta \operatorname{tr}(S)}\zeta).$$

L'application moment associée pour le choix $\theta = \frac{r}{N}$ est

$$\mu_{SU(N),Gr(r,N)} = \mathsf{R}\,{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}} - \frac{r}{N} Id \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$$

où $\mathfrak{su}(N)$ désigne l'algèbre de Lie de $SU(N)$ formée des matrices $N \times N$ anti-hermitiennes de trace nulle. Remarquons à ce niveau que l'application moment sur $Gr(N,r)$ est donnée par l'expression

$$\mu_{SU(N),Gr(N,r)} = -\mathsf{R}\,{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}} + \frac{r}{N} Id \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N). \tag{1.5}$$

Nous pouvons calculer l'intégrale de l'application moment $\mu_{SU(N),Gr(r,N)}$. Nous aurons besoin du lemme technique :

Lemme 1.2.8. *Un potentiel de la métrique de Fubini-Study au point* $[\mathsf{R}] \in Gr(r,N)$ *est donné par*

$$\log\det\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}\right).$$

Démonstration. L'on peut considérer R comme un point de Stieffel de la forme

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \mathsf{Z} \\ Id_{r\times r} \end{pmatrix}$$

avec $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}(p) = [z_1, ..., z_r] \in \mathbb{M}_{(N-r)\times r}(\mathbb{C})$. Il existe une application Φ antiholomorphe de $Gr(r,N)$ vers $Gr(N-r,N)$ telle que $\Phi([\mathsf{R}]) = [\mathsf{R}^{\perp}]$, c'est à dire $\Phi\left(\begin{pmatrix} \mathsf{Z} \\ Id_{r\times r} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Id_{(N-r)\times(N-r)} \\ -{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Z}} \end{pmatrix}$.

Notons $[\mathfrak{z}_1, ..., \mathfrak{z}_{N-r}] = -{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Z}}$. Dans ces conditions, comme il est remarqué dans [Mok], un potentiel de la métrique de Fubini-Study sur la Grassmanienne est donné explicitement par

$$\begin{aligned}
&\log\|(e_{N-r+1} + z_1) \wedge ... \wedge (e_N + z_r)\|^2 \\
&= \log\|(e_1 + \mathfrak{z}_1) \wedge ... \wedge (e_{N-r} + \mathfrak{z}_{N-r})\|^2 \\
&= \log\|(e_1 + \mathfrak{z}_1) \wedge ... \wedge (e_{N-r} + \mathfrak{z}_{N-r}) \wedge (e_{N-r+1} + z_1) \wedge ... \wedge (e_N + z_r)\| \\
&= \log\det\begin{pmatrix} Id_{(N-r)\times(N-r)} & \mathsf{Z} \\ -{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Z}} & Id_{r\times r} \end{pmatrix} \\
&= \log\det\left(Id_{(N-r)\times(N-r)} + \mathsf{Z}{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Z}}\right) \\
&= \log\det\left(Id_{r\times r} + {}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Z}}\mathsf{Z}\right) \\
&= \log\det\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}\right).
\end{aligned}$$

Un simple calcul montre qu'au point $\mathsf{R} \in Gr(N,r)$ nous disposons du potentiel

$$-\log\det\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}\right).$$

□

Proposition 1.2.9. *L'intégrale de l'application moment $\mu_{SU(N),Gr(r,N)}$ est*

$$\Psi_{\mu_{SU(N),Gr(r,N)}}(\mathsf{R},g)=\frac{1}{2}\log\frac{\det\left({}^t\overline{\mathsf{R}}\,{}^t\overline{g}g\mathsf{R}\right)}{\det\left({}^t\overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}\right)}$$

Démonstration. Pour toute matrice S sans trace et $g\in SL(N)$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left(\Psi_{\mu_{SU(N)}}\left(ge^{\mathsf{S}u}\right)\right)_{|u=0} &= \left\{\mathrm{tr}\left(\left({}^t\overline{\mathsf{R}}\,{}^t\overline{g}\,e^{{}^t\overline{\mathsf{S}}u}e^{\mathsf{S}u}g\mathsf{R}\right)^{-1}\left({}^t\overline{\mathsf{R}}\,{}^t\overline{g}\,e^{{}^t\overline{\mathsf{S}}u}\left(\mathsf{S}+{}^t\overline{\mathsf{S}}\right)e^{\mathsf{S}u}g\mathsf{R}\right)\right)\right\}_{|u=0}\\ &= \mathtt{tr}({}^t\overline{\mathsf{R}}^t\overline{g}\mathsf{S}g\mathsf{R})\\ &= \mathtt{tr}({}^t\overline{\mathsf{R}}^t\overline{g}\mathsf{S}g\mathsf{R})-\frac{r}{N}\mathtt{tr}\left(\mathsf{S}\right)\\ &= \langle\mu_{SU(N),Gr(r,N)}\left(g(\mathsf{R})\right),\mathsf{S}\rangle.\end{aligned}$$

Enfin, $\Psi_{\mu_{SU(N)}}(Id)=0$, ce qui permet de conclure. □

Lemmes de S.K. Donaldson

Dans [Do4], S.K. Donaldson expose des résultats très généraux sur les zéros d'application moment. En particulier, il rappelle tout d'abord que l'on dispose de l'unicité des zéros d'une application moment $\mu:\Xi\to Lie(\Gamma)^*$ dans une orbite complexe, c'est à dire que si l'on a un point p et $\zeta\in\Gamma^{\mathbb{C}}$ tels que

$$\mu(p)=\mu(\zeta p),$$

alors en fait $\zeta p\in Orb_\Gamma(p)$.

Soit z_0 un point de Ξ. Notons $(z_t)_{t>0}$ la trajectoire de z_0 le long du flot de gradient $-\overrightarrow{Grad}(||\mu||^2)$ où la norme $||.||$ est induite par un produit scalaire Γ-invariant sur $Lie(\Gamma)$ fixé a priori. Notons Ξ^{min} l'ensemble des points z de Ξ tels que leur trajectoire z_t ait une limite z_∞ dans $\mu^{-1}(0)$. La remarque de S.K. Donaldson permet alors d'identifier toutes les orbites complexes des zéros de μ avec l'ensemble Ξ^{min} ([Ki1, Theorem 7.4]).
Finalement, le travail de S.K. Donaldson peut être vu comme une approche effective de ce résultat. Pour la présenter, introduisons tout d'abord quelques notations.

En chaque point $p\in\Xi$, l'action infinitésimale de Γ fournit une application

$$\nu_p^{\Xi,\Gamma}:Lie(\Gamma)\to T_p\Xi.$$

Soit l'opérateur $\mathfrak{q}_p^\Gamma=\left(\nu_p^{\Xi,\Gamma}\right)^*\nu_p^{\Xi,\Gamma}:Lie(\Gamma)\to Lie(\Gamma)$ où $\left(\nu_p^{\Xi,\Gamma}\right)^*$ est l'adjoint de $\nu_p^{\Xi,\Gamma}$ formé en utilisant la métrique sur $Lie(\Gamma)$ et la métrique sur $T_p\Xi$. Par définition d'une application moment, on a également que :

$$\mathfrak{q}_p^\Gamma=d\mu_\Gamma\circ J_\Xi\circ\nu_p^{\Xi,\Gamma},$$

où J_Ξ est la structure complexe sur $T\Xi$. Supposons que les stabilisateurs d'un point de Ξ sous l'action de Γ soient discrets ; alors $\nu_p^{\Xi,\Gamma}$ est injective et $\mathfrak{q}_p^\Gamma$ est inversible. Dans ces conditions, posons

$$\mathbf{\Lambda}_p = |||\mathfrak{q}_p^{\Gamma^{-1}}|||,$$

la norme d'opérateur de $\mathfrak{q}_p^{\Gamma^{-1}}$ définie en utilisant la métrique fixée sur $Lie(\Gamma)$.

Pour trouver un zéro, l'idée est de choisir un point z_0 suffisamment proche de ce zéro, cette proximité requise étant contrôlée par la seule quantité $\mathbf{\Lambda}$, puis de suivre le flot $-\overrightarrow{Grad}(||\mu||^2)$, c'est dire

$$\frac{d\mu(z_t)}{dt} = -\mu(z_t) \tag{1.6}$$

où z_t est simplement donné par

$$\frac{dz_t}{dt} = -\nu_{z_t}(\mathfrak{q}_{z_t}^{\Gamma^{-1}}(\mu(z_t)).$$

La convergence vers le zéro de l'application moment est précisée dans la proposition cruciale suivante :

Proposition 1.2.10 (Donaldson). *Soit $z_0 \in \Xi$ et des nombres réels $\lambda, \delta > 0$ tels que*

1. $\lambda||\mu(z_0)|| < \delta$
2. $\mathbf{\Lambda}_z \leq \lambda$ *pour tout* $z = e^{i\mathsf{S}} \cdot z_0$ *et* $||\mathsf{S}|| \leq \delta$.

Alors il existe un zéro $z_1 = e^{i\mathsf{S}'} \cdot z_0$ de μ,

$$\mu(z_1) = 0$$

avec $||\mathsf{S}'|| \leq \lambda||\mu(z_0)||$.

Démonstration. [Do4, Proposition 17, p. 496]. □

Remarque 1.4. *Dans le cas où $\Gamma = SU(N)$, la métrique considérée sur $Lie(\Gamma)$ est la métrique euclidienne invariante $\langle \mathsf{X}, \mathsf{Y}\rangle = \mathrm{tr}\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{X}}\mathsf{Y}\right)$, et les constantes λ, δ de la proposition précédente sont indépendantes de N.*

Nous verrons en particulier que cette proposition nous permet de basculer dans le domaine de la dimension finie et d'appliquer la Théorie des Invariants Géométriques au problème que nous nous sommes fixés.

Dans le cas particulier où l'on suppose par ailleurs que Ξ est un quotient symplectique de la forme $\Xi = \Xi'//\Gamma'$ et que l'action sur de Γ sur Ξ est induite par une action de $\Gamma \times \Gamma'$ sur la variété kählérienne Ξ', l'on dispose d'un lemme technique permettant d'évaluer la quantité $\mathbf{\Lambda}$.

Lemme 1.2.11 (Donaldson).
Soient les actions infinitésimales naturelles

$$\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\Xi',\Gamma'} : Lie(\Gamma') \to T_{\widehat{z}}\Xi',$$

et

$$\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\Xi',\Gamma} : Lie(\Gamma) \to T_{\widehat{z}}\Xi',$$

induites par Γ *et* Γ' *sur* Ξ' *et soit* $z \in \Xi$ *représenté par* $\widehat{z} \in \Xi'$*. Alors pour tout* $\xi \in Lie(\Gamma')$

$$\left\langle \mathfrak{q}_z^{\Gamma'}(\xi), \xi \right\rangle = \left| \underline{\pi} \left(\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\Xi',\Gamma'}(\xi) \right) \right|^2,$$

avec $\underline{\pi} : T_{\widehat{z}}\Xi' \to T_{\widehat{z}}\Xi'$ *projection orthogonale sur* $\mathrm{Im}\left(\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\Xi',\Gamma}\right)^{\perp}$*. En particulier,*

$$\mathbf{\Lambda}_z = \left(\min_{\xi \in Lie(\Gamma')} \frac{\left| \underline{\pi} \left(\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\Xi',\Gamma'}(\xi) \right) \right|}{|\xi|} \right)^{-2}.$$

Démonstration. [Do4, Lemme 18 p. 498]. En fait, il s'agit de remarquer que par définition de la réduction symplectique, le champ de vecteurs $\nu_z^{\Xi,\Gamma'}(\xi)$ donné par l'action infinitésimale de $\xi \in Lie(\Gamma')$ est la projection de l'image de $\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\Xi,\Gamma}$ sur le complément orthogonal de l'espace tangent de l'orbite complexifiée $Orb_{\Gamma^{\mathbb{C}}}(\widehat{z})$. $\square$

Chapitre 2

Stabilité pour les filtrations holomorphes – Construction G.I.T

L'objet de cette partie est d'introduire les notions de stabilité pour une filtration holomorphe sur une variété projective. Nous suivons les idées de Gieseker-Maruyama et de la théorie de Mumford et construisons un espace de Gieseker pour lesquels les points G.I.T stables correspondent aux filtrations holomorphes stables.

2.1 Notions de stabilité

Soit M une variété projective de dimension complexe n, et soit la donnée d'une polarisation sur cette variété, c'est à dire d'un fibré L en droites ample sur M. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ cohérent sans torsion sur M, nous notons $r(\mathcal{F})$ le rang de $\mathcal{F}$ et $\deg(\mathcal{F})$ le degré de $\mathcal{F}$ par rapport à L, c'est à dire le degré du fibré déterminant de $\mathcal{F}$

$$\deg_L(\mathcal{F}) = \deg_L(\wedge^r \mathcal{F}) = \left(c_1(\mathcal{F}) \cdot L^{n-1}\right),$$

et

$$\mu(\mathcal{F}) = \mu_L(\mathcal{F}) = \frac{\deg_L(\mathcal{F})}{r(\mathcal{F})},$$

le degré normalisé de $\mathcal{F}$ par rapport à L. De plus, en notant

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M, \mathcal{F}),$$

la classe d'Euler de $\mathcal{F}$, nous introduisons le polynôme de Hilbert normalisé associé :

$$p_{\mathcal{F}}(k) = p_{\mathcal{F},L}(k) = \frac{\chi\left(\mathcal{F} \otimes L^k\right)}{r(\mathcal{F})}.$$

Pour $n \mapsto p_1(n)$ et $n \mapsto p_2(n)$ deux fonctions à valeurs entières, nous noterons

$$p_1 \prec p_2 \quad (\text{resp. } p_1 \preceq p_2),$$

si pour n assez grand, $p_1(n) < p_2(n)$ (resp. $p_1(n) \leq p_2(n)$).

Rappelons que dans le cadre des variétés projectives, nous disposons :

- de la notion de stabilité au sens de Mumford-Takemoto : $\mathcal{F}$ est dit Mumford L-stable (resp. L-semi-stable) si pour tout sous-faisceau $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ avec $0 < r(\mathcal{F}') < r(\mathcal{F})$, on a $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$ (resp. $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$). Dans le cas où le fibré holomorphe E se décompose sous la forme $E = \oplus_i E_i$ avec E_i fibrés vectoriels Mumford stables de même pente, alors E est dit Mumford polystable.
- de la notion de stabilité au sens de Gieseker-Maruyama : $\mathcal{F}$ est dit Gieseker L-stable (resp. L-semi-stable) si pour tout sous-faisceau $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ avec $0 < r(\mathcal{F}') < r(\mathcal{F})$, on a $p_{\mathcal{F}'} \prec p_{\mathcal{F}}$ (resp. $p_{\mathcal{F}'} \preceq p_{\mathcal{F}}$)). Dans le cas où le fibré holomorphe E se décompose sous la forme $E = \oplus_i E_i$ avec E_i fibrés vectoriels Gieseker stables de même polynôme de Hilbert, alors E est dit Gieseker polystable.

Remarque 2.1. *Le polynôme de Hilbert normalisé possède les mêmes propriétés de convexité que le degré normalisé. Ainsi, un fibré Gieseker stable jouit de propriétés similaires aux propriétés des fibrés Mumford stables. Par exemple, un $\mathbb{C}$-fibré E Gieseker stable est simple, c'est à dire*

$$End\,(E) = \{\lambda Id, \lambda \in \mathbb{C}\}\,.$$

En revanche, contrairement au cas de la Mumford stabilité, on notera que si E est Gieseker stable et L' est un fibré en droites quelconque, $E \otimes L'$ peut ne pas être Gieseker stable.

Définition 2.1.1. *Une filtration de faisceaux de longueur m est une suite finie de sous-faisceaux cohérents*

$$\mathscr{F} : 0 = \mathcal{F}_0 \hookrightarrow \mathcal{F}_1 \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathcal{F}_m = \mathcal{F}$$

et nous dirons que $\mathscr{F}$ est une filtration holomorphe si les faisceaux $\mathcal{F}_i$ sont de plus des sous-fibrés.

Définition 2.1.2. *Une sous-filtration de la filtration $\mathscr{F}$ est une filtration de faisceaux de longueur m*

$$\mathscr{F}' : 0 \hookrightarrow \mathcal{F}'_1 \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathcal{F}'_m = \mathcal{F}'$$

où $\mathcal{F}'$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ et telle que $\mathcal{F}'_i \subseteq \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}'$ pour $1 \leq i \leq m$. Une sous-filtration est dite propre si $r(\mathcal{F}') < r(\mathcal{F})$.

Définition 2.1.3. *Une filtration est dite simple si tout endomorphisme $f \in End(\mathcal{F})$ qui 'préserve la filtration' (c'est à dire que $f(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_i$) est multiple de l'identité.*

Définition 2.1.4. *Une filtration $\mathscr{F}$ est dite réductible si elle peut s'écrire sous la forme*

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2$$

où les $\mathscr{F}_i \neq \mathscr{F}$ sont des sous-filtrations. Dans le cas contraire, nous dirons que $\mathscr{F}$ est irréductible.

Voici la notion de stabilité pour les filtrations holomorphes qui recouvre bien sûr le cas de la Mumford stabilité pour des fibrés holomorphes :

Définition 2.1.5. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration de longueur $m+1$ et $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$ un m-uplet de nombres réels. Soit le $\boldsymbol{\tau}$-degré de $\mathscr{F}$ défini par*

$$\deg_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}) = \deg(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{m} \tau_i r(\mathcal{F}_i)$$

et la $\boldsymbol{\tau}$-pente de $\mathscr{F}$ définie par

$$\mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}) = \frac{\deg_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F})}{r(\mathcal{F})}$$

Nous dirons que la filtration $\mathscr{F}$ est $\boldsymbol{\tau}$-stable (resp. semi stable) si pour toute sous-filtration propre $\mathscr{F}' \hookrightarrow \mathscr{F}$ nous avons

$$\mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}') < \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}) \qquad (\textit{resp. } \leq)$$

Une filtration sera dite polystable si elle est somme directe de filtrations $\boldsymbol{\tau}$-stables de même pente $\mu_{\boldsymbol{\tau}}$.

Remarque 2.2. *Les filtrations stables jouissent de propriétés comparables aux fibrés stables comme par exemple l'existence d'une filtration d'Harder-Narasimhan ou le fait de rester stable lorsqu'on tensorise par un fibré en droites. La stabilité d'une filtration holomorphe n'implique pas la stabilité (au sens de Mumford) des sous-fibrés.*

Lemme 2.1.6. *Soient $\mathscr{F}^1$ et $\mathscr{F}^2$ deux filtrations de faisceaux sans torsion de même longueur, $\boldsymbol{\tau}$-stables et de même pente. Soit $\varrho : \mathscr{F}^1 \to \mathscr{F}^2$ un homomorphisme non nul tel que pour tout i, l'on ait $\varrho(\mathcal{F}_i^1) \subset \mathcal{F}_i^2$. Alors ϱ est injective. En particulier, si une filtration holomorphe est stable alors elle est simple.*

Démonstration. Si ϱ est non injective alors $\mathcal{F}^3 := \mathrm{Im}(\varrho)$ est un quotient (propre) sans torsion de $\mathcal{F}^1$ et nous obtenons $\mathscr{F}^3$ sous-filtration de $\mathscr{F}^2$ telle que

$$\mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}^3) > \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}^1) = \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}^2)$$

par la formule du produit de Whitney. Puisque $\mathscr{F}^2$ est stable et $\mathscr{F}^3 \subset \mathscr{F}^2$, l'on a donc nécessairement que $r(\mathcal{F}^3) = r(\mathcal{F}^2)$.
Maintenant, de manière générale, il est clair que pour une sous-filtration holomorphe $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ telle que $r(\mathcal{F}) = r(\mathcal{F}')$, nous avons toujours

$$\mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}') \leq \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}). \tag{2.1}$$

Ceci se voit en remarquant que si l'on a de plus $\mathcal{F}' \ncong \mathcal{F}$, alors il existe un diviseur effectif D tel que $\det(\mathcal{F}) \cong \det(\mathcal{F}' \otimes \mathcal{O}_M(D))$ et ainsi $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}') + \frac{\deg(D)}{r(\mathcal{F}')} > \mu(\mathcal{F}')$.

Dans le cas de filtrations non holomorphes (c'est à dire données par des faisceaux sans torsion), (2.1) reste vraie. Ainsi, nous obtenons une contradition : ϱ est injective.

Si $\mathscr{F}^1$ et $\mathscr{F}^2$ sont deux filtrations holomorphes, alors $\mathscr{F}^3$ est une sous-filtration holomorphe de $\mathscr{F}^2$, de même pente et $r(\mathcal{F}^3) = r(\mathcal{F}^2)$. Remarquons que pour le cas de filtrations holomorphes, le seul cas d'égalité dans (2.1) est $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$. Par conséquent, ϱ est un isomorphisme. Ainsi, si $\mathscr{F}$ est une filtration holomorphe stable, tout endomorphisme non nul ϱ de $\mathscr{F}$ tel que $\varrho(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_i$ est un isomorphisme et par le lemme de Schur, $\{\varrho \in End(\mathcal{F}) : \varrho(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_i\}$ est une algèbre à division de dimension finie et donc isomorphe à $\mathbb{C}$. □

Notation. *A une filtration holomorphe $\mathscr{F}$ de longueur $(m+1)$ et une métrique hermitienne h sur $\mathcal{F}$ correspondent pour tout $0 \leq i \leq m+1$ des projections lisses h-orthogonales sur le sous-fibré $\mathcal{F}_i$ de $\mathcal{F}$, que nous noterons*

$$\pi^{\mathscr{F}}_{h,i} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

avec la convention $\pi^{\mathscr{F}}_{h,m+1} = Id_{\mathcal{F}}$.

Le résultat principal de [AC-GP1] est l'existence d'une correspondance de type Kobayashi-Hitchin pour les filtrations holomorphes en termes de métrique de type Hermite-Einstein.

Théorème 2.1.7 (Álvarez-Cónsul & García-Prada).

Fixons ω une métrique Kähler sur la variété compacte M. Soit $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m_+$ et $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe de longueur $(m+1)$. Une filtration holomorphe $\mathscr{F}$ est $\boldsymbol{\tau}$-polystable si et seulement s'il existe une métrique hermitienne lisse h vérifiant l'équation

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \pi^{\mathscr{F}}_{h,i} = \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}) Id_{\mathcal{F}} \tag{2.2}$$

Ceci peut se réécrire sous la forme :

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h = \sum_{i=1}^{m+1} \widetilde{\tau}_i \pi^i_h(\mathscr{F}), \tag{2.3}$$

où

$$\widetilde{\tau}_i = \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}) - \sum_{j=i}^{m} \tau_j, \qquad \widetilde{\tau}_{m+1} = \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}),$$

et $\pi^i_h(\mathscr{F}) = \pi^{\mathscr{F}}_{h,i} - \pi^{\mathscr{F}}_{h,i-1}$ est la projection sur l'orthogonal (respectivement à h) du sous-fibré $\mathcal{F}_{i-1}$ de $\mathcal{F}_i$ avec la convention $\pi^1_h(\mathscr{F}) = \pi^{\mathscr{F}}_{h,1}$.

Nous dirons dans ces conditions que h est $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein. La filtration $\mathscr{F}$ sera alors dite $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein.

Remarque 2.3. *L'hypothèse de positivité des réels τ_i est essentielle dans la preuve de [AC-GP1] (Cf Section 4.1, p.39). Désormais, lorsque nous parlerons de stabilité d'une filtration de longueur $(m+1)$, ce sera toujours vis à vis d'un m-uplet de réels positifs.*

Remarque 2.4. *Bien sûr, si $\tau_1 = ... = \tau_m = 0$, l'équation (2.2) se réécrit comme l'équation classique d'Hermite-Einstein pour les fibrés Mumford polystables. Remarquons qu'en prenant la trace de (2.3), nous voyons que les paramètres $\widetilde{\tau}_i$ satisfont la relation*

$$\sum_{i=1}^{m+1} \widetilde{\tau}_i r(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}) = deg(\mathcal{F}),$$

c'est à dire que nous n'avons bien que m degrés de liberté.

Nous introduisons maintenant un analogue de la notion de Gieseker stabilité pour les filtrations holomorphes :

Définition 2.1.8. *Soit $\mathbf{R} = (R_1, .., R_m)$ une collection de m polynômes à coefficients rationnels de degrés $d_i < n$ et positifs pour k grand. La filtration holomorphe $\mathscr{F}$ de longueur $m+1$ est dite Gieseker $\mathbf{R}$-stable (resp. semi-stable) si pour k grand, l'on a pour toute sous-filtration propre $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$,*

$$\frac{\chi(\mathcal{F}' \otimes L^k) + \sum_{i=1}^m r(\mathcal{F}'_i)R_i(k)}{r(\mathcal{F}')} < \frac{\chi(\mathcal{F} \otimes L^k) + \sum_{i=1}^m r(\mathcal{F}_i)R_i(k)}{r(\mathcal{F})} \qquad (resp. \leq)$$

Proposition 2.1.9. *Si la filtration $\mathscr{F}$ est $\boldsymbol{\tau}$-Mumford stable, alors elle est aussi $\mathbf{R}$-Gieseker stable pour*

$$R_i(k) = \tau_i k^{n-1} + O(k^{n-2}).$$

Démonstration. En effet, par la formule de Riemann-Roch,

$$r(\mathcal{F}')\chi(\mathcal{F}\otimes L^k) - r(\mathcal{F})\chi(\mathcal{F}'\otimes L^k) = r(\mathcal{F}')\deg(\mathcal{F})k^{n-1} - r(\mathcal{F})\deg(\mathcal{F}')k^{n-1} + O(k^{n-2})$$

et la proposition vient en comparant les coefficients de degré $n-1$ en puissances de la variable k. □

2.2 Construction G.I.T et espace Gieseker pour les filtrations holomorphes

Inspirés des travaux de [Sc1, Sc2, H-L1, H-L2], nous présentons un cadre G.I.T pour les filtrations holomorphes au dessus d'une variété projective en introduisant un espace de Gieseker paramétrisant les filtrations holomorphes Gieseker stables. Tout d'abord, nous remarquons que les objets Gieseker semi-stables que nous considérons sont paramétrés par un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$.
Pour $\mathbf{R} = (R_1, .., R_m)$ une collection de polynômes de degrés inférieurs à n tels que $\lim_{k\to+\infty} R_i(k) = +\infty$, notons $\mathscr{P}_{\mathbf{R},\mathscr{F}}(k) = \chi(\mathcal{F} \otimes L^k) + \sum_{i=1}^m r(\mathcal{F}_i)R_i(k)$ le $\mathbf{R}$-polynôme de Hibert de la filtration $\mathscr{F}$.

Proposition 2.2.1. *L'ensemble des classes d'isomorphie des filtrations Gieseker semi-stables de faisceaux cohérents sans torsion avec $\mathbf{R}$-polynôme de Hilbert fixé est bornée.*

Démonstration. En considérant le terme d'ordre k^n de $\mathscr{P}_{\mathbf{R},\mathcal{F}}(k)$ et en utilisant d'un autre côté la condition de semi-stabilité, on obtient que les pentes $\mu(\mathcal{F}_i)$ sont toutes bornées. Dès lors, on peut utiliser le théorème de bornitude obtenu dans [Ma, Section 3]. $\square$

Fixons $\mathbf{R}$ une collection de $(m-1)$ polynômes comme précédemment et considérons $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe de longueur m en notant $r_i = r(\mathcal{F}_i)$ avec $r_0 = 0$ et $r = r(\mathcal{F})$ ainsi que $\mathfrak{p}$ le $\mathbf{R}$-polynôme de Hibert de $\mathscr{F}$. Le théorème de plongement de Kodaira assure qu'il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, les fibrés $\mathcal{F}_i \otimes L^k$ sont globalement engendrés et les groupes de cohomologie de dimension supérieures de $\mathcal{F}_i \otimes L^k$ sont triviaux, c'est à dire que

$$H^j(M, \mathcal{F}_i \otimes L^k) = 0, \qquad \forall j \geq 1.$$

Pour un tel k, considérons un espace vectoriel V isomorphe à $H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$, et soit (v_i) une base de V. Il existe un shéma Quot quasi-projectif $\mathfrak{Q}'$ paramétrisant les classes d'équivalence de quotients $\{q : V \otimes L^{-k} \to \mathfrak{F}\}$ où $\mathfrak{F}$ est une filtration de faisceaux cohérents sans torsion de longueur m avec $\mathbf{R}$-polynôme de Hibert égal à $\mathfrak{p}$ et $H^0(q \otimes id_{L^k})$ est un isomorphisme. Ainsi nous avons des quotients universels $\tilde{q}_i : V \otimes \pi_M^*(L^{-k}) \to \tilde{\mathfrak{F}}_i$ au-dessus de $\mathfrak{Q} \times M$ où $\mathfrak{Q}$ est désigne l'union des composantes de $\mathfrak{Q}'$ qui contiennent des éléments $\mathbf{R}$-semi-stables. Les fibrés en droites $\det(\tilde{\mathfrak{F}}_i)$ induisent des morphismes $\upsilon_i : \mathfrak{Q} \to Pic(M)$ et nous notons $\mathfrak{A}_i$ l'union finie des composantes de $Pic(M)$ dont un élément est dans l'image de υ_i. La dernière proposition nous dit que cette construction est indépendante du choix de k et nous pouvons supposer que k_0 est suffisamment grand pour que pour tout $[\mathcal{L}] \in \mathfrak{A}_i$, $\mathcal{L} \otimes L^{(r-r_i)k}$ est globalement engendré et sans cohomologie de dimension supérieure. Fixons un fibré en droites de Poincaré $\tilde{\mathcal{L}}$ sur $Pic(M) \times M$ et notons $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{A}_i}$ sa restriction à $\mathfrak{A}_i \times M$. De nouveau, par la dernière proposition, nous pouvons supposer que $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{A}_i} \otimes \pi_M^* L^{(r-r_i)k}$ est globalement engendré et sans cohomologie de dimension supérieure pour $k \geq k_0$. Introduisons l'espace Gieseker généralisé

$$\mathfrak{G} = \prod_{i=0}^{m-1} \mathbb{P}\left(Hom\left(\wedge^{r-r_i} V \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{A}_i}, (\pi_{\mathfrak{A}_i})_*(\tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{A}_i} \otimes \pi_M^* L^{(r-r_i)k})\right)^{\vee}\right).$$

Le morphisme $(\pi_{\mathfrak{Q}})_*(\wedge^{r-r_i}(\tilde{q}_i \otimes id_{\pi_M^* L^k}) : \wedge^{r-r_i} V \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{Q}} \to (\pi_{\mathfrak{Q}})_*(\det(\tilde{\mathfrak{F}}_i) \otimes \pi_M^* L^{(r-r_i)k})$ induit un homomorphisme injectif et $SL(V)$-equivariant

$$Gies : \mathfrak{Q} \to \mathfrak{G}.$$

De plus, il existe un morphisme $SL(V)$-invariant de l'espace Gieseker $\mathfrak{G}$ vers $\prod_i \mathfrak{A}_i$ dont les fibres sont fermées et des sous-schémas $SL(V)$-invariants ; c'est à dire qu'au dessus du point $(\mathcal{L}_1, .., \mathcal{L}_m) \in \prod_i \mathfrak{A}_i$, nous avons l'espace

$$\widetilde{\mathfrak{G}}_{(\mathcal{L}_1,..,\mathcal{L}_m)} = \prod_i \mathbb{P}\left(Hom\left(\wedge^{r-r_i} V, H^0(\mathcal{L}_i \otimes L^{(r-r_i)k})\right)^{\vee}\right).$$

Nous cherchons maintenant à déterminer les points (semi-)stables de cet espace. Notons π_j la surjection naturelle de $\mathcal{F}$ sur le quotient $\mathcal{F}\otimes L^k/\mathcal{F}_j\otimes L^k$. A la filtration holomorphe $\mathscr{F}$, nous associons par les morphismes suivants d'évaluation,

$$T_i \quad : \quad (v_{j_1}\wedge ... \wedge v_{j_{r-r_i}}) \mapsto \left(p\mapsto \pi_i ev_p(v_{j_1})\wedge ... \wedge \pi_i ev_p(v_{j_{r-r_i}})\right),$$

un point de l'espace

$$\widetilde{\mathfrak{G}}_k = \prod_{i=0}^{m-1} \mathbb{P}Hom\left(\wedge^{r-r_i}V, H^0\left(M, \det(\mathcal{F}\otimes L^k/\mathcal{F}_i\otimes L^k)\right)\right).$$

Nous disposons d'une action de $SL(V)$ par

$$g\star(T_0,...,T_m) = \left(T_0\circ\wedge^r g^{-1},...,T_m\circ \wedge^{r-r_m}g^{-1}\right),$$

et l'on peut considérer pour un choix de paramètres $\varepsilon_i>0$ la G.I.T stabilité d'un point de $\widetilde{\mathfrak{P}_k}$ relativement à une $SL(V)$-linéarisation du fibré très ample $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{G}}_k}(\varepsilon_0,...,\varepsilon_m)$.

Soit $\underline{\lambda}:G_t\to SL(V)$ un sous-groupe à 1-paramètre et v_i une base de V telle que G_t agisse sur V par $\underline{\lambda}$ avec les poids $\gamma_i\in\mathbb{Z}$, c'est à dire que l'on ait pour tout $t\in G_t$

$$\underline{\lambda}(t)\cdot v_i = t^{\gamma_i}v_i.$$

Bien sûr, on peut supposer également que $\gamma_i\leq\gamma_{i+1}$ et $\sum_i\gamma_i=0$. Pour tout multi-indice $I=(i_1,...,i_{r-r_j})$ de longueur $|I|=r-r_j$ avec $1\leq i_1<...<i_{r-r_j}\leq \dim(V)$, soit $v_I:=v_{i_1}\wedge...\wedge v_{i_{r-r_j}}$ et $\gamma_I=\gamma_{i_1}+...+\gamma_{i_{r-r_j}}$. Le groupe $SL(V)$ agit sur $\bigwedge^{r-r_j}V$ avec poids γ_I relativement à la base v_I. Notons le morphisme $T_i:\wedge^{r-r_i}V\to H^0\left(\det(\mathcal{F}\otimes L^k/\mathcal{F}_i\otimes L^k)\right)$ induit par l'évaluation. Le Critère 1.1.9 d'Hilbert-Mumford assure qu'un point de $\widetilde{\mathfrak{G}_k}$ est G.I.T-(semi-)stable relativement à la linéarisation que nous nous sommes fixés et à l'action de $SL(V)$ si et seulement si, pour tout sous-groupe à un paramètre,

$$\sum_{j=0}^m \varepsilon_j \min_{\{I:|I|=r-r_j\}}\{\gamma_I : T_j(v_I)\neq 0\}<0 \qquad (\text{resp. } \leq).$$

Remarquons que le théorème de Riemann-Roch permet d'exprimer la dimension de l'espace vectoriel V :

$$\begin{aligned}\dim(V)=&\chi(\mathcal{F}\otimes L^k) &&= \int_M Ch(\mathcal{F}\otimes L^k)Todd(M)\\ & &&= rk^n\int_M\frac{c_1(L)^n}{n!}+k^{n-1}\int_M\left(\frac{r}{2}c_1(M)+c_1(\mathcal{F})\right)\frac{c_1(L)^{n-1}}{(n-1)!}+...\end{aligned}$$

Considérons à présent le cas où V' un sous espace vectoriel de V et l'action du sous-groupe à un paramètre associé est donnée par

$$\lambda(t)=\begin{pmatrix} t^{-\mathrm{codim}(V')} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & t^{\dim(V')}\end{pmatrix},$$

avec $\gamma_1 = ... = \gamma_{\dim(V')} = -\mathrm{codim}(V')$ et $\gamma_{\dim(V')+1} = ... = \gamma_{\dim(V)} = \dim(V')$. Via le morphisme $V \otimes \mathcal{O}_M \to \mathcal{F} \otimes L^k$ obtenu pour k suffisamment grand, nous obtenons une filtration holomorphe

$$\begin{aligned} 0 \subsetneq \quad & \mathcal{F}_{(V')} \subset \mathcal{F}_{(V)} = \mathcal{F} \\ & \mathcal{F}_{(V'),i} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_{(V')} \end{aligned}$$

et dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \min_{\{I:|I|=r-r_j\}} \{\gamma_I : T_j(v_I) \neq 0\} = & \dim(V') \left(r(\mathcal{F}) - r(\mathcal{F}_i) - \left(r(\mathcal{F}_{(V')}) - r(\mathcal{F}_{(V'),i})\right)\right) \\ & -\mathrm{codim}(V') \left(r(\mathcal{F}_{(V')}) - r(\mathcal{F}_{(V'),i})\right) \\ = & \dim(V') \left(r(\mathcal{F}) - r(\mathcal{F}_i)\right) - \dim(V) \left(r(\mathcal{F}_{(V')}) - r(\mathcal{F}_{(V'),i})\right) \end{aligned}$$

Nous venons ainsi de montrer que si le point de $\widetilde{\mathfrak{G}_k}$, défini par la filtration $\mathscr{F}$, est G.I.T (semi-)stable alors nous avons

$$\varepsilon \left(\dim(V')r(\mathcal{F}) - \dim(V)r(\mathcal{F}_{(V')})\right) + \sum_i \varepsilon_i \left(\dim(V)r(\mathcal{F}_{(V'),i}) - \dim(V')r(\mathcal{F}_i)\right) < 0,$$

où nous avons posé

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i.$$

En fait, nous avons également une réciproque de ce résultat :

Lemme 2.2.2. *Le point de $\widetilde{\mathfrak{G}_k}$ défini par la filtration $\mathcal{F}$ est G.I.T (semi-) stable si et seulement si pour tout sous espace $V' \subset V$,*

$$\varepsilon \left(\dim(V')r(\mathcal{F}) - \dim(V)r(\mathcal{F}_{(V')})\right) + \sum_i \varepsilon_i \left(\dim(V)r(\mathcal{F}_{(V'),i}) - \dim(V')r(\mathcal{F}_i)\right) < 0$$

où $\mathscr{F}_{(V')}$ est la filtration holomorphe engendrée par $V' \otimes \mathcal{O}_M$ et $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{(V')}$ est sans torsion.

Démonstration. Soit $(v_1, ..., v_{\dim(V)})$ une base de V. Si l'on note $\mathcal{F}_{(i)} = \mathcal{F}_{\langle v_1,...,v_i\rangle}$, nous obtenons une filtration

$$\mathcal{F}_{(0)} \subset ... \subset \mathcal{F}_{\dim(V)} = \mathcal{F}$$

et l'on a $\mathcal{F}_{(i)} = \mathcal{F}_{(i-1)}$ ou bien $r(\mathcal{F}_{(i)}) > r(\mathcal{F}_{(i-1)})$. Par conséquent il existe r entiers compris entre 1 et $\dim(V)$ marquant les sauts de rangs. Notons les $(k_1, .., k_r)$. Dans ces conditions, par le [H-L1, Lemme 1.23], si l'on considère l'action associée aux (v_i, γ_i), $\min_I\{\gamma_I : T_0(v_I) \neq 0\} = \gamma_{k_1} + ... + \gamma_{k_r}$. De la même manière, il existe $r - r_j$ entiers compris entre 1 et $\dim(V)$ marquant les sauts de rangs pour $\mathcal{F} \otimes L^k/\mathcal{F}_{(i),j} \otimes L^k$. Notons les $(k_1^j, .., k_{r-r_j}^j)$. Ainsi, nous obtenons

$$\min_I \{\gamma_I : T_j(v_I) \neq 0\} = \gamma_{k_1^j} + ... + \gamma_{k_{r-r_j}^j}.$$

Appliquer le critère d'Hilbert-Mumford pour vérifier la G.I.T (semi-) stabilité du point de $\widetilde{\mathfrak{G}}_k$ revient à considérer l'ensemble de tous les vecteurs à poids γ_i. Ceux-ci sont bien sûr engendrés par les vecteurs à poids suivants :

$$\gamma^{(i)} = (\underbrace{i - \dim(V), \ldots, i - \dim(V)}_{i}, \underbrace{i, \ldots, i}_{\dim(V)-i})$$

pour $i = 1, ..., \dim(V)$. Tout vecteur à poids $\gamma = \left(\gamma_1, ..., \gamma_{\dim(V)}\right)$ peut en effet être exprimé sous la forme $\gamma = \sum_{i=1}^{\dim(V)} c_i \gamma^{(i)}$ avec des coefficients rationnels positifs $c_i = \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{\dim(V)}$. Appliquons le critère d'Hilbert-Mumford à $\gamma^{(i)}$; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mu^{(i)} &:= \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j \min_{\{I : |I| = r - r_j\}} \{\gamma_I : T_j(v_I) \neq 0\} \\ &= -\dim(V) \left(\sum_j \varepsilon_j \max_l \{k_l^j \leq i\} \right) + i \left(\sum_j (r - r_j) \varepsilon_j \right). \end{aligned}$$

Si i croit, $\mu^{(i)}$ décroît sauf pour k_j ou un k_j^l. Il convient donc d'évaluer $\mu^{(i)}$ aux valeurs $k_j - 1$ ou $k_j^l - 1$. Ce qui revient finalement à ce que

$$\mu^{(i)} = -\dim(V) \sum_l \varepsilon_l (j^l - 1) + \sum_l \varepsilon_l (r - r_l)(k_j^l - 1)$$

Finalement, nous pouvons oublier le choix de la base v_i et nous obtenons que le point de $\widetilde{\mathfrak{G}}_k$ est G.I.T stable (resp. semi-stable) si et seulement si

$$\varepsilon \dim(V') r(\mathcal{F}) - \dim(V') \sum_i \varepsilon_i r(\mathcal{F}_i) < \varepsilon \dim(V) r(\mathcal{F}_{(V')}) - \dim(V) \sum_i \varepsilon_i r(\mathcal{F}_{(V'),i}) \quad (\text{resp. } \leq)$$

pour tout sous-espace $0 \neq V' \subset V$, avec $r\left(\mathcal{F}_{(V')}\right) \leq r(\mathcal{F})$. $\square$

La condition de G.I.T stabilité peut être retranscrite sur les sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ au lieu des sous-espaces de V ([H-L1, Lemme 1.26]) :

$$\dim(V \cap H^0(\mathcal{F}' \otimes L^k)) \left(\varepsilon r(\mathcal{F}) - \textstyle\sum_i \varepsilon_i r(\mathcal{F}_i)\right) < \dim(V) \left(\varepsilon r(\mathcal{F}') - \textstyle\sum_i \varepsilon_i r\left(\mathcal{F}_{V \cap H^0(\mathcal{F}' \otimes L^k), i}\right)\right) \quad (\text{resp. } \leq)$$

pour toute filtration holomorphe propre $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.

En effet, si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, soit $V' = H^0(\mathcal{F}' \otimes L^k) \cap V$. Alors pour le morphisme $q : V \otimes \mathcal{O}_M \to \mathcal{F} \otimes L^k$, $q(V' \otimes \mathcal{O}_M) \subset \mathcal{F}' \otimes L^k$ et $r(\mathcal{F}') = r(\mathcal{F}_{(V')})$. Réciproquement, si l'on se donne $V' \subset V$, alors soit $\mathcal{F}' = q(V' \otimes \mathcal{O}_M)$. Alors $V' \subset V \cap H^0(\mathcal{F}' \otimes L^k)$ et $r(\mathcal{F}_{(V')}) = r(\mathcal{F}')$.

Maintenant, il est clair que la condition de Gieseker stabilité pour la filtration holomorphe $\mathcal{F}$ implique la condition précédente en choisissant $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon_i = \frac{R_i(k)}{k^n}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{R_i(k)}{k^n} > 0 \\ \varepsilon_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i(k)}{k^n} > 0 \end{aligned}$$

pour

$$R_i(k) = \tau_i k^{n-1} > 0.$$

Finalement nous avons prouvé le

Théorème 1. *Soit* $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_m)$ *une collection de* m *polynômes à coefficients rationnels de degrés* $d_i < n$ *et positifs pour* k *grand. La filtration holomorphe* $\mathscr{F}$ *de longueur* $m+1$ *est* $\mathbf{R}$*-stable (resp. semi-stable) si pour* k *grand, le point associé de* $\widetilde{\mathfrak{G}_k}$ *est G.I.T stable (resp. semi-stable) respectivement à la polarisation* $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{G}_k}}(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_m)$ *et l'action de* $SL(V)$ *où l'on a fixé*

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i(k)}{k^n}, \\ \varepsilon_i &= \frac{R_i(k)}{k^n} \qquad (1 \leq i \leq m). \end{aligned}$$

Chapitre 3

G.I.T stabilité et métriques équilibrées

Dans ce chapitre, nous appliquons le critère de Kempf-Ness aux espaces de Gieseker que nous venons de construire pour les filtrations holomorphes. Ceci revient à transposer la condition de G.I.T stabilité en une condition d'existence d'une certaine suite de métriques sur l'espace de dimension finie $H^0(\mathcal{F} \otimes L^k)$, qui sont en fait des points critiques de certaines fonctionnelles de type Kempf-Ness et que nous nommerons métriques équilibrées. Cette notion d'équilibre pour des applications a été conceptualisée par S.K. Donaldson dans [Do3]. Supposons que l'on se donne les objets suivants : une application holomorphe $f : \Xi \to W$ où (Ξ, ω) est Kähler compacte et W espace vectoriel de dimension finie plongé par π^W en tant qu'orbite co-adjointe dans $Lie(G)^*$ où G est linéaire réductif. Alors, le centre de masse de f dans $Lie(G)^*$ est donné par

$$\int_{Lie(G)^*} \pi^W_* \left(f_* \left(\frac{\omega^n}{n!} \right) \right).$$

Dans ces conditions, f est dite équilibrée si l'orbite de f sous l'action de $Lie(G)^*$ contient un centre de masse nul. Clairement cela revient à demander que l'application moment définie par intégration sur $C^\infty(\Xi, W)$ respectivement à l'action de G admette un zéro dans l'orbite complexe de f.

Par ailleurs, dans toute la suite, nous faisons les conventions suivantes : M désignera une variété projective lisse de dimension complexe n, et L un fibré holomorphe en droites ample sur M équipé d'une métrique hermitienne lisse h_L telle que la courbure $c_1(L, h_L)$ soit une métrique de Kähler que nous noterons ω, c'est à dire

$$\omega = -\frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log (h_L)$$

Notation. *Soit $dV = \frac{\omega^n}{n!}$ la forme volume correspondante à ω.*

Notation. *Nous désignerons par $Met(\Upsilon)$ les métriques hermitiennes lisses pour l'espace vectoriel ou le fibré Υ. Soit F un fibré hermitien. A une métrique $h \in Met(F)$ sur le fibré F, et une forme Kähler ω_0, nous ferons correspondre les métriques hilbertiennes L^2 sur $H^0(M,F)$ et respectivement sur $H^0(M, F\otimes L^k)$*

$$\begin{aligned} Hilb_{\omega_0}(h) &= \int_M \langle .,. \rangle_h \frac{\omega_0^n}{n!} \in Met(H^0(M,F)), \\ Hilb_{k,\omega_0}(h) &= \int_M \langle .,. \rangle_{h\otimes h_{L^k}} \frac{\omega_0^n}{n!} \in Met(H^0(M,F\otimes L^k)). \end{aligned}$$

Nous aurons également besoin dans ce chapitre du fait suivant :

Définition 3.0.3. *Si V_1 et V_2 sont deux espaces vectoriels de dimension finie N_1, N_2 munis de métriques h_1, h_2, et $T : V_1 \to V_2$ est une application linéaire, alors la norme d'Hilbert-Schmidt $||T||_{h_1,h_2}$ peut être calculée en choisissant une base orthonormée $(v_i^1)_{i=1..N_1}$ de V_1 :*

$$||T||^2_{h_1,h_2} = \sum_{i=1}^{N_1} |T(v_i^1)|^2_{h_2},$$

et l'on prouve que le résultat est indépendant du choix de la base.

3.1 Filtrations holomorphes équilibrées

Considérons toujours la filtration holomorphe $\mathscr{F}$ de longueur $m+1$ avec $r_i = r(\mathcal{F}_i)$ pour $i = 0, ..., m$ et $r = r(\mathcal{F})$ ainsi que l'isomorphisme $i : V \to H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$. Nous noterons de plus $N := h^0\left(M, \mathcal{F} \otimes L^k\right)$ et π_i les surjections naturelles sur $\mathcal{F} \otimes L^k / \mathcal{F}_i \otimes L^k$.

Considérons $\widetilde{\mathbf{Z}}_{\mathbf{ss}} \subset \widetilde{\mathfrak{G}_k}$ le schéma ouvert des points G.I.T semi-stables vis à de la linéarisation $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{G}_k}}(\varepsilon_0, .., \varepsilon_m)$ relativement à l'action de $SL(V)$ où l'on a fixé les constantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i(k)}{k^n} \\ \varepsilon_i &= \frac{R_i(k)}{k^n} \qquad (1 \leq i \leq m) \end{aligned}$$

Fixons H une métrique sur l'espace vectoriel $H^0(\mathcal{F} \otimes L^k) = i(V)$. Nous disposons de la métrique quotient h sur le fibré hermitien $\mathcal{F} \otimes L^k$ induite par $V \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes L^k$ et donc d'une métrique $||.||$ sur $\Lambda^{r-r_i}(\mathcal{F} \otimes L^k / \mathcal{F}_i \otimes L^k)$. Par l'isomorphisme i, nous obtenons une métrique $h_{\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}}$ sur l'espace $Hom(\wedge^{r-r_i} V, H^0(\det(\mathcal{F} \otimes L^k / \mathcal{F}_i \otimes L^k)))$ où $i(V)$ est ici considéré équipé de la métrique Hilbertienne L^2 provenant de h. Nous noterons pour $0 \leq i \leq m$,

$$\mathbf{P}_i \;\; := \;\; Hom\left(\wedge^{r-r_i} V, H^0(\det(\mathcal{F} \otimes L^k / \mathcal{F}_i \otimes L^k))\right).$$

Au-dessus de $\widetilde{\mathfrak{G}_k} = \mathbb{P}\mathbf{P}_0 \times ... \times \mathbb{P}\mathbf{P}_m$, nous considérons la linéarisation $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{G}_k}}(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_m)$ ainsi que $|||.,.|||_{\widetilde{\mathbf{G}_k}} := h_{\mathbf{P}_0}^{\varepsilon_0} \times ... \times h_{\mathbf{P}_m}^{\varepsilon_m}$ la métrique correspondante. Soit le point $\mathbf{z} \in \widetilde{\mathbf{Z}}_{\mathbf{ss}}$. Pour un relèvement $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{G}_k}}(-\varepsilon_0, ..., -\varepsilon_m)_{\mathbf{z}}$, nous pouvons évaluer la métrique $|||.,.|||_{\widetilde{\mathfrak{G}_k}}$:

$$\begin{aligned} |||\tilde{\mathbf{z}}|||^2_{\widetilde{\mathfrak{G}_k}} \;\; := \;\; & C(i) \left(\int_M \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq N} \|s_{i_1}(p) \wedge ... \wedge s_{i_r}(p)\|^2 \, dV(p) \right)^{\varepsilon_0} \\ & \times \prod_{j=1}^{m} \left(\int_M \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_{r-r_j} \leq N} \left\| \pi_j s_{i_1}(p) \wedge ... \wedge \pi_j s_{i_{r-r_j}}(p) \right\|^2 dV(p) \right)^{\varepsilon_j} \end{aligned}$$

où $(s_i)_{i=1,..,N}$ est une base quelconque H-orthonormée de $H^0\left(M, \mathcal{F} \otimes L^k\right)$, $C(i) > 0$ est une constante ne dépendant que de l'isomorphisme i.

Remarque 3.1. *En fait notre construction ne dépendra pas du choix de la métrique sur les fibrés déterminants.*

Définition 3.1.1. *Soit la fonctionnelle définie pour une filtration holomorphe $\mathscr{F}$ et pour $g \in SL(V)$:*

$$\begin{aligned}\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}(g) = &\varepsilon_0 \log \int_M \frac{\sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_r \leq N} \|g\cdot s_{i_1} \wedge \ldots \wedge g\cdot s_{i_r}\|^2 dV}{\sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_r \leq N} \|s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_r}\|^2} dV \\ &+ \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \log \int_M \frac{\sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_{r-r_j} \leq N} \left\|\pi_j(g\cdot s_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \pi_j(g\cdot s_{i_{r-r_j}})\right\|^2}{\sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_{r-r_j} \leq N} \left\|\pi_j s_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_j s_{i_{r-r_j}}\right\|^2} dV\end{aligned}$$

Nous pouvons résumer notre situation par le lemme suivant :

Lemme 3.1.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *la filtration holomorphe $\mathscr{F}$ est $\mathbf{R}$-Gieseker polystable pour $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_m)$ collection de polynômes rationnels de degré $n-1$.*
- *Il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, les fonctionnelles $\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}$: $SL(V) \to \mathbb{R}$ admettent un minimum strictement positif où l'on a imposé*

$$\varepsilon_i = \frac{R_i(k)}{k^n}, \qquad \varepsilon_0 = 1 - \sum_{i=1}^m \frac{R_i(k)}{k^n}$$

pour tout $i = 1, ..., m$.

En particulier, nous avons que si la filtration holomorphe $\mathscr{F}$ est $\boldsymbol{\tau}$-Mumford stable alors il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, les fonctionnelles $\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}$ admettent un minimum strictement positif et sont propres, où l'on a imposé $\varepsilon_0 = 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\tau_i}{k}$ et $\varepsilon_i = \frac{\tau_i}{k}$.

Notons aussi que nous pouvons voir $\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}$ comme une fonctionnelle sur l'espace $Met(V) \times SL(V)$, c'est à dire sur un espace de dimension finie. Nous allons voir que nous pouvons associer à cette fonctionnelle $\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}$ une autre fonctionelle, cette fois-ci sur l'espace de dimension infinie $Met(\mathcal{F}) \times SL(V)$ et que ces deux fonctionelles ont un comportement similaire dans un sens que nous préciserons.

3.2 Log-propreté et fonctionnelle de type Kempf-Ness

Pour k suffisamment grand, nous disposons d'un plongement défini par les sections s_i de $H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$:

$$i_{k,0} : \begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & Gr(N, r) \\ p & \mapsto & \ker\left(ev_p : V \to \mathcal{F} \otimes L^k|_p\right)^\vee, \end{array} \tag{3.1}$$

où $Gr(N,r)$ paramétrise la Grassmanienne des quotients de dimension r de $\mathbb{C}^N$. Ainsi, nous obtenons le diagramme cartésien suivant,

$$\begin{array}{ccc} [V \otimes \mathcal{O}_M \to \mathcal{F} \otimes L^k \to 0] & \to & [V \to \underline{\mathbf{U}}_{r,N} \to 0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & Gr(N,r) \end{array}$$

De la même manière, nous disposons d'un plongement de M dans la grassmanienne des $r - r_j$ quotients par :

$$i_{k,j} : \begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & Gr\left(N, r - r_j\right) \\ p & \mapsto & \ker\left(\pi_j \circ ev_p : V \to \mathcal{F} \otimes L^k / \mathcal{F}_j \otimes L^k|_p\right)^\vee . \end{array}$$

Soient $\underline{\mathbf{U}}_{N,r}$ le fibré universel sur la Grassmanienne des r-quotients de $Gr(N,r)$ et $\pi_{Gr,i} : \prod_i Gr(N, r-r_i) \to Gr(N, r-r_i)$ ainsi que $\pi_{Gr} : Gr(N,r) \times \prod_i Gr(N, r-r_i) \to Gr(N,r)$ les projections naturelles. Nous relevons les métriques de Fubini-Study sur chacune des Grassmaniennes $Gr(N, r - r_i)$ avec poids ε_i. Ceci induit une métrique symplectique sur $C^\infty\left(M, \prod_{i=0}^m Gr(N, r - r_i)\right)$:

$$\Omega_{(i_{k,*})}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sum_{i=0}^{m} \int_M \varepsilon_i \pi^*_{Gr,i} \omega_{FS}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) dV,$$

pour tout $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in C^\infty\Big(M, (i_{k,0}, ..., i_{k,m})^* T(\prod_{j=0} Gr(N, r - r_j))\Big)$.

L'application moment associée à cette métrique pour l'action de $SU(N)$ sur $C^\infty\left(M, \prod_i Gr(N, r - r_i)\right)$ est

$$\begin{aligned} \mu_{\mathscr{F},k}(i_{k,*}) &= \int_M \sum_j \varepsilon_j \mathsf{Q}_j {}^{\mathbf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j} dV(p) - V \frac{\sum_j (r - r_j)\varepsilon_j}{N} Id \\ &= \int_M (\varepsilon_0 + \sum_j \varepsilon_j) \mathsf{Q}_0 {}^{\mathbf{t}}\overline{\mathsf{Q}_0} dV(p) - \int_M \sum_j \varepsilon_j \left(\mathsf{Q}_0 {}^{\mathbf{t}}\overline{\mathsf{Q}_0} - \mathsf{Q}_j {}^{\mathbf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j}\right) dV(p) \\ &\quad -V \frac{r - \sum_j r_j \varepsilon_j}{N} Id \end{aligned}$$

où $[\mathsf{Q}_j]$ (resp. $[\mathsf{Q}_0]$) représente un point de $Gr(N, r - r_j)$ (resp. $Gr(N,r)$) c'est à dire que $\mathsf{Q}_j : \mathcal{F} \otimes L^k / \mathcal{F}_j \otimes L^k_{|p} \to V$ (resp. $\mathsf{Q}_0 : \mathcal{F} \otimes L^k_{|p} \to V$) est une isométrie respectivement à h et H, et représente la matrice de l'endomorphisme $\pi_j \circ ev_p$ (resp. ev_p) exprimée dans une base orthonormale de $\ker(\pi_j \circ ev_p)^\perp$ (resp. $\ker(ev_p)^\perp$) et dans une base orthonormale de V. Soit $\mathbf{U}_{r,N} = \pi^*_{Gr} \underline{\mathbf{U}}_{N,r}$. Du fait que $\mathcal{F} \otimes L^k \simeq j_k^* \mathbf{U}_{r,N}$ où $j_k : M \hookrightarrow \prod_i Gr(N, r - r_i)$ est induite par les $i_{k,l}$ et les π_i, nous obtenons une nouvelle métrique hermitienne lisse sur $\mathcal{F} \otimes L^k$ associée à la métrique H sur $H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$.

Définition 3.2.1. *Soit $FS_k = FS_k(H) \in Met(\mathcal{F} \otimes L^k)$ la métrique hermitienne lisse sur $\mathcal{F} \otimes L^k$ qui admet pour expression*

$$\langle ., . \rangle_{FS_k} = \left\langle \frac{N}{Vr - V\sum_{j=1}^m \varepsilon_j r_j} \left(Id_{\mathcal{F}} - \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \pi_{h,j}^{\mathscr{F}} \right) ., . \right\rangle_h$$

où h est la métrique quotient induite par H.

Remarque 3.2. *Cette définition fait sens puisque nous avons imposé que $\varepsilon_j = \frac{R_j(k)}{k^n}$ et qu'ainsi nous avons pour k suffisamment grand, $0 < \sum_{j=1}^m \varepsilon_j < 1$.*

Définition 3.2.2. *Soit la fonctionnelle définie sur $SL(V)$:*

$$\begin{aligned} \widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}(g) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_M \log \left(\frac{\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le N} \|g \cdot s_{i_1} \wedge \ldots \wedge g \cdot s_{i_r}\|^2}{\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le N} \|s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_r}\|^2} \right) dV \\ &+ \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{2} \int_M \log \frac{\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{r-r_j} \le N} \left\| \pi_j(g \cdot s_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \pi_j(g \cdot s_{i_{r-r_j}}) \right\|^2}{\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{r-r_j} \le N} \left\| \pi_j s_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_j s_{i_{r-r_j}} \right\|^2} dV \end{aligned}$$

où $(s_i)_{i=1,..,N}$ est une base quelconque H-orthonormée de $H^0\left(M, \mathcal{F} \otimes L^k\right)$.

Lemme 3.2.3. *$\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}$ est l'intégrale de l'application moment $\mu_{\mathscr{F},k}$.*

Démonstration. Il s'agit uniquement de voir que pour toute matrice sans trace S,

$$\frac{d}{du} \left(\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}} \left(g e^{\mathsf{S} u} \right) \right)_{|u=0} = \mu_{\mathscr{F},k}(g) \in SL(N).$$

Soit $[\mathsf{Q}_0(p)]$ représentant le point de la Grassmanienne $Gr(N, r)$ donné par le plongement défini par (3.1), en $p \in M$. Quitte à modifier $\mathsf{Q}_0(p)$ en une matrice unitaire (i.e en considérant à la place $\mathsf{Q}_0 \left({}^t\overline{\mathsf{Q}_0} \mathsf{Q}_0 \right)^{-1/2}$) représentant le même point dans la Grassmanienne, nous obtenons d'après la section 1.2.2 que

$$\int_M \log \left(\frac{\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le N} \|g \cdot s_{i_1} \wedge \ldots \wedge g \cdot s_{i_r}\|^2}{\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le N} \|s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_r}\|^2} \right) dV = \int_M \log \det \left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_0} {}^{\mathsf{t}}\overline{g} g \mathsf{Q}_0 \right) dV$$

où ${}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_0(p)} \mathsf{Q}_0(p) = Id_{r \times r}$.
Pour un repère holomorphe local $(e_i)_{i=1..r}$ de $\mathcal{F} \otimes L^k$ (pour la métrique de référence h et au voisinage du point p) et ϵ une section canonique de L de norme 1 pour h_L, nous pouvons ainsi écrire au voisinage de p pour s_i base orthonormée respectivement à la métrique H,

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} = \mathsf{Q}_0 \begin{pmatrix} e_1 \otimes \epsilon^k \\ \vdots \\ e_r \otimes \epsilon^k \end{pmatrix}.$$

De la même manière, soit $[\mathsf{Q}_i]$ le point de $Gr(N, r-r_i)$ induit par $\pi_i \circ ev_p$. Dès lors,

$$\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}(g) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j \int_M \log \frac{\det\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j}\,{}^{\mathsf{t}}\overline{g} g \mathsf{Q}_j\right)}{\det\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j}\mathsf{Q}_j\right)} dV\right)$$

Ainsi, il vient que pour toute matrice S sans trace et $g \in SU(N)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left(\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}\left(e^{\mathsf{S}u}\right)\right)_{|u=0} &= \left\{\sum_{j=0}^{m} \frac{\varepsilon_j}{2} \int_M \operatorname{tr}\left(\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j}\, e^{{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{S}}u} e^{\mathsf{S}u} \mathsf{Q}_j\right)^{-1}\left({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j} e^{{}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{S}}u}\left(\mathsf{S} + {}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{S}}\right) e^{\mathsf{S}u} \mathsf{Q}_j\right)\right) dV\right\}_{|u=0} \\ &= \sum_j \varepsilon_j \int_M \mathtt{tr}({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j}\mathsf{S}\mathsf{Q}_j) \\ &= \sum_j \varepsilon_j \int_M \mathtt{tr}({}^{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{Q}_j}\,{}^{\mathsf{t}}\mathsf{S}\mathsf{Q}_j) - \sum_j \varepsilon_j \frac{r-r_j}{N} \int_M \mathtt{tr}\,(\mathsf{S}) \\ &= \langle \mu_{\mathscr{F},k}\left(\mathsf{Q}_0, ..., \mathsf{Q}_m\right), \mathsf{S}\rangle.\end{aligned}$$

Enfin, $\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}(Id) = 0$, ce qui permet de conclure. □

3.3 Métriques équilibrées pour les filtrations holomorphes

Nous allons voir que la deux fonctionnelles $\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}$ et $\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}$ sont propres simultanément. Nous déduirons de ce fait crucial que la condition de Gieseker stabilité pour les filtrations holomorphes $\mathscr{F}$ peut être retranscrite sur la métrique sur $\mathcal{F}$.

Nous aurons besoin d'un résultat de la théorie du potentiel [T1, Proposition 2.2] :

Théorème 2. *Soit $Ka(M,\omega) = \{\varphi \in C^\infty(M,\mathbb{R}) : \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi > 0\}$. Il existe des constantes $\alpha(M), C(M,\omega',\omega) > 0$ tel que pour tout $\varphi \in Ka(M,\omega')$, l'on ait :*

$$\int_M e^{-\alpha_M(\varphi - \sup_M \varphi)}\left(\frac{\omega^n}{n!}\right) \leq C.$$

Lemme 3.3.1. *La fonctionnelle $\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}$ est log-propre au sens de la Définition 1.2.5 respectivement à la métrique $\frac{1}{\sqrt{C(i)}}|||.|||_{\mathbf{Z}}$, c'est à dire qu'il existe des constantes γ_1, γ_2 telles que que nous ayons pour tout $g \in SL(N)$,*

$$\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}(g) \geq \gamma_1 \widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}(g) - \gamma_2.$$

Démonstration. Posons pour s_i une base de $H^0(\mathcal{F} \otimes L^k)$, au point p,

$$\begin{aligned}\varphi_0(p) &= \log \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq N} \left\|g \cdot s_{i_1}(p) \wedge ... \wedge g \cdot s_{i_r}(p)\right\|^2, \\ \varphi_j(p) &= \log \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_{r-r_j} \leq N} \left\|\pi_j(g \cdot s_{i_1}(p)) \wedge ... \wedge \pi_j(g \cdot s_{i_{r-r_j}}(p))\right\|^2.\end{aligned}$$

La fonction φ_0 (resp. φ_j) est dans le cône Kähler $Ka(M, c_1(\det(\mathcal{F}\otimes L^k)))$ (resp. $Ka(M, c_1(\det(\mathcal{F}\otimes L^k/\mathcal{F}_j\otimes L^k)))$), ainsi le Théorème 2 nous assure qu'il existe deux constantes réelles $\alpha_M>0$ et $C>1$ telles que

$$\int_M e^{-\alpha_M\left(\varphi_j-\sup_M \varphi_j\right)}\frac{\omega^n}{n!}<C$$

ce qui implique que

$$\log\left(\int_M e^{-\alpha_M\left(\varphi_j-\sup_M \varphi_j\right)}\frac{\omega^n}{n!}\right)<C',$$

puis par concavité du log, que

$$\begin{aligned}\int_M \varphi_j dV &\geq \int_M\left(\sup_M \varphi_j\right)dV-\frac{1}{\beta(M,k,\omega)}\\ &\geq V\log\left(\sup_{p\in M}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{r-r_j}\leq N}\left\|\pi_j(g\cdot s_{i_1}(p))\wedge\ldots\wedge\pi_j(g\cdot s_{i_{r-r_j}}(p))\right\|^2\right)\\ &\quad -\frac{1}{\beta(M,k,\omega)}.\end{aligned}$$

En fait, par simple concavité du log, nous avons aussi l'inégalité

$$\log\int_M\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{r-r_j}\leq N}\left\|\pi_j(g\cdot s_{i_1}(p))\wedge\ldots\wedge\pi_j(g\cdot s_{i_{r-r_j}}(p))\right\|^2 dV(p)\geq\int_M\varphi_j dV$$

Maintenant, en faisant la somme des inégalités précédentes pour tout j, il vient qu'il existe des constantes γ_i telles que pour tout $g\in SL(N)$,

$$\gamma_3\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}(g)-\gamma_4(k,\mathscr{F},L,dV)\geq\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}(g)\geq\gamma_1\widetilde{F_{k,\mathscr{F}}}(g)-\gamma_2(k,\mathscr{F},L,dV).$$

□

Définition 3.3.2 (Métriques équilibrées).

- *Si la métrique $H\in Met(H^0(M,\mathcal{F}\otimes L^k))$ vérifie $\mu_{\mathscr{F},k}(\mathbf{p})=0$ où le point $\mathbf{p}=(i_{k,0},..,i_{k,m})\in C^\infty\left(M,\prod_i Gr(N,r-r_i)\right)$ est induit par H, alors nous dirons que la filtration holomorphe $\mathscr{F}$ est k-équilibrée et que H est k-équilibrée. Si $H\in Met(H^0(M,\mathcal{F}\otimes L^k))$ est k-équilibrée, la métrique $h\in Met(\mathcal{F}\otimes L^k)$ donnée par $h=FS_k(H)$ est dite k-équilibrée.*
- *Nous dirons que la filtration $\mathscr{F}$ est équilibrée s'il existe un entier k_0 tel que pour tout $k\geq k_0$, $\mathscr{F}$ est k-équilibrée.*

Comme les sections $s_i\in H^0(M,\mathcal{F}\otimes L^k)$ sont aussi des sections coordonnées du fibré universel, il vient que la métrique hermitienne $H\in Met(H^0(M,\mathcal{F}\otimes L^k))$ est équilibrée si et seulement si elle est un point fixe de l'application $Hilb_\omega\circ FS_k$. De la même manière, $h\in Met(\mathcal{F}\otimes L^k)$ est k-équilibrée si et seulement si elle est un point fixe de l'application $FS_k\circ Hilb_\omega$.

Proposition 3.3.3. *La filtration $\mathscr{F}$ est k-équilibrée si et seulement si l'application* $(FS_k \circ Hilb_\omega, Hilb_\omega \circ FS_k) : Met(\mathcal{F} \otimes L^k) \times Met(H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)) \to Met(\mathcal{F} \otimes L^k) \times Met(H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k))$ *admet un point fixe* $(h, Hilb_\omega(h))$.

La condition d'équilibre pour une filtration holomorphe $\mathscr{F}$ peut être retranscrite en terme de noyau de Bergman du fibré $\mathcal{F}$. Nous précisons ce que nous entendons par 'noyau de Bergman' dans la définition suivante :

Définition 3.3.4. *Le noyau de Bergman d'un fibré globalement engendré (F, h_F) est un endomorphisme de fibré associé à la projection L^2 orthonormale de l'espace de sections $L^2(M, F)$ vers l'espace des sections holomorphes $H^0(M, F)$,*

$$\widehat{\mathsf{B}}_{F,h_F} := \sum_i S_i \langle ., S_i \rangle_{h_F} \in End(F) \tag{3.2}$$

où S_i est une base quelconque de $H^0(M, F)$, orthonormale pour la norme L^2 induite par h_F. Il est facile de voir qu'en fait le noyau de Bergman ne dépend que de la métrique h_F fixée sur F et non du choix de la base.

Le résultat suivant nous permettra dans la suite de considérer la condition d'équilibre sur l'espace de dimension infinie $Met(\mathcal{F})$, comme un zéro d'une application moment relativement à l'action du groupe de Jauge du fibré $\mathcal{F}$.

Lemme 3.3.5. *La filtration holomorphe $\mathscr{F}$ de longueur $m+1$ est équilibrée si et seulement s'il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, il existe une métrique hermitienne h_k équilibrée sur $\mathcal{F} \otimes L^k$ telle que l'on ait*

$$\widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F} \otimes L^k, h_k} + \epsilon_k \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{j,h_k} = \frac{N + \epsilon_k \sum_{j=1}^m \varepsilon_j r_j}{rV} Id_{\mathcal{F} \otimes L^k} \tag{3.3}$$

où $\epsilon_k = \frac{\chi(\mathcal{F} \otimes L^k)}{Vr - V\sum_{j>0} \varepsilon_j r_j}$.

Démonstration. Supposons que H soit une métrique équilibrée sur $H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$ et s_i une base orthonormée de l'espace $H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$ pour H. Soit $h = h_H$ la métrique quotient sur $\mathcal{F} \otimes L^k$ induite par $V \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes L^k$ et $FS_k(H)$ la métrique sur $\mathcal{F} \otimes L^k$ construite comme ci-dessus. Rappelons à ce stade que le noyau de Bergman est indépendant du choix d'une base orthonormée. Nous choisissons maintenant une base H-orthonormée de sections de $H^0(\mathcal{F} \otimes L^k)$ de la manière suivante : soit $s_1, ..., s_{r_1}$ orthogonales au noyau de $(\pi^{\mathscr{F}}_{1,h} \circ ev_p)$ de H-norme 1, puis $s_{r_1+1}, ..., s_{r_2} \in \ker(\pi^{\mathscr{F}}_{1,h} \circ ev_p)$ orthogonales au noyau de $(\pi^{\mathscr{F}}_{2,h} \circ ev_p)$, et ainsi de suite jusqu'aux sections $s_{r_m+1}, ..., s_r \in \ker(\pi^{\mathscr{F}}_{m,h} \circ ev_p)$ orthogonales au noyau de $(\pi^{\mathscr{F}}_{m+1,h} \circ ev_p)$. Enfin, nous imposons $s_i(p) = 0$ pour $i > r$. Introduisons de plus les ensembles $\mathscr{I}_j = \{r_{j-1}+1, ..., r_j\}$ et la fonction $f : i \mapsto j$ où j est tel que $i \in \mathscr{I}_j$.
Comme nous avons,

$$\langle ., . \rangle_{FS_k} = \left\langle \frac{N}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j} \left(Id - \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{j,h} \right) ., . \right\rangle_h \tag{3.4}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
|s_i(p)|_h &= \frac{N}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j}, \\
|s_i(p)|_{FS_k} &= \frac{N}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j} - \frac{N}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j}\varepsilon_{f(i)}
\end{aligned}$$

Remarquons que le terme $\frac{s_i \otimes s_i^{*FS_k}}{|s_i|^2_{FS_k}}$ est le projecteur orthogonal sur l'image de s_i respectivement à la métrique FS_k (ainsi que h). Nous avons donc en $p \in M$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} s_i \langle ., s_i \rangle_{FS_k} &= \sum_{i=1}^{N} s_i \langle ., s_i \rangle_h + \sum_i \left(s_i \langle ., s_i \rangle_{FS_k} - s_i \langle ., s_i \rangle_h \right) \\
&= Cst \times Id - \sum_i \left(\frac{s_i \otimes s_i^{*FS_k}}{|s_i|^2_{FS_k}} \frac{N}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j} \varepsilon_{f(i)} \right) \qquad (3.5) \\
&= Cst \times Id - \frac{N}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j} \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{j,h_k} \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le fait que pour la métrique quotient le noyau de Bergman est constant, puisqu'il peut être vu comme l'endomorphisme identité du fibré universel sur la Grassmanienne. Ceci implique clairement l'existence d'une métrique $h_k = FS_k$ sur le fibré $\mathcal{F} \otimes L^k$ vérifiant (3.3).

Réciproquement, si (3.3) est vérifiée, comme les s_i sont des sections coordonnées du fibré universel, nous obtenons qu'elles sont également $Hilb_\omega(FS_k)$-orthonormales, c'est à dire qu'elles sont orthonormales pour

$$\int_M \left\langle \frac{N}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j} \left(Id - \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{j,h} \right) ., . \right\rangle_h dV$$

et donc $Hilb_\omega(FS_k)$ est une métrique sur $H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$ qui est un zéro de l'application moment $\mu_{\mathscr{F},k}$.

□

Théorème 3. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration au dessus d'une variété projective. Alors $\mathscr{F}$ est* **R**-*Gieseker stable si et seulement si son groupe d'automorphisme est fini et pour tout k assez grand, il existe une métrique h_k telle que*

$$\widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F}\otimes L^k, h_k} + \epsilon_k \sum_{j>0} \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{j,h_k} = \frac{N + \epsilon_k \sum_{j>0} \varepsilon_j r_j}{rV} Id_{\mathcal{F}\otimes L^k}$$

où

$$\epsilon_k = \frac{\chi(\mathcal{F} \otimes L^k)}{Vr - V\sum_{j>0} \varepsilon_j r_j}.$$

Nous dirons dans ces conditions que la filtration holomorphe $\mathscr{F}$ est fortement équilibrée.

Démonstration. On sait déjà que les zéros de l'application moment $\mu_{\mathscr{F},k}$ sont les points critiques de la fonctionnelle $\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}$. Pour appliquer le critère de stabilité de Kempf-Ness, il suffit de voir que $\widetilde{KN_{k,\mathscr{F}}}$ est linéairement log-propre au sens de la Définition 1.2.5 ce qui est clair par le Lemme 3.3.1. Maintenant nous pouvons conclure via le Lemme 3.3.5. $\square$

Chapitre 4

Métriques $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein et filtrations holomorphes

Dans ce chapitre, nous considérons maintenant l'équation d'Hermite-Einstein pour une filtration holomorphe $\mathscr{F}$ de longueur $(m+1)$:

$$\sqrt{-1}\Lambda F_{h_{\mathcal{F}}} + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} = \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}) Id \tag{4.1}$$

sur une variété projective lisse M de dimension complexe n. Ici $F_{h_{\mathcal{F}}}$ désigne la courbure de Chern de la métrique hermitienne $h_{\mathcal{F}}$ sur le fibré holomorphe $\mathcal{F}$ et $\pi_{h,i}^{\mathscr{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ la projection sur le sous-fibré $\mathcal{F}_i$ de $\mathcal{F}$. Le but de ce chapitre est de donner une approximation de la métrique solution de l'équation (4.1) en termes des métriques équilibrées de la G.I.T que nous venons de construire au chapitre précédent. Ici, nous utilisons de manière cruciale la condition sur le noyau de Bergman que nous voyons comme une application moment pour le groupe de Jauge ainsi que le développement asymptotique du noyau de Bergman de $\mathcal{F} \otimes L^k$ lorsque $k \to \infty$:

Théorème 4.0.6 (Catlin-Lu-Zelditch-Wang). *Soit (M, ω) une variété projective et (L, h_L) un fibré ample sur M tel que ω représente la courbure de L. Soit $(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$ un fibré vectoriel holomorphe hermitien. Pour tout entier $\alpha \geq 0$, nous disposons du développement asymptotique lorsque $k \to +\infty$ du noyau de Bergman généralisé $\widehat{\mathsf{B}}_{h_{\mathcal{F}} \otimes h_{L^k}}$*

$$\left\| \widehat{\mathsf{B}}_{h_{\mathcal{F}} \otimes h_{L^k}} - k^n Id_{r\times r} - \left(\frac{1}{2} Scal(g) Id_{r\times r} + \sqrt{-1}\Lambda F_{h_{\mathcal{F}}} \right) k^{n-1} \right\|_{C^\alpha} \leq C_\alpha k^{n-2} \tag{4.2}$$

où $Scal\,(g)$ est la courbure scalaire de la métrique g associée à la forme Kähler

$$\omega = \frac{i}{2} \sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge dz^{\bar{j}}.$$

Cette estimation est uniforme sur M pour $h_{\mathcal{F}}$ et h_L variant dans un compact pour la topologie C^α.

Démonstration. La démonstration de ce résultat repose sur la technique de résolution du $\bar{\partial}$ et les estimées L^2 d'Hörmander-Demailly. Le résultat étant local, la principale difficulté est de choisir un bon repère de coordonnées en un point et de construire en suivant la méthode de G. Tian [T2] des sections "peak" holomorphes dont on connaisse le comportement en ce point [Lu, W2]. Notons que l'existence d'un développement asymptotique du noyau de Bergman en des termes qui dépendent algébriquement de $h_{\mathcal{F}}, h_L$ et de leurs dérivées covariantes a été établi dans [Ze, Ca]. □

Nous commencerons cette partie par introduire des notions nécessaires et faire une remarque sur les limites de métriques équilibrées lorsqu'on connait leur existence, en montrant qu'elles sont presque $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein. L'objet principal de cette partie technique est l'étude du flot de gradient associé à l'application moment dont les zéros correspondent aux métriques équilibrées pour la filtration holomorphe $\mathscr{F}$, en particulier lorsque l'on sait qu'il existe a priori une métrique $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein pour $\mathscr{F}$.

4.1 Action du groupe de Jauge

Soit $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ l'espace des connexions C^∞ sur le fibré vectoriel $\mathcal{F}$. D'après le théorème d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg, se donner une structure holomorphe sur le $\mathbb{C}^r$-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ (sur une variété complexe) est équivalent à l'existence d'un opérateur $\overline{\partial}$

$$\overline{\partial} : \Omega^0(\mathcal{F}) \to \Omega^{0,1}(\mathcal{F})$$

avec $\overline{\partial}(f.s) = \overline{\partial} f.s + f.\overline{\partial} s$ et $\overline{\partial}^2 = 0$. Une connexion A est dite compatible avec une structure holomorphe si la partie $(0,1)$ de la dérivée covariante $\nabla_A = \partial_A + \overline{\partial}_A$ de A est justement l'opérateur $\overline{\partial}$. Nous noterons $\mathcal{A}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$ l'ensemble des connexions lisses compatibles avec la métrique hermitienne $h_{\mathcal{F}}$ (i.e unitaire au sens où $dh_{\mathcal{F}}(x,y) = h_{\mathcal{F}}(\nabla_A x, y) + h_{\mathcal{F}}(x, \nabla_A y)$). Toute connexion sur le fibré holomorphe $\mathcal{F}$ intégrable c'est à dire dans le sous-ensemble :

$$\mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) = \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) : F_A^{0,2} = F_A^{2,0} = 0\}$$

où $F_A \in \Omega^2(M, End(\mathcal{F}))$ désigne la coubure de la connexion, définit une structure holomorphe sur $\mathcal{F}$. Il est bien connu qu'un fibré holomorphe muni d'une métrique hermitienne admet une unique connexion compatible avec la structure holomorphe (i.e intégrable) et la structure hermitienne $h_{\mathcal{F}}$, dite connexion de Chern [L-T1, Proposition 1.1.19], c'est à dire qu'il existe un isomorphisme $A^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \tilde{\to} \mathcal{C}(\mathcal{F})$ [A-B, Section 8] où l'on a posé

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) = \{\nabla^{0,1} : \mathcal{F} \to \Omega^{0,1}(\mathcal{F}) \text{ telles que } \left(\nabla^{0,1}\right)^2 = 0 \text{ et } \nabla^{0,1}(f.s) = \overline{\partial} f.s + f.\overline{\partial} s\}.$$

$\mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$ est par ailleurs une sous-variété (qui peut admettre des singularités) de dimension infinie de l'espace symplectique $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ qui peut être muni de la structure symplectique (Cf. [A-B, p.587] ou [Do1]) :

$$\Omega(A,B) = \int_M Tr(A \wedge B) \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}$$

pour $A, B \in \Omega^1(End(\mathcal{F}))$. On désigne par $\mathcal{G}$ le groupe de Jauge de $\mathcal{F}$, c'est à dire le groupe des automorphismes unitaires de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{G} = \{U \in C^\infty(GL(\mathcal{F})) : {}^{\mathsf{t}}\overline{U}U = I\}.$$

Introduisons maintenant les fonctionnelles de Bott-Chern suivantes :

$$R_1(.,.) : \begin{array}{l} Met(E) \times Met(E) \to \Omega^{0,0}(M) / \left(\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\overline{\partial}\right) \\ (h,k) \mapsto \log\left(\det\left(hk^{-1}\right)\right) \end{array}$$

donnée par l'application 1-linéaire 'trace' sur $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$, ainsi que

$$R_2(.,.) : Met(E) \times Met(E) \to \Omega^{1,1}(M) / \left(\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\overline{\partial}\right)$$

donnée par l'application 2-linéaire $(X,Y) \mapsto -\operatorname{tr}(XY)$ sur $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ associée à la forme de Killing :

$$-i\partial\overline{\partial}R_2(h,k) = \operatorname{tr}\left(F_k^2\right) - \operatorname{tr}\left(F_h^2\right).$$

Retenons que pour R_2 nous avons, si $(h_t)_{t\in[0,1]}$ désigne une famille lisse à un paramètre de $Met(E)$,

$$\frac{d}{dt}R_2(h_t, h_0) = 2\sqrt{-1}\left(\operatorname{tr}\left((\partial_t h_t)\, h_t^{-1} \cdot F_{h_t}\right)\right).$$

Dans ces conditions, nous avons une fonctionnelle de Donaldson modifiée dont l'équation d'Euler-Lagrange est l'équation $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein :

$$\mathcal{M}_D(h,k) = R_2(h,k) + 2\int_M \sum_{i=1}^m \tau_i R_1(h_i, k_i) dV$$

où h_i, k_i sont les métriques induites par h, k sur les sous-fibrés $\mathcal{F}_i$. En particulier, pour un endomorphisme hermitien $\mathsf{S} \in L_p^2(End(E))$ de trace nulle,

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{M}_D(h, he^{t\mathsf{S}}) = 2\int_M \|\overline{\partial}\mathsf{S}\|^2_{he^{t\mathsf{S}}} dV + 2\int_M \sum_i \tau_i \|\pi^{\mathscr{F}}_{h,i}(\mathsf{S})\|^2_{he^{t\mathsf{S}}} dV \geq 0$$

si l'on a supposé que $\tau_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., m$.
Le groupe de Jauge complexifié c'est à dire l'espace des sections lisses des automorphismes $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = C^\infty(GL(\mathcal{F}))$ agit à droite sur $\mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$ par

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_{g(A)} &= g^{-1} \circ \overline{\partial}_A \circ g \\ \partial_{g(A)} &= {}^{\mathsf{t}}\overline{g} \circ \partial_A \circ \left({}^{\mathsf{t}}\overline{g}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $A \in \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$, $g \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ et ∂_A est la partie $(1,0)$ de la dérivée covariante construite naturellement à partir de A. En particulier, l'action de $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ est holomorphe sur $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ qui admet une structure complexe. $\mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$ hérite donc d'une structure complexe pour laquelle Ω est une métrique Kähler.
Deux structures holomorphes sont isomorphes si et seulement si elles appartiennent à la même orbite sous $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$. Le groupe complexifié $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie $Lie(\mathcal{G}^{\mathbb{C}})$ s'identifie à l'espace des sections de $End(\mathcal{F})$ sur M et par intégration au sens des distributions, l'espace dual $Lie(\mathcal{G}^{\mathbb{C}})^*$ à l'espace des (n,n)-formes à coefficients distributions de $End(\mathcal{F})$. Notons aussi que le centre de $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ peut être vu comme l'espaces des zéro formes sur M.

4.2 Limite d'une suite de métriques équilibrées

Dans cette section, qui est indépendante des sections suivantes, nous étudions la limite d'une suite de métriques équilibrées lorsqu'on suppose que cette limite existe a priori. En particulier, nous la relions avec la solution de l'équation d'Hermite-Einstein pour une filtration holomorphe.

Définition 4.2.1. *Soit (M, ω) une variété complexe et soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe. Une métrique hermitienne h sur $\mathcal{F}$ est dite faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein si la courbure F_h de la connexion de Chern associée à $h \in Met(\mathcal{F})$ satisfait l'équation*

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h + \sum_i \tau_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} = \lambda_h Id_{\mathcal{F}}, \tag{4.4}$$

où λ_h est une fonction à valeurs réelles.

Proposition 4.2.2. *Supposons que (M, ω) est de plus compacte. Si h est faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein alors il existe une fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ unique à une constante près, telle que la nouvelle métrique $e^f \cdot h$ est $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein avec pour paramètre $\lambda = \frac{1}{V}\int_M \lambda_h dV$ dans l'équation (4.4).*

Démonstration. En effet, avec ce changement conforme, il vient

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{e^f \cdot h} = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_h + \sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\overline{\partial}(f) Id$$

et

$$\pi_{e^f \cdot h, i}^{\mathscr{F}} = \pi_{h,i}^{\mathscr{F}}$$

Maintenant, par la théorie des opérateurs elliptiques (Cf [L-T1, Cor 7.2.9]), l'on peut trouver sur M compact une fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\overline{\partial}(f) = \lambda_h - \frac{1}{V}\int_M \lambda_h dV.$$

$\square$

Notation. *A une suite de métriques équilibrées* $h_k \in Met(\mathcal{F}\otimes L^k)$ *pour une filtration holomorphe* $\mathscr{F}$*, nous associons la suite de métriques* $\boldsymbol{h}_k = h_k \otimes h_L^{-k} \in Met(\mathcal{F})$ *que nous qualifierons encore d'équilibrées.*

Théorème 4. *Supposons que la filtration holomorphe* $\mathscr{F}$ *est équilibrée. Si la suite des métriques équilibrées* $\boldsymbol{h}_k$ *de* $\mathcal{F}$ *admet une limite* h_∞ *en norme* C^2 *quand* $k \to \infty$*, alors la métrique* h_∞ *est une métrique faiblement* $\boldsymbol{\tau}$*-Hermite-Einstein sur le fibré* $\mathcal{F}$ *vérifiant*

$$\sqrt{-1}\Lambda F_{h_\infty} + \sum_i \tau_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} = \left(\mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}\left(\int_M c_1(M)\,\omega^{n-1} - Scal(g)\right)\right) Id_{\mathcal{F}}. \quad (4.5)$$

et quitte à faire une renormalisation conforme, cette métrique est une métrique $\boldsymbol{\tau}$*-Hermite-Einstein.*

Démonstration. En effet, parce que $\boldsymbol{h}_k$ est bornée en norme C^0, nous avons un développement asymptotique du noyau de Bergman de $\mathcal{F}$:

$$\left\|\widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F}\otimes L^k, \boldsymbol{h}_k \otimes h_L^k} - k^n Id_{r\times r} - \left(\frac{1}{2} Scal(g) Id_{r\times r} + \sqrt{-1}\Lambda F_{\boldsymbol{h}_k}\right) k^{n-1}\right\|_{C^0} = O(k^{n-2}),$$

et de plus h_k est équilibrée, donc $\widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F}\otimes L^k, h_k} + \epsilon_k \sum_i \varepsilon_i \pi_{h_k,i}^{\mathscr{F}} = \frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k) + \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j r_j}{rV} Id$. On obtient ainsi en rassemblant les termes d'ordre k^{n-1},

$$\left\| \begin{array}{c} \left(\mu(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}\int_M c_1(M)\,\omega^{n-1}\right) Id_{\mathcal{F}} - \sum_i \tau_i \pi_{\boldsymbol{h}_k,i}^{\mathscr{F}} + \frac{\int_M \mathrm{tr}\left(\sum_i \tau_i \pi_{\boldsymbol{h}_k,i}^{\mathscr{F}}\right)}{rV} Id \\ - \left(\frac{1}{2} Scal(g) Id_{\mathcal{F}} + \sqrt{-1}\Lambda F_{\boldsymbol{h}_k}\right) \end{array} \right\|_{C^0} = O(1/k),$$

et donc par passage à la limite, que la métrique est faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein. On conclut avec la proposition précédente. □

4.3 Construction de métriques “presque” équilibrées

Dans cette section, nous considérons qu'il existe une métrique faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein h_∞ pour la filtration irréductible $\mathscr{F}$. Par ailleurs, nous noterons dans toute la suite,

$$\epsilon_k = \frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k)}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j}.$$

Nous allons voir que nous disposons, par perturbations singulières de la métrique faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein, d'une métrique presque équilibrée, comme le précise la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. *Soit une filtration irréductible $\mathscr{F}$ telle qu'il existe h_∞ une métrique faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein sur $\mathcal{F}$ vérifiant l'identité (4.5). Alors, il existe une famille d'endomorphismes hermitiens $(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in C^\infty(End(\mathcal{F}))$ telle que les métriques définies sur $\mathcal{F}$ pour $q \geq 1$ par*

$$\langle .,. \rangle_{h_{k,q}} := \left\langle \left(Id + \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{k^i}\boldsymbol{\eta}_i \right) .,. \right\rangle_{h_\infty} \otimes h_{L^k},$$

soient hermitiennes lisses pour k assez grand et il existe une constante $C_{q,\alpha}$ telle que :

$$\widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F}\otimes L^k, h_{k,q}} + \epsilon_k \sum_i \varepsilon_i \pi^{\mathscr{F}}_{h_{k,q},i} = \frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k) + \epsilon_k \sum_i \varepsilon_i r_i}{rV} Id + \boldsymbol{\sigma}_q(k), \qquad (4.6)$$

où $\|\boldsymbol{\sigma}_q(k)\|_{C^{\alpha+2}} \leq C_{q,\alpha} k^{n-q-1}$. Les métriques $h_{k,q}$ seront dites dans ces conditions "presque équilibrées". Ici $C_{q,\alpha}$ est une constante ne dépendant que de q, α, h_∞ et ω.

Démonstration. Tout d'abord, nous savons que sous ces hypothèses, $\mathscr{F}$ est simple. Par le Théorème 4.0.6, nous disposons du développement asymptotique en puissances de k :

$$\widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F}\otimes L^k, h_\infty \otimes h_{L^k}} = k^n Id + \mathsf{a}_1(h_\infty)k^{n-1} + ... + \mathsf{a}_q(h_\infty)k^{n-q} + \mathbf{O}(k^{n-q-1}),$$

et les a_i sont des polynômes des tenseurs de courbure de h_∞ et h_L et de ses dérivées, et le terme d'erreur est uniformément borné en norme C^α pour $\langle .,. \rangle_{h_\infty \otimes h_L^k}$ dans une famille bornée en norme $C^{\alpha'}$ (où α' dépend de α). Retenons à ce stade que nous avons $\mathsf{a}_1(h_\infty) = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{h_\infty}$.

Ainsi, $\mathsf{a}_i(h_\infty(1+\boldsymbol{\eta})) = \mathsf{a}_i(h_\infty) + \sum_{l=1}^q \mathsf{a}_{i,l}(\boldsymbol{\eta}) + O(\|\boldsymbol{\eta}\|^{q+1}_{C^s})$ avec s suffisamment grand dépendant de α et de q. Pour tout $(\boldsymbol{\eta}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in C^\infty(End(\mathcal{F}))$, nous pouvons écrire

$$\mathsf{a}_i\left(h_\infty \left(1 + \sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{\eta}_j k^{-j} \right)\right) = \mathsf{a}_i(h_\infty) + \sum_{l=1}^{q} \mathsf{b}_{i,l}k^{-l} + \mathbf{O}(k^{-q-1}),$$

où les $\mathsf{b}_{i,l}$ sont des expressions multilinéaires en $\boldsymbol{\eta}_j$ et de leurs dérivées covariantes, commençant par

$$\mathsf{b}_{i,1} = \mathsf{a}_{i,1}(\boldsymbol{\eta}).$$

Remarquons que si l'on pose $\mathsf{a}_i = \mathsf{a}_i(h_\infty)$, l'on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F}\otimes L^k, h_{k,q}} &= \sum_{p=0}^{q} k^{n-p}\mathsf{a}_p + \sum_{i,l=1}^{r} \mathsf{b}_{i,l}k^{n-i-l} + \mathbf{O}(k^{n-q-1}), \\ &= k^n + \mathsf{a}_1 k^{n-1} + (\mathsf{a}_2 + \mathsf{b}_{1,1})\, k^{n-2} \\ &\quad + k^{n-3}(\mathsf{a}_3 + \mathsf{b}_{1,2} + \mathsf{b}_{2,1}) + ... + \mathbf{O}(k^{n-q-1}), \end{aligned} \qquad (4.7)$$

et l'on choisit inductivement les $\boldsymbol{\eta}_j$ de manière à ce que les coefficients apparaissant devant k^{n-j} $(j < q)$ soient constants, c'est à dire que le membre de droite de (4.7) est exactement (jusqu'à l'ordre k^{n-q-1})

$$\frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k)+\epsilon_k\sum_i \varepsilon_i r_i}{rV} Id - \epsilon_k \sum_i \varepsilon_i \pi^{\mathscr{F}}_{h_{k,q},i}$$

Posons les développements asymptotiques (en la variable k) suivants :

$$\begin{aligned}\frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k)+\epsilon_k\sum_i \varepsilon_i r_i}{rV} Id &= \mathsf{c}_0 k^n + \mathsf{c}_1 k^{n-1} + \ldots \\ \epsilon_k \frac{1}{k} &= d_1 k^{n-1} + d_2 k^{n-2} + \ldots\end{aligned}$$

Par le Lemme 6.1.2, il vient aussi le développement

$$\begin{aligned}\sum_j \tau_j \pi^{\mathcal{F}}_{h_{k,q},j} &= \sum_j \tau_j \pi^{\mathcal{F}}_{h_\infty,j} + \frac{1}{k}\left(\Pi^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}_{h_\infty}(\boldsymbol{\eta}_1)\right) + \ldots \\ &= \mathsf{e}_1 + k^{-1}\mathsf{e}_2 + \ldots\end{aligned}$$

où nous avons en fait substitué $\epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathcal{F}}_{h_{k,q},j}$ par $\frac{\epsilon_k}{k}\sum_j \tau_j \pi^{\mathcal{F}}_{h_{k,q},j}$. En particulier, nous avons $d_1 = 1$ puisque $\epsilon_k = \frac{\chi(E\otimes L^k)}{Vr - V\sum_j \varepsilon_j r_j}$.
D'un autre côté, nous savons que si F_H désigne la courbure de la métrique H, alors $F_{H(1+\varepsilon)} = F_H + \overline{\partial}\partial\varepsilon + O\left(||\varepsilon||^2\right)$, et donc

$$\mathsf{b}_{1,1} = \sqrt{-1}\Lambda\left(\overline{\partial}\partial\boldsymbol{\eta}_1\right)$$

et de plus, quand k est suffisamment grand,

$$\begin{aligned}e_1 &= \sum_j \tau_j \pi^{\mathcal{F}}_{h_\infty,j} \\ e_2 &= \sum_j \tau_j \pi^{\mathcal{F}}_{h_\infty,j}(\boldsymbol{\eta}_1)(Id - \pi^{\mathcal{F}}_{h_\infty,j})\end{aligned}$$

Ainsi nous cherchons à résoudre pour obtenir $\boldsymbol{\eta}_1$:

$$\mathsf{b}_{1,1} + d_1\mathsf{e}_2 = \mathsf{c}_2 - \mathsf{a}_2 - d_2\mathsf{e}_1.$$

Cependant l'opérateur $Q : u \mapsto \sqrt{-1}\Lambda\overline{\partial}\partial u + d_1\Pi^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}_h(u)$ est elliptique d'ordre 2. Nous pouvons appliquer le Lemme 6.2.2 en remarquant que $\int_M \mathrm{tr}(\mathsf{c}_2 - \mathsf{a}_2 - d_2\mathsf{e}_1) = 0$ et que l'endomorphisme $(\mathsf{c}_2 - \mathsf{a}_2 - d_2\mathsf{e}_1)$ préserve la filtration (il suffit de remarquer que localement, nous pouvons construire une base (s_i) telle que le noyau de Bergman préserve la filtration). Nous obtenons ainsi une solution $\boldsymbol{\eta}_1$ qui est en fait auto-adjointe puisque le terme $\mathsf{c}_2 - \mathsf{a}_2 - d_2\mathsf{e}_1$ est lui-même auto-adjoint. Maintenant, si nous cherchons à construire une métrique presque équilibrée à l'ordre 3, nous sommes conduits à résoudre :

$$\mathsf{b}_{2,1} + d_1\mathsf{e}_3 = \mathsf{c}_3 - \mathsf{a}_3 - \mathsf{b}_{1,2} - d_3\mathsf{e}_1 - d_2\mathsf{e}_2.$$

Nous calculons itérativement les $\boldsymbol{\eta}_j$ en résolvant de manière similaire, à chaque étape à un équation différentielle de la forme

$$\sqrt{-1}\Lambda\left(\overline{\partial}\partial\boldsymbol{\eta}_j\right) + \sum_j \tau_j \pi^{\mathcal{F}}_{h_\infty,j}\boldsymbol{\eta}_j(Id - \pi^{\mathcal{F}}_{h_\infty,j}) = \mathsf{c}_j - \mathsf{a}_j - P_j(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, ..., \boldsymbol{\eta}_{j-1})$$

où P_j est auto-adjoint, $\int_M \mathtt{tr}(P_j + \mathsf{a}_j - \mathsf{c}_j) = 0$, $(P_j + \mathsf{a}_j - \mathsf{c}_j)$ préserve la filtration, et P_j est totalement déterminé par les $\boldsymbol{\eta}_l$ calculés pour $l < j$ aux étapes précédentes de l'itération. Le fait que $h_{k,q}$ est hermitienne est assurée par le fait que les a_i sont des endomorphismes hermitiens, que le noyau de Bergman généralisé l'est aussi, ainsi que l'opérateur P_j. □

4.4 Applications moment naturelles

Dans [Do4], S.K Donaldson réécrit la condition d'équilibre pour une variété sous la forme d'annulations d'applications moments associées à des groupes de symétrie appropriés. Il s'agit du groupe unitaire (de dimension finie) et du groupe des symplectomorphismes (de dimension infinie) de la variété. C'est cette méthode qui lui permet de "mesurer" la distance entre une métrique équilibrée et une métrique presque équilibrée. Nous adaptons cette démarche, sauf que dans notre cas, nous travaillerons avec le groupe unitaire et le groupe de Jauge du fibré.

Nous savons que l'espace $C^\infty(M, \mathcal{F})$ des sections lisses de $\mathcal{F}$ a une forme symplectique naturelle $\Omega_{[0]}$ associée à la métrique hermitienne $h_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{F}$:

$$\Omega_{[0]}(s_1, s_2) = 2\mathrm{Im}\left(\int_M \langle s_1, s_2\rangle_{h_{\mathcal{F}}} dV\right).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $\Omega_{[0]}(g \cdot s, s) = d < \mu_{C^\infty(M,\mathcal{F})}(s), g >$ où $g \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ avec

$$\mu_{C^\infty(M,\mathcal{F})}(s) = \sqrt{-1}s\langle ., s\rangle_{h_{\mathcal{F}}}\frac{\omega^n}{n!} \in \Omega^{2n}(M, End(\mathcal{F})) \simeq Lie(\mathcal{G}^{\mathbb{C}})^*.$$

que nous pouvons considérer à valeurs dans $Lie(\mathcal{G}^{\mathbb{C}})$ puisque nous disposons de l'accouplement

$$\begin{aligned} \Omega^0(M, End(\mathcal{F})) \otimes \Omega^{2n}(M, End(\mathcal{F})) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \otimes \zeta &\rightarrow \int_M \mathrm{tr}(\xi \wedge \zeta) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_{C^\infty(M,\mathcal{F})}(s)$ est une application moment associée à l'action du groupe de Jauge $\mathcal{G}$ sur $C^\infty(M, \mathcal{F})$.

Par ailleurs, pour une filtration holomorphe $\mathscr{F}$, nous pouvons considérer une famille $\theta_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$ de sections lisses du fibré en Grasmanienne que nous noterons $Gr(r_i, \mathcal{F})$ dont les fibres en $p \in M$ sont les r_i plans de $\mathcal{F}_{|p}$. Une telle section θ_i donne naturellement une projection $h_{\mathcal{F}}$-orthogonale sur l'orthogonal (vis à vis de la métrique $h_{\mathcal{F}}$) de son noyau, c'est à dire la projection $\pi^{\mathscr{F}}_{h_{\mathcal{F}},i}$.

La métrique $h_{\mathcal{F}}$ sur la fibre $\mathcal{F}_p$ induit une forme Kähler $\omega^{Gr}_{h_{\mathcal{F}}}$ sur $Gr(r_i, \mathcal{F}_{|p})$. A partir de l'évaluation $ev_i : C^\infty(M, Gr(r_i, \mathcal{F})) \times M \rightarrow Gr(r_i, r)$ où $ev_i(\theta, p) = \theta(p)$ et de la projection sur le premier facteur $p_1 : C^\infty(M, Gr(r_i, \mathcal{F})) \times M \rightarrow C^\infty(M, Gr(r_i, \mathcal{F}))$, nous obtenons une forme symplectique $\Omega_{(i)} = (p_1)_* \left(ev_i^*(\omega^{Gr}_{h_{\mathcal{F}}}) \wedge dV \right)$.

L'action du groupe de Jauge sur $C^\infty(M, Gr(r_i, \mathcal{F}))$ respectivement à $\Omega_{(i)}$ est alors donnée par

$$\mu_{C^\infty(M,Gr(r_i,\mathcal{F}))}(\theta_i) = \sqrt{-1}\pi^{\mathscr{F}}_{h_{\mathcal{F}},i} \frac{\omega^n}{n!} \in Lie(\mathcal{G}^{\mathbb{C}})^*.$$

Nous savons qu'il existe un entier k suffisamment grand pour que l'on dispose pour le fibré $\mathcal{F}$ sur la variété Kähler M polarisée par le fibré (L, h_L) d'un plongement i_k de M dans la Grassmannienne $Gr(N, r)$ par les sections holomorphes de $\mathcal{F} \otimes L^k$. Cependant l'action de $\mathcal{G}$ sur $C^\infty(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$ ne préserve pas l'ensemble des sections holomorphes pour une connexion $A \in \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F} \otimes L^k, h_{\mathcal{F}} \otimes h_L^k)$ prédéfinie. Remarquons également, qu'en général, la dimension de l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{F} \otimes L^k$ dépend du choix de la connexion A.
Afin de considérer des sections holomorphes globales et leurs variations selon le groupe de Jauge, nous sommes donc contraints de modifier en même temps la connexion considérée. Or pour toute connexion A et pour k assez grand, il existe un ouvert de l'orbite complexe de A dans $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ tel que pour toute connexion de cet ouvert, $\dim(H^i(M, \mathcal{F} \otimes L^k)) = 0$ (par semi-continuité [V, Section 9.3] ou [Ha, Thm. 12.8]) et $\dim(H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k))$ soit constant (par le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer ou voir [Ha, Thm. 9.9]). Finalement pour un tel k, il convient d'introduire la variété de dimension infinie que nous présentons maintenant :

Définition 4.4.1. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe de longueur $m+1$, et $\mathcal{Q}_0$ le sous-ensemble de*

$$C^\infty(M, \mathcal{F} \otimes L^k)^N \times \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}) \times \prod_i C^\infty(M, Gr(r_i, \mathcal{F}))$$

constitué des $(N+m+1)$-uplets de la forme

$$\left\{ s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m \right\}$$

tels que les sections $(s_i)_{i=1..N}$ sont linéairement indépendantes, et

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_A s_i &= 0 \quad \forall i = 1, .., n && (4.8) \\ \overline{\partial}_{[A]} \theta_j &= 0 \quad \forall j = 1, .., m && (4.9) \end{aligned}$$

où $\overline{\partial}_A$ représente la partie $(0,1)$ de la dérivée covariante construite naturellement à partir de la connexion unitaire A et de la connexion de Chern sur L sur l'espace $C^\infty(M,\mathcal{F}\otimes L^k)$ et $\overline{\partial}_{[A]}$ représente la partie $(0,1)$ de la dérivée covariante construite naturellement à partir de A sur $C^\infty(M,Gr(r_i,\mathcal{F}))$.

Dans ces conditions, l'action diagonale de $\mathcal{G}$ préserve $\mathcal{Q}_0$. Remarquons aussi que le groupe unitaire $U(N)$ agit naturellement sur $\mathcal{Q}_0$ par

$$(\mathsf{u}_{ij}) * \{s_1,...,s_N,A,\theta_1,...,\theta_m\} = \left\{\sum_{j=1}^N \mathsf{u}_{1j}s_j,...,\sum_{j=1}^N \mathsf{u}_{Nj}s_j,A,\theta_1,...,\theta_m\right\}$$

et l'application moment pour cette action est donnée par :

$$\mu_{U(N)}(s_1,...,s_N,A) = \langle s_i,s_j\rangle_{L^2(\omega)}$$

où $\langle .,.\rangle_{L^2(\omega)} = Hilb_\omega(h)$ est la métrique L^2 induite par $h = h_\mathcal{F}\otimes h_{L^k}$.

Soit $\pi_0 : \mathcal{Q}_0 \to C^\infty(M,\mathcal{F}\otimes L^k)^N \times \prod_i C^\infty(M,Gr(r_i,\mathcal{F}))$ la projection naturelle. π_0 est en fait une immersion. En effet, avec (4.8) nous avons $0 = \overline{\partial}_A(\varepsilon s_i) + \varepsilon\overline{\partial}_A(s_i) = \varepsilon\overline{\partial}_A(s_i)$ (et de même $\varepsilon\overline{\partial}_A(\theta_i)=0$) pour une petite variation de $\left(s_i,\overline{\partial}_A,\theta_1,...,\theta_m\right)$ et comme i_k est un plongement, nous obtenons que $\varepsilon\overline{\partial}_A = 0$ et $d\pi_0$ est injective, ce qui permet de conclure.

Nous considérons la forme symplectique standard $\Omega_{[k]}$ sur $C^\infty(M,\mathcal{F}\otimes L^k)$. En prenant la somme de $\Omega_{[k]}$ sur N copies des espaces $C^\infty(M,\mathcal{F}\otimes L^k)$ et en considérant la forme symplectique $\Omega_{(i)}$ sur chaque $C^\infty(M,Gr(r_i,\mathcal{F}))$ avec poids $\epsilon_k\varepsilon_i$, nous obtenons une forme symplectique que nous pouvons relever en utilisant l'immersion injective π_0. Nous noterons $\Omega_{\mathcal{Q}_0}$ la forme symplectique ainsi obtenue sur $\mathcal{Q}_0$. L'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{Q}_0$ admet alors une application moment associée à $\Omega_{\mathcal{Q}_0}$:

$$\mu_\mathcal{G}(s_1,...,s_N,A,\theta_1,...,\theta_m) = \sum_{i=1}^N s_i\langle .,s_i\rangle + \epsilon_k\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\pi_{h,i}^{\mathscr{F}}.$$

En fait, $\mathcal{Q}_0$ admet une structure Kähler puisque nous avons déjà vu que $\mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F},h_\mathcal{F})$ admet une structure complexe. Comme nous l'avons déjà rappelé, le noyau de Bergman généralisé $\widehat{\mathsf{B}}_{\mathcal{F}\otimes L^k}$ définit un endomorphisme de fibré qui ne dépend que de la structure holomorphe hermitienne de $\mathcal{F}\otimes L^k$ et de la forme Kähler que l'on s'est donnée sur M. Par ailleurs, les actions de $\mathcal{G}$ et $U(N)$ commutent et les deux groupes ont un centre de dimension 1, donné par les fonctions constantes et les multiples de l'identité respectivement, ce qui conduit à se restreindre à $SU(N)$ en considérant une autre application moment naturelle à valeurs dans $\sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$,

$$\mu_{SU(N)}(s_1,...,s_N,A,\theta_1,...,\theta_m) = \left(\langle s_i,s_j\rangle_{L^2(\omega)} - \frac{1}{N}\left(\sum_i ||s_i||^2_{L^2(\omega)}\right)\delta_{ij}\right).$$

4.5 Orbites complexes et double quotient symplectique

L'application moment pour l'action du produit $\mathcal{G} \times SU(N)$ sur $\mathcal{Q}_0$ sera donc la somme directe $\mu_{\mathcal{G}} \oplus \mu_{SU(N)}$ des applications moments respectives. Pour une certaine valeur de λ, nous serons amenés à considérer le quotient symplectique

$$\mathcal{Q}_0 // (\mathcal{G} \times SU(N)) := \frac{\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(\lambda Id) \cap \mu_{SU(N)}^{-1}(0)}{\mathcal{G} \times SU(N)}.$$

Ceci doit être compris comme le quotient symplectique dans un premier temps de $\mathcal{Q}_0$ par $\mathcal{G}$, via

$$\mathcal{Q}_0 // \mathcal{G} := \mu_{\mathcal{G}}^{-1}(\lambda Id) / \mathcal{G}$$

qui admet comme on l'a vu précédemment une structure symplectique naturelle. Dans un deuxième temps, on fait le quotient symplectique de $\mathcal{Q}_0//\mathcal{G}$ par $SU(N)$, puisque $SU(N)$ agit naturellement sur $\mathcal{Q}_0//\mathcal{G}$. Remarquons enfin à ce niveau comme le fait S.K. Donaldson que toute $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$-orbite dans $\mathcal{Q}_0$ contient un point dans $\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(\lambda Id)$, (resp. $\mu_{SU(N)}^{-1}(0)$) est unique à action de $\mathcal{G}$ (resp. $SU(N)$) près. Cela provient du fait général que pour une application moment l'on dispose de l'unicité des zéros (et plus généralement pour tous les éléments dans le centre de l'algèbre de Lie du groupe qui agit), quand ils existent, à l'intérieur d'une orbite complexe. L'orbite complexe donnée par l'action de $\mathcal{G} \times SU(N)$ est ainsi représentée par un point dans le quotient symplectique. Notre situation est résumée par la proposition suivante :

Proposition 4.5.1. *A une filtration $\mathscr{F}$, nous savons que nous pouvons faire correspondre un point de $\mathcal{Q}_0$. Dans ces conditions, il existe une métrique k-équilibrée au sens de la Définition 3.3.2 pour $\mathscr{F}$ si et seulement si l'orbite complexe dans $\mathcal{Q}_0$ donnée par l'action de $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \times SL(N)$, contient un point dans $\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(\lambda Id) \cap \mu_{SU(N)}^{-1}(0)$ pour tout $\lambda > 0$. Ceci revient à dire que l'orbite complexifiée est représentée par un point dans le quotient symplectique $\mathcal{Q}_0//(\mathcal{G} \times SU(N))$.*

Démonstration. En effet, un point $z_0 = \{s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m\} \in \mathcal{Q}_0$ appartient à $\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(\lambda Id)$ si et seulement si

$$\sum_i s_i \langle ., s_i \rangle_h + \epsilon_k \sum_i \varepsilon_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} = C_k Id \in \Omega^0(M, End(\mathcal{F} \otimes L^k)) \tag{4.10}$$

et z_0 appartient à $\mu_{SU(N)}^{-1}(0)$ si et seulement s'il existe une constante c telle que les sections normalisées cs_i forment une base L^2-orthonormale et l'on peut modifier la métrique h dans (4.10) par le facteur c. Ceci impose alors, en prenant la trace dans (4.10), que $C_k = \frac{1}{rV}\left(\chi(\mathcal{F} \otimes L^k) + \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j r_j\right)$. Il est alors clair que l'on obtient exactement la condition d'équilibre énoncée dans le Lemme 3.3.5. $\square$

Considérons l'action $\cdot$ de $SU(N)$ sur le quotient symplectique

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Q}_0//\mathcal{G}.$$

Or $\mathcal{Z}$ admet comme on l'a vu, une structure Kähler (d'orbifold si le groupe des stabilisateurs est fini en tout point). En chaque point $z \in \mathcal{Z}$, l'action infinitésimale de $\mathfrak{su}(N)$, fournit une application

$$\nu_z^{\mathcal{Z},SU(N)} : \mathfrak{su}(N) \to T\mathcal{Z}_z.$$

Soit l'opérateur sur $\mathfrak{su}(N)$,

$$\mathsf{q}_z^{SU(N)} = \left(\nu_z^{\mathcal{Z},SU(N)}\right)^* \nu_z^{\mathcal{Z},SU(N)}$$

où $\left(\nu_z^{\mathcal{Z},SU(N)}\right)^*$ est l'adjoint de $\nu_z^{\mathcal{Z},SU(N)}$ formé en utilisant la métrique invariante sur $\mathfrak{su}(N)$ et la métrique sur $T\mathcal{Z}_z$. Supposons que les stabilisateurs d'un point de $\mathcal{Z}$ sous l'action de $SU(N)$ soient discrets ; alors $\nu_z^{\mathcal{Z},SU(N)}$ est injective et $\mathsf{q}_z^{SU(N)}$ est inversible.

Notation. *Soit* Q *une matrice hermitienne. La norme d'Hilbert-Schmidt et la norme d'opérateur pour* Q *sont données par :*

$$\begin{aligned} ||\mathsf{Q}||^2 &= \sum_{i,j} |\mathsf{Q}_{ij}|^2, \\ |||\mathsf{Q}||| &= \sup_{||v||\leq 1} \frac{|\mathsf{Q}v|}{|v|}, \end{aligned}$$

et nous noterons $|||\mathsf{Q}|||^2_{L^2(\omega')}$ *la norme* L^2 *d'opérateur induite par* ω' *et la métrique sur* $\mathcal{F}$ *pour un endomorphisme* $\mathsf{Q} \in C^\infty(M, End(\mathcal{F}))$.

Définition 4.5.2. *Soit* Λ_z *la norme de Hilbert-Schmidt de* $\left(\mathsf{q}_z^{SU(N)}\right)^{-1}$ *vis à vis de la métrique euclidienne invariante sur* $\mathfrak{su}(N)$.
Soit $\mathbf{\Lambda}_z$ *la norme d'opérateur de* $\left(\mathsf{q}_z^{SU(N)}\right)^{-1} : \mathfrak{su}(N) \to \mathfrak{su}(N)$.

L'inégalité $\mathbf{\Lambda}_z \leq \lambda$ est donc en particulier induite par le fait que pour tout $\mathsf{A} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$ l'on ait $|\mathsf{A}|^2 \leq \lambda \left|\nu_z^{\mathcal{Z},SU(N)}(\sqrt{-1}\mathsf{A})\right|^2_{T\mathcal{Z}}$.

L'objectif des deux prochaines sections est le Théorème 6 d'approximation d'une métrique solution d'une équation de type $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein.

Quelle sera notre stratégie ?

Une filtration holomorphe $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein et irréductible est en particulier Gieseker $\mathbf{R}$-stable où nous avons posé $R_i = \tau_i k^{n-1}$. Nous cherchons à construire maintenant pour une telle filtration une suite de métriques k-équilibrées qui converge vers la métrique (faiblement) τ-Hermite-Einstein qui vérifie l'équation (4.5). A une filtration holomorphe $\mathscr{F}$ k-équilibrée, l'on sait que lui correspond un "point" d'un certain espace à paramètres dans une orbite complexifiée (i.e sous l'action de $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \times SL(N)$) qui est un zéro de l'application moment $\mu_{\mathcal{G}} \oplus \mu_{SU(N)}$ définie précédemment. Finalement nous sommes ramenés à trouver ce point.

- Or, d'un autre côté, nous disposons par le Théorème 4.0.6, d'un point dans le quotient symplectique par $\mathcal{G}$, c'est à dire d'un zéro de $\mu_{\mathcal{G}}$, puisque par hypothèse nous savons qu'il existe *a priori* une métrique faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein : la construction d'une métrique presque équilibrée $h_{k,q}$ nous fournira naturellement un point dans $\mathcal{Z}$ via la Proposition 4.7.2 auquel correspondra une métrique que nous noterons $\widetilde{h}_q$.
- D'un autre côté, nous basculons dans un problème de dimension finie en en cherchant un zéro (unique à action de $SU(N)$ près) de $\mu_{SU(N)}$ dans une $SL(N)$-orbite via la méthode de type flot de gradient que nous avons décrite dans la Section 1.2.2. Nous sommes donc conduits à étudier le flot de gradient de l'application $||\mu_{SU(N)}||^2$ sur $\mathcal{Z}$, c'est à dire à obtenir en fin de compte une estimée de $\boldsymbol{\Lambda}_z$ en vue d'appliquer la Proposition 1.2.10.

Ainsi, en rassemblant nos résultats, nous obtiendrons une métrique k-équilibrée et également par construction, la convergence de cette suite de métriques (lorsque $k \to \infty$) vers la métrique faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein.

Nous cherchons maintenant à évaluer la quantité $\boldsymbol{\Lambda}_z$ afin de pouvoir appliquer la Proposition 1.2.10. Dans notre cas particulier d'un double quotient symplectique par l'action du groupe de Jauge et de $SU(N)$, nous pourrons utiliser le lemme 1.2.11 que nous avons reformulé par souci de clarté :

Lemme 4.5.3. *Soient les actions infinitésimales naturelles* $\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\mathcal{Q}_0,SU(N)} : \mathfrak{su}(N) \to T_{\widehat{z}}\mathcal{Q}_0$ *et* $\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\mathcal{Q}_0,\mathcal{G}} : Lie(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}) \to T_{\widehat{z}}\mathcal{Q}_0$ *induites par* $SU(N)$ *et* $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ *sur* $\mathcal{Q}_0$ *et soit* $z \in \mathcal{Z}$ *représenté par* $\widehat{z} \in \mathcal{Q}_0$. *Alors pour tout* $\xi \in \mathfrak{su}(N)$,

$$\left\langle \mathfrak{q}_z^{SU(N)}(\xi), \xi \right\rangle = \left| \underline{\pi} \left(\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\mathcal{Q}_0,SU(N)}(\xi) \right) \right|^2,$$

avec $\underline{\pi} : T_{\widehat{z}}\mathcal{Q}_0 \to T_{\widehat{z}}\mathcal{Q}_0$ *projection orthogonale sur* $\mathrm{Im}\left(\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\mathcal{Q}_0,\mathcal{G}}\right)^{\perp}$. *En particulier,*

$$\boldsymbol{\Lambda}_z = \left(\min_{\xi \in \mathfrak{su}(N)} \frac{\left| \underline{\pi} \left(\widehat{\nu}_{\widehat{z}}^{\mathcal{Q}_0,SU(N)}(\xi) \right) \right|}{|\xi|} \right)^{-2}.$$

La section suivante a pour but de donner une borne inférieure explicite de la quantité $\boldsymbol{\Lambda}_z^{-1}$.

4.6 Formules explicites et estimées analytiques

Nous supposerons dans toute cette section que nous disposons d'un point dans $z \in \mathcal{Z}$, c'est à dire d'un zéro de l'application moment $\mu_{\mathcal{G}}$.

Nous regardons maintenant une seule $SL(N)$-orbite complexe pour le point z. Notons $\overline{\partial} = \overline{\partial}_A$ et fixons un représentant $((s_i)_{i=1..N}, \nabla_A, \theta_1, ..., \theta_m) \in \mathcal{Q}_0$ de z pour lequel nous avons par définition :

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \langle ., s_i \rangle + \epsilon_k \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} = Cst_k Id_{\mathcal{F}}. \tag{4.11}$$

pour une certaine métrique $\langle ., . \rangle = \widetilde{h} \in Met(\mathcal{F} \otimes L^k)$.

Nous cherchons dans un premier temps à appliquer le Lemme 4.5.3 à une variation infinitésimale du point $z \in \mathcal{Z}$. Soit la matrice

$$\mathsf{A} = (a_{ij})_{ij} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$$

et la base induite par l'action infinitésimale de A :

$$\sigma_i = \sum_j a_{ij} s_j.$$

Cherchons la projection de

$$\underline{\sigma} := (\sigma_1, ..., \sigma_N, 0, ..., 0)$$

dans l'espace $C^\infty(M, \mathcal{F} \otimes L^k)^N \times \prod_i C^\infty(M, \theta_i^* TGr(r_i, \mathcal{F}))$ sur le complément orthogonal du sous-espace :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{r} \left(\mathfrak{g}s_1, ..., \mathfrak{g}s_N, (Id - \pi_{\widetilde{h},1}^{\mathscr{F}})\mathfrak{g}\pi_{\widetilde{h},1}^{\mathscr{F}}, ..., (Id - \pi_{\widetilde{h},m}^{\mathscr{F}})\mathfrak{g}\pi_{\widetilde{h},m}^{\mathscr{F}}\right), \\ \mathfrak{g} \in Lie(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}) \end{array} \right\} = \mathrm{Im}(\widehat{\nu}_{\underline{\sigma}}^{\mathcal{Q}_0, \mathcal{G}}),$$

qui est l'image de l'action infinitésimale de $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ au point $((s_i)_{i=1..N}, \nabla_A, \theta_1, ..., \theta_m)$ puisque $\theta_i^* TGr(r_i, \mathcal{F}) \simeq Hom(\mathrm{Im}(\theta_i), \mathrm{Im}(\theta_i)^{\perp_{\widetilde{h}}})$.

Notation. *Notons*

$$\mathscr{B} : X \mapsto \frac{\epsilon_k}{Cst_k} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \pi_{\widetilde{h},j}^{\mathscr{F}} X \pi_{\widetilde{h},j}^{\mathscr{F}}$$

l'opérateur auto-adjoint sur $End(\mathcal{F} \otimes L^k)$. Si la condition

$$\frac{\epsilon_k}{Cst_k} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j < 1, \tag{4.12}$$

nous pourrons considérer l'opérateur $(Id - \mathscr{B})^{-1} = Id + \mathscr{B} + \mathscr{B}^2 + ...$

Proposition 4.6.1. *Avec les notations précédentes, supposons que l'on ait pour (4.11) que $Cst_k = O(k^n)$. Soit*

$$\begin{aligned} B_{\mathsf{A}} &= (Id - \mathscr{B})^{-1}\left(\frac{1}{Cst_k}\sum_{i,j} a_{ji}s_i\langle ., s_j\rangle\right) \in \Omega^0(M, End(\mathcal{F}\otimes L^k)) \\ &= \frac{1}{Cst_k}\sum_{i,j} a_{ji}s_i\langle ., s_j\rangle + \frac{\epsilon_k}{(Cst_k)^2}\sum_l \varepsilon_l \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},l}(\sum_{i,j} a_{ji}s_i\langle ., s_j\rangle)\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},l} + ... \end{aligned}$$

l'endomorphisme hermitien de $End(\mathcal{F}\otimes L^k)$ induit par la matrice A. Alors la projection orthogonale à $\mathcal{P}$ de $\underline{\sigma}$ est :

$$\underline{p} = \left(B_{\mathsf{A}}s_1, ..., B_{\mathsf{A}}s_N, (Id - \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},1})B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},1}, ..., (Id - \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},m})B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},m}\right) \in \mathcal{P}.$$

Démonstration. Il s'agit de voir qu'en fait pour tout $\mathfrak{g}$:

$$\sum_i \left\langle B_{\mathsf{A}}s_i - \sigma_i, \mathfrak{g}s_i\right\rangle + \epsilon_k \sum_i \left\langle \varepsilon_i(Id - \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i})B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i}, (Id - \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i})\mathfrak{g}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i}\right\rangle = 0.$$

ce qui revient à voir que

$$\sum_i B_{\mathsf{A}}s_i \otimes s_i^* - \sigma_i \otimes s_i^* + \epsilon_k \sum_i \varepsilon_i(Id - \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i})B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i} = 0$$

c'est à dire

$$(Id - \mathscr{B})B_{\mathsf{A}} = \frac{1}{Cst_k}\sum_i \sigma_i \otimes s_i^*$$

puisque l'on considère un point de $\mu_{\mathcal{G}}^{-1}(Cst \times Id)$ et qu'ainsi nous avons une métrique déterminée canoniquement via (4.11). Le fait que

$$\varepsilon_i\epsilon_k = \frac{\tau_i k^{n-1}}{k^n}\frac{\chi(\mathcal{F}\otimes L^k)}{Vr - V\sum_j \frac{\tau_j k^{n-1}}{k^n}} = O(k^{n-1}),$$

permet de conclure vue que la condition (4.12) est vérifiée. □

Introduisons

$$\begin{array}{lcll} \psi_i & := & \sigma_i - B_{\mathsf{A}}s_i & 1 \leq i \leq N, \\ \psi_{N+i} & := & (\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i} - Id)B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i} & 0 \leq i \leq m, \end{array}$$

ainsi que le vecteur

$$\underline{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_{N+m}) \in C^\infty(M, \mathcal{F}\otimes L^k)^N \times \prod_i C^\infty(M, \theta_i^* TGr(r_i, \mathcal{F})).$$

Notation. *Dans la suite, nous poserons* $\left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)} := \sum_i ||\psi_i||^2_{L^2(\omega)} = \sum_i \int_M |\psi_i|^2 \frac{\omega^n}{n!}$.

Nous pouvons ainsi réécrire les quantités $\Lambda_z, \mathbf{\Lambda}_z$ comme :

$$\Lambda_z^{-1} = \min_{i\mathsf{A}\in\mathfrak{su}(N),||\mathsf{A}||=1} \sum_i \|\psi_i\|^2_{L^2(\omega)} = \min_{i\mathsf{A}\in\mathfrak{su}(N),||\mathsf{A}||=1} \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{\Lambda}_z^{-1} = \min_{i\mathsf{A}\in\mathfrak{su}(N),|||\mathsf{A}|||=1} \sum_i ||\psi_i||^2_{L^2(\omega)} = \min_{i\mathsf{A}\in\mathfrak{su}(N),|||\mathsf{A}|||=1} \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}. \tag{4.14}$$

Introduisons maintenant une convention utile dans toute la partie technique de notre exposé.

Définition 4.6.2. *Soit $h_{\mathcal{F}}$ une métrique hermitienne fixée de référence sur $\mathcal{F}$ et un entier $\alpha > 2$. A l'entier k, on associe la métrique*

$$\widetilde{h_{\mathcal{F}}} = h_{\mathcal{F}} \otimes h_L^k$$

sur $\mathcal{F}\otimes L^k$. Nous dirons que pour $R > 0$, une autre métrique hermitienne $\widetilde{h_1} = h_1 \otimes h_L^k$ sur $\mathcal{F} \otimes L^k$ construite de manière similaire est à géométrie R-bornée si l'on a les deux conditions suivantes :

$$\widetilde{h_1} > \frac{1}{R}\widetilde{h_{\mathcal{F}}},$$

$$\left\|\widetilde{h_1} - \widetilde{h_{\mathcal{F}}}\right\|_{C^\alpha} < R,$$

où $\|.\|_{C^\alpha}$ désigne la norme standard C^α déterminée par la métrique de référence $\widetilde{h_{\mathcal{F}}}$.

Ces conditions peuvent aussi se réécrire sous la forme

$$h_1 > \frac{1}{R} h_{\mathcal{F}}, \quad \|h_1 - h_{\mathcal{F}}\|_{C^\alpha(h_1)} < k^{\alpha/2} R.$$

Clairement, quitte à modifier R, cette définition est indépendante du choix de la métrique $h_{\mathcal{F}}$.

Définition 4.6.3. *Soit la donnée d'un point $(s_0, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m) \in \mathcal{Q}_0$ et R un réel strictement positif. Nous dirons que la base $(s_i)_{i=1..N}$ est à R-géométrie bornée si la métrique hermitienne lisse $\widetilde{h}$ qui vérifie la condition (4.11) est à géométrie R-bornée.*

Avec toujours l'hypothèse essentielle d'avoir pour notre filtration considérée $\mathscr{F}$ un point $\{s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m\} \in \mu_{\mathcal{G}}^{-1}(Cst \times Id)$, nous imposons de plus la décomposition suivante vis à vis de la métrique vérifiant (4.11) :

$$\langle s_i, s_j \rangle_{L^2(\omega)} := \int_M \langle s_i, s_j \rangle \frac{\omega^n}{n!} = \delta_{ij} + \boldsymbol{\eta}_{ij}, \tag{4.15}$$

où $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_{ij})$ est une matrice hermitienne $N \times N$ de trace nulle. Remarquons également que $\boldsymbol{\eta} \equiv 0$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est équilibrée.

En fixant la connexion $A \in \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}})$, nous avons un opérateur naturel associé $\overline{\partial} = \overline{\partial}_A$ sur $\mathcal{F} \otimes L^k$.

Nous aurons besoin également des faits bien connus suivants :

$$\begin{aligned} |||\mathsf{R}||| &\leq ||\mathsf{R}|| \leq \sqrt{N}\, |||\mathsf{R}|||\,, && (4.16)\\ |\mathtt{tr}(\mathsf{SRS})| &\leq \|\mathsf{S}\|^2\, |||\mathsf{R}|||\,, && (4.17)\\ |\mathtt{tr}(\mathsf{RS})| &\leq \sqrt{N}\, \|\mathsf{S}\|\, |||\mathsf{R}|||\,, && (4.18) \end{aligned}$$

(pour S, R matrices hermitiennes $N \times N$).

Proposition 4.6.4. *Nous avons* $\sum_i ||\overline{\partial}\psi_i||^2_{L^2(\omega)} = \left|\left|\left|\overline{\partial} B_{\mathsf{A}}\right|\right|\right|^2_{L^2(\omega)}$.

Démonstration. En fait, point par point, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_i |\overline{\partial}\psi_i|^2 &= \sum_i \left|\overline{\partial}(B_{\mathsf{A}} s_i)\right|^2 + \sum_i \epsilon_k \varepsilon_i \left|\overline{\partial}\left((Id - \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i}) B_{\mathsf{A}} \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i}\right)\right|^2,\\ &= \sum_i \left|\overline{\partial}(B_{\mathsf{A}}) s_i\right|^2 + \sum_i \epsilon_k \varepsilon_i \left|(Id - \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i})\overline{\partial}(B_{\mathsf{A}}) \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},i}\right|^2, \qquad (4.19) \end{aligned}$$

puisque les s_i et θ_i sont holomorphes. Le membre de droite de (4.19) est, par définition de la métrique que nous avons fixée, la norme d'opérateur $|||B_{\mathsf{A}}|||^2$ au point considéré p de M : quitte à considérer les sections $s'_i = \sum_j \mathsf{u}_{ij} s_j$ où $\mathsf{U} = (\mathsf{u}_{ij})_{ij}$ est unitaire et $B_{\mathsf{A}'} = B_{{}^t\overline{\mathsf{U}}\mathsf{A}\mathsf{U}}$, nous voyons que nous pouvons exiger que les $(s_i)_{i=1,..,r}$ forment une base orthonormée locale en p et que $s_i(p) = 0$ pour $i \geq r+1$. En intégrant sur la variété, le résultat est clair. $\square$

Lemme 4.6.5. *Sous les hypothèses précédentes, il existe $C'(j_0), C''(j_0)$ constantes indépendantes telles que pour tout entier $j \leq j_0$,*

$$\begin{aligned} \sum_i \left|\nabla^j s_i(z)\right|^2 &\leq C' k^{j+n} \text{ en chaque point } z \text{ de } M,\\ \left\|\nabla^j B_{\mathsf{A}}\right\|^2_{L^2(\omega)} &\leq C'' k^j ||\mathsf{A}||^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Tout d'abord, il est connu que pour une section holomorphe f, point par point, nous avons l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\left|\nabla^j f(x)\right|^2_h \leq C \int_{B(x)} |f|^2_h \frac{\omega^n}{n!},$$

et pour $\widetilde{h}$,

$$\left|\nabla^j f(x)\right|^2_{\widetilde{h}} \leq C k^j \int_{B(x)} |f|^2_{\widetilde{h}} \frac{\omega^n}{n!} \leq C k^j \int_M |f|^2_{\widetilde{h}} \frac{\omega^n}{n!},$$

où $B(x)$ est une boule géodésique centrée en $x \in M$ et C ne dépend que de R et ω. En sommant pour tout i et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\sum_i |s_i(x)|^2 &\leq \operatorname{tr}\left(\sum_i s_i(x)\langle ., s_i(x)\rangle\right) + \operatorname{tr}(\epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},j}) \\ &\leq rCst_k,\end{aligned}$$

on obtient l'inégalité puisque $Cst_k = O(k^n)$.
Par ailleurs, B_{A} n'étant pas holomorphe, nous regardons $M' = M \times \overline{M}$ (voir [Do4, p. 507]) où $\overline{M}$ est équipé avec la structure complexe opposée et p_1, p_2 les projections sur le premier et second facteur. A la connexion et la métrique sur $L \to M$ correspondent une connexion et une métrique sur $\overline{L} \to \overline{M}$ équipé de la structure complexe opposée. Soit $\mathcal{F}' \to M'$ défini par $p_1^*\left(\overline{\mathcal{F}} \otimes \overline{L}^k\right)^\vee \otimes p_2^*\left(\mathcal{F} \otimes L^k\right)$. Alors, si $s^\vee$ désigne une section holomorphe de $\left(\overline{\mathcal{F}} \otimes \overline{L}^k\right)^\vee$ (via l'isomorphisme C^∞ de fibré défini par la métrique), notons

$$\widetilde{B_{\mathsf{A}}} = (Id - \mathscr{B}^{-1})\left(\frac{1}{Cst_k}\sum_{i,j} a_{ji} s_i \otimes s_j^\vee\right)$$

qui est une section holomorphe de $\mathcal{F}'$. Ainsi, si l'on pose $\Sigma_{\mathsf{A}} = \sum_{i,j} a_{ji} s_i \langle ., s_j\rangle$, l'on remarque par Cauchy-Schwarz que

$$\langle \Sigma_{\mathsf{A}}, \mathscr{B}^p(\Sigma_{\mathsf{A}})\rangle \leq \|\Sigma_{\mathsf{A}}\| \|\mathscr{B}^p(\Sigma_{\mathsf{A}})\| \leq \left(\frac{\epsilon_k \sum_i \varepsilon_i}{Cst_k}\right)^p \|\Sigma_{\mathsf{A}}\|^2.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{B_{\mathsf{A}}}\right\|^2_{L^2(\omega)} &= \langle \Sigma_{\mathsf{A}} + \mathscr{B}(\Sigma_{\mathsf{A}}) + \mathscr{B}^2(\Sigma_{\mathsf{A}}) + ..., \Sigma_{\mathsf{A}} + \mathscr{B}(\Sigma_{\mathsf{A}}) + \mathscr{B}^2(\Sigma_{\mathsf{A}}) + ...\rangle_{L^2(\omega)} \\ &= \langle \Sigma_{\mathsf{A}}, \Sigma_{\mathsf{A}}\rangle_{L^2(\omega)}(1 + O(1/k)) \\ &= (1 + O(1/k))\frac{1}{(Cst_k)^2}\int_M \sum_{i,j,k,l} a_{ij} a_{kl} \langle s_i, s_j\rangle \langle s_k, s_l\rangle \frac{\omega^n}{n!} \\ &= \frac{(1 + O(1/k))}{(Cst_k)^2} \mathtt{tr}\left(\mathsf{A}\left(Id + \boldsymbol{\eta}\right)\left(Id + {}^t\overline{\boldsymbol{\eta}}\right) {}^t\overline{\mathsf{A}}\right)\end{aligned}$$

Or, nous savons que $Cst_k = O(k^n)$. Puisque nous avons choisi une base à géométrie R-bornée, nous obtenons ainsi par l'inégalité (4.17),

$$\left\|\widetilde{B_{\mathsf{A}}}\right\|_{L^2(\omega)} \leq Ck^{-n}||\mathsf{A}||.$$

Il faut remarquer à ce niveau que B_{A} est juste la restriction de $\widetilde{B_{\mathsf{A}}}$ sur la diagonale de M'. Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité pour une section holomorphe comme dans la première partie de la preuve, afin d'obtenir

$$\left\|\nabla^j \widetilde{B_{\mathsf{A}}}\right\|^2_{L^2(\omega)} \leq C''^2 k^j ||\mathsf{A}||^2,$$

et la conclusion vient alors immédiatement. □

Proposition 4.6.6. *Avec les hypothèses précédentes, si la base de sections holomorphes $(s_i)_{i=1,..,N} \in H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$ est à géométrie R-bornée, alors il existe une constante C_1 ne dépendant que de R et de la métrique de référence $h_{\mathcal{F}}$ telle que pour k assez grand, les inégalités suivantes soient vraies :*

$$\sum_i ||\overline{\partial}\psi_i||^2_{L^2(\omega)} \leq \left|\left|\left|\overline{\partial}B_{\mathsf{A}}\right|\right|\right|^2_{L^2(\omega)} \leq kC_1 \left\|\underline{\psi}\right\|_{L^2(\omega)} ||\mathsf{A}||. \tag{4.20}$$

Si $|||\boldsymbol{\eta}||| < \frac{1}{10}$, alors

$$||\mathsf{A}||^2 \leq \frac{10}{9}\left(|||B_{\mathsf{A}}|||^2_{L^2(\omega)} + \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}\right).$$

Démonstration. Puisque nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|\overline{\partial}B_{\mathsf{A}}\right|\right|\right|^2_{L^2(\omega)} &\leq \sqrt{\sum_i ||\Delta B_{\mathsf{A}} s_i||^2_{L^2(\omega)} \sum_i ||B_{\mathsf{A}} s_i||^2_{L^2(\omega)}} \\
&\quad + \epsilon_k^2 \sqrt{\sum_j \varepsilon_j^2 \left\|\Delta\left(B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},j}\right)\right\|^2_{L^2(\omega)} \sum_j \left\|B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},j}\right\|^2_{L^2(\omega)}},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

et que d'un autre côté,

$$\begin{aligned}
\|\Delta(B_{\mathsf{A}} s_i)\|_{L^2(\omega)} &\leq \left\|\nabla^2(B_{\mathsf{A}})\right\|_{L^2(\omega)} + \|2\nabla B_{\mathsf{A}} \cdot \nabla s_i\|_{L^2(\omega)}, \\
\left\|\Delta(B_{\mathsf{A}}\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},j})\right\|_{L^2(\omega)} &\leq \left\|\nabla^2(B_{\mathsf{A}})\right\|_{L^2(\omega)} + \left\|2\nabla B_{\mathsf{A}} \cdot \nabla\pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h},j}\right\|_{L^2(\omega)}
\end{aligned}$$

l'on conclut en utilisant le dernier lemme ($2^{\text{ème}}$ inégalité) en ce qui concerne la première assertion.
Pour prouver la deuxième inégalité, on utilise le fait que l'on a une décomposition orthogonale de $C^\infty(M, \mathcal{F} \otimes L^k)^N \times \prod_i C^\infty(M, \theta_i^* TGr(r_i, \mathcal{F}))$:

$$\underline{\sigma} = \underline{\psi} + \underline{p},$$

avec $\underline{p} \in \mathcal{P}$, $\underline{\psi} \in \mathcal{P}^\perp$. Mais

$$\begin{aligned}
\|\underline{\sigma}\|^2_{L^2(\omega)} &= \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 + \sum_{i,j,l} a_{ij}\boldsymbol{\eta}_{jl} a_{li} \\
&= \|\mathsf{A}\|^2 + \mathrm{tr}(\mathsf{A}\boldsymbol{\eta}\mathsf{A})
\end{aligned}$$

et comme $|||\boldsymbol{\eta}||| < \frac{1}{10}$, nous avons par (4.17),

$$||\mathsf{A}||^2 < \frac{10}{9} ||\underline{\sigma}||^2_{L^2(\omega)},$$

et par conséquent,

$$\frac{9}{10}||\mathsf{A}||^2 \leq \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)} + \left\|\underline{p}\right\|^2_{L^2(\omega)} \leq \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)} + |||B_{\mathsf{A}}|||^2_{L^2(\omega)}.$$

$\square$

Proposition 4.6.7. *Supposons que la filtration holomorphe $\mathscr{F}$ soit simple et que $\mathsf{A} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$. Si la base $(s_i)_{i=1..N}$ de $H^0(M, \mathcal{F} \otimes L^k)$ est à géométrie R-bornée, alors il existe des constantes C_2, C_3 ne dépendant que de R et de la métrique de référence $h_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{F}$ telles que pour k assez grand, l'inégalité suivante soit vraie :*

$$|||B_{\mathsf{A}}|||^2_{L^2(\omega)} \leq C_2 \left\|\overline{\partial} B_{\mathsf{A}}\right\|^2_{L^2(\omega)} + C_3 \left(|||\boldsymbol{\eta}||| + \frac{1}{k}\right)^2 \|\mathsf{A}\|^2.$$

Démonstration. Le fait que $\mathscr{F}$ est simple implique que pour toute constante $\gamma > 1$, il existe une constante $c(h_{\mathcal{F}}, \gamma)$ telle que si $h \in Met(\mathcal{F})$ est une métrique pour laquelle on ait l'inégalité,

$$\gamma h_{\mathcal{F}} > h > \frac{1}{\gamma} h_{\mathcal{F}}$$

alors pour tout $\varpi \in End(\mathcal{F})$ tel que $\varpi(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_i$,

$$||\varpi||^2_{L^2(\omega)} \leq c \left\|\overline{\partial}\varpi\right\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{1}{rV} \mid \int_M \mathtt{tr}(\varpi) dV \mid^2,$$

qui est juste l'inégalité de Poincaré vis à vis de la métrique ω (voir aussi [Do4, Lemme 25]) dont le volume est V. Maintenant puisque B_{A} est hermitien, nous pouvons décomposer B_{A} sous la forme

$$B_{\mathsf{A}} = \mathsf{T}_{B_{\mathsf{A}}} + \mathsf{D}_{B_{\mathsf{A}}} + \mathsf{T}^*_{B_{\mathsf{A}}}$$

où $\mathsf{T}_{B_{\mathsf{A}}}$ est triangulaire supérieure et $\mathsf{D}_{B_{\mathsf{A}}}$ est diagonale. Si l'on note, $\Pi(B_{\mathsf{A}}) = \mathsf{T}_{B_{\mathsf{A}}} + \frac{1}{2}\mathsf{D}_{B_{\mathsf{A}}}$ alors $\Pi(B_{\mathsf{A}})$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$ tel que $\Pi(B_{\mathsf{A}})(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_i$. Ainsi, en considérant la métrique renormalisée, nous obtenons

$$||\Pi(B_{\mathsf{A}})||^2_{L^2(\omega)} \leq C_2 \left\|\overline{\partial}\Pi(B_{\mathsf{A}})\right\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{1}{rV}\left(\int_M \frac{1}{2}\mathtt{tr}(B_{\mathsf{A}})\frac{\omega^n}{n!}\right)^2.$$

Cependant le fait que B_{A} est hermitien assure également que

$$||\Pi(B_{\mathsf{A}})||^2_{L^2(\omega)} = \frac{1}{2}||B_{\mathsf{A}}||^2_{L^2(\omega)}$$

et $\left\|\overline{\partial}\Pi(B_{\mathsf{A}})\right\|^2_{L^2(\omega)} = \frac{1}{2}\left\|\overline{\partial}B_{\mathsf{A}}\right\|^2_{L^2(\omega)}$. Ainsi, il vient

$$|||B_{\mathsf{A}}|||^2_{L^2(\omega)} \leq ||B_{\mathsf{A}}||^2_{L^2(\omega)} \leq C_2 \left\|\overline{\partial}B_{\mathsf{A}}\right\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{1}{rV}\left(\int_M \mathtt{tr}(B_{\mathsf{A}})\frac{\omega^n}{n!}\right)^2.$$

Maintenant, l'on remarque par (4.18) que pour k suffisamment grand, puisque A est de trace nulle et que $\frac{\int_M \mathrm{tr}(\sum_i s_i\langle .,s_i\rangle)dV}{Cst_k} = O(1)$, il existe c telle que

$$\int_M \mathtt{tr}(B_{\mathsf{A}})\frac{\omega^n}{n!} \leq \frac{\sum_{i,j} a_{ij}\boldsymbol{\eta}_{ij}}{Cst_k} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}\left(\frac{\epsilon_k}{Cst_k}\right)^p \sum_{l=1}^{m} c\tau_l^p r_l \|\mathsf{A}\|^p \leq C_3\left(|||\boldsymbol{\eta}||| + \frac{1}{k}\right)\|\mathsf{A}\|$$

pour $C_3 \geq 1$ suffisamment grand et on obtient la majoration souhaitée. □

Voici l'objet principal de cette section :

Théorème 5. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe simple. Pour tout $R > 0$, il existe des constantes $C := C(R, h_{\mathcal{F}}, h_L)$ et $\varepsilon(R, h_{\mathcal{F}}, h_L) < \frac{1}{10}$ telles que si, pour tout k, la base $(s_i)_{i=1\dots N} \in H^0(M, \mathcal{F}\otimes L^k)$ vérifiant (4.15) est à R-géométrie bornée avec $|||\boldsymbol{\eta}||| < \varepsilon$ et $Cst_k = O(k^n)$, alors pour toute matrice $\mathsf{A} = (a_{ij})_{ij} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$, nous avons*

$$\|\mathsf{A}\| \leq Ck\left\|\underline{\psi}\right\|_{L^2(\omega)},$$

où $\underline{\psi} \in \mathcal{P}^{\perp}$ est la projection orthogonale à $\mathcal{P}$ de $\underline{\sigma}$. Pour le point correspondant $z \in \mathcal{Z}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathit{\Lambda}_z &\leq C^2k^2, \\ \boldsymbol{\Lambda}_z &\leq C^2k^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Les dernières propositions donnent directement les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathsf{A}\|^2 &\leq \frac{10}{9}\left(|||B_{\mathsf{A}}|||^2_{L^2(\omega)} + \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}\right), \\ &\leq \frac{10}{9}\left(C_2\left\|\overline{\partial}B_{\mathsf{A}}\right\|^2_{L^2(\omega)} + C_3\left(|||\boldsymbol{\eta}||| + \frac{1}{k}\right)^2\|\mathsf{A}\|^2 + \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}\right), \\ &\leq \frac{10}{9}C'\left(k\left\|\underline{\psi}\right\|_{L^2(\omega)}||\mathsf{A}|| + \left(|||\boldsymbol{\eta}||| + \frac{1}{k}\right)^2\|\mathsf{A}\|^2 + \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}\right). \end{aligned}$$

En imposant $|||\boldsymbol{\eta}||| < \varepsilon$ et k suffisamment grand, l'on choisit ε tel que $C'\left(\epsilon + \frac{1}{k}\right)^2 < \frac{1}{2}$. Dès lors, il existe une constante C indépendante de k telle que :

$$\|\mathsf{A}\|^2 \leq C\left(k\left\|\underline{\psi}\right\|_{L^2(\omega)}||\mathsf{A}|| + \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}\right).$$

Si $k\left\|\underline{\psi}\right\|_{L^2(\omega)}||\mathsf{A}|| \leq \left\|\underline{\psi}\right\|^2_{L^2(\omega)}$ alors le résultat est clair car $k \geq 1$. Sinon, après simplification, on obtient exactement l'inégalité voulue.
La deuxième partie du théorème est une conséquence de l'égalité (4.13) et de ce que $|||\mathsf{A}||| \leq ||\mathsf{A}||$. □

Remarque 4.1. *Il est clair que l'estimée (4.20) peut être remplacée en utilisant l'inégalité de Hölder dans (4.21) par l'inégalité*

$$\left|\left|\left|\overline{\partial} B_{\mathsf{A}}\right|\right|\right|^2_{L^2(\omega)} \leq kC_l \left\|\underline{\psi}\right\|^{2-\frac{1}{l}}_{L^2(\omega)} ||\mathsf{A}||^{\frac{1}{l}}.$$

pour tout entier l suffisamment grand. Ceci permet d'obtenir

$$\Lambda_z = O(k^{1+\delta})$$

pour δ arbitrairement petit.

Conjecture. *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 5,*

$$\begin{aligned} \mathit{\Lambda}_z &\leq C^2 k. \\ \mathbf{\Lambda}_z &\leq C^2 k^2. \end{aligned}$$

4.7 Théorème d'approximation

Dans cette partie nous allons donner la fin de la preuve du Théorème d'approximation (Théorème 6) en utilisant les estimées analytiques de la section précédente. Nous commençons par prouver que nous pouvons nous ramener à un point $z \in \mathcal{Z}$ à partir des métriques presque équilibrées. Pour cela nous aurons besoin du résultat technique suivant.

Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe de longueur $m+1$ sur M et $\boldsymbol{\tau}$ un m-uplet de réels. Soit

$$\mathfrak{q} = (s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m) \in \mathcal{Q}_0$$

et $\widetilde{h}$ une métrique hermitienne lisse sur $\mathcal{F} \otimes L^k$. Considérons l'application sur l'espace de Sobolev $End(\mathcal{F})^{l,\alpha}$ des endomorphismes hermitiens de classe $C^{l,\alpha}$ de $\mathcal{F}$ sur la variété compacte M :

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{q},\widetilde{h},\rho} : \eta \mapsto \left(\sum_i s_i \langle ., s_i \rangle_{\widetilde{h}}\right) \eta + \rho \sum_j \frac{\tau_j}{k} \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h}(\eta .,),j}$$

où $\rho \in \mathbb{R}$.

Lemme 4.7.1. *Sous ces hypothèses, si l'on a de plus,*

- $\mathrm{tr}(\sum_i s_i \langle ., s_i \rangle_{\widetilde{h}}) = ck^n + O(k^{n-1})$,
- $0 \leq \rho_0 \leq \epsilon_k = \frac{\chi(\mathcal{F} \otimes L^k)}{Vr - V \sum_j \varepsilon_j r_j}$,
- $k \geq k_0$ *où k_0 ne dépend que du choix des données $(\tau_i, r_i)_{i=1,..,m}$ et c,*
- Γ *est un endormorphisme $\widetilde{h}$-hermitien lisse tel que $\mathrm{tr}(\Gamma) = O(k^n)$,*

alors il existe pour tout $0 \leq \rho \leq \rho_0$ *une solution lisse* η_ρ *de*

$$\mathcal{B}_{\widetilde{h},\rho}(\eta_\rho) = \Gamma. \tag{4.22}$$

Démonstration. Nous procédons en utilisant la méthode de continuité sur l'espace de Banach $End(\mathcal{F})^{l,\alpha}$ par rapport au paramètre ρ. Tout d'abord, en $\rho = 0$, l'on voit que l'on peut résoudre (4.22) en choisissant simplement

$$\eta_0 = \left(\sum_i s_i \langle ., s_i\rangle_{\widetilde{h}}\right)^{-1} \Gamma$$

Ainsi, si l'on note l'intervalle réel $I \subset \mathbb{R}_+$ tel que $\rho \in I$ si η_ρ solution de (4.22), nous venons de prouver que $I \neq \emptyset$. Appliquons le théorème des fonctions implicites pour voir que I est ouvert. Par le Lemme 6.1.2, nous savons que la différentielle en η de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q},\widetilde{h},\rho}$ est donnée par :

$$D_\eta \mathcal{B}_{\mathfrak{q},\widetilde{h},\rho}(\varsigma) = \left(\sum_i s_i \langle ., s_i\rangle_{\widetilde{h}}\right) \varsigma + \frac{\rho}{k} \Pi^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}_{\widetilde{h}\cdot\eta}(\varsigma)$$

Mais, d'un autre côté, nous savons que

$$|||\Pi^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}_{\widetilde{h}\cdot\eta}||| \leq \sum_i \tau_i r_i (r - r_i).$$

Maintenant, notre choix de ρ_0 impose donc que $\mathcal{B}_{\mathfrak{q},\widetilde{h},\rho}$ est inversible vu que l'on a $\mathrm{tr}(\sum_i s_i \langle ., s_i\rangle_{\widetilde{h}}) = O(k^n)$.

Finalement, montrons que I est fermé. Si l'on a une solution η de

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{q},\widetilde{h},\rho}(\eta) = \Gamma, \tag{4.23}$$

alors pour tout $U \in \mathcal{F} \otimes L^k_{|p}$,

$$\sum_i \langle s_i, U\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} \langle U, s_i\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} + \rho \sum_j \frac{\tau_j}{k} \langle U, \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h}\cdot\eta,j} U\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} = \langle U, \Gamma U\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} \tag{4.24}$$

Vu que ρ et les τ_i sont positifs, nous avons immédiatement

$$\sum_i \langle s_i, U\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} \langle U, s_i\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} \leq \langle U, \Gamma U\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta}.$$

D'un autre côté, vu que $\mathrm{tr}(\Gamma) = O(k^n)$ et que $\frac{\rho}{k} = O(k^{n-1})$, il existe une constante $c'(k_0)$ telle que

$$\sum_i \langle s_i, U\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} \langle U, s_i\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta} \geq \frac{1}{1+c'} \langle U, \Gamma U\rangle_{\widetilde{h}\cdot\eta}$$

Maintenant, si l'on considère $\lambda_{max} \geq 0$ la valeur propre maximale de η en p et v un vecteur propre associé, nous obtenons que

$$\frac{1}{1+c'}\langle v, \Gamma v\rangle_{\widetilde{h}} \leq \lambda_{max} \sum_i |\langle v, s_i\rangle_{\widetilde{h}}|^2 \leq \langle v, \Gamma v\rangle_{\widetilde{h}} \tag{4.25}$$

Vu que les $(s_i)_{i=1,..,N}$ forment une famille génératrice, l'on tire que λ_{max} appartient à un compact et ainsi que la solution η de l'équation considérée est bornée en norme C^0 et appartient aux endomorphismes hermitiens positifs. Le lemme 6.1.2 permet de voir qu'en différentiant (4.23), l'on obtient

$$\sum_i s_i\langle ., s_i\rangle_{\widetilde{h}}\partial\eta + \frac{\rho}{k}\Pi^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}_{\widetilde{h}\cdot\eta,i}\partial\eta = \partial\Gamma - \partial\left(\sum_i s_i\langle ., s_i\rangle_{\widetilde{h}}\right)\eta \tag{4.26}$$

Vu que Γ est lisse et M compacte, l'on obtient par l'estimée de C^0 de η, une borne C^0 sur $\partial\eta$, et de la même manière une borne C^0 sur $\overline{\partial}\eta$. En différentiant (4.26), on voit encore que $\overline{\partial}\partial\eta$ est borné en norme C^0 et par conséquent, notre solution η est bornée en toplogie $C^{1,1}$. Enfin, le théorème d'Arzela-Ascoli [Au, p.73-75] nous permet de conclure que I est fermé, et donc $I = [0, \epsilon_k]$. $\square$

Proposition 4.7.2. *Supposons de plus que $\mathscr{F}$ soit $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein et $q \geq 1$. Alors, à chaque métrique presque équilibrée $h_{k,q}$ (au rang k) correspond un zéro $\widetilde{h_q}$ de l'application moment $\mu_{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{Q}_0$ tel que*

$$\|h_{k,q} - \widetilde{h_q}\|_{C^\alpha} = O\left(\frac{1}{k^{q-1-\alpha}}\right).$$

Enfin, l'on peut décomposer

$$\int_M \langle s_i, s_j\rangle_{\widetilde{h_q}}\frac{\omega^n}{n!} = \delta_{ij} + \boldsymbol{\eta}_{\widetilde{h_q}}$$

où $\boldsymbol{\eta}_{\widetilde{h_q}}$ est une matrice $N \times N$ telle que

$$|||\boldsymbol{\eta}_{\widetilde{h_q}}||| = O\left(\|\boldsymbol{\sigma}_q(k)\|_{C^0}\right),$$

où $\boldsymbol{\sigma}_q(k)$ est donné par la Proposition 4.3.1.

Démonstration. En effet, d'après la Proposition 4.3.1, nous savons qu'il existe une métrique $h_{k,q} \in Met(\mathcal{F} \otimes L^k)$ telle que

$$\sum_i s_i\langle ., s_i\rangle_{h_{k,q}} = \frac{N + \epsilon_k V\sum_j \varepsilon_j r_j}{rV} Id + \boldsymbol{\sigma}_q(k) - \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{h_{k,q}}, \tag{4.27}$$

avec $\|\boldsymbol{\sigma}_q(k)\|_{C^{\alpha+2}} \leq C_{q,\alpha}k^{n-q-1}$, $(s_i)_{i=1,..,N}$ une base $Hilb_\omega(h_{k,q})$-orthonormée et toujours $\varepsilon_j = \frac{\tau_j}{k}$. Considérons la métrique $\widetilde{h_q} = h_{k,q}(\eta., .) \in Met(\mathcal{F} \otimes L^k)$ et un point

$(s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m) \in \mathcal{Q}_0$. Nous pouvons perturber notre métrique presque équilibrée pour obtenir un zéro de l'application moment $\mu_{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{Q}_0$. En effet, il suffit juste d'appliquer le Lemme 4.7.1 avec les données

$$\Gamma := \frac{N + \epsilon_k V \sum_j \varepsilon_j r_j}{rV} Id = \mathbf{O}(k^n) \qquad \widetilde{h} := h_{k,q} \qquad \rho = \epsilon_k$$

et nous voyons que pour un k fixé tel que $k \geq k_0$, nous pouvons trouver une solution lisse η de (4.22). La métrique $\widetilde{h_q} = h_{k,q} \cdot \eta$ est alors un zéro de l'application moment $\mu_{\mathcal{G}}$ au rang k.

Maintenant le fait que $\widetilde{h_q} = h_{k,q} \cdot \eta$ soit proche de $h_{k,q}$ est une conséquence de la relation (4.24) qui nous donne pour $\rho = \epsilon_k$ et v un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \geq 0$ de η :

$$\begin{aligned}
(\lambda - 1) \sum_i |\langle v, s_i \rangle_{h_{k,q}}|^2 &= \langle v, \Gamma v \rangle_{h_{k,q}} - \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \langle v, \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h_q},j} v \rangle_{h_{k,q}} - \sum_i |\langle v, s_i \rangle_{h_{k,q}}|^2 \\
&= \langle v, \Gamma v \rangle_{h_{k,q}} - \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \langle v, \pi^{\mathscr{F}}_{h_{k,q}\cdot(Id + (\eta - Id)),j} v \rangle_{h_{k,q}} - \sum_i |\langle v, s_i \rangle_{h_{k,q}}|^2 \\
&= \langle v, \Gamma v \rangle_{h_{k,q}} - \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \langle v, \pi^{\mathscr{F}}_{h_{k,q},j} v \rangle_{h_{k,q}} \\
&\quad - \langle v, \frac{1}{k} \Pi^{\mathscr{F},\tau}_{h_{k,q}} (\eta - Id) v \rangle_{h_{k,q}} \\
&\quad + \langle v, \frac{1}{k} \vartheta(Id - \eta) v \rangle_{h_{k,q}} - \sum_i |\langle v, s_i \rangle_{h_{k,q}}|^2
\end{aligned} \tag{4.28}$$

d'après le Lemme 6.1.2. Ici $\vartheta(Id - \eta)$ est un endomorphisme de $\mathcal{F} \otimes L^k$ tel que $\|\vartheta(Id - \eta)\|_{C^0} = O(\|Id - \eta\|^2_{C^0})$. D'un autre côté, il vient que

$$\epsilon_k \left\| \frac{1}{k} \Pi^{\mathscr{F},\tau}_{h_{k,q}} (Id - \eta) \right\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon_k}{k} \left(\sum_j \tau_j r_j (r - r_j) \right) \|\eta - Id\|_{C^0} \tag{4.29}$$

Puisque $h_{k,q}$ vérifie par définition (4.27), nous obtenons en combinant (4.29) et (4.28) que pour des constantes c_0, c'_0, c''_0 indépendantes de k,

$$\begin{aligned}
\|\eta - Id\|_{C^0} \left(1 - c_0 \frac{\epsilon_k}{k^{n+1}}\right) - \frac{c'_0 \epsilon_k}{k^{n+1}} \|\eta - Id\|^2_{C^0} &\leq \frac{c''_0}{k^n} \left(\|\Gamma - \Gamma\|_{C^0} + \|\boldsymbol{\sigma}_q(k)\|_{C^0}\right) \\
&\leq \frac{c''_0}{k^n} \|\boldsymbol{\sigma}_q(k)\|_{C^0}
\end{aligned}$$

On obtient bien l'estimation souhaitée pour k suffisamment grand. Enfin, puisque les s_i sont orthonormées respectivement à $Hilb_\omega(h_{k,q})$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_M \langle s_i, s_j \rangle_{\widetilde{h_q}} \frac{\omega^n}{n!} &= \int_M \langle s_i, s_j \rangle_{h_{k,q}} \frac{\omega^n}{n!} + \int_M \langle (\eta - Id) s_i, s_j \rangle_{h_{k,q}} \frac{\omega^n}{n!} \\
&= \delta_{ij} + \int_M \langle (\eta - Id) s_i, s_j \rangle_{h_{k,q}} \frac{\omega^n}{n!}
\end{aligned}$$

et l'on conclut en utilisant la première partie de la preuve et l'inégalité de Cauchy-Schwartz. □

Soit q un entier strictement positif. A partir des métriques presque équilibrées $h_{k,q}$, nous venons d'obtenir un point dans le quotient symplectique $\mathcal{Z} = \mathcal{Q}_0//\mathcal{G}$, avec une métrique $\widetilde{h}_q \in Met(\mathcal{F} \otimes L^k)$ qui vérifie :

$$\sum_i s_i \langle ., s_i \rangle_{\widetilde{h_q}} + \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h_q},j} = C_k Id, \tag{4.30}$$

où $\mathfrak{q} = (s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m) \in \mathcal{Q}_0$. Ainsi, nous sommes clairement sous les hypothèses de la section précédente avec $\widetilde{h} := \widetilde{h}_q$ et en choisissant comme métrique de référence $h_{\mathcal{F}} := h_\infty$, métrique faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein vérifiant (4.5).

Regardons la $SL(N)$ orbite de ce point $\mathfrak{q}$ afin de construire une métrique équilibrée, c'est à dire un zéro de $\mu_{SU(N)}$. Pour toute matrice sans trace $\mathsf{S} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$, nous pouvons utiliser l'action de $SL(N)$ sur $\mathfrak{q} \in \mathcal{Z}$ pour obtenir un autre point $e^{\mathsf{S}} * \mathfrak{q}$ du quotient symplectique, ce qui nous donne une autre métrique hermitienne $\widetilde{h_{\mathsf{S}}}$ sur le fibré $\mathcal{F} \otimes L^k$ vérifiant toujours (4.30) et qui dépend de q. Soit $\boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})$ la matrice vérifiant la décomposition (4.15) pour cette nouvelle métrique hermitienne $\widetilde{h_{\mathsf{S}}}$. Dans ces conditions, avec les notations de la Proposition 4.3.1, nous avons les estimées suivantes :

Proposition 4.7.3. *Soit $R > 0$ et $\mathsf{S} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(N)$ telle que $|||\mathsf{S}||| \leq \frac{1}{10}$.*
1. Si $q > \alpha + 1$, alors il existe une constante C_4 (indépendante de k et R) telle que si

$$|||\mathsf{S}||| + \frac{1}{k} \leq C_4 R,$$

alors la métrique $\widetilde{h_{\mathsf{S}}}$ est R-bornée.
2. Il existe une constante C_5 (indépendante de k) telle que

$$|||\boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})||| \leq C_5 \left(|||\mathsf{S}||| + ||\boldsymbol{\sigma}_q(k)||_{C^0} \right).$$

Démonstration. Tout d'abord, la construction étant invariante sous $SU(N)$, nous pouvons supposer que $\mathsf{S} = diag(\lambda_i)$ est une matrice diagonale avec $\sum_i \lambda_i = 0$. Soit $\mathfrak{q} = (s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m)$ et $\mathfrak{q}' = (e^{\lambda_1} s_1, ..., e^{\lambda_N} s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m)$. D'après le Lemme 4.7.1, il existe bien $\eta_{\mathsf{S}} \in End(\mathcal{F} \otimes L^k)$ tel que

$$\mathcal{B}_{\widetilde{h_q}, \epsilon_k}(\eta_{\mathsf{S}}) = C_k Id.$$

Soit $\widetilde{h_{\mathsf{S}}} = \widetilde{h}_q \cdot \eta_{\mathsf{S}}$. Maintenant, par définition,

$$\sum_i s_i \langle ., s_i \rangle_{\widetilde{h_{\mathsf{S}}}} + \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{\widetilde{h_{\mathsf{S}}},j} = Cst_k Id + \sum_i (1 - e^{2\lambda_i}) s_i \langle ., s_i \rangle_{\widetilde{h_{\mathsf{S}}}}$$

Nous appliquons le même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 4.7.2 en utilisant l'estimée du Lemme 4.6.5 ($1^{\text{ère}}$ inégalité). Ainsi il vient que

$$\left\| \widetilde{h}_q - \widetilde{h_{\mathsf{S}}} \right\|_{C^\alpha} \leq c \, |||\mathsf{S}||| \, .$$

Par ailleurs, la métrique $\widetilde{h_q}$ diffère de la métrique de référence $\widetilde{h_\infty}$ par un terme en $O(1/k)$ en norme C^α d'après la Proposition 4.7.2 et donc on a $\left\|\widetilde{h_\infty} - \widetilde{h_{\mathsf{S}}}\right\|_{C^\alpha} < R$ en choisissant convenablement C_4. Par ailleurs, quitte à prendre C_4 plus petit, on peut aussi exiger que $\widetilde{h_{\mathsf{S}}} > \frac{1}{R}\widetilde{h_\infty}$ puisque la quantité $|||\mathsf{S}|||$ est par hypothèse bornée, donc (1) est acquis.
Pour l'assertion (2), on remarque que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})_{ij} &= \int_M \left\langle \eta_{\mathsf{S}} e^{\lambda_i} s_i, e^{\lambda_j} s_j \right\rangle_{\widetilde{h_q}} dV - \delta_{ij} \\ &= \int_M \left\langle (\eta_{\mathsf{S}} - Id) e^{\lambda_i} s_i, e^{\lambda_j} s_j \right\rangle_{\widetilde{h_q}} dV + \left(\int_M \left\langle e^{\lambda_i} s_i, e^{\lambda_j} s_j \right\rangle_{\widetilde{h_q}} dV - \delta_{ij} \right) \quad (4.31)\end{aligned}$$

D'après la première partie de la preuve et la Proposition 4.7.2, le terme de gauche de (4.31) est borné en norme C^0 par un multiple de $|||\mathsf{S}|||^2$. Le terme de droite est quant à lui, par la Proposition 4.7.2, borné par un multiple de $|||\mathsf{S}||| + ||\boldsymbol{\sigma}_q(k)||_{C^0}$. □

Proposition 4.7.4. *Soient R et q des réels strictement positifs.*
Si $|||\mathsf{S}||| \leq \min\{\delta, \delta k^{n-q+1}\}$ avec $\delta(R, M, \mathscr{F})$ suffisamment petit, alors la métrique $\widetilde{h_{\mathsf{S}}}$ est R-bornée, la base $(s_i)_{i=1,..,N}$ est à R-géométrie bornée et $\mathfrak{q}$ est un zéro de l'application moment $\mu_{\mathcal{G}}$. Enfin, $\mu_{SU(N)} = \boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})$ où la matrice $\boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})_{ij}$ vérifie (4.15) avec

$$\|\boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})\| = O(k^{3n/2-q-1}).$$

Démonstration. Avec le choix de $|||\mathsf{S}||| + \frac{1}{k} \leq C_4 R$, la Proposition 4.7.3 (1), nous donne que si $|||\mathsf{S}||| \leq \delta$ avec

$$\delta := \min\left(\frac{C_4 R}{2}, \frac{1}{10}\right),$$

alors la métrique h_{S} est R-bornée. A partir de la métrique presque équilibrée $h_{k,q}$ qui vérifie

$$\sum_i s_i \langle ., s_i \rangle_{h_{k,q}} = C_k Id - \epsilon_k \sum_j \varepsilon_j \pi^{\mathscr{F}}_{h_{k,q},j} + \boldsymbol{\sigma}_q(k), \quad (4.32)$$

et $\|\boldsymbol{\sigma}_q(k)\|_{C^{\alpha+2}} = O(k^{n-q-1})$ nous pouvons appliquer la Proposition 4.7.2. Dans ces conditions nous obtenons, par l'inégalité (4.16) et la Proposition 4.7.3 (2), que :

$$\|\boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})\| \leq \sqrt{N}|||\boldsymbol{\eta}(\mathsf{S})||| \leq C_5 k^{n/2}(\delta + c'))k^{n-q-1}$$

puisque $N = O(k^n)$. □

Convergence vers la métrique d'Hermite-Einstein

Voici un analogue de [Do4, Théorème 3] et de [W2, Théorème 1.2] pour les métriques $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein sur une variété projective lisse.

Théorème 6. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe irréductible sur une variété projective lisse, munie d'une métrique $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein h_{HE}. Alors $\mathscr{F}$ est équilibrée et il existe une suite des métriques équilibrées $\boldsymbol{h}_k$ qui converge de manière C^∞ vers une métrique h_∞ faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein, c'est à dire vers h_{HE} quitte à faire une renormalisation.*

Démonstration. Nous allons prouver que nous pouvons construire une suite de métriques équilibrée qui converge vers la métrique faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein solution de (4.5) en topologie C^α où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et que nous avons noté $\widetilde{h_\infty}$.

Soit ε fixé par le Théorème 5 et δ par la Proposition 4.7.4. Appliquons la Proposition 4.7.4 avec $R > 0$, $q > \frac{3n}{2}+2+\alpha$ et $\|\mathsf{S}\| \leq \min\{\delta k^{n-q+1}, \varepsilon\} \leq \delta$. Nous obtenons un point $z \in \mathscr{Z}$, représenté par $\{s_1, ..., s_N, A, \theta_1, ..., \theta_m\} \in \mathscr{Q}_0$. D'après le Théorème 5, nous savons qu'en ce point, $\boldsymbol{\Lambda}_z \leq C^2k^2$. Toujours d'après la Proposition 4.7.4, l'on voit que

$$\lambda\|\boldsymbol{\eta}_{\mathsf{S}}\| \leq \lambda C_6 k^{3n/2-q-1} \leq C_7 k^{3n/2+1-q}. \tag{4.33}$$

Vu que $|||\mathsf{S}||| \leq ||\mathsf{S}||$, nous cherchons à appliquer la Proposition 1.2.10 avec les données $\mu_{SU(N)}(z_0) = \boldsymbol{\eta}_{\mathsf{S}}$, $\lambda = C^2k^2$ et δ donné par la Proposition 4.7.4. Mais l'inégalité (4.33) assure que $\lambda\|\mu_{SU(N)}(z_0)\|$ peut être pris inférieur à δ pour k suffisamment grand puisque $q > \frac{3n}{2} + 2$.
Par la Proposition 1.2.10, nous obtenons alors

$$|||\mathsf{S}||| \leq ||\mathsf{S}|| \leq C_7 k^{3n/2+1-q},$$

ainsi que l'existence d'une métrique $\widetilde{h_{\mathsf{S}}}$ proche en norme C^0 de $\widetilde{h_\infty}$ à $O\left(k^{3n/2-q+1}\right)$ près et k-équilibrée. En fait, nous avons même

$$\|h_{\mathsf{S}} - h_\infty\|_{C^\alpha} = O\left(k^{3n/2-q+1+\alpha}\right),$$

et par conséquent la convergence en norme C^α vers h_∞ pour tout entier α. Le théorème est prouvé avec la Proposition 4.2.2. $\square$

Corollaire 4.1. *La connexion d'Hermite-Einstein sur le fibré $\mathcal{F}$ de la filtration stable $\mathscr{F}$ est unique à un automorphisme holomorphe de $\mathscr{F}$ près.*

Chapitre 5

Applications aux équations Vortex

Dans ce chapitre, nous donnons des applications du Théorème 6, notamment au cas des équations de Vortex pour lesquelles il ne nous a pas été possible de développer une approche directe de la méthode de S.K. Donaldson. Au lieu de travailler sur la variété M, nous regardons les équations Vortex comme des équations $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein sur la variété $M \times \mathbb{P}^1$.

5.1 Filtrations équivariantes et chaînes

Soit (M, ω) une variété projective lisse de dimension complexe n. Considérons $X = M \times \mathbb{P}^1$ et l'action du groupe $SL(2) := SL(2, \mathbb{C})$ donnée par action triviale au dessus de M et l'action standard sur $\mathbb{P}^1$ via l'identification naturelle

$$\mathbb{P}^1 = SL(2)/\mathfrak{P}$$

avec $\mathfrak{P}$ le sous-groupe parabolique des matrices triangulaires inférieures de $SL(2)$. Nous noterons de plus $p : X \to M$ et $q : X \to \mathbb{P}^1$ les projections naturelles.

Définition 5.1.1. *Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ est $SL(2)$-équivariant (ou encore $SL(2)$-linéarisé) si l'action de $SL(2)$ sur X se relève holomorphiquement à $\mathcal{F}$. Une filtration $SL(2)$-équivariante $\mathscr{F}$ sur X est une filtration avec une structure de faisceau cohérent $SL(2)$-équivariant $\mathcal{F}$ qui induit une structure de sous-faisceau $SL(2)$-équivariant sur chaque $\mathcal{F}_i \hookrightarrow \mathcal{F}$ et avec les isomorphismes de faisceaux $SL(2)$-équivariants*

$$\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} = p^*(\mathcal{E}_i) \otimes q^*\mathcal{O}(2i)$$

pour $0 \leq i \leq m$ et $\mathcal{E}_i$ sont des faisceaux cohérents sur M avec action triviale de $SL(2)$.

Finalement une version de la notion de stabilité pour une filtration $SL(2)$-équivariante peut être donnée :

Définition 5.1.2. *Une filtration $\mathscr{F}$ est $SL(2)$-équivariante $\boldsymbol{\tau}$-stable (resp. semi stable) si $\mathscr{F}$ est $SL(2)$-équivariante et pour toute sous-filtration $SL(2)$-invariante propre $\mathscr{F}' \hookrightarrow \mathscr{F}$ nous avons*

$$\mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}') < \mu_{\boldsymbol{\tau}}(\mathscr{F}) \qquad (\textit{resp.}\ \leq)$$

De plus, une filtration est polystable si elle est somme directe de filtrations $\boldsymbol{\tau}$-stables de même pente $\mu_{\boldsymbol{\tau}}$.

Dans [AC-GP1], il est donné une relation entre une filtration holomorphe $SL(2)$-équivariante $\boldsymbol{\tau}$-stable $\mathscr{F}$ et la stabilité ordinaire pour une filtration : $\mathscr{F}$ se décompose en tant que filtration holomorphe comme une somme directe de filtrations $\boldsymbol{\tau}$-stables $\mathscr{F}_\delta$ pour $0 \leq \delta \leq \delta_0$ qui sont images l'une de l'autre par un élement de $SL(2)$. Ainsi, nous pouvons sans difficulté obtenir une correspondance de type Kobayashi-Hitchin pour les filtrations holomorphes $SL(2)$-équivariantes :

Théorème 5.1.3 (Álvarez-Cónsul & García-Prada).
Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe $SL(2)$-équivariante sur X de longueur $m+1$ et $\boldsymbol{\tau}$ un m-uplet de réels positifs. Alors $\mathscr{F}$ est $SL(2)$-équivariante $\boldsymbol{\tau}$-polystable si et seulement s'il existe une métrique $SU(2)$-invariante $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein vérifiant l'équation (2.2).

En fait, par restriction tout fibré vectoriel $SL(2)$-équivariant sur X définit un fibré holomorphe $\mathfrak{P}$-équivariant sur $M \times \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \simeq M$; inversement à tout fibré holomorphe $\mathfrak{P}$-équivariant E on peut associer un $SL(2)$-fibré en considérant le quotient de $SL(2) \times E$ par l'action de $u \in \mathfrak{P}$ donnée par $u \cdot (g,e) = (g \cdot u^{-1}, u \cdot e)$. Sur ce quotient noté

$$SL(2) \times_{\mathfrak{P}} E,$$

l'on dispose d'une action de $g' \in SL(2)$ par $g' \cdot (g,e) = (g'g, e)$. Ce principe d'induction et de restriction s'applique également aux faisceaux cohérents.

Maintenant, l'on peut voir que pour tout faisceau $\mathcal{E}$ cohérent $\mathfrak{P}$-équivariant, l'on dispose d'une décomposition en somme directe respectivement à l'action de $\mathbb{C}^*$. En effet, un tel faisceau $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\bigoplus_i \mathcal{E}_i \otimes V_i$ avec action triviale sur les faisceaux cohérents $\mathcal{E}_i$ et $V_i = M \times \mathscr{V}_i$ est le fibré vectoriel correspondant à une représentation irréductible $\mathscr{V}_i$ de $\mathfrak{P}$ d'après les résultats généraux de [Seg, ğ2]. Notons que $\mathcal{E}$ est un fibré si et seulement si les $\mathcal{E}_i$ le sont aussi. Cette remarque justifie à la fois la Définition 5.1.1 et permet de voir (voir [AC-GP3, Section 3.2]) qu'un fibré vectoriel $SL(2)$-équivariant $\mathcal{F}$ sur X se décompose de manière équivariante et unique (à isomorphismes près) sous la forme

$$\mathcal{F} = \bigoplus_i p^*(\mathcal{E}_i) \otimes q^*(\mathcal{H}^{n_i})$$

où $\mathcal{H}$ est le fibré en droites de classe de Chern 1 sur $\mathbb{P}^1$, $\mathcal{E}_i$ sont des fibrés vectoriels holomorphes et les n_i sont des entiers relatifs distincts deux à deux. Observons aussi à ce niveau que les fibrés $p^*(\mathcal{E}_i) \otimes q^*(\mathcal{H}^{n_i})$ munis de la métrique $SU(2)$-invariante $p^*h_{\mathcal{E}_i} \otimes q^*h_{\mathcal{H}^{n_i}}$ sont orthogonaux deux à deux.

Définition 5.1.4. *Une chaîne de faisceaux sur M est une paire $\mathscr{C} = (\mathscr{E}, \boldsymbol{\phi})$ composée d'un $(m+1)$-uplet $\mathscr{E} = (\mathcal{E}_0, ..., \mathcal{E}_m)$ de faisceaux cohérents sur M et d'un m-uplet $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, ..., \phi_m)$ d'homomorphismes $\phi_i \in Hom(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i-1})$. Cette chaîne est dite holomorphe si tous les faisceaux $\mathcal{E}_i$ sont des fibrés.*

Définition 5.1.5.
- *Une sous-chaîne de la chaîne $\mathscr{C} = (\mathscr{E}, \boldsymbol{\phi})$ est une chaîne $\mathscr{C}' = (\mathscr{E}', \boldsymbol{\phi}')$ telle que $\mathcal{E}'_i$ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}_i$ pour tout $0 \leq i \leq m$ et $\phi_i \circ j_i = j_{i-1} \circ \phi'_i$ où $j_i : \mathcal{E}'_i \hookrightarrow \mathcal{E}_i$ sont les morphismes d'inclusion.*
- *La sous-chaîne $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ est dite propre si $0 < \sum_{i=0}^m r(\mathcal{E}'_i) < \sum_{i=0}^m r(\mathcal{E}_i)$.*
- *La chaine holomorphe $\mathscr{C}$ est irréductible si elle ne peut pas s'écrire*

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \oplus \mathscr{C}_2$$

avec $\mathscr{C}_i \neq \mathscr{C}$ sous-chaînes holomorphes.

Définition 5.1.6. *Pour une chaîne $\mathscr{C} = (\mathscr{E}, \boldsymbol{\phi})$, et un $(m+1)$-uplet $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, ..., \beta_m)$, nous définissons la $\boldsymbol{\beta}$-pente*

$$\mu_{\boldsymbol{\beta}}(\mathscr{C}) = \frac{\sum_{i=0}^m deg(\mathcal{E}'_i) - \sum_{i=0}^m \beta_i r(\mathcal{E}'_i)}{\sum_{i=0}^m r(\mathcal{E}'_i)}.$$

Une chaîne est dite $\boldsymbol{\beta}$-stable (resp. semi-stable) si pour toute sous-chaîne propre $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$, l'on a $\mu_{\boldsymbol{\beta}}(\mathscr{C}') < \mu_{\boldsymbol{\beta}}(\mathscr{C})$. Une somme directe de chaînes $\boldsymbol{\beta}$-stables de même pente est dite polystable.

Nous disposons du théorème [AC-GP1, Theorem 1.1] :

Théorème 5.1.7 (Álvarez-Cónsul & García-Prada).
Il existe une correspondance 1-1 entre les catégories des filtrations $SL(2)$-équivariantes sur X et des chaînes de faisceaux sur M.

Ainsi, en particulier nous disposons d'une correspondance 1-1 au niveau des objets holomorphes entre les extensions sur X de la forme

$$0 \to p^*\mathcal{E}_0 \to E \to p^*\mathcal{E}_1 \otimes q^*\mathcal{O}(2) \to 0$$

et les triplets $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \phi_1)$ où $\phi_1 \in Hom(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_0)$.

5.2 Réduction dimensionnelle et applications

Soit $\omega' = p^*\omega + q^*\omega_{FS}$ (où ω_{FS} désigne ici la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1$) une métrique Kähler sur X.

Au niveau des métriques, nous disposons du théorème central suivant [AC-GP1, Theorem 4.1],

Théorème 5.2.1 (Réduction entre chaînes et filtrations holomorphes).
Soit $\mathscr{F}$ une filtration $SL(2)$-équivariante sur X et $\mathscr{C}$ la chaîne correspondante sur M. Soit $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, ..., \tau_m)$. Alors $\mathscr{F}$ admet une métrique $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein $SU(2)$-invariante respectivement à ω' si et seulement si $\mathscr{C} = (\mathscr{E}, \boldsymbol{\phi})$ admet un $(m+1)$-uplet de métriques hermitiennes lisses $\mathbf{h} = (h_0, ..., h_m)$ satisfaisant la chaîne d'équations Vortex (ou équations vortex-couplées) suivante :

$$\sqrt{-1}\Lambda F_{h_0} + \frac{1}{2}\phi_1 \circ \phi_1^{*h_0} = \tau_0 Id_{\mathcal{E}_0} \tag{5.1}$$

$$\sqrt{-1}\Lambda F_{h_i} - \frac{1}{2}\left(\phi_i^{*h_i} \circ \phi_i + \phi_{i+1} \circ \phi_{i+1}^{*h_i}\right) = (\tau_i - 2i) Id_{\mathcal{E}_i} \quad (1 \leq i \leq m\text{-}1) \tag{5.2}$$

$$\sqrt{-1}\Lambda F_{h_m} - \frac{1}{2}\phi_m^{*h_m} \circ \phi_m = (\tau_m - 2m) Id_{\mathcal{E}_m} \tag{5.3}$$

Ce théorème peut être retranscrit au niveau de la stabilité des objets considérés, [AC-GP1, Theorem 4.2].

Théorème 5.2.2. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration $SL(2)$-équivariante sur X et soit $\mathscr{C}$ la chaîne correspondante sur M. Alors $\mathscr{F}$ est $SL(2)$-équivariante $\boldsymbol{\tau}$-stable (resp. semi-stable) si et seulement si $\mathscr{C}$ est $(\tau_0, ..., \tau_m - 2m)$-stable (resp. semi-stable).*

De nombreuses équations peuvent être obtenues par le principe de réduction dimensionelle. En particulier :

- Le cas des paires de Bradlow [Bra1] est traité par [GP] : si (E, ϕ) est une paire (c'est à dire E un fibré vectoriel holomorphe et $\phi \in H^0(M, E)$) sur une variété kählérienne compacte (M, ω) et si F est donné par l'extension sur $X = M \times \mathbb{P}^1$

$$0 \to p^*E \to F \to q^*\mathcal{O}(2) \to 0$$

  alors (E, ϕ) est λ-stable au sens de Bradlow si et seulement si F est Mumford-stable vis à vis de la polarisation $p^*\omega + \frac{2V}{(r(E)+1)\lambda - deg(E)} q^*\omega_{FS}$.
- Le cas des triplets de Witten (monopoles non abéliens) : soit L un fibré en droite sur une surface projective S et $(\mathcal{L}, \phi, \theta)$ un triplet constitué par une structure holomorphe $\mathcal{L}$ sur L, une section holomorphe $\phi \in H^0(M, \mathcal{L})$ et $\theta : \mathcal{L} \to K_S$ un morphisme. Le triplet $(\mathcal{L}, \phi, \theta)$ est dit β-stable si $\deg(\mathcal{L}) < \beta$ et $\phi \neq 0$ ou bien $\beta < \deg(\mathcal{L})$ et $\theta \neq 0$. Un triplet est β-stable si et seulement si $(\phi, \theta) \neq 0$ et il existe une métrique h sur L satisfaisant l'équation :

$$\sqrt{-1}\Lambda F_h + \frac{1}{2}(|\phi|_h^2 - |\theta|_h^2) = \beta.$$

  Cela revient à considérer, avec nos notations, la chaîne $((K_S, \mathcal{L}, \mathcal{O}), (\theta, \phi))$.
- Le cas des systèmes cohérents étudiés dans [LeP1], c'est à dire des couples (E, V_E) où V_E est un sous-espace linéaire de $H^0(E)$. En fait nous pouvons voir les systèmes cohérents comme des 'paires de Brill-Noether', c'est à dire déterminés par les chaines de la forme $((E, V_E \otimes \mathcal{O}_M), \rho)$ où ρ est injective et

modulo l'action de $GL(\dim(V_E))$. L'équation Vortex relative à ce système est étudiée dans [B-GP3],

$$\sqrt{-1}\Lambda F_h + \sum_{i=1}^{k} \phi_i \otimes \phi_i^{*_h} = \kappa \times Id$$

$$\int_M \langle \phi_i, \phi_j \rangle_h dV = \frac{r\kappa - \deg(E)}{k} \delta_{ij}$$

où $k = \dim(V_E)$ et $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ est une famille libre de sections holomorphes engendrant V.

- Le cas des 'framed modules' étudiés par Huybrechts et Lehn ([H-L1, H-L2]) ou des fibrés décorés, constitués d'un fibré E_2 avec un morphisme $\theta : E_2 \to E_1$ vers un fibré fixé E_1. Dans ce cadre l'équation vortex s'écrit

$$\sqrt{-1}\Lambda F_h - \theta^{*_h}\theta = Cst \times Id$$

et nous sommes ramenés à considérer les extensions

$$0 \to p^* E_1 \to F \to q^* E_2 \otimes \mathcal{O}(2) \to 0.$$

- Le cas des équations d'Hitchin d'anti-auto-dualité au dessus d'une courbe complexe C [Hi1] :

$$F_h^{\perp} + [\Phi, \Phi^{*_h}] = 0$$

où $\Phi \in H^0(M, End(E) \otimes K_C)$ et $F_h^{\perp}$ est la partie sans trace de la courbure F_h. La notion de stabilité est celle dans le sens usuel pour les fibrés holomorphes restreinte aux sous-fibrés Φ-invariants.
Sur l'espace de modules $\mathcal{M}$ des fibrés de Higgs stables de degré nul au dessus de C , nous disposons d'une action de S^1 dite de Hitchin,

$$g \cdot (A, \Phi) = (A, g\Phi) \in \mathcal{A}(E) \times H^0(M, End(E) \otimes K_C).$$

qui préserve la forme Kähler naturelle sur $\mathcal{M}$. Un fibré stable (E, A, Φ) représente un point fixe de cette action si et seulement s'il existe une transformation de Jauge ϑ telle que $D_A\vartheta = 0$ et $[\vartheta, \Psi] = \sqrt{-1}\Psi$ (Cf [Hi2, Sim]). Le fibré E se décompose alors holomorphiquement

$$E = \bigoplus_{i=1}^{d} E_i$$

et ϑ agit avec poids (croissants) $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sur chaque facteur E_i. Nous disposons aussi de morphismes

$$\Phi_i : E_i \to E_{i+1} \otimes K_C$$

non triviaux avec $\Phi = \bigoplus_i \Phi_i$. Si l'on note maintenant $\mathcal{E}_i = E_{d-i} \otimes K_C^{d-i}$, alors nous pouvons définir dans ce cas particulier, une chaine holomorphe $(\mathscr{E}, \boldsymbol{\phi})$ en considérant les morphismes

$$\phi_i := \Phi_{d-i} \otimes Id : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i-1}.$$

- Certains quivers (non twistés) étudiés dans [AC-GP2, Section 6].
- Les équations Vortex couplées étudiées dans [O-T1] et qui sont reliées à des invariants de Gromov-Witten tordus.

Maintenant, il est aisé de modifier les preuves des chapitres précédents pour voir que dans le cas d'une filtration holomorphe $SL(2)$-équivariante stable, nous allons obtenir une suite de métriques équilibrées $SU(2)$-invariantes. Cette remarque nous permet d'obtenir le résultat suivant, ou par 'métrique algébrique', nous entendons une métrique provenant d'une construction G.I.T en tant que zéro d'application moment.

Théorème 7. *Soit $\mathscr{C}$ une chaîne holomorphe irréductible au-dessus d'une variété projective lisse admettant un $(m+1)$-uplet $\mathbf{h} = (h_0, ..., h_m)$ de métriques hermitiennes satisfaisant la chaîne d'équations vortex données par (5.1),(5.2),(5.3). Alors, quitte à faire des renormalisations par changements conformes, chaque métrique h_i est la limite au sens C^∞ d'une suite de métriques construites algébriquement. En particulier, les solutions des équations Vortex de Bradlow ou des triplets de Witten sont des limites de métriques algébriques.*

Chapitre 6

Annexe

6.1 Endomorphisme $\Pi_h^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}$

Dans cette section, nous rassemblons quelques résultats élémentaires qui sont utilisés dans le Chapitre 4.

Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe, h une métrique hermitienne lisse sur $\mathcal{F}$ et $\pi_{h,i}^{\mathscr{F}}$ la projection h orthogonale sur le fibré $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$.

Pour deux métriques hermitiennes lisses h_1 et h_2 sur $\mathcal{F}$, nous savons qu'elles sont reliées par l'existence d'un endomorphisme η tel que

$$h_1(X, Y) = h_2(\eta X, Y)$$

tel que η est hermitien défini positif respectivement à h_2. En particulier, nous retiendrons que $F_{h_1} = F_{h_2} + \overline{\partial}(\eta^{-1}\partial_{h_2}\eta)$.

Notation. *Nous désignerons par $h{\cdot}\eta$ la métrique $h(\eta\cdot, \cdot)$ pour $\eta \in End(\mathcal{F})$ hermitien respectivement à h.*

Lemme 6.1.1. *Pour tout m-uplet $\boldsymbol{\tau}_i$ de réels (non nécessairement positifs) et tout $\boldsymbol{\eta} \in End(\mathcal{F})$ h-hermitien tel que $h' = h \cdot \boldsymbol{\eta}$, nous avons*

$$d\left(\sum_{i=1}^{m} \tau_i \pi_{h',i}^{\mathscr{F}}\right) = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} d\boldsymbol{\eta} \left(Id - \pi_{h,i}^{\mathscr{F}}\right)$$

Démonstration. Tout d'abord, nous pouvons nous restreindre à un des facteurs $\pi_{h,i}^{\mathscr{F}}$, projection h-orthogonale sur le sous-fibré $\mathcal{F}_i$. Soit $t \mapsto \pi_i(t)$ une famille quelconque à un paramètre réel de projections sur le fibré $\mathcal{F}_i$ telle que $\pi_i(0) = \pi_{h,i}^{\mathscr{F}}$. Vu que l'on a les relations

$$\begin{aligned} \pi_i(t)\pi_i(t) &= \pi_i(t) \\ \pi_i(0)\pi_i(t) &= \pi_i(t) \end{aligned}$$

nous obtenons que

$$\pi_i(0)\pi_i(0)' = \pi_i(0)'$$

c'est à dire que $Im(\pi_i(0)') \subset \mathcal{F}_i$ et d'un autre côté,

$$\pi_i(0)'\pi_i(0) = \pi_i(0)' - \pi_i(0)\pi_i(0)' = 0$$

et donc que $\ker(\pi_i(0)') \supset \mathcal{F}_i$. Par conséquent,

$$\pi_i(0)' = \pi_i(0)\pi_i(0)'(Id - \pi_i(0))$$

et l'espace des solutions de cette équation est $Hom(\mathcal{F}_i^{\perp}, \mathcal{F}_i)$. Remarquons également que la différentielle est nécessairement $U(\mathcal{F}_i^{\perp}) \times U(\mathcal{F}_i)$ invariante. Enfin l'on peut appliquer le lemme de Schur puisque $U(\mathcal{F}_i^{\perp}) \times U(\mathcal{F}_i)$ agit irréductiblement. Ainsi à une constante multiplicative près, la différentielle cherchée est donnée par

$$X \mapsto \pi_i(0)X(Id - \pi_i(0))$$

Posons $h_t = h \cdot (Id + \eta_t)$ avec $\eta_0 = 0$. Maintenant, si on choisit une base h-orthonormée $(e_j^0)_{j=1,..,r}$ dont les r_i premiers vecteurs engendrent $\mathcal{F}_i$, alors la nouvelle base $(e_j^t)_{j=1,..,r}$ h_t-orthonormale est donnée par

$$R(e_j^t) = (e_i^0) \tag{6.1}$$

où R est l'unique matrice triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux strictement positifs qui vérifie la relation $RR^{*_{h_t}} = Id + \eta_t$. Maintenant, en différentiant (6.1) en $t = 0$, on trouve pour $j \leq r_i$,

$$\left(de_j^t\right)_{t=0} = -\frac{1}{2}d\left(\eta_0\right)_{jj} e_j^0 - \sum_{k<j} d\left(\eta_0\right)_{jk} e_k^0.$$

Ainsi en différentiant h_t en $t = 0$, il vient

$$d\left(\sum_{j=1}^{r_i} e_j^t \otimes e_j^{t\,*_{h_t}}\right)_{t=0} = \sum_{j=1}^{r_i} e_j^0 \otimes e_j^{0*_{h_0}} d\eta_0 - \sum_{j=1}^{r_i} e_j^0 \otimes e_j^{0*_{h_0}} d\eta_0 \sum_{k=1}^{r_i} e_k^0 \otimes e_k^{0*_{h_0}},$$

ce qui permet de conclure. □

Maintenant, par simple application du lemme précédent, il vient :

Lemme 6.1.2. *Pour tout m-uplet $\boldsymbol{\tau}_i$ de réels (non nécessairement positifs) et tout $\boldsymbol{\eta} \in End(\mathcal{F})$ hermitien, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_i \pi_{h\cdot(Id+\boldsymbol{\eta}),i}^{\mathscr{F}} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} + \Pi_h^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{O}(\boldsymbol{\eta}^2)$$

où l'on a posé l'endomorphisme :

$$\Pi_h^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\eta} \mapsto \sum_{i=1}^{m} \tau_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}} \boldsymbol{\eta} \left(Id - \pi_{h,i}^{\mathscr{F}}\right).$$

Ici $\mathbf{O}(\boldsymbol{\eta}^2)$ est un endomorphisme hermitien tel que sa norme d'Hilbert-Schmidt soit majorée par $O(\|\boldsymbol{\eta}\|_{C^0}^2)$.

6.2 Résolution d'une certaine équation elliptique

Nous aurons besoin des identités Kähler classiques :

Lemme 6.2.1. *Sur une variété kählérienne, pour un fibré holomorphe hermitien E dont la courbure de Chern est F_E, nous avons les relations de commutation*

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^* \qquad [\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^* \qquad \Delta_{\bar{\partial}} = \Delta_{\partial} + [\sqrt{-1}F_E, \Lambda].$$

Dans la suite, nous devrons supposer que les $\{\tau_1, ..., \tau_m\}$ sont nécessairement positifs.

Lemme 6.2.2. *Soit $\mathscr{F}$ une filtration holomorphe simple au dessus de M et $\Psi : End(\mathcal{F}) \to End(\mathcal{F})$ un opérateur auto-adjoint positif d'ordre zéro. Alors, pour tout métrique hermitienne $h \in Met(\mathcal{F})$, il est toujours possible de trouver une solution lisse et qui préserve la filtration au système linéaire elliptique*

$$\Lambda_\omega \overline{\partial}\partial \mathsf{Q}' + \Psi(\mathsf{Q}') = \mathsf{Q}$$

pour tout endomorphisme lisse Q tel que $\mathsf{Q}(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_i$ et l'on ait $\int_M \mathrm{tr}(\mathsf{Q})dV = 0$. De plus, si $\mathscr{F}$ est une filtration holomorphe telle qu'il existe sur $\mathcal{F}$ une métrique h faiblement $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein, et si l'on a posé

$$\Psi : U \mapsto \Pi_h^{\mathscr{F},\boldsymbol{\tau}}(U) \tag{6.2}$$

alors Q est auto-adjoint si et seulement si Q' est auto-adjoint.

Démonstration. Il suffit de voir que l'opérateur $\Lambda_\omega\overline{\partial}\partial + \Psi$ qui est elliptique (d'ordre 2) auto-adjoint positif (les τ_i sont positifs), est de noyau trivial. Regardons le noyau de cet opérateur : $(\partial^*\partial)\, U = 0$ implique $|\partial U|_h = 0$, c'est à dire puisque $\mathscr{F}$ est simple, $U = \gamma Id$ avec γ constant sur M. Maintenant si $Id \in \ker\Psi$, alors par alternative Fredholm, le système elliptique admet bien une solution si $\langle Id, Q\rangle = \int_M \mathrm{tr}(\mathsf{Q})dV = 0$. L'unicité est évidente si l'on impose la condition $\int_M \mathrm{tr}(\mathsf{Q}')dV = 0$. Si, $Id \notin \ker\Psi$, alors le système admet une unique solution.
L'opérateur défini par (6.2) est auto-adjoint et positif. Par ailleurs, en appliquant à nouveau les identités Kähler, nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}\partial\mathsf{Q}'^* &= \Delta_\partial \mathsf{Q}'^* \\
&= -\left(\Delta_{\bar{\partial}}\mathsf{Q}'\right)^* \\
&= \left(\Delta_\partial \mathsf{Q}' - [\sqrt{-1}\Lambda F_h, \mathsf{Q}']\right)^* \\
&= \left(\Delta_\partial \mathsf{Q}' - [\sum_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}}, \mathsf{Q}']\right)^*
\end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$\left(\sqrt{-1}\Lambda\left(\overline{\partial}\partial\mathsf{Q}'\right) + \sum_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}}\mathsf{Q}'\right)^* = \sqrt{-1}\Lambda\left(\overline{\partial}\partial\mathsf{Q}'^*\right) + \sum_i \pi_{h,i}^{\mathscr{F}}\mathsf{Q}'^*$$

puis

$$\left(\sqrt{-1}\Lambda\left(\overline{\partial}\partial \mathsf{Q}'\right) + \Psi(\mathsf{Q}')\right)^* = \sqrt{-1}\Lambda\left(\overline{\partial}\partial \mathsf{Q}'^*\right) + \Psi(\mathsf{Q}'^*)$$

et par unicité de la solution, nous obtenons que Q' est hermitien défini positif si et seulement si Q l'est. □

“ *What good or evil angel bid*
Me stop exactly when I did ?
What would have happened had I gone
A kilometre further on ? ”

W.H Auden, "Walks"

Bibliographie

[AC-GP1] L. Álvarez-Cónsul, O. García-Prada, *Dimensional reduction, $SL(2,\mathbb{C})$-equivariant bundles and stable holomorphic chains*, Int. J. of Math. 12, 159–201, (2001).

[AC-GP2] L. Álvarez-Cónsul, O. García-Prada, *Hitchin-Kobayashi correspondence, quivers, and vortices*, Comm. Math. Phys. 238, 1–33, (2003).

[AC-GP3] L. Álvarez-Cónsul, O. García-Prada, *Dimensional reduction and quiver bundles*, J. reine angew. Math. 556, 1–46, (2003).

[A-B] M.F. Atiyah, R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 308 no 1505, 523–615 (1983).

[Au] T. Aubin, *Some non linear problems in Riemannian geometry*, Springer (1998).

[Ba] D. Banfield, *Stable pairs and principal bundles*, Quart. J. Math. 51, 417–436, (2000).

[B] B. Berndtsson, *Bergman kernels related to hermitian line bundles over compact complex manifolds*, Contemp. Math. 332, 1–17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2003).

[Be] A. Bertram, *Towards a Schubert calculus for maps from a Riemann surface to a Grassmannian*, Internat. J. Math. 5, 811–825, (1994).

[B-D-W] A. Bertram, G. Daskalopoulos, R. Wentworth, *Gromov invariants for holomorphic maps from Riemann surfaces to Grassmannians*, J. Amer. Math. Soc. 9, 529–571, (1996).

[Bi] O. Biquard, *Métriques kählériennes à courbure scalaire constante*, Séminaire Bourbaki 938, Novembre (2004).

[Bra1] S.B. Bradlow, *Special Metrics and Stability for Holomorphic Bundles with Global Sections*, J. Diff. Geom. 33, 169–214, (1991).

[Bra2] S.B. Bradlow, *Hermitian-Einstein inequalities and Harder-Narasimhan filtrations*, Internat. J. Math. 6, 645–656, (1995).

[B-GP1] S.B. Bradlow, O. García-Prada, *Non-abelian monopoles and vortices. Geometry and physics* (Aarhus, 1995), 567–589, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 184, Dekker, New York, (1997).

[B-GP2] S. Bradlow, O. García-Prada, *Stable triples, equivariant bundles and dimensional reduction* Math. Ann. 304, 225–252 (1996).

[B-GP3] S. Bradlow, O. García-Prada, *A Hitchin-Kobayashi correspondence for coherent systems on Riemann surfaces*, J. London Math. Soc. 60, 155–170 (1999).

[B-G-K] S. Bradlow, J. Glazebrook, F. Kamber, *A new look at the vortex equations and dimensional reduction*. Geometry, topology and physics (Campinas, 1996), 83–106, de Gruyter, Berlin, (1997).

[Bry] J. Bryan, *Symplectic geometry and the relative Donaldson invariants of* $\overline{\mathbb{CP}}^2$, Forum Math. 9, 325–365 (1997).

[Bu1] N.P. Buchdahl, *Hermitian-Einstein connections and stable vector bundles over compact complex surfaces*, Math. Ann. 280, 625–648 (1988).

[Bu2] N.P. Buchdahl, *Sequences of stable vector bundles over compact complex surfaces*, J. Geom. Anal. 9, 391–428 (1999).

[Bu3] N.P. Buchdahl, *Blowups and Gauge fields*, Pacif. J. of Math. 196, 69–111 (2000).

[CS] A. Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Math. 1764, Springer (2001).

[Ca] D. Catlin, *The Bergman kernel and a theorem of Tian*, in 'Analysis and geometry in several complex variables', (Katata 1997), Birhauser, 1–23 (1999).

[C-G-S] K. Cieliebak, A.R Gaio, D. Salamon, *J-holomorphic curves, moment maps, and invariants of Hamiltonian group actions*, Internat. Math. Res. Notices 16, 831–882 (2000).

[De] J-P. Demailly, *L^2-estimates for the $\overline{\partial}$ operator on complex manifolds*, Notes de Cours d'école d'été, Institut Fourier (1996).

[Do1] S.K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London. Math. Soc. 50, 1–26 (1985).

[Do2] S.K. Donaldson, *Infinite Determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. 54, 231–247, (1987)

[Do3] S.K. Donaldson, *Geometry in Oxford 1980-85*, Asian J. Math. 3, (1999).

[Do4] S.K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings I*, J. Diff. Geom. 59, 479–522 (2001).

[D-K] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer, *The Geometry of four-manifolds*, Oxford Univ. Press, (1991).

[Dr] C. Drouet, *Approximation de métriques de Yang-Mills pour un fibré E à partir de métriques induites de $H^0(X, E(n))$*, Thèse, arXiv : math.DG/9903148, Laboratoire E.Picard, Toulouse III Univ. (1999).

[GP] O. García-Prada, *Dimensional reduction of stable bundles, vortices and stable pairs*, Int. J. Math. 5, 1–52 (1994).

[Gi] D. Gieseker, *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Ann. of Maths 106, 45–60 (1977).

[G-S] T. Gómez, I. Sols, *Stable tensors fields and moduli space of principal G-sheaves for classical groups*, arXiv :math.AG/0103150 (2003).

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math. Springer-Verlag.

[H-H] P. Heinzner, A. Huckleberry, *Analytic Hilbert Quotients*, Several Complex Var. M.S.R.I. Publ. 37, (1999).

[Hi1] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. 55, 59–126 (1987).

[Hi2] N. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, Topology 31, (1992).

[Hi3] N. Hitchin, *The moduli space of complex Lagrangian submanifolds*, Asian J. Math. 3, (1999).

[H-L1] D. Huybrechts, M. Lehn, *Stable pairs on curves and surfaces*, J. Alg. Geom 4, 67–104 (1995).

[H-L2] D. Huybrechts, M. Lehn, *Framed modules and their moduli*, Internat. J. Math. 6, 297–324 (1995).

[H-L3] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of moduli of sheaves*, Pub. of Max-Planck-Institüt Bonn, (1997).

[K-N] G. Kempf, L. Ness, *The length of vectors in representation spaces*, Lect. Notes in Math 732, Springer.

[Ki1] F.C. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton Univ. Press, (1984).

[Ko] S. Kobayashi, *Differential Geometry of complex vector bundles*, Princeton Univ. Press, (1987).

[LeP1] J. Le Potier, *Systèmes cohérents et structures de niveau*, Astérisque 214, (1993).

[LeP2] J. Le Potier, *Lect. on vector bundles*, Cambridge studies in Adv. Math., (1997).

[Leu] N.C. Leung, *Einstein type metrics and stability on vector bundles*. J. Differential Geom. 45, 514–546 (1997).

[Lu] Z. Lu, *On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch*, Amer. J. Math 122, 235–273 (2000).

[Luo] Z. Luo, *Geometric criterion for the Mumford-Gieseker stability of polarized manifold*, J. Diff. Geom. 49, 577–599 (1998).

[L-T1] M. Lübke, A. Teleman, *The Kobayashi-Hitchin correspondance*, World Scientific (1995).

[L-T2] M. Lübke, A. Teleman, *The Universal Kobayashi-Hitchin correspondance on hermitian manifolds*, arxiv :math.DG/0402341 (2004).

[M] C. Margerin, *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein*, Séminaire Bourbaki 683, (1987).

[Ma] M. Maruyama, *Moduli of stable sheaves I & II*, J.Math. Kyoto Univ. 17 & 18, (1977).

[Mok] N. Mok, *Metric rigidity theorems on hermitian locally symmetric manifolds,* World Scientific, Series in Pure Math. 6, (1989).

[M-F-K] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, 3rd Edition, Springer-Verlag, (1994).

[MR1] I. Mundet i Riera, *A Hitchin-Kobaysahi correspondance for Kähler fibrations,* J. reine angew. Math. 528, 41–80 (2000).

[MR2] I. Mundet i Riera, *Hamiltonian Gromov-Witten invariants*, Topology 42, 525–553 (2003).

[Oe] J. Oesterle, *Construction de la variété de modules des fibrés vectoriels stables sur une courbe algébrique lisse*, dans "Module des fibrés stables sur les courbes algébriques", Notes de l'ENS, Progress in Math. Birkhäuser, (1983).

[O-T1] C. Okonek, A. Teleman, *The coupled Seiberg-Witten equations, vortices, and moduli spaces of stable pairs*, Internat. J. Math. 6, 893–910 (1995).

[O-T2] C. Okonek, A. Teleman, *Master spaces and the coupling principle : from geometric invariant theory to gauge theory*, Comm. Math. Phys. 205, no. 2, 437–458 (1999).

[O-T3] C. Okonek, A. Teleman, *Recent developments in Seiberg-Witten Theory and complex Geometry*, Sev. Compl. Var. MSRI Pub, Vol 37, (1999).

[O-T4] C. Okonek, A. Teleman, *Gauge theoretical equivariant Gromov-Witten invariants and the full Seiberg-Witten invariants of ruled surfaces*, Comm. Math. Phys. 227, 551–585 (2002).

[O-T5] C. Okonek, A. Teleman, *Gauge theoretical Gromov-Witten invariants and virtual fundamental classes*, The Fano Conference, 591–623, Univ. Torino, Turin (2004).

[O-S-T] C. Okonek, A. Schmitt, A. Teleman, *Master spaces for stable pairs*, Topology 38, 117–139 (1999).

[Sc1] A. Schmitt, *A universal construction for moduli spaces of decorated vector bundles over curves*, Transform. Groups 9, 167–209 (2004).

[Sc2] A. Schmitt, *Moduli problems of sheaves associated with oriented trees*, Algebr. Represent. Theory 6, 1–32 (2003).

[Seg] G. Segal, *Equivariant K-theory*, Math. Publi. I.H.E.S 34, 129–151 (1968).

[Ses] C.S. Seshadri, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérique 96, (1982).

[Sim] C. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. 1, 867–918 (1988).

[Siu] Y-T. Siu, *Lectures on Hermite-Einstein metrics for stable vector bundles and Kähler-Einstein metrics*, Birkhaüser, (1987).

[Tau] C.H. Taubes, *Arbitrary N-vortex solutions to the first order Ginzburg-Landau equations*, Commun. Math. Phys. 72, 277–292 (1980).

[Te] A. Teleman, *Symplectic stability, analytic stability in non algebraic complex geometry*, ArXiv :CV/0309230, à paraître dans Int. J. Math (2003).

[Th] M. Thaddeus, *Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula*, Invent. Math. 117, 317–353 (1994).

[T1] G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with* $c_1(M) > 0$, Invent. Math. 89, 225–246 (1987).

[T2] G. Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Diff. Geom, 32 (1990).

[V] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés 10, SMF (2002).

[W1] X. Wang, *Balance point and stability of vector bundles over a projective manifold*, Math. Res. Lett. 9, 393–411 (2002).

[W2] X. Wang, *Canonical metrics on stable vector bundles*, Comm. Anal. Geom. 13, 253–285 (2005).

[Ze] S. Zelditch, *Asymptotics of holomorphic sections of powers of a positive line bundle*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1997–1998, Exp. No. XXII, École Polytech., Palaiseau, (1998).

[Zh] S. Zhang, *Heights and reductions of semi-stable varieties*, Compositio Math. 104, 77–105 (1996).

Julien Keller

Université Paul Sabatier, MIG
Laboratoire Emile PICARD. UMR 5580
31062 TOULOUSE Cedex 9
FRANCE
Email : keller@picard.ups-tlse.fr, keller@cict.fr

Vortex type equations and canonical metrics

Abstract

Let M be a smooth projective manifold. Let $\mathcal{F}$ be a filtered holomorphic vector bundle over M. We introduce a notion of Gieseker stability for such objects and relate it to an analytic condition in terms of hermitian metrics on $\mathcal{F}$, called balanced metrics by S.K Donaldson, that come from the world of Geometric Invariant Theory (G.I.T). If there is a metric h on $\mathcal{F}$ that satisfies the $\boldsymbol{\tau}$-Hermite-Einstein equation studied by Álvarez-Cónsul and García-Prada :

$$\sqrt{-1}\Lambda F_h = \sum_i \widetilde{\tau}_i \pi^{\mathscr{F}}_{h,i}$$

then we prove that the sequence of balanced metrics exists, converges and its limit, up to a conformal change, is a smooth hermitian metric on $\mathcal{F}$ that satisfies the previous equation. As a corollary, we give by dimensional reduction a theorem of approximation for Vortex equations introduced by Bradlow and their generalizations to coupled Vortex equations.